schen

Ebene und sphärische

Trigonometrie

von

Dr. Gerhard Hessenberg

Mit 69 ein- und zweifarbigen Figuren

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

1 **Der Nibelunge Nôt** und Mittelhochdeutsche Grammatik von Prof. Dr. Golther.

2 **Lessings Emilia Galotti.**

3 **Lessings Fabeln** nebst Abhandlungen.

4 **Lessings Laokoon.**

5 **Lessings Minna von Barnhelm.**

6 **Lessings Nathan der Weise.**

7 **Martin Luther, Thomas Murner** u. d. Kirchenlied d. 16. Jahrh. m. Einltg. u. Anm. v. Prof. G. Berlit

8 **Lessings litterarische** und dramaturg. Abhandl.

9 **Lessings antiqu. und** epigrammat. Abhandl.

10 **Kudrun und Dietrichepen.** Mit Einltg. u. Wörterbuch v. Dr. O. L. Jiriczek.

11 **Astronomie** von A. F. Möbius. Mit 36 Figuren.

12 **Pädagogik** von Prof. Dr. Rein.

13 **Geologie** von Dr. E. Fraas. Mit 66 Textfig.

14 **Psychologie und Logik** von Dr. Th. Elsenhans.

15 **Deutsche Mythologie** von Prof. Dr. F. Kauffmann.

16 **Griechische Altertums-** kunde von Ma
9 Vollbildern.

17 **Aufsatz-**
v. Prof. Dr.

18 **Menschli**
v. Realschuldir
beitslehre. M

19 **Römische Geschichte** v. Dr. Jul. Koch.

20 **Deutsche Grammatik** und Geschichte der deutschen Sprache von Dr. O. Lyon.

21 **Lessings Philotas** und die Poesie des 7jähr. Krieges v. Prof. O. Güntter.

22 **Hartmann von Aue,** Wolfram v. Eschenbach u. Gottfr. von Straßburg. Ausw. a. d. höf. Epos v. Prof. Dr. K. Marold.

23 **Walther v. d. Vogelweide** mit Ausw. aus Minnesang und Spruchdichtung von Prof. O. Güntter.

24 **Hans Sachs u. Johann Fischart** nebst einem Anh.: Brant u. Hutten. Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr.

25 **Kirchenlied u. Volkslied.** Geistl. u. weltl. Lyrik d. 17. u. 18. Jahrh. bis Klopstock von Dr. G. Ellinger.

26 **Physische Geographie** von Prof. Dr. Siegm. Günther. Mit 32 Abbildungen.

27 **Griechische u. Römische** Mythologie v. Prof. Dr. H. Steuding.

28 **Althochdtsche Litteratur** m. Grammatik, Uebersetzung u. Erläuterungen v. Prof. Th. Schauffler.

29 **Mineralogie** v. Dr. R. Brauns, Professor an der Univ. Gießen. Mit 130 Abb.

de v. Dir. E. Gelcich, Prof. F. Sauter u
70 Abbildungen.

Litteraturge-
Koch, Professor an
reslau.

heldensage von
k. Mit 3 Taf.

Wenden!

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite!

Kleine mathematische Bibliothek

aus der **Sammlung Göschen.**

Jedes Bändchen elegant gebunden 80 Pfennig.

Ebene Geometrie mit 115 zweifarbigen Figuren von Prof. G. Mahler. Zweite Auflage. Nr. 41.

Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Zweite Auflage. Nr. 47.

Beispiel-Sammlung zur **Arithmetik** und **Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Zweite Aufl. Nr. 48.

Formelsammlung u. **Repetitorium** der **Mathematik** mit 20 Fig. v. Prof. Bürklen. Zweite Aufl. Nr. 51.

Niedere Analysis mit 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Geometrisches Zeichnen mit 282 Figuren von Architekt H. Becker. Nr. 58.

Analytische Geometrie der Ebene mit 45 Figuren von Prof. Dr. M. Simon. Nr. 65.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 57 Figuren von Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Vierstellige Logarithmen von Professor Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 63 Figuren von Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit zahlr. Figuren von Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 88.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbild. von Prof. Dr. M. Simon. Nr. 89.

Mathematische Geographie zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Kurt Geissler. Nr. 92.

Chrzanowski

Sammlung Göschen

Ebene und sphärische

Trigonometrie

von

Dr. Gerhard Hessenberg

in Charlottenburg-Berlin

Mit 69 ein- und zweifarbigen Figuren

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1899

Druck und Einband von Carl Rembold & Co. in Heilbronn.

Inhaltsverzeichnis.

Anmerkung des Verfassers:

Der zweite Beweis der Additionstheoreme (§ 16, pag. 53 ff.) ist zwar vom Verfasser selbständig gefunden, aber nicht neu. Er ist ein anscheinend in Vergessenheit geratener Beweis der Baur'schen Schule.

Einleitung.

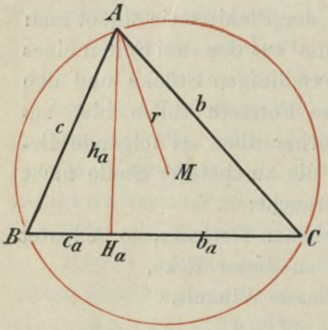
§ 1.

Eine der wichtigsten Aufgaben der elementaren Geometrie ist die Konstruktion einer Figur aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Stücke, speciell die des Dreiecks aus drei Stücken. An diese Aufgabe schliesst sich naturgemäss die Frage nach der Grösse der übrigen Stücke an. Dieselbe kann ohne weiteres beantwortet werden, wenn die Aufgabe der Konstruktion der Figur gelöst ist: Man zeichnet die Figur und misst mit Massstab und Transporteur die gesuchten Stücke nach.

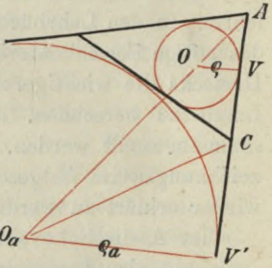
Dieses Verfahren nennt man das „mechanische“, „konstruktive“ oder **„graphische“**. Früher vielfach unterschätzt, findet es in neuerer Zeit ausgedehnte Anwendung in der Technik (Graphostatik). Es ist nicht auf ebene Figuren beschränkt: in der darstellenden Geometrie wird die Aufgabe behandelt, die einzelnen Stücke räumlicher Figuren durch ebene Konstruktionen zu ermitteln. Dagegen ist der Anwendbarkeit des graphischen Verfahrens durch folgende zwei Hauptpunkte eine Grenze gesetzt:

Erstens setzt es die konstruktive Lösung der Aufgabe voraus. Diese aber ist mit Zirkel und Lineal durchaus nicht immer möglich und, wenn

Endlich bezeichne
r den Radius, M das Centrum des Umkreises,
ϱ den Radius, O das Centrum des Inkreises,
J den Inhalt des Dreiecks.



Figur 1.



Figur 2.

Die Formeln für das ebene Dreieck sind dann:

(I) $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 \mp 2ab_a}$ (Projektionssatz),

(II) $\mathbf{J = \sqrt{s \cdot s_a \cdot s_b \cdot s_c}}$,

(III) $\mathbf{J = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c}$,

(IV) $\mathbf{J = \varrho s = \varrho_a s_a = \varrho_b s_b = \varrho_c s_c}$,

(V) $\mathbf{J = \frac{abc}{4r}}$,

(VI) $\mathbf{J = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}}$,

(VII) $\mathbf{\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}}$.

Ist beispielsweise

$$a = 13;\ b = 14;\ c = 15,$$

so wird

$$s = 21;\ s_a = 8;\ s_b = 7;\ s_c = 6,$$

also nach (II)

$$J = 84$$

und nach (III)

$$h_a = \frac{168}{13} = 12{,}9230\ldots;\ h_b = 12;\ h_c = \frac{56}{5} = 11{,}2.$$

Ferner ist nach (IV)

$$\varrho = 4;\ \varrho_a = \frac{21}{2} = 10{,}5;\ \varrho_b = 12;\ \varrho_c = 14$$

und nach (V)

$$r = \frac{65}{8} = 8{,}125.$$

Wie gross sind b_a, c_a, a_b u. s. w.? (Aus (I) zu berechnen.) Der Leser überzeuge sich, dass auch (VI) und (VII) erfüllt sind, und konstruiere das Dreieck, um die Stücke nachzumessen. Die Winkel finden sich in Kap. II, § 14, berechnet.

§ 3.

Die **Aufgabe der Trigonometrie** kann man nunmehr folgendermassen definieren:

Zunächst für das ebene Dreieck, dann aber auch für beliebige ebene und räumliche Figuren den Zusammenhang zwischen den Strecken, Flächeninhalten und Winkeln zu ermitteln.

Das wesentlich neue Moment liegt dabei in der Betrachtung der Winkel, da diejenigen Beziehungen, in denen keine Winkel vorkommen, durch die elementare Geometrie gefunden werden können. Es werden jedoch auch solche Beziehungen mit trigonometrischen Hilfsmitteln oft einfacher und kürzer herzuleiten sein.

Die Gleichungen zwischen den Strecken und Flächeninhalten sind a l g e b r a i s c h, d. h. sie können auf eine Form gebracht werden, in der nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, und zwar in endlicher Anzahl, vorkommen. So kann für (II) geschrieben werden

$$J \,.\, J = s \,.\, s_a \,.\, s_b \,.\, s_c \text{ oder}$$

$$16 \,.\, J \,.\, J = (a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c).$$

Man sagt daher, dass der Inhalt und die geradlinigen Stücke des Dreiecks algebraische Funktionen der Seiten sind. Das Entgegengesetzte gilt von den Winkeln. Sie sind zwar auch durch die drei Seiten bestimmt, d. h. Funktionen der drei Seiten; aber der Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln lässt sich nicht durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen definieren; die Winkel sind also „nicht-algebraische“, oder, wie man dafür sagt, „transcendente“ Funktionen der Seiten.

Erster Teil.

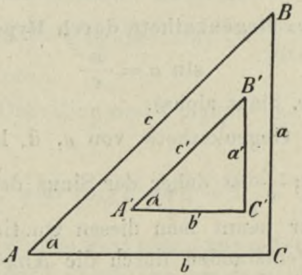
Ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Das rechtwinklige Dreieck.

§ 4. Definition der trigonometrischen Funktionen.

Wenn in einem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC ein spitzer Winkel, etwa α, bekannt ist, so kennt man auch den zweiten Winkel, $\beta = 90^0 - \alpha$. Man kennt



Figur 3.

also das Dreieck seiner Gestalt nach. Ist in irgend einem anderen rechtwinkligen Dreieck A′B′C′ der Winkel α' gleich α, so sind die Dreiecke ABC und A′B′C′ ähnlich und folglich auch

$$a : b : c = a' : b' : c'.$$

Die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind also durch einen der spitzen Winkel völlig bestimmt, sie sind, wie der Mathematiker dafür sagt, **„Funktionen“** desselben.

Ist z. B. $\alpha = 30^\circ$, so ist $a = \frac{1}{2}c$, also nach dem Pythagoras $b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, mithin hat man

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660; \frac{b}{a} = \sqrt{3} = 1{,}7321.$$

Ist $\alpha = 45^\circ$, so ist $c = a\sqrt{2}$, also

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071; \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071; \frac{a}{b} = 1.$$

Man nennt den Quotienten $\frac{a}{c}$ den Sinus des Winkels α:

Sinus = Gegenkathete durch Hypotenuse

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

(spr. Sinus alpha).

b ist die Gegenkathete von β, d. h. des Complements von α; $\frac{b}{c}$ ist daher der Sinus des Complements von α; kürzer nennt man diesen Quotienten den Cosinus von α (entstanden durch die Abkürzung co. sin. für complementi sinus).

Cosinus = Gegenkathete des Complements durch Hypotenuse.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

(spr. Cosinus alpha).

Nach dieser Definition ist

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha).$$

Den Quotienten $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ nennt man die Tangente des Winkels α.

Tangente = Sinus durch Cosinus = Gegenkathete durch andere Kathete.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(spr. Tangens alpha.)

$\frac{b}{a}$ ist hiernach die Tangente von β und wird als solche die Cotangente von α genannt. Die Bezeichnung entstand aus co. tang. = complementi tangens.

Cotangente = Gegenkathete des Complements durch andere Kathete.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(spr. Cotangens alpha).

Nach dieser Definition sind Tangente und Cotangente reciproke Werte:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ weil } \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Aus diesem Grunde wird $\operatorname{cotg}\alpha$ nur selten gebraucht, da es sich so einfach durch $\operatorname{tg}\alpha$ ersetzen lässt.

Im ganzen giebt es 6 Seitenverhältnisse: $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$; $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$; $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$. Die Namen der 4 ersten sind soeben angegeben worden. Von den beiden letzten nennt man $\frac{c}{b}$ die Secante und dementsprechend $\frac{c}{a}$ die Cosecante von α und schreibt dafür $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$. Offenbar ist $\operatorname{cosec}\alpha$

$= \frac{1}{\sin \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$. Daher werden die Funktionen sec und cosec im allgemeinen nicht benutzt.

Dagegen präge sich der Leser die Definition der Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens aufs sorgfältigste ein. Hierbei sind folgende Merkmale dienlich: Im Zähler steht stets die Gegenkathete, und zwar die des Winkels selbst bei den Funktionen ohne Co, dagegen die des **Complements** bei den Funktionen mit **Co.** Im Nenner steht die Hypote**nuse** bei Si**nus** und Cosi**nus.**

Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens heissen die „trigonometrischen Funktionen". Sie sind absolute unbenannte Zahlen; ihr Wert ist unabhängig davon, ob die Seiten des Dreiecks nach Centimetern, Zoll oder sonst irgend einem Masse gemessen sind. Man kann ihre Werte für jeden Winkel mit beliebiger Genauigkeit berechnen, und zwar mit elementaren Hilfsmitteln, aber auf Grund von Eigenschaften, die erst später zu entwickeln sein werden. Wesentlich einfachere Methoden liefert jedoch die höhere Mathematik. Näheres hierüber findet sich im dritten Teil dieses Buches.

Man hat, wie für die Logarithmen der Basis 10, auch für die trigonometrischen Funktionen Tabellen aufgestellt. Diese finden sich aber, da sie wenig gebraucht werden, gar nicht oder nur in beschränktem Umfange den logarithmischen Tabellenwerken beigegeben. Dagegen enthalten diese Werke ausführliche Tabellen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Die sichere Handhabung dieser Tabellen ist für das Weitere unumgänglich notwendig, und zwar übe sich der Leser zunächst an der für die meisten Zwecke ausreichenden fünfstelligen Tabelle.

§ 5. Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

Wenn man bedenkt, dass die zu einem Winkel α gehörigen Zahlen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ nichts anderes sind, als die Seitenverhältnisse eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks, dessen einer spitzer Winkel gleich α ist, so erkennt man, dass mit den trigonometrischen Tabellen vollständig das Material zur Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke gegeben ist. In einem solchen kann gegeben sein:

1) α und a | 3) α und c
2) α und b | 4) a und b
5) a und c.

Im ersten Falle hat man:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \text{ also } c = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \; b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\log c = \log a - \log\sin\alpha \qquad \log b = \log a - \log\operatorname{tg}\alpha$$

Im zweiten Falle ist:

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha, \; c = \frac{b}{\cos\alpha} \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \; a = b\operatorname{tg}\alpha$$

$$\log c = \log b - \log\cos\alpha \qquad \log a = \log b + \log\operatorname{tg}\alpha.$$

Im dritten Falle ist:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \; a = c \,.\, \sin\alpha \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \; b = c\cos\alpha$$

$$\log a = \log c + \log\sin\alpha \qquad \log b = \log c + \log\cos\alpha.$$

Im vierten Falle ist:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\log a - \log b = \log\operatorname{tg}\alpha \qquad \log c = \log a - \log\sin\alpha$$

oder auch $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Im fünften Falle ist:

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$,	$b = a \operatorname{cotg} \alpha$
$\log a - \log c = \log \sin \alpha$	$\log b = \log a + \log \operatorname{cotg} \alpha$

oder $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Die Berechnung des zweiten Winkels ist hierbei nicht berücksichtigt. Es ist ja $\beta = 90^0 - \alpha$. Die Anwendung der Formeln $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ist nur zu empfehlen, wenn a, b resp. c, a ganzzahlig sind, oder wenn man eine ausführliche Quadratzahlentabelle zur Verfügung hat.

Erstes Beispiel.

$$a = 3,\ c = 5.$$
$$b = \sqrt{25 - 9} = 4.$$
$$\log a = 0{,}47712$$
$$\log c = 0{,}69897$$
$$\log \sin \alpha = 0{,}77815 - 1 = 9{,}77815 - 10.$$
$$\alpha = 36^0\ 52'\ 11''$$
$$\beta = 90^0 - \alpha = 53^0\ \ 7'\ 49''.$$

Der Leser rechne für dieses Dreieck auch die andern 4 Fälle durch.

Die Bestimmung der Sekunden ist nicht ganz genau. Man findet denselben log sin für alle Winkel von $36^0\ 52'\ 9''$ bis $36^0\ 52'\ 12''$. Mit 7stelligen Logarithmen findet man, dass der letzte Wert der richtige ist.

Zweites Beispiel.

$$a = 12,\ \alpha = 67^0\ 22'\ 49''$$

$\log c = \log a - \log \sin \alpha$	$\log b = \log a + \log \cot \alpha$
$\log a = 1{,}07918$	$\log a = 1{,}07918$
$-\log \sin \alpha = -9{,}96524 + 10$	$\log \cot \alpha = 9{,}61971 - 10$
$\log c = 1{,}11394$	$\log b = 0{,}69897$
$c = 13{,}000$	$b = 5{,}0000$

Probe: $12^2 + 5^2 = 13^2$.

Drittes Beispiel.

$c = 21{,}746;\ \alpha = 38^\circ\ 21'\ 47''$

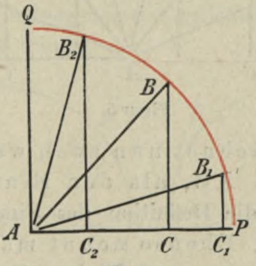
$\log a = \log c + \log \sin \alpha$	$\log b = \log c + \log \cos \alpha$
$\log c = 1{,}33738$	$\log c = 1{,}33738$
$\log \sin \alpha = 9{,}79285 + 10$	$\log \cos \alpha = 9{,}89437 - 10$
$\log a = 1{,}13023$	$\log b = 1{,}23175$
$a = 13{,}497$	$b = 17{,}051$

Probe mit Hilfe der Quadratzahlentabelle: $a^2 = 182{,}17$, $b^2 = 290{,}73$, $c^2 = 472{,}89$.

Das zweite und dritte Beispiel sind der Tafel I am Schlusse des Buches entnommen.

§ 6. Verlauf und Verallgemeinerung von Sinus und Cosinus.

1. Um von dem Verlauf des Sinus und Cosinus ein anschauliches, geometrisches Bild zu erhalten, denke man sich die Hypotenuse des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC als Längeneinheit gewählt. Dann ist $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$, weil $c = 1$ wird. Denkt man sich nun

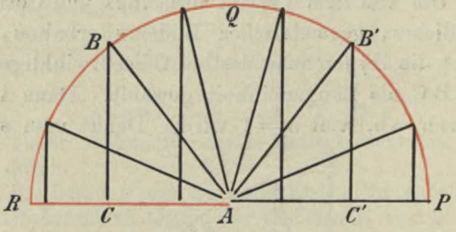


Figur 4.

den Winkel α veränderlich, den Schenkel AC aber festgehalten, so beschreibt der Punkt B einen Viertelskreis PBQ. Das Lot von B auf den Radius AP, der durch

C geht, ist der Sinus, die Entfernung seines Fusspunktes von A der Cosinus, vorausgesetzt, dass der Radius des Kreises die Längeneinheit ist. Man sieht aus der Figur unmittelbar, wie der Sinus von 0 bis 1 wächst, während der Cosinus von 1 bis 0 abnimmt.

2. Es hindert uns aber nichts, den Schenkel AB über die Lage AQ hinauszudrehen, wenn wir nur AP über A hinaus rückwärts verlängern. Dann wandert C auf dem zu AP entgegengesetzten Radius AR weiter, das Lot BC nimmt von 1 bis 0 wieder ab, und AC wächst wieder von 0 bis 1, ist aber jetzt entgegengesetzt gerichtet wie vorher.



Figur 5.

Man bezeichnet nun auch weiter BC, gemessen durch AB, als den Sinus von PAB und hat damit die Definition des Sinus auf stumpfe Winkel erweitert. Ebenso nennt man auch weiter AC, gemessen durch AB, den Cosinus von α, erteilt ihm aber, da AC entgegengesetzt gerichtet ist, wie die Cosinus des ersten Quadranten, das negative Vorzeichen.

Die so definierten Sinus und Cosinus stumpfer Winkel lassen sich leicht durch die ihrer spitzen Nebenwinkel ausdrücken. Ist nämlich $\sphericalangle B'AP = \sphericalangle BAR = 180^0 - \alpha$, so ist B′ C′ gleich und gleichgerichtet, wie BC, d. h. es ist

$$\sin\alpha = \sin\,(180^0 - \alpha). \qquad \text{(I)}$$

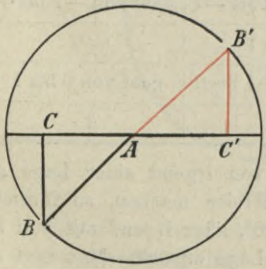
Dagegen ist AC gleich und entgegengesetzt gerichtet, wie A′C, d. h. es ist

$$\cos\alpha = -\cos\,(180^0 - \alpha) \qquad \text{(II)}$$

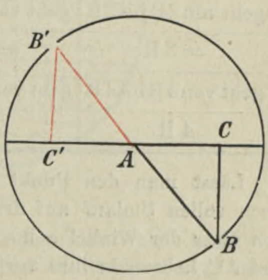
Nebenwinkel haben gleiche Sinus und entgegengesetzt gleiche Cosinus.

3. Man kann AB noch weiter drehen, durch den dritten und vierten Quadranten, bis nach AP. Dabei wandert C von R nach P zurück, und wenn man AC, gemessen durch AB, wieder mit dem negativen Vorzeichen, wenn C auf AR, mit dem positiven, wenn C auf AP liegt, auch weiterhin als Cosinus von α bezeichnet, so durchläuft der Cosinus die Werte von -1 bis $+1$ wieder zurück.

Ebenso bezeichnet man BC, gemessen durch AB, auch weiterhin als den Sinus, erteilt ihm aber das negative Vorzeichen, da BC entgegengesetzt gerichtet ist, wie im ersten und zweiten Quadranten.



Figur 6.



Figur 7.

Die Sinus und Cosinus der Winkel des dritten und vierten Quadranten lassen sich wieder in einfacher Weise durch die des ersten und zweiten ausdrücken. Verlängert man nämlich BA über A hinaus bis zum zweiten Schnittpunkt B′ mit dem Kreis, so ist $\sphericalangle PAB' = \alpha - 180^\circ$, B′C′ ist gleich und entgegengesetzt gerichtet, wie BC:

$$\sin\alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ). \qquad \text{(III)}$$

C′A ist gleich und entgegengesetzt gerichtet, wie CA:

$$\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180^\circ). \qquad \text{(IV)}$$

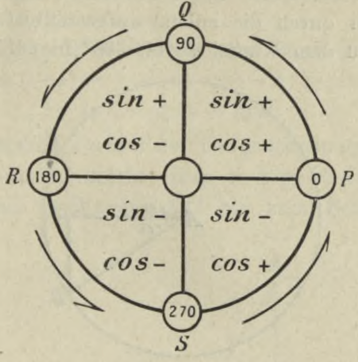
Winkel, die sich um 180° unterscheiden, haben entgegengesetzt gleiche Sinus und Cosinus.

4. Hierdurch erhält man folgendes Bild von dem Verlauf des Sinus und Cosinus in den 4 Quadranten:

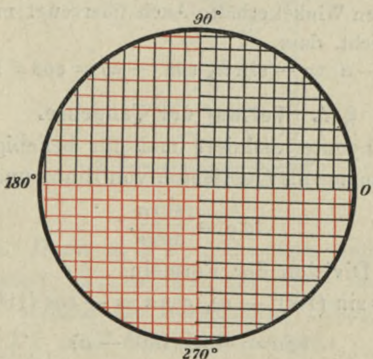
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$= 0$	$= 0$	$= 1$
geht von 0 bis R	geht von 0 bis 1	geht von 1 bis 0
$= R$	$= 1$	$= 0$
geht von R bis 2 R	geht von 1 bis 0	geht von 0 bis −1
$= 2R$	$= 0$	$= -1$
geht von 2 R bis 3 R	geht von 0 bis −1	geht von −1 bis 0
$= 3R$	$= -1$	$= 0$
geht von 3 R bis 4 R	geht von −1 bis 0	geht von 0 bis 1
4 R	0	1

Lässt man den Punkt B von irgend einer Lage aus einen vollen Umlauf auf dem Kreise machen, so vermehrt sich zwar der Winkel α um 360°, aber B und mit ihm BC und AC kehren in ihre vorige Lage zurück. Man sagt daher, Sinus und Cosinus seien **„um 360° periodisch“:**

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin\alpha \tag{V}$$
$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos\alpha \tag{VI}$$



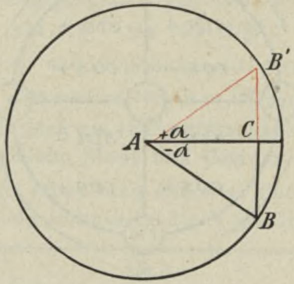
Figur 8.



Figur 8 a.

5. Bisher war angenommen, dass sich B auf dem Kreise im entgegengesetzten Sinne wie der Uhrzeiger drehe. Dreht man AB nach der anderen Seite, bis es mit AP zusammen-

fällt, so wird α null und der bei weiterer Drehung entstehende Winkel ist konsequenterweise als ein negativer Winkel zu bezeichnen. Die Funktionen negativer Winkel definiert man durch die zuletzt aufgestellte Gleichung, indem man zu dem Winkel so oft 360° hinzufügt, bis man



Figur 9.

einen positiven Winkel erhält. Auch überzeugt man sich an der Figur leicht, dass

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \text{ ist.} \qquad \text{(VII)}$$

§ 7. Verlauf der Tangente.

Die Tangente definiert man für beliebige Winkel am besten immer als Quotienten von Sinus und Cosinus:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Durch Division der Formeln

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha), \quad \cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \qquad \text{(VIII)}$$

Nebenwinkel haben entgegengesetzt gleiche Tangenten.

Durch Division der Gleichungen

$$\sin\alpha = -\sin(\alpha - 180^\circ), \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180^\circ)$$

erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - 180^\circ). \qquad \text{(IX)}$$

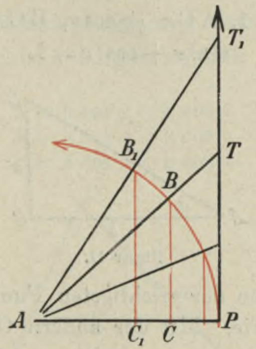
Die Tangenten der Winkel im dritten und vierten Quadranten stimmen wieder mit denen der Winkel im ersten und zweiten überein, die Tangente ist also bereits um 180° periodisch.

Für negative Winkel erhält man durch Division von

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \; \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathbf{tg}\,(-\alpha) = -\,\mathbf{tg}\,\alpha. \qquad \text{(X)}$$

Um von dem Verlauf der Tangente ein geometrisches Bild zu erhalten, errichte man in Fig. 10 in P das Lot auf AP und verlängere AC bis zum Schnitt T mit



Figur 10.

demselben. Dann ist $TP : AP = \text{tg}\,\alpha$, und da AP die Längeneinheit ist, ist TP das Mass der Tangente. Uebrigens stammt die Bezeichnung „Tangente" davon her, dass TP in P den Kreis berührt.

Die Tangente wächst von 0 bis 90° stetig und kann jeden Wert annehmen. Für 90° ist sie nicht definierbar, da sich dann AC und das Lot in P nicht schneiden. Auch wird $\cos 90° = 0$, so dass der Quotient

$\frac{\sin 90^0}{\cos 90^0}$ keinen Sinn hat. Man schreibt aber

$$\operatorname{tg} 90^0 = \infty \text{ (gesprochen: unendlich)},$$

um damit anzudeuten, dass $\operatorname{tg}\alpha$ bei der Annäherung von α an 90^0 jeden beliebig grossen Wert annehmen kann.

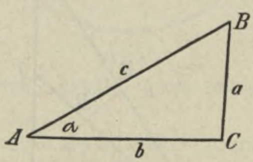
§ 8. Algebraische Gleichungen zwischen den Funktionen desselben Winkels.

Nach dem Satz des Pythagoras ist für jede Lage des Punktes B:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$

oder, da $AB = 1$, $AC = \pm \cos\alpha$, $BC = \pm \sin\alpha$ ist:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \text{(XI)}$$



Figur 11.

Dies ist eine der wichtigsten Fundamentalformeln der Trigonometrie. Mit der andern Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

zusammen gestattet sie, jede der drei Funktionen sin, tg, cos durch eine andere auszudrücken. Eliminiert man irgend eine, etwa sin, aus beiden Gleichungen, so erhält man eine Beziehung zwischen den beiden andern, etwa cos und tg. Der Leser übe dies zunächst an einigen Zahlenbeispielen, z. B. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, 3 u. a. m., und leite sodann folgende 6 Formeln ab:

$\sin\alpha =$	$\sin\alpha$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$

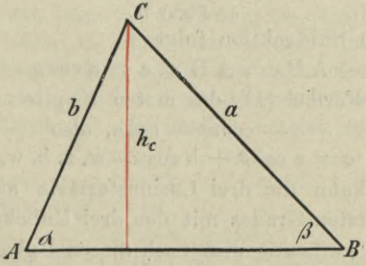
Zweites Kapitel.

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 9. Cosinusformeln und Cosinussatz.

In jedem schiefwinkligen Dreieck gelten die drei **Cosinusformeln:**

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \mathrm{b}\cos\gamma + \mathrm{c}\cos\beta \\ \mathrm{b} &= \mathrm{c}\cos\alpha + \mathrm{a}\cos\gamma \\ \mathrm{c} &= \mathrm{a}\cos\beta + \mathrm{b}\cos\alpha \end{aligned} \tag{I}$$



Figur 12.

Beweis. 1. α und β seien spitz. Dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck $\mathrm{A\,C\,H_c}$

$$\mathrm{A\,H_c} = \mathrm{A\,C}\cos\alpha = \mathrm{b}\cos\alpha$$

und in dem rechtwinkligen Dreieck $\mathrm{B\,C\,H_c}$

$$\mathrm{B\,H_c} = \mathrm{B\,C}\cos\beta = \mathrm{a}\cos\beta.$$

Durch Addition folgt

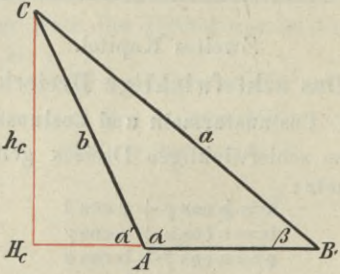
$$A H_c + B H_c = A B = c = a \cos\beta + b \cos\alpha, \text{ w. z. b. w.}$$

2. Einer der Winkel α und β, etwa α, sei stumpf. Dann ist wie vorher

$$B H_c = B C \cos\beta = a \cos\beta.$$

Dagegen $\quad A H_c = A C \cos\alpha' = b \cos\alpha',$

wo $\alpha' = 180^0 - \alpha$ der Aussenwinkel an der Ecke A ist.



Figur 13.

