...schen

...um

Aufgabensammlung
zur
Differentialrechnung

Von

Prof. Dr. Fr. Junker

Mit 46 Figuren im Text

GJG

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
G. m. b. H. Berlin W. 35

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellun … den dürfte.

Ein ausfü … rschienenen
Nummern … Bändchens

Sammlung Göschen

Repetitorium und Aufgabensammlung
zur
Differentialrechnung

Von

Dr. Fr. Junker,
Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule
in Göppingen (Württemberg)

Mit 46 Figuren im Text

Dritte, verbesserte Auflage

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1911

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig

Inhalt.

Seite

I. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale erster Ordnung.

§ 1. Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachsten Funktionen. Beispiele 1—19 7
§ 2. Der erste Differentialquotient. Beispiel 20 8
§ 3. Übungsbeispiele 21—29 10
§ 4. Ableitung zusammengesetzter algebraischer Funktionen von x. Beispiele 30—33 10
§ 5. Übungsbeispiele 34—54 12
§ 6. Ableitung der Exponential- und logarithmischen Funktionen. Beispiele 55—58 13
§ 7. Übungsbeispiele 59—74 16
§ 8. Ableitung der trigonometrischen Funktionen. Beispiele 75—76 17
§ 9. Übungsbeispiele 77—90 19
§ 10. Ableitung der cyklometrischen Funktionen. Beispiele 91—93 20
§ 11. Übungsbeispiele 94—103 22
§ 12. Ableitung der Funktionen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Beispiele 104—104_1 23
§ 13. Übungsbeispiele 105—112 24
§ 14. Ableitungen zusammengesetzter Funktionen von x. Partielle Ableitungen. Beispiele 113—114 25
§ 15. Übungsbeispiele 115—122 26
§ 16. Ableitung nicht entwickelter Funktionen von x. Beispiel 123 26
§ 17. Übungsbeispiele 124—133 27
§ 18. Die logarithmische Differentiation. Beispiele 134—135 . 29
§ 19. Übungsbeispiele 136—141 30

Seite

II. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.

§ 20. Höhere Ableitungen entwickelter Funktionen von x. Beispiel 142 31
§ 21. Übungsbeispiele 143—165 32
§ 22. Höhere Ableitungen nicht entwickelter Funktionen. Beispiele 166—166_1 35
§ 23. Übungsbeispiele 167—173 37
§ 24. Höhere Ableitungen für Funktionen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 38
§ 25. Übungsbeispiele 174—178 39
§ 26. Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen. Beispiel 179 40
§ 27. Übungsbeispiele 180—183 41

III. Abschnitt.

Reihenentwicklung der Funktionen.

§ 28. Die Sätze von Taylor und Maclaurin. Beispiele 184—186 41
§ 29. Übungsbeispiele 187—206 45

IV. Abschnitt.

Unbestimmte Formen.

§ 30. Die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$. Beisp. 207—208 . 50
§ 31. Übungsbeispiele 209—227 51
§ 32. Die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$. Beispiel 228 . . . 53
§ 33. Übungsbeispiele 229—234 53
§ 34. Die unbestimmte Form $\infty - \infty$. Beispiel 235 . . . 54
§ 35. Übungsbeispiele 236—242 54
§ 36. Die unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, 1^∞. Beispiel 243 . 55
§ 37. Übungsbeispiele 244—250 55

V. Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen.

§ 38. Maxima und Minima einer Funktion f (x). Beispiele 251—256 56
§ 39. Übungsbeispiele 257—291 60
§ 40. Maxima und Minima einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen. Beispiel 292 66
§ 41. Übungsbeispiele 293—307 67
§ 42. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. Beisp. 308 70
§ 43. Übungsbeispiele 309—326 71

VI. Abschnitt.

Seite

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebene Geometrie.

§ 44. Tangenten und Normalen einer Kurve. Beispiele 327—331 . . . 76
§ 45. Übungsbeispiele 332—347 82
§ 46. Asymptoten einer Kurve. Beispiele 348—350 . . . 87
§ 47. Übungsbeispiele 351—363 91
§ 48. Konvexität und Konkavität der Kurven. Wendepunkte. Beispiele 364—370 93
§ 49. Übungsbeispiele 371—384 97
§ 50. Singuläre Punkte einer Kurve. Beispiele 385—386 . . 100
§ 51. Übungsbeispiele 387—409 103
§ 52. Krümmungskreis und Evolute. Beispiel 410 . . . 107
§ 53. Übungsbeispiele 411—419 111
§ 54. Die Einhüllende von Kurven- und Flächenscharen. Beispiele 420—422 116
§ 55. Übungsbeispiele 423—437 118
§ 56. Untersuchung einzelner Kurvengleichungen. Beispiele 438—441 122
§ 57. Übungsbeispiele 442—462 127

I. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale erster Ordnung.

§ 1. Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachsten Funktionen.

1. $y = x^n \qquad \frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

2. $y = a x^n \qquad$ „ $= n a x^{n-1}$

3. $y = \frac{a}{x^n} \qquad$ „ $= -\frac{na}{x^{n+1}} = -n a x^{-n-1}$

4. $y = \sqrt{x} \qquad$ „ $= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

5. $y = \sqrt[3]{x} \qquad$ „ $= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

6. $y = \sqrt[4]{x} \qquad$ „ $= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$

7. $y = a\sqrt[n]{x} = a x^{\frac{1}{n}} \qquad$ „ $= \frac{a}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{a}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

8. $y = a\sqrt[n]{x^m} = a x^{\frac{m}{n}} \qquad$ „ $= a\frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}} = \frac{am}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$

9. $y = a^x \qquad$ „ $= a^x \, l\, a$

10. $y = e^x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = e^x$

11. $y = lx$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{x}$

12. $y = \sin x$ $\qquad$ „ $= \cos x$

13. $y = \cos x$ $\qquad$ „ $= -\sin x$

14. $y = \operatorname{tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\cos^2 x}$

15. $y = \operatorname{ctg} x$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{\sin^2 x}$

16. $y = \arcsin x$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $y = \arccos x$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

18. $y = \operatorname{arc\,tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{1 + x^2}$

19. $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{1 + x^2}$.

§ 2. Der erste Differentialquotient.

Ändert sich die Funktion $y = f(x)$ um die Größe $\triangle y$, wenn x in $x + \triangle x$ übergeht, so ist
$$y + \triangle y = f(x + \triangle x), \quad \triangle y = f(x + \triangle x) - f(x),$$
woraus nach Division mit $\triangle x$ folgt:
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Dieser Ausdruck heißt der erste Differenzenquotient, und der Grenzwert, der sich hieraus für $\triangle x = 0$ ergibt:

$$\lim \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$

der erste Differentialquotient und speziell $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$.

Die im Verschwinden begriffenen Größen dx und dy werden als Differentiale und insbesondere dx als das Differential des Arguments x und $dy = df(x) = f'(x)\,dx$ als das Differential der Funktion $y = f(x)$ bezeichnet.

20. Beispiel. Die Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x}$ zu bilden.

Man erhält $y + \triangle y = \sqrt{x + \triangle x}$ und hieraus als Differentialquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}}{\triangle x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \triangle x} + \sqrt{x})}{\triangle x (\sqrt{x + \triangle x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \triangle x} + \sqrt{x}}.$$

Für $\triangle x = 0$ geht derselbe in den Differentialquotienten oder in die Ableitung von $y = \sqrt{x}$ über:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Satz. Die Ableitung einer Konstanten ist stets gleich Null.

Aus $y = a$ folgt $y + \triangle y = a$, $\triangle y = 0$, somit ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Satz. Die Ableitung der Potenz $y = x^n$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1}.$$

§ 3. Übungsbeispiele.

21. $y = c \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

22. $y = a + x \qquad „ = 1$

23. $y = x^3 - x^2 + 2x \qquad „ = 3x^2 - 2x + 2$

24. $y = \frac{a x^5}{5} \qquad „ = a x^4$

25. $y = \frac{a}{x} \qquad „ = -\frac{a}{x^2}$

26. $y = a\sqrt{x} = a x^{\frac{1}{2}} \qquad „ = \frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{a}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

27. $y = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}} \qquad „ = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}}$

28. $y = \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \qquad „ = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} = \frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{n-m}}$

29. $y = x^2\sqrt{x\sqrt{x^3}} \qquad „ = \frac{13}{4} x^2 \sqrt[4]{x}.$

§ 4. Ableitung zusammengesetzter algebraischer Funktionen von x.

a) Satz. Konstante Faktoren dürfen bei der Differentiation vorgesetzt werden.

Für $y = c\,f(x)$ ist $\frac{dy}{dx} = c\,f'(x)$.

b) Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden.

Aus $y = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varphi'(x) + \psi'(x) + \ldots$$

30. Beispiel. $y = x^2 - 3x^4 + 6x^5$ gibt

$$y' = 2x - 12x^3 + 30x^4.$$

c) Die Ableitung des Produkts $y = f(x)\varphi(x)$ ist

$$\frac{dy}{dx} = f\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{df}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = f\varphi' + \varphi f'.$$

31. Beispiel $y = x^5 x^6$ gibt

$$y' = x^5 \cdot 6x^5 + x^6 \cdot 5x^4 = 11x^{10} = \frac{dx^{11}}{dx}.$$

d) Die Ableitung des Quotienten $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi^2}\left\{\varphi\frac{df}{dx} - f\frac{d\varphi}{dx}\right\} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{\varphi f' - f\varphi'}{\varphi^2}.$$

32. Beispiel. $y = \dfrac{x^{10}}{x^2}$ gibt

$$y' = \frac{x^2 \cdot 10x^9 - x^{10} \cdot 2x}{x^4} = 8x^7 = \frac{dx^8}{dx}.$$

e) Ableitung einer Funktion von einer Funktion. Ist $y = f(z)$ eine Funktion von z und $z = \varphi(x)$ eine Funktion von x, so ist offenbar auch y eine Funktion von x; man sagt in diesem Falle, y sei eine Funktion von einer Funktion.

Hat man $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$, so ist

$$\frac{dy}{dz} = f'(z), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi'(x),$$

woraus durch Multiplikation folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x) = f'\{\varphi(x)\}\varphi'(x).$$

33. Beispiel. Die Funktion $y = (a + bx)^n$ abzuleiten.

Setze $y = z^n$, $z = a + bx$, dann ist

$$\frac{dy}{dz} = n z^{n-1}, \quad \frac{dz}{dx} = b \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = n b z^{n-1} = n b (a + b x)^{n-1}.$$

§ 5. Übungsbeispiele.

34. $y = (a + bx + cx^2)^n = z^n \quad \frac{dy}{dx} = n z^{n-1} (b + 2cx)$

35. $y = (a^2 - x^2)^4 \quad$ „ $= -8x(a^2 - x^2)^3$

36. $y = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \quad$ „ $= \frac{4ax}{(a^2 - x^2)^2}$

37. $y = \sqrt{a - x} \quad$ „ $= -\frac{1}{2\sqrt{a-x}}$

38. $y = \sqrt{a + bx} \quad$ „ $= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$

39. $y = \sqrt{2ax} \quad$ „ $= \frac{a}{\sqrt{2ax}} = \sqrt{\frac{a}{2x}}$

40. $y = \sqrt{2ax - x^2} \quad$ „ $= \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$

41. $y = \sqrt{f(x)} \quad$ „ $= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

42. $y = (x + 2)^3 (x - 2)^2 \quad$ „ $= (x+2)^2 (x-2)(5x-2)$

43. $y = \frac{1+x}{1-x} \quad$ „ $= \frac{2}{(1-x)^2}$

44. $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1} \quad$ „ $= \frac{2x^2 - 10x + 2}{(x^2 - 1)^2}$

45. $y = x\sqrt{a+x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a+3x}{2\sqrt{a+x}}$

46. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

47. $y = \dfrac{a}{x}\sqrt{a^2-x^2}$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{a^3}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

48. $y = \dfrac{(a^2+x^2)^3}{(a^3+x^3)^2}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{6a^2x(a-x)(a^2+x^2)^2}{(a^3+x^3)^3}$

49. $y = \dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{a}{\sqrt{x}\,(a-\sqrt{x})^2}$

50. $y = \dfrac{x}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}\,(\sqrt{a^2+x^2}+x)^2}$

51. $y = \sqrt{\dfrac{a+bx}{a-bx}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{ab}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x^2}}$

52. $y = (x-\sqrt{1-x^2})^2$ $\qquad$ „ $= \dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

53. $y = \sqrt{a+x}\,\sqrt[3]{a^2-x^2}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{(a+x)(3a-7x)}{6\sqrt{a+x}\,\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}$

54. $y = ax + \sqrt[3]{(a-x)^2}$ $\qquad$ „ $= a - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{a-x}}$

§ 6. Ableitung der Exponential- und logarithmischen Funktionen.

Unter der Zahl e versteht man die Grenze der Zahlenreihe a_1, a_2, $a_3 \ldots$, wenn a_n den Wert der

Zahl $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bedeutet:

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Die Zahl e ist irrational und näherungsweise angegeben durch:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2{,}7182818\ldots$$

Entwickelt man einen der Ausdrücke $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ oder $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz und setzt man nachträglich in jedem Glied $n = \infty$, so ergibt sich die unendliche Reihe für

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

die für jedes endliche x einen endlichen Wert hat oder konvergent ist.

Die Zahl e bildet die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, die gewöhnlich ohne Angabe der Basis mit l bezeichnet werden. Man schreibt kurz la statt $\overset{e}{\log} a$.

Die Reihe für e^x gibt abgeleitet:

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = e^x.$$

Satz. Die Funktion e^x hat die Eigenschaft, gleich ihrer Ableitung zu sein:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad de^x = e^x\,dx.$$

Hat man $y = e^{\varkappa x}$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{de^{\varkappa x}}{dx} = \varkappa e^{\varkappa x}$. Setzt man hierin $e^{\varkappa} = a$, so ist $la = \varkappa le = \varkappa$; für die Ableitung der Funktion $y = a^x$ ergibt sich daher der Ausdruck:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = \varkappa e^{\varkappa x} = a^x \cdot la.$$

Satz. Die Ableitungen der Exponentialfunktionen sind:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \qquad de^x = e^x dx,$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x la, \quad da^x = a^x la\, dx.$$

55. Beispiel. $y = x^3 e^x + x^2 e^x$ gibt

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 e^x + 3x^2 e^x) + (x^2 e^x + 2x e^x)$$
$$= x^3 e^x + 4x^2 e^x + 2x e^x.$$

56. Beispiel. $y = a^{\sqrt{x}}$.

Setze $y = a^z$, $z = \sqrt{x}$, so folgt $\frac{dy}{dz} = a^z la$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, somit $\frac{dy}{dx} = a^{\sqrt{x}}\, la \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Aus $y = lx$ folgt durch Potenzieren $e^y = x$ und hieraus durch Differentiieren $e^y dy = dx$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

Ebenso ergibt sich aus $y = \overset{a}{\log} x$, $a^y = x$, $da^y = a^y la\, dy = dx$, woraus folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y la} = \frac{1}{x la}$.

Satz. Die Ableitungen der logarithmischen Funktionen sind:

$$\frac{d\,l\,x}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad d\,l\,x = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{d\overset{a}{\log} x}{dx} = \frac{1}{x\,l\,a}, \quad d\overset{a}{\log} x = \frac{dx}{x\,l\,a}.$$

57. Beispiel. $y = l(a^2 - x^2) = l(a+x) + l(a-x)$ gibt $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{a+x} - \dfrac{1}{a-x} = -\dfrac{2x}{a^2-x^2}$.

58. Beispiel. $y = x\overset{a}{\log} x$ gibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{l\,a} + \overset{a}{\log} x.$$

§ 7. Übungsbeispiele.

59. $y = e^{\alpha x + \beta}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \alpha\, e^{\alpha x + \beta}$

60. $y = (e^x)^5$ $\qquad$ „ $= 5\, e^{5x}$

61. $y = x^p e^{qx}$ $\qquad$ „ $= x^{p-1} e^{qx} (p + qx)$

62. $y = \dfrac{x^p}{e^x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{x^{p-1}}{e^x}(p - x)$

63. $y = \dfrac{1}{e^x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{x^3}{e^x}$

64. $y = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $\qquad$ „ $= e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}$

65. $y = 2x + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ $\qquad$ „ $= (e^x + e^{-x})^2$

66. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$

67. $y = a^{mx}$ $\qquad$ „ $= m\,l\,a\, a^{mx}$

68. $y = \frac{a^x}{x^a}$ $\qquad$ „ $= \frac{a^x}{x^{a+1}}(x\,l\,a - a)$

69. $y = l\,f(x)$ $\qquad$ „ $= \frac{f'(x)}{f(x)}$

70. $y = l\frac{a+x}{a-x} = l(a+x) - l(a-x), \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{a^2 - x^2}$

71. $y = \frac{1}{2ai} l \frac{x - ai}{x + ai}, i = \sqrt{-1}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 + x^2}$

72. $y = (1-x)\,l(1-x)$ $\qquad$ „ $= -1 - l(1-x)$

73. $y = 10\sqrt{x} - 20\,l(2 + \sqrt{x})$ $\qquad$ „ $= \frac{5}{2 + \sqrt{x}}$

74. $y = 3\,l(x-5) - 2\,l(x+1)$ $\qquad$ „ $= \frac{x + 13}{x^2 - 4x - 5}$.

§ 8. Ableitung der trigonometrischen Funktionen.

Bedeutet in Fig. 1 $BA = x$ einen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Kreisbogen vom Radius 1, so ist

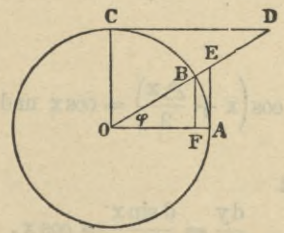

Fig. 1.

$OF = \cos x, \quad BF = \sin x, \quad AE = \operatorname{tg} x, \quad CD = \operatorname{ctg} x.$
Die Vergleichung der Dreiecke OBF und OEA mit dem Sektor OBA gibt:

$$\sin x \cdot \cos x < x < \operatorname{tg} x,$$

oder, da $\sin x > 0$ ist,

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Mit unendlich abnehmendem x nähern sich die beiden äußeren Seiten dieser Ungleichung gleichzeitig der Grenze 1.

Satz. Der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ nähert sich für unendlich kleines x der Grenze 1:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

75. Beispiel. Die Ableitung der Funktion $y = \sin x$ zu bilden.

Es ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sin(x + \triangle x) - \sin x}{\triangle x} = \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}.$$

Da nun $\lim \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = \cos x$ und $\lim \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} = 1$

wird, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Allgemein ergeben sich als Ableitungen der trigonometrischen Funktionen, bzw. als deren Differentiale die Ausdrücke:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \qquad d \sin x = \cos x \, dx$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \qquad d \cos x = -\sin x \, dx$$

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

76. Beispiel. Die Funktionen $y = l \sin x$ und $y = l \cos x$ abzuleiten.

Setze $y = l z$, $z = \sin x$, so ist

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \cos x, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Ebenso ist für $y = l \cos x$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$

§ 9. Übungsbeispiele.

77. $y = \sin(\alpha x + \beta)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$

78. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$ $\qquad$ „ $= \cos^2 x$

79. $y = e^{\cos x}$ $\qquad$ „ $= -\sin x \, e^{\cos x}$

80. $y = a^{\sin x}$ $\qquad$ „ $= \cos x \, la \, a^{\sin x}$

81. $y = \operatorname{tg}(\alpha x + \beta)$ $\qquad$ „ $= \frac{\alpha}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$

82. $y = \frac{a \sin x}{1 + \cos x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{1 + \cos x}$

83. $y = \sin x \sin(x - \alpha)$ $\qquad$ „ $= \sin(2x - \alpha)$

84. $y = l \sin(px + q)$ $\qquad$ „ $= p \operatorname{ctg}(px + q)$

85. $y = l \operatorname{tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{2}{\sin 2x}$

86. $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - l \cos x$ „ $= \operatorname{tg}^5 x$

87. $y = l \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ $\qquad$ „ $= \frac{\cos^3 x}{\sin x}$

88. $y = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sin^3 x}$

89. $y = 15 l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\sin^4 x}(8 \cos^4 x - 25 \cos^2 x + 15)$,

$$\frac{dy}{dx} = 8 \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x}$$

90. $y = l \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^5 x}{\sin x}$.

§ 10. Ableitung der cyklometrischen Funktionen.

91. Beispiel. Die Funktion $y = \arcsin x$ abzuleiten.

Aus $y = \arcsin x$ folgt durch Umkehrung $x = \sin y$ und hieraus durch Differentiation $dx = \cos y \, dy$, woraus sich ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Allgemein erhält man für die Ableitungen der cyklometrischen Funktionen bzw. deren Differentiale die Grundformeln:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{d \operatorname{arc\,ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad d \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

92. Beispiel. Die Ableitung der Funktion

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ zu bilden.}$$

Setze $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = z$, dann folgt $1 - x = z^2(1+x)$

$$-dx = 2z\,dz\,(1+x) + z^2\,dx, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1+z^2}{2z(1+x)}$$

$$= -\frac{1}{z(1+x)^2}$$

$y = \arcsin z, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{2x}}$, somit ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x-2x^2}}.$$

93. Beispiel. $y = \operatorname{arc}(\cos = p \operatorname{tg} x)$.

Es folgt hieraus $p \operatorname{tg} x = \cos y$, somit durch Ableitung nach x

$$\frac{p}{\cos^2 x} = -\sin y \frac{dy}{dx}, \text{ woraus sich ergibt:}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{\cos^2 x \sin y} = -\frac{p}{\cos^2 x \sqrt{1 - p^2 \operatorname{tg}^2 x}}.$$

§ 11. Übungsbeispiele.

94. $y = \operatorname{arc} \sin \alpha x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 x^2}}$

95. $y = \operatorname{arc} \cos \frac{a}{x} \qquad$ „ $= \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$

96. $y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad$ „ $= \frac{a}{a^2 + x^2}$

97. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \qquad$ „ $= -\frac{1}{1 + x^2}$

98. $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad$ „ $= -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

99. $y = a \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \qquad$ „ $= \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$

100. $y = \operatorname{arc} (\sin = m \cos x) \qquad$ „ $= -\frac{m \sin x}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 x}}$

101. $y = \operatorname{arc} (\operatorname{tg} = m \operatorname{ctg} x) \qquad$ „ $= -\frac{m}{\sin^2 x + m^2 \cos^2 x}$

102. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} \qquad$ „ $= \frac{1}{a^2 + x^2}.$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Formel 71

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} = \frac{1}{2i} l \frac{x - ai}{x + ai}, \quad i = \sqrt{-1},$$

eine Beziehung, die zur Umformung von Integralen dienen kann.

103. $y = 2\sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} l (x^2 + 3), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 6}{x^2 + 3}.$

§ 12. Ableitung der Funktionen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Sind x und y in Funktion eines Parameters t (oder λ, μ, ...) ausgedrückt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so ist

$$\frac{dx}{dt} = x' = \varphi'(t), \quad \frac{dy}{dt} = y' = \psi'(t) \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \psi' : \varphi'.$$

104. Beispiel. Die Ellipse läßt sich darstellen durch die beiden Gleichungen:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Durch Ableitung nach t folgt hieraus:

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t = -\frac{ay}{b}, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t = \frac{bx}{a};$$

daher ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

104_1. Epicykloide:

$$\begin{cases} x = (r + a) \cos t - r \cos\left(\dfrac{r + a}{r}\right) t, \\[2ex] y = (r + a) \sin t - r \sin\left(\dfrac{r + a}{r}\right) t. \end{cases}$$

Man erhält hieraus:

$$\frac{dx}{dt} = (r + a) \left\{ \sin\left(\frac{r + a}{r}\right) t - \sin t \right\}$$

$$= 2(r + a) \cos\left(\frac{2r + a}{2r}\right) t \sin \frac{a}{2r} t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -(r+a)\left\{\cos\left(\frac{r+a}{r}\right)t - \cos t\right\}$$
$$= 2(r+a)\sin\left(\frac{2r+a}{2r}\right)t \sin\frac{a}{2r}t,$$
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{2r+a}{2r}\right)t.$$

§ 13. Übungsbeispiele.

