...hen

Projektive Geometrie

in

synthetischer Behandlung

von

Dr. Karl Doehlemann

Mit 85 Figuren

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite!

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Sammlung Göschen

Projektive Geometrie

in

synthetischer Behandlung

von

Dr. Karl Doehlemann
Privatdozent an der Universität München

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage

Mit 85 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1901

Litteratur.

a) Grundlegende Werke.

Poncelet: Traité des propriétés projektives des figures. Paris. 1822.

Möbius: Der barycentrische Calcul. Leipzig. 1827.

Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander u. s. w. Berlin. 1832.

v. Staudt: Geometrie der Lage. Nürnberg. 1847.
Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg. 1856. 1857. 1860.

Chasles: Traité de Géométrie supérieure. Paris. 1852.
Traité des sections coniques. Paris. 1865.

b) Lehrbücher.

Steiner: Vorlesungen über synthetische Geometrie.
1. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Geiser. Leipzig. 1887.
2. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. 3. Auflage, besorgt von Sturm. Leipzig. 1898.

Cremona: Elemente der projektivischen Geometrie. Deutsch von Trautvetter. Stuttgart. 1882.

Hankel: Vorlesungen über die Elemente der projektivischen Geometrie. Leipzig. 1875.

Bobek: Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Leipzig. 1889.

Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Halle a/S. 1894.

In den bisher unter b) genannten Werken finden bloss „ebene“ Gebilde Berücksichtigung. Auch räumliche Gebilde, Flächen u. s. w. behandelt:

Reye: Die Geometrie der Lage. 3 Abteilungen. 1. Abteil. 4. Auflage. Leipzig. 1899. 2. und 3. Abteil. Leipzig. 1892. Zur Einführung in das Studium genügt die 1. Abteilung.

Vielfach benutzt ferner die darstellende Geometrie die Methoden der projektiven Geometrie. Deshalb finden sich auch in den Lehrbüchern der erstgenannten Disziplin Darstellungen der projektiven Geometrie. Wir nennen folgende:

Schlotke: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV. Teil: Projektivische Geometrie. Dresden. 1896.

Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Band. Leipzig. 1884. VI. Abschnitt.

Rohn und Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Band. 2. Auflage. Leipzig. 1901.

Inhalt.

Die leitenden Gesichtspunkte.

1. Eine prinzipiell strenge Darstellung hat erst für den weiter Fortgeschrittenen Wert. Dem Anfänger ist besser gedient mit einer Behandlung, welche die verschiedenen Seiten des Stoffes zur Geltung bringt. Demgemäss ist die „Projektive Geometrie“ nicht rein vom Standpunkte der Geometrie der Lage aus durchgeführt, sondern es wird auch der Begriff des Doppelverhältnisses benutzt. Viele Beweise lassen sich dann auch einfacher durchführen als bei der rein konstruierenden Methode.
2. Auf anschauliche Konstruktionen, sowie konstruktive Durchführung der Figuren und Aufgaben ist jedoch ein Hauptgewicht gelegt.
3. Die Raumgeometrie ist prinzipiell von der ebenen Geometrie nicht zu trennen. Denn die neuere Geometrie soll insbesondere auch das Anschauungsvermögen ausbilden. Dies ist schon erforderlich für die Figuren der ebenen Geometrie, um die beweglichen Strahlen, Punkte u. s. w. zu verfolgen.
4. Für gewisse Begriffe und Beweise muss auf die analytische Geometrie verwiesen werden, so z. B. bei der Ordnung und Klasse einer Kurve. Ebenso erbringt erst die Rechnung die Beweise, dass die durch projektive Grundgebilde erzeugten neuen Gebilde die allgemeinen ihrer Art sind.
5. In dem zu Gebote stehenden Raum konnten nur die wichtigsten und in erster Linie die projektiven Eigenschaften zur Sprache kommen. Metrische Beziehungen bei Kegelschnitten, die Kreispunkte, Brennpunktseigenschaften u. s. w. finden ihre Behandlung ohnedies passender in der analytischen Geometrie.

I. Abschnitt.

Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

§ 1. Die Grundgebilde.

1. Die projektive (neuere, synthetische) Geometrie wurde nach mancherlei Ansätzen aus früherer Zeit in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts zu einem System ausgebaut und zwar in Frankreich durch Poncelet und Chasles, in Deutschland durch Möbius, Plücker und namentlich durch Steiner und v. Staudt. Von der Geometrie der Alten unterscheidet sich die neuere Geometrie vor allem dadurch, dass sie von gewissen einfachen „Grundgebilden“ ausgeht und aus ihnen in einheitlicher, systematischer Weise alle übrigen geometrischen Gebilde ableitet.

Die Grundgebilde erster Stufe.

2. Die „Elemente“ der Geometrie sind der Punkt, die Ebene und die Gerade. Diese letztere nennen wir Strahl, wenn sie bloss als Ganzes betrachtet wird. Aus diesen drei Elementen werden die Grundgebilde der neueren Geometrie in folgender Weise zusammengesetzt. Denken wir uns eine unbegrenzte Gerade g, so enthält dieselbe unendlich viele Punkte, die wir uns auf

ihr aufgereiht denken, etwa wie Perlen auf einer gerade gespannten Schnur. Die Gerade, aufgefasst als Inbegriff aller ihrer Punkte, bezeichnen wir als gerade Punktreihe oder kurz als Punktreihe. Weil die Punkte auf der Geraden angeordnet sind, nennen wir die Gerade den Träger der Punktreihe. Das erzeugende Element der Punktreihe ist also der Punkt.

Durch eine Gerade kann man unendlich viele Ebenen legen, annäherungsweise wie die Blätter eines aufgeschlagenen Buches. Die Gesamtheit der Ebenen, die durch eine Gerade hindurchgehen, nennen wir einen Ebenenbüschel.

Die Gerade heisst der Träger oder die Achse des Ebenenbüschels. Als erzeugendes Element dient in diesem Falle die Ebene.

Nehmen wir endlich eine Ebene ε und in ihr einen Punkt S, so können wir in dieser Ebene unendlich viele Gerade oder Strahlen ziehen, die überdies durch S gehen, ähnlich wie die Speichen eines Rades. Den Inbegriff aller dieser Strahlen nennt man einen Strahlenbüschel. Der Punkt S heisst der Mittelpunkt des Büschels. Als erzeugendes Element ist hier die Gerade, d. h. der Strahl, verwendet.

Die Punktreihe, der Ebenenbüschel und der Strahlenbüschel heissen die Grundgebilde erster Stufe oder die einförmigen Grundgebilde.

Die Grundgebilde zweiter Stufe.

3. Gehen wir aus von einem Punkte S im Raume, so giebt es durch ihn unendlich viele Strahlen und Ebenen. Den Inbegriff aller dieser Elemente bezeichnen wir als Bündel und zwar als Strahlenbündel oder

Ebenenbündel, je nachdem wir Strahlen oder Ebenen als Elemente wählen. Der Punkt S heisst der Mittelpunkt des Bündels. Eine Ebene des Strahlenbündels S wird erzeugt durch die Strahlen des Strahlenbüschels, der in dieser Ebene liegt und S zum Mittelpunkt hat. Im Ebenenbündel dagegen ist jeder Strahl aufzufassen als Achse eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen sämtlich dem Bündel angehören. Es enthält demnach der Bündel unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Betrachten wir ferner eine unendlich ausgedehnte Ebene ε mit allen in ihr gelegenen Punkten und Geraden, so nennt man den Inbegriff aller dieser Elemente ein ebenes System oder ein Feld. Wir sprechen von einem Punktfeld oder einem Strahlenfeld, je nachdem wir die Punkte oder die Strahlen im Auge haben. Im Punktfeld sind die einzelnen Geraden aufzufassen als Punktreihen, im Strahlenfeld die einzelnen Punkte als Strahlenbüschel. Das ebene System enthält unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel.

Der Bündel und das ebene System bilden zusammen die beiden Grundgebilde zweiter Stufe. Sie enthalten unendlich viele Grundgebilde erster Stufe.

Das Grundgebilde dritter Stufe.

4. Als Grundgebilde dritter Stufe können wir den ganzen, unendlichen Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Ebenen und Strahlen bezeichnen. Jeder seiner Punkte kann als Mittelpunkt eines Bündels, jede seiner Ebenen als Träger eines ebenen Systems, jeder seiner Strahlen als Achse eines Ebenenbüschels oder als Träger einer Punktreihe genommen werden.

Die Gesamtheit von unendlich vielen, durch irgend ein geometrisches oder analytisches Gesetz definierten, Elementen irgend welcher Art heisst eine Mannigfaltigkeit. Demnach sind die Grundgebilde Mannigfaltigkeiten von Punkten, Ebenen und Strahlen.

Um übrigens schon durch die äussere Form der Darstellung den Überblick über die zu betrachtenden Gebilde zu erleichtern, wollen wir für die geometrischen Elemente eine bestimmte Art der Bezeichnung festhalten. Wir bezeichnen: Punkte durchweg mit grossen lateinischen Buchstaben: z. B. A, B, P, S; Gerade oder Strahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben, wie a, b, g; Ebenen endlich stets mit kleinen griechischen Buchstaben, z. B. α, β, ε.

