27. 12. 1913

schen

g

entheorie

(Theorie der komplexen Zahlenreihen)

Von

Max Rose

Mit 10 Figuren

GJG

Sammlung Göſchen

Unſer heutiges Wiſſen
in kurzen, klaren,
allgemeinverſtändlichen
Einzeldarſtellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göſchen'ſche Verlagshandlung
G. m. b. H. Berlin W. 35

Zweck und Ziel der „Sammlung Göſchen" iſt, in Einzeldarſtellungen eine klare, leichtverſtändliche und überſichtliche Einführung in ſämtliche Gebiete der Wiſſenſchaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf ſtreng wiſſenſchaftlicher Grundlage und unter Berückſichtigung des neueſten Standes der Forſchung bearbeitet, ſoll jedes Bändchen zuverläſſige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet iſt in ſich geſchloſſen dargeſtellt, aber dennoch ſtehen alle Bändchen in innerem Zuſammenhange miteinander, ſo daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, ſyſtematiſche Darſtell ilden dürfte.

Ein aus erſchienenen
Numme Bändchens

Mathematische Bibliothek
aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 66 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

— — **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Wenden!

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Vektoranalysis mit 11 Figuren von Professor Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

— — **II**: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Koordinatensysteme von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichtenfelde. Nr. 507.

Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Einleitung in die Funktionentheorie (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Oberlehrer Max Rose in Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Vermessungskunde von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — **II:** Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astrophysik mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulze. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Sammlung Göschen

Einleitung in die Funktionentheorie

(Theorie der komplexen Zahlenreihen)

Von

Max Rose
Oberlehrer an der Goetheschule zu Deutsch-Wilmersdorf

Mit 10 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1912

Literatur.

Biermann, Theorie der analytischen Funktionen.
Burkhardt, Algebraische Analysis.
Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen.
J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Dritter Abschnitt.

Reihen mit komplexen Gliedern, im besonderen Potenzreihen.

Vierter Abschnitt.

Spezielle Potenzreihen.

Anhang.

Konforme Abbildung.

Theorie der komplexen Zahlenreihen.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen.

§ 1. Formale Gesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen.

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten drei formale Gesetze:

1. Das kommutative Gesetz $\begin{cases} \text{der Addition: } a + b = b + a \\ \text{der Multiplikation: } ab = ba \end{cases}$
2. Das assoziative Gesetz $\begin{cases} \text{der Addition: } (a + b) + c = a + (b + c) \\ \text{der Multiplikation: } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \end{cases}$
3. Das distributive Gesetz der Multiplikation:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

In engem Zusammenhange mit ihnen stehen die Sätze:

Ein Produkt ist nur dann gleich Null, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null ist.

Die Division durch Null ist eine unausführbare Operation.

§ 2. Die imaginäre Einheit.

Wenn eine Gleichung ersten Grades in richtiger Weise gegeben ist, also weder eine Identität darstellt wie die Gleichung

$$2 + 3 \cdot x + 3 = 2x + 5 + x$$

noch einen Widerspruch enthält wie die Gleichung

$$6x + 3 - 4x + 5 = 2 \cdot x + 11,$$

so ist sie im Gebiete der reellen Zahlen stets und nur in einer Weise lösbar. Bei den Gleichungen zweiten Grades ist das nicht immer der Fall; so hat z. B. die Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine reelle Wurzel; denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist. Fordern wir trotzdem die Möglichkeit der Lösung, so sind wir zu einer Erweiterung des Zahlgebietes gezwungen.

Wir führen zu diesem Zwecke eine neue Zahleinheit ein durch die Forderung, daß ihr Quadrat gleich -1 sein soll. Für diese so definierte Zahl ist wegen ihrer fundamentalen Bedeutung für alle Zweige des mathematischen Wissens die Bezeichnung i gewählt worden. Es kann also die Definition der Zahl i symbolisch durch

$$i = \sqrt{-1}$$

angedeutet werden.

§ 3. Die rein imaginären Zahlen.

Wie sich aus der absoluten Einheit, der Eins, durch den Vorgang des Zählens die absoluten ganzen Zahlen ergeben, so folgen aus der Einheit i die Zahlen $2i, 3i, 4i \ldots$, und dieselben Betrachtungen, welche die Einführung der negativen, der gebrochenen und irrationalen Zahlen erforderten, führen zur Bildung von Zahlen der Form bi, in denen b irgendeine reelle Zahl bedeutet. Solche Zahlen haben die Form eines Produktes aus einer reellen Zahl b und der Einheit i, man nennt sie rein imaginäre Zahlen.

Die Bezeichnung „imaginär“ ist wenig glücklich gewählt; denn sie erkennt den so benannten Zahlen gewissermaßen die Daseinsberechtigung ab und spricht sie als etwas Unwirkliches, nur in der Einbildung Vorhandenes an. In Wahrheit stehen die imaginären Zahlen hinter den negativen, den gebrochenen und den irrationalen Zahlen in keiner Weise zurück; denn auch diese sind durch Erweiterung eines vorhandenen Zahlgebietes in die Analysis eingeführt worden. Sogar die absoluten ganzen Zahlen haben als reine Gedankendinge keine Realität im gewöhnlichen Sinne und könnten deshalb mit gleichem Rechte als imaginäre Zahlen angesehen werden. Der Grund zu der Bezeichnungsweise „imaginär“ mag wohl der gewesen sein, daß die imaginären Zahlen als das Produkt rein wissenschaftlicher Spekulation entstanden sind, während die negativen, die gebrochenen und selbst die irrationalen Zahlen ihr Dasein Bedürfnissen des gewöhnlichen Lebens verdanken.

Trotz alledem werden wir jedoch prüfen müssen, ob die Einführung der imaginären Zahlen eine zweckmäßige ist, was nur dann der Fall sein wird, wenn mir mit ihnen wie mit reellen Zahlen rechnen können.

§ 4. Einführung der komplexen Zahlen. Die Norm.

Nachdem wir den Begriff der rein imaginären Zahlen gewonnen haben, erweitern wir das bisherige Zahlengebiet in der Weise, daß wir eine reelle und eine rein imaginäre Zahl additiv vereinigen. Eine solche Verbindung schreiben wir in der Form

$$a + bi$$

und nennen sie eine komplexe Zahl. Natürlich können wir sie zunächst nur rein formal als Summe auffassen;

aber mit Hilfe geeigneter Definitionen werden wir es dahin bringen, daß wir mit komplexen Zahlen wie mit Summen rechnen können.

Die reellen Größen a und b, welche die Zahl $a + bi$ bestimmen, wollen wir ihre Koordinaten nennen und zwar a die erste und b die zweite. Die reellen und rein imaginären Zahlen sind somit Spezialfälle von komplexen Zahlen, und zwar ist für die reellen Zahlen die zweite, für die rein imaginären Zahlen die erste Koordinate gleich Null.

$a + bi$ ist nur dann gleich Null, wenn $a = b = 0$ ist. Beide Gleichungen können, da a und b reelle Zahlen sind, zu der einzigen

$$a^2 + b^2 = 0$$

zusammengesetzt werden. Wegen ihrer Wichtigkeit für das Rechnen mit komplexen Zahlen bezeichnet man die Größe $a^2 + b^2$ als die Norm der komplexen Zahl. Es gilt also der

Satz 1: Eine komplexe Zahl verschwindet dann und nur dann, wenn ihre Norm verschwindet.

§ 5. Gleichheit komplexer Zahlen.

Wir nennen zwei komplexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ einander gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist. Die Berechtigung dieser zunächst willkürlich erscheinenden Definition erhellt ohne weiteres daraus, daß die Einheiten 1 und i in keiner Weise additiv auseinander hergeleitet werden können, also völlig unabhängig voneinander sind.

§ 6. Addition und Subtraktion.

Die Summe zweier komplexer Zahlen erklären wir durch die Vorschrift

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Wir führen so die Addition von komplexen Zahlen auf die von reellen zurück; es gilt also auch im Bereiche der komplexen Zahlen das kommutative und das assoziative Gesetz der Addition.

Zwei Zahlen $a + bi$ und $a - bi$, die also in den ersten Koordinaten übereinstimmen, deren zweite Koordinaten aber entgegengesetzte Zeichen haben, nennt man konjugiert komplexe Zahlen.

Da $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ ist, so gilt der

Satz 2: Die Summe konjugiert komplexer Zahlen ist reell.

Diejenige Zahl, welche $a + bi$ zu Null ergänzt, nennen wir die zu $a + bi$ entgegengesetzte; sie ist der Summendefinition zufolge gleich $-a - bi$.

Wie für reelle Zahlen verstehen wir unter der Differenz $(a + bi) - (c + di)$ diejenige Zahl, welche, zu $c + di$ addiert, $a + bi$ ergibt; es ist also

$$(a + bi) - (c + di) = (a - b) + (c - d)i.$$

Wir erkennen sofort die Richtigkeit der beiden Sätze:

Satz 3: Die Subtraktion einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit der Addition der entgegengesetzten Zahl.

(Dieser Satz gilt in gleichem Wortlaute für reelle Zahlen.)

Satz 4: Die Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen ist rein imaginär.

§ 7. Multiplikation.

Wir stellen zunächst die Forderung, daß im Bereiche der komplexen Zahlen die drei Grundgesetze der Multiplikation Gültigkeit behalten sollen.

Wiederholte Addition gleicher komplexer Zahlen liefert das Gesetz

$$m(a + bi) = ma + mb \cdot i.$$

Dieses gilt zunächst nur für ganze Zahlen m, aber es läßt sich durch eine einfache Überlegung zeigen, daß es für rationale Zahlen, und da eine irrationale Zahl stets als Grenze einer Reihe von rationalen betrachtet werden kann, auch für irrationale seine Gültigkeit behält. Das assoziative und das distributive Gesetz lehren uns dann allgemein:

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= a(c+di)+bi(c+di)\\ &= ac-bd+(ad+bc)i\,.\end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist die Multiplikation konjugiert komplexer Zahlen. Sie ergibt wegen

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

den

Satz 5: Das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist positiv reell und gleich ihrer gemeinsamen Norm.

Ist ein Faktor des Produktes $(a+bi)(c+di)$, etwa $c+di$, gleich Null, was nur für $c=d=0$ eintreten kann, so ist auch der Wert des Produktes gleich Null. Nun ist die Norm des Produktes gleich

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\,.$$

Soll das Produkt verschwinden, so muß seine Norm verschwinden. Das ist nur der Fall, wenn

$$a^2+b^2 \quad \text{oder} \quad c^2+d^2$$

verschwindet, d. h. wenn eine der komplexen Zahlen verschwindet. Es gilt also der

Satz 6: Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist nur dann gleich Null, wenn wenigstens einer der Faktoren verschwindet.

§ 8. Division.

Wir definieren in gewohnter Weise den Quotienten zweier komplexer Zahlen $a+bi$ und $c+di$ als diejenige Zahl $x + yi$, die, mit $c + di$ multipliziert, $a + bi$ ergibt. Ihre Koordinaten bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b\,. \end{cases}$$

Diese ergeben

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,.$$

Es ist also

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i\,.$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir erhalten, wenn wir den Bruch $\frac{a + bi}{c + di}$ mit $c - di$ erweitert hätten. Es ist also auch die Division im Bereiche der komplexen Zahlen eine ausführbare und eindeutige Operation; sie ist nur dann nicht möglich, wenn $c^2 + d^2 = 0$ ist, d. h. wenn der Divisor verschwindet. Es folgt demnach:

Satz 7: Die Division durch Null ist auch im Bereiche der komplexen Zahlen eine unausführbare Operation.

Es läßt sich ferner leicht beweisen der auch für reelle Zahlen geltende

Satz 8: Die Division durch eine komplexe Zahl ist gleichbedeutend mit der Multiplikation mit dem reziproken Werte der Zahl.

Der reziproke Wert der Zahl $c + di$ ist nämlich

$$\frac{1}{c + di} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} \cdot i\,,$$

woraus der in Rede stehende Satz unmittelbar folgt.

§ 9. Zusammenfassung.

Aus dem bisher Betrachteten folgt, daß wir im Gebiete der komplexen Zahlen bezüglich der vier Grundrechnungsarten wie mit reellen Zahlen rechnen können. Wir sind daher berechtigt, die komplexen Zahlen mit einem einzigen Buchstaben zu bezeichnen und von ihnen in einfacherer Weise als von „Zahlen“ zu reden, was wir ja auch schon mehrmals getan haben.

Führen wir mit einer Reihe von Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine endliche Zahl von Operationen aus, die dem Gebiete der vier Grundrechnungsarten angehören, so erhalten wir eine bestimmte Zahl c als Resultat. Lassen wir an Stelle von $c_1, c_2, \ldots, c_n$ die konjugiert komplexen Zahlen $c_1', c_2', \ldots, c_n'$ treten, so ist das Ergebnis die zu c konjugiert komplexe Zahl c'. Es genügt, diesen Satz für zwei Zahlen c_1 und c_2 zu beweisen, doch möge die Ausführung dem Leser überlassen bleiben, da sie mit Hilfe des Bisherigen äußerst leicht zu bewerkstelligen ist.

§ 10. Absoluter Wert und Richtungsfaktor.

Verstehen wir unter $\sqrt{a^2 + b^2}$ die positive Quadratwurzel der Norm von $a + bi$, so können wir $a + bi$ in der Form schreiben:

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot i \right).$$

Der erste Faktor ist für alle eingehenden Untersuchungen von der größten Bedeutung; er wird nach Weierstraß der absolute Wert von $a + bi$ genannt und mit

$$|a + bi|$$

bezeichnet. Den zweiten Faktor nennen wir aus einem Grunde, den wir bald erkennen werden, den Richtungsfaktor von $a + bi$. Er hat den absoluten Wert 1. Für die absoluten Werte gelten eine Reihe von wichtigen Sätzen:

Satz 9: Der absolute Wert des Produktes zweier Zahlen ist gleich dem Produkte der absoluten Werte der Faktoren.

Die Norm des Produktes $(a + bi)(c + di)$ ist nämlich, wie früher gezeigt, gleich $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, woraus der zu beweisende Satz unmittelbar folgt.

Analog folgt aus der Gleichung

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Satz 10: Der absolute Wert des Quotienten zweier Zahlen ist gleich dem Quotienten der absoluten Werte von Zähler und Nenner.

Ferner gilt der

Satz 11: Der absolute Wert der Summe zweier Zahlen ist nicht größer als die Summe und nicht kleiner als die Differenz der absoluten Werte der Summanden.

Setzen wir nämlich

$$|a + bi| = r, \quad |c + di| = \varrho$$

und

$$|(a + c) + (b + d)i| = R,$$

so ist der Ausdruck

$$(r + \varrho)^2 - R^2 = 2\left[\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} - (ac + bd)\right]$$

nicht kleiner als Null, denn die Differenz der Quadrate des Minuendus und Subtrahendus der Klammer hat den Wert $(ad - bc)^2$; er verschwindet nur dann, wenn

$$a : b = c : d$$

ist. Es ist also

$$R \leqq r + \varrho\,.$$

In gleicher Weise können wir den zweiten Teil des Satzes beweisen. Wir nehmen etwa $r > \varrho$ an (denn im Falle $r = \varrho$ ist der Satz evident) und betrachten die Differenz

$$R^2 - (r - \varrho)^2.$$

Es folgt

$$R \geqq r - \varrho\,.$$

Auch hier findet die Gleichheit nur statt, wenn $a:b = c:d$.

Die Bedingung $a:b = c:d$ ist also notwendig dafür, daß der absolute Wert der Summe zweier Zahlen einen der Grenzwerte annimmt; sie ist aber für diesen Zweck auch hinreichend. Sie ist nämlich erfüllt, wenn $c = \lambda a$ und $d = \lambda b$ gesetzt wird, wo λ eine positive oder negative reelle Zahl bedeutet. Ist also zunächst λ positiv, so ist

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &= (1+\lambda)\sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}\,,\end{aligned}$$

also

$$R = r + \varrho\,.$$

Ist ferner λ negativ gleich $(-\lambda')$, so genügt es, wenn

$$|a + bi| > |c + di|$$

vorausgesetzt wird, λ' zwischen 0 und 1 anzunehmen. Dann ist

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &= (1-\lambda')\sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{(\lambda' a)^2 + (\lambda' b)^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\,,\end{aligned}$$

also

$$R = r - \varrho\,.$$

Ist $a:b = c:d$ und haben c und d bezüglich dieselben oder die entgegengesetzten Vorzeichen wie a und b, so besitzen die Zahlen $a + bi$ und $c + di$ bezüglich die gleichen oder die entgegengesetzten Richtungsfaktoren.

Wir können somit das Ergebnis der vorangehenden Untersuchung wie folgt ergänzen:

Satz 12: Der absolute Wert der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe oder der Differenz der absoluten Werte der Summanden, je nachdem die beiden Zahlen gleiche oder entgegengesetzte Richtungsfaktoren haben.

Die bewiesenen Sätze sind einer Verallgemeinerung fähig:

Satz 13: Der absolute Wert des Produktes mehrerer Zahlen ist gleich dem Produkte der absoluten Werte der Faktoren.

Satz 14: Der absolute Wert der Summe mehrerer Zahlen ist nicht größer als die Summe der absoluten Werte der Summanden. Er ist ihr gleich, wenn alle Summanden die gleichen Richtungsfaktoren haben.

§ 11. Trigonometrische Darstellung einer Zahl.

Der Umstand, daß die Norm des Richtungsfaktors gleich 1 ist, gibt Anlaß zur Darstellung einer Zahl in trigonometrischer Form. Bezeichnet r den absoluten Wert von $a + b i$, so ist

$$a + b i = r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \cdot i\right).$$

Es läßt sich dann stets ein und nur ein Winkel φ angeben, für den $0 \leqq \varphi < 2\pi$ ist und der den Gleichungen genügt:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Die Vorzeichen von a und b ergeben zunächst die Lage des Winkels φ innerhalb der vier Quadranten, dann vollendet die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

die Bestimmung. Eine jede Zahl $a + bi$ kann also stets und nur in einer Weise in der Form

$$a + bi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

dargestellt werden, in der r ihren absoluten Wert bedeutet und φ der Ungleichung $0 \leqq \varphi < 2\pi$ genügt. φ heißt der Arcus von $a + bi$. Lassen wir die Beschränkung für den Arcus fallen, so ist er nur bis auf ganzzahlige Vielfache der Zahl 2π bestimmt. Ist dann φ_0 derjenige Wert des Arcus, für den $0 \leqq \varphi_0 < 2\pi$, so ist allgemein $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. φ_0 heißt der Hauptwert des Arcus. Diese allgemeinere Fassung ist für viele Fragen von Bedeutung.

§ 12. Multiplikation und Division in trigonometrischer Darstellung.

Die trigonometrische Darstellung von Zahlen ist von Bedeutung für die Multiplikation und Division, sowie für die Potenzierung und Radizierung.

Es sei

$$c_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$c_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Dann ist

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)]$$
$$= r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Satz 15: Der Arcus des Produktes zweier Zahlen ist gleich der Summe der Arcus der Faktoren.

Ferner ist

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}.$$

Erweitern wir den zweiten Bruch der rechten Seite mit $\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2$, so wird der Nenner gleich 1, der Zähler gleich

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2).$$

Es ist also:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Satz 16: Der Arcus des Quotienten zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Arcus von Zähler und Nenner.

§ 13. Der Moivresche Satz.

Der erste der eben entwickelten Sätze kann auf beliebig viele Faktoren erweitert werden. Es ist nämlich

$$c_1c_2\ldots c_n = r_1r_2\ldots r_n\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Ist

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$$
$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi,$$

so wird

$$c^n = [r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)].$$

Diese Formel trägt den Namen des Moivreschen Satzes. Sie ist zunächst nur für positive Zahlen n entwickelt, aber es läßt sich zeigen, daß sie auch für beliebige Zahlen Gültigkeit behält. Wir wollen uns indes auf rationale reelle Zahlen beschränken. Es sei zunächst $n = -m$ eine negative ganze Zahl. Dann ist

$$c^n = c^{-m} = \frac{1}{c^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)}.$$

Erweitern wir mit $(\cos m\varphi - i\sin m\varphi)$ und berücksichtigen, daß $\frac{1}{r^m} = r^{-m} = r^n$ ist, so ergibt sich

$$c^n = r^n \cdot (\cos m\,\varphi - i\sin m\,\varphi)$$
$$c^n = r^n \cdot (\cos n\,\varphi + i\sin n\,\varphi)\,.$$

Der **Moivresche** Satz gilt also auch für negative ganze Zahlen n.

Nunmehr sei $n = \frac{1}{p}$ ein Bruch mit dem positiven ganzzahligen Nenner p und dem Zähler 1. Verstehen wir dann unter $c^n = c^{\frac{1}{p}}$ diejenige Zahl

$$\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

deren $p$te Potenz gleich $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist, so besteht die Gleichung

$$\varrho^p(\cos p\,\vartheta + i\sin p\,\vartheta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Sie ergibt

$$\begin{cases} \varrho^p \cos p\,\vartheta = r\cos\varphi \\ \varrho^p \sin p\,\vartheta = r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Quadrieren und addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$\varrho^{2p} = r^2.$$

Es ist also

$$\varrho^p = r \qquad \text{und} \qquad \varrho = r^{\frac{1}{p}} \qquad \left(r^{\frac{1}{p}} \text{ positiv}\right).$$

Die obigen Gleichungen lassen sich dann in der Form schreiben

$$\begin{cases} \cos p\,\vartheta = \cos\varphi \\ \sin p\,\vartheta = \sin\varphi\,. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $\cos\varphi$, die zweite mit $\sin\varphi$ und addieren sie, so folgt

$$\cos p\,\vartheta \cdot \cos\varphi + \sin p\,\vartheta \cdot \sin\varphi = \cos(p\,\vartheta - \varphi) = 1.$$

Es ist somit

$$p\,\vartheta = \varphi + 2\,k\,\pi\,,$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. $p\,\vartheta$ ist also gleich dem Arcus von c in seiner allgemeinen Form. Nehmen wir diese Form von vornherein an, so können wir einfacher schreiben:

$$p\,\vartheta = \varphi\,, \qquad \text{also} \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{p}\,.$$

Es ist demnach

$$c^{\frac{1}{p}} = r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\varphi}{p} + i\cdot\sin\frac{\varphi}{p}\right).$$

Schreiben wir statt $\frac{1}{p}$ wieder n, so ist wiederum

$$c^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\,\varphi + i\sin n\,\varphi)\,.$$

Der Moivresche Satz gilt also auch für den Fall, daß n ein positiver rationaler Bruch mit dem Zähler 1 ist. Die Ausdehnung auf beliebige rationale Brüche n bietet nunmehr keine Schwierigkeiten: sie sei dem Leser überlassen

§ 14. Mehrdeutigkeit der Wurzelziehung.

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Ist $\varphi = \varphi_0 + 2\,k\,\pi$, wo φ_0 den Hauptwert des Arcus von c bedeutet, so ist

$$\sqrt[n]{c} = r^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\,k\,\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi_0 + 2\,k\,\pi}{n}\right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\,k\,\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\,k\,\pi}{n}\right).$$

Setzen wir k die Werte $1, 2, \ldots n$ ein, so erhalten wir n voneinander verschiedene Werte von $\sqrt[n]{c}$. Eine jede von ihnen ergibt sich aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

wie der Moivresche Satz zeigt. Im besonderen ist der Wert von $\sqrt[n]{c}$ für den Fall $k = n$ gleich

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right).$$

Bezeichnen wir den allgemeinen Wert von $\sqrt[n]{c}$ mit $\left(\sqrt[n]{c}\right)_k$, so ist

$$\left(\sqrt[n]{c}\right)_k = \left(\sqrt[n]{c}\right)_n \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= \left(\sqrt[n]{c}\right)_n \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

Der Ausdruck $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$ ändert seinen Wert nicht, wenn k sich um ein ganzzahliges Vielfaches von n ändert, wie der Moivresche Satz zeigt. Die Werte von $\sqrt[n]{c}$ für $k = 1, 2, \ldots n$ sind also die sämtlichen voneinander verschiedenen Werte, die $\sqrt[n]{c}$ überhaupt annehmen kann.

Die Operation $\sqrt[n]{c}$ ist also $n$deutig, oder anders gesagt: die Gleichung $x^n = c$ hat n voneinander verschiedene Wurzeln.

§ 15. **Spezialfälle.**

Wenn die zweite Koordinate von c von Null verschieden ist, so befindet sich unter den n Wurzeln keine reelle, da eine ganzzahlige Potenz einer reellen Zahl nicht komplex sein kann.

Ist c positiv reell, also $\varphi_0 = 0$, so sind je zwei Wurzeln mit der Indexsumme n konjugiert komplex. Die Gleichung $z^n = c$ hat also, wenn n gerade ist, die reellen Wurzeln

$$z_{\frac{n}{2}} = -\sqrt[n]{r} = -\sqrt[n]{c} \qquad \text{und} \qquad z_n = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{c}.$$

Ist aber n ungerade, so ist nur die eine relle Wurzel

$$z_n = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{c}$$

vorhanden.

Ist c negativ reell und mithin $\varphi_0 = \pi$, so ist nur im Falle eines ungeraden n eine reelle Wurzel vorhanden. Sie heißt $-\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{c}$.

Wichtig ist noch der Spezialfall $c = 1$. Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ bezeichnet man mit dem Namen $n =$ te Einheitswurzeln. Sie sind von der Form

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Eine jede von ihnen ist gleich der $k$ten Potenz der ersten von ihnen.

§ 16. Geometrische Darstellung.

Die trigonometrische Form einer Zahl gibt Anlaß zu einer von Gauß und Argand in die Analysis eingeführten, ursprünglich von Wessel herrührenden geometrischen Darstellung.

In einer Ebene, der sog. komplexen Ebene, nehmen wir zwei aufeinander senkrechte Gerade an und bezeichnen die eine als die reelle, die andere als die imaginäre Achse.

Von dem Schnittpunkte O der Achsen ausgehend, setzen wir auf jeder von diesen eine Richtung als die positive, die entgegengesetzte als die negative fest. Auf dem positiven Teil der reellen Achse nehmen wir beliebig (für die Praxis nicht zu weit von O entfernt) einen Punkt E an, den wir den Einheitspunkt nennen und als das geometrische Bild der Zahl 1 ansehen. Dann erklären wir als das Bild der Zahl $c = a + bi$ denjenigen Punkt der komplexen Ebene, dessen Koordinaten, in der Einheit OE gemessen, in bezug auf die reelle und imaginäre Achse bzw. die Werte a und b haben. Damit ist nach den Grundanschauungen der analytischen Geometrie der Ebene jeder Zahl ein und nur ein Punkt der komplexen Zahlenebene zugeordnet und umgekehrt. Dem Schnittpunkte der Achsen entspricht die Zahl Null, den Punkten der reellen Achse die reellen Zahlen, denen der imaginären Achse die rein imaginären Zahlen.

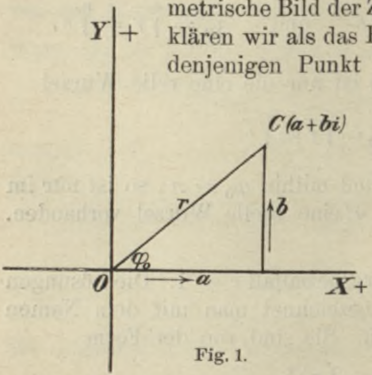

Fig. 1.

Der Radiusvektor OC hat die Länge $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, wir erkennen in ihm das geometrische Bild des absoluten Wertes von c wieder. Der Winkel $XOC = \varphi_0$ stellt wegen

$$\cos\varphi_0 = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi_0 = \frac{b_0}{r}$$

den Hauptwert des Arcus der komplexen Zahl dar.

Die Bilder von Zahlen mit gleicher erster Koordinate liegen auf einer Parallelen zur imaginären Achse, die von

Zahlen mit gleicher zweiter Koordinate auf einer Parallelen zur reellen Achse. Die Bilder von Zahlen gleichen absoluten Wertes liegen auf der Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt, der den geometrischen Repräsentanten des absoluten Wertes zum Radius hat.

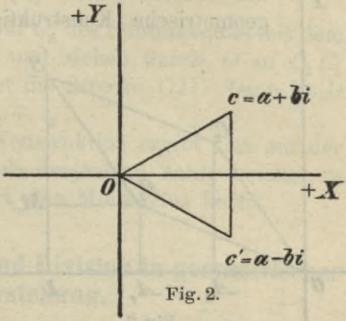

Fig. 2.

Die Verbindungslinie der Bilder entgegengesetzt gleicher Zahlen geht durch den Nullpunkt und wird von ihm halbiert. Die zu $c = a + bi$ konjugierte Zahl $c' = a - bi$ ist in geometrischer Redeweise das Spiegelbild von c bezüglich der reellen Achse, ebenso c das Spiegelbild von c'.

§ 17. Addition und Subtraktion in geometrischer Darstellung.

Es seien C_1 und C_2 die Bilder zweier Zahlen

$$c_1 = a_1 + b_1 i \quad \text{und} \quad c_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

Ziehen wir zu den Radienvektoren OC_1 und OC_2 durch C_2 bzw. C_1 die Parallelen, welche sich in S schneiden, so ist S das Bild der Summe $c_1 + c_2$.

Dann fällen wir von C_1, C_2 und S die Lote auf die reelle Achse und bezeichnen sie in der Weise der Figur, so ist

$$\begin{aligned} OL &= OA_1 + A_1L = OA_1 + C_1M \\ &= OA_1 + OA_2 = a_1 + a_2 \\ LS &= LM + MS = A_1C_1 + A_2C_2 = b_1 + b_2\,, \end{aligned}$$

wie es der Definition $c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$ entspricht.

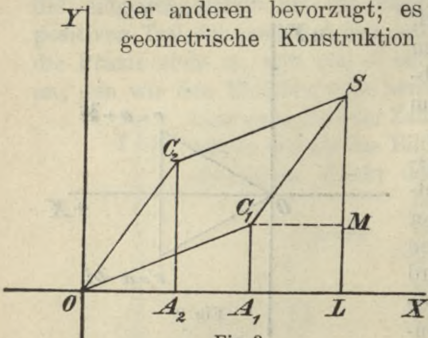

Fig. 3.

Bei der Konstruktion ist keine der Zahlen c_1, c_2 vor der anderen bevorzugt; es zeigt also auch die geometrische Konstruktion die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes der Addition.

Da $C_1 S$ der Länge nach gleich $O C_2$ ist, so können wir die Konstruktion auch in der Weise vornehmen, daß wir von C_1 aus eine der $O C_2$ gleiche und gleichgerichtete Strecke ziehen, deren Endpunkt S dann die Summe darstellt. In dieser Fassung kann die Konstruktion leicht auf eine größere Zahl von Summanden verallgemeinert werden.

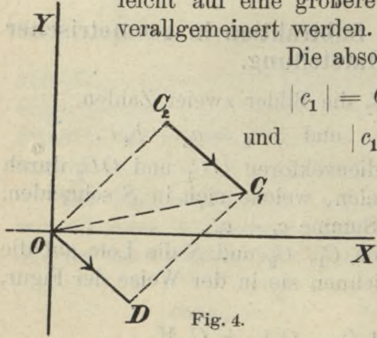

Fig. 4.

Die absoluten Werte

$$|c_1| = O C_1, \quad |c_2| = C_1 S$$

und

$$|c_1 + c_2| = O S$$

sind die Seiten des Dreiecks $O C_1 S$. Wir erkennen somit, daß in der geometrischen Darstellung die Sätze über den absoluten Wert der Summe zweier komplexer Zahlen zurückkommen auf den Dreieckssatz: Jede Seite eines Dreiecks ist nicht größer als die Summe der beiden anderen und nicht kleiner als ihre Differenz.

Aus der Darstellung der Summe ergibt sich sofort die der Differenz:

Wir verbinden das Bild C_2 des Subtrahendus mit dem Bild C_1 des Minuendus und ziehen durch O zu C_2C_1 gleich und gleichgerichtet die Strecke OD. Dann ist D das Bild der Differenz $c_1 - c_2$.

Die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich aus der Definition der Differenz als derjenigen Zahl, welche, zu dem Subtrahendus addiert, den Minuendus liefert.

§ 18. Multiplikation und Division in geometrischer Darstellung.

Es seien C_1 und C_2 die Bilder zweier Zahlen

$$c_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$c_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

E das Bild des Einheitspunktes. Es ist

$$c_1 \cdot c_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Konstruktion des Produktes:

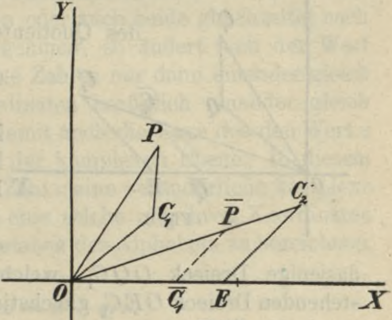

Fig. 5.

Wir ziehen OC_1, OC_2 und EC_2 und zeichnen über OC_1 dasjenige Dreieck OC_1P, welches zu dem über OE liegenden Dreieck OEC_2 gleichstimmig ähnlich ist.

Dann stellt P das Produkt $C_1 C_2$ dar. Da nämlich $\sphericalangle C_1 O P = \sphericalangle E O C_2$ ist, so ist

$$\sphericalangle E O P = \sphericalangle E O C_1 + \sphericalangle E O C_2 = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Ferner ist

$$O P : O C_1 = O C_2 : O E$$

oder

$$O P = \frac{O C_1 \cdot O C_2}{O E} = r_1 r_2 .$$

Die Konstruktion des gleichstimmig ähnlichen Dreiecks nehmen wir am einfachsten in der folgenden Weise vor:

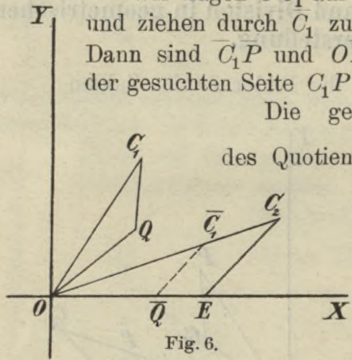

Fig. 6.

Wir tragen $O C_1$ auf $O E$ von O aus bis $\overline{C}_1$ ab und ziehen durch $\overline{C}_1$ zu $E C_2$ die Parallele $\overline{C}_1 \overline{P}$. Dann sind $\overline{C}_1 \overline{P}$ und $O \overline{P}$ bezüglich die Längen der gesuchten Seite $C_1 P$ und $O P$.

Die geometrische Darstellung des Quotienten $\frac{c_1}{c_2}$ folgt sogleich aus der des Produktes: C_1 sei das Bild des Zählers, C_2 das des Nenners, E der Einheitspunkt. Wir ziehen $O C_1$, $O C_2$ und $E C_2$ und zeichnen über $O C_1$ dasjenige Dreieck $O Q C_1$, welches zu dem über $O C_2$ stehenden Dreieck $O E C_2$ gleichstimmig ähnlich ist. Dann ist Q das Bild des Quotienten.

Die Richtigkeit der Konstruktion folgt aus der Definition des Quotienten $\frac{c_1}{c_2}$ als derjenigen Zahl, welche, mit c_2 multipliziert, c_1 ergibt.

Die Seiten OQ und QC_1 erhalten wir am einfachsten, indem wir auf OC_2 von O aus die Strecke OC_1 bis $\bar{C}_1$ abtragen und durch $\bar{C}_1$ zu C_2E die Parallele ziehen, die OE in $\bar{Q}$ schneidet. Dann sind $O\bar{Q}$ und $\overline{QC_1}$ bezüglich die Längen der Strecken OQ und QC_1.

Zweiter Abschnitt.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 19. Die komplexe Veränderliche.

Lassen wir in der komplexen Zahl $c = a + bi$ eine der beiden Koordinaten oder auch beide gleichzeitig nach und andere Werte annehmen, so ändert sich der Wert von c, da zwei komplexe Zahlen nur dann einander gleich sind, wenn ihre Koordinaten bezüglich einander gleich sind. Es ändert sich damit auch die Lage des den Wert c darstellenden Punktes der komplexen Ebene. In diesem Sinne nennen wir die Zahl c eine veränderliche komplexe Zahl. Es ist üblich, eine solche mit ihren Koordinaten durch die letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, also etwa zu schreiben:

$$z = x + yi.$$

Die Veränderlichkeit einer komplexen Zahl ist demnach gleichbedeutend mit der von zwei reellen Zahlen oder wenigstens einer reellen Zahl.

Erteilen wir y einen festen Wert y_0 und lassen x alle möglichen reellen Werte annehmen, so liegt der

Bildpunkt von z auf derjenigen Parallelen zur reellen Achse, welche durch den Punkt $y_0 i$ hindurchgeht. Erteilen wir andererseits x einen festen Wert x_0 und lassen y alle möglichen reellen Werte annehmen, so liegt der Bildpunkt von z auf derjenigen Parallelen zur imaginären Achse, die durch den Punkt x_0 hindurchgeht. Schreiben wir vor, daß zwischen den reellen Veränderlichen x und y die reelle Beziehung $f(x, y) = 0$ bestehen soll, so liegt der Punkt z auf der durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ etwa dargestellten Kurve der komplexen Ebene. So entsprechen der Beziehung $ax + by + c = 0$, in der a, b, c reelle Zahlen bezeichnen, die Punkte z einer geraden Linie der komplexen Ebene, der Beziehung $x^2 + y^2 = r^2$ (r reell) die Punkte z des Kreises, der mit dem Radius r um den Nullpunkt beschrieben ist, u. dgl. mehr.