Durch Subtraktion folgt

$$B H_c - A H_c = A B = c = a \cos\beta - b \cos\alpha'$$

und nach Formel (II) des ersten Kapitels ist

$$-\cos\alpha' = \cos\alpha, \text{ also}$$

$$c = a \cos\beta + b \cos\alpha, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man kann die drei Cosinusformeln als drei Gleichungen ersten Grades mit den drei Unbekannten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ auffassen und nach diesen Unbekannten auflösen. Dann erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 b c},$$

$$\cos\beta = \frac{+a^2 - b^2 + c^2}{2 a c},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 a b}. \qquad \text{(II)}$$

Man schreibt nach Wegschaffung der Brüche diese Formeln meist in der Gestalt:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\cos\alpha,$$
$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2 - 2\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\cos\beta,$$
$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\cos\gamma. \qquad \text{(III)}$$

Diese Formeln enthalten den sogenannten **Cosinussatz.** Weiss man eine der Formeln (III) auswendig, so leitet man die anderen durch Vertauschung der Seiten und Winkel aus ihr ab. Will man den Cosinussatz unmittelbar aus den Cosinusformeln erhalten, so multipliziere man die erste mit a, die zweite mit b, die dritte mit c, addiere zwei von ihnen und subtrahiere die dritte davon.

Umgekehrt erhält man durch Addition zweier der Gleichungen (III) die Cosinusformeln. Addiert man z. B. die beiden letzten, so hebt sich $b^2 + c^2$ auf beiden Seiten und es bleibt

$$0 = 2\,a^2 - 2\,ca\cos\beta - 2\,ab\cos\gamma.$$

Dividiert man durch 2 a und bringt die negativen Glieder auf die linke Seite, so erhält man die erste Cosinusformel.

Die Gleichungen (III) erhält man auch unmittelbar aus dem Projektionssatz oder verallgemeinerten Pythagoras [Formel (I) der Einleitung]. Ist nämlich γ spitz, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b_a$$
$$\text{und}\quad b_a = b\cos\gamma.$$

Ist aber γ stumpf, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b_a$$
$$\text{und}\quad b_a = b\cos(180^0 - \gamma) = -\,b\cos\gamma.$$

§ 10. Anwendung des Cosinussatzes.

Der Cosinussatz gestattet die Berechnung der fehlenden Stücke des Dreiecks, wenn drei Seiten oder zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind.

Erster Fall: Gegeben die 3 Seiten a, b, c.

Man erhält die Winkel aus (II).

Erstes Beispiel.

$a = 13,\ b = 4,\ c = 15.$

1. Berechnung von α.

$$-a^2 + b^2 + c^2 = -169 + 16 + 225 = 72,$$

$$\cos\alpha = \frac{72}{2.4.15} = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

$$\log\cos\alpha = 9{,}77815 - 10,$$

$$\alpha = 53^\circ\ 7'\ 49''.$$

2. Berechnung von β.

$$a^2 - b^2 + c^2 = 169 - 16 + 225 = 378,$$

$$\cos\beta = \frac{378}{2.13.15} = \frac{63}{65},$$

$$\log\cos\beta = \log 63 - \log 65,$$

$$\begin{array}{l} \log 63 \quad = 1{,}79934 \\ \log 65 \quad = 1{,}81291 \\ \hline \log\cos\beta = 9{,}98643 - 10, \end{array}$$

$$\beta = 14^\circ\ 15'\ 0''.$$

3. Berechnung von γ.

$$a^2 + b^2 - c^2 = -40,$$

$$\cos\gamma = -\frac{40}{2.13.4} = -\frac{5}{13}.$$

γ ist also ein stumpfer Winkel. Da stumpfe Winkel nicht in der Tabelle stehen und negative Zahlen keine (reellen) Logarithmen haben, bestimme man statt γ den Winkel $\gamma' = 180^\circ - \gamma$, dessen Cosinus nach Formel (II) des Kap. I gleich $+\frac{5}{13}$ ist.

Man hat

$$\begin{array}{l} \log\ 5 \quad = 0{,}69897 \\ \log 13 \quad = 1{,}11394 \\ \hline \log\cos\gamma' = 0{,}58503 - 10. \end{array}$$

$$\gamma' = 67^\circ\ 22'\ 48''$$

$$\gamma = 180^\circ - \gamma' = 112^\circ\ 37'\ 12''.$$

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\ 0'\ 1''$.

Der Fehler von 1″ ist sehr gering.

Wenn a, b, c nicht ganzzahlig gegeben sind, wird die Rechnung wohl umständlicher, bleibt aber im Prinzip die gleiche, wie bei dem ersten Beispiel.

Zweites Beispiel.

$a = 13{,}509,\ b = 16{,}470,\ c = 21{,}746.$

Logarithmisch oder mit einer Quadratzahlentabelle berechne man zunächst a^2, b^2, c^2. Die Quadratzahlentabelle ergiebt $a^2 = 182{,}49,\ b^2 = 271{,}26,\ c^2 = 472{,}89.$

1. Berechnung von α.

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 561{,}66$$

$$\log\cos\alpha = \log 561{,}66 - \log 2 - \log b - \log c$$

$$\text{ausgerechnet} = 9{,}89437 - 10$$

$$\alpha = 38^\circ\ 21'\ 48''.$$

2. Berechnung von β.

$$a^2 - b^2 + c^2 = 384{,}12$$

$$\log\cos\beta = \log 384{,}12 - \log 2 - \log a - \log c$$

$$\text{ausgerechnet} = 9{,}81543 - 10$$

$$\beta = 49^\circ\ 10'\ 24''.$$

3. Berechnung von γ.

$$a^2 + b^2 - c^2 = -19{,}14$$

γ ist stumpf. $\gamma' = 180^\circ - \gamma$.

$$\cos\gamma' = +\frac{19{,}14}{2\,ab}$$

$$\log\cos\gamma' = \log 19{,}14 - \log 2 - \log a - \log b$$

$$\text{ausgerechnet} = 8{,}63360 - 10$$

$$\gamma' = 87^\circ\ 32'\ 5''$$

$$\gamma = 180^\circ - \gamma' = 92^\circ\ 27'\ 55''.$$

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\ 0'\ 7''$, hinreichend genau.

Zweiter Fall: Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: a, b, γ.

Man findet c aus der dritten Formel (III) dieses Kapitels, sodann α und β wie im ersten Fall oder nach dem Sinussatz, § 13.

Drittes Beispiel.

γ spitz. $a = 13,\ b = 14,\ \gamma = 67^\circ\ 22'\ 48''$.

$$\log 2\,ab\cos\gamma = \log 2 + \log a + \log b + \log\cos\gamma$$
$$\text{ausgerechnet} = 2{,}14613$$
$$2\,ab\cos\gamma = 140{,}00$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$
$$= 169 + 196 - 140 = 225$$
$$c = 15.$$

Für α und β erhält man nach den Formeln (II):

$$\alpha = 53^\circ\ 7'\ 49'',\quad \beta = 59^\circ\ 29'\ 23''.$$

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\ 0'\ 0''$.

Viertes Beispiel.

γ stumpf. $a = 13{,}509,\ b = 16{,}470,\ \gamma = 92^\circ\ 27'\ 55''$.

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma = 87^\circ 32' 5'', \cos\gamma' = -\cos\gamma$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\cos\gamma'$$
$$\log 2\,ab\cos\gamma' = \log 2 + \log a + \log b + \log\cos\gamma'$$
$$\text{ausgerechnet} = 1{,}28194$$
$$2\,ab\cos\gamma' = 19{,}14$$
$$a^2 = 182{,}49$$
$$b^2 = 271{,}26$$
$$c^2 = 472{,}89$$
$$c = 21{,}746.$$

[a^2, b^2 und c sind aus a, b und c^2 mit der Quadratzahlentabelle ermittelt.]

Dritter Fall: Gegeben zwei Seiten und ein nicht eingeschlossener Winkel: a, b, α.

Dieser Fall ist einfacher nach dem Sinussatz (siehe § 13) zu lösen, lässt sich aber auch nach dem Cosinussatz behandeln. Man hat für c die quadratische Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$\text{oder}\quad c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha = a^2 - b^2.$$

Ihre Wurzeln sind

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2\cos^2\alpha}$$
$$= b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} \qquad \text{(IV)}$$

Ist $a > b$, so ist nur das obere Vorzeichen brauchbar; das untere würde einen negativen Wert ergeben. Ist $a < b$, so sind beide Vorzeichen brauchbar, es muss aber $b^2\sin^2\alpha$ kleiner als a^2 sein, weil sonst der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ wird.

Fünftes Beispiel.

$a = 13,\ b = 4,\ \alpha = 53^\circ\, 7'\, 49''.$

$$\log b\cos\alpha = \log b + \log\cos\alpha$$
$$\log b\sin\alpha = \log b + \log\sin\alpha$$
$$\log b = 0{,}60206$$
$$\log\cos\alpha = 9{,}77815 - 10$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}90309 - 10$$
$$\log b\cos\alpha = 0{,}38021, \ldots\ b\cos\alpha = 2{,}4000$$
$$\log b\sin\alpha = 0{,}50515$$
$$2\log b\sin\alpha = 1{,}01030 \ldots\ b^2\sin^2\alpha = 10{,}240$$
$$a^2 - b^2\sin^2\alpha = 158{,}76$$
$$\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} = 12{,}600$$
$$c = 2{,}4 \pm 12{,}6 = 15 \text{ oder } -10{,}2.$$

Die negative Wurzel ist nicht brauchbar. Aus $a = 13$, $b = 4$, $c = 15$ berechnet man die fehlenden Winkel nach Fall 1.

Sechstes Beispiel.

$c = 21{,}746,\ a = 13{,}509,\ \alpha = 38^\circ\, 21'\, 48''.$

Man hat für b die quadratische Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

deren Wurzeln

$$b = c\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha}$$

sind. Es wird wie im fünften Beispiel:

$$c\cos\alpha = 17{,}051,\ c^2\sin^2\alpha = 182{,}16$$
$$a^2 - c^2\sin^2\alpha = 182{,}49 - 182{,}16 = 0{,}33$$
$$\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha} = 0{,}575$$
$$b = 17{,}051 \pm 0{,}575 = 17{,}627 \text{ oder } 16{,}476.$$

Beide Werte sind brauchbar; aber die letzte Stelle ist um 6 Einheiten falsch, wie genauere Berechnung zeigt. Der Fehler entsteht dadurch, dass $a^2 - c^2 \sin^2 \alpha$ nur auf zwei Stellen genau gefunden wird. Er kann noch bedeutend grösser werden.

Weitere Uebungsbeispiele enthält Tafel II am Schluss des Buches.

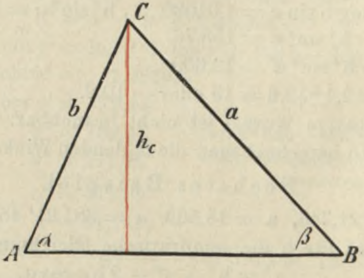
§ 11. Sinussatz.

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel:

$$\mathbf{a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.} \qquad \text{(V)}$$

Beweis. In dem rechtwinkligen Dreieck $A C H_c$ liegt bei A der Winkel α, wenn er spitz ist, dagegen der Winkel $(180^0 - \alpha) = \alpha'$, wenn α stumpf ist. Nach Formel (I) des ersten Kapitels haben α' und α denselben Sinus

$$\sin \alpha = \frac{C H_c}{A C} = \frac{h_c}{b}.$$



Figur 14.

Es ist also $\qquad h_c = b \sin \alpha \qquad$ (VI)

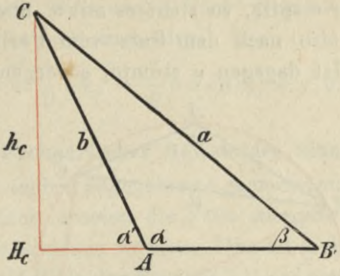
und ebenso im Dreieck $B C H_c$

$$h_c = a \sin \beta$$

folglich:

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta \quad \text{w. z. b. w.}$$



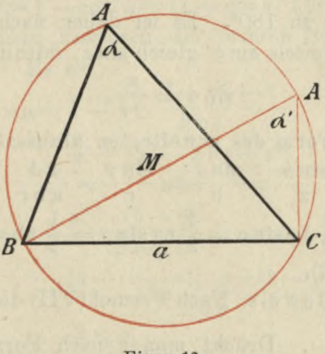
Figur 15.

Erweiterter Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \qquad \text{(VII)}$$

oder $\quad a = 2r\sin\alpha;\ b = 2r\sin\beta;\ c = 2r\sin\gamma. \qquad$ (VIII)

Beweis. Man ziehe durch B den Durchmesser des Umkreises. A′ sei sein zweiter Endpunkt. Das

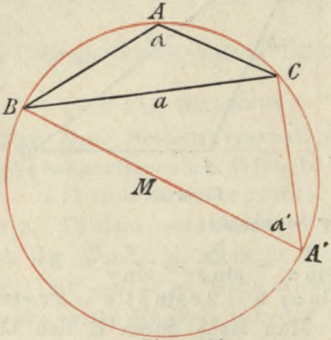


Figur 16 a.

Dreieck A′BC hat nach dem Satz des Thales bei C einen rechten Winkel. Also ist:

$$\sin\alpha' = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2r}.$$

Ist aber α spitz, so steht es mit α' über demselben Bogen, ist also nach dem Satz vom Peripheriewinkel gleich α'. Ist dagegen α stumpf, so ergänzen sich die



Figur 16 b.

Bogen, über denen α und α' stehen, zu 360°, die Winkel α und α' also zu 180°. Es ist daher nach Formel (I) des ersten Kapitels $\sin\alpha'$ gleich $\sin\alpha$, mithin unter allen Umständen

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}.$$

Zweite Form des erweiterten Sinussatzes:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{2J}{abc} \qquad \text{(IX)}$$

oder $$J = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad \text{(X)}$$

(Inhaltsformel).

Erster Beweis. Nach Formel (VII) dieses Kapitels ist $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{2r}$. Drückt man r nach Formel (V) der Einleitung durch J und die Seiten aus, so wird $\frac{\sin\alpha}{a}$ $= \frac{2J}{abc}$.

Zweiter Beweis. Nach Formel (VI) dieses Kapitels ist $h_c = b \sin\alpha$, also

$$J = \frac{1}{2} c\, h_c = \frac{1}{2} b\, c \sin\alpha, \quad \text{w. z. b. w.}$$

§ 12. Rechnerischer Beweis des Sinussatzes.

Bei den soeben angegebenen geometrischen Beweisen des Sinussatzes mussten die Fälle stumpfer und spitzer Winkel unterschieden werden. Dies ist nicht notwendig, wenn man mit Hilfe der Formel (XI) des ersten Kapitels:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

sich den Sinus aus dem in § 9, Formel (II), angegebenen Ausdruck des Cosinus ausrechnet. Man hat dabei dreimal die Formel

$$p^2 - q^2 = (p - q)\,(p + q)$$

aus der Algebra anzuwenden. Zunächst ist

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1 - \cos\alpha)\,(1 + \cos\alpha).$$

Die beiden Faktoren der rechten Seite berechnen wir einzeln. Es ist

$$\begin{aligned}
1 - \cos\alpha &= 1 - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\,b\,c} \\
&= \frac{a^2 - (b^2 - 2\,b\,c + c^2)}{2\,b\,c} \\
&= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c} \\
&= \frac{[a - (b - c)]\,[a + (b - c)]}{2\,b\,c}
\end{aligned}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2\, s_b\, s_c}{b\, c}. \tag{XI}$$

Ebenso wird

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c^2) - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{[b + c - a]\,[b + c + a]}{2bc}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{2s \,.\, s_a}{bc}. \qquad \text{(XII)}$$

Nunmehr ist

$$\sin^2\alpha = (1 - \cos\alpha)\,(1 + \cos\alpha) = \frac{4s \,.\, s_a \,.\, s_b \,.\, s_c}{(bc)^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{s \,.\, s_a \,.\, s_b \,.\, s_c}}{bc} = \frac{2J}{bc}$$

$$J = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha \quad \text{w. z. b. w.}$$

Dieser Beweis deckt sich im wesentlichen mit der Ableitung der Formel $J = \sqrt{s \,.\, s_a \,.\, s_b \,.\, s_c}$ in der ebenen Geometrie.

§ 13. Anwendung des Sinussatzes.

Der Sinussatz und seine Erweiterung dient zur Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln, oder aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel, oder aus drei Seiten.

Erster Fall. Gegeben eine Seite und zwei Winkel. Man rechne zuerst nach dem Satz von der Winkelsumme den dritten Winkel aus. Aus a, α, β, γ findet man dann b und c aus (V)

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma$$

$$\log b = \log a - \log\sin\alpha + \log\sin\beta$$

$$\log c = \log a - \log\sin\alpha + \log\sin\gamma.$$

Erstes Beispiel.

$a = 13$, $\alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$, $\beta = 14^\circ\ 15'\ 9''$,

Zuerst ist $\alpha + \beta = 67^\circ\ 22'\ 48''$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 112^\circ\ 37'\ 12''.$$

1. Berechnung von b.

$$\log b = \log a - \log \sin \alpha + \log \sin \beta$$

ausgerechnet $= 0{,}60206$

$$b = 4{,}000.$$

2. Berechnung von c.

$\sin \gamma$ ist gleich dem Sinus des Nebenwinkels

$$\gamma' = 67^\circ\ 22'\ 48''$$

$$\log c = \log a - \log \sin \alpha + \log \sin \gamma'$$

ausgerechnet $= 1{,}17609$

$$c = 15{,}000.$$

Zweiter Fall. Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel: a, b, α. Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}, \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha \,.\, b}{a}.$$

Aus β und α findet man γ nach der Winkelsumme, c wieder nach dem Sinussatz:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Zweites Beispiel.

$a = 13$, $b = 4$, $\alpha = 53^\circ\ 7'\ 49''$.

$$\log \sin \beta = \log \sin \alpha - \log a + \log b,$$

ausgerechnet $= 9{,}39121 - 10$,

$$\beta = 14^\circ\ 15'\ 0''$$

oder $$\beta' = 180^\circ - 14^\circ\ 15'\ 0''.$$

Der zweite Fall ist aber ausgeschlossen, denn da β' stumpf ist, könnte es nur der grössten Seite des Dreiecks gegenüberliegen, während b kleiner als a ist.

Für γ erhält man aus der Winkelsumme $112^\circ\ 37'\ 12''$ und daraus für c 15,000.

Drittes Beispiel.

$a = 13{,}509,\ b = 17{,}632,\ \alpha = 38^\circ\, 21'\, 47''.$

$$\log\sin\beta = \log\sin\alpha - \log a + \log b,$$
$$\text{ausgerechnet} = 9{,}90852 - 10,$$
$$\beta_1 = 54^\circ\, 6'\, 7''$$
$$\beta_2 = 180^\circ - 54^\circ\, 6'\, 7'' = 125^\circ\, 53'\, 53''.$$

Da b grösser als a ist, liegt kein Grund gegen die Brauchbarkeit des zweiten Wertes vor. Es wird

$$\gamma_1 = 87^\circ\, 32'\, 6'',\quad \gamma_2 = 15^\circ\, 44'\, 20''.$$
$$c_1 = \frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha},\quad c_2 = \frac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha}.$$

Die Berechnung ergiebt

$$c_1 = 21{,}746,\qquad c_2 = 5{,}9041.$$

Viertes Beispiel.

$a = 13{,}509,\ c = 21{,}746,\ \alpha = 38^\circ\, 21'\, 47''.$

Hier ist natürlich erst γ zu berechnen.

$$\log\sin\gamma = \log\sin\alpha - \log a + \log c,$$
$$\text{ausgerechnet} = 9{,}99960 - 10,$$
$$\gamma_1 = 87^\circ\, 32'$$
$$\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 = 92^\circ\, 28'.$$

Die Sekunden sind nicht zu bestimmen. Beide Winkel können um eine Minute falsch sein. Es wird

$$\beta_1 = 54^\circ\, 6'\, 13'',\quad \beta_2 = 49^\circ\, 10'\, 13''.$$

Auch diese Winkel sind naturgemäss ungenau. Man findet mit ihnen

$$b_1 = 17{,}632,\quad b_2 = 16{,}469.$$

Man hätte ebensogut $\gamma_1 = 87^\circ\, 33'$ nehmen können und hätte dafür

$$b_1 = 17{,}629,\quad b_2 = 16{,}473$$

erhalten. Noch stärker weichen die nach dem Cosinussatz (sechstes Beispiel in § 10) berechneten Werte ab.

Wie verhält sich die graphische Lösung? Der Leser versuche sie mit den abgerundeten Werten $a = 13{,}5$ mm, $c = 21{,}7$ mm, $\alpha = 38^\circ{,}5$.

Dritter Fall. Gegeben die 3 Seiten a, b, c. Hier ist der erweiterte Sinussatz, am besten Formel (IX) oder (X) anzuwenden. Man berechne dabei zuerst die den kleineren Seiten gegenüberliegenden Winkel, da diese sicher spitz sind, also der der Tabelle entnommene Wert der richtige ist.

Fünftes Beispiel.

$a = 13,\ b = 4,\ c = 15.$

Es wird $s = \frac{1}{2}(13 + 4 + 15) = 16,$

$$s_a = s - a = 3,$$
$$s_b = s - b = 12,$$
$$s_c = s - c = 1,$$

$J^2 = s \,.\, s_a \,.\, s_b \,.\, s_c = 16 \,.\, 36,$

$J = 4 \,.\, 6 = 24.$

Nun ist

$$J = \frac{1}{2}\, b\, c \sin\alpha, \text{ also } \sin\alpha = \frac{2\,.\,24}{4\,.\,15} = \frac{4}{5} = 0{,}8,$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}90309 - 10,$$
$$\alpha = 53^\circ\, 7'\, 48'';$$

$$J = \frac{1}{2}\, c\, a \sin\beta, \text{ also } \sin\beta = \frac{2\,.\,24}{13\,.\,15} = \frac{16}{65},$$
$$\log\sin\beta = 9{,}39121 - 10,$$
$$\beta = 14^\circ\, 15'\, 0'';$$

$$J = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma, \text{ also } \sin\gamma = \frac{2\,.\,24}{4\,.\,13} = \frac{12}{13},$$
$$\log\sin\gamma = 9{,}96524 - 10.$$

Aus der Tafel findet man für γ zunächst $67^\circ\, 22'\, 48''$. Da aber c die grösste Seite ist, kann γ auch der Nebenwinkel von $67^\circ\, 22'\, 48''$ sein. Der Satz von der Winkelsumme ergiebt in der That, dass

$$\gamma = 180^\circ - 67^\circ\, 22'\, 48'' = 112^\circ\, 37'\, 12''$$

sein muss.

Sechstes Beispiel.

$$a = 13{,}509, \quad b = 17{,}632, \quad c = 21{,}746.$$

$$s = 26{,}4435, \quad s_a = 12{,}9345, \quad s_b = 8{,}8115, \quad s_c = 4{,}6975;$$

$$\log J = \frac{1}{2}\log\left\{s \,.\, s_a \,.\, s_b \,.\, s_c\right\} = \frac{1}{2}\left\{\log s + \log s_a + \log s_b + \log s_c\right\}$$

ausgerechnet $= 2{,}07550$;

$$\log\sin\alpha = \log 2 + \log J - \log b - \log c,$$

ausgerechnet $= 9{,}79285 - 10$,

$$\alpha = 38^\circ\, 21'\, 49''.$$

$$\log\sin\beta = \log 2 + \log J - \log c - \log a,$$

ausgerechnet $= 9{,}90852 - 10$,

$$\beta = 54^\circ\, 6'\, 7''.$$

$$\log\sin\gamma = \log 2 + \log J - \log a - \log b,$$

ausgerechnet $= 9{,}99960 - 10$.

γ ist spitz, da $\alpha + \beta$ grösser als 90° wird. Die Tabelle giebt γ nicht genau genug: $87^\circ, 32' - 33'$. Man wende daher die Winkelsumme an:

$$\gamma = 87^\circ\, 32'\, 4''.$$

§ 14. Tangenten der halben Winkel.

Zur Berechnung der Winkel aus den Seiten giebt es noch ein drittes Verfahren mit Hilfe eines angeschriebenen oder des eingeschriebenen Kreises. Fällt man von O aus auf die Seite b das Lot $OV = \varrho$, so ist nach Sätzen der Planimetrie

$$AV = s_a, \qquad \sphericalangle\, OAV = \frac{\alpha}{2}.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck OAV ist aber

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OV}{AV} = \frac{\varrho}{s_a}. \tag{XIII,$_1$}$$

Fällt man von O_a das Lot O_aV' auf b, so ist, wie in der Planimetrie gezeigt wird:

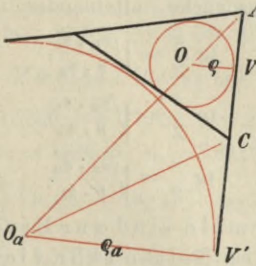
$$AV' = s,$$

folglich

$$CV' = s - b = s_b.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck $O_a V' A$ ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{O_a V'}{AV'} = \frac{\varrho_a}{s}. \qquad (\text{XIII},_2)$$



Figur 17.

In dem rechtwinkligen Dreieck $O_a V' C$ ist der Winkel bei C die Hälfte des Aussenwinkels von γ, also gleich $\frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, folglich der Winkel bei O_a gleich $\frac{\gamma}{2}$. Man hat also

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{CV'}{O_a V'} = \frac{s_b}{\varrho_a} \qquad (\text{XIII},_3)$$

Aus den drei Formeln $(\text{XIII},_{1,2,3})$ kann man durch Vertauschen der Seiten und Winkel folgende Tabelle herstellen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s_a} = \frac{\varrho_a}{s} = \frac{s_b}{\varrho_c} = \frac{s_c}{\varrho_b},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s_b} = \frac{\varrho_b}{s} = \frac{s_c}{\varrho_a} = \frac{s_a}{\varrho_c},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s_c} = \frac{\varrho_c}{s} = \frac{s_a}{\varrho_b} = \frac{s_b}{\varrho_a}. \qquad (\text{XIII})$$

Drückt man die Radien durch die Seiten aus (Formel IV der Einleitung), so reduziert sich die Anzahl dieser Formeln auf die Hälfte. Es wird z. B.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{J}{s \, . \, s_a} = \frac{s_b \, . \, s_c}{J}.$$

Setzt man hierin $J = \sqrt{s \, . \, s_a \, . \, s_b \, . \, s_c}$, so werden auch diese beiden Ausdrücke miteinander identisch. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_b \cdot s_c}{s \cdot s_a}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s_a \cdot s_c}{s \cdot s_b}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s_a \cdot s_b}{s \cdot s_c}}. \qquad \text{(XIV)}$$

Diese Formeln sind zur Berechnung der Winkel aus den Seiten sehr viel geeigneter als der Sinus- und Cosinussatz. Erstens gestatten sie durchgehende logarithmische Rechnung, was beim Cosinussatz nicht möglich ist. Zweitens sind die aufzuschlagenden Winkel sicher spitz. Drittens ist die Tafeldifferenz von log tg nie kleiner als 25 Einheiten der letzten Stelle, also kann man mindestens auf zwei Sekunden genau interpolieren.

Erstes Beispiel.

$$a = 13, \; b = 14, \; c = 15.$$

$$s = 21; \; s_a = 8; \; s_b = 7; \; s_c = 6.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{7 \, . \, 6}{21 \, . \, 8}} = \frac{1}{2}; \; \log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 9{,}69897 - 10.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{8 \, . \, 6}{21 \, . \, 7}} = \frac{4}{7}; \; \log \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 9{,}75696 - 10.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{8 \, . \, 7}{21 \, . \, 6}} = \frac{2}{3}; \; \log \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 9{,}82391 - 10.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 26^0 \, 33' \, 54''; \; \alpha = 53^0 \; 7' \, 48''.$$

$$\frac{\beta}{2} = 29^\circ\,44'\,41''; \; \beta = 59^\circ 29' 22''.$$

$$\frac{\gamma}{2} = 33^\circ\,41'\,25''; \; \gamma = 67^\circ 22' 50''.$$

$$\text{Probe: } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\; 0'\; 0''.$$

Zweites Beispiel.

$$a = 13{,}509, \; b = 17{,}632, \; c = 21{,}746.$$

$$s = 26{,}4435; \; s_a = 12{,}9345; \; s_b = 8{,}8115; \; s_c = 4{,}6975.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left\{\log s_b + \log s_c - \log s - \log s_a\right\},$$

$$\text{ausgerechnet} = \frac{1}{2}\left(1{,}08285 - 2\right) = 9{,}54143 - 10,$$

$$\frac{\alpha}{2} = 19^\circ\,10'\,54''.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left\{\log s_a + \log s_c - \log s - \log s_b\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1{,}41625 - 2\right\} = 9{,}70813 - 10,$$

$$\frac{\beta}{2} = 27^\circ\,3'\,6''.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left\{\log s_a + \log s_b - \log s - \log s_c\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1{,}96261 - 2\right\} = 9{,}98131 - 10,$$

$$\frac{\gamma}{2} = 43^\circ\,46'\,3''.$$

Somit ergiebt sich:

$$\alpha = 38^\circ\,21'\,48''$$
$$\beta = 54^\circ\;\;6'\,12''$$
$$\gamma = 87^\circ\,32'\;\;6''$$

$$\text{Probe: } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\; 0'\;\; 6''.$$

Drittes Kapitel.

Die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

§ 15. Erste Form der Additionstheoreme.

$$\sin(\xi + \eta) = \sin\xi \cos\eta + \cos\xi \sin\eta \qquad \text{(I)}$$
$$\sin(\xi - \eta) = \sin\xi \cos\eta - \cos\xi \sin\eta \qquad \text{(II)}$$
$$\cos(\xi + \eta) = \cos\xi \cos\eta - \sin\xi \sin\eta \qquad \text{(III)}$$
$$\cos(\xi - \eta) = \cos\xi \cos\eta + \sin\xi \sin\eta. \qquad \text{(IV)}$$

a) Die vorstehenden Formeln, die sogenannten Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, müssen auswendiggelernt werden, am besten, ehe man ihre Beweise durcharbeitet. Auch empfiehlt es sich, ihre Richtigkeit an speciellen Beispielen zu erproben (z. B. $\xi = 0$, 90°, 180°, 270°, 360° oder für (I) und (III) $\xi = 90^\circ - \eta$, $180^\circ - \eta$ etc., für (II) und (IV) $\xi = \eta$, $90^\circ + \eta$ etc.) Dabei ist zu beachten, dass (für Winkel des ersten Quadranten) der Cosinus des grösseren Winkels $\xi + \eta$ kleiner sein muss als der des kleineren Winkels $\xi - \eta$; hierdurch erklärt sich das Verhalten der Vorzeichen in (III) und (IV).

b) Wenn man eine der Formeln (I) bis (IV) kennt, so kann man die anderen daraus herleiten.

Setzt man z. B. in (I) $\eta = -\eta'$, so wird nach Kap. I, § 6, 5

$$\sin\eta = -\sin\eta', \quad \cos\eta = \cos\eta',$$

wodurch Formel (I) in (II) und (III) in (IV) übergeht.

Ferner ist

$$\cos(\xi \pm \eta) = \sin(90^\circ - \xi \mp \eta)$$
$$= \sin(90^\circ - \xi)\cos\eta \mp \cos(90^\circ - \xi)\sin\eta$$
$$= \cos\xi \cos\eta \mp \sin\xi \sin\eta.$$

Der Leser versuche ebenso die Herleitung der übrigen Formeln aus (II), (III) und (IV).

c) Man setze in (I) und (III) $\xi = \xi' - \eta$ und löse die so entstehenden Gleichungen nach $\sin(\xi' - \eta)$ und $\cos(\xi' - \eta)$ auf. Man wird (II) und (IV) erhalten. Umgekehrt setze man in (II) und (IV) $\xi = \xi' + \eta$ und löse nach $\sin(\xi' + \eta)$, $\cos(\xi' + \eta)$ auf.

d) Man setze in (I) $\xi = \xi' - \eta$, drücke $\sin(\xi' - \eta)$ nach (II) aus und berechne $\cos(\xi' - \eta)$. In ähnlicher Weise leite man (III) aus (I) und (II) und umgekehrt (I), (II) aus (III) und (IV) ab.

Hieraus wird ersichtlich, dass es genügt, zwei oder auch bloss eine der Formeln (I) bis (IV) zu beweisen. Der Beweis wird noch vereinfacht durch folgende Sätze:

e) Hat man eine der Formeln (I) bis (IV) für die Winkel zweier aufeinanderfolgender Quadranten bewiesen, so gilt sie für beliebige Winkel.