105. $\begin{cases} x = a(t+1), \\ y = a t^3 \end{cases} \quad \frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 3at^2, \quad \frac{dy}{dx} = 3t^2.$

106. $\begin{cases} x = \frac{a}{2}t^2 \\ y = a t^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \frac{dx}{dt} = at, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}a t^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}}.$

107. $\begin{cases} x = \dfrac{a-t}{a+t} \\ y = \dfrac{t}{a+t} \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}.$

108. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad " = -3\sin t\cos t.$

109. Cykloide:

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad " = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$

109_1. Allgemeinere Cykloide:

$\begin{cases} x = at - b\sin t \\ y = a - b\cos t \end{cases} \qquad " = \frac{b\sin t}{a - b\cos t}.$

110. $\begin{cases} x = a(1 - \cos t) \\ y = at \end{cases} \qquad " = \frac{1}{\sin t}.$

111. Kettenlinie:

$$\begin{cases} x = a\,l\,t \\ y = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

112. Astroide:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \qquad \text{,,} = -\operatorname{tg} t = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

§ 14. Ableitungen zusammengesetzter Funktionen von x. Partielle Ableitungen.

a) Sind u und v Funktionen von x, so heißt $y = f(u, v)$ eine zusammengesetzte Funktion von x, deren Ableitung nach x angegeben ist durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{\partial f}{\partial u}u' + \frac{\partial f}{\partial v}v'.$$

Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial u}$, bzw. $\frac{\partial f}{\partial v}$ heißen die partiellen Ableitungen von f nach u, bzw. von f nach v. Diese werden gebildet, indem man in f das eine Mal nur u als veränderlich und v als konstant, das andere Mal v als veränderlich und u als konstant ansieht.

113. Beispiel. $y = f(uv) = \frac{u^n}{v^n}$.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = n\frac{u^{n-1}}{v^n}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -n\frac{u^n}{v^{n+1}},$$

$$y' = n\frac{u^{n-1}}{v^{n+1}}\left(v u' - u v'\right).$$

b) Enthält f mehrere Veränderliche u, v, w, ..., die selbst wieder Funktionen von x sind, ist also

$$y = f(u, v, w, \ldots), \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \cdots$$

114. Beispiel. $y = u\,v\,w,$

$$y' = v\,w\,u' + w\,u\,v' + u\,v\,w'.$$

§ 15. Übungsbeispiele.

115. Ableitung einer Summe: $y = u + v$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \qquad y' = u' + v'.$$

116. Ableitung eines Produkts: $y = u\,v$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u, \qquad y' = v\,u' + u\,v'.$$

117. Ableitung eines Quotienten: $y = \frac{u}{v}$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \qquad y' = \frac{1}{v^2}\left\{v\,u' - u\,v'\right\}$$

118. $y = l\frac{u}{v} = lu - lv, \qquad y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$

119. $y = l\frac{\sin u}{\sin v} = l\sin u - l\sin v, \quad y' = u'\,\mathrm{ctg}\,u - v'\,\mathrm{ctg}\,v.$

120. $y = u^v \qquad y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v\,l\,u\,v'.$

121. $y = \sin u^{\sin v}, \quad y' = y\left\{\cos v\,l\sin u \cdot v' + \sin v\,\mathrm{ctg}\,u \cdot u'\right\}.$

122. $y = u^v\,v^u \qquad y' = y\left\{\frac{v}{u}u' + l\,v\,u' + \frac{u}{v}v' + l\,u\,v'\right\}.$

§ 16. Ableitung nicht entwickelter Funktionen von x.

Wenn die Veränderlichen x und y in nicht entwickelter Form durch die Gleichung $f(x\,y) = 0$ miteinander verbunden sind, dann berechnet sich die Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad \text{oder aus} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0\,.$$

Man erhält $$y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Erklärung. Eine Funktion $f(xy)$ differentiieren heißt die Operation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$ auf dieselbe anwenden. Dies geschieht am einfachsten, indem man jedes Glied derselben nach der obigen Formel behandelt.

123. Beispiel.

$$f(xy) = x^2 - 3xy + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 2y - 3,$$

$$y' = \frac{2x - 3y - 2}{3x - 2y + 3}.$$

Indem man gliedweise differentiiert, erhält man $2x - 3y - 3xy' + 2yy' - 2 - 3y' = 0$, also auch

$$y' = \frac{2x - 3y - 2}{3x - 2y + 3}.$$

§ 17. Übungsbeispiele.

124. $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

125. $f = x^2 + y^2 - x^3, \ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3x^2, \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y,$

$$y' = \frac{3x - 2}{2\sqrt{x-1}}.$$

126. $f = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2), \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2),$$

$$y' = -\frac{x(2x^2 + 2y^2 - a^2)}{y(2x^2 + 2y^2 + a^2)}.$$

127. $f = x^2 - a^y = 0, \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -a^y \mathrm{l}a = -x^2 \mathrm{l}a,$

$$y' = \frac{2}{x \,\mathrm{l}a}.$$

Die folgenden Gleichungen sollen nach x differentiiert und alsdann nach y' aufgelöst werden.

128. $f = (x + y)^3 - axy = 0,$

$$3(x + y)^2 + 3(x + y)^2 y' - ay - axy' = 0,$$

$$y' = -\frac{3(x + y)^2 - ay}{3(x + y)^2 - ax} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{2x - y}{2y - x}.$$

129. $f = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \ \dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2yy'}{b^2} = 0, \ y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}.$

130. $f = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \quad \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y' = 0,$

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

131. $$f = a^2 y^2 - (a - x)(a + x)^3 = 0,$$
$$2a^2 y y' + (a + x)^3 - 3(a - x)(a + x)^2 = 0,$$
$$y' = \frac{a - 2x}{a}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}.$$

132. $$f = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$
$$2(x - a) + 2(y - b)y' = 0, \quad y' = -\frac{x - a}{y - b}.$$

133. $$f = r^2 - a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi = 0,$$
$$2rr' + 2a^2\cos\varphi\sin\varphi - 2b^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$r' = -\frac{1}{r}(a^2 - b^2)\cos\varphi\sin\varphi = -\frac{1}{2r}(a^2 - b^2)\sin 2\varphi.$$

§ 18. Die logarithmische Differentiation.

Die logarithmische Differentiation wird mit Vorteil angewendet, wenn es sich darum handelt, den Differentialquotienten von Funktionen folgender Art zu bilden:

a) $y = u^v$. Indem man beiderseits logarithmiert, folgt $ly = v\,lu$ und hieraus durch Differentiation nach x

$$\frac{y'}{y} = \frac{v}{u}u' + v'lu, \text{ woraus sich ergibt}$$

$$y' = y\left(\frac{v}{u}u' + v'lu\right) = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v'lu\right).$$

134. Beispiel. Aus $y = x^x$ folgt $ly = x\,lx$ und hieraus $\dfrac{y'}{y} = lx + 1, \quad y' = x^x(lx + 1).$

b) $y = uvw\ldots$ Indem man beiderseits logarithmiert, folgt

$$ly = lu + lv + lw + \ldots$$

Diese Gleichung abgeleitet, gibt

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots, \quad \text{woraus folgt}$$

$$y' = y\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots\right).$$

135. Beispiel. $y = x(x-a)\sqrt{x-b}$,

$$l y = l x + l(x-a) + \tfrac{1}{2} l(x-b),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{2(x-b)},$$

$$y' = \frac{5x^2 - 3ax - 4bx + 2ab}{2\sqrt{x-b}}.$$

§ 19. Übungsbeispiele.

136. $y = \sqrt[x]{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - lx).$

137. $y = (a + bx)^x$,

$$\frac{dy}{dx} = (a+bx)^x l(a+bx) + bx(a+bx)^{x-1}.$$

138. $y = (\sin x)^x, \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x)^x \{l \sin x + x \operatorname{ctg} x\}.$

139. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{(1+x)^2}\left\{1 + l\frac{1-x}{1+x}\right\}.$

140. $y = \left(x^{x-1}\right)^{x-2}$,

$$\frac{dy}{dx} = y\left\{(2x-3)lx + \frac{1}{x}(x^2 - 3x + 2)\right\}.$$

141. $$y = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$ly = \tfrac{1}{3}lx + \tfrac{2}{3}l(x-1) + \tfrac{1}{2}l(x+1),$$

$$y' = y\left\{\frac{1}{3x} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}\right\} = y\frac{9x^2+x-2}{6x^3-6x}.$$

II. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.

§ 20. Höhere Ableitungen entwickelter Funktionen von x.

a) Wird die Funktion $y = f(x)$ einmal, zweimal, dreimal, ..., n-mal nach x abgeleitet, so erhält man den ersten, zweiten, dritten, ..., n^{ten} Differentialquotienten oder auch die erste, zweite, dritte, ..., n^{te} Ableitung von f(x), welche bezeichnet werden mit

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x), \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x),$$

$$\frac{dy''}{dx} = \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x), \ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

142. Beispiel. Die drei ersten Ableitungen der Funktion $y = \frac{x^4}{e^x}$ zu bilden.

Man erhält

$$y' = \frac{1}{e^x}(4x^3 - x^4), \quad y'' = \frac{1}{e^x}(12x^2 - 8x^3 + x^4),$$

$$y''' = \frac{1}{e^x}(24x - 36x^2 + 12x^3 - x^4).$$

b) Satz. Die n^{te} Ableitung der Potenz $y = x^n$ ist

$$y^{(n)} = \frac{d^n(x^n)}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

c) Satz. Die n^{te} Ableitung der Funktion $y = lx$ ist

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

d) Satz. Die n^{ten} Ableitungen der Funktionen

$$y = a^x \quad \text{bezw.} \quad y = e^x$$

sind

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = a^x(la)^n \quad \text{bezw.} \quad \frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x.$$

e) Satz. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen $y = \cos x$, $y = \sin x$ sind periodisch. Man erhält allgemein

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

f) Satz von Leibniz. Die n^{te} Ableitung des Produkts $y = uv$ ist

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

§ 21. Übungsbeispiele.

Die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen zu berechnen.

143. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, $y' = 6x^2 - 18x + 12$,

$$y'' = 12x - 18.$$

144. $y = 3x + \frac{1}{x^3}, \quad y' = 3 - \frac{3}{x^4}, \quad y'' = \frac{12}{x^5}.$

145. $y = x^4 + \frac{8}{3} a x^3 - 2a^2x^2 - 8a^3x,$

$y' = 4x^3 + 8ax^2 - 4a^2x - 8a^3, \; y'' = 12x^2 + 16ax - 4a^2.$

146. $y = (x + a)\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \frac{a^2 - ax - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$

$$y'' = \frac{2x^3 - 3a^2x - a^3}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

147. $y = xe^x, \quad y' = xe^x + e^x, \quad y'' = xe^x + 2e^x.$

148. $y = \frac{x^2}{a^x}, \quad y'' = \frac{2}{a^x} - \frac{4x\,la}{a^x} + \frac{x^2(la)^2}{a^x}$ oder

$$y'' = y(la)^2 - 4y\frac{la}{x} + \frac{2y}{x^2}.$$

149. $y = \frac{lx}{x}, \quad y' = \frac{1}{x^2}\left(1 - lx\right), \quad y'' = \frac{1}{x^3}\left(2\,lx - 3\right).$

150. $y = x^x, \; y' = y(1 + lx), \; y'' = x^x(1 + lx)^2 + x^{x-1}.$

Nur die zweite Ableitung folgender Funktionen zu bilden.

151. $y = \sqrt{2px}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2xy}.$

152. $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{4}\left\{(a + x)^{-\frac{3}{2}} + (a - x)^{-\frac{3}{2}}\right\}.$

153. $y = xa^x$ $\qquad$ „ $= a^x la\{2 + x\,la\}.$

154. $y = x\,l x$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x}$.

155. $y = l\,\mathrm{tg}\,x$ $\qquad$ „ $= \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

156. $y = \arc\sin x$ $\qquad$ „ $= \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

157. $y = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{a}{x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{2ax}{(a^2+x^2)^2}$.

158. $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ „ $= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Die dritte Ableitung folgender Funktionen zu bilden.

159. $y = x^7$ $\qquad \dfrac{d^3y}{dx^3} = 7 \cdot 6 \cdot 5\,x^4$.

160. $y = \sqrt{x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{1 \cdot 3}{2^3} x^{-\frac{5}{2}}$.

161. $y = l(1-x)$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Die n^{te} Ableitung folgender Funktionen zu berechnen.

162. $y = x e^x$ $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = x e^x + n e^x$.

163. $y = l(x-a)$ „ $= (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(x-a)^n}$.

164. $y = a^x$ $\qquad$ „ $= a^x (la)^n$.

165. $y = \dfrac{x}{a+bx}$ „ $= (-1)^{n-1} n!\, b^{n-1} \dfrac{a}{(a+bx)^{n+1}}$.

§ 22. Höhere Ableitungen nicht entwickelter Funktionen.

a) Sind in $f(xy) = 0$ die Veränderlichen x und y in nicht entwickelter Form miteinander verbunden, so gewinnt man nach § 16 die erste Ableitung y' aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \quad y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

wo die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ebenfalls Funktionen von x und y sind. Diese können deshalb wiederum nach x und y partiell abgeleitet werden und man gelangt auf diese Weise zu den partiellen Ableitungen 2ter Ordnung

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{usw.}$$

Für die einfachen Funktionen gilt hierbei der

Satz. Wird eine Funktion $f(xy)$ mehrfach nach x und y partiell abgeleitet, so ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

Es ist demnach beispielsweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}, \quad \text{usw.}$$

166. Beispiel. $f(xy) = x^5 - 6x^3y^2 - y^4x$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 18x^2y^2 - y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12x^3y - 4y^3x.$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -36\,x^2 y - 4\,y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = -72\,x\,y = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}.$$

b) Wird die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,y' = 0$$

weiter differentiiert unter der Annahme, daß **y′** nur eine Funktion von **x** allein, oder daß

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{d\,y'}{d\,x} = \frac{d^2 y}{d\,x^2} = y'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 0 \text{ ist,}$$

so gelangt man zu folgendem Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'' = 0,$$

aus dem sich nach Substitution von $y' = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ für y'' der Wert ergibt

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2} = y'' = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Durch fortgesetzte Differentiation des vorstehenden Ausdrucks erhält man y''', $y^{(IV)}$, ..., wobei wieder zu beachten ist, daß y', y'', y''', ... nur als Funktionen von **x** allein anzusehen sind und daß demgemäß

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial y''}{\partial y} = \frac{\partial y'''}{\partial y} = \ldots = 0 \text{ ist.}$$

166_1. Beispiel. Aus $f=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ folgt

$$(x-a)+(y-b)y' = 0 \quad \text{und hieraus}$$
$$1+y'^2+(y-b)y''=0$$
$$3y'y''+(y-b)y'''=0$$

$$y' = -\frac{x-a}{y-b},\quad y'' = -\frac{r^2}{(y-b)^3},\quad y''' = -3r^2\frac{x-a}{(y-b)^5}.$$

§ 23. Übungsbeispiele.

Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von folgenden Funktionen zu bilden.

167. $f=x^2+xy-2y^2-4x-2y=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-4,$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x-4y-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4.$$

168. $f=x^3+y^3-3xy-x=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y-1,$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

169. $f=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}.$$

170. $f = y - x e^y + x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -e^y + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x e^y$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = -e^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x e^y.$$

Die folgenden Gleichungen zweimal zu differentiieren und daraus y' und y'' zu berechnen.

171. $f = y^2 - 2px = 0$, $2yy' - 2p = 0$ oder $yy' - p = 0$,

$$y'^2 + yy'' = 0; \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

172. $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$ oder

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad \frac{1}{a^2} + \frac{y'^2 + yy''}{b^2} = 0, \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

173. $f = x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $2x + 2yy' = 0$ oder

$$x + yy' = 0, \quad 1 + y'^2 + yy'' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y},$$

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

§ 24. Höhere Ableitungen für Funktionen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Nach § 13 ist die erste Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \psi' : \varphi'.$$

Wird auf beiden Seiten nach x weiter differentiiert, so entsteht

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\psi':\varphi')}{dx}=\frac{d(\psi':\varphi')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{\varphi'^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{dt}{dx}=1:\frac{dx}{dt}=1:\varphi' \text{ ist, } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{\varphi'^3}.$$

§ 25. Übungsbeispiele.

174. Ellipse: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$,

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=b\cos t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-b\sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ab\sin^2t+ab\cos^2t}{-a^3\sin^3t}=-\frac{b}{a^2\sin^3t}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

175. Cykloide: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$,

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=a\sin t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

176. Epicykloide:

$$x=c\cos t-r\cos\frac{c}{r}t,\quad y=c\sin t-r\sin\frac{c}{r}t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{c+r}{2r}t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{c+r}{4cr} \cdot \frac{1}{\cos^3 \frac{c+r}{2r} t \cdot \sin \frac{c-r}{2r} t}.$$

177. $x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t,$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t \cos^3 t}.$$

178. $x = \sin 2t, \quad y = \cos^2 t,$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\cos t \sin t = -\sin 2t,$$

$$y' = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -4 \sin 2t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\cos 2t, \quad y'' = -\frac{1}{2\cos^3 2t}.$$

§ 26. Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen.

Ist $z = f(xy)$ eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y, so heißt

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

das totale Differential derselben und ebenso

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

das totale Differential zweiter Ordnung.

Allgemein stellt

$$d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(dx)^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}(dx)^{n-1} dy$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}(dx)^{n-2}(dy)^2 + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(dy)^n$$

das totale Differential der n^{ten} Ordnung der Funktion $z = f(xy)$ dar.

179. Beispiel. $z = x^2 + y^2$,

$$dz = 2x\,dx + 2y\,dy,$$
$$d^2z = 2(dx)^2 + 2(dy)^2.$$

§ 27. Übungsbeispiele.

Von nachstehenden Funktionen die totalen Differentiale erster und zweiter Ordnung zu bilden.

180. $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4$,

$$dz = (2x-4)\,dx + (2y-6)\,dy, \quad d^2z = 2dx^2 + dy^2.$$

181. $z = x^3 + y^3 + axy$,

$$dz = (3x^2 + ay)\,dx + (3y^2 + ax)\,dy,$$
$$d^2z = 6x\,dx^2 + 2a\,dx\,dy + 6y\,dy^2.$$

182. $z = \sin x \sin y$,

$$dz = \cos x \sin y\,dx + \sin x \cos y\,dy,$$
$$d^2z = -\sin x \sin y\,(dx)^2 + 2\cos x \cos y\,dx\,dy - \sin x \sin y\,(dy)^2.$$

183. Das totale Differential dritter Ordnung der Funktion $z = x^2 y(a - x - y)$ zu ermitteln.

$$d^3z = -6y\,dx^3 + 3(2a - 6x - 4y)\,dx^2dy - 12x\,dx\,dy^2.$$

III. Abschnitt.

Reihenentwicklung der Funktionen.

---

§ 28. Die Sätze von Taylor und Maclaurin.

a) Der Taylorsche Lehrsatz. Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Gebiet von x bis $x + h$ eindeutig, endlich und stetig ist, so gilt die

Reihenentwicklung

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + Rn,$$

welche als die Taylorsche Reihe bezeichnet wird. Das Restglied Rn erhält hierbei die von Cauchy herrührende Gestalt

$$Rn = h^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x + \vartheta h), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

oder auch nach Lagrange die folgende:

$$Rn = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \vartheta' h), \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Die Taylorsche Reihe konvergiert, wenn

$$\lim_{n=\infty} Rn = 0 \text{ ist.}$$

Die Reihe erhält in diesem Fall den Summenwert

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

184. Beispiel. Die Funktion $f(x+h) = e^{x+h}$ in eine Reihe zu entwickeln. Man erhält

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

$$f(x+h) = e^{x+h} = e^x + \frac{h}{1!} e^x + \frac{h^2}{2!} e^x + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} e^x + Rn.$$

Das Restglied $Rn = \frac{h^n}{n!} e^{x+\vartheta h}$ verschwindet für $n = \infty$, da für jedes endliche h die ersten Faktoren des Produkts

$$\frac{h^n}{n!} = \frac{h}{n} \cdot \frac{h}{n-1} \cdot \frac{h}{n-2} \cdots \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{1}$$

sämtlich gleich Null werden. Daher gilt die Reihenentwicklung

$$f(x+h) = e^x \left(1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \ldots\right) = e^x \cdot e^h = e^{x+h}.$$

b) Der Maclaurinsche Lehrsatz. Ist die Funktion $f(x)$ samt ihren n ersten Ableitungen in dem Gebiet von $x = 0$ bis $x = x$ (die Grenze 0 mit eingeschlossen) eindeutig und stetig, so gilt die Entwicklung

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + Rn,$$

welche die „Maclaurinsche Reihe“ heißt. Das Restglied erhält hierin nach Cauchy die Gestalt

$$Rn = x^n \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\vartheta x), \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

oder auch nach Lagrange die folgende:

$$Rn = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta' x), \quad 0 \leqq \vartheta' \leqq 1.$$

Die Maclaurinsche Reihe konvergiert, wenn

$$\lim_{n=\infty} Rn = 0 \text{ ist.}$$

Sie hat in diesem Fall den Summenwert

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

185. Beispiel. $f(x) = \sin x$. Man erhält

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x, \ldots;\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1,$$
$$f''(0) = 0,\quad f'''(0) = -1, \ldots$$

Da die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ für jeden Wert von 0 bis x eindeutig und stetig bleiben und sich das Restglied

$$R_{2n} = \pm \sin \vartheta x \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\text{bzw. } R_{2n+1} = \pm \cos \vartheta x \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

für $n = \infty$ der Grenze 0 nähert, so gilt nach Maclaurin die unendliche Reihe

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

woraus durch Differentiation nach x die weitere folgt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

186. Beispiel. Die Funktion e^x nach Potenzen von x zu entwickeln.

Es ist $f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$, woraus für $x = 0$ folgt $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 1$, daher ist nach Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + Rn,$$

wo Rn nach Lagrange auf die Form gebracht werden kann:

$$Rn = \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n-1} \cdot \frac{x}{n-2} \cdots \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{1} e^{\vartheta x}.$$

Da hierin für jeden endlichen Wert von x die ersten Faktoren rechts sich um so mehr der Grenze Null nähern, je größer n wird, so ist für jeden Wert von $x R n = 0$, daher gilt die Entwicklung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Setzt man $a^x = (e^{la})^x = e^{xla}$,
so geht obige Formel über in die Reihe

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1!} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \dots,$$

die ebenfalls für jeden endlichen Wert von x konvergiert.

§ 29. Übungsbeispiele.

187. Die Funktion $f(x) = (a + x)^k$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Man erhält

$$f'(x) = k(a + x)^{k-1},\ f''(x) = k(k-1)(a + x)^{k-2}, \dots$$

$$f(0) = a^k,\ f'(0) = k\,a^{k-1},\ f''(0) = k(k-1)\,a^{k-2}, \dots$$

Es ist daher nach Maclaurin

$$(a + x)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} x + \binom{k}{2} a^{k-2} x^2 + \dots$$

Diese Reihe ist als „Binomialreihe" bekannt.

188. $f(x) = \sqrt{1 + x}$ zu entwickeln.

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x}{1} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3} \cdot \frac{x^3}{3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \frac{x^4}{4!} + \dots$$

189. Nachzuweisen, daß die Reihenentwicklung gilt:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{x}{1!} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{x^2}{2!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\frac{x^4}{4!} - \dots$$

190. Wie lassen sich hieraus die entsprechenden Entwicklungen für $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ und $(a-x)^{-\frac{1}{2}}$ herleiten?

191. Die Funktion $f(x) = (1+e^x)^2$ in eine Potenzreihe zu entwickeln.

$$(1+e^x)^2 = 4 + (2+2)\frac{x}{1!} + (2+2^2)\frac{x^2}{2!} + (2+2^3)\frac{x^3}{3!} + \dots + Rn,$$

wo $Rn = \frac{x^n}{n!}(2\,e^{\vartheta x} + 2^n e^{2\vartheta x})$ ist, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

Mit unendlich wachsendem n wird $Rn = 0$, welchen Wert auch x annehmen mag. Die Reihe konvergiert also für jeden endlichen Wert von x.

192. Die Reihe für

$$f(x) = e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!} + \dots + Rn.$$

$$Rn = 2\frac{x^{2n}}{(2n)!}(e^{\vartheta x} + e^{-\vartheta x}).$$

Auch hier sieht man, daß $Rn = 0$ für $n = \infty$.

193. Welche Reihe folgt hieraus durch beiderseitige Ableitung nach x?

$$e^x - e^{-x} = 2\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + \dots + Rn,$$

wo $Rn = 2\frac{x^n}{n!}(e^{\vartheta x} - e^{-\vartheta x})$ ist.

