

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

~~26~~

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Von
Dr.-Ing. L. Zipperer
I
Allgemeine
Schwingungsgleichungen

Mit 49 Abbildungen



BIBLIOTEKA

ZWIĄZKU STUDENTÓW INŻYNIERII W KRAKOWIE

Liczba katalogu

149

*

953

Sammlung Götschen

Unser heutiges Wissen in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen

Jeder Band in Leinwand geb. RM. 1.62

Bei gleichzeitiger Abnahme gleicher oder inhaltlich zusammengehöriger
Bände treten folgende Gesamtpreise in Kraft: 10 Exemplare RM. 14.40;

25 Exemplare RM. 33.75; 50 Exemplare RM. 63.—

Walter de Gruyter & Co.

vormalig O. J. Götschen'sche Verlagsbuchhandlung / J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leicht-
verständliche und übersichtliche Einführung
in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und
Technik zu geben; in engem Rahmen, auf
streng wissenschaftlicher Grundlage und unter
Berücksichtigung des neuesten Standes der
Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen
zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne
Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber
dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zu-
sammenhange miteinander, so daß das Ganze,
wenn es vollständig vorliegt, eine einheitliche,
systematische Gesamtdarstellung bildet.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295798

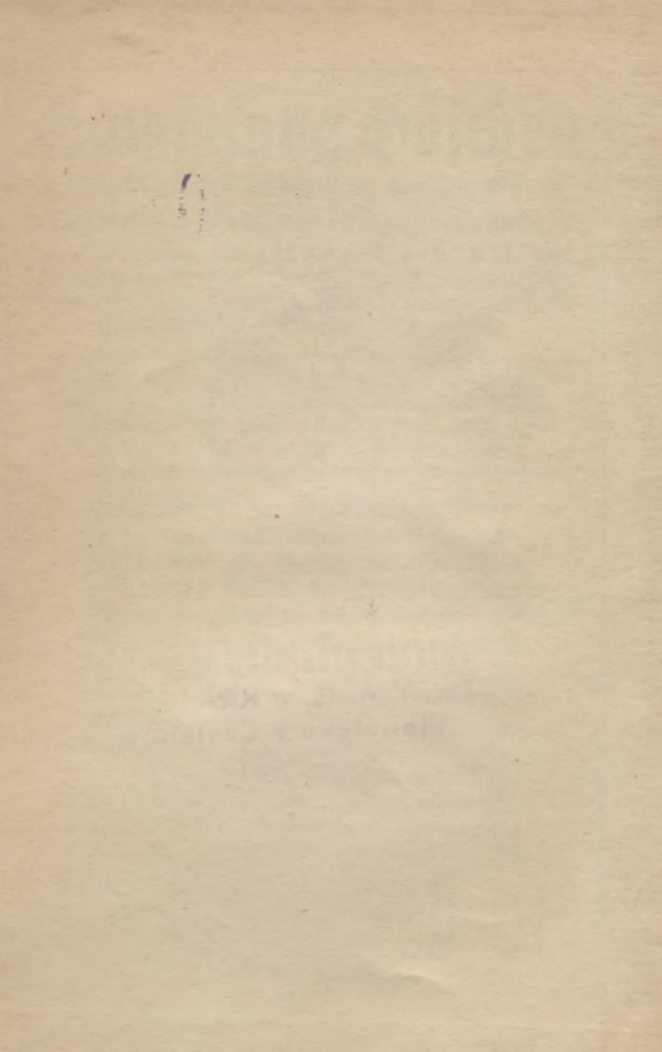
A u e
der bi

f f e
offfrei



ZWIĄZEK STUDENTÓW INŻYNIERII
PRZY A. G. w KRAKOWIE
Biblioteka i Czytelnia

Nr. 149



Sammlung Götschen

Technische Schwingungslehre

Von

Dr.-Ing. L. Zipperer

in Oppau

I

Allgemeine
Schwingungsgleichungen

Mit 49 Abbildungen

149



Berlin und Leipzig

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Götschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

1927



~~I 26~~

Literaturangabe.

- Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau. (Springer.)
- Duffing, Erzwungene Schwingungen. (Vieweg.)
- Föppl, A., Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. I und IV. (Teubner.)
- Föppl, O., Grundzüge der Technischen Schwingungslehre. (Springer.)
- Hort, W., Technische Schwingungslehre. (Springer.)
- Hort, W., Differentialgleichungen des Ingenieurs. (Springer.)
- „Hütte“. Taschenbuch des Ingenieurs.
- Lorenz, H., Lehrbuch der Technischen Physik Bd. I 1, 2. (Springer.)
- Lorenz, H., Lehrbuch der Technischen Physik Bd. IV. (Oldenbourg.)
- Schneider, E., Mathematische Schwingungslehre. (Springer.)
- V. d. I. Sonderheft Mechanik 1925.

I 301463

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht, von der Verlagshandlung vorbehalten.

Druck von C. G. Röder G.m.b.H., Leipzig. 925126.

Akc. Nr. 2520 51
BPK - B - 1120 17

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|--|-------|
| Einführung | 5 |
| I. Ableitung der Schwingungsgleichungen für den Massenpunkt | |
| 1. Eigenschwingungen | 20 |
| a) Schwingungen ohne Dämpfung | 20 |
| (Zahlenbeispiel) | 28 |
| b) Schwingungen mit Dämpfung | 29 |
| α) Dämpfung proportional der Geschwindigkeit | 29 |
| (Zahlenbeispiel) | 37 |
| β) Dämpfung durch Reibung | 44 |
| 2. Erzwungene Schwingungen | 46 |
| a) Schwingungen ohne Dämpfung | 46 |
| b) Schwingungen mit Dämpfung | 49 |
| (Zahlenbeispiel) | 58 |
| 3. Zusammengesetzte Schwingungen | 59 |
| II. Bestimmung der Schwingungsdauer einfacher Systeme | |
| 1. Schwingungssysteme unter Wirkung der Schwerkraft | 62 |
| a) Das mathematische Pendel | 62 |
| b) Das physische Pendel | 64 |
| (Zahlenbeispiele) | 66 |
| c) Das mathematische Pendel mit großem Ausschlag | 69 |
| d) Das Drehpendel (Bifilarpendel) | 75 |
| 2. Schwingungssysteme unter Wirkung elastischer Kräfte | 78 |
| A. Ohne Berücksichtigung der Masse des elastischen Teils | 78 |
| a) Systeme mit Längsschwingungen | 78 |
| α) Eingespannter Stab mit Endmasse | 78 |
| β) Zwei Massen mit zwischenliegender Feder | 80 |
| γ) Systeme mit Übersetzungen im elastischen Teil | 82 |
| (Beispiele) | 84 |

| | Seite |
|--|-------|
| b) Systeme mit Querschwingungen | 85 |
| α) Eingespannter Stab mit Endmasse | 85 |
| β) Balken mit zwei Massen | 87 |
| c) Systeme mit Drehschwingungen | 89 |
| α) Eingespannte Welle mit Schwungscheibe | 89 |
| β) Welle mit zwei Schwungscheiben | 92 |
| B. Mit Berücksichtigung der Masse des elastischen Teils | 93 |
| α) Längsschwingungen eines Stabes | 93 |
| β) Drehschwingungen eines Stabes | 102 |
| γ) Querschwingungen eines Stabes | 104 |

Behandelte Schwingungsgleichungen.

| | |
|---|-----|
| $m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = 0$ | 21 |
| $m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0$ | 30 |
| $m \frac{d^2 x}{dt^2} \pm R + cx = 0$ | 44 |
| $m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = Q \sin \eta t$ | 46 |
| $m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = Q \sin \eta t$ | 50 |
| $a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ | 94 |
| $b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ | 103 |
| $c^2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0$ | 105 |



Einführung.

Mit der Einführung von Kraftmaschinen mit hoher Drehzahl traten, insbesondere bei der leichten Bauweise der Kraftfahr- und Luftfahrzeuge, Brucherscheinungen auf, deren Ursache in Zusatzbeanspruchungen durch schwingende Bewegungen gefunden wurde. Aufgabe des Schwingungsingenieurs ist es, diese zu vermeiden. Damit ist sein Tätigkeitsfeld nicht erschöpft, er kann, wie neuere Arbeiten zeigen, diese auf der einen Seite gefürchteten Erscheinungen benutzen zum Hervorrufen gewünschter Zustände, ja selbst zur Übertragung von Energie.

Ehe die mathematischen Formeln der Schwingungsvorgänge abgeleitet werden, wollen wir an Hand eines gedachten Versuchsmodells die physikalischen Vorgänge bei einer Schwingung ins Gedächtnis zurückrufen. Ferner sind die Formeln aus der Mechanik und Festigkeitslehre eingeflochten, die zum Verständnis des Stoffes unbedingt beherrscht werden müssen.

An einem elastischen Faden befindet sich, wie Abb. 1 zeigt, ein Körper *K*, dessen Masse

$m = \frac{G}{g}$ ist, wenn *G* das Gewicht

und *g* die Erdbeschleunigung

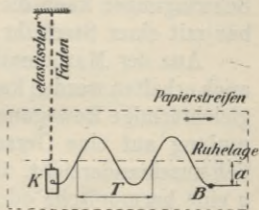


Abb. 1.

ist. Ein an dem Körper befestigter Schreibstift zeichnet seine Bewegungen auf einen Papierstreifen auf, der durch ein Uhrwerk mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt wird.

Bringt man den Körper aus seiner Ruhelage heraus, so schwingt er, im Punkte B sich selbst überlassen, um seine Ruhelage hin und her, und zwar bleibt, wenn keinerlei Widerstandskräfte wirken würden, der Ausschlag stets gleich groß. Dies sehen wir aus dem aufgezeichneten Schwingungsdiagramm. Den größten Schwingungsaus- schlag a nennt man Amplitude. Die Kurve selbst kennen

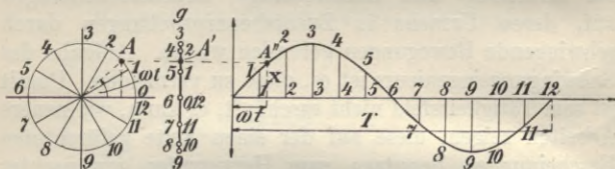


Abb. 2.

wir, sie ist die Sinuskurve. Die Zeit, die der Körper braucht zur Ausführung einer vollen Schwingung, läßt sich aus dem Diagramm errechnen, wenn die Geschwindigkeit des Papierstreifens bekannt ist; man braucht nur die Länge für eine ganze Periode der Sinuskurve festzustellen. Bei langsamen Schwingungen kann die Schwingungsdauer auch unmittelbar mit einer Stechuhr ermittelt werden.

Aus der Mathematik ist bekannt, daß die Sinuslinie auch erhalten werden kann, wenn man, wie Abb. 2 zeigt, die gleichförmige Bewegung eines Punktes a auf einem Kreisumfang auf eine Gerade projiziert und die Punkte zeitlich auseinanderzieht. Der Punkt A' führt auf der Geraden g eine harmonische oder eine Schwingungsbewegung aus. Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem

sich bewegenden Punkt ist der Fahrstrahl, dieser legt bei der gleichförmigen Bewegung des Punktes A in gleichen Zeiten gleiche Winkel zurück.

Ehe wir zu unserem Versuch zurückkehren, sollen einige Formeln aus der Bewegungslehre zusammengestellt werden.

Ist:

s : der in der Zeit t zurückgelegte Weg,

v : die Geschwindigkeit,

p : die Beschleunigung,

α : der vom Fahrstrahl zur Zeit t zurückgelegte Winkel,

r : der Halbmesser des Kreises,

ω : die Winkelgeschwindigkeit,

u : die Umfangsgeschwindigkeit,

b : die Umfangsbeschleunigung,

ε : die Winkelbeschleunigung,

T : die Umlaufszeit,

n : die Drehzahl in der Zeiteinheit (= Frequenz),

so bestehen zwischen diesen Größen folgende Beziehungen:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (1)$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (2)$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (4)$$

$$u = r \cdot \omega = r \frac{d\alpha}{dt}, \quad (5)$$

$$b = r \cdot \varepsilon = r \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (6)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (7)$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (8)$$

Die Gleichung für die harmonische Bewegung lautet:

$$x = a \sin \alpha = a \sin \omega t = a \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (9)$$

worin ist:

x der augenblickliche Ausschlag,
 a die Amplitude.

Nach diesen Wiederholungen wenden wir uns wieder dem Beispiel zu und führen nacheinander Versuche aus mit den Massen:

$$m_1 = 2m,$$

$$m_2 = 3m,$$

$$m_3 = 4m.$$

Für diese Anordnungen finden wir folgende Werte für die Schwingungsdauer:

$$T_1 = \sqrt{2} T,$$

$$T_2 = \sqrt{3} T,$$

$$T_3 = \sqrt{4} T,$$

d. h. die Schwingungsdauer ist proportional der Quadratwurzel aus der Masse des schwingenden Körpers. Dieses Ergebnis läßt sich mathematisch ausdrücken durch die Formel:

$$T = \text{const} \cdot \sqrt{m}, \quad (10)$$

worin die Konstante noch unbekannt ist.

Bei diesem Versuch haben wir den elastischen Faden unverändert beibehalten. Wir müssen nun noch unter-

suchen, welchen Einfluß die Fadenelastizität auf die Schwingungsdauer hat. Aus der Festigkeitslehre¹⁾ kennen wir folgende Beziehungen:

$$\text{Spannung } \sigma = \frac{P}{F} \left(\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \right) \quad (11)$$

$$\text{Dehnung } \varepsilon = \frac{\lambda}{l} \left(\frac{\text{Verlängerung}}{\text{Stablänge}} \right), \quad (12)$$

ferner das Hooksche Gesetz:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma, \quad (13)$$

worin $\alpha = \frac{1}{E}$, also gleich dem reziproken Wert des Elastizitätsmoduls ist. Mit den vorigen Beziehungen läßt sich dieses Gesetz auch in der Form schreiben:

$$\lambda = \alpha \frac{P}{F} l.$$

Um unabhängig von der Formgebung des elastischen Teiles des Schwingungssystems zu sein, rechnet man in der Schwingungslehre mit der Direktionskraft oder Rückstellkraft c , das ist diejenige Kraft, die die Längenänderung 1 cm hervorruft. Bedeutet also allgemein f die Durchfederung unter der Wirkung der Kraft P , so erhält man:

$$c = \frac{P}{f}. \quad (14)$$

Diese Größe können wir durch Versuch bestimmen oder nach den Formeln der Festigkeitslehre berechnen. Für den elastischen Stab ergibt sich wegen $f = \lambda$:

$$c = \frac{FE}{l} \quad (15)$$

¹⁾ Vgl. z. B. Hauber, Fertigungslehre: Sammlung Götschen Nr. 288.

oder für $F = \text{constant}$ und gleiches Material ($E = \text{const.}$)

$$c = \frac{\text{const}}{l}. \quad (16)$$

Nach diesen Betrachtungen führen wir den Versuch z. B. mit dem ersten Körper aus und wählen verschiedene Längen des elastischen Fadens, z. B.

$$\begin{aligned} l_1 &= l & \text{folgl. } c_1 &= c \\ l_2 &= \frac{1}{2} l & c_2 &= 2c \\ l_3 &= \frac{1}{3} l & c_3 &= 3c \\ l_4 &= \frac{1}{4} l & c_4 &= 4c. \end{aligned}$$

Für diese Werte ergeben sich die Schwingungszeiten

$$T_1 = T$$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} T$$

$$T_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} T$$

$$T_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} T$$

und hiermit allgemein die Beziehung

$$T = \frac{\text{const}}{\sqrt{c}}, \quad (17)$$

d. h. die Schwingungsdauer ist bei gleicher Masse umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Direktionskraft.

Die Zusammenfassung der Einzelformeln ergibt:

$$T = \text{const} \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (18)$$

Später finden wir durch Rechnung, daß die Konstante in Gl. 18 2π ist, womit die allgemeinen Gleichungen lauten:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (19)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (20)$$

Wird in unserer gedachten Versuchsanlage eine Schraubenfeder an Stelle des Fadens verwendet, für die sich die Durchfederung errechnet aus:

$$f = \frac{64ir^3}{d^4} \cdot \frac{P}{G}, \quad (21)$$

worin ist:

- i Windungszahl,
- r Windungsdurchmesser,
- d Drahtdurchmesser,
- G Gleitmodul des Materials,

so erhält man bei sonst unveränderten Abmessungen:

$$c = \frac{\text{const}}{i}, \quad (22)$$

Der Versuch wäre also durchzuführen mit $i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}i$.

Aus den Betrachtungen ergibt sich die wichtige Forderung, daß das Hooksche Gesetz erfüllt sein muß, daß also die Materialbeanspruchungen des federnden Teiles unterhalb der Proportionalitätsgrenze des Materials liegen müssen.

Zu betrachten wäre nun das Spiel der Kräfte während einer Schwingung. Zu einer Zeit t befinde sich der Körper in der Entfernung x von der Ruhelage. Diese berechnet sich aus

$$x = a \sin \omega t,$$

wenn a die Schwingungsamplitude ist. In dieser Lage wirkt durch die Feder auf die Masse die Kraft

$$K = cx. \quad (23)$$

Die Beschleunigung der Masse zur Zeit t ist

$$p = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (24)$$

Aus der Beziehung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

ergibt sich die Trägheitskraft zu

$$P = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (25)$$

Da die Summe der elastischen Kraft und der Massenkraft dauernd 0 sein muß, ergibt sich:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0. \quad (26)$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung, der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, ergibt, wie im Abschnitt I abgeleitet wird, für die Schwingungsdauer die bereits durch Versuch ermittelte Gl. 19.

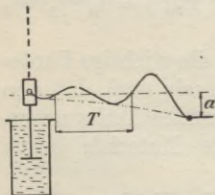


Abb. 3.