Man setze beispielsweise in (I) $\xi = \xi' + 180^0$. Es wird $\sin\xi' = -\sin\xi$; $\cos\xi' = -\cos\xi$; $\sin(\xi' + \eta) = -\sin(\xi + \eta)$. Die Formeln für $\sin(\xi' + \eta)$ und $\sin(\xi + \eta)$ sind demnach gleichbedeutend und gehen ineinander über. Ist also (I) bewiesen für Winkel ξ' von 0 bis 180^0, so ist es auch bewiesen für die um 180^0 grösseren Winkel ξ von 180^0 bis 360^0 u. s. f.

Der Leser untersuche auch (II), (III) und (IV) daraufhin.

f) Hat man eines der Formelpaare (I), (III) und (II), (IV) bewiesen für die Winkel eines Quadranten, so gilt es für beliebige Winkel.

Man setze beispielsweise in (I) und (III) $\xi = \xi' + 90^0$. Es wird, da $90^0 - \xi'$ der Nebenwinkel von ξ ist:

$$\sin \xi \quad = \cos \xi' \quad , \cos \xi \quad = -\sin \xi'$$

ebenso

$$\sin(\xi + \eta) = \cos(\xi' + \eta), \cos(\xi + \eta) = -\sin(\xi' + \eta),$$

womit die Formeln für $\sin(\xi + \eta)$, $\cos(\xi + \eta)$ beziehlich in die für $\cos(\xi' + \eta)$, $\sin(\xi' + \eta)$ übergehen.

Hat man also (I) und (III) für die Winkel ξ' des ersten Quadranten bewiesen, so gelten sie auch für die um 90^0 grösseren ξ des zweiten u. s. f.

Der Leser untersuche auch (II), (IV) und den Winkel η daraufhin.

§ 16. Beweis der Additionstheoreme.

Erster Beweis.

a) Aus der Planimetrie ist der Satz des Ptolemäus bekannt[1]: In einem Sehnenviereck, dessen Ecken in der Reihenfolge, wie sie auf dem Kreise liegen, mit P Q R S bezeichnet seien, ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten:

$$PR \,.\, QS = QR \,.\, PS + PQ \,.\, RS. \tag{A}$$

Man kann diese Gleichung nach Division durch PR^2 in der Form schreiben:

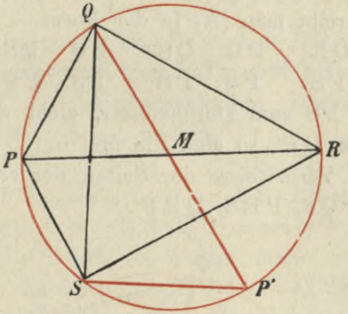
$$\frac{QS}{PR} = \frac{QR}{PR} \cdot \frac{PS}{PR} + \frac{PQ}{PR} \cdot \frac{RS}{PR} \tag{B}$$

Wählt man PR als Durchmesser, so lassen sich diese sämtlichen Verhältnisse als Sinus und Cosinus auf-

[1] Ein trigonometrischer Beweis des Satzes unter Anwendung der Additionstheoreme findet sich unten, § 27.

fassen. Die vier Quotienten auf der rechten Seite sind nämlich die Seitenverhältnisse der nach dem Satz des Tales bei Q und S rechtwinkligen Dreiecke PQR und PSR. Zieht man noch durch den Mittelpunkt M des Kreises den Durchmesser QP′, so ist in dem bei S rechtwinkligen Dreieck QP′S

$$QS : P'Q = QS : PR.$$



Figur 18.

b) Man mache jetzt $\sphericalangle QPR = \xi$, $\sphericalangle SPR = \eta$. Der Winkel QP′S steht mit QPS über gleichem oder entgegengesetztem Bogen, ist also ihm oder seinem Supplement gleich, so dass auf jeden Fall

$$\sin QP'S = \sin QPS = \sin(\xi + \eta).$$

Mithin ist

$$QR : PR = \sin\xi \qquad RS : PR = \sin\eta$$
$$QP : PR = \cos\xi \qquad PS : PR = \cos\eta$$
$$QS : PR = \sin(\xi + \eta).$$

In (B) eingesetzt ergiebt dies (I).

c) Man mache $\sphericalangle QPR = \xi$, $\sphericalangle SRP = \eta$. Dann ist $\sphericalangle PQM = \sphericalangle QPM = \xi$ als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck PQM und $\sphericalangle PQS = \sphericalangle PRS = \eta$ als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen PS; mithin ist

$$\sphericalangle SQP' = \sphericalangle PQM - \sphericalangle PQS = \xi - \eta$$

$$QR : PR = \sin\xi \qquad RS : PR = \cos\eta$$

$$QP : PR = \cos\xi \qquad PS : PR = \sin\eta$$

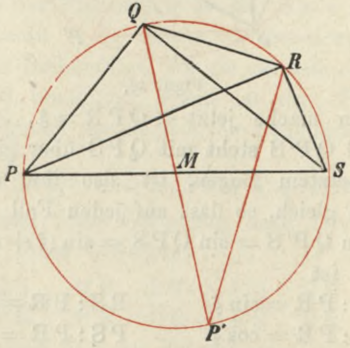
$$QS : PR = \cos(\xi - \eta).$$

In (B) eingesetzt ergiebt dies (IV).

d) Schreibt man (A) in der Form

$$\frac{QR}{PS} = \frac{PR}{PS} \cdot \frac{QS}{PS} - \frac{PQ}{PS} \cdot \frac{RS}{PS} \tag{C}$$

und macht PS zum Durchmesser, zieht durch M den Durchmesser QP′, so sind die fünf in (C) auftretenden Quotienten Verhältnisse der Seiten der rechtwinkligen Dreiecke PQS, PRS, QRP′.



Figur 19.

Man mache $\sphericalangle QPS = \xi$, $\sphericalangle RPS = \eta$. Es wird $\sphericalangle QP'R = \sphericalangle QPR = \xi - \eta$, als Peripheriewinkel über dem Bogen QR, mithin

$$PQ : PS = \cos\xi \qquad QS : PS = \sin\xi$$
$$PR : PS = \cos\eta \qquad RS : PS = \sin\eta$$
$$\frac{QR}{PS} = \frac{QR}{QP'} = \sin(\xi - \eta).$$

In (C) eingesetzt ergiebt dies (II).

e) Man mache $\sphericalangle QSP = \xi$, $\sphericalangle RPS = \eta$. Da die Bögen QP und RS zusammen kleiner als 180° sind, muss vorausgesetzt werden, dass

$$\xi + \eta < 90^0,$$

also $\cos(\xi + \eta)$ positiv ist. Es wird $\sphericalangle RQS = \sphericalangle RPS = \eta$ (Peripheriewinkel über RS), $\sphericalangle MQS = MSQ = \xi$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck MQS), d. h. $\sphericalangle RQP' = \xi + \eta$, mithin

$$PQ : PS = \sin\xi \qquad QS : PS = \cos\xi$$
$$PR : PS = \cos\eta \qquad RS : PS = \sin\eta$$
$$QR : PS = QR : QP' = \cos(\xi + \eta).$$

Ist $\xi + \eta > 90^0$, so mache man $\sphericalangle QPS = \xi$, $\sphericalangle RSP = \eta$. Es wird $\sphericalangle PQR = 180^0 - PSR = 180^0 - \eta$ (Peripheriewinkel über den entgegengesetzten Bögen PR), $\sphericalangle PQM = \sphericalangle QPM = \xi$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck QPM), $\sphericalangle RQP' = 180^0 - \xi - \eta$.

$$PQ : PS = \cos\xi \qquad QS : PS = \sin\xi$$
$$PR : PS = \sin\eta \qquad RS : PS = \cos\eta$$
$$QR : PS = QR : QP' = \cos(180^0 - \xi - \eta) = -\cos(\xi + \eta).$$

In (C) eingesetzt ergiebt dies in beiden Fällen (III).

Hiermit sind die Formeln (I) bis (IV) für Winkel des ersten Quadranten, somit nach § 15, f allgemein bewiesen.

Zweiter Beweis.

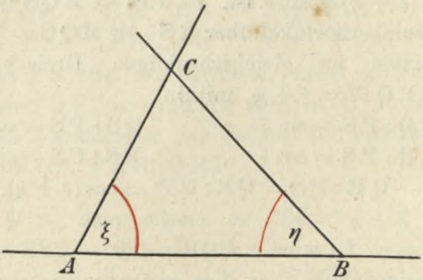
f) Setzt man in die Cosinusformel

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

aus dem erweiterten Sinussatz $a = 2r \sin \alpha$ etc. ein, so hebt sich $2r$ fort und es bleibt

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \tag{D}$$

Man trage jetzt in zwei Punkten A, B einer Geraden an diese, auf derselben Seite, einander zugekehrt die Winkel ξ und η an, die wir beide kleiner als 180^0 annehmen. Ist dann $\xi + \eta < 180^0$, so schneiden sich die freien Schenkel in einem Punkte C, und in dem Dreieck ABC ist



Figur 20.

$$\alpha = \xi, \ \beta = \eta, \ \gamma = 180^0 - (\xi + \eta).$$

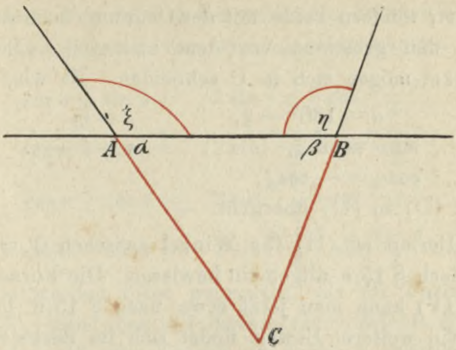
Setzt man diese Werte in (D) ein, so wird

$$\sin \gamma = \sin (\xi + \eta) = \sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \eta.$$

Ist $\xi + \eta > 180^0$, so schneiden sich die freien Schenkel rückwärts verlängert in einem Punkt C, und im Dreieck ABC ist

$$\alpha = 180^0 - \xi, \quad \beta = 180^0 - \eta, \quad \gamma = \xi + \eta - 180^0,$$
$$\sin \alpha = \sin \xi, \quad \sin \beta = \sin \eta, \quad \sin \gamma = -\sin (\xi + \eta)$$
$$\cos \alpha = -\cos \xi, \quad \cos \beta = -\cos \eta.$$

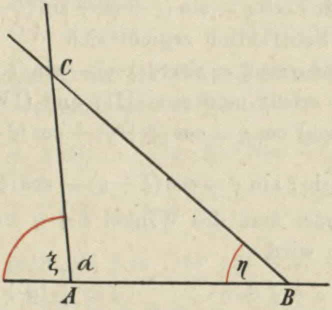
In (D) eingesetzt ergiebt dies wiederum (I).



Figur 21.

Hiermit ist (I) für alle Winkel von 0° bis 180°, mithin nach § 15, e allgemein bewiesen. Nach § 15, b erhält man daher durch einfache Umformungen auch (II) bis (IV) daraus.

g) (II) kann in einfacher Weise ähnlich bewiesen werden. Man trage in A und B ξ und η auf derselben



Figur 22.

Seite der Geraden an, aber nicht mehr einander zugekehrt, sondern beide mit der Oeffnung nach derselben Seite, den grösseren vor dem kleineren. Die freien Schenkel mögen sich in C schneiden. Es wird

$$\alpha = 180^0 - \xi, \qquad \beta = \eta,$$
$$\sin\alpha = \sin\xi, \qquad \gamma = \xi - \eta.$$
$$\cos\alpha = -\cos\xi,$$

womit (D) in (II) übergeht. —

Hiermit ist (II) für Winkel zwischen 0′ und 180°, also nach § 15, e allgemein bewiesen. Die Formeln (III) und (IV) kann man jetzt etwa nach § 15, d herleiten.

Ein weiterer Beweis findet sich im nächsten Paragraphen, und ein ganz allgemeiner für Winkel beliebiger Quadranten im Kap. XI, der aber für Anfänger schwerer verständlich sein dürfte.

§ 17. Zweite Form der Additionstheoreme.

Addiert man die Gleichungen (I) und (II) dieses Kapitels, so folgt:

$$2\sin\xi\cos\eta = \sin(\xi+\eta) + \sin(\xi-\eta). \qquad \text{(V)}$$

Durch Subtraktion ergiebt sich

$$2\sin\eta\cos\xi = \sin(\xi+\eta) - \sin(\xi-\eta). \qquad \text{(VI)}$$

Ebenso erhält man aus (III) und (IV)

$$2\cos\xi\cos\eta = \cos(\xi+\eta) + \cos(\xi-\eta) \qquad \text{(VII)}$$

und

$$-2\sin\xi\sin\eta = \cos(\xi+\eta) - \cos(\xi-\eta). \qquad \text{(VIII)}$$

Bezeichnet man die Winkel $\xi+\eta$ und $\xi-\eta$ mit α und β, so wird

$$\alpha = \xi + \eta \qquad \xi = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$\beta = \xi - \eta \qquad \eta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Durch Einsetzen in die soeben abgeleiteten Formeln erhält man folgende vier wichtige Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \text{(IX)}
\end{aligned}$$

Sie werden öfter gebraucht, als die Formeln (I) bis (IV), sind aber mit diesen gleichbedeutend. Man kann sie auch sehr einfach geometrisch ableiten. Doch soll dieses Verfahren nur für den Fall angegeben werden, dass α und β Winkel des ersten Quadranten sind.

Es sei PBA ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Centrum O. Winkel POA sei gleich α, Winkel POB gleich β. Von A und B seien die Lote AA′ und BB′ auf OP gefällt. Dann ist (Fig. 23 a. f. S.)

$$\begin{aligned}
AA' &= \sin\alpha, & BB' &= \sin\beta,\\
OA' &= \cos\alpha, & OB' &= \cos\beta.
\end{aligned}$$

Sodann sei C der Halbierungspunkt der Sehne AB. Es ist OC senkrecht auf AB und

$$\begin{aligned}
\sphericalangle AOC &= \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sphericalangle COP &= \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Fällt man noch das Lot CC′ auf OP, so ist

$$CC' = \frac{1}{2}\left\{AA' + BB'\right\} = \frac{1}{2}\left\{\sin\alpha + \sin\beta\right\}$$

als Mittellinie des Trapezes AA′BB′.

Andererseits ist in dem rechtwinkligen Dreieck COC′

$$CC' = OC \, . \sin \sphericalangle COP = OC \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

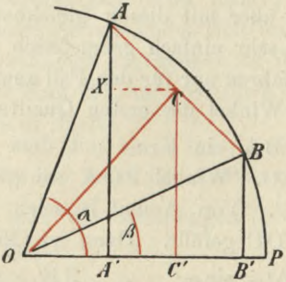
und in dem rechtwinkligen Dreieck AOC

$$OC = OA \cos \sphericalangle AOC = 1 \, . \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Somit wird

$$CC' = \frac{1}{2} \left\{ \sin \alpha + \sin \beta \right\} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dies ist die erste der Formeln (IX).



Figur 23.

Gleichzeitig ist

$$OC' = \frac{1}{2} \left\{ OA' + OB' \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \alpha + \cos \beta \right\}$$

und andererseits

$$OC' = CC' \cos \sphericalangle COP = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Durch Vergleich beider Werte für OC′ entsteht die dritte der Formeln (IX).

Zieht man jetzt noch CX senkrecht zu AA′ bis zum Schnitt mit AA′ in X, so ist AX gleich der halben Differenz von AA′ und BB′,

$$AX = \frac{1}{2}\left\{\sin\alpha - \sin\beta\right\},$$

und
$$\sphericalangle XAC = \sphericalangle COP,$$

weil $XA \perp OP$, $AC \perp OC$. In dem rechtwinkligen Dreieck XAC ist aber:

$$XA = AC \cos \sphericalangle XAC = AC \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und in dem rechtwinkligen Dreieck AOC

$$AC = OA \,.\, \sin \sphericalangle AOC = 1 \,.\, \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Damit wird

$$XA = \frac{1}{2}\left\{\sin\alpha - \sin\beta\right\} = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{+\beta}{2}.$$

Dies ist die zweite der Formeln (IX).

Gleichzeitig ist

$$XC = A'C' = \frac{1}{2}A'B' = \frac{1}{2}\left\{\cos\beta - \cos\alpha\right\},$$

und andererseits

$$XC = AC \sin XAC = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

Durch Vergleich beider Werte für XC entsteht die letzte der Formeln (IX).

§ 18. Bedeutung der Additionstheoreme.

Die Bedeutung der eben abgeleiteten Formeln ist eine vierfache. Erstens dienen sie vom rein rechnerischen Standpunkt vornehmlich in der Gestalt (V) bis (IX) zur Umformung der für logarithmische Rechnung ungeeigneten Summen von Sinus in Cosinus in bequeme Produkte.

Anmerkung. Vor Erfindung der Logarithmen wurden die Formeln im umgekehrten Sinne zur Verwandlung von Produkten in Summen benutzt. Man nannte das Verfahren, das bald durch die Logarithmen verdrängt wurde, „Prosthaphäresis“.

Zweitens erweitern die Additionstheoreme das Gebiet der Anwendungen der trigonometrischen Funktionen bis ins Bereich der Algebra und Analysis. Man verwendet sie beispielsweise zur Auflösung algebraischer Gleichungen.

Drittens bieten die Additionstheoreme das einzige Hilfsmittel zur elementaren Berechnung des Sinus und Cosinus eines Winkels, und viertens sind sie für die höhere Mathematik die fundamentale Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen, aus der ihre Reihenentwicklungen abgeleitet werden.

§ 19. Additionstheorem der Tangente.

Durch Division der Formeln (I) und (III) erhält man

$$\operatorname{tg}(\xi+\eta)=\frac{\sin\xi\cos\eta+\cos\xi\sin\eta}{\cos\xi\cos\eta-\sin\xi\sin\eta}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $\cos\xi\cos\eta$, so wird daraus

$$\operatorname{tg}(\xi+\eta)=\frac{\operatorname{tg}\xi+\operatorname{tg}\eta}{1-\operatorname{tg}\xi\operatorname{tg}\eta}. \qquad \text{(X)}$$

Ebenso erhält man durch Division aus (II) und (IV):

$$\operatorname{tg}(\xi-\eta)=\frac{\operatorname{tg}\xi-\operatorname{tg}\eta}{1+\operatorname{tg}\xi\operatorname{tg}\eta}. \qquad \text{(XI)}$$

Die Formeln (X) und (XI) enthalten das Additionstheorem der Tangente. (XI) geht aus (X) hervor, wenn man $-\eta$ für η setzt und beachtet, dass $\operatorname{tg}(-\eta)=-\operatorname{tg}\eta$ ist.

Dividiert man (III) durch (I) und dann auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch $\sin\xi\sin\eta$, so erhält man

$$\cot(\xi+\eta)=\frac{\cot\xi\cot\eta-1}{\cot\xi+\cot\eta}$$

und ebenso aus (IV) und (II)

$$\cot(\xi-\eta)=\frac{1+\cot\xi\cot\eta}{\cot\eta-\cot\xi}. \qquad \text{(XII)}$$

Diese beiden Formeln werden, wie die Cotangente selbst, selten gebraucht.

Durch Division beider Seiten mit $\cos\xi \cos\eta$ erhält man aus (I) bis (IV) folgende vier nützliche Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin(\xi \pm \eta)}{\cos\xi \cos\eta} &= \operatorname{tg}\xi \pm \operatorname{tg}\eta \\ \frac{\cos(\xi \pm \eta)}{\cos\xi \cos\eta} &= 1 \mp \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}\eta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}$$

Durch Division der beiden ersten folgt weiter

$$\frac{\sin(\xi + \eta)}{\sin(\xi - \eta)} = \frac{\operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}\eta}{\operatorname{tg}\xi - \operatorname{tg}\eta}, \qquad \text{(XIV)}$$

ebenso aus der ersten und vierten

$$\frac{\sin(\xi + \eta)}{\cos(\xi - \eta)} = \frac{\operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}\eta}{1 + \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}\eta}, \qquad \text{(XV)}$$

und aus den beiden letzten

$$\frac{\cos(\xi + \eta)}{\cos(\xi - \eta)} = \frac{1 - \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}\eta}{1 + \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}\eta}.$$

Aus den Formeln (IX) erhält man durch Division der ersten und zweiten

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad \text{(XVI)}$$

der vierten und dritten:

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \text{(XVI,₁)}$$

der ersten und dritten oder der zweiten und dritten:

$$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha \pm \beta}{2}. \qquad \text{(XVII)}$$

§ 20. Doppelte und halbe Winkel.

Aus (I) und (II) erhält man, wenn man $\xi = \eta$ setzt:

$$\sin 2\xi = 2 \sin \xi \cos \xi, \tag{XVIII}$$
$$\cos 2\xi = \cos^2 \xi - \sin^2 \xi. \tag{XIX}$$

Aus (X) ebenso

$$\operatorname{tg} 2\xi = \frac{2 \operatorname{tg} \xi}{1 - \operatorname{tg}^2 \xi}. \tag{XX}$$

Aus den Gleichungen

$$\cos 2\xi = \cos^2 \xi - \sin^2 \xi$$

und

$$1 = \cos^2 \xi + \sin^2 \xi$$

erhält man durch Addition und Subtraktion:

$$1 + \cos 2\xi = 2 \cos^2 \xi,$$
$$1 - \cos 2\xi = 2 \sin^2 \xi,$$

also

$$\sin \xi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\xi}{2}}, \quad \cos \xi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\xi}{2}}. \tag{XXI}$$

Aus (XV) wird für $\xi = \eta$, da $\cos 0 = 1$ ist:

$$\sin 2\xi = \frac{2 \operatorname{tg} \xi}{1 + \operatorname{tg}^2 \xi}, \quad \cos 2\xi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \xi}{1 + \operatorname{tg}^2 \xi}. \tag{XXII}$$

Setzt man $2\xi = \alpha$, so wird aus (XXI) und (XXII):

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \tag{XXI'}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \tag{XXII'}$$

Setzt man in (XVII) $\beta = 0$, so wird noch

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \tag{XXIII}$$

Viertes Kapitel.

Anwendung der Additionstheoreme auf das schiefwinklige Dreieck.

§ 21. Tangentensatz.

Aus $a = 2r \sin\alpha, \ b = 2r \sin\beta$
erhält man

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2r(\sin\alpha + \sin\beta)}{2r(\sin\alpha - \sin\beta)} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$$

und nach den beiden ersten der Formeln (IX) oder nach Formel (XVI) des vorigen Kapitels

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \text{(I)}$$

Ist a kleiner als b, so schreibt man besser

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}}. \qquad \text{(I)}$$

Diese Formel enthält den **Tangentensatz**; man nennt sie auch die „Napier'sche Gleichung". *Der Tangentensatz dient zur Auflösung eines Dreiecks, wenn a, b und γ gegeben sind,* und eignet sich dazu besser, als der Cosinussatz, weil er durchgehende logarithmische Rechnung gestattet.

Beispiel:

$a = 13{,}509, \ b = 17{,}632, \ \gamma = 87^\circ\, 32'\, 6''.$

1. $b + a = 31{,}141$

$b - a = \ \ 4{,}123$

$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma = 92^\circ\, 27'\, 54''$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \qquad 46^\circ\, 13'\, 57''.$

2. $$\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}\cdot\frac{b-a}{b+a}$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}=\log\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}+\log(b-a)-\log(b+a$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}=0{,}01869$$

$$\log(b-a)=0{,}61521$$

$$\log(b+a)=1{,}49333$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}=9{,}14057-10$$

$$\frac{\beta-\alpha}{2}=7^\circ\ 52'\ 10''.$$

3. $$\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}=\beta=54^\circ\ 6'\ 7''$$

$$\frac{\beta+\alpha}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}=\alpha=38^\circ\ 21'\ 47''.$$

4. c nach dem Sinussatz, zur Probe etwa auf zwei Arten:

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}\qquad c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Für die vier Kongruenzfälle empfehlen sich also im allgemeinen folgende Berechnungsmethoden, die durchgehende Logarithmierung gestatten:

Erster Kongruenzfall: gegeben a, b, γ.

Man berechnet $\frac{\alpha-\beta}{2}$ aus dem Tangentensatz, sodann c aus dem Sinussatz. Aufzuschlagen sind die Logarithmen von a + b, a − b, $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, a, $\sin\alpha$, $\sin\gamma$, die Numeri von $\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ und log c. Die Tabelle wird also mindestens 8mal benutzt.

Zweiter Kongruenzfall: gegeben a und die Winkel.

Man erhält b und c aus dem Sinussatz. Aufzuschlagen sind die Logarithmen von a, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, und die Numeri von log b und c. Die Tabelle wird mindestens 6mal benutzt.

Dritter Kongruenzfall: gegeben a, b, c.

Man berechne nach § 14 die Tangenten der halben Winkel. Aufzuschlagen sind die Logarithmen von s, s_a, s_b und s_c, die Numeri von $\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, und $\log \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, ($\log \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ nur zur Probe). Die Tabelle wird mindestens 6mal benutzt.

Vierter Kongruenzfall: gegeben a, b, α.

Man berechne β aus dem Sinussatz, γ durch die Winkelsumme und c wieder nach dem Sinussatz. Aufzuschlagen sind die Logarithmen von a, b, $\sin\alpha$, $\sin\gamma$; die Numeri von $\log\sin\beta$ und log c. Die Tabelle wird mindestens 6mal benutzt.

§ 22. Weiteres Formelmaterial.

In Kap. II, § 12, waren die Gleichungen

$$1 - \cos\alpha = 2\frac{s_b\, s_c}{b\,c}, \quad 1 + \cos\alpha = 2\frac{s\, s_a}{b\,c}$$

abgeleitet worden. Nach Formel (XXI′) in Kap. III (§ 20) folgt daraus ohne weiteres:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_b\, s_c}{b\,c}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\, s_a}{b\,c}}. \qquad \text{(II)}$$

Durch Division entsteht die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_b\, s_c}{s\; s_a}} \quad \text{(Kap. II, § 14).}$$

Aus den Beziehungen

$$a = 2r\sin\alpha, \quad b = 2r\sin\beta$$

erhält man durch Addition und Subtraktion:

$$a + b = 4r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$a - b = 4r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180'$ folgt aber

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}, \text{ also}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2},$$

und damit

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 4r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}; \\ a - b &= 4r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Ferner ist

$$c = 2r\sin\gamma = 4r\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(IV)}$$

Dividiert man (III) hierdurch, so entstehen die sogenannten Mollweide'schen Gleichungen

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \qquad \text{(V)}$$

Ferner ergiebt sich aus (III) und (IV) durch Addition:

$$\begin{aligned} 2s = a + b + c &= 4r\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right\} \\ &= 4r\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\} \\ &= 8r\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

oder $$s = 4\,r \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ebenso durch Subtraktion:

$$2\,s_c = a + b - c = 4\,r\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}$$

$$= 8\,r\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

oder $$s_c = 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Hierdurch entstehen die vier Formeln:

$$\left.\begin{aligned} s &= 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\ s_a &= 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ s_b &= 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ s_c &= 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{VI})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (XIII) des § 14 erhält man hierzu folgende Ergänzungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\ \varrho_a &= 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\ \varrho_b &= 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\ \varrho_c &= 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{VII})$$

Fünftes Kapitel.

Berechnung der Vierecke.

§ 23. Allgemeines.

Man unterscheidet wohl neben der Trigonometrie noch die „Polygonometrie“ und speciell die „Tetragonometrie“, — die Lehre von den Vielecken, speciell den Vierecken. Diese sind aber keine selbständigen Wissenschaften, sondern der Trigonometrie untergeordnet. Durch Zerlegung einer geradlinigen Figur in Dreiecke und Aufstellung der Gleichungen für diese erhält man stets die notwendige und hinreichende Anzahl von Beziehungen zur Berechnung der unbekannten Stücke aus den gegebenen. Mit welchen Hilfsmitteln diese Gleichungen nach den Unbekannten aufzulösen sind, ist ein Problem der Algebra, nicht der Geometrie.

Wir erörtern die wichtigeren Aufgaben über das Viereck, unter Ausschluss des überschlagenen oder einspringenden, für das übrigens ein prinzipieller Unterschied in der Berechnung nicht existiert.

Die vier Ecken des Vierecks seien in der Reihenfolge, wie sie auf dem Umfang liegen, mit A, B, C, D, die zugehörigen Winkel mit α, β, γ, δ bezeichnet. Die Seiten

$$\begin{array}{cccc} AB, & BC, & CD, & DA \\ a, & b, & c, & d \end{array} \text{ sollen bezw.}$$

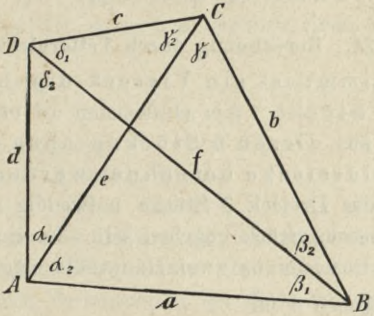
heissen.

Ausser diesen 8 eigentlichen Stücken des Vierecks betrachten wir noch die Diagonalen

$$AC = e, \; BD = f$$

und die Winkel, die sie mit den Seiten bilden:

$$\begin{array}{l|l} CAD = \alpha_1, \; CAB = \alpha_2 & DBA = \beta_1, \; DBC = \beta_2, \\ ACB = \gamma_1, \; ACD = \gamma_2 & BDC = \delta_1, \; BDA = \delta_2. \end{array}$$



Figur 24.

Diese 18 Stücke, a, b, c, d; e, f; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$; β, β_1, β_2; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$; $\delta, \delta_1, \delta_2$ gehören den vier Teildreiecken ABC, BCD, CDA, DAC an, die durch Weglassen je einer Ecke entstehen. Kennt man von diesen Dreiecken zwei, so kennt man auch die beiden anderen. Entweder haben nämlich zwei dieser Dreiecke eine Seite, etwa a, oder aber eine Diagonale, etwa e, gemeinsam. Im ersten Fall kennt man aus

$$\Delta\, ABC: \; a, b, e; \;\; \alpha_2, \beta, \gamma_1,$$
$$\Delta\, ABD: \; a, d, f; \;\; \beta_1, \alpha, \delta_2.$$

folglich auch

$$\Delta\, BCD \text{ aus } b, f, \; \beta_2 = \beta - \beta_1,$$

und $$\Delta\, ACD \text{ aus } d, e, \; \alpha_1 = \alpha - \alpha_2.$$

Im zweiten Fall kennt man aus

Δ ABC: a, b, e; $\alpha_2, \beta, \gamma_1$,

Δ ADC: c, d, e; $\alpha_1, \delta, \gamma_2$,

folglich auch

Δ BCD aus b, c, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

und Δ BAD aus a, d, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

§ 24. Berechnung durch Teildreiecke.

Bestimmt ist ein Viereck durch 5 unabhängige Stücke. Am einfachsten ist offenbar der Fall, wo aus diesen 5 Stücken ohne weiteres zwei Teildreiecke berechnet werden können. Da für jedes Dreieck 3 Stücke notwendig sind, muss das gemeinsame Stück gegeben sein. Es sind also bei passender Bezeichnung zwei Hauptfälle möglich:

1. Gegeben a mit
   zwei von den Stücken b, e; $\alpha_2, \beta, \gamma_1$
   und „ „ „ „ d, f; $\beta_1, \alpha, \delta_2$.
2. Gegeben e mit
   zwei von den Stücken a, b; $\alpha_2, \beta, \gamma_1$
   und „ „ „ „ c, d; $\alpha_1, \delta, \gamma_2$.

Am nächsteinfachsten ist der Fall, dass nur ein Teildreieck bestimmt ist, dass aber dessen 3 weitere Stücke die Berechnung eines zweiten gestatten. Es sind wieder dieselben beiden Fälle zu unterscheiden, wie oben:

3. Gegeben drei von den Stücken b, e; $\alpha_2, \beta, \gamma_1$ [1]
   und zwei „ „ „ d, f; $\beta_1, \alpha, \delta_2$.
4. Gegeben drei von den Stücken a, b; $\alpha_2, \beta, \gamma_1$ [1]
   und zwei „ „ „ c, d; $\alpha_1, \delta, \gamma_2$.

[1] Natürlich nicht die 3 letzten.