Wir erwähnen hier sogleich zwei für das Rechnen mit komplexen Veränderlichen wichtige Definitionen:

Definition 1: Eine komplexe Veränderliche wird unendlich klein, wenn ihr absoluter Wert kleiner wird als jede noch so kleine positive Zahl.

Das kann natürlich nur dann der Fall sein, wenn beide Koordinaten gleichzeitig dem absoluten Werte nach unendlich klein werden.

Definition 2: Eine komplexe Veränderliche wird unendlich groß, wenn ihr absoluter Wert größer wird als jede noch so große positive Zahl.

Es genügt für diesen Zweck bereits, wenn eine der Koordinaten dem absoluten Wert nach unendlich groß wird.

§ 20. Begriff der (eindeutigen) komplexen Funktion von z.

Wir sagen von einer reellen Veränderlichen y, sie sei eine eindeutige Funktion der reellen Veränderlichen x, wenn eine Vorschrift besteht, nach der wir jedem Werte von x, der überhaupt in Betracht kommt, einen und nur einen Wert von y zuordnen können. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß sich y aus x und konstanten Zahlen durch eine endliche Zahl von Operationen ergibt, die dem Gebiete der vier Grundrechnungsarten angehören.

Sind nun $z = x + yi$ und $w = u + vi$ zwei komplexe Veränderliche, so werden wir versucht sein, die obige Definition auch auf sie auszudehnen, also zu sagen, daß w eine eindeutige Funktion von z sei, wenn sich jedem Werte von z ein und nur ein Wert von w zuordnen läßt. Das ist in der Tat möglich; denn sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstante Zahlen, so ist der Ausdruck

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdot a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n,$$

den wir eine ganze rationale Funktion von z nennen, von der Beschaffenheit, daß jedem Werte von z ein und nur ein Wert von w entspricht. Das gleiche ist der Fall für einen Ausdruck der Form

$$w = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b n},$$

in dem die Größen a und b konstante Zahlen bezeichnen und den wir eine gebrochene rationale Funktion von z nennen. Ausgenommen sind nur diejenigen Werte von z, für die etwa der Nenner Null wird.

Allgemein können wir einen jeden Ausdruck der Form

$$w = X + Yi,$$

in dem X und Y irgendwelche eindeutigen reellen Funktionen von x und y bedeuten, die nur der Beschränkung unterliegen, daß sie innerhalb eines gewissen Bereiches für x und y gleichzeitig definiert sein müssen, als Funktion von z ansehen. Ist nämlich z_0 ein Wert, den z annehmen kann, so sind zugleich die beiden Werte x_0 und y_0 der Koordinaten von z_0 bestimmt, damit aber auch zwei Werte X_0, Y_0 und schließlich auch ein und nur ein Wert

$$w_0 = X_0 + Y_0 i.$$

Definition 3: Eine komplexe Veränderliche w heißt eine (eindeutige) komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen z, wenn sich jedem Werte von z ein und nur ein Wert von w zuordnen läßt.

In diesem Sinne sind also die ganzen rationalen Funktionen von z und die gebrochenen rationalen Funktionen von z eindeutige komplexe Funktionen von z. Wir werden statt der Bezeichnung w, um die Abhängigkeit von z auszudrücken, häufig die Bezeichnung $f(z)$ gebrauchen. Wir erwähnen noch den einleuchtenden

Satz 17: Die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient zweier komplexen Funktionen von z sind wieder komplexe Funktionen von z.

§ 21. Der Begriff der Grenze.

Da in $w = f(z) = X + Yi$ X und Y innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden können, so liegt in der Definition der komplexen Funktionen eine große Willkür. Wir werden jetzt einen Begriff kennen lernen, der für uns von Wichtigkeit sein wird: den Begriff der Grenze. Er wird uns später dazu dienen, die erwähnte Willkür zu beseitigen und eine Klasse eindeutiger komplexer Funktionen von z zu definieren, die in ihren Eigenschaften große Übereinstimmung mit den reellen Funktionen reeller Veränderlicher haben. Wir wollen den Begriff der Grenze und die für ihn geltenden Sätze zunächst rein theoretisch erörtern und sodann an einer Reihe von Beispielen erläutern.

Definition 4: Eine komplexe Funktion $f(z)$ von z hat für $z = z_0$ den Wert c zur Grenze, wenn sich, falls ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, eine positive Zahl δ derart bestimmen läßt, daß die Ungleichung

$$|f(z) - c| < \varepsilon$$

für alle Werte von z erfüllt ist, die der Bedingung genügen

$$|z - z_0| > \delta .$$

Wenn $f(z)$ für $z = z_0$ den Wert c zur Grenze hat, so schreiben wir kurz

$\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$ (gelesen limes $f(z)$ für $z = z_0$ gleich c).

Ist c von Null verschieden, so läst sich aus der ersten Ungleichung eine Folgerung ziehen, die das Abstrakte der Definition in gewisser Weise mildert. Nach Satz 11, § 10 sind nämlich sowohl

$|f(z)| - |c|$ als auch $|c| - |f(z)|$ kleiner als $|f(z) - c$

Ist also $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, so gelten gleichzeitig die Ungleichungen

$$|f(z)| - |c| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |c| - |f(z)| < \varepsilon$$

für alle Werte von z, die der Bedingung genügen, daß $|z - z_0|$ kleiner ist als die zu ε gehörige positive Zahl δ. Für die Veränderlichkeit von $|f(z)|$ sind somit zwei Grenzen gegeben.

Satz 18: Ist $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, und bezeichnen ε und δ die die Existenz der Grenze bestimmenden positiven Zahlen, so besteht für alle Werte von z, die der Bedingung $|z - z_0| < \delta$ genügen, die Doppelungleichung:

$$|c| - \varepsilon < |f(z)| < |c| + \varepsilon .$$

Auch eine geometrische Veranschaulichung ist häufig von Nutzen: Ist $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, so unterscheidet sich der Wert $|f(z)|$ für alle Punkte innerhalb des mit dem Radius δ um den Punkt z_0 geschlagenen Kreises von $|c|$ höchstens um $\pm \varepsilon$.

Einer besonderen Formulierung bedarf die Definition der Grenze für den Fall, daß eine der Zahlen z_0 und c oder auch beide die Fähigkeit haben, unendlich groß zu werden.

Definition 5: Eine komplexe Funktion $f(z)$ von z wird für $z = z_0$ unendlich groß, wenn sich zu einer beliebig großen positiven Zahl N eine positive Zahl δ derart bestimmen läßt, daß für alle Werte, die der Bedingung $|z - z_0| < \delta$ genügen, die Ungleichung besteht

$$|f(z)| > N.$$

In diesem Falle überschreitet also $|f(z)|$ jede noch so große positive Zahl, wenn z innerhalb eines gewissen Kreises um z_0 als Mittelpunkt liegt. Die Tatsache, daß $f(z)$ für $z = z_0$ unendlich groß wird, schreiben wir kurz

$$\lim_{z=z_0} f(z) = \infty.$$

Definition 6: Eine komplexe Funktion hat den Wert c zur Grenze, wenn z unendlich groß wird, falls sich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl N derart bestimmen läßt, daß für alle Werte von z, die der Bedingung $|z| > N$ genügen, die Ungleichung besteht

$$|f(z) - c| < \varepsilon.$$

Die kurze Schreibweise dafür lautet $\lim\limits_{z=\infty} f(z) = c$.

Definition 7: Eine komplexe Funktion von z wird gleichzeitig mit z unendlich groß, wenn sich zu einer beliebig großen positiven Zahl M eine andere positive Zahl N derart bestimmen läßt, daß für alle Werte von z, die der Bedingung $|z| > N$ genügen, die Ungleichung besteht

$$|f(z)| > M.$$

Die kurze Schreibweise dafür lautet $\lim\limits_{z=\infty} f(z) = \infty$.

§ 22. Sätze über den Grenzbegriff.

Für den Grenzbegriff gelten eine Anzahl von wichtigen Sätzen, die wir der Reihe nach mit ihren Beweisen anführen wollen. Ihre Kenntnis ist unerläßlich, weil wir ihrer zur Begründung der Lehre von der Stetigkeit der komplexen Funktionen bedürfen.

Satz 19: Der Grenzwert der Summe einer endlichen Zahl komplexer Funktionen für den Wert $z = z_0$ ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden.

$$\lim_{z=z_0}[f(z) + g(z)] = \lim_{z=z_0} f(z) + \lim_{z=z_0} g(z).$$

Beweis: Sei $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = d$.

Bezeichnet ε eine beliebig kleine positive Zahl, so lassen sich zwei positive Zahlen δ_1 und δ_2 derart angeben, daß

$$|f(z) - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wenn } |z - z_0| < \delta_1,$$

$$|g(z) - d| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wenn } |z - z_0| < \delta_2.$$

Nun ist nach Satz 11, § 10

$$|f(z) + g(z) - (c + d)| < |f(z) - c| + |g(z) - d|.$$

Nehmen wir also $|z - z_0|$ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen δ_1 und δ_2 an, so ist

$$|f(z) + g(z) - (c + d)| < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung für zwei Summanden erwiesen, für n Summanden brauchen wir nur $\frac{\varepsilon}{2}$ durch $\frac{\varepsilon}{n}$ zu ersetzen.

Anmerkung: Der Satz bleibt gültig, wenn $z_0 = \infty$. Beweis nach Definition 6, § 21.

Er gilt auch für den Fall, daß eine der Grenzen, etwa d, unendlich groß wird:

Satz 20: Ist $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, aber $\lim\limits_{z=z_0} g(z) = \infty$, so ist auch $\lim\limits_{z=z_0} [f(z) + g(z)] = \infty$.

Beweis: Sei $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, $\lim\limits_{z=z_0} g(z) = \infty$.

Bezeichnet ε eine beliebig kleine positive Zahl, N eine beliebig große positive Zahl, so lassen sich zwei positive Zahlen δ_1 und δ_2 derart bestimmen, daß die Ungleichungen bestehen

$$|f(z)| < |c| + \varepsilon, \quad \text{wenn } |z - z_0| < \delta_1$$

(Satz 18, § 21),

$$|g(z)| > N + |c| + \varepsilon, \quad \text{wenn } |z - z_0| < \delta_2$$

(Definition 5, § 21).

Nehmen wir $|z - z_0|$ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen δ_1 und δ_2 an, so folgt

$$\begin{aligned} |f(z) + g(z)| &> |g(z)| - |f(z)| \\ &> N + |c| + \varepsilon - (|c| + \varepsilon) \\ &> N. \end{aligned}$$

Es wird also auch $f(z) + g(z)$ für $z = z_0$ unendlich wenn $g(z)$ für $z = z_0$ unendlich wird. Sollte sowohl $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = \infty$ als auch $\lim\limits_{z=z_0} g(z) = \infty$ sein, so braucht das Bewiesene nicht durchaus zu gelten.

Satz 21: Der Grenzwert der Differenz zweier komplexer Funktionen von z für den Wert $z = z_0$ ist gleich der Differenz der Grenzwerte von Minuendus und Subtrahendus

$$\lim_{z=z_0}[f(z) - g(z)] = \lim_{z=z_0} f(z) + \lim_{z=z_0} g(z).$$

Der Beweis ergibt sich wegen

$$|f(z) - g(z) - (c - d)| < |f(z) - c| + |g(z) - d|$$

leicht aus dem Vorigen.

Anmerkung: Der Satz bleibt gültig, wenn $z_0 = \infty$. Beweis nach Definition 6, § 21.

Satz 22: Der Grenzwert des Produktes einer endlichen Zahl komplexer Funktionen von z für den Wert $z = z_0$ ist dem Produkte der Grenzwerte der Faktoren gleich:

$$\lim_{z=z_0}[f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z=z_0} f(z) \cdot \lim_{z=z_0} g(z).$$

Beweis: Sei $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$, $\lim\limits_{z=z_0} g(z) = d$, ε ein beliebig kleiner positiver echter Bruch und die Zahl ε' definiert durch

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|c| + |d| + 1},$$

so daß auch $0 < \varepsilon' < 1$. Nach der Voraussetzung lassen sich dann zwei positive Zahlen δ_1 und δ_2 derart bestimmen, daß

$$|f(z) - c| < \varepsilon', \text{ wenn } |z - z_0| < \delta_1 \text{ (Definition 4, § 21),}$$

$$|g(z) - d| < \varepsilon', \text{ wenn } |z - z_0| < \delta_2 \text{ (Definition 4, § 21),}$$

$$|g(z)| < |d| + \varepsilon', \text{ wenn } |z - z_0| < \delta_1 \text{ (Satz 18, § 21).}$$

Für alle Werte von z, die der Bedingung genügen, daß

$|z - z_0|$ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen δ_1 und δ_2 ist, gilt dann

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot g(z) - cd| &= |f(z)g(z) - cg(z) + cg(z) - cd| \\ &\leqq |g(z)| \cdot |f(z) - c| + |c| \cdot |g(z) - d| \\ &< (|d| + \varepsilon')\varepsilon' + |c| \cdot \varepsilon' \\ &< |c| \cdot \varepsilon' + |d| \cdot \varepsilon' + \varepsilon'^2 \\ &< (|c| + |d| + 1) \cdot \varepsilon', \quad \text{denn } \varepsilon'^2 < \varepsilon' \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Der Satz ist damit zunächst für zwei Veränderliche bewiesen, seine allgemeine Gültigkeit folgt durch den Schluß von n auf $n + 1$.

Anmerkung: Es ist $\lim\limits_{z=\infty}[c \cdot f(z)] = c \cdot \lim\limits_{z=\infty} f(z)$. Beweis nach Definition 6, § 21.

Satz 23: Der Grenzwert des reziproken Wertes einer komplexen Funktion ist gleich dem reziproken Werte des Grenzwertes der Funktion selbst, wenn dieser von Null verschieden ist

$$\lim_{z=z_0}\left[\frac{1}{f(z)}\right] = \frac{1}{\lim\limits_{z=z_0} f(z)}.$$

Beweis: Es sei $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$ ungleich Null. Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl und ε' definiert durch

$$\varepsilon' = \frac{|c|^2 \cdot \varepsilon}{1 + |c| \cdot \varepsilon},$$

so läßt sich jedenfalls eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit bestimmen, daß

$$\left.\begin{aligned} |f(z_0) - c| &< \varepsilon' \\ |f(z)| &> |c| - \varepsilon' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{wenn } |z - z_0| < \delta \\ &\text{(Definition 4 und Satz 18, § 21).} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{c}\right|=\left|\frac{c-f(z)}{f(z)\cdot c}\right|=\frac{|f(z)-c|}{|f(z)|\cdot|c|}$$
$$<\frac{\varepsilon'}{|c|\cdot(|c|-\varepsilon')}<\varepsilon,$$

wie die Substitution des Wertes von ε' ergibt.

Durch Kombination der Sätze 22 und 23 folgt leicht:

Satz 24: Der Grenzwert des Quotienten zweier komplexer Funktionen von z für den Wert $z = z_0$ ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte von Zähler und Nenner (mit Ausnahme des Falles, daß für $z = z_0$ der Nenner verschwindet).

$$\lim_{z=z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{\lim\limits_{z=z_0} f(z)}{\lim\limits_{z=z_0} g(z)}.$$

Es bleibt uns noch zu zeigen, was geschieht, wenn der Grenzwert des Nenners verschwindet. Wir betrachten sogleich den allgemeineren Quotienten $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Satz 25: Ist $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = c$ von Null verschieden, $\lim\limits_{z=z_0} g(z)$ dagegen gleich Null, so ist $\lim\limits_{z=z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\infty$.

Beweis: Es sei N eine beliebig große Zahl, ferner sei ε definiert durch $\varepsilon=\frac{|c|}{N+1}$. Dann lassen sich jedenfalls zwei positive Zahlen δ_1 und δ_2 derart bestimmen, daß

$|f(z)| > |c| - \varepsilon$, wenn $|z - z_0| < \delta_1$ (Satz 18, § 21)

und

$|g(z)| < \varepsilon$, wenn $|z - z_0| < \delta_2$ (Def. 4, § 21).

Nehmen wir $|z - z_0|$ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen δ_1 und δ_2 an, so folgt

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| > \frac{|c| - \varepsilon}{\varepsilon} > N,$$

wie die Substitution des Wertes von ε zeigt. Es wird also nach Definition 5, § 21 $f(z)$ unendlich, wenn z sich z_0 unbegrenzt nähert.

Nach der Definition der komplexen Funktionen von z ist auch eine jede Konstante als komplexe Funktion von z anzusehen. Wir erkennen leicht, daß sie für jeden Wert z_0 von z ihren eigenen Wert zur Grenze hat. Setzen wir daher in dem eben bewiesenen Satze $f(z) = 1$ und statt $g(z)$ wieder $f(z)$, so können wir dem Satze die speziellere Fassung geben:

Satz 26: Ist $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = 0$, so ist $\lim\limits_{z=z_0}\left[\frac{1}{f(z)}\right] = \infty$.

§ 23. Beispiele.

1. Die lineare Funktion $f(z) = az + b$ ist als Spezialfall einer ganzen rationalen Funktion für alle endlichen Werte von z eine eindeutige komplexe Funktion von z. Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so besteht wegen

$$|f(z) - (az_0 + b)| = |a| \cdot |z - z_0|$$

die Ungleichung $|f(z) - (az_0 + b)| < \varepsilon$ für alle Werte von z, die der Bedingung genügen

$$|z - z_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Mithin folgt: die lineare Funktion $f(z) = az + b$ hat für $z = z_0$ den Grenzwert $az_0 + b[= f(z_0)]$.

2. Die Funktion $f(z) = az^n$.

Die Funktion az und z sind als Spezialfälle einer linearen Funktion komplexe Funktionen von z, die für

$z = z_0$ bezüglich die Grenzwerte $a z_0$ und z_0 haben. Daraus folgt durch Anwendung von Satz 22, § 22

$$\begin{aligned}\lim_{z=z_0}(a\,z^n) &= \lim_{z=z_0}[a\,z \cdot z \cdot z \ldots] \\ &= \lim_{z=z_0}(a\,z) \cdot \lim_{z=z_0} z \cdot \lim_{z=z_0} z \ldots \\ &= a\,z_0^n[= f(z_0)]\,.\end{aligned}$$

Die Funktion $f(z) = a\,z^n$ hat also für $z = z_0$ den Grenzwert $a\,z_0^n$.

3. **Satz 27:** Ist $|z| < 1$, so ist $\lim\limits_{n=\infty}(a\,z^n) = 0$.

Beweis: Es ist $|a\,z^n| = |a| \cdot |z|^n$. ε sei eine beliebig kleine positive Zahl. Wie bekannt, läßt sich der Wert der $n$ten Potenz eines positiven echten Bruches, falls n größer als eine hinreichend große Zahl N genommen wird, unter jede noch so kleine positive Zahl herabdrücken, so daß also z. B. die Ungleichung erfüllt werden kann

$$|z|^n < \frac{\varepsilon}{|a|}\,.$$

Dann ist auch $|a\,z^n| < \varepsilon$.

4. **Satz 28:** Ist $|z| > 1$, so ist $\lim\limits_{n=\infty}(a\,z^n) = \infty$.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

5. Aus Beispiel (2) und Satz 19, § 22 folgt: Eine ganze rationale Funktion von z hat für $z = z_0$ einen bestimmten Grenzwert, der gleich dem Werte der Funktion für $z = z_0$ ist.

6. Aus Beispiel 5 und Satz 24, § 22 folgt ferner: Eine gebrochene rationale Funktion von z hat einen bestimmten endlichen Grenzwert für jeden Wert von z, für den der Nenner von Null verschieden ist. Ist für einen Wert z_0 der Grenzwert des Zählers von Null verschieden, der Grenzwert des Nenners jedoch gleich Null,

so wird die gebrochene rationale Funktion für $z = z_0$ unendlich groß. (Satz 25, § 22.)

§ 24. Stetigkeit.

Wir bezeichnen, wie es auch schon im vorigen Paragraphen geschehen ist, mit $f(z_0)$ denjenigen Wert, den die komplexe Funktion annimmt, wenn wir in den analytischen Ausdruck von $f(z)$ die Zahl z_0 mit ihren Koordinaten x_0 und y_0 einführen. Ist $z_0 + \zeta$ ein Wert, der dem Definitionsbereich von $f(z)$ angehört, so können wir $f(z_0 + \zeta)$ als komplexe Funktion von ζ ansehen.

Definition 8: Eine komplexe Funktion $f(z)$ von z ist im Punkte $z = z_0$ stetig, wenn $f(z_0 + \zeta)$ für $\zeta = 0$ den Wert $f(z_0)$ zum Grenzwerte hat, in kurzer Schreibweise, wenn $\lim\limits_{\zeta=0} f(z_0 + \zeta) = f(z)$ ist.

In anderer Formulierung können wir sagen:

Definition 9: Eine komplexe Funktion $f(z)$ von z heißt im Punkte $z = z_0$ stetig, wenn sich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl δ derart bestimmen läßt, daß für alle Werte von ζ, die dem absoluten Werte nach kleiner als δ sind, die Ungleichung besteht

$$| f(z_0 + \zeta) - f(z_0) | < \varepsilon .$$

Haben die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ für $z = z_0$ bezüglich die Grenzwerte $f(z_0)$ und $g(z_0)$, so haben

$$f(z) + g(z), \quad f(z) - g(z), \quad f(z) \cdot g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)}$$

nach den Sätzen 19, 21, 22, 24 die Grenzwerte

$$f(z_0) + g(z_0), \quad f(z_0) - g(z_0), \quad f(z_0) \cdot g(z_0), \quad \frac{f(z_0)}{g(z_0)} .$$

Es gelten also die Sätze:

Satz 29: Die Summe einer endlichen Zahl komplexer Funktionen von z ist überall da stetig, wo die Summanden gleichzeitig stetig sind.

Satz 30: Die Differenz zweier komplexer Funktionen von z ist überall da stetig, wo Minuendus und Subtrahendus gleichzeitig stetig sind.

Satz 31: Das Produkt einer endlichen Zahl komplexer Funktionen von z ist überall da stetig, wo die Faktoren gleichzeitig stetig sind.

Satz 32: Der Quotient zweier komplexer Funktionen von z ist überall da stetig, wo Zähler und Nenner gleichzeitig stetig sind und der Nenner nicht verschwindet.

Ein Beispiel für die Stetigkeit bieten die rationalen Funktionen. Wir haben in § 23, 5 gesehen, daß, wenn $f(z)$ eine ganze rationale Funktion von z bezeichnet, $\lim\limits_{z=z_0} f(z) = f(z_0)$ ist. Daraus folgt:

Satz 33: Jede ganze rationale Funktion von z ist für alle endlichen Werte von z stetig.

Wir erkennen auch (Satz 32)

Satz 34: Jede gebrochene rationale Funktion ist für alle diejenigen Werte von z stetig, für die der Nenner nicht verschwindet.

§ 25. Begriff der Ableitung. Die reguläre Funktion.

Wir sind nun in den Stand gesetzt, die Willkür zu beseitigen, die in der Definition der komplexen Funktionen von z lag.

Es sei $f(z)$ eine komplexe Funktion von z, z_0 ein Punkt ihres Definitionsbereiches, $z_0 + \zeta$ ein benachbarter Punkt. Wir bilden den Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta}.$$

Es kann nun der Fall eintreten, daß für eine komplexe Funktion dieser Quotient einen bestimmten Grenzwert hat, wenn sich der Bildpunkt von $z_0 + \zeta$ dem von z_0 nähert, gleichviel, von welchem Punkte $z_0 + \zeta$ wir ausgehen und auf welchem Wege wir uns dem Punkte z_0 nähern. Dann sagen wir, die Funktion $f(z)$ habe im Punkte z_0 eine Ableitung, als deren Wert wir den betreffenden Grenzwert des Quotienten definieren. Diese Ableitung kann der Erklärung nach nur noch von z_0 abhängen. Wir bezeichnen sie in diesem Sinne mit $f'(z_0)$, allgemeiner auch für beliebige Werte von z mit $f'(z)$ oder $\frac{df(z)}{dz}$. Es ist also in kurzer Bezeichnung

$$f'(z_0) = \lim_{\zeta=0} \frac{f(z_0+\zeta) - f(z_0)}{\zeta}$$

oder auch allgemeiner

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\zeta=0} \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}.$$

Da wir $\frac{f(z_0+\zeta) - f(z_0)}{\zeta}$ als komplexe Funktion von ζ anzusehen haben, so ist

$$\lim_{\zeta=0} \frac{f(z_0+\zeta) - f(z_0)}{\zeta} = \frac{\lim\limits_{\zeta=0}[f(z_0+\zeta) - f(z)]}{\lim\limits_{\zeta=0}\zeta}.$$

Der Grenzwert von ζ ist gleich Null; wäre daher der des Zählers von Null verschieden, so würde nach Satz 25, § 22 der Quotient nicht einem endlichen Grenzwerte zustreben können, wenn ζ sich der Null nähert. Es muß also unbedingt

$$\lim_{\zeta=0}[f(z_0+\zeta) - f(z_0)] = 0$$

sein. Wir erkennen also, daß für das Vorhandensein einer Ableitung von $f(z)$ im Punkte $z = z_0$ die Stetigkeit dieser Funktion für $z = z_0$ unerläßliche Vorbedingung ist. Wir können aus der etwa feststehenden Existenz einer Ableitung daher auf die Stetigkeit einen Rückschluß ziehen. Das Umgekehrte ist jedoch nicht der Fall: eine komplexe Funktion kann überall stetig sein, ohne auch nur in einem Punkte ihres Definitionsbereiches eine Ableitung zu besitzen.

Unter Benutzung der Definition der Grenze können wir die Existenzbedingung einer Ableitung noch in anderer Weise formulieren:

Definition 10: Die komplexe Funktion $f(z)$ hat in einem Punkte $z = z_0$ eine Ableitung $f'(z_0)$, wenn sich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl δ derart bestimmen läßt, daß

$$\left| \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

ist für alle Werte von ζ, die absolut kleiner als δ sind, wie auch der Ausgangswert $z_0 + \zeta$ beschaffen sein mag und auf welchem Wege sich der Punkt $z_0 + \zeta$ dem Punkte z_0 nähert.

Es soll nun nicht unsere Aufgabe sein, die allgemeinen Bedingungen herzuleiten, unter denen eine komplexe Funktion eine Ableitung hat, aber wir werden in den rationalen Funktionen von z und in den gewöhnlichen Potenzreihen von z zwei Gruppen von komplexen Funktionen kennen lernen, die in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches eine Ableitung besitzen.

In Hinblick auf die Bedeutung, die der Begriff der Ableitung für die reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen besitzt, sind wir wohl berechtigt, für diejenigen komplexen Funktionen von z, die eine Ableitung besitzen, eine besondere Bezeichnung einzuführen.

Definition 11: Eine eindeutige komplexe Funktion von z, die in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches eine Ableitung besitzt, nennen wir eine reguläre Funktion der komplexen Veränderlichen z.

Die Forderung der Stetigkeit in den Punkten des Definitionsbereichs ist in der Existenz der Ableitung eingeschlossen; Unstetigkeitspunkte werden nicht zum Definitionsbereich gerechnet.

Für die Ableitungen regulärer Funktionen der komplexen Veränderlichen z gelten eine Reihe von Sätzen, die wir späterer Verwendung halber hier anführen wollen.

Satz 35: Die Ableitung der Summe zweier regulärer Funktionen ist gleich der Summe der Ableitungen der Summanden.

Beweis: Es habe $f(z)$ für $z = z_0$ die Ableitung $f'(z_0)$, $g(z)$ die Ableitung $g'(z_0)$; ferner sei die Summe $f(z) + g(z)$ mit $F(z)$ bezeichnet. Dann ist

$$\frac{F(z_0+\zeta)-F(z_0)}{\zeta} = \frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta} + \frac{g(z_0+\zeta)-g(z_0)}{\zeta}$$

$$F'(z_0) = \lim_{\zeta=0} \frac{F(z_0+\zeta)-F(z_0)}{\zeta} = f'(z_0) + g'(z_0)$$

(Satz 19. § 22).

Analog wird bewiesen:

Satz 36: Die Ableitung der Differenz zweier regulärer Funktionen ist gleich der Differenz der Ableitungen von Minuendus und Subtrahendus.

Mit Leichtigkeit erkennen wir auch:

Satz 37: Die Ableitung einer Konstanten ist gleich Null.

Satz 38: Die Ableitung der Summe einer regulären Funktion und einer Konstanten ist gleich der Ableitung der Funktion. Es gilt ferner der

Satz 39: Die Ableitung des Produktes zweier regulärer Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ ist gleich

$$g(z) \cdot f'(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

Beweis: Sei

$$f(z) \cdot g(z) = F(z).$$

Dann ist

$$\frac{F(z_0 + \zeta) - F(z_0)}{\zeta}$$

$$= \frac{f(z_0 + \zeta) \cdot g(z_0 + \zeta) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{\zeta}$$

$$= \frac{f(z_0 + \zeta) \cdot g(z_0 + \zeta) - f(z_0) \cdot g(z_0 + \zeta) + f(z_0) \cdot g(z_0 + \zeta) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{\zeta}$$

$$= g(z_0 + \zeta) \cdot \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta} + f(z_0) \cdot \frac{g(z_0 + \zeta) - g(z_0)}{\zeta},$$

$$F'(z_0) = \lim_{\zeta = 0} \frac{F(z_0 + \zeta) - F(z_0)}{\zeta}$$

$$= \lim_{\zeta = 0} g(z_0 + \zeta) \cdot f'(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$= g(z_0) \cdot f'(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

Im speziellen Falle, daß $g(z)$ eine Konstante ist, folgt

Satz 40: Die Ableitung des Produktes aus einer Konstanten und einer regulären Funktion ist gleich der Ableitung der Funktion, multipliziert mit der Konstanten.

Schließlich gilt der

Satz 41: Die Ableitung des Quotienten zweier regulärer Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ ist gleich

$$\frac{g(z) \cdot f'(z) - f(z) \cdot g'(z)}{[gz)]^2}.$$

Beweis: Es sei $\frac{f(z)}{g(z)} = F(z)$. Dann ist

$$\frac{F(z_0+\zeta)-F(z_0)}{\zeta}$$

$$= \frac{1}{\zeta}\left[\frac{f(z_0+\zeta)}{g(z_0+\zeta)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}\right]$$

$$= \frac{f(z_0+\zeta)\cdot g(z_0) - f(z_0)\cdot g(z_0+\zeta)}{\zeta\cdot g(z_0)\cdot g(z_0+\zeta)}$$

$$= \frac{f(z_0+\zeta)\cdot g(z_0) - f(z_0)\cdot g(z_0) + f(z_0)\cdot g(z_0) - f(z_0)\cdot g(z_0+\zeta)}{\zeta\cdot g(z_0)\cdot g(z_0+\zeta)}$$

$$= \frac{1}{g(z_0)\cdot g(z_0+\zeta)}\cdot\left[g(z_0)\cdot\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta} - f(z_0)\cdot\frac{g(z_0+\zeta)-g(z_0)}{\zeta}\right]$$

$$F'(z_0) = \lim_{\zeta=0}\frac{F(z_0+\zeta)-F(z_0)}{\zeta}$$

$$= \frac{g(z_0)\cdot f'(z_0) - f(z_0)\cdot g'(z_0)}{[g(z_0)]^2} \qquad \text{(Satz 24, § 22).}$$

Vorbedingung für die Gültigkeit dieses Beweises ist, daß der Nenner $g(z_0)$ für $z = z_0$ von Null verschieden ist, weil sonst $F'(z_0)$ unendlich groß werden würde.

Wir erkennen an diesen Sätzen die Zweckmäßigkeit der Definition der regulären Funktionen; denn alle diese Sätze gelten in gleichem Wortlaute für reelle Funktionen reeller Veränderlicher. Sie lehren uns aber gleichzeitig:

Satz 42: Die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient zweier regulärer Funktionen von z sind wieder reguläre Funktionen von z.

§ 26. Beispiele.

1. Die lineare Funktion $f(z) = az + b$ hat in jedem endlichen Punkte z die Ableitung $f'(z) = a$.

Es ist nämlich

$$\lim_{\zeta=0}\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta}=\lim_{\zeta=0}\frac{a(z_0+\zeta)-az_0}{\zeta}=\lim_{\zeta=0} a=a.$$

2. Die Funktion $f(z)=az^n$ hat in jedem endlichen Punkte z die Ableitung $f'(z)=naz^{n-1}$. (n eine ganze positive Zahl.) Es ist nämlich nach dem binomischen Satze für ganze positive Exponenten, der seines formalen Charakters wegen auch für komplexe Werte der Summanden des Binoms gültig ist,

$$\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta}=a\cdot\left[\tbinom{n}{1}z_0^{n-1}+\tbinom{n}{2}z_0^{n-2}\zeta+\cdots+\tbinom{n}{n}\zeta^{n-1}\right].$$

Daraus folgt unter Benutzung der Sätze 19 und 22, § 22

$$f'(z_0)=\lim_{\zeta=0}\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta}=naz_0^{n-1}.$$

3. **Satz 43:** Eine ganze rationale Funktion hat in jedem endlichen Punkte eine Ableitung. Diese ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Glieder.

Der Beweis folgt aus Satz 35, § 25.

4. **Satz 44:** Eine gebrochene rationale Funktion hat in jedem Punkte, für den der Nenner nicht verschwindet, eine bestimmte Ableitung.

Der Beweis folgt aus Satz 41 und Satz 43.

§ 27. Die inverse Funktion einer regulären Funktion.

Es sei $w=f(z)$ eine reguläre Funktion von z. Dann entspricht jedem Werte z_0 von z ein und nur ein Wert w_0 von w. Wenn nun umgekehrt auch jedem Werte w_0 von w ein und nur ein Wert z_0 von z entspricht, so können wir z als eine komplexe Funktion von z_0 ansprechen. Wir bezeichnen sie mit $z = F(w)$ und nennen sie die zu $w = f(z)$ inverse Funktion. Ist nun $\varDelta w$ die Zunahme, die w erfährt, wenn z um $\varDelta z$ wächst, so ist

$$\lim_{\varDelta w = 0} \frac{F(w_0 + \varDelta w) - F(w_0)}{\varDelta w} = \lim_{\varDelta w = 0} \left(\frac{\varDelta z}{\varDelta w} \right) = \frac{1}{\lim\limits_{\varDelta w = 0} \left(\frac{\varDelta w}{\varDelta z} \right)} .$$

Da mit $\varDelta z$ auch $\varDelta w$ und wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung von $\varDelta z$ und $\varDelta w$ auch $\varDelta z$ mit $\varDelta w$ nach Null konvergiert, so ist

$$\begin{aligned} \lim_{\varDelta w = 0} \frac{F(w_0 + \varDelta w) - F(w_0)}{\varDelta w} &= \frac{1}{\lim\limits_{\varDelta z = 0} \left(\frac{\varDelta w}{\varDelta z} \right)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{\varDelta z = 0} \frac{f(z_0 + \varDelta z) - f(z_0)}{\varDelta z}} \\ &= \frac{1}{f'(z_0)} . \end{aligned}$$

Es folgt mithin $F'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$. Damit gilt der

Satz 45: Ist $w = f(z)$ eine reguläre Funktion von z und entspricht jedem Werte von w umgekehrt ein und nur ein Wert von z, so ist die inverse Funktion $z = F(w)$ eine reguläre Funktion von w für alle diejenigen Werte von w und z, für welche die Ableitung $f(z)$ nicht verschwindet. Ihre Ableitung ist gleich dem reziproken Werte von $f'(z)$.

Da die Existenz der Ableitung die Stetigkeit zur unerläßlichen Voraussetzung hat, so folgt noch:

Satz 46: Die inverse Funktion $z = F(w)$ der regulären Funktion $w = f(z)$ ist für alle diejenigen Werte von w stetig, für die die Ableitung $f'(z)$ nicht verschwindet.

Die Sätze über die inverse Funktion werden uns später gute Dienste leisten.

§ 28. Funktionen von Funktionen.

Es sei $w = f(z)$ eine reguläre Funktion von z, $W = F(w)$ eine reguläre Funktion von w. Erteilen wir z, von einem Werte z_0 ausgehend, die Zunahme Δz, so erfährt w die Zunahme Δw, W die Zunahme ΔW. Δz, Δw, ΔW konvergieren gleichzeitig nach der Grenze Null. Nun ist

$$\frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{\Delta W}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta w = 0} \frac{\Delta W}{\Delta w} \cdot \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = F'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

Es gilt also der

Satz 47: Eine reguläre Funktion W von einer regulären Funktion w von z ist selbst eine reguläre Funktion von z. Ihre Ableitung ergibt sich nach der Vorschrift

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}.$$

Dritter Abschnitt.

Reihen mit komplexen Gliedern, im besonderen Potenzreihen.

§ 29. Begriff der Konvergenz (Divergenz).

Es sei gegeben eine Folge von unendlich vielen komplexen Zahlen

$$w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, \ldots,$$

die nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind. Dieses Gesetz soll so beschaffen sein, daß sich durch Angabe des Index ν eines Gliedes seine Form in eindeutiger Weise durch analytische Operationen ergibt. Dabei wollen wir den Fall nicht ausschließen, daß in dem Ausdruck eines jeden Gliedes auch komplexe Veränderliche vorhanden sind. Einige Beispiele mögen die Sachlage näher erläutern.

