...schen

Theoretische Physik

I

von

Dr. Gustav Jäger

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite!

Sammlung Göschen

Theoretische Physik

I

Mechanik und Akustik

von

Dr. Gustav Jäger

Professor der Physik an der Universität Wien

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1898

Druck und Einband von Carl Rembold & Co. in Heilbronn.

Inhalt.

Vorwort.

In dem vorliegenden, drei Bändchen umfassenden kleinen Werk ist der Versuch gemacht, die Grundzüge der theoretischen Physik mit Hilfe der höheren Analysis darzustellen. Es wurde damit der Zweck verfolgt, allen jenen, welche dereinst Gelegenheit hatten, Physik zu hören und in ihrem Beruf anzuwenden, für geringe Kosten ein leicht verständliches Nachschlagebuch der theoretischen Physik zu bieten, wobei in erster Linie an die Bedürfnisse der Techniker in den verschiedensten Berufen gedacht wurde. Ferner wendet sich das Werkchen an alle jene, welche in ihrer rein wissenschaftlichen Thätigkeit der Physik als Nebenwissenschaft nicht entbehren können. Es dürfte daher Physiologen, Chemikern, Geologen, Meteorologen, Geographen u. s. w. willkommen sein. Schliesslich soll es den Studierenden der Physik selbst zur Vorbereitung und Erleichterung des Studiums der oft nur schwer verständlichen Vorlesungen dienen. Darnach ezgab sich als Hauptaufgabe, aus dem grossen Gebiet der theoretischen Physik den Stoff gewissenhaft auszuwählen und in einfacher, klarer Weise darzustellen. Auf subtile theoretische Erörterungen, auf lange Deduktionen mit einem verhältnismässig geringfügigen Endresultat, auf Fragen, welche noch Streitgebiet der

Wissenschaft sind, konnten wir uns nicht einlassen. Umsomehr bemühten wir uns, alle jene Begriffe, welche in konkreten Fällen immer wieder auftauchen, so wiederzugeben, dass sich der Studierende deren selbstständige Handhabung leicht aneignen kann. Wo es daher möglich war, wurde jeder allgemeine Satz durch seine Anwendung auf häufig aufstossende Beispiele illustriert.

Freilich wird sich eine gewisse subjektive Färbung nicht haben vermeiden lassen. Als ehemaliger Schüler J. Stefans, eines Meisters leicht fasslicher Darstellung, gab sich der Verfasser möglichst Mühe, dessen Ton zu treffen, was allerdings auf dem zur Verfügung stehenden kargen Raum nur teilweise erreicht werden konnte.

Mechanik eines Massenpunktes.

§ 1. Grundbegriffe — Bewegung — Bahn — Weg.

Mechanik ist die Lehre von den Bewegungserscheinungen, welche sich auf die Begriffe des Raums, der Zeit und der Masse zurückführen lassen.

Ein Punkt bewegt sich, wenn er zu verschiedenen Zeiten gegenüber einem festgelegten Raum verschiedene Lagen einnimmt. Die Verbindungslinie sämtlicher Lagen nennt man die Bahn des Punkts. Nach der Gestalt derselben unterscheiden wir gradlinige und krummlinige Bewegungen. Die Länge der Bahn, welche von dem Punkt in der Zeit t zurückgelegt wird, nennen wir den Weg s.

§ 2. Geschwindigkeit — gleichförmige und ungleichförmige Bewegung.

Weg und Zeit stehen also mit einander in Beziehung, was wir durch die Gleichung

$$s = f(t)$$

darstellen können. $f(t)$ kann nun sehr mannigfaltig sein. Der einfachste Fall ist

$$s = f(t) = vt,$$

wobei v eine Constante ist. Die Bewegung, welche dieser Gleichung entspricht, nennen wir eine gleichförmige, weil in gleichen Zeiten auch immer gleiche Wege zurückgelegt werden. Der Weg v, welcher in der Sekunde beschrieben wird, heisst die Geschwindigkeit des Punktes. Wir messen also die Geschwindigkeit v durch das Verhältnis des Wegs zur zugehörigen Zeit,

$$v = \frac{s}{t}.$$

Da die Geschwindigkeit nur eine Verhältniszahl ist, so ist bei deren Bestimmung die absolute Grösse des Wegs bezgl. der Zeit ganz gleichgiltig. Unsere Definition der Geschwindigkeit gilt demnach auch für einen unendlich kleinen Weg ds, woraus

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad (1)$$

folgt. Auf diese Weise sind wir in der Lage, für einen ganz bestimmten Punkt der Bahn die Geschwindigkeit anzugeben, und erkennen weiter, dass sie sich von Punkt zu Punkt ändern kann; in letzterem Fall haben wir dann eine ungleichförmige Bewegung.

§ 3. Beschleunigung — gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wir sahen, dass bei der ungleichförmig beschleunigten Bewegung nicht nur der Weg, sondern auch die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit ist. Wählen wir wiederum die einfachste Funktion, setzen wir also

$$v = bt,$$

unter b abermals eine Constante verstanden, so erhält in jeder Sekunde die Geschwindigkeit den Zuwachs b, welchen wir die Beschleunigung nennen. Für unser gewähltes Beispiel ist die Beschleunigung also eine constante Grösse. Eine derartige Bewegung nennt man deshalb eine gleichförmig beschleunigte.

Auch die Beschleunigung

$$b = \frac{v}{t}$$

ist nur eine Verhältniszahl. Wir können deshalb hier ganz dieselbe Ueberlegung wie bei der Geschwindigkeit machen. Für eine bestimmte Zeit, oder an einem bestimmten Punkt der Bahn ist demnach die Beschleunigung durch den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit gegeben. Wir erhalten so mit Berücksichtigung von (1) die Gleichung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \qquad (2)$$

und wir erkennen ohneweiters, dass auch die Bescheunigung im Allgemeinen eine Funktion der Zeit sein wird.

§ 4. Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung — resultierende Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Projicieren wir die jeweilige Lage eines sich bewegenden Punktes auf die drei Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so besitzen die drei Projektionen ebenfalls gewisse Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Bahnen der Projektionen sind dabei die drei Achsen. Ihre Geschwindigkeiten u, v, w, lassen sich genau wie oben entwickeln, ebenso ihre Beschleunigungen, f, g, h. Wir erhalten somit

$$u = \frac{dx}{dt}, \; v = \frac{dy}{dt}, \; w = \frac{dz}{dt};$$

$$f = \frac{d^2x}{dt^2},\ g = \frac{d^2y}{dt^2},\ h = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ist die Bahn des Punkts geradlinig und schliesst sie mit den Achsen die Winkel α, β, γ ein, so erkennt man ohneweiters, dass

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \beta,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \gamma,$$

ist. Gleicherweise erhält man die Beschleunigung nach den drei Achsen, indem man die wirkliche Beschleunigung mit den Richtungscosinus der Bahn multipliziert.

Man sieht weiter ein, dass ein Punkt, welcher die Geschwindigkeiten u, v, w parallel zu den drei Achsen gleichzeitig besitzen soll, nur eine Geschwindigkeit von ganz bestimmter Grösse und Richtung im Raum haben kann. Man nennt diese letztere die resultierende Geschwindigkeit der Komponenten u, v, w. Ganz dasselbe gilt wiederum auch für die Beschleunigung.

§ 5. Parallelogramm der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen.

Was für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gilt, können wir ohneweiters auf ein schiefwinkeliges übertragen.

Haben wir bloss zwei Geschwindigkeiten, welche gleichzeitig ein Punkt annehmen soll, so erhalten wir die resultierende Geschwindigkeit, wenn wir von dem Punkt aus zwei Gerade ziehen, welche in Richtung und

Grösse den Geschwindigkeiten entsprechen. Ergänzen wir diesen Winkel zu einem Parallelogramm, so giebt die von dem beweglichen Punkt aus gezogene Diagonale die Grösse und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit an.

§ 6. Beharrungsvermögen — Kraft — Massenpunkt — Kräfteparallelogramm.

Bewegt sich ein Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig vorwärts, so sagen wir, er sei frei von allen Kräften, hingegen er sei von Kräften beeinflusst, wenn die geradlinige, gleichförmige Bewegung gestört wird. Während uns die gleichförmige, geradlinige Bewegung zum Begriff des Beharrungsvermögens führt, nennen wir jede Ursache der Aenderung einer derartigen Bewegung eine Kraft.

Die Erfahrung lehrt, dass nicht jeder Körper in gleicher Weise von ein und derselben Kraft beeinflusst wird. Während der eine eine grosse Beschleunigung erfährt, gewinnt der andere nur eine geringe. Wir schreiben diesen Unterschied der Masse der Körper zu. Je grösser seine Masse, desto kleiner die Beschleunigung, welche dem Körper eine Kraft zu erteilen vermag. Das Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung b kann daher als Mass der Kraft P gelten. Wir erhalten somit die wichtige Gleichung

$$P = mb = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Die Masse eines Körpers haben wir als eine von der Lage desselben und der Zeit völlig unabhängige

Grösse zu denken. Sie ist nichts als ein konstanter Faktor der Beschleunigung.

Ist der Körper geometrisch sehr klein, so können wir uns seine ganze Masse in einem Punkt vereinigt denken, den wir dann einen Massenpunkt nennen. Nur Massenpunkte wollen wir vorläufig der Betrachtung unterziehen.

Wie von einer Zerlegung und Zusammensetzung der Beschleunigungen, kann man auch von solchen der Kräfte sprechen, was uns unmittelbar auf das Kräfteparallelogramm und ähnliches führt. Wir können jede Kraft P in drei auf einander senkrechte Komponenten X, Y, Z zerlegen, welche parallel den Achsen eines Koordinatensystems wirken. Das Mass der Teilkräfte ist dann gegeben durch

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

§ 7. **Wurfbewegung — Freier Fall.**

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft von bestimmter Richtung, so kann dessen Bewegung nur in einer Ebene stattfinden, da zur ursprünglichen Bewegungsrichtung nur noch die Richtung der Kraft hinzukommt.

Eine solche Kraft ist die Schwerkraft. Bloss unter dem Einfluss der Schwerkraft muss demnach die Bahn geworfener Körper eine ebene Kurve sein. Wurfrichtung und Richtung der Schwere bestimmen diese Ebene, in welche wir ein rechtwinkeliges ebenes Koordinatensystem so legen wollen, dass die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal ist.

Die Schwerkraft Y wirkt parallel zur y-Achse. Parallel zu dieser wird also die Bewegung des Körpers durch die Gleichung

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

bestimmt. Parallel zur x-Achse haben wir

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Aus der Erfahrung wissen wir, dass die Schwerkraft sich innerhalb eines beschränkten Raumes weder mit der Zeit, noch mit dem Ort ändert, und dass sie immer proportional der Masse m des Körpers ist, auf welchen sie wirkt. Wir können daher

$$Y = -mg$$

setzen, wenn die Constante g die Beschleunigung der Schwere ist. Y ist negativ, weil die y-Achse nach oben gerichtet ist, während die Schwere entgegengesetzt nach unten wirkt. Unsere Bewegungsgleichungen reduzieren sich daher auf

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g.$$

Aus der ersten finden wir

$$\frac{dx}{dt} = a \qquad (3), \qquad x = at + a' \qquad (4),$$

aus der zweiten

$$\frac{dy}{dt} = -gt + b \qquad (5), \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + bt + b' \qquad (6).$$

Die vier Constanten a, a′, b und b′ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, d. h. aus der Lage, Geschwindigkeit und Richtung des Körpers zur Zeit $t = 0$. Es ist demnach a die Geschwindigkeit parallel zur x-Achse, a′ die Abscisse, b die Geschwindigkeit parallel zur y-Achse und b′ die Ordinate unseres Körpers zu Beginn seiner Bewegung. Wir können durch passende Wahl des Koordinatensystems die Bewegung immer im Ursprung desselben beginnen lassen. Es ist dann $a' = b' = 0$. Es genügen jetzt zur Bestimmung der Lage des Punkts die Gleichungen

$$x = at \text{ und } y = bt - \frac{gt^2}{2}.$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen die Zeit t, so erhalten wir die Bahngleichung

$$y = \frac{bx}{a} - \frac{gx^2}{2a^2}.$$

Es beschreibt daher ein geworfener Körper, welcher sich bloss unter dem Einfluss der Schwere befindet, eine Parabel.

y wird ausser im Anfang noch ein zweites Mal gleich Null, wenn $x = \frac{2ab}{g}$ wird. Dies ist die Wurfweite. Die Wurfhöhe hat der Körper nach Zurücklegung der halben Wurfweite erreicht, sie ist demnach $y = \frac{b^2}{2g}$.

Die Gleichungen für den senkrechten Wurf erhalten wir aus jenen des schiefen, wenn wir einfach $a = 0$ setzen. Für den horizontalen Wurf ist hingegen b = 0 anzunehmen. Die Bewegungsgleichung wird dann

$$y = -\frac{gx^2}{2a^2}.$$

Wählen wir schliesslich $a = b = 0$, so ergeben (5) und (6) die Gesetze des freien Falls.

Zu gebräuchlichen Formeln gelangen wir auch, wenn wir anstatt der Componenten a und b die Anfangsgeschwindigkeit c selbst und den Winkel α einführen, welchen die Anfangsrichtung mit der x-Achse, d. i. dem Horizont, bildet. Es ist darnach

$$a = c \cos \alpha, \; b = c \sin \alpha,$$

die Wurfweite

$$x = \frac{2c^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha,$$

die Wurfhöhe

$$y = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Letztere erreicht also ihren grössten Wert für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn wir bei sonst gleicher Anfangsgeschwindigkeit den Körper senkrecht empor werfen. Die Wurfweite lässt sich wegen

$$\sin 2\,\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

auch

$$x = \frac{c^2}{g} \sin 2\,\alpha$$

schreiben. Ihr grösster Wert wird für $\alpha = \frac{\pi}{4}$, d. i. bei 45^0 Elevation erreicht.

Jede kleinere Wurfweite kann man durch

zwei verschiedene α erzielen, da bei $\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$ sich derselbe Wert für sin 2 α ergibt, wie bei $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$

§ 8. Krummlinige Bewegung — Zentripetalbeschleunigung — Fliehkraft.

Die Beschleunigung, welche ein Massenpunkt in irgend einem Punkt einer krummlinigen Bahn besitzt, können wir in eine Komponente, die mit der Tangente der Kurve zusammenfällt, und in eine Komponente senkrecht darauf, also nach der Richtung der Normalen zerlegen. Wir betrachten einen Massenpunkt, welcher sich von M (Fig. 1) nach M′ bewegt. Seine Geschwindigkeit in M sei v, in M′ v′. Die Komponente der Geschwindigkeit parallel zur Richtung MN ist demnach in M′ v cos φ, senkrecht dazu v sin φ. Auf dem Weg von M nach M′ verstreicht die Zeit τ. Die Beschleunigung in der Richtung der Tangente ist sodann

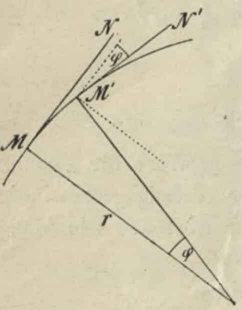

Fig. 1.

$$b_\tau = \lim \frac{v' \cos \varphi - v}{\tau},$$

in der Richtung der Normale

$$b_n = \lim \frac{v' \sin \varphi}{\tau},$$

da in M die Geschwindigkeit in der Richtung der

Normalen gleich Null ist. Beim Grenzübergang wird $\cos \varphi = 1$ $\sin \varphi = \varphi$. Es ist demnach

$$b_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad b_n = \frac{v^2}{r}.$$

Hat der Massenpunkt die Masse m, so können die auf ihn wirkenden Kräfte in eine *Tangential-* und eine *Normalkraft* zerlegt werden. Erstere wird gegeben sein durch

$$T = m \frac{d^2 s}{dt^2},$$

letztere durch

$$N = \frac{m v^2}{r}.$$

Diese nennt man auch *Zentripetalkraft* und die dadurch hervorgerufene ebenso grosse Gegenkraft des beweglichen Massenpunkts dessen *Fliehkraft*.

§ 9. Das Pendel — schwingende Bewegung.

Eine kleine schwere Kugel von der Masse m sei an einem sehr dünnen festen Faden aufgehängt. Die Masse des Fadens soll gegen jene der Kugel vernachlässigt werden können. Bringen wir die Kugel aus ihrer Ruhelage und geben sie dann frei, so beginnt sie zu schwingen. Wir betrachten bloss die Schwingungen in einer *Vertikalebene*. Diese sind vorhanden, wenn die Kugel keinen seitlichen Stoss erhält. Auf die Kugel in M (Fig. 2) wirkt die Schwerkraft

$$MN = - mg.$$

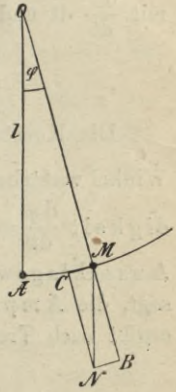

Fig. 2.

Diese zerlegen wir in eine Komponente in der Richtung des gespannten Fadens, welcher durch die Spannung des Fadens das Gleichgewicht gehalten wird, und in eine Komponente senkrecht darauf. Diese ist

$$MC = - mg \sin \varphi,$$

das ist die Kraft, welche die Kugel in die Ruhelage A zurückzutreiben sucht. Die Bewegungsgleichung wird daher sein

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - mg \sin \varphi. \qquad (7)$$

Hier ist der Weg $s = l\varphi$, wobei wir l die Pendellänge nennen. Wir wollen ferner nur kleine Schwingungen voraussetzen, so dass $\sin \varphi = \varphi$ angenommen werden kann. Dann wird Gleichung (7)

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \varphi.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{d}{dt}$ dt und integrieren wir, so folgt

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = - \frac{g}{l} \varphi^2 + A.$$

Die Konstante A wird $\frac{g}{l}\varphi_0{}^2$, wenn wir unter φ_0 jenen Winkel verstehen, bei welchem die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ wird. Das heisst φ_0 ist der grösste Ausschlagswinkel des Pendels oder, wie man auch sagt, die Amplitude der Schwingung. Dieser Wert ergibt nach Trennung der Variablen

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0{}^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, dt.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} = t\sqrt{\frac{g}{l}} + B,$$

oder

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\right).$$

Die Konstante B ergibt sich aus den Anfangsbedingungen. Ist für $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, so muss $\sin B = 1$, d. h. $B = \frac{\pi}{2}$ sein. Mithin ist

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right).$$

Diese Gleichung bestimmt die Bewegung des Pendels.

Wollen wir die Winkelgeschwindigkeit für eine beliebige Zeit t kennen lernen, so brauchen wir bloss den Winkel nach der Zeit zu differenzieren, also

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\;\varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$$

zu bilden.

Für $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \pi$ ist $\varphi = -\varphi_0$, d. h. das Pendel hat eine Schwingung von einer Seite zur andern gemacht. Die dazu benötigte Zeit, die Schwingungsdauer, ist also

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 10. Pendel im widerstehenden Mittel — gedämpfte Schwingung — logarithmisches Decrement.

Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass das Pendel in einem widerstehenden Mittel schwingt, u. z. soll der Widerstand w proportional der

Geschwindigkeit der Pendelkugel sein. Wir können ihn also als eine negative Kraft von der Form

$$w = -\alpha \frac{ds}{dt}$$

darstellen. Die Pendelgleichung wird somit

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin\varphi - \alpha \frac{d\varphi}{dt}.$$

Wir setzen wiederum nur kleine Schwingungen voraus, können also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi - \frac{\alpha}{m}\frac{d\varphi}{dt}$$

schreiben. Wir wollen $\frac{g}{l} = a^2$, $\frac{\alpha}{m} = 2b$ einführen. Es ergibt sich dann

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2b\frac{d\varphi}{dt} + a^2\varphi = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

indem $\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$ und $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ist, so dass sich die Gleichung auf $\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0$ reduziert, woraus

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

folgt. Diese Grösse ist nur reel, wenn $b > a$ ist, d. h. wenn der Widerstand, den die schwingende Kugel erfährt, ein sehr grosser ist. Dann kommt aber überhaupt keine Schwingung zustande, sondern die Kugel nähert sich einfach allmählich der Ruhelage.

Ist hingegen $a > b$, dann ist λ komplex, indem

$$\lambda = -l \pm i\sqrt{a^2 - b^2}$$

wird. Die Bewegung des Pendels ist in diesem Fall nach bekannten Regeln gegeben durch

$$\varphi = A_1\, e^{-bt + it\sqrt{a^2 - b^2}} + A_2\, e^{-bt - it\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= e^{-bt}\,(C \cos \sqrt{a^2 - b^2}\; t + D \sin \sqrt{a^2 - b^2}\; t).$$

Wir haben demnach eine schwingende Bewegung von immer kleiner werdender Amplitude, eine sogenannte *gedämpfte* Bewegung.

Die *Schwingungsdauer* ist jetzt

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}.$$

Sie ist also *grösser* als beim widerstandsfreien Pendel.

Beginnt das Pendel mit einer Amplitude φ_0 zu schwingen, so ist nach n Schwingungen die Amplitude

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{-nb\tau}$$

Daraus folgt

$$b = \frac{l\varphi_0 - l\varphi_n}{n\tau}.$$

Diese Grösse nennt man das *logarithmische Dekrement*, doch wird auch das Produkt $b\tau$ häufig so genannt.

§ 11. Bewegungsgrösse — Zeitintegral der Kraft.

Lassen wir eine Kraft K während einer kleinen Zeit dt auf eine Masse m wirken, so wird sich deren Geschwindigkeit ändern, u. z. wird die Aenderung umso beträchtlicher ausfallen, je grösser die Kraft und je grösser dt ist. Die Gesamtänderung wird demnach dem

Produkt K dt proportional gesetzt werden können. Für eine endliche Zeit erhalten wir dann den Gesamteinfluss der Kraft auf die bewegliche Masse m, wenn wir $\int_0^t K\,dt$ bilden. Da nun

$$K = m\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\,v}{dt},$$

so

$$\int_0^t K\,dt = m\int_0^t \frac{d\,v}{dt} = m\,v - m\,v_0,$$

wenn die Geschwindigkeit zu Beginn v_0 und zu Ende der Zeit t v war.

Die Grösse m v nennt man die Bewegungsgrösse der Masse m. Die Einwirkung der Kraft durch eine gegebene Zeit auf eine bewegliche Masse m kann demnach durch die Differenz der Bewegungsgrössen zu Beginn und zu Ende dieser Zeit gemessen werden. Die Kraft ist also unmittelbar durch den Zuwachs der Bewegungsgrösse bestimmt, welchen das Bewegliche in der Sekunde erfährt.

Man nennt den Ausdruck $\int_0^t K\,dt$ auch das Zeitintegral der Kraft.

§ 12. **Stoss unelastischer und elastischer Kugeln.**

Vom Zeitintegral der Kraft können wir eine Anwendung beim Zusammenstoss zweier Kugeln machen. Wir setzen voraus, dass die Bewegung der Kugeln in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte erfolgt. Ihre Bewegungsgrössen seien vor dem Zusammenstoss m c bezügl m′ c′. Sind die Kugeln vollkommen unelastisch, so wirken sie beim Zusammenstoss so lange auf einander, bis sie dieselbe Geschwindigkeit u angenommen haben. Die neuen Bewegungsgrössen sind also m u und m′ u. Mithin hat die erste Kugel m (c—u) an Bewegungsgrösse verloren, während die zweite m′ (u—c′) gewonnen hat. Beide Grössen müssen einander gleich sein, da auf beide Kugeln ja dieselbe Kraft während derselben Zeit wirkt. Es ist also

$$m\,(c-u) = m'\,(u-c'),$$

oder die Geschwindigkeit nach dem Stoss

$$u = \frac{m\,c + m'\,c'}{m + m'}.$$

Sind die Kugeln vollkommen elastisch, so hört die Einwirkung derselben auf einander bei gleichwerdender Geschwindigkeit noch nicht auf, da die elastischen Kräfte die Kugeln wieder auseinandertreiben. Und zwar ist das Zeitintegral vor und nach dem Gleichwerden der Geschwindigkeit gleich gross. Sind die Endgeschwindigkeiten v und v′, so werden wir ausser der Gleichung

$$m\,(c-u) = m'\,(u-c')$$

auch noch die haben

$$m\,(u-v) = m'\,(v'-u),$$

woraus dann folgt

$$v = 2\,\frac{m\,c + m'\,c'}{m + m'} - c$$

und

$$v' = 2\,\frac{m\,c + m'\,c'}{m + m'} - c'.$$

Bei gleichen Massen wird

$$v = c', \ v' = c,$$

d. h. die Kugeln vertauschen nach dem Stoss ihre Gechwindigkeiten. Ist $m' = \infty$, was wir beim Stoss gegen eine feste Wand annehmen können, so wird

$$v = -c,$$

d. h. die Kugel wird mit unveränderter Geschwindigkeit zurückgeworfen.

§ 13. Arbeit — Wegintegral der Kraft — kinetische Energie.

Wirkt eine Kraft K auf ein Bewegliches, welches in der Richtung der Kraft den Weg ds zurücklegt, so nennt man Kds die Arbeit der Kraft K auf dem Weg ds. Das ist z. B. der Fall, wenn wir ein Gewicht von der Grösse K um die Höhe ds heben. $\int_{s_0}^{s_1} K\,ds$ ist demnach die Arbeit, welche die Kraft K von s_0 bis s_1 leistet. Es ist aber

$$\int_{s_0}^{s_1} K\,ds = m\int_{s_0}^{s_1} m\,\frac{d^2 s}{dt^2}\,ds = m\int_{s_0}^{s_1}\frac{dv}{dt}\,ds = m\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{dt}\,dv =$$

$$= m\int_{s_0}^{s_1} v\,dv = \frac{m v_1{}^2}{2} - \frac{m v_0{}^2}{2}.$$

Die Grösse $\frac{m v^2}{2}$ nennen wir die lebendige Kraft oder die kinetische Energie der Masse m. Es ist demnach die Aenderung der lebendigen Kraft des Beweglichen gleich der Arbeit, welche die Kraft auf dem Weg $s_1 - s_0$ geleistet hat.