Wir wiederholen den Versuch mit m und c , und zwar mit der Abänderung, daß an dem Körper eine in eine Flüssigkeit tauchende Dämpfungsscheibe befestigt wird, deren Masse klein gegenüber der Hauptmasse sei (Abb. 3). Die Schwingungsauslässe werden immer kleiner, der Körper kommt nach kurzer Zeit wieder

zur Ruhe. Die späteren Ableitungen zeigen, daß die Abnahme der Ausschläge nach einer geometrischen Reihe erfolgt. Weiter stellen wir durch Beobachtung oder aus dem aufgezeichneten Diagramm fest, daß die Schwingungsdauer ein wenig größer geworden ist. Verwendet man statt des Wassers eine sehr zähe Flüssigkeit, so kann eintreten, daß der Körper überhaupt keine Schwingungen mehr ausführt, sondern langsam in seine Ruhelage zurückkriecht (aperiodische Bewegung). Das Gesetz der Widerstandskraft, welche die Dämpfung verursacht, stellt streng genommen keinen einfachen Ausdruck dar. In den weitaus meisten Fällen genügt es jedoch, die Widerstandskraft proportional der Geschwindigkeit anzunehmen, also

$$W = k \frac{dx}{dt}. \quad (27)$$

Hierin ist k der Dämpfungsfaktor, dessen Größe abhängig ist von der Formgebung des Körpers und von den Eigenschaftsgrößen der Flüssigkeit. Zur Schwingungsgleichung 26 kommt noch der Wert W hinzu, so daß diese für die gedämpfte Schwingung lautet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (28)$$

Wir denken uns weiter den Körper durch Gleitschienen geführt (Abb. 4), und zwar ohne Dämpfungsscheibe. Die Widerstandskraft hat, solange der Reibungsfaktor als konstant angesehen werden kann, eine konstante Größe. Der Versuch zeigt, daß bei reiner Reibungsdämpfung die Schwingungsdauer genau gleich

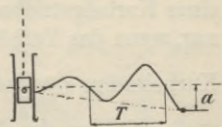


Abb. 4.

ist derjenigen der ungedämpften, freien Schwingung. Nur die Schwingungsausschläge nehmen wieder ab, und zwar jedesmal um den gleichen Betrag, also nach einer arithmetischen Reihe. Schwingungen mit reiner Reibungsdämpfung finden wir z. B. bei den Regulatoren der Kraftmaschinen¹⁾.

In der ersten Versuchsreihe beobachteten wir die Vorgänge bei den freien oder Eigenschwingungen. Wir gehen nun zu den erzwungenen über, die entstehen, wenn eine äußere periodische Kraft auf das System wirkt. Dies



Abb. 5.

können wir in der Versuchsanordnung verwirklichen, indem wir den bisher festliegenden Einspannpunkt des elastischen Fadens oder der Feder periodisch bewegen. Da jeder periodische Vorgang, wenn die Perioden sich wiederholen, als eine Summe reiner Sinuskurven dargestellt werden kann, genügt es, den Fall zu betrachten, daß der Aufhängepunkt eine harmonische Bewegung ausführt.

Ein Mittel, dies zu erreichen, liegt in der Anwendung der Kurbelschleife, wie sie in Abb. 5 dargestellt ist.

Ferner können wir eine harmonische Bewegung mittels eines Kurbelgetriebes erzeugen; streng genommen jedoch nur, wenn das Verhältnis der Stangenlänge l (Abb. 6) zum Kurbelradius r unendlich groß ist. Wählt man $\frac{l}{r}$ möglichst groß, so kann der Kurbeltrieb ebenfalls mit großer Annäherung angewandt werden. Die Abweichungen des Punktes B im Beispiel von der harmonischen Bewegung,

¹⁾ Vgl. Kröner, Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen: Sammlung Götschen Nr. 604 und u. a. Tolle, Regelung, 3. Aufl.

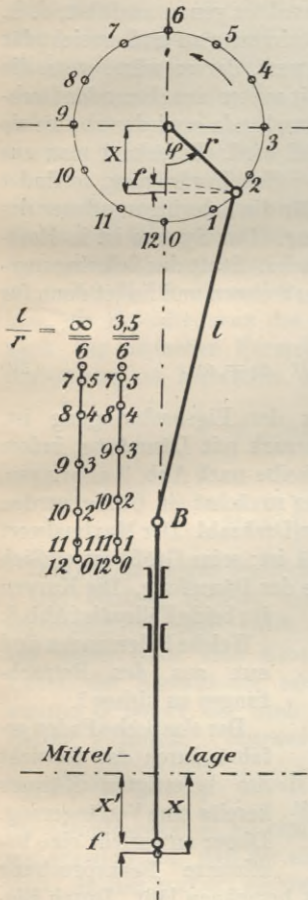


Abb. 6.

$\frac{l}{r} = \infty$, ist in der Abb. 6 angegeben. Der Höchstwert des Fehlers f wird erreicht für $\varphi = 90^\circ$ ¹⁾.

Die Versuchsanordnung für den dämpfungsreichen Fall zeigt Abb. 7. Der Kurbelradius ist r . Der Antrieb ist so gewählt, daß die Winkelgeschwindigkeit ω von 0 bis zum Höchstwert stetig verändert werden kann, etwa durch Anwendung einer Friktionscheibe, eines Kegelriementriebes und eines regelbaren Gleichstrommotors.

Wir beginnen den Versuch mit unendlich langsamer Drehgeschwindigkeit, $\omega = 0$, und finden, daß der Körper

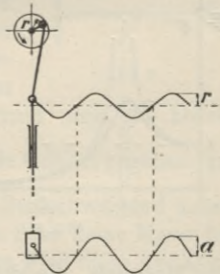


Abb. 7.

¹⁾ Vgl. Müller, Dynamik: Sammlung Götschen Nr. 902 u. 903.

die Bewegung des Aufhängepunktes genau ausführt, d. h. $a = r$. Mit zunehmenden ω nimmt a zu und erreicht für ein bestimmtes ω den Größtwerth, der ∞ wäre, wenn die Versuchsanlage es zuließe. Mit weiter zunehmender Drehgeschwindigkeit nimmt die Amplitude a wieder ab, bis sie schließlich für $\omega = \infty$ zu Null wird. Berechnet man aus ω für $a = \infty$ die Dauer einer vollen Umdrehung, so findet man den gleichen Wert, wie für die Schwingungsdauer des Systems bei freier Schwingung. Das System ist in Resonanz mit der erregenden Ursache. Statt der Schwingungsdauer T kann man auch mit ω rechnen und findet dann für den Resonanzfall:

$$\frac{a}{r} = \infty \quad \text{für} \quad \omega = \omega_e, \quad (29)$$

worin ω_e die Kreisfrequenz der Eigenschwingung ist.

Wiederholen wir diesen Versuch mit Dämpfung, indem wir wieder die Dämpfungsscheibe nach Abb. 3 anbringen, so finden wir auch hier wieder zunächst ein Größerwerden der Ausschläge mit steigender Drehzahl. Der Maximalwert tritt jedoch ein ehe $\omega/\omega_e = 1$ ist; seine Größe ist endlich und hängt ab von der Stärke der Dämpfung. Die Kurven für beide Fälle zeigt Abb. 8.

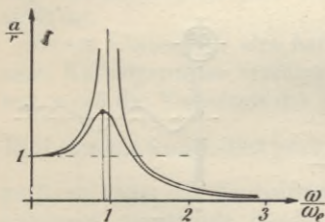


Abb. 8.

Welche Folgerungen sind nun aus den Betrachtungen zu ziehen?

Der elastische Faden erfährt durch das Gewicht des befestigten Körpers bereits eine Verlängerung. Dieser entspricht eine bestimmte Beanspruchung des Materials, die sich leicht berechnen läßt. Durch Einwirkung periodischer Kräfte gerät der Körper in schwin-

gende Bewegung. Der Faden dehnt sich weiter um den Betrag a . Im Resonanzgebiet ist nun a sehr groß. Diese Zusatzbeanspruchungen können erhebliche Werte annehmen und einen Bruch des Fadens hervorrufen. Aufgabe des Schwingungsingenieurs ist es also das Resonanzgebiet zu meiden, d. h. er muß c und m so wählen, daß $\omega_e \cong \omega$ ist. Größere Schwingungsausschläge treten, wie wir später noch sehen werden, nur auf bei kleinerer Dämpfung. Für diesen Fall fällt jedoch das Ausschlagsmaximum fast mit dem der dämpfungsfreien Schwingung zusammen. Es genügt deshalb für die meisten Fälle, die Schwingungsdauer bzw. die Eigenfrequenz des schwingungsfähigen Systems nach der einfachen Formel für dämpfungsfreie Eigenschwingung zu berechnen, also nach Gleichung:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (30)$$

oder

$$\omega_e = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (31)$$

Dies soll an einigen Beispielen noch weiter gezeigt werden.

Das System bestehe aus einem eingespannten Stab (Abb. 9), der am freien Ende eine Masse trägt.

Unter der Einwirkung seines Gewichtes G federt der Stab um den Betrag f durch.

Hieraus berechnet sich die Direktionkraft zu $c = \frac{G}{f}$. Damit sind alle Größen gegeben, um

die Eigenfrequenz ω_e zu ermitteln. Stillschweigend haben wir angenommen, daß der elastische Stab keine Masse besitzt. In den weitaus meisten Fällen wird diese Annahme auch zulässig sein.

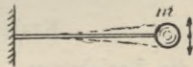


Abb. 9.

In gleicher Weise wird das Beispiel zu behandeln sein, wenn ein zweifach gelagerter Balken (Abb. 10) eine Masse trägt. Auch hier kann die Durchfederung durch Versuch bestimmt oder nach den Lehren der Festigkeitslehre errechnet werden. Die Schwingungen der beiden Beispiele nennt man Querschwingungen, weil die Ausschläge quer zur Stabachse liegen oder Biegungsschwingungen, da der Stab auf Biegung beansprucht wird.

Wir wählen nochmals das Beispiel des eingespannten Stabes, jedoch mit einer am Ende sitzenden Schwingscheibe (Abb. 11). Diese Scheibe kann Schwingungen ausführen um ihre Achse. Diese Schwingungen nennt man

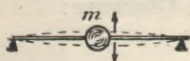


Abb. 10.

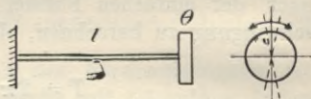


Abb. 11.

Drehschwingungen oder, wenn der federnde Teil auf Verdrehung beansprucht wird, auch Torsionsschwingungen. Die Berechnung der Eigenfrequenz ist auch hier einfach. Für die Drehbewegung folgt aus:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

die Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{Drehmoment} &= \text{Massenträgheitsmoment} \\ &\times \text{Winkelbeschleunigung.} \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich, wie wir später noch ableiten werden:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{c}} \quad (32)$$

und

$$\omega_e = \sqrt{\frac{c}{\theta}}, \quad (33)$$

worin: θ das Massenträgheitsmoment und
 c das Direktionsmoment,

also dasjenige Moment ist, welches den Winkelausschlag 1 hervorrufft, gemessen im Bogenmaß.

Die Berechnungsart kann weiterhin auch angewendet werden für Schwingungen in einem U-förmig gebogenen, mit Flüssigkeit gefüllten Rohr (Abb. 12). Mit l als Flüssigkeitslänge ergibt sich die Masse der schwingenden Säule zu:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{F \cdot l \cdot \gamma}{g}. \quad (34)$$

Um die Direktionskraft zu bestimmen, denken wir uns die Säule in einem Schenkel um 1 cm ausgeschwungen. Als rückwirkende Kraft wirkt demnach das Gewicht einer Säule von 2 cm. Hieraus wird:

$$c = F \cdot 2 \cdot \gamma. \quad (35)$$

Setzt man diese Werte in die Gl. 30 ein, so erhält man für die Schwingungsdauer den Ausdruck

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \quad (36)$$

Dieses Beispiel soll nur angeführt sein, um die Verwendungsmöglichkeit der allgemeinen Formel für die Berechnung der Dauer einer Schwingung zu zeigen.

Nach diesen Betrachtungen wollen wir nun im nächsten Abschnitt die Ableitung der allgemeinen Schwingungsgleichungen für einen schwingenden Massenpunkt kennenlernen.

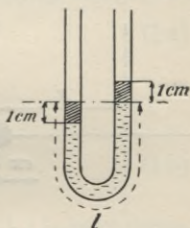


Abb. 12.

I. Ableitung der Schwingungsgleichungen für den Massenpunkt.

1. Eigenschwingungen.

a) Schwingungen ohne Dämpfung.

Auf einen Massenpunkt m wirke eine Kraft, die der Auslenkung aus der Ruhelage proportional ist, derart, daß sie stets bestrebt ist, den Massenpunkt in die Ruhelage zurückzubringen. Dies ist gleichbedeutend mit einem Anziehungszentrum im Ruhepunkt. Wird dieser Massenpunkt aus seiner Ruhelage herausgebracht, so vollführt er eine harmonische Schwingung.

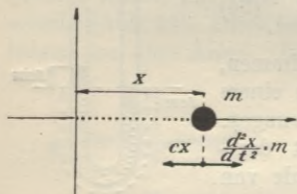


Abb. 13.

Wir wählen nun ein Koordinatenkreuz so, daß der Ursprung mit der Ruhelage zusammenfällt und die Schwingung in Richtung der X-Achse erfolgt (Abb. 13).

Zur Zeit t befinde sich der Massenpunkt in der Entfernung x von der Ruhelage nach rechts ausschwingend.

Die Beschleunigung in diesem Punkte ist $\frac{d^2x}{dt^2}$, woraus sich die Trägheitskraft aus der Beziehung:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

ergibt zu $m \frac{d^2x}{dt^2}$. Auf den Massenpunkt wirkt außerdem die Kraft cx , worin c die Größe der Direktionskraft, d. h. diejenige Kraft ist, die in der Entfernung 1 von der Ruhelage auf den Massenpunkt wirkt. Hiermit ergibt sich die

dynamische Grundgleichung, die zugleich die Schwingungsgleichung ist, zu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c x,$$

worin das Minuszeichen angibt, daß die Kraft $c x$ stets der Auslenkung aus der Ruhelage entgegengerichtet ist.

Die Auflösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist auf verschiedene Arten möglich.

Zur Lösung schreiben wir sie in der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = 0 \quad (1 a)$$

und mit der Abkürzung $\frac{c}{m} = \beta^2$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta^2 x = 0. \quad (1 b)$$

Wird $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ gesetzt, so kann für Gl. 1 b geschrieben werden

$$\frac{dv}{dt} = -\beta^2 x.$$

Beide Seiten mit $v = \frac{dx}{dt}$ multipliziert ergibt:

$$v dv = -\beta^2 x dx,$$

nach ausgeführter Integration

$$v^2 = -\beta^2 x^2 + (c_2 - c_1).$$

Setzt man ferner für $c_2 - c_1 = \gamma^2$, und für $v = \frac{dx}{dt}$, so erhält man

$$dt = \frac{dx}{\gamma \sqrt{1 - \frac{\beta^2 x^2}{\gamma^2}}}.$$

Wird weiter für $\frac{\beta x}{\gamma} = u$ gesetzt, womit $dx = \frac{\gamma}{\beta} du$ wird, so ergibt sich

$$\int dt = \frac{1}{\beta} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

oder nach Integration

$$t - t_0 = \frac{1}{\beta} \arcsin u,$$

$$\sin \beta(t - t_0) = u$$

und schließlich

$$x = \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta(t - t_0). \quad (2)$$

Für

$$x = \frac{\gamma}{\beta} \sin(\beta t - \beta t_0)$$

können wir jedoch schreiben

$$x = \frac{\gamma}{\beta} [\sin \beta t \cos \beta t_0 - \cos \beta t \sin \beta t_0]$$

oder

$$x = \frac{\gamma}{\beta} \cos \beta t_0 \cdot \sin \beta t - \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta t_0 \cos \beta t.$$

Führt man für die Konstanten die Abkürzungen

$$\frac{\gamma}{\beta} \cos \beta t_0 = A$$

$$- \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta t_0 = B$$

ein, so erhält man die vollständige Lösung

$$x = A \sin \beta t + B \cos \beta t, \quad (3)$$

worin man für $\beta = \sqrt{\frac{c}{m}}$ setzen muß. Nehmen wir an, daß zur Zeit $t = 0$ der Ausschlag $x = 0$ ist, so ergibt sich $B = 0$ und Gl. 3 nimmt folgende Form an:

$$x = A \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t. \quad (4)$$

Bezeichnen wir die Dauer einer Periode, d. h. die Zeit zwischen zwei gleichgroßen und gleichgerichteten x mit T , so ergibt sich, da 2π die Periode des \sin ist, die Beziehung

$$\sqrt{\frac{c}{m}} T = 2\pi$$

oder

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (5)$$

In den Gl. 3 und 4 bedeuten also:

A : die Amplitude = größter Anschlag

$\sqrt{\frac{c}{m}}$: die Kreisfrequenz (die man mit ω_0 bezeichnet).

T : die Dauer einer vollen Schwingung.

Der reziproke Wert

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = n \quad (6)$$

wird Frequenz oder sekundliche Schwingungszahl genannt.

Nach diesen Betrachtungen verstehen wir die folgende Ableitung, die in der Literatur meistens zu finden ist.

Zur Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

24 Ableitung der Schwingungsgleichungen für den Massenpunkt.

worin $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ ist, setzt man:

$$x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t, \quad (7)$$

worin A , B und α noch zu bestimmende Konstanten sind, und differenziert diese Gleichung zweimal. Es wird:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha A \cos \alpha t - \alpha B \sin \alpha t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 A \sin \alpha t - \alpha^2 B \cos \alpha t.$$

Diese Werte in die Differentialgleichung eingesetzt, ergibt:
 $-\alpha^2(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) + \omega_0^2(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) = 0$,
 woraus folgt, daß

$$\alpha = \omega_0. \quad (8)$$

Die Gl. 7 erfüllt die Differentialgleichung identisch, wenn für $\alpha = \omega_0$ gesetzt wird. Damit erhalten wir:

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \quad (9)$$

Es fehlt nur noch die Konstanten A und B zu bestimmen. Wir wollen die Zeit zählen von dem Augenblick an, wo $x = 0$ ist. Damit wird:

$$B = 0$$

und

$$x = A \sin \omega_0 t. \quad (10)$$

Weiter wollen wir an Stelle der Amplitude A die Geschwindigkeit einführen, mit der die Masse die Nullage zur Zeit $t = 0$ durchläuft. Durch Differentiation von Gl. 10 erhalten wir

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Nach unserer Annahme soll $v = v_0$ sein für $t = 0$; den Wert für v_0 erhalten wir zu:

$$v_0 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = A \omega_0.$$

Damit schreibt sich Gl. 10:

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (11)$$

Zum gleichen Ergebnis kommen wir, wenn versuchsweise $x = A e^{\alpha t}$ gesetzt wird.

Hierbei ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm i \omega_0 \\ x &= A_1 e^{+i \omega_0 t} + A_2 e^{-i \omega_0 t} \end{aligned}$$

und da für

$$\begin{aligned} e^{+i \omega_0 t} &= \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t \\ e^{-i \omega_0 t} &= \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

gesetzt werden kann,

$$x = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + (A_1 - A_2) i \sin \omega_0 t$$

oder abgekürzt

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t.$$

Diese Ableitungsart werden wir später bei der gedämpften Schwingung anwenden.