Unter 3 und 4 gleichzeitig fällt die Bestimmung des Vierecks aus b, d; α_1, α_2, β; ($\gamma_1 = 180^0 - \beta - \alpha_2$).

Man kann fragen, ob nach Berechnung eines Teildreiecks auch stets die eines zweiten möglich ist. Dies ist nicht der Fall. Ist etwa ABC durch 3 seiner Stücke

a, b, e; α_2, β, γ_1

bestimmt, und ist ausserdem gegeben eines der beiden Paare:

1. c, δ_2; d, δ_1;
2. f, δ;
3. α_1, δ_1; γ_2, δ_2;
4. β_1 (und $\beta_2 = \beta - \beta_1$), δ;
5. δ_1, δ_2,

so ist kein zweites Teildreieck bestimmt. Die unter 1 bezw. 3 aufgeführten Paare sind nicht verschieden, weil sie durch Vertauschung der Bezeichnungen A und C ineinander übergehen. Prinzipiell nicht verschieden sind ferner die Fälle 1, 2, bezw. 3, 4. Der letzte Fall ist als Pothenot'sche Aufgabe bekannt und findet ebenso wie 3 und 4 in § 26 seine Erledigung. 1 und 2 sind nicht von Interesse, eignen sich aber zu Konstruktionsaufgaben.

Hiermit sind die Fälle vollständig aufgeführt, in denen sich ein Teildreieck oder mehrere berechnen lassen.

§ 25. Die vollständigen Beziehungen zwischen den Winkeln.

Durch 4 unabhängige Winkel ist ein Viereck der Gestalt nach bestimmt, wie eine einfache Ueberlegung zeigt. Sind also 4 Winkel und eine Seite oder Diagonale bekannt, so wird man versuchen, aus den 4

Winkeln so viele der übrigen Winkel zu finden, dass man die der Seite oder Diagonale anliegenden Teildreiecke berechnen kann.

Wir hatten 12 Winkel unterschieden, zwischen denen also 8 Gleichungen bestehen müssen. Es ist zunächst

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, & \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \\ \beta = \beta_1 + \beta_2, & \delta = \delta_1 + \delta_2\end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Diese 4 Gleichungen sind unabhängig und gestatten, uns auf die 8 Winkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 zu beschränken. Für diese erhält man aus den Winkelsummen der Teildreiecke:

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 = 180^0, & \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 = 180^0 \\ \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 = 180^0, & \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 180^0\end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

Von diesen 4 Gleichungen ist aber jede eine Konsequenz der 3 anderen. Auch die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$$

folgt aus (I) und (II).

Die fehlende 8. Gleichung lässt sich nur mit trigonometrischen Hilfsmitteln angeben, und zwar in den verschiedensten Formen.

1. In der Ecke b liegen drei Stücke: a, b, f.

Man hat im Dreieck BAD: $a : f = \sin\delta_2 : \sin\alpha$,

„ „ BDC: $f : b = \sin\gamma : \sin\delta$,

und „ „ BCA: $b : a = \sin\alpha_2 : \sin\gamma_1$.

Multipliziert man diese drei Gleichungen, so wird die linke Seite zu 1. Schafft man den Nenner der rechten Seite weg, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha \cdot \sin\gamma_1 \cdot \sin\delta_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta_2 \\ \text{und analog aus den 3 anderen Ecken:} \\ \sin\beta \cdot \sin\delta_1 \cdot \sin\alpha_1 = \sin\beta_2 \cdot \sin\delta \cdot \sin\alpha_2 \\ \sin\gamma \cdot \sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 = \sin\gamma_2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta_2 \\ \sin\delta \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 = \sin\delta_2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma_2 \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

2. Geht man von A über B, C, D nach A zurück, so durchläuft man die 4 Stücke a, b, c, d. Es ist aber

im Dreieck ABC:	$a : b = \sin\gamma_1 : \sin\alpha_2$
„ „ BCD:	$b : c = \sin\delta_1 : \sin\beta_2$
„ „ CDA:	$c : d = \sin\alpha_1 : \sin\gamma_2$
„ „ DAB:	$d : a = \sin\beta_1 : \sin\delta_2$.

Mithin, wie oben,

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 \sin\delta_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 \sin\delta_2. \quad \text{(IV)}$$

Durchläuft man ebenso die Stücke e, b, f, d, so erhält man:

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma_2 \sin\delta_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_1 \sin\gamma \sin\delta, \quad \text{(V)}$$

und aus den Stücken e, c, f, a:

$$\sin\alpha \sin\beta_2 \sin\gamma_1 \sin\delta = \sin\alpha_1 \sin\beta \sin\gamma \sin\delta_2. \quad \text{(VI)}$$

Die Gleichungen (III) bis (IV) lassen sich mittels (I) und (II) aus einer einzigen unter ihnen herleiten. Geschickte Rechner mögen dies versuchen.

Sieben beliebige der Gleichungen (I) und (II) und eine beliebige der Gleichungen (IV) bis (VI) bilden das vollständige System von Beziehungen zwischen den zwölf Winkeln.

§ 26. Berechnung der Winkel aus 4 gegebenen.

Wenn 4 Winkel gegeben sind, so wird man bei passender Bezeichnung der Ecken stets einen der folgenden 7 Fälle erkennen:

Erste Hauptlage: Gegeben $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$
oder $\alpha_1, \alpha_2; \gamma_1, \gamma_2$.

Zweite Hauptlage: Gegeben $\alpha_2, \gamma_1; \delta_1, \delta_2$.

Dritte Hauptlage: Gegeben $\alpha_2, \gamma_1; \gamma_2, \delta_2$
oder $\alpha_2, \gamma_1; \beta_1, \delta$.

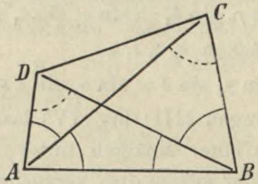
Vierte Hauptlage: Gegeben $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$
oder $\alpha, \beta, \gamma_2, \delta_1$.

Auflösung: Erste Hauptlage: $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$.
Aus (II) ergeben sich

$$\gamma_1 = 180^0 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_1$$
$$\delta_2 = 180^0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1,$$

so dass die 6 Winkel $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \delta_2$ bekannt sind. Für δ_1 und γ_2 erhält man aus (II) noch

$$\delta_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_1.$$



Figur 25.

Mehr Beziehungen können aus (II) nicht hergeleitet werden. Aus (IV) ergiebt sich aber

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \delta_2}{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}.$$

Setzt man die rechte Seite, die bekannt ist, gleich t und

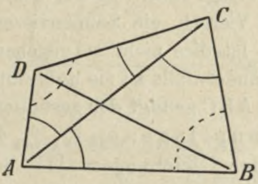
$$\delta_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_1 = 2\sigma$$
$$\delta_1 - \gamma_2 \qquad\qquad = 2\varrho$$

so ist σ bekannt, ϱ unbekannt und nach Kap. III, Formel (XVI):

$$\frac{1-t}{1+t}=\frac{\sin\delta_1-\sin\gamma_2}{\sin\delta_1+\sin\gamma_2}=\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}\sigma},$$

woraus ϱ zu berechnen ist.

Sind α_1, α_2; γ_1, γ_2 gegeben, so wird nach (II) und (I)



Figur 26.

$$\beta=180^0-\alpha_2-\gamma_1,\ \delta=180^0-\gamma_2-\alpha_1$$

$$\beta_1-\delta_1=\gamma_2-\alpha_2=2\,\varrho,$$

wo ϱ bekannt, und nach (V)

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\delta_1}=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2\sin\gamma\sin\delta}=t.$$

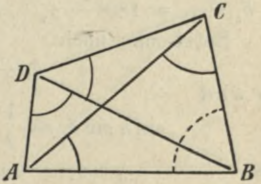
Setzt man $\beta_1+\delta_1=2\,\sigma$, so wird nach (II) und (I)

$$\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\delta}=\frac{1+t}{1-t},$$

woraus sich σ berechnen lässt. Vergl. hierzu Kap. XIII.

Zweite Hauptlage: Gegeben α_2, γ_1; δ_1, δ_2. In der ersten Gleichung (III) kommen diese 4 Winkel vor, ausserdem α und γ:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha_2\sin\delta_2}{\sin\gamma_1\sin\delta_1}=t.$$



Figur 27.

Aus (II) und (I) folgt aber

$$\alpha + \gamma = 180^0 + \alpha_2 + \gamma_1 - \delta_1 - \delta_2 = 2\sigma,$$

und $\alpha - \gamma = 2\varrho$ ergiebt sich wieder aus

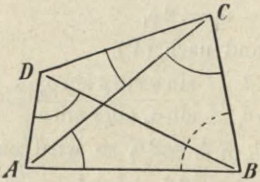
$$\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}\sigma} = \frac{1-t}{1+t}.$$

Wenn $\alpha_2 + \gamma_1 = \delta_1 + \delta_2$ wird, ist $\sigma = 90^0$, $\operatorname{tg}\sigma = \infty$, unsere Methode versagt also. In der That ist dann $\alpha + \gamma = 180^0$, also das Viereck ein Sehnenviereck, mithin auch $\delta_1 = \alpha_2$, $\delta_2 = \gamma_1$. Ist dies nicht so gegeben, so ist die Aufgabe unmöglich; andernfalls ist sie unbestimmt; jeder Punkt des Umkreises von ABC genügt den gestellten Anforderungen.

Dritte Hauptlage: $\alpha_2, \gamma_1; \gamma_2, \delta_2$.

Die dritte der Gleichungen (III) ergiebt

$$\sin\alpha \, \sin\delta_1 = \frac{\sin\alpha_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2)\sin\delta_2}{\sin\gamma_1} = t.$$



Figur 28.

Aus (II) folgt:

$$\delta_1 + \alpha_1 = 180^0 - \gamma_2 - \delta_2, \text{ also}$$

$$\delta_1 + \alpha = 180^0 - \gamma_2 - \delta_2 + \alpha_2 = \lambda, \text{ wo } \lambda \text{ bekannt.}$$

Setzt man noch

$$\delta_1 - \alpha = \mu,$$

so wird

$$\sin\alpha \sin\delta_1 = \frac{1}{2}\left\{\cos\mu - \cos\lambda\right\} = t,$$

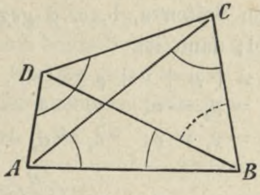
also

$$\cos\mu = \cos\lambda + 2t,$$

woraus sich μ ergiebt.

Ist gegeben: α_2, γ_1; β_1, δ_1, so ist nach (II)

$$\beta_2 = 180^0 - \alpha_2 - \beta_1 - \gamma_1,$$



Figur 29.

also nach der zweiten Gleichung (III):

$$\sin\alpha_1 \sin\delta_1 = \frac{\sin\beta_2 \sin\delta \sin\alpha_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} = \text{t},$$

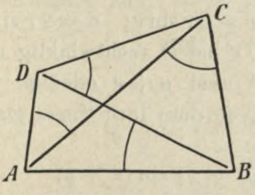
oder $$\cos(\delta_1 - \alpha_1) - \cos(\delta_1 + \alpha_1) = 2\,\text{t}.$$

Nach (II) ist $\delta_1 - \alpha_1 = \delta + \alpha_2 + \beta_1 - 180 = \mu$, also findet man $\delta_1 + \alpha_1 = \lambda$ aus

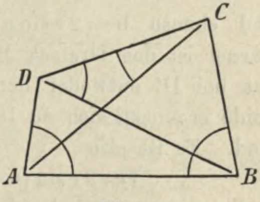
$$\cos\lambda = \cos\mu - 2\,\text{t}.$$

Vergleiche hierzu Kap. XIII.

In der **vierten Hauptlage** ist eine Auflösung mit quadratischen Gleichungen und eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nachweislich unmöglich.



Figur 30.

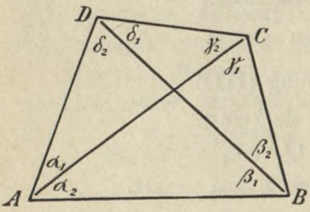


Figur 31.

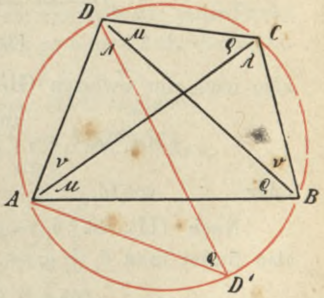
§ 27. Das Sehnenviereck.

Im Sehnenviereck wird auch die achte Beziehung zwischen den Winkeln von einfacher Gestalt. Es seien λ, μ, ν, ϱ die den Seiten a, b, c, d gegenüberliegenden Peripheriewinkel; dann ist

$$\lambda + \mu + \nu + \varrho = 180^\circ,$$
$$\alpha_1 = \beta_2 = \nu; \quad \gamma_1 = \delta_2 = \lambda$$
$$\beta_1 = \gamma_2 = \varrho; \quad \delta_1 = \alpha_2 = \mu.$$



Figur 32.



Figur 33.

Zieht man durch B den Durchmesser BD' des Kreises, so ist das Dreieck BD'A bei A rechtwinklig und der Winkel bei D' entweder λ oder $180^\circ - \lambda$, also, wenn r der Radius des Kreises ist:

$$a = 2\,r \sin\lambda$$

und ebenso $b = 2\,r\sin\mu$; $c = 2\,r\sin\nu$; $d = 2\,r\sin\varrho$. Ferner ist das Dreieck BDD' bei D rechtwinklig und hat bei D' entweder den Winkel $\mu + \nu$ oder $\varrho + \lambda$; beide ergänzen sich zu 180°, so dass ihre Sinus gleich sind. Es ist also

$$f = 2\,r\sin(\mu + \nu) = 2\,r\sin(\lambda + \varrho)$$

und ebenso $e = 2\,r\sin(\lambda + \mu) = 2\,r\sin(\mu + \varrho)$.

Man beweist mit Hilfe der Formeln des dritten Kapitels leicht, dass unter der Voraussetzung

$$\lambda + \mu + \nu + \varrho = 180^0$$

$\sin \lambda \sin \nu + \sin \mu \sin \varrho = \sin (\lambda + \mu) \sin (\lambda + \varrho)$ ist. Multipliziert man beide Seiten mit $4\, r^2$, so wird daraus:

$$ac + bd = ef,$$

der bekannte Ptolemäische Lehrsatz.

Im Dreieck ABC ist

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \beta$$

und im Dreieck ADC

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2\,c\,d \cos \delta.$$

Da $\delta + \beta = 180^0$, ist $\cos \delta = - \cos \beta$. Vergleicht man beide Ausdrücke für e^2, so wird daraus:

$$\cos \beta = \frac{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{2\,(a\,b + c\,d)}. \qquad \text{(VII)}$$

Also $\quad 1 + \cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} = \dfrac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2\,(ab + cd)}.$

Setzt man

$$\frac{1}{2}\left(-a + b + c + d\right) = s_a,\ \frac{1}{2}\left(a - b + c + d\right) = s_b,$$
$$\frac{1}{2}\left(a + b - c + d\right) = s_c,\ \frac{1}{2}\left(a + c + c - d\right) = s_d,$$

so folgt daraus:

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{s_c\, s_d}{a\,b + c\,d},$$

und analog aus $1 - \cos \beta$:

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{s_a\, s_b}{a\,b + c\,d}.$$

Mithin ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{s_a\, s_b}{s_c\, s_d}};\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s_b\, s_c}{s_d\, s_a}} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s_d\, s_a}{s_b\, s_c}};\ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{s_c\, s_d}{s_a\, s_b}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

Andererseits wird

$$2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \sin \beta = 2 \frac{\sqrt{s_a s_b s_c s_d}}{ab + cd}. \qquad \text{(IX)}$$

Es ist aber $\sin \beta = \sin \delta$ und $\frac{1}{2}$ ab $\sin \beta$ der Inhalt von ABC, $\frac{1}{2}$ cd $\sin \delta$ der Inhalt von ADC, somit der Inhalt J des ganzen Vierecks:

$$J = \sqrt{s_a s_b s_c s_d}. \qquad \text{(X)}$$

(Wie erhält man hieraus die Inhaltsformel des Dreiecks?)

Wenn man noch den Wert von $\cos \beta$ in den Ausdruck für e^2 einsetzt, erhält man nach einigen leichten Umformungen

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}. \qquad \text{(XI)}$$

Ebenso ist

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man wieder den Ptolemäischen Lehrsatz.

Im Dreieck ABC folgt aus dem Sinussatz:

$$\sin \lambda = \frac{a \sin \beta}{e}$$

und aus (IX) und (XI)

$$\sin \lambda = \frac{2aJ}{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}. \qquad \text{(XII)}$$

Durch Vergleich mit der Formel

$$= 2r \sin \lambda$$

ergiebt sich daraus noch

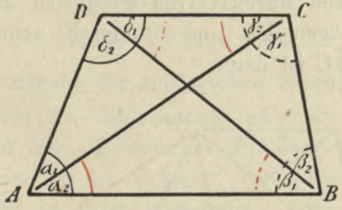
$$r = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4J}. \qquad \text{(XIII)}$$

§ 28. Das Trapez.

Ein Trapez ist durch 4 unabhängige Stücke bestimmt. Durch 3 Winkel ist es der Gestalt nach gegeben.

Es seien die parallelen Seiten mit AB und CD bezeichnet. Dann ist

$$\alpha_2 = \gamma_2,\ \beta_1 = \delta_1,\ \alpha + \delta = 180^\circ,\ \beta + \gamma = 180^\circ. \qquad \text{(XIV)}$$



Figur 34.

Diese Relationen ergeben sich aus einer von ihnen mit Hilfe der in § 24 aufgestellten Gleichungen (I) und (II). Die Sinusgleichungen lassen sich nicht wesentlich vereinfachen. (IV) und (V) werden zu

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1 \sin\gamma_1 &= \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\delta_2 \\ \sin^2\alpha \sin\beta_2 \sin\gamma_1 &= \sin\alpha_1 \sin^2\beta \sin\delta_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV)}$$

Wenn 3 Winkel des Trapezes gegeben sind, so kann man aus (XIV) stets einen vierten dazu finden, dass sich eine der in § 25 angegebenen Hauptlagen ergiebt. Ausgenommen ist nur folgender Fall:

Gegeben: $\alpha_1,\ \delta_2,\ \beta_2;\ \gamma_1 = 180^0 - \alpha_1 - \beta_2 - \delta_2$.

Dann hat man aus der ersten der Gleichungen (XV):

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \sqrt{\frac{\sin\alpha_1 \sin\gamma_1}{\sin\beta_2 \sin\delta_2}} = t.$$

Und nach den Beziehungen zwischen den Winkeln selbst:

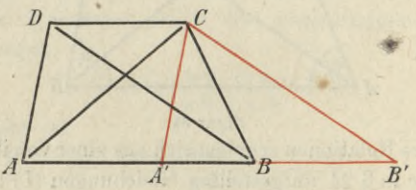
$$\alpha_2 + \beta_1 = 180^0 - (\alpha_1 + \delta_2) = 2\sigma.$$

Setzt man $\beta_2 - \alpha_2 = 2\,\delta$, so wird, wie in § 25:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\sigma \cdot \frac{1-t}{1+t}.$$

Zur Lösung anderer Trapezaufgaben sind ausser den vier Dreiecken ABC, BCD, CDA und DAB noch folgende zwei zu verwenden:

Man ziehe durch C die Parallelen zu DA und DB. Sie mögen AB und A′ und B′ schneiden. Im Dreieck A′BC ist dann



Figur 35.

der Winkel bei A′ gleich α, bei B gleich β,
bei C gleich $\gamma + \delta - 180^\circ = 180^\circ - (\alpha + \beta)$,
die Seite BC $= b$, CA′ $= d$, A′B $= a - c$.

Im Dreieck ACB′ aber ist

der Winkel bei A gleich α_2, bei B′ gleich β_1,
bei C gleich $180^\circ - (\alpha_2 + \beta_1)$
$= 180^\circ - (\gamma_2 + \delta_1)$,
die Seite B′C $= f$, CA $= e$, AB′ $= a + c$.

Mit Hilfe dieser Dreiecke werden in der elementaren Geometrie verschiedene Konstruktionsaufgaben gelöst.

Zweiter Teil.

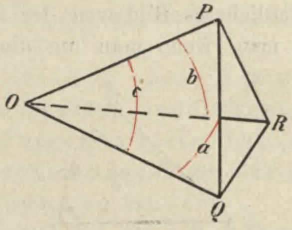
Sphärische Trigonometrie.

Sechstes Kapitel.

Einleitendes.

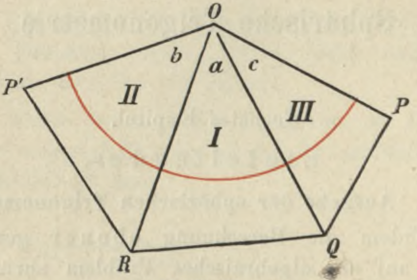
§ 29. Aufgabe der sphärischen Trigonometrie.

Nachdem die Berechnung ebener geradliniger Figuren auf ein algebraisches Problem zurückgeführt ist, stehen wir vor der Aufgabe, ebenso für räumliche Figuren alle zu ihrer Berechnung notwendigen Gleichungen herzuleiten. Die dem Dreieck analoge einfachste Figur ist im Raum die dreiseitige körperliche Ecke. Ihre drei Kanten bilden zu je zweien



Figur 36.

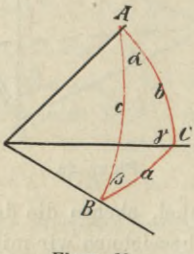
insgesamt drei Winkel, ebenso die drei Seiten (Ebenen). Die Kantenwinkel bezeichnen wir mit a, b, c, die gegenüberliegenden Neigungswinkel der Seiten entsprechend mit α, β, γ. Durch drei dieser sechs Stücke sind die übrigen mitbestimmt. Denkt man sich z. B. Figur 37 ausgeschnitten, längs der Kanten OQ und OR gebrochen und so zusammengebogen, dass OP′ auf OP fällt, so



Figur 37.

entsteht eine körperliche Ecke mit der Spitze O. Die Winkel a, b, c waren gegeben; die Winkel, die die Ebenen I, II, III einschliessen, sind fest, unveränderlich, von der Länge der Kanten OP, OQ, OR unabhängig, also lediglich Funktionen von a, b, c.

Ein anschaulicheres Bild von der Lage der sechs Stücke erhält man, wenn man um die Spitze O der



Figur 38.

Ecke eine Kugel legt. Dieselbe wird von den drei Seiten der Ecken in drei Bögen grösster Kreise, BC, CA und AB geschnitten, deren Längen, in Graden, Minuten und Sekunden gemessen, a, b und c sind. Die Winkel aber, die diese Bögen einschliessen, sind α, β und γ. So erhalten wir für jede Ecke ein sphärisches Dreieck; aber umgekehrt entspricht auch jedem Dreieck auf der Kugelfläche eine Ecke mit der Spitze im Centrum der Kugel. Die Aufgabe der Berechnung der dreiseitigen Ecke ist also identisch mit der der Berechnung des sphärischen Dreiecks, dessen Seiten grösste Kreise sind.

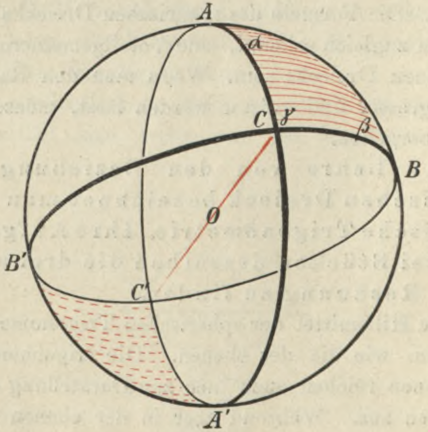
Die letztere ist eines der ältesten Probleme der Geodäsie und Astronomie. Die ebene Trigonometrie ist zu Erdmessungen nur auf kleine Entfernungen tauglich, nämlich nur solange man die Krümmung der Erdoberfläche vernachlässigen kann. Grössere Dreiecke auf der Erdoberfläche müssen dagegen als sphärische behandelt werden. Die Formeln des sphärischen Dreiecks müssen, wie man zugleich erkennt, eine Verallgemeinerung derer des ebenen Dreiecks sein. Wenn man den Radius der Kugel grösser und grösser werden lässt, müssen sie in diese übergehen.

Die Lehre von den Beziehungen am sphärischen Dreieck bezeichnet man als die sphärische Trigonometrie. Ihre Aufgabe ist, aus drei Stücken desselben die drei anderen durch Rechnung zu finden.

Die Hilfsmittel der sphärischen Trigonometrie sind dieselben, wie die der ebenen. Die trigonometrischen Funktionen reichen auch hier zur Darstellung aller Beziehungen aus. Während aber in der ebenen Trigonometrie nur die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel vorkamen, treten in der sphärischen auch die der Seiten auf. Dies ist nicht erstaunlich, ja sogar von vornherein zu vermuten, wenn man wieder an die dreiseitige Ecke denkt, in der ja alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks als Winkelgrössen erscheinen.

Aus der Stereometrie ist bekannt, dass die Summe der drei Kantenwinkel einer konvexen körperlichen Ecke kleiner als 360° ist. Wir beschränken die Betrachtung auf solche Ecken und damit auf sphärische Dreiecke, die ganz auf einer Hälfte der Kugel liegen. Offenbar ist in solchen Dreiecken keine Seite und kein Winkel grösser als 180°.

§ 30. Nebendreiecke und Scheiteldreieck.



Figur 39.

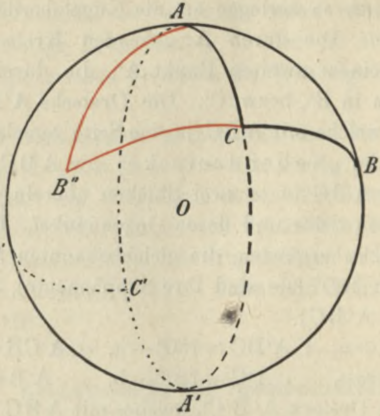
Denkt man sich die drei grössten Kreise, denen die Seiten des Dreiecks ABC angehören, vollständig ausgezogen, so zerlegen sie die Kugeloberfläche in acht Dreiecke. Die durch A gehenden Kreise schneiden sich in einem zweiten Punkt A′, die durch B und C gehenden in B′, bezw. C′. Die Dreiecke A′BC, AB′C, ABC′, welche mit ABC je eine Seite gemeinsam haben, heissen die „Nebendreiecke“ von ABC. Sie stimmen mit ABC in je zwei Stücken überein: in der gemeinsamen Seite und deren Gegenwinkel. Die anderen vier Stücke ergänzen die gleichbenannten Stücke von ABC zu 180° (sie sind ihre Supplemente), z. B. ist im Dreieck A′BC:

$$\sphericalangle BA'C = \alpha, \quad \sphericalangle A'BC = 180^0 - \beta, \quad \sphericalangle A'CB = 180^0 -,$$
$$BC = a, \qquad A'C = 180^0 - b, \qquad A'B = 180^0 - c.$$

Das Dreieck A′B′C′, welches mit ABC keine Ecke und keine Seite gemeinsam hat, heisst das „Scheiteldreieck“ von ABC. Es stimmt mit ABC in allen Stücken überein. Die anderen drei Dreiecke, die mit ABC nur eine Ecke gemeinsam haben, sind die Scheiteldreiecke der Nebendreiecke und zugleich die Nebendreiecke des Scheiteldreiecks von ABC. Sie führen keine besondere Bezeichnung.

Das Scheiteldreieck A′B′C′ kann mit dem ursprünglichen nicht zur Deckung gebracht werden. Schiebt man es z. B. an dem grössten Kreis A′C′AC um die Kugel herum, so fällt A′ auf A, C′ auf C, aber B′ nicht auf B, vielmehr auf die andere Seite von AC, auf B″. Wenn in der Ebene zwei Dreiecke so gelegen sind, kann man sie durch Umklappen um die gemeinsame Seite zur Deckung bringen. Aber auf der

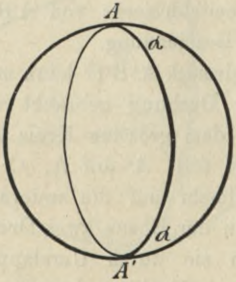
Kugel geht dies wegen ihrer Krümmung nicht. Man darf daher Scheiteldreiecke nicht kongruent nennen und



Figur 40.

muss neben dem Begriff der Kongruenz auch den der Symmetrie anwenden. Scheiteldreiecke sind symmetrische Figuren.

§ 31. Inhalte von Zwei- und Dreiecken.

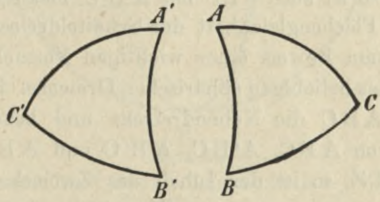


Figur 41.

1. Zwei grösste Kreise durch A und seinen Gegenpunkt A' teilen die Kugel in vier Streifen, die man Kugelzweiecke nennt. Ein Kugelzweieck ist vollständig bestimmt, wenn man den Winkel an einer seiner Ecken kennt. Die Fläche eines Kugelzweiecks verhält sich zu der Fläche der ganzen Kugel, wie der Winkel an der Spitze des Zweiecks zu 360°. Es ist also die Fläche F des Zweiecks mit dem Winkel α, wenn R der Radius der Kugel ist:

$$F = \frac{\alpha^0}{360^0} 4\pi R^2 = \frac{R^2\pi}{90^0}\alpha.$$

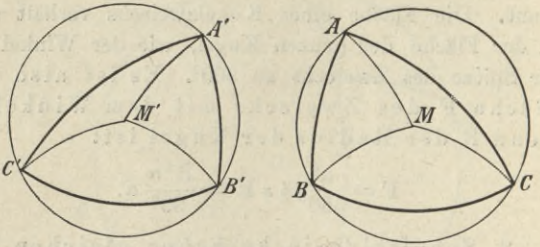
2. Scheiteldreiecke haben gleichen Inhalt. Dieser Satz ist unmittelbar durch die Anschauung gegeben. Der Beweis gestaltet sich aber sehr viel umständlicher, da man die Dreiecke nicht aufeinanderlegen kann.



Figur 42.

Ist zunächst AB = AC, so ist auch im Scheiteldreieck A'B' = A'C'. Wenn man AB mit A'B' zur Deckung bringt und dann das eine Dreieck um den Winkel α dreht, so kommt A mit C', C mit B' zur Deckung; es ist also ABC kongruent A'C'B': Ein gleichschenkliges Dreieck ist mit seinem Scheiteldreieck inhaltsgleich.

In einem beliebigen sphärischen Dreieck konstruiere man sich nunmehr den sphärischen Mittelpunkt M des Umkreises. Sein Gegenpunkt M' ist der Mittelpunkt des Umkreises des Scheiteldreiecks. Die Dreiecke ABM, BCM



Figur 43.

CAM sind gleichschenklig, also nach dem zuletzt Bewiesenen ihren Scheiteldreiecken A'B'M', B'C'M', C'A'M' inhaltsgleich. Da aber ABC aus den ersteren ebenso (durch Addition oder Subtraktion) zusammengesetzt ist, wie A'B'C' aus den letzteren, so ist auch ABC mit A'B'C' inhaltsgleich.

Die Flächengleichheit der Scheiteldreiecke ist notwendig zum Beweis einer wichtigen Formel über den Inhalt eines beliebigen sphärischen Dreiecks. Konstruiert man zu ABC die Nebendreiecke und bezeichnet die Inhalte von ABC, A'BC, AB'C und ABC' mit F, X, Y und Z, so ist der Inhalt des Zweiecks ABA'C:

$$F + X = \frac{R^2 \pi}{90^0} \alpha,$$

ebenso

$$F + Y = \frac{R^2 \pi}{90^0} \beta,$$

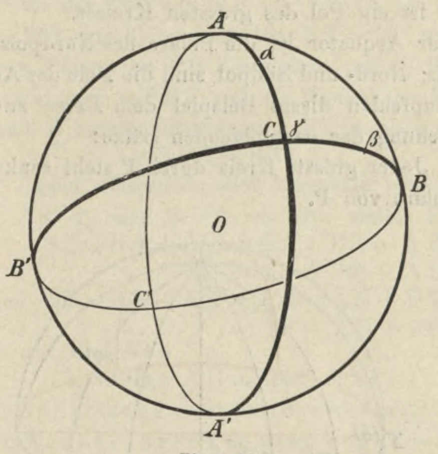
$$F + Z = \frac{R^2 \pi}{90^0} \gamma.$$

Andererseits erfüllen die Dreiecke ABC, A'BC, AB'C und B'A'C die Halbkugel, die durch den grössten

Kreis A B A′ B′ begrenzt ist, und da die Fläche von A′B′C gleich der von A B C′, seinem Scheiteldreieck, ist, hat man $F + X + Y + Z = 2 R^2 \pi$.