Den Ausdruck $\int\limits_{s_0}^{s_1} K ds$ nennt man das Weginte- gral der Kraft.

Eine jede Kraft K können wir bekanntlich in drei senkrecht aufeinanderstehende Komponenten X, Y, Z zerlegen. Die Projektionen des Weges ds auf die Koordinatenachsen sind entsprechend dx, dy, dz. Lassen wir nun die Kraft K auf dem Wege ds wirken, so leisten die drei Kraftkomponenten die Arbeit Xdx, Ydy, Zdz. Wir können diese drei Grössen addieren und zwischen den Grenzen s_0 und s_1 integrieren. Wie leicht ersichtlich, ergiebt dies

$$\int\limits_{s_0}^{s_1}\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt=\int\limits_{s_0}^{s_1} m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]_{s_0}^{s_1}$$

$$=\frac{mv_1^{\,2}}{2}-\frac{mv_0^{\,2}}{2}.$$

Auch so können wir die Beziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft darstellen, was besonders dann am Platz ist, wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt m einwirken, und die verschiedenen Richtungen der Kräfte mit dem Weg des Beweglichen nicht zusammenfallen.

Haben die Kräfte die Resultierende K, welche mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel λ, μ, ν, einschliesst, während der Weg die Richtungswinkel α, β, γ, hat, so ist

$$X = K \cos \lambda,\ Y = K \cos \mu,\ Z = K \cos \nu,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \alpha = v \cos \alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \beta = v \cos \beta$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos \gamma = v \cos \gamma$$

und wir erhalten

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dz}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{s_0}^{s_1} Kv\, (\cos \lambda \cos \alpha$$

$$+ \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma)\ dt = \int_{s_0}^{s_1} K \cos \vartheta\, vdt$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} K \cos \vartheta ds,$$

wenn der Winkel zwischen der Richtung der resultierenden Kraft und dem Weg ϑ ist.

Sind also Kraft und Weg nicht gleich gerichtet, so ist die geleistete Arbeit gleich dem Produkt aus Kraft und Weg multipliziert mit dem Kosinus des von den Richtungen beider eingeschlossenen Winkels.

§ 14. Kraftfunktion — Potential — Gesetz der Erhaltung der Energie.

Es kommt in der Natur der Fall häufig vor, dass die drei Kraftkomponenten, welche auf einen Massenpunkt wirken, sich darstellen lassen durch

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, Y = \frac{\partial F}{\partial y}, Z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Wir nennen dann die Funktion F die Kraftfunktion. Der negative Wert davon

$$H = -F$$

ist das Potential der Kräfte.

Durch Einführung dieser Begriffe können wir unsere Arbeitsgleichung folgendermassen umgestalten. Es ist

$$\int_{s_0}^{s_1}\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt = \int_{s_0}^{s_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt = \int_{s_0}^{s_1}\frac{dF}{dt}\,dt = F_1 - F_0 = \frac{mv_1^{\,2}}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2}.$$

Die geleistete Arbeit ist also nicht nur der Aenderung der lebendigen Kraft, sondern auch der Aenderung der Kraftfunktion gleich.

Führen wir das Potential ein, so ergiebt sich

$$\frac{mv_1^{\,2}}{2} + H_1 = \frac{mv_0^{\,2}}{2} + H_0.$$

Die Summe zwischen kinetischer und potentieller Energie ist eine konstante Grösse. Man muss nämlich das Potential einer Energie gleichwertig erachten, weshalb man es auch potentielle Energie nennt. Der von uns zuletzt gewonnene Satz wird das Prinzip von der Erhaltung der Energie genannt.

§ 15. Fallbewegung auf willkürlicher Bahn.

Als Beispiel eines Potentials können wir die Funktion

$$H = mgz$$

ansehen, wenn wir unter g die Beschleunigung der Schwere auf die Masse m und unter z die Höhe verstehen, in welcher sich die Masse befindet. In der That ist dann

$$X = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad Y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad Z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg.$$

Ein Körper, welcher lediglich der Schwerkraft unterworfen ist, wird demnach der Gleichung gehorchen

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = \frac{mv_0^{\,2}}{2} + mg\,z_0 = \text{Const.}$$

Das heisst, in jeder besimmten Höhe z hat der Körper auch immer eine ganz bestimmte Geschwindigkeit v. Wie beschaffen dabei die Form der Bahn ist, auf der der Körper fällt oder steigt, ist ganz gleichgiltig.

Schreiben wir die Gleichung

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2} = mg(z - z_0),$$

so sehen wir ohne weiters, dass die zum Heben des Gewichts mg um die Höhe $z - z_0$ nötige Arbeit unmittelbar durch die Aenderung der lebendigen Kraft bestimmt ist.

§ 16. Keppler's Gesetze — Gravitationsgesetz.

Aus den Gesetzen, welche Keppler für die Planetenbewegung fand, schloss Newton, dass sich zwei Punkte von den Massen M und m und der Entfernung r mit einer Kraft anziehen, welche gleich ist

$$K = -\frac{hMm}{r^2}.$$

Es ist dies das berühmte Gravitationsgesetz. Wir wählen das negative Vorzeichen, weil die Kraft den Abstand r zu verkleinern sucht. h nennt man die Gravitationskonstante.

Wir denken uns M fest und m vollkommen frei beweglich. Da für die Lage der Bahn nur die Anfangsrichtung der Bewegung von m und die Richtung der Kraft, welche in der Verbindungsgeraden beider Massen liegt, massgebend ist, so findet die Bewegung in einer Ebene statt. Es genügt daher zur Bahnbestimmung ein ebenes Koordinatensystem, in dessen Ursprung die Masse M liegen soll. m habe die Koordinaten x, y, der Radiusvektor r schliesse mit der y-Achse den Winkel φ ein, dann ist

$$x, = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi.$$

Die Komponenten parallel zur x- und y-Achse sind

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{hMm}{r^2} \sin \varphi = -\frac{hMm}{r^2}\frac{x}{r},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{hMm}{r^2} \cos \varphi = -\frac{hMm}{r^2}\frac{y}{r}, \qquad (8)$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit y, die zweite mit x und subtrahieren sie vor einander, so erhalten wir

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

daher
$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = 2c,$$
wobei c konstant ist.

Schreitet unsere Masse m in der Zeit dt um die beiden Wegkomponenten dx und dy vorwärts, so beschreibt dabei der Radiusvektor r die Fläche
$$\frac{ydx - xdy}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2}.$$
In der Zeiteinheit wird er demnach die Fläche
$$\frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = c \tag{9}$$
bestreichen. Man nennt deshalb die Grösse c auch die **Flächengeschwindigkeit** der Masse m, die für unsern Fall eine constante **Grösse** ist.

Multiplizieren wir die Gleichungen (8) mit $\frac{dx}{dt}$ bezüglich $\frac{dy}{dt}$ und addieren sie, so ergiebt sich
$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\frac{hMm}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) =$$
$$= -\frac{hMm}{r^2}\frac{dr}{dt} = hMm\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$
da ja $x^2 + y^2 = r^2$, mithin
$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}$$
ist.

Ferner ist
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right) = v^2,$$
wobei also v die Geschwindigkeit der Masse m bedeutet. Sonach wird durch Integration

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hMm}{r} + A.$$

Die Konstante A finden wir leicht aus den Anfangsbedingungen, für welche die Geschwindigkeit v_0 und der Radiusvektor r_0 vorhanden sein soll. Somit ist

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{hMm}{r_0} + A,$$

woraus folgt

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{hMm}{r} - \frac{hMm}{r_0}. \tag{10}$$

So gestaltet sich der Satz von der Erhaltung der Energie für unsern speziellen Fall. $-\frac{hMm}{r}$ ist demnach das Potential der Kraft $-\frac{hMm}{r^2}$.

Den unendlich kleinen Weg ds können wir nun in zwei Komponenten in der Richtung des Radiusvektor und senkrecht darauf zerlegen. Diese sind dr und $rd\varphi$, und es besteht die Beziehung

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2,$$

mithin auch

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Aus Gleichung (9) und (10 folgt nun leicht

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{2c}{r^2} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{2hM}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}.$$

Diese Gleichung können wir noch verwandeln in

$$\frac{\pm \frac{2c\,dr}{r^2}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{h^2M^2}{4c^2} - \left(\frac{hM}{2c} - \frac{2c}{r}\right)^2}} = d\varphi$$

Wählen wir

$$v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{h^2M^2}{4c^2} - \alpha^2,$$

$$\frac{hM}{2c} - \frac{2c}{r} = y,$$

so gewinnen wir die einfache Form

$$\frac{\pm\ dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = d\varphi.$$

Das giebt integriert

$$\arccos \frac{y}{\alpha} = \varphi + C,$$

$$y = \alpha \cos(\varphi + C).$$

Setzen wir nun für y wieder seinen Wert ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$r = \frac{\frac{4c^2}{hM}}{1 - \frac{2c\alpha}{hM}\cos(\varphi + C)}$$

Wir wollen den Winkel φ so zählen, dass für $\varphi = 0$ r ein Minimum wird. Dies ist der Fall, wenn wir die Konstante $C = \pi$ setzen. Unsere Gleichung wird nun

$$r = \frac{\frac{4c^2}{hM}}{1 + \frac{2c\alpha}{hM}\cos\varphi} \qquad 11)$$

Je nachdem

$$\frac{2c\alpha}{hm} \lesseqgtr 1$$

ist, haben wir in (11) die Gleichung einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor uns. Diese drei Kurven sind also an die Bedingung

$$v_0^{\,2} - \frac{2\,h\,M}{r_0} \lesseqgtr 0$$

geknüpft, was man leicht erhält, wenn man den Wert für α wieder einführt.

Sind für eine Ellipse die beiden Halbachsen a und b, setzen wir $a^2 - b^2 = e^2$ und $\frac{e}{a} = \varepsilon$, so gilt die Gleichung

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\varphi}.$$

Die Fläche der Ellipse ist $f = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. In unserem Fall ist die Fläche aber auch gleich c T, wenn T die Umlaufszeit des Massenpunkts m um M ist. Es ist demnach

$$c\,T = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

oder

$$c^2 T^2 = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2).$$

Gleichung (11) ergibt aber

$$\frac{4\,c^2}{h\,M} = a(1 - \varepsilon^2),$$

mithin

$$c^2 T^2 = \pi^2 a^3 \frac{4\,c^2}{h\,M}$$

oder

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{h\,M}{4\pi^2} \qquad (12)$$

Den von uns gerechneten Fall können wir auf die Planetenbewegung anwenden, wenn wir M als die Sonne, m als einen Planeten ansehen. Keppler fand dafür folgende Gesetze:

„1. Der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Würfel der halben grossen Achsen ihrer Bahnen."

Wir finden diese drei Gesetze in den Gleichungen (9), (11) und (12).

§ 17. Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Wirken auf einen Punkt verschiedene Kräfte nach verschiedenen Richtungen und geben wir ihm eine sehr kleine Verschiebung δs, so wird jede Kraft P dabei eine Arbeit δA leisten, welche nach § 13 gegeben ist durch

$$\delta A = \Sigma P \delta s \cos \vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel ist, welchen Kraft und Verschiebungsrichtung einschliessen. Es ist also

$$\delta s \cos \vartheta = \delta p$$

die Projektion der Verschiebung auf die Richtung der Kraft. Ist nun

$$\Sigma P \delta p = 0,$$

so wird bei der Verschiebung keine Arbeit geleistet, d. h. die Kräfte müssen in der Verschiebungsrichtung eine Resultierende gleich Null haben, sie müssen im Gleichgewicht sein.

Zerlegen wir die Kräfte nach den drei Achsen eines Koordinatensystems, so wird unser Gleichgewichtssatz

$$\Sigma P \delta p = X \delta x + Y \delta y = Z \delta z = 0. \quad (13)$$

Sollen die Kräfte nach allen Richtungen des Raums im Gleichgewicht sein, so muss

$$X\,\delta x = Y\,\delta y = Z\,\delta z = 0$$

mithin auch

$$X = Y = Z = 0 \qquad (14)$$

sein, da wir ja die Verschiebung auch in einer der Koordinatenachsen vornehmen können, und dann werden die Projektionen auf die beiden anderen von selbst gleich Null. Die Kräfte heben sich also wirklich gegenseitig auf.

Dieses Prinzip für das Gleichgewicht eines Systems von Kräften nennt man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Es rührt von Lagrange her und kann etwa folgendermassen formuliert werden: Ein System von Kräften befindet sich im Gleichgewicht, wenn bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Angriffspunkts keine Arbeit geleistet wird.

Ist der Punkt nicht nach allen Richtungen frei beweglich, sondern ist er genötigt, auf einer bestimmten Fläche oder Linie zu bleiben, so kann dies folgendermassen in Rechnung gezogen werden. Die Gleichung der Fläche, welche der Punkt nicht verlassen kann, sei

$$F(x, y, z) = 0.$$

Geben wir daher dem Punkt eine Verschiebung δs, deren Komponenten δx, δy, δz sind, so muss auch die Gleichung

$$F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = F(x, y, z) + \\ + \frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z = 0$$

erfüllt sein und damit auch

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0.$$

Wir drücken damit lediglich aus, dass die Kräfte in jeder Richtung, welche in unsere Fläche hineinfällt, sich das Gleichgewicht halten, damit werden natürlich auch die Komponenten derselben gleich Null, folglich gilt auch

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y=\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0,$$

was wir mit (14) zu folgender Gleichgewichtsbedingung vereinigen können

$$\begin{aligned} X+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}&=0,\\ Y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}&=0, \qquad (15)\\ Z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}&=0. \end{aligned}$$

Hätten wir die Bedingung gestellt, der Punkt müsse auf einer Linie bleiben, so wären zwei Bedingungsgleichungen, etwa $f(x, y, z)=0$ und $f_1(x, y, z)=0$ zu (14) hinzugekommen. Das Resultat wäre dann

$$\begin{aligned} X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial f_1}{\partial x}&=0,\\ Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\mu\frac{\partial f_1}{\partial y}&=0,\\ Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}+\mu\frac{\partial f_1}{\partial z}&=0. \end{aligned}$$

λ und μ sind ganz willkürliche Faktoren, deren Wert sich aus den vorhandenen Kräften ermitteln lässt. Es liegt auf der Hand, wie sich unsere Formeln für beliebig viele Bedingungsgleichungen gestalten werden.

Nehmen wir an, ein Massenpunkt m, auf den nur die Schwerkraft wirkt, soll auf einer Kugelfläche bleiben, deren Gleichung

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0.$$

Es ist also

$$X=Y=0,\ Z=-mg, \frac{\partial F}{\partial x}=2x, \frac{\partial F}{\partial y}=2y, \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$$

Nach den Gleichungen (15) ist daher

$$2\lambda x=2\lambda y=0,$$

das heisst

$$x=y=0.$$

Für z folgt jetzt aus der Kugelgleichung

$$z=\pm a.$$

Der Massenpunkt ist also bloss an zwei Punkten, nämlich am obersten und untersten der Kugel im Gleichgewicht. Darnach ergibt sich auch der Wert von λ aus der Gleichung

$$-mg\pm 2\lambda a=0.$$

§ 18. Prinzip von d'Alembert.

Dieses lautet: Sind die Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, nicht im Gleichgewicht, so können wir immer eine Kraft hinzufügen, welche ihnen das Gleichgewicht hält und sodann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen anwenden. Die Komponenten der zugefügten Kraft müssen natürlich der Grösse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt den Komponenten der übrigen Kräfte sein. Sind letztere

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

so muss die hinzugefügte Kraft, welche das Gleichgewicht herstellen soll, die Komponenten $-X, -Y, -Z$ haben. Dann lässt sich nach Gleichung (13) das Prinzip in die Form kleiden

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

woraus wiederum leicht die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (16)$$

folgen, was die Richtigkeit des Prinzips beweist.

§ 19. Lagrange's Folgerungen:

Stellen wir die Bedingung, dass der bewegliche Massenpunkt m auf einer Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

bleiben soll, so verwandeln sich mit Berücksichtigung von (16) die Gleichungen (15) nach Lagrange in

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}$$

was wiederum leicht auf beliebig viele Bedingungsgleichungen erweitert werden kann.

Das Beispiel des früheren Paragraphen liefert uns also folgende Bewegungsgleichungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=2\lambda y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg+2\lambda z.$$

Nach diesen Gleichungen muss sich demnach ein Massenpunkt auf einer Kugelfläche bewegen, wenn er bloss der Schwerkraft unterlegen ist.

Nehmen wir an, pie Bewegung finde bloss in der (x, z)-Ebene statt, und setzen wir jetzt

$$x=a\sin\varphi,\ z=a\cos\varphi,$$

d. h. zählen wir den Winkel φ von der negativen z-Achse aus, sei ferner x gegen z immer sehr klein, was nur möglich ist, wenn $\sin\varphi$ sehr klein ist, so kann

$$\sin\varphi=\varphi,\ \cos\varphi=1,$$

also

$$x=a\varphi,\ z=-a.$$

gesetzt werden, und wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{2\lambda}{m}\varphi$$

und

$$0=-mg-2\lambda a$$

Demnach ist $\lambda=-\frac{mg}{2a}$ und

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{a}\varphi.$$

Das ist aber die aus § 9 bekannte Pendelgleichung, wobei wir unter a die Pendellänge zu verstehen haben. Thatsächlich ist ja auch die dort behandelte Pendelbewegung nichts anderes als ein spezieller Fall der Bewegung eines Punkts, welcher auf einer Kugelfläche zu bleiben gezwungen ist.

Aber auch unser allgemeiner Fall setzt sich, wie uns die drei Gleichungen lehren, aus drei schwingenden Bewegungen, parallel den Koordinatenachsen, zusammen, welche den Pendelgesetzen folgen.

Mechanik starrer Körper.

§ 20. Punktsystem.

Alle Lehrsätze, welche wir in den vorhergehenden Paragraphen für die Bewegung eines Massenpunkts kennen gelernt haben, gelten auch für ein Punktsystem. Unter einem solchen versteht man einen Komplex von Massenpunkten, welche sich durch Kräfte gegenseitig beeinflussen. Wir brauchen zur Lösung eines speziellen Falls nur die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung aller vorkommenden Kräfte für einen jeden Punkt aufzustellen.

Erst an einem System materieller Punkte können wir so recht den Nutzen der verschiedenen Prinzipien erkennen. So genügt z. B. zur Gleichgewichtsbestimmung der einfachen Maschinen vollkommen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

§ 21. Schwerpunkt — Massenmittelpunkt.

Ist die gegenseitige Lage der materiellen Punkte unveränderlich, so haben wir einen starren Körper vor uns. Auf diesen wirke nur die Schwerkraft, und wir stellen uns die Frage, ob es einen Punkt gibt, welcher unterstützt den Körper in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht hält.

Wir benutzen zur Beantwortung dieser Frage das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Nach § 17 muss für ein Punktsystem die Gleichung

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$$

gelten. Für die Schwerkraft reduziert sich diese Gleichung auf

$$\Sigma Z \delta z = 0,$$

da diese ja nur parallel zur z-Achse wirkt, weshalb von vornherein

$$X = Y = 0$$

zu setzen ist.

Wir verlegen den Unterstützungspunkt in den Ursprung des Koordinatensystems und geben dem Körper nur eine kleine Drehung $\delta\varphi$ um die y-Achse. Ein Punkt in der Entfernung r von der y-Achse von der Masse m und der Abscisse x erhält die Verschiebung

$$\delta s = r\delta\varphi,$$

deren Componente

$$\delta z = \delta s \frac{x}{r} = x\delta\varphi$$

ist. Die Schwerkraft leistet dabei die Arbeit — $mgx\delta\varphi$, welche für sämtliche vorhandenen Massenpunkte zusammengenommen gleich Null sein muss. Daraus folgt

$$\Sigma - mgx\delta\varphi = - g\, \delta\varphi \Sigma mx = 0,$$

also auch
$$\Sigma mx = 0.$$

Vollführen wir die Drehung um die x-Achse, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma my = 0.$$

Da es nun für den Unterstützungspunkt gleichgiltig sein soll, welche Lage immer der Körper einnimmt, so folgt, dass auch

$$\Sigma mz = 0$$

sein muss.

Selbstverständlich gibt es für jeden Körper einen Punkt, welcher diesen Bedingungen genügt. Man nennt ihn den Schwerpunkt des Körpers oder auch den Massenmittelpunkt; denn man kann sich in ihm die gesamte Masse des Körpers vereinigt denken, da nur dieser Punkt unterstützt zu werden braucht, um der Schwerkraft das Gleichgewicht zu halten.

Liegt der Schwerpunkt nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern hat er die Koordinaten ξ, η, ζ, so können wir die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte

$$x = x_1 + \xi,\ y = y_1 + \eta,\ z = z_1 + \zeta$$

setzen. Wiederum muss dann gelten

$$\Sigma m x_1 = \Sigma m y_1 = \Sigma m z_1 = 0.$$

also auch

$$\Sigma m(x - \xi) = 0,$$

woraus folgt

$$\Sigma mx = \xi \Sigma m,$$

oder

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\ \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m},\ \zeta = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Das sind die Formeln, nach welchen man den Schwerpunkt des Körpers findet.

§ 22. Schwerpunkt einer Linie.

Haben wir einen linienförmigen Körper, etwa einen Draht, dessen Längeneinheit die Masse μ besitzt, so ist für denselben

$$\Sigma m = \int \mu dl = \mu l,$$
$$\Sigma mx = \int \mu x dl,$$

wenn wir unter l die Länge des Körpers verstehen. Darnach wird

$$\xi = \frac{\int x dl}{\int dl} = \frac{\int x dl}{l}.$$

Es liege z. B. ein Kreisbogen von der Länge l und dem Oeffnungswinkel $2\varphi_0$ symmetrisch zur x-Achse in der (x, z)-Ebene. Für ihn ist $x = r \cos\varphi$, $db = r d\varphi$, daher

$$\int x dl = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} r^2 \cos\varphi \, d\varphi = 2 r^2 \sin\varphi_0$$

und

$$\xi = \frac{2 r^2 \sin\varphi_0}{l} = \frac{cr}{l},$$

wenn c die Länge der Sehne ist. Für den Halbkreis gilt somit, da $c = 2r$ und $l = \pi r$ ist,

$$\xi = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 23. Schwerpunkt einer Fläche.

Nach demselben Vorgang wie bei einem linienförmigen Körper erhalten wir für einen flächenförmigen die Gleichung

$$\xi = \frac{\int x dF}{F}$$

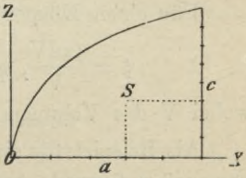

Fig. 3.

wobei F die Fläche des Körpers bedeutet. Analoge Formeln ergeben sich für η und ζ.

Wir wollen z. B. aus einer

Parabel, deren Gleichung

$$z^2 = 2px$$

ist, eine Fläche herausschneiden, welche von den Strecken a, c und dem Parabelbogen (Fig. 3) begrenzt ist. Wir finden

$$F = \int_0^a z dx = \int_0^a \sqrt{2p}\sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, a\sqrt{a} = \frac{2}{3}\, a\, c.$$

ferner

$$\int x dF = \int\int x dx\, dz = \int xz dx = \int x\sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{5}\sqrt{2p}\, x^{\frac{5}{2}}.$$

Das ist zwischen den Grenzen o und a zu nehmen, daher

$$\int x\, d\, F = \frac{2}{5}\, a^2 c$$

und

$$\xi = \frac{\int x dF}{F} = \frac{3}{5}\, a.$$

Gleicherweise finden wir

$$\zeta = \frac{3}{8}\, c.$$

Tragen wir ξ und ζ als Abscisse und Ordinate auf, so haben wir den Schwerpunkt S (Fig. 3) gefunden.

§ 24. Schwerpunkt eines Körpers.

Für einen Körper ist

$$\xi = \frac{\int x dV}{V},\ \eta = \frac{\int y dV}{V},\ \zeta = \frac{\int z dV}{V},$$

wobei V das Volumen des Körpers bedeutet.

Als Beispiel für eine derartige Schwerpunktsberechnung möge folgende Aufgabe gelöst werden. Es ist der

Schwerpunkt eines Kugelsegments zu bestimmen. Die Gleichung der Kugel sei

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Wir legen durch den Punkt A (Fig. 4) eine Ebene senkrecht zur x-Achse und in der Entfernung dx eine parallele dazu. Dadurch wird aus der Kugel eine Scheibe vom Volumen

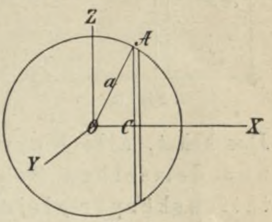

Fig. 4.

$$\pi \overline{AC}^2 dx = \pi (a^2 - x^2)\, dx$$

herausgeschnitten. Das Volumen des Kugelsegments ist demnach

$$V = \pi \int_{\alpha}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \pi \left(\frac{2a^3}{3} - a^2 \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right),$$

wobei α der kleinste Wert von x ist. Ferner haben wir zu bilden

$$\xi V = \iiint x dx dy dz = \int_{\alpha}^{a} \pi x (a^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^2\, \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} \right).$$

Betrachten wir den Fall der Halbkugel, so $\alpha = 0$, dann

$$\xi = \frac{3a}{8}.$$

§ 25. Guldin's Theorem.