194. Wenn $f(x+1) = 3x^2 - 4x$ ist, soll $f(x-2)$ gebildet werden.

Setze $x + 1 = y$, so ist $x - 2 = y - 3$ und

$$f(y) = 3(y-1)^2 - 4(y-1) = 3y^2 - 10y + 7,$$

woraus folgt $f'(y) = 6y - 10$, $f''(y) = 6$. Daher ist

$$f(y-3) = 3y^2 - 10y + 7 - 3(6y - 10) + \tfrac{9}{2} \cdot 6$$
$$= 3y^2 - 28y + 64 \quad \text{oder}$$
$$f(x-2) = 3(x+1)^2 - 28(x+1) + 64.$$

195. Wenn $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x$ ist, soll entwickelt werden

$$f(x+5) = f(x) + \tfrac{5}{1} f'(x) + \frac{5^2}{2!} f''(x) + \ldots$$
$$= x^3 - 7x^2 + 2x + 5(3x^2 - 14x + 2)$$
$$+ \tfrac{25}{2}(6x - 14) + \tfrac{125}{6} \cdot 6$$
$$= x^3 + 8x^2 + 7x - 40.$$

196. Die Reihe für $\sin(x + \alpha)$ zu entwickeln.

$$\sin(x+\alpha) = \sin\alpha + \frac{x}{1}\cos\alpha - \frac{x^2}{2!}\sin\alpha - \frac{x^3}{3!}\cos\alpha + \ldots$$

197. Die Reihe für $\cos(x + \alpha)$ ist ebenso

$$\cos(x+\alpha) = \cos\alpha - \frac{x}{1}\sin\alpha - \frac{x^2}{2!}\cos\alpha$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\sin\alpha - \ldots = \frac{d\sin(x+\alpha)}{dx}.$$

198. Zu beweisen, daß die Entwicklung gilt:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

199. Zu beweisen, daß die Entwicklung gilt:

$$\sin^2 x = 2\frac{x^2}{2!} - 2^3\frac{x^4}{4!} + 2^5\frac{x^6}{6!} - 2^7\frac{x^8}{8!} + \dots$$

200. Entwickle analoge Reihen für $\cos^2 x$, $\sin^3 x$, $\cos^3 x, \dots$

201. Die Reihe für $f(x) = \sin(x + \alpha)\cos(x + \alpha)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{x}{1}\cos 2\alpha - 2\cdot\frac{x^2}{2!}\sin 2\alpha - 2^2\frac{x^3}{3!}\cos 2\alpha$$

$$+ 2^3\frac{x^4}{4!}\sin 2\alpha + 2^4\frac{x^5}{5!}\cos 2\alpha - \dots$$

202. Durch Reihenentwicklung nachzuweisen, daß die Gleichungen gelten:

$$e^{inx} = (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx.$$

203. Die Reihe für $l(a + x)$.

$$l(a + x) = la + \left(\frac{x}{a}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \dots$$

Für $a = 1$ folgt hieraus

$$l(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

und wenn hierin $-x$ statt $+x$ gesetzt wird:

$$l(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Beide geben subtrahiert die weitere Reihe

$$l\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right),$$

aus denen sich für $x = \frac{1}{2n + 1}$ und $x = \frac{1}{2n}$

die Formeln herleiten lassen:

$$l(n+1) = l n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots\right)$$

$$l(n+1) = l n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots,$$

die zur Berechnung des natürlichen Logarithmus der Zahl $(n+1)$ aus dem von n verwendet werden können.

204. Nachzuweisen, daß die Entwicklung gilt

$$\frac{l(1+x)}{1+x} = \tfrac{1}{1}x - \left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)x^3 - \dots$$

205. Entwickle die Funktionen arc sin x und arc tg x nach Potenzen von x.

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

206. Die Funktion $f(x) = (\arcsin x)^2$ in eine Potenzreihe zu entwickeln.

$$(\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(x^2)^2}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{(x^2)^3}{3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{(x^2)^4}{4} + \dots$$

IV. Abschnitt.

Unbestimmte Formen.

§ 30. Die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

Wenn sich die Funktionen f(x) und φ(x) für $x = a$ entweder beide der Grenze Null oder beide der Grenze ∞ nähern, so tritt ihr Quotient $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auf. Die Methode des Differentiierens liefert ein einfaches Mittel, den wahren Wert dieses Quotienten zu ermitteln. Es gilt hierfür der

Satz: Erhält die gebrochene Funktion

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so findet man ihren wahren Wert, indem man Zähler und Nenner differentiiert und nachträglich $x = a$ setzt.

$$F(a) = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Werden auch die beiden Ableitungen f′(x) und φ'(x) für $x = a$ beide gleich 0 oder beide gleich ∞, so differentiiere man in derselben Weise weiter. Der Wert von F(a) ist dann angegeben durch

$$F(a) = \lim_{x=a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \quad \text{usw.}$$

207. Beispiel.

$$F(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad F(0) = \tfrac{0}{0} = \lim_{x=0} \frac{\sin x}{2x} = \tfrac{0}{0}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\cos x}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

208. Beispiel.

$$F(x) = \frac{a\,l\,x}{l\sin x}, \quad F(0) = \tfrac{\infty}{\infty} = a\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = a\frac{\sin x}{x\cos x} = \tfrac{0}{0}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{a\cos x}{\cos x - x\sin x} = a.$$

§ 31. Übungsbeispiele.

209. $F(x) = \dfrac{x^8-1}{x^7-1}$ $\quad F(1) = \frac{8}{7}$.

210. „ $= \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8}$ $\quad F(2) = \frac{1}{6}$.

211. „ $= \dfrac{x^3+2x^2-8x+5}{4x^4-3x^3-x^2-2x+2}$ $\quad F(1) = -\frac{1}{3}$.

212. „ $= \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-x-12}$ $\quad F(4) = \frac{4}{35}$.

213. „ $= \dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$ $\quad F(0) = 0$.

214. „ $= \dfrac{x^2\cos x}{\cos x - 1}$ $\quad F(0) = -2$.

215. „ $= \dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x - \cos x}$ $\quad F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = +1$.

216. $F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ $F(0) = 2.$

217. „ $= \frac{e^x - a^x}{x}$ $F(0) = 1 - la.$

218. „ $= \frac{l \cos x}{x}$ $F(0) = 0.$

219. „ $= \frac{(x-2)^2 - x \arcsin(x-2)}{l(x-1)}$ $F(2) = -2.$

220. „ $= \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x + 4\sin x - 3}$ $F(x = \arcsin \frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}.$

221. „ $= \frac{\sin x - x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$ $F(0) = e - 1.$

222. „ $= \frac{\sqrt{x^3 - r^3}}{l \frac{x - \sqrt{x^3 - r^3}}{r}}$ $F(r) = -r.$

223. „ $= \frac{l x}{x^n}$ $F(\infty) = 0.$

224. „ $= \frac{e^x}{x^n}$ $F(\infty) = \infty.$

225. „ $= \frac{\operatorname{tg} m x}{\operatorname{tg} n x}$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{m}{n}.$

226. „ $= \frac{l(a + b x)^m}{l(c + d x)^n}$ $F(\infty) = \frac{m}{n}.$

227. „ $= \frac{l(\sin x - \sin \alpha)}{l(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha)}$ $F(\alpha) = 1.$

§ 32. Die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$.

Erscheint das Produkt $F(x) = f(x)\,\varphi(x)$ für $x = a$ in der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$, so setze man

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{oder} \quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)},$$

dann ergibt sich für $x = a$ entweder die Form

$$F(a) = \tfrac{0}{0} \quad \text{oder} \quad F(a) = \tfrac{\infty}{\infty},$$

die nach § 30 weiter zu behandeln ist.

228. Beispiel.

$$F(x) = x\,l\,x, \quad F(0) = \lim_{x=0} x\,l\,x = 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x=0} \frac{l\,x}{\frac{1}{x}} = \tfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

§ 33. Übungsbeispiele.

229. $F(x) = \sin\alpha\, x\, l\,x$ $\qquad F(0) = 0.$

230. „ $= \operatorname{ctg}(x-a)\, l\{1-\sin(x-a)\}$ $\qquad F(a) = -1.$

231. „ $= (x+a)\, l\left(1+\frac{a}{x}\right)$ $\qquad F(\infty) = a.$

232. „ $= (x-3)\operatorname{ctg}\pi x$ $\qquad F(3) = \frac{1}{\pi}.$

233. „ $= (\sin\alpha - \sin x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2\alpha}$ $\qquad F(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi}\cos\alpha.$

234. „ $= \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2\alpha}(e^{\sin\alpha} - e^{\sin x})$ $\qquad F(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi}\cos\alpha\, e^{\sin\alpha}.$

§ 34. Die unbestimmte Form $\infty - \infty$.

Werden in der Funktion $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = a$ beide unendlich, so erscheint dieselbe in der unbestimmten Form $\infty - \infty$. In diesem Fall setze man

$$F(x) = f(x)\varphi(x)\left\{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right\} = \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\varphi(x)}},$$

wo nun $F(x)$ für $x = a$ die Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt, die nach § 30 weiter zu behandeln ist.

235. Beispiel. $F(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$, $F(0) = \infty - \infty$

$$= \lim_{x=0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \tfrac{0}{0} = \lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \tfrac{0}{0}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0.$$

§ 35. Übungsbeispiele.

236. $F(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ $\qquad F(0) = \frac{1}{2}$.

237. „ $= \dfrac{1}{1 - \cos x} - \dfrac{1}{l(x+1)}$ $\qquad F(0) = \infty$.

238. „ $= \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ $\qquad F(0) = \frac{1}{2}$.

239. „ $= \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{l(x-1)}$ $\qquad F(2) = -\frac{1}{2}$.

240. $F(x) = \frac{1}{\arcsin(x-a)} - \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $F(a) = \infty$.

241. „ $= 3 \operatorname{ctg} x - \frac{x^2+3}{x-x^2}$ $F(0) = -3$.

242. „ $= \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sin x - \sin^2 x}$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$.

§ 36. Die unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, 1^∞.

Nimmt endlich $F(x) = f(x)^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setze man

$$l f(x) = f_1(x), \quad l F(x) = \psi(x) \quad \text{oder} \quad F(x) = e^\psi;$$

dann erscheint die Funktion

$$\psi = l F(x) = f_1(x)\,\varphi(x)$$

für $x = a$ in allen drei Fällen in der Gestalt $0 \cdot \infty$, so daß $\psi(x)$ und damit auch $F(x)$ nach der in § 32 angegebenen Regel ermittelt werden kann.

243. Beispiel. $F(x) = x^x$, $F(0) = 0^0$.

Logarithmiert folgt $l F(x) = x\, l x$, $l F(0) = 0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x=0} x\, l x = 0,$$

woraus folgt $F(0) = 1$.

§ 37. Übungsbeispiele.

244. $F(x) = (x-a)^{x-a}$ $F(a) = 0^0 = 1$.

244_1. „ $= (\sin x)^x$ $F(0) = 0^0 = 1$.

245. „ $= (1 - \cos x)^{\sin x}$ $F(0) = 0^0 = 1$.

246. „ $= (x-a)^{\frac{1}{x-a}}$ $F(\infty) = \infty^0 = 1$.

247. $F(x) = (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ $\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^\infty = 1.$

248. „ $= (x^m - a^m)^{\frac{1}{lx}}$ $\quad F(\infty) = \infty^0 = e^m.$

249. „ $= \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a}$ $\quad F(\infty) = 1^\infty = e^a.$

250. „ $= \left\{e^{\cos x - \cos\alpha}\right\}^{\operatorname{cotg}(x-\alpha)}$ $\quad F(\alpha) = 1^\infty = e^{-\sin\alpha}.$

V. Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen.

§ 38. Maxima und Minima einer Funktion f(x).

a) Entwickelte Funktionen von x.

Es sei vorausgesetzt, daß die Funktion f(x) innerhalb des zu betrachtenden Gebiets endlich und stetig veränderlich sei. Alsdann gilt die

Vorschrift: Um diejenigen Werte von x zu ermitteln, welche zu einem Maximum oder Minimum von $y = f(x)$ gehören, leite man die Funktion f(x) nach x ab und setze $f'(x) = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die gesuchten Werte von x.

Irgend ein Wurzelwert $x = a$ dieser Gleichung entspricht alsdann einem Maximum oder Minimum von f(x), je nachdem

$$f''(a) < 0 \quad \text{oder} \quad f''(a) > 0 \quad \text{oder}$$

f''(a) negativ oder positiv ist.

Welche geometrische Bedeutung kommt den Punkten der Kurve $y = f(x)$ zu, für welche $f'(x) = 0$ ist?

251. Beispiel. Die Maxima und Minima der Funktion $y = x^4 - a^2 x^2$ zu bestimmen.

Es ist $y' = f'(x) = 4x^3 - 2a^2 x = 0$ für $x = 0$ und $x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y'' = f''(x) = 12x^2 - 2a^2$, $f''(0) = -2a^2$, $f''\left(\pm \frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = 4a^2$.

Die Funktion hat somit in $x = 0$ ein Maximum und in $x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2}$ Minima.

Anmerkung. Ist für eine aus $f'(x) = 0$ gefundene Wurzel x_1 $f''(x_1) = 0$, $f'''(x_1)$ dagegen nicht gleich Null, so hat die Funktion in $x = x_1$ weder Max. noch Min., der betreffende Punkt ist für die Kurve $y = f(x)$ ein Wendepunkt, dessen Tangente der X-Achse parallel ist.

So besitzt beispielsweise die Kurve $y = b + (x - a)^3$ in P(a b) einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

Allgemein gilt der Satz: Die Funktion $y = f(x)$ erhält für eine aus $f'(x) = 0$ gefundene Wurzel $x = a$ ein Max. oder Min., wenn die niedrigste Ableitung, welche für $x = a$ nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist.

252. Beispiel. $y = b + (x - a)^6$.

$$y' = f'(x) = 6(x - a)^5 = 0 \quad \text{gibt} \quad x = a,$$

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(5)}(a) = 0, \quad f^{(6)}(a) = 6!$$

Die Funktion hat in $x = a$ das Min. $y = b$ und stellt geometrisch eine parabolische Kurve mit Flachpunkt in P(a, b) dar. (Fig 2.)

b) Gebrochene Funktionen von x.

253. Beispiel. Die Maxima und Minima der gebrochenen Funktion $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f}{\varphi}$ zu bestimmen.

Man erhält für ein Max. oder Min. von y

$$y' = \frac{f'\varphi - f\varphi'}{\varphi^2} = 0 \quad \text{oder} \quad f'\varphi - f\varphi' = 0$$

und mit Berücksichtigung dieser Bedingung

$$y'' = \frac{f''\varphi - f\varphi''}{\varphi^2}.$$

Daher ergibt sich die Regel:

Um diejenigen Werte von x zu bestimmen, für

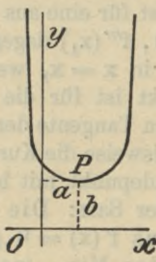

Fig. 2.

welche die gebrochene Funktion $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ein Max. oder Min. wird, setze man

$$F'(x) = f'\varphi - f\varphi' = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung gehört alsdann zu einem Max. oder Min. von y, je nachdem für diesen Wert

$$F''(x) = f''\varphi - f\varphi'' < 0 \quad \text{oder} \quad > 0 \quad \text{wird.}$$

254. Beispiel. Die Maxima und Minima von $y = \frac{x}{4x^2 - 3x + 4}$ zu bestimmen.

Man erhält

$F'(x) = 1 \cdot (4x^2 - 3x + 4) - x(8x - 3) = -4x^2 + 4 = 0$, $x = \pm 1$; ferner $F''(x) = -8x$, somit $F''(\pm 1) = \mp 8$. Die Funktion hat also für $x = +1$ ein Max. und für $x = -1$ ein Min.

c) Nicht entwickelte Funktionen.

Regel. Um aus $f(xy) = 0$ einen Maximalwert von y zu bestimmen, setze man $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Ein aus beiden Gleichungen gefundener Wert von x entspricht einem Max. oder Min. von y, je nachdem für denselben

$$y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y} \lessgtr 0 \text{ oder } \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$$

ist, wobei vorausgesetzt ist, daß neben $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ nicht zugleich auch $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist.

Ist dies der Fall, so entspricht dem gefundenen Wert von x nicht ein Max. oder Min. von y, sondern ein singulärer Punkt der Kurve, deren Gleichung $f(xy) = 0$ ist.

255. Beispiel. $f(xy) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Man erhält $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0$ für $x = a\sqrt[3]{2}$ und hierfür $y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y} = -6x : (3y^2 - 3ax) = -\frac{2}{a}$ für $x = a\sqrt[3]{2}$.

Es ergibt sich somit für $x = a\sqrt[3]{2}$ ein Max. von y.

d) Funktionen von der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Soll y ein Max. oder Min. werden, so berechnet sich der zugehörige Parameter t aus $\frac{dy}{dt} = \psi'(t) = 0$. Derselbe entspricht einem Max. oder Min. von y, wenn nicht zugleich auch $\varphi'(t) = 0$ ist, und zwar findet das erstere, bezw. letztere statt, je nachdem $\frac{d^2y}{dt^2} = \psi'' \lesseqgtr 0$ oder $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ wird.

256. Beispiel.

Es sei $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, dann ist

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \psi'' = a \cos t.$$

Aus $\sin t = 0$ folgt $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Da hierin für $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ auch $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 0$ wird, so sind nur die Wurzeln $t = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ zu gebrauchen, welche den periodisch sich wiederholenden Kulminationspunkten der Cykloide als Maxima von y entsprechen.

§ 39. Übungsbeispiele.

a) Algebraische Aufgaben.

257. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$,

Max. für $x = 1$, Min. für $x = 2$.

258. „ $= 2x + \frac{2}{x}$,

Max. für $x = -1$, Min. für $x = 1$.

259. „ $= x^4 + \frac{8}{3}ax^3 - 2a^2x^2 - 8a^3x$,

Max. für $x = -a$, Min. für $x = \begin{cases} a \\ -2a \end{cases}$.

260. $f(x) = \frac{x^4}{e^x}$ Max. für $x = 4$, Min. für $x = 0$.

261. „ $= x e^x$ „ „ $x = -1$.

262. „ $= \frac{x^2}{a^x}$ „ „ $x = \frac{2}{\mathrm{l}a}$, „ „ $x = 0$.

263. „ $= \frac{\mathrm{l}x}{x}$ „ „ $x = e$.

264. „ $= (x - a)^{x-a}$, „ $x = a + \frac{1}{e}$.

265. „ $= x^{\frac{2}{3}} + \left(x - a\right)^{\frac{2}{3}}$,

Max. für $x = \frac{a}{2}$, Min. für $x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$.

266. „ $= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ „ „ $x = 0$.

267. „ $= (x-1)\,\mathrm{arc\,tg}\,(x-1) - \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2 - 2x + 2)$,
Min. für $x = 1$.

268. „ $= \sin x$,
Max. für $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$, Min. für $x = (2n + \frac{3}{2})\pi$.

269. $f(x) = \sin x \sin(x + \alpha)$,
Max. für $x = n\pi + \frac{\pi - \alpha}{2}$, Min. für $x = n\pi - \frac{\alpha}{2}$.

270. $f(x) = \sin x \cos(x - \alpha)$,
Max. für $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha + n\pi$, Min. für $x = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha + n\pi$.

271. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$, Max. für $x = 0$, Min. für $x = 3$.

272. „ $= \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 6}$, Max. für $x = -\sqrt{2} - 1$,
Min. für $x = \sqrt{2} - 1$.

273. $f(xy) = x^2(a^2 - x^2) - a^2 y^2 = 0$,

Max. und Min. von y für $x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

274. „ $= 9ay^2 - x(x - 3a)^2 = 0$,

Max. und Min. von y für $x = a$.

275. „ $= (x^2 + y^2)^2 - 2axy^2 = 0$,

Max. und Min. von y für $x = \frac{3a}{8}$.

276. „ $= x^3 - x^2 + y^2 = 0$,

Max. und Min. von y für $x = \frac{2}{3}$.

277. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = \frac{a}{2}\cos t \sin t \end{cases}$ Max. von y für $t = \frac{\pi}{4}$,

Min. von y für $t = \frac{3\pi}{4}$.

278. $r = 2a(1 + \cos t)$,

Max. bzw. Min. von $y = r\sin t$ für $t = \frac{\pi}{3}$ bzw. $t = \frac{5\pi}{3}$.

279. Die Zahl n in zwei Summanden zu zerlegen, für welche die Summe der p^{ten} Potenzen ein Min. wird.

$$s = x^p + (n - x)^p, \quad \text{Min. für } x = \frac{n}{2}.$$

280. Eine ganze Funktion zweiten Grades zu bestimmen, die für $x = a$ ein Max., bzw. Min. besitzt.

Es sei $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ die gesuchte Funktion, dann ist $\quad y' = 2\alpha x + \beta, \quad y'' = 2\alpha$.

Für $y' = 0$ folgt hieraus

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = a \quad \text{oder} \quad \beta = -2\alpha a.$$

Die Funktion wird ein Max., bzw. Min., je nachdem α negativ oder positiv, und lautet:

$$y = \alpha x^2 - 2\alpha a x + \gamma.$$

b) Geometrische Aufgaben.

281. Aus 64 Zündhölzchen ein Rechteck von größtem Inhalt zu bilden.

$$F = x(32 - x), \quad \text{Max. für } x = 16.$$

282. In einen Kreis vom Radius a ein Rechteck von größtem Inhalt einzubeschreiben.

$$F = 4x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{Max. für } x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

283. In ein gleichschenkliges Dreieck (2 a, h) ein Rechteck von größtem Inhalt einzubeschreiben.

Werden die Seiten des Rechtecks mit x und y bezeichnet, so ist $(a - x) : y = a : h$ und

$$F = 2xy = \frac{2h}{a}x(a - x), \quad \text{Max. für } x = \frac{a}{2}, \; y = \frac{h}{2}.$$

284. In einen Halbkreis vom Radius r (Fig. 3) ein Trapez ABCD von größtem Inhalt zu zeichnen.

$$F = r^2 \sin\varphi (1 + \cos\varphi), \quad \text{Max. für } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

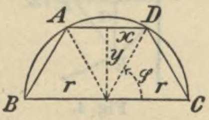

Fig. 3.

285. Unter allen Kreisausschnitten vom Umfang 2 s denjenigen zu finden, dessen Inhalt ein Max. wird.

Der Radius sei x, dann ist

$$F = x(s - x), \quad \text{Max. für } x = \frac{s}{2}.$$

286. In einen geraden Kreiskegel einen zur Basis senkrechten Zylinder von größtem Inhalt zu konstruieren.

Der Grundkreisradius des Zylinders sei x, dann ist

$$V = \pi x^2 y = \pi \frac{h}{r} x^2 (r - x), \quad \text{Max. für } x = \tfrac{2}{3} r.$$

287. Aus einer Kugel vom Radius a einen Zylinder von größtem Inhalt herauszuschneiden.

Der Radius des Zylinders sei x, seine halbe Höhe y, dann ist $y^2 = a^2 - x^2$ und

$$V = 2\pi x^2 \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{Max. für } x = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

288. In die Parabel $y^2 - 2px = 0$ ein gleichschenkliges Dreieck PAB (AB ∥ y-Achse und PO = a) von größtem Inhalt einzubeschreiben. (Fig. 4.)

$$F = y(a - x) = (a - x)\sqrt{2px}, \quad \text{Max. für } x = \frac{a}{3}.$$

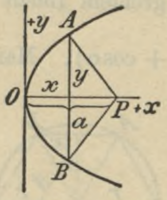

Fig. 4.

289. Auf der x-Achse liegen in der Entfernung a und 2a vom Ursprung (Fig. 5) zwei Punkte A und B. Auf der y-Achse einen Punkt P zu finden, für welchen ∢ APB = u ein Max. werde.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2a}{y}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{a}{y}, \quad u = \varphi - \psi,$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi} = \frac{a y}{2 a^2 + y^2}, \text{ Max. für } y = \pm a\sqrt{2}.$$

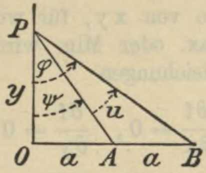

Fig. 5.

290. In einen Halbkreis vom Radius a (Fig. 6) ein gleichschenkliges Dreieck ABC von größtem Inhalt einzubeschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt liegt.

$$F = a^2 \sin\varphi \cos\varphi, \quad \text{Max. für } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

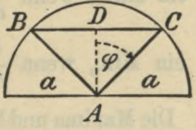

Fig. 6.

291. Welches Dreieck von gegebenem Umfang und gegebenem Winkel α hat den größten Inhalt?

Das gesuchte Dreieck ist gleichschenklig und besitzt die Seiten

$$a = \frac{2 s \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}, \quad b = c = \frac{s}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 40. Maxima und Minima einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen.

Die Wertepaare von $x\,y$, für welche die Funktion $z = f(x\,y)$ ein Max. oder Min. wird, berechnen sich aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Einem hieraus gefundenen Wertepaare $x\,y$ entspricht aber nur dann ein wirkliches Max. oder Min., wenn für dasselbe die Bedingung erfüllt wird

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0,$$

und zwar wird dann

$$z = f(xy) \text{ ein Max., wenn } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0,$$

$$z = f(xy) \text{ ein Min., wenn } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \text{ ist.}$$

292. Beispiel. Die Maxima und Minima der Funktion $z = x^2 + y^2 + y(a - x)$ zu bestimmen.

Man erhält

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + a - x = 0,$$

für $x = -\frac{a}{3}$, $y = -\frac{2a}{3}$.

Hierfür ergibt sich weiter

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

daher ist für die gefundenen Werte von x und y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 3 > 0 .$$

Die Funktion erhält also für $x = -\frac{a}{3}$, $y = -\frac{2a}{3}$ das Minimum $z = -\frac{a^2}{3}$.

§ 41. Übungsbeispiele.

a) Algebraische.

293. $z = x^2 y (a - x - y)$, Max. für $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{4}$.

294. $z = x^3 + kxy + y^3$, „ „ $x = y = -\frac{k}{3}$.