Die Gl. 9:

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

läßt sich noch weiter umformen, wenn wir zwei Hilfsgrößen P und β mit folgenden Beziehungen einsetzen:

$$\left. \begin{aligned} A &= P \cos \beta \\ B &= P \sin \beta \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Die Hilfsgrößen selbst sind:

$$\left. \begin{aligned} P &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{B}{A} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wie aus Abb. 14 hervorgeht.

Damit wird nun:

$$x = P(\sin \omega_0 t \cos \beta + \cos \omega_0 t \sin \beta)$$

und schließlich:

$$x = P \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (14)$$

Vergleichen wir diese Schwingung mit:

$$x = P \sin \omega_0 t, \quad (15)$$

so sehen wir, daß im vorliegenden Fall für $t = 0$ die Auslenkung

$$x = P \sin \beta$$

ist.

Die Bewegung nach Gl. 14 eilt derjenigen nach Gl. 15 um den Winkel β voraus, oder zwischen beiden besteht eine Phasenverschiebung β .

Graphisch läßt sich die Schwingungsgleichung durch einen mit ω rotierenden Fahrstrahl in Größe der Amplitude darstellen.

Wir wollen nun noch untersuchen, wie die Energie sich ändert bei der betrachteten freien Schwingung ohne Dämpfung. Aus der Weg-Zeit-Gleichung der Schwingung:

$$x = a \sin \omega_0 t,$$

ergibt sich:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega_0 \cos \omega_0 t$$

Diese verändert sich zwischen den Werten Null und $a\omega_0$. Damit ändert sich auch der Wert für die Wucht oder kinetische Energie, $\frac{1}{2} m v^2$. Für die potentielle Energie (Spannungsenergie) erhalten wir:

$$E_p = \int_0^x P dx = \int_0^x c x dx = \frac{1}{2} c x^2. \quad (16)$$

Wirken auf das System keine äußeren Kräfte, so ist für jede Lage der Masse m die Summe beider Energien konstant, also

$$E_k + E_p = C \quad (17)$$

oder

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} c x^2 = C.$$

Zur Berechnung der Konstanten C setzen wir die Gleichungen für x ein und erhalten:

$$\frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} c a^2 \sin^2 \omega_0 t = C$$

oder da $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ ist:

$$\frac{1}{2} c a^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = C,$$

mithin, da der Klammerausdruck gleich 1 ist,

$$C = \frac{1}{2} c a^2, \quad (18)$$

d. h. also, die Konstante ist gleich dem Maximalwert der Spannungsenergie für $x = a$.

Die Energiegleichung lautet damit:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} c x^2 = \frac{1}{2} c a^2. \quad (19)$$

Differentieren wir die Energiegleichung nach der Zeit, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} c x^2 \right) = 0 \quad (20)$$

oder ausgeführt:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c x = 0, \quad (21)$$

also die Differentialgleichung für die Schwingung. Die Energiegleichung ist also ein Zwischenintegral der Differentialgleichung.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Eigenfrequenz eines Schwingungssystems.

Wir erhielten für die Energiegleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t \\ \frac{1}{2} c x^2 &= \frac{1}{2} c a^2 \sin^2 \omega_0 t. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Maximalwerte: $\frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2$ und $\frac{1}{2} c a^2$, wobei zwischen beiden $1/4$ Periode liegt. Aus der Gleichsetzung beider Maximalwerte

$$\frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} c a^2$$

ergibt sich die Eigenfrequenz zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Zahlenbeispiel.

Wir denken uns an einer Feder, mit der Federkonstanten $c = 0,5 \text{ kg/cm}$, ein Gewicht mit der Masse

$m = 0,02 \text{ kg sek}^2/\text{cm}$ befestigt. Zur Zeit $t = 0$ durchteile das Gewicht die Nullage mit der Geschwindigkeit $v_0 = 10 \text{ cm/sek}$.

Mit diesen Werten erhalten wir:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 5 \text{ sek}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,26 \text{ sek}$$

$$a = \frac{v_0}{\omega_0} = 2,0 \text{ cm}$$

und

$$x = 2,0 \sin\left(2\pi \frac{t}{1,26}\right).$$

Die Aufzeichnung der Weg-Zeit-Kurve geschieht in der Weise, daß man einen Kreis mit dem Halbmesser a schlägt, den Umfang in etwa 12 Teile teilt und sie auf die entsprechenden Geraden herüber projiziert, welche in den 12 Teilpunkten der Strecke für die Schwingungsdauer T errichtet werden.

b) Schwingungen mit Dämpfung.

α) Dämpfung proportional der Geschwindigkeit.

Im vorhergehenden Abschnitt, war angenommen, daß keine Widerstandskraft vorhanden ist, die die Schwingungsausschläge kleiner werden läßt.

Es soll nun eine Dämpfungskraft angenommen werden, die proportional der jeweiligen Geschwindigkeit der Masse ist, also $W = k \frac{dx}{dt}$.

Auf den Massenpunkt wirken die Kräfte (Abb. 15)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad cx, \quad k \frac{dx}{dt}.$$

Die Differentialgleichung dieser Schwingung lautet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (22)$$

oder

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2p \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (22a)$$

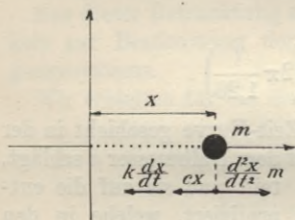


Abb. 15.

wenn

$$2p = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Zur Lösung setzen wir:

$$x = e^{\alpha t} \quad (23)$$

und erhalten:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Diese Werte in die Gl. 22a eingesetzt, ergibt:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2p \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

oder mit $e^{\alpha t}$ durchdividiert:

$$\alpha^2 + 2p\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (24)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\alpha_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}. \quad (25)$$

Hierbei sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } p^2 - \omega_0^2 > 0 \\ \text{b) } p^2 - \omega_0^2 < 0 \\ \text{c) } p^2 - \omega_0^2 = 0 \end{array} \right\} \text{ [Grenzfall].} \quad (26)$$

Fall a.

$$p^2 - \omega_0^2 > 0,$$

d. h. die Wurzel ist reell.

Zur Abkürzung sei $\sqrt{p^2 - \omega_0^2} = \omega$ gesetzt. Damit werden die Wurzeln:

$$\alpha_{1,2} = -p \pm \omega$$

und die Schwingungsgleichung lautet:

$$x = e^{-pt} (ae^{+\omega t} + be^{-\omega t}).$$

Die Konstanten a und b berechnen sich aus der Annahme $x = 0$ für $t = 0$, woraus sich ergibt, daß $b = -a$ ist. Damit erhalten wir

$$x = e^{-pt} \cdot a (e^{+\omega t} - e^{-\omega t}). \quad (27)$$

Führen wir für a wieder die Geschwindigkeit v_0 ein, die sich aus

$$v_0 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0}$$

ergibt zu $2a\omega$, so lautet unsere Schwingungsgleichung

$$x = e^{-pt} \cdot \frac{v_0}{2\omega} (e^{+\omega t} - e^{-\omega t}) \quad (28)$$

oder $x = \frac{v_0}{\omega} \cdot e^{-pt} \cdot \text{Sin } \omega t$, da $\text{Sin } \omega t = \frac{1}{2} (e^{+\omega t} - e^{-\omega t})$ ist.

Aus dieser errechnet sich die augenblickliche Geschwindigkeit zu:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{2\omega} e^{-pt} [e^{-\omega t}(p + \omega) - e^{+\omega t}(p - \omega)]. \quad (29)$$

Die Gl. 28 zeigt bereits, daß keine Schwingung vorliegt. Der Massenpunkt, der die Nulllage mit v_0 durchheilt, erreicht einen Maximalausschlag und kriecht dann in die Ruhelage zurück.

Wie groß ist nun x_{\max} ?

Den Zeitpunkt t , an dem x ein Maximum wird, erhalten wir durch Nullsetzen der Gl. 29 zu

$$t = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{p + \omega}{p - \omega}. \quad (30)$$

Den Maximalwert selbst zu

$$x_{\max} = \frac{v_0}{2\omega} \left(\frac{p + \omega}{p - \omega} \right)^{-\frac{p}{2\omega}} \left[\left(\frac{p + \omega}{p - \omega} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{p + \omega}{p - \omega} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (31)$$

oder nach weiterer Umformung zu

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} \left(\frac{p + \omega}{p - \omega} \right)^{\frac{p}{2\omega}}. \quad (32)$$

Fall b. $p^2 - \omega_0^2 < 0$, d. h. die Wurzel ist imaginär.

Wir setzen also $\sqrt{p^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = i\omega$ und erhalten folgende Wurzeln:

$$\alpha_{1,2} = -p \pm i\omega.$$

Damit ergibt sich:

$$x = e^{-pt}(ae^{+i\omega t} + be^{-i\omega t}). \quad (33)$$

Da $e^{+i\omega t}$ und $e^{-i\omega t}$ durch eine Sinusfunktion ausgedrückt werden kann, erhalten wir

$$x = e^{-pt}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad (34)$$

oder mit unseren Anfangsbedingungen:

$$x = A e^{-pt} \sin \omega t \quad \text{bzw.}$$

$$x = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t. \quad (35)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den entsprechenden der dämpfungsfreien Schwingung (Gl. 11) durch das Glied e^{-pt} , das die Ausschläge mit zunehmender Zeit kleiner werden läßt.

Die Periode für eine volle Schwingung ist wieder 2π . Aus $\omega T = 2\pi$ erhalten wir die Schwingungsdauer zu:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}} \quad (36)$$

und mit den Werten für ω_0 und p aus S 30 zu:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}. \quad (37)$$

Unsere nächste Aufgabe ist nun, festzustellen, in welchem Verhältnis die Ausschläge mit der Zeit abnehmen.

Aus:

$$x = A \cdot e^{-pt} \sin \omega t \quad (38)$$

folgt:

$$\frac{dx}{dt} = A e^{-pt} (\omega \cos \omega t - p \sin \omega t). \quad (39)$$

Dieser Wert muß für ein Maximum oder Minimum zu Null werden, was nur möglich ist, wenn der Klammerausdruck verschwindet.

Hieraus erhält man:

$$\operatorname{tg} \omega l = \frac{\omega}{p}. \quad (40)$$

Ist t_1 der kleinste Wert, der ein Maximum liefert, so wird Gl. 40 auch befriedigt durch

$$\omega t_n = \omega t_1 + (n - 1) \pi,$$

wenn n eine ganze Zahl ist.

Die Amplituden selbst werden:

$$x_n = A e^{-p t_n} \sin [\omega t_1 + (n - 1) \pi],$$

und zwar wird x_n negativ, wenn n eine gerade Zahl ist, und positiv für ein ungerades n . Betrachten wir zwei folgende Ausschläge mit gleichen Vorzeichen, z. B. x_n und x_{n+2} , so ergibt sich:

$$\frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{p(t_{n+2} - t_n)}. \quad (41)$$

Für $t_{n+2} - t_n$ kann die Schwingungsdauer T eingesetzt werden, womit Gl. 41 folgende Form erhält:

$$\frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{pT} = e^{\frac{k}{2m} T}. \quad (42)$$

Diesen Wert nennt man das Dämpfungsverhältnis, seinen natürlichen Logarithmus das logarithmische Dekrement A , mit der Gleichung

$$A = p T = \frac{k}{2m} T \quad (43)$$

oder

$$A = \frac{2 \pi k}{\sqrt{4 c m - k^2}}. \quad (44)$$

Graphisch läßt sich die gedämpfte Schwingung darstellen durch einen mit ω rotierenden Fahrstrahl. Seine Länge ist jedoch nicht konstant wie bei der dämpfungs-freien Schwingung, sondern bestimmt durch e^{-pt} . Damit erhalten wir eine logarithmische Spirale, deren Punkte in bekannter Weise projiziert werden müssen.

Wir wollen die erhaltenen Gleichungen noch etwas umformen.

Für den Grenzfall c) ist $p = \omega_0$. Aus der allgemeinen Beziehung $p = \frac{k}{2m}$ folgt dann

$$k = 2mp = 2m\omega_0 = 2\sqrt{cm}.$$

Diesen Wert wollen wir mit k_0 bezeichnen und dann $k = \alpha k_0$ setzen. Damit wird aber auch $p = \alpha p_0$, da $p_0 = \frac{k_0}{2m}$ ist.

Für die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung ergab sich:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}.$$

Mit $p = \alpha p_0 = \alpha \omega_0$ kann man dafür setzen

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \cdot T_0, \quad (45)$$

wenn T_0 die Schwingungsdauer für die ungedämpfte Schwingung ist.

In Abb. 16 ist die Veränderung der Schwingungsdauer von α graphisch aufgetragen. Bis zu $\alpha = 0,4$ ergibt sich erst eine Vergrößerung von etwa 9%; von hier an tritt allerdings ein starkes Anwachsen ein.

Fall c. Grenzfall $p = \omega_0$.

Die Behandlung des Grenzfalles ist aus den beiden vorhergehenden möglich, wenn man zur Grenze übergeht. Wir wollen beide Fälle kurz betrachten.

α) Aus Fall a:

Für Gl. 28 schreiben wir:

$$x = \frac{v_0}{2} \cdot e^{-pt} \cdot \frac{e^{+\omega t} - e^{-\omega t}}{\omega}. \quad (46)$$

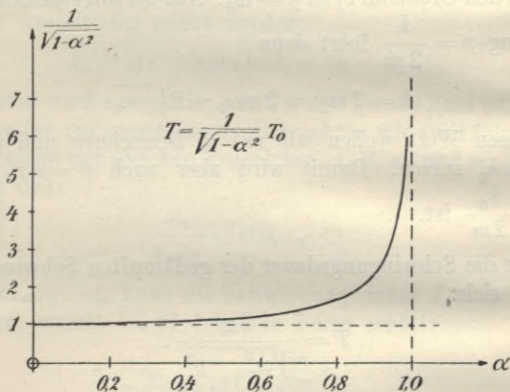


Abb. 16.

Für den Grenzübergang kommt nur der rechtsstehende Bruch in Betracht.

Es wird nach der Regel über Auswertung unbestimmter Ausdrücke:

$$\lim_{\omega=0} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{\omega} = \left[\frac{t(e^{\omega t} + e^{-\omega t})}{1} \right]_{\omega=0} = 2t. \quad (47)$$

Diesen Wert in Gl. 46 eingesetzt, ergibt:

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-pt}. \quad (48)$$

β) Aus Fall b:

Wir formen Gl. 35 um in:

$$x = v_0 \cdot e^{-pt} \frac{\sin \omega t}{\omega},$$

erhalten beim Grenzübergang

$$\lim_{\omega=0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = \left[t \cos \omega t \right]_{\omega=0} = t \quad (49)$$

und damit wieder:

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-pt}.$$

Die Zeit t für $x = x_{\max}$ ergibt sich aus

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot e^{-pt} (1 - pt) = 0$$

zu

$$t = \frac{1}{p}. \quad (50)$$

Das Maximum selbst wird:

$$x_{\max} = \frac{v_0}{p \cdot e}. \quad (51)$$

Zahlenbeispiel.

Mit den Werten unseres Beispiels auf S. 28 für $c = 0,5$ und $m = 0,02$ wird:

$$k_0 = 2\sqrt{c \cdot m} = 0,2 \text{ kg sek/cm.}$$

Weiter erhalten wir:

1) Grenzfall.

$$x = v_0 \cdot t \cdot e^{-pt} = 10 \cdot t \cdot e^{-5t}$$

$$t = \frac{1}{p} = 0,2 \text{ sek}$$

$$x_{\max} = \frac{v_0}{p \cdot e} = 0,735 \text{ cm.}$$

2) Aperiodische Bewegung ($\alpha > 1$).a) $\alpha = 2$

$$k = 2k_0 = 0,4$$

$$p = 10$$

$$\omega = 8,66$$

$$x = 0,577 \cdot e^{-10t} (e^{8,66t} - e^{-8,66t})$$

oder

$$x = 1,154 \cdot e^{-10t} \cdot \mathfrak{S}in 8,66 t .$$

Für die Hyperbelfunktion findet man z. B. in der „Hütte“ eine Tafel, für Werte $\omega t < 5,09$. Für größere Werte kann mit genügender Annäherung $\mathfrak{S}in \omega t = \frac{1}{2} e^{\omega t}$ gesetzt werden.

Ferner wird:

$$t = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{p + \omega}{p - \omega} = 1,35 \text{ sek}$$

und

$$x_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} \left(\frac{p + \omega}{p - \omega} \right)^{-\frac{p}{2\omega}} = 0,44 \text{ cm.}$$

b) $\alpha = 4$

$$k = 0,8$$

$$\omega = 19,36$$

$$x = 0,258 \cdot e^{-20t} (e^{19,36t} - e^{-19,36t})$$

$$t = 1,06$$

$$x_{\max} = 0,238 \text{ cm.}$$

Die Kurven für $\alpha = 1, 2, 4$ sind in Abb. 17 dargestellt. Aus ihnen ersehen wir, daß beim Grenzfall der Massenpunkt zuerst wieder zur Ruhe kommt.

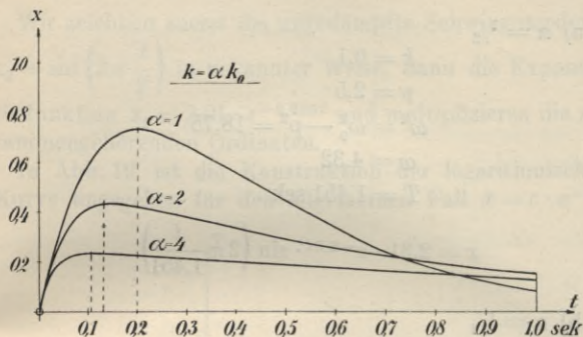


Abb. 17.

3) Gedämpfte Schwingungen.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0$$

Gl. 45

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} T_0$$

liefert folgende Werte:

| $\alpha =$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 |
|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} =$ | 1,155 | 1,033 | 1,008 | 1,000 |
| $T =$ (in sek) | 1,451 | 1,298 | 1,266 | 1,256 |

Die Schwingungsgleichungen ergeben sich aus

$$x = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \cdot \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega} e^{-pt} \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right),$$

worin nach S. 29 $v_0 = 10$ cm/sek zu setzen ist.