§ 2. Schneiden und Projizieren. Das Gesetz der Dualität.

Die Operation des Schneidens.

5. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen oder eine Gerade und eine nicht durch sie hindurchgehende Ebene liefern einen Schnittpunkt; zwei Ebenen bestimmen eine Schnittgerade. Das neue Schnittelement ist nur dann nicht vorhanden, wenn die gegebenen Elemente parallel sind. Diese spezielle Lage wollen wir zunächst von der Betrachtung ausschliessen. In jedem der drei obengenannten Fälle suchen wir ein Element, das den beiden gegebenen Elementen gemeinsam ist. Wir bezeichnen diese Operation als die des Schneidens und müssen sie jetzt auch auf die Grundgebilde ausdehnen.

Betrachten wir einen Strahlenbüschel S (Fig. 1), und eine Gerade g, die in der Ebene des Büschels liegen, aber nicht durch seinen Mittelpunkt hindurchgehen mögen, so können wir die Strahlen des Büschels mit g zum Schnitt bringen. Wir erhalten also auf g eine Punktreihe, insofern jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt von g mit einem Strahl des Büschels aufgefasst werden kann. Dies drücken wir in der Weise aus, dass wir sagen: Die Gerade g schneidet den Büschel S in einer Punktreihe.

Im gleichen Sinne sind folgende Sätze zu verstehen: Eine Gerade schneidet einen Ebenenbüschel, dessen Achse sie nicht trifft, in einer Punktreihe. — Eine Ebene schneidet einen Ebenenbüschel, dessen Achse sie nicht enthält, in einem Strahlenbüschel. — Eine Ebene schneidet einen Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt sie nicht enthält, in einem Punktfeld. — Es entstehen demnach aus den Grundgebilden durch die Operation des Schneidens auch nur wieder Grundgebilde.

Die Operation des Projizierens.

6. Zwei Punkte können wir durch eine Gerade verbinden, zwei sich schneidende Gerade durch eine Ebene, einen Punkt und eine, nicht durch ihn hindurchgehende, Gerade ebenfalls durch eine Ebene. Wir bezeichnen diese Operation als die des Projizierens. Sie unterscheidet sich übrigens von der des Schneidens nur durch die Art der gegebenen Elemente. Bei beiden Operationen aber handelt es sich darum, dass man die gegebenen Elemente als Träger von Grundgebilden betrachtet und ein diesen Grundgebilden gemeinsames Element bestimmt.

Wenden wir nun auch die Operation des Projizierens auf die Grundgebilde an. Es sei z. B. eine

Punktreihe g gegeben und ein Punkt S ausserhalb derselben (Fig. 1). Dann können wir jeden Punkt von g mit S verbinden und erhalten durch diese Verbindungsstrahlen den Strahlenbüschel S. Von ihm sagen wir: er projiziert aus S die Punktreihe.

Ebenso wird ein Punktfeld aus irgend einem, ihm nicht angehörenden, Punkte durch einen Strahlenbündel projiziert.

Die Operation des Projizierens kann auch von einer Geraden aus erfolgen. Ist s irgend eine Gerade und g eine Punktreihe, wobei g und s sich nicht schneiden,

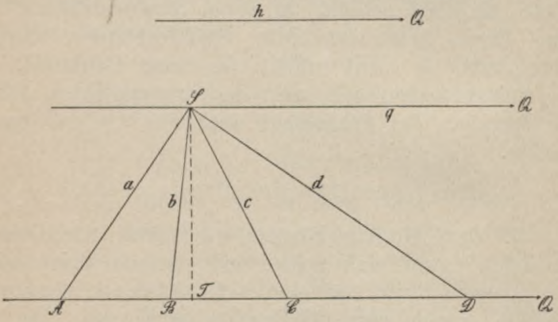

Fig. 1.

so kann man durch die Punkte von g und durch s Ebenen legen. Es wird also die Punktreihe g aus s durch einen Ebenenbüschel projiziert.

Auch durch die Operation des Projizierens entstehen somit aus den Grundgebilden wieder nur Grundgebilde. Durch Projizieren und Schneiden gehen also die Grundgebilde ineinander über.

Man kann nun eine Darstellung der Geometrie durchführen, bei der man bloss die Operationen des Projizierens und Schneidens benutzt, jede Abmessung aber, sei es von Strecken, sei es von Winkeln, also auch jede Rechnung mit solchen Grössen durchaus vermeidet. Die darauf begründete Untersuchungsmethode heisst die Geometrie der Lage. Diese „konstruierende“ Geometrie liefert die rein geometrischen Eigenschaften der Gebilde. Im Gegensatz zu ihr nennt man die messende, analytische Geometrie wohl auch Geometrie des Masses oder metrische Geometrie. Die Eigenschaften der geometrischen Gebilde, mit denen sich die Geometrie der Lage beschäftigt, heissen auch projektive Eigenschaften und die Art der Darstellung, welche auf dem Wege der **Rechnung** diese Eigenschaften ergründet, mag als „projektive Geometrie“ bezeichnet werden.

Wir werden im folgenden nicht streng **eine** Methode zur Durchführung bringen, sondern, wie es für den Anfänger vorteilhafter erscheint, eine gemischte Methode anwenden.

Das Gesetz der Dualität.

7. Wenn in der Geometrie der Lage ausschliesslich die Operationen des Projizierens und Schneidens Verwendung finden, so muss es möglich sein, der Ableitung irgend eines unter Beschränkung auf diese Operationen gewonnenen Satzes durch Änderung der ursprünglich gegebenen Elemente eine zweite Ableitung gegenüberzustellen, in der durchweg an Stelle der einen Operation die andere getreten ist. Man erhält dann einen zweiten Satz, das Gegenbild des ersten Satzes, den man auch **direkt** aus dem ersten folgern kann, vermöge des Gesetzes der Dualität oder der Reziprozität,

durch das die ganze Geometrie der Lage in zwei Hälften geteilt wird (Poncelet 1822, Gergonne 1826). Wir erhalten für dies Gesetz verschiedene Fassungen, je nachdem wir einer der drei Operationen des Schneidens eine der drei Operationen des Projizierens zuordnen. Dies kommt dann darauf hinaus, dass wir uns auf die Geometrie in der Ebene oder im Bündel beschränken oder den Raum ohne jede Beschränkung heranziehen. Wir wollen diese Beziehungen in einer Tabelle zur Darstellung bringen, indem wir immer zwei sich „dual" entsprechende Begriffe oder Sätze links und rechts auf die gleiche Zeile setzen.

a) Dualität in der Ebene:

Punkt A.	Gerade a.
Zwei Punkte A und B bestimmen eine Verbindungslinie (AB).	Zwei Gerade a und b bestimmen einen Schnittpunkt (ab).
Drei Punkte A, B, C, die auf einer Geraden g liegen.	Drei Gerade a, b, c, die durch einen Punkt G hindurchgehen.
Punktreihe g.	Strahlenbüschel G.

u. s. w.

b) Dualität im Bündel:

Strahl a.	Ebene α.
Zwei Strahlen a und b bestimmen eine Ebene (ab).	Zwei Ebenen α und β bestimmen eine Schnittgerade ($\alpha\beta$).
Drei Ebenen α, β, γ, die durch eine Gerade g gehen.	Drei Gerade a, b, c, die in einer Ebene γ liegen.
Ebenenbüschel g.	Strahlenbüschel γ.

u. s. w.

c) Dualität im Raume:

Punkt A.	Ebene α.
Zwei Punkte A und B bestimmen eine Verbindungsgerade (AB).	Zwei Ebenen α und β bestimmen eine Schnittgerade $(\alpha\beta)$.
Gerade (AB).	Gerade $(\alpha\beta)$.
Drei Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene (ABC).	Drei Ebenen α, β, γ bestimmen einen Schnittpunkt $(\alpha\beta\gamma)$.
Drei Punkte A, B, C, die auf einer Geraden g liegen.	Drei Ebenen α, β, γ, die durch eine Gerade l hindurchgehen.
Punktreihe g.	Ebenenbüschel l.
Strahlenbüschel.	Strahlenbüschel.
Ebenenbündel.	Punktfeld.

u. s. w.

Die in der letzten Zeile gegebene Zuordnung könnte man als duale Beziehung zwischen einem ebenen System und einem Bündel auch direkt entwickeln.