1. Es sei $w_\nu = a q^\nu$, wo a und q konstante Zahlen sind. Dann lautet die Zahlenfolge

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^{n-1} \ldots,$$

2. Es sei $w_\nu = \frac{z^\nu}{\nu!}$, wo z eine komplexe Veränderliche bezeichnet. Dann lautet die Zahlenfolge

$$1, \frac{z}{1!}, \frac{z^2}{2!}, \frac{z^3}{3!}, \ldots, \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}, \ldots$$

3. Sei $w_\nu = \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1}$. Dann heißt die Zahlenfolge

$$z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \ldots, \frac{z^n}{n}, \ldots$$

Verbinden wir die aufeinanderfolgenden Glieder der Zahlenfolge durch Pluszeichen, so erhalten wir den Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + \cdots,$$

den wir eine unendliche Reihe oder auch kurz eine Reihe nennen. Hat speziell w_ν die Form $a_\nu z^\nu$, wo a_ν eine durch Angabe von ν bestimmte Konstante, z eine komplexe Veränderliche bezeichnet, so heißt die Reihe eine Potenzreihe. Die allgemeine Form einer solchen ist also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_\nu = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots$$

Es wird die Aufgabe des Folgenden sein, zu ermitteln, welcher Sinn einer solchen Summe von unendlich vielen Summanden beizulegen ist. Dabei setzen wir die Eigenschaften von unendlichen Reihen mit reellen Gliedern als bekannt voraus.

Wir bilden die Summe der ersten n Glieder der Reihe und bezeichnen sie mit s_n, so daß

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} w_\nu = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1}\,.$$

Wenn in den Gliedern der Reihe veränderliche Zahlen vorkommen und wir jeder von ihnen einen beliebigen Wert erteilen, so ist der Wert von s_n nur noch von der Anzahl n der Glieder abhängig und durch Angabe von n eindeutig bestimmt. Im Sinne der Definition 3, § 20 können wir also s_n als eine komplexe Funktion von n ansehen. Wir müssen dabei allerdings die Eigentümlichkeit berücksichtigen, daß n nur positive ganzzahlige Werte annimmt, aber das widerspricht ja der Definition einer komplexen Funktion in keiner Weise.

Der Wert von s_n ändert sich mit n zugleich. Es kann nun der Fall eintreten, daß s_n sich einer endlichen Grenze s nähert, wenn n unendlich groß wird. Dann nennen wir die Reihe konvergent und verstehen unter der Summe der Reihe eben diesen Grenzwert s. Nähert sich jedoch s_n mit unendlich wachsendem n keiner bestimmten endlichen Grenze, oder wird s_n mit n gleichzeitig unendlich groß, so nennen wir die Reihe divergent. Nur im Falle der Konvergenz vermögen wir also der Reihe einen bestimmten Wert beizulegen. Der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen wollen wir die Definition der Konvergenz noch einmal anführen.

Definition 12: Die unendliche Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ heißt konvergent, wenn sich die Summe s_n ihrer ersten n Glieder einer bestimmten endlichen Grenze nähert, falls n unendlich groß wird.

Wir erwähnen noch, daß man die Summe der auf das $n$te Glied folgenden Glieder als den Rest der Reihe zu bezeichnen pflegt.

§ 30. Einfache Sätze über konvergente Reihen.

Die Definition der Konvergenz stimmt völlig überein mit derjenigen der Konvergenz einer unendlichen Reihe mit reellen Gliedern. Wir ziehen daraus sogleich einige bemerkenswerte Folgerungen. Ein jedes Glied der Reihe sei zerlegt in seinen reellen und seinen rein imaginären Bestandteil, und zwar sei gesetzt:

$$w_\nu = u_\nu + v_\nu \cdot i.$$

Wir bilden dann die beiden unendlichen Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots$$

und

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} + \ldots$$

Bezeichnen wir die Summen ihrer ersten n Glieder bezüglich mit s'_n und s''_n, so ist $s_n = s'_n + s''_n \cdot i$. Nach Satz 19, § 22 ist dann

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \lim_{n=\infty} s'_n + i \lim_{n=\infty} s''_n.$$

Zerlegen wir auch die Summe s der ursprünglichen Reihe in ihren reellen und ihren rein imaginären Bestandteil, schreiben also $s = s' + s'' \cdot i$, so ist

$$s' + s'' \cdot i = \lim_{n=\infty} s'_n + i \cdot \lim_{n=\infty} s''_n.$$

Daraus folgt $\lim\limits_{n=\infty} s'_n = s'$, $\lim\limits_{n=\infty} s''_n = s''$. Wenn also die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergiert, so konvergieren auch die beiden Reihen der ersten und zweiten Koordinaten der einzelnen Glieder.

Sind umgekehrt $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} v_\nu$ zwei Reihen mit reellen Gliedern, so zeigt die gleiche Überlegung, daß dann auch diejenige komplexe Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergiert, deren allgemeines Glied die Form $w_\nu = u_\nu + v_\nu \cdot i$ hat. Wir erkennen somit die Richtigkeit der beiden Sätze:

Satz 48: Konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Glied $w_\nu = u_\nu + v_\nu \cdot i$, so konvergieren auch die beiden reellen Reihen mit den allgemeinen Gliedern u_ν und v_ν.

Satz 49: Die komplexe Reihe mit dem allgemeinen Glied $w_\nu = u_\nu + v_\nu \cdot i$ konvergiert, wenn die reellen Reihen mit den allgemeinen Gliedern u_ν und v_ν konvergieren.

Nach der Definition der Konvergenz ist mit $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ auch $\lim\limits_{n=\infty} s_{n+1}$ gleich s. Daraus folgt durch Anwendung des Satzes 21, § 22 (Anm.)

$$\lim_{n=\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n=\infty} w_n = 0\,.$$

Satz 50: In einer konvergenten unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern werden die einzelnen Glieder mit unendlich wachsendem n schließlich unendlich klein.

Die Bedingung des Unendlichkleinwerdens der Glieder einer Reihe ist jedoch nicht ausreichend für das Bestehen der Konvergenz, wie im Falle reeller Glieder schon das Beispiel der harmonischen Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

zeigt, aus dem sich beliebig viele andere für Reihen mit komplexen Gliedern herleiten lassen.

Es bezeichne nun p irgendeine positive ganze Zahl. Dann ist nach der Definition der Konvergenz nicht nur

$$\lim_{n=\infty} s_n = s\,,$$

sondern auch

$$\lim_{n=\infty} s_{n+p} = s\,.$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$\lim_{n=\infty}(s_{n+p} - s_n) = \lim_{n=\infty}(w_n + w_{n+1} + \cdots + w_{n+p-1}) = 0\,.$$

Es gilt also der

Satz 51: Ist s_n die Summe der ersten n Glieder einer konvergenten Reihe, s_{n+p} die Summe der ersten $n + p$ Glieder, so ist, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, für alle ganzzahligen Werte von p

$$|s_{n+p} - s_n| = |w_n + w_{n+1} + \cdots + w_{n+p-1}| < \varepsilon\,,$$

falls n hinreichend groß gewählt wird.

Es gilt aber auch die Umkehrung dieses Satzes, die es häufig gestattet, über die Konvergenz einer Reihe in einfacherer Weise zu entscheiden. Sie lautet:

Satz 52: Ist s_n die Summe der ersten n Glieder einer Reihe, s_{n+p} die der ersten $n+p$ Glieder, und läßt sich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Index N derart bestimmen, daß für alle positiven Zahlen p und für alle $n \geqq N$ die Ungleichung

$$|s_{n+p} - s_n| = |w_n + w_{n+1} + \cdots + w_{n+p-1}| < \varepsilon$$

erfüllt ist, so ist die Reihe konvergent.

Für die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern wird dieser Satz in den Elementen der Differentialrechnung bewiesen. Seine Gültigkeit für den Fall komplexer Glieder folgt leicht aus einer Betrachtung, die dem Beweise der Sätze 48 und 49 analog ist.

Multiplizieren wir jedes Glied einer Reihe mit ein und derselben Zahl c, so erhalten wir eine neue Reihe. Auch diese ist konvergent; denn es ist

$$\lim_{n=\infty}(c\, s_w) = c \cdot \lim_{n=\infty} s_n . \qquad \text{(Satz 22, § 22, Anm.)}$$

Satz 53: Werden alle Glieder einer konvergenten Reihe mit ein und derselben Zahl c multipliziert, so ist die entstehende Reihe gleichfalls konvergent, ihre Summe ist das c fache der Summe der ursprünglichen Reihe.

Schließlich gilt der wichtige

Satz 54: Sind zwei konvergente Reihen mit den allgemeinen Gliedern w_ν und w'_ν gegeben, so konvergieren auch die beiden Reihen mit den allgemeinen Gliedern $w_\nu \pm w'_\nu$, und zwar ist ihre Summe bez. gleich der Summe oder der der Differenz der Summe der gegebenen Reihen.

Der Beweis folgt leicht aus den Sätzen 19 und 21, Anm. (§ 22). Der auf die Summe zweier konvergenter

Reihen bezügliche Teil des Satzes ist einer Verallgemeinerung auf eine endliche Zahl von konvergenten Reihen fähig.

§ 31. Unbedingte Konvergenz.

In sinngemäßer Übertragung einer Definition aus der Theorie der Reihen mit reellen Gliedern sagen wir:

Definition 13: Die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ heißt unbedingt konvergent, wenn die absoluten Werte $\varrho_\nu = \sqrt{u_\nu^2 + v_\nu^2}$ ihrer Glieder eine konvergente Reihe bilden.

Setzen wir $w_\nu = \varrho_\nu (\cos\varphi_\nu + i \cdot \sin\varphi_\nu)$, so wird

$$u_\nu = \varrho_\nu \cdot \cos\varphi_\nu, \quad v_\nu = \varrho_\nu \cdot \sin\varphi_\nu .$$

Wenn nun die reelle Reihe der ϱ_ν konvergiert, so konvergieren erst recht die reellen Reihen der u_ν und v_ν, da u_ν und v_ν als Produkte von ϱ_ν mit $\cos\varphi_\nu$ und $\sin\varphi_\nu$ absolut kleiner als ϱ_ν sind. Andererseits ist aber auch

$$|u_\nu| = \varrho_\nu \cdot |\cos\varphi_\nu| \leqq \varrho_\nu$$

und

$$|v_\nu| = \varrho_\nu \cdot |\sin\varphi_\nu| \leqq \varrho_\nu .$$

Daher sind die reellen Reihen der u_ν und v_ν unbedingt konvergent, und ihre Glieder können beliebig angeordnet werden. Das gleiche gilt mithin auch für die Reihe der w_ν.

Satz 55: In einer unbedingt konvergenten Reihe mit komplexen Gliedern können die Glieder beliebig angeordnet werden.

Das Produkt zweier unbedingt konvergenter Reihen kann gleichfalls in Form einer unbedingt konvergenten Reihe dargestellt werden. Es gilt nämlich der

Satz 56: Sind zwei unbedingt konvergente Reihen mit den allgemeinen Gliedern w_ν und w_ν' gegeben, so konvergiert auch diejenige Reihe unbedingt, deren allgemeines Glied die Form hat:

$$W_\nu = w_0 w'_\nu + w_1 \cdot w'_{\nu-1} + w_2 \cdot w'_{\nu-2} + \ldots + w_\nu w'_0 .$$

Ihre Summe ist gleich dem Produkt der Summen der gegebenen Reihen.

Die Summen der Reihen Σw_ν und $\Sigma w'_\nu$ seien bezüglich mit s und s' bezeichnet, so daß

$$s = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$
$$s' = w'_0 + w'_1 + w'_2 + \ldots$$

Dann ist, wie die zweimalige Anwendung von Satz 53, § 30 lehrt

$$\begin{aligned} s \cdot s' &= (w_0 + w_1 + w_2 + \ldots) \cdot s' \\ &= w_0 \cdot s' + w_1 \cdot s' + w_2 \cdot s' + \ldots \\ &= \left.\begin{aligned} & w_0 w'_0 + w_0 w'_1 + w_0 w'_2 + \ldots \\ & + w_1 w'_0 + w_1 w'_1 + w_1 w'_2 + \ldots \\ & + w_2 w'_0 + w_2 w'_1 + w_2 w'_2 + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \end{aligned}$$

Da sowohl die Glieder der Reihe s als auch die der Reihe s' beliebig angeordnet werden können, so kann dies auch mit den Gliedern des Ausdruckes für $s \cdot s'$ geschehen. Besonders häufig verwendet wird die Anordnung

$$w_0 w'_0 + (w_0 w'_1 + w_1 w'_0) + (w_0 w'_2 + w_1 w'_1 + w_2 w'_0) + \ldots$$
$$+ (w_0 w'_\nu + w_1 w'_{\nu-1} + \ldots + w_\nu w'_0) + \ldots$$

Sie faßt alle Produkte $w w'$ mit gleicher Indexsumme zu einem einzigen Gliede zusammen.

In dieser Form entstammt der Beweis dem Buche: J. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 2. Auflage. Halle 1898.

Wichtige Dienste leistet auch der

Satz 57: Sind die Glieder einer Reihe von einer bestimmten Stelle an dem absoluten Werte nach kleiner als die entsprechenden Glieder einer zweiten Reihe, die unbedingt konvergiert, so konvergiert auch die erste Reihe unbedingt.

Das allgemeine Glied der ersten Reihe heiße w_ν, das der zweiten w'_ν. Die Bedingungen des Satzes seien von dem $(n+1)$ten Gliede w_n an erfüllt. Es mögen nun s_n, s_{n+p} für die erste Reihe die bisherige Bedeutung haben. Dann ist

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= |w_n + w_{n+1} + \cdots + w_{n+p-1}| \\ &< |w_n| + |w_{n+1}| + \cdots + |w_{n+p-1}| \\ &< |w'_n| + |w'_{n+1}| + \cdots + |w'_{n+p-1}|. \end{aligned}$$

Da nun die zweite Reihe als unbedingt konvergent vorausgesetzt ist, so läßt sich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Index derart bestimmen, daß der letzte Ausdruck kleiner als ε wird. Dann wird auch $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Das ist jedoch nach Satz 52, § 30 ein Merkmal der Konvergenz für die erste Reihe. Daß diese auch unbedingt konvergent ist, folgt aus den Ungleichungen des Beweises.

§ 32. Die geometrische Reihe.

Die einfachste Art einer Potenzreihe ist die geometrische Reihe. Sie hat die Form

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \ldots$$

Für alle Fragen aus der Theorie der Potenzreihen ist die Kenntnis ihrer Eigenschaften von grundlegender Bedeutung. Bezeichnen wir die Summe der ersten n Glieder mit s_n, so ist

$$s_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}.$$

Multiplizieren wir beiderseits mit z, so folgt

$$z s_n = z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n.$$

Mithin ist

$$(1 - z) s_n = 1 - z^n,$$

und sofern wir z als von 1 verschieden voraussetzen:

$$s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}.$$

Der erste Summand ist von n unabhängig; wir bezeichnen ihn mit s und bilden die Differenz

$$s - s_n = \frac{z^n}{1-z}.$$

Setzen wir $|z|$ kleiner als 1 voraus, so ist

$$|s - s_n| = \frac{|z|^n}{|1-z|} < \frac{|z|^n}{1-|z|}, \quad \text{(Satz 11, § 10)}$$

und wir können, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, stets eine positive Zahl N so bestimmen, daß

$$\frac{|z|^n}{1-|z|} \quad \text{und erst recht} \quad \frac{|z|^n}{|1-z|}$$

kleiner als ε wird; denn als Potenz eines echten Bruches nähert sich $|z|^n$ unbegrenzt der Null, wenn n unbegrenzt wächst. Es ist das nicht der Fall, wenn $|z| > 1$, denn dann wächst $|z|^n$ gleichzeitig mit n (§ 23). Ist also $|z| < 1$, so läßt sich $|s - s_n|$ unter jede noch so kleine positive Zahl ε herabdrücken. Nach der Definition der Konvergenz einer Reihe erkennen wir somit:

Satz 58: Die geometrische Reihe

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \ldots$$

ist konvergent für alle Werte von z, die dem absoluten Werte nach kleiner als 1 sind. Ihre Summe ist

$$s = \frac{1}{1-z}.$$

Beschreiben wir in der komplexen Ebene um den Nullpunkt einen Kreis mit dem Radius 1, so ist die geometrische Reihe konvergent für sämtliche Punkte z, die innerhalb dieses Kreises liegen, divergent für alle Punkte, die außerhalb dieses Kreises liegen. Man nennt ihn den Konvergenzkreis der geometrischen Reihe, seinen Radius den Konvergenzradius.

Innerhalb des Konvergenzkreises ist die geometrische Reihe aber auch unbedingt konvergent; denn konvergiert sie für einen Wert z, so konvergiert sie auch für den Wert $|z|$. Dieser liegt nämlich gleichfalls innerhalb des Konvergenzkreises.

§ 33. Gleichmäßige Konvergenz der geometrischen Reihe.

Es sei z_0 ein Punkt im Innern des Konvergenzkreises. Dann ist die Ungleichung

$$\frac{|z_0|^n|}{1-|z_0|} < \varepsilon$$

für alle n erfüllt, die größer als eine bestimmte Zahl N sind, und zwar um so mehr, je größer n genommen wird.

Ist nun z ein Wert, für den $|z| < |z_0|$, so ist

$$\frac{|z|^n}{|1-z|} \leqq \frac{|z|^n}{1-|z|} < \frac{|z_0|^n}{1-|z_0|} < \varepsilon .$$

Die Ungleichung $\frac{|z|^n}{|1-z|} < \varepsilon$ ist also erfüllt für alle Werte z, die dem absoluten Werte nach kleiner als $|z_0|$ sind, und zwar um so mehr, je kleiner $|z|$ genommen wird. Ist also eine beliebig kleine positive Zahl ε vorgegeben, und haben wir die Zahl N so bestimmt, daß für alle Werte $n > N$ die Ungleichung $\frac{|z_0|^n}{1 - |z_0|} < \varepsilon$ erfüllt ist, so gilt die entsprechende Ungleichung für z bei demselben Wert von ε und demselben Wert von N für alle Zahlen n, die größer als N sind, und für alle Zahlen z, die dem absoluten Werte nach kleiner als $|z_0|$ sind. Wegen dieses gleichmäßigen Verhaltens bezüglich der Konvergenz innerhalb des ganzen Konvergenzkreises sagt man:

Satz 59: Innerhalb ihres Konvergenzkreises ist die geometrische Reihe gleichmäßig konvergent.

Wir werden später sehen, daß die Tatsache der gleichmäßigen Konvergenz auch für jede beliebige Potenzreihe zutrifft.

§ 34. Zwei Konvergenzkriterien.

Es gibt kein allgemeines Kriterium, mit Hilfe dessen man entscheiden könnte, ob eine Reihe konvergent ist. In vielen Fällen jedoch können mit Erfolg zwei Kriterien angewendet werden, die wir jetzt entwickeln wollen.

In der Reihe Σw_ν sei vom $(n+1)$ten Gliede w_n ab der absolute Wert des Quotienten $\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}$ zweier aufeinander folgender Glieder stets kleiner als ein positiver echter Bruch k. Dann ist

$$\begin{aligned} |w_{n+1}| &< k\,|w_n|, \\ |w_{n+2}| &< k\,|w_{n+1}| < k^2 \cdot |w_n|, \\ |w_{n+3}| &< k\,|w_{n+2}| < k^3 \cdot |w_n|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Glieder der Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + w_n + \ldots$$

sind daher vom $(n+1)$ten Gliede ab absolut kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1} + w_n + k w_n + k^2 w_n + \ldots$$

Da $w_n(1 + k + k^2 + \ldots)$ infolge der unbedingten Konvergenz der geometrischen Reihe für $k < 1$ unbedingt konvergiert, so ist auch die ursprüngliche Reihe unbedingt konvergent (Satz 57, § 31).

Satz 60: Wenn in einer Reihe von einer bestimmten Stelle an der Quotient $\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}$ zweier aufeinander folgender Glieder dem absoluten Werte nach kleiner als ein positiver echter Bruch bleibt, so ist die Reihe unbedingt konvergent.

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der, daß der Quotient

$$\left| \frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} \right|$$

von einer bestimmten Stelle an einem Grenzwerte k zustrebt, der kleiner als 1 ist. Dann läßt sich jedenfalls zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Index n derart bestimmen, daß für alle Werte $\nu \geqq N$ die Ungleichung

$$\left| \frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} - k \right| < \varepsilon$$

und um so mehr die Ungleichung

$$\left| \frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} \right| < k + \varepsilon$$

erfüllt ist.

Wählen wir ε hinreichend klein, so ist auch $k + \varepsilon$ ein echter Bruch. Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Satz 61: Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} \left|\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right|$ existiert und kleiner als 1 ist, so konvergiert die Reihe Σw_ν unbedingt.

Ein zweites Kriterium zur Untersuchung der Konvergenz einer Reihe liefert der

Satz 62: Ist in einer Reihe von einer bestimmten Stelle ab $\sqrt[\nu]{|w_\nu|}$ kleiner als ein positiver echter Bruch k, so ist die Reihe unbedingt konvergent.

Die Bedingungen des Satzes seien von dem $(n + 1)$ten Gliede w_n an erfüllt. Dann ist

$$\begin{array}{ll} \sqrt[n]{|w_n|} < k, & |w_n| \quad < k^n, \\ \sqrt[n+1]{|w_{n+1}|} < k, & |w_{n+1}| < k^{n+1}, \\ \sqrt[n+2]{|w_{n+2}|} < k, & |w_{n+2}| < k^{n+2}, \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Die Glieder der Reihe sind daher vom $(n + 1)$ten Gliede an absolut kleiner als die Glieder der Reihe

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1} + k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots$$

Nun ist $k^n + k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots = k^n(1 + k + k^2 + \ldots)$. Infolge der unbedingten Konvergenz der geometrischen Reihe

$$1 + k + k^2 + \ldots$$

konvergiert auch die Reihe

$$w_0 + \ldots + k^n + \ldots$$

unbedingt; das gleiche gilt also nach Satz 57, § 31 auch für die ursprüngliche Reihe.

Im speziellen Falle gilt, wie analog dem vorletzten Satze zu zeigen ist:

Satz 63: Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{|w_\nu|}$, und ist er kleiner als 1, so ist die Reihe Σw_ν unbedingt konvergent.

Nicht unerwähnt wollen wir lassen, daß wenn die Quotienten $\left|\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right|$ und $\sqrt[\nu]{|w_\nu|}$ von einer bestimmten Stelle an größer als ein unechter Bruch k sind, die Reihe sicher divergiert. Es gilt dies auch, wenn k für die Quotienten einen Grenzwert bildet.

§ 35. Beispiele.

1. Es sei $w_\nu = \frac{z^\nu}{\nu!}$. Dann ist

$$\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} = \frac{z}{\nu+1}.$$

Ist z endlich, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(\frac{z}{\nu+1}\right) = 0$. Es folgt somit: Die Potenzreihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

ist unbedingt konvergent für alle endlichen Werte von z.

2. Es sei $w_\nu = (-1)^{\nu+1}\cdot\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$. Dann ist $\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} = -\frac{z^2}{(2\nu+2)(2\nu+3)}$ Ist z eine endliche Zahl, so ist $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right) = 0$. Demnach ist die Potenzreihe

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \dots$$

für alle endlichen Werte von z unbedingt konvergent.

3. Die Potenzreihe

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \dots,$$

deren allgemeines Glied die Form hat: $w_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, ist für alle endlichen Werte von z unbedingt konvergent.

4. Die Potenzreihe

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \dots,$$

deren allgemeines Glied $w_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{z^{\nu+1}}{\nu+1}$ ist, ist für alle Werte von z unbedingt konvergent, die dem absoluten Werte nach kleiner als 1 sind.

§ 36. Gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe.

Soll die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + \dots$$

für einen Wert z_0 konvergieren, so ist dazu unbedingt notwendig, daß für alle Exponenten m, die eine bestimmte positive Zahl N überschreiten, die Ungleichung besteht

$$|a_m z_0^m| < g. \qquad \text{(Satz 50, § 30.)}$$

Es sei das von $m = n$ an der Fall. Wir bezeichnen die Summe der ersten n Glieder mit s_n und setzen die Zahl z

dem absoluten Wert nach kleiner als $|z_0|$ voraus, so daß $|z| = \delta \cdot |z_0|$ $(0 < \delta < 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(z) - s_n| &= |a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots| \\ &\leqq |a_n z^n| + |a_{n+1} z^{n+1}| + \dots \\ &\leqq |a_n z_0^n| \cdot \delta^n + |a_{n+1} z_0^{n+1}| \cdot \delta^{n+1} + \dots \\ &< g \cdot \delta^n \cdot [1 + \delta + \delta^2 + \dots] \\ &< \frac{g\,\delta^n}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Ist daher ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann

$$|f(z) - s_n|$$

durch passende Wahl von n kleiner als ε gemacht werden (siehe § 32). Ist also die Bedingung

$$|a_m z_0^m| < g$$

für alle Werte $m > N$ erfüllt, so ist die Reihe $f(z)$ konvergent für alle z, die dem absoluten Werte nach kleiner als $|z_0|$ sind. Da sie also auch für $|z|$ konvergent ist, so ist sie für alle Punkte innerhalb des mit dem Radius z_0 um den Nullpunkt geschlagenen Kreises unbedingt konvergent.

Damit das Bewiesene gültig sei, ist nur das Erfülltsein der zu Anfang gestellten Bedingung notwendig, nicht etwa, daß die Reihe $f(z)$ für $z = z_0$ unbedingt konvergiere. Die Bedingung ist z. B. für den Wert $z = 1$ erfüllt für die beiden Reihen

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \dots$$

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots$$

Die erste von diesen ist für den Wert $z = 1$ nur bedingt konvergent, die zweite sogar divergent, während für Werte z, die dem absoluten Werte nach kleiner als 1 sind, beide Reihen unbedingt konvergent sind.

Beachten wir nun noch, daß die Ungleichung

$$|f(z) - s_n| < \frac{g\,\delta^n}{1-\delta}$$

bei demselben Werte von ε und demselben Werte von N für alle Werte $n > N$ und für alle Werte z erfüllt ist, die absolut genommen kleiner als $|z_0|$ sind, so können wir (vgl. § 33) den Satz aussprechen:

Satz 64: Ist für $z = z_0$ in der Reihe

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots$$

von einem bestimmten Gliede ab der absolute Wert eines jeden Gliedes kleiner als eine positive Zahl g, so konvergiert die Reihe unbedingt und gleichmäßig für alle Werte z, die der Ungleichung $|z| < |z_0|$ genügen.

Eine speziellere Formulierung dieses Satzes ist

Satz 65: Konvergiert eine Reihe, wenn auch nur bedingt, für einen Punkt z_0, so ist sie in allen Punkten unbedingt und gleichmäßig konvergent, die dem Innern des mit dem Radius $|z_0|$ um den Nullpunkt geschlagenen Kreises angehören.

Wenn dagegen die Reihe für einen Punkt z_0 divergiert, so divergiert sie erst recht für alle diejenigen Punkte z, die um mehr als $|z_0|$ vom Nullpunkte entfernt sind. Denn wäre etwa für solche Punkte $f(z)$ konvergent, so müßte $f(z_0)$ erst recht konvergent sein (Satz 65).

Satz 66: Divergiert die Reihe für einen Punkt z_0, so ist sie in allen Punkten divergent, die außerhalb des mit dem Radius $|z_0|$ um den Nullpunkt geschlagenen Kreises liegen.

§ 37. Konvergenzkreis.

Da sich alle Punkte des Umfanges eines Kreises um den Nullpunkt bezüglich der Konvergenz gleich verhalten, so können wir uns im weiteren auf positive reelle Werte z beschränken. Es kann sich nun der Fall ereignen, daß eine Potenzreihe für alle endlichen positiven Werte z, also überhaupt für alle endlichen Werte von z konvergiert. Ein Beispiel dafür ist die Reihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad (§\ 35,\ 1.).$$

Ist das jedoch nicht der Fall, wie etwa für

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots \qquad (§\ 35,\ 4.),$$

und ist $z = r_0$ ein Wert, für den die Reihe noch konvergiert, $z = R > r_0$ dagegen ein Wert, für den die Reihe bereits divergiert, so werden wir, falls wir auf der positiv reellen Achse von r_0 nach R fortschreiten, schließlich auf einen Punkt r von der Beschaffenheit treffen, daß die Reihe für alle Werte von $z < r$ konvergent, für alle Werte von $z > r$ dagegen divergent ist. Beschreiben wir mit dem Radius r um den Nullpunkt den Kreis, so wird die Reihe (nach Satz 65, § 36) in allen inneren Punkten dieses Kreises konvergent, in allen äußeren dagegen divergent sein. Diesen Kreis, dessen

Existenz somit unter allen Umständen feststeht, nennt man den Konvergenzkreis der Reihe, seinen Radius den Konvergenzradius.

Über das Verhalten der Reihe auf dem Konvergenzkreise selbst vermögen wir keine allgemeine Aussage zu machen.

Für die geometrische Reihe hat, wie wir in § 32 sahen, der Konvergenzkreis den Radius 1. Es kann jedoch vorkommen, daß der Konvergenzkreis alle endlichen Punkte der komplexen Ebene umfaßt, seine Begrenzung also ins Unendliche rückt. Dann nennen wir die Reihe beständig konvergent. Beispiele hierfür sind:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \cdots$$

$$\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots \qquad (\S\ 35.)$$

§ 38. Der Konvergenzradius und die Koeffizienten der Potenzreihe.

Es sei gegeben die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$. Nun ist

$$\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu} = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \cdot z\,.$$

Nehmen wir an, daß der Grenzwert $\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = K$ existiert und endlich ist, so existiert auch wegen

$$\lim_{\nu=\infty}\left|\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right| = \frac{1}{K}\cdot|z|$$

für $\left|\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right|$ ein endlicher Grenzwert, sofern z endlich ist.

Nehmen wir im besonderen $|z| < K$ an, so ist der Grenzwert von $\left|\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right|$ ein positiver echter Bruch; daher ist die gegebene Potenzreihe unbedingt (und natürlich auch gleichmäßig) konvergent für alle Werte von z, die absolut kleiner als K sind (Satz 61, § 34).

Satz 67: Wenn der absolute Wert des Verhältnisses $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ zweier aufeinander folgender Koeffizienten einer Potenzreihe einem endlichen Grenzwerte zustrebt, so ist der Konvergenzradius der Reihe gleich diesem Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty}\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| .$$

Sollten in der Potenzreihe etwa nur die geraden oder nur die ungeraden Potenzen von z vorkommen, so ist eine entsprechende Modifikation der Betrachtungen erforderlich. Eine Anleitung dazu gibt § 35.

Einen zweiten Ausdruck für den Konvergenzradius erhalten wir in dem Falle, daß der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ existiert. Er ist $\frac{1}{\lim\limits_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$; da eine Potenzreihe von z nur einen Konvergenzkreis haben kann, so folgt, daß $\lim\limits_{\nu=\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$ und $\lim\limits_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$, wenn sie überhaupt existieren, einander gleich sind.

Beispiele: 1. Aus § 35 folgt:
Die Potenzreihen

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \dots$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \dots$$

sind beständig konvergent.

2. Für die Potenzreihe

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots$$

ist

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right) = \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) = 1 ;$$

sie hat also den Konvergenzradius 1.

4. Die Potenzreihe

$$\frac{z}{1 \cdot 2} + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)\,n} + \dots$$

hat den Konvergenzradius 1.

§ 39. Die Reihe der Ableitungen der Glieder einer Potenzreihe.

Es sei gegeben die Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n + \dots$$

Wir bilden die Reihe der Ableitungen der einzelnen Glieder und bezeichnen sie zur Abkürzung mit $f'(z)$.

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n\,a_n \cdot z^{n-1} + \dots$$

(§ 26, 2).

Die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe sei s'_n, die der ersten $n+p$ Glieder s'_{n+p}. Dann ist

$$\begin{aligned} s'_{n+p} - s'_n &= (n+1)\,a_{n+1}\,z^n + (n+2)\,a_{n+2}\,z^{n+1} + \dots \\ &\quad + (n+p)\,a_{n+p}\,z^{n+p-1} \\ &= \sum_{\nu=1}^{p} (n+\nu)\,a_{n+\nu}\,z^{n+\nu-1}. \end{aligned}$$

Es sei nun z_0 ein Punkt im Innern des Konvergenzkreises der Reihe $f(z)$, ferner sei $|z| < |z_0|$. Dann ist, wenn g eine beliebige endliche positive Zahl bezeichnet, $|a_\mu z_0^\mu| < g$, sobald μ eine bestimmte positive Zahl N übersteigt. Setzen wir $|z| = \delta \cdot |z_0|$, wo δ einen positiven echten Bruch bedeutet, und nehmen wir an, daß die erwähnte Ungleichung schon für $\mu = n$ gilt, so ist allgemein

$$\begin{aligned} |(n+\nu)\,a_{n+\nu}\,z^{n+\nu-1}| &= (n+\nu)\cdot\delta^{n+\nu-1}\,|a_{n+\nu}\,z_0^{n+\nu}|\cdot\frac{1}{|z_0|} \\ &< (n+\nu)\cdot\delta^{n+\nu-1}\cdot\frac{g}{|z_0|}. \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$|s'_{n+p} - s'_n| < \frac{g}{|z_0|}\cdot\sum_{\nu+1}^{p} (n+\nu)\,\delta^{n+\nu-1};$$

also erst recht

$$\begin{aligned} |s'_{n+p} - s'_n| &< \frac{g}{|z_0|}\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty} (n+\nu)\,\delta^{n+\nu-1} \\ &< \frac{g}{|z_0|}\cdot[(n+1)\,\delta^n + (n+2)\,\delta^{n+1} + \dots]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist der Rest der Reihe

$$1 + 2\delta + 3\delta^2 + \dots + n\,\delta^{n-1} + \dots,$$

welche für $0 \leqq \delta < 1$ konvergiert und dem Quadrat der Reihe

$$\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{n-1}$$

gleich ist. Er läßt sich jedenfalls, wenn wir n hinreichend groß wählen, unter jede noch so kleine Zahl herabdrücken. Dasselbe ist, da g und $|z_0|$ endliche Größen sind, mit

$$|s'_{n+p} - s'_n|$$

der Fall; die Reihe

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 \cdot z^2 + \ldots + n \cdot a_n \cdot z^{n-1} + \ldots$$

ist also konvergent, solange $|z| < |z_0|$, und da wir z_0 beliebig nahe an den Konvergenzkreis von $f(z)$ heranrücken lassen können, so stimmt der Konvergenzkreis von $f'(z)$ mit dem von $f(z)$ überein.

Satz 68: Die aus der Reihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots$$

durch Differentiation der einzelnen Glieder abgeleitete Reihe

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots$$

hat den gleichen Konvergenzkreis wie die Reihe $f(z)$.

Aus der Reihe $f'(z)$ lassen sich in gleicher Weise eine unendliche Zahl von Reihen, die wir entsprechend mit $f''(z), f'''(z), \ldots, f^{(n)}(z) \ldots$ bezeichnen, und die sämtlich den gleichen Konvergenzkreis haben wie die Reihe $f(z)$.

So ist

$$\begin{aligned} f''(z) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot z + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot z^2 + 5 \cdot 4 \cdot a_5 \cdot z^3 + \ldots \\ &= 2! \cdot \left[\binom{2}{2} a_2 + \binom{3}{2} a_3 z + \binom{4}{2} a_4 z^2 + \binom{5}{2} a_5 z^3 + \ldots \right] \\ &= 2! \sum_{\nu=2}^{\infty} \binom{\nu}{2} a_\nu z^{\nu-2}, \end{aligned}$$

$$f'''(z) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot z + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5 z^2 + \ldots$$
$$= 3! \cdot \left[\binom{3}{3} a_3 + \binom{4}{3} a_4 z + \binom{5}{3} a_5 z^2 + \ldots\right.$$
$$= 3! \cdot \sum_{\nu=3}^{\infty} \binom{\nu}{3} a_\nu z^{\nu-3}$$

. . . .

Allgemein ist

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu z^{\nu-n}.$$

§ 40. Umkehrung des eben Bewiesenen.