40 Ableitung der Schwingungsgleichungen für den Massenpunkt.

a) $\alpha = 1/2$

$$k = 0,1$$

$$p = 2,5$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - p^2 = 18,75$$

$$\omega = 4,32$$

$$T = 1,451 \text{ sek}$$

$$x = 2,31 \cdot e^{-2,5t} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{1,451}\right).$$

b) $\alpha = 1/4$

$$x = 2,06 e^{-1,25t} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{1,298}\right).$$

c) $\alpha = 1/8$

$$x = 2,01 e^{-0,625t} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{1,266}\right).$$

In Abb. 18 ist die Schwingungskurve für $\alpha = 1/8$ dargestellt.

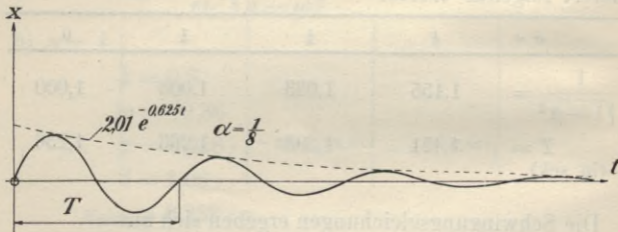


Abb. 18.

Die Aufzeichnung kann in folgender Weise ausgeführt werden:

Wir zeichnen zuerst die ungedämpfte Schwingungsform $x_2 = \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ in bekannter Weise, dann die Exponentialfunktion $x_1 = 2,01 \cdot e^{-0,625t}$ und multiplizieren die zusammengehörenden Ordinaten.

In Abb. 19 ist die Konstruktion der logarithmischen Kurve angegeben für den allgemeinen Fall $\dot{x} = c \cdot e^{-pt}$.

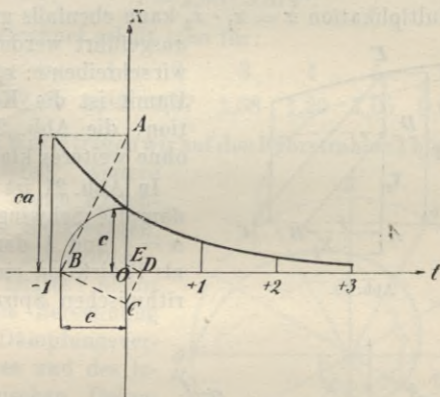


Abb. 19.

Diese Gleichung formen wir um in $x = c \cdot a^{-t}$, worin $a = e^{+p}$ ist. Wir erhalten dann für:

$$t = 0: \quad x = c$$

$$t = -1: \quad x = ca.$$

Damit ergibt sich die Durchführung der Konstruktion. Auf der X-Achse tragen wir ca , auf der negativen t -Achse c auf, verbinden A mit B , errichten in B die Senkrechte, welche den Punkt C liefert usw. Es wird dann:

$$X_0 = OB = C$$

$$X_1 = OC$$

$$X_2 = OD \text{ usw.}$$

Für das vorliegende Beispiel wird $a = e^{0,625} = 1,879$ und damit

$$x_1 = 2,01 \cdot 1,879^{-t} \text{ und } ac = 3,76.$$

Die Multiplikation $x = x_1 \cdot x_2$ kann ebenfalls graphisch ausgeführt werden, wenn wir schreiben $x: x_1 = x_2:1$.

Damit ist die Konstruktion, die Abb. 20 zeigt, ohne weiteres klar.

In Abb. 21 ist die gedämpfte Schwingung für $\alpha = \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ dargestellt, als Projektion einer logarithmischen Spirale.

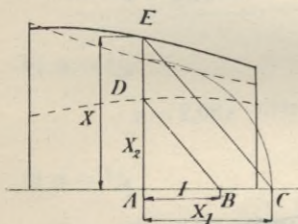


Abb. 20.

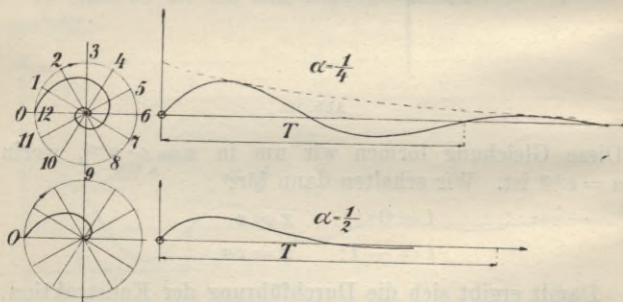


Abb. 21.

Die Konstruktion der logarithmischen Spirale ist aus

Abb. 22 zu ersehen. Für $\alpha = \frac{1}{4}$ lautet die Gleichung für den Fahrstrahl

$$r = 2,06 \cdot e^{-1,25t}.$$

Teilt man den Winkel 2π in 12 gleiche Teile, so kann für $t = \frac{n}{12} T$ gesetzt werden. Damit wird jedoch

$$r = 2,06 \cdot 0,874^n.$$

Ausgerechnet erhält man für:

| | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $n =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $r =$ | 2,06 | 1,80 | 1,57 | 1,38 | 1,20 | 1,05 | 0,92 cm. |

Diese Werte tragen wir auf den Fahrstrahlen 1 bis 6 auf und konstruieren weitere Punkte durch Errichten von Senkrechten, wie Abb. 22 angibt.

Als letztes bleibt noch die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses und des logarithmischen Dekrements übrig, also:

$$\frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{pT}$$

und $A = pT.$

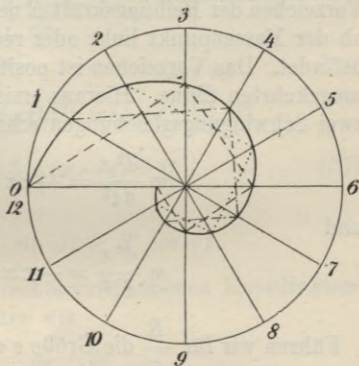


Abb. 22.

Wir erhalten dafür:

| $\alpha =$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
|-------------------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{x_n}{x_{n+2}} =$ | 38,1 | 5,06 | 2,21 |
| $A =$ | 3,62 | 1,61 | 0,788 |

β) Dämpfung durch Reibung.

Im vorhergehenden Abschnitt war angenommen, daß die Dämpfungskraft proportional der Geschwindigkeit des Massenpunktes ist. Wir wollen nun noch den Fall untersuchen, daß die Dämpfung durch gewöhnliche Reibung verursacht wird. Obwohl die Reibung zwischen festen Körpern nicht unabhängig von der Geschwindigkeit ist, wollen wir hier doch annehmen, daß ihre Größe konstant sei.

Während bei der Dämpfung $k \frac{dx}{dt}$ das Vorzeichen der Geschwindigkeit hatte, trifft dies hier nicht mehr zu. Schwingt der Massenpunkt von links nach rechts, so ist das Vorzeichen der Reibungskraft R negativ, ganz gleichgültig, ob der Massenpunkt links oder rechts des Ursprungs sich befindet. Das Vorzeichen ist positiv für die Bewegung im umgekehrten Sinne. Hieraus ersieht man schon, daß wir zwei Schwingungsgleichungen erhalten, nämlich:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - R \quad (52)$$

und

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + R. \quad (53)$$

Führen wir für $\frac{R}{c}$ die Größe e ein, so lautet Gl. 52

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c(x + e) = 0. \quad (54)$$

Da e eine konstante Größe ist, können wir auch schreiben:

$$m \frac{d^2(x + e)}{dt^2} + c(x + e) = 0. \quad (55)$$

Das Integral dieser Gleichung kennen wir jedoch aus den früheren Ableitungen, es ist:

$$x + e = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (56)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Schwingungsdauer gleich ist derjenigen der ungedämpften, also $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$. Weiter sehen wir aus ihr, daß die Schwingung so verläuft, als ob die Nullage um die Strecke e gegen den Ursprung verschoben ist. War der letzte linke Anschlag, z. B. a_1 , so ergibt sich jetzt eine Auslenkung, die sich aus $a_2 = a_1 - 2e$ berechnet, wie aus der Abb. 23 ohne weiteres hervorgeht.

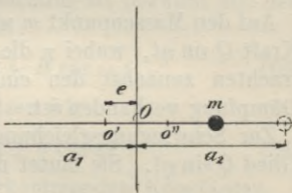


Abb. 23.

In der gleichen Weise erhält man aus Gl. 53

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c(x - e) = 0 \quad (57)$$

und

$$x - e = A' \sin \omega t + B' \cos \omega t,$$

d. h. einen um e nach rechts verschobenen Koordinatenursprung. Weiter erhalten wir

$$a_3 = a_2 - 2e$$

und allgemein

$$a_n = a_{n-1} - 2e. \quad (58)$$

Die Schwingungsanschläge nehmen stets um den gleichen Betrag $2e$ ab, also nach einer arithmetischen Reihe, im Gegensatz zu der im letzten Abschnitt betrachteten gedämpften Schwingung, wo die Abnahme nach einer geo-

metrischen Reihe erfolgte. Die Amplituden werden auch nicht allmählich zu Null, sie hören plötzlich auf, sobald $a_n = 2e$ geworden ist. Graphisch läßt sich diese Schwingungsform darstellen als Projektion einer arithmetischen Spirale.

2. Erzwungene Schwingungen.

a) Schwingungen ohne Dämpfung.

Auf den Massenpunkt m wirke eine äußere, harmonische Kraft $Q \sin \eta t$, wobei η die Kreisfrequenz sei. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, daß keinerlei Dämpfung vorhanden ist.

Zur Schwingungsgleichung S. 21 tritt nun noch das Glied $Q \sin \eta t$. Sie lautet dann:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c x = Q \sin \eta t \quad (59)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = \frac{Q}{m} \sin \eta t \quad (59a)$$

und mit den bekannten Abkürzungen und $q = \frac{Q}{m}$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = q \sin \eta t. \quad (60)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung setzen wir

$$x = x_1 + x_2$$

und erhalten, da

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad \text{ist,}$$

$$\left[\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 \right] + \left[\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 - q \sin \eta t \right] = 0.$$

Dies ist der Fall, wenn beide Klammerausdrücke zu Null werden, also:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (61)$$

und

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 - q \sin \eta t = 0. \quad (62)$$

Das Integral der ersten Gleichung ist bekannt aus den früheren Betrachtungen, es ist:

$$x_1 = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \quad (63)$$

Zur Lösung des zweiten setzen wir

$$x_2 = a \sin \eta t + b \cos \eta t \quad (64)$$

und bestimmen die darin vorkommenden Konstanten.

Durch zweimalige Differentiation wird:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -a \eta^2 \sin \eta t - b \eta^2 \cos \eta t.$$

Dieser Wert, in Gl. 62 eingesetzt, ergibt:

$$\sin \eta t (a \omega_0^2 - a \eta^2 - q) + \cos \eta t (b \omega_0^2 - b \eta^2) = 0.$$

Aus der Bedingung, daß beide Klammerausdrücke für jedes t zu Null werden müssen, ergibt sich:

$$1) \quad a = \frac{q}{\omega_0^2 - \eta^2}$$

oder mit $q = \frac{Q}{m}$ und $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$

$$a = \frac{Q}{c - m \eta^2}. \quad (65)$$

$$2) \quad b = 0.$$

Damit können wir jedoch für Gl. 64 schreiben:

$$x_2 = \frac{Q}{c - m\eta^2} \sin \eta t. \quad (66)$$

Das vollständige Integral lautet dann:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + \frac{Q}{c - m\eta^2} \sin \eta t. \quad (67)$$

Die Schwingung setzt sich zusammen aus der freien und der erzwungenen Schwingung.

Im folgenden wollen wir die erzwungene Schwingung

$$x_2 = \frac{q}{\omega_0^2 - \eta^2} \sin \eta t \quad (68)$$

näher betrachten.

Mit $\eta = \beta\omega_0$ kann man schreiben:

$$x_2 = \frac{q}{\omega_0^2(1 - \beta^2)} \sin \eta t \quad (69)$$

oder

$$x_2 = \frac{Q}{c(1 - \beta^2)} \sin \eta t, \quad (70)$$

wenn für $q = \frac{Q}{m}$ gesetzt wird.

In dieser Gleichung ist $\frac{Q}{c}$ der statische Federausschlag unter Wirkung der Kraft Q ; wir wollen ihn im folgenden mit a_s bezeichnen und erhalten dann für Gl. 70 den Ausdruck:

$$x_2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot a_s \sin \eta t, \quad (71)$$

wobei man $\frac{1}{1 - \beta^2}$ die Vergrößerungszahl nennen kann.

Die Gleichung besagt, daß die erzwungene Schwingung in Phase mit der erregenden Ursache ist. Die Amplitude hängt von dem Wert β ab.

In Abb. 24 ist die Vergrößerungszahl als Funktion von β aufgetragen. Aus dem Schaubild sehen wir, daß für unendlich langsame erregende Schwingungen ($\beta = 0$) $V = 1$ ist. Mit zunehmendem η wächst V bis es für $\beta = 1$ unendlich groß wird. Mit weiterem Zunehmen von β wird V wieder kleiner und gleichzeitig negativ. Für $\beta = \infty$ erreicht V den Wert Null.

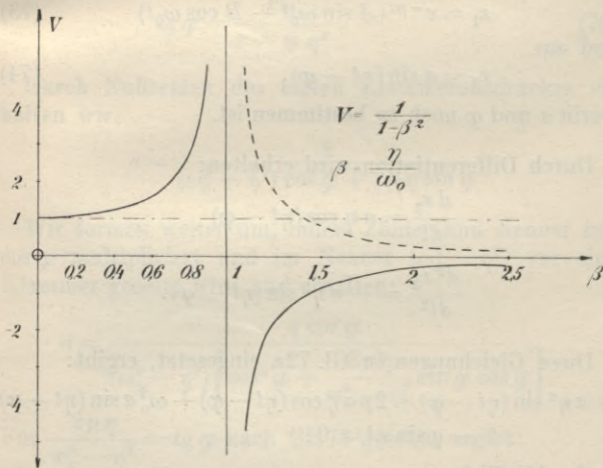


Abb. 24.

b) Schwingungen mit Dämpfung.

Die Dämpfung soll hier wieder $k \frac{dx}{dt}$, also proportional

der Geschwindigkeit sein. Unsere Schwingungsgleichung nimmt dann folgende Form an:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = Q \sin \eta t \quad (72)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2p \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = q \sin \eta t. \quad (72a)$$

Das Integral setzt sich zusammen aus dem partikularen Integral

$$x_1 = e^{-pt}(A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) \quad (73)$$

und aus

$$x_2 = a \sin(\eta t - \varphi), \quad (74)$$

worin a und φ noch zu bestimmen ist.

Durch Differentiation wird erhalten:

$$\frac{dx_2}{dt} = a \eta \cos(\eta t - \varphi)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -a \eta^2 \sin(\eta t - \varphi).$$

Diese Gleichungen in Gl. 72a eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} -a \eta^2 \sin(\eta t - \varphi) + 2pa \eta \cos(\eta t - \varphi) + \omega_0^2 a \sin(\eta t - \varphi) \\ - q \sin \eta t = 0 \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} \sin \eta t [-a \eta^2 \cos \varphi + 2pa \eta \sin \varphi + \omega_0^2 a \cos \varphi - q] \\ + \cos \eta t [a \eta^2 \sin \varphi + 2pa \eta \cos \varphi - \omega_0^2 a \sin \varphi] = 0. \end{aligned}$$

Die vorstehende Gleichung kann für jedes t nur Null sein, wenn die Klammerausdrücke verschwinden.

Aus der zweiten Klammer erhalten wir:

$$(\eta^2 - \omega_0^2) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + 2p\eta = 0$$

und hieraus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2p\eta}{\omega_0^2 - \eta^2}, \quad (75)$$

schließlich mit

$$2p = \frac{k}{m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\eta}{c - m\eta^2}. \quad (76)$$

Durch Nullsetzen des ersten Klammersausdruckes erhalten wir:

$$a = \frac{q}{(\omega_0^2 - \eta^2) \cos \varphi + 2p\eta \sin \varphi}.$$

Wir formen weiter um, indem Zähler und Nenner mit $\cos \varphi$ multipliziert und im Nenner $(\omega_0^2 - \eta^2)$ vor eine Klammer gesetzt wird und erhalten:

$$a = \frac{q \cos \varphi}{(\omega_0^2 - \eta^2) \left[\cos^2 \varphi + \frac{2p\eta}{\omega_0^2 - \eta^2} \sin \varphi \cos \varphi \right]}.$$

Für $\frac{2p\eta}{\omega_0^2 - \eta^2} = \operatorname{tg} \varphi$ nach Gl. 75 gesetzt, ergibt:

$$a = \frac{q \cos \varphi}{(\omega_0^2 - \eta^2) [\cos^2 \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \cos \varphi]}$$

und schließlich, da

$$\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

und die eckige Klammer mit $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ wird:

$$a = \frac{q \cos \varphi}{\omega_0^2 - \eta^2}. \quad (77)$$

Da ferner

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{4p^2 \eta^2}{(\omega_0^2 - \eta^2)^2}$$

und

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \eta^2)^2 + 4p^2 \eta^2}}{\omega_0^2 - \eta^2}$$

ist, erhalten wir:

$$a = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \eta^2)^2 + 4p^2 \eta^2}}. \quad (78)$$

In diese Gleichung setzen wir weiter für $q = \frac{Q}{m}$ und erhalten:

$$a = \frac{Q}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \eta^2)^2 + 4p^2 \eta^2}}, \quad (79)$$

ferner, mit $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ und $p^2 = \frac{k^2}{4m^2}$

$$a = \frac{Q}{\sqrt{m^2 \left[\left(\frac{c}{m} - \eta^2 \right)^2 + \frac{k^2}{m^2} \cdot \eta^2 \right]}} \quad (80)$$

und schließlich:

$$a = \frac{Q}{\sqrt{(c - m\eta^2)^2 + k^2 \eta^2}}. \quad (81)$$

Zur weiteren Untersuchung setzen wir in Gleichung:

$$a = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \eta^2)^2 + 4p^2 \eta^2}},$$

$$\eta = \beta \omega_0,$$

$$k = \alpha k_0,$$

wobei

$$p = \alpha \cdot p_0 = \alpha \cdot \omega_0 \text{ (nach S. 35)}$$

wird, und erhalten:

$$a = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2 \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2 \omega_0^4}}.$$

Nach Herausnehmen von ω_0^2 vor die Wurzel und mit

$$q = \frac{Q}{m} \text{ wird:}$$

$$a = \frac{Q}{c \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}}$$

oder, da $\frac{Q}{c} = a_s$ ist:

$$a = \frac{a_s}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}} \cdot a_s. \quad (82)$$

Die Vergrößerungszahl ist hiernach:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2}}. \quad (83)$$

In gleicher Weise wollen wir nun noch Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2p\eta}{\omega_0^2 - \eta^2}$$

umformen, indem gesetzt wird:

$$p = \alpha \cdot p_0 = \alpha \cdot \omega_0$$

$$\eta = \beta \omega_0.$$

Damit ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha \cdot \beta}{1 - \beta^2}. \quad (84)$$

Für die erzwungene Schwingung erhalten wir zusammenfassend nun folgende Gleichungen:

$$x = V \cdot a_s \cdot \sin(\eta t - \varphi),$$

darin ist:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}, \quad (85)$$

$$a_s = \frac{Q}{c}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha\beta}{1 - \beta^2}. \quad (86)$$

Es bedeutet ferner:

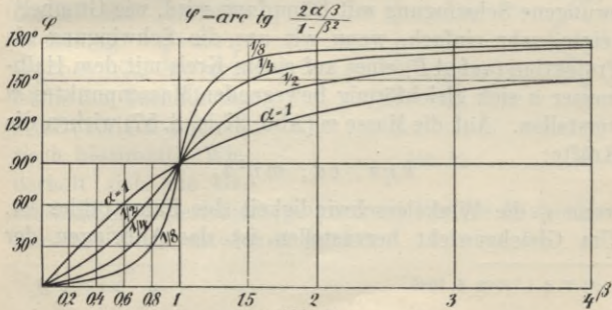
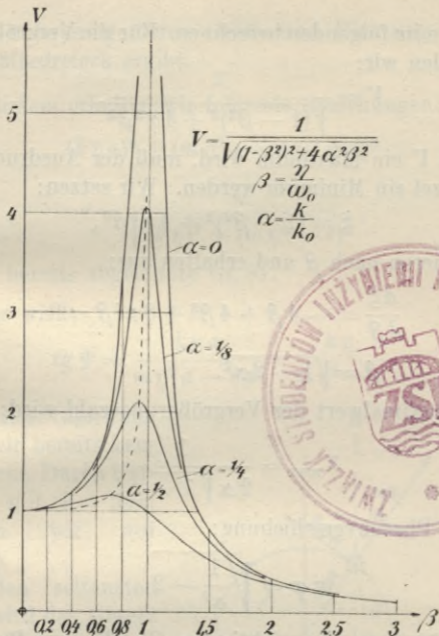
$\alpha = \frac{k}{k_0}$ (Verhältnis der Dämpfung zur Dämpfung des Grenzfalles) [vergl. S. 35],

$\beta = \frac{\eta}{w_0}$ (Verhältnis der Frequenz der erregenden Kraft zur Eigenfrequenz des dämpfungsfreien Systems).