295. $z = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, „ „ $x = -y = -3$.

296. $z = \sin x + \sin y + \sin(\alpha - x - y)$,

Max. für $x = y = \frac{\alpha}{3}$.

297. $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7$,

Min. für $x = 2$, $y = 3$.

298. $z = x^2 + y^2 - \frac{xy}{2} - 4x + 4y + 3$,

Min. für $x = \frac{8}{5}$, $y = -\frac{8}{5}$.

299. $z = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$.

Ein Max. oder Min. ist vorhanden für $x = -\frac{c}{2a}$, $y = -\frac{d}{2b}$, wenn $ab > 0$ oder a und b von gleichem

Vorzeichen sind. Das erstere bzw. letztere ist der Fall, je nachdem beide negativ oder beide positiv sind.

300. Die Zahl a in drei Teile zu zerlegen, so daß das Produkt aus der ersten, dem Quadrat der zweiten und dem Kubus der dritten Zahl ein Max. werde.

$$z = (a - x - y)\,x^2 y^3, \quad \text{Max. für } x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{2}.$$

301. $z = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(2\pi - x - y)$,

$$\text{Max. für } x = y = \frac{2\pi}{3}.$$

b) Geometrische.

302. Aus einem Kreissektor (Fig. 7) vom Zentriwinkel α drei gleichschenklige Dreiecke herauszuschneiden, deren Summe ein Max. werde.

$$z = \frac{r^2}{2}\{\sin x + \sin y + \sin(\alpha - x - y)\},$$

$$\text{Max. für } x = y = \frac{\alpha}{3}.$$

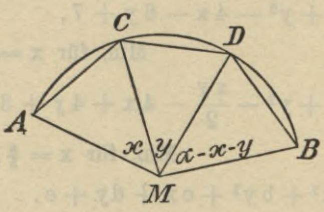

Fig. 7.

303. In einen Kreis ein Dreieck von größtem Inhalt z einzubeschreiben. (Fig. 8.)

$$z = \frac{r^2}{2}\{\sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y)\},$$

$$\text{Max. für } x = y = \frac{2\pi}{3}.$$

Das Dreieck muß gleichseitig sein.

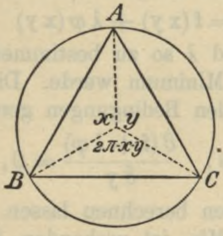

Fig. 8.

304. Dieselbe Aufgabe für ein Viereck, Fünfeck usw. zu behandeln.

305. Wie groß sind die Seiten eines Dreiecks von der Summe 2 s anzunehmen, wenn die Fläche desselben ein Max. werden soll?

Der Inhalt $F = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-x-y)}$ wird ein Max., wenn die Seiten gleich sind.

306. Die Kanten eines Prismas von gegebenem Inhalt a^3 zu berechnen, dessen Oberfläche ein Min. werden soll.

Der Würfel hat die kleinste Oberfläche.

307. Um einen Kreis vom Radius a ein Dreieck (Viereck, Fünfeck usw.) von kleinstem Inhalt zu beschreiben.

§ 42. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

a) Die Maxima und Minima der Funktion $z = f(xy)$ zweier Veränderlichen x und y zu bestimmen, wenn letztere durch die Nebenbedingung $\varphi(xy) = 0$ miteinander verbunden sind.

Zur Lösung dieser Aufgabe bilde man die Funktion

$$u = f(xy) + \lambda\varphi(xy)$$

und suche x, y und λ so zu bestimmen, daß dieselbe ein Maximum oder Minimum werde. Dies ist der Fall, wenn x, y und λ den Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial(f + \lambda\varphi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(f + \lambda\varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi = 0,$$

woraus sich dieselben berechnen lassen.

Ein Max. oder Min. ist vorhanden, je nachdem für ein hieraus gefundenes Wertepaar xy

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}y'' \lesseqgtr 0,$$

wobei y' und y'' aus $\varphi = 0$ zu berechnen sind.

308. Beispiel. In einen Halbkreis vom Radius r ein Trapez ABCD von der Grundlinie 2r und größtem Flächeninhalt einzubeschreiben. (Fig. 3.)

Nach Fig. 3 ist der Inhalt $z = y(x + r)$, wobei zwischen x und y die Gleichung besteht:

$$\varphi = x^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

daher ist

$$u = y(x + r) + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Die Bedingungen für ein Max. oder Min. lauten daher

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + r + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

woraus folgt

$$x = \frac{r}{2}, \quad y = \frac{r}{2}\sqrt{3}, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Bedingung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = -\frac{1}{y^3}(r^3 + r^2 x + 2 x y^2)$$

zeigt an, daß für positive Werte von x und y stets ein Maximum vorhanden ist, wie zu erwarten war.

b) Enthält die Funktion f mehrere Veränderliche $x_1, x_2 \ldots x_n$, zwischen denen die Nebenbedingungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$ bestehen, wo $m < n$ ist, so bilde man die Funktion

$$u = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

und suche die Maxima und Minima derselben zu bestimmen. Die Bedingungen hierfür sind angegeben durch das System der $(m + n)$ Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0;$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_m = 0,$$

woraus die $(m+n)$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ berechnet werden können.

§ 43. Übungsbeispiele.

a) Algebraische Aufgaben.

309. $z = xy$, $\varphi = x^2 + y^2 - a^2 = 0$, Max. für $x = y = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

310. $z = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$, $\varphi = xy - \frac{ab}{2}$,

Min. für $x = y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

311. $z = y(a-x)$, $\varphi = y^2 - 2px = 0$, Max. für $x = \frac{a}{3}$.

312. $z = x^2 y$, $\varphi = ax + by - c = 0$, Max. für $x = \frac{2}{3}\frac{c}{a}$.

313. Die Zahl 64 in 2 Faktoren zu zerlegen, deren Quadratsumme ein Minimum wird.

$z = x^2 + y^2$, $\varphi = xy - 64 = 0$, Min. für $x = y = 8$.

314. Die Maxima und Minima der Funktionen $z = x^3 y^2$ zu ermitteln, wenn x und y durch die Gleichung

$$\varphi = x^2 - xy - a^2 = 0$$

verbunden sind.

Man erhält Maxima für

$$x = -a,\ y = 0 \text{ und } x = +\frac{a}{5}\sqrt{5},\ y = -\tfrac{4}{5}a\sqrt{5}$$

und Minima für

$$x = +a,\ y = 0 \text{ und } x = -\frac{a}{5}\sqrt{5},\ y = +\tfrac{4}{5}a\sqrt{5}.$$

315. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + 5x - \lambda = 0$$

sollen so bestimmt werden, daß der Koeffizient λ des letzten Gliedes ein Max. oder Min. werde.

Es ergibt sich das Max.

$$\lambda = 2 \text{ für } x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 2$$

und das Min.

$$\lambda = \tfrac{50}{27} \text{ für } x_1 = x_2 = \tfrac{5}{3},\ x_3 = \tfrac{2}{3}.$$

b) Geometrische Aufgaben.

316. Die kürzeste Entfernung eines Punkts $P(x_1\, y_1)$ von dem Kreis $\varphi = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ zu finden.

317. Den Halbmesser x eines Kreises zu bestimmen, für welchen ein Sektor vom Umfang 2 s einen möglichst großen Inhalt hat.

Die Länge des Bogens sei y, dann ist der Inhalt des Sektors

$$z = \frac{xy}{2}, \quad \varphi = 2x + y - 2s = 0.$$

Man findet ein Max. für $x = \frac{s}{2}$, $y = s$.

318. Den Halbmesser eines Kreises zu bestimmen, für welchen ein Sektor vom Inhalt U einen möglichst großen Umfang hat.

$$z = 2x + y, \quad \varphi = \frac{xy}{2} - U = 0,$$

Max. für $x = \sqrt{U}$, $y = 2\sqrt{U}$.

319. Eine Gerade g und zwei auf derselben Seite liegende Punkte A und B sind gegeben. Auf g einen Punkt P zu finden, so daß AP + PB ein Minimum werde. (Fig. 9.)

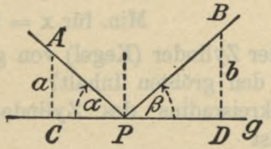

Fig. 9.

$$z = AP + PB = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\sin\beta}, \; \varphi = a \operatorname{ctg}\alpha + b \operatorname{ctg}\beta - p = 0,$$

Min. für $\alpha = \beta$. Reflexionsgesetz.

320. Für welches dreiachsige Ellipsoid von konstanter Achsensumme 2 s ist der Inhalt ein Minimum?

$$J = \frac{4}{3}\pi x y z, \quad \varphi = x + y + z - s = 0,$$

$$\text{Min. für } x = y = z = \frac{s}{3}.$$

Das Minimum tritt also ein, wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht.

321. Gegeben ein Winkel α und ein Punkt P (a, b). Durch P eine Gerade AB zu ziehen, welche von dem

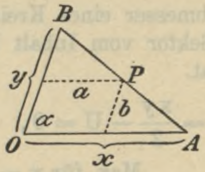

Fig. 10.

Winkelraum ein Dreieck ABO von kleinstem Inhalt abschneidet. (Fig. 10.)

$$z = \frac{1}{2} x y \sin\alpha, \quad \varphi = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - 1 = 0,$$

$$\text{Min. für } x = 2a, \quad y = 2b.$$

322. Welcher Zylinder (Kegel) von gegebener Oberfläche πa^2 hat den größten Inhalt?

Der Grundkreisradius des Zylinders sei x, die Höhe y, dann ist

$$V = \pi x^2 y, \quad \varphi = 2x^2 + 2xy - a^2 = 0,$$

$$\text{Max. für } y = 2x.$$

323. In den Raum, der von der xy-Ebene und dem Rotationsparaboloid, dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2p(z - a) = 0$$

ist, begrenzt wird, einen senkrechten Kreiszylinder von größtem Inhalt einzubeschreiben.

$$V = \pi x^2 z, \quad \varphi = x^2 + 2p(z-a) = 0,$$
$$\text{Max. für } x = \sqrt{ap}, \quad z = \frac{a}{2}.$$

324. Von dem Dreieck ABC soll durch DE ein Dreieck $ADE = \frac{1}{n} \triangle ABC$ abgeschnitten werden, für welches DE ein Minimum werde. (Fig. 11.)

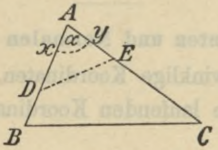

Fig. 11.

$$z = DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha, \quad \varphi = xy - \frac{bc}{n} = 0,$$
$$\text{Min. für } x = y = \sqrt{\frac{bc}{n}}.$$

325. Aus vier Strecken a, b, c, d ein möglichst großes Viereck zu konstruieren.

Bezeichnet man die Winkel zwischen a und d, bzw. b und c mit x bzw. y, so ist der Inhalt angegeben durch $z = \frac{1}{2}(ad\sin x + bc\sin y)$, wo x und y verbunden sind durch

$$\varphi = 2ad\cos x - 2bc\cos y + b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 0,$$
$$\text{Max. für } x + y = 2\pi.$$

326. Eine Strecke a so zwischen die Schenkel eines Winkels α zu legen, daß der Inhalt des gebildeten Dreiecks ein Maximum werde.

Gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie a.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Differentialrechnung auf die ebene Geometrie.

---

§ 44. Tangenten und Normalen einer Kurve.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Sind ξ, η die laufenden Koordinaten (Fig. 12) und

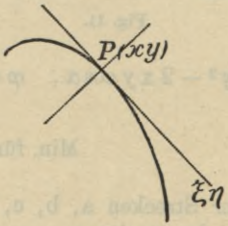

Fig. 12.

ist P (x y) der Berührungspunkt, so lautet für die Kurve $y = f(x)$ die Gleichung der zugehörigen

Tangente Normale

$\eta - y = f'(x)(\xi - x)$, $\quad (\eta - y) f'(x) + (\xi - x) = 0$,

desgleichen für die Kurve $F(x y) = 0$ die Gleichung der

Tangente

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

Normale

$$(\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} - (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Wird die Funktion $F(xy)$, die, gleich 0 gesetzt, die Gleichung einer Kurve n^{ter} Ordnung darstellen möge, mit z homogen gemacht, indem man überall statt x und y setzt $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ und hernach mit z^n durchmultipliziert, so kann die Gleichung der Tangente auch auf die (homogene) Form gebracht werden:

$$\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0,$$

wo ξ, η, ζ als homogene laufende Koordinaten eingeführt sind.

Für die Parameterform der Kurvengleichung

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

erhält man als Gleichung der

Tangente

$$(\eta - y)\varphi'(t) - (\xi - x)\psi'(t) = 0,$$

Normale

$$(\eta - y)\psi'(t) + (\xi - x)\varphi'(t) = 0.$$

Ferner ist nach Fig. 13

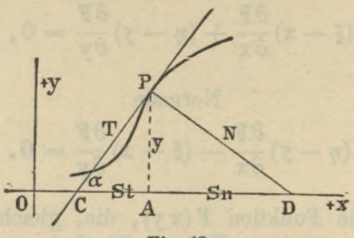

Fig. 13.

Länge der Tangente $PC = T = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$,

" " Normale $PD = N = y\sqrt{1 + y'^2}$,

" " Subtangente $CA = S_t = \frac{y}{y'}$,

" " Subnormale $AD = S_n = y\,y'$.

327. Beispiel. Gleichung und Länge von Tangente, Normale usw. der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ zu bestimmen.

Es ist $y = \sqrt{2\,p\,x}$, $y' = \frac{p}{y}$, somit Gleichung der

Tangente	Normale
$p(\xi - x) - y(\eta - y) = 0$,	$p(\eta - y) + y(\xi - x) = 0$ oder
$\eta y - p(\xi + x) = 0$,	$2\xi x + \eta y - 2px - 2x^2 = 0$,

Länge der

Tangente $T = \sqrt{2\,p\,x + 4\,x^2}$, Normale $N = \sqrt{p^2 + 2\,p\,x}$,

Subtangente $S_t = 2\,x$, Subnormale $S_n = p$.

Satz. Die Subnormale der Parabel ist konstant.

328. Beispiel. Für den Kreis

$$F(xy) = x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad \text{folgt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

somit lautet die Gleichung der

Tangente	Normale
$\xi x + \eta y - a^2 = 0,$	$\xi y - \eta x = 0$ und
$T = a\frac{y}{x}, \quad N = a,$	$S_t = \frac{y^2}{x}, \quad S_n = x.$

329. Für die Cykloide, die durch die Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

dargestellt ist, erhält man

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t.$$

Daher ergibt sich als

Gleichung der Tangente: $\eta - y = (\xi - x)\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$

" " Normale: $\eta - y + (\xi - x)\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0.$

Für die Länge der Tangente, Normale usw. erhält man die Ausdrücke:

$$T = 2a \sin\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \quad N = 2a\sin\frac{t}{2},$$

$$S_t = 2a\sin^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \quad S_n = a \sin t.$$

330. Epicykloide, beschrieben von einem Punkt P eines Kreises vom Radius r, der auf der Außenseite eines festen Kreises vom Radius a rollt:

$$\begin{cases} x = (r + a)\cos t - r\cos\left(\dfrac{r+a}{r}\right)t \\[2ex] y = (r + a)\sin t - r\sin\left(\dfrac{r+a}{r}\right)t. \end{cases}$$

Man erhält als Gleichung der Tangente bzw. Normale

$$\eta - y - (\xi - x)\operatorname{tg}\frac{2r + a}{2r}t = 0\,, \text{ bzw.}$$

$$\eta - y + (\xi - x)\operatorname{ctg}\frac{2r + a}{2r}t = 0\,.$$

b) Für Polarkoordinaten.

Es sei O der Pol, OX die Polarachse des Polar-Koordinatensystems und $r = f(\varphi)$ die Gleichung einer Kurve (Fig. 14) in Polarkoordinaten, dann ist zu bestimmen

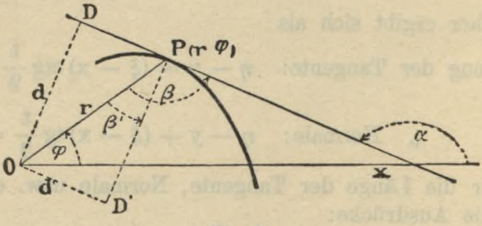

Fig. 14.

Richtungswinkel α der Tangente aus

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{r + r'\operatorname{tg}\varphi}{r' - r\operatorname{tg}\varphi},$$

Winkel β zwischen Tangente und Radiusvektor aus

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{r}{r'}$$

Entfernung der Tangente vom Pol aus

$$d = r\sin\beta = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

desgleichen
Richtungswinkel α' der Normale aus

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{r' - r\operatorname{tg}\varphi}{r + r'\operatorname{tg}\varphi},$$

Winkel β' zwischen Normale und Radiusvektor aus

$$\operatorname{tg}\beta' = \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{r'}{r},$$

Entfernung der Normale vom Pol aus

$$d' = r\sin\beta' = \frac{r \cdot r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Ferner ist (Fig. 15) die Länge der

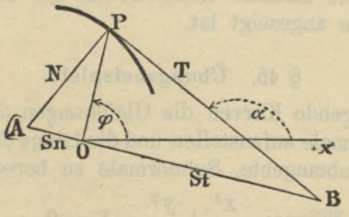

Fig. 15.

Polartangente $\quad PB = T = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2},$

Polarnormale $\quad PA = N = \sqrt{r^2 + r'^2}$,

Polarsubtangente $\quad OB = S_t = r\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{r^2}{r'}$,

Polarsubnormale $\quad OA = S_n = r\,\mathrm{ctg}\,\beta = r'$.

331. Es sollen Tangente und Normale der Kurve

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

bestimmt werden.

Man erhält $r' = -a\sin\varphi$, daher ist die Tangente bestimmt durch

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{ctg}\,\frac{3\varphi}{2}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = -\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}, \quad d = 2a\cos^3\frac{\varphi}{2},$$

sowie die Normale durch

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \mathrm{tg}\,\frac{3\varphi}{2}, \quad \mathrm{tg}\,\beta' = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}, \quad d' = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha' = \frac{3\varphi}{2}, \quad \beta' = \frac{\varphi}{2},$$

wodurch eine einfache Konstruktion der Tangente und der Normale angezeigt ist.

§ 45. Übungsbeispiele.

Für folgende Kurven die Gleichungen der Tangente und der Normale aufzustellen und die Länge der Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale zu berechnen.

332. Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

$$\text{Tgte.:} \quad \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{Norm.:}\quad \frac{\xi y}{b^2} - \frac{\eta x}{a^2} + xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

$$T = \frac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2 x^2)},\quad N = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x^2},$$

$$S_t = \frac{1}{x}(a^2 - x^2),\qquad S_n = \frac{b^2}{a^2}x,\quad e^2 = a^2 - b^2.$$

333. Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$

$$\text{Tgte.:}\quad \frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{Norm.:}\quad \frac{\xi y}{b^2} + \frac{\eta x}{a^2} - xy\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

$$T = \frac{1}{ax}\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2 x^2 - a^4)},\quad N = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2 x^2 - a^4},$$

$$S_t = \frac{1}{x}(x^2 - a^2),\qquad S_n = \frac{b^2 x}{a^2},\quad e^2 = a^2 + b^2.$$

334. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = 2px$ ist die Tangente parallel zur Geraden $g = x + y - a = 0$?

Der gesuchte Punkt ist

$$P\left(\frac{p}{2}, -p\right).$$

335. Die Gleichungen der Tangente und der Normale der Kurve $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ für den Punkt $P(3, 6)$ zu bestimmen.

Es ist $y' = 3x^2 - 6x + 2 \underset{x=3}{=} 11$, daher ist die Gleichung der

Tangente: $\eta - 6 = 11(\xi - 3)$ oder $11\xi - \eta - 27 = 0,$

Normale: $\eta - 6 = -\frac{1}{11}(\xi - 3)$ oder $\xi + 11\eta - 69 = 0.$

336. Die Länge der Tangente und Normale, der Subtangente und Subnormale der Kurve

$$f(xy) = xy^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

im Punkt $P(4, \frac{3}{2})$ zu berechnen.

$$T = 5{,}028, \quad N = 1{,}57, \quad S_t = 4{,}8, \quad S_n = 0{,}47.$$

337. Für welche Kurve ist die Subnormale konstant und gleich a?

$$yy' = a, \quad y\,dy = a\,dx, \quad \frac{y^2}{2} = ax + C.$$

$$y^2 = 2ax + C.$$

Die gesuchte Kurve ist eine Parabel.

338. Für welche Kurve ist die Subtangente konstant und gleich a?

$$\frac{y}{y'} = a, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}, \quad ly = \frac{x}{a}, \quad y = e^{\frac{x}{a}} + C.$$

Die gesuchte Kurve ist eine Exponentialkurve.

339. Für welche Kurve ist die Subnormale proportional zur k^{ten} Potenz der Abszisse?

$$yy' = mx^k.$$

Die gesuchte Kurve hat die Gleichung

$$y^2 = \frac{2m}{k+1} x^{k+1}.$$

340. Für die Ellipse, deren Gleichungen in Parameterform

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

sind, die Länge der Tangente, Normale usw. zu bestimmen.

Man erhält

$$T = \operatorname{tg} t \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 t}, \quad N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 t},$$

$$S_t = a \frac{\sin^2 t}{\cos t}, \quad S_n = \frac{b^2}{a} \cos t, \quad e^2 = a^2 - b^2.$$

341. Dieselben Größen für die Evolute der Ellipse

$$x = a \cos^3 t, \quad y = b \sin^3 t$$

zu berechnen.

$$T = -\sin^2 t \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

$$N = \frac{b \sin^3 t}{a \cos t} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

$$S_t = -a \sin^2 t \cos t, \quad S_n = -\frac{b^2}{a} \frac{\sin^4 t}{\cos t}.$$

342. Für die Evolvente des Kreises, die sich durch die Gleichungen darstellen läßt:

$$x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t,$$

die Gleichungen der Tangente und der Normale zu bestimmen.

Man erhält $y' = \operatorname{tg} t$ und damit als Gleichung der

Tangente: Normale:

$$\xi \sin t - \eta \cos t - t = 0, \quad \xi \cos t + \eta \sin t - 1 = 0.$$

343. Richtung und Länge der Polartangente und der Polarnormale der Kurve $r = a \cos \varphi$ zu bestimmen.

Man erhält

$$r' = -a \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right).$$

Die Richtung der Polartangente ist somit bestimmt durch

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\varphi$$

und die der Polarnormalen durch $\alpha' = 2\varphi$. Ferner folgt

$T = a \operatorname{ctg} \varphi$, $N = a$, $S_t = a \cos \varphi \operatorname{ctg} \varphi$, $S_n = a \sin \varphi$.

344. Es sollen Tangente und Normale der Lemniskate im Punkt $P(r, \varphi)$ bestimmt werden.

Gleichung der Kurve $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$,

Richtungswinkel der Tangente $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 3\varphi$,

" " Normale $\alpha' = 3\varphi$.

345. Für welchen Punkt der Kurve $r = a(1 + \cos\varphi)$ ist die Polarsubtangente gleich der Polarsubnormalen?

$$P\left(a, \frac{\pi}{2}\right), \quad T = N = a\sqrt{2}, \quad S_t = S_n = a.$$

346. Für welche Kurve ist die Polarsubnormale konstant und gleich a?

$$r' = a, \quad dr = a\, d\varphi, \quad r = a\varphi + C.$$

Die gesuchten Kurven sind archimedische Spiralen.

347. Eine Kurve zu bestimmen, deren Polarsubtangente dem zugehörigen Radiusvektor proportional ist.

Es ist

$$\frac{r^2}{r'} = \varkappa r, \quad \text{also} \quad \frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\varkappa}, \quad \text{oder} \quad l\, r = \frac{\varphi}{\varkappa} + C,$$

$$r = e^{\frac{\varphi}{\varkappa} + C}.$$

Die gesuchten Kurven sind logarithmische Spiralen.

§ 46. Asymptoten einer Kurve.

a) Für Parallelkoordinaten.

α) Die Asymptoten sind die Tangenten in den unendlich fernen Punkten einer Kurve.

Man erhält daher die Gleichungen der Asymptoten, indem man die unendlich fernen Punkte der Kurve bestimmt und deren Koordinaten in die Gleichung der Tangente einsetzt.

Ist die Gleichung der Tangente im Punkt P (x y)

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x)$$

oder

$$\eta = f'(x)\,\xi + y - x\,f'(x)$$

und erhält man hieraus mit Hilfe von $y = f(x)$

$$\lim_{x=\infty} f'(x) = A, \quad \lim_{x=\infty} \{y - x\,f'(x)\} = B,$$

so ist

$$\eta = A\,\xi + B$$

die Gleichung einer Asymptote.

Die Größe A wird auch erhalten, indem man in der gegebenen Gleichung den Wert von

$$\frac{y}{x} \text{ für } x = \infty\ y = \infty$$

bestimmt. Die Gleichungen der Asymptoten selbst werden dann gewonnen, indem man mit Benützung der Kurvengleichung die für $\frac{y}{x}$ gefundenen Werte in die Tangentengleichung einsetzt.