Es sei wiederum die Reihe gegeben:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots$$

Es gibt unendlich viele Reihen, aus denen $f(z)$ in derselben Weise folgt wie $f'(z)$ aus $f(z)$. Sie sind alle von der Form

$$F(z) = A + a_0 z + a_1 \cdot \frac{z^2}{2} + a_2 \cdot \frac{z^3}{3} + \ldots + a_{n-2} \cdot \frac{z^{n-1}}{n+1} + \ldots,$$

in der A eine willkürliche Konstante bezeichnet. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt leicht durch gliedweise Differentiation. (Wir dürfen dabei jedoch nicht vergessen, daß ein solcher Nachweis nur formalen Charakters ist, denn die Konvergenz der Reihe $F(z)$ ist noch nicht erwiesen.) Die Summe der ersten n Glieder von $F(z)$ sei s_n'', die der ersten $n+p$ Glieder s_{n+p}''. Dann ist

$$s_{n+p}'' - s_n'' = a_{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} + a_n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots + a_{n+p-2} \cdot \frac{z^{n+p-1}}{n+p-1}.$$

Nun sei z_0 ein Punkt im Innern des Konvergenzkreises von $f(z)$. Dann ist, wenn g eine beliebige positive Zahl bezeichnet,

$$|a_\mu z_0^\mu| < g,$$

sobald μ eine bestimmte positive Zahl N überschreitet. Es sei ferner $|z| < |z_0|$, also $|z| = \delta \cdot |z_0|$ $(0 < \delta < 1)$. Dann ist allgemein

$$\left| a_{n-1+\nu} \cdot \frac{z^{n+\nu}}{n+\nu} \right| = |z_0| \cdot \frac{\delta^{n+\nu}}{n+\nu} \cdot |a_{n-1+\nu} z_0^{n-1+\nu}|$$

$$< g \cdot |z_0| \cdot \frac{\delta^{n+\nu}}{n+\nu}.$$

Mithin ist

$$|s''_{n+p} - s''_n| < g \cdot |z_0| \cdot \sum_{\nu=0}^{p} \frac{\delta^{n+\nu}}{n+\nu}$$

und erst recht

$$< g |z_0| \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\delta^{n+\nu}}{n+\nu}$$

$$< g \cdot |z_0| \cdot \left[\frac{\varepsilon^n}{n} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} + \cdots \right].$$

Der Ausdruck in der Klammer ist der Rest der Reihe

$$\delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + \cdots + \frac{\delta^n}{n} + \cdots,$$

die für $0 < \delta < 1$ konvergiert. Wählen wir n hinreichend groß, so können wir demnach

$$s''_{n+p} - s''_n$$

unter jede noch so kleine positive Zahl herabdrücken; die Reihe $F(z)$ konvergiert also, solange $|z| < |z_0|$. Da wir z_0 beliebig nahe an den Konvergenzkreis von $f(z)$ heranrücken lassen können, so folgt:

Satz 69: Die Reihe

$$F(z)=A+a_0 z+a_1\cdot\frac{z^2}{2}+a_2\cdot\frac{z^3}{3}+\ldots+a_{n-2}\cdot\frac{z^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

hat denselben Konvergenzkreis wie die aus ihr durch gliedweise Differentiation sich ergebende Reihe

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots$$

§ 41. Stetigkeit der Potenzreihe.

Durch die Potenzreihe

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

ist für jeden Wert der Veränderlichen z, der im Innern des Konvergenzkreises liegt, ein bestimmter Wert $f(z)$ definiert. Wir können daher sagen, daß die Reihe $f(z)$ eine komplexe Funktion von z darstellt.

Nun sei ζ ein Wert von der Beschaffenheit, daß sowohl ζ als auch $z+\zeta$ dem Konvergenzbereich von $f(z)$ angehören. Dann ist

$$f(z+\zeta)-f(z)=a_1\zeta+a_2[(z+\zeta)^2-z^2]+\ldots$$
$$+a_{n-1}[(z+\zeta)^{n-1}-z^{n-1}]+\ldots$$

Wir entwickeln die Potenzen $(z+\zeta)^\nu$ nach dem binomischen Lehrsatz und erhalten:

$$\begin{aligned}f(z+\zeta)-f(z)=a_1\zeta&\\ &+a_2\cdot\left[\binom{2}{1}z\zeta+\binom{2}{2}\cdot\zeta^2\right]\\ &+a_3\left[\binom{3}{1}z^2\zeta+\binom{3}{2}z\zeta^2+\binom{3}{3}\zeta^3\right]\\ &+a_4\left[\binom{4}{1}z^3\zeta+\binom{4}{2}z^2\zeta^2+\binom{4}{3}z\zeta^3+\binom{4}{4}\zeta^4\right]\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Wegen der unbedingten Konvergenz können wir die Glieder beliebig anordnen.

$$
\begin{aligned}
f(z+\zeta)-f(z)=\zeta & \left[a_1+\binom{2}{1}a_2 z+\binom{3}{1}a_3 z^2+\binom{4}{1}a_4 z^3+\ldots\right] \\
& +\zeta^2\left[\binom{2}{2}a_2+\binom{3}{2}a_3 z+\binom{4}{2}a_4 z^2+\binom{5}{2}a_5 z^3+\ldots\right] \\
& +\zeta^3\left[\binom{3}{3}a_3+\binom{4}{3}a_4 z+\binom{5}{3}a_5 z^2+\binom{6}{3}a_6 z^3+\ldots\right] \\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Wie wir aus § 39 ersehen, sind die Ausdrücke in den eckigen Klammern bezüglich gleich $f'(z), \frac{f''(z)}{2!}, \frac{f'''(z)}{3!}+\ldots$ Nun sind $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots$ konvergente Reihen, deren Konvergenzkreis mit dem von $f(z)$ übereinstimmt; es läßt sich also eine positive Zahl M angeben, die keiner der Ausdrücke $f'(z), \frac{f''(z)}{2!}, \frac{f'''(z)}{3!}, \ldots$ dem absoluten Werte nach übertrifft. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
|f(z+\zeta)-f(z)| &= \left|\zeta f'(z)+\zeta^2\cdot\frac{f''(z)}{2!}+\zeta^3\cdot\frac{f'''(z)}{3!}+\ldots\right| \\
&\leqq |\zeta||f'(z)|+|\zeta|^2\cdot\left|\frac{f''(z)}{2!}\right|+|\zeta|^3\cdot\left|\frac{f'''(z)}{3!}\right|+\ldots \\
&< M\cdot|\zeta|\cdot[1+|\zeta|+|\zeta|^2+\ldots+|\zeta|^{n-1}+\ldots].
\end{aligned}
$$

Setzen wir $|\zeta|$ kleiner als 1 voraus, so ist der Wert der Klammer gleich

$$\frac{1}{1-|\zeta|},$$

also

$$|f(z+\zeta)-f(z)|<\frac{M\cdot|\zeta|}{1-|\zeta|}.$$

Bezeichnet nun ε eine beliebig kleine positive Zahl, so können wir stets eine Zahl $|\zeta|$ so bestimmen, daß

$$|f(z+\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

wird. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur

$$|\zeta| < \frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}$$

anzunehmen. Wählen wir $|\zeta|$ in dieser Weise, wobei natürlich ζ der im Anfang vorgeschriebenen Bedingung Genüge leisten muß, so ist gezeigt, daß eine Potenzreihe in der Umgebung eines jeden Punktes ihres Konvergenzbereiches eine stetige Funktion ihres Argumentes darstellt.

§ 42. Die Ableitung einer Potenzreihe.

Wir treten jetzt der Frage näher, ob die durch eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

dargestellte komplexe Funktion in jedem Punkte ihres Konvergenzbereiches eine Ableitung besitzt.

Es ist nach dem vorigen Paragraphen

$$f(z) + \zeta) - f(z) = \zeta \cdot f'(z) + \zeta^2 \cdot \frac{f''(z)}{2!} + \zeta^3 \cdot \frac{f'''(z)}{3!} + \ldots$$

$$\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} = f'(z) + \zeta \cdot \frac{f''(z)}{2!} + \zeta^2 \cdot \frac{f'''(z)}{3!} + \ldots$$

Bezeichnet wieder M die positive Zahl, welche von keiner der Zahlen

$$\frac{f''(z)}{2!}, \quad \frac{f'''(z)}{2!}, \ldots$$

überschritten wird, so ist

$$\left|\zeta\cdot\frac{f''(z)}{2!}+\zeta^2\cdot\frac{f'''(z)}{2!}+\ldots\right|<M\cdot|\zeta|\cdot[1+|\zeta|+|\zeta|^2+\ldots]$$

$$<M\cdot\frac{|\zeta|}{1-|\zeta|}\,.$$

Wenn sich der Bildpunkt von $(z+\zeta)$ dem von z unbegrenzt nähert, so wird demnach (siehe den vorigen Paragraphen) der Wert von

$$\left|\zeta\frac{f''(z)}{2!}+\zeta^2\cdot\frac{f'''(z)}{3!}+\ldots\right|$$

schließlich kleiner als jede noch so klein vorgeschriebene positive Zahl ε. Es nähert sich also die Differenz

$$\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}-f'(z)$$

der Grenze Null, oder der Differenzenquotient

$$\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}$$

wird schließlich gleich $f'(z)$.

Die Potenzreihe $f(z)$ hat also in jedem Punkte ihres Geltungsbereiches eine Ableitung, deren Wert nach dem Beweise unabhängig ist von der Art der Annäherung des Punktes $z+\zeta$ an den Punkt z. Es gilt in Verbindung mit § 39

Satz 70: Eine Potenzreihe hat für jeden Punkt im Innern ihres Konvergenzkreises eine bestimmte Ableitung $f'(z)$. Diese ergibt sich durch gliedweise Differentiation der ursprünglichen Reihe; ihr Konvergenzkreis ist identisch mit dem von $f(z)$.

Den Prozeß der Bildung der Ableitung können wir an $f'(z)$ wiederholen. Wir erkennen so:

Satz 71: Eine Potenzreihe hat für jeden Punkt im Innern ihres Konvergenzkreises unendlich viele Ableitungen höherer Ordnung. Diese sind sämtlich Potenzreihen, die den gleichen Konvergenzkreis haben wie die ursprüngliche Reihe.

Wir führen der Vollständigkeit halber noch einmal die vollständige Form der n ten Ableitung von $f(z)$ an (§ 39).

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu z^{\nu-n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Da die Potenzreihe $f(z)$ demnach in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches eine Ableitung besitzt, so gilt in Rücksicht auf die Definition der regulären Funktionen des komplexen Argumentes z (Definition 11, § 25) der

Satz 72: Eine Potenzreihe $f(z)$ ist für alle Punkte z im Innern ihres Konvergenzkreises eine reguläre Funktion des komplexen Argumentes z.

§ 43. Übungen.

1. Die Ableitungen einer beständig konvergenten Potenzreihe sind sämtlich beständig konvergente Potenzreihen.

2. Die sämtlichen Ableitungen der Reihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

sind der Reihe selbst gleich.

3. Die zweiten Ableitungen der Reihen

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

und

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

sind bezüglich entgegengesetzt gleich den Reihen selbst.

4. Die vierten Ableitungen der eben erwähnten Reihen sind bezüglich den Reihen selbst gleich.

5. Bei den beiden Reihen

$$z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

und

$$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

ist die erste Ableitung der einen gleich dem Werte der andern.

6. Die zweiten Ableitungen dieser Reihen sind den Reihen selbst bezüglich gleich.

7. $\frac{d}{dz}\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots\right) = \frac{1}{1-z}$.

§ 44. Die Potenzreihe als Taylorsche bzw. Maclaurinsche Reihe.

Nach § 41 ist, wenn z, ζ, $z + \zeta$ dem Konvergenzbereich von $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ angehören,

$$f(z+\zeta) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}\zeta + \frac{f''(z)}{2!}\cdot\zeta^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}\cdot\zeta^{n-1} + \dots$$

Der Ausdruck hat die Form der aus den Elementen der Differentialrechnung her bekannten Taylorschen Reihe.

Es läßt sich also unter der obigen Einschränkung $f(z+\zeta)$ in eine Potenzreihe von ζ entwickeln, deren Koeffizienten, abgesehen von konstanten Zahlenfaktoren, die sukzessiven Ableitungen von $f(z)$ sind.

Setzen wir im besonderen $z=0$ und führen dann statt ζ wieder z ein, so erhalten wir $f(z)$ die Maclaurinsche Entwicklung:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \ldots$$

§ 45. Übereinstimmung zweier Potenzreihen.

Es seien zwei Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

gegeben, die für alle Werte des Argumentes dem Werte nach übereinstimmen. Es sei ferner z ein beliebiger Punkt des gemeinsamen Stückes der beiden Konvergenzbereiche, $z+\zeta$ ein unendlich benachbarter. Dann ist der Voraussetzung nach

$$\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} = \frac{g(z+\zeta)-g(z)}{\zeta}$$

für alle in Betracht kommenden Werte von z und ζ. Lassen wir den Punkt $z+\zeta$ sich dem Punkt z auf einem vorgeschriebenen Wege nähern, so bleiben die beiden Quotienten stets einander gleich. Sie haben also einen gemeinsamen Grenzwert, oder es ist

$$f'(z) = g'(z).$$

Daß wir die Annäherung des Punktes $z+\zeta$ an den Punkt z in beiden Fällen in der gleichen Weise vor sich gehen lassen, dient nur der Anwendung der Voraussetzung und bedeutet keine Einschränkung; denn wenn wir etwa für $g(z)$ von einem andern Werte $z + \zeta$ ausgehen und uns z nähern, so kommen wir nach früher Bewiesenem doch immer zu demselben Grenzwerte $g'(z)$. Es stimmen also auch die ersten Ableitungen der beiden Reihen für alle Werte des Argumentes überein. Dieselben Schlüsse wie auf $f(z)$ und $g(z)$ können wir auch auf $f'(z)$ und $g'(z)$ anwenden usw. Wir erkennen dann allgemein, daß aus der Übereinstimmung der Werte der beiden Reihen für alle Werte des Argumentes auch die Übereinstimmung gleich hoher Ableitungen für alle Werte des Argumentes folgt. Insbesondere ist

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0), \ldots$$

und da jede Potenzreihe in der Umgebung des Nullpunktes sich als Maclaurinsche Reihe darstellen läßt, so folgt:

Satz 73: Die Werte zweier Potenzreihen stimmen dann und nur dann für alle Werte des Argumentes überein, wenn die entsprechenden Koeffizienten einander gleich sind.

Damit gleichbedeutend ist die Formulierung:

Satz 74: Eine Funktion der komplexen Veränderlichen z läßt sich, wenn überhaupt, so nur auf eine einzige Weise in eine Potenzreihe entwickeln, die nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitet.

Aus der Identität der Potenzreihen $f(z)$ und $g(z)$ folgt natürlich auch, daß sie den gleichen Konvergenzkreis besitzen.

Spezialfälle des Satzes 73 sind:

Satz 75: Eine Potenzreihe hat dann und nur dann für alle Werte des Argumentes einen konstanten Wert, wenn alle Koeffizienten mit Ausnahme des konstanten Gliedes verschwinden.

Satz 76: Eine Potenzreihe verschwindet dann und nur dann für alle Werte des Argumentes, wenn alle ihre Koeffizienten verschwinden.

Zur Bildung der Koeffizienten

$$f(0), \quad \frac{f'(0)}{1}, \quad \frac{f''(0)}{2!}, \ldots$$

genügt es bereits, wenn wir die Werte der Reihe $f(z)$ auf einem kleinen Linienstück kennen, das vom Nullpunkt ausgeht. Wir können also den Satz aussprechen:

Satz 77: Stimmen die Werte zweier Potenzreihen auf einem noch so kleinen vom Nullpunkte ausgehenden Linienstücke überein, so sind die Reihen miteinander identisch.

§ 46. Der absolute Wert des ersten Gliedes einer Potenzreihe.

Wir nehmen an, daß in einer Potenzreihe die ersten m Koeffizienten verschwinden, daß also die Reihe die Form hat:

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \ldots \qquad (a_m \text{ ungleich Null}).$$

Dabei soll natürlich der Fall $m = 0$ nicht ausgeschlossen sein.

Es ist

$$f(z) = a_m z^m + a_m z^m \left[\frac{a_{m+1}}{a_m} z + \frac{a_{m+2}}{a_m} z^2 + \ldots \right].$$

Die in der eckigen Klammer stehende Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzbereiches eine stetige Funktion von z, sie nähert sich, wenn z dem Punkte 0 zustrebt, dem Werte 0. Bezeichnet also ε eine beliebig klein vorgegebene positive Zahl, so ist bei genügender Kleinheit von z:

$$\left| a_m z^m \left[\frac{a_{m+1}}{a_m} z + \frac{a_{m+2}}{a_m} z^2 + \ldots \right] \right| < \left| a_m z^m \right| \cdot \varepsilon .$$

Wir ersehen daraus:

Satz 78: In jeder Potenzreihe kann der Wert der Variablen so klein angenommen werden, daß der absolute Wert des ersten von Null verschiedenen Gliedes den absoluten Wert der Summe der anderen Glieder übertrifft.

Insbesondere ergibt sich:

Satz 79: Ist der Wert einer Potenzreihe für $z = 0$ gleich Null, so läßt sich um den Punkt $z = 0$ ein Kreis derart beschreiben, daß in seinem Innern die Reihe $f(z)$ nirgends den Wert Null annnimmt.

Denn bezeichnen wir etwa das erste Glied der Reihe mit Z_1, die Summe aller übrigen mit Z_2, so ist jedenfalls

$$|Z_1 + Z_2| > |Z_1| - |Z_2| \quad \text{(Satz 11, § 10).}$$

Nun ist in der unmittelbaren Umgebung des Nullpunktes nach dem vorher bewiesenen Satze $|Z_1| - |Z_2|$ größer als Null; es kann also erst recht nicht $|Z_1 + Z_2|$ gleich Null sein, was doch der Fall sein müßte, wenn in der unmittelbaren Umgebung sich ein weiterer Nullpunkt der Reihe befände.

§ 47. Kombinationen zweier Potenzreihen.

Aus dem Charakter der Potenzreihe $f(z)$ als einer regulären Funktion des komplexen Argumentes z (§ 42) und unter Benutzung der Sätze über Kombinationen von regulären Funktionen (Satz 42, § 25) ergeben sich wichtige Folgerungen.

Es seien $f(z)$ und $g(z)$ zwei Potenzreihen, die nach positiven Potenzen von z fortschreiten, r und ϱ ihre Konvergenzradien. Dann folgt:

Satz 80: Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier Potenzreihen sind unbedingt ungleichmäßig konvergent innerhalb des kleineren der beiden Konvergenzkreise.

Satz 81: Der Quotient $\frac{f(z)}{g(z)}$ zweier Potenzreihen ist eine reguläre Funktion von z für alle Werte z, die dem absoluten Werte nach kleiner als der kleinere der beiden Konvergenzradien sind, und die den Nenner nicht zu Null machen.

Daß $\frac{f(z)}{g(z)}$ im Innern des Konvergenzkreises in eine Potenzreihe von z entwickelbar ist, ist damit nicht gesagt. Es läßt sich jedoch stets eine Potenzreihe formell bilden, die mit $g(z)$ nach Satz 56, § 31 multipliziert, $f(z)$ ergibt.

Ist z. B.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

und nehmen wir $\frac{f(z)}{g(z)} = F(z)$ die Entwicklung an

$$F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

so folgt:

$$F(z) \cdot g(z) = c_0 \cdot b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0) \cdot z + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0) z^2 + \dots$$

Soll diese Reihe mit $f(z)$ übereinstimmen, so ergeben sich aus Satz 75, § 45 für die Koeffizienten c die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 b_0 \\ a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \\ a_2 = c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 \\ a_3 = c_0 b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3 b_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

die nur für den Fall $b_0 = 0$ versagen. Ob aber die Reihe

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

wirklich konvergent ist, müssen wir jedesmal durch eine besondere Untersuchung entscheiden.

§ 48. Potenzreihen von $z - c$.

Es sei c eine Konstante und

$$a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots$$

eine Reihe, die nach ganzen positiven Potenzen von $z - c$ fortschreitet. Für eine derartige Reihe gelten alle über Potenzreihen entwickelten Sätze, wie wir mit Hilfe der Substitution $z' = z - c$ leicht erkennen. Wir haben nur zu beachten, daß an Stelle des Nullpunktes und seiner Umgebung der Punkt c und seine Umgebung tritt. Die Reihe ist also unbedingt und gleichmäßig konvergent für alle Punkte z im Innern eines gewissen Kreises um den Punkt c als Mittelpunkt.

Insbesondere erkennen wir, daß eine solche Reihe innerhalb ihres Konvergenzkreises eine reguläre Funktion des komplexen Argumentes z darstellt. Es ist nämlich zunächst der Wert der Reihe eine reguläre Funktion von $z' = z - c$, er ist also nach Satz 47, § 28 auch eine reguläre Funktion von z.

Vierter Abschnitt.

Spezielle Potenzreihen.

§ 49. e^z, $\sin z$, $\cos z$.

In den Elementen der Differentialrechnung wird gezeigt, daß für reelle Werte von z die Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$ sich in die Reihen entwickeln lassen:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \cdots$$

Diese Reihen sind für alle endlichen reellen Werte von z unbedingt konvergent; sie bleiben es also auch, wenn wir für z komplexe Werte einsetzen. Es werden dann durch sie drei reguläre Funktionen von z definiert, für die wir die im Falle reeller Variablen eingeführten Bezeichnungen beibehalten wollen. Wir werden nachweisen, daß ihre Haupteigenschaften mit denen für reelle Variable übereinstimmen, daß wir also zu einer Beibehaltung der Bezeichnungen durchaus berechtigt sind. Ehe wir aber die so definierten Potenzreihen für komplexe Veränderliche genauer studieren, wollen wir kurz noch einmal ihre uns bereits bekannten Eigenschaften für reelle Veränderliche zusammenfassen. Die Veränderliche sei in diesem Falle mit x bezeichnet ($z = x + yi$).

§ 50. Eigenschaften von e^x (x reell).

1. Es ist $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

2. e^x ist stets positiv.

3. Die erste Ableitung von e^x ist der Funktion gleich, also auch jede weitere.

4. e^x wächst gleichzeitig mit x.

5. e^x nimmt jeden beliebig vorgeschriebenen positiven Wert nur an einer Stelle an.

6. e^x wird an keiner angebbaren Stelle 0 oder ∞.

§ 51. Die Eigenschaften von $\sin x$ und $\cos x$ (x reell).

1. $\sin x$ ist eine ungerade Funktion; denn $\sin(-x) = -\sin x$. $\cos x$ ist eine gerade Funktion; denn $\cos(-x) = \cos x$.

2. Es ist stets $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind einfach periodisch mit der primitiven Periode 2π, d. h. sie behalten ihren Wert, wenn x sich um $2k\pi$ ändert, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

4. $\sin x$ durchläuft stetig wachsend alle seine Werte von -1 bis $+1$, wenn x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zunimmt; $\cos x$ durchläuft stetig abnehmend alle seine Werte von $+1$ bis -1, wenn x von 0 bis π zunimmt.

5. $\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$;

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \quad \cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0 .$$

6. Es bestehen die Beziehungen:

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 ;$$
$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 ,$$

die man als die Additionstheoreme von sin und cos bezeichnet.

7. Zwischen den Grenzen 0 (einschließlich) und 2π (ausschließlich) nehmen $\sin x$ und $\cos x$ jeden ihnen vorgeschriebenen reellen Wert, der der Größe nach zwischen -1 und $+1$ liegt, an zwei Stellen an. Ausgenommen sind nur die Werte $+1$ und -1; denn $\sin x$ nimmt den Wert $+1$ nur für $x = \frac{\pi}{2}$, den Wert -1 nur für $x = \frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ den Wert $+1$ nur für $x = 0$, den Wert -1 nur für $x = \pi$ an.

$$8.\ \frac{d \cdot \sin x}{dz} = \cos x\,; \qquad \frac{d \cdot \cos x}{dx} = -\sin x\,.$$

§ 52. Die Relation $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

Für reelle Werte z_1, z_2 gilt die Beziehung

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}\,.$$

Der Beweis für diese Tatsache gilt auch für komplexe Werte z_1, z_2, da er rein formalen Charakters ist; er soll aber hier noch einmal Platz finden, um die Vollständigkeit zu wahren. Es ist

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \ldots + \frac{z_1^n}{n!} + \ldots,$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \ldots + \frac{z_2^n}{n!} + \ldots$$

Das allgemeine Glied des Produktes heißt

$$\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1} \cdot z_2}{(n-1)!\,1!} + \frac{z_1^{n-2} \cdot z_2^2}{(n-2)!\,2!} + \ldots + \frac{z_2^n}{n!}\,.$$

Da wegen

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{(n-\nu)!\,\nu!} \qquad \frac{1}{(n-\nu)!\,\nu!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{\nu}$$

ist, so kann es in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{n!}\left[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} \cdot z_2 + \binom{n}{2} \cdot z_1^{n-2} \cdot z_2^2 + \ldots + z_2^n\right]$$

oder

$$\frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}\,.$$

Es ist also

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \dots$$
$$+ \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} + \dots = e^{z_1 + z_2}.$$

§ 53. Die Eulersche Relation.

Setzen wir in die Reihe für e^z an Stelle des Argumentes z die Zahl zi ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung des Umstandes, daß bei unbedingt konvergenten Reihen die Reihenfolge der Glieder beliebig verändert werden kann,

$$e^{zi} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \dots$$
$$+ i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \dots\right).$$

Der erste Teil des rechtsstehenden Ausdruckes stimmt überein mit der Reihe für $\cos z$, der Faktor von i mit der für $\sin z$. Es ist also

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z\,.$$

Diese fundamentale Relation stammt von Euler, der sie allerdings nur für reelle Werte von z angab und sie durch formale Substitution aus der reellen Reihe herleitete, ohne die Berechtigung einer solchen Übertragung zu prüfen. Mit Hilfe der Eulerschen Relation kann der Nachweis geliefert werden, daß die sämtlichen fundamentalen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen auch für komplexe Werte der Veränderlichen gelten; sie vermittelt ferner die Erkenntnis, daß e^z eine periodische Funktion ist.

Zunächst zeigen die definierenden Reihen für $\sin z$ und $\cos z$, daß $\sin z$ eine ungerade Funktion, $\cos z$ eine gerade Funktion seines Argumentes ist. Dann liefert die Eulersche Relation

$$\begin{cases} e^{zi} = \cos z + i \sin z\,, \\ e^{-zi} = \cos z - i \sin z\,. \end{cases}$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen erhalten wir die unter dem Namen des trigonometrischen Pythagoras bekannte Relation

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1\,,$$

welche also auch für komplexe Veränderliche gilt.

Es folgt ferner:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}\,, \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}\,.$$

Es ist also

$$\sin(z_1 + z_2) = \frac{e^{(z_1+z_2)i} + e^{-(z_1+z_2)i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{z_1 i} \cdot e^{z_2 i} - e^{-z_1 i} \cdot e^{-z_2 i}}{2i}$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2i}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\,.$$

Analog folgt

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2\,.$$

Setzen wir statt z_2 in diese Formeln $-z_2$ ein, so ergeben sich die gleichfalls bekannten Formeln:

$$\begin{cases} \sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 - \cos z_1 \cdot \sin z_2\,, \\ \cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_1 \cdot \sin z_2\,. \end{cases}$$

Es gelten demnach auch alle aus dem Additionstheorem sich ergebenden Folgerungen, wie

$$\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z \qquad \left(\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}\right)$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \qquad \left(\cos z = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2 z - 1 \qquad \left(= 2\cos^2\frac{z}{2} - 1\right)$$

$$= 1 - 2\sin^2 z \qquad \left(= 1 - 2\sin^2\frac{z}{2}\right)$$

und andere mehr.

Vermittels der Substitutionen

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} + \dfrac{z_1 - z_2}{2}, \\[2ex] z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} - \dfrac{z_1 - z_2}{2} \end{cases}$$

ergeben sich ferner die wichtigen Relationen:

$$\begin{cases} \sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\dfrac{z_1 + z_2}{2} \cdot \cos\dfrac{z_1 - z_2}{2}, \\[2ex] \sin z_1 - \sin z_2 = 2\sin\dfrac{z_1 - z_2}{2} \cdot \cos\dfrac{z_1 + z_2}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\dfrac{z_1 + z_2}{2} \cdot \cos\dfrac{z_1 - z_2}{2}, \\[2ex] \cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\dfrac{z_1 + z_2}{2} \cdot \sin\dfrac{z_1 - z_2}{2}. \end{cases}$$

§ 54. Realitätsbetrachtungen.

Wir untersuchen in diesem Paragraphen, für welche Werte von z e^z, $\sin z$, $\cos z$ reell sind.

1. Die Exponentialfunktion:

Es ist

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y\,,$$

e^z ist also reell, wenn $e^x \sin y = 0$ ist. Das ist nur der Fall, wenn $\sin y = 0$, also $y = k\pi$ ist (k eine ganze Zahl), denn e^x wird für keinen reellen Wert gleich Null. Umgekehrt ist

$$e^{x+k\pi i} = e^x \cdot \cos k\pi = (-1)^k \cdot e^x\,.$$

Wir können demnach zusammenfassend sagen:

e^z ist reell, wenn z die Form $x + k\pi \cdot i$ hat, und zwar ist es positiv, wenn k gerade, negativ, wenn k ungerade ist.

Anmerkung: e^z ist rein imaginär, wenn

$$z = x + (2k+1)\frac{\pi}{2} \cdot i\,.$$

2. Die Funktion $\sin z$:

Es ist

$$\sin z = \sin(x+yi) = \sin x \cdot \cos(yi) + \cos x \cdot \sin(yi)$$

$$= \sin x\left(1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i \cdot \cos x \cdot \left(y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right)$$

$\sin z$ ist nur dann reell, wenn entweder $\cos x = 0$ oder $y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots = 0$ ist. Der letztere Ausdruck wächst gleichzeitig mit seinem Argument, denn seine Ableitung $1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$ ist positiv; er nimmt also jeden Wert nur für ein bestimmtes y an und verschwindet nur für $y = 0$. Soll also $\sin z$ reell sein, so muß entweder $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ oder $y = 0$ sein. Der zweite Fall ist evident; im ersten ist

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + yi\right] \\ &= \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot\left(1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) \\ &= (-1)^k\cdot\left(1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right),\end{aligned}$$

also positiv und größer als 1, wenn k eine gerade, negativ und kleiner als -1, wenn k eine ungerade Zahl ist.

Für die Nullpunkte des Sinus muß gleichzeitig einer der Faktoren $\sin x$ und $1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$ und der Faktoren $\cos x$ und $y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots$ verschwinden. Es kann das nur eintreten für $\sin x$ und $y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots$; woraus sich $x = k\pi$ und $y = 0$ ergibt. Die Nullpunkte sind also sämtlich von der Form $k\pi$.

Anmerkung: $\sin z$ wird rein imaginär für $\sin x = 0$, d. h. für Werte von z der Form $k\pi + yi$.

3. Analog läßt sich zeigen, daß $\cos z$ außer im Falle eines reellen z nur dann reell ist, wenn z die Form $(k\pi + yi)$ hat, und zwar ist wegen

$$\cos(k\pi + yi) = (-1)^k\cdot\left(1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right)$$

$\cos z$ positiv und größer als 1 im Falle eines geraden k, negativ und kleiner als (-1) im Falle eines ungeraden k. Die Nullpunkte von $\cos z$ sind

$$z = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} .$$

Anmerkung: $\cos z$ wird rein imaginär für

$$z = (2k+1) \frac{\pi}{2} + y i .$$

Dieses Verhalten des Kosinus hätten wir auch einfacher mit Hilfe der Formel $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$ herleiten können, die sich aus dem Additionstheorem des Sinus unter Berücksichtigung von $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ergibt.

§ 55. Periodizität von $\sin z$, $\cos z$, e^z.

Die Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ sind im Falle einer reellen Veränderlichen periodisch mit der primitiven Periode 2π. Wir wollen untersuchen, ob diese Eigenschaft auch für komplexe Werte der Veränderlichen bestehen bleibt.

Soll etwa $\sin z$ seinen Wert behalten, wenn z sich um eine konstante Zahl ζ (die Periode) ändert, so gilt die Gleichung

$$\sin(z+\zeta) - \sin z = 0$$

oder

$$2 \sin\frac{\zeta}{2} \cdot \cos\left(z + \frac{\zeta}{2}\right) = 0 .$$

Diese ist bei beliebigen Werten von z nur zu erfüllen, wenn $\sin\frac{\zeta}{2} = 0$, also $\zeta = 2k\pi$ ist. In der Tat ist dann

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z \cdot \cos 2k\pi + \cos z \cdot \sin 2k\pi$$
$$= \sin z .$$

Soll ζ eine Periode der Funktion $\cos z$ sein, so muß sie die Gleichung

$$\cos(z + \zeta) - \cos z = 0$$

oder

$$-2 \sin\left(z + \frac{\zeta}{2}\right) \sin\frac{\zeta}{2} = 0$$

befriedigen. ζ kann also auch hier nur von der Form $2k\pi$ sein. In der Tat ist

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z \cos 2k\pi - \sin z \sin 2k\pi$$
$$= \cos z .$$

Wir können somit den Satz aussprechen:

Satz 82. Die trigonometrischen Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ sind einfach periodisch mit der primitiven Periode 2π.

Nun ist

$$e^{z+2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z .$$

e^z hat also sicher eine Periode von der Form $2k\pi i$. Sie hat aber auch keine andere Periode; denn wäre $\zeta = \xi + \eta \cdot i$ eine solche, so müßte wegen

$$e^{z+\zeta} - e^z = e^z(e^\zeta - 1)$$
$$e^\zeta = 1$$

sein. Das führt zu den Gleichungen

$$\begin{cases} e^\xi \cos\eta = 1 , \\ e^\xi \sin\eta = 0 . \end{cases}$$

Quadrieren und addieren wir diese, so erhalten wir $e^{2\xi} = 1$, also, da ξ reell ist, $\xi = 0$. Ferner folgt aus $\cos\eta = 1$, $\sin\eta = 0$ $\eta = 2k\pi$. Eine Periode von e^z kann also nur von der Form $2k\pi i$ sein. Es gilt also der wichtige funktionentheoretische

Satz 83: Die Exponentialfunktion e^z ist einfach periodisch mit der primitiven Periode $2\pi i$.

§ 56. Ergänzungen.

1. Aus den Additionstheoremen folgen leicht die Formelgruppen:

$$\begin{cases} \sin(k\pi + z) = (-1)^k \cdot \sin z, & \cos(k\pi + z) = (-1)^k \cos z, \\ \sin(k\pi - z) = (-1)^{k+1} \cdot \sin z, & \cos(k\pi - z) = (-1)^k \cos z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + z\right] = (-1)^k \cos z, \\ \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + z\right] = (-1)^{k+1} \sin z; \\ \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - z\right] = (-1)^k \cos z, \\ \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - z\right] = (-1)^k \cdot \sin z. \end{cases}$$

Von besonderer Wichtigkeit für die erste Gruppe ist der Fall $k = 1$:

$$\begin{cases} \sin(\pi + z) = -\sin z, & \cos(\pi + z) = -\cos z, \\ \sin(\pi - z) = +\sin z, & \cos(\pi - z) = -\cos z. \end{cases}$$

Für die zweite Gruppe kommt häufig der Fall $k = 0$ in Betracht:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\sin z,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = +\sin z.$$

Diese Formeln hätten auch schon an früherer Stelle gebracht werden können, aber es sollte den Periodizitätsbetrachtungen nicht vorgegriffen werden.

2. Die Exponentialfunktion e^z nimmt an keiner angebbaren Stelle im Endlichen die Werte 0 oder ∞ an. Für reelle Werte von z wird dieser Satz bereits in der Differentialrechnung bewiesen; daß er auch für komplexe Werte gilt, zeigen wir folgendermaßen: Soll e^z reell sein, so muß nach dem früher Bewiesenen (§ 54, 1) z die Form $x + k\pi i$ haben. Es ist dann aber

$$e^z = (-1)^k \cdot e^x .$$

Da e^x an keiner Stelle verschwindet, so kann auch e^z nirgends verschwinden. Andererseits ist

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y .$$

Nun wird keine der Zahlen e^x, $\cos y$, $\sin y$ an einer im Endlichen liegenden Stelle unendlich groß, also kann auch e^z an keiner Stelle unendlich groß werden.

3. Zu jedem Werte z gehört stets ein und nur ein Wert von e^z. Das Umgekehrte findet jedoch nicht statt; denn ist etwa z_0 ein Wert von z, für den e^z einer vorgeschriebenen Zahl gleich wird, so folgen daraus wegen der Periodieität von e^z unendlich viele Werte $z_0 + 2k\pi i$, für die das gleiche der Fall ist. Ziehen wir daher in der komplexen Ebene zwei zu der imaginären Achse senkrechte Gerade, die den Abstand 2π voneinander haben, so nimmt die Funktion e^z innerhalb des von diesen Geraden gebildeten Streifens bereits alle ihre Werte an. Sind $z_1 = x_1 + y_1 i$ und $z_2 = x_2 + y_2 i$ zwei Punkte innerhalb des Streifens, so ist

$$\frac{e^{x_1 + y_1 i}}{e^{x_2 + y_2 i}} = e^{x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) i} .$$

Nun ist innerhalb des Streifens niemals $|y_1 - y_2| = 2\pi$. Soll also $e^{z_1} = e^{z_2}$ sein, so ist unbedingt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; d. h. $z_1 = z_2$. Innerhalb des Streifens nimmt also e^z jeden seiner Werte an nur einer Stelle an. Rechnen wir nun die Punkte der einen Begrenzungslinie mit zu dem Streifen, die der andern nicht, so gilt das eben Bewiesene für alle Punkte des Streifens. Wir nennen einen so definierten Streifen der komplexen Ebene einen Periodenstreifen der Funktion e^z. Wir zeigen nun noch, daß e^z außer der Zahl 0 jeden beliebig vorgeschriebenen endlichen Wert wirklich annimmt. Soll etwa

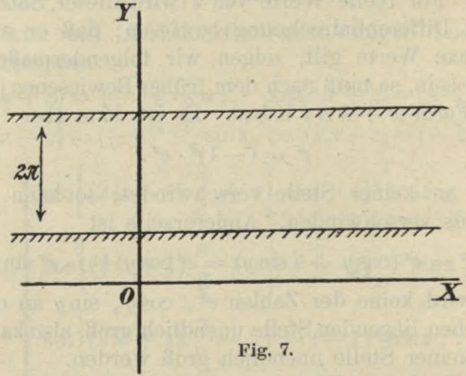

Fig. 7.

$$e^z = e^{x+yi} = a = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

sein, so müssen die Gleichungen gelten:

$$\begin{cases} e^x \cos y = \varrho \cos\vartheta\,, \\ e^x \sin y = \varrho \sin\vartheta\,. \end{cases}$$

Sie ergeben $e^x = \varrho$ und $y = \vartheta + 2k\pi$.