In Abb. 25 finden wir die Vergrößerungszahl als Funktion von β für verschiedene Werte von α aufgetragen, und zwar für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$.

Die Veränderung der Phasenverschiebung φ mit β für verschiedene Werte von α zeigt Abb. 26.

Aus dem Schaubild für die Vergrößerungszahl Abb. 25 ersieht man, daß bei vorhandener Dämpfung der Maximalwert nicht für $\beta = 1$, sondern vorher erreicht wird. Wir



wollen ihn im folgenden berechnen. Für die Vergrößerungszahl fanden wir:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}}.$$

Damit V ein Maximum wird, muß der Ausdruck unter der Wurzel ein Minimum werden. Wir setzen:

$$\xi = (1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2,$$

differentieren nach β und erhalten aus:

$$\frac{d\xi}{d\beta} = -4\beta + 4\beta^3 + 8\alpha^2\beta = 0,$$

$$\beta = \sqrt{1 - 2\alpha^2}. \quad (87)$$

Der Maximalwert der Vergrößerungszahl wird:

$$V_{\max} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad (88)$$

für eine Phasenverschiebung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 2}. \quad (89)$$

Die Ableitung der wichtigsten Gleichungen für die erzwungene Schwingung mit Dämpfung wird, wie Gumbel¹⁾ zeigte, sehr einfach, wenn wir uns die Schwingung als Projektion (auf AB) eines auf einem Kreis mit dem Halbmesser a sich gleichförmig bewegenden Massenpunktes m vorstellen. Auf die Masse m (Abb. 27, s. S. 57) wirken die Kräfte:

$$k\eta a, \quad ca, \quad m\eta^2 a,$$

wenn η die Winkelgeschwindigkeit des Fahrstrahles ist. Um Gleichgewicht herzustellen, ist das Anbringen der

¹⁾ V. d. I. 1912 S. 1095.

Kraft Q notwendig, deren Größe und Richtung sich aus dem Kräftedreieck ergibt.

Aus diesem erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(k\eta a)^2 + (m\eta^2 a - ca)^2 = Q^2$$

oder

$$a = \frac{Q}{\sqrt{(k\eta)^2 + (m\eta^2 - c)^2}},$$

also die bereits abgeleitete Gl. 81.

Ferner wird:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k\eta a}{m\eta^2 a - ca} = \frac{k\eta}{m\eta^2 - c}.$$

Auch diese Gleichung haben wir bereits kennengelernt. Durch Umformen mit $k = 2pm$ kommen wir auf Gl. 75¹⁾.

In den seltensten Fällen wird das Gesetz der erregenden Kraft durch die einfache Gleichung $Q \cdot \sin \eta t$ gegeben sein. Meistens ist in der Technik der Kräfteverlauf zeichnerisch bestimmt. Wiederholt sich die Gesetzmäßigkeit periodisch, so kann die Periode in eine Fourierschen Reihe entwickelt werden.

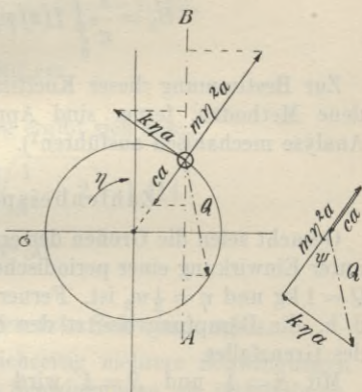


Abb. 27.

¹⁾ $\psi = 180 - \varphi$.

Man erhält allgemein:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots,$$

worin die Konstanten folgende Werte sind:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Zur Bestimmung dieser Koeffizienten gibt es verschiedene Methoden, ferner sind Apparate gebaut, die die Analyse mechanisch ausführen¹⁾.

Zahlenbeispiel.

Gesucht seien die Größen der erzwungenen Schwingung unter Einwirkung einer periodischen Kraft $Q \sin \eta t$, wenn $Q = 1 \text{ kg}$ und $\eta = \frac{1}{2} \omega_0$ ist. Ferner nehmen wir an $\alpha = \frac{1}{2}$, d. h. die Dämpfung besitzt den halben Wert derjenigen des Grenzfalles.

Mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ wird die Vergrößerungszahl $V = 1,11$ und die Amplitude, da $a_s = \frac{Q}{c} = 2 \text{ cm}$ ist,

$$a = V \cdot a_s = 2,22 \text{ cm}.$$

¹⁾ U. a. „Tafeln zur harmonischen Analyse“. Verlag Springer, Berlin. Herausgegeben vom Verfasser. Verfahren Herrmann-Zipperer.

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha \cdot \beta}{1 - \beta^2} = 0,666$$

zu

$$\varphi = 33^\circ 40'.$$

Wir wollen nun noch untersuchen, für welches η ein Maximum des Ausschlages eintritt und welchen Wert dieses besitzt.

Aus
$$\beta = \sqrt{1 - 2\alpha^2} = 0,709$$

folgt

$$\eta = 0,709 \cdot \omega_0 = 0,354.$$

Die Vergrößerungszahl errechnet sich zu:

$$V_{\max} = \frac{1}{2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} = 1,152,$$

womit

$$a_{\max} = 2,304 \text{ cm}$$

wird.

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 2} = 1,414$$

zu

$$\varphi = 54^\circ 50'.$$

3. Zusammengesetzte Schwingungen.

Führt ein Körper gleichzeitig mehrere Schwingungen aus, so addieren sich die Schwingungen, sie interferieren.

In Abb. 28 ist dieser Fall für die zwei Schwingungen:

$$x' = a \sin \omega t,$$

$$x'' = \frac{a}{2} \sin (2\omega t + \pi)$$

abgebildet.

Die Gleichung der interferierenden Schwingung lautet:

$$x = x' + x''.$$

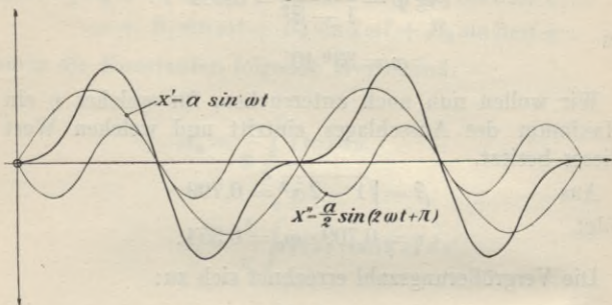


Abb. 28.

Sind die Kreisfrequenzen nur wenig voneinander verschieden, so treten Schwebungen auf. Wir wollen diesen Fall noch näher behandeln.

Es sollen interferieren:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t \\ x_1 &= a_1 \sin \omega_1 t \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

wobei $\omega_1 - \omega = \Delta\omega$ klein gegenüber ω sein soll.

Mit $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ wird

$$x + x_1 = \sin \omega t (a_1 \cos \Delta\omega t + a) + \cos \omega t \cdot a_1 \sin \Delta\omega t, \quad (91)$$

wofür wir jedoch schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} x + x_1 &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ \text{oder } x + x_1 &= P \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Darin ist P^2 nach Gl. 13 S. 26 gleich $A^2 + B^2$, also:

$$P^2 = a_1^2 + a^2 + 2 a a_1 \cdot \cos \Delta\omega \cdot t. \quad (93)$$

Für $\cos \Delta\omega t = +1$ erhalten wir nun

$$P = \pm (a_1 + a)$$

und für $\cos \Delta\omega t = -1$

$$P = \pm (a_1 - a).$$

Die Amplitude der Interferenzschwingung schwankt demnach zwischen den Werten $a_1 + a$ und $a_1 - a$.

Zwischen zwei Extremwerten liegt die Periode 2π . Bezeichnet man die Zeit, die Schwebungsdauer, mit T_s , so erhält man

$$T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega}, \quad (94)$$

oder da $\frac{2\pi}{\omega_1} = T_1$ und $\frac{2\pi}{\omega} = T$ ist,

$$T_s = \frac{T_1 \cdot T}{T - T_1}. \quad (95)$$

Wird weiterhin $T_1 = \gamma T$ gesetzt, so erhält man für die Schwebungsdauer

$$T_s = \frac{\gamma}{1 - \gamma} T. \quad (96)$$

Führt man die Schwingungszahlen $n = \frac{1}{T}$ ein, so wird

$$n_s = n_1 - n, \quad (97)$$

Amplitudenverhältnis: 2:3

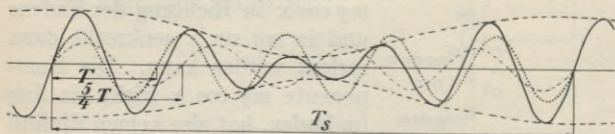


Abb. 29.

d. h. die sekundliche Anzahl der Schwebungen ist gleich der Differenz der beiden Schwingungszahlen.

In Abb. 29 ist das Vorhandensein der Schwebungen deutlich zu erkennen. Das Amplitudenverhältnis ist 2:3, das Verhältnis der Frequenzen 4:5, also $\gamma = 0,8$.

Mit obiger Gl. 96 wird

$$T_s = 4T.$$

II. Bestimmung der Schwingungsdauer einfacher Systeme.

1. Schwingungssysteme unter Wirkung der Schwerkraft.

a) Das mathematische Pendel.

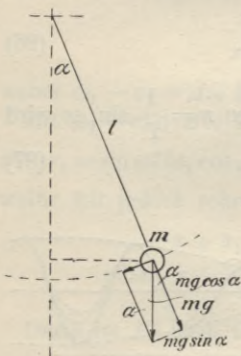


Abb. 30.

Unter einem mathematischen Pendel versteht man eine punktförmige Masse m an einem masselosen Faden der Länge l (Abb. 30).

Zur Zeit t bilde der Faden mit der Ruhelage den Winkel α . Auf die Masse m wirkt die Schwerkraft mg , die in die Komponente $mg \cos \alpha$ in Richtung des Fadens und in $mg \sin \alpha$ senkrecht dazu zerlegt werden kann. Die Komponente $mg \cos \alpha$ wirkt als Zug im Faden, hat also keinen Einfluß auf die Bewegung.

Es sei:

$\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$: die Winkelbeschleunigung,

$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cdot l$: die Umfangsbeschleunigung,

$m \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cdot l$: die Trägheitskraft,

$mg \sin \alpha$: die rückwirkende Kraft.

Damit lautet die Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cdot l = - mg \sin \alpha.$$

Die Umformung der Gleichung ergibt:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Wir ersehen aus ihr, daß die Masse m aus der Gleichung herausfällt.

Nehmen wir nun zuerst an, daß die Ausschläge klein sind, so daß an Stelle von $\sin \alpha$ der Winkel α selbst gesetzt werden kann, so lautet unsere Gleichung:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0, \quad (2)$$

deren Lösung wir bereits kennen.

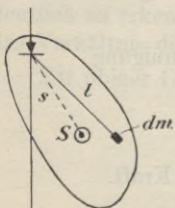
Es ist nach dem früheren:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (3)$$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$

Zu bemerken ist noch, daß ein Sekundenpendel eine volle Schwingungsdauer von 2 sek besitzt. Die Länge dieses Sekundenpendels ergibt sich zu:



$$l = \frac{g}{\pi^2}, \quad (5)$$

also für eine geographische Breite 50° mit $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$ zu $l = 0,994 \text{ m}$.

b) Das physische Pendel.

Wir betrachten das Massenelement der ganzen Pendelscheibe (Abb. 31). Nach den Betrachtungen im vorherigen Teil lautet für dieses die Bewegungsgleichung:

$$dm \cdot l \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + dm \cdot g \cdot \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

Die Gleichung für die ganze Scheibe erhält man durch Summierung wie folgt:

$$\sum dm \cdot l \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \sum dm \cdot g \cdot \sin \alpha = 0. \quad (7)$$

Beide Seiten mit l multipliziert, ergibt:

$$\sum dm \cdot l^2 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \sum dm \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

In dieser Gleichung ist nun:

$\sum dm \cdot l^2 = \theta$: das Massenträgheitsmoment der Scheibe, bezogen auf die Drehachse;

$\sum dm \cdot g \cdot l = M$: das statische Moment, für das $m \cdot s \cdot g$ gesetzt werden kann, worin m die Masse, s der Schwerpunktsabstand von der Drehachse ist.

Mit diesen Werten wird die Schwingungsgleichung:

$$\Theta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m \cdot s \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (9)$$

oder für kleine Ausschläge, da $\sin \alpha \cong \alpha$:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{m \cdot s \cdot g}{\Theta} \cdot \alpha = 0. \quad (10)$$

Hieraus ergibt sich die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{m \cdot s \cdot g}}. \quad (11)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit derjenigen für das mathematische Pendel, so ergeben sich gleiche Schwingungsdauern für:

$$\frac{l}{g} = \frac{\Theta}{m \cdot s \cdot g}. \quad (12)$$

Hieraus wird:

$$l = \frac{\Theta}{m \cdot s}. \quad (13)$$

Diese Länge l bezeichnet man als die reduzierte Pendellänge.

Zur weiteren Untersuchung benötigen wir die Umrechnung des Trägheitsmomentes auf parallele Achsen. Ist Θ das Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse, Θ_s dasjenige für die Schwerachse, so besteht zwischen beiden die Beziehung:

$$\Theta = \Theta_s + m \cdot s^2. \quad (14)$$

Setzen wir weiter für:

$$\Theta_s = m \cdot k^2,$$

worin k der Trägheitsradius ist, so wird:

$$\Theta = m(s^2 + k^2).$$

Damit erhalten wir für die reduzierte Pendellänge den Ausdruck:

$$l = \frac{s^2 + k^2}{s^2}. \quad (15)$$

Aus Gl. 15 ergibt sich:

$$s^2 - ls + k^2 = 0. \quad (16)$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert die Wurzelwerte:

$$s_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2}. \quad (17)$$

Die Wurzeln sind reell, solange $l^2 > 4k^2$ ist. Aus diesen Ableitungen folgt, daß das Scheibenpendel zwei Aufhängepunkte besitzt für gleiches T , ihre Entfernungen vom Schwerpunkt sind s_1 und s_2 .

Zur Beantwortung der Frage, für welche Entfernung des Aufhängepunktes vom Schwerpunkt die reduzierte Länge und damit die Schwingungsdauer ein Minimum wird, differenzieren wir Gl. 16) nach s :

$$\frac{d}{ds}(s^2 - ls + k^2) = 2s - l,$$

setzen den erhaltenen Wert

$$2s - l = 0$$

und bekommen:

$$s = \frac{l}{2}. \quad (18)$$

Dies ist nach den Gleichungen für die Wurzelwerte der Fall, wenn $l^2 = 4k^2$, d. h. $l = 2k$ ist.

Beispiele.

1. Zwei Gewichte von 2 kg in der Entfernung von 10 und 50 cm vom Aufhängepunkt (Abb. 32).

Es ist:

$$\theta = \frac{2 \cdot 50^2}{981} + \frac{2 \cdot 10^2}{981} = 5,301 \text{ kg sek}^2 \text{ cm},$$

wenn die Masse der Pendelstange gegenüber den Massen selbst vernachlässigt werden kann. Für θ kann gesetzt werden $m \cdot k_0^2$, woraus sich ergibt:

$$k_0 = \sqrt{\frac{\theta}{m}} = \sqrt{\frac{5,301 \cdot 981}{4}} = 36,1 \text{ cm}.$$

Die reduzierte Pendellänge ist

$$l = \frac{k_0^2}{s}.$$

Den Schwerpunktabstand erhält man nach dem Momentensatz:

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 50 = 4s$$

zu

$$s = 30 \text{ cm}.$$

Damit wird: $l = \frac{36,1^2}{30} = 43,3 \text{ cm}$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{43,3}{981}} = 1,396 \text{ sek}.$$

Würde die untere Masse allein wirken, so wäre:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{50}{981}} = 1,422 \text{ sek}.$$

2. Metronom von Mälzer (Abb. 33).

Es sei:

$$b = \alpha a,$$

$$m' = \beta m.$$

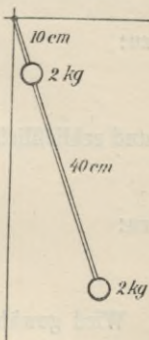


Abb. 32.