348. Beispiel. Die Asymptoten der Kurve

$$F(x\,y) = 4\,x^2 - 9\,y^2 - 3\,x + 2\,y + 1 = 0$$

zu bestimmen.

Die Gleichung gibt differentiiert

$$8x - 18yy' - 3 + 2y' = 0,$$

$$y' = \frac{8x-3}{18y-2} = \frac{8 - \frac{3}{x}}{18\frac{y}{x} - \frac{2}{x}}$$

und mit x^2 durchdividiert

$$4 - 9\frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

woraus für $x = \infty$ folgt:

$$4 - 9\frac{y^2}{x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{y}{x} = A = \pm\tfrac{2}{3}.$$

Mit Hilfe der Kurvengleichung läßt sich nun die Gleichung der Tangente auf die Form bringen:

$$\eta = \frac{8 - \frac{3}{x}}{18\frac{y}{x} - \frac{2}{x}}\xi + \frac{-3 + 2\frac{y}{x} + \frac{2}{x}}{18\frac{y}{x} - \frac{2}{x}},$$

woraus sich für $\frac{y}{x} = \pm\frac{2}{3}$ und $x = \infty$ als Gleichungen der Asymptoten ergeben:

$$\eta = \tfrac{2}{3}\xi - \tfrac{5}{36}, \quad \eta = -\tfrac{2}{3}\xi + \tfrac{13}{36}.$$

β) Etwaige Asymptoten, die parallel zu den Achsen, z. B. parallel zur x-Achse, laufen, werden am einfachsten direkt aus der Kurvengleichung ermittelt, indem man darin $x = \infty$ setzt unter der Voraussetzung, daß y konstant ist.

349. Beispiel. Die Asymptoten der Kurve (Fig. 16)

$$F(xy) = x^2 y - 3x^2 + 2xy + 4 = 0$$

zu bestimmen.

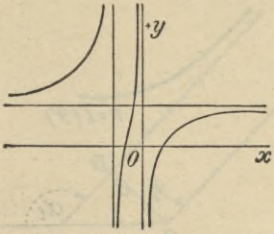

Fig. 16.

Die Kurve hat zwei Asymptoten parallel zur y-Achse und eine parallel zur x-Achse.

Mit y durchdividiert, gibt die gegebene Gleichung

$$x^2 - \frac{3x^2}{y} + 2x + \frac{4}{y} = 0,$$

woraus für $y = \infty$ und $x =$ konstant als Gleichungen der Asymptoten ‖ zur y-Achse folgen:

$$x^2 + 2x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x + 2 = 0.$$

Wird mit x^2 durchdividiert und $x = \infty$ gesetzt, so folgt

$$y - 3 = 0$$

als Gleichung der Asymptote parallel zur x-Achse.

b) Für Polarkoordinaten.

Die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten der Kurve (Fig. 17) $r = f(\varphi)$ bestimmen sich aus

$$r = f(\varphi) = \infty \quad \text{oder aus} \quad \frac{1}{f(\varphi)} = 0.$$

Für einen hieraus gefundenen Wert φ_i von φ ergibt sich die Entfernung $OD = d$ der zugehörigen Asymptote vom Pol aus:

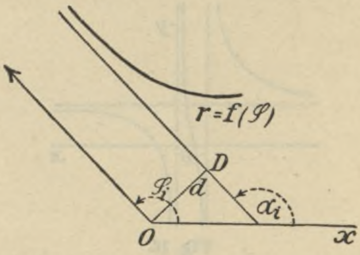

Fig. 17.

$$d = \lim r \sin\beta = \lim_{\varphi=\varphi_i} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \lim_{\varphi=\varphi_i} \frac{r^2}{r'},$$

deren Richtungswinkel $\psi = \alpha_i - \frac{\pi}{2} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ ist.

Nun kann die Richtung einer Geraden vom Pol O aus angegeben werden durch φ_i oder durch $\varphi_i + \pi$. Von beiden Werten ist als Asymptotenrichtung derjenige zu nehmen, für welchen

$$d = \lim \frac{r^2}{r'} \text{ positiv wird.}$$

Um alsdann die Asymptote selbst zu zeichnen, lege man in O den Winkel $DOx = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ an die Polarachse an und errichte auf dem zugehörigen freien Schenkel in der Entfernung $OD = d$ eine Senkrechte. Letztere stellt die Asymptote dar.

350. Beispiel. Die Asymptoten der Kurve zu bestimmen:

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} + \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Als Asymptotenrichtungen ergeben sich

$$\varphi_1 = 0, \text{ bzw. } \varphi_1 = \pi \text{ und } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ bzw. } \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Sodann ist

$$\frac{r^2}{r'} = a\frac{(\sin\varphi + \cos\varphi)^2}{\sin^3\varphi - \cos^3\varphi},$$

somit wird d positiv für

$$\varphi_1 = \pi, \quad d_1 = a, \quad \text{sowie für} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad d_2 = a.$$

Die Asymptoten sind daher die Lote in den Endpunkten der Radienvektoren zu den Punkten

$$\left(a, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad (a, 0).$$

§ 47. Übungsbeispiele.

Die Asymptoten von folgenden Kurven zu bestimmen.

351. $f = x^2 + xy - 2y^2 - 4x - 2y = 0.$
Asymptoten: $x - y - 2 = 0, \quad x + 2y - 2 = 0.$

352. $f = x^2 + 4xy - 6x + 4y = 0.$
Asymptoten: $x + 1 = 0; \quad x + 4y - 7 = 0.$

353. $f = x^3 - xy^2 - y^2 + y = 0.$
Asymptoten: $x + 1 = 0, \; x - y - \frac{1}{2} = 0, \; x + y - \frac{1}{2} = 0.$

354. $f = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$
Asymptote: $x + y + a = 0.$

355. $f = xy(x^2 - y^2) + xy(3x - 4y) - 8 = 0$.
Asymptoten:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x - y - \tfrac{1}{2} = 0, \quad x + y + \tfrac{7}{2} = 0.$$

356. $f = (x - y)y^2 + 3x(x + y) - 4x = 0$.
Endliche Asymptote: $x - y + 6 = 0$.

357. $f = xy(x + y - 1) + p = 0$.

Kurve dritter Ordnung mit Wendeasymptoten

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

358. $f = x^2(y - 2x)^2 - 3y^2(x + y) - 6x = 0$.
Keine endliche Asymptote.

359. $f = x^2(x - y) - 4x(x - y) + 2y = 0$.

$x - y = 0$ einfache Asymptote, $x = 2 \pm \sqrt{6}$ Tangentenpaar an den unendlich fernen Doppelpunkt in $x = 0$.

360. $f = (x - y)^4 + x^2 - y^2 - 3x = 0$.

Der unendlich ferne Punkt in der Richtung $x - y = 0$ ist ein Flachpunkt mit der unendlich fernen Geraden als Asymptote.

361. Die Gleichung eines Kegelschnitts zu bestimmen, der die Geraden

$$g_1 = x - y + 2 = 0, \quad g_2 = x + y - 2 = 0$$

als Asymptoten besitzt und durch den Punkt P (2, 2) geht.

$$f(xy) = x^2 - y^2 + 4y - 8 = 0.$$

362. Welche Kurve dritter Ordnung besitzt die Geraden $x = 0$, $y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$ als Asymptoten und geht durch die Punkte

$$P(0, 0), \quad P(-\tfrac{1}{3}, -1), \quad P(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})?$$

$$f - x(y + 1)(x + y - 2) + \lambda(y - 3x) = 0.$$

363. Die Asymptoten der Kurve zu bestimmen:

$$r^2 = a^2 + \frac{a^2}{1 - 4\cos^2\varphi}.$$

Es ergeben sich als Asymptoten die beiden Ursprungsgeraden

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

§ 48. Konvexität und Konkavität der Kurven. Wendepunkte.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Die Kurve $y = f(x)$ (Fig. 18) ist in einem Punkt P mit der Abszisse x konvex oder konkav nach unten, je nachdem für diesen Punkt

$$f''(x) > 0 \quad \text{oder} \quad < 0$$

oder positiv oder negativ ist.

Fig. 18.

364. Beispiel. Für die Kurve (Fig. 19)

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \text{ ist}$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x + 2, \quad y'' = f''(x) = 6x - 6.$$

Die Kurve ist somit in allen Punkten, für welche $f''(x) > 0$ oder $x > 1$ bzw. $f''(x) < 0$ oder $x < 1$ ist, konvex bzw. konkav nach unten.

Die Stellen einer Kurve, in denen sie von Konvexität in Konkavität oder umgekehrt übergeht, heißen Wendepunkte. Die Abszissen der Wendepunkte der Kurve $y = f(x)$ berechnen sich aus der Gleichung $y'' = f''(x) = 0$. Die in diesen Punkten gezogenen Tangenten heißen Wendetangenten.

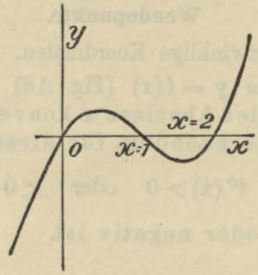

Fig. 19.

Sind $x_1\, x_2 \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f''(x) = 0$, so sind durch $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$ die zugehörigen Ordinaten und durch $\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_1)$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = f'(x_2), \ldots$ die Richtungskonstanten der Wendetangenten angegeben.

365. Beispiel. Die Wendepunkte der Kurve $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ zu bestimmen.

Man erhält $y'' = f''(x) = 6x - 6 = 0$ für

$$x = 1, \quad y = f(1) = 0.$$

Der Punkt $P(1, 0)$ ist daher ein Wendepunkt, dessen Tangentenrichtung sich ergibt aus

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

für $x = 1$; man erhält $f'(1) = \operatorname{tg}\alpha = -1$.

Die Wendetangente hat somit die Gleichung

$$\eta = -(\xi - 1) \quad \text{oder} \quad \xi + \eta - 1 = 0.$$

Wenn jedoch für einen Wert von x, der sich aus $f''(x) = 0$ ergibt, auch $f'''(x) = 0$, $f^{(4)}(x)$ dagegen nicht gleich Null ist, so entspricht demselben auch kein Wendepunkt von $f(x)$. Derselbe ist vielmehr ein Maximal- oder Minimalpunkt von $y = f(x)$.

Vergleiche hierüber Abschnitt V.

366. Beispiel. Für die Kurve $y = (x - a)^4 + bx$

ist $\quad y' = 4(x-a)^3 + b, \quad y'' = 12(x-a)^2,$

$$y''' = 24(x-a), \quad y^{(4)} = 24.$$

Der Punkt $x = a$, $y = ab$ zeigt keinen Wendepunkt, sondern einen Minimalpunkt der Kurve an.

Satz. Einem aus $f''(x) = 0$ oder $f^{(4)}(x) = 0$ oder $f^{(6)}(x) = 0, \ldots$ gefundenen Wert von x entspricht ein Wendepunkt der Kurve $y = f(x)$, wenn die niedrigste Ableitung von $f(x)$, die für diesen Wert nicht verschwindet, von ungerader Ordnung ist.

Der einfachste Wendepunkt ergibt sich aus

$$f''(x) = 0,$$

wobei $f'''(x)$ nicht gleich Null ist.

Die Entstehung eines solchen zeigt Fig. 20.

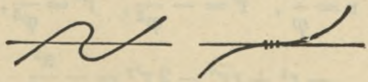

Fig. 20.

Ein höherer Wendepunkt bestimmt sich beispielsweise aus $f^{(4)}(x) = 0$, wenn $f^{(5)}(x)$ nicht gleich Null ist.

Die Entstehung eines solchen geht hervor aus Fig. 21.

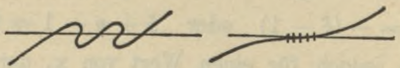

Fig. 21.

Erklärung: Höhere Wendepunkte werden auch Wendeflachpunkte genannt.

367. Beispiel. Die Kurve $y = x^3$ — einfache Wendepunktsparabel — besitzt im Ursprung einen Wendepunkt mit $\eta = 0$ als Wendetangente.

368. Beispiel. Den Wendepunkt der Kurve $y = (x - a)^5$ zu bestimmen. — Wendeflachpunkt in $P(a, 0)$ mit $\eta = 0$ als Wendeflachpunktstangente.

b) Eine Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ gegeben ist, ist in einem Punkt P konvex oder konkav gegen den Pol O, wenn die Tangente in P zwischen Pol und Kurve oder die Kurve zwischen Tangente und Pol liegt.

Es ergibt sich hierfür der

Satz. Die Kurve $r = f(\varphi)$ ist konvex oder konkav gegen den Pol, je nachdem

$$- f^2 + ff'' - 2 f'^2 \gtrless 0 \text{ oder}$$

$$- r^2 + rr'' - 2 r'^2 \gtrless 0 \text{ ist.}$$

369. Beispiel. Das Verhalten der hyperbolischen Spirale $r\varphi = a$ gegen den Pol zu untersuchen.

Es ist

$$r = \frac{a}{\varphi}, \quad r' = - \frac{a}{\varphi^2}, \quad r'' = \frac{2a}{\varphi^3},$$

daher ist

$$- r^2 + rr'' - 2 r'^2 = - \frac{a^2}{\varphi^2}$$

ein Ausdruck, der für jeden Wert von φ negativ bleibt. Die Spirale ist also in allen Punkten konkav gegen den Pol, wie zu erwarten war.

Satz. Die Azimuts φ, welche zu den Wendepunkten der Kurve $r = f(\varphi)$ gehören, ergeben sich als Wurzeln der Gleichung

$$f^2 - ff'' + 2f'^2 = 0 \quad \text{oder} \quad r^2 - rr'' + 2r'^2 = 0 .$$

370. Die Wendepunkte der Kurve $r = \frac{a}{\cos^3\varphi}$ zu bestimmen.

Die Bedingung hierfür wird

$$-r^2 + rr'' - 2r'^2 = \frac{2a^2}{\cos^8\varphi}(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi) = 0,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \tfrac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{6}.$$

Die Wendepunkte liegen somit in $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$, $r = \frac{8a\sqrt{3}}{9}$.

§ 49. Übungsbeispiele.

371. Die konvexen bzw. konkaven Teile, sowie die Wendepunkte der Kurve $y = x^4 - 6x^2$ zu bestimmen.

Die Kurve ist für $x^2 - 1 \gtrless 0$ oder für $x \gtrless \pm 1$ konvex bzw. konkav nach unten und besitzt Wendepunkte in $P_1(1, -5)$, $P_2(-1, -5)$ mit den Tangentenrichtungen

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(1) = -8, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = +8.$$

372. Zu ermitteln, in welchen Punkten die Kurve $y = 2x^3 - 6x^2 + 5x$ konvex bzw. konkav nach unten ist.

Die Kurve ist konvex bzw. konkav nach unten für $x \gtrless 1$ und besitzt in $P(1, 1)$ einen Wendepunkt mit $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = -1$.

373. Die Wendepunkte der Kurve

$$y = x + (x - a)^5$$

zu bestimmen.

Die Kurve besitzt einen Wendeflachpunkt in P(a, a) mit $y = x$ als Wendeflachpunktstangente.

374. Die Wendepunkte der Kurve

$$y = x^3\left(x^2 - 5x + \frac{20}{3}\right) - \tfrac{8}{3}x$$

zu bestimmen.

Man erhält Wendepunkte in:

$$\begin{array}{lll} P(0, 0) & \text{mit Wendetangente} & 8x + 3y = 0, \\ P(1, 0) & \text{„} \qquad \text{„} & 7x - 3y - 7 = 0, \\ P(2, 0) & \text{„} \qquad \text{„} & 8x + 3y - 16 = 0. \end{array}$$

375. Eine parabolische Kurve 3. Ordnung zu bestimmen, die die Gerade $y = 2x$ im Ursprung berührt und in P(1, 1) einen Wendepunkt besitzt.

Die gesuchte Kurve erhält die Gleichung:

$$y = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 2x.$$

376. Die Wendepunkte der Kurve $y = x^2 y + x$ zu ermitteln.

Wendepunkt in P(0, 0) mit $x - y = 0$ als Wendetangente.

377. Die Wendepunkte der Kurve

$$f(xy) = x^2 y - 4x + 3y = 0$$

zu bestimmen.

Man erhält Wendepunkte in $P_1(0, 0)$, $P_2(3, 1)$, $P_3(-3, -1)$ mit den zugehörigen Tangentenrichtungen

$$y_1' = \tfrac{4}{3}, \quad y_2' = -\tfrac{1}{6}, \quad y_3' = -\tfrac{1}{6}.$$

378. In der Gleichung $f = x^2 y + \alpha x + \beta y = 0$ sollen α und β so bestimmt werden, daß die Kurve f in $P(2\ \frac{1}{2})$ und $P(-2, -\frac{1}{2})$ Wendepunkte besitzt.

$$f = x^2 y - \tfrac{4}{3} x + \tfrac{4}{3} y = 0\,.$$

379. In welchen Punkten ist die Kurve (Fig. 22)

$$f(xy) = x^3 - x^2 y + a^2 y = 0$$

konvex bzw. konkav nach unten? Wendepunkte?

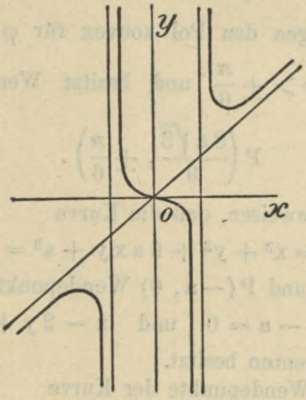

Fig. 22.

Die Kurve ist konvex für alle Punkte zwischen $x = +a$ und $x = +\infty$, sowie für $x = 0$ und $x = -a$ und konkav nach unten für $x = -a$ bis $x = -\infty$, sowie für $x = 0$ bis $x = +a$ und besitzt einen endlichen Wendepunkt in $P(0, 0)$ mit $y = 0$ als Wendetangente.

380. Wendepunkte von $y = \sin x$?

Die Wendepunkte liegen auf der x-Achse in

$$x = \pm n\pi, \quad y = 0$$

mit $\eta = \pm \xi$ als Tangentenrichtungen.

381. Das Verhalten der Kardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$) gegen den Pol zu bestimmen.

Die Kurve ist in allen Punkten konkav gegen den Pol.

382. Wie verhält sich die Kurve $r = \frac{a}{\cos^3\varphi}$ gegen den Pol? Vgl. Beispiel 370.

Sie ist gegen den Pol konvex für $\varphi < \pm\frac{\pi}{6}$ und konkav für $\varphi > \pm\frac{\pi}{6}$ und besitzt Wendepunkte in

$$P\left(\frac{8a\sqrt{3}}{9}, \pm\frac{\pi}{6}\right).$$

383. Zu beweisen, daß die Kurve

$$f = x^3 + y^3 + 6axy + a^3 = 0$$

in $P(0, -a)$ und $P(-a, 0)$ Wendepunkte mit

$$2x - y - a = 0 \quad \text{und} \quad x - 2y + a = 0$$

als Wendetangenten besitzt.

384. Die Wendepunkte der Kurve

$$f = x^2y + 2xy + 2y - x - 1 = 0$$

liegen in $P(-1, 0)$ und $P\left(-1 \pm \sqrt{3}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$.

§ 50. Singuläre Punkte einer Kurve.

Singuläre Punkte einer Kurve sind solche Punkte, in denen sich zwei oder mehr Zweige derselben durchschneiden. Doppelpunkt, dreifacher Punkt, mehrfacher Punkt.

Während für einen gewöhnlichen Kurvenpunkt sich die Tangentenrichtung y' eindeutig ermitteln läßt aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

wird für einen singulären Punkt

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{0}{0}, \text{ oder unbestimmt.}$$

Die Koordinaten aller singulären Punkte berechnen sich daher aus den Gleichungen

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Der einfachste singuläre Punkt ist der Doppelpunkt. Die beiden Tangentenrichtungen in einem solchen berechnen sich aus der Gleichung

$$f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 = 0,$$

welche aufgelöst gibt:

$$y' = \frac{1}{f_{22}} \left\{ - f_{12} \pm \sqrt{f_{12}^2 - f_{11} f_{22}} \right\},$$

ein Resultat, das man erhält, indem man den obigen unbestimmten Wert für y' nach § 30 weiter behandelt.

Ein solcher Punkt ist ein eigentlicher Doppelpunkt (Fig. 23) mit zwei reellen getrennten Tangenten oder ein Rückkehrpunkt (Fig. 24) mit zwei zusammenfallenden Tangenten oder ein isolierter Punkt mit imaginär konjugierten Tangenten, je nachdem

Fig. 23.

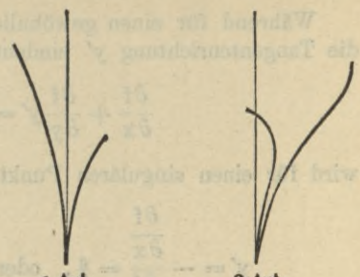

Fig 24.

$$f_{12}^2 - f_{11} f_{22} \begin{cases} > 0 \text{ oder positiv oder} \\ = 0 \text{ oder} \\ < 0 \text{ oder negativ ist.} \end{cases}$$

Das Tangentenpaar hat alsdann die Gleichung

$$(\xi - x)^2 f_{11} + 2(\xi - x)(\eta - y) f_{12} + (\eta - y)^2 f_{22} = 0 .$$

385. Beispiel. Den singulären Punkt der Kurve Fig. 25 zu bestimmen:

$$f = xy^2 - x^2 + 2x - 1 = 0 .$$

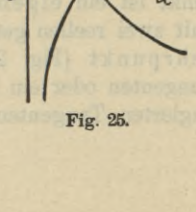

Fig. 25.

Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 = y^2 - 2x + 2 = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 = 2yx = 0$$

werden befriedigt durch $x = 1, y = 0$, daher ist $P(1, 0)$ ein Doppelpunkt, dessen Tangentenrichtungen enthalten sind in

$$f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 = 0$$

oder in

$$-2 + 2y'^2 = 0\,, \quad y' = \pm 1\,.$$

386. Beispiel. Die Kurve

$$f = x^4 - 4y^4 - y(x^2 - y^2) = 0$$

besitzt im Ursprung einen dreifachen Punkt mit

$$y = 0\,, \quad x - y = 0\,, \quad x + y = 0$$

als Tangenten.

§ 51. Übungsbeispiele.

Die singulären Punkte der Kurven zu ermitteln.

a) Doppelpunkte.

387. Das kartesische Blatt

$$f = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

hat in O einen Doppelpunkt mit $x = 0$, $y = 0$ als Tangenten.

388. Lemniskate: $f = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. Doppelpunkt in O mit $x \pm y = 0$ als Tangenten.

389. $f = x^2 - y^2 - x^3 = 0$.
Doppelpunkt in O mit $x \pm y = 0$ als Tangenten.

390. $f = (x + y)^3 - axy = 0$.
Doppelpunkt in O mit $x = 0$, $y = 0$ als Tangenten.

391. $f = 4x^2(a^2 - x^2) - k^2 a^2 y^2 = 0$.
Doppelpunkt in O mit $2x \pm ky = 0$ als Tangentenpaar.

392. $f = x^4 + x^2 y^2 - 4a^2 x^2 - 4a^2 y^2 + 4a^4 = 0$.
Doppelpunkte in $P(a\sqrt{2}, 0)$ und $P(-a\sqrt{2}, 0)$.
Tangenten: $y = \pm 2(x - a\sqrt{2})$, $y = \pm 2(x + a\sqrt{2})$.

393. Die Kurve (Fig. 26)

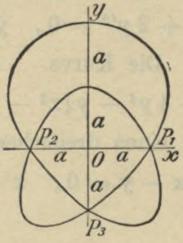

Fig. 26.

$$f = 2x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - ax^2y - ay^3 - 4a^2x^2 - 3a^2y^2 + a^3y + 2a^4 = 0$$

hat drei Doppelpunkte in

$$P_1(a, 0), \quad P_2(-a, 0), \quad P_3(0, -a)$$

mit den zugehörigen Tangentenrichtungen in

$$P_1 : y' = \pm 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \text{in} \quad P_2 : y' = \pm 2\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$
$$\text{in} \quad P_3 : y' = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

394. Die Kurve 3. Ordnung

$$f = (y - b)^2 - (x - a)^2(x - c) = 0$$

hat in $P(a, b)$ einen Doppelpunkt mit dem Tangentenpaar

$$y - b = \pm(x - a)\sqrt{a - c}.$$

Derselbe ist ein wirklicher Doppelpunkt, ein Rückkehrpunkt oder ein isolierter Punkt, je nachdem

$$a > c, \quad a = c \quad \text{oder} \quad a < c \quad \text{ist.}$$

b) Rückkehrpunkte.

395. $f = x^3 - a y^2 = 0$. Neilsche Parabel. Rückkehrpunkt in $P(0, 0)$ mit $y = 0$ als Rückkehrtangente.