Nun gibt es sicher einen reellen Wert x, für den e^x der positiven Zahl ϱ gleich wird; er heißt der natürliche Logarithmus von ϱ und wird mit $\log \varrho$ bezeichnet. Es gibt also nicht nur einen Wert, der die Gleichung $e^z = a$ befriedigt, sondern unendlich viele. Sie sind von der Form

$$\log \varrho + \vartheta i + 2 k \pi i .$$

Auch auf diesem Wege erkennen wir, daß es in jedem Periodenstreifen nur einen Wert gibt, für den $e^z = a$ wird; denn die zweiten Koordinaten zweier Wurzeln der Gleichung $e^z = a$ sind um mindestens 2π voneinander verschieden. Wir können somit den Satz aufstellen:

Satz 84: Innerhalb eines Periodenstreifens nimmt die Funktion e^z jeden beliebig vorgeschriebenen Wert an einer und nur einer Stelle an.

Die Lage eines Periodenstreifens ist völlig beliebig; um aber in Analogie mit der Grenzbestimmung für den Arcus zu bleiben (siehe den Ausdruck $\log \varrho + \vartheta i + 2 \mathrm{k} \pi i$), wollen wir ihn zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = +2\pi$ gelegen annehmen und nur die Punkte der Geraden $y = 0$ als zu ihm gehörig betrachten.

Da e^z innerhalb eines Periodenstreifens bereits alle seine Werte und jeden nur einmal annimmt, so bezeichnet man den Periodenstreifen auch als einen Fundamentalbereich von e^z. Wir werden sehen, daß für $\sin z$ und $\cos z$ die Begriffe Periodenstreifen und Fundamentalbereich nicht mehr zusammenfallen.

4. Da nämlich $\sin z$ und $\cos z$ die Periode 2π haben, so ist zwar die Breite eines Periodenstreifens ebenfalls gleich 2π; seine Begrenzungslinien liegen jedoch senkrecht zur reellen Achse. (Wir rechnen natürlich auch hier nur eine von diesen mit zum Streifen.) Nehmen wir den Streifen für $\cos z$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ gelegen an, so

ist $\cos(-z) = \cos z$. Die Funktion $\cos z$ nimmt also innerhalb des Periodenstreifens jeden Wert an zwei Stellen an. Es kann dies aber auch nur an zwei Stellen stattfinden, denn es ist

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \frac{e^{2zi} + 1}{2e^{zi}},$$

und der letztere Ausdruck nimmt jeden Wert a nur an höchstens zwei Stellen an, da die Gleichung

$$\frac{e^{2zi} + 1}{2e^{zi}} = a$$

eine für e^{iz} quadratische ist, und e^{zi} einen jeden Wert nur an einer Stelle annimmt.

Es ist also bereits der zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = +\pi$ liegende Streifen ein Fundamentalbereich von $\cos z$. Vorausgesetzt ist dabei allerdings, daß wir beide Begrenzungslinien des Fundamentalbereiches als zu ihm gehörig annehmen.

Nehmen wir für $\sin z$ den Periodenstreifen zwischen den Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ an, wobei wir nur $x = -\frac{\pi}{2}$ dem Streifen zurechnen, so läßt sich mit Hilfe der Formeln:

$$\sin(\pi - z) = \sin z$$

und

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{e^{2zi} - 1}{2ie^{zi}}$$

zeigen, daß auch $\sin z$ jeden ihm vorgeschriebenen Wert innerhalb des Streifens an zwei und nur zwei Stellen annimmt. Nun ist

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

$\sin z$ nimmt also alle seine Werte in denjenigen Punkten an, für die $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - i\,y\right)$ bereits alle seine Werte annimmt. Es ist das der Fall für die Punkte eines Streifens mit den Begrenzungslinien $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{entsprechend } \frac{\pi}{2} - x = \pi \text{ und } \frac{\pi}{2} - x = 0\right)$. Ein solcher Streifen ist, die Grenzlinien eingerechnet, als Fundamentalbereich von $\sin z$ anzusehen. Die willkürlich erscheinende Annahme des Periodenstreifens zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{3\pi}{2}$ erklärt sich daraus, daß wegen der Benutzung der Formel

$$\sin(\pi - z) = \sin z$$

mit z auch $(\pi - z)$ innerhalb des Periodenstreifens liegen muß. Wir fassen das Ergebnis zusammen zu dem

Satz 85: Innerhalb eines Periodenstreifens nehmen die Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ jeden ihnen vorgeschriebenen Wert an zwei und nur zwei Stellen an. Für $\sin z$ liegt ein Fundamentalbereich zwischen den Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$, für $\cos z$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$; dabei sind die Grenzlinien des Fundamentalbereiches diesem zuzurechnen.

§ 57. Die Ableitungen von e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Als gleichmäßig konvergente Reihen können die Reihen für e^z, $\sin z$, $\cos z$ gliedweise differenziert werden, wenn man ihre Ableitungen erhalten will. Es ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$\frac{d \cdot e^z}{dz} = e^z,$$

$$\frac{d \cdot \sin z}{dz} = \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right),$$

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right).$$

Es folgen dann leicht die höheren Ableitungen als:

$$\frac{d^n \cdot e^z}{dz^n} = e^z,$$

$$\frac{d^n \cdot \sin z}{dz^n} = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + z\right), \quad \frac{d^n \cdot \cos z}{dz^n} = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + z\right).$$

§ 58. Die Funktionen tg$z$ und cotg$z$.

Wie für reelle Veränderliche definieren wir tg$z$ und cotg$z$ durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Aus der Definition folgt sofort, daß tg$z$ und cotg$z$ ungerade Funktionen ihres Argumentes sind, denn es ist

$$\operatorname{tg}(-z) = \frac{\sin(-z)}{\cos(-z)} = -\frac{\sin z}{\cos z} = -\operatorname{tg} z$$

und
$$\operatorname{cotg}(-z) = -\operatorname{cotg} z.$$

Wegen der Relation $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ können $\sin z$ und $\cos z$ nicht gleichzeitig verschwinden; es sind also die Nullpunkte von tg$z$ identisch mit denen von $\sin z$, die Nullpunkte von cotg$z$ mit denen von $\cos z$. Ferner erkennen wir, daß tg$z$ in den Nullpunkten von $\cos z$ unendlich groß wird, ebenso $\operatorname{cotg} z$ in den Nullpunkten von $\sin z$ (Satz 25, § 22). Wir erhalten so die Formelgruppen

$$\operatorname{tg} k\pi = 0\,, \qquad \operatorname{cotg} k\pi = \infty\,,$$

$$\operatorname{tg}(2k+1)\frac{\pi}{2} = \infty\,, \qquad \operatorname{cotg}(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Da also $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{cotg} z$ in gewissen Punkten unendlich groß werden, so wollen wir im folgenden Argumente, für die dieser Fall eintreten kann, von der Betrachtung ausschließen.

Nach der Definition besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{cotg} z = 1\,,$$

welche es gestattet, die eine der beiden Funktionen durch die andere auszudrücken. Unter Zuhilfenahme des trigonometrischen Pythagoras (§ 53) erhalten wir

$$1 + \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}\,, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}\,.$$

Die Summe oder Differenz zweier Tangenten resp. Kotangenten läßt sich in Form eines Produktes darstellen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2 = \frac{\sin z_1}{\cos z_1} + \frac{\sin z_2}{\cos z_2} = \frac{\sin(z_1+z_2)}{\cos z_1 \cdot \cos z_2}\,.$$

Analog ergibt sich

$$\operatorname{tg} z_1 - \operatorname{tg} z_2 = \frac{\sin(z_1-z_2)}{\cos z_1 \cos z_2}\,,$$

$$\operatorname{cotg} z_1 + \operatorname{cotg} z_2 = \frac{\sin(z_2+z_1)}{\sin z_1 \cdot \sin z_2}\,,$$

$$\operatorname{cotg} z_1 - \operatorname{cotg} z_2 = \frac{\sin(z_2-z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}\,.$$

$\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{cotg} z$ sind einfach periodische Funktionen ihres Argumentes mit der primitiven Periode π; denn ist etwa ζ eine Periode der Funktion $\operatorname{tg} z$, so ist

$$\operatorname{tg}(z+\zeta)-\operatorname{tg} z=\frac{\sin\zeta}{\cos(z+\zeta)\cos z}=0,$$

was bei beliebigen Werten von z nur für $\zeta = k\pi$ eintritt. Andererseits ist

$$\operatorname{tg}(z+k\pi)=\frac{\sin(z+k\pi)}{\cos(z+k\pi)}=\frac{(-1)^k\cdot\sin z}{(-1)^k\cos z}=\operatorname{tg} z,$$

womit der erwähnte Satz für $\operatorname{tg} z$ bewiesen ist. Der Beweis läßt sich analog auch für $\operatorname{cotg} z$ führen.

In der komplexen Ebene liegt also zwischen den Geraden $x=-\frac{\pi}{2}$ (einschließlich) und $x=\frac{\pi}{2}$ (ausschließlich) ein Periodenstreifen von $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{cotg} z$. Dieser ist zugleich ein Fundamentalbereich; denn in ihm wird jeder den Funktionen beliebig vorgeschriebene Wert an einer und nur einer Stelle angenommen. Wir wollen den Beweis nur für $\operatorname{tg} z$ führen.

Wegen

$$\sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}\quad\text{und}\quad\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$$

ist

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1}.$$

Wird nun für $\operatorname{tg} z$ der beliebige Wert a vorgeschrieben, so ergibt sich zunächst zur Bestimmung von z

$$e^{2zi}=\frac{1+ai}{1-ai}.$$

Nun wird e^{2zi} an keiner angebbaren Stelle unendlich groß oder gleich Null, was für $a = \mp i$ eintreten würde, es folgt also:

Die Funktion tg$z$ nimmt an keiner angebbaren Stelle die Werte $\pm i$ an.

Abgesehen davon ist es jedoch stets möglich, einen Wert von z aus der Gleichung für e^{2zi} zu bestimmen. Da die Funktion e^{2zi} innerhalb ihres Periodenstreifens, der zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ angenommen werden kann und dann mit dem von tg$z$ übereinstimmt, jeden Wert einmal und nur einmal annimmt, so gilt das gleiche für tg$z$. Wir erwähnen, daß auch cogt$z$ an keiner angebbaren Stelle die Werte $\pm i$ annimmt.

tg$z$ und cotg$z$ haben wie sin$z$ und cos$z$ ein Additionstheorem: Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2} = \frac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \cdot \operatorname{tg} z_2}.$$

Den letzten Ausdruck erhalten wir aus dem vorhergehenden, indem wir Zähler und Nenner durch $\cos z_1 \cos z_2$ dividieren. Analog erhalten wir

$$\operatorname{cotg}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{cotg} z_1 \cdot \operatorname{cotg} z_2 - 1}{\operatorname{cotg} z_2 + \operatorname{cotg} z_1},$$

$$\operatorname{tg}(z_1 - z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 - \operatorname{tg} z_2}{1 + \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2},$$

$$\operatorname{cotg}(z_1 - z_2) = \frac{\operatorname{cotg} z_1 \cdot \operatorname{cotg} z_2 + 1}{\operatorname{cotg} z_2 - \operatorname{cotg} z_1}.$$

Berücksichtigen wir, daß tg$z$ und cotg$z$ die Periode π besitzen, so folgen aus den Additionstheoremen die Formelgruppen

$$\operatorname{tg}(k\pi \pm z) = \pm \operatorname{tg} z\,,$$

$$\operatorname{cotg}(k\pi \pm z) = \pm \operatorname{cotg} z\,;$$

$$\operatorname{tg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm z\right] = \mp \operatorname{cotg} z\,,$$

$$\operatorname{cotg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm z\right] = \mp \operatorname{tg} z\,.$$

Schließlich erhalten wir durch Gleichsetzung von z_2 und z_1 in den Additionstheoremen

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2\operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}\,,$$

$$\operatorname{cotg} 2z = \frac{\operatorname{cotg}^2 z - 1}{2\operatorname{cotg} z}\,.$$

§ 59. Realität von tg$z$ und cotg$z$.

Da mit tg$z$ auch cotg$z$ reell ist, so genügt es, die Untersuchung für tg$z$ durchzuführen. Es ist allgemein

$$\operatorname{tg}(x + yi) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} yi}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} yi}\,.$$

Erweitern wir diesen Ausdruck mit $1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(yi)$, so wird

$$\operatorname{tg}(x + yi) = \frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 yi) + \operatorname{tg} yi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 yi}\,.$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} yi = \frac{\sin yi}{\cos yi} = i \cdot \frac{y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots}{1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots}\,.$$

Da $\mathrm{tg}^2 y i$ reell ist, so kann der Ausdruck für $\mathrm{tg}(x+yi)$ nur im Falle $y=0$ reell sein, d. h. für reelle Werte von z.

§ 60. Die Ableitungen von tg$z$ und cotg$z$.

Es ist

$$\frac{\mathrm{tg}(z+\zeta)-\mathrm{tg}z}{\zeta}=\frac{\sin\zeta}{\zeta}\cdot\frac{1}{\cos(z+\zeta)\cos z}. \quad (\S\ 58.)$$

Lassen wir den Bildpunkt von ζ sich dem Bildpunkte von z nähern, so nähert sich der Wert des Differenzenquotienten dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\cos^2 z}\cdot\lim_{\zeta=0}\frac{\sin\zeta}{\zeta}=\frac{1}{\cos^2 z}\cdot\lim_{\zeta=0}\left(1-\frac{\zeta^2}{3!}+\frac{\zeta^4}{5!}-+\ldots\right)=\frac{1}{\cos^2 z}.$$

Es ist also

$$\frac{d\cdot\mathrm{tg}z}{dz}=\frac{1}{\cos^2 z}=1+\mathrm{tg}^2 z.$$

Dasselbe Ergebnis würden wir durch Differentiation des Quotienten $\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z}$ erhalten. Analog ergibt sich

$$\frac{\mathrm{cotg}(z+\zeta)-\mathrm{cotg}z}{\zeta}=-\frac{\sin\zeta}{\zeta}\cdot\frac{1}{\sin(z+\zeta)\sin z}. \quad (\S\ 58.)$$

Daraus folgt

$$\frac{d\cdot\mathrm{cotg}z}{dz}=-\frac{1}{\sin^2 z}=-(1+\mathrm{cotg}^2 z).$$

§ 61. Die Entwicklung von tg$z$ in eine Potenzreihe.

Es ist

$$\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z}=z\cdot\frac{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-+\ldots}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\ldots}.$$

Eine Entwicklung von $\operatorname{tg} z$ in eine Potenzreihe kann nur die ungeraden Potenzen enthalten, denn $\operatorname{tg} z$ ist eine ungerade Funktion; sie wird also die Form haben

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} z &= c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots \\ &= z \cdot (c_1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \ldots)\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} \cdot \cos z = \frac{\sin z}{z},$$

also

$$(c_1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \ldots)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + - \ldots$$

Wenden wir das Multiplikationsgesetz zweier Reihen an und beachten, daß zwei Potenzreihen nur dann übereinstimmen können, wenn die entsprechenden Koeffizienten einander gleich sind, so erhalten wir zur Bestimmung der Koeffizienten c die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_3 = \dfrac{c_1}{2!} - \dfrac{1}{3!} \\ c_5 = \dfrac{c_3}{2!} - \dfrac{c_1}{4!} + \dfrac{1}{5!} \\ c_7 = \dfrac{c_5}{2!} - \dfrac{c_3}{4!} + \dfrac{c_1}{6!} - \dfrac{1}{7!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Aus ihnen ergeben sich in etwas mühevoller Rechnung

$$c_1 = 1, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_5 = \frac{2}{15}, \quad c_7 = \frac{17}{315},$$

$$c_9 = \frac{62}{2835}, \quad c_{11} = \frac{1382}{155925}, \ldots$$

Wir erhalten somit für tg z die Potenzreihenentwicklung

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7$$

$$+ \frac{62}{2835} z^9 + \frac{1382}{155925} z^{11} + \ldots$$

Eine zweite, für die Berechnung der Koeffizienten einfachere Herleitung ergibt sich aus der Tatsache, daß

$$\frac{d \cdot \operatorname{tg} z}{d z} = 1 + \operatorname{tg}^2 z .$$

Ist wiederum

$$\operatorname{tg} z = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + c_7 z^7 + \ldots,$$

so ist

$$\frac{d \cdot \operatorname{tg} z}{d z} = c_1 + 3 c_3 z^2 + 5 c_5 z^4 + 7 c_7 z^6 + \ldots$$

und

$$1 + \operatorname{tg}^2 z = 1 + c_1^2 \cdot z^2 + 2 c_1 c_3 \cdot z^4$$

$$+ (2 c_1 c_5 + c_3^2) z^6 + 2 (c_1 c_7 + c_3 c_5) z^8$$

$$+ (2 c_1 c_9 + 2 c_3 c_7 + c_5^2) z^{11} + \ldots$$

Die Koeffizientengleichung ergibt die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 3\,c_3 = c_1^2 \\ 5\,c_5 = 2\,c_1\,c_3 \\ 7\,c_7 = 2\,c_1\,c_5 + c_3^2 \\ 9\,c_9 = 2(c_1\,c_7 + c_3\,c_5) \\ 11\,c_{11} = 2\,c_1\,c_9 + 2\,c_3\,c_7 + c_5^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

aus denen sich die Koeffizienten äußerst leicht berechnen lassen. So ist

$$c_3 = \frac{c_1^2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$c_5 = \frac{2}{5}c_1 = \frac{2}{15},$$

$$7\,c_7 = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{17}{45}, \quad c_7 = \frac{17}{315},$$

$$9\,c_9 = \frac{34}{315} + \frac{4}{45} = \frac{62}{315}, \quad c_9 = \frac{62}{2835},$$

. . . .

Wir erkennen auch sofort, daß alle Koeffizienten positiv sind. Es bleibt nur noch zu untersuchen, wie weit sich der Konvergenzkreis der Reihe erstreckt. Über $|z| = \frac{\pi}{2}$ kann er jedenfalls nicht hinausgehen; denn für $z = \frac{\pi}{2}$ wird $\operatorname{tg} z$ unendlich groß. Die Reihe kann in der Form

$$\operatorname{tg} z = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1}\,z^{2\nu+1}$$

geschrieben werden; der Quotient $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ ist dann allgemein

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{c_{2\nu+3}\, z^{2\nu+3}}{c_{2\nu+1} \cdot z^{2\nu+1}} = \frac{c_{2\nu+3}}{c_{2\nu+1}} \cdot z^2 .$$

Die Reihe konvergiert also jedenfalls dann, wenn der Quotient

$$\left| \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \right|$$

sich mit zunehmendem ν einem echten Bruche k als Grenze nähert. Es trifft das zu, solange

$$| z |^2 < \lim_{n=\infty} \frac{c_{2\nu+1}}{c_{2\nu+3}}$$

ist, falls dieser Grenzwert überhaupt existiert. Nun nähern sich die Quotienten

$$\frac{c_1}{c_3}, \quad \frac{c_3}{c_5}, \quad \frac{c_5}{c_7}, \quad \frac{c_7}{c_9}, \ldots,$$

wie die Rechnung zeigt, dem Grenzwerte

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2{,}4674011 \ldots$$

Es muß also $| z | < \frac{\pi}{2}$ sein, d. h. der Konvergenzkreis der Reihe ist der mit dem Radius $\frac{\pi}{2}$ um den Nullpunkt beschriebene Kreis (Satz 67, § 38).

§ 62. Die Potenzreihe für cotg$z$.

Für die Funktion cotg$z$ kann keine Potenzreihe aufgestellt werden, die in der Umgebung des Nullpunktes konvergiert, da $\operatorname{cotg} z$ für $z = 0$ unendlich wird; wohl aber kann dies für $z \operatorname{cotg} z$ geschehen. Auch hier führen mehrere Wege zum Ziele: es können benutzt werden die Formeln

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}, \quad \frac{d \operatorname{cotg} z}{d z} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 z)$$

u. a. Wir erhalten auf sämtliche Arten die Reihe

$$z \operatorname{cotg} z = 1 - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{45} z^4 - \frac{2}{945} z^6 - \frac{1}{4725} z^8 - \dots,$$

welche für $|z| < \pi$ konvergiert und mit Ausnahme des ersten nur negative Koeffizienten hat.

Über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Reihen für $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$ und den Bernouillischen Zahlen siehe: Sporer, Niedere Analysis. Sammlung Göschen. Bd. 53, § 78.

§ 63. Die hyperbolischen Funktionen.

Wenn wir in der Reihe für e^z die ungeraden Glieder und die geraden Glieder für sich zusammenfassen, so erhalten wir zwei für alle endlichen Werte von z unbedingt konvergente Reihen. Man nennt die durch sie dargestellten Funktionen aus einem geometrischen Grunde hyperbolische Funktionen von z. Sie stehen in engem Zusammenhange mit den trigonometrischen Funktionen $\sin z$ und $\cos z$. Wir bezeichnen sie aus diesem Grunde als $\operatorname{Sin} z$ und $\operatorname{Cos} z$. (Gelesen sinus hyperbolicus z und cosinus hyperbolicus z.) Ihre Definitionsgleichungen lauten:

$$\operatorname{Sin} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots,$$

$$\operatorname{Cos} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots,$$

und es bestehen zwischen ihnen und $\sin z$, $\cos z$ die Beziehungen:

$$\operatorname{Sin} z = \frac{\sin(z i)}{i}, \quad \operatorname{Cos} z = \cos(z i) .$$

Wir definieren ferner die Funktion $\operatorname{Tg} z$ (gelesen tangens hyperbolicus z) durch

$$\operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Cos} z},$$

so daß

$$\operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{tg}(z i)}{i} .$$

(Für die hyperbolischen Funktionen werden auch häufig die Bezeichnungen $\sinh z$, $\cosh z$, $\operatorname{tgh} z$ verwendet.)

Mit Hilfe der Gleichungen

$$\operatorname{Sin} z = \frac{\sin(z i)}{i}, \quad \operatorname{Cos} z = \cos(z i), \quad \operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{tg}(z i)}{i}$$

können wir aus jeder für $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ geltenden Beziehung eine solche für

$$\operatorname{Sin} z, \quad \operatorname{Cos} z, \quad \operatorname{Tg} z$$

herleiten. Wir brauchen nur an Stelle der vorkommenden Argumente ihre mit i multiplizierten Werte zu setzen und die erwähnten Gleichungen zur Einführung der hyperbolischen Funktionen an Stelle der trigonometrischen zu benutzen. Es wird daher genügen, wenn wir die Haupteigenschaften der hyperbolischen Funktionen ohne Beweis anführen:

1. $\operatorname{Sin}(-z) = -\operatorname{Sin} z$, $\operatorname{Cos}(-z) = \operatorname{Cos}(z)$,
$\operatorname{Tg}(-z) = -\operatorname{Tg} z$.

2. $$\mathrm{Sin}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{Cos}\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{Tg}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

3. $$\mathrm{Cos}^2 z - \mathrm{Sin}^2 z = 1.$$

4. $$1 - \mathrm{Tg}^2 z = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 z}.$$

5. $$\mathrm{Sin}(z_1 + z_2) = \mathrm{Sin}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z_2 + \mathrm{Cos}\,z_1\,\mathrm{Sin}\,z_2,$$

$$\mathrm{Cos}(z_1 + z_2) = \mathrm{Cos}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z_2 + \mathrm{Sin}\,z_1\,\mathrm{Sin}\,z_2,$$

$$\mathrm{Sin}(z_1 - z_2) = \mathrm{Sin}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z_2 - \mathrm{Cos}\,z_1\,\mathrm{Sin}\,z_2,$$

$$\mathrm{Cos}(z_1 - z_2) = \mathrm{Cos}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z_2 - \mathrm{Sin}\,z_1\,\mathrm{Sin}\,z_2.$$

6. $$\mathrm{Sin}\,2z = 2\,\mathrm{Sin}\,z\,\mathrm{Cos}\,z.$$

$$\mathrm{Cos}\,2z = \mathrm{Cos}^2 z + \mathrm{Sin}^2 z = 2\,\mathrm{Cos}^2 z - 1 = 2\,\mathrm{Sin}^2 z + 1.$$

7. $$\mathrm{Sin}\,z_1 + \mathrm{Sin}\,z_2 = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{z_1 - z_2}{2},$$

$$\mathrm{Sin}\,z_1 - \mathrm{Sin}\,z_2 = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{z_1 - z_2}{2},$$

$$\mathrm{Cos}\,z_1 + \mathrm{Cos}\,z_2 = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{z_1 - z_2}{2},$$

$$\mathrm{Cos}\,z_1 - \mathrm{Cos}\,z_2 = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{z_1 - z_2}{2}.$$

8. $\mathrm{Sin}\,z$ und $\mathrm{Cos}\,z$ sind einfach periodisch mit der primitiven Periode $2\pi i$, $\mathrm{Tg}\,z$ mit der Periode πi.

9. $$\mathrm{Tg}\,z_1 + \mathrm{Tg}\,z_2 = \frac{\mathrm{Sin}(z_1 + z_2)}{\mathrm{Cos}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z_2},$$

$$\mathrm{Tg}\,z_1 - \mathrm{Tg}\,z_2 = \frac{\mathrm{Sin}(z_1 - z_2)}{\mathrm{Cos}\,z_1\,\mathrm{Cos}\,z_2}.$$

10. $$\mathrm{Tg}(z_1 + z_2) = \frac{\mathrm{Tg}\,z_1 + \mathrm{Tg}\,z_2}{1 + \mathrm{Tg}\,z_1\,\mathrm{Tg}\,z_2},$$

$$\mathrm{Tg}(z_1 - z_2) = \frac{\mathrm{Tg}\,z_1 - \mathrm{Tg}\,z_2}{1 - \mathrm{Tg}\,z_1\,\mathrm{Tg}\,z_2},$$

$$\mathrm{Tg}\,2z = \frac{2\,\mathrm{Tg}\,z}{1 + \mathrm{Tg}^2 z}.$$

11. $$\mathrm{Sin}(k\pi i) = 0, \quad \mathrm{Cos}(k\pi i) = (-1)^k,$$

$$\mathrm{Sin}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i\right] = (-1)^k \cdot i,$$

$$\mathrm{Cos}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i\right] = 0,$$

$$\mathrm{Tg}(k\pi i) = 0,$$

$$\mathrm{Tg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i\right] = \infty.$$

12. $$\mathrm{Sin}[k\pi i + z] = (-1)^k\,\mathrm{Sin}\,z,$$

$$\mathrm{Cos}[k\pi i + z] = (-1)^k\,\mathrm{Cos}\,z,$$

$$\mathrm{Sin}[k\pi i - z] = (-1)^{k+1}\,\mathrm{Sin}\,z,$$

$$\mathrm{Cos}[k\pi i - z] = (-1)^k\,\mathrm{Cos}\,z.$$

13. $$\mathrm{Sin}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i + z\right] = (-1)^k \cdot i \cdot \mathrm{Cos}\,z,$$

$$\mathrm{Cos}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\,i + z\right] = (-1)^k \cdot i \cdot \mathrm{Sin}\,z,$$

$$\mathrm{Sin}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\,i - z\right] = (-1)^k \cdot i \cdot \mathrm{Cos}\,z,$$

$$\mathrm{Cos}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i - z\right] = (-1)^{k+1} \cdot i \cdot \mathrm{Cos}\,z.$$

14. $$\operatorname{Tg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i + z\right] = \frac{1}{\operatorname{Tg} z},$$
$$\operatorname{Tg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i - z\right] = -\frac{1}{\operatorname{Tg} z}.$$

15. $$\frac{d\cdot \operatorname{Sin} z}{dz} = \operatorname{Cos} z, \quad \frac{d\cdot \operatorname{Cos} z}{dz} = \operatorname{Sin} z,$$
$$\frac{d\cdot \operatorname{Tg} z}{dz} = 1 - \operatorname{Tg}^2 z = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 z}.$$

16. Wegen $\operatorname{Tg} z = \frac{\operatorname{tg}(zi)}{i}$ läßt sich $\operatorname{Tg} z$ in die Reihe entwickeln

$$\operatorname{Tg} z = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 - \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 - \frac{1382}{155925} z^{11} + - \ldots,$$

welche für $|z| < \frac{\pi}{2}$ konvergiert.

§ 64. Realitätsbetrachtungen.

1. Für reelle Werte von z sind $\operatorname{Sin} z$, $\operatorname{Cos} z$, $\operatorname{Tg} z$ reell. Es sei wieder x statt z gesetzt. Wächst x von $-\infty$ bis 0, so nimmt $\operatorname{Cos} x$ ab von $+\infty$ bis 1; wächst x von 0 bis $+\infty$, so nimmt $\operatorname{Cos} x$ zu von 1 bis $+\infty$. Die Relation $\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x = 1$ lehrt, daß zu unendlich großen Werten von $\operatorname{Cos} x$ auch unendlich große Werte von $\operatorname{Sin} x$ gehören. Andererseits ist $\frac{d\cdot \operatorname{Sin} x}{dx} = \operatorname{Cos} x > 0$. Sie nimmt also gleichzeitig mit x zu von $-\infty$ bis $+\infty$; insbesondere ist $\operatorname{Sin} 0 = 0$. Aus der Relation $\operatorname{Tg}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}$ folgt,

daß $\mathrm{Tg}^2 x$ stets positiv und kleiner als 1 ist. Andererseits wächst wegen

$$\frac{d \cdot \mathrm{Tg} x}{d x} = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x} > 0$$

$\mathrm{Tg} x$ gleichzeitig mit x; wenn also x von $-\infty$ bis $+\infty$ zunimmt, so wächst $\mathrm{Tg} x$ von -1 bis $+1$, nimmt aber diese Grenzwerte an keiner endlichen Stelle an, weil $\mathrm{Cos} x$ an keiner endlichen Stelle unendlich groß wird.

2. Wir untersuchen nunmehr allgemein, für welche Werte des Arguments $\mathrm{Sin} z$, $\mathrm{Cos} z$, $\mathrm{Tg} z$ reelle Werte annehmen. Es läßt sich durch Entwicklung der Ausdrücke

$$\mathrm{Sin}(x + y i) \quad \text{und} \quad \mathrm{Cos}(x + y i)$$

nach den Additionstheoremen (§ 63) leicht zeigen, daß für $\mathrm{Sin} z$ z die Form $x + k \pi i$, für $\mathrm{Cos} z$ z die Form $y i$ oder $x + k \pi i$ haben muß.

Komplizierter liegt der Fall bei $\mathrm{Tg} z$. Da die Funktion $\mathrm{Tg} z$ die primitive Periode πi besitzt, so ist sie sicher reell für Werte der Form

$$z = x + k \pi i .$$

Für solche nimmt sie indes nur Werte an, die der Größe nach zwischen -1 und $+1$ liegen. Wann nimmt $\mathrm{Tg} z$ nun reelle Werte an, die dem absoluten Werte nach größer als 1 sind? Ist a ein solcher Wert, so läßt sich z bestimmen aus der Gleichung

$$\mathrm{Tg} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = a .$$

Aus dieser folgt

$$e^{2z} = \frac{1 + a}{1 - a} .$$

Der Bruch $\frac{1+a}{1-a}$ ist sicher negativ: wir schreiben ihn in der Form

$$-\frac{a+1}{a-1}=\frac{a+1}{a-1}(\cos\pi+i\sin\pi)\,.$$

Aus der Gleichung $e^{2z}=\frac{a+1}{a-1}(\cos\pi+i\sin\pi)$ folgt sodann (§ 56, 3)

$$2z=\log\frac{a+1}{a-1}+(2k+1)\pi i\,,$$

$$z=\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a-1}+(2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot i\,.$$

Soll also Tgz reelle Werte annehmen, die dem absoluten Werte nach größer als 1 sind, so muß z von der Form sein

$$z=x+(2k+1)\frac{\pi}{2}i\,.$$

In der Tat ist

$$\mathrm{Tg}\left[x+(2k+1)\frac{\pi}{2}i\right]=\frac{1}{\mathrm{Tg}x} \qquad (\S\ 63)$$

eine reelle Größe. Wir erkennen ferner ohne Schwierigkeit: Bewegt sich der Punkt z auf der Geraden $y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ in positiver Richtung aus dem Unendlichen bis zur imaginären Achse, so nimmt Tgz ab von -1 bis $-\infty$; bewegt sich z in positiver Richtung von der imaginären Achse bis ins Unendliche, so nimmt Tgz ab von $+\infty$ bis $+1$.

§ 65. Verhalten im Periodenstreifen.

Aus den Gleichungen $\mathrm{Sin}\, z = \frac{\sin(z i)}{i}$, $\mathrm{Cos}\, z = \cos(z i)$, $\mathrm{Tg}\, z = \frac{\mathrm{tg}(z i)}{i}$ können wir sofort das Verhalten von $\mathrm{Sin}\, z$, $\mathrm{Cos}\, z$, $\mathrm{Tg}\, z$ in ihren Periodenstreifen entnehmen. Wir begnügen uns mit der Anführung der Resultate.

1. Für die Funktion $\mathrm{Cos}\, z$ ist der Streifen der komplexen Ebene zwischen den Geraden $y = -\pi$ (einschließlich) und $y = +\pi$ (ausschließlich) ein Periodenstreifen; in ihm nimmt $\mathrm{Cos}\, z$ jeden ihm vorgeschriebenen endlichen Wert an zwei und nur zwei Stellen an. Ein Fundamentalbereich von $\mathrm{Cos}\, z$ liegt zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = \pi$ (die Grenzen eingeschlossen).

2. Für die Funktion $\mathrm{Sin}\, z$ ist der Streifen zwischen den Geraden $y = -\frac{\pi}{2}$ (einschließlich) und $y = \frac{3\pi}{2}$ (ausschließlich) ein Periodenstreifen; in ihm nimmt $\mathrm{Sin}\, z$ jeden vorgeschriebenen endlichen Wert an zwei und nur zwei Stellen an. Ein Fundamentalbereich von $\mathrm{Sin}\, z$ liegt zwischen den Geraden $y = -\frac{\pi}{2}$ und $y = +\frac{\pi}{2}$ (die Grenzen eingeschlossen).

3. Für die Funktion $\mathrm{Tg}\, z$ ist der Streifen zwischen den Geraden $y = -\frac{\pi}{2}$ (einschließlich) und $y = \frac{\pi}{2}$ (ausschließlich) ein Periodenstreifen und gleichzeitig ein Fundamentalbereich; in ihm nimmt $\mathrm{Tg}\, z$ jeden beliebigen endlichen Wert mit Ausnahme von ± 1 an einer und nur einer Stelle an.

§ 66. Die Funktion Logarithmus.

Die Gleichung $e^w = z$ hat unendlich viele Wurzeln w (§ 56, 3), eine jede von ihnen nennen wir einen Logarithmus von z und bezeichnen sie mit $\operatorname{Log} z$. Ist etwa $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist

$$w = \operatorname{Log} z = \log r + \varphi i + 2k\pi i,$$

wo wir unter $\log r$ den reellen natürlichen Logarithmus der positiven Zahl r verstehen. $\operatorname{Log} z$ ist also eine unendlich vieldeutige Funktion. Von diesen unendlich vielen Werten greifen wir denjenigen heraus, für welchen $k = 0$ ist, er ist gegeben durch

$$\log r + \varphi i$$

Es sei daran erinnert, daß $0 \leqq \varphi < 2\pi$ vorausgesetzt ist (§ 11). Wir wollen untersuchen, ob für die so definierte Funktion $\operatorname{Log} z$ die fundamentalen Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen Gültigkeit behalten.

Ist

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

so folgt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Daraus entnehmen wir

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \log(r_1 r_2) + i(\varphi_1 + \varphi_2) + 2k\pi i.$$

Auf $\log(r_1 r_2)$ können wir den Satz über den Logarithmus eines Produktes anwenden. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_1 z_2) &= \log r_1 + \varphi_1 i + \log r_2 + \varphi_2 i + 2k\pi i\\ &= \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2k'\pi i.\end{aligned}$$

Wir erkennen also:

Satz 86: Der Logarithmus des Produktes zweier Zahlen ist gleich der Summe der Hauptwerte der Logarithmen der Faktoren, vermehrt um ein Vielfaches von $2\pi i$.

Sollte etwa $\varphi_1 + \varphi_2$ nicht der Hauptwert des Arcus sein, so wird die Gültigkeit des Satzes in keiner Weise beeinträchtigt, da bei einer Zurückführung auf den Hauptwert (durch Subtraktion von 2π) höchstens der ohnehin beliebige Faktor von $2\pi i$ sich ändern würde.