8. Einige Beispiele mögen diese Betrachtungen noch weiter erläutern. In einer und derselben Ebene seien zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ so gezeichnet, dass die Verbindungslinien $(A_1 A_2)$, $(B_1 B_2)$ und $(C_1 C_2)$ durch einen Punkt S laufen (Fig. 22). Als bewiesen werde nun der Satz vorausgesetzt, dass die Seiten $(A_1 B_1)$ und $(A_2 B_2)$, ferner $(A_1 C_1)$ und $(A_2 C_2)$, endlich $(B_1 C_1)$ und $(B_2 C_2)$ sich bezw. in drei Punkten schneiden, die auf einer Geraden s liegen. Da bei der Formulierung dieses Theorems bloss die Operationen des Projizierens und Schneidens zur Verwendung kamen, so sind wir im stande, aus ihm etwa unter Anwendung des Dualitätsgesetzes a) der Ebene ohne weiteres einen

weiteren Satz der Geometrie der Lage abzuleiten: wir brauchen bloss Schritt für Schritt, nach dem obigen Schema die Figur zu übertragen. An Stelle der beiden Punktgruppen A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 werden wir zwei Gruppen von Geraden a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 annehmen derart, dass die drei Schnittpunkte von a_1 und a_2, b_1 und b_2 sowie c_1 und c_2 einer Geraden angehören. Es ergiebt sich dann der Satz, dass die drei Verbindungslinien der Schnittpunkte $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$, ferner $(a_1 c_1)$ und $(a_2 c_2)$, endlich $(b_1 c_1)$ und $(b_2 c_2)$ durch einen Punkt laufen. Die duale Übertragung liefert demnach in diesem Falle gerade die Umkehrung des ursprünglichen Satzes. Wir werden im folgenden vielfach Gelegenheit haben, namentlich das Dualitätsgesetz der Ebene anzuwenden. Ist z. B. eine projektive Betrachtung für zwei in einer Ebene befindliche Punktreihen durchgeführt, so können wir sie unmittelbar auf zwei Strahlenbüschel übertragen.

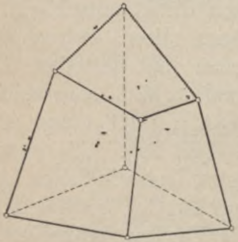

Fig. 2.

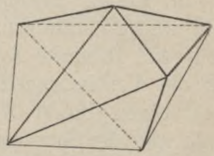

Fig. 3.

Eine duale Beziehung zweier Bündel erhalten wir z. B., wenn wir jeder Ebene des einen Bündels den Strahl im anderen Bündel zuordnen, der auf ihr senkrecht steht. Dann entspricht von selbst auch jeder Ebene des zweiten Bündels der zu ihr normale Strahl des ersten Bündels (Polare Zuordnung auf der Kugel, Polardreikant).

Um für die Dualität im Raume ein Beispiel zu geben, sei daran erinnert, dass jedem Polyeder (Vielfach), das etwa e Ecken, f Flächen, k Kanten besitzt, ein „reziprokes" entspricht mit e Flächen, f Ecken und wiederum k Kanten. So steht z. B. dem von 6 Vierecken begrenzten allgemeinen Hexaeder (Fig. 2) das von 8 Dreiecken gebildete allgemeine Oktaeder (Fig. 3) gegenüber.

In der Geometrie des Masses gilt das Dualitätsgesetz nicht mehr in aller Strenge; wohl aber kann man Analogien auffinden.

§ 3. Die uneigentlichen Elemente.

Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.

9. Den in 5. besprochenen Prozess des Schneidens konnten wir nicht mehr zur Durchführung bringen, wenn die in Betracht zu ziehenden Elemente parallel waren, z. B. bei zwei parallelen Geraden. Wir wollen nun sehen, wie wir, wenigstens formal, den genannten Prozess auch auf diesen Fall ausdehnen können.

Schneiden wir (Fig. 1) einen Strahlenbüschel S mit einer Geraden g, die in der Ebene des Büschels liegt, ohne ihm anzugehören. Die einzelnen Strahlen a, b, c, d ... des Büschels mögen von g in A, B, C, D ... getroffen werden. Dann giebt es nach den Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie durch S eine und nur eine Parallele q zur Geraden g. Indem wir diese Annahme machen, wollen wir ausdrücklich bemerken, dass wir nicht im stande sind, dieselbe durch mathematische Schlüsse zu beweisen, dass wir sie vielmehr als eines der grundlegenden Axiome vorausschicken müssen. Würde man statt desselben ein anders lautendes Axiom an die Spitze stellen, so erhielte man ein anderes, in sich aber ebenso logisch geschlossenes System einer Geometrie.

Demnach schneiden alle die unendlich vielen Strahlen des Büschels S die Gerade g je in einem Punkte, nur der Parallelstrahl q liefert keinen Schnittpunkt mit g. Es ist nun namentlich für die einfachere Formulierung allgemeiner Sätze ein Vorteil, diese Ausnahmestellung des Parallelstrahles wenigstens in dem Ausdruck zu beseitigen. Wir erreichen dies, indem wir uns so ausdrücken: „Der Parallelstrahl q schneidet die Gerade g in einem unendlich fernen Punkt Q“. Zu den im Endlichen gelegenen, eigentlichen Punkten der Geraden g nehmen wir also noch einen „uneigentlichen“, fingierten, hinzu, dem wir uns in der Vorstellung nähern, wenn wir die Gerade nach der einen oder andern Seite über alle Grenzen hinaus verlängern. Man kann sich auch einen Strahl denken, der sich um S dreht und diesen kurz vor und nach der Lage betrachten, in der er zu g parallel ist.

Wir wollen diesen uneigentlichen (adjungierten), unendlich fernen Punkt der Geraden mit Q bezeichnen und durch Hinzufügung eines Pfeiles andeuten, dass er auf der Geraden g im Unendlichen liegt.

Ziehen wir in der Ebene des Strahlenbüschels S irgend eine weitere Gerade h parallel zu g, so werden wir auch von dieser Parallelen h sagen, dass sie durch den nämlichen, unendlich fernen Punkt Q geht. Ein unendlich ferner Punkt ist folglich gleich bedeutend mit einer bestimmten „Richtung“. Die Gesamtheit von unendlich vielen, zu einander parallelen Geraden, die alle in einer Ebene liegen, wird nach dieser Anschauung aufzufassen sein als ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der den sämtlichen Parallelen gemeinsame unendlich ferne Punkt ist. Ein solcher Strahlenbüschel heisst wohl auch ein „Parallelstrahlenbüschel“.

In entsprechender Weise bilden alle Geraden im Raume, die zu irgend einer Geraden g parallel laufen, also alle die gleiche Richtung haben, einen „Parallelstrahlenbündel“.

Die unendlich ferne Gerade einer Ebene.

10. Nehmen wir jetzt eine Ebene als gegeben an, so liegen in ihr in jeder Richtung Punkte im Unendlichen. Alle diese uneigentlichen Punkte werden eine gewisse Mannigfaltigkeit bilden, und jede Gerade g der Ebene hat mit derselben einen Punkt gemein, nämlich den unendlich fernen Punkt dieser Geraden g.

Wenn wir also sagen: die unendlich fernen Punkte der gegebenen Ebene liegen auf einer „unendlich fernen“ Geraden, so ergiebt sich der unendlich ferne Punkt einer Geraden g dieser Ebene als Schnittpunkt derselben mit dieser „unendlich fernen“ Geraden. Natürlich entzieht sich das Unendliche jeder Vorstellung. Wenn wir aber diese uneigentliche Gerade einer Ebene hinzunehmen, so können wir unter dieser Annahme, vorausgesetzt, dass sich im weiteren Verlauf keine Widersprüche ergeben, das Unendliche formal wie das Endliche behandeln.

Eine Ebene enthält also eine unendlich ferne Gerade. Die letztere ist gegeben, sobald die Ebene gegeben ist. Alle Punkte dieser unendlich fernen Geraden liegen im Unendlichen, sind also uneigentliche. Die unendlich ferne Gerade hat keine bestimmte Richtung. Irgend zwei parallele Gerade dieser Ebene schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Wir können jetzt z. B. allgemein sagen: zwei Gerade in einer Ebene bestimmen einen Schnittpunkt.

Die unendlich ferne Ebene des Raumes.

11. Um diese Anschauung nun weiter für den Raum auszubilden, sei S der Mittelpunkt eines Ebenenbündels, ε eine ihm nicht angehörende Ebene. Jede Ebene des Bündels liefert mit ε eine Schnittgerade. Ferner giebt es nach den Sätzen der Elementargeometrie durch S eine und zwar nur eine Parallelebene ξ zu ε. Diese Ebene ξ allein liefert mit ε keine Schnittgerade. Um nun nicht alle Sätze, die sich auf die Schnittlinie zweier Ebenen beziehen, für parallele Ebenen besonders formulieren zu müssen, drücken wir uns so aus: Die Parallelebene ξ hat mit ε eine uneigentliche, unendlich ferne Gerade gemein. Dies stimmt dann auch zusammen mit den Anschauungen von 9). Weiter gehen alle zu ε parallelen Ebenen durch die gleiche unendlich ferne Gerade. Sagen wir von parallelen Ebenen, sie haben die gleiche „Stellung", so ist also eine unendlich ferne Gerade im Raum durch die Stellung einer Ebene bestimmt.

Alle zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen bilden einen Ebenenbüschel, dessen Achse die durch die Stellung der Parallelebenen gegebene unendlich ferne Gerade ist.

„Eine Ebene ist parallel einer Geraden" heisst: die Ebene geht durch den unendlich fernen Punkt der Geraden.

Im Raume können wir unendlich viele, unendlich ferne Punkte und Geraden aufsuchen. Jede Gerade enthält einen unendlich fernen Punkt, jede Ebene eine unendlich ferne Gerade. Wir bleiben also in Übereinstimmung mit den bisherigen Formulierungen, wenn wir uns so ausdrücken: Alle unendlich fernen Punkte und unendlich fernen Geraden des Raumes erfüllen eine Ebene, die „unendlich ferne“ Ebene des Raumes.

Sie enthält lauter uneigentliche Elemente und hat keine bestimmte Stellung.