Wenn die ebene Kurve AB (Fig. 5) um die Achse ox rotiert, so erzeugt sie eine Rotationsfläche von Inhalt

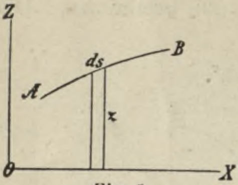

Fig. 5.

$$O = 2\pi \int z dl.$$

für die Ordinate des Schwerpunkts gilt

$$\zeta = \frac{\int z dl}{l},$$

daher ist

$$O = 2\pi\zeta l.$$

Das heisst, *alle Kurven von derselben Länge und demselben Schwerpunkt erzeugen Rotationskörper gleicher Oberfläche.*

Es rotiere z. B. ein Halbkreis (Fig. 6). Die dadurch entstehende Kugeloberfläche ist

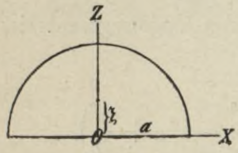

Fig. 6.

$$4\pi a^2 = 2\pi\zeta \,.\, \pi a = 2\pi^2 a\zeta,$$

woraus

$$\zeta = \frac{2a}{\pi}$$

folgt, was wir bereits im § 22 gefunden haben.

Durch die Rotation des Kreises (Fig. 7) erhält man einen Wulst. Dessen Oberfläche muss nach unserer Regel

$$O = 2\pi b \,.\, 2\pi c = 4\pi^2 bc$$

sein.

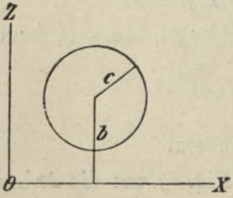

Fig. 7.

Lassen wir anstatt einer Kurve ein beliebig begrenztes Stück F der xy-Ebene um die x-Achse rotieren, so gilt für dessen Schwerpunktsordinate die Gleichung

$$\zeta F = \int z dx dy.$$

Das Volumen des Rotationskörpers ist

$$\iint 2\pi z \,dx\,dz = 2\pi\zeta F.$$

Als Beispiele dafür können uns die bereits betrachteten Fälle dienen. Der Inhalt der durch Rotation des Halbkreises (Fig. 6) entstehenden Kugel ist

$$\frac{4\pi a^3}{3} = 2\pi\zeta \cdot \frac{\pi a^2}{2},$$

woraus folgt

$$\zeta = \frac{4a}{3\pi}.$$

Für den Inhalt des Wulsts (Fig. 7) ergiebt sich

$$2\pi b \cdot \pi c^2 = 2\pi^2 b c^2.$$

Diese Beziehung zwischen Oberfläche und Inhalt eines Rotationskörpers und der Schwerpunktordinate der erzeugenden Kurve bildet den Inhalt des nach seinem Entdecker Guldin benannten Theorems.

§ 26. Ortsveränderung eines starren Körpers.

Jede Lagenänderung eines starren Körpers kann in zwei Vorgänge zerlegt werden, nämlich in eine Ortsveränderung des Schwerpunkts, wobei sich alle übrigen Punkte parallel zum Schwerpunkt und zu sich selbst bewegen, und in eine Drehung um den Schwerpunkt.

Jedes Kräftesystem, das eine Resultierende gibt, die nur im Schwerpunkt angreift, wird nur eine Parallelverschiebung des Körpers bewirken können aber keine Drehung, wie wir dies am Beispiel der Schwerkraft gesehen haben. Umgekehrt dürfen Kräfte, welche nur eine Drehung des Körpers um den Schwerpunkt hervorbringen sollen, keine Componente besitzen, welche im Schwerpunkt angreift.

§ 27. **Kräftepaar.**

Zwei Kräfte, welche gleichgross und entgegengesetzt gerichtet an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen, nennt man ein Kräftepaar. Dieses hat die Eigenschaft, keine Schwerpunktsbewegung bewirken zu können, was man unmittelbar aus einer virtuellen Parallelverschiebung des Körpers erkennt. Jede Kraft leistet dabei dieselbe Arbeit aber in entgegengesetztem Sinn, d. h. die Gesamtarbeit ist gleich Null, bezüglich des Schwerpunkts befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht. Die Drehung des Körpers muss um eine Achse vor sich gehen, welche senkrecht auf der Ebene des Kräftepaars steht, da keine Kraftcomponente parallel zur Achse vorhanden ist.

§ 28. **Drehungsmoment — Trägheitsmoment.**

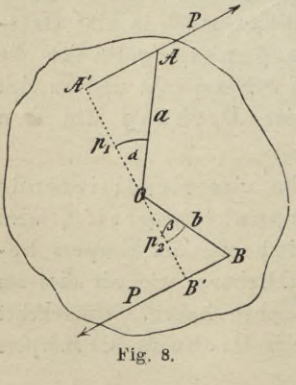

Fig. 8.

Infolge des Kräftepaars AB (Fig. 8) dreht sich ein Körper um die Achse O, welche senkrecht zur Bildebene zu denken ist. A und B seien die Angriffspunkte der Kräfte P. Ihr Abstand von O sei a und b und die Senkrechten von O auf P entsprechend p_1 und p_2.

Wir lassen den Körper

eine Drehung um den Winkel $\delta\varphi$ machen. Dabei leisten die Kräfte P die Arbeit

$$\mathrm{Pa}\delta\varphi \cos\alpha = \mathrm{Pp}_1\,\delta\varphi \text{ und } \mathrm{Pb}\delta\varphi \cos\beta = \mathrm{Pp}_2\,\delta\varphi.$$

Die Gesamtarbeit ist also

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)\,\delta\varphi = \mathrm{Pp}\delta\varphi,$$

wenn wir mit p den Abstand A′ B′ der parallelen Kräfte bezeichnen.

Nennen wir den Abstand eines Massenpunkts m von der Drehungsachse r, so beschreibt er den Weg

$$\mathrm{s} = \mathrm{r}\delta\varphi.$$

Die Kraft, welche auf ihn wirkt, ist gegeben durch

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{s}}{\mathrm{dt}^2} = \mathrm{mr}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}^2}.$$

Das Produkt aus Kraft und Weg ergiebt sodann die geleistete Arbeit $\mathrm{m\,r}^2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d\,t}^2}\delta\varphi$. Die Summe davon für alle Massenpunkte muss gleich der Arbeit des Kräftepaars sein.

$$\Sigma\mathrm{m\,r}^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\delta\varphi = \mathrm{Pp}\,\delta\varphi$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2}\Sigma\mathrm{m\,r}^2 = \mathrm{Pp}. \qquad (17)$$

Die Grösse Pp wird das **Drehungsmoment** des Kräftepaars genannt. Die Grösse mr^2, d. h. das Produkt aus der Masse eines Punkts in das Quadrat seiner Entfernung von der Drehungsachse nennt man sein **Trägheitsmoment**. Die Summe aller Trägheitsmomente $\Sigma\mathrm{m\,r}^2$ heisst dann das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse O.

§ 29. Aehnlichkeiten zwischen geradliniger und drehender Bewegung.

Falls φ der Drehungswinkel ist, welchen ein Körper in einer bestimmten Zeit beschreibt, so können wir in Analogie zur geradlinigen Bewegung $\frac{d\varphi}{dt}$ seine Winkelgeschwindigkeit und $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ seine Winkelbeschleunigung nennen.

Für eine bestimmte Lage der Drehungsachse ist das Trägheitsmoment eine konstante Grösse. Wir erfahren dann aus Gleichung (17), dass das Drehungsmoment einfach proportional der Winkelbeschleunigung zu setzen ist. Wir können also die drehende Bewegung eines Körpers mit der Bewegung eines Massenpunkts in vollständige Analogie bringen, wenn wir die Begriffe der Masse, Beschleunigung und Kraft durch jene des Trägheitsmoments, der Winkelbeschleunigung und des Drehungsmoments ersetzen.

Diese Analogie geht noch weiter. Projizieren wir die Fläche, welche der Radius vektor eines Massenpunkts bei der Drehung um einen gewissen Winkel beschreibt, auf die drei Ebenen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so können wir die so erhaltene Fläche als von Drehungen herrührend ansehen, welche der Punkt um die x-, y- und z-achse macht. Es sind das also die drei Komponenten, während umgekehrt die ursprüngliche Drehung die Resultierende dieser drei Komponenten ist.

Dasselbe gilt auch für das Drehungsmoment Pp. Wir können es durch ein Rechteck von den Seiten P und p darstellen. Die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen bilden dann wieder Parallelogramme, deren Fläche die Grösse der Drehungsmomente um die x-, y- und z-achse darstellt.

Unsere Gleichung (17) sagt gar nichts darüber aus, wo die Angriffspunkte der Kräfte zu liegen haben und wie sie gerichtet sind. Daraus geht ohne weiters hervor, dass man ein Kräftepaar ohne seine Wirkung zu ändern, in jeder Weise verschieben kann, wofern nur die Normale zu seiner Ebene immer dieselbe Richtung behält.

§ 30. Kräfte, welche nicht im Schwerpunkt eines starren Körpers angreifen.

Wir lassen nun ganz allgemein eine Kraft K (Fig. 9) in einem beliebigen Punkt A eines starren Körpers von der Masse M angreifen. Im Schwerpunkt S bringen wir zwei neue Kräfte K′ und K″ an, welche entgegengesetzt gerichtet, im übrigen jedoch der Kraft K parallel und gleich sein sollen. Infolge der Kraft K′ = K wird der Körper eine fortschreitende Bewegung erhalten, für welche wir die Gleichungen aufstellen können, als wäre die ganze Masse M im Schwerpunkt vereinigt. Gleichzeitig erhält der Körper aber auch durch das Kräftepaar K AS eine Drehung um den Schwerpunkt, wie sie durch Gleichung (17) dargestellt wird.

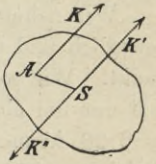

Fig. 9.

Die Kraft K habe die Komponenten X, Y, Z, der Angriffspunkt die Koordinaten x, y, z. Die Kraft X erzeugt somit um die y-achse ein Drehungsmoment Xz um die z-achse das Moment — Xy. Aehnlich verhält es sich mit den Kräften Y und Z, so dass wir um die x-achse das Drehungsmoment

$$Zy - Yz$$

und gleicherweise um die y-achse das Moment

$$Xz - Zx,$$

und die z-achse

$$Yx - Xy$$

erhalten. Wir müssen nämlich ein Drehungsmoment positiv oder negativ setzen, je nachdem es, gegen den Ursprung des Koordinatensystems betrachtet, eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt hervorbringt.

§ 31. Steiner's Satz.

Wir nahmen bisher an, der Körper sei völlig frei beweglich und die Drehung geschehe um den Schwerpunkt. Wir wollen jetzt den Körper so lagern, dass er sich nur um eine feste Achse drehen kann. Genau wie im § 28 können wir auch für den jetzigen Fall die Gleichung (17) ableiten, nur bezieht sich dann das Trägheitsmoment Σ mr² auf die feste Drehungsachse des Körpers.

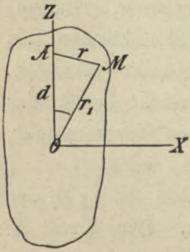

Fig. 10.

Wir hängen einen Körper in einem beliebigen Punkt A (Fig. 10) so auf, dass er sich nur um eine Achse senkrecht zur Bildebene drehen kann. Wir suchen bezüglich dieser Achse A das Trägheitsmoment Σmr².

Den Schwerpunkt O machen wir zum Ursprung eines rechtwinkeligen

Koordinatensystems. Die z-achse geht also durch A und es sei OA = d. Dann ist

$$r^2 = r_1{}^2 + d^2 - 2\, r_1\, d_1 \cos \alpha,$$

und das Trägheitsmoment

$$\Sigma\, mr^2 = \Sigma\, mr_1{}^2 + d^2\, \Sigma\, m - 2\, d\, \Sigma\, mr_1 \cos \alpha.$$

Nun ist aber $\Sigma\, m = M$, d. i. gleich der Masse des Körpers, während

$$\Sigma\, mr_1 \cos \alpha = \Sigma\, mz = 0$$

ist, da die Koordinatenachse durch den Schwerpunkt geht. Es bleibt also

$$\Sigma\, mr^2 = \Sigma\, mr_1{}^2 + Md^2.$$

Das Trägheitsmoment um eine willkürliche Achse setzt sich also aus zwei Trägheitsmomenten zusammen. Das eine Md^2 wäre vorhanden, wenn wir uns die gesamte Masse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt dächten. Dazu kommt noch ein Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht und zur eigentlichen Drehungsachse parallel ist. Dieser Satz rührt von Steiner her.

§ 32. Physisches Pendel — reduzierte Pendellänge.

Ein starrer Körper soll sich nur um die y-achse drehen können. Das Drehungsmoment ist dann nach § 30 Xz—Zx. Drehende Kraft sei nur die Schwere. Ein Massenpunkt hat daher die Komponenten

$$X = 0,\ Z = -\, mg$$

und übt ein Drehungsmoment mg x aus. Das gesamte Drehungsmoment des Körpers wird also

$$\Sigma\, mg\, x = gM\, \xi$$

sein, wenn M seine Masse und ξ die Schwerpunktsabscisse ist.

Nach (17) gilt nun die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = gM \xi,$$

wenn wir das Trägheitsmoment des Körpers $\Sigma mr^2 = K$ setzen. Ist der Abstand von der Drehungsachse a und schliesst ein Radius vektor mit der z-achse den Winkel φ ein, so $\xi = a \sin \varphi$, der Winkel mit der negativen z-achse $\psi = \pi - \varphi$. Die Gleichung wird jetzt

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{gMa}{K} \sin \psi.$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung, wie wir sie für das einfache Pendel in § 9 erhalten haben, wenn wir $\frac{gMa}{K}$ durch $\frac{g}{l}$ ersetzen. Wir nennen daher einen in dieser Weise schwingenden Körper ein **physisches Pendel** im Gegensatz zum einfachen oder **mathematischen Pendel.**

Dieses hat eine Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{g}{l}},$$

das physische hingegen

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{gMa}{K}}.$$

Für gleiche Schwingungsdauern muss also

$$l = \frac{K}{Ma}$$

sein, weshalb man diese Grösse auch die **reduzierte Pendellänge** nennt.

§ 33. Reversionspendel.

Wir wissen bereits, dass das Trägheitsmoment

$$K = T + Ma^2$$

ist, wobei wir unter T das Trägheitsmoment bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt verstehen.

Die reduzierte Pendellänge ist demnach

$$l = \frac{K}{Ma} = \frac{T}{Ma} + a.$$

Zur Bestimmung von a erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$a^2 - al + \frac{T}{M} = 0. \qquad (18)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien a_1 und a_2. Ziehe ich daher um den Schwerpunkt zwei Kreise vom Radius a_1 und a_2, so hat der Körper für jeden Aufhängepunkt, der in eine solche Kreisperipherie fällt, dieselbe Schwingungsdauer, deren reduzierte Pendellänge, wie aus (18) folgt $l = a_1 + a_2$ ist.

Sucht man daher zwei Punkte auf, welche mit dem Schwerpunkt in einer Geraden liegen, vom Schwerpunkt verschiedene Entfernung haben, aber gleiche Schwingungsdauer bewirken, so ist der Abstand dieser Punkte die reduzierte Pendellänge. Ein solches Pendel nennt man ein Reversionspendel, und es dient dazu, die Beschleunigung der Schwere g zu ermitteln.

Kenne ich den Schwerpunkt, so ist mir auch a_1 und a_2, folglich auch nach der Gleichung

$$\frac{T}{M} = a_1 \, a_2,$$

welche aus (18) folgt, das Trägheitsmoment bekannt.

§ 34. Trägheitsmoment eines Parallelepipeds.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Parallelepipeds als Ursprung eines Koordinatensystems an, dessen Achsen parallel den Seiten des Parallelepipeds liegen. Die Drehachse gehe durch den Mittelpunkt parallel zur y-achse. Das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ ist daher gegeben durch

$$T = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} \varrho\,(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{8\,abc\,\varrho}{3}\,(a^2+c^2)$$
$$= \frac{M}{3}\,(a^2+c^2),$$

wenn wir die Seiten des Parallelepipeds a, b und c nennen, ein Massenteilchen

$$m = \varrho\,dx\,dy\,dz$$

setzen, wobei ϱ also die Masse der Volumeinheit, die Dichte, des Körpers ist, und überlegen, dass $r^2 = x^2 + z^2$ ist.

Wir nehmen nun an, das Prisma sei sehr schmal, so dass a gegenüber c vernachlässigt werden kann. Dann ist

$$T = \frac{M\,c^2}{3}.$$

Für dieses Prisma suchen wir zwei Aufhängepunkte, die ein Reversionspendel ergeben. Nach Gleichung (18) haben wir

$$a^2 - l\,a + \frac{c^2}{3} = 0,$$

$$a = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - \frac{4\,c^2}{3}}}{2}.$$

Ist die Gesamtlänge des Stabes $2c = L$, so erhalten wir für a nur dann einen möglichen Wert, wenn

$$\frac{L^2}{3} < l^2.$$

Ferner muss aber auch

$$\frac{L}{2} > a$$

sein, woraus für ein Pendel von gegebener Schwingungsdauer ganz bestimmte Grenzen der Stablänge folgen. Für ein Sekundenpendel liegen dieselben zwischen ungefähr 150 und 170 cm.

§ 35. Trägheitsmoment einer Kugel.

Der Mittelpunkt der Kugel sei wiederum der Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems. Wegen der allseitigen Symmetrie ist natürlich für jede Achse durch den Mittelpunkt das Trägheitsmoment dasselbe. Für eine Kugelschale vom Radius r gilt daher

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Alle drei Summen addiert, ergibt

$$3T = 2 \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \Sigma mr^2,$$

oder

$$T = \frac{2}{3} \Sigma mr^2$$

Dehnen wir dieses Resultat auf die Vollkugel aus, so können wir

$$m = 4 \pi \varrho r^2 dr$$

setzen, und es wird

$$\Sigma mr^2 = 4\pi\varrho \int_0^r r^4 dr = \frac{4}{5} \pi\varrho r^5,$$

wenn r der Radius der Vollkugel ist. Die Masse dieser Kugel ist

$$M = \frac{4}{3} \pi \varrho r^3.$$

Das Trägheitsmoment der Vollkugel kann daher auch geschrieben werden

$$T = \frac{2}{3} \Sigma m r^2 = \frac{2}{5} M r^2.$$

Hängen wir demnach eine Kugel an einem sehr dünnen Draht von der Länge L auf, dessen Masse gegenüber jener der Kugel vernachlässigt werden kann, so wird die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{K}{M a} = \frac{\frac{2}{5} M r^2 + (L + r)^2 M}{M (L + r)} = L + r + \frac{2}{5} \frac{r^2}{L + r}.$$

Es ist die reduzierte Pendellänge also grösser als die wirkliche, doch wird der Unterschied für eine kleine Kugel sehr gering.

§ 36. Trägheitsmoment um eine beliebige Achse — Trägheitsellipsoid.

Die Achse OA (Fig. 11) werde als Drehungsachse gewählt. Sie bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ. Ein Massenpunkt m habe die Koordinaten x, y, z, also $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und es schliesse r mit OA den Winkel ϑ ein. p sei die Entfernung des

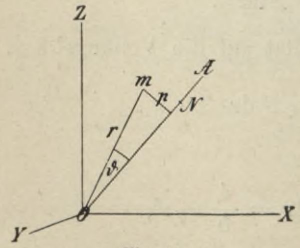

Fig. 11.

Punktes m von der Drehachse. Dann ist das Trägheitsmoment

$$\Sigma\, mp^2 = \Sigma\, mr^2 \sin^2 \vartheta = \Sigma\, m\, (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta).$$

Wir wissen weiters, dass

$$\cos \vartheta = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta + \frac{z}{r} \cos \gamma,$$

wornach wir für das Trägheitsmoment erhalten

$$K = \Sigma\, m\, (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta) =$$

$$= \Sigma\, m\, (x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \cos^2 \beta - z^2 \cos^2 \gamma -$$

$$- 2yz \cos\beta \cos\gamma - 2xz \cos\gamma \cos\alpha - 2xy \cos\alpha \cos\beta).$$

Bedenken wir noch, dass

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

also $\qquad x^2 - x^2 \cos^2 \alpha = x^2 \cos^2 \beta + x^2 \cos^2 \gamma$

u. s. w. ist, so können wir das Trägheitsmoment leicht auf die Form bringen

$$K = \cos^2 \alpha\, \Sigma\, m\, (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta\, \Sigma\, m\, (z^2 + x^2) +$$

$$+ \cos^2 \gamma\, \Sigma\, m\, (x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma\, \Sigma\, myz -$$

$$- 2 \cos \gamma \cos \alpha\, \Sigma\, mzx - 2 \cos \alpha \cos \beta\, \Sigma\, mxy.$$

Wir wollen nun von O aus auf der Achse OA die Strecke

$$ON = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

abschneiden, Es ist daher

$$\frac{1}{\overline{ON}^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2\, D \cos \beta \cos \gamma -$$

$$- 2\, E \cos \gamma \cos \alpha - 2\, F \cos \alpha \cos \beta.$$

Wir haben hier $\Sigma\, m\, (y^2 + z^2) = A$ u. s. w. gesetzt.

Für N seien die Koordinaten x, y, z, also ON cos $\alpha =$ $= x$, u. s. w. Dann folgt für unsere Gleichung, wenn wir beide Seiten mit $\overline{ON}^2$ multiplizieren,

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\, Dyz - 2\, Ezx - 2\, F\, xy.$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoids. Ein Hyperboloid kann sie nicht darstellen, weil sonst auch Trägheitsmomente von beliebig kleiner Grösse vorhanden sein müssten, was ein Widerspruch wäre.

Fallen die Koordinatenachsen mit den Achsen des Ellipsoids zusammen, so erhalten wir eine einfachere Gleichung, welche nur die Glieder mit x^2, y^2 und z^2 enthält.

Für einen jeden Körper ist also für jede beliebige Drehungsachse durch obiges Ellipsoid das Trägheitsmoment gegeben, weshalb man es auch das Trägheitsellipsoid nennt. Dasselbe kann für spezielle Fälle natürlich auch ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel sein. Die drei Achsen des Ellipsoids nennt man die Hauptachsen des Trägheitsmoments oder kürzer die Hauptachsen der Trägheit.

§ 37. Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt — Euler'sche Gleichungen.

Wir machen den festen Punkt, um welchen die Drehung des Körpers stattfinden soll, zum Koordinatenursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems. Die Winkelgeschwindigkeit w habe die Componenten p, q, r. Die Bewegung, welche ein Punkt infolge einer kleinen Drehung um die x-Achse macht, ergiebt sich leicht aus Fig. 12. In derselben

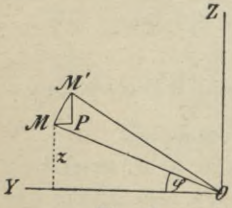

Fig. 12.

ist die x-Achse senkrecht zur Bildebene gedacht In der Zeit dt gelange der Punkt M nach M'. Diesen Weg zerlegen wir in die Komponenten M P parallel zur y-Achse und P M′ parallel zur z-Achse. Nun ist

$$\mathrm{M\,P} = -\overline{\mathrm{M\,M'}} \,.\, \sin\varphi = -\overline{\mathrm{O\,M}}\, \mathrm{p\,d\,t} \sin\varphi = -\,\mathrm{z\,p\,d\,t},$$

da $\overline{\mathrm{O\,M}} \sin\varphi = \mathrm{z}$ die Ordinate des Punktes M ist. Gleicherweise ergibt sich parallel zur z-Achse

$$\overline{\mathrm{P\,M'}} = \mathrm{y\,p\,d\,t}.$$

Auf analoge Weise können wir die Drehungen um die y- und z-Achse in Bewegungen parallel zu den drei Achsen zerlegen.

Infolge sämtlicher drei Drehungen wird also der Punkt eine Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ parallel zur x-Achse u. s. w. erlangen, welche wir leicht erhalten, wenn wir den gesamten Weg parallel zur Achse durch die Zeit d t dividieren. Das Ergebnis ist

$$\frac{dx}{dt} = q\,z - r\,y,$$

$$\frac{dy}{dt} = r\,x - p\,z,$$

$$\frac{dz}{dt} = p\,y - q\,x.$$

Erinnern wir uns nun, dass das Drehungsmoment um die x-Achse durch Z y — Y z (§ 30) gegeben ist, wobei $Y = \Sigma\, m \frac{d^2 y}{d t^2}$ und $Z = \Sigma\, m \frac{d^2 z}{d t^2}$ ist, so können wir die Bewegungsgleichungen des Körpers finden, wenn wir unsere Werte für $\frac{dx}{dt}$ u. s. w. benutzen.

Wir bilden vorerst

$$y\,\frac{dz}{dt} - z\,\frac{dy}{dt} = p\,y^2 - q\,x\,y - r\,x\,z + p\,z^2 = p\,(y^2 + z^2) -$$

$$-x(qy+rz)=p(x^2+y^2+z^2)-x(px+qy+rz)=$$
$$=p\varrho^2-x(px+qy+rz),$$

wobei $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ gesetzt wurde.

Durch Differentiation dieser Gleichung nach t erhalten wir nun

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dp}{dt}\varrho^2-\frac{dx}{dt}(px+qy+rz)-$$
$$-x\left(x\frac{dp}{dt}+y\frac{dq}{dt}+z\frac{dr}{dt}\right).$$

Das Glied

$$p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}+r\frac{dz}{dt}=0.$$

Es sind nämlich $\frac{p}{w}$, $\frac{q}{w}$, $\frac{r}{w}$ die Richtungskosinus der Drehungsachse und das vernachlässigte Glied stellt demnach nichts anderes als die Geschwindigkeit parallel dieser Achse dar. Eine solche Geschwindigkeit ist aber nicht vorhanden.