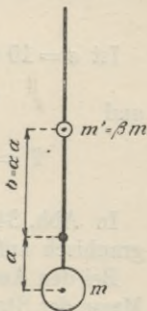


Abb. 33.

Damit wird:

$$\begin{aligned}\Theta &= m a^2 + m' b^2 \\ &= m a^2 (1 + \alpha^2 \beta) = m k_0^2,\end{aligned}$$

d. h.

$$k_0^2 = a^2 (1 + \alpha^2 \beta).$$

Der Schwerpunktsabstand errechnet sich aus:

$$(m + \beta m) s = a m - \beta m \cdot b$$

zu:

$$s = \frac{1 - \alpha \beta}{1 + \beta} a$$

und schließlich die reduzierte Pendellänge aus

$$l = \frac{k_0^2}{s}$$

zu:

$$l = \frac{a(1 + \alpha^2 \beta)(1 + \beta)}{1 - \alpha \beta}.$$

Wird gewählt:

$$\beta = \frac{1}{10},$$

$$\alpha = 3,$$

so erhält man für

$$\frac{l}{a} = 2,985.$$

Ist $a = 10$ cm, so erhält man:

$$l = 29,85 \text{ cm}$$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{29,85}{981}} = 1,10 \text{ sek.}$$

In Abb. 34 sind für $\beta = \frac{1}{10}$ und $\frac{1}{20}$ die Werte $\frac{l}{a}$ graphisch aufgetragen.

Bei den Ausrechnungen ist stets angenommen, daß die Masse der Stange gegenüber den Massen selbst verschwindend klein ist.

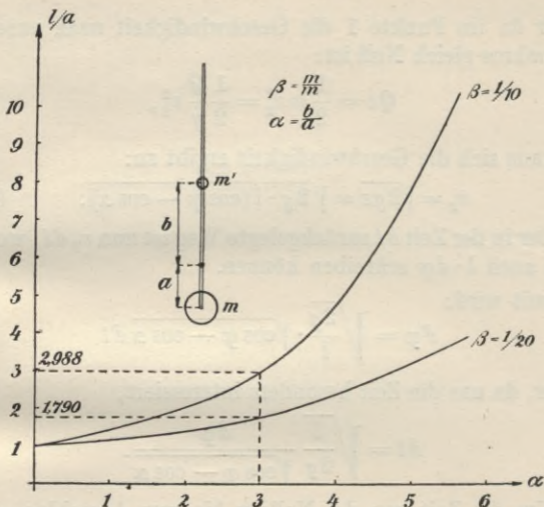


Abb. 34.

c) Das mathematische Pendel mit großem Ausschlag.

In Abb. 35 sei α der größte Ausschlag des Fadenpendels, φ die augenblickliche Lage. Der Höhenunterschied läßt sich ausdrücken durch

$$z = l \cos \varphi - l \cdot \cos \alpha = l (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (19)$$

Aus der Mechanik wissen wir, daß die Wuchtänderung gleich ist der in der gleichen Zeit geleisteten Arbeit. Die Fadenspannung steht senkrecht zur Bewegungsrichtung, leistet also keine Arbeit. Danach ist nun:

$$Qz = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2, \quad (20)$$

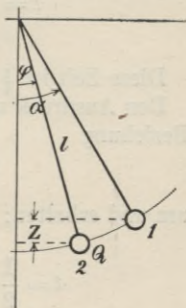


Abb. 35.

oder da im Punkte 1 die Geschwindigkeit nach unserer Annahme gleich Null ist:

$$Qz = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v_2^2, \quad (21)$$

woraus sich die Geschwindigkeit ergibt zu:

$$v_2 = \sqrt{2gz} = \sqrt{2g \cdot l (\cos \varphi - \cos \alpha)}. \quad (22)$$

Der in der Zeit dt zurückgelegte Weg ist nun $v_2 dt$, wofür wir auch $l \cdot d\varphi$ schreiben können.

Damit wird:

$$d\varphi = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha} dt$$

oder, da uns die Zeit besonders interessiert,

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Um die Zeit von der Nullage bis zum Ausschlag α zu erhalten, integrieren wir von 0 bis α und erhalten:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}. \quad (23)$$

Diese Zeit ist $\frac{1}{4}$ der vollen Schwingungsdauer.

Den Ausdruck unter der Wurzel formen wir mittels der Beziehung

$$\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

um und erhalten:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (24)$$

Weiter führen wir eine neue Veränderliche ψ ein durch die Beziehung

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi. \quad (25)$$

Um $d\varphi$ durch $d\psi$ auszudrücken differenzieren wir beide Seiten und erhalten:

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = \cos \psi \cdot d\psi \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

und hieraus:

$$d\varphi = \frac{2 \cos \psi \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\psi$$

oder, da

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

und mit dem obigen Ausdruck für $\sin \frac{\varphi}{2}$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi},$$

schließlich:

$$d\varphi = \frac{2 \cdot \cos \psi \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi}} d\psi. \quad (26)$$

Dieser Wert in Gl. 25 eingesetzt ergibt, wenn gleichzeitig $\sin \frac{\varphi}{2}$ durch $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi$ ersetzt wird:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}. \quad (27)$$

Die neuen Grenzwerte ergeben sich aus Gl. 25. Diese kann für $\varphi = 0$ nur bestehen, wenn $\psi = 0$ ist; für $\varphi = \alpha$ nur, wenn $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist.

Durch die elementaren Funktionen ist das Integral nicht ausdrückbar und daher auch nicht ohne weiteres zu lösen. Man nennt es ein elliptisches Integral erster Gattung und führt das Zeichen ein:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}} = F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (28)$$

darin ist $\sin \frac{\alpha}{2}$ der Modul und $\frac{\pi}{2}$ das Argument. Die Werte selbst entnimmt man den Tafeln für elliptische Integrale.

Wir erhalten nun für die volle Schwingungsdauer:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (29)$$

Einige Werte der Funktion enthält folgende Tafel¹⁾:

| | | |
|------------------|--------------------------|---|
| $\alpha = 0^0$ | $\frac{\alpha}{2} = 0^0$ | $F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1,5708 = \frac{\pi}{2}$ |
| 5 ⁰ | 2,5 ⁰ | 1,5715 |
| 10 ⁰ | 5 ⁰ | 1,5738 |
| 20 ⁰ | 10 ⁰ | 1,5828 |
| 40 ⁰ | 20 ⁰ | 1,6200 |
| 60 ⁰ | 30 ⁰ | 1,6858 |
| 90 ⁰ | 45 ⁰ | 1,8541 |
| 120 ⁰ | 60 ⁰ | 2,1565 |
| 150 ⁰ | 75 ⁰ | 2,7681 |
| 180 ⁰ | 90 ⁰ | ∞ |

¹⁾ Aus Föppl, Technische Mechanik Bd. IV.

Wir sehen ferner, daß der Funktionswert F sich bis $\alpha = 5^\circ$ nur um $7/10000$ ändert.

Für mittlere Ausschläge werden wir im folgenden noch eine angenäherte Formel ableiten. Den Wert unter dem Integralzeichen können wir mit Hilfe der binomischen Reihe:

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1} x \pm \binom{n}{2} x^2 \pm \binom{n}{3} x^3 \pm \dots,$$

gültig für jedes beliebiges n und für $-1 < x < +1$, umformen. Diese lautet für unseren besonderen Fall:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \dots$$

Rechnet man nur mit den beiden ersten Gliedern der rasch konvergierenden Reihe für kleines x , so erhält man, für x den Wert eingesetzt:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi d\phi \right]. \quad (30)$$

Da nun das letzte Integral mit den Grenzen 0 bis $\frac{\pi}{2}$ den Wert $\frac{\pi}{4}$ ergibt, wird

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \quad (31)$$

oder wenn wir, da es sich nur um mittlere Ausschläge handelt, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}$ setzen:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

oder für die volle Schwingung:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right), \quad (32)$$

worin α im Bogenmaß einzusetzen ist. Da zwischen Bogenmaß und Winkelgraden die Beziehung:

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \alpha^{\circ}$$

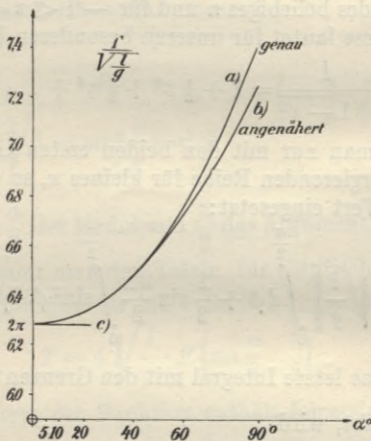


Abb. 36.

besteht, lautet die Formel für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + c\alpha^2), \quad (33)$$

mit $c = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0,000019$.

Der Wert des Korrektionsgliedes $(1 + c\alpha^2)$ ist für ein zelne Ausschläge wie folgt:

| | |
|--------------------|--------------------------------|
| $\alpha = 5^\circ$ | $(1 + c\alpha^0{}^2) = 1,0005$ |
| 10° | 1,0019 |
| 20° | 1,0076 |
| 40° | 1,0304 |
| 60° | 1,0684 |
| 90° | 1,1539 |

Ein Vergleich der Werte $T : \sqrt{\frac{l}{g}}$ nach den drei Formeln

$$a) \quad T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$b) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + c\alpha^0{}^2),$$

$$c) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

zeigt Abb. 36.

d) Das Drehpendel (Bifilarpendel).

Das Bifilarpendel wurde zuerst von Gauß angewandt zur Aufhängung der Magnethadel eines Galvanometers. Es soll im folgenden behandelt werden, da es zur Bestimmung von Trägheitsmomenten beliebig geformter Körper gute Dienste leistet, vor allem, da der Gleitmodul des Drahtes nicht bekannt sein muß.

In Abb. 37 ist eine Ausführungsform angegeben. Der Stab, der die zwei Massen m trägt, ist an zwei parallelen Fäden aufgehängt, deren Entfernung $2e$ und deren Länge l sei.

Der Ausschlag zur Zeit t sei φ , der Bogen x . Zur Bestimmung der rückwirkenden Kraft müssen wir zuerst untersuchen, welche Kräfte im Punkte A' wirken. Senk-

76 Bestimmung der Schwingungsdauer einfacher Systeme

recht nach Abb. 38 unten wirkt das Gewicht der Masse, also mg . In Richtung des Fadens wirkt die Komponente

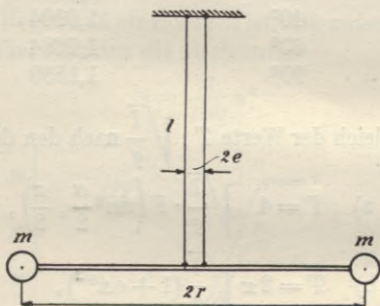


Abb. 37.

$mg \cos \alpha$. Einfluß auf die Bewegung hat jedoch nur die Komponente $mg \sin \alpha$. Um diese Wirkung im Punkte A'

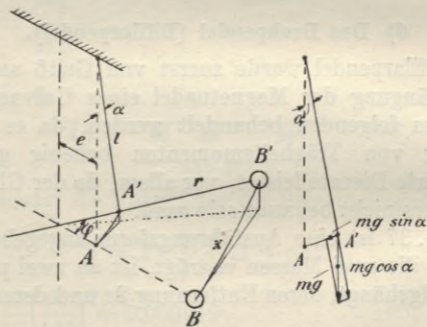


Abb. 38.

hervorzurufen, muß in B' die Kraft $\frac{e}{r} \cdot mg \sin \alpha$ wirken.

Die Differentialgleichung der Schwingung lautet nun:

$$2m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2mg \sin \alpha \frac{e}{r} = 0. \quad (34)$$

Wir formen diese um, indem wir setzen

$$x = \varphi \cdot r,$$

$$\alpha = \frac{e}{l} \varphi$$

und erhalten nach Multiplikation mit r :

$$2mr^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2mg \cdot e \cdot \sin \frac{e}{l} \varphi = 0.$$

In dieser Gleichung ist $2mr^2 = \Theta$ und $2mg = Q$. Für kleine Winkel φ können wir, besonders da $\frac{e}{l} < 1$ ist, setzen $\sin \frac{e}{l} \varphi \cong \frac{e}{l} \varphi$ und erhalten:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{Q \cdot e^2}{\Theta \cdot l} \varphi = 0, \quad (35)$$

woraus sich ergibt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta \cdot l}{Q \cdot e^2}} \quad (36)$$

oder

$$\Theta = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot Q \cdot \frac{e^2}{l}. \quad (37)$$

Die obige Formel ist jedoch nur richtig, wenn das durch die Verdrehung der Drähte hervorgerufene Torsionsmoment vernachlässigt werden kann. Bei Verwendung dünner Drähte ist dies jedoch meistens der Fall.

Hängt man den Körper an drei Drähten auf, die auf einem Kreis mit dem Radius e liegen, so bleibt obige Formel ohne Änderung bestehen.

2. Schwingungssysteme unter Wirkung elastischer Kräfte.

A. Ohne Berücksichtigung der Masse des elastischen Teiles.

a) Systeme mit Längsschwingungen.

α) Eingespannter Stab mit Endmasse.

Ein eingespannter, masseloser, elastischer Stab trage am freien Ende ein Gewicht Q mit der Masse m . Die Schwingungsdauer des Systems ergibt sich aus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (1)$$

worin nur c noch unbestimmt ist.

Für einen Stab mit gleichem Querschnitt ist die Verlängerung unter Einwirkung des Gewichtes Q :

$$\Delta l = \frac{Q}{EF} l,$$

wenn:

F : Stabquerschnitt

l : Stablänge

E : Elastizitätsmodul des Materials ist.

Hieraus ergibt sich, da c diejenige Kraft ist, die die Verlängerung 1 hervorruft,

$$c = \frac{EF}{l}$$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{EF} l}. \quad (2)$$

Würden wir an Stelle des Stabes eine Schraubenfeder, ebenfalls masselos, verwenden, so ergäbe sich:

$$c = \frac{d^4}{64 \cdot n \cdot r^3} G, \quad (3)$$

berechnet aus der Durchfederung

$$f = \frac{64 \cdot n \cdot r^3}{d^4 \cdot G} \cdot Q,$$

worin: d : Drahtdurchmesser

r : mittlerer Windungshalbmesser

n : Anzahl der Windungen

G : Gleitmodul des Materials ist.

Die obige Gl. 1 können wir noch in anderer Form schreiben.

Unter der Wirkung des Gewichtes $Q = m \cdot g$, wäre die Verlängerung des Stabes oder der Feder:

$$f = \frac{1}{c} \cdot m \cdot g.$$

Damit lautet die Gleichung für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}. \quad (4)$$

Hieraus wird:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f}} \quad (5)$$

und, da $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ ist, wenn n die minutliche Schwingungszahl ist:

$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f}}$$

oder, weil $\sqrt{981} \cong 10\pi$ ist,

$$n \cong 300 \sqrt{\frac{1}{f}} \text{ min}^{-1}. \quad (6)$$

In diesen Formeln bedeutet f die statische Durchfederung unter Wirkung von Q .

Führen wir den reziproken Wert von c , $C = \frac{1}{c}$ ein, so erhält man für die Schwingungsdauer den Ausdruck:

$$T = 2\pi\sqrt{mC}. \quad (7)$$

Aus $f = \frac{1}{c}Q = CQ$ folgt, daß C die Stabverlängerung für die Krafteinheit ist. Für diesen Wert findet sich in der Literatur¹⁾ die Bezeichnung „Federung“ (Kapazität).

Eine ähnliche Formel, die von Thomson aufgestellt ist, kennen wir aus der Elektrotechnik. Sie lautet:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

wenn L die Selbstinduktion und C die Kapazität des Kondensators ist²⁾.

β) Zwei Massen mit zwischenliegender Feder.

Zwei Massen m_1 und m_2 seien durch einen elastischen

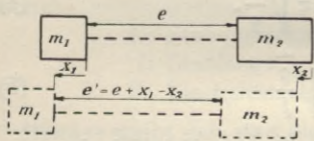


Abb. 39.

Stab oder Feder mit der Federkonstanten c verbunden (Abb. 39). Zur Zeit t sind die Abstände von der Ruhelage aus gemessen x_1 und x_2 . Die durch die Feder auf die beiden Massen ausgeübte

Kraft ist $c(x_1 - x_2)$. Damit lauten die Schwingungsgleichungen für jede der beiden Massen:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c(x_1 - x_2) = 0, \quad (8)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - c(x_1 - x_2) = 0. \quad (9)$$

¹⁾ Kutzbach: V. d. I. 1917, S. 917.

²⁾ Vgl. Rohmann, Elektrische Schwingungen: Sammlung Göschen Nr. 751, 752.

Zur Auflösung berechnen wir aus der ersten Gleichung x_2 , differenzieren zweimal nach der Zeit und setzen die Werte in die zweite Gleichung ein. Damit erhalten wir:

$$\frac{m_1 m_2}{c} \frac{d^4 x_1}{dt^4} + (m_1 + m_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c x_1 - c x_1 = 0$$

oder:

$$\frac{d^4 x_1}{dt^4} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} c \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad (10)$$

also eine Gleichung mit nur einer Unbekannten. Zu dieser Gleichung kommen wir auch, wenn wir x_1 eliminieren; den Index kann man also weglassen.

Zur weiteren Lösung bilden wir aus $x = a \sin \omega t$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^4 x}{dt^4}$$

und erhalten schließlich:

$$\omega^4 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} c \omega^2 = 0 \quad (11)$$

oder nach Dividieren durch ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} c \quad (12)$$

und

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{c}} \quad (13)$$

Für $\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ kann gesetzt werden $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, es wird also:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2}} \quad (14)$$

oder, da $\sqrt{\frac{c}{m_1}} = \omega_1$ und $\sqrt{\frac{c}{m_2}} = \omega_2$ die Eigenfrequenzen

der einzelnen Massen sind:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (15)$$

Ist z. B. $m_2 = \infty$, so wird $\frac{c}{m_2} = 0$ und wir erhalten:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_1}}.$$

Hieraus sehen wir, daß eine Einspannung gleichbedeutend ist mit einer unendlich großen Masse.

γ) Systeme mit Übersetzungen im elastischen Teil.

Zwischen den elastischen Stäben bzw. Federn und Massen sind oft Übersetzungen vorhanden, die eine Reduktion der Federkonstanten bzw. der Massen erfordern.