Da bei dem Beweise keinerlei Voraussetzungen über die Art der Vielfachheit von $2\pi i$ gemacht worden sind, so ergibt sich, daß wir stets unter den unendlich vielen Werten von $\mathrm{Log}\, z_1$, $\mathrm{Log}\, z_2$, $\mathrm{Log}(z_1 z_2)$ solche aussuchen können, die der Gleichung genügen

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2 \,.$$

In gleicher Weise können wir zeigen:

Satz 87: Der Logarithmus des Quotienten zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Hauptwerte der Logarithmen von Zähler und Nenner, vermehrt um ein Vielfaches von $2\pi i$.

Auch hier kann eine derartige Wahl der Vielfachen von $2\pi i$ getroffen werden, daß die Beziehung bestehen bleibt

$$\mathrm{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, z_2 \,.$$

Die Erweiterung der Logarithmengesetze auf den Fall der n-ten Potenz einer Zahl bietet nunmehr keine Schwierigkeiten.

§ 67. Die Ableitung von Log z.

Die unendlich vielen Werte des Logarithmus sind enthalten in der Form

$$w = \mathrm{Log}\, z = \log r + \varphi i + 2k\pi i \,.$$

Ist nun z_0 ein bestimmter Wert von z, so sind damit die zwei Zahlen $r = r_0$ und $\varphi = \varphi_0$ vollkommen eindeutig bestimmt: daher ist jeder der unendlich vielen Werte von w eine eindeutige Funktion von z. Da also jeder von ihnen eine inverse Funktion von $z = e^w$ darstellt, so folgt allgemein nach Satz 45, § 27

$$\frac{d\cdot \operatorname{Log} z}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Wir erhalten somit:

Satz 88: Jeder der unendlich vielen Werte von $\operatorname{Log} z$ ist eine reguläre Funktion von z.

Ausgenommen ist nur der Wert $z = 0$, aber für diesen ist $\operatorname{Log} z$ überhaupt nicht definiert, weil e^w an keiner angebbaren Stelle den Wert Null annimmt.

Aus Satz 46, § 27 entnehmen wir noch:

Satz 89: Jeder der unendlich vielen Werte von $\operatorname{Log} z$ ist eine stetige Funktion von z.

§ 68. Reihenentwicklungen für den Logarithmus.

Der Hauptwert der Funktion $f(z) = \operatorname{Log} z$ kann nicht in eine Potenzreihe entwickelt werden, die nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitet, weil das konstante Glied, das doch den Wert $f(0) = \operatorname{Log} 0$ haben müßte, in keiner Weise definiert ist. Wohl aber kann eine solche Entwicklung für $\operatorname{Log}(1+z)$ aufgestellt werden. Es ist zunächst (Satz 47, § 28)

$$\frac{d \operatorname{Log}(1+z)}{dz} = \frac{d \operatorname{Log}(1+z)}{d(1+z)} \cdot \frac{d(1+z)}{dz} = \frac{1}{1+z}.$$

Der Bruch $\frac{1}{1+z}$ läßt sich, wenn $|z| < 1$ ist, in die Reihe entwickeln

$$\frac{d\cdot \operatorname{Log}(1+z)}{dz} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - + \ldots \text{ (siehe § 32).}$$

Diese Reihe ist nach Satz 69, § 40 die Ableitung der Potenzreihe

$$A + z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + - \ldots,$$

in der A eine willkürliche Konstante bedeutet. Für den Wert $A = 0$ (denn $\operatorname{Log} 1 = 0$) stellt diese Reihe, welche gleichfalls für $|z| < 1$ konvergiert (Satz 69, § 40), die Funktion $\operatorname{Log}(1 + z)$ dar. Es ist also

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + - \ldots (|z| < 1).$$

Die Entwicklung des allgemeinen Wertes von $\operatorname{Log}(1 + z)$ lautet

$$\operatorname{Log}(1+z) = 2 k \pi i + z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + - \ldots$$

Setzen wir $-z$ an Stelle von z, so wird

$$\operatorname{Log}(1-z) = 2 k \pi i - z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 - \ldots$$

Durch Subtraktion beider Reihen erhalten wir

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2 k \pi i + 2\left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \ldots\right).$$

Auch die beiden letzten Reihen konvergieren für $|z| < 1$.

§ 69. Die Binomialreihe.

Die Potenzreihe, deren Koeffizienten allgemein die Form

$$a_\nu = \binom{p}{\nu}$$

hat, trägt den Namen Binomialreihe. Sie lautet ausführlicher

$$1 + \binom{p}{1} z + \binom{p}{2} z^2 + \binom{p}{3} z^3 + \dots$$

Ist p eine positive ganze Zahl, so bricht sie mit dem Gliede $\binom{p}{p} z^p$ ab und stellt nach dem binomischen Lehrsatze für ganze positive Exponenten die p-te Potenz von $1 + z$ dar. Wenn jedoch p keine positive ganze Zahl bezeichnet, so ist die Zahl ihrer Glieder unendlich groß. Nun ist

$$a_\nu = \binom{p}{\nu}\,; \quad a_{\nu+1} = \binom{p}{\nu+1} = \binom{p}{\nu} \cdot \frac{p-\nu}{\nu+1}$$

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{p-\nu}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| = \lim_{\nu=\infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{\nu}}{\frac{p}{\nu} - 1} \right| = 1 .$$

Die Binomialreihe hat also nach Satz 67, § 38 den Konvergenzradius 1. Insofern durch Angabe von p der Wert der Reihe für ein beliebiges z innerhalb des Konvergenzkreises eindeutig bestimmt ist, sind wir berechtigt, die Reihe als komplexe Funktion von p aufzufassen und sie mit $F(p)$ zu bezeichnen Es seien nun zwei Binomialreihen

$$F(p) = 1 + \binom{p}{1} z + \binom{p}{2} z^2 + \dots,$$

$$F(q) = 1 + \binom{q}{1} z + \binom{q}{2} z^2 + \dots$$

gegeben.

Ihr Produkt $F(p) \cdot F(q)$ hat das allgemeine Glied

$$\left[\binom{p}{\nu} + \binom{p}{\nu-1}\binom{q}{1} + \binom{p}{\nu-2}\binom{q}{2} + \cdots + \binom{q}{\nu}\right] \cdot z^{\nu}.$$

Es läßt sich zeigen, daß der Faktor von z^{ν} gleich $\binom{p+q}{\nu}$ ist. Der Beweis dafür soll hier nicht erbracht werden, da seine exakte Durchführung zuviel Raum beanspruchen würde, eine recht interessante Veranschaulichung findet sich in dem Buche: Sporer, Niedere Analysis (Sammlung Göschen, Band 53, § 64). Die Binomialreihe genügt also der Funktionalgleichung

$$F(p) \cdot F(q) = F(p+q).$$

Sie kann uns daher zur Definition des Ausdrucks $(1+z)^p$ dienen, der für beliebige Werte von p zunächst keine Bedeutung hat. Wir erklären somit $(1+z)^p$ durch

$$(1+z)^p = 1 + \binom{p}{1} z + \binom{p}{2} z^2 + \binom{p}{3} z^3 + \ldots$$

Beispiele:

(1) $$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = 1 - \binom{-1}{1} z + \binom{-1}{2} z^2 - \binom{-1}{3} z^3 + - \ldots$$
$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

(2) $$\frac{1}{1+z^2} = (1+z^2)^{-1} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + - \ldots$$

(3) Für die Funktion $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ hat das allgemeine Glied die Form

$$(-1)^\nu \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \cdot z^{2\nu}$$

$$= (-1)^\nu \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \ldots \left(-\frac{1}{2} - \nu + 1\right)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \cdot z^{2\nu}$$

$$= (-1)^{2\nu} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \ldots \frac{2\nu - 1}{2}}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \cdot z^{2\nu}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\nu - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\nu} \cdot z^{2\nu}.$$

§ 70. Die Funktion arc tg$z$.

Denken wir uns die Zahlen $w = u + vi$ in einer komplexen Ebene dargestellt, so liegt für die Funktion $z = \operatorname{tg} w$ zwischen den Geraden $u = -\frac{\pi}{2}$ und $u = +\frac{\pi}{2}$ ein Periodenstreifen (§ 58). In seinem Innern nimmt tg$w$ jeden beliebigen Wert z (mit Ausnahme von $\pm i$) an einer und nur einer Stelle w an. Wir sind daher berechtigt, diesen Wert als eine zu $z = \operatorname{tg} w$ inverse Funktion anzusprechen. Aus ihm folgen eine unendliche Zahl anderer, die sämtlich die Form $w + k\pi$ haben. Ein jeder von ihnen ist gleichfalls eine inverse Funktion von z (§ 27). Die Gesamtheit aller Wurzeln w der Gleichung $\operatorname{tg} w = z$ definiert somit eine unendlich vieldeutige Funktion von z, die wir mit $w = \operatorname{arc\,tg} z$ (gelesen arcus tangens z) bezeichnen.

Für jeden einzelnen ist nach der Regel für die Differentiation einer inversen Funktion (Satz 46, § 27)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 w} = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Derjenige Wert w von arc tg$z$, der zwischen den Geraden $u = -\frac{\pi}{2}$ und $u = +\frac{\pi}{2}$ der komplexen Ebene liegt, heißt der Hauptwert der unendlich vieldeutigen Funktion. Für ihn ist nach Beispiel 2 des vorigen Paragraphen

$$\frac{d \cdot (\operatorname{arc}\operatorname{tg} z)}{dz} = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + - \ldots$$

eine Reihe, die für $|z| < 1$ konvergiert. Aus Satz 69, § 40 folgt demnach für den Hauptwert von arc tg$z$ die Darstellung

$$A + z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + - \ldots$$

Die Konstante A ist gleich Null, denn der Hauptwert von arc tg0 ist gleich Null. Es folgt somit

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + - \ldots$$

Der allgemeine Wert von arc tg$z$ ist nun

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = k\pi + z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + - \ldots$$

Sämtliche Reihen konvergieren für $|z| < 1$.

Zwischen den Funktionen arc tg$z$ und dem natürlichen Logarithmus besteht eine bemerkenswerte Beziehung. Es ist nach § 58

$$\operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{e^{wi} + e^{-wi}} .$$

Daraus folgt

$$e^{2wi} = \frac{1 + i \cdot \operatorname{tg} w}{1 - i \cdot \operatorname{tg} w} .$$

Nehmen wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus, so ist

$$2wi = \operatorname{Log} \frac{1 + i \cdot \operatorname{tg} w}{1 - i \operatorname{tg} w} ,$$

$$w = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + i \operatorname{tg} w}{1 - i \operatorname{tg} w} .$$

Setzen wir $\operatorname{tg} w = z$, also $w = \operatorname{arc}\operatorname{tg} z$, so ergibt sich die Relation

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \cdot \operatorname{Log} \frac{1+zi}{1-zi},$$

die gleichfalls die Entwicklung von $\operatorname{arc}\operatorname{tg} z$ in eine Potenzreihe gestattet (§ 68).

Der innere Grund zu dem Bestehen dieser Beziehung ist darin zu suchen, daß die Funktionen $\operatorname{tg} w$ und e^{2wi} Periodenstreifen von gleicher Breite und paralleler Lage haben.

§ 71. Die Funktion arc sin z.

Für die Funktion $z = \sin w$ ist der Streifen zwischen den Geraden $u = -\frac{\pi}{2}$ und $u = +\frac{\pi}{2}$ ein Fundamentalbereich; für alle Punkte w seines Innern ist w als eine inverse Funktion von $z = \sin w$ zu betrachten. Aus einem Werte w ergeben sich unendlich viele der Form $w + 2k\pi$. Die Wurzeln w der Gleichung $z = \sin w$ bilden in ihrer Gesamtheit eine unendlich vieldeutige Funktion von z, die wir mit $\arcsin z$ bezeichnen. Jeder der unendlich vielen Werte von $\arcsin z$ ist eine inverse Funktion von z; der erstgenannte Wert im besonderen heißt der Hauptwert von $\arcsin z$.

Für jede Teilfunktion $w = \arcsin z$ ist nach der Regel für die Differentiation einer inversen Funktion

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 w}}$$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{1-z^2}} = \pm(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel soll sogleich näher bestimmt werden. Es genügt die Durchführung für den Hauptwert, da $\sin w$ und $\cos w$ die Periode 2π haben. Für reelle Werte w und z wächst $\sin w$ beständig von -1 bis $+1$, wenn w von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zunimmt. Es ist also $\frac{dz}{dw}$ und auch $\frac{dw}{dz}$ positiv; die Quadratwurzel ist somit mit dem positiven Zeichen zu nehmen.

Nun ist nach dem vorletzten Paragraphen (Beispiel 3)

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot z^4 + \ldots$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu}\cdot z^{2\nu} + \ldots$$

eine Reihe, die für $|z| < 1$ konvergiert.

Soll der Hauptwert von arc sin z sich eine Potenzreihe von z entwickeln lassen, so kann diese nach Satz 74, § 45 und Satz 69, § 40 nur von der Form sein

$$A + z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \ldots$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu}\cdot\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \ldots$$

Die Konstante A hat den Wert 0, denn der Hauptwert von arc sin 0 ist gleich Null. Für den Hauptwert von arc sin z gilt somit die für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$\operatorname{arc\,sin} z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \ldots$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu}\cdot\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \ldots$$

Der allgemeine Wert von arc sin z ergibt sich hieraus durch Addition von $2k\pi$.

Wir bemerken noch, daß sowohl arc sin z als auch arc tg z in jedem Punkte, für den sie definiert sind, reguläre und deshalb auch stetige Funktionen des komplexen Argumentes z darstellen.

Neben den aus dem Hauptwerte w von arc sin z folgenden Funktionen $w + 2k\pi$ gibt es infolge der Relation

$$\sin(\pi - w) = \sin w$$

noch eine zweite Gruppe von Umkehrungen der Gleichung $\sin w = z$. Sie sind enthalten in der Form

$$w' = -w + (2k+1)\pi\,.$$

Für eine jede von ihnen ist

$$\frac{dw'}{dz} = -(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

so daß auch der zweite Wert der Quadratwurzel von Bedeutung wird. Der $k = 0$ entsprechende Wert w' liegt innerhalb des von den Geraden $u = +\frac{\pi}{2}$ und $u = +\frac{3\pi}{2}$ begrenzten Teiles der komplexen Ebene; er kann als Hauptwert der Funktionengruppe w' betrachtet werden.

Anhang.

§ 72. **Konforme Abbildung.**

Um unsere Betrachtungen zu einem gewissen Abschluß zu bringen, wollen wir noch eine Eigenschaft der regulären Funktionen komplexen Arguments erwähnen, die in funktionentheoretischen Betrachtungen eine große Rolle spielt.

Nach § 20 verstehen wir unter einer eindeutigen komplexen Funktion $w = f(z)$ von z eine veränderliche Zahl von der Beschaffenheit, daß zu jedem Werte von z ein und nur ein Wert von w gehört. Stellen wir die Werte von z in einer komplexen Ebene dar, die von w in einer zweiten, so entspricht jedem Punkte der ersten Ebene ein und nur ein Punkt der zweiten. Ist insbesondere die komplexe Funktion eine stetige, so entspricht einem stetigen Linienzuge der z-Ebene auch ein stetiger Linienzug der w-Ebene. Zur Kennzeichnung dieses Verhältnisses pflegt man zu sagen, die Punkte der z-Ebene seien vermöge der Funktion $w = f(z)$ auf die w-Ebene abgebildet.

Vor allen komplexen Funktionen zeichnen sich die regulären Funktionen (§ 25) bezüglich der durch sie vermittelten Abbildung durch eine geometrische Eigenschaft aus. Es sei die reguläre Funktion $w = f(z)$ vorgelegt, z_0 ein beliebiger Punkt der z-Ebene, w_0 der entsprechende Punkt der w-Ebene. Ferner seien unendlich nahe an z_0 zwei Punkte z_1 und z_2 angenommen. Da $w = f(z)$ eine stetige Funktion von z ist, so entsprechen den Punkten z_1 und z_2 zwei Punkte w_1 und w_2 der w-Ebene, die w_0 gleichfalls unendlich benachbart sind. Bilden wir nunmehr die Verhältnisse

$$\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} \quad \text{und} \quad \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0},$$

so sind diese nach der Definition der regulären Funktion einander gleich und zwar gleich dem

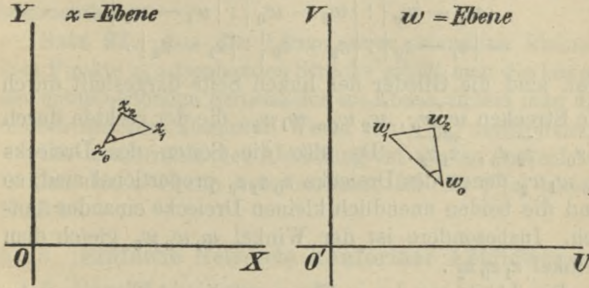

Fig. 8.

Werte der Ableitung von $f(z)$ für $z = z_0$. Es besteht also die Gleichung

$$\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0},$$

die wir, falls $f'(z_0)$ von Null verschieden ist, in der Form schreiben können:

$$\frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}.$$

Unter Anwendung eines Lehrsatzes über Proportionen folgt daraus

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_0} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0}.$$

Wir fassen die beiden letzten Gleichungen zusammen zu der fortlaufenden Proportion:

$$(w_1 - w_0) : (w_2 - w_0) : (w_1 - w_2)$$
$$= (z_1 - z_0) : (z_2 - z_0) : (z_1 - z_2).$$

Aus dem Satze über den absoluten Wert des Quotienten zweier Zahlen (Satz 10, § 10) ergibt sich sodann -

$$|w_1 - w_0| : |w_2 - w_0| : |w_1 - w_2|$$
$$= |z_1 - z_0| : |z_2 - z_0| : |z_1 - z_2|.$$

Nun sind die Glieder der linken Seite dargestellt durch die Strecken $\overline{w_1 w_0}$, $\overline{w_2 w_0}$, $\overline{w_1 w_2}$, die der rechten durch $\overline{z_1 z_0}$, $\overline{z_2 z_0}$, $\overline{z_1 z_2}$. Da also die Seiten des Dreiecks $w_0 w_1 w_2$ denen des Dreiecks $z_0 z_1 z_2$ proportional sind, so sind die beiden unendlich kleinen Dreiecke einander ähnlich. Insbesondere ist der Winkel $w_1 w_0 w_2$ gleich dem Winkel $z_1 z_0 z_2$.

Die Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene, welche durch die reguläre Funktion $w = f(z)$ vermittelt wird, ist also von der Beschaffenheit, daß einem unendlich kleinen Dreieck der z-Ebene ein unendlich kleines Dreieck der w-Ebene entspricht, welches dem ersten ähnlich ist, oder auch, daß zwei Kurven der z-Ebene sich unter demselben

Winkel schneiden wie die entsprechenden Kurven der w-Ebene. Eine solche Abbildung nennt man winkeltreu oder konform. Es gilt somit der

Satz 90. Die durch die reguläre Funktion $w = f(z)$ vermittelte Abbildung ist konform.

Aus der Gleichung

$$\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = f'(z_0)$$

folgt

$$w_1 - w_0 = f'(z_0) \cdot (z_1 - z_0)$$

und

$$|w_1 - w_0| = |f'(z_0)| \cdot |z_1 - z_0| .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

Satz 91. Der Arcus von $f'(z_0)$ gibt an, um welchen Winkel man eine unendlich kleine von z_0 ausgehende Strecke der z-Ebene drehen muß, damit sie der Richtung nach mit der entsprechenden Strecke der w-Ebene zusammenfällt.

Satz 92. Aus der Länge einer unendlich kleinen vom Punkte z_0 ausgehenden Strecke erhält man die Länge der entsprechenden Strecke der w-Ebene, indem man die erstere mit dem absoluten Werte von $f'(z_0)$ multipliziert.

Die Konformität der Abbildung ist nur an denjenigen Stellen der z-Ebene unterbrochen, für die $f'(z)$ gleich Null ist.

§ 73. Einfache Beispiele konformer Abbildungen.

1. Die Funktion $w = z^2$.

Es sei

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) .$$

Dann ist

$$w = r^2 \cdot (\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi) .$$

Daraus ersehen wir:

a) Den Punkten eines Halbstrahles, der vom Nullpunkte der z-Ebene ausgeht, entsprechen die Punkte eines vom Nullpunkte der w-Ebene ausgehenden Halbstrahles, der den doppelten Arcus hat.

b) Den Punkten eines Kreises um den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen die Punkte eines Kreises um den Nullpunkt der w-Ebene.

Da nach a) zwischen den Halbstrahlen $\varphi = 0$ (einschließlich) und $\varphi = \pi$ (ausschließlich) ein Fundamentalbereich der Funktion $w = z^2$ liegt, so folgt:

c) Diejenige Halbebene der z-Ebene, für welche die zweite Koordinate positiv ist, wird bereits für sich allein konform auf die gesamte w-Ebene abgebildet. Dasselbe ist mit jeder andern Halbebene der Fall, die von einer beliebigen durch den Nullpunkt der z-Ebene gehenden Geraden begrenzt wird.

2. Die Funktion $w = e^z$.

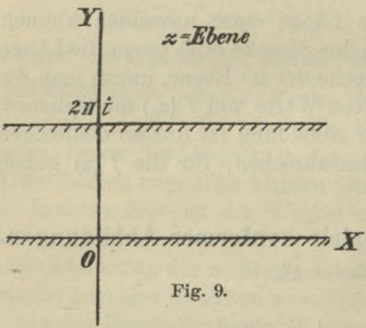

Fig. 9.

Für die Funktion $w = e^z$ ist der zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = 2\pi$ gelegene Streifen der z-Ebene ein Fundamentalbereich (§ 56, 3); er wird konform auf die ganze w-Ebene abgebildet (mit Ausnahme des Punktes $w = 0$; § 56, 2).

Setzen wir

$$z = x + yi \quad \text{und} \quad w = u + vi\,,$$

so ist

$$w = u + vi = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)\,.$$

Daraus folgt:

$$u = e^x \cos y\,,$$
$$v = e^x \sin y\,.$$

Durch Elimination von x bzw. y zwischen diesen Gleichungen ergibt sich

$$u \sin y - v \cos y = 0$$

und

$$u^2 + v^2 = e^{2x}\,.$$

In geometrischer Deutung heißt das:

Einer Parallelen zur X-Achse der z-Ebene entspricht eine Gerade durch den Nullpunkt der w-Ebene.

Einer Parallelen zur Y-Achse der z-Ebene entspricht ein Kreis um den Nullpunkt der w-Ebene.

3. Die Funktion $w = \sin z$.

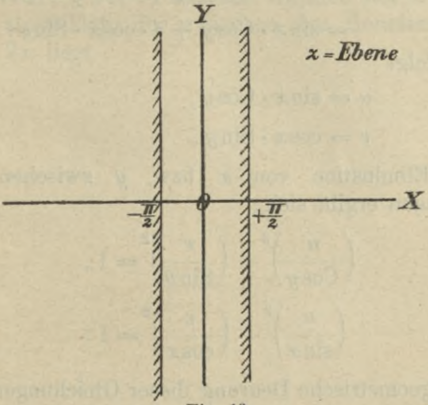

Fig. 10.

Die Konformität der Abbildung ist für die Funktion $w = \sin z$ nur an denjenigen Stellen unterbrochen, für die $\frac{dw}{dz} = \cos z = 0$ ist, d. h. für

$$z = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Der zwischen den Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ liegende Fundamentalbereich der z-Ebene wird durch $w = \sin z$ konform auf die ganze w-Ebene abgebildet. (§ 56, 4.)

Setzen wir

$$z = x + yi \quad \text{und} \quad w = u + vi,$$

so ist

$$\begin{aligned} w = u + vi &= \sin(x + yi) \\ &= \sin x \cdot \cos(yi) + \cos x \cdot \sin(yi) \\ &= \sin x \cdot \mathrm{Cos}\, y + i \cdot \cos x \cdot \mathrm{Sin}\, y. \quad (\S\ 63.) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u = \sin x \cdot \mathrm{Cos}\, y,$$

$$v = \cos x \cdot \mathrm{Sin}\, y.$$

Durch Elimination von x bzw. y zwischen diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\left(\frac{u}{\mathrm{Cos}\, y}\right)^2 + \left(\frac{v}{\mathrm{Sin}\, y}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{u}{\sin x}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos x}\right)^2 = 1. \qquad (\S\ 63.)$$

Die geometrische Deutung dieser Gleichungen ist die folgende:

Den Parallelen zur X-Achse der z-Ebene entsprechen Ellipsen der w-Ebene, die wegen $\mathrm{Cos}^2 y - \mathrm{Sin}^2 y = 1$ konfokal sind. (Die Brennpunkte liegen in den Punkten $u = -1$ und $u = +1$ der u-Achse.)

Den Parallelen zur Y-Achse der z-Ebene entsprechen Hyperbeln der w-Ebene, die wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ konfokal sind. (Die Brennpunkte liegen gleichfalls in den Punkten $u = -1$ und $u = +1$ der u-Achse.)

Infolge der Konformität der Abbildung schneidet jede Ellipse der einen Schar jede Hyperbel der andern Schar rechtwinklig. Es kann dies auch unabhängig davon aus der Theorie der Kegelschnitte gefolgert werden.

4. Die Funktion $w = \operatorname{Log} z$.

Infolge der Mehrdeutigkeit der Funktion Logarithmus können wir uns auf den Hauptwert beschränken. Die Betrachtungen von § 56, 3 lehren uns dann:

Durch den Hauptwert von $\operatorname{Log} z$ wird die ganze z-Ebene (außer $z = 0$, § 56, 2) auf den Streifen der w-Ebene konform abgebildet, der zwischen den Geraden $v = 0$ und $v = 2\pi$ liegt.

Sammlung Göſchen

Jeder Band eleg. geb. **80 Pf.**

Verzeichnis der bis jetzt erſchienenen Bände.

Abwäſſer. Waſſer und Abwäſſer. Ihre Zuſammenſetzung, Beurteilung u. Unterſuchung von Profeſſor Dr. Emil Haſelhoff, Vorſteher d. landw. Verſuchsſtation in Marburg in Heſſen. Nr. 473.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Eſſen und Ernſt Langenbeck, Groß-Lichterfelde. Nr. 232.

Agrarweſen und Agrarpolitik von Prof. Dr. W. Wygodzinski in Bonn. 2 Bändchen. **I:** Boden und Unternehmung. Nr. 592.

— — **II:** Kapital u. Arbeit in der Landwirtſchaft. Verwertung der landwirtſchaftl. Produkte. Organiſat. d. landwirtſchaftl. Berufsſtandes. Nr. 593.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemiſche Kontrollweſen, Das, v. Dr. Paul Kriſche in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

— **Unterſuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Haſelhoff, Vorſteher der landwirtſchaftl. Verſuchsſtation in Marburg in Heſſen. Nr. 470.

Akuſtik. Theoret. Phyſik I: Mechanik und Akuſtik. Von Dr. Guſtav Jäger, Prof. an der Techniſchen Hochſchule in Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— **Muſikaliſche,** von Profeſſor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik und Algebra von Dr. H. Schubert, Profeſſor an der Gelehrtenſchule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— **Beiſpielſammlung z. Arithmetik u. Algebra** v. Dr. Hermann Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenſchule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraiſche Kurven v. Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. **I:** Kurvendiskuſſion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

— — **II:** Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Figuren im Text. Nr. 436.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Profeſſor an der Univerſität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.

Althochdeutſche Literatur mit Grammatik, Überſetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Profeſſor am Realgymnaſium in Ulm. Nr. 28.

Altteſtamentl. Religionsgeſchichte von D. Dr. Max Löhr, Profeſſor an der Univerſität Königsberg. Nr. 292.

Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien v. Dr. Franz Werner, Profeſſor an der Univerſität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.

Analyſe, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analyſis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnaſiums und der Oberrealſchule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.

— — **Repetitorium und Aufgabenſammlung** zur Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Rektor d. Realgymnaſiums u. der Oberrealſchule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — **II: Integralrechnung.** Von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnaſiums und der Oberrealſchule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

Analyſis, Höhere. Repetitorium und Aufgabenſammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnaſiums und der Oberrealſchule in Göppingen. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochſchule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterverſicherung] ſiehe: Sozialverſicherung.

Archäologie von Dr. Friedrich Koepp, Profeſſor an der Univerſität Münſter i. W. 3 Bändchen. M. 28 Abbildungen im Text und 40 Tafeln. Nr. 538/40.

Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenſchule des Johanneums in Hamburg. Nr 47.

— — **Beiſpielſammlung zur Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Profeſſor a. d. Gelehrtenſchule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armeepferd, Das, und die Verſorgung der modernen Heere mit Pferden von Felix von Damnitz, General der Kavallerie z. D. und ehemal. Preuß. Remonteinſpekteur. Nr. 514.

Armenweſen und Armenfürſorge. Einführung in die ſoziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Profeſſor an der Handelshochſchule in Köln. Nr. 346.

Äſthetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an der Kgl. Akademie d. bild. Künſte in Stuttg. Nr. 300.

Aſtronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Profeſſor an der Univerſität Kiel. I: Das Planetenſyſtem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — **II:** Kometen, Meteore u. das Sternſyſtem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Aſtronomiſche Geographie von Dr. Siegmund Günther, Profeſſor an der Techniſchen Hochſchule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Aſtrophyſik. Die Beſchaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.

Ätheriſche Öle und Riechſtoffe von Dr. F. Rochuſſen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Aufſatzentwürfe von Oberſtudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnaſ. i. Stuttgart. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinſten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Profeſſor der Geodäſie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr. 302.

Außereuropäiſche Erdteile, Länderkunde der, von Dr. Franz Heiderich, Profeſſor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Auſtralien. Landeskunde u. Wirtſchaftsgeographie des Feſtlandes Auſtralien von Dr. Kurt Haſſert, Profeſſor der Geographie an der Handels-Hochſchule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tabellen u. 1 Karte. Nr. 319.

Autogenes Schweiß- und Schneidverfahren von Ingenieur Hans Nieſe in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bade- u. Schwimmanſtalten, Öffentliche, v. Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaur., Hannover. M. 50 Fig. Nr. 380.

Baden. Badiſche Geſchichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnaſium in Pforzheim und Privatdozent der Geſchichte an der Techniſchen Hochſchule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abbild. und 1 Karte. Nr. 199.

Bahnhöfe. Hochbauten der Bahnhöfe von Eiſenbahnbauinſpektor E. Schwab, Vorſtand d. Kgl. E.-Hochbauſektion Stuttgart II. **I:** Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterſchuppen. Lokomotivſchuppen. Mit 91 Abbildungen. Nr. 515.

Balkanſtaaten. Geſchichte d. chriſtlichen Balkanſtaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bankweſen. Technik des Bankweſens von Dr. Walter Conrad, ſtellvert. Vorſteher der ſtatiſt. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Weſen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Aſſiſtent an der Techniſchen Hochſchule in Darmſtadt. M. 25 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.

Baukunſt, Die, des Abendlandes v. Dr. K. Schäfer, Aſſiſt. a. Gewerbemuſeum, Bremen. M. 22 Abb. Nr. 74.

— **des Schulhauſes** von Prof. Dr.-Ing. Ernſt Vetterlein in Darmſtadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abb. Nr. 443.

— — II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 444.

Bauſteine. Die Induſtrie der künſtlichen Bauſteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Bauſtoffkunde, Die, v. Prof. H. Haberſtroh, Oberl. a. d. Herzogl. Baugewerkſchule Holzminden. M. 36 Abb. Nr. 506.

Bayern. Bayeriſche Geſchichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **Landeskunde des Königreichs Bayern** v. Dr. W. Götz, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochſchule München. Mit Profilen, Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.

Befeſtigungsweſen. Die geſchichtliche Entwickelung des Befeſtigungsweſens vom Aufkommen der Pulvergeſchütze bis zur Neuzeit von Reuleaux, Major b. Stabe d. 1. Weſtpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bild. Nr. 569.

Beſchwerderecht. Das Disziplinar- und Beſchwerderecht für Heer u. Marine von Dr. Max Ernſt Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 517.

Betriebskraft, Die zweckmäßigſte, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verſchied. Kraftmaſchinen. Mit 27 Abb. Nr. 224.

— — II: Gas-, Waſſer- u. Wind-Kraft-Anlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 225.

— — III: Elektromotoren. Betriebskoſtentabellen. Graph. Darſtell. Wahl d. Betriebskraft. M. 27 Abb. Nr. 474.

Bewegungsſpiele v. Dr. E. Kohlrauſch, Profeſſ. am Königl. Kaiſer Wilhelms-Gymn. zu Hannover. M. 15 Abb. Nr. 96.

Bleicherei. Textil-Induſtrie III: Wäſcherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsſtoffe v. Dr. Wilh. Maſſot, Profeſſor a. d. Preuß. höh. Fachſchule für Textilinduſtrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Blütenpflanzen, Das Syſtem der, mit Ausſchluß der Gymnoſpermen von Dr. R. Pilger, Kuſtos am Kgl. Botaniſchen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Braſilien. Landeskunde der Republik Braſilien von Bel Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.

Brauereiweſen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- u. Mälzerſchule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Britiſch-Nordamerika. Landeskunde von Britiſch-Nordamerika von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 284.

Buchführung in einfachen und doppelten Poſten von Prof. Rob. Stern, Oberl. der Öffentl. Handelslehranſt. u. Doz. d. Handelshochſchule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Profeſſor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Bürgerliches Geſetzbuch ſiehe: Recht des BGB.

Byzantiniſches Reich. Geſchichte des byzantiniſchen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Chemie, Allgemeine und phyſikaliſche, von Dr. Max Rudolphi, Profeſſor an der Techniſchen Hochſchule in Darmſtadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Analytiſche,** von Dr. Johannes Hoppe in München. **I:** Theorie und Gang der Analyſe. Nr. 247.

— — **II:** Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganiſche,** von Dr. Joſ. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — **Metalle** (Anorganiſche Chemie 2. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Aſſiſtent a. d. Königl. Baugewerkſchule in Stuttgart. Nr. 212.

— — **Metalloide** (Anorganiſche Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Aſſiſtent a. d. Königl. Baugewerkſchule in Stuttgart. Nr. 211.

— **Geſchichte der,** von Dr. Hugo Bauer, Aſſiſtent am chemiſchen Laboratorium der Königlichen Techniſchen Hochſchule Stuttgart. **I:** Von den älteſten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoiſier. Nr. 264.

— — **II:** Von Lavoiſier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Chemie d. Kohlenſtoffverbindungen v. Dr. Hugo Bauer, Aſſiſtent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochſchule Stuttgart. **I. II:** Aliphatiſche Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — **III:** Karbocykliſche Verbindungen. Nr. 193.

— — **IV:** Heterocykliſche Verbindungen. Nr. 194.

— **Organiſche,** von Dr. Joſ. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Pharmazeutiſche,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

— **Phyſiologiſche,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. **I:** Aſſimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — **II:** Diſſimilation. M. 1 Taf. Nr. 241.

— **Toxikologiſche,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Chemiſche Induſtrie, Anorganiſche, von Dr. Guſt. Rauter i. Charlottenburg. **I:** Die Leblancſodainduſtrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Taf. Nr. 205.

— — **II:** Salinenweſen, Kaliſalze, Düngerinduſtrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — **III:** Anorganiſche chemiſche Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Chemiſche Technologie, Allgemeine, von Dr. Guſt. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Chemiſch-Techniſche Analyſe von Dr. G. Lunge, Profeſſor an der Eidgenöſſiſchen Polytechniſchen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Chriſtlichen Literaturen des Orients, Die, von Dr. Anton Baumſtark. **I:** Einleitung. — Das chriſtlich-aramäiſche u. d. koptiſche Schrifttum. Nr. 527.

— — **II:** Das chriſtl.-arab. u. das äthiop. Schrifttum. — Das chriſtl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.

Dampfkeſſel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beiſpielen für das Selbſtſtudium und den praktiſchen Gebrauch von Oberingenieur Friedrich Barth in Nürnberg. **I:** Keſſelſyſteme und Feuerungen. Mit 43 Figuren. Nr. 9.

— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfkeſſel. Mit 57 Figuren. Nr. 521.

Dampfmaſchinen, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beiſpielen für das Selbſtſtudium und den praktiſchen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. **I:** Wärmetheoretiſche und dampftechniſche Grundlagen. Mit 64 Figuren. Nr. 8.

— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfmaſchinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweiſe und Konſtruktion von Ingenieur Herm. Wilda, Prof. a. ſtaatl. Technikum i. Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Desinfektion von Dr. M. Chriſtian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.

Determinanten v. P. B. Fiſcher, Oberl. a. d. Oberrealſch. z. Groß-Lichterf. Nr. 402.

Deutſche Altertümer von Dr. Franz Fuhſe, Direktor d. ſtädt. Muſeums in Braunſchweig. Mit 70 Abb. Nr. 124

Deutſche Fortbildungsſchulweſen, Das, nach ſeiner geſchichtlichen Entwicklung u. in ſeiner gegenwärt. Geſtalt v. H. Siercks, Reviſor gewerbl. Fortbildungsſchulen in Schleswig. Nr. 392.

Deutſches Fremdwörterbuch von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Deutſche Geſchichte von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luiſengymnaſ. i. Berlin. **I: Mittelalter** (bis 1519). Nr. 33.

— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500 bis 1648). Nr. 34.

— — **III: Vom Weſtfäliſchen Frieden bis zur Auflöſung des alten Reichs** (1648—1806). Nr. 35.

— — ſiehe auch: Quellenkunde.

Deutſche Grammatik und kurze Geſchichte der deutſchen Sprache von Schulr. Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutſche Handelskorreſpondenz von Profeſſor Th. de Beaux, Officier de l'Inſtruction Publique. Nr. 182.

Deutſches Handelsrecht von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Univerſität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.

Deutſche Heldenſage, Die, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Profeſſor an der Univerſität Würzburg. Nr. 32.

Deutſches Kolonialrecht von Dr. H. Edler von Hoffmann, Profeſſor an der Kgl. Akademie Poſen. Nr. 318.

Deutſche Kolonien. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.

— **II: Das Südſeegebiet und Kiautſchou** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.

— **III: Oſtafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln und 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

Deutſche Kulturgeſchichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutſches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- u. Kunſtepen u. zum Minneſang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. **I:** Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— — **II:** Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Deutſche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen des höfiſchen Epos. Auswahl a. deutſchen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiſerlichen Akademie der Wiſſenſchaften in Wien. Nr. 289.

Deutſche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luiſe-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— — **16. Jahrhunderts. I: Martin Luther und Thom. Murner.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen verſehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnaſium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläutert v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.

— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fiſchart, ſowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Profeſſor Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

— **des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopſtock. I:** Lyrik von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.

— — **II:** Proſa von Dr. Hans Legband in Kaſſel. Nr. 365.

Deutſche Literaturgeſchichte von Dr. Max Koch, Profeſſor an der Univerſität Breslau. Nr. 31.

— — **der Klaſſikerzeit** von Carl Weitbrecht, durchgeſehen und ergänzt von Karl Berger. Nr. 161.

Deutſche Literaturgeſchichte des des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.

Deutſche Mythologie. Germaniſche Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Univerſ. Leipzig. Nr. 15.

Deutſchen Perſonennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.

Deutſche Poetik von Dr. K. Borinski, Profeſſor an der Univerſität München. Nr. 40.

Deutſche Redelehre von Hans Probſt, Gymnaſialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Deutſche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Deutſches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I.** Allgemeine Lehren: Perſonen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — **II.** Die einzelnen ſeerechtlichen Schuldverhältniſſe: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Deutſche Stammeskunde v. Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. an der Univerſ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Deutſches Unterrichtsweſen. Geſchichte des deutſchen Unterrichtsweſens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnaſiums zu Luckau. **I:** Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — **II:** Vom Beginn d. 19. Jahrhund. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Deutſche Urheberrecht, Das, an literariſchen, künſtleriſchen und gewerblichen Schöpfungen, mit beſonderer Berückſichtigung der internationalen Verträge von Dr. Guſtav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Deutſche Volkslied, Das, ausgewählt und erläutert von Profeſſor Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.

Deutſche Wehrverfaſſung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat und vortrag. Rat im Kriegsminiſterium in München. Nr. 401.

Deutſches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64.

Deutſche Zeitungsweſen, Das, von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

Deutſches Zivilprozeßrecht von Profeſſor Dr. Wilhelm Kiſch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Dichtungen aus mittelhochdeutſcher Frühzeit. In Auswahl mit Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luiſe-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Profeſſor an der Univerſität Würzburg. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnaſiums und der Oberrealſchule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.

— **Repetitorium u. Aufgabenſammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnaſiums u. d. Oberrealſchule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Drogenkunde von Rich. Dorſtewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Druckwaſſer- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwaſſer- und Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ingen. Rudolf Vogdt, Regierungsbaum. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.

Eddalieder mit Grammatik, Überſetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Raniſch, Gymnaſial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eiſenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eiſenbahnbaues von Dipl.-Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. k. k. Deutſch. Techn. Hochſchule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.

Eiſenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Regierungsbaumeiſter u. Oberingenieur in Hannover. **I:** Die Lokomotiven. Mit 89 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.

— — **II:** Die Eiſenbahnwagen u. Bremſen. Mit Anhang: Die Eiſenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text und 3 Tafeln. Nr. 108.

Eiſenbahnpolitik. Geſchichte der deutſchen Eiſenbahnpolitik von Betriebsinſpektor Dr. Edwin Kech in Karlsruhe i. B. Nr. 533.

Eiſenbetonbau, Der, v. Reg.-Baumeiſt. Karl Rößle. Mit 75 Abbild. Nr. 349.

Eiſenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. **I:** Das Roheiſen. Mit 17 Figuren u. 4 Tafeln. Nr. 152.

Eiſenhüttenkunde II: Das Schmiedeeiſen. Mit 25 Fig. u. 5 Taf Nr. 153.

Eiſenkonſtruktionen im Hochbau von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Eiszeitalter, Das, v. Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Elaſtizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszuſtände, Zylinder, Ebene Platten, Torſion, Gekrümmte Träger. Von Prof. Dr.-Ing. Max Enßlin an der Königl. Baugewerkſchule Stuttgart und Privatdozent an der Techn. Hochſchule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.

Elektriſchen Meßinſtrumente, Die, von J. Herrmann, Profeſſor an der Techniſchen Hochſchule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.

Elektriſche Telegraphie, Die, von Dr. Lud. Rellſtab. M. 19 Fig. Nr. 172.

Elektrizität. Theoret. Phyſik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Guſt. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochſchule in Wien. Mit 33 Abb. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Genf. **I:** Theoretiſche Elektrochemie und ihre phyſikaliſch-chemiſchen Grundlagen. Mit 16 Figuren. Nr. 252.

— — **II:** Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Löſungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.

Elektromagnet. Lichttheorie. Theoretiſche Phyſik IV: Elektromagnetiſche Lichttheorie u. Elektronik von Profeſſor Dr. Guſt. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Elektrometallurgie von Dr. Friedr. Regelsberger, Kaiſerl. Regierungsrat in Steglitz-Berlin. M. 16 Fig. Nr. 110.

Elektrotechnik. Einführung in die Starkſtromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochſchule Stuttgart. **I:** Die phyſikaliſchen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.

— — **II:** Die Gleichſtromtechnik. Mit 118 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 197.

— — **III:** Die Wechſelſtromtechnik. Mit 126 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 198.

— **Die Materialien des Maſchinenbaues und der Elektrotechnik** v. Ingenieur Profeſſor Hermann Wilda in Bremen. Mit 3 Abbild. Nr. 476.

Elſaß-Lothringen, Landeskunde v., von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. M. 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.

Engliſch-deutſches Geſprächsbuch von Profeſſor Dr. E. Hausknecht in Lauſanne. Nr. 424.

Engliſche Geſchichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düſſeldorf. Nr. 375.

Engliſche Handelskorreſpondenz v. E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

Engliſche Literaturgeſchichte von Dr. Karl Weiſer in Wien. Nr. 69.

— — **Grundzüge und Haupttypen der engliſchen Literaturgeſchichte** von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochſchule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Entwicklungsgeſchichte der Tiere von Dr. Johannes Meiſenheimer, Profeſſor der Zoologie an der Univerſität Jena. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfiſchen Epos. Auswahl aus deutſchen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiſerlichen Akademie der Wiſſenſchaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdſtrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Königlich Preußiſchen Meteorologiſchen Inſtituts in Potsdam. Mit 17 Abbild. und 5 Tafeln. Nr. 175.

Erdteile, Länderkunde der außereuropäiſchen, von Dr. Franz Heiderich, Profeſſor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Ernährung und Nahrungsmittel v. Oberſtabsarzt Profeſſor H. Biſchoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Ethik von Profeſſor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa, Länderkunde von, von Dr. Franz Heiderich, Profeſſor an der Exportakademie in Wien. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Exkurſionsflora von Deutſchland zum Beſtimmen der häufigeren in Deutſchland wildwachſenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Profeſſor an der Forſtakademie Eiſenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildung. Nr. 268 u. 269.

Exploſivſtoffe. Einführung in die Chemie der exploſiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Steglitz. Mit 6 Abbildungen und 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht des Bürgerlichen Geſetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Profeſſor an der Univerſität Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Induſtrie III: Wäſcherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsſtoffe von Dr. Wilhelm Maſſot, Profeſſor an der Preußiſchen höheren Fachſchule für Textilinduſtrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Feldgeſchütz, Das moderne, von Oberſtleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an d. Militärtechn. Akademie in Berlin. I: Die Entwicklung des Feldgeſchützes ſeit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einſchl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. M. 1 Abb. Nr. 306.

— — II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeſchützes auf Grund der Erfindung des rauchloſen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abb. Nr. 307.

Fernſprechweſen, Das, von Dr. Ludwig Rellſtab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

Feſtigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.

— **Aufgabenſammlung zur Feſtigkeitslehre mit Löſungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Figuren. Nr. 491.

Fette, Die, und Öle ſowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lacke, Firniſſe m. ihren wichtigſt. Hilfsſtoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführ. in die Chemie, Beſprech. einiger Salze u. d. Fette und Öle. Nr. 335.

— — II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyſe und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — III: Harze, Lacke, Firniſſe. Nr. 337.

Feuerwaffen. Geſchichte der geſamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen von ihrem erſten Auftreten bis zur Einführung der gezogenen Hinterlader, unter beſonderer Berückſichtigung der Heeresbewaffnung v. Hauptmann a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbildungen. Nr. 530.

Filzfabrikation. Textil-Induſtrie II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Profeſſor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt z. Berlin. M. 29 Fig. Nr. 185.

Finanzſyſteme d. Großmächte, Die, (Internationales Staats- u. Gemeinde-Finanzweſen) von O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. Zwei Bändchen. Nr. 450 und 451.

Finanzwiſſenſchaft von Präſident Dr. R. van der Borght in Berlin. **I:** Allgemeiner Teil. Nr. 148.
— — **II:** Beſonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Finniſch-ugriſche Sprachwiſſenſchaft von Dr. Joſef Szinnyei, Prof. an der Univerſität Budapeſt. Nr. 463.

Finnland. Landeskunde des Europäiſchen Rußlands nebſt Finnlands von Profeſſor Dr. A. Philippſon in Halle a. S. Nr. 359.

Firniſſe. Harze, Lacke, Firniſſe von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Öle III.) Nr. 337.

Fiſche. Das Tierreich IV: Fiſche von Profeſſor Dr. Max Rauther in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fiſcherei und Fiſchzucht von Dr. Karl Eckſtein, Profeſſor an der Forſtakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptſtation des forſtlichen Verſuchsweſens. Nr. 159.

Flora. Exkurſionsflora von Deutſchland zum Beſtimmen der häufigeren in Deutſchland wildwachſenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forſtakademie Eiſenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268, 269.

Flußbau von Regierungsbaumeiſter Otto Rappold in Stuttgart. Mit vielen Abbildungen. Nr. 597.

Forenſiſche Pſychiatrie von Profeſſor Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanſtalt Friedrichsberg in Hamburg. Zwei Bändchen. Nr. 410 und 411.

Forſtwiſſenſchaft von Dr. Ad. Schwappach, Prof. a. d. Forſtakademie Eberswalde, Abteilungsdirig. bei d. Hauptſtation d. forſtl. Verſuchsweſ. Nr. 106.

Fortbildungsſchulweſen, Das deutſche, nach ſeiner geſchichtl. Entwicklung und in ſeiner gegenwärt. Geſtalt von H. Sierck, Reviſor gewerbl. Fortbildungsſchulen in Schleswig. Nr. 392.

Franken. Geſchichte Frankens von Dr. Chriſt. Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D. in München. Nr. 434.

Frankreich. Franzöſiſche Geſchichte von Dr. R. Sternfeld, Profeſſor an d. Univerſität Berlin. Nr. 85.

Frankreich. Landesk. v. Frankreich v. Dr. Richard Neuſe, Direkt. d. Ober-Realſchule in Spandau. 1. Bändchen. Mit 23 Abbild. im Text und 16 Landſchaftsbildern auf 16 Tafeln. Nr. 466.
— — 2. Bändchen. Mit 15 Abbild. im Text, 18 Landſchaftsbildern auf 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 467.

Franzöſiſch-deutſches Geſprächsbuch von C. Francillon, Lektor für franzöſ. Sprache an der Univerſität Berlin. Nr. 596.

Franzöſiſche Handelskorreſpondenz von Profeſſor Th. de Beaux, Officier de l'Inſtruction Publique. Nr. 183.

Fremdwort, Das, im Deutſchen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutſches, von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Fuge. Erläuterung und Anleitung zur Kompoſition derſelben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Funktionentheorie, Einleitung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Max Roſe, Oberlehrer an der Goetheſchule in Deutſch-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.

Fußartillerie, Die, ihre Organiſation, Bewaffnung und Ausbildung von Splett, Oberleutnant im Lehrbataillon der Fußartillerie-Schießſchule u. Biermann, Oberleutnant in der Verſuchsbatterie der Artillerie-Prüfungskommiſſion. Mit 35 Figuren. Nr. 560.

Gardinenfabrikation. Textilinduſtrie II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation v. Profeſſor Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Gas- und Waſſerinſtallationen mit Einſchluß der Abortanlagen von Profeſſor Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmſtadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Gaskraftmaſchinen, Die, von Ing. Alfred Kirſchke in Kiel. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Gaſthäuſer und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düſſeldorf. **I:** Die Beſtandteile und die Einrichtung des Gaſthauſes. Mit 70 Figuren. Nr 525.

— — **II:** Die verſchiedenen Arten von Gaſthäuſern. Mit 82 Fig. Nr. 526.

Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klußmann, Oberſt und Kommandeur der 1. Feldartillerie-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Überſichtstafeln. Nr. 531.

Genoſſenſchaftsweſen, Das, in Deutſchland von Dr. Otto Lindecke in Düſſeldorf. Nr. 384.

Geodäſie. Vermeſſungskunde von Diplom-Ing. P. Werkmeiſter, Oberlehrer an der Kaiſerl. Techniſch. Schule in Straßburg i. E. **I:** Feldmeſſen und Nivellieren. Mit 146 Abbild. **II:** Der Theodolit. Trigonometriſche und barometriſche Höhenmeſſung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 468 u. 469.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbſtbelehrung zuſammengeſtellt von Profeſſor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytiſche, der Ebene von Profeſſor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.

— — **Aufgabenſammlung zur Analytiſchen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Profeſſor am Königl. Realgymnaſium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

Geometrie, Analytiſche, d. Raumes v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— — **Aufgabenſammlung zur Analytiſchen Geometrie des Raumes** von O. Th. Bürklen, Profeſſor am Königl. Realgymnaſium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Nr. 309.

— **Darſtellende,** v. Dr. Robert Haußner, Profeſſor an der Univerſität Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

— **Ebene,** von G. Mahler, Profeſſor am Gymnaſium in Ulm. Mit 111 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.

— **Projektive,** in ſynthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Profeſſor an der Univerſität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.

Geometriſche Optik, Einführung in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Geometriſches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkſchule in Magdeburg, neubearbeitet von Profeſſor J. Vonderlinn in Münſter. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Germaniſche Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.

Germaniſche Sprachwiſſenſchaft von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.

Geſangskunſt. Technik der deutſchen Geſangskunſt von Oskar Noë und Dr. Hans Joachim Moſer. Nr. 576.

Geſchichtswiſſenſchaft, Einleitung i. die, von Dr. Ernſt Bernheim, Prof. an der Univerſ. Greifswald. Nr. 270.

Geſchütze, Die modernen, der Fußartillerie von Mummenhoff, Major und Lehrer an der Fußartillerie-Schießſchule in Jüterbog. **I:** Vom Auftreten d. gezogenen Geſchütze bis zur Verwendung des rauchſchwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— — **II:** Die Entwicklung der heutigen Geſchütze der Fußartillerie ſeit Einführung des rauchſchwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Geſetzbuch, Bürgerliches, ſiehe: Recht des Bürgerlichen Geſetzbuches.

Geſundheitslehre. Der menſchliche Körper, ſein Bau und ſeine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberſchulrat in Karlsruhe. Mit Geſundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen u. 1 Tafel. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbeweſen von Werner Sombart, Profeſſor an der Handelshochſchule Berlin. I. II. Nr. 203. 204.

Gewerbliche Arbeiterfrage, Die, von Werner Sombart, Profeſſor an der Handelshochſchule Berlin. Nr. 209.

Gewerbliche Bauten. Induſtrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuſer und Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann in Düſſeldorf. **I:** Allgemeines über Anlage und Konſtruktion der induſtriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.
— — **II:** Speicher und Lagerhäuſer. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Gewichtsweſen. Maß-, Münz- und Gewichtsweſen von Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsſch. i. Köln. Nr. 283.

Gießereimaſchinen von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. B. Mit 51 Figuren. Nr. 548.

Glas- und keramiſche Induſtrie (Induſtrie der Silikate, der Bauſteine und des künſtlichen Mörtels I) von Dr. Guſtav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Taf. Nr. 233.

Gleichſtrommaſchine, Die, von Ingenieur Dr. C. Kinzbrunner in Mancheſter. Mit 81 Figuren. Nr. 257.

Gletſcherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Gotiſche Sprachdenkmäler mit Grammatik, Überſetzung und Erläutergn. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luiſe-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue. Wolfram von Eſchenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfiſch. Epos mit Anmerk. u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Graphiſchen Künſte, Die, von Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphiſchen Lehr- und Verſuchsanſtalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen und Beilagen. Nr. 75.

Griechiſche Altertumskunde von Profeſſor Dr. Rich. Maiſch, neu bearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Griechiſche Geſchichte von Dr. Heinrich Swoboda, Profeſſor an der deutſchen Univerſität Prag. Nr. 49.

Griechiſche Literaturgeſchichte mit Berückſichtigung d. Geſchichte d. Wiſſenſchaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univerſ. Breslau. 2 Bändchen. Nr. 70 und 557.

Griechiſchen Sprache, Geſchichte d., I: Bis zum Ausgange der klaſſiſchen Zeit von Dr. Otto Hoffmann, Prof. a. d. Univerſität Münſter. Nr. 111.

Griechiſche u. römiſche Mythologie v. Prof. Dr. Herm. Steuding, Rektor d. Gymnaſiums in Schneeberg. Nr. 27.

Grundbuchrecht, Das formelle, von Oberlandesgerichtsr. Dr. F. Kretzſchmar in Dresden. Nr. 549.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Profeſſor an der Univerſität Zürich. Nr. 245.

Handelsrecht, Deutſches, von Dr. Karl Lehmann, Profeſſor an der Univerſität Göttingen. **I:** Einleitung. Der Kaufmann und ſeine Hilfsperſonen. Offene Handelsgeſellſchaft. Kommandit- und ſtille Geſellſchaft. Nr 457.
— — **II:** Aktiengeſellſch. Geſellſch. m. b. H. Eing. Gen. Handelsgeſch. Nr. 458.

Handelsſchulweſen, Das deutſche, von Direktor Theodor Blum in Deſſau. Nr. 558.

Handelsſtand, Der, von Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer in Leipzig. (Kaufmänn. Rechtsk. Bd. 2.) Nr. 545.

Handelsweſen, Das, von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Lexis, Profeſſor an der Univerſität Göttingen. **I:** Das Handelsperſonal und der Warenhandel. Nr. 296.
— — **II:** Die Effektenbörſe und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, ſeit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Hauptmann und Kompagniechef im Infanterie-Regim. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Poſenſches) Nr. 59 in Soldau. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeiſpielen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eſchenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfiſchen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Profeſſor am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Harze, Lacke, Firniſſe von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univerſ. Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Hebezeuge, Die, ihre Konſtruktion u. Berechnung von Ing. Prof. Hermann Wilda, Bremen. M. 399 Abb. Nr. 414.

Heeresorganiſation, Die Entwicklung der, ſeit Einführung der ſtehenden Heere von Otto Neuſchler, Hauptmann u. Batteriechef in Ulm. I: Geſchichtl. Entwicklung bis zum Ausgange d. 19. Jahrh. Nr. 552.

Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting in Düſſeldorf. I: Das Weſen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr 342.

— — II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlage. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Heſſen. Landeskunde des Großherzogtums Heſſen, der Provinz Heſſen-Naſſau und des Fürſtentums Waldeck von Prof. Dr. Georg Greim in Darmſtadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Holz, Das. Aufbau, Eigenſchaften u. Verwendung v. Ingen. Prof. Hermann Wilda in Bremen. M. 33 Abb. Nr. 459.

Hotels. Gaſthäuſer und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düſſeldorf. I: Die Beſtandteile u. d. Einrichtung d. Gaſthauſes. Mit 70 Figuren. Nr. 525.

— — II: Die verſchiedenen Arten v. Gaſthäuſern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.

Hydraulik von W. Hauber, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Profeſſor H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.

— **des Wohnungsweſens** von Profeſſor H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbildungen. Nr. 363.

Iberiſche Halbinſel. Landeskunde der Iberiſchen Halbinſel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Indiſche Religionsgeſchichte v. Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Indogerman. Sprachwiſſenſchaft v. Dr. R. Meringer, Profeſſor an der Univerſ. Graz. Mit 1 Tafel. Nr. 59.

Induſtrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuſer und Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann in Düſſeldorf. I: Allgemeines über Anlage und Konſtruktion der induſtriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— — II: Speicher und Lagerhäuſer. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfaſſer gezeichneten Abbildung. und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Inſekten. Das Tierreich V: Inſekten von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

Inſtrumentenlehre v. Muſikdir. Franz Mayerhoff i. Chemnitz. I: Text. Nr. 437.

— — II: Notenbeiſpiele. Nr. 438.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnaſiums und der Oberrealſchule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

— **Repetitorium und Aufgabenſammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedrich Junker, Rektor des Realgymnaſiums u. d. Oberrealſchule in Göppingen. Mit 52 Fig. Nr. 147.

Iſrael. Geſchichte Iſraels bis auf die griechiſche Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Italieniſche Handelskorreſpondenz von Profeſſor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Inſtitut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

Italieniſche Literaturgeſchichte von Dr. Karl Voßler, Profeſſor an der Univerſität München. Nr. 125.

Kalkulation, Die, im Maſchinenbau von Ingenieur H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.

Kältemaſchinen. Die thermodynamiſchen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaſchinen von M. Röttinger, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 73 Fig. Nr. 2.

Kamerun. Die deutſchen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographiſchen Karte. Nr. 441.

Kanal- und Schleuſenbau von Regierungsbaumeiſter Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbild. Nr. 585.

Kant, Immanuel. (Geſchichte d. Philoſophie Band 5) von Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 536.

Kartell und Truſt v. Dr. S. Tſchierſchky in Düſſeldorf. Nr. 522.

Kartenkunde von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. 2 Bändchen. **I:** Die Projektionen. Mit 53 Figuren. Nr. 30.
— — **II:** Der Karteninhalt und das Meſſen auf Karten. Mit 36 Figuren. Nr. 599.

Kaufmänniſche Rechtskunde. I: Das Wechſelweſen von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.
— **II:** Der Handelsſtand v. Rechtsanw. Dr. jur. Bruno Springer, Leipzig. Nr. 545.

Kaufmänniſches Rechnen von Prof. Richard Juſt, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranſtalt d. Dresdener Kaufmannſch. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

Keramiſche Induſtrie. Die Induſtrie der Silikate, der künſtlichen Bauſteine und des Mörtels von Dr. Guſtav Rauter. I: Glas- u. keram. Induſtrie. M. 12 Taf. Nr. 233.

Kerzenfabrikation. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyſe und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abbild. Nr. 336.

Kiautſchou. Die deutſch. Kolonien. II: Das Südſeegebiet und Kiautſchou von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.

Kinematik von Dipl.-Ing. Hans Polſter, Aſſiſtent an der Kgl. Techn. Hochſchule Dresden. Mit 76 Abbild. Nr. 584.

Kirchenrecht von Dr. E. Sehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Profeſſor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. und 2 Figuren. Nr. 114.

Kolonialgeſchichte von Dr. Dietrich Schäfer, Profeſſor der Geſchichte an der Univerſität Berlin. Nr. 156.

Kolonialrecht, Deutſches, von Dr. H. Edler von Hoffmann, Profeſſor an der Kgl. Akademie Poſen. Nr. 318.

Kometen. Aſtronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Profeſſor an der Univerſität Kiel. **II:** Kometen, Meteore und das Sternſyſtem. Mit 15 Figuren u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Kommunale Wirtſchaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magiſtratsaſſeſſor in Berlin. Nr. 534.

Kompoſitionslehre. Muſikaliſche Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeiſpiel. Nr. 149. 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der ſelbſtändigen Stimmführung von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Kontrollweſen, Das agrikulturchemiſche, von Dr. Paul Kriſche in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

Koordinatenſyſteme v. Paul B. Fiſcher, Oberlehrer an der Oberrealſchule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.

Körper, Der menſchliche, ſein Bau und ſeine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberſchulrat in Karlsruhe. Mit Geſundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Koſtenanſchlag ſiehe: Veranſchlagen.

Kriegsſchiffbau. Die Entwicklung des Kriegsſchiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderſchiffe u. der Segelſchiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum b. 1840. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaur. u. Schiffbau-Direktor. Mit 32 Abb. Nr. 471.

Kriegsweſens, Geſchichte des, von Dr. Emil Daniels in Berlin. **I:** Das antike Kriegsweſen. Nr. 488.

Kriegsweſens, Geſchichte des, von Dr. Emil Daniels in Berlin. **II:** Das mittelalt. Kriegsweſen. Nr. 498.

— — **III:** Das Kriegsweſen der Neuzeit. Erſter Teil. Nr. 518.

— — **IV:** Das Kriegsweſen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.

— — **V:** Das Kriegsweſen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.

Kriſtallographie von Dr. W. Bruhns, Profeſſor an der Univerſität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Profeſſor an der Univerſität Würzburg. Nr. 10.

Kultur, Die, der Renaiſſance. Geſittung, Forſchung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Profeſſor an der Univerſität Wien. Nr. 189.

Kulturgeſchichte, Deutſche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Kurvendiskuſſion. Algebraiſche Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. **I:** Kurvendiskuſſion. M. 57 Fig. i. Text. Nr. 435.

Kurzſchrift ſiehe: Stenographie.

Lacke. Harze, Lacke, Firniſſe von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Lagerhäuſer. Induſtrielle und gewerbliche Bauten. (Speicher, Lagerhäuſer u. Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann, Düſſeldorf. **II:** Speicher u. Lagerhäuſer. Mit 123 Fig. Nr. 512.

Länder- und Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Landſtraßenbau von Kgl. Oberlehrer A. Liebmann, Betriebsdirektor a. D. in Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.

Landwirtſchaftliche Betriebslehre v. E. Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.

Landwirtſchaftlichen Maſchinen, Die, von Karl Walther, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409.

Lateiniſche Grammatik. Grundriß der lateiniſchen Sprachlehre von Prof. Dr. W. Votſch in Magdeburg. Nr. 82.

Lateiniſche Sprache. Geſchichte der lateiniſchen Sprache von Dr. Friedrich Stolz, Profeſſor an der Univerſität Innsbruck. Nr. 492.

Licht. Theoretiſche Phyſik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Guſt. Jäger, Prof. an der Techniſchen Hochſchule in Wien. Mit 47 Abb. Nr. 77.

Logarithmen. Vierſtellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmiſches und trigonometriſches Rechnen in zwei Farben zuſammengeſtellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenſchule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

— **Fünfſtellige,** von Profeſſor Auguſt Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealſchule in Wien. Nr. 423.

Logik. Pſychologie und Logik zur Einführung in die Philoſophie von Profeſſor Dr. Th. Elſenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Lokomotiven. Eiſenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal. **I:** Die Lokomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Taf. Nr. 107.

Lothringen. Geſchichte Lothringens von Dr. Hermann Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **Landeskunde v. Elſaß-Lothring.** v. Prof. Dr. R. Langenbeck i. Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.

Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyſe mit Hilfe des Lötrohrs von Dr. Martin Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Lübeck. Landeskunde der Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hanſeſtadt Lübeck von Dr. Sebald Schwarz, Direktor d. Realſchule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographiſchen Karte. Nr. 487.

Luft- und Meeresſtrömungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsſchule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen u. Tafeln. Nr. 551.

Lüftung. Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting in Düſſeldorf. **I:** Das Weſen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

— — **II:** Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Luther, Martin, u. Thom. Murner. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen verſehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnaſium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretiſche Phyſik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Guſtav Jäger, Profeſſor an der Techniſchen Hochſchule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Mälzerei. Brauereiweſen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor der Öffentl. u. 1. Sächſ. Verſuchsſtat. für Brauerei u. Mälzerei, ſow. d. Brauer- und Mälzerſchule zu Grimma. Nr. 303.

Maſchinenbau, Die Kalkulation im, v. Ing. H. Bethmann, Doz. a. Technik. Altenburg. Mit 63 Abbild. Nr. 486.

— **Die Materialien des Maſchinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abb. Nr. 476.

Maſchinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beiſpielen für das Selbſtſtudium und den praktiſchen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Maſchinenzeichnen, Praktiſches, von Ing. Rich. Schiffner in Warmbrunn. **I:** Grundbegriffe, Einfache Maſchinenteile bis zu den Kuppelungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.

— — **II:** Lager, Riemen- u. Seilſcheiben, Zahnräder, Kolben-Pumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590.

Maßanalyſe von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Figuren. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtsweſen von Dr. Auguſt Blind, Profeſſor an der Handelsſchule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungsweſen. Einführung in d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur, ſtänd. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. **I:** Materialeigenſchaften. — Feſtigkeitsverſuche. — Hilfsmittel für Feſtigkeitsverſuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.

— — **II:** Metallprüfung u. Prüfung von Hilfsmaterialien des Maſchinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Mathematik, Geſchichte der, von Dr. A. Sturm, Profeſſor am Obergymnaſium in Seitenſtetten. Nr. 226.

Mathematiſche Formelſammlung u. Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigſten Formeln und Lehrſätze der Arithmetik, Algebra, algebraiſchen Analyſis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene u. d. Raumes, der Different.- u. Integralrechn. von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Sch.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmſtadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.

Mechanik. Theoret. Phyſik I. Teil: Mechanik und Akuſtik. Von Dr. Guſt. Jäger, Profeſſor an der Techniſchen Hochſchule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

Mechaniſche Technologie von Geh. Hofrat Profeſſor A. Lüdicke in Braunſchweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.

Mecklenburg. Landeskunde der Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hanſeſtadt Lübeck v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor d. Realſchule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen im Text, 16 Tafeln und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.

Meereskunde, Phyſiſche, von Profeſſor Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorſteher bei der Deutſchen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Meeresſtrömungen ſiehe: Luft- und Meeresſtrömungen.

Menſchliche Körper, Der, ſein Bau und ſeine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberſchulrat in Karlsruhe. Mit Geſundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. und 1 Tafel. Nr. 18.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darſtellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen unter beſonderer Berückſichtigung der Metallmikroſkopie von Prof. E. Heyn u. Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) der Kgl. Techn. Hochſchule zu Berlin. **I:** Allgem. Teil. Mit 45 Abbildungen im Text u. 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— — **II:** Spezieller Teil. Mit 49 Abb. im Text u. 37 Lichtb. auf 19 Taf. Nr. 433.

Metalle (Anorganiſche Chemie 2. T.) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingen., Aſſiſtent an der Königlichen Baugewerkſchule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganiſche Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Aſſiſtent an der Kgl. Baugewerkſchule in Stuttgart. Nr. 211.

Metallurgie von Dr. Auguſt Geitz, in Kriſtiansſand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Meteore. Aſtronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr Herm. Kobold, Prof. an der Univerſität Kiel. II: Kometen, Meteore und das Sternſyſtem. Mit 15 Figuren u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Profeſſor an der Univerſität Innsbruck. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.

Militärſtrafrecht von Dr. Max Ernſt Mayer, Profeſſor an der Univerſität Straßburg i. E. 2 Bde. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Profeſſor an der Univerſität Bonn. Mit 132 Abbildungen. Nr. 29.

Minneſang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minneſang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. v. O. Güntter, Prof. an der Oberrealſchule und an d. Techn. Hochſchule in Stuttgart. Nr. 23.

Mittelhochdeutſch. Dichtungen aus mittelhochdeutſcher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitung und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luiſe-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Mittelhochdeutſche Grammatik. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutſche Grammatik m. kurzem Wörterbuch v. Dr. W. Golther, Prof. a. d. Univerſität Roſtock. Nr. 1.

Morgenland. Geſchichte des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, Profeſſor an der Univerſität München. Mit 9 Bildern und 1 Karte. Nr. 43.

Morphologie und Organographie der Pflanzen von Prof. Dr. M. Nordhauſen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.

Mörtel. Die Induſtrie der künſtlichen Bauſteine und des Mörtels v. Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Münzweſen. Maß-, Münz- u. Gewichtsweſen v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsſchule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther und Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. verſehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Muſik, Geſchichte der alten u. mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler in Steinhaußen. 2 Bdch. M. zahlr. Abb. und Muſikbeilagen. Nr. 121 und 347.

Muſikaliſche Akuſtik von Profeſſor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.

Muſikaliſche Formenlehre (Kompoſitionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeiſp. Nr. 149, 150.

Muſikäſthetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Muſikgeſchichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

Muſikgeſchichte ſeit Beginn des 19. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II Nr. 164. 165.

Muſiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Profeſſor an der Königlichen Forſtakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbild., 5 Tab. und 3 Karten. Nr. 355.

Nahrungsmittel. Ernährung und Nahrungsmittel von Oberſtabsarzt Profeſſor H. Biſchoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsſchiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor d. Navigations-Schule zu Lübeck. M. 56 Abb. Nr. 84.

Neugriechiſch-deutſches Geſprächsbuch mit beſonderer Berückſichtigung der Umgangsſprache von Dr Johannes Kalitſunakis, Dozent am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 587.

Neunzehntes Jahrhundert. Geſchichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Neuteſtamentliche Zeitgeſchichte von Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. der Univ. in Jena. **I:** Der hiſtoriſche und kulturgeſchichtliche Hintergrund des Urchriſtentums. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— — **II:** Die Religion des Judentums im Zeitalter d. Hellenismus u. d. Römerherrſchaft. Mit 1 Planſkizze. Nr. 326.

Nibelunge Nôt, Der, in Auswahl und mittelhochdeutſche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Profeſſor an der Univ. Roſtock. Nr. 1.

Nordiſche Literaturgeſchichte I: Die isländiſche u. norwegiſche Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Univerſ. Roſtock. Nr. 254.

Nutzpflanzen von Profeſſor Dr. J. Behrens, Vorſt. d. Großherzogl. landwirtſchaftlichen Verſuchsanſtalt Auguſtenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Öle. Die Fette und Öle ſowie die Seifen- u. Kerzenfabrikation u. d. Harze, Lacke, Firniſſe m. ihren wichtigſt. Hilfsſtoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführ. in d. Chemie, Beſprech. einiger Salze und der Fette und Öle. Nr. 335.

Öle und Riechſtoffe, Ätheriſche, von Dr. F. Rochuſſen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Optik. Einführung in die geometriſche Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Orientaliſche Literaturen. Die Literaturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univerſität Wien. **I:** Die Literaturen Oſtaſiens und Indiens. Nr. 162.

— — **II:** Die Literaturen der Perſer, Semiten und Türken. Nr. 163.

— **Die chriſtlichen Literaturen des Orients** von Dr. Anton Baumſtark. **I:** Einleitung. — Das chriſtlich-aramäiſche u. d. koptiſche Schrifttum. Nr. 527.

— — **II:** Das chriſtlich-arabiſche und das äthiopiſche Schrifttum. — Das chriſtliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.

Ortsnamen im Deutſchen, Die, ihre Entwicklung und ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 573.

Oſtafrika. (Die deutſchen Kolonien III) von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

Öſterreich. Öſterreichiſche Geſchichte von Prof. Dr. Franz von Krones, neu bearb. von Dr. Karl Uhlirz, Prof. a. d. Univ. Graz. **I:** Von d. Urzeit b. z. Tode Königs Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.

— — **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis zum Weſtf. Frieden (1440—1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.

— **Landeskunde von Öſterreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Univerſität Prag. Mit 10 Textilluſtrationen und 1 Karte. Nr. 244.

Ovidius Naſo, Die Metamorphoſen des. In Auswahl mit einer Einleit. u. Anmerk. herausgegeb. von Dr. Jul. Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

Pädagogik im Grundriß von Profeſſor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagog. Seminars an der Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geſchichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläogeographie. Geologiſche Geſchichte der Meere und Feſtländer von Dr. Franz Koſſmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt in Weilburg (Lahn). Nr. 482.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Profeſſor an der Univerſität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

— **und Abſtammungslehre** von Dr. Karl Diener, Profeſſor an der Univerſ. Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.

Paläſtina. Landes- u. Volkskunde Paläſtinas v. Lic. Dr. Guſtav Hölſcher i. Halle. M. 8 Vollbild. u. 1 K. Nr. 345.

Parallelperſpektive. Rechtwinklige und ſchiefwinklige Axonometrie von Profeſſor J. Vonderlinn in Münſter. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Perſonennamen, Die deutſchen, von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Profeſſor an der Univerſität Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Profeſſor Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbaulehre. Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Eſſen und Ernſt Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 232.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Profeſſor an der Forſtakademie Eiſenach. **I:** Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzenernährung. Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Pflanzengeographie von Profeſſor Dr. Ludwig Diels in Marburg (Heſſen). Nr. 389.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdozent in Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abbild. Nr. 310.