Wir setzen nun jetzt anstatt $\frac{dx}{dt}$ wieder seinen Wert $qz-ry$ ein, multiplizieren aus, summieren über sämtliche Massenpunkte und lassen den Körper nur um eine der drei Hauptträgheitsachsen drehen. Für diesen Fall werden alle Glieder, welche die Koordinaten nicht als Quadrate enthalten, gleich Null, und es bleibt uns nur

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{dp}{dt}\Sigma m(y^2+z^2)-qr\,\Sigma m(y^2-z^2).$$

Nennen wir nun die Drehungsmomente um die drei Achsen L, M, N, die Trägheitsmomente A, B, C, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,q\,r = L,$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,p\,r = M, \qquad (19)$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,p\,q = N.$$

Wir können nämlich $\Sigma m(y^2 - z^2) = \Sigma m(x^2 + y^2 - x^2 - z^2) = C - B$ setzen.

Diese Gleichungen wurden von Euler aufgestellt. Sie setzen voraus, dass die Trägheitsmomente A, B, C konstante Grössen sind. Das wird aber, wenn die Drehungsachse mit der Zeit ihre Lage ändert, im Allgemeinen nicht der Fall sein. Dem können wir aber ausweichen, wenn wir einfach nach dem Vorgang Eulers während der Rotation des Körpers das Koordinatensystem sich ebenfalls so bewegen lassen, dass die Bedingung konstanter Trägheitsmomente erhalten bleibt.

§ 38. Freie Achse.

Ein Körper drehe sich sehr rasch um die z-Achse, habe hingegen sehr geringe Winkelgeschwindigkeiten um die x- und y-Achse. Es ist also r gegen p und q sehr gross, so dass wir das Produkt pq gegen r überhaupt vernachlässigen können. Ferner soll an unserm Körper kein Drehungsmoment angreifen, also $L = M = N = 0$ sein. Wir erhalten dann aus den Gleichungen (19)

$$C\frac{dr}{dt} = 0,$$
$$r = \text{const.}$$

Setzen wir nun

$$\frac{C-A}{A} r = \lambda, \frac{A-C}{B} r = \mu,$$

so ergibt sich weiter

$$\frac{dp}{dt} + \lambda q = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} + \mu p = 0.$$

Differenzieren wir die erste Gleichung nach t, so

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \lambda \frac{dq}{dt} = 0$$

und für $\frac{dq}{dt}$ seinen Wert aus der zweiten Gleichung eingesetzt

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \lambda \mu p.$$

Nach dieser Gleichung ist p eine periodische Funktion der Zeit, wenn $\lambda \mu$ negativ ist, eine exponentielle, wenn $\lambda \mu$ positiv (§§ 9, 10). In letzterem Fall wird unsere Gleichung aber wertlos, da wir sie ja unter der Bedingung abgeleitet haben, dass p immer klein bleibe. Wir haben also lediglich zu untersuchen, wenn $\lambda \mu = \frac{(C-B)(A-C) r^2}{AB}$ negativ ist. Dies trifft in zwei Fällen zu, entweder wenn $C > \frac{A}{B}$, oder wenn $C < \frac{A}{B}$ ist. Das eine Mal ist also die Rotationsachse die grösste Hauptachse der Trägheit, das andere Mal die kleinste.

In diesen beiden Fällen kann ein rasch rotierender Körper kleine Stösse und sonstige Störungen erleiden, ohne dass dadurch seine Rotationsachse eine wesentliche

Lagenänderung erleidet, sondern sie macht nur kleine Schwankungen um ihre ursprüngliche Lage. Ein solcher Körper behält also seine Lage im Wesentlichen bei, wir sagen, er rotiert um eine freie Achse.

Jeder Rotationskörper hat als Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid. Wir können daher, wenn wir die Achse des Körpers als Drehungsachse mit der Winkelgeschwindigkeit r wählen, A = B setzen und erhalten strenge

$$C \frac{dr}{dt} = 0.$$

Die Achse eines solchen Körpers können wir also nach Belieben drehen und wenden, ohne seine Winkelgeschwindigkeit zu verändern.

§ 39. Kreiselbewegung — Praecession — Nutation.

Ein rechtwinkeliges Coordinatensystem O X Y Z

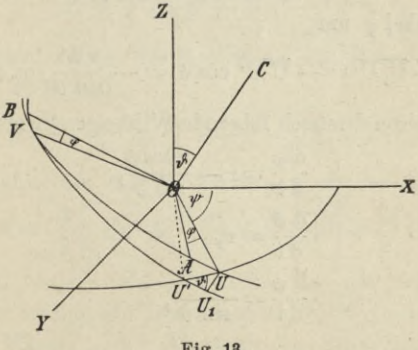

Fig. 13.

(Fig. 13) legen wir fest, so dass die Z-Achse vertikal steht. O sei der Unterstützungspunkt des Kreisels. Er drehe sich um die Achse O C, welche die eine Achse des beweglichen Koordinatensystems sein und mit O Z den Winkel ϑ einschliesen soll. O A und O B seien die beiden andern Achsen. Die Gerade, in welcher die A B-Ebene die X Y-Ebene schneidet, nennen wir O U, eine zweite Gerade senkrecht auf O U in der A B-Ebene O V. O U bilde mit O X den Winkel ψ, mit O A den Winkel φ, diesen Winkel bildet auch O V mit O B. Es gehören nun zu den Achsen O A, O B, O C die Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels p, q, r. Zu den Achsen O U und O V die Winkelgeschwindigkeiten u und v.

Bei einer Drehung um O C ändert sich in der Zeit d t bloss der Winkel φ um r d t, bei der Drehung um O U nur der Winkel ϑ um u d t, bei der Drehung um O V der Winkel ψ um

$$\overline{UU'} = \frac{\overline{UU_1}}{\sin\vartheta} = \frac{v\,dt}{\sin\vartheta},$$

der Winkel φ um

$$-\overline{U_1U'} = -\overline{UU'}\cos\vartheta = -\frac{v\,dt}{\sin\vartheta}\cos\vartheta,$$

Wir erhalten demnach folgende Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{v\cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = u,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v}{\sin\vartheta},$$

oder

$$u = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$v = \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta.$$

Die Winkelgeschwindigkeiten p und q setzen sich bloss aus den Winkelgeschwindigkeiten u und v zusammen, welche um Achsen in derselben Ebene OUAVB vorhanden sind. Darnach ist

$$p = u\cos\varphi + v\sin\varphi,$$
$$q = v\cos\varphi - u\sin\varphi,$$

Wir bilden nun die kinetische Energie K unseres Kreisels. Sie ist gleich der Summe der Energien um drei auf einander senkrechte Achsen (§§ 13, 39) und wird dargestellt durch das halbe Produkt aus dem Trägheitsmoment in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, also

$$K = \frac{1}{2}(A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Wir setzen voraus, der Kreisel sei ein Rotationskörper, somit $A = B$ und

$$K = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2 = \frac{1}{2} A (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} C r^2.$$

Führen wir die Winkel ϑ, φ, ψ ein, so wird

$$K = \frac{A}{2}\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{2} C r^2.$$

Auf unsern Kreisel wirke nur die Schwerkraft. Dieselbe erzeugt ein Drehungsmoment $M g a \sin\vartheta$, wenn M die Masse, a der Abstand des Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt O des Kreisels ist.

Die geleistete Arbeit muss immer gleich der Aenderung der kinetischen Energie sein, also

$$d\,K = M\,g\,a \sin\vartheta\, d\,\vartheta,$$

was integriert

$$K = C_1 - M\,g\,a \cos\vartheta = C_1 - D\cos\vartheta$$

ergibt, wenn wir $M\,g\,a = D$ einführen. Setzen wir den Wert für K ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{2} A \left[\sin^2\vartheta \left(\frac{d\,\psi}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,\vartheta}{d\,t}\right)^2\right] + \frac{1}{2} C\,r^2 = C_1 - D\cos\vartheta,$$

und da $\frac{1}{2} C\,r^2$ ebenfalls konstant ist, indem wir ja kein Drehungsmoment um die O C-Achse haben, so wird unsere Gleichung

$$\sin^2\vartheta \left(\frac{d\,\psi}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,\vartheta}{d\,t}\right)^2 = C_2 - \frac{2\,D}{A}\cos\vartheta. \qquad (20)$$

Die Schwere kann natürlich kein Drehungsmoment um eine Vertikalachse hervorbringen. Es muss deshalb die Bewegungsgrösse des Kreisels auf eine Vertikalachse bezogen eine konstante Grösse bleiben. Als solche haben wir hier das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit einzuführen (§ 29), erhalten für unser Beispiel demnach

$$C\,r\cos\vartheta + A\,v\sin\vartheta = C_3,$$

und für v seinen obigen Wert wieder eingesetzt

$$A\sin^2\vartheta \frac{d\,\psi}{d\,t} + C\,r\cos\vartheta = C_3. \qquad (21)$$

Für $t = 0$ bilde die Kreiselachse mit der Z-Achse den Winkel ϑ_0. Ferner sei $\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = 0$ und $\frac{d\,\psi}{d\,t} = 0$. Für diese Werte wird Gleichung (20)

$$C_2 = \frac{2\,D}{A}\cos\vartheta_0$$

und Gleichung (21)

$$C_3 = C\,r \cos \vartheta_0.$$

Mit Einführung dieser Ausdrücke für die Konstanten C_2 und C_3 in die Gleichungen (20) und (21) erhalten wir nun

$$\sin^2 \vartheta \left(\frac{d\,\psi}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,\vartheta}{d\,t}\right)^2 = \frac{2\,D}{A} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta), \qquad (22)$$

$$\sin^2 \vartheta \frac{d\,\psi}{d\,t} = \frac{C\,r}{A} (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta). \qquad (23)$$

Aus Gleichung (22) folgt, dass beständig $\cos \vartheta_0 > \cos \vartheta$ sein muss, da alle übrigen Grössen dieser Gleichung positiv sind. Damit folgt aber nach (23) auch für $\frac{d\,\psi}{d\,t}$ ein positiver Wert, d. h. die Achse des Kreisels dreht sich beständig in ein und derselben Richtung um die Vertikalachse. Aus (22) und (23) können wir leicht finden

$$\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \pm \sqrt{(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)\left[\frac{2D}{A} - \frac{C^2\,r^2}{A^2 \sin^2 \vartheta}(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)\right]}.$$

Es wird demnach mit wachsender Zeit ϑ zuerst zunehmen bis es einen gewissen Wert erreicht hat, bei welchem $\frac{d\,\vartheta}{d\,t}$ gleich Null, weiterhin dann negativ wird. Das negative Vorzeichen der Wurzel springt wieder in das positive um, sobald ϑ wieder ϑ_0 geworden ist. ϑ ist daher eine periodische Funktion der Zeit. Dasselbe finden wir aber dann auch für den Winkel ψ. Unsere Kreiselachse macht zwei Bewegungen. Die Winkelbewegung $\frac{d\,\vartheta}{d\,t}$ nennen wir die Nutation, $\frac{d\,\psi}{d\,t}$ die Präcession des Kreisels.

Ist der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, so ist $a = o$, also auch $D = o$, dann muss konstant $\vartheta = \vartheta_0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ und $\frac{d\psi}{dt} = 0$ bleiben. Ein solcher Kreisel zeigt weder Präcession noch Nutation. In gleicher Weise kann ϑ von ϑ_0 um so weniger verschieden werden, je grösser die Winkelgeschwindigkeit r des Kreises ist. Wir können daher bei einem rasch rotierenden Kreisel zwar die Präcession, nicht aber die Nutation beobachten.

Bilden wir durch Division von $\frac{d\vartheta}{dt}$ durch $\frac{d\psi}{dt}$ den Ausdruck $\frac{d\vartheta}{d\psi}$, so erhalten wir die Gleichung der Bahn, welche der Schwerpunkt beschreibt. Projicieren wir dieselbe auf eine Horizontalebene, so nimmt dieselbe, wie wir aus der Diskussion der Gleichung leicht erkennen, die in Fig. 14 wiedergegebene Gestalt an.

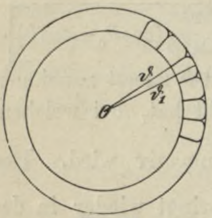

Fig. 14.

Unsere Erde ist ebenfalls ein Kreisel, und da die Anziehungskraft der Sonne, weil die Erde keine vollkommene Kugel ist, ihren Angriffspunkt nicht in deren Schwerpunkt hat, so zeigt auch die Erdachse die bekannte Erscheinung der Präcession und Nutation.

Mechanik nicht starrer Punktsysteme.

§ 40. Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts.

Wir erwähnten bereits, dass wir alle Lehrsätze, welche wir für einen Massenpunkt gefunden haben, ohne weiteres auf ein System von Punkten anwenden können, falls wir nur für jeden einzelnen auch alle auf ihn wirkenden Kräfte in unseren Formeln berücksichtigen (§ 26). Wir werden daher die Bewegungsgleichungen eines Punktsystems schreiben können

$$\Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,\ \Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y,\ \Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Sind nun gar keine Kräfte vorhanden, so

$$\Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Integrieren wir, so resultiert

$$\Sigma\, m\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\,\Sigma\, mx = M\frac{d\xi}{dt} = C.$$

Aehnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Koordinaten. Wir sehen daraus, dass die Geschwindigkeit und Richtung des Schwerpunkts unseres Systems völlig unverändert bleibt, sobald keine Kräfte auf die Punkte einwirken.

Wir können aber diesen Satz noch erweitern. ΣX u. s. w. wird nämlich ebenfalls gleich Null, wenn nur innere Kräfte vorhanden sind, d. h. Kräfte, welche die Punkte des Systems auf einander ausüben. Die Komponenten einer jeden solchen Kraft kommen dann immer zweimal, einmal positiv und einmal negativ in den Summen vor, sie tilgen sich also gegenseitig. Der Satz, dass sich der Schwerpunkt eines Systems, auf welches keine äusseren Kräfte einwirken, mit konstanter Richtung und Geschwindigkeit bewegt, nennt man das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts.

Dasselbe lässt sich auf unzählige bekannte Bewegungserscheinungen anwenden. Ist der Schwerpunkt von vornherein in Ruhe, so bleibt er es auch weiterhin. Feuern wir aus einem sehr leicht beweglichen Geschütz ein Geschoss ab, so erhält das Geschütz den sogenannten Rückstoss. Der Schwerpunkt zwischen Geschoss und Geschütz bleibt bei vollständig freier Beweglichkeit beider vor und nach dem Schuss unbeweglich an derselben Stelle. Explodiert ein fliegendes Geschoss, so bewegt sich der Schwerpunkt sämtlicher Sprengstücke genau so weiter, als es das unversehrte Geschoss gethan hätte.

Auf dem Satz der Erhaltung des Schwerpunkts basieren alle sogenannten Reaktionserscheinungen.

§ 41. Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Das Drehungsmoment, welches ein Punktsystem um die x-Achse eines Koordinatensystems erhält, lässt sich durch die Gleichung

$$\Sigma\,(Zy - Yz) = \Sigma\, m\left(\frac{d^2 z}{d t^2}\, y - \frac{d^2 y}{d t^2}\, z\right) =$$

$$= \frac{d}{d t}\quad m\left(\frac{d z}{d t}\, y - \frac{d y}{d t}\, z\right)$$

darstellen (§ 30). Sind keine äusseren Kräfte vorhanden, so sind nach dem vorigen Paragraphen die Komponenten Y und Z gleich Null, daher ist

$$\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) = C.$$

$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z$ ist nichts anderes als die doppelte Fläche, welche der Radiusvektor in der Zeiteinheit beschreibt, oder kurz die doppelte Flächengeschwindigkeit. Wir erhalten demnach den Satz, dass die Summe aller Flächengeschwindigkeiten beim Fehlen äusserer Kräfte eine konstante Grösse ist. Man nennt dies das Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Ein Beispiel dafür lernten wir in der Planetenbewegung kennen (§ 16). Infolge der Erhaltung der Flächenräume fällt eine Katze immer auf die Füsse. Indem sie nämlich während des Fallens mit den Füssen eine drehende Bewegung beschreibt, zwingt sie ihren Körper sich entgegengesetzt zu drehen.

§ 42. Bewegungsgleichungen von Lagrange — generalisierte Koordinaten

Nach dem Prinzip von d'Alembert gilt für ein System von Massenpunkten folgende Gleichung

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

(§ 18.) Wir führen nun anstatt der Koordinaten x, y, z, beliebige andere Grössen, die sogenannten generalisierten Koordinaten φ, ψ . . . ein, welche mit den ursprünglichen Koordinaten durch Gleichungen verbunden sind. Es sei also

$$x = f(\varphi, \psi \ldots),$$
$$y = f_1(\varphi, \psi \ldots),$$

u. s. w. Darnach wird

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi} \delta \psi + \ldots$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für δy und δz.

Wir können demnach folgende Gleichung bilden:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\delta\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial x}{\partial \psi}\delta\psi + \ldots\right) + m\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi}\delta\psi + \ldots\right) =$$
$$= m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi + \ldots =$$
$$= m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi - m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial^2 x}{dt\,\partial \varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{dy}{dt}\frac{\partial^2 y}{dt\,\partial \varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial^2 z}{dt\,\partial \varphi}\right)\delta\varphi + \ldots$$

Setzen wir

$$\frac{dx}{dt} = x', \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$$

u. s. w., so

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial x}{\partial \psi}\psi' + \ldots,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Es ist demnach

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} = x'\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial}{\partial \varphi'}\left(\frac{x'^2}{2}\right),$$

daher weiter

$$m \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi'}\left(\frac{m v^2}{2}\right),$$

da ja

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2$$

ist, wenn wir unter v die Geschwindigkeit des Punktes m verstehen.

Für die lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ wollen wir den Buchstaben L einführen. Man sieht leicht ein, dass

$$m\left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial^2 x}{dt\, \partial \varphi} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial^2 y}{dt\, \partial \varphi} = \frac{dz}{dt} \frac{\partial^2 z}{dt\, \partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{m v^2}{2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

ist. Mit Berücksichtigung alles dessen können wir unsere obige Gleichung demnach schreiben

$$m\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z\right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

Aehnliche Gleichungen ergeben sich natürlich für die übrigen generalisierten Koordinaten ψ u. s. w.

Haben wir eine Funktion U von der Eigenschaft, dass $\frac{\partial U}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial U}{\partial \psi} \delta \varphi + \ldots$ die bei einer kleinen Verschiebung geleistete Arbeit darstellt, so gilt die Gleichung

$$\Sigma\, m\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z\right) = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \delta \varphi + \\ + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \delta \varphi + \ldots,$$

was ja nichts anderes als das Princip von d'Alembert ist. Beziehen wir die lebendige Kraft L auf sämtliche Massenpunkte und überlegen wir, dass die Wahl der Koordinaten ganz willkürlich ist, so ergeben sich uns schliesslich die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \psi'} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

welche man die Bewegungsgleichungen von Lagrange nennt.

§ 43. Gleichungen für die relative Bewegung eines Körpers auf der Erdoberfläche.

Ein Punkt der Erdachse sei der Ursprung eines festen Koordinatensystems $O\Xi HZ$, die H-Achse gehe durch den Südpol. Es dreht sich also die Erde um diese Achse im positiven Sinn. Die Koordinaten eines Punktes M bezogen auf dieses feste Koordinatensystem seien ξ, η, ζ. Fest mit der Erde verbunden denken wir uns jetzt ein zweites Koordinatensystem $O x' y' z'$, welches mit dem ersten den Ursprung gemeinsam hat. Ferner fällt die y'-Achse mit der H-Achse zusammen, die x'-Achse wird hingegen zu einer bestimmten Zeit mit der Ξ-Achse einen bestimmten Winkel α einschliessen, welchen auch die z'-Achse mit der Z-Achse bildet. α ändert sich beständig mit der Drehung der Erde. Es ist $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ nichts anderes als die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Auf das neue Koordinatensystem bezogen wird also

$$\xi = x' \cos\alpha + z' \sin\alpha,$$
$$\eta = y',$$
$$\zeta = z' \cos\alpha - x' \sin\alpha.$$

Wir verschieben nun das bewegliche Koordinatensystem parallel zu sich selbst in der Richtung der z'-Achse, bis der Ursprung auf die Erdoberfläche zu liegen kommt. Er hat dabei die Strecke p zurückgelegt, und wir wollen nun die neue Lage des Koordinatensystems mit o, x'', y'', z'' bezeichnen. Die neuen Koordinaten x'', y'', z'' des Punktes M stehen also mit den früheren in folgender Beziehung

$$x' = x'',\; y' = y'',\; z' = z'' + p,$$
$$\xi = x'' \cos\alpha + (p + z'') \sin\alpha,$$
$$\eta = y'',$$
$$\zeta = (p + z'') \cos\alpha - x'' \sin\alpha.$$

Wir drehen jetzt das ganze Koordinatensystem um die x''-Achse, bis die z''-Achse vertical steht. Der Winkel ψ, um welchen zu drehen ist, ist demnach nichts anderes als die nördliche Breite des Ursprungs unseres Koordinatensystems. Die jetzige Lage sei o, x, y, z mit den zugehörigen Koordinaten x, y, z, welche also folgenden Bedingungen unterliegen. Es ist $x'' = x$, $y'' = y \cos\psi - z \sin\psi$, $z'' = z \cos\psi + y \sin\psi$, folglich

$$\xi = x \cos\alpha + (p + z \cos\psi + y \sin\psi) \sin\alpha,$$
$$\eta = y \cos\psi - z \sin\psi,$$
$$\zeta = (p + z \cos\psi + y \sin\psi) \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Aus diesen Gleichungen wollen wir nun

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

bilden.

Die Winkelgeschwindigkeit unserer Erde ist so klein, dass wir das Quadrat derselben $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \omega^2$ in unserer Formel ohne weiteres vernachlässigen können. Mit Rücksicht darauf erhalten wir, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}(p + z\cos\psi + y\sin\psi)\frac{d\alpha}{dt}$$
$$- 2x\left(\frac{dz}{dt}\cos\psi + \frac{dy}{dt}\sin\psi\right)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Mit Zuhilfenahme dieser Gleichung für v^2 bilden wir nun die Bewegungsgleichungen von Lagrange, indem wir als Koordinaten die x, y, z einführen. Für diesen Fall ist $\frac{\partial U}{\partial x} = x$ die Kraft nach der x-Achse u. s. w. Wir erhalten demnach

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = X$$

u. s. f., wenn wir $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ setzen. Wir geben der Einfachheit halber unserm Punkt M die Masse Eins. Seine lebendige Kraft ist also $L = \frac{v^2}{2}$. Beachten wir noch, dass $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$ ist, da ja die Rotation der Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω vor sich geht, so können wir folgende Gleichungen bilden

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = X = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\psi + \frac{dy}{dt}\sin\psi\right),$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = Y = \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt}\sin\psi,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = Z = \frac{d^2z}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt}\cos\psi.$$

§ 44. Fall und Wurf mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Auf unsern Massenpunkt wirke nur die Schwerkraft; dann ist $X = Y = 0$, $Z = -g$. Die im vorhergehenden Paragraph gefundenen Bewegungsgleichungen werden demnach

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -2\omega\cos\psi\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\psi\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= 2\omega\sin\psi\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -g + 2\omega\cos\psi\frac{dx}{dt}. \end{aligned} \tag{24}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\omega\cos\psi . z - 2\omega\sin\psi . y + a, \\ \frac{dy}{dt} &= 2\omega\sin\psi . x + b, \\ \frac{dz}{dt} &= -gt + 2\omega\cos\psi . x + c. \end{aligned}$$

Führen wir nun diese Ausdrücke in die obigen Gleichungen ein und vernachlässigen wir wieder alle Glieder mit ω^2, so

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -2\omega\cos\psi(c - gt) - 2\omega\sin\psi . b, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= 2a\omega\sin\psi, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -g + 2a\omega\cos\psi. \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega\cos\psi\left(ct - \frac{gt^2}{2}\right) - 2\omega\sin\psi . bt + a,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\,a\,\omega \sin\psi \,.\, t + b,$$

$$\frac{dz}{dt} = -g\,t + 2\,a\,\omega \cos\psi \,.\, t + c,$$

was abermals integriert ergiebt

$$x = -\omega \cos\psi \left(ct^2 - \frac{g\,t^3}{3}\right) - \omega \sin\psi \,.\, b\,t^2 + a\,t + \alpha,$$

$$y = a\,\omega \sin\psi \,.\, t^2 + b\,t + \beta,$$

$$z = -\frac{g\,t^2}{2} + a\,\omega \cos\psi \,.\, t^2 + c\,t + \gamma.$$

Es sei nun für $t=0$ der Körper in der Höhe h in vollständiger Ruhe, also $x=y=0$, $z=h$, $a=b=c=0$. Dann bleibt von unseren Gleichungen nur

$$x = \omega \cos\psi \,.\, \frac{g\,t^3}{3},$$

$$y = 0,$$

$$z = h - \frac{g\,t^2}{2}$$

übrig. Wir haben also die gewöhnlichen Fallgesetze, jedoch fällt der Körper nicht vertical, sondern er erhält eine kleine Abweichung nach Osten, da ja die x-Achse nach Osten gerichtet ist.