Addiert man die drei ersten Gleichungen und subtrahiert diese davon, so bleibt:

$$2 F = \frac{R^2 \pi}{90^0} \left\{ \alpha + \beta + \gamma - 180^0 \right\}.$$



Figur 44.

Man bezeichnet den Ueberschuss $\alpha + \beta + \gamma - 180^0$ der Winkelsumme über 180° als den „sphärischen Excess des Dreiecks", ε. Der Inhalt eines sphärischen Dreiecks ist dem sphärischen Excess proportional:

$$F = \frac{R^2 \pi}{180} \varepsilon.$$

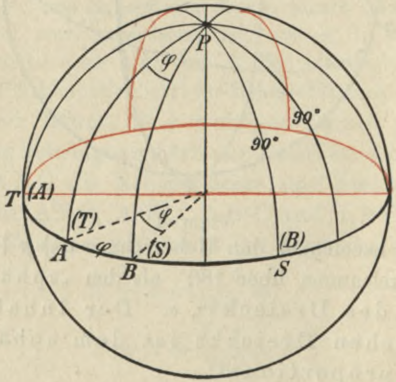
Die Winkelsumme im sphärischen Dreieck wächst also mit dem Inhalt des Dreiecks und ist immer grösser als 180°.

§ 32. Das Polardreieck.

Wenn die Ebene eines grössten Kreises und der zu einem Punkt P gehörige Durchmesser aufeinander senkrecht stehen, so nennt man den grössten Kreis die Polare des Punktes P und diesen einen Pol des grössten Kreises. Jeder grösste Kreis zerlegt die Kugel in zwei Halbkugeln. Der Mittelpunkt jeder dieser Halbkugeln ist ein Pol des grössten Kreises.

Der Aequator ist die Polare des Nordpols wie des Südpols, Nord- und Südpol sind die Pole des Aequators. Wir empfehlen dieses Beispiel dem Leser zur Veranschaulichung der nachfolgenden Sätze:

1. Jeder grösste Kreis durch P steht senkrecht auf der Polare von P.



Figur 45.

2. (Umkehrung.) Jeder auf einem grössten Kreis senkrechte Kreis geht durch den Pol desselben.

3. Jeder Punkt der Polare hat vom Pol den Abstand 90°.

4. (Umkehrung.) Jeder Punkt, der von P um einen rechten Winkel entfernt ist, liegt auf der Polare von P.

5. Liegen A und B auf der Polare von P, so ist

$$AB = \sphericalangle APB.$$

6. P sei der Pol von AB und von A sei nach B hin $AS = 90°$, von B nach A hin $BT = 90°$ auf AB aufgetragen. Dann ist PS die Polare von A, PT die Polare von B und $\sphericalangle SPT$ soll als Winkel der Polaren von A und B bezeichnet werden. Es ist aber nach 5

$$\sphericalangle SPT = ST.$$

S und T liegen ausserhalb oder innerhalb von AB, je nachdem $AB <$ oder $> 90°$ ist. Im ersten Fall ist

$$\begin{aligned} ST = SA + AT &= SA + BT - AB \\ &= 90° + 90° - AB, \end{aligned}$$

Im zweiten

$$\begin{aligned} ST = SA - AT &= SA - AB + BT \\ &= 90° - AB + 90°. \end{aligned}$$

Also auf alle Fälle:

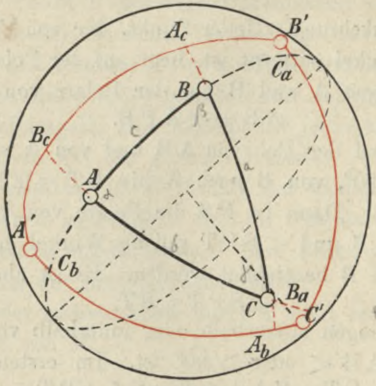
$$\sphericalangle SPT + AB = 180°, \text{ d. h.:}$$

Der sphärische Abstand zweier Punkte und der Winkel ihrer Polaren ergänzen sich zu 180°.

7. Zugleich erkennt man: Die Polaren SP und TP von A und B schneiden sich im Pol P von AB.

Man konstruiere jetzt die Polaren der drei Ecken des sphärischen Dreiecks. Zu diesem Zweck trage man von A aus auf b nach C hin $AB_a = 90°$, auf c nach B hin $AC_a = 90°$ ab. Der durch B_aC_a gehende grösste Kreis ist die Polare von A. Ebenso konstruiere man sich die Polare von B und C. B_aC_a schneidet sich mit A_bC_b in einem Punkt C′, C_aB_a mit A_cB_c in B′, Fig 46

$B_c A_c$ mit $C_b A_b$ in A′. Sind α', β', γ' die Winkel und



Figur 46.

a′, b′, c′ die Seiten des Dreiecks A′B′C′, so ist nach Satz 6 dieses Paragraphen:

$$\sphericalangle\, C^a C' C_b + AB = 180^\circ, \text{ d. h. } \gamma' = 180^\circ - c.$$

Da A′, B′, C′ umgekehrt (nach 7) die Pole von a, b, c sind, ist auch $A'A_b = A'A_c = 90^\circ$ u. s. f., mithin wieder nach 6:

$$\sphericalangle\, A_c C B_c + A'B' = 180^\circ, \text{ d. h. } c' = 180^\circ - \gamma'.$$

Hiermit erhalten wir den fundamentalen Satz:

Giebt es ein sphärisches Dreieck mit den Stücken a, b, c; α, β, γ, so giebt es ein zweites mit den Stücken

$$\mathbf{a}' = 180^\circ - \alpha,\quad \mathbf{b}' = 180^\circ - \beta,\quad \mathbf{c}' = 180^\circ - \gamma;$$
$$\alpha' = 180^\circ - \mathbf{a},\quad \beta' = 180^\circ - \mathbf{b},\quad \gamma' = 180^\circ - \mathbf{c}.$$

Das Dreieck A′B′C′ heisst das P o l a r - oder S u p p l e m e n t e n d r e i e c k des gegebenen, auch das r e c i p r o k e Dreieck.

Die Nebendreiecke des Polardreiecks sind die Polardreiecke der Nebendreiecke des ursprünglichen. Es giebt also auch ein Dreieck mit den Winkeln a, b, $180^0 - c$ und den Seiten α, β, $180^0 - \gamma$.

Der sphärische Excess des Polardreiecks, ε', hat den Wert:

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= 180^0 - a + 180^0 - b + 180^0 - c - 180^0 \\ &= 360^0 - (a + b + c).\end{aligned}$$

Man nennt diese Grösse den sphärischen Defekt des ursprünglichen Dreiecks.

Siebentes Kapitel.

Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

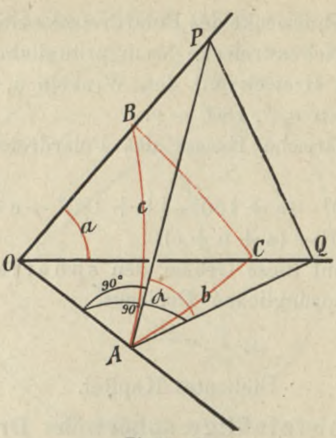
§ 33. Erster Cosinussatz.

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.\end{aligned} \tag{I}$$

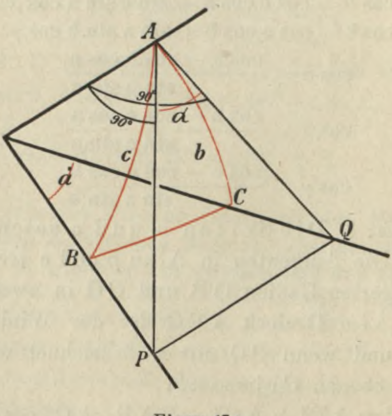
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \\ \cos \beta &= \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} \\ \cos \gamma &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned} \tag{II}$$

Beweis: 1. Die Seiten b und c seien kleiner als 90^0. Die Tangenten in A an b und c treffen dann die verlängerten Radien OB und OC in zwei Punkten Fig 47
P und Q. Im Dreieck APQ ist der Winkel bei A gleich α, und wenn PQ mit x bezeichnet wird, folgt nach dem ebenen Cosinussatz:

$$x^2 = AP^2 + AQ^2 - 2\,AP \,.\, AQ \,.\cos\alpha.$$



Figur 47.



Figur 47a.

Im Dreieck OPQ ist der Winkel bei O gleich a, also ebenso:

$$x^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP\,.\,OQ\,.\cos a.$$

Durch Vergleichung beider Ausdrücke für x^2 erhält man:

$$OP^2 - AP^2 + OQ^2 - AQ^2 + 2\,AP\,.\,AQ\,.\cos\alpha$$
$$= 2\,OP\,.\,OQ\,.\cos a.$$

Die Dreiecke OAP und OAQ sind bei A rechtwinklig, folglich ist, wenn der Radius der Kugel wieder mit R bezeichnet wird:

$$OP^2 - AP^2 = OA^2 = R^2; \quad OQ^2 - AQ^2 = OA^2 = R^2;$$

$$\frac{OA}{OP} = \cos AOP = \cos c; \quad \frac{OA}{OQ} = \cos AOQ = \cos b;$$

also $$OP = \frac{R}{\cos c}; \quad OQ = \frac{R}{\cos b}.$$

Endlich ist

$$AP = R\operatorname{tg} AOP = R\operatorname{tg} c; \quad AQ = R\operatorname{tg} AOQ = R\operatorname{tg} b.$$

Durch Einsetzen in die letzte Gleichung und Division durch $2R^2$ folgt:

$$1 + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos\alpha = \frac{\cos a}{\cos b \cos c}.$$

Da $\operatorname{tg} b = \dfrac{\sin b}{\cos b}$ ist, erhält man nach Multiplikation mit $\cos b \cos c$ die erste der Formeln (I).

2. Ist b grösser, c kleiner als 90^0, so ist in dem Nebendreieck, welches c mit ABC gemeinsam hat:

$$a' = 180^0 - a, \quad b' = 180^0 - b, \quad c' = c,$$
$$\alpha' = 180^0 - \alpha, \quad \beta' = 180^0 - \beta, \quad \gamma' = \gamma.$$

b' und c' sind kleiner als 90^0, folglich ist nach dem zuletzt Bewiesenen:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos\alpha',$$

und nach den Formeln (I, II) des § 6:

$$\cos a' = -\cos a, \quad \cos b' = -\cos b, \quad \cos c' = +\cos c$$
$$\cos \alpha' = -\cos \alpha, \quad \sin b' = +\sin b, \quad \sin c' = +\sin c.$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man wieder (I).

3. Sind b und c beide grösser als 90°, so verfahre man ebenso mit dem Nebendreieck, welches a mit ABC gemein hat.

Die Formeln (II) entstehen aus (I) durch Auflösen nach $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

§ 34. Funktionen der halben Winkel; Sinussatz.

Aus (II) folgt:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)\sin\frac{1}{2}\left(-a+b+c\right)}{\sin b \sin c}$$
$$= 2\frac{\sin s \sin s_a}{\sin b \sin c}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{-\cos a + (\cos b \cos c + \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\left(a-b+c\right)\sin\frac{1}{2}\left(a+b-c\right)}{\sin b \sin c}$$
$$= 2\frac{\sin s_b \sin s_c}{\sin b \sin c}.$$

Mithin ist

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin s_a}{\sin b \sin c}}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_b \sin s_c}{\sin b \sin c}}. \qquad \text{(III)}$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_b \sin s_c}{\sin s \,.\, \sin s_a}},\ \cot\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin s_a}{\sin s_b \sin s_c}}, \tag{IV}$$

und durch Multiplikation:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha=2\,\frac{\sqrt{\sin s \sin s_a \sin s_b \sin s_c}}{\sin b \sin c}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=2\,\frac{\sqrt{\sin s \sin s_a \sin s_b \sin s_c}}{\sin a \sin b \sin c}. \tag{V}$$

Diese letzte Formel enthält den sphärischen erweiterten Sinussatz. Die rechte Seite ist aus den drei Seiten völlig symmetrisch gebildet, es ist also:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\sin\alpha}{\sin a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin c},\\ \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\sin a:\sin b:\sin c\end{array}\right\} \tag{VI}$$

Die Sinus der Seiten verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel. (Sinussatz.)

Anmerkung. Man hat für die hier auftretenden Grössen noch einige nützliche Bezeichnungen eingeführt. Man nennt den Ausdruck

$$S=\sqrt{\sin s \sin s_a \sin s_b \sin s_c}$$

den „Eckensinus“ der zu dem Dreieck gehörigen Ecke mit den Winkeln a, b, c.

Den Quotienten $\dfrac{\sin a \sin b \sin c}{2\,S}$ bezeichnet man als „Modul“ M des Dreiecks. Es ist

$$\sin a = M\sin\alpha,\ \sin b = M\sin\beta,\ \sin c = M\,.\,\sin\gamma.$$

Endlich sei noch

$$\sqrt{\frac{\sin s_a \sin s_b \sin s_c}{\sin s}}=k$$

gesetzt, so dass man hat:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{\sin s_a};\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{k}{\sin s_b};\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{k}{\sin s_c}.$$

§ 35. Reciproke Formeln.

Indem man den ersten Cosinussatz auf das Polardreieck anwendet, erhält man den sogenannten zweiten Cosinussatz:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \mathrm{a} \qquad \text{(VII)}$$

$$\cos \mathrm{a} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}. \qquad \text{(VIII)}$$

Setzt man ferner in Analogie zu s, s_a etc.:

$$\frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \gamma\right) = \sigma, \quad \frac{1}{2}\left(-\alpha + \beta + \gamma\right) = \sigma - \alpha = \sigma_\alpha,$$

so wird das s′ und das s'_a des Polardreiecks zu:

$$s' = \frac{1}{2}\left(180^0 - \alpha + 180^0 - \beta + 180^0 - \gamma\right) = 270^0 - \sigma,$$

$$s'_a = \frac{1}{2}\left(-180^0 + \alpha + 180^0 - \beta + 180^0 - \gamma\right) = 90^0 - \sigma_\alpha,$$

womit die Formeln (III) und (IV) übergehen in

$$\sin \frac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos \sigma_\alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}; \quad \cos \frac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{\frac{\cos \sigma_\beta \cos \sigma_\gamma}{\sin \beta \sin \gamma}}; \qquad \text{(IX)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos \sigma_\alpha}{\cos \sigma_\beta \cos \sigma_\gamma}}. \qquad \text{(X)}$$

(V) wird zu:

$$\frac{\sin \mathrm{a}}{\sin \alpha} = \frac{2\sqrt{-\cos \sigma \cos \sigma_\alpha \cos \sigma_\beta \cos \sigma_\gamma}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

§ 36. Rechnerische Herleitung des zweiten Cosinussatzes. Cotangentensatz.

Setzt man den durch den ersten Cosinussatz gegebenen Wert für cos a in die Formel für cos b ein, so ergiebt sich nach leichter Reduktion:

$$\cos \mathrm{b} \sin \mathrm{c} = \cos \mathrm{c} \sin \mathrm{b} \cos \alpha + \sin \mathrm{a} \cos \beta. \qquad \text{(XI)}$$

Solcher Formeln giebt es 6. Sie heissen die sphärischen Cosinusformeln. Da $\sin \mathrm{a} = \mathrm{M} \sin \alpha$ u. s. f., wird nach Division durch M:

$$\cos b \sin \gamma = \cos c \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta,$$

oder, wenn man die Ecken A und C vertauscht und etwas anders ordnet:

$$\mathbf{\cos \beta \sin \gamma = -\cos \gamma \sin \beta \cos a + \sin \alpha \cos b.} \qquad \text{(XII)}$$

Dies ist die reciproke Formel zu (XI). Nimmt man sie zusammen mit der durch Vertauschung von B und A daraus hervorgehenden und eliminiert $\cos a$ oder $\cos b$, so erhält man den zweiten Cosinussatz. —

Aus (XI) folgt, nach Division durch $\sin b$ unter Beachtung von

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta:$$

$$\cot b \sin c = \cos c \cos \alpha + \sin \alpha \cot \beta \quad \text{oder}$$

$$\mathbf{\sin c \,.\, \cot b - \sin \alpha \cot \beta = \cos c \,.\, \cos \alpha.} \qquad \text{(XIII)}$$

Dies ist der sogenannte **Cotangentensatz.** Es giebt 6 solcher Formeln. Durch Vertauschen der Ecken A und C erhält man die zu (XIII) reciproke Formel:

$$\sin a \,.\, \cot b - \sin \gamma \cot \beta = \cos a \,.\, \cos \gamma.$$

§ 37. Uebergang in die ebene Trigonometrie:

Ein sphärisches Dreieck, welches im Vergleich zur ganzen Kugeloberfläche sehr klein ist, kann näherungsweise als ebenes Dreieck betrachtet werden. So ist z. B. bei kleinen geodätischen Messungen von der Krümmung der Erdoberfläche nichts zu merken; die Abweichungen von der Ebene sind kleiner als die Fehler, die bei der Messung auftreten.

Es müssen also die Formeln der sphärischen Trigonometrie für sehr kleine Dreiecke näherungsweise mit denen der ebenen Trigonometrie in Uebereinstimmung gebracht werden können[1].

In erster Annäherung kann man die zu den Seiten gehörigen Winkel gleich Null setzen, so dass die Sinus der

[1] Wenn ein sphärisches Dreieck sehr klein ist, so bedeutet dies, dass seine Seiten sehr klein sind; die Winkel können dabei beliebige Werte zwischen 0 und 180° annehmen; ihre Summe wird um so näher an zwei Rechte herangehen, je kleiner das Dreieck ist.

Seiten alle Null, die Cosinus der Seiten gleich 1 werden. Die Formeln (I) bis (VI) werden dadurch entweder identische Gleichungen, wie (I), $(1 = 1)$ oder unbestimmt, wie (III), $\left(\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{0}{0}\right)$. Aus (VII) und (XII) dagegen folgt

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$
$$\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma.$$

Dies sind die Additionstheoreme, wenn man

$$\alpha = 180 - \beta - \gamma$$

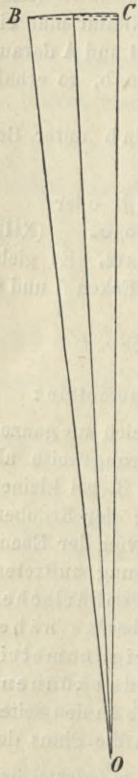
setzt.

In zweiter Annäherung kann $\sin a = \frac{a}{R}$ gesetzt werden. Denn solange a als geradlinig betrachtet werden kann, fällt es mit der Sinuslinie zusammen: Das Dreieck O B C ist bei C rechtwinklig, also $\sin a = \frac{BC}{OB}$. Der Cosinus ist gleich 1 zu setzen.

Hiermit erhält man aus den Formeln (III) bis (VI) die entsprechenden Gleichungen der ebenen Trigonometrie; der Cosinussatz aber bleibt identisch erfüllt, da man das Glied $\sin b \sin c \cos\alpha$ Null setzen muss, weil $\frac{bc}{R^2}$ ausserhalb der eingehaltenen Genauigkeit liegt.

Setzt man jedoch in dritter Annäherung

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - 2\left(\frac{a}{2R}\right)^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2},$$



Figur 48.

so folgt aus dem Cosinussatz nach leichter Umformung und Multiplikation mit $2R^2$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha + \frac{b^2 c^2}{2\,R^2}.$$

Das letzte Glied ist im Vergleich zu den anderen unendlich klein und kann vernachlässigt werden, so dass man den ebenen Cosinussatz erhält.

Durch diese Uebergänge wird zugleich die Bezeichnung der sphärischen Sätze in ein besseres Licht gerückt. Der sphärische Cosinus- und Sinussatz, sowie die sphärischen Cosinusformeln (XI) gehen nämlich in die ebenso benannten ebenen Formeln über.

§ 38. Auflösung der sphärischen Dreiecke.

Erster Fall: Gegeben a, b, c.

Man berechne s, s_a, s_b und s_c und aus (IV) die Tangenten der halben Winkel:

$$\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left\{\log\sin s_b + \log\sin s_c - \log\sin s - \log\sin s_a\right\}$$

Da α, β, γ kleiner als 180^0 sein sollen, sind $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ spitze Winkel; die aus der Tabelle entnommenen Werte sind die einzig möglichen und richtigen. Es giebt also nur eine Lösung.

Zweiter Fall: Gegeben α, β, γ.

Man berechne erst σ, σ_α, σ_β, σ_γ und aus (X) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; da σ grösser als 90^0 wird, setze man $180^0 - \sigma = \sigma'$; es wird:

$$\log \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left\{\log\cos\sigma' + \log\cos\sigma_\alpha - \log\cos\sigma_\beta - \log\cos\sigma_\gamma\right\}.$$

Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn man aus α, β, γ unächst die Seiten $a' = 180^0 - \alpha$, b′ und c′ des Polarzdreiecks ausrechnet und aus diesen die Winkel desselben. α', β', γ'. Dann ist $a = 180^0 - \alpha'$, also

$$\frac{a}{2} = 90^0 - \frac{\alpha'}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \cot\frac{\alpha'}{2}$$

und nach (IV):

$$\log\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \log\cot\frac{\alpha'}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\log\sin s' + \log\sin s'_a - \log\sin s'_b - \log\sin s'_c\right\}.$$

Bei diesem Verfahren hat man die bequemere Interpolation mit log sin und log tg, die positive Tafeldifferenzen besitzen. Da übrigens s'_a das Komplement von σ_α ist, ist ein thatsächlicher Unterschied zwischen beiden Wegen nicht vorhanden.

Zur Probe auf richtige Rechnung dient in den beiden ersten Fällen am besten der Sinussatz:

$$\log\sin a - \log\sin\alpha = \log\sin b - \log\sin\beta$$
$$= \log\sin c - \log\sin\gamma.$$

Dritter Fall: Gegeben a b γ.

Man erhält c aus dem ersten Cosinussatz, sodann α und β nach dem Sinussatz oder besser nach den Formeln (IV), da der Sinussatz zwei Winkel liefert.

Vierter Fall: Gegeben c, α, β.

Man erhält γ nach dem reciproken Cosinussatz, sodann a und b nach Formel (X).

Für durchgehende logarithmische Rechnung im dritten und vierten Fall sind geeignete Formeln in diesem Abschnitt noch nicht entwickelt. Vergl. hierzu Kapitel IX und XIII.

Fünfter Fall: Gegeben a, b, α.

Im Interesse einer bequemen Determination betrachte man, wenn a und b nicht beide spitz sind, dasjenige Nebendreieck, in dem die entsprechenden Stücke spitz sind. Ist z. B. a stumpf, b spitz, so wähle man das Nebendreieck mit den Stücken

$$a' = 180^\circ - a,\ \ b' = b,\ \ c' = 180^\circ - c,$$
$$\alpha' = 180^\circ - \alpha,\ \ \beta' = \beta,\ \ \gamma' = 180^\circ - \gamma,$$

welches mit dem ursprünglichen die Ecken A und C gemein hat. Ist b stumpf, a spitz, so nehme man dasjenige, welches B und C mit ABC gemein hat. Sind endlich a und b beide stumpf, so nehme man das an AB anliegende Nebendreieck mit den Seiten

$$a' = 180^\circ - a,\ \ b' = 180^\circ - b,\ \ c' = c$$

und den Winkeln

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha,\ \ \beta' = 180^\circ - \beta,\ \ \gamma' = \gamma.$$

Aus den Stücken des Nebendreiecks kann man jederzeit wieder die des ursprünglichen berechnen.

W i r k ö n n e n u n s m i t h i n a u f d e n F a l l b e s c h r ä n k e n, d a s s a u n d b s p i t z s i n d. M a n e r h ä l t d a n n a u s d e m S i n u s s a t z

$$\log \sin \beta = \log \sin b - \log \sin a + \log \sin \alpha.$$

Da zu jedem Sinus zwei Winkel gehören, ergeben sich zwei Lösungen für β, die aus der Tafel gefundene und deren Nebenwinkel. D i e D e t e r m i n a t i o n i s t u n t e r d e r V o r a u s s e t z u n g, d a s s a u n d b s p i t z s i n d, g e n a u d i e s e l b e, w i e i n d e r e b e n e n G e o m e t r i e:

1. Ist $a > b$, so ist nur der in der Tafel aufgeschlagene Winkel brauchbar, dieser aber sicher.

2. Ist $a = b$, so darf α nicht stumpf sein, und es ist $\beta = \alpha$.

3. Ist $a < b$, so muss α spitz sein. Für $\sin \beta$ kann ein Wert grösser als 1, für $\log \sin \beta$ also eine positive

Grösse herauskommen. Dann existiert kein (reales) Dreieck.

Ist dagegen $\log \sin \beta$ negativ, so sind beide Werte für β brauchbar. Ist $\log \sin \beta = 0$, so ist $\beta = 90^\circ$ und es giebt nur ein Dreieck.

Aus a, b, α, β kann man c und γ mittelst der Cosinusformeln berechnen. Eliminiert man z. B. sin c aus den beiden Formeln

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha,$$
$$\cos b \sin a = \sin b \cos a \cos \gamma + \sin c \cos \beta,$$

so folgt:

$$\cos \gamma = \frac{\cos \beta \operatorname{tg} b - \cos \alpha \operatorname{tg} a}{\cos \beta \operatorname{tg} a - \cos \alpha \operatorname{tg} b},$$

und aus dem Polardreieck:

$$\cos c = -\frac{\cos b \operatorname{tg} \beta - \cos a \operatorname{tg} \alpha}{\cos b \operatorname{tg} \alpha - \cos a \operatorname{tg} \beta}.$$

Zur logarithmischen Rechnung geeignetere Formeln werden in Kapitel IX angegeben werden.

S e c h s t e r F a l l: Gegeben a, α, β.

Man kennt im Polardreieck α', a'. b' und kann daher nach dem fünften Fall β', γ' und c' berechnen. Dann ist

$$b = 180^\circ - \beta'; \quad c = 180^\circ - \gamma'; \quad \gamma = 180^\circ - c'.$$

Man kann auch in Analogie zum fünften Fall zunächst für eine bequeme Determination α und β als spitz annehmen. Sollten sie es nicht sein, so betrachte man die Nebendreiecke. In einem von ihnen sind die α und β entsprechenden Winkel beide spitz.

b ergiebt sich aus dem Sinussatz, und zwar ist

$$\log \sin b = \log \sin \beta - \log \sin \alpha + \log \sin a.$$

Von den beiden Werten für b ist nur der spitze zu gebrauchen, wenn $\alpha \gtreqqless \beta$. Ist $\alpha \lesseqqgtr \beta$, so muss a spitz sein. Ergiebt sich dann für log sin b ein negativer Wert, so sind beide Werte von b brauchbar. Wird $\sin b = 1$, so ist $b = 90^\circ$ und nur eine Lösung vorhanden. Ist endlich $\log \sin b > 0$, so giebt es kein (reelles) Dreieck. γ und c erhält man, nachdem b gefunden, wie im fünften Fall.

Achtes Kapitel.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§39. Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

Ist in einem sphärischen Dreieck $\gamma = 90^\circ$, so nennt man c die Hypotenuse, a, b die Katheten. Ist etwa noch $\alpha = 90^\circ$, so sind auch c und a Rechte nach Satz 3 des § 32, und β ist gleich b. Von diesem einfachen Fall kann im folgenden abgesehen werden.

Zur Berechnung der sphärischen rechtwinkligen Dreiecke dient folgendes Formelsystem:

Erster Fall: Gegeben c, a.

$$\left\{\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}\right\}; \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}; \quad \cos b = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

Zweiter Fall: Gegeben c, α.

$$\left\{\sin a = \sin c \sin\alpha\right\}; \quad \cot\beta = \cos c \operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos\alpha.$$

Dritter Fall: Gegeben a, b.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}; \quad \cos c = \cos a \cos b.$$

Vierter Fall: Gegeben a, α.

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}; \quad \sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}.$$

Fünfter Fall: Gegeben a, β.

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos\beta}; \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\beta \sin a; \quad \cos\alpha = \cos a \sin\beta.$$

Sechster Fall: Gegeben α, β.

$$\cos \mathrm{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}; \ \cos \mathrm{b} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}; \ \cos \mathrm{c} = \cot \alpha \cot \beta.$$

Die eingeklammerten Formeln des ersten und zweiten Falles bestimmen α bezw. a nicht eindeutig. Es gilt aber der Satz: Kathete und Gegenwinkel sind gleichzeitig spitz oder stumpf. Es ist nämlich (fünfter Fall):

$$\cos \alpha = \cos \mathrm{a} \,.\, \sin \beta$$

und da $\sin \beta$ stets positiv ist, haben $\cos \alpha$ und $\cos \mathrm{a}$ stets das gleiche Vorzeichen.

Die vorstehenden Formeln erhält man sämtlich aus den Fundamentalgleichungen des allgemeinen Dreiecks durch die Specialisierung

$$\sin \gamma = 1, \quad \cos \gamma = 0.$$

Aus der dritten Formel des Cosinussatzes wird

$$\cos \mathrm{c} = \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{b},$$

aus dem Sinussatz:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \mathrm{a}}{\sin \mathrm{c}}, \ \sin \beta = \frac{\sin \mathrm{b}}{\sin \mathrm{c}}$$

und aus den Cosinusformeln:

$$\cos \alpha = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{b}}{\mathrm{tg}\, \mathrm{c}}, \ \cos \beta = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{a}}{\mathrm{tg}\, \mathrm{c}}.$$

Aus diesen fünf Gleichungen kann man alle anderen herleiten. Es wird z. B.

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \mathrm{a}}{\mathrm{tg}\, \mathrm{b}} \cdot \frac{1}{\cos \mathrm{c}} = \frac{\sin \mathrm{a}}{\mathrm{tg}\, \mathrm{b}} \cdot \frac{1}{\cos \mathrm{a} \cos \mathrm{b}} = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{a}}{\sin \mathrm{b}}; \ \mathrm{tg}\, \beta = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{b}}{\sin \mathrm{a}}.$$

Hiermit sind schon alle Beziehungen zwischen zwei Seiten und einem Winkel, sowie zwischen drei Seiten erschöpft. Man erhält noch

$$\cos \alpha = \frac{\sin \mathrm{b}}{\sin \mathrm{c}} \cdot \frac{\cos \mathrm{c}}{\cos \mathrm{b}} = \sin \beta \cos \mathrm{a}; \ \cos \beta = \sin \alpha \cos \mathrm{b},$$

und durch Multiplikation:

$$\cot\alpha \cot\beta = \cos a \cos b = \cos c.$$

In allen Fällen, mit Ausnahme des vierten, ist das rechtwinklige Dreieck eindeutig bestimmt. Denn ausser in den eingeklammerten Formeln des ersten und zweiten Falles treten nur die Cosinus, Tangenten und Cotangenten der gesuchten Stücke auf, und diese Funktionen bestimmen ihre Winkel zwischen 0^0 und 180^0 eindeutig; sie sind für spitze Winkel positiv, für stumpfe negativ. Dass von den zu den eingeklammerten Sinus gehörigen Werten immer nur einer brauchbar ist, war schon gezeigt.