396. $f = (x - a)^3 - (y - b)^2 = 0$. Rückkehrpunkt in $P(a, b)$ mit $y - b = 0$ als Rückkehrtangente.

397. $f = x^3 - y^2(2a - x) = 0$. Cissoide. Rückkehrpunkt in O mit $y = 0$ als Tangente.

398. $r = 2a(1 + \cos\varphi)$. Kardioide. Rückkehrpunkt in O mit $\varphi = \pi$ als Rückkehrtangente.

399. Die sternförmige Kurve

$$f = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

hat vier Spitzen auf den Achsen, die vom Ursprung die Entfernung a haben.

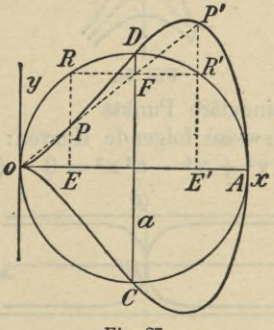

Fig. 27.

400. $f = x^3(x - 2a) + a^2 y^2 = 0$. Kurve 4. Ordnung (Fig. 27) mit Spitze in O und $y = 0$ als Rückkehrtangente.

401. Die Cykloide, deren Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

sind, hat unendlich viele Spitzen auf der x-Achse, deren Tangenten senkrecht zur x-Achse sind. (Siehe Fig. 35.)

c) Isolierte Punkte.

402. $f = x^2 + y^2 - x^3 = 0$. Kurve 3. Ordnung mit isoliertem Punkt in O.

403. $f = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) = 0$. Isolierter Punkt in O.

404. $r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$. Fußpunktskurve der Ellipse mit isoliertem Punkt in O.

405. $f = (x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$. Isolierter Punkt in O. (Fig. 28.)

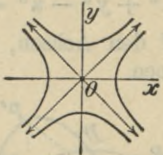

Fig. 28.

d) Höhere singuläre Punkte

besitzen beispielsweise folgende Kurven:

406. $f = x^2 y^2 + y^4 - a^2 x^2 = 0$. (Fig. 29.)

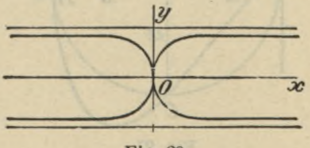

Fig. 29.

407. $f = x^4 - y^4 + x(x^2 - 4y^2) = 0$. Dreifacher Punkt in O.

408. $r = 2a \cos\varphi \sin^2\varphi$. (Siehe Fig. 45.)

409. $r = \pm a \cos\varphi \sin\varphi$ oder

$f = (x^2 + y^2)^3 - a^2 x^2 y^2 = 0$. Vierblättrige Kurve 6. Ordnung mit sich selbst berührenden Zweigen im Ursprung. (Siehe Fig. 46.)

§ 52. Krümmungskreis und Evolute.

a) Der **Krümmungskreis**, auch **Oskulationskreis** genannt, ist ein Kreis Fig. 30, der durch drei unendlich benachbarte Kurvenpunkte geht. Sein Radius ϱ heißt entsprechend **Krümmungsradius**. Je kleiner der letztere ist, um so größer ist die Krümmung der

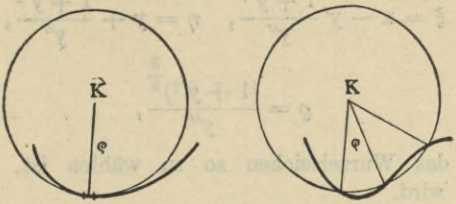

Fig. 30.

Kurve in dem betreffenden Kurvenpunkt. Daher wird $\frac{1}{\varrho}$ auch als **Krümmungsmaß** bezeichnet.

Der Krümmungsmittelpunkt kann auch als Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Kurvennormalen aufgefaßt werden.

Ist ϱ der Krümmungsradius Fig. 31 und sind $\xi\,\eta$ die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Kurve

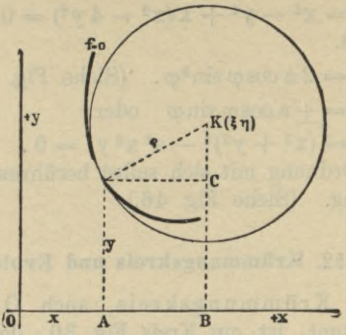

Fig. 31.

$y = f(x)$ im Punkt $P(x\,y)$, so gelten die Beziehungen

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

worin das Wurzelzeichen so zu wählen ist, daß ϱ positiv wird.

Bezeichnet man mit ϑ den Winkel, welchen der Radius ϱ mit der positiven x-Achse macht, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\xi - x}{\varrho}, \sin\vartheta = \frac{\eta - y}{\varrho}, \varrho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

wodurch eindeutig entschieden ist, in welcher Richtung vom Kurvenpunkt $P(x\,y)$ aus man den Radius ϱ abzutragen hat.

Für die nicht entwickelte Form der Kurvengleichung $f(x\,y) = 0$ erhält man

$$\xi = x - A f_1, \quad \eta = y - A f_2, \quad \varrho = A\sqrt{f_1^2 + f_2^2},$$

$$A = (f_1^2 + f_2^2) : (f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11}),$$

$$\cos\vartheta = -\frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{f_2^2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}},$$

wo mit $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}$ die partiellen Ableitungen von f nach x und y bezeichnet sind.

b) Die Evolute $\varphi(\xi\,\eta)$ einer Kurve f(x y) Fig. 32 ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes

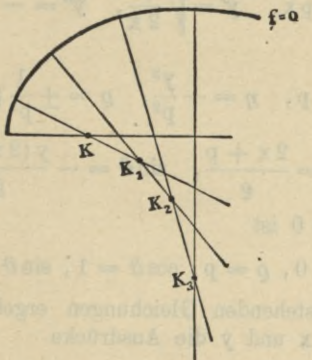

Fig. 32.

oder auch der Ort des Schnittpunktes zweier benachbarter Kurvennormalen. Die gegebene Kurve f(x y) = 0 heißt auch Evolvente.

Man erhält die Gleichung der Evolute $\varphi(\xi\,\eta) = 0$ durch Elimination von x und y aus

$$\left.\begin{aligned} & f(xy) = 0 \\ & \xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''} \\ & \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{aligned}\right\}$$

410. Beispiel. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes, sowie die Evolute der Parabel $y^2 = 2px$ zu bestimmen.

Man erhält

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad y'' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{2x^3}},$$

daher ist

$$\xi = 3x + p, \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}, \quad \varrho = \pm \frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2 + y^2)^3},$$

$$\cos\vartheta = \frac{2x + p}{\varrho}, \quad \sin\vartheta = -\frac{y(2x + p)}{p\varrho}.$$

Für $x = 0$ ist

$$\xi = p, \ \eta = 0, \ \varrho = p, \ \cos\vartheta = 1, \ \sin\vartheta = 0, \ \vartheta = 0.$$

Aus vorstehenden Gleichungen ergeben sich umgekehrt für x und y die Ausdrücke

$$x = \frac{\xi - p}{3}, \quad y = \sqrt[3]{-p^2\eta},$$

welche, in $y^2 - 2px$ eingesetzt, unmittelbar zur Gleichung der Evolute führen:

$$\eta^2 = \tfrac{8}{27} \cdot \frac{1}{p}(\xi - p)^3.$$

Diese ist eine Neilsche Parabel mit Spitze in $P(p, 0)$.

§ 53. Übungsbeispiele.

411. Krümmungskreis und Evolute des Kreises $f(x\,y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ zu bestimmen.

Man findet $\xi = \eta = 0$, $\varrho = a$. Der Krümmungskreis fällt also mit dem gegebenen Kreis zusammen.

412. Den Krümmungskreis der Kurve

$$y = x^3 - 3\,x^2 + 2\,x$$

im Punkt $P(2, 0)$ zu bestimmen.

Man erhält

$$y' = 2,\quad y'' = 6,\quad \xi = \tfrac{1}{3},\quad \eta = \tfrac{5}{6},\quad \varrho = \tfrac{5}{6}\sqrt{5}.$$

413. Den Krümmungskreis der Kurve

$$f = x^3 - x^2 - y^2 = 0$$

zu bestimmen.

$$\xi = x - \frac{9\,x - 8}{6\,x - 8}(3\,x^2 - 2\,x),$$

$$\eta = y - \frac{9\,x - 8}{6\,x - 8}(-2\,y) = \frac{12\,y\,(x - 1)}{3\,x - 4},$$

$$\varrho = \frac{9\,x - 8}{6\,x - 8}\sqrt{x^3\,(9\,x - 8)}.$$

Für den Punkt $P(1, 0)$ ist $\xi = \frac{3}{2}$, $\eta = 0$, $\varrho = \frac{1}{2}$.

Für $6\,x - 8 = 0$, d. h. für $x = \frac{4}{3}$ wird $\varrho = \infty$, d. h. in $x = \frac{4}{3}$ liegen die Wendepunkte der Kurve.

414. Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt der Kurve $f = x^3 + y^3 - a\,x\,y = 0$ für den Punkt $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ zu bestimmen.

Man erhält

$$\xi = \eta = \tfrac{7}{16}\,a,\quad \varrho = \frac{a}{16}\sqrt{2}.$$

415. Für die gleichseitige Hyperbel $xy - a^2 = 0$ ergibt sich

$$\xi = \frac{3x^2 + y^2}{2x}, \quad \eta = \frac{x^2 + 3y^2}{2y}, \quad \varrho = \pm \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{2xy}.$$

416. Für die Ellipse mit der Gleichung

$$f(xy) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

findet man

$$\xi = \frac{e^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{e^2}{b^4} y^3, \quad \varrho = \frac{(a^4 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b},$$

wo $e^2 = a^2 - b^2$ gesetzt ist. (Fig. 33.)

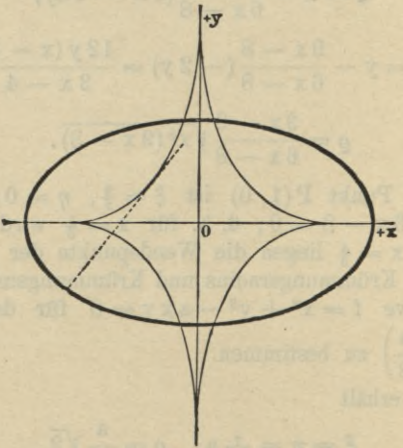

Fig. 33.

In Punkt P(a, 0) ist $\xi = \frac{e^2}{a}$, $\eta = 0$, $\varrho = \frac{b^2}{a}$,

„ „ P(0, b) „ $\xi = 0$, $\eta = -\frac{e^2}{b}$, $\varrho = \frac{a^2}{b}$.

Die Gleichung der Ellipsenevolute läßt sich, wenn

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{a^2 - b^2}{b} = \beta$$

gesetzt wird, auf die Form bringen:

$$\varphi(\xi\eta) = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

Sternförmige Kurve mit vier Spitzen in den Koordinatenachsen. (Fig. 33.)

417. Für die Hyperbel Fig. 34

$$f(x\,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

erhält man ebenso

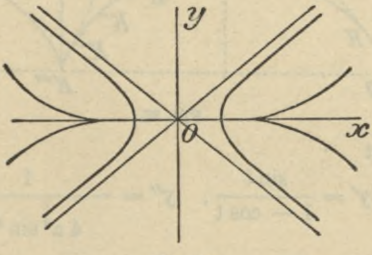

Fig. 34.

$$\xi = \frac{e^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{e^2}{b^4} y^3, \quad \varrho = \frac{(e^2 x^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b},$$

wo $e^2 = a^2 + b^2$ gesetzt ist.

Für $\dfrac{a^2 + b^2}{a} = \alpha, \quad \dfrac{a^2 + b^2}{b} = \beta$

erhält die Evolute die Gleichung

$$\varphi(\xi \eta) = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

Kurve 6. Ordnung mit zwei Spitzen in $\xi = \pm \alpha$, $\eta = 0$.

418. Die Elemente des Krümmungskreises der Cykloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

zu bestimmen. (Fig. 35.)

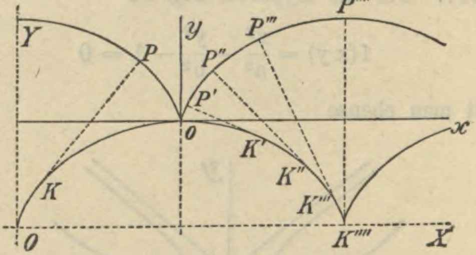

Fig. 35.

Es ist

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad y'' = -\frac{1}{4 a^2 \sin^4 \frac{t}{2}},$$

womit sich ergibt

$$\varrho = 4\,a \sin\frac{t}{2}, \quad \xi = a\,(t + \sin t), \quad \eta = -a\,(1 - \cos t).$$

Führt man neue Koordinaten ein, indem man setzt

$$X = \xi + \pi\,a, \quad Y = \eta + 2\,a \quad \text{und} \quad t' = \pi + t,$$

so gehen diese Gleichungen über in

$$X = a\,(t' - \sin t'), \quad Y = a\,(1 - \cos t').$$

Die Evolute stellt also eine zur gegebenen kongruente Cykloide dar.

Die Länge der Kurvennormale ist nach § 44:

$$N = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Für die Cykloide erhält man hierfür:

$$N = 2\,a \sin\frac{t}{2} = \frac{\varrho}{2}, \quad \varrho = 2\,N,$$

womit der Satz gewonnen ist:

Der Krümmungshalbmesser der Cykloide ist gleich der doppelten Länge der Normale.

419. Die Krümmungsverhältnisse der Kurve

$$x = c \cos t - r \cos\frac{c}{r}\,t, \quad y = c \sin t - r \sin\frac{c}{r}\,t$$

zu untersuchen.

Man findet

$$\xi = \frac{c - r}{c + r}\left\{c \cos t + r \cos\frac{c}{r}\,t\right\}$$

$$\eta = \frac{c - r}{c + r}\left\{c \sin t + r \sin\frac{c}{r}\,t\right\}$$

$$\varrho = \frac{4\,c\,r}{c + r} \sin\frac{c - r}{2\,r}\,t.$$

Für $c = a + r$ stellt diese Kurve eine Epicykloide dar, die ein Punkt eines Kreises vom Radius r beschreibt, der auf einem andern vom Radius a rollt.

§ 54. Die Einhüllende von Kurven- und Flächenscharen.

a) Die Umhüllungslinie einer Kurvenschar.

Die Gleichung $f(x\,y\,p) = 0$ stellt bei veränderlichem p eine Schar von ebenen Kurven dar, die sämtlich von einer festen Kurve, der Umhüllungslinie oder der Einhüllenden, berührt werden. Die veränderlichen Kurven heißen auch die Eingehüllten. Die Gleichung der Umhüllungslinie $U(x\,y) = 0$ ergibt sich durch Elimination von p aus

$$f(x\,y\,p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

420. Beispiel. Die Einhüllende der Parabelschar

$$f(x\,y\,p) = y^2 - 2(p+1)x + p^2 = 0$$

zu bestimmen.

Durch Elimination von p aus $f = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -2x + 2p = 0$$

ergibt sich als Gleichung der Einhüllenden

$$U(x\,y) = x^2 - y^2 + 2x = 0,$$

wodurch eine Hyperbel angezeigt ist.

b) Die Einhüllende einer Flächenschar.

α) Bei drei Veränderlichen $x\,y\,z$ und einem Parameter p stellt die Gleichung $f(x\,y\,z\,p) = 0$ eine einfach unendliche Schar von räumlichen Flächen dar, deren

Einhüllende ebenfalls durch Elimination von p gewonnen wird aus

$$f(xyzp)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial p}=0.$$

421. Beispiel. Eine Ebene geht durch einen festen Punkt der x-Achse $(x=a)$ und schneidet von den andern Achsen Stücke von konstanter Summe b ab. Welches ist die Einhüllende der Ebenenschar?

Die veränderliche Ebene schneide von der y-Achse das Stück p und somit von der z-Achse das Stück $b-p$ ab, so lautet die Gleichung der Ebenenschar

$$f(xyzp)=\frac{x}{a}+\frac{y}{p}+\frac{z}{b-p}-1=0$$

oder

$$f(xyzp)=(x-a)(bp-p^2)+ya(b-p)+zap=0,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial p}=(x-a)(b-2p)-ya+za=0,$$

$$U(xyz)-\{b(x-a)+ay+az\}^2-4a^2yz=0.$$

Kegel zweiten Grades mit Spitze in $x=a$, $y=0$, $z=0$.

β) Wenn jedoch in der Funktion f zwei unabhängige Parameter p und q enthalten sind, so stellt die Gleichung $f(xyzpq)=0$ eine zweifach unendliche Schar von Flächen dar. Die Gleichung der Einhüllenden, welche den gleichzeitigen Änderungen von p und q entspricht, findet man, indem man p und q eleminiert aus

$$f(xyzpq)=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial p}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial q}=0.$$

422. Beispiel. Die Einhüllende einer Ebene zu finden, welche von den Koordinatenachsen Stücke von konstanter Summe a abschneidet.

Schneidet die Ebene von den Achsen die Stücke p, q, a — p — q ab, so lautet die Gleichung der Flächenschar:

$$f(x\,y\,z\,p\,q) = \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{a - p - q} - 1 = 0.$$

Die Ableitungen nach p und q geben

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{x}{p^2} + \frac{z}{(a - p - q)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{y}{q^2} + \frac{z}{(a - p - q)^2} = 0,$$

woraus folgt

$$p = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}, \quad q = \frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}},$$

$$a - p - q = \frac{a\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}.$$

Es ergibt sich daher als Gleichung der Einhüllenden der Ebenenschar

$$U(x\,y\,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a} = 0.$$

§ 55. Übungsbeispiele.

423. Geradenschar:

$$f(x\,y\,p) = x \sin p + y \cos p - a = 0,$$

$U = x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Kreis vom Radius a mit Mittelpunkt in O.

424. Geradenschar:

$$f(x\,y\,p) = x \sin p - y \cos p - a = 0\,,$$

$U = (x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$. Kurve 4. Ordnung mit isoliertem Punkt in O.

425. Die Umhüllungslinie einer Geraden zu finden, die von den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems α) ein Dreieck von konstantem Inhalt a^2, β) Stücke von konstanter Summe a abschneidet.

α) $U(x\,y) = x\,y - \frac{1}{4}a^2 = 0$. Gleichseitige Hyperbel.

β) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a} = 0$. Parabel mit der Achsenrichtung $x = y$, welche die Achsen in $x = a$, $y = 0$, bzw. $y = a$, $x = 0$ berührt.

426. Von dem veränderlichen Punkt P auf der Seite AC eines Dreiecks ABC werden Parallelen zu AB und BC gezogen. Gesucht ist Umhüllungslinie der Geraden XY. (Fig. 36.)

$$\text{Es ist } U(x\,y) = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - 1 = 0 \text{ oder}$$

$$U(x\,y) = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{2\,x}{a} + \frac{2\,y}{b} - 1\right) = 0$$

eine Parabel mit Achsenrichtung $x : y = a : b$, welche die Achsen in $x = a$, $y = 0$, bzw. $x = 0$, $y = b$ berührt.

427. Der Scheitel eines rechten Winkels dreht sich um den Punkt P(a b), während seine Schenkel die Achsen in A und B schneiden. Gesucht ist die Umhüllungslinie von AB.

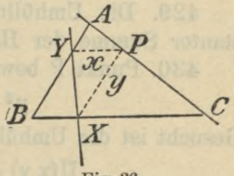

Fig. 36.

Man findet, wenn AB von der y-Achse das Stück p abschneidet

$$f(xyp) = p(ax - by - a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)y + bp^2 = 0$$

und hieraus als Gleichung der Umhüllungslinie:

$$U(xy) = (ax - by)^2 - 2(a^2 + b^2)(ax + by) + (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

428. Punkt P (Fig. 37) bewegt sich auf dem Kreis um O vom Radius a. Gesucht ist die Umhüllungslinie von AB.

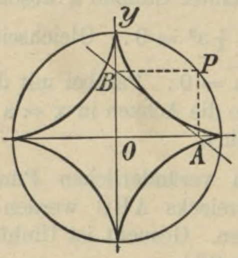

Fig. 37.

Man erhält

$$f(xyp) = yp + (x - p)\sqrt{a^2 - b^2} = 0 \text{ und}$$

$$U(xy) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0. \text{ Sternkurve.}$$

Eine solche Kurve wird auch von der Geraden umhüllt, für welche das Stück zwischen Koordinatenachsen beständig von der Kreisperipherie halbiert wird.

429. Die Umhüllungslinie aller Ellipsen von konstanter Summe der Halbachsen zu finden. Sternkurve.

430. Punkt P bewegt sich auf der Parabel

$$y^2 - 2ax = 0.$$

Gesucht ist die Umhüllungslinie von AB. (Fig. 38.)

$$U(xy) = y^2 + 8ax = 0.$$

431. Punkt P bewegt sich auf einer Geraden, welche von den Achsen die Stücke a und b abschneidet. Gesucht ist die Umhüllungslinie von CD. (Fig. 39.)

Setzt man $OC = p$, so ist

$$f(x\,y\,p) = a\,p^2 - a\,p\,x + b\,y(p - a) = 0\,,$$

$$U(x\,y) = (a\,x - b\,y)^2 + 4\,a^2\,b\,y = 0\,.$$

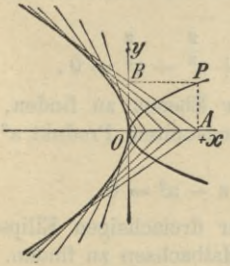

Fig. 38.

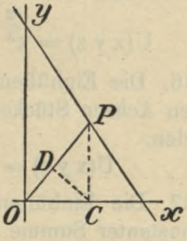

Fig. 39.

432. Zu beweisen, daß die Evolute die Umhüllungslinie der Normalen einer Kurve ist.

433. Die Umhüllungslinie aller Kreise vom Halbmesser r zu finden, für welche die Summe der Mittelpunktskoordinaten konstant gleich s ist.

$U(x\,y) = x + y - s \pm r\sqrt{2} = 0$. Parallellinienpaar.

434. Die Umhüllungslinie einer Schar von Kreisen zu finden, deren Mittelpunkte auf einem gegebenen Kreis vom Radius a liegen und deren Peripherien durch einen Punkt desselben hindurchgehen.

Wird dieser Punkt als Ursprung des Koordinatensystems und der zugehörige Durchmesser als x-Achse angenommen, so ergibt sich als Gleichung der Umhüllungslinie

$$U(xy) = (x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0,$$

welche eine Kardioide mit Spitze in O darstellt.

435. Die Einhüllende aller Ebenen zu finden, welche durch die Fußpunkte der Lote gehen, die von den Punkten einer Kugel vom Radius a auf die Koordinatenachsen gefällt werden.

$$U(xyz) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

436. Die Einhüllende aller Ebenen zu finden, die von den Achsen Stücke von konstantem Produkt a^3 abschneiden.

$$U(xyz) = 27xyz - a^3 = 0.$$

437. Die Einhüllende aller dreiachsigen Ellipsoide von konstanter Summe a der Halbachsen zu finden.

Gleichung der Flächenschar:

$$f(xyz, pq) = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{(a-p-q)^2} - 1 = 0,$$

Gleichung der Einhüllenden:

$$U(xyz) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

§ 56. **Untersuchung einzelner Kurvengleichungen.**

Bei der Untersuchung der Gleichung einer Kurve $f(xy) = 0$ handelt es sich darum, das geometrische Bild derselben zu entwerfen, sowie alle besonderen Punkte der Kurve, wie die singulären Punkte, Wendepunkte, Maximal- und Minimalpunkte usw., der Lage nach nebst den zugehörigen Tangentenrichtungen zu bestimmen. Diese Punkte können nach den seither besprochenen Regeln ermittelt werden. Was nun aber den ersten Teil der Aufgabe betrifft, den Lauf einer ebenen Kurve aus einer vorgelegten Kurvengleichung zu bestimmen, so wird es für den Anfänger genügen, diejenigen Teile der Zeichenebene (Zwickel) zu ermitteln, in welchen die Kurve verlaufen muß oder nicht verlaufen kann, sowie eine Reihe von weiteren Kurvenpunkten anzugeben und diese nachträglich durch Kurvenzüge zu verbinden, die sich an die zugehörigen Tangentenrichtungen und an die Asymptoten anschmiegen. Man suche daher zu bestimmen:

1. Das Verhalten der Kurve im Ursprung.
2. Ob die Kurve symmetrisch zu den Achsen liegt.
3. Die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen.
4. Die Asymptoten und etwaige Schnittpunkte derselben mit der Kurve.
5. Die Wendepunkte und etwaige singuläre Punkte.
6. Weitere gewöhnliche Kurvenpunkte durch direkte Berechnung oder mit Hilfe des Prinzips der linearen Kombination, soweit sie eben zur Gewinnung eines genügenden Bildes vom Verlauf der Kurve notwendig sind.

Nach Erledigung der Punkte 1—4 ist man vielfach schon imstande, die Zeichenebene in zweierlei Abschnitte zu zerlegen, in denen die Kurve einerseits verlaufen muß, andererseits nicht verlaufen kann. Letztere sollen in den folgenden Beispielen leicht schraffiert werden.