Werfen wir den Körper senkrecht nach oben, so gestalten sich, wie leicht zu finden, unsere Gleichungen folgendermassen

$$x = -\omega \cos\psi \left(c\,t^2 - \frac{g\,t^3}{3}\right),$$

$$y = 0,$$

$$z = c\,t - \frac{g\,t^2}{2}.$$

Nach der Zeit $t = \frac{2c}{g}$ kommt der Körper wieder auf die Erde. Dann ist $x = -\frac{1}{3}\omega c t^2 \cos\psi$, d. h. der Körper fällt westlich vom Aufstiegsort nieder.

§ 45. Horizontalbewegung mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Wir wollen jetzt bloss die Bewegung in einer Horizontalebene betrachten. Wir setzen deshalb $\frac{dz}{dt} = 0$. Es bleibt uns dann von den Gleichungen (24) nur

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\sin\psi \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\sin\psi \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{25}$$

Bewegt sich der Punkt nach Osten, so ist $\frac{dx}{dt}$ positiv, er erhält eine Beschleunigung nach Süden, d. h. er weicht von der geraden Bahn nach rechts ab. Ist $\frac{dx}{dt}$ negativ, so erfolgt eine Ablenkung nach Norden, also wiederum nach rechts. Dasselbe geschieht bei der Bewegung nach Süden und Norden, wobei $\frac{dy}{dt}$ positiv bezüglich negativ ist. Es erlangt dadurch der Punkt eine Beschleunigung nach Westen, beziehungsweise nach Osten.

Wir haben also das Resultat, dass wohin immer sich ein Körper auf der Erdoberfläche bewegt, er infolge der Erddrehung eine Ablenkung nach rechts erhält.

Das hat einen gewissen Einfluss auf die Bewegung der Winde. Auch will man daraus folgern, dass das rechte Ufer der Flüsse mehr ausgewaschen wird als das linke.

Multiplizieren wir die Gleichungen (24) der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und addieren sie, so ergibt dies

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} = -g\frac{dz}{dt},$$

d. h. wir erhalten dieselbe Bewegungsgleichung, als wäre gar keine Erdrotation vorhanden (§ 15). Es lässt sich also durch keinen Mechanismus, der auf der Erde selbst ruht, die lebendige Kraft der Erddrehung in Arbeit umsetzen.

§ 46. Foucaults Pendelversuch.

Aus den Gleichungen (25) wollen wir folgende bilden

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\psi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

oder integriert

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2)\,\omega\sin\psi + C.$$

Setzen wir $x^2 + y^2 = \varrho^2$, so können wir die doppelte Flächengeschwindigkeit auch folgendermassen darstellen

$$\varrho^2\frac{d\varphi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \varrho^2\omega\sin\psi$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\sin\psi.$$

Das heisst: können wir eine Richtung unabhängig von der Erde fixieren, so scheint dieselbe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \omega \sin\psi$ um eine Vertikalachse zu drehen.

Eine solche fixierte Lage hat z. B. die Schwingungsebene eines Pendels. Dieselbe scheint sich also im Lauf der Zeit zu drehen, und es wies ja Foucault bekanntlich auf diese Weise die Erdrotation nach.

Wir wissen auch, dass ein rotierender Körper, dessen Rotationsachse eine freie Achse ist, seine Lage nicht ändert. Ist eine solche Achse frei beweglich horizontal aufgehängt, so wird auch sie infolge der Erddrehung eine scheinbare Drehung gleich der Schwingungsebene des Foucault'schen Pendels machen.

Hydromechanik.

§ 47. Hydrostatische Grundgleichungen.

In der Hydromechanik behandeln wir die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten und Gase.

Legen wir durch irgend eine ruhende Flüssigkeit eine Ebene, so wird auf sie von jeder Seite und zwar senkrecht zu ihr ein Druck, der sogenannte hydrostatische Druck ausgeübt. Dieser Druck p per Flächeneinheit ist von der Richtung der Ebene unabhängig, d. h. er ist nach allen Richtungen gleich gross.

Denken wir uns ein Elementarparallelepiped der Flüssigkeit, dessen Seiten α, β, γ parallel den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems sind. Die Kräfte, welche parallel zur x-Achse wirken, sind der Druck p, welcher auf der linken Seite $\beta\gamma$ lastet, entgegengesetzt der Druck $-p'$ auf der rechten Seite und dann die x-Komponente der äusseren Kräfte. Diese sollen, wie etwa die Schwerkraft, proportional der Masse der Flüssigkeit sein, und ihre Komponenten auf die Masseneinheit seien X, Y, Z. Dann wirkt also auf unser Element parallel zur x-Achse die Kraft $\varrho\,\alpha\beta\gamma\,X$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit. Alle Kräfte sollen im Gleichgewicht, d. h. es muss

$$p\,\beta\gamma - p'\,\beta\gamma + \varrho\,\alpha\,\beta\,\gamma\,X = 0$$

sein. Wir nehmen nun an, der Druck p sei eine Funktion der Koordinaten, so

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\alpha.$$

führen wir diesen Wert in unsere Gleichung ein, dividieren wir durch $\alpha\beta\gamma$ und überlegen wir, dass wir in ganz ähnlicher Weise auch bei den übrigen Komponenten vorgehen können, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \qquad (26) \\ \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bedingen das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, weshalb man sie die *hydrostatischen Grundgleichungen* nennt.

Haben die Kräfte ein Potential ψ, ist mithin X

$= - \frac{\partial \psi}{\partial x}$ u. s. w., so nehmen unsere Gleichungen die Form

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

u. s. f. an und lassen sich in

$$dp = - \varrho \, d \psi.$$

zusammenziehen.

§ 48. **Abhängigkeit des Drucks von der Schwere in tropfbaren Flüssigkeiten — hydrostatisches Paradoxon.**

Lassen wir die x-Achse vertikal nach oben gehen und führen wir als äussere Kraft nur die Schwere ein, so ist

$$X = Y = 0, \; Z = - g.$$

Unsere Gleichungen werden

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial p}{\partial z} = - \varrho g.$$

Für tropfbare Flüssigkeiten können wir die Dichte als vom Druck unabhängig ansehen; die Integration der Gleichungen ergibt daher

$$p = \text{konst.}$$

Für alle Punkte einer Horizontalebene, welche man auch eine Niveaufläche nennt, und

$$p = c - \varrho g z$$

für die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe.

Die Oberfläche der Flüssigkeit muss daher eine Horizontalebene sein. Legen wir sie in die xy-Ebene, so

$$p = - \varrho g z,$$

d. h. der Druck ist proportional der Tiefe. Die Form des Gefässes spielt in den Gleichungen gar keine Rolle, d. h. sie ist für den Druck der

Flüssigkeit vollsändig gleichgiltig, eine Erscheinung, die man das hydrostatische Paradoxon nennt.

Dasselbe Resultat erhalten wir natürlich auch, wenn wir die Gleichung $dp = -\varrho\, d\psi$ integrieren. Da ϱ konstant, so

$$p = c - \varrho\psi, \tag{27}$$

während $\psi = g z$ ist.

§ 49. Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit.

Dreht sich ein teilweise mit Flüssigkeit angefülltes zylindrisches Gefäss um seine Achse, so rotiert bald die ganze Flüssigkeit mit und bildet dabei eine einwärts gewölbte Oberfläche. Lassen wir ein Koordinatensystem, dessen z-Achse die Zylinderachse ist, in gleicher Geschwindigkeit mit dem Gefäss rotieren, so können wir die Flüssigkeit in Bezug auf dieses System als ruhend ansehen und unsere Gleichungen darauf anwenden. Ist die Winkelgeschwindigkeit ω, so erlangt ein Teilchen die Beschleunigungen

$$X = \omega^2 x,\ Y = \omega^2 y,\ Z = -g.$$

Für diese Kräfte haben wir das Potential

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + g z,$$

wenn wir $x^2 + y^2 = r^2$ einführen. Nach Gleichung (27) ist somit der Druck

$$p = c + \varrho\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - g z\right).$$

Die Flächen konstanten Drucks oder die Niveauflächen und damit auch die Oberfläche sind Rotationsparaboloide.

§ 50. Barometrische Höhenformel.

Wollen wir die hydrostatischen Grundgleichungen auf Gase anwenden, so haben wir zu bedenken, dass bei diesen die Beziehung zwischen Druck und Dichte durch das Boyle'sche Gesetz

$$\frac{p}{\varrho} = R$$

gegeben ist, wobei R eine Konstante bedeutet.

Lassen wir bloss die Schwerkraft mit dem Potential $\psi = g\,z$ wirken, so wird die Gleichung $dp = -\varrho\, d\psi$ sich verwandeln in

$$dp = -\varrho\, g\, d\, z = -\frac{p\,g}{R}\, dz,$$

oder

$$\frac{d\,p}{p} = -\frac{g}{R}\, dz.$$

Durch Integration erhalten wir

$$lp = -\frac{g}{R}\, z + lC,$$

$$p = C\, e^{-\frac{g}{R}\, z}.$$

Für $z = 0$ sei $p = p_0$. Dann wird

$$p = p_0\, e^{-\frac{g}{R}\, z}.$$

Nach dieser Gleichung nimmt der Luftdruck mit wachsender Höhe ab.

§ 51. Kapillaritätskonstanten.

Man nimmt an, dass die kleinsten Teilchen einer Flüssigkeit Anziehungskräfte, die sogenannten Kapillarkräfte, auf einander ausüben, die allerdings nur auf sehr kleine Entfernungen wirksam sind. Das hat zur Folge, dass ein Teilchen im Innern einer Flüssigkeit sich so verhält, als wären derartige Kräfte nicht vorhanden, weil sie nach allen Richtungen gleichmässig wirken, sich daher gegenseitig aufheben. Die Teilchen an der Oberfläche erfahren jedoch einen Zug gegen das Innere der Flüssigkeit. Es ist daher eine Arbeit zu leisten, um ein Flüssigkeitsteilchen aus dem Innern an die Oberfläche zu bringen. Die Vergrösserung der Oberfläche erfordert Arbeit.

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem Gefäss, so ist sie im Allgemeinen teils von der freien Oberfläche, teils von den Gefässwänden begrenzt. Diese dem Gefäss und der Flüssigkeit gemeinsame Fläche nennen wir die gemeinsame Oberfläche. Wollen wir die freie Oberfläche um die Flächeneinheit vergrössern, so haben wir die Arbeit α zu leisten, ebenso bei der Vergrösserung der gemeinsamen Oberfläche um die Flächeneinheit die Arbeit β. α und β nennt man die Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit.

§ 52. Erste Hauptgleichung der Kapillarität.

Um die Gleichgewichtsfigur der freien Oberfläche einer Flüssigkeit zu finden, benutzen wir wieder das Prinzip von d'Alembert. Als äussere Kraft sei nur die Schwere vorhanden. Dieselbe leistet bei einer virtuellen Verschiebung die Arbeit

$$\iiint - \varrho\, g\, \delta z \,.\, dx\, dy\, dz,$$

wenn δz die Komponente der Verschiebung parallel zur z-Achse ist.

Auf der Oberfläche der Flüssigkeit laste der Druck P. Einer Verschiebung δn in der Richtung der Normalen entspricht demnach die Arbeitsleistung der Kräfte

$$-\iint P\,\delta n\,dO.$$

Diese Arbeit ist gleich Null, wenn, wie wir annehmen wollen der Druck P als auch das Volumen der Flüssigkeit konstante Grössen sind. Es ist dann

$$\iint P\,\delta n\,dO = P\iint \delta n\,dO = 0,$$

da ja

$$\iint \delta n\,dO = 0$$

nichts anderes als die Volumsänderung ist.

Bei der Vergrösserung der freien Oberfläche leisten die Kräfte die Arbeit

$$-\alpha\,\delta F.$$

Die gemeinsame Oberfläche ändert sich nicht.

Die Bedingung, dass das Gesamtvolumen der Flüssigkeit konstant bleiben soll, lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken

$$\iiint \delta(dx\,dy\,dz) = \iiint\left(\frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0. \tag{28}$$

Wir können nämlich leicht die Transformation vornehmen

$$\delta(dx\,dy\,dz) = dy\,dz\,d\,\delta x + dx\,dz\,d\,\delta y + dx\,dy\,d\,\delta z =$$

$$= dx\,dy\,dz\left(\frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}\right).$$

Alle angeführten Bedingungen lassen sich in eine Gleichung zusammenfassen, wenn wir Gleichung (28) mit einem willkürlichen Faktor λ multiplizieren und sie zur Summe aller Arbeiten addieren. Das ergibt wie leicht zu finden

$$\iiint\left[-\varrho g\,\delta z + \lambda\left(\frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz - \alpha\,\delta F = 0.\right.$$

Es ist nun

$$\iiint \lambda \frac{d\delta x}{dx} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \,.\, \lambda \delta x - \iiint \delta x \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx\, dy dz.$$

Sind ξ, η, ζ die Winkel, welche die Normale eines Oberflächenelements dO mit den Koordinatenachsen einschliesst, so können wir

$$dy\, dz = dO \cos \xi$$

u. s. w. setzen, und es wird

$$\iint dy\, dz\, \lambda \delta x + \iint dz\, dx \,.\, \lambda \delta y + \iint dx\, dy \,.\, \lambda \delta z = \iint \lambda\, dO\, \delta n,$$

da ja

$$\delta x \cos \xi + \delta y \cos \eta + \delta z \cos \zeta = \delta n$$

ist.

Obige Gleichung lässt sich daher umwandeln in

$$\iiint \left[-\frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta y - \left(\varrho g + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \delta z \right] dx\, dy\, dz +$$
$$+ \iint \lambda\, dF\, \delta n - \alpha\, \delta F = 0.$$

Wir haben hier für dO das Differential dF eingeführt, da ja nur die freie Oberfläche ein von Null verschiedenes δn haben kann.

Das Volumen unserer Flüssigkeit kann natürlich ganz willkürlich gewählt werden, weshalb in unseren Gleichungen das dreifache Integral für sich gleich Null werden muss. Dies ist erfüllt, wenn wir

$$\lambda = c_1 - \varrho g z \tag{29}$$

setzen, wobei c_1 eine beliebige Konstante ist. Es bleibt demnach nur noch

$$\iint \lambda \delta n\, dF - \alpha \delta F = 0. \tag{30}$$

Für ein Oberflächenelement dO können wir nach einem Lehrsatz der Geometrie zwei senkrecht auf einander stehende Ebenen angeben, deren eine die Kurve des grössten, die andere jene des kleinsten Krümmungsradius des Flächenelements enthält. Diese Radien seien r und r'. Wir lassen sie von den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten aus die Winkel $d\varphi$ bezgl. $d\psi$ beschreiben und erhalten so das Oberflächenelement

$$dO = rr' \, d\varphi \, d\psi.$$

Verschieben wir das Element nach der Normalen um δn, so erhalten wir das neue Element

$$dO' = (r + \delta n)(r' + \delta n) \, d\varphi \, d\psi = rr' \, d\varphi \, d\psi \left(1 + \frac{\delta n}{r} + \frac{\delta n}{r'}\right).$$

Der Zuwachs des Oberflächenelements ist mithin

$$dO' - dO = dO \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n.$$

Auf die freie Oberfläche angewandt können wir daher

$$\delta F = \iint dF \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n$$

setzen. Darnach wird also Gleichung (30)

$$\iint \left[\lambda - \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right] dF \, \delta n = 0.$$

Nun ist aber

$$\iint dF \, \delta n = 0,$$

weil dies die Volumsänderung der Flüssigkeit darstellt. Es genügt daher

$$\lambda - \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = c_2,$$

oder mit Zuhilfenahme von (29)

$$\varrho g z + \alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = c \qquad (31)$$

zu setzen, wobei die Konstante c aus bekannten Werten von r, r' und z gefunden werden muss.

Gleichung (31) nennt man die erste Hauptgleichung der Kapillarität.

§ 53. Zweite Hauptgleichung der Kapillarität.

Wir berücksichtigten bisher nicht die Möglichkeit, dass auch die gemeinsame Oberfläche bei der virtuellen Verschiebung eine Grössenänderung erfährt. AB (Fig. 15) sei die Gefässwand, CD die freie Oberfläche. Beide bilden mitsammen den sogenannten Randwinkel i.

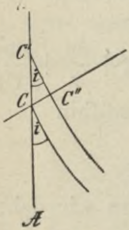

Fig. 15.

Machen wir eine virtuelle Verschiebung δn in der Richtung der Normalen, so erfährt dadurch sowohl die gemeinsame als die freie Oberfläche einen Zuwachs. Nennen wir die Peripherie des Gefässes p, so ist der Zuwachs der freien Oberfläche längs des Umfangsdifferentials dp durch C′C″ dp, jener der gemeinsamen durch CC′ dp gegeben. Die bei der virtuellen Verschiebung längs des ganzen Umfangs geleistete Arbeit muss für den Fall des Gleichgewichts wiederum gleich Null sein, wornach wir die Gleichung erhalten

$$-\alpha \int C'C''\,dp - \beta \int CC'\,dp = 0.$$

Nun ist

$$C'C'' = CC' \cos i,$$

daher

$$\int CC' \,(\alpha \cos i + \beta)\,dp = 0,$$

was erfüllt ist, wenn wir

$$\alpha \cos i + \beta = 0$$

setzen. Das ist die zweite Hauptgleichung der Kapillarität.

§ 54. Steighöhe in Röhren und zwischen Platten.

Wir können die erste Hauptgleichung in der Form

$$\varrho g z = -\alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) + c$$

schreiben. Dabei ist der Krümmungsradius r positiv, wenn er innerhalb der Flüssigkeit liegt, wenn wir also eine konvexe Oberfläche haben. Dies ist bei Quecksilber in einer Glasröhre der Fall. Ist die Röhre eng genug, so können wir die Oberfläche des Quecksilbers, den Meniskus, als Halbkugel ansehen, deren Radius mit jenem der Röhre übereinstimmt. Wählen wir die Quecksilberoberfläche in einem weiten Gefäss als xy-ebene, so ist für dieselbe $z = 0$, $r = r' = \infty$, also $c = 0$, und wir erhalten

$$\varrho g z = -\alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Für eine enge Röhre vom Radius r, die wir in das Quecksilber eintauchen, wird diese Gleichung

$$\varrho g z = -\frac{2\alpha}{r}.$$

Haben wir zwei parallele ebene Platten vom Abstand 2r, so bildet die Quecksilberoberfläche eine Zylinderfläche, deren einer Krümmungsradius gleich r, während der andere gleich ∞ ist. Für diese Anordnung erhalten wir demnach

$$\varrho g z = -\frac{\alpha}{r}.$$

Zwischen zwei Platten, deren Abstand gleich dem Durchmesser einer Röhre ist, steht also die Quecksilberoberfläche halb so tief unter dem normalen Niveau als in der Röhre.

Ist die Oberfläche nicht konvex, sondern konkav, so liegen die Krümmungsradien ausserhalb der Flüssigkeit. Wir müssen sie dann als negativ ansehen, d. h. eine benetzende Flüssigkeit steigt in einer engen Röhre, u. z. ist die Steighöhe verkehrt proportional dem Krümmungsradius und im obigen Sinn doppelt so gross als zwischen zwei Platten. Dies alles gilt jedoch nur dann, wenn wir den Durchmesser der Röhre gegenüber der Steighöhe vernachlässigen können. Die genauere Formel werden wir im § 56 kennen lernen.

§ 55. Blasen und Tropfen.

Wir betrachten die Gestalt der Oberfläche längs einer geraden Wand. Wir erhalten eine Zylinderfläche, der eine Krümmungsradius ist daher $r' = \infty$. Für die Leitlinie OC der Zylinderfläche (Fig. 16) gilt

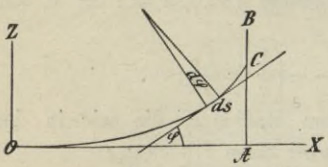

Fig. 16.

$$r\,d\varphi = ds \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Da aber nach unserer ersten Hauptgleichung $\varrho g z = \frac{\alpha}{r}$, so auch

$$\varrho g z = \alpha \frac{d\varphi}{ds} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \alpha \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Wir haben ferner $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$, also

$$\varrho g z \frac{dz}{dx} = \alpha \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \alpha \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$\frac{\varrho g z^2}{2} = -\alpha \cos \varphi + C.$$

Für $z = 0$ wird auch $\varphi = 0$, daher $C = \alpha$ und

$$\frac{\varrho g z^2}{2} = \alpha (1 - \cos \varphi).$$

Für den Punkt an der Gefässwand erkennt man ohne weiteres, dass der Winkel φ das Komplement des Randwinkels i ist. Die Erhebung z_1 der Flüssigkeit am Rand über das normale Niveau ist also durch

$$\frac{\varrho g z_1^2}{2} = \alpha\,(1 - \sin i)$$

gegeben. Infolge der quadratischen Form der Gleichung erkennt man jedoch nicht, ob die Erhebung positiv oder negativ ist, aber wir wissen, dass eine Erhebung nur bei benetzenden Flüssigkeiten vorhanden ist.

Eine nicht benetzende Flüssigkeit auf eine ebene Unterlage gebracht bildet einen Tropfen. Ist er so gross, dass wir seine Höhe gegenüber seinem Durchmesser vernachlässigen können, so lässt sich auf ihn unsere Gleichung anwenden. Im Punkt C (Fig. 17) stehe die Tangente an die Durchschnittskurve des Tropfens senkrecht. Der Winkel S ist 90°, $\cos\varphi = 0$. Der Punkt C liegt daher um h tiefer als der höchste Punkt des Tropfens. Wir erhalten für ihn die Formel

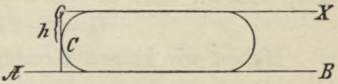

Fig. 17.

$$h^2 = \frac{2\alpha}{\varrho g},$$

nach welcher wir die Kapillaritätskonstante berechnen können. Die Figur 17 können wir umkehren und haben dann den Fall einer Luftblase unter einer Glasplatte, welche die Flüssigkeit oben abschliesst. Solche Blasen ergeben also ebenfalls ein Mittel zur Berechnung der Konstanten α.

§ 56. Capillarröhren.

Tauchen wir einen beliebig begrenzten Cylinder vom Umfang L mit seiner Achse senkrecht in eine Flüssigkeit und machen wir jetzt, indem wir entweder die Flüssigkeit oder den Cylinder heben oder senken eine virtuelle Verschiebung, so muss für den Fall des Gleichgewichts die Summe sämtlicher Arbeiten gleich Null sein.

Bei einer Capillalröhre vom Radius r können wir folgendermassen verfahren. Wir heben die Flüssigkeit in derselben um δh. Dabei erhalten wir eine Vergrösserung der gemeinsamen Oberfläche $2 \pi r \delta h$. Die Arbeit ist $-2 \pi \beta r \delta h$. Die Arbeit, um die Flüssigkeitssäule vom Gewicht G zu heben ist $G \delta h$, und für den Fall des Gleichgewichts muss

$$-2 \pi \beta r \delta h - G \delta h = 0$$

sein, was wir auch so schreiben können

$$G = -2 \pi \beta r.$$

Haben wir keinen Kreiscylinder, so brauchen wir bloss $2 \pi r$ durch den Umfang L zu ersetzen und erhalten die allgemeinere Formel

$$G = -\beta L = \alpha \cos i \,.\, L,$$

welch letztere Beziehung unmittelbar aus der zweiten Hauptgleichung folgt.

Benetzt eine Flüssigkeit die Gefässwand vollkommen, so können wir $i = 0$, $\cos i = 1$ setzen. Dann wird für einen Kreiscylinder

$$G = 2 \pi r \alpha.$$

Für ein genügend enges Rohr lässt sich der Meniskus als Halbkugel auffassen. Nennen wir die Höhe des tiefsten Punkts des Meniskus über dem normalen Niveau h, so ist das gehobene Gewicht

$$\varrho\, g\, (\pi r^2 h + \pi r^2 . r - \frac{2}{3} \pi r^3) =$$

$$= \varrho\, g\, (\pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi r^3) = 2 \pi r \alpha,$$

oder

$$h + \frac{1}{3} r = \frac{2 \alpha}{\varrho\, g\, r}.$$

Es ist dies die genauere Formel für die Steighöhe von Flüssigkeiten in Capillarröhren.

Nach ganz demselben Vorgang lässt sich das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit berechnen, wenn man eine kreisrunde Platte aus ihr herauszieht, was eine Methode ergiebt, mit Hilfe der Wage die Capillaritätskonstante zu bestimmen, indem man das Gewicht sucht, welches zum Abreissen einer Platte von der Flüssigkeitsoberfläche erforderlich ist.

Ebenso können wir einen Einfluss der Capillarkräfte auf den Stand des Aräometers nachweisen, da das Gewicht desselben scheinbar um das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit vermehrt wird.

§ 57. Hydrodynamische Grundgleichungen.

Ein Elementarparallelepiped von den Seiten α, β, γ parallel zu den 3 Achsen eines Koordinatensystems hat die Masse $\varrho \alpha \beta \gamma$. Die Kraft, welche parallel der x-Achse auf dasselbe wirkt, kann also gemessen werden durch

$$\varrho \alpha \beta \gamma \frac{d^2 x}{d t^2} = \varrho \alpha \beta \gamma \frac{d u}{d t},$$

wenn wir mit u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit bezeichnen. Die Kräfte auf die Masseneinheit seien wieder dieselben wie in § 43, also

$X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$. Wir erhalten demnach

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Es ist nun

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Durch Einführung dieses Werts in unsere Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \tag{32}$$

wobei die zwei letzten Gleichungen analog der ersten gebildet sind. Zu diesen Gleichungen kommt noch die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*. Sämtliche Gleichungen nennt man die *Euler'schen Grundgleichungen der Hydrodynamik*.