Im vierten Falle giebt es zwei Dreiecke, da zu jedem der Sinus zwei Werte gehören. In der That hat eines der Nebendreiecke — dasjenige, welches an BC anstösst — die Seite a und α und einen rechten Winkel, genügt also auch den gestellten Anforderungen. Die beiden Lösungen sind aber nur brauchbar, wenn a und α gleichzeitig spitz oder stumpf sind, sonst sind beide unbrauchbar. — Die Zusammengehörigkeit der Werte für c, b und β ergiebt sich folgendermassen: Zu dem spitzen Wert von b gehört der spitze von β, zu dem stumpfen Wert von b der stumpfe von β. Infolge der Gleichung

$$\cos c = \cos a \cos b$$

ist cos c negativ, also c stumpf, wenn von den Stücken a und b eins spitz und eins stumpf ist; dagegen ist cos c positiv, also c spitz, wenn a und b gleichzeitig spitz oder stumpf sind.

Hiermit sind die Bedingungen für die Lösbarkeit der Aufgaben noch nicht erschöpft. Im ersten, vierten und sechsten Fall müssen noch die Werte, die man für die Funktionen der gesuchten Stücke erhält, echte Brüche sein.

Im ersten Fall erhält man die Bedingungen

$$\sin a < \sin c,$$

positiver Wert von $\operatorname{tg} a <$ positiver Wert von $\operatorname{tg} c$,

„ „ „ $\cos a >$ „ „ „ $\cos c$.

Es genügt, wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist. Die anderen stimmen dann auch. Man braucht auch nicht die Funktionen der Winkel selbst nachzuschlagen, da man von der Grösse der Winkel auf die der Sinus schliessen kann: Von zwei Winkeln hat der den grösseren Sinus, der näher an 90° liegt (Fig. 5).

Es giebt also folgende 4 Möglichkeiten:

	c spitz	c stumpf
a spitz	Es muss $c > a$ sein	Es muss $a + c < 180°$ sein
a stumpf	Es muss $a + c > 180°$ sein	Es muss $c < a$ sein

Im vierten Fall sind die Bedingungen dieselben, wie in dem eben besprochenen, wenn man nur α statt c schreibt: Da aber α und a stets gleichzeitig spitz oder stumpf sind, folgt einfacher:

a und α spitz: $\alpha > a$,

a und α stumpf: $\alpha < a$.

Im sechsten Fall ist zur Lösbarkeit notwendig:

positiver Wert von $\cos\alpha < \sin\beta$

„ „ „ $\cos\beta < \sin\alpha$

„ „ „ $\cot\alpha . \cot\beta < 1$.

Auch hier zieht das Erfülltsein einer Bedingung das der anderen nach sich. Für die Winkel gilt:

1. β spitz: $90° - \beta < \alpha < 90° + \beta$;
2. β stumpf: $\beta - 90° < \alpha < 270° - \beta$.

Im zweiten, dritten und fünften Fall dürfen die gegebenen Stücke zwischen 0° und 180° beliebige Werte haben.

§ 40. Die Napier'sche Regel.

Die Gleichungen des rechtwinkligen Dreiecks lassen sich in eine einfache von Napier gegebene Regel zusammenfassen. Es seien a^* und b^* die Komplemente der Katheten a und b. Dann folgen am Dreieck die Stücke in dieser Reihenfolge aufeinander:

$$b^*, \alpha, c, \beta, a^*, b^*, \ldots$$

Von diesen fünf ist der Cosinus eines jeden gleich dem Produkt aus den Cotangenten der beiden ihm benachbarten und auch gleich dem der Sinus der beiden von ihm getrennten Stücke.

Diese Regel enthält alle Beziehungen, die zwischen irgend drei Stücken bestehen. Denn drei Stücke liegen entweder aneinander (wie a, c, β), oder es liegen zwei aneinander, das dritte von ihnen getrennt (wie α, c, a^*). Man überzeuge sich an den Formeln des vorigen Paragraphen, dass die Regel in jedem Einzelfalle zutrifft.

Die Napier'sche Regel handelt nur von der Aufeinanderfolge der Stücke, nicht aber davon, welches der Stücke Hypotenuse, welches Kathete, welches Winkel ist; andererseits enthält sie alle notwendigen Bedingungen dafür, dass die fünf Stücke einem rechtwinkligen Dreiecke angehören. Daraus folgt, dass man die Bedeutung der fünf Stücke unter Beibehaltung der Reihenfolge abändern darf, und dass die so vertauschten Stücke wieder ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Z. B. giebt es ein rechtwinkliges Dreieck mit den Stücken

$$a = 73^\circ\, 53'\, 38'',\quad b = 39^\circ\, 57'\, 4'',\quad c = 77^\circ\, 43'\, 18''$$
$$\alpha = 79^\circ\, 29'\, 45'',\quad \beta = 41'\, 5'\, 6''.$$

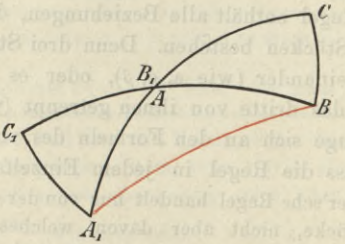
Es ist also

$b^* =$	$\alpha =$	$c =$	$\beta =$	$\alpha^* =$
50° 2′56″	79°29′45″	77°43′18″	41° 5′ 6″	16° 6′22″

und es giebt noch vier Dreiecke mit den Stücken

79°29′45″	77°43′18″	41° 5′ 6″	16° 6′22″	50° 2′56″
77°43′18″	41° 5′ 6″	16° 6′22″	50° 2′56″	79°29′45″
41° 5′ 6″	16° 6′22″	50° 2′56″	79°29′45″	77°43′18″
16° 6′22″	50° 2′56″	79°29′45″	77°43′18″	41° 5′ 6″

Dies ist auch geometrisch leicht einzusehen. Trägt man von C und B auf CA und CB und (event.) ihren Verlängerungen



Figur 49.

über A und B hinaus $CA_1 = 90°$, $BC_1 = 90°$ ab, so ist in dem bei C rechtwinkligen Dreieck A_1CB die Kathete A_1C ein Quadrant (90°), also der Winkel bei B ein rechter und A_1B ein Quadrant. In dem Dreieck C_1A_1B sind also C_1B und A_1B Quadranten, mithin die Winkel bei A_1 und C_1 rechte. Nennt man den Punkt A als zu dem Dreieck C_1A_1A gehörig noch nebenbei B_1, so ist in dem bei C_1 rechtwinkligen Dreieck $A_1B_1C_1$:

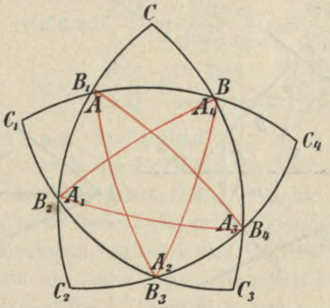
$$\begin{array}{llll}
a_1 = C_1 B_1 & = 90^0 - c, & \text{d. h.} & a_1^* = c, \\
c_1 = B_1 A_1 & = 90^0 - b, & \text{,,} & c_1 = b^*, \\
b_1 = C_1 A_1 = \sphericalangle A_1 B C_1 & = 90^0 - \beta, & \text{,,} & b_1^* = \beta, \\
\alpha_1 = 90^0 - \sphericalangle C A_1 B & = 90^0 - a, & \text{,,} & \alpha_1 = a^*, \\
\beta_1 = \alpha, & & \text{,,} & \beta_1 = \alpha.
\end{array}$$

Setzt man an das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in der gleichen Weise durch Verlängerung von $C_1 A_1$ und $B_1 A_1$ bis auf 90^0 ein Dreieck $A_2 B_2 C_2$ an, so ist in diesem analog

$$\begin{array}{ll}
a_2^* = c_1 \ = b^*, & \alpha_2 = a_1^* = c \\
c_2 = b_1^* = \beta, & \beta_2 = \alpha_1 \ = a^* \\
b_2^* = \beta_1 \ = \alpha. &
\end{array}$$

Man erhält im ganzen folgende Uebersicht:

$b^* =$	$\alpha =$	$c =$	$\beta =$	$a^* =$
c_1	β_1	a_1^*	b_1^*	α_1
a_2^*	b_2^*	α_2	c_2	β_2
α_3	c_3	β_3	a_3^*	b_3^*
β_4	a_4^*	b_4^*	α_4	c_4
b_5^*	α_5	c_5	β_5	a_5^*



Figur 50.

Aus den beiden Formeln

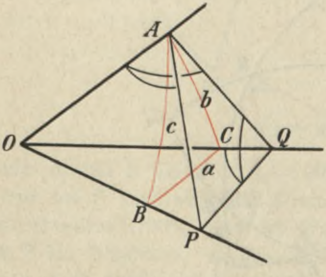
$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta = \sin a^* \sin b^*$$

ergeben sich durch Anwendung auf die fünf Dreiecke alle anderen Relationen zwischen den Stücken c, α, β, a*, b*.

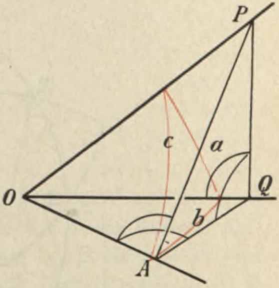
Das fünfte Dreieck stimmt mit dem ersten in allen Stücken wieder überein. Bei der Konstruktion erhält man auch der Lage nach das alte Dreieck zurück, wie leicht zu beweisen ist. Die Figur der fünf Napier'schen Dreiecke besitzt interessante Eigenschaften. In dem Fünfeck C, C_1, C_2, C_3, C_4 sind die Seiten, in dem Fünfeck A, A_1, A_2, A_3, A_4 die Diagonalen alle gleich 90°. Der Leser versuche zur Uebung diese Sätze zu beweisen.

§ 41. Geometrischer Beweis der Fundamentalformeln des rechtwinkligen Dreiecks.

Zieht man wie in § 33 an b und c die Tangenten und nimmt zunächst an, dass b und c spitz sind, so schneiden die Tangenten die verlängerten Radien von C und B in Q und P. Die Ebene des Dreiecks APQ steht aber senkrecht auf OA, also auch auf der Ebene



Figur 51.



Figur 51 a.

OAQ. Da das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist, steht auch die Ebene OPQ auf OAQ senkrecht, demnach auch die Schnittlinie PQ von APQ und OPQ. Daher sind die Winkel OQP und AQP rechte.

In den beiden bei A rechtwinkligen Dreiecken OAP und OAQ ist aber (wie in § 33)

$$\mathrm{OP} = \mathrm{R} : \cos \mathrm{c}, \qquad \mathrm{OQ} = \mathrm{R} : \cos \mathrm{b}$$
$$\mathrm{AP} = \mathrm{R} \,.\, \mathrm{tg}\, \mathrm{c}, \qquad \mathrm{AQ} = \mathrm{R} \,.\, \mathrm{tg}\, \mathrm{b}.$$

In dem bei Q rechtwinkligen Dreieck OPQ hat man daher:

$$\cos \mathrm{POQ} = \cos \mathrm{a} = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \frac{\cos \mathrm{c}}{\cos \mathrm{b}},$$

ferner
$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OQ}\; \mathrm{tg}\, \mathrm{a} = \frac{\mathrm{R}\, \mathrm{tg}\, \mathrm{a}}{\cos \mathrm{b}},$$
$$= \mathrm{OP} \sin \mathrm{a} = \frac{\mathrm{R} \sin \mathrm{a}}{\cos \mathrm{c}}.$$

In dem bei Q rechtwinkligen Dreieck APQ ist $\sphericalangle \mathrm{PAQ} = \alpha$, also

$$\cos \alpha = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{b}}{\mathrm{tg}\, \mathrm{c}},$$
$$\sin \alpha = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AP}} = \frac{\sin \mathrm{a}}{\cos \mathrm{c}\; \mathrm{tg}\, \mathrm{c}} = \frac{\sin \mathrm{a}}{\sin \mathrm{c}},$$
$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AQ}} = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{a}}{\cos \mathrm{b}\; \mathrm{tg}\, \mathrm{b}} = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{a}}{\sin \mathrm{b}}.$$

Anmerkung. Da irgend ein zu APQ paralleler Schnitt A'P'Q' durch die Ecke an den Seitenverhältnissen und Winkeln des Tetraeders OAPQ nichts ändert, hätte man auch, wie es in vielen Lehrbüchern geschieht, P' irgendwo auf OB annehmen, auf OA und OC die Lote P'A' und P'Q' fällen und an dieser Figur dieselben Schlüsse ziehen können. Vielfach wird P' nach B gelegt. — Die Verallgemeinerung der Formeln auf Dreiecke, in denen b und c nicht spitz sind, ergiebt sich leicht durch Betrachtung der Nebendreiecke.

§ 42. Das Quadrantendreieck.

Wenn in einem Dreieck eine Seite ein Rechter ist, so nennt man es ein Quadrantendreieck oder rechtseitiges Dreieck. Das Polardreieck eines Quadrantendreiecks ist rechtwinklig. Man kann also die Auflösung des Quadrantendreiecks auf die des rechtwinkligen zurückführen.

Ist c diejenige Seite, welche gleich 90° ist, so lautet die Napier'sche Regel des Quadrantendreiecks:

Sind α^* und β^* die um 180° vergrösserten Komplemente von α und β, so ist der Cosinus eines jeden der Stücke

$$\beta^*,\ a,\ \gamma,\ b,\ \alpha^*,\ \beta^* \ldots$$

entgegengesetzt gleich dem Produkt aus den Cotangenten der anliegenden und auch dem aus den Sinus der von ihm getrennt liegenden Stücke.

Durch diese Regel gehören wieder je 5 Dreiecke zusammen, z. B. $A A_1 A_2$; $A_1 A_2 A_3$; $A_2 A_3 A_4$; $A_3 A_4 A$; $A_4 A A_1$ in Fig. 50.

§ 43. Das schiefwinklige Dreieck im Zusammenhang mit dem rechtwinkligen.

1. Fällt man das sphärische Lot $h_c = C H_c$ von C auf a in dem schiefwinkligen Dreieck ABC, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken $A C H_c$ und $B C H_c$:

$$\sin h_c = \sin \alpha \sin \beta = \sin b \sin \alpha,$$

oder

$$\sin \alpha : \sin \beta = \sin a : \sin b.$$

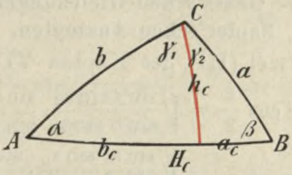
Dies ist der Sinussatz.

2. Ferner ist für $A H_c = b_c$, $B H_c = a_c$

$$\cos h_c = \frac{\cos b}{\cos b_c} = \frac{\cos a}{\cos a_c}.$$

Da $a_c + b_c = c$, folgt weiter

$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c - b_c)}{\cos b_c}$$
$$= \cos b \cos c + \cos b \sin c \operatorname{tg} b_c.$$



Figur 52.

Da $\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b_c}{\operatorname{tg} b}$, wird $\operatorname{tg} b_c = \operatorname{tg} b \cos \alpha$, also

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Dies ist der erste Cosinussatz.

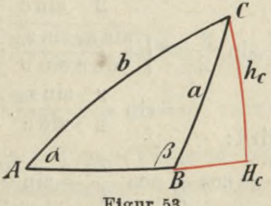
3. Setzt man $\sphericalangle ACH_c = \gamma_1$, $\sphericalangle BCH_c = \gamma_2$, so ist $\cos \beta = \cos h_c \sin \gamma_2$, $\cos \alpha = \cos h_c \sin \gamma_1$, also

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin (\gamma - \gamma_2)}{\sin \gamma_2} = \sin \gamma \cot \gamma_2 - \cos \gamma.$$

Da $\cot \gamma_2 \cot \beta = \cos a$, wird mithin

$$\cos \alpha = \sin \gamma \sin \beta \cos a - \cos \beta \cos \gamma.$$

Dies ist der zweite Cosinussatz. Wenn etwa α oder β stumpf ist und h_c ausserhalb des Dreiecks



Figur 53.

liegt, ist der Beweis leicht entsprechend zu modifizieren.

Neuntes Kapitel.

Weiteres Formelmaterial für das sphärische Dreieck.

§ 44. Die Gauss'schen Gleichungen und die Napier'schen Analogien.

Nach Formel (III) des Kapitel VII ist

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin s_a}{\sin b\sin c}\cdot\frac{\sin s\sin s_b}{\sin a\sin c}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sin s_a\sin s_b}{\sin a\sin b}}\cdot\frac{\sin s}{\sin c}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist positiv. Denn die halben Winkel sind spitz, also ihre Cosinus und damit die linke Seite positiv; $s, s_a, s_b, s_c,$ a, b, c sind kleiner als 180°, also ihre Sinus ebenfalls positiv.

Nach Formel (III) ist aber die Wurzelgrösse gleich $\sin\frac{\gamma}{2}$, mithin

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin s}{\sin c}. \tag{I}$$

Ebenso findet man:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin s_c}{\sin a\sin b}}\cdot\frac{\sin s_a}{\sin c}$$
$$=\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin s_a}{\sin c} \tag{II}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s_a\sin s_b}{\sin a\sin b}}\cdot\frac{\sin s_c}{\sin c}$$
$$=\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin s_c}{\sin c}. \tag{III}$$

Hiernach wird:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$
$$=\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin s-\sin s_c}{\sin c}.$$

Beachtet man, dass $s - s_c = c$, $s + s_c = a + b$ ist, so folgt weiter:

$$\cos\frac{\alpha +}{2} = \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

oder:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{a+b}{2} : \cos\frac{c}{2}.$$

Genau analog erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\frac{a+b}{2} : \sin\frac{c}{2},\\
\sin\frac{\alpha+\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{c}{2},\\
\sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} &= \sin\frac{a-b}{2} : \sin\frac{c}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(IV)}$$

Dies sind die sogenannten Gauss'schen Gleichungen.

Durch Division der ersten und dritten, zweiten und vierten erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{a+b}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} : \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= \sin\frac{a-b}{2} : \sin\frac{a+b}{2},
\end{aligned}\right\}\quad \text{(V)}$$

und durch Division der ersten und zweiten, dritten und vierten:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} : \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} : \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(VI)}$$

Die Formeln (V) und (VI) sind die Napier'schen Analogien. Bemerkenswert ist, dass man aus diesen Formeln durch Uebergang auf die Nebendreiecke oder das Polardreieck keine neuen Relationen erhält.

§ 45. Formeln für $s, s_a, \sigma, \sigma_\alpha, \varrho, \varrho_a, r, r_a$.

Setzt man in (I) $\sin c = M \sin\gamma$, so wird daraus

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.\,\sin s\,.\,\frac{1}{2\,M\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

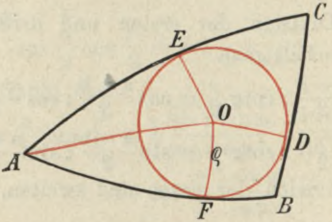
oder
$$\sin s = 2\,M\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(VII)}$$

Ebenso erhält man aus (II) und (III):

$$\sin s_a = 2\,M\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(VII)}$$

Diese Formel entspricht den Gleichungen (VI) in Kapitel IV. Durch Uebergang auf das Polardreieck erhält man für $M' = 1 : M$:

$$\left.\begin{aligned} -\cos\sigma &= 2\,M'\,.\,\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}, \\ \cos\sigma_\alpha &= 2\,M'\,.\,\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}$$



Figur 54.

Aehnliche Beziehungen entstehen durch Betrachtung des Inkreises. Berührt er die Seiten a, b, c in D, E, F, so ist

$$\begin{aligned} AE &= AF = x, & x + y &= c, \\ BF &= BD = y, & y + z &= a, \\ CD &= CE = z, & z + x &= b, \end{aligned}$$

also $x = s_a,\ y = s_b,\ z = s_c$.

In dem rechtwinkligen Dreieck AOF ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\varrho : \sin s_a,$$

also nach (IV), Kap. VII:

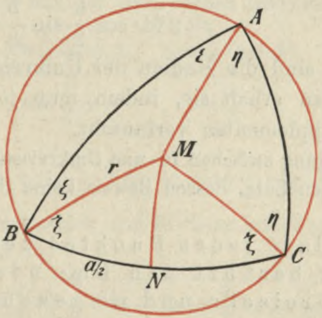
$$\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin s_a \sin s_b \sin s_c}{\sin s}} = k \text{ (§ 34, Anm.).} \qquad \text{(IX)}$$

Ganz analog wird für die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der Ankreise, die die Inkreise der Nebendreiecke sind:

$$\operatorname{tg}\varrho_a = \sqrt{\frac{\sin s \sin s_b \sin s_c}{\sin s_a}}. \qquad \text{(X)}$$

Mit (VII) wird noch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varrho &= \sin s_a \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\,M \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \\ \operatorname{tg}\varrho_a &= 2\,M \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI)}$$



Figur 55.

Ist r der Radius des Umkreises, M sein Centrum, und liegt dies im Innern des Dreiecks, so ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle MAB &= \sphericalangle MBA = \zeta, \qquad & \xi + \eta &= \gamma \\ \sphericalangle MBC &= \sphericalangle MCB = \xi, & \eta + \zeta &= \alpha \\ \sphericalangle MCA &= \sphericalangle MAC = \eta, & \zeta + \xi &= \beta \end{aligned}$$

$$\text{also } \xi = \sigma_\alpha, \ \eta = \sigma_\beta, \ \zeta = \sigma_\gamma.$$

Liegt der Mittelpunkt ausserhalb des Dreiecks, so erhält man für einen der Winkel ξ, η, ζ den entgegengesetzten Wert, $-\sigma_\alpha$, $-\sigma_\beta$ oder $-\sigma_\gamma$.

Fällt man von M das Lot MN auf BC, so ist im Dreieck BMN:

$$\cos \sphericalangle \mathrm{NBM} = \mathrm{tg}\,\frac{a}{2} : \mathrm{tg}\, r, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{cotg\, r = cotg\, \frac{a}{2} \cdot \cos \sigma_\alpha,}$$

und nach (X), Kap. VII:

$$\mathbf{cotg\, r} = \sqrt{\frac{\cos \sigma_\alpha \cos \sigma_\beta \cos \sigma_\gamma}{-\cos \sigma}}. \qquad \text{(XII)}$$

Nach (VIII) dieses Kapitels erhält man noch

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{cotg}\, r = \mathrm{cotg}\frac{a}{2} \cdot \cos \sigma_\alpha &= 2\, M' \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}, \\ \mathrm{cotg}\, r_a \qquad &= 2\, M' \cos\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}. \end{aligned}\right\} \text{(XIII)}$$

r_a, r_b, r_c sind die Radien der Umkreise der Nebendreiecke. Man erhält sie, indem man je zwei Seiten mit ihren Supplementen vertauscht.

Die Beziehung zwischen In- und Umkreisen wird erläutert durch folgenden Satz, dessen Beweis keine Schwierigkeiten bietet:

Die Polare jedes Punktes des In- oder Umkreises berührt den Um- oder Inkreis des Polardreiecks und umgekehrt.

§ 46. Die L'Huilier'schen Formeln.

Schreibt man die dritte Gaussische Formel folgendermassen:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2} c},$$

so wird

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\sin\frac{1}{2}(180^\circ-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\sin\frac{1}{2}(180^\circ-\gamma)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c}$$

und nach § 20, (XVI) und $(XVI,_1)$:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+180^\circ)}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_a\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_b.$$

Nun ist $\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=\varepsilon$ der sphärische Exzess und

$$\alpha+\beta-\gamma+180^\circ=360^\circ-(2\gamma-\varepsilon),$$

und die letzte Formel geht über in

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{tg}\frac{1}{4}(2\gamma-\varepsilon)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_a\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_b.$$

Ebenso wird aus der Gaussischen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

abgeleitet:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon\,.\operatorname{cotg}\frac{1}{4}(2\gamma-\varepsilon)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_c.$$

Durch Multiplication und Division erhält man aus diesen beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon&=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_a\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_b\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_c}\\ \operatorname{tg}\frac{1}{4}(2\gamma-\varepsilon)&=\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s_c\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_a\operatorname{tg}\frac{1}{2}s_b}\end{aligned}\right\}\text{(XIV)}$$

Dies sind die L'Huilierschen Gleichungen. Geht man zum Polardreieck über, so ist für ε $360-(a+b+c)=d$ zu setzen; $2\gamma-\varepsilon$ geht über in $a+b-c=2s_c$; s in $(270^\circ-\sigma)$, s_a in $(90^\circ-\sigma_\alpha)$. Dadurch erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{d}{4} = \tag{XV}$$

$$\sqrt{-\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma_\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma_\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma_\gamma}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{s_c}{4} = \tag{XV}$$

$$\sqrt{-\cot\left(45^\circ + \frac{\sigma}{2}\right)\cot\left(45^\circ - \frac{\sigma_\gamma}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma_\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\sigma_\beta}{2}\right)}$$

Man kann in diese Formeln sehr viel mehr Symmetrie bringen. ε ist der sogenannte sphärische Excess, d der sphärische Defekt des Dreiecks. Das an B C anliegende Nebendreieck hat den sphärischen Excess

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma + \alpha - 180^\circ \\ &= 2\alpha - \varepsilon,\end{aligned}$$

und den sphärischen Defekt

$$\begin{aligned}d_a &= -180^\circ + b - 180^\circ + c - a + 360^\circ \\ &= 2\,s_a.\end{aligned}$$

Ferner ist
$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2\sigma - 180^\circ \\ \varepsilon_\alpha &= 180^\circ - 2\sigma_\alpha \\ d &= 360 - 2s.\end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \tau,\ \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_\alpha}{4} = \tau_\alpha,\ \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_\beta}{4} = \tau_\beta,\ \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_\gamma}{4} = \tau_\gamma$$

$$\operatorname{tg}\frac{d}{4} = t,\ \operatorname{tg}\frac{d_a}{4} = t_a,\ \operatorname{tg}\frac{d_b}{4} = t_b,\ \operatorname{tg}\frac{d_c}{4} = t_c,$$

so erhält man statt der Formeln (XIV), (XV):

$$\left.\begin{aligned}\tau &= \sqrt{\frac{t_a\, t_b\, t_c}{t}}; \quad t = \sqrt{\frac{\tau_\alpha\, \tau_\beta\, \tau_\gamma}{\tau}} \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\frac{t\, t_b t_c}{t_a}}; \quad t_a = \sqrt{\frac{\tau\, \tau_\beta\, \tau_\gamma}{\tau_\alpha}}\end{aligned}\right\} \tag{XVI}$$

Diese Formeln können auch zur Berechnung des Dreiecks aus den Seiten oder Winkeln dienen. Denn es ist

$$\alpha = \frac{\varepsilon + \varepsilon_\alpha}{2}; \; a = 180^\circ - \frac{d + d_a}{2}.$$

§ 47. Logarithmische Rechnung zum Auflösen der Dreiecke.

In § 38 konnten nur zur Berechnung des Dreiecks aus 3 Seiten oder 3 Winkeln durchgehende logarithmische Rechnungen angegeben werden. Die Gauss'schen Formeln und Napier'schen Analogien gestatten, auch die Fälle 3 bis 6 logarithmisch zu erledigen.

Dritter Fall: Gegeben a, b, γ.

Nach (V) dieses Kapitels erhält man $\frac{\alpha - \beta}{2}$ und $\frac{\alpha + \beta}{2}$, daraus α, β. c findet man nach dem Sinussatz oder nach irgend einer der Gauss'schen Formeln oder nach (VI) dieses Kapitels.

Vierter Fall: Gegeben α, β, c.

Man erhält $\frac{a - b}{2}$, $\frac{a + b}{2}$ nach (VI) dieses Kapitels danach γ aus dem Sinussatz, den Gauss'schen Formeln oder (V) dieses Kapitels.

Fünfter Fall: Gegeben a, b, α.

Man findet β nach der ausführlichen Anleitung in § 38. c ergiebt sich aus einer der Analogien (VI), γ aus einer der beiden anderen oder unter Verwendung von c aus dem Sinussatz oder einer Gauss'schen Formel.

Sechster Fall. Gegeben α, β, a.

Nachdem b bestimmt ist, verfährt man genau wie im fünften Fall.

Dritter Teil.

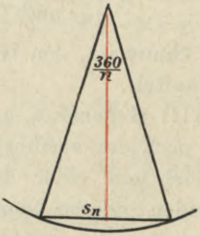
Berechnung und algebraische Anwendung der trigonometrischen Funktionen.

Zehntes Kapitel.

Elementare Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

§ 48. Die regulären Polygone.

Im regulären n-Eck ist der einer Seite gegenüberliegende Winkel $\frac{360^0}{n}$. Fällt man auf eine Seite AB des n-Ecks das Lot OP vom Mittelpunkt aus, so ist $\sphericalangle AOP = \frac{1}{2}\frac{360^0}{n} = \frac{180^0}{n}$ und $\sin\frac{180^0}{n} = \frac{AP}{OA} = \frac{1}{2}\frac{s_n}{r}$, wenn s_n die Seite des dem Kreise vom Radius r einbeschriebenen regulären n-Ecks ist.



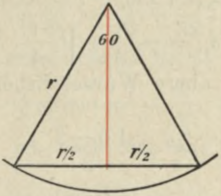
Figur 56.

1. Im Sechseck ist $s_6 = r$, also

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}50000.$$

Nach der Formel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ergiebt sich

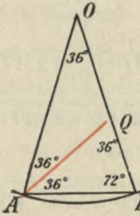
$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86603.$$



Figur 57.

Hieraus erhält man nach § 20 die Funktionen von 15^0 und aus den Additionstheoremen die aller Vielfachen von 15^0.

2. Im regulären Zehneck ist $\sphericalangle\, AOB = 36^0$, folglich $\sphericalangle\, OBA = \sphericalangle\, OAB = 72^0$. Halbiert man $\sphericalangle\, OBA$ und verlängert die Winkelhalbierende bis zum Schnitt mit OA in Q, so sind die Dreiecke OBQ und BQA gleichschenklig. Es wird nämlich



Figur 58.

$$\sphericalangle\, QAB = \sphericalangle\, AQB = 72^0$$

und

$$\sphericalangle\, OBQ = \sphericalangle\, BOQ = 36^0,$$

also

$$s_{10} = AB = BQ = QP.$$

Da $\triangle ABQ \sim BOA$, wird

$$\frac{AB}{AQ} = \frac{BO}{BA}, \text{ d. h. } \frac{s_{10}}{r - s_{10}} = \frac{r}{s_{10}},$$

oder

$$s_{10}^2 + r s_{10} + r^2 = 0,$$

$$s_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{5 r^2}{4}}.$$

Da nur das obere Wurzelzeichen brauchbar ist, hat man

$$\frac{s_{10}}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

und

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0{,}30902.$$

Hieraus erhält man $\cos 18^0$; nach dem Additionstheorem ferner die Funktionen von $18^0 - 15^0 = 3^0$ und aller Vielfachen von 3^0. Sie sind am Schlusse des Buches in einer Tabelle zusammengestellt.

Die Funktionen von 1^0 und seiner Vielfachen, die nicht durch 3 teilbar sind, lassen sich nicht durch rationale Zahlen und Quadratwurzeln aus solchen darstellen. Dagegen kann man die Seite des Siebzehnecks durch quadratische Gleichungen finden. Für $\cos \frac{360^0}{17}$ ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{1}{16}(\sqrt{17} - 1) + \frac{1}{16}\sqrt{2 . 17 - 2\sqrt{17}}$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2 . 17 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{2 . 17 + 2\sqrt{17}}}$$

(Gauss, Disq. ar., 365.)

§ 49. Funktionen sehr kleiner Winkel.

1. Wenn man die Funktionen von 1^0 auch nicht durch quadratische Gleichungen finden kann, so kann man sie doch näherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnen. Aus dem Sinus und Co-

sinus von 3^0 erhält man nach § 20 die von $\frac{3^0}{2}, \frac{3^0}{4}, \frac{3^0}{8}$ u. s. w. Betrachten wir jetzt die Reihe:

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + \frac{3}{32} - + \ldots$$

Sie ist eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{3}{2}$ und dem Quotienten $-\frac{1}{2}$. Die Summe ihrer m ersten Glieder ist nach der aus der Algebra bekannten Formel

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m.$$

Ist m eine gerade Zahl, so ist $\left(-\frac{1}{2}\right)^m$ positiv, also die Summe kleiner als 1; ist m ungerade, so ist sie grösser als 1. Mit wachsendem m nähert sie sich der 1 beliebig.