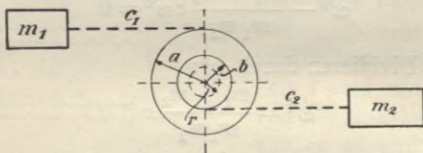


Abb. 40.

Wir betrachten das in Abb. 40 gegebene System von zwei Massen und zwei Federn, deren Angriffspunkte auf zwei Rollen mit den Halbmessern a und b liegen, wobei vorausgesetzt sein soll, daß die Masse der Rollen gegenüber den Hauptmassen vernachlässigt werden kann.

Die zu stellende Frage lautet: Mit welchen Werten muß $m_1, c_1; m_2, c_2$ multipliziert werden, wenn beide Systemteile auf eine gemeinsame Scheibe mit dem Halbmesser r reduziert werden sollen?

Zur Umrechnung gehen wir von der Energiegleichung aus.

Die Masse m_1 habe zu einer bestimmten Zeit den Ausschlag x_1 ; damit wird:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d x_1}{d t} \right)^2 \quad (16)$$

$$E_p = \frac{1}{2} c_1 x_1^2.$$

Für das auf r reduzierte System mit m_1' und c_1' erhält man:

$$E_k' = \frac{1}{2} m_1' \left(\frac{d x_1'}{d t} \right)^2 \quad (17)$$

$$E_p' = \frac{1}{2} c_1' x_1'^2.$$

Die Summe der Energien beider Systeme bleibt jedoch nur konstant, wenn:

und
ist, oder

$$\begin{aligned} E_k' &= E_k \\ E_p' &= E_p \\ m_1' \left(\frac{d x_1'}{d t} \right)^2 &= m_1 \left(\frac{d x_1}{d t} \right)^2 \\ c_1' \cdot x_1'^2 &= c_1 \cdot x_1^2. \end{aligned}$$

Zwischen x_1 und x_1' besteht jedoch die Beziehung

$$x_1' = \frac{r}{a} x_1.$$

Diesen Wert eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} m_1' &= \left(\frac{a}{r} \right)^2 m_1 \\ c_1' &= \left(\frac{a}{r} \right)^2 c_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Analog erhält man für das zweite System

$$\begin{aligned} m_2' &= \left(\frac{b}{r}\right)^2 m_2 \\ c_2' &= \left(\frac{b}{r}\right)^2 c_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Zweckmäßig würde man für den Bezugsradius die Einheit wählen oder aber, man reduziert den einen Systemteil auf den unveränderten zweiten.

Z. B. α) II auf I: es wird: $r = a$

$$\begin{aligned} \text{folglich: } m_1' &= m_1; & c_1' &= c_1 \\ m_2' &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 m_2; & c_2' &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 c_2. \end{aligned}$$

β) I auf II: es wird: $r = b$

$$\begin{aligned} \text{folglich: } m_1' &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 m_1; & c_1' &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 c_1 \\ m_2' &= m_2; & c_2' &= c_2. \end{aligned}$$

In Worten: Man reduziert I auf II, indem man m_1 und c_1 mit dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses von I auf II multipliziert.

Beispiele.

1) Anordnung nach Abb. 41.

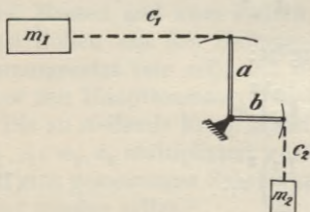


Abb. 41.

Es wird bei Reduktionen von I auf II:

$$\begin{aligned} m_1' &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 m_1 \\ c_1' &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 c_1 \\ m_2' &= m_2 & c_2' &= c_2. \end{aligned}$$

II auf I:

$$m'_1 = m_1 \qquad c'_1 = c_1$$

$$m'_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 m_2 \qquad c'_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 c_2.$$

2) Anordnung nach Abb. 42.

Auf den Halbmesser r reduziert wird:

$$m' = \left(\frac{b}{r}\right)^2 m$$

$$c' = \left(\frac{a}{r}\right)^2 c.$$

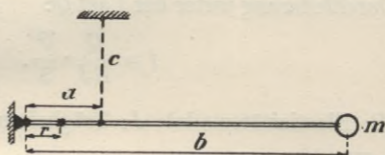


Abb. 42.

Die Schwingungsdauer ist:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m'}{c'}} = 2\pi \sqrt{\frac{mb^2}{ca^2}}$$

oder, da $mb^2 = \Theta$ (Massenträgheitsmoment) ist,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{ca^2}},$$

wenn die Masse des Hebels vernachlässigt werden kann. Ist dies jedoch nicht möglich, so ist an Stelle von Θ , $\Theta + \Theta_h$ zu setzen.

b) Systeme mit Querschwingungen.

α) Eingespannter Stab mit Endmasse.

Ein masseloser Stab der Länge l (Abb. 43) trage am Ende die Masse m .

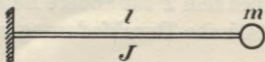


Abb. 43.

Die Schwingungsdauer des Systems erhalten wir aus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (1)$$

Nach den Formeln der Festigkeitslehre¹⁾ ist die statische Durchfederung unter der Last Q :

$$f = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3}. \quad (2)$$

(E : Elastizitätsmodul; J : Trägheitsmoment).

Hieraus ergibt sich:

$$c = \frac{3EJ}{l^3}. \quad (3)$$

Der Ausdruck für die Schwingungsdauer lautet nun:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot l^3}{3EJ}}. \quad (4)$$

Für einen frei aufliegenden Stab, der in der Mitte die Masse m trägt, erhält man aus:

$$f = \frac{Q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{48}$$

$$c = \frac{48EJ}{l^3} \quad (5)$$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{48 \cdot EJ}}. \quad (6)$$

Analog berechnet sich T für andere Belastungsfälle, es ist nur nötig, die statische Durchfederung zu bestimmen.

¹⁾ Vgl. Hauber, Festigkeitslehre: Sammlung Göschen Nr. 288.

β) Balken mit zwei Massen.

Unter der Wirkung der Lasten $Q_1 = m_1 g$ und $Q_2 = m_2 g$ erfährt der masselose Stab eine Durchfederung. Wir nehmen nun an, daß diese statischen Durchfederungen um die Beträge y_1 und y_2 vergrößert werden, was durch Wirkung von Kräften P_1 und P_2 erreicht werden kann (Abb. 44).

Unter Verwendung der Einflußzahlen α ergeben sich zwischen Kraft und Durchbiegung folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 \\ y_2 &= \alpha_{22} P_2 + \alpha_{21} P_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Hierin bedeutet z. B. α_{12} die Durchfederung der Stelle 1 unter Wirkung der Kraft $P = 1$ an der Stelle 2. Nach dem Maxwellschen Vertauschungssatz ist $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

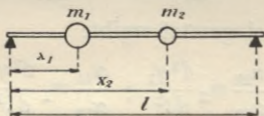


Abb. 44.

Aus den Gleichungen 7 folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_2 \\ P_2 &= \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} y_2 \end{aligned}$$

oder, wenn wir für $\frac{1}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = \beta$ setzen,

$$\begin{aligned} P_1 &= (\alpha_{22} y_1 - \alpha_{12} y_2) \beta \\ P_2 &= (\alpha_{11} y_1 - \alpha_{12} y_2) \beta. \end{aligned}$$

Für die zwei Massen erhalten wir folgende dynamische Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \alpha_{22} y_1 \beta - \alpha_{12} y_2 \beta &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \alpha_{11} y_1 \beta - \alpha_{12} y_2 \beta &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

also zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten y_1 und y_2 .

Aus der ersten der Gl. 8 folgt:

$$y_2 = \frac{m_1}{\alpha_{12} \beta} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} y_1 = 0 \quad (9)$$

und

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{m_1}{\alpha_{12} \beta} \frac{d^4 y_1}{dt^4} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0.$$

In die zweite eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2}{\alpha_{12} \beta} \frac{d^4 y_1}{dt^4} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} m_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\alpha_{11} \alpha_{22}}{\alpha_{12}} \beta y_1 \\ - \alpha_{12} y_1 \beta = 0 \end{aligned}$$

und schließlich:

$$m_1 m_2 \frac{d^4 y_1}{dt^4} + \beta (m_1 \alpha_{11} + m_2 \alpha_{22}) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \beta y_1 = 0.$$

Zur Lösung bilden wir wieder $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$ und $\frac{d^4 y_1}{dt^4}$ aus $x = ae^{t\omega}$

und erhalten:

$$m_1 m_2 \omega^4 + \beta (m_1 \alpha_{11} + m_2 \alpha_{22}) \omega^2 + \beta = 0. \quad (10)$$

Mit $\omega^4 = \lambda^2$ führt die Gleichung zur Form:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (11)$$

deren Wurzel

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (12)$$

und

$$\omega = \pm \sqrt{\lambda_{1,2}} \quad (13)$$

sind.

Wir erhalten vier Wurzeln, zwei mit positiven und zwei mit negativen Vorzeichen, aber mit gleichen Absolutwerten.

Hieraus ergeben sich die beiden Schwingungsdauern zu:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad (14)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}.$$

c) Systeme mit Drehschwingungen.

α) Eingespannte Welle mit Schwungscheibe.

An einer masselosen Welle der Länge l befindet sich am Ende eines masselosen Stabes r die Masse $m = \frac{Q}{g}$ (Abb. 45).

Nach den Lehren der Festigkeitslehre ist durch ein Moment M die Verdrehung zweier Querschnitte der Welle im Abstand von l cm voneinander

$$\psi' = \frac{M}{GJ},$$

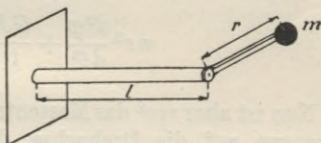


Abb. 45.

worin G der Gleitmodul des Materials und J das polare Flächenträgheitsmoment der Welle ist. Die Verdrehung des Endquerschnittes unter Wirkung des Momentes $M = P \cdot r$ wird dann

$$\psi = \frac{P \cdot r}{G \cdot J} \cdot l \quad (1)$$

oder, wenn wir den Verdrehungsbogen auf den Radius r umrechnen

$$x = \frac{P \cdot r^2 \cdot l}{G \cdot J}, \quad (2)$$

woraus sich ergibt:

$$P = \frac{G \cdot J}{r^2 \cdot l} x. \quad (3)$$

Die Masse m führt Schwingungen aus auf dem Kreisumfang; zur Zeit t sei der Ausschlag x . Wirkt auf die Masse keine äußere Kraft, so lautet die Schwingungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{GJ}{r^2 \cdot l} x = 0. \quad (4)$$

An Stelle des Kreisbogens führen wir nun den Winkel φ ein und erhalten, da $x = \varphi \cdot r$ ist:

$$m r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{GJ}{r \cdot l} \varphi = 0.$$

Die ganze Gleichung mit r multipliziert ergibt

$$m r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{GJ}{l} \varphi = 0.$$

Nun ist aber $m r^2$ das Massenträgheitsmoment der Masse, bezogen auf die Drehachse, das wir mit Θ bezeichnen wollen; ferner setzen wir für $\frac{GJ}{l} = c$ und erhalten:

$$\Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \varphi = 0$$

oder

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{c}{\Theta} \varphi = 0. \quad (5)$$

In bekannter Weise ergibt sich hieraus die Eigenfrequenz zu:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{\theta}}$$

und die Schwingungsdauer zu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{GJ}} \cdot l. \quad (6)$$

Aus Gl. 1 folgt für $\phi = 1$

$$1 = \frac{M}{G \cdot J} l$$

oder:

$$M = \frac{GJ}{l} = c.$$

Der Wert c ist also gleichwertig dem Moment, das die Einheitsamplitude hervorruft, es wird mit Direktionsmoment bezeichnet.

Vergleichen wir die Formel $\omega = \sqrt{\frac{c}{\theta}}$ mit derjenigen für die geradlinige Schwingung, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, so sehen wir, daß bei dem Drehpendel statt der Masse m das Massenträgheitsmoment θ , statt der Direktionskraft das Direktionsmoment einzusetzen ist.¹⁾

Besteht die Schwungmasse aus einer zylindrischen Masse mit dem Durchmesser d und der Höhe h , so ist:

$$m = \frac{\frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot \gamma}{g}$$

¹⁾ Die Verwendung des Buchstabens c sowohl für die Kraft als auch für das Moment ist in der Literatur allgemeinüblich.

und: $\theta = m \cdot k^2,$ (7)

wenn k der Trägheitshalbmesser ist.

Aus Gl. 2 ergibt sich unter Wirkung des Gewichtes Q eine statische Durchfederung:

$$f = \frac{m \cdot g \cdot l \cdot r^2}{G \cdot J} = \frac{\theta}{c} g. \quad (8)$$

Dieser Wert in die Gleichung $\omega = \sqrt{\frac{c}{\theta}}$ eingesetzt, liefert die bereits bekannten Gleichungen

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f}} \quad (9)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} \quad (10)$$

und

$$\bar{n} \cong 300 \sqrt{\frac{1}{f}}. \quad (11)$$

β) Welle mit zwei Schwungscheiben.

Zu einer bestimmten Zeit seien die Ausschläge φ_1 und φ_2 (Abb. 46). Analog den Betrachtungen für Längsschwingungen können wir die Gleichgewichtsgleichungen für die zwei Schwungscheiben anschreiben:

$$\theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + c (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (12)$$

$$\theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c (\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Die Lösung ist ebenfalls bekannt, sie lautet:

$$\omega = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2} \cdot c = \left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) c \quad (13)$$

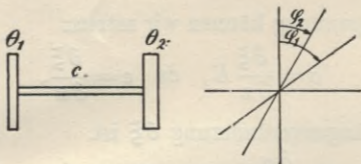


Abb. 46.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot 1}{\theta_1 + \theta_2 \cdot c}} \quad (14)$$

worin

$$c = \frac{G \cdot J}{l} \quad (15)$$

ist.

B. Mit Berücksichtigung der Masse des elastischen Teiles.

α) Längsschwingungen eines Stabes.

Zur Untersuchung benötigen wir folgende Formeln der Festigkeitslehre:

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$P = \sigma \cdot F.$$

Das Massenelement hat

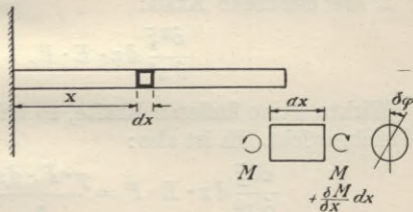


Abb. 47.

das Volumen: $F \cdot dx$

das Gewicht: $\gamma \cdot F \cdot dx$

die Masse: $\frac{\gamma \cdot F \cdot dx}{g}$.

An ihm wirken folgende Spannungen (Abb. 47):

$$\sigma \text{ und } \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx.$$

Für die Spannung können wir setzen:

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x} E, \quad \text{da} \quad \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

wenn die Längenveränderung $\partial \xi$ ist.

Setzt man in $\frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$ diese Werte ein, so lautet dieser

Ausdruck $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx E$. Die Größe der Kraft, die die Verlängerung $\partial \xi$ hervorruft, ist F mal so groß.

Auf das Massenelement wirken also folgende Kräfte:

1. der Trägheitswiderstand ($P = m \cdot b$)

$$\frac{\gamma \cdot F \cdot dx}{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

2. die elastische Kraft:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \cdot E \cdot F.$$

Wirken keine äußeren Kräfte, so halten sich beide das Gleichgewicht. Es ist also:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \cdot E \cdot F = \frac{\gamma \cdot F \cdot dx}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} E = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

oder mit $\frac{Eg}{\gamma} = a^2$ die Schwingungsgleichung:

$$a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2)$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung setzen wir

$$\xi = X \cdot T, \quad (3)$$

wobei X eine Funktion von x , T eine von t ist.

Durch zweimalige Differentiation erhält man

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

Diese Werte in Gl. 2 eingesetzt ergibt:

$$a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}$$

oder

$$\frac{a^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (4)$$

Auf beiden Seiten der Gleichung steht jeweils nur eine Funktion von x bzw. t . Sie kann nur bestehen, wenn beide Seiten einer gemeinsamen Konstanten gleich sind, z. B. $-k^2$. Dann wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\frac{k^2}{a^2} X \\ \frac{d^2 T}{dt^2} &= -k^2 T. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind bekannt, sie lauten:

$$\begin{aligned} X &= A \cos \frac{k}{a} x + B \sin \frac{k}{a} x \\ T &= C \cos kt + D \sin kt. \end{aligned} \quad (6)$$

Für das gesuchte Integral der Gl. 2 erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} \xi = & AC \cos \frac{k}{a} x \cdot \cos kt + AD \cos \frac{k}{a} x \cdot \sin kt \\ & + BC \sin \frac{k}{a} x \cdot \cos kt + BD \sin \frac{k}{a} x \cdot \sin kt. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Konstanten ergeben sich aus den Grenzbedingungen. Wir wollen die Weiterrechnung für folgende drei Fälle durchführen:

1. beide Stabenden eingespannt,
2. beide Stabenden frei,
3. ein Ende eingespannt, das andere frei.

1. Fall.

Die Bedingungen für diesen Fall lauten:

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 \text{ ist } \xi &= 0 \\ x = l \quad \xi &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir in Gl. 7 $x = 0$, so erhalten wir:

$$\xi = AC \cos kt + AD \sin kt.$$

Aus $\xi_{(x=0)} = 0$ folgt $A = 0$.

Wird $x = l$ gesetzt, so lautet Gl. 7, mit $A = 0$:

$$\xi = BC \sin \frac{kl}{a} \cdot \cos kt + BD \sin \frac{kl}{a} \cdot \sin kt.$$

Diese Gleichung muß für $x = l$ zu Null werden. Dies ist nur möglich für $\frac{kl}{a} = n\pi$, worin n eine ganze positive Zahl ist.

Damit wird die Schwingungsgleichung:

$$\xi = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(BC \cos \frac{n\pi a}{l} t + BD \sin \frac{n\pi a}{l} t \right), \quad (8)$$

aus der sich die Schwingungsdauer zu:

$$T_n = \frac{2\pi}{\frac{n\pi a}{l}} = \frac{2l}{na} \quad (9)$$

ergibt.