Die *Kontinuitätsgleichung* giebt uns die *Massenänderung* oder, wenn man will, die *Dichtenänderung* an einem bestimmten Ort an. Dieselbe ist für die Zeit dt in unserem Elementarparallelepiped gleich $\alpha\beta\gamma\frac{\partial\varrho}{\partial t}dt$, und sie muss gleich sein der in das Volumelement während der Zeit dt einströmenden Flüssigkeit vermindert um die während derselben Zeit ausströmenden. Von links strömt durch die Fläche $\beta\gamma$

die Menge $\beta\gamma\varrho\,u\,dt$ ein, rechts $\beta\gamma\varrho' u' dt$ aus. Aehnlich verhält es sich mit der oberen und unteren, vorderen und hinteren Fläche des Parallelepipeds.

Nun ist

$$\varrho' u' = \varrho u + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} dx,$$

daher

$$\beta\gamma\varrho\,u\,dt - \beta\gamma\varrho' u' dt = -\alpha\beta\gamma \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} dt.$$

Der Gesamtmassenzuwachs ist daher

$$\alpha\beta\gamma \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt = -\alpha\beta\gamma\,dt \left[\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right],$$

woraus wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0$$

erhalten.

§ 58. Ausflussgeschwindigkeit einer tropfbaren Flüssigkeit.

Wir machen in den Boden eines Gefässes ein Loch, aus welchem senkrecht nach unten die Flüssigkeit strömen soll. In die Richtung des Strahls legen wir die z-Achse. Es ist dann $X = Y = u = v = 0$, $Z = g$. Die Gleichungen (32) reduzieren sich demnach auf

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Ist die Grösse des Lochs im Vergleich zum Querschnitt des Gefässes zu vernachlässigen, so können wir für eine bestimmte Zeit das Flüssigkeitsniveau als konstant, also auch den ganzen Strömungsvorgang als stationär ansehen. Dann wird $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, und es bleibt uns nur

$$w \frac{d w}{d z} + \frac{1}{\varrho} \frac{d p}{d z} = g,$$

was integriert ergiebt

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = g z + C.$$

An einem Punkt im Innern des Gefässes von der Ordinate $z = z_1$ sei $w = 0$, $p = (h - z_1) \varrho g$, das ist der hydrostatische Druck. Dann ist $(h - z_1) g = - g z^1 + C$, also $C = h g$. Unmittelbar unter der Oeffnung ist der Druck auf die Flüssigkeit gleich Null. Für diesen Punkt setzen wir $z = 0$. Wir erhalten daher $\frac{w^2}{2} = h g$ oder

$$w = \sqrt{2 g h},$$

das bekannte Ausflussgesetz von Torricelli.

Es lässt sich natürlich dieses Gesetz auch ohne weiters aus dem Princip von der Erhaltung der Energie ableiten. Es muss ja die lebendige Kraft der Teilchen beim Ausfluss gleich der Arbeit sein, welche die Schwere beim Wandern der Teilchen von der Flüssigkeitsoberfläche bis zum Ausfluss leistet. Dies ergiebt dann für die Ausflussgeschwindigkeit einfach die Geschwindigkeit, wie sie die Fallgesetze verlangen.

§ 59. Ausflussgeschwindigkeit der Gase.

Wir nehmen an, ein Gefäss enthalte komprimierte Luft, welche durch ein feines Loch in dünner Wand ausströmt. Die Ausströmungsrichtung sei die x-Achse, äussere Kräfte seien nicht vorhanden. Dann haben wir nach (32) vorausgesetzt, dass wir die Strömung wiederum als stationär ansehen können,

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0.$$

Nach Boyle ist

$$\frac{p}{\varrho} = R,$$

also

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{R}{p}\frac{dp}{dx}.$$

oder integriert

$$l p = -\frac{u^2}{2R} + l C.$$

Im Innern des Gefässes sei $p = p_1$ und $u = 0$, ausserhalb $p = p_0$. Dann wird $C = p_1$, also

$$l\frac{p_1}{p} = \frac{u^2}{2R},$$

wornach wir für die Ausströmungsgeschwindigkeit u_0 die Gleichung

$$l\frac{p_1}{p_0} = \frac{u_0^{\,2}}{2R}$$

erhalten. Wir lassen nun zwei verschiedene Gase unter ganz denselben Bedingungen ausströmen. Die Ausströmungsgeschwindigkeiten seien u_0 und u'_0. Die zugehörigen R sind demnach $\frac{p}{\varrho}$ und $\frac{p}{\varrho'}$ woraus die Gleichungen folgen

$$\frac{u_0^{\,2}}{2R} = \frac{u_0'^{\,2}}{2R'},$$

$$\frac{u_0^{\,2}}{u_0'^{\,2}} = \frac{R}{R'} = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

oder schliesslich

$$\frac{u_0}{u_0'} = \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}.$$

Es verhalten sich die Quadrate der Ausflussgeschwindigkeiten wie umgekehrt die Dichten, ein Gesetz von Graham, nach welchem Bunsen seine bekannte Methode, die Dichte der Gase zu bestimmen, begründete.

§ 60. Transformation der Euler'schen hydrodynamischen Grundgleichungen.

Die Flüssigkeitsmenge, welche in einem Elementarparallelepiped enthalten ist, wird infolge der verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten in den einzelnen Punkten der Flüssigkeit mit der Zeit ihre Gestalt nicht beibehalten können, was zur Folge hat, dass neben der fortschreitenden auch noch eine drehende Bewegung der Flüssigkeit in Betracht zu ziehen ist.

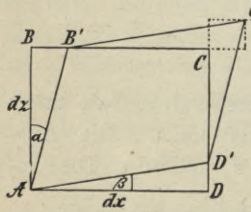

Fig. 18.

Es sei z. B. A B C D (Fig. 18) die der xz-Ebene parallele Fläche des Flüssigkeitselements mit den Seiten dx und dz. Die Geschwindigkeit u parallel zur x-Achse sei in B grösser als in A, die Geschwindigkeit w parallel zur z-Achse grösser in D als in A. Nach der Zeit dt hat daher unser Rechteck die Gestalt A B' C' D' angenommen. Es hat sich die Seite AB $= dz$ um den Winkel α, dieSeite A D $= dx$ um $-\beta$

gedreht. Wir können daher als mittlere Drehung des gesamten Rechtecks um die y-Achse $\frac{\alpha-\beta}{2}$ setzen.

Nun ist

$$\alpha\,\partial z = (u' - u)\,dt,$$

wenn wir unter u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit parallel zur x-Achse in A, unter u' dieselbe Grösse in B verstehen. Es ist also

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial z}\,dt$$

und analog

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x}\,dt.$$

Die mittlere Drehung um die y-Achse in der Zeit dt ist demnach

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dt.$$

Durch cyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir dann für den mittleren Drehungswinkel um die x-Achse $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dt$, um die z-Achse $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dt$. Dividieren wir die Drehungswinkel durch die Zeit dt, so erhalten wir die **Winkelgeschwindigkeiten des Flüsssigkeitselements** um die drei Achsen

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad (33) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Werden diese drei Grössen Null, so findet in der

Flüssigkeit **keine Rotation** der Teilchen um sich selbst statt. Für diesen Fall muss demnach

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{34}$$

sein. Können wir eine Funktion φ der Veränderlichen t, x, y, z angeben von der Eigenschaft, dass

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist, so sind damit die Gleichungen (34) erfüllt. Die Funktion φ steht hier in demselben Verhältnis zu den Geschwindigkeiten u, v, w, wie das Potential einer Kraft zu deren Komponenten. Man nennt daher nach v. Helmholtz φ auch das **Geschwindigkeitspotential**.

In der ersten der hydrodynamischen Grundgleichungen (32)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

können wir nach den Gleichungen (33)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} - 2\zeta$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2\eta$$

setzen und erhalten dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} + 2(w\eta - v\zeta) = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Zwei ähnliche Gleichungen erscheinen bezüglich der beiden anderen Achsen. Beachten wir noch, dass

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x}$$

ist, wenn wir $u^2 + v^2 + w^2 = c^2$ einführen, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\eta - v\zeta) &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\zeta - w\xi) &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial y}, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\xi - u\eta) &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Wir differenzieren nun die zweite dieser Gleichungen nach z, die dritte nach y, beachten, dass nach den Gleichungen (33)

$$2\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

und erhalten so

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v\xi - u\eta) - \frac{\partial}{\partial z}(u\zeta - w\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit — und nur mit solchen wollen wir uns hier befassen — ist die Kontinuitätsgleichung (§ 57)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen (33) ergeben

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Damit können wir unsere Gleichungen verwandeln in

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} - \xi\frac{\partial u}{\partial x} - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Fassen wir ein ganz bestimmtes Flüssigkeitsteilchen ins Auge, so sind seine Winkelgeschwindigkeiten Funktionen der Zeit dt und der Koordinaten x, y, z. Ist daher zu einer bestimmten Zeit t

$$\xi = f(t, x, y, z),$$

so haben wir nach der Zeit dt

$$\xi = f(t + dt, x + u\,dt, y + v\,dt, z + w\,dt).$$

Daraus folgt

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

und wir erhalten schliesslich

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

und ähnliche Ausdrücke für $\frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$.

Haben die Kräfte ein Potential ψ, so dass

$$Z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \; Y = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

ist ferner zu irgend einer Zeit

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

d. h. ist keine Rotation der Flüssigkeitsteilchen vorhanden, so tritt in einer idealen Flüssigkeit — das ist eine ohne innere Reibung — nie eine drehende Bewegung der Teilchen ein. Hingegen werden jene Teilchen, welche rotieren, nie ihre Rotationsbewegung verlieren.

§ 61. **Wirbelbewegung.**

Wir denken uns eine Flüssigkeit, welche so um die z-achse rotiert, dass alle Teilchen einer konzentrischen Cylinderfläche denselben Bewegungszustand haben. Ist in der Entfernung r von der z-achse die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit ω, so ist

$$u = -\omega y, \; v = \omega x, \; w = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega - y \frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\omega - \frac{y^2}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr},$$

da wegen $x^2 + y^2 = r^2$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ ist. Desgleichen wird

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \omega + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr}.$$

folglich wird

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr}.$$

Es soll nun für $r < r_0$ $\zeta = \zeta_0$ und für $r > r_0$ $\zeta = o$ sein, wobei ζ_0 und r_0 Konstanten bedeuten. Innerhalb des Cylinders vom Radius r_0 haben wir demnach

$$\zeta_0 = \omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr},$$

was wir umformen können in

$$\frac{2dr}{r} + \frac{d\omega}{\omega - \zeta_0} = 0.$$

Durch Integration erhalten wir

$$l\, r^2 + l\,(\omega - \zeta_0) = l\, A$$

oder

$$r^2\,(\omega - \zeta_0) = A,$$

$$\omega = \zeta_0 + \frac{A}{r^2}.$$

Da in der z-achse selbst die Rotationsgeschwindigkeit nicht unendlich werden soll, so haben wir $A = 0$ zu setzen. Wir erhalten also

$$\omega = \zeta_0.$$

Das heisst: Der Flüssigkeitscylinder vom Radius r_0 rotiert wie ein fester Körper um die z-achse.

Setzen wir hingegen $\zeta = 0$, so haben wir die Gleichung

$$\omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr} = 0$$

zu lösen. Dies ergibt

$$\omega = \frac{C}{r^2}.$$

Da wir eine Unstetigkeit ausschliessen, so müssen für $r = r_0$ die beiden ω einander gleich werden, d. h. es muss

$$\zeta_0 = \frac{C}{r_0^{\ 2}}.$$

sein. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Flüssigkeit um die z-achse bewegt, ist sonach

$$r\omega = \frac{C}{r} = \frac{\zeta_0 r_0^{\ 2}}{r}.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen der Gesamtbewegung der Flüssigkeit und der rotierenden Bewegung der einzelnen Teilchen um sich selbst. Während wir nämlich für unseren Flüssigkeitswirbel, sobald $r > r_0$ ist, zwar eine rotierende Bewegung der gesamten Flüssigkeit haben, macht jedes Teilchen um sich selbst keine Drehung.

§ 62. Stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit.

Ist die Geschwindigkeit und deren Richtung in jedem Punkt einer Flüssigkeit von der Zeit unabhängig, so nennen wir dies einen stationären Zustand. Für diesen wird also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

werden. Die Gleichungen (32) geben dann, wenn wir für die Kräfte das Potential V einführen, sie addieren und integrieren

$$\frac{c^2}{2} + V + \frac{p}{\varrho} = C,$$

wobei $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$ bedeutet. Wirkt nur die Schwere, so ist

$$V = g\,z,$$

daher der Druck

$$p = \varrho\left(C - g\,z - \frac{c^2}{2}\right).$$

Diese Gleichung wollen wir benützen, um den Druck zu berechnen, welchen eine Flüssigkeit, die parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit u_0 fliesst, ausübt, wenn wir in dieselbe einen kreiscylindrischen Stab vom Radius R stecken. Die Stabachse bilde die z-Achse eines Koordinatensystems. Es wird natürlich dadurch in der Umgebung des Stabs die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Flüssigkeit geändert. Denken wir uns den Stab jedoch unendlich lang, so wird sich diese Aenderung nur auf u und v, nicht aber auf w beziehen. Es bleibt also $w = 0$, und wir brauchen bloss den Vorgang in der xy-Ebene der Betrachtung zu unterziehen.

Wir setzen $x^2 + y^2 = r^2$. Nach der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

muss also für das Geschwindigkeitspotential φ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

existieren, welche sich in unserm Fall auf

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{36}$$

reduziert, da ja $w = 0$ ist.

Diese Bedingungsgleichung wird erfüllt durch

$$\varphi = \Phi - u_0 x,$$

wenn für $r = \infty$ $\Phi = 0$ wird, und die Beziehung besteht

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Wir haben dann in der That im obigen Sinn nur eine Strömung parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit u_0. Es wird sich im Späteren zeigen, dass die Funktion

$$\Phi = \frac{Ax}{r^2},$$

mithin

$$\varphi = \frac{Ax}{r^2} - u_0 x$$

allen gestellten Anforderungen genügt. Vorerst sieht man durch Differentiation ohne weiteres, dass Gleichung (36) erfüllt ist.

Senkrecht zur Oberfläche des Cylinders kann natürlich keine Geschwindigkeitskomponente vorhanden sein, d. h. es muss

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = 0$$

sein. Wir wollen $\frac{x}{r} = \cos\gamma$ setzen und erhalten so

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos\gamma - r u_0 \cos\gamma,$$

mithin

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = -\frac{A}{R^2}\cos\gamma - u_0\cos\gamma = 0.$$

Daraus folgt

$$A = -u_0 R^2$$

und

$$\varphi = -u_0 x \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right),$$

daher

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{2 u_0 x^2 R^2}{r^4},$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2 u_0 R^2 x y}{r^4}.$$

Für die Oberfläche des Cylinders erhalten wir nun

$$c_R^2 = u_R^2 + v_R^2 = \frac{4 u_0^2 y^2}{R^2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für den Druck ein, so ergibt dies schliesslich

$$p = \varrho \left(C - g z - \frac{c_R^2}{2}\right) = \varrho \left(C - g z - \frac{2 u_0^2 y^2}{R^2}\right).$$

Es wird demnach auf die linke Seite des Cylinders genau derselbe Druck wie auf die rechte ausgeübt. Dasselbe ist der Fall, wenn sich in ruhender Flüssigkeit der Cylinder parallel zu sich selbst fortbewegt. Er erfährt dann gar keinen Widerstand. Auch für eine Kugel und für ein Ellipsoid kann man diese auffallende Erscheinung nachweisen. Allerdings muss die Flüssigkeit eine ideale sein.

§ 63. **Wasserwellen.**

Wir denken uns Wasserwellen, welche in der Richtung der x-Achse fortschreiten. Die Wasserteilchen machen also nur Bewegungen parallel zur x- und z-Achse. Es verwandelt sich daher die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

wegen $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ in

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

oder wenn wir das Geschwindigkeitspotential einführen,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Wir untersuchen nun, ob die Wellenbewegung eine harmonische sein kann. Wir setzen demnach

$$\varphi = \mathfrak{Z} \cos a (x - c t),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ eine Funktion von z allein darstellen soll. Es ist also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - a^2 \mathfrak{Z} \cos a (x - c t),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d z^2} \cos a (x - c t),$$

Beide Gleichungen addiert müssen Null geben, was zur Folge hat

$$\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d z^2} = a^2 \mathfrak{Z}.$$

Als Lösung dieser Gleichung haben wir

$$\mathfrak{Z} = A e^{az} + B e^{-az}.$$

Am Boden des Gefässes, d. h. für $z = 0$ kann nun keine Bewegung parallel zur z-Achse stattfinden, es muss hier $w = 0$, also auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sein. Es ist aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a (A e^{az} - B e^{-az}) \cos a (x - c t).$$

Soll dies für $z = 0$ ebenfalls Null werden, so muss

$$A = B$$

sein, woraus resultiert

$$\varphi = A (e^{az} + e^{-az}) \cos a (x - c t).$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit c bedienen wir uns der hydrodynamischen Grundgleichungen (32), in welchen wir die Geschwindigkeiten durch deren Potential ersetzen wollen. Ferner wollen wir annehmen, dass wir es nur mit kleinen Amplituden zu thun haben, so dass wir die Produkte $u\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w. vernachlässigen können. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

und zwei analoge Gleichungen nach den beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems. Unter V verstehen wir das Potential der Kräfte X, Y, Z. Durch Integration erhalten wir also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \frac{p}{\varphi} = C.$$

Auf die Flüssigkeit wirke bloss die Schwere. Dann ist $V = g z$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z + \frac{p}{\varrho} = C.$$

Da wir nur kleine Amplituden annehmen, so können wir den Druck an irgend einer Stelle der Flüssigkeit als unabhängig von der Zeit ansehen, so dass wir durch Differentiation nach t die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

erhalten. Nun ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

mithin

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Aus unserer Lösung für φ finden wir jetzt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - a^2 c A (e^{az} + e^{-az}) \cos a (x - c t)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a A (e^{az} - e^{-az}) \cos a (x - c t).$$

Setzen wir hier für z eine beliebige Höhe h der Flüssigkeit ein und bilden mit den so erhaltenen Werten die Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, so erhalten wir daraus den Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c für die betreffende Höhe h der Flüssigkeit. Dieser ist gegeben durch

$$c^2 = \frac{g}{a} \cdot \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}}.$$

Den Wert für a können wir sehr leicht finden, wen wir die Wellenlänge λ einführen. Wächst nämlich x um λ, so muss sich derselbe Zustand wiederholen. Es muss also $a \lambda = 2 \pi$, folglich

$$a = \frac{2 \pi}{\lambda}$$

sein, woraus folgt

$$c^2 = \frac{g \lambda}{2 \pi} \cdot \frac{e^{\frac{2 \pi h}{\lambda}} - e^{\frac{-2 \pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2 \pi h}{\lambda}} + e^{\frac{-2 \pi h}{\lambda}}}.$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig, was zur Folge hat, dass Dispersion der Wellen eintritt. Ferner ändert sie sich mit der Höhe der Flüssigkeit. Jede Störung in einer Flüssigkeit wird daher bei der

Fortpflanzung sofort ihre Gestalt ändern, wenn sie nicht einer harmonischen Kurve entspricht. Ist h gegenüber λ sehr gross, so wird

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Diese Formel gilt demnach an der Oberfläche tiefer Gewässer. Es ist dort also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen einfach der Wurzel aus der Wellenlänge proportional.

§ 64. Innere Reibung — Ausfluss aus engen Röhren.

Eine bewegte Flüssigkeit, welche in einem Gefäss sich selbst überlassen wird, kommt allmählich zur Ruhe. Die Ursache davon ist die innere Reibung der Flüssigkeit. Strömen nämlich zwei parallele Flüssigkeitsschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, die langsamere auf die schnellere eine Verzögerung aus.

Wir nehmen der Einfachheit halber ebene Schichten an. Die Geschwindigkeit ändere sich von Schicht zu Schicht in linearem Verhältnis. Nach Newton ist dann die innere Reibung

$$R = -\eta f \frac{du}{dz}. \tag{37}$$

Diese Gleichung besagt folgendes. Aendert sich die Geschwindigkeit u der Schichte senkrecht zu ihrer Bewegungsebene im Verhältnis $\frac{du}{dz}$, so übt auf eine Ebene von der Grösse f die darunter befindliche Flüssigkeitsschichte in der Richtung der Bewegung einen Zug

$-\eta f \frac{du}{dz}$ aus. η ist eine Konstante der Flüssigkeit. Man nennt sie die Reibungskonstante oder den Reibungskoefficienten.

Wir wollen den Einfluss der inneren Reibung auf die Bewegung von Flüssigkeiten in engen Röhren untersuchen. Bezüglich der Röhrenachse sei alles symmetrisch angeordnet. Wir bilden uns einen Elementar-Cylinder, indem wir um die Achse zwei Cylinderflächen vom Radius r und $r + dr$ legen. Die Länge des Cylinders sei ξ. Die Bewegung der Flüssigkeit sei stationär, d. h. die Summe aller Kräfte, welche an unserem Cylinder angreifen, muss Null sein. Auf die linke Seite des Cylinders, dessen Achse wir uns horizontal denken, wirke der Druck p, das ergiebt die Kraft $2\pi r\,dr \cdot p$. Von der rechten Seite her haben wir die Kraft $-2\pi r\,dr\,p'$. Nun ist

$$p' = p + \frac{dp}{dx}\xi,$$

mithin der resultierende Druck

$$2\pi r\,dr\,(p - p') = -2\pi r \xi \frac{dp}{dx} dr.$$

Zu dieser Kraft kommen noch die Reibungskräfte. Für die innere Cylinderfläche haben wir nach Gleichung (37)

$$R = -2\pi r \xi \eta \frac{du}{dr},$$

für die äussere

$$R' = R + \frac{dR}{dr} dr.$$

Beide Kräfte wirken aber in entgegengesetztem Sinn, weshalb wir sie von einander zu subtrahieren haben, wonach wir erhalten

$$R - R' = -\frac{dR}{dr} dr = 2\pi\xi\eta \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) dr.$$

Die Summe aller Kräfte, welche an unserem Elementarcylinder angreifen, ist also

$$-2\pi r\xi \frac{dp}{dx} dr + 2\pi\xi\eta \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) dr = 0,$$

woraus folgt

$$r\frac{dp}{dx} - \eta \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Da der Druck p von r völlig unabhängig angenommen werden soll, so genügt für unsere Gleichung,

$$p = ax + b$$

zu setzen, was zur Folge hat, dass

$$ar - \eta \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

und integriert

$$\frac{ar^2}{2} - \eta r \frac{du}{dr} = C$$

wird. Schreiben wir diese Gleichung

$$\frac{ar}{2} - \eta \frac{du}{dr} = \frac{C}{r}$$

und integrieren nochmals, so bleibt

$$\frac{ar^2}{4} - \eta u = C\, l\, r + D.$$

Für $r = 0$ kann nun die Geschwindigkeit u nicht unendlich gross werden, es muss also $C = 0$ sein. Ferner sei die Geschwindigkeit an der Röhrenwand Null, d. h. für $r = r_1$ ist $u = 0$, daher $D = \frac{a r_1^2}{4}$. Demnach wird unsere Gleichung

$$u = -\frac{a}{4\eta}(r_1{}^2 - r^2).$$

Diese Formel für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit können wir nun benützen, um die **Ausflussmenge** zu bestimmen. Durch das Querschnittselement $2\pi r\,d\,r$ wird in der Sekunde das Flüssigkeitsvolumen

$$2\pi u\,r\,d\,r = -\frac{\pi a}{2\pi}(r_1{}^2 - r^2)\,r\,d\,r$$

fliessen. Durch den ganzen Querschnitt strömt daher die Menge

$$-\frac{\pi a}{2\eta}\int_0^{r_1}(r_1{}^2 - r^2)\,r\,d\,r = -\frac{\pi a}{2\eta}\left[\frac{r_1{}^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{r_1} = \frac{\pi a r^4}{8\eta} =$$

$$= \frac{\pi(p_1 - p_0)\,r^4}{8\eta l},$$

wenn wir unter p_1 den Druck am Anfang unter p_0 jenen am Ende verstehen und l die Länge der Röhre ist, da ja dann $a = -\frac{p_1 - p_0}{l}$ wird. Die von uns gewonnene Gleichung enthält das Gesetz von **Poiseuille**, nach welchem die **Ausflussmenge der 4. Potenz des Radius und dem Druckunterschied am Anfang und Ende der Röhre direkt, ihrer Länge verkehrt proportional ist.**

Akustik.

§ 65. Gegenstand der Akustik — Wellenbewegung — schwingende Bewegung.

Wir behandeln in der Akustik, der Lehre vom Schall, jene Bewegungserscheinungen, welche immer in Begleitung einer Schallwahrnehmung in der Aussenwelt auftreten und die man deshalb mit Recht als die physikalische Ursache des Schalls ansieht.

Unser Gehör wird durch die Bewegungen der Luft erregt, welche in unsere Ohrmuschel gelangen. Die Luft pflanzt also den Schall fort, man sagt, sie vollführt eine Wellenbewegung.

Gesetzmässigkeiten der Schallerregung hat man nur in jenen Erscheinungen gefunden, denen eine sich regelmässig wiederholende Bewegung als Begleiterscheinung entspricht. Es sind dies die Klänge. Ein Klang wird demnach durch eine sogenannte periodische, eine schwingende Bewegung erzeugt und vom umgebenden Medium, gewöhnlich Luft, zum Ohr fortgepflanzt. Es wird daher unsere Hauptaufgabe sein, die Wellenbewegung und die schwingende Bewegung zu untersuchen.

§ 66. Gleichungen für die Schallbewegung in der Luft.