Da wir die Funktionen von $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ u. s. w. berechnen können, können wir auch die von $1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^m$ für beliebiges m berechnen. Mit wachsendem m werden sich die ersten Decimalstellen nicht mehr ändern; die Aenderung wird sich immer später und später bemerkbar machen, so dass wir die Funktionen von 1^0 auf beliebig viele Decimalen ermitteln können. Wir erhalten z. B.

$$\sin\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right] = 0{,}01744445 \ldots$$

$$\sin\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}\right] = 0{,}01745638 \ldots$$

so dass $\sin 1^0$ sicher mit 0,0174 beginnt. Durch Interpolation zwischen beiden Grenzen erhält man:

Zuwachs auf $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$:

1193 Einheiten der letzten Stelle,

also auf $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ 398 " " " ":

$$\begin{array}{r} 0{,}01745638 \\ -\qquad 398 \\ \hline \sin 1^0 = 0{,}01745240. \end{array}$$

Dies Resultat ist auf 7 Stellen genau.

2. Ein einfacheres Verfahren kann man für sehr kleine Winkel anwenden, bei denen der Sinus näherungsweise mit dem Arcus übereinstimmt. Es ist für solche

$$\sin\alpha < \operatorname{arc}\alpha.$$

Demnach auch $\sin\frac{\alpha}{2} < \operatorname{arc}\frac{\alpha}{2}$

$$< \frac{1}{2}\operatorname{arc}\alpha$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} > 1 - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^2}{2}.$$

Sodann ist

$$\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{arc}\alpha, \text{ also}$$

$$\sin\alpha > \cos\alpha \,.\, \operatorname{arc}\alpha$$

$$> \operatorname{arc}\alpha - \frac{(\operatorname{arc}\alpha)^3}{2}.$$

Es ist z. B. $\operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533\ldots$

$$\frac{(\operatorname{arc} 1^0)^3}{2} \qquad = 0{,}0000026583\ldots,$$

also liegt $\sin 1^0$ zwischen $0{,}017453\ldots$ und $0{,}017450\ldots$

Ferner ist arc $1' = 0{,}00029089$.

$\frac{(\text{arc } 1')^3}{2}$ beginnt mit 11 Nullen, also ist vorstehender Wert in allen Stellen mit $\sin 1'$ übereinstimmend.

3. Von den Funktionen sehr kleiner Winkel aus kann man diejenigen grösserer Winkel mittelst der Additionstheoreme berechnen, z. B. aus den von 3 zu 3^0 berechneten mit Hilfe des Sinus und Cosinus von 1^0 die Funktionen aller Vielfachen von 1^0. Praktische Bedeutung hat diese Methode nicht mehr. Die höhere Mathematik giebt uns in den Reihenentwicklungen Hilfsmittel zur sofortigen Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen und der Funktionen selbst, die von hervorragender Einfachheit sind.

Elftes Kapitel.

Der Moivre'sche Satz.

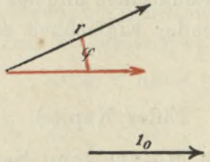
§ 50. Begriff des Vektors.

Es kommt in der Geometrie und Physik häufig vor, dass man ausser der Länge einer Strecke auch ihre Richtung in Betracht ziehen muss. Man hat für den Inbegriff einer Strecke und ihrer Richtung die Bezeichnung „Vektor" eingeführt. Zur Angabe eines Vektors gehören also mehrere Grössen. Erstens seine Länge. Diese ist immer eine absolute (positive) Zahl. Zweitens die nötigen Bestimmungsstücke für seine Richtung.

Die beiden Enden des Vektors müssen als Anfangs- und Endpunkt unterschieden werden. Die

Richtung des Vektors ist die vom Anfangs- zum Endpunkt. Ein und dieselbe Strecke kann zwei verschiedene Vektoren darstellen, die gleich lang und einander entgegengesetzt gerichtet sind. Man nennt solche Vektoren „entgegengesetzt gleich". Wenn eine Strecke die Länge Null hat, ist ihre Richtung unbestimmt. Man bezeichnet daher alle Vektoren von der Länge Null schlechthin mit 0.

Im folgenden beschränken wir uns auf Vektoren, die in einer Ebene liegen. Zu ihrer Bestimmung denken wir uns einen ganz beliebigen herausgegriffen und als „Einheitsvektor" oder



Figur 59.

„Einheit" schlechthin bezeichnet. Seine Länge wählen wir als Masseinheit, seine Richtung als Nullrichtung. Irgend ein anderer Vektor hat dann die Länge r und bildet mit dem Einheitsvektor den Winkel φ, den wir entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers messen. Diesen Vektor bezeichnen wir mit r_φ, den Einheitsvektor also mit 1_0.

Man nennt zwei Vektoren gleich, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen. Soll r_φ gleich s_ψ sein, so muss also

$$r = s, \quad \varphi = \psi + k \cdot 360^\circ$$

sein, wobei k eine beliebige ganze Zahl, positiv oder negativ, ist. An Stelle beider Gleichungen schreiben wir abkürzungsweise

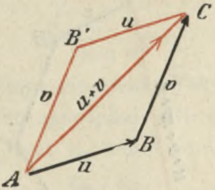
$$r_\varphi = s_\psi.$$

Eine Verwechslung mit dem Gleichheitsbegriff der Zahlen ist dadurch ausgeschlossen, dass r_φ und s_ψ keine Zahlen sind.

Man kann einen Vektor auch mit einem einzelnen Buchstaben, u, v, w, z, bezeichnen, und muss sich nur gegenwärtig halten, dass dieser Buchstabe nicht eine Zahl, vielmehr das Aggregat zweier Zahlen, r und φ, bedeutet.

§ 51. Addition von Vektoren.

Es seien jetzt AB und BC zwei beliebige Vektoren, u und v. Der zweite ist mit seinem Anfangspunkt an den Endpunkt des ersten angesetzt. Dann nennt man



Figur 60.

den Vektor mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt C die Summe der beiden anderen und bezeichnet ihn mit u + v. Eine Verwechslung mit dem gewöhnlichen Summenbegriff der Zahlen ist ausgeschlossen, da ja u und v keine Zahlen sind.

Ist AB′ gleich und parallel BC, so ist B′C gleich und parallel AB; daher ist AB′ wieder v und B′C u. Bei dieser Lage der Vektoren ist AC gleich v + u; man darf also die Summanden vertauschen.

Sind AB, BC, CD, DE beliebige Vektoren u, v, w, z, so bezeichnet man AE als die **Summe** derselben mit $u+v+w+z$. Da AE auch die Summe von AB, BD, DE, oder von AC, CD, DE, oder AC, CE ist, ist

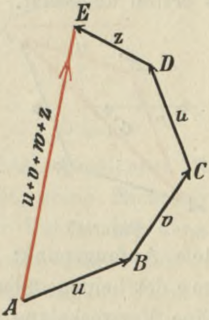
$$\begin{aligned} u+v+w+z &= u+(v+w)+z \\ &= (u+v)+w+z \\ &= (u+v)+(w+z), \end{aligned}$$

demnach auch gleich

$$\begin{aligned} & u+(w+v)+z \\ &= (v+u)+w+z \\ &= (w+z)+(u+v), \end{aligned}$$

das heisst

$$\begin{aligned} &= u+w+v+z \\ &= v+u+w+z \\ &= w+z+u+v \end{aligned}$$



Figur 61.

u. s. w. **In einer Summe von Vektoren dürfen die einzelnen Vektoren beliebig untereinander vertauscht werden.**

Die Summe entgegengesetzt gleicher Vektoren ist Null, wie man sich durch Konstruktion sofort überzeugt.

Ferner ist $u + 0 = u$, was auch ohne weiteres anschaulich ist. Den u entgegengesetzten gleichen Vektor wollen wir mit $-u$ bezeichnen. Soll nun ein Vektor x die Bedingung

$$u + x = w$$

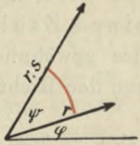
erfüllen, so addiere man zu w noch $-u$. Es wird

$$w + (-u) = u + (-u) + x = 0 + x = x.$$

Für $w + (-u)$ schreibt man einfacher $w - u$ und bezeichnet auch $w - u$ als die **Differenz** von w und u.

§ 52. Multiplikation von Vektoren.

Dreht man einen beliebigen Vektor r_φ um einen Winkel ψ und vergrössert bezw. verkleinert r im Mass-



Figur 62.

stabe s : 1, so entsteht ein neuer Vektor von der Länge rs und dem Richtungswinkel $\varphi + \psi$, den man das **Produkt** von r_φ mit s_ψ nennt und mit

$$r_\varphi \cdot s_\psi$$

bezeichnet. Da

$$r_\varphi \cdot s_\psi = (rs)_{\varphi + \psi} \tag{I}$$

wird, ist

$$r_\varphi \cdot s_\psi = s_\psi \cdot r_\varphi,$$

man darf also in diesem Produkt die Faktoren vertauschen. Als Produkt von beliebig vielen Vektoren $r_\varphi, s_\psi, t_\chi \ldots$ bezeichnet man den Vektor

$$(rst\ldots)_{\varphi + \psi + \chi + \cdots}$$

Die drei Vektoren $u = AB$, $v = BC$ und $u + v = AC$ bilden ein Dreieck ABC. Dreht man dies um einen Winkel ψ und vergrössert es im Massstab s, so dreht man jede Seite um diesen Winkel und vergrössert sie im selben Massstab. Daher sind die Seiten des neuen Dreiecks A'B'C'

$$u \cdot s_\psi, \quad v \cdot s_\psi, \quad (u+v)\, s_\psi.$$

Die dritte ist aber nach wie vor die Summe der beiden anderen, d. h. es ist

$$(u+v)\, s_\psi = u\, s_\psi + v\, s_\psi. \tag{II}$$

Die Multiplikation und Addition von Vektoren befolgen also dieselben Gesetze, wie die der gemeinen Zahlen. Sie gehen auch in die Operationen des gewöhnlichen Rechnens über, wenn man die Vektoren der Richtungen 0 und 180° betrachtet. Es ist

$$r_0 + s_0 = (r+s)_0$$
$$r_0 \cdot s_0 = (r\,s)_0,$$

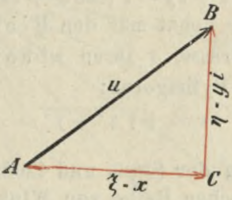
und da $r_{180} = -r_0$ ist, treten die Vektoren der Richtung 180° an Stelle der negativen Zahlen. Wir wollen daher den Index 0 im allgemeinen fortlassen und entsprechend für r_{180} $-r$ schreiben.

Die Vektoren in einer Ebene erweisen sich hiermit als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Zahlen. Man nennt sie daher auch imaginäre oder besser komplexe Zahlen, wiewohl sie, streng genommen, Aggregate von zwei Zahlen sind und zu ihrer Bestimmung die Angabe von zwei Zahlen erforderlich ist. Unter imaginären Zahlen sollten eigentlich nur die Vektoren der Richtung $\pm 90°$ verstanden werden.

§ 53. Zerlegung der komplexen Zahl in reellen und imaginären Teil.

Zieht man durch den Anfangspunkt A eines Vektors u eine Parallele zur Nullrichtung und fällt vom Endpunkt B das Lot BC darauf, so entstehen die Vektoren $AC = \xi$ und $CB = \eta$, so dass

$$u = \xi + \eta.$$



Figur 63.

ξ hat die Richtung 0 oder 180°, η die Richtung $\pm 90°$. Es ist also ξ eine positive oder negative Zahl x, η ein positives oder negatives Vielfaches von 1_{90}, $\eta = y \cdot 1_{90}$, x und y nennt man die Komponenten von u. Den Vektor 1_{90} bezeichnet man durchweg mit i und nennt ihn die „imaginäre Einheit", im Gegensatz zu der „reellen Einheit", 1_0. Es lassen sich also alle komplexen Zahlen in der Form

$$u = x + iy$$

darstellen, und dieser Thatsache verdanken sie den Namen „komplex".

Aus der Länge r und dem Richtungswinkel φ eines Vektors findet man seine Komponenten durch die Gleichungen

$$y = r \cos \varphi, \quad x = r \sin \varphi. \qquad \text{(III)}$$

Wenn zwei Vektoren gleich sind, stimmen sie in r vollständig, in φ bis auf Vielfache von 360° überein;

$\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ haben daher dieselben Werte, mithin auch x und y. Die Vektorengleichung

$$x + yi = a + bi$$

ist also gleichbedeutend mit den beiden gewöhnlichen Zahlengleichungen

$$x = a, \quad y = b.$$

Aus (XIII) ergiebt sich:

$$r_\varphi = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad \text{(IV)}$$

$\cos\varphi + i\sin\varphi$ nennt man den **Richtungsfaktor** der komplexen Grösse, r ihren **absoluten Betrag**. Es ist nach dem Pythagoras:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \text{(V)}$$

§ 54. Summation der Sinus und Cosinus einer arithmetischen Reihe von Winkeln.

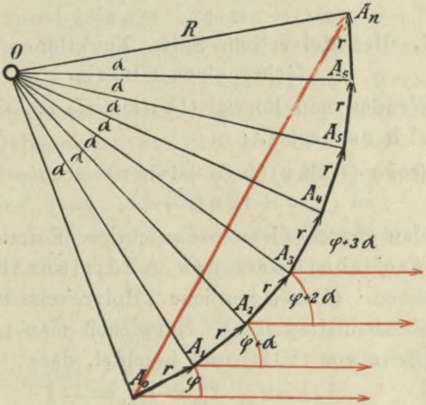
Ein Kreisbogen vom Radius R und Mittelpunkt O sei in n-gleiche Teile A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$ geteilt. Der Winkel $A_0OA_1 = A_1OA_2$ etc. sei gleich α. Die Sehnen A_0A_1, A_1A_2 ... u. s. f. haben die Länge $r = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$; bildet die erste mit einer beliebigen Nullrichtung den Winkel φ, so bildet die nächste mit derselben Richtung den Winkel $\varphi + \alpha$, die dritte den Winkel $\varphi + 2\alpha$, die letzte $\varphi + (n-1)\alpha$. Die einzelnen Sehnen, als Vektoren aufgefasst, sind also mit

$$r_\varphi,\ r_{\varphi+\alpha},\ r_{\varphi+2\alpha}\ \cdots\ r_{\varphi+(n-1)\alpha}$$

zu bezeichnen.

Ihre Vektorensumme ist der Vektor A_0A_n. Seine Länge ist, da er dem Centriwinkel $n\alpha$ gegenüberliegt, $s = 2R\sin\frac{n\alpha}{2}$. Mit A_0A_1 bildet er den Winkel $A_1A_0A_n$, der als Peripheriewinkel über dem Bogen

$A_1 A_n$ gleich $\frac{n-1}{2}\alpha$ ist, mit der Nullrichtung also den Winkel $\frac{n-1}{2}\alpha+\varphi$. Mithin ist:



Figur 64.

$$r_\varphi + r_{\varphi+\alpha} + r_{\varphi+2\alpha} + \dots r_{\varphi+(n-1)\alpha} = s_{\frac{n-1}{2}\alpha+\varphi}$$

oder

$$2\,R\sin\frac{\alpha}{2}\left\{1_\varphi + 1_{\varphi+\alpha} + \dots 1_{\varphi+(n-1)\alpha}\right\}$$

$$= 2\,R\sin\frac{n\,\alpha}{2}\cdot 1_{\frac{n-1}{2}\alpha+\varphi}.$$

Setzt man für 1_ψ $\cos\psi + i\sin\psi$, hebt $2\,R$ fort und vergleicht Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\dots\cos(\varphi+(n-1)\alpha)\\&\qquad=\frac{\sin\frac{n\,\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\end{aligned}\right\}\text{(VI)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+2\alpha)+\ldots\sin(\varphi+(n-1)\alpha)\\&\qquad=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\end{aligned}\right\}\quad\text{(VII)}$$

§ 55. Der Moivre'sche Satz. Funktionen der Vielfachen eines Winkels.

Wendet man Formel (IV) auf (I) an, so folgt, indem sich r s weghebt:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi)=\cos(\varphi+\psi)&\\+i\sin(\varphi+\psi).&\end{aligned}\quad\text{(VIII)}$$

Man kann diese hochwichtige Formel als die „Moivre'sche Form des Additionstheorems" bezeichnen. (Der eigentliche „Moivre'sche Satz" wird sogleich abzuleiten sein.) Entwickelt man nämlich die linke Seite von (VIII) und beachtet, dass

$$i\,.\,i=1_{90}\cdot 1_{90}=1_{180}=-1$$

ist, so erhält man das Additionstheorem, indem man die reellen Teile beider Seiten der Gleichung und ebenso die imaginären für sich gleichsetzt. Die Moivre'sche Formel ist eines der besten Hilfsmittel, um die Additionstheoreme auswendig zu lernen!

Indem man ψ mit $-\psi$ vertauscht, erhält man noch

$$\begin{aligned}(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)=\cos(\varphi-\psi)&\\+i\sin(\varphi-\psi)&\end{aligned}\quad\text{(IX)}$$

und wenn man auch $-\varphi$ für φ setzt:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi-i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)=\cos(\varphi+\psi)&\\-i\sin(\varphi+\psi).&\end{aligned}\quad\text{(X)}$$

Für $\varphi=\psi$ wird aus (IX):

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi-i\sin\varphi)=1.\qquad\text{(XI)}$$

Offenbar ist für beliebig viele Winkel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)\ldots$$
$$= \cos(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$$

Setzt man $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$, so wird daraus

$$(\cos\alpha + i\sin\beta)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha. \qquad \text{(XII)}$$

Dies ist der eigentliche **„Moivre'sche Satz"**. Er zerfällt in zwei Sätze über reelle Grössen, wenn man die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt. Dabei treten die Potenzen von i auf:

$$i = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 . i = -i,\ i^4 = (-1).(-1) = 1,$$
$$i^5 = i^4 . i = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1$$

u. s. w. Vergleicht man, nachdem diese Werte eingesetzt sind, Reelles mit Reellem, Imaginäres mit Imaginärem, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\cos m\alpha &= \cos^m\alpha - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha \\
&\quad + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha - + \ldots \\
\sin m\alpha &= \binom{m}{1}\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha \\
&\quad + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha - + \ldots
\end{aligned}\right\}\text{(XIII)}$$

Beide Formeln lassen sich noch umformen, indem man $\cos^m\alpha$ als Faktor vor die rechte Seite setzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos m\alpha = \cos^m\alpha \\
&\left\{1 - \binom{m}{2}tg^2\alpha + \binom{m}{4}tg^4\alpha - \binom{m}{6}tg^6\alpha + - \ldots\right\} \\
&\sin m\alpha = \cos^m\alpha\left\{\binom{m}{1}tg\,\alpha - \binom{m}{3}tg^3\alpha + \binom{m}{5}tg^5\alpha - + \ldots\right\}
\end{aligned}\right\}\text{(XIV)}$$

Durch (XIII) und (XIV) hat man die Funktionen der Vielfachen eines Winkels durch die Potenzen der Funktionen des einfachen Winkels ausgedrückt.

Man kann auch umgekehrt jede Potenz eines Cosinus oder Sinus durch die Funktionen der Vielfachen seines Winkels ausdrücken. Setzen wir zur Abkürzung vorübergehend

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \xi, \text{ also nach (XI)}$$
$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{\xi},$$

so wird

$$2\cos\alpha = \xi + \frac{1}{\xi},$$

also
$$2^m \cos^m\alpha = \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^m$$
$$= \xi^m + \binom{m}{1}\xi^{m-2} + \binom{m}{2}\xi^{m-4} + \dots \binom{m}{1}\xi^{-(m-2)} + \xi^{-m}.$$

Es ist aber $\xi^\lambda = \cos\lambda\alpha + i\sin\lambda\alpha$
$$\xi^{-\lambda} = \cos\lambda\alpha - i\sin\lambda\alpha.$$

Setzt man diese Werte wieder ein, so hebt sich naturgemäss alles Imaginäre weg und man hat $\cos^m\alpha$ als Funktion der Vielfachen von α bis $m\alpha$ einschliesslich.

Ebenso wird

$$2i\sin\alpha = \xi - \frac{1}{\xi}$$
$$(2i)^m \sin^m\alpha = \xi^m - \binom{m}{1}\xi^{m-2} + \binom{m}{2}\xi^{m-4} - + \dots \pm \xi^{-m}.$$

Wird ξ^λ wieder nach dem Moivre'schen Satz ausgedrückt, so hebt sich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, alles Imaginäre oder alles Reelle fort und man erhält $\sin^m\alpha$ durch die Cosinus oder Sinus der Vielfachen von α bis $m\alpha$ ausgedrückt.

Zwölftes Kapitel.

Unendliche Reihen und Produkte zur Darstellung der trigonometrischen Funktionen.

§ 56.

Im folgenden sind die Winkel nicht mehr nach Graden, sondern im „natürlichen Winkelmass“, d. h. durch den Arcus gemessen gedacht. Ein rechter Winkel wird mit $\frac{\pi}{2}$, ein gestreckter mit π bezeichnet. Der Winkel α^0 hat das Bogenmass $\frac{2\pi}{360^0} \cdot \alpha^0 = x$. Unter dieser Voraussetzung gelten die zwei bemerkenswerten Reihenentwicklungen, die für jedes x konvergieren:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots \qquad \text{(I)}$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots \qquad \text{(II)}$$

Darin bezeichnet n! das Produkt der n ersten ganzen Zahlen

$$1.2.3 \dots n = n! \text{ (spr. n-Fakultät).}$$

Auf eine Herleitung dieser Formeln muss verzichtet werden.

Umgekehrt kann man auch den Bogen durch den Sinus oder die Tangente ausdrücken. Es ist:

$$x = \sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 x}{7} + \dots \qquad \text{(III)}$$

$$= \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + - \qquad \text{(IV)}$$

Die erste Reihe konvergiert für jeden Wert des Sinus, d.h. für

$$-1 \leqq \sin x \leqq +1,$$

und liefert den zwischen $+90^\circ$ und -90° gelegenen Bogen, d. h.

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$$

Die zweite konvergiert für

$$-1 \leqq \operatorname{tg} x \leqq +1$$

und liefert

$$-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{4}.$$

Indem man für $\sin x$ die Werte $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$ einsetzt, erhält man Reihen für $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{6}$, ebenso indem man $\operatorname{tg} x = 1$ setzt, die berühmte Leibnitz'sche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots, \tag{V}$$

die aber für praktische Zwecke zu langsam konvergiert.

Andere interessante Entwicklungen sind noch:

$$\sin x = x \cdot \left\{1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right\} \ldots \tag{VI}$$

$$\cos x = \left\{1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{(3\sigma)^2}\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{(5\sigma)^2}\right\} \ldots \tag{VII}$$

worin zur Abkürzung $\frac{\pi}{2} = \sigma$ gesetzt ist. Ferner:

$$\cot x = \tag{VIII}$$

$$\frac{1}{x} + \left\{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi - x}\right\} + \left\{\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi - x}\right\} + \left\{\frac{1}{3\pi} - \frac{1}{3\pi - x}\right\} + \ldots$$

$$+ \left\{\frac{1}{-\pi} + \frac{1}{\pi + x}\right\} + \left\{\frac{1}{-2\pi} + \frac{1}{2\pi + x}\right\} + \left\{\frac{1}{-3\pi} + \frac{1}{3\pi + x}\right\} + \ldots$$

$$= 2x \left\{\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - \pi^2} + \frac{1}{x^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{x^2 - 9\pi^2} + \ldots\right\} \tag{IX}$$

Die Entwicklung von tg und cot nach Potenzen von x und die damit im engsten Zusammenhang stehende von log sin x kann hier nicht angegeben werden. Das Vorstehende soll nur dazu dienen, den Leser zur Beschäftigung mit den Methoden der höheren Mathematik, speciell der Integral- und Differentialrechnung, anzuregen.

Dreizehntes Kapitel.

Die Methode der Hilfswinkel.

§ 57. Beispiele.

Es ist vielfach bei Rechnungen, die nicht durchgehend logarithmisch geführt werden können, von Vorteil, durch Einführung von Hilfswinkeln die trigonometrische statt der logarithmischen Tafel zu benutzen. Dies wird an einer Reihe von Beispielen klar werden.

1. Gegeben log a, log b, gesucht log (a + b).

Auflösung: a und b sind positive Zahlen. Man hat

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Setzt man $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, so wird $1 + \frac{b}{a} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$,

$$a + b = \frac{a}{\cos^2 \varphi}, \text{ mithin } \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}(\log b - \log a),$$

$$\log(a + b) = \log a - 2 \log \cos \varphi.$$

Würde man zu log a, log b die Numeri aufschlagen, diese addieren und wieder den Logarithmus nehmen, so hätte man die Tafel dreimal zu benutzen. Bei der trigonometrischen Methode geschieht dies nur zweimal. Wenn man es versteht, zu dem Logarithmus einer Funktion den einer anderen Funktion desselben Winkels sofort aufzuschlagen, ohne erst den Winkel nachzusehen, so benutzt man die Tafel sogar nur einmal. Manche Tafeln enthalten daher besondere Täfelchen zum Interpolieren zwischen log sin, log cos und log tg.

2. Gegeben log a, log b, a > b. Gesucht log (a — b)

Auflösung: Setze

$$\frac{b}{a} = \sin\varphi, \text{ d. h. } \log\sin\varphi = \frac{1}{2}\log b - \log a,$$

so wird $a - b = a\cos^2\varphi$, $\log(a-b) = 2\log\cos\varphi + \log a$,

3. Andere Auflösung von 1 und 2: b sei auch in 1 die kleinere Zahl. Man setze

$$\frac{b}{a} = \cos 2\varphi, \text{ d. h. } \log\cos 2\varphi = \log b - \log a.$$

Es wird:

$$a + b = 2a\cos^2\varphi, \quad \log(a+b) = \log 2 + \log a + 2\log\cos\varphi$$
$$a - b = 2a\sin^2\varphi, \quad \log(a-b) = \log 2 + \log a + 2\log\sin\varphi.$$

4. Zu berechnen $x = a\sin\alpha + b\cos\alpha$.

Man setze $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, so wird

$$x = r\sin(\varphi+\alpha) = \frac{a\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

5. Zu berechnen $x = \dfrac{a+b}{a-b}$.

Man setze $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, $\log\operatorname{tg}\varphi = \log b - \log a$.

Es wird, da $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi) = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \frac{a+b}{a-b} = x.$$

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Setze $a = x\cos\varphi$, $b = x\sin\varphi$. Es wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \log\operatorname{tg}\varphi = \log b - \log a,$$

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad \log x = \log a - \log\cos\varphi.$$

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$.

Setze $\frac{b}{a} = \cos\varphi$, $\log\cos\varphi = \log b - \log a$. Es wird

$$x = a\sin\varphi,\quad \log x = \log a + \log\sin\varphi.$$

8. $x = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $a > b$. Setze, wie in 3, $\frac{b}{a} = \cos 2\varphi$.

Es wird $x = \pm\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\log(\pm x) = \log\mathrm{tg}\,\varphi$.

9. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ (§ 10, zweiter Fall)

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1+\cos\gamma)$$
$$= (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Setze
$$\frac{4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2} = \sin^2\varphi,$$

$$\log\sin\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b$$
$$+ \log\cos\frac{\gamma}{2} - \log(a+b).$$

Es wird

$$c = (a+b)\cos\varphi,\quad \log c = \log(a+b) + \log\cos\varphi.$$

10. $c = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$ (§ 10, dritter Fall).

Setze
$$\frac{b\sin\alpha}{a} = \sin\varphi,$$ so wird

$$c = b\cos\alpha \pm a\cos\varphi.$$

Da nach der Definition von φ

$$\frac{b}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

ist, setze man diese Grösse gleich d. Es wird:

$$c = d\sin(\varphi \pm \alpha).$$

11. Die Logarithmierung von $\frac{1-t}{1+t}$ im § 26 (erste und zweite Hauptlage) geschieht nach 5, die von $\cos\lambda \pm 2t$ (dritte Hauptlage) nach 1 bis 3. Ist in

$$\cos\mu = \cos\lambda + 2\,t$$

λ stumpf, so kann man auch $\dfrac{t}{-\cos\lambda} = \cos^2\varphi$ setzen. Dadurch wird

$$\cos\mu = -\cos\lambda\,(2\cos^2\varphi - 1) = -\cos\lambda\cos 2\varphi.$$

Ist in

$$\cos\lambda = \cos\mu - 2\,t$$

μ spitz, so setze man $\dfrac{t}{\cos\mu} = \sin^2\varphi$; es wird ebenso

$$\cos\lambda = \cos\mu\cos 2\varphi.$$

12. $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$ (§ 38, dritter Fall).

Verfährt man nach 1, so hat man, falls γ spitz:

$$\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\cos\gamma = \operatorname{tg}^2\varphi$$

$$\cos c = \frac{\cos a\cos b}{\cos^2\varphi}$$

zu setzen. Man kann aber auch so verfahren:

$$\cos c = \sin a\cos\gamma\left(\frac{\operatorname{cotg} a\cos b}{\cos\gamma} + \sin b\right)$$

$$\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos\gamma} = \operatorname{cotg}\varphi$$

$$\cos c = \frac{\sin a\cos\gamma\,.\,\cos(\varphi - b)}{\sin\varphi} = \frac{\cos a\cos(\varphi - b)}{\cos\varphi}.$$

13. $\cos\gamma = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\beta\cos c$ (§ 38, vierter Fall).

Nach 1 ist die Berechnung verschieden je nach den Vorzeichen der Cosinus. Setzt man wieder

$$\cos\gamma = \sin\alpha\cos c\left(-\frac{\cot\alpha}{\cos c}\,.\cos\beta + \sin\beta\right)$$

$$\frac{\cot\alpha}{\cos c} = \operatorname{tg}\varphi$$

$$\cos\gamma = \frac{\sin\alpha\cos c\sin(\beta - \varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos\alpha\sin(\beta - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

14. γ aus der Gleichung

$$a \sin \gamma + b \cos \gamma = c$$

zu berechnen. Verfährt man nach 4, so wird

$$r \sin(\varphi + \alpha) = c, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin(\varphi + \alpha) = \frac{c \cos \varphi}{a}.$$

Hieraus ergiebt sich $\varphi + \gamma$ und φ, daraus γ.

In 6, 7, 10, 12, 13 besitzt der Hilfswinkel φ eine einfache geometrische Bedeutung.

§ 58. Trigonometrische Auflösung der Gleichung zweiten Grades.

Die beiden Wurzeln x_1, x_2 der Gleichung

$$x^2 - 2ax + b = 0$$

genügen den Bedingungen

$$x_1 + x_2 = 2a, \quad x_1 . x_2 = b.$$

1. Ist b positiv, so setze man, um die zweite identisch zu befriedigen:

$$x_1 = \sqrt{b} \operatorname{tg} \varphi, \quad x_2 = \sqrt{b} \cot \varphi. \qquad \text{(I)}$$

Es wird dann aus der ersten Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi = \frac{2a}{\sqrt{b}}.$$

Die linke Seite ist

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

Man erhält also zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{b}}{a}. \qquad \text{(II)}$$

Infolge dieser Beziehung ist auch

$$x_1 = 2a \sin^2 \varphi, \quad x_2 = 2a \cos^2 \varphi, \qquad \text{(III)}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass $x_1 + x_2 = 2a$ wird.

2. Ist b negativ, so setze man

$$x_1 = \sqrt{-b} \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi, \quad x_2 = -\sqrt{-b}\cot\varphi. \qquad \text{(IV)}$$

Es wird:

$$x_1 + x_2 = -2\sqrt{-b}\cot 2\varphi,$$

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = -\frac{\sqrt{-b}}{a}. \qquad \text{(V)}$$

Das Vorzeichen von $\sqrt{-b}$ wählt man am besten dem von a entgegengesetzt, damit $\mathrm{tg}\,2\varphi$ positiv, 2φ spitz wird. Infolge der Gleichung (V) wird auch

$$x_1 = -2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}, \quad x_2 = +2a\frac{\cos^2\varphi}{\cos 2\varphi}, \qquad \text{(VI)}$$

woraus man erkennt, dass $x_1 + x_2 = 2a$ ist.