2. Fall.

$$\text{Bedingungen: } \left. \begin{array}{l} x=0 \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \\ x=l \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{weil freies Stabende} \\ \text{keine Spannungen} \\ \text{übertragen kann.} \end{array}$$

Aus Gl. 7 erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = & -AC \cdot \frac{k}{a} \sin \frac{k}{a} x \cdot \cos kt - AD \frac{k}{a} \sin \frac{k}{a} x \cdot \sin kt \\ & + BC \cdot \frac{k}{a} \cos \frac{k}{a} x \cdot \cos kt + BD \frac{k}{a} \cos \frac{k}{a} x \cdot \sin kt. \end{aligned}$$

Aus

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0} = B \frac{k}{a} (C \cos kt + D \sin kt) = 0$$

folgt:

$$B = 0.$$

Für $x=l$ erhalten wir:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -A \frac{k}{a} \sin \frac{kl}{a} (C \cos kt + D \sin kt).$$

Dieser Wert kann auch nur wieder zu Null werden, wenn $\frac{kl}{a} = n\pi$ ist.

Die Schwingungsgleichung ergibt damit:

$$\xi = \cos \frac{n\pi}{l} x \left(AC \cos \frac{n\pi a}{l} t + AD \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \quad (10)$$

mit der gleichen Schwingungsdauer

$$T_n = \frac{2l}{na}. \quad (11)$$

3. Fall.

$$\begin{aligned} \text{Bedingungen: } \quad x = 0 \quad \xi = 0 \\ x = l \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Aus:

$$\xi_{(x=0)} = AC \cos kt + AD \sin kt = 0$$

ergibt sich wieder: $A = 0$.

Für $x = l$ wird mit $A = 0$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = B \frac{k}{a} \cos \frac{kl}{a} (C \cos kt + D \sin kt).$$

Der rechtsstehende Ausdruck kann nur verschwinden, wenn $\cos \frac{kl}{a} = 0$, d. h. wenn $\frac{kl}{a} = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$ oder allgemein $\frac{2n-1}{2} \cdot \pi$ ist.

Diese Werte eingesetzt, ergibt folgende Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned} \xi = \sin \frac{(2n-1)\pi \cdot x}{2l} \left(BC \cos \frac{(2n-1)\pi \cdot a}{2l} t \right. \\ \left. + BD \sin \frac{(2n-1)\pi a}{2l} t \right) \end{aligned} \quad (12)$$

mit der Schwingungsdauer

$$T_n = \frac{4l}{(2n-1)a}. \quad (13)$$

Aus den Ableitungen sehen wir, daß es für den Stab viele Schwingungszahlen gibt. Die Schwingung für $n = 1$ heißt Grundschwingung, für größere Werte von n erhalten wir die Oberschwingungen.

Für die Grundschwingung erhalten wir folgende Schwingungsdauern:

$$1. \text{ Fall: } T_1 = \frac{2l}{a}, \quad (14)$$

$$2. \text{ Fall: } T_1 = \frac{2l}{a}, \quad (14a)$$

$$3. \text{ Fall: } T_1 = \frac{4l}{a} \quad (14b)$$

und folgende Schwingungsgleichungen:

$$1. \quad \xi = \sin \frac{\pi}{l} x \left(BC \cos \frac{\pi a}{l} t + BD \sin \frac{\pi a}{l} t \right), \quad (15)$$

$$2. \quad \xi = \cos \frac{\pi}{l} x \left(AC \cos \frac{\pi a}{l} t + AD \sin \frac{\pi a}{l} t \right), \quad (15a)$$

$$3. \quad \xi = \sin \frac{\pi}{2l} x \left(BC \cos \frac{\pi a}{2l} t + BD \sin \frac{\pi a}{2l} t \right). \quad (15b)$$

Für die Grundschwingung lauten die Schwingungsgleichungen, wenn wir gleichzeitig annehmen, daß zur Zeit $t = 0$ der Ausschlag $\xi = 0$ ist, wodurch das \cos -Glied verschwindet, und wenn wir außerdem für die Koeffizienten B_1 setzen und den Wert T_1 einführen:

$$1. \text{ Fall: } \xi = \sin \frac{\pi}{l} x \cdot B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T_1}, \quad (16)$$

$$2. \text{ Fall: } \xi = \cos \frac{\pi}{l} x \cdot B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T_1}, \quad (16a)$$

$$3. \text{ Fall: } \xi = \sin \frac{\pi}{2l} x \cdot B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T_1}. \quad (16b)$$

Die Gleichungen zeigen, daß unabhängig von der Zeit, für bestimmte x gleiche Ausschläge bestehen. Unter den gegebenen Annahmen sind die Massenteilchen in Ruhe

für Fall 1: für $x = 0$ und $x = l$,

2: für $x = \frac{l}{2}$,

3: für $x = 0$.

Zwischen diesen Punkten, die wir Knotenpunkte der stehenden Schwingung nennen, liegen die Stellen der maximalen Ausschläge, die Schwingungsbäuche. Stellen wir uns die Aufgabe, die Punkte zu suchen, für welche die Ausschläge nach Größe und Richtung gleich sind, so erhalten wir für die Fälle 1 und 2 aus $\frac{\pi}{l} x = 2\pi$ den Wert

$x = 2l$, für den 3. Fall $x = 4l$. Diese Längen, die wir mit l_0 bezeichnen wollen, sind jedoch nichts anderes als die Wellenlängen der Schwingungen. Wir ersehen daraus,

daß für den beiderseits freien und eingespannten Stab die Wellenlänge der Grundschwingung der doppelten Stablänge, für den einseitig eingespannten Stab, gleich der einfachen Stablänge ist. Analoge Verhältnisse hat der Leser in der Akustik, bei den Pfeifen kennengelernt. In der Akustik rechnet man jedoch nicht mit der Schwingungsdauer, sondern mit den Schwingungszahlen; zwischen

beiden besteht die Beziehung $n = \frac{1}{T}$.

Wir kommen nun zu unserer Abkürzung $a^2 = \frac{Eg}{\gamma}$ zurück. Führen wir die Dimensionen ein, also für

$$\begin{aligned} E: & \text{ kg/cm}^2 \\ g: & \text{ cm/sek}^2 \\ \gamma: & \text{ kg/cm}^3, \end{aligned}$$

so ergibt sich für a : cm/sek, also die Dimension einer Geschwindigkeit. Den Wert a bezeichnet man mit Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Für einen Eisenstab mit $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ und $\gamma = 7,85 \text{ g/cm}^3$ erhalten wir demnach:

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 981}{7,85 \cdot 10^{-3}}} \cong 5000 \text{ m/sek.}$$

Mit diesem Wert ergibt sich für den einseitig eingespannten Stab mit $l = 100 \text{ cm}$:

$$T_1 = \frac{4 \cdot 100}{500000} = 0,0008 \text{ sek,}$$

$$n_1 = \frac{1}{T_1} = 1250 \text{ sek}^{-1}.$$

Zwischen Wellenlänge l_0 , Wellengeschwindigkeit a und Schwingungszahl n besteht die Beziehung

$$a = n \cdot l_0$$

oder

$$l_0 = a \cdot T.$$

Für unser Beispiel $l = 100 \text{ cm}$ fanden wir $l_0 = 4l = 400 \text{ cm}$ und mit obiger Beziehung

$$n = \frac{a}{l_0} = \frac{500000}{400} = 1250 \text{ sek}^{-1}.$$

Der Stab kann nun außer der Grundschwingung noch

Oberschwingungen ausführen. Für diesen Fall lautet die vollständige Schwingungsgleichung:

$$\xi = \sum \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right).$$

Analog den Lehren der Akustik nennen wir:

$n = 1$: Grundton

$n = 2$: Oktave

$n = 3$: Quinte der Oktave usw.

β) Drehschwingungen eines Stabes.

An den Enden des Massenelementes der Länge dx wirken die Momente (Abb. 48)

$$M \text{ und } M + \frac{\partial M}{\partial x} dx.$$

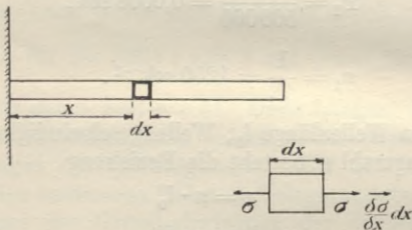


Abb. 48.

Das Massenträgheitsmoment ist:

$$\frac{\gamma}{g} \cdot J dx,$$

wenn J das polare Flächenträgheitsmoment bedeutet.

Damit lautet unsere Schwingungsgleichung:

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{g} \cdot J \cdot dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (17)$$

wenn φ der Verdrehungswinkel der um dx entfernten Querschnitte ist. Aus der Festigkeitslehre wissen wir, daß für den kreisförmigen Querschnitt:

$$\partial \varphi = \frac{M}{G \cdot J} \partial x$$

ist, woraus folgt:

$$M = G \cdot J \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

und weiter

$$\frac{\partial M}{\partial x} = G \cdot J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Diesen Wert eingesetzt, ergibt:

$$G \cdot J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = \frac{\gamma}{g} \cdot J dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

oder

$$\frac{G \cdot g}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Setzen wir für $\frac{G \cdot g}{\gamma} = b^2$, so erhalten wir die bereits auf S. 94 abgeleitete partielle Differentialgleichung

$$b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Die Weiterableitung erübrigt sich, die Ergebnisse sind die gleichen wie bei der Längsschwingung. Die Größe b nennt man analog die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsionsschwingung.

γ) Querschwingungen eines Stabes.

Wir betrachten ein Massenteilchen der Länge dx in der Entfernung x von der Einspannstelle (Abb. 49). Seine Masse ist $dm = \frac{\gamma \cdot F}{g} dx$. An den Schnittflächen wirken die Scherkräfte S und $S + dS$. Befindet sich das Element in der Entfernung y von der Nulllage entfernt, so können wir folgende Gleichung aufstellen:

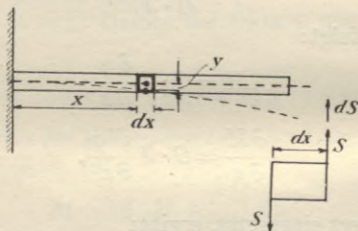


Abb. 49.

$$dS - g dm + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm = 0. \quad (19)$$

Für dm den Wert eingesetzt und durch dx die ganze Gleichung dividiert, ergibt:

$$\frac{dS}{dx} - \gamma F + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Nun ist nach den Ableitungen der Festigkeitslehre allgemein:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ},$$

$$S = \frac{dM}{dx}.$$

Damit erhalten wir für unsere Ableitung

$$\frac{dS}{dx} = EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

und

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \gamma F + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

Wir denken uns nun die Gesamtdurchbiegung zusammengesetzt aus der statischen, y_1 und der dynamischen y_2 . Dann ist

$$\text{und} \quad y = y_1 + y_2$$

$$EJ \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + EJ \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} - \gamma F + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0. \quad (22)$$

Für die statische Durchbiegung ist jedoch

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0,$$

womit sich ergibt:

$$EJ \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} - \gamma F = 0.$$

Subtrahiert man diesen Wert von Gl. 22, so bleibt übrig:

$$EJ \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0$$

oder umgeformt:

$$\frac{EJ \cdot g}{\gamma \cdot F} \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung setzen wir:

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2},$$

$$\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} = T \frac{d^4 X}{dx^4}$$

und erhalten schließlich:

$$\frac{EJg}{\gamma \cdot F} \frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

und

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{\gamma F}{EJg} k^2 X = 0,$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 T = 0,$$
(24)

wenn k^2 wieder der für beide Seiten gemeinsame Wert ist.

Die Lösung der Gl. 24a lautet:

$$T = a \cos kt + b \sin kt$$
(25)

oder für die Annahme $T = 0$ für $t = 0$

$$T = b \sin kt.$$

In Gl. 24a setzen wir für $\frac{\gamma F k^2}{EJg} = m^4$

und erhalten

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - m^4 X = 0.$$
(26)

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$X = A_1 \text{Cof} \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 \text{Sin} \alpha x + A_4 \sin \alpha x. \quad (27)$$

Die vier Ableitungen sind:

$$\frac{dX}{dx} = \alpha (A_1 \text{Sin} \alpha x - A_2 \sin \alpha x + A_3 \text{Cof} \alpha x + A_4 \cos \alpha x), \quad (27a)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 (A_1 \text{Cof} \alpha x - A_2 \cos \alpha x + A_3 \text{Sin} \alpha x - A_4 \sin \alpha x), \quad (27b)$$

$$\frac{d^3 X}{dx^3} = \alpha^3 (A_1 \text{Sin} \alpha x + A_2 \sin \alpha x + A_3 \text{Cof} \alpha x - A_4 \cos \alpha x), \quad (27c)$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \alpha^4 (A_1 \text{Cof} \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 \text{Sin} \alpha x + A_4 \sin \alpha x). \quad (27d)$$

Die letzte Ableitung ergibt aber $\frac{d^4 X}{dx^4} = \alpha^4 X$.

Diesen Wert setzen wir in Gl. 26 ein und erhalten:

$$\alpha^4 X - m^4 X = 0$$

oder

$$\alpha = m. \quad (28)$$

Mit diesen Teilergebnissen Gl. 25 und Gl. 27 ergibt sich für die gesuchte Schwingungsgleichung

$$y_2 = XT,$$

$$y_2 = (a \cos kt + b \sin kt) (A_1 \cos mx + A_2 \cos mx + A_3 \sin mx + A_4 \sin mx). \quad (29)$$

Die Konstanten A_1 bis A_4 wollen wir für den Fall des einseitig eingespannten Stabes ermitteln.

Die Grenzbedingungen lauten:

$$\text{für } x = 0: \quad \left. \begin{array}{l} y_2 = 0 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d. h. Winkel mit der} \\ \text{Ruhelage} = 0 \end{array}$$

$$\text{für } x = l: \quad 1. \text{ Moment der Normalkräfte} = 0,$$

$$\text{d. h. } \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0, \quad \text{da } \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{M}{EJ} \text{ ist.}$$

$$2. \text{ Schubkraft} = 0,$$

$$\text{d. h. } \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = 0.$$

Da die Funktion T als Konstante behandelt wird bei einer Differentiation nach dx , können die Grenzbedingungen auch wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{für } x=0: \quad X=0 \quad \frac{\partial X}{\partial x} &= 0, \\ x=l: \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned}$$

Mit den Gl. 28 erhalten wir:

$$X_{(x=0)} = A_1 + A_2 = 0 \quad \text{oder} \quad A_2 = -A_1, \quad (30)$$

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = \alpha(A_3 + A_4) = 0 \quad \text{oder} \quad A_4 = -A_3, \quad (30a)$$

$$\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = A_1(\mathfrak{Cof} ml + \cos ml) + A_3(\mathfrak{Sin} ml + \sin ml) = 0, \quad (30b)$$

$$\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = A_1(\mathfrak{Sin} ml - \sin ml) + A_3(\mathfrak{Cof} ml - \cos ml) = 0. \quad (30c)$$

Die beiden Gl. 31/32 sind erfüllt für:

$$\frac{\mathfrak{Sin} ml + \sin ml}{\mathfrak{Cof} ml + \cos ml} = \frac{\mathfrak{Cof} ml + \cos ml}{\mathfrak{Sin} ml - \sin ml}. \quad (31)$$

Hieraus ergibt sich nach Ausmultiplizieren und mit den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sin^2 ml + \cos^2 ml &= 1, \\ \mathfrak{Sin}^2 ml - \mathfrak{Cof}^2 ml &= -1 \end{aligned}$$

die Periodengleichung:

$$\mathfrak{Cof} ml \cos ml + 1 = 0. \quad (32)$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt am besten graphisch, wozu wir Gl. 34 umformen in

$$\cos ml = -\frac{1}{\mathfrak{Cof} ml}.$$

Die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven, die als

Funktion von ml aufgetragen werden, sind die gesuchten Werte.

Lord Rayleigh berechnete die niedrigsten Werte zu

$$m_1 = 0,597 \frac{\pi}{l},$$

$$m_2 = 1,444 \frac{\pi}{l},$$

$$m_3 = 2,500 \frac{\pi}{l}.$$

.....

Nach Festlegung der Koeffizienten für den betrachteten Fall können wir die vollständige Schwingungsgleichung ausschreiben, sie lautet:

$$y_2 = b \sin kt [A_1 (\cos mx - \cos m x) + A_3 (\sin mx - \sin m x)]. \quad (33)$$

Die Schwingungsdauer ergibt sich zu

$$T_n = \frac{2\pi}{k_n}. \quad (34)$$

Den Wert k_n erhalten wir aus der Beziehung

$$\frac{\gamma F k_n^2}{E J g} = m_n^4$$

zu

$$k_n = m_n^2 \sqrt{\frac{E J g}{\gamma F}}. \quad (35)$$

Für die Grundschiwingung ($n = 1$) wird mit

$$m_1 = 0,597 \frac{\pi}{l},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{0,597^2 \cdot \pi^2} l^2 \sqrt{\frac{\gamma F}{E J g}},$$

$$T_1 = 1,787 l^2 \sqrt{\frac{\gamma F}{E J g}}. \quad (36)$$

Zur Probe stellen wir die Dimensionsgleichung auf und erhalten mit den Dimensionen

$$\begin{aligned} \gamma: \text{kg/cm}^3 & & E: \text{kg/cm}^2 \\ F: \text{cm}^2 & & J: \text{cm}^4 \\ l: \text{cm} & & g: \text{cm/sek}^2 \end{aligned}$$

$$T_1 = \text{cm}^2 \sqrt{\frac{\text{sek}^2}{\text{cm}^4}} = \text{sek}.$$

In der Literatur finden wir vielfach den Wert $\frac{\mu}{E\theta}$ unter dem Wurzelzeichen, worin unter μ die Masse für die Längeneinheit zu verstehen ist. Diese ist jedoch

$$\mu = \frac{\gamma \cdot F \cdot l}{g \cdot l} = \frac{\gamma \cdot F}{g}.$$

In $\sqrt{\frac{\mu}{E\theta}}$ eingesetzt mit $\theta = J$ erhalten wir:

$$\sqrt{\frac{\gamma \cdot F}{E J g}},$$

also den bei unserer Ableitung gefundenen Wert.

Im folgenden sollen die Grenzbedingungen für zwei andere Fälle noch angegeben werden.

1. Beide Stabenden eingespannt:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} y = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Periodengleichung: $\cos ml \cdot \cos ml + 1 = 0.$

2. Beide Stabenden frei:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x} = 0.$$

Periodengleichung: $\cos ml \cdot \cos ml = 1$.

Für technische Berechnungen würde nun noch der Fall interessieren, daß am Ende des Stabes noch eine Masse befestigt ist. Die Durchrechnung würde zu weit führen, es sei auf die angegebene Literatur verwiesen.





80-3

S-96

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301463



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295798

SI ZSI ZSI

SI ZSI ZSI