Die Bewegung der uns umgebenden Luft muss sich durch die im § 57 abgeleiteten hydrodynamischen Grundgleichungen darstellen lassen. Für unsern Zweck vereinfachen sie sich bedeutend, da wir äussere Kräfte völlig ausschliessen wollen, ferner sollen alle vorkommenden Geschwindigkeiten sehr klein sein, so dass auch die auftretenden Dichtenänderungen sehr klein ausfallen, weshalb alle Produkte und höheren Potenzen solcher kleinen Grössen unbedenklich vernachlässigt werden können.

Die Dichte wollen wir darstellen durch

$$\varrho = \varrho_0 \, (1 + \sigma),$$

wobei ϱ_0 die Dichte der ruhenden Luft sein soll, während σ die Abweichung der Dichte von ihrem normalen Zustand angibt. Die Kontinuitätsgleichung wird demnach, da

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \varrho_0 \, \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

ferner σ, u, v, w sehr kleine Grössen sind

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{38}$$

Die Bewegungsgleichungen werden, da auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w. sehr kleine Grössen sind,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{39}$$

u. s. w. Wir haben hier die fünf Grössen σ, u, v, w, p, deren Abhängigkeit von der Zeit und dem Ort bestimmt werden soll. Dazu ist neben den vier vorhandenen Gleichungen noch eine fünfte nötig. Wir benützen als solche das Poisson'sche Gesetz

$$p v^k = p_0 v_0^k, \tag{40}$$

welches in der mechanischen Wärmetheorie begründet wird und die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases angibt, wenn die Zustandsänderung eine sogenannte adiabatische ist, d. h. eine solche, bei welcher die Bewegungen so rasch vor sich gehen, dass dabei auftretende Temperaturdifferenzen sich nicht ausgleichen können. $\varkappa$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Druck zu jener bei konstantem Volumen und besitzt einen konstanten Wert.

Es unterscheidet sich dieses Gesetz wesentlich vom Boyle'schen

$$p v = p_0 v_0,$$

welches die sogenannte isotherme Zustandsänderung angibt, bei welcher die Bewegungen so langsam vor sich gehen, dass sich die auftretenden Temperaturunterschiede immer ausgleichen können.

Da Dichte und Volumen verkehrt proportional sind, so können wir Gleichung (40) auch schreiben

$$\frac{p}{\varrho^k} = \frac{p_0}{\varrho_0{}^k},$$

oder

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\varkappa = (1 + \sigma)^k = 1 + \varkappa\sigma.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_0 \, \varkappa \, \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

ist. Die Gleichungen (39) werden demnach

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

u. s. w., indem wir wieder beachten, dass die Produkte sehr kleiner Grössen weggelassen werden können.

Differenzieren wir diese Gleichungen der Reihe nach nach x, y, z und addieren sie, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right).$$

Nach Gleichung (38) ist aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2},$$

was mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}=\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right). \qquad (41)$$

§ 67. Punktförmige Schallquelle.

In der Regel entsteht der Schall an einem Punkt, von wo aus er sich nach allen Richtungen fortpflanzt. Einen solchen Punkt wollen wir als Ursprung eines Koordinatensystems ansehen, so dass wir $x^2+y^2+z^2 = r^2$ setzen können. Dann ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}=\frac{\partial \sigma}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial \sigma}{\partial r}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r}-\frac{x}{r^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+$$

$$+\frac{\partial \sigma}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial \sigma}{\partial r}\cdot\frac{x^2}{r^3}.$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$.

Alle drei Gleichungen addiert liefern

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r}=\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2}+2\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \sigma}{\partial r}+\sigma\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial r^2},$$

wornach Gleichung (41) in

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0 r} \frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial r^2}$$

übergeht, was wir noch in

$$\frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial r^2}$$

umwandeln können, wenn wir $\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} = a^2$ setzen. Wir wollen etwa noch $r\sigma = \alpha$ schreiben und erhalten so die Gleichung in ihrer einfachsten Form

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}.$$

§ 68. Geradlinige Fortpflanzung des Schalls.

Wir haben als allgemeine Lösung der zuletzt gewonnenen Gleichung, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\alpha = f(r - at).$$

Mithin ist

$$\sigma = \frac{1}{r} f(r - at).$$

Daraus geht hervor, dass sich jede Dichtenänderung im Erregungspunkt des Schalls in Form einer Kugelwelle fortpflanzt, dass jedoch die Stärke der Dichtenänderung verkehrt proportional dem Radiusvektor r ist.

Ist zur Zeit t' die Welle in r', zur Zeit t'' in r'' angekommen, so muss $r' = at'$, $r'' = at''$ oder

$$\frac{r'' - r'}{t'' - t'} = a$$

sein, d. h. a ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls. Wir wissen, dass

$$a = \sqrt{\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0}}$$

ist. In der That liefern die entsprechenden Werte des p_0, ϱ_0 und $\varkappa$ für Luft als Schallgeschwindigkeit die beobachtete Grösse.

Newton, welcher schon eine mathematische Theorie der Fortpflanzung des Schalls gab, erhielt für die Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}$, einen zu kleinen Wert, weil er für die Zustandsänderung der Luft das Boyle'sche Gesetz als richtig voraus setzte.

§ 69. **Planwellen.**

Hat sich der Schall schon weit von seinem Ursprung entfernt, so können wir ein kleines Stück der Kugelwelle als eben, mithin eine einzige Fortpflanzungsrichtung des Bewegungszustands aller Punkte annehmen. Eine solche Welle nennen wir dann eine Planwelle.

Wir wollen für ihre Bewegung Gleichung (41) in der Form

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right) \qquad (42)$$

benützen. Wie durch Differentation leicht zu erkennen, haben wir als allgemeine Lösung dafür

$$\sigma = f\,(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - at).$$

Es pflanzt sich in diesem Fall der Schall demnach ungeschwächt in jener Richtung fort, welche mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel α, β, γ einschliesst.

§ 70. Reflexion des Schalls.

Geht die Schallbewegung bloss parallel zur xz-Ebene vor sich, so ist $\cos\beta = 0$, es wird

$$\sigma = f\,(x \cos\alpha + z \cos\gamma - at). \tag{43}$$

Die xy-Ebene sei nun eine starre Wand, auf welche die Planwelle trifft. Die Geschwindigkeit der Luftteilchen parallel zur z-Achse muss in dieser Ebene beständig gleich Null sein, d. h. es muss

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{p_0\varkappa}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

sein, was erfüllt ist, wenn

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

ist.

Finden in einem Punkt infolge mehrerer durchgehender Wellen mehrere Dichtenänderungen statt, so ist die resultierende Dichtenänderung gleich der algebraischen Summe der einzeln auftretenden. Soll daher die Bedingung $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ für die xy-Ebene erfüllt sein, so brauchen wir zur vorhandenen Welle nur noch eine zweite hinzuzufügen, welche dem Punkt in der xy-Ebene die entgegengesetzte Bewegung zu erteilen sucht. Für unsere Welle ist nun

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \cos\gamma \,.\, f'.$$

Konstruieren wir also noch eine zweite, für welche

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\cos\gamma \,.\, f'$$

ist, so erfüllen beide Wellen die Bedingung, dass in der xy-Ebene keine Geschwindigkeit parallel zur z-Achse vorkommt.

Während also nach Gleichung (43) ein Wellenzug von oben kommend die xy-Ebene durchsetzt, muss gleichzeitig ein zweiter als vorhanden gedacht werden, für welchen

$$\sigma = f(x \cos \alpha - z \cos \gamma - at),$$

der also genau das Spiegelbild des ersten ist. Trifft demnach die Planwelle auf die starre xy-Ebene, so wird sie durch eine neue ersetzt, deren Richtung nach den bekannten Gesetzen der Reflexion gefunden wird.

§ 71. **Brechung des Schalls.**

Wir untersuchen jetzt, welchen Weg der Schall nimmt, wenn er von einem Gas in ein anderes übergeht, das etwa vom ersteren durch eine sehr dünne Kautschukmembran getrennt ist. Die Trennungsfläche sei eine Ebene, die wir zur xy-Ebene machen.

Trifft ein Wellenzug von oben auf die Trennungsfläche, so wird dadurch die weitere Fortpflanzung gestört werden. Es werden im Allgemeinen neue Bewegungserscheinungen auftreten, die sich teilweise im alten Medium, teilweise im neuen fortpflanzen. Für die Trennungsfläche selbst müssen wir der Kontinuität halber annehmen, dass dort der Druck und ebenso die Geschwindigkeit der Teilchen senkrecht zur z-Achse in beiden Gasen gleich ist. Nun wissen wir, dass der Druck

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa} = p_0 (1 + \sigma)^{\varkappa} = p_0 (1 + \varkappa \sigma)$$

ist, indem wiederum σ als klein vorausgesetzt wird. Für ein zweites Gas haben wir

$$p_1 = p_0 (1 + \varkappa_1 \sigma_1).$$

Für die Gleichung beider Drucke gilt

$$\varkappa\, \sigma = \varkappa_1\, \sigma_1.$$

Ferner soll die Geschwindigkeit w also auch $\frac{\partial w}{\partial t}$ für beide Gase an der Trennungsebene dieselbe sein. Wir wissen, dass

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}.$$

Es muss daher die Gleichung bestehen

$$a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} = a_1{}^2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}.$$

Die Dichtenänderung σ rührt zum Teil von der einfallenden, zum Teil von der reflektierten Bewegung her. Wir wollen deshalb

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

setzen. Es sei

$$\sigma' = A' f\left(\frac{x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma'}{a} - t\right).$$

Von der Möglichkeit dieser Lösung für Gleichung (42) kann man sich leicht überzeugen. Analog sei

$$\sigma'' = A'' F\left(\frac{x \cos \alpha'' + y \cos \beta'' + z \cos \gamma''}{a} - t\right)$$

und

$$\sigma_1 = A_1\, \varphi\left(\frac{x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1}{a_1} - t\right).$$

Wir wollen $\cos \beta' = 0$ wählen, d. h. die Fortpflanzung der ursprünglichen Erregung geschehe parallel zur xy-Ebene. Es ist dann

$$\sigma' = A' f\left(\frac{x \cos \alpha' + z \cos \gamma'}{a} - t\right).$$

Für alle Werte von x, y und t soll nun

$$\varkappa\,\sigma' + \varkappa\,\sigma'' = \varkappa_1\,\sigma_1 \qquad (44)$$

sein. Dies ist erstens nur möglich, wenn auch σ'' und σ_1 von y völlig unabhängig, d. h. wenn

$$\cos\beta'' = \cos\beta_1 = 0$$

ist. Es liegt demnach die Fortpflanzungsrichtung der reflektierten und der im zweiten Medium weiter gehenden Bewegung mit der ursprünglichen in einer Ebene.

Soll Gleichung (44) für alle Werte des x gelten, so wird für $x = 0$

$$\varkappa\,A' f(-t) + \varkappa\,A'' F(-t) = \varkappa_1\,A_1\,\varphi(-t).$$

Das ist aber nur möglich, wenn

$$f(-t) = F(-t) = \varphi(-t)$$

ist. Desgleichen hat (44) für alle Zeiten, also auch für $t = 0$ zu gelten, wonach

$$\varkappa\,\sigma' f\left(\frac{x\cos\alpha'}{a}\right) + \varkappa\,\sigma'' f\left(\frac{x\cos\alpha''}{a}\right) = \varkappa_1\,\sigma_1\,f\left(\frac{x\cos\alpha_1}{a_1}\right)$$

wird. Wir gelangen darnach zur Folgerung

$$\frac{x\cos\alpha'}{a} = \frac{x\cos\alpha''}{a} = \frac{x\cos\alpha_1}{a_1}.$$

Diese Gleichung enthält sowohl das Reflexions- als das Brechungsgesetz; denn aus ihr folgt $\cos\alpha' = \cos\alpha''$ oder

$$\alpha' = \alpha''$$

und $\frac{\cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\alpha_1}{a_1}$ oder, da $\cos\alpha' = \sin\gamma'$, $\cos\alpha_1 = \sin\gamma_1$,

$$\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{a_1}.$$

§ 72. Dopplers Prinzip.

Wir wollen von nun an nur noch periodische Bewegungen der Luft in Betracht ziehen. Die einfachste Form derselben ist

$$\sigma = c \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right).$$

Eine solche einfache schwingende Bewegung nennen wir einen Ton. c ist die Amplitude, τ die Dauer, ε die Phase der Schwingung. Die Schwingungsdauer τ oder der deren reciproker Wert, die Schwingungszahl $n = \frac{1}{\tau}$ bestimmt die Tonhöhe.

Wir nehmen an, wir hätten eine Planwelle, welche sich parallel zur x-Achse bewegt, so gilt für sie die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2},$$

da die übrigen Glieder der Gleichung (42) Null werden. Als Lösung haben wir

$$\sigma = f(x - a t).$$

Wir nehmen nun an, unser Ohr bewege sich ebenfalls parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit v. Dann ist die relative Geschwindigkeit des Schalls gegenüber unserm Ohr nicht mehr a, sondern $a - v$. Dasselbe ist der Fall, wenn unser Ohr in Ruhe ist, hingegen sich die Schallquelle mit der Geschwindigkeit $-v$ parallel zur x-Achse bewegt. Die Schallquelle erzeuge einen Ton. Wir wollen demnach

$$\sigma = c \cos \alpha\, (x - a t)$$

setzen. Wir sehen ohne weiteres, dass wir für ein konstantes x eine periodische Bewegung, einen Ton haben, für welchen

$$-\alpha a = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi n$$

oder

$$n = -\frac{\alpha a}{2\pi}$$

ist. Ist hingegen die Schallquelle oder unser Ohr in Bewegung, so haben wir anstatt a den Wert a — v zu setzen, und wir erhalten

$$n' = -\frac{\alpha(a-v)}{2\pi} = \frac{n(a-v)}{a},$$

d. h. die Schwingungszahl wird kleiner, mithin auch der wahrgenommene Ton tiefer. Entfernt sich also die Schallquelle vom Ohr, so ist der Ton tiefer, nähert sie sich, so ist er höher, als wenn die Entfernung Schallquelle — Ohr constant bleibt. Man nennt diese scheinbare Vergrösserung, bezgl. Verkleinerung der Schwingungszahl durch die Bewegung des schwingenden Körpers in der Fortpflanzungsrichtung nach seinem Begründer das Doppler'sche Prinzip.

§ 73. Interferenz der Schallwellen.

Wirken mehrere Kräfte in einem Punkt so zusammen, dass gleichzeitig mehrere Dichtenänderungen derselben Periode daselbst entstehen würden, so wird

$$\sigma = \Sigma c \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) = \cos\frac{2\pi t}{\tau}\Sigma c \cos\varepsilon + \\ + \sin\frac{2\pi t}{\tau}\Sigma c \sin\varepsilon$$

sein. Dieser Ausdruck stellt wieder eine einfache harmonische Schwingung dar; denn setzen wir

$$\Sigma \, c \cos \varepsilon = r \cos \vartheta, \quad \Sigma \, c \sin \varepsilon = r \sin \vartheta,$$

so wird

$$\sigma = r \cos \left(\frac{2 \pi t}{\tau} - \vartheta \right).$$

r und ϑ lassen sich leicht bestimmen, da ja

$$r^2 = (\Sigma \cos \varepsilon)^2 + (\Sigma \, c \sin \varepsilon)^2$$

und

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\Sigma \, c \sin \varepsilon}{\Sigma \, c \cos \varepsilon}$$

ist. Die Erfahrung bestätigt unsere Formel, bleibt doch eine Melodie dieselbe, ob sie von einem einzigen Instrument oder vom ganzen Orchester unisono gespielt wird. Diese Vereinigung mehrerer Schwingungen zu einer einzigen nennt man *Interferenz der Schwingungen.*

Wir wollen als speziellen Fall das Zusammenwirken zweier Schwingungen betrachten. Wir erhalten dafür

$$r^2 = (c \cos \varepsilon + c' \cos \varepsilon')^2 + (c \sin \varepsilon + c' \sin \varepsilon')^2 =$$
$$= c^2 + c'^2 + 2 \, c \, c' \cos (\varepsilon - \varepsilon').$$

Die Grösse der neuen Amplitude hängt also wesentlich vom Phasenunterschied $\varepsilon - \varepsilon'$ ab. Ist $\varepsilon - \varepsilon' = 2 k \pi$, wobei $k = 0, 1, 2$ u. s. w. sein kann, so ist

$$r = c + c'.$$

Für $\varepsilon - \varepsilon' = (2 k + 1) \pi$ wird

$$r = c - c'.$$

In dem einen Fall tritt eine Verstärkung, im andern eine Schwächung des Tons ein, ja ist $c = c'$, so heben sich im letztern Fall die Schwingungen vollständig auf. Es entsteht überhaupt kein Ton. Es zeigen sich diese Erscheinungen am besten an *Quinckes Interferenzröhren* und *Stefans Interferenzapparat.*

§ 74. Schwebungen — Differenztöne.

Wir lassen jetzt zwei Schwingungen verschiedener Dauer auf einen Punkt einwirken. Wir haben dann

$$\sigma = c \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) + c' \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau'} - \varepsilon'\right).$$

Im allgemeinen stellt σ keine harmonische Schwingung dar, ja wenn τ und τ' inkommensurable Grössen sind, so wiederholt sich ein gegebener Zustand überhaupt nie wieder.

Wir wollen

$$\frac{1}{\tau} = m, \frac{1}{\tau'} = n$$

setzen und m und n die Schwingungszahlen nennen. Wir haben jetzt

$$\sigma = c \cos(2\pi m t - \varepsilon) + c' \cos(2\pi n t - \varepsilon') =$$
$$= c \cos(2\pi m t - \varepsilon) + c' \cos[2\pi m t - 2\pi(m - n) t - \varepsilon'].$$

Ist m von n nur wenig verschieden, so vermag das Ohr die beiden Töne nicht mehr zu unterscheiden, da ja für die Tonhöhe lediglich die Schwingungszahl massgebend ist. Die Amplitude des Tons ist nun nach dem Vorhergehenden

$$r = \sqrt{c^2 + c'^2 + 2 c c' \cos[-2\pi(m - n) t + \varepsilon - \varepsilon']}.$$

Es ist demnach die Amplitude eine Funktion der Zeit. Setzen wir der Einfachheit halber $\varepsilon - \varepsilon' = 0$, so wird

$$r = c + c'$$

ein Maximum für $2\pi(m - n) t = 0, 2\pi, 4\pi \ldots.$, hingegen wird

$$r = c - c'$$

ein Minimum für $2\pi(m - n) t = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$ Wir haben also wiederum eine periodische Bewegung vor uns, die sich als Anschwellen und Abnehmen des Tons, als Schwebung geltend macht. Die Dauer einer Schwebung ist

$$\tau = \frac{1}{m - n}.$$

m — n können wir analog die Schwingungszahl nennen. Wird m — n genügend gross, so hören wir beide Töne und auch die Schwebungen nehmen den Charakter eines Tons an, den wir den Differenzton nennen. Der Differenzton wird um so tiefer sein, je näher an einander die zwei erzeugenden Töne liegen.

§ 75. Einfach schwingende Bewegung.

Wir betrachten ein materielles System, welches sich nur so bewegen kann, dass durch die Lage eines einzelnen Punkts die jeweilige Lage des Systems bestimmt ist. Das wäre z. B. der Fall für einen starren Körper, welcher keine Drehung vollführt, sondern nur fortschreitende Bewegung. Das System habe die Eigenschaft, dass jede Verlegung aus seiner Ruhelage Kräfte hervorruft, welche proportional der Entfernung von der Ruhelage sind und das System in die Ruhelage zurückzubringen suchen. Ist die Masse des Systems m, seine Entfernung aus der Ruhelage s, so erhalten wir die Kraftgleichung

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - \alpha s.$$

Wir haben als Lösung dafür

$$s = A \cos (a t - \varepsilon)$$

(§ 9), wenn wir $\frac{\alpha}{m} = a^2$ setzen. Das System macht also eine einfach schwingende Bewegung, erzeugt einen Ton von der Schwingungszahl

$$n = \frac{a}{2\pi}.$$

§ 76. Einfluss eines widerstehenden Mittels.

Unser Körper soll in einem Mittel schwingen, welches einen Widerstand proportional der Geschwindigkeit des Körpers leistet. Dann wird die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - \alpha s - \beta \frac{d s}{d t}.$$

Hiefür ist die Lösung (§ 10)

$$s = A e^{-bt} \cos(\sqrt{a^2 - b^2}\, t - \varepsilon),$$

wenn $\frac{\alpha}{m} = a^2$, $\frac{\beta}{m} = 2b$ gesetzt wird. Die Schwingungszahl ist

$$n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi}.$$

Es wird also erstens der Ton gedämpft, der Körper hört allmählich auf zu tönen, ferner wird die Tonhöhe erniedrigt.

§ 77. Resonanz.

Auf unser System im widerstehenden Mittel wirke eine periodische Kraft, etwa die Luftschwingungen eines in seiner Nähe erzeugten Tons. Die Kraft, welche diese periodische Bewegung auf unsern Körper ausübt, sei durch $P \cos p t$ gegeben. Die Bewegungsgleichung wird demnach

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - \alpha s - \beta \frac{d s}{d t} + P \cos p t,$$

oder

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + a^2 s + 2 b \frac{d s}{d t} = E \cos p t,$$

wenn $\frac{P}{m} = E$. Als ein Integral dieser Gleichung können wir

$$s = A \cos (p t - \varepsilon)$$

ansehen. Bilden wir $\frac{d s}{d t}$ und $\frac{d^2 s}{d t^2}$, ferner

$$E \cos p t = E \cos [(p t - \varepsilon) + \varepsilon] = E \cos \varepsilon \cos (p t - \varepsilon) - \\ - E \sin \varepsilon \sin (p t - \varepsilon),$$

und beachten wir, dass ε ganz willkürlich, so müssen die Glieder mit dem Faktor $\cos (p t - \varepsilon)$ für sich, ebenso jene mit dem Faktor $\sin (p t - \varepsilon)$ die Gleichung befriedigen. Daraus ergiebt sich

$$A (a^2 - p^2) = E \cos \varepsilon, \; 2 A b p = E \sin \varepsilon,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 b p}{a^2 - p^2}, \; A = \frac{E \sin \varepsilon}{2 b p}.$$

Wir werden also unter sonst gleichen Verhältnissen die *grösste Amplitude* erhalten, d. h. der Körper wird unter dem Einfluss der äusseren Kraft um so heftiger ins *Mitschwingen* geraten, *je grösser* $\sin \varepsilon$ und *je kleiner* b wird. b muss einen endlichen Wert haben. Ist $a = p$, so wird $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$, $\sin \varepsilon = 1$, hat somit seinen *grössten* Wert, d. h. wir erhalten die *stärkste Resonanz*, wenn die auf den Körper *einwirkende Kraft dieselbe Periode* hat wie die *Eigenschwingung des Körpers*.

§ 78. Bewegungsgleichung schwingender Saiten.

Wir denken uns eine Saite in zwei Punkten A, B (Fig. 19) mit der Spannung P befestigt und bringen sie aus ihrer Ruhelage, jedoch so, dass sie eine ebene Kurve bildet. Das kleine Stück MN gelange dabei nach M′N′. Die Entfernung aus der Ruhelage sei ebenfalls sehr klein, so dass die Aenderung der Spannung gegenüber der ursprünglichen Spannung völlig zu vernachlässigen ist. An dem Saitenstück M′N′ greifen nun zwei Kräfte an, welche verschiedene Richtungen, nämlich jene der Tangenten in den Punkten M′ und N′ an die Saiten haben. Die Ruhelage der Saite sei die x-Achse eines Koordinatensystems und α der Winkel, welchen sie mit der Tangente einschliesst. Dann haben wir in M′ eine Kraft

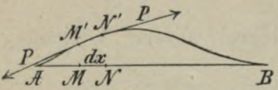

Fig. 19.

$$P \sin \alpha = P \frac{\partial y}{\partial x}$$

parallel zur y-Achse, da wir wegen der Kleinheit des Winkels α Sinus und Tangente desselben vertauschen können. Gleicherweise wirkt in N′ die Kraft $P \sin \alpha'$. Nun ist

$$\sin \alpha' = \sin \alpha + \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x} d x = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d x,$$

wenn wir $MN = dx$ setzen. Die Kraft in N′ wirkt in der Richtung der y-Achse, die in M entgegengesetzt. Die Resultierende ist also

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d x.$$

Ist die Dichte der Saite σ, der Querschnitt q, so hat das Stück MN die Masse $q \sigma d x$, und seine Bewegungsgleichung wird

$$q \sigma d x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d x$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{q\sigma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{45}$$

wenn wir $\frac{P}{q\sigma} = a^2$ setzen.

§ 79. Lösung von d'Alembert.

Wir erhielten für die Transversalschwingungen einer Saite dieselbe Gleichung wie für eine Planwelle im Luftraum (§ 69). Wir lernten dort die von d'Alembert gefundene Lösung

$$y = f(x - at)$$

kennen. Aber auch

$$y = F(x + at)$$

ist eine Lösung, wie man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann. Es gilt daher auch

$$y = F(x + at) + f(x - at).$$

Die Funktionen F und f bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen der Bewegung. Es genügt, für $t = 0$ die Elongationen y und die Geschwindigkeiten $\frac{\partial y}{\partial t}$ sämtlicher Punkte zu kennen. Es sei demnach für den Anfang

$$y = \varphi(x), \frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x).$$

Wir haben dann

$$\varphi(x) = F(x) + f(x)$$

und

$$\psi(x) = a F'(x) - a f'(x).$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{1}{a}\int_0^x \psi(x)\,dx = F(x) - f(x).$$

Diese Gleichung mit jener für $\varphi(x)$ ergiebt

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(x)\,dx$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(x)\,dx,$$

daher

$$y = F(x + at) + f(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at)$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx.$$

§ 80. Unendlich lange Saite.