3. Ist in (II) $\sqrt{b} > a$, so gehört zu $\sin 2\varphi$ kein reeller Winkel. In diesem Fall sind die Wurzeln imaginär. Man setze:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), & x_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). \\ \text{Dann ist} \quad r = \sqrt{b}, & \cos\varphi = \frac{a}{r}. \end{array}\right\} \text{(VII)}$$

§ 59. Trigonometrische Auflösung der Gleichung dritten Grades.

Setzt man in der reduzierten Gleichung dritten Grades

$$x^3 = 3px + 2q \qquad \text{(VIII)}$$

$x = y + z$, so geht sie über in

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = 3p(y+z) + 2q,$$

oder $$3yz(y+z) + y^3 + z^3 = 3p(y+z) + 2q.$$

Man kann ihr genügen, indem man

$$yz = p, \quad y^3 + z^3 = 2q \qquad \text{(IX)}$$

setzt. Die dritten Potenzen von y und z,

$$u_1 = y^3, \quad u_2 = z^3$$

genügen den Bedingungen

$$u_1 u_2 = p^3, = u_1 + u_2 = 2q$$

und sind daher die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - 2qu + p^3 = 0, \tag{X}$$

die man die quadratische „Resolvente" der Gleichung (VIII) nennt.

Die Wurzeln u_1, u_2 der Resolvente findet man nach der Anleitung des vorigen Paragraphen. Sie sind reell, wenn $q^2 > p^3$. Alsdann giebt es für y und z je einen reellen Wert, der leicht zu berechnen ist, da man die Logarithmen von u_1 und u_2 kennt. Ferner kann noch

$$y_1 = y \cdot \left(\cos\frac{360^0}{3} + i\sin\frac{360^0}{3}\right) \quad = y \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y_2 = y\left(\cos\frac{2 \cdot 360^0}{3} + i\sin\frac{2 \cdot 360^0}{3}\right) = y \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

sein. Die zugehörigen Werte von z sind

$$z_1 = z \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \; z_2 = z \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

weil $y_1 z_1 = y_2 z_2 = yz = p$ reell sein muss.

Ist dagegen $q^2 < p^3$, so sind u_1 und u_2 imaginär,

$$u_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad u_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

worin nach (VII):

$$r = +\sqrt{p^3}, \quad \cos\varphi = \frac{q}{+\sqrt{p^3}} \text{ ist.} \tag{XI}$$

Somit wird

$$y = \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \quad z = \sqrt[3]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$x = y + z = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{p} \cdot \cos\frac{\varphi}{3}.$$

Für $\frac{\varphi}{3}$ kann es aber im ganzen drei wesentlich verschiedene Werte geben, nämlich

$$\psi_1 = \frac{\varphi}{3},\ \psi_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{360}{3},\ \psi_3 = \frac{\varphi}{3} + 2 \cdot \frac{360}{3},$$

so dass man insgesamt 3 Werte für x erhält:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{p}\cos\psi_1 = +2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{p}\cos\psi_2 = -2\sqrt{p}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right) \\ x_3 &= 2\sqrt{p}\cos\psi_3 = -2\sqrt{p}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XII)}$$

Die Winkel können unmittelbar in der Tabelle aufgeschlagen werden, wenn q positiv ist. Ist q negativ, so ist φ stumpf,

$$\varphi = 180^0 - \varphi'$$

wo φ' sein spitzer Nebenwinkel. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi' &= -\frac{q}{\sqrt{p^3}} \\ &+ \\ x_1 &= +2\sqrt{p}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi'}{3}\right) \\ x_2 &= -2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi'}{3} \\ x_3 &= +2\sqrt{p}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi'}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII)}$$

Dieser Fall, in dem die Wurzeln der quadratischen Resolvente imaginär sind, ist bekannt als „Casus irreducibilis".

§ 60. Beispiele zu § 58 und 59.

1. $x^3 = 9x + 28.$

$$p = 3,\ q = 14.$$

Resolvente: $u^2 - 28u + 27 = 0$

$$a = 14,\ b = 27.$$

$$\frac{1}{2}\log 27 = 0.7156819$$
$$\log 14 = 1.1461280$$

$$\log\sin 2\varphi = 9.5695539 - 10$$
$$2\varphi = 21^\circ\ 47'\ 12'',45$$
$$\varphi = 10^\circ\ 53'\ 36'',22$$
$$\log \operatorname{tg}\varphi = 9,2843181 - 10$$
$$\frac{1}{2}\log 27 = 0.7156819$$

$$\log u_1 = 0.0000000 \quad (u_1 = 1)$$
$$\log u_2 = 1.4313638 \quad (u_2 = 27)$$
$$\frac{1}{3}\log u_1 = 0.0000000, \quad y = 1$$
$$\frac{1}{3}\log u_2 = 0.4771213, \quad z = 3$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 \text{ u. } x_3 = -2 \pm i\sqrt{3}.$$

2. $x^3 = -7,398636\,x + 14.$

$$p = -2,466212, \quad q = 7.$$
$$\text{Resolvente: } u^2 - 14u + p^3 = 0$$
$$a = 7, \quad b = -(2,466212)^3.$$

$$\frac{1}{2}\log(-b) = \frac{3}{2}\log(-p) = 0.5880456$$
$$\log a = 0.8450980$$

$$\log \operatorname{tg} 2\varphi = 9.7429476 - 10$$
$$2\varphi = 28^\circ\ 57'\ 18'',1$$
$$\varphi = 14^\circ\ 28'\ 39'',05$$
$$\log\operatorname{tg}\varphi = 9.4119544 - 10$$
$$\log(-u_1) = 0.0000000 \quad (u_1 = -1)$$
$$\log(+u_2) = 1.1760912 \quad (u_2 = +15)$$

$$\frac{1}{3}\log(-u_1) = 0.0000000, y = -1{,}000000$$

$$\frac{1}{3}\log u_2 = 0.3920304, z = +2{,}466212$$

$$\mathbf{x_1 = 1{,}466212}$$

$$\mathbf{x_2\ u.\ x_3 = 0{,}733106 \pm i\sqrt{3}\,.\,1{,}733106.}$$

3. $\mathbf{x^3 = 21\,x + 20.}$

$$p = 7,\ q = 10.$$

$$\text{Resolvente: } u^2 - 20\,u + 343 = 0$$

$$a = 10,\ b = 343.$$

$$\log a = 1.0000000$$

$$\frac{1}{2}\log b = 1{,}2676740$$

$$\log\cos\varphi = 9{,}7323530 - 10$$

$$\varphi = 57^0\ 19'\ 11'',31$$

$$\frac{\varphi}{3} = 19^0\ 6'\ 23'',77$$

$$\log\cos 19^0\ \ 6'\ 23'',77 = 9{,}9753910 - 10$$

$$\log\cos 40^0\ 53'\ 36'',23 = 9{,}8784810 - 10$$

$$\log\cos 79^0\ \ 6'\ 23'',77 = 9{,}2764211 - 10$$

$${}^1/_2 \log p = 0.4225490$$

$$\log 2 = 0.3010300$$

$$\log x_1 = 0.6989700$$

$$\log(-x_2) = 0.6020600$$

$$\log(-x_3) = 0.0000001$$

$$\mathbf{x_1 = 5,\ x_2 = -4,\ x_3 = -1.}$$

4. $\mathbf{x^3 = 39\,x - 70.}$

$$p = 13,\ q = -35 = -q'.$$

$$\log q' = 1.5440680$$

$$\frac{3}{2}\log p = 1.6709151$$

$$\log\cos\varphi' = 9.8731529 - 10$$

$$\varphi' = 41^\circ\ 41'\ 37'',23$$

$$\frac{\varphi'}{3} = 13^\circ\ 53'\ 52'',41$$

$$\log\cos 46^\circ\ \ 6'\ \ 7'',59 = 9.8409684 - 10$$
$$\log\cos 13^\circ\ 53'\ 52'',41 = 9.9870963 - 10$$
$$\log\cos 73^\circ\ 53'\ 52'',41 = 9.4430382 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}\log p = 0.5569717$$
$$\log 3 = 0.3010300$$

$$\log x_1 = 0.6989701$$
$$\log(-x_2) = 0.8450980$$
$$\log x_3 = 0.3010299$$
$$x_1 = 5,\ x_2 = -7,\ x_3 = 2.$$

Anhang.

Uebungsbeispiele.

Tafel I.

Rechtwinklige ebene Dreiecke.

α	a	b	c
2° 27′ 55″	0,58100	13,497	13,509
22° 37′ 12″	5,3846	12,923	14,000
30° 30′ 36″	6,6000	11,200	13,000
35° 53′ 52″	12,751	17,616	21,746
36° 52′ 12″	9,000	12,000	15,000
38° 21′ 47″	13,497	17,051	21,746
51° 38′ 13″	13,825	10,943	17,632
53° 7′ 48″	11,200	8,4000	14,000
54° 6′ 8″	10,943	7,9210	13,509
59° 29′ 24″	12,923	7,6154	15,000
67° 22′ 48″	12,000	5,0000	13,000
87° 32′ 5″	17.616	0,75840	17,632

Tafel II.

Schiefwinklige ebene Dreiecke.

a	b	c	α	β	γ
13,000	14,000	15,000	53° 7′ 48″	59° 29′ 24″	67° 22′ 48″
2,2308	14,000	15,000	7° 53′ 24″	59° 29′ 24″	112° 37′ 12″
13,000	4,0000	15,000	53° 7′ 48″	14° 15′ 0″	112° 37′ 12″
13,000	14,000	1,6000	53° 7′ 48″	120° 30′ 36″	6° 21′ 36″
13,509	17,632	21,746	38° 21′ 47″	54° 6′ 8″	87° 32′ 5″
11,993	17,632	21,746	33° 25′ 57″	54° 6′ 8″	92° 27′ 55″
13,509	16,470	21,746	38° 21′ 47″	49° 10′ 18″	92° 27′ 55″
13,509	17,632	5,904	38° 21′ 47″	125° 53′ 52″	15° 44′ 21″

Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

c			a			b			α			β		
°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
15	38	6	9	45	19	12	16	42	38	57	12	52	5	54
16	6	22	10	30	15	12	16	42	41	5	6	50	2	56
36	10	39	21	47	2	29	37	36	38	57	12	56	52	23
38	57	12	9	45	19	37	54	6	15	38	6	77	43	18
38	57	12	21	47	2	33	7	37	36	10	39	60	22	24
40	9	21	28	26	56	29	37	36	47	37	21	50	2	56
41	5	6	10	30	15	39	57	4	16	6	22	77	43	18
41	5	6	25	50	17	33	7	37	41	32	38	56	15	43
41	32	38	25	50	17	33	44	17	41	5	6	56	52	23
44	44	17	31	19	47	33	44	17	47	37	21	52	5	54
47	37	21	28	26	56	39	57	4	40	9	21	60	22	24
47	37	21	31	19	47	37	54	6	44	44	17	56	15	43
50	2	56	12	16	42	48	54	54	16	6	22	79	29	45
50	2	56	29	37	36	42	22	39	40	9	21	61	33	4
52	5	54	12	16	42	51	2	48	15	38	6	80	14	41
52	5	54	33	44	17	42	22	39	44	44	17	58	40	13
56	15	43	33	7	37	48	27	22	41	5	6	64	9	43
56	15	43	37	54	6	45	15	43	47	37	21	58	40	13
56	52	23	29	37	36	51	2	48	38	57	12	68	12	58
56	52	23	33	44	17	48	27	22	41	32	38	64	9	43
58	40	13	42	22	39	45	15	43	52	5	54	56	15	43
60	22	24	33	7	37	53	49	21	38	57	12	68	12	58
60	22	24	39	57	4	49	50	39	47	37	21	61	33	4
61	33	4	42	22	39	49	50	39	50	2	56	60	22	24
64	9	43	48	27	22	48	54	54	56	15	43	56	52	23
68	12	58	51	2	48	53	49	21	56	52	23	60	22	24
77	43	18	37	54	6	74	21	54	38	57	12	80	14	41
77	43	18	39	57	4	73	53	38	41	5	6	79	29	45
79	29	45	48	54	54	73	53	38	50	2	56	77	43	18
80	14	41	51	2	48	74	21	54	52	5	54	77	43	18

Schiefwinklige sphärische Dreiecke.

a			b			c			α			β			γ		
°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''
2	7	54	50	2	56	52	5	54	0	44	56	15	38	6	163	53	38
4	6	41	50	2	56	52	5	54	4	34	28	58	40	13	118	26	56
5	21	59	56	15	43	60	22	24	4	3	15	38	57	12	138	54	54
5	29	30	41	32	38	44	44	17	6	32	15	52	5	54	123	7	37
6	39	54	36	10	39	40	9	21	8	40	9	50	2	56	123	7	37
16	6	22	40	32	33	52	5	54	15	38	7	39	9	35	129	57	4
16	6	22	52	5	54	61	33	4	15	38	7	50	2	56	121	19	47
17	35	7	44	44	17	56	52	23	16	32	22	41	32	38	127	54	6
17	56	41	41	5	6	47	37	21	24	2	59	60	22	24	102	16	42
20	32	33	68	12	58	80	14	41	17	20	54	52	5	54	123	7	37
21	7	35	50	2	56	56	52	23	25	26	16	64	9	43	100	30	15
22	35	52	40	9	21	56	52	23	20	35	37	36	10	39	129	57	4
27	59	4	41	5	6	60	22	24	26	40	20	38	57	12	123	44	17
29	6	11	56	15	43	77	43	18	21	34	28	38	57	12	132	22	39
35	30	24	38	57	12	56	15	43	43	2	7	47	37	21	102	16	42
36	10	39	40	9	21	50	13	58	50	2	56	56	52	23	86	34	33
38	57	12	55	1	2	56	15	43	47	37	21	74	18	19	77	43	18
39	20	24	41	5	6	60	22	24	45	26	42	47	37	21	102	16	42
40	9	21	56	52	23	79	29	45	36	10	40	50	2	56	115	50	17
41	5	6	60	20	54	60	22	24	47	37	21	77	39	26	77	43	18
41	5	6	60	22	24	79	39	38	38	57	12	56	15	43	109	45	36
41	32	38	44	44	17	57	10	4	52	5	54	56	52	23	88	42	27
44	44	17	56	52	23	80	14	41	41	32	38	52	5	54	111	47	4
46	0	59	50	2	56	56	52	23	47	39	0	64	9	43	79	29	25
50	2	56	52	5	54	63	21	53	58	40	13	61	33	4	84	53	48
50	2	56	52	5	54	99	57	42	15	38	6	16	6	22	159	44	26
52	5	54	61	33	4	83	34	56	50	2	56	58	40	13	105	6	41
56	15	43	77	43	18	119	37	37	38	57	12	47	37	21	138	54	54
56	52	23	79	29	45	107	37	55	50	2	56	64	9	43	119	15	56
56	52	23	80	14	41	103	59	30	52	5	54	68	12	58	113	53	57
68	12	58	80	14	41	128	11	15	52	5	54	56	52	23	138	5	42

Die Sinus und Cosinus der Vielfachen von 3° im ersten Quadranten.

°	Sinus	Cosinus	
0	0	1	90
3	$s_2 r_1 - t_1 r_2$	$t_1 r_1 + s_2 r_2$	87
6	$\frac{1}{2}(t_2\sqrt{3} - s_1)$	$\frac{1}{2}(s_1\sqrt{3} + t_2)$	84
9	$\frac{1}{2}(s_1\sqrt{2} - t_2\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}(s_1\sqrt{2} + t_2\sqrt{2})$	81
12	$\frac{1}{2}(t_1 - s_2\sqrt{3})$	$\frac{1}{2}(t_1\sqrt{3} + s_2)$	78
15	r_2	r_1	75
18	s_2	t_1	72
21	$t_2 r_1 - s_1 r_2$	$s_1 r_1 + t_2 r_2$	69
24	$\frac{1}{2}(s_1\sqrt{3} - t_2)$	$\frac{1}{2}(t_2\sqrt{3} + s_1)$	66
27	$\frac{1}{2}(t_1\sqrt{2} - s_2\sqrt{2})$	$\frac{1}{2}(t_1\sqrt{2} + s_2\sqrt{2})$	63
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	60
33	$s_2 r_1 + t_1 r_2$	$t_1 r_1 - s_2 r_2$	57
36	t_2	s_1	54
39	$s_1 r_1 - t_2 r_2$	$t_2 r_1 + s_1 r_2$	51
42	$\frac{1}{2}(t_1\sqrt{3} - s_2)$	$\frac{1}{2}(t_1 + s_2\sqrt{3})$	48
45	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	45
	Cosinus	Sinus	°

Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$r_1 = \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \qquad r_2 = \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

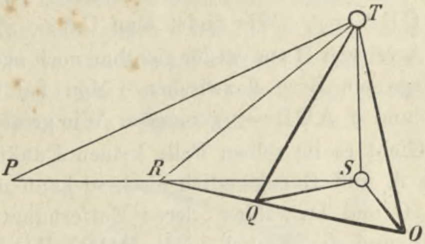
$$s_1 = \begin{cases} \tfrac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}+1) \\ \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}} \end{cases} \qquad s_2 = \begin{cases} \tfrac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}-1) \\ \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$t_1 = \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} \qquad t_2 = \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

Textaufgaben.

1. Der Schatten eines senkrecht aufgestellten Stabes ist b Meter lang, der Stab selbst a Meter. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen die Erdoberfläche?

2. Um die Höhe eines Turmes S T (Baumes etc.) zu messen, hat man 50 m weit vom Fusse S in dem Punkte R die „scheinbare Höhe", d. h. den Winkel $SRT = 32^\circ\, 7'$ gemessen. Wie gross ist S T?



Figur 65.

3. Um die Höhe zu messen, wenn S unzugänglich ist, hat man auf der Geraden R S von einem zweiten Punkt P ebenfalls die scheinbare Höhe des Objektes gemessen und gleich $21^\circ\, 38'$ gefunden. Wie gross ergiebt sich in diesem Falle S T?

4. Um die Erhebung eines Luftballons T über die Ebene zu messen, hat man von zwei Punkten R und Q aus die Winkel $TRS = 30^\circ\, 7'$, $SRQ = 22^\circ\, 36'$, $SQR = 49^\circ\, 27'$ und die Entfernung $QR = 250$ m gemessen. Wie gross ist S T?

Anmerkung. Wie hat man sich die Messung der Winkel zu denken, wo doch der Punkt S im Terrain gar nicht markiert ist?

5. Wie gross sind in der letzten Aufgabe die Winkel TRQ, TQR, RTQ? (Sowohl mit der ebenen wie mit der sphärischen Trigonometrie zu finden.)

6. Von drei in einer Geraden liegenden Punkten ORQ aus hat man gleichzeitig die Winkel TOS, TRS, TQS gemessen. Bekannt sind ferner die Entfernungen $OR = a$, $RQ = b$ Wie findet man ST?

7. In einer Ebene sei C von A und B aus sichtbar, aber unzugänglich. Gemessen ist $AB = c$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Wie findet man CA?

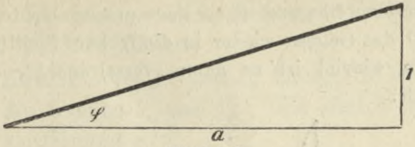
8. A sei von B aus weder sichtbar noch zugänglich, z. B. liege ein Berg dazwischen. Man hat $CA = b$, $CB = a$ und $\sphericalangle ACB = \gamma$ gemessen. Wie gross ist AB?

9. Giebt es im selben Falle keinen Punkt C, von dem aus A und B zugänglich sind, so kann man zwei Punkte, C und D wählen, deren Entfernung CD bekannt ist, und die Winkel ACB, BCD; BDA, ADC messen. Wie findet man daraus AB?

10. In einem ähnlichen Falle sei AB messbar (z. B. sei durch den Berg ein geradliniger Tunnel gebaut), dagegen C von D aus unzugänglich. Wie findet man aus AB und denselben Winkeln, wie im vorigen Beispiel, CD? (§ 26, erste Hauptlage. Diese Aufgabe ist die „Hansensche“.)

11. Das Dreieck der Punkte ABC sei bekannt. Von D aus misst man die Winkel ADB, BDC. Wie gross ist CD? (Pothenotsche Aufgabe, § 26.)

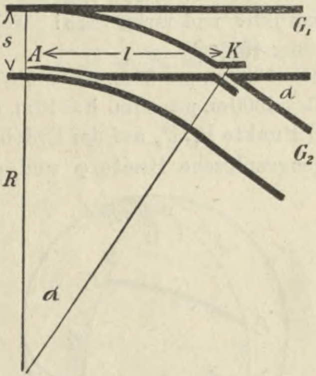
12. Eine Bahn hat die Steigung $1:a$, d. h. auf a Meter horizontales Fortschreiten kommt 1 m Steigung. Wie findet man den Winkel φ, den die Bahn mit der Horizontalen bildet?



Figur 66.

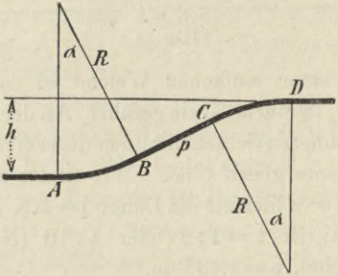
13. In einer einfachen Weiche ist das Geleis G_1 geradlinig, G_2 in einem Kreis geführt. An der Kreuzungsstelle K der inneren Schienen bilden diese einen Winkel α, dessen Tangente gleich t ist. Wie findet man aus der „Spurweite" s hiermit die Länge $l = AK$ der Weiche?

In Praxi ist $t = 1:9$ oder $1:10$ (Neuntel- und Zehntel-Weiche), $s = 1{,}435$ m.



Figur 67.

14. Ein Geleise geht bis A geradlinig, macht darauf eine kreisförmige Biegung vom Radius R und Winkel α, AB. Sodann geht es von B bis C geradlinig, p Meter weit, dann erfolgt dieselbe Biegung nach der anderen Seite, CD, so dass bei D das Geleise wieder in die frühere Richtung übergeht. Um wieviel ist es dann „verschwenkt", d. h. wie gross ist h?

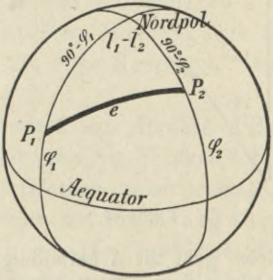


Figur 68.

15. Wenn umgekehrt h, R, p gegeben sind, wie findet man α? Konstruktiv und rechnerisch! Welchen Sinn hat die zweite Lösung für α?

Beispiel: $R = 1300\,m$, $p = 60\,m$, $\alpha = 2^\circ 0' 0''$, $h = 546{,}0\,cm$.
$R = 1300\,m$, $p = 60\,m$, $h = 10\,m$, $\alpha = 3^\circ 42' 21''$.

16. Zwei Punkte P_1, P_2 auf der Erdoberfläche haben die gleiche geographische Breite φ und die Längen l_1



Figur 69.

und l_2. Wie gross ist ihre kürzeste Entfernung, wie gross ihre Entfernung auf dem Breitengrad? (Erdradius im Mittel 6365000 Meter.)

17. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die Breiten φ_1 und φ_2, die Längen l_1 und l_2. Wie findet man ihre kürzeste Entfernung e?

18. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die Breiten φ_1 und φ_2. Ihre kürzeste Entfernung ist e. Wie findet man den Unterschied ihrer Längen?

19. Wie gross ist der Winkel zweier Seitenflächen an der Kante des regulären Tetraeders?

20. Wie gross ist er an der Kante des regulären Pentagondodekaëders?

Soeben erschienen:

Band I: Elementare Arithmetik u. Algebra von **Prof. Dr. Herm. Schubert.**

„ IV: Konstruierende und beschreibende Stereometrie von **Prof. Dr. G. Holzmüller.**

„ VI: Algebra, Determinanten und elementare Zahlentheorie von **Oberlehrer Dr. O. Pund.**

Im Laufe dieses und des nächsten Jahres folgen alsdann:

Band II: Elementare Planimetrie von **Prof. Dr. W. Pflieger.**

„ III: Ebene und sphärische Trigonometrie von **Oberlehrer Dr. F. Bohnert.**

„ V: Niedere Analysis von **Prof. Dr. Herm. Schubert.**

„ VII: Elemente der synthetischen Geometrie von **Oberlehrer Dr. Böger.**

„ VIII: Analytische Geometrie der Ebene von **Prof. Dr. Max Simon.**

„ IX: Analytische Geometrie des Raumes von **Prof. Dr. Max Simon.**

Band X: Differentialrechnung von **Prof. Dr. Franz Meyer.**

„ XI: Integralrechnung von **Prof. Dr. Franz Meyer.**

„ XII: Darstellende Geometrie von **Dr. John Schröder.**

„ XIII: Differentialgleichungen von **Prof. Dr. L. Schlesinger.**

„ XIV: Praxis der Gleichungen von **Prof. C. Runge.**

„ XV: Elemente der Astronomie von **Direktor Dr. E. Hertwig.**

„ XVI: Mathematische Geographie von **Direktor Dr. E. Hertwig.**

„ XVII: Berechnende Stereometrie von **Prof. Dr. G. Holzmüller.**

„ XVIII: Geschichte der Mathematik von **Prof. Dr. R. Haussner.**

„ XX: Versicherungsmathematik von **Ferd. Paul.**

Weitere Bände sind in Aussicht genommen.

Leipzig, im Juni 1899.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

2,00

Koch's Geschichte der deutschen Litteratur für den Betrag von sage achtzig Pfennige der deutschen Leserwelt bietet.

Prakt. Schulmann: Ein **Meisterstück kurzen und bündigen,** und doch **klaren** und **vielsagenden Ausdrucks** wie die „Deutsche Litteraturgeschichte" von Prof. M. Koch ist auch die vorliegende **„Deutsche Geschichte im Mittelalter".**

Natur: In der **Chemie** von Dr. Klein empfängt der Schül fast mehr, wie er als Anfänger bedarf, mindestens aber so viel, daß er das Wissenswürdigste als unentbehrliche Grundlage zum Verständnisse der Chemie empfängt. . .

Kunst f. Alle (München): K. Kimmich behandelt in seinem Bändchen, „Zeichenschule" benannt, in **knapper, kerniger, sachlich-zielbewußter Form** das weite Gebiet des bildmäßigen Zeichnens und Malens. . . . Gleich nutzbringend und in reichstem Maße bildend für Lehrer, Schüler und Liebhaberkünstler, möchte ich das **wirklich vorzügliche Werk** mit warmen anerkennenden Worten der Einführung in Schule, Haus und Werkstatt zugänglich machen. Die Ausstattung ist dabei eine so vornehme, daß mir der Preis von 80 Pfennigen für das gebundene Werk von 138 Seiten kl. 8° wirklich **lächerlich billig** erscheint. Nicht weniger als 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck, sowie 135 Voll- und Textbilder illustrieren den **äußerst gesunden Lehrgang** dieser Zeichenschule in **feinfühlender Weise.**

Schwäb. Merkur: **Prof. G. Mahler** in Ulm legt uns eine Darstellung der **ebenen Geometrie** vor, die bis zur Ausmessung des Kreises einschließlich geht. Besondere Sorgfalt ist der Auswahl und Anordnung der Figuren zu teil geworden, deren saubere Ausführung in 2 Farben angenehm berührt.

Globus: **Hoernes, Urgeschichte.** Der bewährte Forscher auf **vorgeschichtlichem Gebiete** giebt hier in knappster Form die lehrreiche Zusammenstellung des Wissenswertesten der Urgeschichte. **Vortrefflich geeignet zur Einführung und zum Ueberblick.**

Jahresberichte der Geschichtswissenschaft: Hommel, auf dem Gebiet der altorientalischen Geschichte eine anerkannte Autorität, behandelt in diesem Bändchen die morgenländische Geschichte mit großer Genauigkeit und wissenschaftlicher Gründlichkeit in knappster Form. Das kleine Büchlein muß warm empfohlen werden.

Lpzgr. Ztg. (Wissensch. Beil.): „Die **Pflanze" von Dr. E. Dennert** können wir bestens empfehlen. In kürzester, knappester, **sehr klarer und verständlicher Form** weiß sein Verfasser alles Wissenswerteste über den inneren und äußeren Bau und über die Lebensverrichtungen der Pflanze zur Anschauung zu bringen, wozu seine **ganz vortrefflichen, selbstgezeichneten Textabbildungen** außerordentlich viel beitragen helfen.

Weimarsche Zeitg.: **Waltharilied.** Mit dieser Uebersetzung wird uns eine hochwillkommene und von Litteraturfreunden längst ersehnte Gabe geboten. . . . Von einer guten Uebersetzung ist zu verlangen, daß sie, **sinn-** und zugleich möglichst **wortgetreu,** ohne dem Urtext, wie der deutschen Sprache Gewalt anzuthun, den Geist des Originals klar und ungetrübt wiederspiegele. Dieser Forderung gerecht zu werden, **hat Althof in meisterhafter Weise verstanden.**

Blätter f. d. bayr. Gymn.-Schulw.: **Swoboda, Griech. Geschichte.** Schon der Name und der Ruf des Verfassers bürgt dafür, daß wir nicht etwa bloß eine trockene Kompilation vor uns haben, **überall zeigen sich die Spuren selbständiger Arbeit.**

Prakt. Schulmann: **Seyfert, Schulpraxis.** Es wird in gedrängter Darstellung **ein reicher, wohldurchdachter, den neuesten pädagogischen Bestrebungen gerecht werdender Inhalt** geboten und für den, der tiefer eindringen will, ist gesorgt durch reichhaltige Litteraturnachweise.

Zeitschr. f. d. Realschulw.: Es war ein glücklicher Gedanke der rührigen Verlagshandlung, die Abfassung des der Einführung in die **Arithmetik und Algebra** dienenden Bändchens ihrer „Sammlung" dem hochgeachteten Fach- und Schulmanne **Prof. Dr. Schubert** zu übertragen . . . . Der Verfasser wußte die Schwierigkeiten mit großem Geschick zu bewältigen, indem er durch einen **streng systematischen Aufbau** des arithmetischen Lehrgebäudes der Fassungskraft des Anfängers möglichst Rechnung trug und dabei nur das Hauptsächliche ins Auge faßte. — **Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik von Prof. Th. Bürklen** . . . . Die durch **reinen Druck** und **geschmackvolle Ausstattung** sich auszeichnende „**Formelsammlung**" wird infolge ihres **reichen vielseitigen Inhaltes,** ihrer **zweckentsprechenden Anordnung** und **orientierenden Gliederung** als Nachschlagebuch vorzügliche Dienste leisten.

Grenzboten: **Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul.** Ein **lehrreiches Büchlein,** das in seinen engen Wänden . . . . **eine Fülle von Sprachbelehrung bietet,** die jeden fesseln muß, der nur einigermaßen das Bedürfnis fühlt, sich über Sprachdinge Aufklärung zu verschaffen. Der Verfasser hat sich schon durch zahlreiche volkstümliche Bücher über die Sprache und ihr Leben bekannt gemacht, er hat eine ausgebreitete, sichere Kenntnis der Sprach- und Wortgeschichte, hat mit Ausdauer auf diesem Gebiete gesammelt und weiß seinen Stoff immer geschickt zu gruppieren und vorzutragen. . . .

Staatsanzeiger: Die **Römische Litteraturgeschichte** ist eine **geistvolle glänzende Arbeit.** Einsender hat dieselbe von Anfang bis Ende mit größtem Genuß durchgelesen und dabei Art und Entwicklung des römischen Schrifttums und damit des römischen Geisteslebens überhaupt besser und gründlicher verstehen gelernt, als durch manches vielstündige Universitätskolleg oder dickleibige Handbücher.

Meteorologische Zeitschrift: Trabert hat in der **Meteorologie** seine schwierige Aufgabe vortrefflich gelöst. In allen Fragen vertritt er den neuesten und letzten Standpunkt.

Schweizerische Lehrerzeitung: Wer die **Perspektive** von Freyberger und das **Geometrische Zeichnen** von Becker durchgeht, wird seine Freude daran haben. So viel für so wenig Geld wird wohl kaum anderswo geboten. Die Illustrationen sind sauber und exakt. Der Text ist knapp und klar und auch da, wo er mehr andeutet als ausführt, anregend.