So z. B. können wir den Satz: „Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade“ jetzt ganz allgemein aussprechen. Liegen beide Punkte im Endlichen, so ist die durch sie bestimmte Gerade ihre Verbindungslinie; ist einer der beiden gegebenen Punkte ein unendlich ferner, so wird die Verbindungsgerade die Parallele, welche durch den einen Punkt parallel zu der Richtung geht, in welcher der andere gegebene unendlich ferne Punkt liegt; sind die beiden gegebenen Punkte unendlich fern, d. h. hat man zwei Gerade, auf denen im Unendlichen die beiden gegebenen Punkte liegen sollen, so ist die Verbindungsgerade eine bestimmte unendlich ferne Gerade. Eine Ebene, welche zu den beiden gegebenen Geraden parallel ist, giebt die Stellung aller Ebenen, die durch diese unendlich ferne Gerade hindurchgehen.

§ 4. Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

Punktreihe und Strahlenbüschel in perspektiver Lage.

12. Wenn wir wie in 8. Figur 1 einen Strahlenbüschel S mit einer Geraden g zum Schnitt bringen, so entspricht jedem Punkte von g ein Strahl des

Büschels, nämlich der durch ihn hindurchgehende. Nehmen wir auch den unendlich fernen Punkt Q von g hinzu und behandeln ihn im Ausdruck wie einen eigentlichen Punkt, so entspricht ihm der Strahl q des Büschels. Damit ist also auch die Zuordnung zwischen den Punkten der Punktreihe und den Strahlen des Büschels eine ausnahmslose geworden. Weil jedem Element des einen Gebildes ein und nur ein Element des anderen Gebildes entspricht, so sagen wir, die beiden Gebilde, Punktreihe und Strahlenbüschel, seien „eindeutig" aufeinander bezogen. Ferner liegen je zwei entsprechende Elemente in einander.

Wir nennen diese Beziehung zwischen der Punktreihe und dem Strahlenbüschel eine „perspektive". Dies ist zunächst nur ein anderer Ausdruck dafür, dass die Punktreihe ein Schnitt des Strahlenbüschels ist. Ebenso nennen wir die Punktreihe, wonach eine Gerade einen Ebenenbüschel schneidet, oder den Strahlenbüschel, in welchem eine Ebene einen Ebenenbüschel trifft, perspektiv zu dem Ebenenbüschel. Das Zeichen für perspektiv ist $\overline{\wedge}$.

Auch das Punktfeld, welches irgend eine Ebene aus einem Strahlenbündel ausschneidet, wird perspektiv zu dem Strahlenbündel sein.

Perspektive Punktreihen.

13. Um jetzt auch gleichartige Grundgebilde eindeutig aufeinander zu beziehen, bringen wir einen Strahlenbüschel S zum Schnitt mit zwei Geraden g und g_1 seiner Ebene, von denen keine dem Büschel angehört (Fig. 4). Irgend ein Strahl a trifft g in A, g_1 in A_1, ein Strahl b liefert die Schnittpunkte B und B_1 u. s. w. Jedem Punkte der einen Punktreihe z. B. A

entspricht dann **ein** und **nur** **ein** Punkt A_1 der anderen Punktreihe und dies bleibt auch richtig für die unendlich fernen Punkte Q und R_1 von g und g_1. Denn diesen entsprechen die Punkte Q_1 und R, in denen die durch S zu g und g_1 gezogenen Parallelstrahlen q und r die Träger g_1 und g bezüglich schneiden.

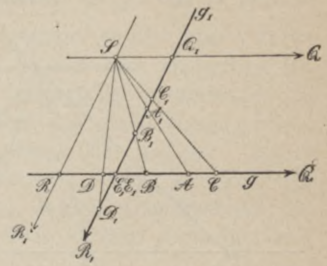

Fig. 4.

Dadurch sind die Punktreihen g und g_1 eindeutig aufeinander bezogen. Je zwei entsprechende Punkte liegen auf dem nämlichen Strahl des Büschels S. Es mag noch bemerkt werden, dass im Schnittpunkte von g und g_1 entsprechende Punkte E und E_1 der beiden Punktreihen vereinigt sind. Wir nennen die beiden Punktreihen g und g_1, die also Schnitte **eines** Büschels sind, perspektiv.

Ebenso wird ein Strahlenbündel von zwei beliebigen Ebenen in perspektiven Punktfeldern geschnitten.

Perspektive Strahlenbüschel.

14. Entwerfen wir nun die Figur, welcher der Figur 2 nach dem Dualitätsgesetz der Ebene (7a) entspricht. Wir haben dann eine Punktreihe g aus zwei Punkten S und S_1 zu projizieren, wobei g, S und S_1 **einer** Ebene angehören mögen (Fig. 5). Wir ordnen jedem Strahl z. B. a des Büschels S denjenigen Strahl a_1 des Büschels S_1 zu, der den gleichen Punkt A der Punktreihe g enthält. Dann sind die Parallelen q und

q_1 durch S und S_1 zu g auch als entsprechende Strahlen aufzufassen, da beide den unendlich fernen Punkt Q von g projizieren. Die eindeutige Beziehung der beiden Büschel S und S_1 ist demzufolge wieder eine lücken-

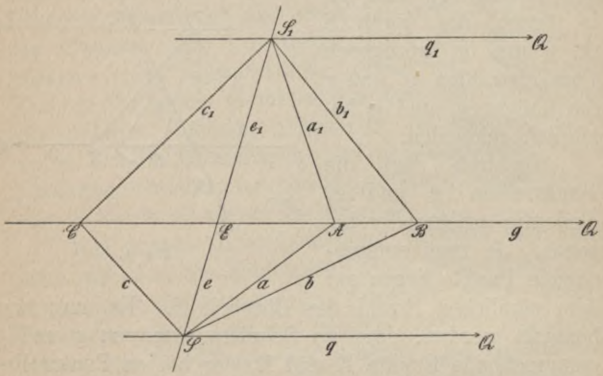

Fig. 5.

lose. Im Verbindungsstrahl SS_1, der beiden Büscheln angehört, sind entsprechende Strahlen e und e_1 der Strahlenbüschel vereinigt. Wir nennen zwei solche Büschel, welche die gleiche Punktreihe projizieren, wiederum „perspektiv“.

Auch die beiden Strahlenbüschel, nach denen ein Ebenenbüschel von irgend zwei Ebenen geschnitten wird, liegen zu einander „perspektiv“.

Projizieren wir ein ebenes System aus zwei Punkten, so sind die entstehenden Bündel ebenfalls perspektiv. Je zwei entsprechende Strahlen der Bündel enthalten denselben Punkt, je zwei entsprechende Ebenen dieselbe Gerade dieses ebenen Systems.

Allgemein können wir jetzt die Definition für perspektive Grundgebilde erster und zweiter Stufe, sowohl gleichartige als ungleichartige, in folgender Weise aussprechen:

Definition. „Zwei Grundgebilde erster oder zweiter Stufe heissen perspektiv, wenn eine eindeutige Beziehung ihrer Elemente hergestellt ist entweder dadurch, dass jedes Element des einen Grundgebildes das entsprechende Element des anderen Grundgebildes enthält oder dadurch, dass je zwei entsprechende Elemente der beiden Grundgebilde ein und dasselbe Element eines dritten Grundgebildes enthalten.“

§ 5. Die Massbestimmung im Strahlenbüschel.

15. Nachdem wir die Definition perspektiver Grundgebilde durch eine reine Lagenbeziehung gewonnen haben, wollen wir untersuchen, welche Zusammenhänge zwischen entsprechenden Elementen solcher Gebilde die Rechnung liefert. Zu dem Zweck ist es aber vorher nötig, die einzelnen Elemente eines Grundgebildes erster Stufe nicht bloss wie bisher in ihrer geometrischen Anordnung, sondern auch rechnerisch, also durch Zahlenwerte, festzulegen.

Beginnen wir mit dem Strahlenbüschel, weil dieser kein uneigentliches Element enthält und daher die zu betrachtenden Verhältnisse unverschleiert zur Erscheinung kommen.

Winkel zweier Strahlen. Trennungsstrahl.

16. Sind a und b zwei Strahlen eines Büschels (Fig. 4), so wollen wir unter a b den Winkel verstehen, den der Strahl a mit dem Strahl b bildet und die

Reihenfolge der Buchstaben soll den Sinn der Drehung angeben, in welchem der Winkel durchlaufen wird, also von a nach b hin. Dann ist dieser Ausdruck ab doppeldeutig; denn es kann darunter jeder der in der Figur bezeichneten Winkel verstanden werden.

Hat man drei Strahlen a, b, c, so können wir mittels derselben eine Drehungsrichtung bestimmen,

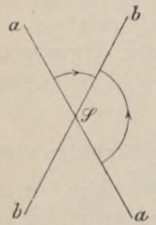

Fig. 6

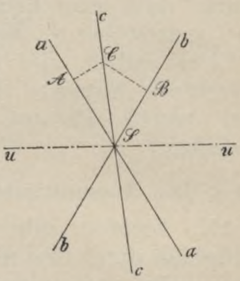

Fig. 7.

indem wir unter dem „Sinn abc" diejenige Drehung verstehen, welche a direkt nach b überführt, ohne dass der Strahl c dabei überschritten wird (Fig. 7).