438. Beispiel.

$$f = y(x-1)^2 - x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Die Gleichung der Kurve gibt zu erkennen, daß zu jedem negativen y nur imaginäre Werte von x gehören, woraus folgt, daß die Kurve ihrem ganzen Verlauf nach oberhalb der x-Achse liegen muß.

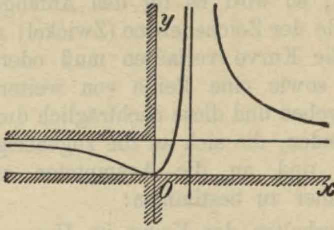

Fig. 40.

Sie berührt ferner die x-Achse im Ursprung und schneidet außerdem die Koordinatenachsen nicht mehr. Sie besitzt ferner in der Richtung $x - 1 = 0$ eine unendlich ferne Spitze mit $x - 1 = 0$ als Spitzpunktstangente, sowie $y - 1 = 0$ als gewöhnliche Asymptote, welche die Kurve noch in $P(\frac{1}{2}, 1)$ schneidet.

Aus der Kurvengleichung folgt

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}, \quad y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4},$$

$y' = 0$ gibt $x = 0$ und zeigt den Ursprung als Minimalpunkt an.

$y'' = 0$ gibt $x = -\frac{1}{2}$, somit Wendepunkt in $P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$ mit $y' = -\frac{8}{27}$ als Tangentenrichtung.

Für $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -4$ ergeben sich die weiteren Punkte mit den zugehörigen Tangentenrichtungen

$$P(2, 4), \quad y' = 4; \quad P(\tfrac{1}{2}, 1), \quad y' = 8;$$
$$P(-4, \tfrac{16}{25}), \quad y' = -\tfrac{8}{125}.$$

Da die Kurve die Asymptoten und Koordinatenachsen außer in den angegebenen Punkten nicht mehr schneidet, so kann sie auch nur in den nicht schraffierten Flächenteilen verlaufen und muß daher die in Fig. 40 gezeichnete Gestalt haben.

439. Beispiel. Den Lauf der Kurve zu bestimmen:

$$f = x^2 y^2 - y^4 - a^2 (x^2 - 4 y^2) = 0.$$

Die Kurve liegt symmetrisch zu beiden Achsen. Der Ursprung ist Mittelpunkt der Kurve, da zu jedem Punkt $P(+x, +y)$ ein Punkt $P(-x, -y)$ vorhanden ist.

Die Kurve besitzt in O einen Doppelpunkt mit $x \mp 2y = 0$ als Tangentenpaar desselben und schneidet die x-Achse außerdem noch in $x = \infty$, die y-Achse in $P(0, \pm 2a)$, wozu $y' = 0$ gehört.

Sie besitzt als Asymptoten: 1. Die beiden Medianen $x \mp y = 0$ mit einfacher Berührung im Unendlichen, welche die Kurve außer in O nicht mehr schneiden. 2. Das Parallellinienpaar $y \mp a = 0$ als Tangenten an den Doppelpunkt in $x = \infty$, $y = \pm a$.

Den Verlauf der Kurve gibt die Fig. 41 an.

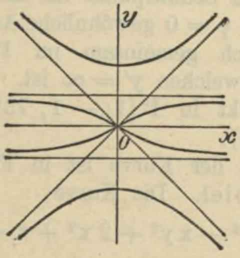

Fig. 41.

440. Beispiel.

$$f = 2(x^3 - xy^2) + x^2 + y^2 = 0.$$

Die Kurve ist symmetrisch zur x-Achse und besitzt im Ursprung einen isolierten Punkt.

Schnittpunkte mit der x-Achse $P(0, 0)$ isolierter Punkt; $P(-\frac{1}{2}, 0)$, $y' = \infty$.

Schnittpunkte mit der y-Achse $P(0\ 0)$ isol. Punkt; $P(0, \infty)$.

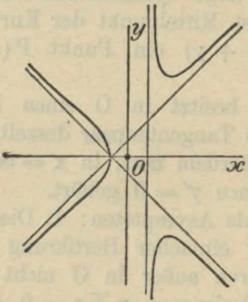

Fig. 42.

Asymptoten: α) $x - \frac{1}{2} = 0$ Wendeasymptote mit keinem weiteren Schnittpunkt im Endlichen.

β) $x \pm y + \frac{1}{2} = 0$ gewöhnliche Asymptoten, welche die Kurve noch gemeinsam im Punkt $P(-\frac{1}{2}, 0)$ schneiden, für welchen $y' = \infty$ ist.

Maximalpunkt in $P(1; -1{,}732)$, Minimalpunkt in $P(1; 1{,}732)$.

Die Gestalt der Kurve ist in Fig. 42 angegeben.

441. Beispiel. Die Kurve

$$f = x^3 - xy^2 + 2x^2 + x - 4 = 0$$

zu untersuchen.

Die Kurve liegt symmetrisch zur x-Achse.
Schnittpunkte mit der x-Achse: $P(1, 0)$, $y' = \infty$.
" " " y-Achse: Wendepunkt in $y = \infty$.

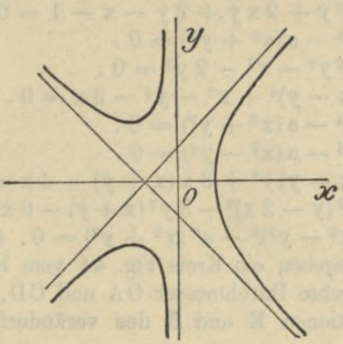

Fig. 43.

Die Asymptoten $x = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ sind sämtlich Wendeasymptoten und können daher von der Kurve nicht weiter geschnitten werden.

Weitere Punkte: $P(-1, 2)$, $y' = +1$; $P(-1, -2)$, $y' = -1$, $P(2; 2,6)$, $y' = 1,3$.

Aus diesen Angaben läßt sich der Lauf der Kurve bestimmen. (Fig. 43.)

§ 57. Übungsbeispiele.

Den Lauf der Kurven zu bestimmen.

442. $f = 4x^2 - 9y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$. (348.)
443. $f = x^3 - xy^2 - y^2 + y = 0$.
444. $f = xy^2 - x - y = 0$.
445. $f = y(x - y)^2 - x(x + y) = 0$.
446. $f = x^2 y - 3x^2 + 2xy + 4 = 0$. (349 Fig. 16.)
447. $f = (x - y) y^2 + 3(x + y) x - 4x = 0$. (356.)

448. $f = x^2(x-y) - 4x(x-y) + 2y = 0$. (359.)

449. $f = x^2y + xy^2 + x^2 - xy + x - y = 0$. (362.)

450. $f = x^3 - x^2y + a^2y = 0$. (379.)

451. $f = x^2y + 2xy + 2y - x - 1 = 0$. (384.)

452. $f = x^3 - a(x^2 + y^2) = 0$. (402.)

453. $f = x^2y^2 - x^3 - 2y^3 = 0$.

454. $f = (x-y)^4 + x^2 - y^2 - 3x = 0$.

455. $f = x^4 - a(x^2 + y^2) = 0$.

456. $f = x^4 - a(x^2 - y^2) = 0$.

457. $f = (x-y)y^2 + 3x(x+y) - 4x = 0$. (356.)

458. $f = x^2(y-2x)^2 - 3y^2(x+y) - 6x = 0$. (358.)

459. $f = (x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$. (405 Fig. 28.)

460. Gegeben ein Kreis Fig. 44 vom Radius a und zwei senkrechte Durchmesser OA und CD, welche von den Projektionen E und F des veränderlichen Kreis-

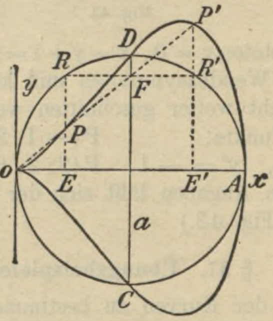

Fig. 27.

punktes R durchlaufen werden. Gesucht ist der geometrische Ort des Schnittpunktes P von RE mit OF.

Man nehme OA als x-Achse und das Lot in O auf OA als y-Achse an, dann ist $OE = x$, $PE = y$ zu setzen und verhält sich

$$OE : EP = RF : RP$$

oder $$x : y = (a - x) : (\sqrt{2ax - x^2} - y),$$

woraus sich als Gleichung des gesuchten Ortes ergibt:

$$f = x^3(x - 2a) + a^2y^2 = 0.$$

Kurve 4. Ordnung mit Spitze in O und $y = 0$ als Spitzpunktstangente.

461. Den geometrischen Ort des Fußpunktes P des zweiten Höhenschenkellotes in einem veränderlichen gleichschenkligen Dreieck COB von der Basis a zu bestimmen.

$$f = (x^2 + y^2)^2 - 2axy^2 = 0. \quad \text{(Fig. 45.)}$$

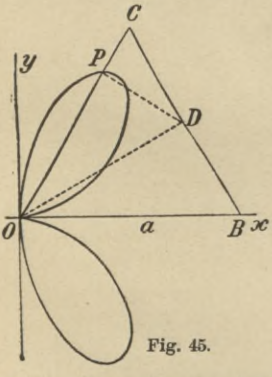

Fig. 45.

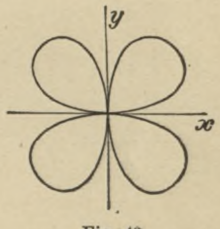

Fig. 46.

462. Eine Strecke AB von der Länge a bewegt sich mit ihren Endpunkten auf den Koordinatenachsen. Den Ort des Fußpunktes P des von O auf dieselbe gefällten Lotes zu untersuchen.

$$f = (x^2 + y^2)^3 - a^2x^2y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad r = \pm a \cos\varphi \sin\varphi.$$

Die Gestalt dieser Kurve zeigt Fig. 46.

Sammlung Göschen

Jeder Band in Leinw. geb. **80 Pf.**

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Abwässer. Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landw. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre v. Dr. Paul Rippert i. Essen u. Ernst Langenbeck, Gr.-Lichterfelde. Nr. 232.

Agrarwesen und Agrarpolitik von Prof. Dr. W. Wygodzinski in Bonn. 2 Bändchen. I: Boden u. Unternehmung. Nr. 592.

— — II: Kapital u. Arbeit in der Landwirtschaft. Verwertung der landwirtschaftl. Produkte. Organisation des landwirtschaftl. Berufsstandes. Nr. 593.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, v. Dr. Paul Krische in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

— **Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Akustik. Theoret. Physik I: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

— **Musikalische,** von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik und Algebra von Dr. H. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— **Beispielsammlung z. Arithmetik u. Algebra** v. Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven v. Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.

— — II: Theorie u. Kurven dritter u. vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität Graz. Mit 19 Abb. u. 1 Karte. Nr. 129.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen v. Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Alttestamentl. Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 292.

Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien u. Amphibien v. Dr. Franz Werner, Prof. an der Universität Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.

— — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Rektor d. Realgymnas. u. d. Oberrealsch. in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — **II: Integralrechnung.** Von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Fig. Nr. 88.

Analysis, Höhere. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

— **Niedere**, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung siehe: Sozialversicherung.

Archäologie von Dr. Friedrich Koepp, Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. M. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.

Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armeepferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden v. Felix von Damnitz, General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remonteinspektor. Nr. 514.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer a.d.Kgl.Akademie d. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm Kobold, Prof. an der Universität Kiel. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Aufsatzentwürfe v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttg. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr. 302.

Außereuropäische Erdteile, Länderkunde der, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Australien. Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.

Autogenes Schweiß- und Schneidverfahren von Ingen. Hans Niese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bade- u. Schwimmanstalten, Öffentliche, v. Dr. Karl Wolff, Stadtoberbaur., Hannover. M.50 Fig. Nr.380.

Baden. Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.

Bahnhöfe. Hochbauten der Bahnhöfe v. Eisenbahnbauinspekt. C. Schwab, Vorstand d. Kgl. E.-Hochbausektion Stuttgart II. **I:** Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterschuppen. Lokomotivschuppen. Mit 91 Abbildungen. Nr. 515.

Balkanstaaten. Geschichte d. christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bankwesen. Technik des Bankwesens von Dr. Walter Conrad, stellvert. Vorsteher der statist. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung v. Archit. Emil Beutinger, Assistent an d. Techn. Hochschule in Darmstadt. M. 25 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.

Baukunst, Die, des Abendlandes v. Dr. K. Schäfer, Assist. a. Gewerbemuseum, Bremen. Mit 22 Abb. Nr. 74.

— **des Schulhauses** v. Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein, Darmstadt. I: Das Schulhaus. M. 38 Abb. Nr. 443.

— — II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. M. 31 Abb. Nr. 444.

Bausteine. Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Baustoffkunde, Die, v. Prof. H. Haberstroh, Oberl. a. d. Herzogl. Baugewerkschule Holzminden. Mit 36 Abbildungen. Nr. 506.

Bayern. Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **Landeskunde des Königreichs Bayern** v. Dr. W. Götz, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule München. M. Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.

Befestigungswesen. Die geschichtliche Entwicklung des Befestigungswesens vom Aufkommen der Pulvergeschütze bis zur Neuzeit von Reuleaux, Major b. Stabe d. 1. Westpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bildern. Nr. 569.

Beschwerderecht. Das Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine v. Dr. Max E. Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 517.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. 1. Teil: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschied. Kraftmaschinen. M. 27 Abb. Nr. 224.

— — II: Gas-, Wasser- u. Wind-Kraftanlagen. M. 31 Abb. Nr. 225.

— — III: Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graph. Darstell. Wahl d. Betriebskraft. M. 27 Abb. Nr. 474.

Bewegungsspiele v. Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymn. zu Hannover. M. 15 Abb. Nr. 96.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Blütenpflanzen, Das System der, mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Kustos am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Brandenburgisch - Preußische Geschichte von Prof. Dr. M. Thamm, Dir. des Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Brasilien. Landeskunde der Republik Brasilien von Bel Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 373.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Dir. der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Britisch-Nordamerika. Landeskunde von Britisch-Nordamerika v. Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abb. und 1 Karte. Nr. 284.

Buchführung in einfachen u. doppelten Posten v. Prof. Rob. Stern, Oberl. d. Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule zu Leipzig. M. vielen Formul. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Bürgerliches Gesetzbuch siehe: Recht des BGB.

Byzantinisches Reich. Geschichte des byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Chemie, Allgemeine u. physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe in München. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— **Geschichte der,** von Dr. Hugo Bauer, Assist. am chemischen Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis z. Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— — II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium d. Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. **I. II:** Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
— — **III:** Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.
— — **IV:** Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.
— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
— **Pharmazeutische,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.
— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. **I:** Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
— — **II:** Dissimilation. M. 1 Tafel. Nr. 241.
— **Toxikologische,** von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.
Chemische Industrie, Anorganische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. **I:** Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
— — **II:** Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
— — **III:** Anorganische chemische Präparate. M. 6 Taf. Nr. 207.
Chemische Technologie, Allgemeine, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
Christlichen Literaturen des Orients, Die, von Dr. Anton Baumstark. **I:** Einleitung. — Das christlich-aramäische u. d. koptische Schrifttum. Nr. 527.
— — **II:** Das christl.-arab. und das äthiop. Schrifttum. — Das christl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.
Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. **I:** Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Fig. Nr. 9.
— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfkessel. M. 57 Fig. Nr. 521.
Dampfmaschinen, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. **I:** Wärmetheoretische und dampftechnische Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8.
— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.
Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilda, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.
Desinfektion von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.
Determinanten von P. B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealsch. z. Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
Deutsche Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig. M. 70 Abb. Nr 124.
Deutsche Fortbildungsschulwesen, Das, nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Sierds, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
Deutsche Geschichte von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luisengymnas. in Berlin. **I: Mittelalter** (bis 1519). Nr. 33.
— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1517 bis 1648). Nr. 34.
— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806). Nr. 35.
— — siehe auch: Quellenkunde.
Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
Deutsches Handelsrecht von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.
Deutsche Heldensage, Die, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an d. Universität Würzburg. Nr. 32.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. H. Edler von Hoffmann, Prof. an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.
Deutsche Kolonien. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.
— **II: Das Südseegebiet und Kiautschou** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.
— **III: Ostafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.
Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- u. Kunstepen u. zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. I: Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.
— — II: Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.
Deutsche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen d. höfischen Epos. Auswahl a. deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.
— **16. Jahrhunderts. I: Martin Luther u. Thom. Murner.** Ausgewählt u. mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.
— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos u. Fabel.** Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.
— **des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopstock. I:** Lyrik von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.
— — **II:** Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.
Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.
Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit v. Carl Weitbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.
— — **des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.
Deutschen Mundarten, Die, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.
Deutsche Mythologie. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Univers. Leipzig. Nr. 15.
Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.
Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.
Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.
Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheydt. Nr. 259.
Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgem. Lehren: Personen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.
— — **II:** Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.
Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.
Deutsches Unterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
— — **II:** Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
Deutsche Urheberrecht, Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. N. 263.
Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.
Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.
Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64

Deutsche Zeitungswesen, Das, von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Ausw. mit Einltg. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen Mit 68 Figuren. Nr. 87.

— **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ingen. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumstr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzg. u. Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbaues v. Dipl. Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. k. k. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.

Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Regierungsbaumeister u. Oberingen. in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.

— — II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.

Eisenbahnpolitik. Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Kech in Karlsruhe i. B. Nr. 533.

Eisenbetonbau, Der, v. Reg.-Baumstr. Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 152.

— — II: Das Schmiedeisen. M. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 153.

Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingen. Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Eiszeitalter, Das, v. Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Elastizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Ing. Max Enßlin, Prof. a. d. Kgl. Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.

Elektrischen Meßinstrumente, Die, von J. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.

Elektrische Telegraphie, Die, von Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Elektrizität. Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Genf. I: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.

— — II: Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

Elektromagnet. Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Elektrometallurgie von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Steglitz-Berlin. M. 16 Fig. Nr. 110.

Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.

— — II: Die Gleichstromtechnik. Mit 118 Fig. und 16 Taf. Nr. 197

— — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 126 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Elektrotechnik. Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Hermann Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildgn. Nr. 476.

Elsaß-Lothringen, Landeskunde von, v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Prof. Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Englische Geschichte v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — **Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte** von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. **I:** Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Figuren. Nr. 378.

— — **II:** Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Königl. Preußischen Metereologischen Instituts in Potsdam. Mit 17 Abbild. u. 5 Taf. Nr. 175.

Erdteile, Länderkunde der außereuropäischen, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Professor H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa, Länderkunde von, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Textkärtchen u. Diagrammen u. einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.

Explosivstoffe. Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Steglitz. Mit 6 Abbild. nnd 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preußischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Feldgeschütz, Das moderne, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. **I:** Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— — **II:** Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre v. W. Hauber, Dipl.-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.

— **Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Figuren. Nr. 491.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lacke, Firnisse m. ihren wicht. Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. **I:** Einf. in d. Chemie, Besprech. einiger Salze u. d. Fette u. Öle. Nr. 335.

— — **II:** Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lacke, Firnisse m. ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. **III: Harze, Lacke, Firnisse.** Nr. 337.
Feuerwaffen. Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung der gezogenen Hinterlader, unter besonderer Berücksichtigg. d. Heeresbewaffnung von Major a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbildungen. Nr. 530.
Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeinde-Finanzwesen) v. O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.
Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. **I:** Allgemeiner Teil. Nr. 148.
— — **II:** Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.
Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Dr. Josef Szinnyei, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.
Finnland. Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.
Firnisse. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Öle III.) Nr. 337.
Fische. Das Tierreich IV: Fische von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.
Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
Flora. Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.
Flußbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit vielen Abbildungen. Nr. 597.
Forensische Psychiatrie von Professor Dr. W. Weygandt, Dir. d. Irrenanstalt Friedrichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.
Forstwissenschaft v. Dr. Ad. Schwappach, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirig. bei d. Hauptstation d. forstl. Versuchswesens. Nr. 106.
Fortbildungsschulwesen, Das deutsche, nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein. gegenwärt. Gestalt v. H. Siercks, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
Franken. Geschichte Frankens v. Dr. Christ. Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.
Frankreich. Französische Geschichte v. Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.
Frankreich. Landesk. v. Frankreich v. Dr. Rich. Neuse, Direkt. d. Oberrealschule in Spandau. 1. Bändch. M. 23 Abb. im Text u. 16 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.
— — 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.
Französisch-deutsches Gesprächsbuch von C. Francillon, Lektor am orientalisch. Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596.
Französische Handelskorrespondenz v. Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
Fremdwort, Das, im Deutschen v. Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.
Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.
Fuge. Erläuterung u. Anleitung zur Komposition derselben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.
Funktionentheorie, Einleitung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen) v. Max Rose, Oberlehrer an der Goetheschule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Fig. Nr. 581.
Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildg. v. Splett, Oberleutnant im Lehrbataillon der Fußartillerie-Schießschule u. Biermann, Oberleutnant in der Versuchsbatter. d. Artillerie-Prüfungskommission. Mit 35 Fig. Nr. 560.

Gardinenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Gaskraftmaschinen, Die, von Ing. Alfred Kirschke in Kiel. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Gasthäuser und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düsseldorf. **I:** Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gasthauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.

— — **II:** Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.

Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klußmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland v. Dr. Otto Lindecke in Düsseldorf. Nr. 384.

Geodäsie. Vermessungskunde von Diplom-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an d. Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Feldmessen u. Nivellieren. Mit 146 Abb. **II:** Der Theodolit. Trigonometrische und barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildgn. Nr. 468, 469.

Geologie in kurzem Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung zusammengestellt v. Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— — **des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

Geometrie, Analytische. Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende,** von Dr. Robert Haußner, Prof. an d. Univ. Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.

Geometrische Optik, Einführung in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt u. Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.

Gesangskunst. Technik der deutschen Gesangskunst von Osk. Noë u. Dr. Hans Joachim Moser. Nr. 576.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.

Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie v. Mummenhoff, Major u. Lehrer an d. Fußartillerie-Schießschule in Jüterbog. **I:** Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— — **II:** Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Die, von Dr.-Ing. H. Kröner in Friedberg. Mit vielen Figuren. Nr. 604.

Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten v. E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.

Gewerbliche Arbeiterfrage, Die, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Gewerbliche Bauten. Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **I:** Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- u. Gewichtswesen v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gießereimaschinen von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. B. Mit 51 Figuren. Nr. 548.

Glas- und keramische Industrie (Industrie der Silikate, der Bausteine und des künstlichen Mörtels I) v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.

Gleichstrommaschine, Die, von Ing. Dr. C. Kinzbrunner in Manchester. Mit 81 Figuren. Nr. 257.

Gletscherkunde v. Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung u. Erläutergn. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue. Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl a. d. höfisch. Epos m. Anmerk. u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichs-Kollegium z. Königsberg/Pr. Nr. 22.

Graphischen Künste, Die, von Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen u. Beilagen. Nr. 75.

Griechische Altertumskunde v. Prof. Dr. Rich. Maisch, neu bearbeitet v. Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an d. deutschen Universität Prag. Nr. 49.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung d. Geschichte der Wissenschaften v. Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univ. Breslau. 2 Bändchen. Nr. 70 u. 557.

Griechischen Sprache, Geschichte der, I: Bis zum Ausgange d. klassischen Zeit v. Dr. Otto Hoffmann, Prof. a. d. Univ. Münster. Nr. 111.

Griechische u. römische Mythologie v. Prof. Dr. Herm. Steuding, Rekt. d. Gymnas. in Schneeberg. Nr. 27.

Grundbuchrecht, Das formelle, von Oberlandesgerichtsr. Dr. F. Kretzschmar in Dresden. Nr. 549.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Handelsrecht, Deutsches, von Dr. Karl Lehmann, Prof. an d. Universität Göttingen. **I:** Einleitung. Der Kaufmann u. seine Hilfspersonen. Offene Handelsgesellschaft. Kommandit- u. stille Gesellsch. Nr. 457.

— — **II:** Aktiengesellschaft. Gesellsch. m. b. H. Eing. Gen. Handelsgesch. Nr. 458.

Handelsschulwesen, Das deutsche, von Direktor Theodor Blum in Dessau. Nr. 558.

Handelsstand, Der, von Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer in Leipzig (Kaufm. Rechtsk. Bd. 2). Nr. 545.