Die von uns gefundene Lösung gilt nur für eine unendlich lange Saite, da wir nur in diesem Fall für jeden Wert der Zeit auch Werte der Funktionen φ und ψ haben.

Wir nehmen nun an, dass für $t = 0$ kein Punkt der Saite in Bewegung sei, dass also für jedes x $\psi(x) = 0$ ist. Unsere Lösung geht dann in die einfachere über

$$y = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2}\varphi(x - at). \qquad (46)$$

Für alle Punkte der nach beiden Richtungen unendlich langen Saite sei $y = 0$, nur für eine kleine Stelle um den Nullpunkt habe $y = \varphi(x)$ endliche Werte. Nach Gleichung (46) teilt sich dieser Wert in zwei Teile, d. h. die ursprüngliche Ausbuchtung der Saite teilt sich in zwei halb so grosse, welche mit der Geschwindigkeit a die eine nach rechts, die andere nach links längs der Saite fortlaufen.

§ 81. Einseitig begrenzte Saite.

Läuft eine Welle gegen einen bestimmten Punkt der Saite, so können wir uns gleichzeitig von der andern Seite eine zweite Welle kommend denken, welche dem Punkt genau die entgegengesetzte Elongation geben würde. Das hat den Erfolg, dass der Punkt selbst immer in Ruhe bleibt. Wir können ihn daher von vornherein fest machen und den einen Teil der Saite ganz weglassen. Gelangt dann eine Wellenbewegung gegen diesen Punkt, so wird sie einfach mit entgegengesetzter Amplitude reflektiert.

Wir stellen nun die Bedingung, dass der Endpunkt einer einseitig begrenzten Saite eine bestimmte Bewegung $y = f(t)$ mache. Für $t = 0$ sei die ganze Saite noch in Ruhe. Es gilt für sie dann Gleichung (46), und es muss für $x = 0$ demnach

$$f(t) = \frac{1}{2}\varphi(at) + \frac{1}{2}\varphi(-at)$$

sein. Machen wir noch die Voraussetzung, dass für $t = 0$ auch sämtliche Punkte der Saite in ihrer Ruhelage sind, dann ist für alle positiven Werte von z die

Grösse $\varphi(z) = 0$. Es bleibt also nur

$$\varphi(-at) = f(t),$$

was weiter ergiebt

$$y = \varphi(x - at) = \varphi[-(at - x)] = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Es pflanzt sich also der jeweilige Bewegungszustand am Anfangspunkt mit der Geschwindigkeit a längs der Saite fort.

§ 82. Schwingungsdauer einer in zwei Punkten befestigten Saite.

Bringen wir einen Punkt einer an beiden Enden befestigten Saite aus seiner Ruhelage und überlassen dann die Saite sich selbst, so wird sich diese Deformation nach beiden Richtungen der Saite in halber Stärke fortpflanzen. Wie wir in § 81 gesehen haben, wird an den Befestigungspunkten die Welle mit entgegengesetzter Amplitude reflektiert, sie durchläuft dann die ganze Saite, wird am andern Befestigungspunkt ebenfalls reflektiert und kehrt so, wie sie ausgegangen ist, wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Dort beginnt dann das Spiel von Neuem. Die Zeit, welche dabei verfliesst, können wir die Schwingungsdauer der Saite nennen. Die Saite habe die Länge l, ein Punkt in der Entfernung x vom Anfangspunkt werde aus seiner Ruhelage gebracht und dann sich frei überlassen. Es bewegt sich nach links und rechts von x aus eine Welle mit der Geschwindigkeit a. Die Welle, welche nach rechts geht, legt bis zur ersten Reflexion den Weg l—x, von hier bis zur zweiten den Weg l und von hier bis zur ursprünglichen Lage den Weg x, im Ganzen also

$$l - x + l + x = 2l$$

zurück. Denselben Weg durcheilt die entgegengesetzt laufende Welle. a ist die Wellengeschwindigkeit, daher

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

die Zeit des Durchlaufens, d. i. die Schwingungsdauer der Seite. Wegen $a^2 = \frac{P}{q\sigma}$ haben wir demnach für die Schwingungsdauer

$$\tau = 2l\sqrt{\frac{q\sigma}{P}},$$

für die Schwingungszahl

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{q\sigma}},$$

eine Formel, die sich experimentell bestätigt.

§ 83. Bernoullis Lösung.

Wir versuchen, ob Gleichung (48) durch

$$y = XT$$

befriedigt wird, wobei X eine Funktion von x, T eine Funktion von t ist. t ist also in X, x in T nicht enthalten. Es ist somit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

und es muss

$$X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{a^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

sein. Da wir hier auf der einen Seite nur die Zeit t, auf der andern nur die Abscisse x als Veränderliche haben, so ist die Gleichung nur möglich, wenn jeder dieser Ausdrücke gleich einer Konstanten $-b^2$ ist. Wir erhalten so zwei Gleichungen

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -b^2X, \quad \frac{d^2T}{dt^2} = -a^2b^2T,$$

deren Lösungen periodische Funktionen sind (§ 9), die wir zusammenfassen können in

$$y = \left(A \sin\frac{\alpha x}{a} + B \cos\frac{\alpha x}{a}\right)\sin\alpha t +$$

$$\left(C \sin\frac{\alpha x}{a} + D \cos\frac{\alpha x}{a}\right)\cos\alpha t,$$

wenn wir $b = \frac{\alpha}{a}$ setzen.

§ 84. Grundton und Obertöne.

Die Saite sei an beiden Enden fest. Es muss dann zu jeder Zeit für $x = 0$ und $x = l$, auch $y = 0$ werden, woraus erstens $B = D = 0$ folgt und nur

$$y = \sin\frac{\alpha x}{a}\,(A \sin\alpha t + C \cos\alpha t)$$

übrig bleibt. Damit ferner für $x = l$, $y = 0$ wird, muss $\sin\frac{\alpha x}{a} = 0$ oder $\frac{\alpha l}{a} = \pi$, 2 ...,

$$\alpha = \frac{\pi a}{l}, \frac{2\pi a}{l} \cdot \cdot \frac{k\pi a}{l}$$

sein.

Wieder ist hier $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Schwingungsdauer,

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{a}{2l}, \frac{2a}{2l} \cdot \cdot \cdot \frac{ka}{2l}$$

die Schwingungszahl. Es kann also die Saite eine unendliche Zahl von Tönen hervorbringen, deren tiefster

$$n = \frac{a}{2l}$$

ist, eine Lösung, die wir schon früher fanden (§ 80). Diesen tiefsten Ton nennt man den Grundton, die übrigen die Obertöne der Saite, und da sie ganzzahlige Vielfache des Grundtons sind, harmonische Obertöne. Gibt die Saite nur den ersten Oberton, so schwingt sie in zwei Teilen, sie hat in der Mitte einen Knoten. Beim zweiten Oberton schwingt sie in drei Teilen mit zwei Knoten u. s. w.

§ 85. **Klänge.**

Die Saite kann nicht nur einzeln ihren Grundton und ihre Obertöne geben, sondern auch alle gleichzeitig, da ja

$$y = \Sigma \sin \frac{k\pi x}{l} (A_k \sin k\alpha t + C_k \cos k\alpha t) \quad (47)$$

ebenfalls unsere Gleichung (45) befriedigt. Wir haben dann keinen einfachen Ton, sondern einen Klang. Die Gleichung dafür ist also im Allgemeinen eine unendliche Reihe, welche bestimmt ist, sobald wir den Anfangszustand der Saite, d. h. die Elongation und die Geschwindigkeit eines jeden Punktes kennen, wenn also für $t = 0$ die Form der Saite durch $y = \varphi(x)$, ihre Geschwindigkeit durch $\frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x)$ gegeben ist. Wir haben dann

$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots,$$

$$\psi(x) = A_1 \alpha \sin\frac{\pi x}{l} + 2 A_2 \alpha \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots.$$

Es wird in der höheren Analysis nun gezeigt, dass für eine derartige Reihe die Konstanten A und C durch die Formel bestimmt sind

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

Wir sind somit in der Lage, auf diese Weise die Werte der A und C, d. h. die Amplitude der einzelnen Obertöne zu finden.

§ 86. Gleichung für die Longitudinalschwingungen in Stäben.

Denken wir uns einen Stab mit seiner Länge parallel zur x-Achse eines Koordinatensystems, so nennt man *Longitudinalschwingungen* jene, bei welchen sich die Teilchen *parallel* zur *x-Achse* bewegen.

Wir legen senkrecht durch unsern Stab zwei parallele Ebenen, welche um dx von einander entfernt sind. Diese schneiden aus dem Stab ein Stück von der Masse $q\,dx\,\sigma$ heraus, wenn q der Querschnitt, σ die Dichte des Stabs ist. Befindet sich dieses Stabelement nicht in seiner Ruhelage, so werden auf beiden Seiten Spannkräfte wirken.

Wenn wir einen Stab mit der Kraft P dehnen, so erfährt er eine Verlängerung

$$\lambda = \frac{l P}{q E},$$

wenn l die Länge des Stabes ist. Die Konstante E nennt man den *Elastizitätskoeffizienten*. Darnach finden wir die Spannkräfte, welche auf unser Stabelement wirken, folgendermassen. Der Querschnitt in der Entfernung x erlangt nach der Dehnung die Lage $x + \xi$, jener in der Entfernung $x + dx$ die Lage $x + dx + \xi'$. Betrachten wir ξ als Funktion von x, so

$$\xi' = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx.$$

Die Verlängerung des Stabelements ist nun

$$\lambda = \xi' - \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}\, dx.$$

Daraus folgt

$$P = Eq \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Während nun diese Kraft auf der Vorderseite des Stabelements nach links wirkt, greift auf der rechten Seite in entgegengesetzter Richtung eine Kraft

$$P' = P + \frac{\partial P}{\partial x}\, dx$$

an. Es wirkt mithin die resultierende Kraft

$$P' - P = \frac{\partial P}{\partial x}\, dx = Eq \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\, dx.$$

Diese Kraft muss gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Stabelements sein. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$q\, dx\, \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\, dx,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

wenn wir $a^2 = \frac{E}{\sigma}$ setzen.

Wir haben also auch hier genau dieselbe Gleichung wie für die Transversalschwingungen der Saiten oder für die Fortpflanzung einer Planwelle in der Luft. Der einzige Unterschied ist die physikalische Bedeutung der Grösse a.

Unsere Gleichung können wir auch ohne weiters auf die **Longitudinalschwingungen in gespannten Saiten** anwenden, da eine ursprünglich vorhandene Spannung auf die Longitudinalwellen gar nicht von Einfluss ist, indem dieselbe ja über die ganze Saite konstant ist, somit das Saitenelement nach beiden Seiten mit derselben Kraft zu ziehen trachtet. Alle Lösungen, welche wir für die Transversalschwingungen der Saiten fanden, können wir nun ohneweiters auf die Longitudinalschwingungen der Stäbe übertragen.

§ 87. Töne eines an beiden Enden freien Stabes.

Eine Lösung unserer Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ist (§ 83)

$$\xi = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a}\right) \sin \alpha\, t.$$

Für ein **freies Stabende** ist die **Spannung** natürlich gleich **Null**, also $E\, q \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

ist. Das eine Stabende sei im Ursprung des Koordinatensystems, für das andere ist also $x = l$, unter l die

Länge des Stabs verstanden. Dann mus für $x = 0$ und $x = l$ $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ sein. Daraus folgt $A = 0$ und

$$\sin \frac{\alpha l}{a} = 0,$$

oder

$$\frac{\alpha l}{a} = k \pi,$$

und da $\alpha = 2 \pi n$, so

$$n = \frac{k a}{2 l}.$$

Das ist die Schwingungszahl des Tons, welchen der Stab gibt. Da k jede beliebige ganze Zahl sein kann, so sind unendlich viele Töne möglich. $\frac{a}{2 l}$ ist die Schwingungszahl des Grundtons. Er ist also derselbe wie bei der schwingenden Saite. Ausser ihm haben wir eine unendliche Reihe harmonischer Obertöne.

Für die Schwingung selbst haben wir

$$\xi = B \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t.$$

Wegen $\alpha = \frac{k \pi a}{l}$ ist $\frac{\alpha x}{a} = \frac{k \pi x}{l}$. Für $k = 1$ wird $\cos \frac{\alpha x}{a} = 0$, wenn wir $x = \frac{l}{2}$ setzen. Das heisst, für den Grundton hat der Stab in seiner Mitte einen Knoten, beim ersten Oberton im ersten und dritten Viertel seiner Länge u. s. w.

Aus der bekannten Schwingungszahl eines Stabs können wir umgekehrt seinen Elastizitätskoefizienten berechnen.

§ 88. Töne eines an einem Ende befestigten Stabs.

Ist der Stab an seinem Anfangspunkt fest, so muss für $x = 0$ auch $\xi = 0$ sein, woraus für die Lösung

$$\xi = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a}\right) \sin \alpha t$$

$B = 0$ folgt. Es ist demnach

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\alpha}{a} A \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t,$$

was für $x = l$ ebenfalls Null werden muss. Das läuft darauf hinaus $\cos \frac{\alpha l}{a} = 0$ zu setzen, was

$$\frac{\alpha l}{a} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

zur Folge hat, unter k wieder eine beliebige ganze Zahl verstanden. Es muss demnach

$$\alpha = 2 \pi n = (2k + 1) \frac{a \pi}{2 l}$$

sein. Dies ergibt für die Schwingungszahl des Grundtons

$$n = \frac{a}{4 l}.$$

Ein solcher Stab gibt also die tiefere Oktav eines gleichartigen an beiden Enden freien Stabs. Der nächste Oberton hat die Schwingungszahl $n = \frac{3a}{4l}$, der zweitnächste $\frac{5a}{4l}$ u. s. f. Es entfallen also alle ungeraden harmonischen Obertöne.

§ 89. Offene Pfeifen.

Wir fanden für die Fortpflanzung einer Planwelle in der Luft die Gleichung (§ 69)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}.$$

Dieselbe Gleichung bestimmt uns die Bewegung der Luft in Pfeifen, da diese ja auch in nichts anderem als Longitudinalwellen parallel zur Pfeifenachse bestehen. Wir haben daher wieder die bekannte Lösung

$$\sigma = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a}\right) \sin \alpha t.$$

Bei einer offenenen Pfeife steht die innere Luft an beiden Enden der Röhre mit der äusseren in Verbindung. An diesen Stellen wird daher keine Dichtenänderung stattfinden können. Denken wir uns also die Achse der Pfeife mit der x-Achse eines Koordinatensystems zusammenfallend, während sich die eine Oeffnung im Ursprung $x = 0$, die andere in der Entfernung $x = l$, d. i. die Länge der Röhre, befindet. Für diese Punkte muss somit $\sigma = 0$ werden. Daraus folgt $B = 0$, ferner $\frac{\alpha l}{a} = k\pi$, oder $\alpha = 2\pi n = \frac{k\pi a}{l}$, was für die Schwingungszahl

$$n = \frac{k a}{2 l}$$

ergibt. Eine offene Pfeife verhält sich also genau so wie ein an beiden Enden freier, longitudinal schwingender Stab.

§ 90. Gedeckte Pfeifen.

Am gedeckten Ende einer Pfeife können die Luftteilchen keine longitudinalen Bewegungen machen. Es muss demnach hier die Geschwindigkeit $u = 0$ (§ 70) sein. Desgl. ist natürlich auch

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Als Bedingung für ein gedecktes Pfeifenende erhalten wir demnach

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Dies ist bei unserer Pfeife für $x = l$ der Fall, während für $x = 0$, $\sigma = 0$ werden muss. Letztere Bedingung ist in der Lösung

$$\sigma = A \sin \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t$$

erfüllt. Darnach wird

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\alpha A}{a} \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t,$$

und es muss nach dem obigen

$$\cos \frac{\alpha l}{a} = 0, \text{ also } \frac{\alpha l}{a} = (2\,k + 1) \frac{\pi}{2}$$

werden, woraus wir wegen $\alpha = 2\pi n$

$$n = (2k + 1) \frac{a}{4l}$$

erhalten.

Eine solche Pfeife verhält sich demnach ganz so wie ein an einem Ende befestigter Stab. Sie gibt als Grundton die tiefere Oktav einer gleich langen offenen Pfeife, ferner nur die geradzahligen, harmonischen Obertöne.

Zur Weiterbildung auf dem Gebiet der Mechanik und Akustik empfehlen wir:

v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik, Braunschweig 1891.

Christiansen, Elemente der theoretischen Physik, Leipzig 1894.

Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik und Mechanik, Leipzig 1883.

Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik, Braunschweig 1871.

v. Helmholtz, die Lehre von den Tonempfindungen etc., Braunschweig 1877.

Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, Braunschweig 1869.

Urteile der Presse über „Sammlung Göschen".

Deutsche Lehrerzeitg., Berlin: ..... Nach den vorliegenden Bändchen stehen wir nicht an, die ganze Sammlung aufs angelegentlichste nicht allein zum Gebrauch in höheren Schulen, sondern auch zur Selbstbelehrung zu empfehlen.

Natur: Es ist geradezu erstaunlich, wie es der rühmlichst bekannte Verlag ermöglicht, **für so enorm billige Preise so vorzüglich ausgestattete Werkchen** zu liefern. Das vorliegende Bändchen bringt in knapper und verständlicher Form das Wissenswerteste der **Mineralogie** zum Ausdruck. Saubere Abbildungen erleichtern das Verständnis.

Globus: Es ist **erstaunlich, wie viel diese kleine Kartenkunde bringt,** ohne an Klarheit zu verlieren, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß **viele Abbildungen** den Raum stark beengen. **Vortrefflich** wird die **Kartenprojektionslehre** und die **Topographie geschildert.**

Nationalzeitg.: Es ist **bis jetzt in der deutschen Litteratur wohl noch nicht dagewesen,** daß ein Leinwandband von fast 300 Seiten in vorzüglicher Druck- und Papierausstattung zu einem Preis zu haben war, wie ihn die „Sammlung Göschen" in ihrem neuesten Bande, **Max Koch's Geschichte der deutschen Litteratur** für den Betrag von sage **achtzig Pfennige** der deutschen Leserwelt bietet.

Leipziger Zeitung: Wer sich rasch einen guten Ueberblick über das Gebiet der deutschen Heldensage verschaffen will, ohne eigene intensivere Studien machen zu können, der greife getrost zu dem Büchlein von Jiriczek.

Prakt. Schulmann: Ein **Meisterstück kurzen und bündigen,** und doch **klaren** und **vielsagenden Ausdrucks** wie die „Deutsche

Litteraturgeschichte" von Prof. M. Koch ist auch die vorliegende „**Deutsche Geschichte im Mittelalter**".

Natur: In der **Chemie** von Dr. Klein empfängt der Schüler fast mehr, wie er als Anfänger bedarf, mindestens aber so viel, daß er das Wissenswürdigste als unentbehrliche Grundlage zum Verständnisse der Chemie empfängt . .

Kunst f. Alle (München) **K Kimmich** behandelt in seinem Bändchen, „**Zeichenschule**" benannt, in **knapper, kerniger, sachlich-zielbewußter Form** das weite Gebiet des bildmäßigen Zeichnens und Malens . . Gleich nutzbringend und in reichstem Maße bildend für Lehrer, Schüler und Liebhaberkünstler, möchte ich das **wirklich vorzügliche Werk** mit warmen anerkennenden Worten der Einführung in Schule, Haus und Werkstatt zugänglich machen. Die Ausstattung ist dabei eine so vornehme, daß mir der Preis von 80 Pfennigen für das gebundene Werk von 138 Seiten kl. 8° wirklich **lächerlich billig** erscheint. Nicht weniger als 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck, sowie 135 Voll- und Textbilder illustrieren den **äußerst gesunden Lehrgang** dieser Zeichenschule in **feinfühlender Weise**.

Schwäb. Merkur: **Prof. G. Mahler** in Ulm legt uns eine Darstellung der **ebenen Geometrie** vor, die bis zur Ausmessung des Kreises einschließlich geht. Besondere Sorgfalt ist der Auswahl und Anordnung der Figuren zu teil geworden, deren saubere Ausführung in 2 Farben angenehm berührt.

Globus: **Hoernes, Urgeschichte** Der bewährte Forscher auf **vorgeschichtlichem Gebiete** giebt hier in knappster Form die lehrreiche Zusammenstellung des Wissenswertesten der Urgeschichte. **Vortrefflich geeignet zur Einführung und zum Ueberblick**

Jahresberichte der Geschichtswissenschaft **Hommel**, auf dem Gebiet der altorientalischen Geschichte eine anerkannte Autorität, behandelt in diesem Bändchen die morgenländische Geschichte mit großer Genauigkeit und wissenschaftlicher Gründlichkeit in knappster Form Das kleine Büchlein muß warm empfohlen werden

Lpzgr. Ztg. (Wissensch Beil.): „Die **Pflanze**" **von Dr. E. Dennert** können wir bestens empfehlen. In kürzester, knappester, sehr klarer **und verständlicher Form** weiß sein Verfasser alles Wissenswerteste über den inneren und äußeren Bau und über die Lebensverrichtungen der Pflanze zur Anschauung zu bringen, wozu seine **ganz vortrefflichen, selbstgezeichneten Textabbildungen** außerordentlich viel beitragen helfen.

Schwäb. Merkur: Die **Römische Altertumskunde** von **Dr. Leo Bloch** behandelt kurz und klar die Verfassungsgeschichte, die Staatsgewalten, Heerwesen, Rechtspflege, Finanzwesen, Kultus, das Haus, die Kleidung, die Bestattung und andere öffentliche und häusliche Einrichtungen der Römer . . .

Weimarsche Zeitg.: **Waltharilied**. Mit dieser Uebersetzung wird uns eine hochwillkommene und von Litteraturfreunden längst ersehnte Gabe geboten. . . Von einer guten Uebersetzung ist zu verlangen, daß sie, sinn- und zugleich möglichst **wortgetreu**, ohne dem Urtext, wie der deutschen Sprache Gewalt anzuthun, den Geist des Originals klar und ungetrübt wiederspiegele. Dieser Forderung gerecht zu werden, hat Althof in meisterhafter Weise verstanden.

Blätter f. d. bayr Gymn.-Schulw.: **Swoboda, Griech. Geschichte.** Schon der Name und der Ruf des Verfassers bürgt dafür, daß wir nicht etwa bloß eine trockene Kompilation vor uns haben, **überall zeigen sich die Spuren selbständiger Arbeit.**

Prakt. Schulmann **Seyfert, Schulpraxis.** Es wird in gedrängter Darstellung ein reicher, wohldurchdachter, den neuesten pädagogischen Bestrebungen gerecht werdender Inhalt geboten und für den, der tiefer eindringen will, ist gesorgt durch reichhaltige Litteraturnachweise

Zeitschr. f. d. Realschulw.: Es war ein glücklicher Gedanke der rührigen Verlagshandlung, die Abfassung des der Einführung in die **Arithmetik und Algebra** dienenden Bändchens ihrer „Sammlung" dem hochgeachteten Fach- und Schulmanne **Prof. Dr. Schubert** zu übertragen . . Der Verfasser wußte die Schwierigkeiten mit großem Geschick zu bewältigen, indem er durch einen **streng systematischen Aufbau** des arithmetischen Lehrgebäudes der Fassungskraft des Anfängers möglichst Rechnung trug und dabei nur das Hauptsächliche ins Auge faßte. — **Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik von Prof. Th. Bürklen** . . . Die durch **reinen Druck** und **geschmackvolle Ausstattung** sich auszeichnende **„Formelsammlung"** wird infolge ihres **reichen vielseitigen Inhaltes, ihrer zweckentsprechenden Anordnung** und **orientierenden Gliederung** als Nachschlagebuch vorzügliche Dienste leisten

Grenzboten: **Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud Kleinpaul.** Ein **lehrreiches Büchlein,** das in seinen engen Wänden **eine Fülle von Sprachbelehrung bietet,** die jeden fesseln muß, der nur einigermaßen das Bedürfnis fühlt, sich über Sprachdinge Aufklärung zu verschaffen. Der Verfasser hat sich schon durch zahlreiche volkstümliche Bücher über die Sprache und ihr Leben bekannt gemacht, er hat eine ausgebreitete, sichere Kenntnis der Sprach- und Wortgeschichte, hat mit Ausdauer auf diesem Gebiete gesammelt und weiß seinen Stoff immer geschickt zu gruppieren und vorzutragen. .

Staatsanzeiger: Die **Römische Litteraturgeschichte** ist eine **geistvolle glänzende Arbeit.** Einsender hat dieselbe von Anfang bis Ende mit größtem Genuß durchgelesen und dabei Art und Entwicklung des römischen Schrifttums und damit des römischen Geisteslebens überhaupt besser und gründlicher verstehen gelernt, als durch manches vielstündige Universitätskolleg oder dickleibige Handbücher.

Meteorologische Zeitschrift: Trabert hat in der **Meteorologie** seine schwierige Aufgabe vortrefflich gelöst In allen Fragen vertritt er den neuesten und letzten Standpunkt.

Schweizerische Lehrerzeitung: Wer die **Perspektive** von Freyberger und das **Geometrische Zeichnen** von Becker durchgeht, wird seine Freude daran haben. So viel für so wenig Geld wird wohl kaum anderswo geboten. Die Illustrationen sind sauber und exakt. Der Text ist knapp und klar und auch da, wo er mehr andeutet als ausführt, anregend.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.