Um nun im Büschel die Winkel eindeutig zu erhalten, wählen wir einen festen Strahl u und verstehen unter ab den im Sinne abu genommenen Winkel. Dieser ist dann eindeutig (Fig. 7). Der Hilfsstrahl u möge der „Trennungsstrahl" heissen. Da sich die Drehungen ab und ba zerstören, so hat man

$$ab + ba = 0 \quad \text{oder} \quad ab = -ba.$$

Ist c irgend ein weiterer Strahl, so gilt, ganz unabhängig von der Lage der Strahlen, die Beziehung

$$ab + bc = ac$$

oder

$$ab + bc + ca = 0$$

und allgemein für die Strahlen a, b, c, ... m, n

$$ab + bc + \ldots + mn + na = 0 .$$

Man kann diese Festsetzung auch so aussprechen, dass man durch den Trennungsstrahl den Büschel halbiert und sich bei der Betrachtung auf eine Hälfte beschränkt.*)

Parameter eines Strahles.

17. Um die einzelnen Strahlen eines Büschels durch Zahlenwerte festzulegen, wählen wir zwei Strahlen a und b als „Fundamentalstrahlen" und ausserdem den Trennungsstrahl u (Fig. 7). Irgend ein weiterer Strahl des Büschels bildet mit den festen Strahlen a und b die Winkel ac und bc (die beide kleiner als 180°). Ist C ein Punkt von c und sind CA und CB die von C auf a und b gefällten Senkrechten, so hat der Quotient

$$\lambda = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin ac}{\sin bc}$$

für alle Punkte des Strahles c den gleichen Wert. Wir geben diesem, aus lauter positiven Zahlen gebildeten

*) Zu den gleichen Formeln gelangt man ohne die Annahme eines Trennungsstrahles, wenn man sich nach dem Vorgange von Möbius in der Ebene von vornherein einen bestimmten Drehungssinn giebt und alle vorkommenden Winkel, in diesem Sinne gemessen positiv, im entgegengesetzten Sinne durchlaufen negativ rechnet.

Bruche das Vorzeichen $+$, wenn die Drehungen a c und b c gleichen Sinn haben, dagegen das Vorzeichen —, wenn diese Drehungen entgegengesetzt gerichtet sind.

Dann entspricht jedem Strahl des Büschels ein solcher Wert λ. Den Fundamentalstrahlen a und b entsprechen die Werte $\lambda = 0$ bezw. $\lambda = \infty$; für die Halbierungslinien der Winkel, welche die Fundamentalstrahlen bilden, ergeben sich die Werte $\lambda = +1$ und $\lambda = -1$. Durch die Werte 0 und ∞ hindurch geht λ von positiven zu negativen Werten über.

Umgekehrt kann man zu einem, auch dem Vorzeichen nach gegebenen Werte $\lambda = \lambda_0$ nur einen und immer einen zugehörigen Strahl bestimmen. Denn angenommen, es sei p dieser Strahl, so muss sein:

$$\frac{\sin \mathrm{ap}}{\sin \mathrm{bp}} = \lambda_0 .$$

Führt man $\mathrm{bp} = \mathrm{ba} + \mathrm{ap}$ ein, so liefert eine leichte Rechnung:

$$\operatorname{tg} \mathrm{ap} = \frac{\lambda_0 \cdot \sin \mathrm{ba}}{1 - \lambda_0 \cdot \cos \mathrm{ba}} .$$

Damit ist der Winkel a p bestimmt; auf welcher Seite von a der Strahl p aber liegen muss, ergiebt sich aus dem Vorzeichen von λ_0, unter Berücksichtigung der angeführten Verteilung der Zahlenwerte von λ in dem Büschel.

Aufgabe 1. Man finde durch Zeichnung und Rechnung die Strahlen, welche den Werten $+\frac{2}{3}$ und $-\frac{2}{3}$ von λ entsprechen.

§ 6. Die Massbestimmung in der Punktreihe.

Strecke zwischen zwei Punkten.

18. Die Mannigfaltigkeit der Punkte einer Punktreihe g wird erst durch die Annahme des unendlich fernen Punktes U derselben zu einer zusammenhängenden, indem dann die Gerade gewissermassen durch das Unendliche hindurch sich schliesst. Irgend zwei Punkte A und B der Geraden bestimmen dementsprechend zunächst zwei Strecken, von denen die eine, der Weg von A nach B, endlich ist, während die andere, der Weg von A durch das Unendliche nach B, unendlich ist.

Drei Punkte A, B, C bestimmen wieder einen „Sinn ABC“, nämlich die Bewegungsrichtung, bei der wir von A direkt nach B gelangen, ohne C zu passieren.

Da unendlich grosse Strecken nicht zu verwenden sind, so werden wir unter AB die endliche der beiden oben erwähnten Strecken verstehen. Dies stimmt aber damit überein, dass wir den unendlich fernen Punkt U als „Trennungspunkt“ einführen, ganz wie in 16. beim Büschel den Trennungsstrahl. Unter AB ist die im „Sinne ABU“ genommene Strecke zu verstehen.

Dann gelten offenbar die Beziehungen

$$AB + BA = 0 \quad \text{oder} \quad AB = -BA$$

und für drei Punkte gilt, wie immer sie auch liegen,

$$AB + BC = AC$$

oder

$$AB + BC + CA = 0,$$

ferner allgemein für die Punkte A, B, C ... M, N

$$AB + BC + \ldots + MN + NA = 0.$$

Parameter eines Punktes.

19. Um nun die einzelnen Punkte der Punktreihe durch Zahlenwerte feztzulegen, gehen wir von zwei festen Punkten A und B aus, den „Fundamentalpunkten“. Irgend ein Punkt C der Punktreihe bestimmt dann den Streckenquotient

$$\lambda = \frac{AC}{BC}.$$

Diesem Quotienten, dessen Zähler und Nenner die Masszahlen der Strecken AC und BC enthält, geben wir das Vorzeichen +, wenn AC und BC in gleicher Richtung laufen, C also nicht auf der Strecke AB gelegen ist, dagegen das Vorzeichen —, wenn AC und BC nach entgegengesetzten Richtungen sich erstrecken, demnach C auf der Strecke AB liegt. Jedem Punkte der Geraden können wir in dieser Weise einen ganz bestimmten Parameterwert zuordnen; dem Punkte A entspricht der Wert $\lambda = 0$, dem Punkte B der Wert $\lambda = \infty$.

Umgekehrt giebt es stets nur einen Punkt derart, dass für ihn dieser Quotient einen auch dem Vorzeichen nach gegebenen Wert $\lambda = \lambda_0$ hat. Denn ist P der gesuchte Punkt, so muss sein

$$\frac{AP}{BP} = \lambda_0$$

oder, wenn $BP = BA + AP$ gesetzt wird

$$AP = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \cdot BA.$$

Wählen wir, was das einfachste ist, eine bestimmte Richtung auf der Geraden, etwa die von A nach B, als die positive, so sind alle im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Strecken negativ zu rechnen. Es ergiebt sich dann aus der letzten Gleichung die Strecke AP samt ihrer Richtung.

Dem Werte $\lambda = 1$ entspricht kein eigentlicher Punkt auf der Geraden; wir ordnen ihm den unendlich fernen Punkt der Geraden zu, womit gezeigt ist, auf welchem Wege die Analysis zur Einführung dieses Elementes gelangt.

Aufgabe 2. Man zeichne und berechne die Punkte, welche den Werten -1, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ des Parameters λ entsprechen.

Für das dritte Grundgebilde erster Stufe, den Ebenenbüschel, brauchen wir keine eigene Betrachtung durchzuführen: wir schneiden ihn mit einer Ebene, etwa senkrecht zur Achse, in einem Strahlenbüschel und erhalten die Ebenen des Büschels dann durch die Parameterwerte, welche die Strahlen dieses Strahlenbüschels liefern.

§ 7. Das Doppelverhältnis.

Doppelverhältnis von vier Punkten.

20. Sind in einer Punktreihe g ausser den zwei Fundamentalpunkten A und B zwei weitere Punkte C und D gegeben und bestimmen wir für diese nach der in 18. gegebenen Festsetzung die Streckenverhältnisse $\frac{AC}{BC}$ und $\frac{AD}{BD}$, so können wir aus diesen beiden das neue Verhältnis bilden:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Dieser Ausdruck wird sich als charakteristisch für die Lage der vier Punkte A, B, C, D erweisen. Wir nennen ihn, seiner Bildung gemäss, das „Doppelverhältnis" der vier Punkte und bezeichnen ihn durch (ABCD). Es ergiebt sich also folgende

Definition. Unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden verstehen wir den Ausdruck

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

wobei jedes der einzelnen Verhältnisse mit dem ihm nach 18. zukommenden Vorzeichen zu versehen ist.

Die vier Punkte erscheinen dabei in zwei Gruppen geteilt, welche zunächst nicht gleichartig behandelt sind. Denn A und B dienten als Fundamentalpunkte und C und D wurden auf diese bezogen. Es ist aber sofort zu beweisen, dass diese beiden Punktpaare in dem Ausdruck des Doppelverhältnisses ganz die gleiche Rolle spielen. Denn es ist ja

$$(CDAB) = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = (ABCD).$$

Man darf also die beiden Punktpaare miteinander vertauschen.