Pflanzen-Morphologie ſiehe: **Morphologie.**

Pflanzenphyſiologie von Dr. Adolf Hanſen, Profeſſor an der Univerſität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.

Pflanzenreichs, Die Stämme des, von Privatdozent Dr. Robert Pilger, Kuſtos am Kgl. Botaniſchen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.

Pflanzenwelt, Die, der Gewäſſer von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forſtak. Eiſenach. Mit 50 Abb. Nr. 158.

Pflanzen-Zellenlehre ſiehe: Zellenlehre.

Pharmakognoſie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Aſſiſt. a. Botan. Inſtit. d. Techn. Hochſch. Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutiſche Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

Philologie, Geſchichte d. klaſſiſchen, v. Dr. Wilhelm Kroll, ord. Prof. a. d. Univerſität Münſter in Weſtf. Nr. 367.

Philoſophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentſcher, Profeſſor an der Univerſität Bonn. Nr. 281.

Philoſophie, Geſch. der, IV: Neuere Philoſophie b. Kant v. Dr. B. Bauch, Profeſſor an der Univ. Jena. Nr. 394.

— — **V: Immanuel Kant** von Dr. Bruno Bauch, Profeſſor an der Univerſität Jena. Nr. 536.

Philoſophie, Geſchichte der, VI: Die Philoſophie im erſten Drittel des 19. Jahrhunderts von Arthur Drews, Prof. d. Philoſophie an der Techn. Hochſchule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **Hauptprobleme der,** von Dr. Georg Simmel, Prof. a. d. Univ. Berlin. Nr. 500.

— **Pſychologie und Logik** zur Einf. in die Philoſophie von Profeſſor Dr. Th. Elſenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Profeſſor an der k. k. Graphiſchen Lehr- und Verſuchsanſtalt in Wien. Mit 3 Tafeln und 42 Abbildungen. Nr. 94.

Phyſik, Theoretiſche, von Dr. Guſtav Jäger, Profeſſor der Phyſik an der Techniſchen Hochſchule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akuſtik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Mit 47 Abb. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnetiſche Lichttheorie u. Elektronik. M. 21 Fig. Nr. 374.

— **Geſchichte der,** von Prof. A. Kiſtner in Wertheim a. M. **I:** Die Phyſik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

— — II: Die Phyſik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Phyſikaliſch-Chemiſche Rechenaufgaben von Profeſſor Dr. R. Abegg u. Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Univerſität Breslau. Nr. 445.

Phyſikaliſche Aufgabenſammlung von G. Mahler, Profeſſor der Mathematik u. Phyſik am Gymnaſium in Ulm. Mit den Reſultaten. Nr. 243.

Phyſikaliſche Formelſammlung von G. Mahler, Profeſſor am Gymnaſium in Ulm. Mit 65 Figuren. Nr. 136.

Phyſikaliſche Meſſungsmethoden v. Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. a. d. Oberrealſchule i. Gr.-Lichterf. M. 49 F. Nr. 301.

Phyſiologiſche Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. **I:** Aſſimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — **II:** Diſſimilation. Mit 1 Taf. Nr. 241.

Phyſiſche Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochſch. in München. Mit 32 Abbild. Nr. 26.

Phyſiſche Meereskunde von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvorſteher bei der Deutſch. Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbild. im Text und 8 Taf. Nr. 112.

Pilze, Die. Eine Einführung in die Kenntnis ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen im Text. Nr. 574.

Planetenſyſtem. Aſtronomie (Größe, Bewegung und Entfernung d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univerſität Kiel. I: Das Planetenſyſtem. Mit 33 Abbildung. Nr. 11.

Plaſtik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayeriſchen Nationalmuſeums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

— **Die, ſeit Beginn des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

Plattdeutſche Mundarten von Dr. Hubert Grimme, Profeſſor an der Univerſität Freiburg (Schweiz). Nr. 461.

Poetik, Deutſche, von Dr. K. Borinſki, Prof. a. der Univ. München. Nr. 40.

Polarlicht. Erdmagnetismus, Erdſtrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Kgl. Preußiſchen Meteorologiſchen Inſtituts zu Potsdam. Mit 15 Abbild. und 7 Tafeln. Nr. 175.

Polniſche Geſchichte von Dr. Clemens Brandenburger in Poſen. Nr. 338.

Pommern. Landeskunde von Pommern von Dr. W. Deecke, Prof. an der Univerſität Freiburg i. B. Mit 10 Abbild. und Karten im Text u. 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.

Portugieſiſche Literaturgeſchichte von Dr. Karl von Reinhardſtoettner, Profeſſor an der Königlichen Techniſchen Hochſchule München. Nr. 213.

Poſamentiererei. Textil-Induſtrie II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Poſtrecht von Dr. Alfred Wolcke, Poſtinſpektor in Bonn. Nr. 425.

Preßluftwerkzeuge, Die, von Dipl.-Ing. P. Iltis, Oberlehrer an der Kaiſ. Techniſchen Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.

Preußiſches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Profeſſor an der Univerſität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Pſychiatrie, Forenſiſche, von Profeſſor Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanſtalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.

Pſychologie und Logik zur Einführ. in die Philoſophie von Prof. Dr. Th. Elſenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Pſychophyſik, Grundriß der, von Profeſſor Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Pumpen, Druckwaſſer- u. Druckluft-Anlagen. Ein kurzer Überblick von Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumeiſter a. D. in Aachen. Mit 87 Abbildungen. Nr. 290.

Quellenkunde der deutſchen Geſchichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an d. Univ. Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Radioaktivität von Dipl.-Ing. Wilhelm Frommel. Mit 21 Abbild. Nr. 317.

Rechnen, Das, in der Technik und ſeine Hilfsmittel (Rechenſchieber, Rechentafeln, Rechenmaſchinen uſw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.

— **Kaufmänniſches,** von Prof. Richard Juſt, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranſtalt der Dresdener Kaufmannſchaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Recht des Bürgerlich. Geſetzbuches. Erſtes Buch: Allgemeiner Teil. I: Einleitung — Lehre von den Perſonen u. von den Sachen von Dr. Paul Oertmann, Profeſſor an der Univerſität Erlangen. Nr. 447.

— II: Erwerb und Verluſt, Geltendmachung und Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Profeſſor an der Univerſität Erlangen. Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Profeſſor an der Univerſität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältniſſe v. Dr. Paul Oertmann, Prof. an der Univerſität Erlangen. Nr. 324.

— Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzſchmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgemeine Lehren. Beſitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Profeſſor an der Univerſität Göttingen. Nr. 305.

Rechtsgeſchichte, Römiſche, von Dr. Robert von Mayr, Prof. an der Deutſchen Univerſität Prag. 1. Buch: Die Zeit des Volksrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 577.

— — 2. Hälfte: Das Privatrecht. Nr. 578.

Rechtsſchutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiſerl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiſerl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Rechtswiſſenſchaft, Einführung in die, von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. **I:** Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.

— — **II:** Das Syſtem. Nr. 170.

Redelehre, Deutſche, von Hans Probſt, Gymnaſialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Redeſchrift ſiehe: Stenographie.

Reichsfinanzen, Die Entwicklung der, von Präſident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Religion, Die Entwicklung der chriſtlichen, innerhalb des Neuen Teſtaments von Profeſſor Dr. Lic. Carl Clemen. Nr. 388.

— **Die, des Judentums** im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrſchaft von Lic. Dr. W. Staerk (Neuteſtamentl. Zeitgeſchichte II.) Mit einer Planſkizze. Nr. 326.

Religionen der Naturvölker, Die, von Dr. Th. Achelis, Profeſſor in Bremen. Nr. 449.

Religionswiſſenſchaft, Abriß der vergleichenden, von Profeſſor Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Renaiſſance. Die Kultur der Renaiſſance. Geſittung, Forſchung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Prof. an der Univerſität Wien. Nr. 189.

Reptilien. Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Profeſſor an der Univerſität Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

Rheinprovinz, Landeskunde der, von Dr. V. Steinecke, Direktor des Realgymnaſiums in Eſſen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

Riechſtoffe. Ätheriſche Öle und Riechſtoffe von Dr. F. Rochuſſen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Roman. Geſchichte des deutſchen Romans v. Dr. Hellm. Mielke. Nr. 229.

Romaniſche Sprachwiſſenſchaft von Dr. Adolf Zauner, Profeſſor an der Univ. Graz. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Römiſche Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. M. 8 Vollb. Nr. 45.

Römiſche Geſchichte von Realgymnaſial-Direktor Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römiſche Literaturgeſchichte von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Römiſche und griechiſche Mythologie von Prof. Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnaſiums in Schneeberg. Nr. 27.

Rußland. Ruſſiſche Geſchichte von Dr. Wilh. Reeb, Oberlehrer am Oſtergymnaſium in Mainz. Nr. 4.

— **Landeskunde des Europäiſchen Rußlands nebſt Finnlands** von Profeſſor Dr. A. Philippſon in Halle a. S. Nr. 359.

Ruſſiſch-Deutſches Geſprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Profeſſor an der Univerſität München. Nr. 68.

Ruſſiſche Grammatik von Dr. Erich Berneker, Profeſſor an der Univerſität München. Nr. 66.

Ruſſiſche Handelskorreſpondenz von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

Ruſſiſches Leſebuch mit Gloſſar von Dr. Erich Berneker, Profeſſor an der Univerſität München. Nr. 67.

Ruſſiſche Literatur von Dr. Erich Boehme, Lektor a. der Handelshochſchule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Proſa und Poeſie mit ausführlichen Anmerkgn. u. Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.

Ruſſiſche Literaturgeſchichte von Dr. Georg Polonſkij in München. Nr. 166.

Ruſſiſches Vokabelbuch, Kleines, von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochſchule Berlin. Nr. 475.

Sachenrecht. Recht d. Bürgerl. Geſetzbuches. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzſchmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. **I:** Allgemeine Lehren. Beſitz und Eigentum. **II:** Begrenzte Rechte. Nr. 480, 481.

Sachs, Hans. Ausgewählt und erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Sachſen. Sächſiſche Geſchichte von Profeſſor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnaſiums z. Leipzig. Nr. 100.

— **Landeskunde des Königreichs Sachſen** von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnaſium in Plauen. Mit 12 Abb. und 1 Karte. Nr. 258.

Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberſtudienrat Profeſſor Dr. Kurt Lampert, Vorſteher des Königlichen Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

Schattenkonſtruktionen von Profeſſor J. Vonderlinn in Münſter. Mit 114 Figuren. Nr. 236.

Schleswig-Holſtein. Landeskunde von Schleswig-Holſtein, Helgoland und der freien und Hanſeſtadt Hamburg von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsvorſteher am Muſeum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abbild., Plänen, Profilen u. 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.

Schleuſenbau ſiehe: Kanal- u. Schleuſenbau.

Schmalſpurbahnen (Klein-, Arbeits- und Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Auguſt Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erſte Einführung in die tieriſche Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, a. o. Profeſſor an der Univerſität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Schreiner-Arbeiten. Tiſchler- (Schreiner-)Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maſchinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenſter, Fenſterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Geſetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältniſſe von Dr. Paul Oertmann, Prof. an der Univerſität Erlangen. Nr. 324.

Schule, die deutſche, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.

Schulhaus. Die Baukunſt des Schulhauſes von Profeſſor Dr.-Ing. Ernſt Vetterlein in Darmſtadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbildungen. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 443 u. 444.

Schulpraxis. Methodik der Volksſchule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zſchopau. Nr. 50.

Schwediſch-deutſches Geſprächsbuch von Johannes Neuhaus, Dozent der neunordiſchen Sprachen an der Univerſität Berlin. Nr. 555.

Schwediſches Leſebuch zur Einführung in die Kenntnis des heutigen Schwedens mit Wörterverzeichnis von Johannes Neuhaus, Dozent der neunordiſchen Sprachen an der Univerſität Berlin. Nr. 554.

Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene, von Ingenieur Hans Nieſe in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.

Schweiz. Schweizeriſche Geſchichte von Dr. K. Dändliker, Profeſſor an der Univerſität Zürich. Nr. 188.

— **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walſer in Bern. Mit 16 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 398.

Schwimmanſtalten. Öffentl. Bade- und Schwimmanſtalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Figuren. Nr. 380.

Seemacht, Die, in der deutſchen Geſchichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernſt von Halle, Profeſſor an der Univerſität Berlin. Nr. 370.

Seerecht, Das deutſche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I. Allgemeine Lehren: Perſonen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — II. Die einzelnen ſeerechtlichen Schuldverhältniſſe: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyſe u. d. Kerzenfabrikation v. Dr. Karl Braun i. Berlin. (Die Fette und Öle II.) Mit 25 Abbild. Nr. 336.

Semitiſche Sprachwiſſenſchaft von Dr. C. Brockelmann, Profeſſor an der Univerſität Königsberg. Nr. 291.

Silikate. Induſtrie der Silikate, der künſtlichen Bauſteine u. des Mörtels von Dr. Guſtav Rauter in Charlottenburg. **I:** Glas und keramiſche Induſtrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— — **II:** Die Induſtrie d. künſtlichen Bauſteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Simplicius Simpliciſſimus von Hans Jakob Chriſtoffel v. Grimmelshauſen. In Auswahl herausgegeben von Profeſſor Dr. F. Bobertag, Dozent an der Univerſität Breslau. Nr. 138.

Skandinavien, Landeskunde von, (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreisſchulinſp. in Kreuzburg. M. 11 Abbi u. 1 K. Nr.202.

Slaviſche Literaturgeſchichte v. Dr. Joſef Karáſek in Wien **I:** Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — **II:** Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

Soziale Frage. Die Entwicklung der ſozial. Frage von Profeſſor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.

Sozialverſicherung von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Soziologie von Profeſſor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spanien. Spaniſche Geſchichte von Dr. Guſtav Diercks. Nr. 266.

— **Landeskunde der Iberiſchen Halbinſel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildungen im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Spaniſche Handelskorreſpondenz von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Spaniſche Literaturgeſchichte v. Dr. Rudolf Beer, Wien. I. II. Nr.167, 168.

Speicher. Induſtrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuſer und Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann in Düſſeldorf. **II:** Speicher u. Lagerhäuſer. Mit 123 Fig. Nr.512.

Spinnerei. Textil-Induſtrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Spitzenfabrikation. Textil-Induſtrie II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regier.-Rat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minneſang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Profeſſor an d. Oberrealſchule und an der Techniſchen Hochſchule in Stuttgart. Nr. 23.

Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Profeſſor an der Univerſität Straßburg i. E. Nr. 358.

Staatsrecht, Allgemeines, von Dr. Julius Hatſchek, Prof. d. Rechte a. d. Univ. Göttingen. 3 Bdch. Nr.415—417.

Staatsrecht, Preußiſches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Univerſität Bonn. 2 Teile Nr. 298, 299.

Stammeskunde, Deutſche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. M. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Statik von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: **Die Grundlehren der Statik ſtarrer Körper.** Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— — II. Teil: **Angewandte Statik.** Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Steinhauerarbeiten. Maurer- und Steinhauerarbeiten von Profeſſor Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmſtadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 419—421.

Stenographie. Geſchichte der Stenographie von Dr. Arthur Mentz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.

Stenographie n. d. Syſtem v. F. X. Gabelsberger v. Dr. Albert Schramm, Landesamtsaſſ. in Dresden. Nr. 246.

— **Die Redeſchrift des Gabelsbergerſchen Syſtems** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsaſſeſſor in Dresden. Nr. 368.

— **Lehrbuch d. Vereinfachten Deutſchen Stenographie** (Einig.-Syſtem Stolze-Schrey) nebſt Schlüſſel, Leſeſtücken und einem Anhang von Dr. Amſel, Studienrat des Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

— **Redeſchrift.** Lehrbuch der Redeſchrift des Syſtems Stolze-Schrey nebſt Kürzungsbeiſp., Leſeſtücken, Schlüſſel und einer Anleitung zur Steigerung der ſtenographiſchen Fertigkeit von Heinrich Dröſe, amtl. bad. Landtagsſtenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Profeſſor an der Univerſität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaſer in Stuttgart. Mit 66 Figuren. Nr. 97.

Sternſyſtem. Aſtronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univerſität Kiel. **II: Kometen,** Meteore und das Sternſyſtem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Steuerſyſteme des Auslandes, Die, von Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Stilkunde v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textilluſtrationen. Nr. 80.

Stöchiometriſche Aufgabenſammlung von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. an der Oberrealſchule in Groß-Lichterfelde. Mit den Reſultaten. Nr. 452.

Straßenbahnen von Dipl.-Ing. Auguſt Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.

Strategie von Löffler, Major im Kgl. Sächſ. Kriegsmin. in Dresden. Nr. 505.

Ströme und Spannungen in Starkſtromnetzen v. Joſ. Herzog, Dipl.-Elektroingenieur in Budapeſt u. Clarence Feldmann, Profeſſor der Elektrotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr. 456.

Südſeegebiet. Die deutſchen Kolonien II: Das Südſeegebiet und Kiautſchou von Prof. Dr. K. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.

Talmud. Die Entſtehung d. Talmuds v. Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Talmudproben von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 583.

Techniſch-Chemiſche Analyſe v. Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidg. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Techniſche Tabellen und Formeln von Dr.-Ing. W. Müller, Dipl.-Ing. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.

Techniſches Wörterbuch, enthaltend die wichtigſten Ausdrücke des Maſchinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Deutſch-Engliſch. Nr. 395.
— — II. Teil: Engliſch-Deutſch. Nr. 396.
— — III. Teil: Deutſch-Franzöſ. Nr. 453.
— — IV. Teil: Franzöſ.-Deutſch. Nr. 454.

Technologie, Allgemeine chemiſche, von Dr. Guſt. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

-- **Mechaniſche,** v. Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke i. Braunſchweig. Nr. 340, 341.

Teerfarbſtoffe, Die, mit beſond. Berückſichtigung der ſynthetiſchen Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Königl. Techn. Hochſchule, Dresden. Nr. 214.

Telegraphenrecht von Poſtinſpektor Dr. jur. Alfred Wolcke in Bonn. **I:** Einleitung. Geſchichtliche Entwicklung. Die Stellung des deutſchen Telegraphenweſens im öffentlichen Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.

— — **II:** Die Stellung des deutſch. Telegraphenweſens im öffentlichen Rechte, beſonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis der Telegraphie zum Publikum. Nr. 510.

Telegraphie, Die elektriſche, v. Dr. Lud. Rellſtab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Teſtament. Die Entſtehung des Alten Teſtaments von Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.

— **Die Entſtehung des Neuen Teſtaments** von Profeſſor Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textil-Induſtrie. I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. M. 39 Fig. Nr. 184.

— **II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. M. Gürtler, Geh. Regierungsr. i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

— **III: Wäſcherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsſtoffe** von Dr. Wilh. Maſſot, Prof. a. d. Preuß. höheren Fachſchule für Textilinduſtrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Thermodynamik (Techniſche Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Diplom-Ingen. M. 54 Fig. Nr. 242.

— **Die thermodynamiſchen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaſchinen** von M. Röttinger, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Nr. 2.

Thüringiſche Geſchichte von Dr. Ernſt Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Tierbiologie. Abriß der Biologie der Tiere von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Univ. Leipzig. Nr. 131.

Tiere, Entwicklungsgeſchichte der, von Dr. Johs. Meiſenheimer, Profeſſor der Zoologie an der Univerſität Jena. **I**: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Figuren. Nr. 378.

— — **II**: Organbild. M. 46 Fig. Nr. 379.

Tiergeographie v. Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie a. d. Kgl. Forſtakademie zu Tharandt. M. 2 Kart. Nr. 218.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Profeſſor an der Univerſität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere von Oberſtudienr. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorſt. d. Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

— **III: Reptilien und Amphibien** von Dr. Franz Werner, Profeſſor a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

— **IV: Fiſche** von Profeſſor Dr. Max Rauther in Neapel. Nr. 356.

— **V: Inſekten** von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbild. Nr. 594.

— **VI: Die wirbelloſen Tiere** von Dr. Ludwig Böhmig, Profeſſor der Zoologie an der Univerſität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Neſſeltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Figuren. Nr. 439.

— — II: Krebſe, Spinnentiere, Tauſendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. Mit 97 Figuren. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und ſpezielle, von Dr. Paul Rippert in Eſſen. Nr. 228.

Tiſchler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien. Handwerkszeuge, Maſchinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenſter, Fenſterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutſchen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographiſchen Karte. Nr. 441.

Toxikologiſche Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene u. ſphäriſche, von Profeſſor Dr. Gerh. Heſſenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene von Medizinalrat Profeſſor Dr. Nocht, Direktor des Inſtituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Truſt. Kartell und Truſt von Dr. S. Tſchierſchky in Düſſeldorf. Nr. 522.

Turnkunſt, Geſchichte der, von Dr. Rudolf Gaſch, Prof. a. König Georg-Gymnaſ. Dresden. M. 17 Abb. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Öſterreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Profeſſor an der Univerſität Berlin. Mit 10 Textilluſtr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungariſche Literatur, Geſchichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnyei, beide an der Univerſität Budapeſt. Nr. 550.

Ungariſche Sprachlehre von Dr. Joſef Szinnyei, o. ö. Prof. an der Univerſität Budapeſt. Nr. 595.

Unterrichtsweſen. Geſchichte des deutſchen Unterrichtsweſens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königl. Gymnaſiums zu Luckau. **I.** Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — **II.** Teil: Vom Beginn d. 19. Jahrhund. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Unterſuchungsmethoden, Agrikulturchemiſche, von Profeſſor Dr. Emil Haſelhoff, Vorſteher der landwirtſchaftlichen Verſuchsſtation in Marburg in Heſſen. Nr. 470.

Urgeſchichte der Menſchheit von Dr. Moritz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunſt, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künſte und Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

— **Das deutſche,** an literariſchen, künſtleriſchen und gewerblichen Schöpfungen, mit beſonderer Berückſichtigung der internationalen Verträge von Dr. Guſtav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moritz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. **I**: Steinzeit. Mit 40 Bildergruppen. Nr. 564.

— — **II**: Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.

— — **III**: Eiſenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.

Vektoranalyſis von Dr. Siegfr. Valentiner, Profeſſor an der Bergakademie in Clausthal. Mit 11 Fig. Nr. 354.

Veranſchlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Weſen des Koſtenanſchlags von Architekt Emil Beutinger, Aſſiſtent a. d. Techn. Hochſch. in Darmſtadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.

Vereinigte Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Profeſſor Heinrich Fiſcher, Oberlehrer am Luiſenſtädt. Realgymnaſium in Berlin. I. Teil. Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.

— — II. Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 382.

Vergil. Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen. I: Einleitung und Aeneis. Nr. 497.

Vermeſſungskunde von Diplom-Ing. P. Werkmeiſter, Oberlehrer an der Kaiſerl. Techniſchen Schule in Straßburg i. E. I: Feldmeſſen und Nivellieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.

— — II: Der Theodolit. Trigonometriſche u. barometriſche Höhenmeſſung. Tachymetrie. Mit 109 Abb. Nr. 469.

Verſicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Profeſſor an der Univerſität Freiburg i. B. Nr. 180.

Verſicherungsweſen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Profeſſor der Verſicherungswiſſenſchaft an der Handelshochſchule Köln. I: Allgemeine Verſicherungslehre. Nr. 262.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. und k. Kuſtos der ethnogr. Sammlung des naturhiſtor. Hofmuſeums und Privatdozent an der Univerſität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.

Völkernamen. Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Volksbibliotheken (Bücher- und Leſehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeſchke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Volkslied, Das deutſche, ausgewählt und erläutert von Profeſſor Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Volkswirtſchaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Profeſſor an der Univerſität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtſchaftspolitik v. Präſident Dr. R. van der Borght, Berlin. Nr. 177.

Wahrſcheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Profeſſor am Eberhard-Ludwigs-Gymnaſium i. Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.

Waldeck. Landeskunde des Großherzogtums Heſſen, der Provinz Heſſen-Naſſau und des Fürſtentums Waldeck von Profeſſor Dr. Georg Greim in Darmſtadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urſchrift überſetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnaſium in Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide, mit Auswahl aus Minneſang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. an der Oberrealſchule und an der Techn. Hochſch. in Stuttgart. Nr. 23.

Walzwerke, Die. Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holverſcheid, Oberlehrer an der Kgl. Maſchinenbau- und Hüttenſchule in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.

Warenkunde v. Dr. Karl Haſſack, Prof. und Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganiſche Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.

— — II. Teil: Organiſche Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Geſetz z. Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894. Von Reg.-R. J. Neuberg, Mitglied des Kaiſerlichen Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretiſche Phyſik II. T.: Licht u. Wärme. Von Dr. Guſtav Jäger, Prof. an der Techn. Hochſchule Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

Wärmekraftmaſchinen. Die thermodynamiſchen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaſchinen von M. Röttinger, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Wärmelehre, Techniſche, (Thermodynamik) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. M. 54 Fig. Nr. 242.

Wäſcherei. Textil-Induſtrie III: Wäſcherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsſtoffe von Dr. Wilh. Maſſot, Profeſſor an der Preuß. höh. Fachſchule für Textil-Induſtrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Waſſer, Das, und ſeine Verwendung in Induſtrie und Gewerbe v. Dr. Ernſt Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbild. Nr. 261.

Waſſer und Abwäſſer. Ihre Zuſammenſetzung, Beurteilung u. Unterſuchung von Prof. Dr. Emil Haſelhoff, Vorſteher der landwirtſchaftl. Verſuchsſtation i. Marburg i. Heſſen. Nr. 473.

Waſſerinſtallationen. Gas- und Waſſerinſtallationen mit Einſchluß der Abortanlagen von Profeſſor Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmſtadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Waſſerturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. **I:** Allgemeines. Die Freiſtrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.

— — **II:** Die Überdruckturbinen. Die Waſſerkraftanlagen. Mit 102 Abbildungen. Nr. 542.

Waſſerverſorgung der Ortſchaften von Dr.-Ing. Robert Weyrauch, Profeſſor an der Kgl. Techniſchen Hochſchule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.

Weberei. Textil-Induſtrie II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figur. Nr. 185.

Wechſelſtromerzeuger von Ing. Karl Pichelmayer, Prof. an der k. k. Techniſchen Hochſchule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.

Wechſelweſen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Wehrverfaſſung, Deutſche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat im Kriegsminiſterium i. München. Nr. 401.

Werkzeugmaſchinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Profeſſor Herm. Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.

Werkzeugmaſchinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen. **I:** Die Mechanismen der Werkzeugmaſchinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaſchinen. Mit 319 Abbildungen. Nr. 561.

Werkzeugmaſchinen für Metallbearbeitung, Die, II: Die Bohr- und Schleifmaſchinen. Die Hobel-, Shaping- und Stoßmaſchinen. Die Sägen und Scheren. Antrieb und Kraftbedarf. Mit 199 Abbildungen. Nr. 562.

Weſtpreußen. Landeskunde der Provinz Weſtpreußen von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnaſium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textkarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Waſſermann in Hamburg. **I:** Generalklauſel, Reklameauswüchſe, Ausverkaufsweſen, Angeſtelltenbeſtechung. Nr. 339.

— — **II:** Kreditſchädigung, Firmen- und Namenmißbrauch, Verrat von Geheimniſſen, Ausländerſchutz. Nr. 535.

Wirbelloſe Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbelloſen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie an der Univerſität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Neſſeltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — **II:** Krebſe, Spinnentiere, Tauſendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. Mit 97 Figuren. Nr. 440.

Wirkerei. Textil-Induſtrie II: Weberei, Wirkerei, Poſamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figur. Nr. 185.

Wirtſchaftlichen Verbände, Die, v. Dr. Leo Müffelmann i. Roſtock. Nr. 586.

Wirtſchaftspflege. Kommunale Wirtſchaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magiſtratsaſſ. i. Berlin. Nr. 534.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Profeſſor der Staatswiſſenſchaften zu Frankfurt a. M. **I:** Das Wohnungsweſen in der modernen Stadt. Nr. 495.

— — **II:** Die ſtädtiſche Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Wolfram von Eſchenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eſchenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Profeſſor am Königl. Friedrichskolleg. zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutſchen Rechtſchreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutſches,** von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

— **Techniſches,** enthaltend die wichtigſten Ausdrücke des Maſchinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutſch-Engliſch. Nr. 395.

— — II. Teil: Engliſch-Deutſch. Nr. 396.

— — III. Teil: Deutſch-Franzöſ. Nr. 453.

— — IV. Teil: Franzöſ.-Deutſch. Nr. 454.

Württemberg. Württembergiſche Geſchichte v. Dr. Karl Weller, Prof. a. Karlsgymnaſ. i. Stuttgart. Nr. 462.

— **Landeskunde des Königreichs Württemberg** von Dr. K. Haſſert, Profeſſor der Geographie an der Handelshochſchule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenſchule von Profeſſor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometriſches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkſchule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkſchule zu Münſter. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Zeitungsweſen, Das deutſche, v. Dr. Rob. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.

— **Das moderne,** (Syſt. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Zeitungsweſens, Allgemeine Geſchichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.

Zentral-Perſpektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Profeſſor J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkſchule in Münſter i. W. Mit 132 Figuren. Nr. 57.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kaiſerl. Techniſch. Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwiſchendecken u. Deckenbildungen, hölzerne Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbild. Nr. 489.

— — II: Dächer, Wandbekleidungen, Simsſchalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüſte. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Zivilprozeßrecht, Deutſches, von Profeſſor Dr. Wilhelm Kiſch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Zoologie, Geſchichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorſtand des Städtiſchen Chemiſchen Laboratoriums in Stuttgart. Nr. 109.

Zwangsverſteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kretzſchmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.

Zwirnerei. Textil-Induſtrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Weitere Bände ſind in Vorbereitung.

Sammlung Schubert

Sammlung mathematiſcher Lehrbücher,

die, auf wiſſenſchaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfniſſen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leichtfaßliche Darſtellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verſtändlich ſind.

Verzeichnis der bis jetzt erſchienenen Bände:

1 **Elementare Arithmetik und Algebra** von Profeſſor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. 2. Auflage. Geb. M. 2.80.

Elementare Planimetrie von Profeſſor W. Pflieger in Münſter i. E. Geb. M. 4.80.

Ebene und ſphäriſche Trigonometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. 2. Auflage. Geb. M. 2.—.

4 **Elementare Stereometrie** v. Dr. F. Bohnert in Hamburg. 2. Auflage. Geb. M. 2.40.

5 **Niedere Analyſis I. Teil: Kombinatorik, Wahrſcheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantiſche Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. 2. Auflage. Geb. M. 3.60.

6 **Algebra mit Einſchluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Geb. M. 4.40.

7 **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Geb. M. 5.—.

8 **Analytiſche Geometrie der Ebene** von Profeſſor Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. M. 6.—.

9 **Analyt. Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Profeſſor Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. M. 4.—.

10 **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 9.—.

11 **Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 10.—.

12 **Darſtellende Geometrie I. Teil: Elemente der darſtellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Geb. M. 5.—.

Sammlung Schubert

13 **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schleſinger in Frankfurt a. M. 2. Auflage. Geb. M. 8.—.

14 **Praxis der Gleichungen** von Profeſſor Dr. C. Runge in Hannover. Geb. M. 5.20.

15 **Einleitung in die Aſtronomie** v. Dr. A. von Flotow in Potsdam. Mit 1 Tafel. Geb. M. 7.—.

18 **Geſchichte d. Mathematik I. Teil** von Profeſſor Dr. S. Günther in München. Geb. M. 9.60.

19 **Wahrſcheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Geb. M. 8.—.

20 **Verſicherungsmathematik** von Dr. W. Großmann in Wien. Geb. M. 5.—.

23 **Geodäſie** von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam. Geb. M. 8.—.

25 **Analyt. Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Straßburg. Geb. M. 4.40.

27 **Geometriſche Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebſt ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

28 **Geometriſche Transformationen II. Teil: Die quadratiſchen und höheren, birationalen Punkttransformationen** von Profeſſor Dr. Karl Doehlemann in München. Geb. M. 10.—.

29 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil** von Rektor Dr. Viktor Kommerell in Nürtingen und Profeſſor Dr. Karl Kommerell in Stuttgart. 2. Aufl. Geb. M. 4.80.

30 **Elliptiſche Funktionen I. Teil: Theorie der elliptiſchen Funktionen aus analytiſchen Ausdrücken entwickelt** von Profeſſor Dr. Karl Boehm in Heidelberg. Geb. M. 8.60.

31 **Theorie der algebraiſchen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 8.50.

32 **Theorie und Praxis der Reihen** von Profeſſor Dr. C. Runge in Hannover. Geb. M. 7.—.

33 **Allgemeine Formen- und Invariantentheorie I. Teil: Binäre Formen** von Profeſſor Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. Geb. M. 9.60.

34 **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Profeſſor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 12.—.

35 **Mehrdimenſionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Profeſſor Dr. P. H. Schoute in Groningen. Geb. M. 10.—.

36 **Mehrdimenſionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Profeſſor Dr. P. H. Schoute in Groningen. Geb. M. 10.—.

37 **Lehrbuch der Mechanik I: Kinematik** von Profeſſor Dr. Karl Heun in Karlsruhe. Geb. M. 8.—.

38 **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** von Profeſſor E. Grimſehl in Hamburg. Geb. M. 6.—.

39 **Thermodynamik I. Teil** von Profeſſor Dr. W. Voigt in Göttingen. Geb. M. 10.—.

40 **Mathematiſche Optik** von Profeſſor Dr. J. Claſſen in Hamburg. Geb. M. 6.—.

41 **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektroſtatik und Elektrokinetik** von Profeſſor Dr. J. Claſſen in Hamburg. Geb. M. 5.—.

Sammlung Schubert

42 **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus** von Profeſſor Dr. J. Claſſen in Hamburg. Geb. M. 7.—.

43 **Theorie der ebenen algebraiſchen Kurven höh. Ordnung** von Profeſſor Dr. Heinrich Wieleitner in Pirmaſens. Geb. M. 10.—.

44 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Rektor Dr. Viktor Kommerell in Nürtingen u. Prof. Dr. Karl Kommerell in Stuttgart. 2. Aufl. Geb. M. 5.80.

45 **Niedere Analyſis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. 2. Aufl. Geb. M. 3.80.

46 **Thetafunktionen und hyperelliptiſche Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Geb. M. 4.50.

48 **Thermodynamik II. Teil** von Profeſſor Dr. W. Voigt in Göttingen. Geb. M. 10.—.

49 **Nicht-Euklidiſche Geometrie** von Profeſſor Dr. H. Liebmann, München. Geb. M. 6.50.

50 **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Profeſſor an der Bergakademie zu Clausthal. Geb. M. 10.—.

51 **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Geb. M. 8.—.

52 **Theorie der geometriſchen Konſtruktionen** von Prof. Aug. Adler in Wien. Geb. M. 9.—.

53 **Grundlehren d. neueren Zahlentheorie** von Prof. Dr. Paul Bachmann in Weimar. Geb. M. 6.50.

54 **Analytiſche Geometrie auf der Kugel** von Studienrat Profeſſor Dr. Rich. Heger in Dresden. Geb. M. 4.40.

55 **Gruppen- und Subſtitutionentheorie** von Profeſſor Dr. Eugen Netto in Gießen. Geb. M. 5.20.

56 **Spezielle ebene Kurven** von Prof. Dr. Heinrich Wieleitner in Pirmaſens. Geb. M. 12.—.

57 **Komplex-Symbolik** von k. k. Leutnant Roland Weitzenböck in Linz a. D. Geb. M. 4.80.

58 **Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen I. Teil** von Prof. Dr. A. Wangerin in Halle a. S. Geb. M. 6.60.

60 **Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen** von Dr. J. Horn, Profeſſor an der Techniſchen Hochſchule in Darmſtadt. Geb. M. 10.—.

61 **Elliptiſche Funktionen II. Teil: Theorie der elliptiſchen Integrale; Umkehrproblem** von Prof. Dr. Karl Boehm in Heidelberg. Geb. M. 5.—.

62 **Spezielle Flächen und Theorie der Strahlenſyſteme** von Rektor Dr. Viktor Kommerell in Nürtingen und Profeſſor Dr. Karl Kommerell in Stuttgart. Geb. M. 4.80.

63 **Geſchichte der Mathematik. II. Teil:** Von Carteſius bis zur Wende des 18. Jahrhund. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analyſis von Profeſſor Dr. H. Wieleitner in Pirmaſens. Geb. M. 6.50.

G. J. Göſchen'ſche Verlagshandlung G. m. b. H. Berlin W. 35

Das Gefühl

Eine pſychologiſche Unterſuchung

von

Prof. Dr. Theobald Ziegler

Fünfte, durchgeſehene und verbeſſerte Auflage

Broſchiert M. 4.20, gebunden M. 5.20

Das Buch richtet ſich an alle Gebildeten jedes Standes, denn es enthält gemeinverſtändliche Darlegungen allerdings abſtrakter Begriffe, die jedoch ſo glücklich und klar mit dem Leben und den Erfahrungen verbunden ſind, daß ſie dadurch allgemein verſtändlich und anziehend werden und obendrein zum Nachdenken anregen. Das Gefühl von ſeiner erſten Phaſe als „Bewußtſein“ bis in ſeine äußerſten ſittlichen Folgerungen entwickelnd, zeigt der Verfaſſer das Egoiſtiſche der Menſchennatur an manchem unerwarteten Punkte. Sein Werk über das Gefühl bedeutet einen Fortſchritt auf dem Gebiete einer geſunden und unbeſtechlichen Ethik.

GJG
17 85