Handelswesen, Das, von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. **I:** Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — **II:** Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts u. ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Hauptmann u. Kompagniechef im Inf.-Reg. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 in Soldau. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus d. höfischen Epos mit Anmerk. u. Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III). Nr. 337.
Hauptliteraturen, Die, des Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univ. Wien. I. II. Nr. 162, 163.
Hebezeuge, Die, ihre Konstruktion u. Berechnung von Ing. Prof. Herm. Wilda, Bremen. Mit 399 Abb. Nr. 414.
Heeresorganisation, Die Entwicklung der, seit Einführung der stehenden Heere von Otto Neuschler, Hauptmann u. Batteriechef in Ulm. I: Geschichtl. Entwicklung bis zum Ausgange d. 19. Jahrh. Nr. 552.
Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. **I:** Das Wesen u. die Berechnung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.
— — **II:** Die Ausführung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.
Hessen. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck v. Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.
Hieroglyphen von Geh. Regier.-Rat Dr. Ad. Erman, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 608.
Hochspannungstechnik von Dr.-Ing. K. Fischer in Hamburg-Bergedorf. Mit vielen Figuren. Nr. 609.
Holz, Das. Aufbau, Eigenschaften u. Verwendung v. Ing. Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abb. Nr. 459.
Hotels. Gasthäuser und Hotels von Archit. Max Wöhler in Düsseldorf. **I:** Die Bestandteile u. d. Einrichtg. d. Gasthauses. M. 70 Fig. Nr. 525.
— — **II:** Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.
Hydraulik v. W. Hauber, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 397.
Hygiene des Städtebaus, Die, von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 30 Abb. Nr. 348.
— **des Wohnungswesens, Die,** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.
Iberische Halbinsel. Landeskunde der Iberischen Halbinsel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. M. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.
Indogerman. Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Univers. Graz. M. 1 Tafel. Nr. 59.
Industrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **I:** Allgemeines üb. Anlage u. Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.
— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.
Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.
Insekten. Das Tierreich V: Insekten von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.
Instrumentenlehre v. Musikdir. Franz Mayerhoff in Chemnitz. **I:** Text. Nr. 437.
— — **II:** Notenbeispiele. Nr. 438.
Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.
— **Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. M. 52 Fig. Nr. 147.
Israel. Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
Italienische Handelskorrespondenz v. Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Professor an der Universität München. Nr 125.

Kalkulation, Die, im Maschinenbau von Ingen. H. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.
Kältemaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.
Kamerun. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.
Kanal- und Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.
Kant, Immanuel. (Geschichte der Philosophie Bd. 5) von Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena Nr. 536.
Kartell u. Trust v. Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.
Kartenkunde von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. 2 Bändchen. I: Die Projektionen. Mit 53 Fig. Nr. 30.
— — **II: Der Karteninhalt und das Messen auf Karten.** Mit 36 Fig. Nr. 599.
Kaufmännische Rechtskunde. I: Das Wechselwesen v. Rechtsanwalt Dr. Rud. Mothes in Leipzig. Nr. 103.
— **II:** Der Handelsstand v. Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer, Leipzig. Nr. 545.
Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III Nr. 139, 140, 187.
Keramische Industrie. Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gust. Rauter. **I:** Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.
Kerzenfabrikation. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u Öle II.) Mit 25 Abb. Nr. 336
Kiautschou. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.
Kinematik von Dipl.-Ing. Hans Polster, Assist. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. M. 76 Abb. Nr. 584.
Kirchenrecht v. Dr. E. Sehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.
Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.
Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.
Kolonialrecht, Deutsches, von Dr. H. Edler von Hoffmann, Prof. an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.
Kometen. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsassessor in Berlin. Nr. 534.
Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre v. Steph. Krehl. I. II. M. viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.
Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.
Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Kirsche in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.
Koordinatensysteme v. Paul B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.
Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.
Kostenanschlag siehe: Veranschlagen.
Kriegsschiffbau. Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat und Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe u. der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.
— — II. Teil: Das Zeitalter der Dampfschiffe für die Kriegsführung zur See von 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abbildungen. Nr. 472.
Kriegswesens, Geschichte des, von Dr. Emil Daniels in Berlin. **I:** Das antike Kriegswesen. Nr. 488.

Kriegswesens, Geschichte des, v. Dr. Emil Daniels in Berlin. II: Das mittelalterl. Kriegswesen. Nr. 498.
— — III: Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.
— — IV: Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.
— — V: Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.
Kristallographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.
Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
Kurvendiskussion. Algebraische Kurven von Eug. Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.
Kurzschrift siehe: Stenographie.
Küstenartillerie. Die Entwicklung der Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart v. Korvettenkapitän Huning. Mit Abbildungen und Tabellen. Nr. 606.
Lacke. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.
Lagerhäuser. Industrielle und gewerbliche Bauten. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann, Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
Länder- und Völkernamen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.
Landstraßenbau von Kgl. Oberlehrer A. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598
Landwirtschaftliche Betriebslehre v. E. Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.
Landwirtschaftlichen Maschinen, Die, von Karl Walther, Diplom.-Ing. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409.
Lateinische Grammatik. Grundriß der latein. Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.
Lateinische Sprache. Geschichte der lateinischen Sprache von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.
Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. M. 47 Abb. Nr. 77.
Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.
— **Fünfstellige,** von Professor August Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.
Lokomotiven. Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.
Lothringen. Geschichte Lothringens von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
— **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.
Lötrohrprobierkunde. Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohrs von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.
Lübeck. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.
Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.
Lüftung. Heizung und Lüftung von Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.
— — II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Luther, Martin, und Thom. Murner. Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen v. Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentliche nund 1. Sächs. Versuchsstation für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenbau, Die Kalkulation im, von Ingenieur H. Bethmann, Doz. am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.

— **Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maschinenzeichnen, Praktisches, von Ing. Richard Schiffner in Warmbrunn. I: Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kuppelungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.

— — **II:** Lager, Riemen- und Seilscheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Dipl.-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. **I:** Materialeigenschaften.— Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— — **II:** Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Ed. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Professor A. Lüdicke in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.

Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.

Mecklenburgische Geschichte von Oberlehrer Otto Vitense in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.

Meereskunde, Physische, von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Meeresströmungen. Luft- u. Meeresströmungen v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildgn. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. E. Heyn u. Prof. O. Bauer a. Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. K. Techn. Hochschule zu Berlin. I: Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.
— — II: Spez. Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.
Metallurgie von Dr. August Geitz in Kristianssand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.
Meteore. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. **II: Kometen, Meteore u. das Sternensystem.** Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
Meteorologie v. Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.
Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. 2 Bde. Nr. 371, 372.
Mineralogie von Geheimer Bergrat Dr. R. Brauns, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.
Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von O. Güntter, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.
Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitg. u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Jantzen, Dir. d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
Mittelhochdeutsche Grammatik. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. a. d. Univ. Rostock. Nr. 1.
Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.
Morphologie und Organographie der Pflanzen v. Prof. Dr. M. Nordhausen i. Kiel. M. 123 Abb. Nr. 141.
Mörtel. Die Industrie d. künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
Mundarten, Die deutschen, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.
Mundarten, Plattdeutsche, von Dr. Hubert Grimme, Professor an der Univers. Münster i. W. Nr. 461.
Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
Murner, Thomas. Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnas. zu Leipzig. Nr. 7.
Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, v. Dr. A. Möhler in Steinhaußen. 2 Bdch. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.
Musikalische Akustik von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.
Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeisp. Nr. 149, 150.
Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.
Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.
Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.
Musiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.
Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmittel v. Oberstabsarzt Prof. H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.
Nautik. Kurzer Abriß d. täglich an Bord von Handelsschiffen angew. Teils d. Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.
Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kalitsunakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 585.

Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bdch.: 1800—1852. Nr. 216.
— — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.
Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. der Univ. in Jena. **I:** Der historische u. kulturgeschichtl. Hintergrund d. Urchristentums. M. 3 Karten. Nr. 325.
— — **II:** Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Planskizze. Nr. 326.
Nibelunge Nôt, Der, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.
Nordische Literaturgeschichte I: Die isländ. u. norweg. Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfg. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 254.
Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
Öle. Die Fette u. Öle sowie d. Seifen- u. Kerzenfabrikation u. d. Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in d. Chemie, Besprechung einiger Salze u. der Fette und Öle. Nr. 335.
Öle und Riechstoffe, Ätherische, von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.
Optik. Einführung in d. geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
Orientalische Literaturen. Die Literaturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. an d. Universität Wien. **I:** Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.
— — **II:** Die Literaturen d. Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.
— **Die christlichen Literaturen des Orients** von Dr. Ant. Baumstark. **I:** Einleitg. — Das christl.-aramäische u. d. kopt. Schrifttum. Nr. 527.
— — **II:** Das christlich-arabische und das äthiopische Schrifttum. — Das christliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.
Ortsnamen im Deutschen, Die, ihre Entwicklung u. ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 573.
Ostafrika. (Die deutsch. Kolonien III) von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.
Österreich. Österreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz v. Krones, neubearb. von Dr. Karl Uhlirz, Prof. a. d. Univ. Graz. **I:** Von d. Urzeit b. z. Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.
— — **II:** Vom Tode König Albrechts II. bis z. Westf. Frieden (1440—1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.
— **Landeskunde v. Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an d. Universität Prag. Mit 10 Textillustrationen u. 1 Karte. Nr. 244.
Ovidius Naso, Die Metamorphosen des. In Auswahl mit einer Einleit. u. Anmerk. herausgeg. v. Dr. Jul. Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.
Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor d. Pädagog. Seminars a. d. Univ. Jena. Nr. 12.
— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
Paläogeographie. Geolog. Geschichte der Meere und Festländer von Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.
Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt i. Weilburg (Lahn). Nr. 482.
Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
— **und Abstammungslehre** von Dr. Karl Diener, Prof. an der Univers. Wien. Mit 9 Abbild. Nr. 460.
Palästina. Landes- und Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.
Parallelperspektive. Rechtwinklige u. schiefwinklige Axonometrie v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.
Personennamen, Die deutschen, v. Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.
Petrographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.
Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Prof. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbaulehre. Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Essen u. Ernst Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 232.

Pflanzenbiologie v. Dr. W. Migula, Professor an d. Forstakademie Eisenach. I: Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzenernährung. Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Pflanzengeographie von Professor Dr. Ludwig Diels in Marburg (Hessen). Nr. 389.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdoz. i. Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildgn. Nr. 310.

Pflanzenmorphologie. Morphologie u. Organographie d. Pflanzen von Prof. Dr. M. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenphysiologie von Dr. Adolf Hansen, Prof. an der Universität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.

Pflanzenreichs, Die Stämme des, von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kustos am Kgl. Botan. Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstak. Eisenach. Mit 50 Abb. Nr. 158.

Pflanzenzellenlehre. Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assist. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 3 Bändchen. Nr. 543/44 u. 588.

Philologie, Geschichte d. klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.

Philosophie, Gesch. der, IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. B. Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.

— — **V: Immanuel Kant** von Dr. Bruno Bauch, Professor an d. Universität Jena. Nr. 536.

Philosophie, Geschichte der, VI: Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an d. Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **Hauptprobleme der,** v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.

— **Psychologie und Logik** zur Einf. in d. Philosophie von Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Techn. Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

— **Geschichte der,** v. Prof. A. Kistner in Wertheim a. M. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberlehrer an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvorst. b. d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Pilze, Die. Eine Einführung in die Kenntnis ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen i. Text. Nr. 574.

Planetensystem. Astronomie (Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbild. Nr. 11.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayer. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

— **Die, seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

Plattdeutsche Mundarten von Dr. Hub. Grimme, Professor an der Universität Münster i. W. Nr. 461.

Poetik, Deutsche, v. Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Polarlicht. Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Kgl. Preuß. Meteorolog. Instituts zu Potsdam. Mit 15 Abb. und 7 Taf. Nr. 175.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Pommern. Landeskunde von Pommern von Dr. W. Deecke, Prof. an der Universität Freiburg i. B. Mit 10 Abb. und Karten im Text und 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation v. Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Preßluftwerkzeuge, Die, von Diplom-Ing. P. Iltis, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.

Preußische Geschichte. Brandenburgisch-Preußische Geschichte v. Prof. Dr. M. Thamm, Direktor d. Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univ. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Psychiatrie, Forensische, von Professor Dr. W. Weygandt, Dir. der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.

Psychologie und Logik zur Einführung in d. Philosophie v. Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, v. Prof. Dr. G. F. Lipps in Zürich. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Pumpen, Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Ein kurzer Überblick von Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumeister a. D. in Aachen. Mit 87 Abbildungen. Nr. 290.

Quellenkunde d. deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Radioaktivität von Dipl.-Ing. Wilh. Frommel. Mit 21 Abbildungen. Nr. 317.

Rechnen, Das, in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ing. Joh. Eug. Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.

— **Kaufmännisches,** von Prof. Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs. Erstes Buch: Allg. Teil I: Einleitung — Lehre v. d. Personen u. v. d. Sachen v. Dr. P. Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb u. Verlust, Geltendmachung u. Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abt.: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Prof. an der Universität Erlangen. Nr. 324.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgem. Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.
— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.
— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.
Rechtsgeschichte, Römische, von Dr. Robert von Mayr, Prof. an der Deutschen Univers. Prag. 1. Buch: Die Zeit d. Volksrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 577.
— — 2. Hälfte: Das Privatrecht. Nr. 578.
Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied d. Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.
Rechtswissenschaft, Einführung in die, von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. I: Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.
— — II: Das System. Nr. 170.
Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.
Redeschrift siehe: Stenographie.
Reichsfinanzen, Die Entwicklung der, von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.
Religion, Die Entwicklung der christlichen, innerhalb des Neuen Testaments von Professor Dr. Lic. Carl Clemen. Nr. 388.
— **Die, des Judentums** im Zeitalter des Hellenismus u. d. Römerherrschaft von Lic. Dr. W. Staerk (Neutestamentl. Zeitgeschichte II.) Mit einer Planskizze. Nr. 326.
Religionen der Naturvölker, Die, von Dr. Th. Achelis, Professor in Bremen. Nr. 449.
Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Professor Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
Renaissance. Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Prof. a. d. Univers. Wien. Nr. 189.
Reptilien. Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univers. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.
Rheinprovinz, Landeskunde der, von Dr. V. Steinecke, Direktor d. Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.
Riechstoffe. Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abb. Nr. 446.
Roman. Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellm. Mielke. Nr. 229.
Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Prof. a. d. Univ. Graz. 2 Bände. Nr. 128, 250.
Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. M. 8 Vollb. Nr. 45.
Römische Geschichte von Realgymnasial-Direktor Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.
Römische und griechische Mythologie von Professor Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.
Rußland. Russische Geschichte von Dr. Wilh. Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— **Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.
Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 68.
Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 66.
Russische Handelskorrespondenz von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.
Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 67.
Russische Literatur von Dr. Erich Boehme, Lektor a. d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa u. Poesie mit ausführlichen Anmerkungen u. Akzentbezeichnung. Nr. 403.
— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnungen. Nr. 404.
Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.
Russisches Vokabelbuch, Kleines, von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.

Sachenrecht. Recht d. Bürgerl. Gesetzbuches. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat i. Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz u. Eigentum.
— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 480, 481.
Sachs, Hans. Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
Sachsen. Sächsische Geschichte v. Prof. Otto Kaemmel, Rektor d. Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Landeskunde des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abb. u. 1 Karte. Nr. 258.
Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
Schattenkonstruktionen von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.
Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Huning. Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.
Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsvorsteher am Museum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abb. Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.
Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.
Schmalspurbahnen (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.
Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, a.o. Prof. a. d. Univ. Graz. Mit 67 Abb. Nr. 151.
Schreiner-Arbeiten Tischler-. (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.
Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 323.
— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.
Schule, die deutsche, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.
Schulhaus. Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.
Schulpraxis. Methodik d. Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.
Schwedisch-deutsches Gesprächsbuch von Johannes Neuhaus, Dozent der neunordischen Sprachen an der Universität Berlin. Nr. 555.
Schwedisches Lesebuch zur Einführung in die Kenntnis des heutig. Schwedens mit Wörterverzeichnis von Johannes Neuhaus, Dozent der neunordischen Sprachen an der Universität Berlin. Nr. 554.
Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene, von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.
Schweiz. Schweizerische Geschichte von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
— **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 398.
Schwimmanstalten. Öffentl. Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.
Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.
Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.
— — II: Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 336.
Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Univers. Königsberg. Nr. 291.
Silikate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. **I:** Glas u. keramische Industrie. M. 12 Taf. Nr. 233.
— — **II:** Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.
Skandinavien, Landeskunde von, (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreisschulinspektor in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.
Slawische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. **I:** Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.
— — **II:** Das 19. Jahrh. Nr. 278.
Soziale Frage. Die Entwicklung der sozialen Frage von Professor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.
Sozialversicherung von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
Spanien. Spanische Geschichte von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
— **Landeskunde der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
Spanische Handelskorrespondenz von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
Spanische Literaturgeschichte v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.
Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. **II:** Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
Spinnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
Spitzenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 358.
Staatsrecht, Allgemeines, von Dr. Julius Hatschek, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.
Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. M. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.
Statik von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: **Die Grundlehren der Statik starrer Körper.** Mit 82 Fig. Nr. 178.
— — II. Teil: **Angewandte Statik.** Mit 61 Figuren. Nr. 179.
—, **Graphische,** von Kgl. Oberlehrer Dipl.-Ing. Otto Henkel in Rendsburg. Mit vielen Figuren. Nr. 603.
Steinhauerarbeiten. Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.
Stenographie. Geschichte der Stenographie von Dr. Arthur Mentz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.
Stenographie n. d. System v. F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.
— **Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Stenographie. Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Studienrat d. Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

— **Redeschrift.** Lehrbuch der Redeschrift d. Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeisp., Lesestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 66 Fig. Nr. 97.

Sternsystem. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univers. Kiel. **II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem.** Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Steuersysteme des Auslandes, Die, v. Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Stilkunde v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Straßenbahnen von Dipl.-Jng. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.

Strategie von Löffler, Major im Kgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd. Nr. 505.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr. 456.

Südseegebiet. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

Talmud. Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Talmudproben von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 583.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Technische Tabellen und Formeln von Dr.-Jng. W. Müller, Dipl.-Jng. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke d. Maschinenbaues, Schiffsbaues u. d. Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Dtsch.-Engl. Nr. 395.
— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.
— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.
— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Technologie, Allgemeine chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg Nr. 113.

— **Mechanische,** v. Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Teerfarbstoffe, Die, mit bes. Berücksichtig. der synthetisch. Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule, Dresd. Nr. 214.

Telegraphenrecht v. Postinspektor Dr. jur. Alfred Wolcke in Bonn. **I:** Einleitung. Geschichtliche Entwicklung. Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.

— — **II:** Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, besonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis d. Telegraphie z. Publikum. Nr. 510.

Telegraphie, Die elektrische, v. Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments v. Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.

— **Die Entstehung des Neuen Testaments** v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textilindustrie. I: Spinnerei und Zwirnerei v. Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

— **II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. M. Gürtler, Geh. Regierungsrat i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. M. 29 Fig. Nr. 185

Textilindustrie. III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. a. d. Preuß. höheren Fachschule f. Textilindustr. in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. M. 54 Fig. Nr. 242.

— **Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen** v. M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Nr. 2.

Thüringische Geschichte v. Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Tierbiologie. Abriß der Biologie der Tiere v. Dr. Heinrich Simroth, Prof a. d. Univ. Leipzig. Nr. 131.

Tiere, Entwicklungsgeschichte der, von Dr. Johs. Meisenheimer, Prof. der Zoologie a. d. Universität Jena. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— — **II:** Organbild. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Tiergeographie v. Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie a. d. Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. a. d. Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere v. Oberstudienr. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorst. d. Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. M. 15 Abb. Nr. 282.

— **III: Reptilien und Amphibien** von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

— **IV: Fische** von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Nr. 356.

— **V: Insekten** von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. M. 97 Fig. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Essen. Nr. 228.

Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Trust. Kartell und Trust von Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.

Turnkunst, Geschichte der, von Dr. Rudolf Gasch, Prof. a. König-Georg-Gymnasium Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Österreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillustr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnyei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.

Ungarische Sprachlehre v. Dr. Josef Szinnyei, o. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 595.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.

— — **II.** Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Untersuchungsmethoden, Agrikulturchemische, von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moritz Hoernes, Professor an der Universität Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.
— **Das deutsche,** an literarischen, künstlerischen u. gewerbl. Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moritz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. **I:** Steinzeit. Mit 40 Bildergrupp. Nr. 564.
— — **II:** Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.
— — **III:** Eisenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.
Vektoralanalysis v. Dr. Siegfr. Valentiner, Prof. an der Bergakademie in Clausthal. Mit 11 Figuren. Nr. 354.
Veranschlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch üb. d. Wesen d. Kostenanschlags v. Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.
Vereinigte Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium in Berlin. I. Teil: Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.
— — **II.** Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 382.
Vergil. Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. von Dr. Julius Ziehen. **I:** Einleitung und Aeneis. Nr. 497.
Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.
— — **II:** Der Theodolit. Trigonometrische u. barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.
Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 180.
Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. **I:** Allgemeine Versicherungslehre. Nr. 262.
Völkerkunde v. Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos d. ethnogr. Sammlung d naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent a. d. Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
Völkernamen. Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.
Volksbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung u. Verwaltung v. Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.
Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.
Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.
Volkswirtschaftspolitik v. Präsident Dr. R. van der Borght, Berlin. Nr. 177.
Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Fig. im Text. Nr. 508.
Waldeck. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck von Professor Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.
Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnas. in Weimar. Nr. 46.
Walther von der Vogelweide, mit Auswahl a. Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und an der Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.
Walzwerke. Die, Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holverscheid, Oberlehrer a. d. Kgl. Maschinenbau- u. Hüttenschule in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.
Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Prof. u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. **I. Teil:** Unorganische Waren. M. 40 Abb. Nr. 222.
— — **II. Teil:** Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenbezeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat J. Neuberg, Mitglied des Kais. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. T.: Licht u. Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.

Wärmekraftmaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaschinen von M. Röttinger, Diplom-Ing. in Mannheim. M. 73 Fig. Nr. 2.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Wäscherei. Textilindustrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung v. Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorst. d. landwirtsch. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. **I:** Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.

— — **II:** Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 102 Abbildungen. Nr. 542.

Wasserversorgung der Ortschaften v. Dr.-Ing. Robert Weyrauch, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.

Weberei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wechselstromerzeuger von Ing. Karl Pichelmayer, Prof. an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.

Wechselwesen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Wehrverfassung, Deutsche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München. Nr. 401.

Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen. **I:** Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.

— — **II:** Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Shaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 199 Abbild. Nr. 562.

Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textkarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. **I:** Generalklausel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswes., Angestelltenbestechung. Nr. 339.

— — **II:** Kreditschädigung, Firmen- u. Namenmißbrauch, Verrat v. Geheimnissen, Ausländerschutz. Nr. 535.

Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. **I:** Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — **II:** Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.

Wirkerei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wirtschaftlichen Verbände, Die, v. Dr. Leo Müffelmann in Rostock. Nr. 586.
Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.
Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. **I:** Das Wohnungswesen i. d. mod. Stadt. Nr. 495.
— — **II:** Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.
Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.
— **Deutsches,** von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.
— **Technisches,** enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.
— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.
— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.
Württemberg. Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. a. Karlsgymn. i. Stuttgart. Nr. 462.
— **Landeskunde des Königreichs Württemberg** von Dr. K. Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.
Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.
Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.
Zeitungswesen, Das deutsche, von Dr. R. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.
— **Das moderne,** (Syst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.
Zeitungswesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.
Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.
Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.
Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. **I:** Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.
— — **II:** Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.
Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.
Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.
Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städtischen Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.
Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.
Zwirnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Soeben erschien:

Der deutsche Student

Von

Prof. Dr. Theobald Ziegler

Elfte und zwölfte Auflage

Gebunden M. 3.50

Diese „Studentenpredigten", wie sie Paulsen genannt hat, haben sich unter der studierenden Jugend viele Freunde erworben. Und so war es nicht zu verwundern, daß das Buch seit seinem Erscheinen fast alljährlich eine neue Auflage erlebte. Herausgewachsen war es aus der fin-de-siècle-Stimmung vor der Jahrhundertwende, die besonders in studentischen Kreisen die Herzen höher schlagen und das Blut rascher kreisen ließ, eben deswegen aber auch nach besonnener Führung sich sehnte. Eine solche fanden sie hier. Den Auflagen im neuen Jahrhundert fügte der Verfasser eine Nachtragsvorlesung hinzu zur Überleitung in ruhigere Bahnen und zur Ergänzung durch manches inzwischen Neugewordene. Im Winter 1905/06 aber hat er in Straßburg die Vorlesung über den deutschen Studenten noch einmal gehalten und hier vor allem die Vorgänge jener bewegten Zeit, des sogenannten „Hochschulstreites" und des Kampfes gegen die konfessionellen Korporationen freimütig und kritisch besprochen. Der neuen Auflage ist die Vorlesung in dieser späteren Fassung, wenigstens in der ersten größeren Hälfte, zugrunde gelegt worden. Die fin-de-siècle-Stimmung ist verschwunden, dafür sind die Probleme, die das Studentenleben im ersten Jahrzehnt des 20sten Jahrhunderts bewegt haben und bewegen, in den Vordergrund gerückt und so das Buch durchaus modernisiert und wieder ganz aktuell geworden. Dabei hat es eine nicht unbeträchtliche Erweiterung erfahren. Und doch ist der Geist des Buches der alte geblieben, es ist der Geist der Freiheit, die als akademische Studenten und Professoren gleichmäßig am Herzen liegt, und der Geist eines kräftigen sittlichen Idealismus, der sich nicht fürchtet, Jünglinge zu wagen, damit Männer aus ihnen werden. Und auch der alte gute Freund des deutschen Studenten ist der Verfasser geblieben, der ihn versteht, weil er ihn liebt. Das zeigt gleich von vornherein die Widmung des Buches an die Straßburger Studentenschaft. So ist es beim Abgang Zieglers von Straßburg zu einem Vermächtnis an seine jungen Freunde auf allen deutschen Hochschulen geworden, und soll nun auch in der neuen Gestalt wieder vielen eine Hilfe werden und ein Halt.

Roßberg'sche Buchdruckerei, Leipzig

GJG
1785