Getrennte Punktpaare.

21. Für die gegenseitige Lagenbeziehung zweier Punktgruppen A, B und C, D sind nun folgende zwei Fälle als wesentlich zu unterscheiden:

a) Die beiden Punktpaare A, B und C, D liegen so, dass man beim Übergang von A nach B auf dem einen oder anderen Wege einen der Punkte C oder D passieren muss (Fig. 8a). Von den Punkten C und D

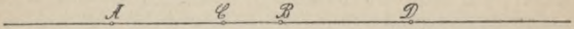

Fig. 8a

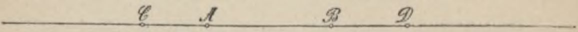

Fig. 8b.

wird dann einer auf der Strecke AB, der andere ausserhalb dieser Strecke gelegen sein. Wir sagen in diesem Falle: die beiden Punktpaare „trennen sich“ gegenseitig. Von den beiden Teilverhältnissen in dem Ausdruck des Doppelverhältnisses (ABCD) ist demnach das eine positiv, das andere negativ, das ganze Doppelverhältnis hat mithin einen negativen Wert.

b) Kann man auf einem der beiden Wege von A nach B gelangen, ohne C oder D zu überschreiten, so trennen sich die beiden Punktpaare nicht (Fig. 8b). Es liegen dann C und D beide auf der Strecke AB oder beide ausserhalb derselben; die Teilverhältnisse in dem Ausdruck (ABCD) haben beide negative oder beide positive Vorzeichen, das Doppelverhältnis selbst nimmt jedenfalls einen positiven Wert an.

Diese Eigenschaften sind auch umkehrbar. Wir können also sagen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Punktpaare A, B und C, D sich trennen, ist die, dass das Doppelverhältnis (ABCD) einen negativen Wert hat.

Doppelverhältnis von vier Strahlen.

22. Ganz analoge Betrachtungen gelten für den Strahlenbüschel. Gehen wir aus von den zwei (festen) Strahlen a und b und dem Trennungsstrahl u, so können wir für zwei weitere Strahlen c und d die Verhältnisse bilden

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} \quad \text{und} \quad \frac{\sin ad}{\sin bd},$$

deren Vorzeichen nach 17. zu bestimmen sind.

Dividieren wir den ersten Quotienten durch den zweiten, so nennen wir diesen Ausdruck das „Doppelverhältnis" der vier Strahlen a, b, c, d und bezeichnen ihn durch (abcd), so dass also

$$(abcd) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}.$$

Der Unterschied, der zwischen den Strahlen a, b und c, d zunächst gemacht wurde, ist wiederum nur ein scheinbarer. Denn es ist ja

$$(cdab) = \frac{\sin ca}{\sin da} : \frac{\sin cb}{\sin db} = \frac{\sin ac}{\sin ad} : \frac{\sin bc}{\sin bd} = (abcd).$$

Dagegen haben wir vorerst noch einen Trennungsstrahl nötig.

Für die gegenseitige Lagenbeziehung zweier Strahlenpaare a, b und c, d sind wieder folgende Fälle charakteristisch. Man sagt: Die Strahlenpaare a, b und c, d „trennen einander", wenn man den Strahl a durch Drehung n i c h t mit dem Strahle b zur Deckung bringen kann, ohne c oder d zu passieren (Fig. 9a). Kann man dagegen auf einem der beiden Wege a nach b überführen, ohne dabei über c oder d zu kommen, so trennen die beiden Strahlenpaare sich nicht (Fig. 9b). Diese Eigenschaft zweier Strahlenpaare, sich zu trennen, ist ganz unabhängig von der Annahme eines Trennungsstrahles.

Das oben definierte Doppelverhältnis (abcd) von vier Strahlen wird nun negativ, wenn die Strahlen a, b

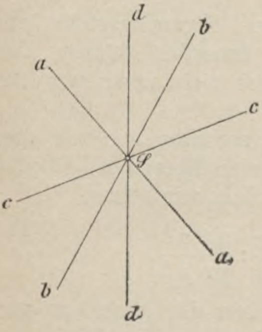

Fig. 9a.

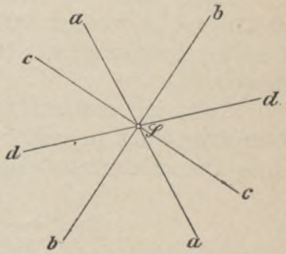

Fig. 9b.

und c, d sich trennen, positiv, wenn dies nicht der Fall. Dann können wir aber auch auf Grund dieser Eigenschaft das Vorzeichen des **ganzen** Doppelverhältnisses bestimmen und nicht das der Teilquotienten.

Wir lassen also jetzt den Trennungsstrahl weg; dann sind zwar alle Winkel, wie z. B. ac, doppeldeutig, der Sinus dieser Winkel aber ist der gleiche, da sie sich zu 180° ergänzen; die einzelnen Teilquotienten nehmen wir positiv, das Vorzeichen bestimmen wir am ganzen Ausdruck. Wir erhalten dann die

Definition. „Unter dem Doppelverhältnis (abcd) von vier Strahlen eines Büschels verstehen wir den Ausdruck

$$(abcd) = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd},$$

der das positive oder negative Vorzeichen erhält, je nachdem die Strahlenpaare a, b und c, d sich nicht trennen oder trennen."

Damit sind wir von einem Trennungsstrahl unabhängig geworden. Ohne denselben können aber die Winkelrelationen von 16. auch nicht mehr angesetzt werden.

Ganz im gleichen Sinne sprechen wir von dem Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$, das vier Ebenen α, β, γ, δ eines Ebenenbüschels bilden, indem wir setzen

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \beta\gamma} : \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \beta\delta}.$$

Dabei ist z. B. unter $\alpha\gamma$ einer der Winkel zu verstehen, den die Ebene α mit der Ebene γ bildet.

Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses gegenüber den Operationen des Projizierens und Schneidens.

23. Verbinden wir jetzt die für die Punktreihe und für den Strahlenbüschel unabhängig voneinander durchgeführten Betrachtungen, indem wir den Büschel S mit einer Geraden g seiner Ebene zum Schnitt bringen (Fig. 1). Der Strahl a des Büschels schneide g in A, der Strahl b in B u. s. w. Da wir von jedem Strahl des Büschels immer den Halbstrahl auszeichnen, der

den Schnittpunkt mit g trägt, so kommt die Betrachtung eigentlich darauf hinaus, dass wir den Parallelstrahl u durch S zu g als Trennungsstrahl einführen. Schneidet ferner der durch S senkrecht zu g gehende Strahl t in T diese Gerade, so ist

$$(1)\qquad 2\triangle SAC = SA \cdot SC \cdot \sin ac = ST \cdot AC$$

$$(2)\qquad 2\triangle SBC = SB \cdot SC \cdot \sin bc = ST \cdot BC$$

$$(3)\qquad 2\triangle SAD = SA \cdot SD \cdot \sin ad = ST \cdot AD$$

$$(4)\qquad 2\triangle SBD = SB \cdot SD \cdot \sin bd = ST \cdot BD.$$

Alle von S aus laufenden Strecken SA, SB u. s. w. wollen wir als positive Zahlen nehmen. Dann folgt aus (1) und (2) durch Division.

$$(5)\qquad \frac{SA \cdot \sin ac}{SB \cdot \sin bc} = \frac{AC}{BC}.$$

Hier stimmt das nach 19. bestimmte Vorzeichen des Streckenquotienten rechts mit dem nach 17. zu bestimmenden Vorzeichen des Sinusquotienten links überein, wie sich geometrisch sofort ergiebt. Ebenso liefern die Gleichungen (3) und (4)

$$(6)\qquad \frac{SA \cdot \sin ad}{SB \cdot \sin bd} = \frac{AD}{BD}.$$

Aus (5) und (6) folgt dann durch Division

$$(7)\qquad (abcd) = (ABCD)$$

also

Satz 1. „Das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels ist gleich dem analog gebildeten der vier Schnittpunkte, welche irgend eine Gerade mit den vier Strahlen liefert."*)

Schneiden wir den gleichen Büschel noch mit einer zweiten Geraden g_1 (Fig. 4), so folgt, dass auch $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (abcd)$, also durch Vergleich mit (7)

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) \tag{8}$$

oder

Satz 2. „Irgend vier Strahlen eines Büschels werden von jeder Geraden in vier Punkten von gleichem Doppelverhältnis geschnitten."

Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Projiziert man vier Punkte einer Geraden von einem beliebigen Punkte aus auf eine andere Gerade, so bleibt das Doppelverhältnis der vier Punkte unverändert. Ebenso zeigt die Betrachtung von Figur 5, dass

$$(ABCD) = (abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$$

also

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1) \tag{9}$$

oder

Satz 3. „Irgend vier Punkte einer Geraden werden aus jedem Punkte durch vier Strahlen von gleichem Doppelverhältnis projiziert."

Für den Ebenenbüschel gelangen wir zu ganz ähnlichen Sätzen. Sind α, β, γ, δ vier Ebenen eines solchen, so ist, wie man leicht ableitet, das Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$ derselben identisch mit dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, die irgend eine Gerade mit den vier Ebenen liefert oder auch mit dem

*) Pappus von Alexandria (4. Jahrh. n. Chr.) Mathematicae collectiones.

Doppelverhältnis der vier Strahlen, wonach irgend eine Ebene die vier Ebenen trifft. Diesen Satz und die drei vorigen Sätze können wir in dem allgemeineren zusammenfassen:

Satz 4. „In zwei perspektiven Grundgebilden erster Stufe bilden irgend vier Elemente des einen Grundgebildes und die ihnen entsprechenden des anderen das gleiche Doppelverhältnis.“

Damit haben wir für perspektive Grundgebilde erster Stufe ausser der Lagenbeziehung auch eine metrische Beziehung gefunden, welche entsprechende Elemente solcher Gebilde miteinander verknüpft.

Endlich können wir die Operation des Schneidens oder Projizierens nicht bloss einmal, sondern auch öfter vornehmen, ohne dadurch den Wert des Doppelverhältnisses von vier Elementen zu ändern. Wir erhalten demgemäss ganz allgemein

Satz 5. „Leitet man aus vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe durch die beliebig oft angewandten Operationen des Projizierens und Schneidens vier neue Elemente eines anderen Grundgebildes ab, so ist das Doppelverhältnis der ersten vier Elemente gleich dem analog gebildeten Doppelverhältnis der letzten vier entsprechenden Elemente. Das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe erweist sich also diesen Operationen gegenüber als eine unveränderliche (invariante) Zahl.“

II. Abschnitt.

Harmonische Gebilde.

---

§ 8. Weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses.

Die Werte der Doppelverhältnisse die sich aus vier Elementen bilden lassen.

24. Den Begriff des Doppelverhältnisses müssen wir noch nach verschiedenen Richtungen hin weiter untersuchen.

Sind vier Elemente eines einförmigen Grundgebildes, z. B. vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe gegeben, so können wir sie auf 24 verschiedene Arten zu einem Doppelverhältnisse zusammenfassen, da man aus vier Elementen 24 Ausdrücke $ABCD$, $ABDC$ u. s. w. bilden kann. Nicht alle diese Ausdrücke sind aber ihrem Zahlenwert nach verschieden. Wir sahen schon in 20., dass

$$(ABCD) = (CDAB) \tag{1}$$

Ferner ist auch

$$(BADC) = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

also

$$(BADC) = (ABCD). \tag{2}$$

Vermöge der in (1) und (2) ausgedrückten Sätze können wir nun aus einem Ausdruck wie (ABCD) noch drei andere ableiten, die den gleichen Zahlenwert besitzen, nämlich

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

Die 24 verschiedenen Ausdrücke liefern also höchstens sechs verschiedene Zahlenwerte. Ist etwa $(ABCD) = \lambda$, so können wir die übrigen Zahlenwerte durch diesen einen in folgender Weise ausdrücken. Es ist zunächst, wie sich sofort ergiebt,

$$(3) \qquad (ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ferner wird

$$(ACBD) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{(AC + CB)(CA + AD)}{CB \cdot AD}$$

$$= 1 + \frac{AC \cdot AD + CB \cdot CA + AC \cdot CA}{CB \cdot AD}$$

$$= 1 + \frac{AC \cdot (BC + CA + AD)}{CB \cdot AD} = 1 - \lambda.$$

Also

$$(4) \qquad (ACBD) = 1 - (ABCD) = 1 - \lambda.$$

Ganz ähnlich beweist man, dass

$$(5) \qquad (ADCB) = \frac{(ABCD)}{(ABCD) - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Als Endresultat ergeben sich demnach folgende sechs verschiedene Werte, von denen jeder in vierfacher Weise geschrieben werden könnte

$(ABCD) = \lambda$	$(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$
$(ACBD) = 1 - \lambda$	$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda}$
$(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$	$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

Das Doppelverhältnis als Koordinate.

25. Halten wir jetzt von den vier Punkten ABCD drei, etwa A, B, C fest, während D die Punktreihe durchwandert, so wird das Doppelverhältnis (ABCD) für jede Lage von D einen bestimmten Wert annehmen. Fällt insbesondere D in den unendlich fernen Punkt der Punktreihe, den wir mit D_∞ bezeichnen wollen, so wird

$$(ABCD_\infty) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD_\infty}{BD_\infty} = \frac{AC}{BC}$$

weil der Quotient $\frac{AD_\infty}{BD_\infty} = 1$ nach 19. Es reduziert sich also für diesen Punkt das Doppelverhältnis auf ein einfaches Streckenverhältnis. Es wird aber ferner auch jeder Zahlenwert nur bei einer Lage des Punktes erreicht, wie aus dem folgenden Satze sich ergiebt:

Satz 6. „Sind drei Punkte A, B, C einer Punktreihe gegeben, sowie ein Zahlenwert λ von bestimmten Vorzeichen, so giebt es einen und nur einen Punkt D der Punktreihe, welcher mit A, B und C ein Doppelverhältnis $(ABCD) = \lambda$ bildet."

Denn es ist für diesen gesuchten Punkt D

$$(ABCD) = \lambda = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \quad \text{also} \quad \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{AC}{BC}$$

Hier muss $\frac{AC}{BC}$ mit einem bestimmten Vorzeichen versehen werden (vgl. 19.), so dass auch $\frac{AD}{BD}$ der Grösse und dem Vorzeichen nach gegeben ist, also wird der Punkt D dadurch eindeutig festgelegt.

Natürlich gilt der eben bewiesene Satz in entsprechender Weise auch für den Strahlen- und Ebenenbüschel. Hält man drei Elemente eines Grundgebildes erster Stufe fest, so kann man die Lage eines vierten beweglichen Elementes festlegen durch den Zahlenwert des Doppelverhältnisses, welches dieses vierte Element mit den drei festen bildet. Das Doppelverhältnis dient also als Koordinate, deren Zahlenwerte die einzelnen Elemente liefern.

Aufgabe 3. Gegeben sind die Punkte A, B, C einer Punktreihe in der in der Figur 10 angegebenen

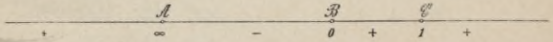

Fig. 10.

Anordnung. Man untersuche den Verlauf des Doppelverhältnisses (ABCD), wenn D die Punktreihe durchläuft.

Eine einfache Betrachtung liefert folgende Zusammenstellung

D im Unendlichen: . . .	$(ABCD) = \frac{AC}{BC}$	$\ldots +$
D geht vom Unendlichen bis A:	„	$\ldots +$
D fällt nach A:	„	$\ldots \infty$
D geht von A bis B: . . .	„	$\ldots -$
D fällt nach B:	„	$\ldots\ 0$
D geht von B nach C:. . .	„	$\ldots +$
D fällt nach C:	„	$\ldots +1$
D geht von C ins Unendliche:	„	$\ldots +$.

Wir wollen noch ausdrücklich bemerken, dass (ABCD) bloss dann den Wert $+1$ annimmt, wenn der bewegliche Punkt D nach C rückt. — Man führe die entsprechende Betrachtung durch für eine andere Anordnung der Punkte A, B, C.

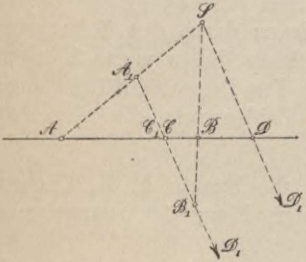

Fig. 11.

Aufgabe 4. Gegeben sind drei Punkte A, B, C einer Geraden (Fig. 11); man konstruiere einen Punkt D auf der Geraden, so dass $(ABCD) = -\frac{2}{3}$.

Lösung. Wir ziehen durch C irgend eine Gerade und tragen auf ihr die entgegengesetzt gerichteten Strecken $CA_1 = 2$, $CB_1 = 3$ ab unter Zugrundelegung einer ganz beliebigen Masseinheit, konstruieren den Schnittpunkt S der Verbindungslinien AA_1 und BB_1 und ziehen durch S eine Parallele zu A_1B_1, dann schneidet diese Parallele die gegebene Gerade im gesuchten Punkte D. Denn wenn wir C gleichzeitig mit C_1 bezeichnen, den unendlich fernen Punkt von SD dagegen D_1 und die Strahlen von S nach A, B, C, D der Reihe nach a, b, c, d nennen, so ist nach 23. bezw. 25.

$$(abcd) = (ABCD) = A_1B_1C_1D_1 = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = -\frac{2}{3}.$$

Man konstruiere auch noch den Punkt E, für welchen $(ABCE) = +\frac{2}{3}$.

§ 9. Das harmonische Doppelverhältnis.

Definition harmonischer Elemente.

26. Gehen wir von drei beliebigen Punkten A, B, C einer Punktreihe aus, so können wir nach Satz 6 immer einen und nur einen Punkt D des Trägers finden, für welchen $(ABCD) = -1$. Vier solche Punkte haben besonders wichtige geometrische Eigenschaften. Wir stellen die Definition auf:

„Vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe heissen harmonisch, wenn das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = -1.\text{“}$$

Es sind die Punkte A und B einerseits, C und D andererseits einander zugeordnet und aus 21. folgern wir unmittelbar, dass die Punktpaare A, B und C, D sich trennen. Man sagt deswegen wohl auch, dass zwei solche Punktpaare sich harmonisch trennen.

Ganz entsprechend sind vier harmonische Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels oder vier harmonische

Ebenen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ eines Ebenenbüschels dadurch definiert, dass bezüglich (abcd) = — 1 oder $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$.

Die 6 Werte von Doppelverhältnissen, welche sich nach 24. aus vier Elementen bilden lassen, reduzieren sich bei vier harmonischen Punkten, also für $\lambda = -1$, ersichtlich auf die folgenden 3 Werte: $-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$.

Natürlich trennen sich auch hier wieder die beiden Paare von zugeordneten Elementen. Ferner folgt aus Satz 5 von 23. noch

Satz 7. „Vier harmonische Elemente eines Grundgebildes erster Stufe gehen durch die Operationen des Schneidens und Projizierens stets wieder in vier harmonische Elemente über.“

Konstruktion harmonischer Elemente.

27. Sind drei Punkte A, B, C einer Punktreihe gegeben, so giebt es, wie wir bereits wissen, bloss einen Punkt D, der zu C harmonisch liegt bezüglich A und B, d. h. so liegt, dass

(1) $$(\mathrm{ABCD}) = -1.$$

Daraus folgt sofort

(2) $$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = -\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}.$$

Die Punkte C und D teilen also die Strecke AB, abgesehen vom Vorzeichen, im gleichen Verhältnis. Diese Bemerkung liefert folgende Konstruktion: Wir ziehen (Fig. 12) durch die gegebenen Punkte A und B zwei beliebige, parallele Gerade AA′ und BB′ und durch C eine beliebige Linie, welche diese Parallelen in X und Y′ trifft. Schneiden wir dann (mittels des Zirkels) die Strecke $BY = Y'B$ ab, so liefert die Verbindungslinie XY im Schnittpunkt mit g den ge-

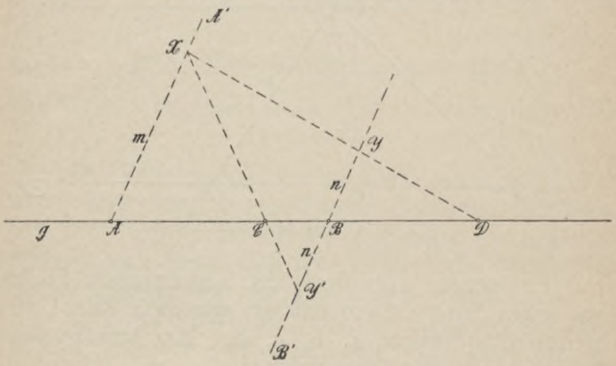

Fig. 12.

suchten Punkt D. Misst nämlich die Strecke AX m Längeneinheiten, die Strecke BY und die ihr gleiche Y′B n Längeneinheiten, wobei m und n positive Zahlen, so ist mit Rücksicht auf die Vorzeichen

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{m}{n} \quad \text{und} \quad \frac{AD}{BD} = +\frac{m}{n},$$

also in der That die Bedingung (2) und folglich auch (1) erfüllt.

Nehmen wir in Figur 13 an, die gegebenen Punkte liegen so, dass C die Mitte der Strecke AB, dann wird offenbar $m = n$ und XY parallel zu g, der Punkt D rückt ins Unendliche, also

Satz 8. „Die Mitte C einer Strecke AB und der unendlich ferne Punkt D des Trägers der Strecke sind vier harmonische Punkte.“

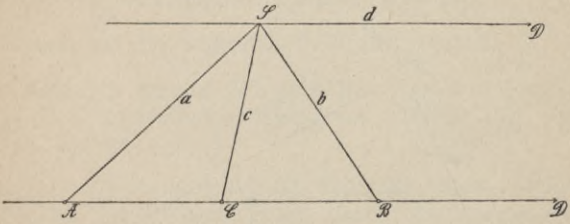

Fig. 13.

Projizieren wir diese vier harmonischen Punkte aus einem Punkte S, so erhalten wir nach Satz 4 vier harmonische Strahlen a, b, c, d. Man benutze diese Betrachtungen zur Lösung der

Aufgabe 5. Gegeben sind drei Strahlen a, b, c eines Büschels; man konstruiere den vierten harmonischen Strahl d zu c bezüglich a und b.

Ein einfacher Satz über harmonische Strahlen ergiebt sich ferner durch folgende Betrachtung: Ist ABC ein Dreieck und halbiert man den Winkel bei A sowie dessen Nebenwinkel durch Linien, welche die Seite BC beziehungsweise in D und E treffen, so teilen nach bekannten planimetrischen Sätzen die Punkte D und E die Seite BC im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten, also sind B, C, D, E harmonisch, (BCDE) $= -1$ und es sind auch die aus A nach diesen Punkten zielenden Strahlen harmonisch, so dass wir erhalten

Satz 9. „Irgend zwei Strahlen und die zwei Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel bilden ein harmonisches Quadrupel. Die letzteren beiden zugeordneten Strahlen stehen aufeinander senkrecht."

Aufgabe 6. Man bilde eine Umkehrung dieses Satzes.

§ 10. **Das vollständige Viereck.**

Geometrische Definition von vier harmonischen Punkten.

28. Vier harmonische Punkte lassen sich nun nicht bloss durch die analytische Beziehung definieren, dass ihr Doppelverhältnis den Zahlenwert — 1 besitzt, sondern auch durch eine rein geometrische, durch eine Lagenbeziehung, wie wir jetzt zeigen wollen.

Sind vier Punkte E, F, G, H in einer Ebene ganz beliebig gegeben (Fig. 14a oder Fig. 14b), so be-

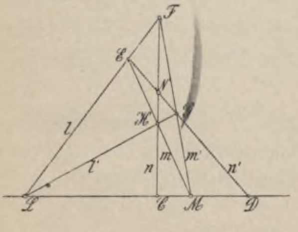

Fig. 14a.

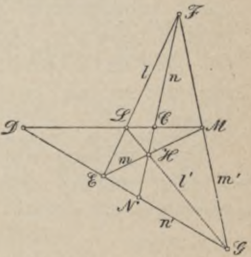

Fig. 14b.

stimmen sie zunächst sechs Linien, welche je zwei dieser vier Punkte verbinden. Die Gesamtheit dieser sechs Linien nennen wir das „vollständige Viereck" der Punkte E, F, G, H. Die sechs Linien heissen die „Seiten“, die Punkte E, F, G, H die „Ecken“ des Viereckes. Zu jeder Seite des vollständigen Viereckes z. B. zur Verbindungslinie EF oder l können wir eine zweite, in diesem Falle die Verbindungslinie GH oder l′ finden derart, dass zwei solche Seiten zusammen alle die vier gegebenen Ecken des Viereckes enthalten. Wir nennen zwei solche Seiten „Gegenseiten“ des vollständigen Viereckes und erhalten augenscheinlich drei Paare von Gegenseiten, l, l′, m, m′, n, n′. Je zwei zusammengehörige Gegenseiten liefern endlich noch einen Schnittpunkt, nämlich l und l′ den Punkt L, m und m′ den Punkt M und n und n′ den Punkt N. Diese drei Punkte L, M, N heissen wohl auch „Nebenecken“ des Viereckes.

Der Zusammenhang dieser Figuren mit harmonischen Punkten wird nun hergestellt durch folgenden

Satz 10. „Greift man zwei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Viereckes heraus, so liefern sie zwei Nebenecken. Auf ihrer Verbindungslinie schneidet dann das letzte Paar von Gegenseiten zwei Punkte aus, die zu den zwei ersten Nebenecken harmonisch liegen.“

Denn nehmen wir L und M als Nebenecken, die verbunden werden und schneidet das letzte Paar von Gegenseiten n, n′ diese Verbindungslinie in C und D, so hat man

$$(LMCD) = (EGND) \tag{1}$$

wie sich ergiebt, wenn man die links stehenden Punkte aus dem Punkte F auf n′ projiziert (Satz 2). Projiziert man aber die letzten vier Punkte aus H auf LM, so wird

(2) $$(EGND) = (MLCD),$$
also folgt
(3) $$(LMCD) = (MLCD).$$

Andererseits zeigt aber die Rechnung, dass allgemein

$$(MLCD) = \frac{1}{(LMCD)},$$

mithin in (3)

$$(LMCD)^2 = 1.$$

Es kann also das Doppelverhältnis der vier Punkte L, M, C, D bloss die Werte $+1$ oder -1 haben. Der Wert $+1$ ist aber ausgeschlossen, da er nach 25. Aufgabe 3 bloss erreicht wird, wenn von den vier Punkten des Doppelverhältnisses zwei zusammenfallen. Dies ist in unserer Figur jedoch nicht möglich. Es muss folglich sein

$$(LMCD) = -1,$$

d. h. die vier Punkte liegen harmonisch.

Es sind dann auch E, G, N, D vier harmonische Punkte und die Strahlen von F oder H aus nach ihnen sind ebenfalls harmonisch.

Wir benutzen diese Eigenschaft des vollständigen Vierecks, um eine zweite Lösung zu gewinnen für die

Aufgabe 7. Gegeben sind drei Punkte A, B, C auf einer Geraden; zu C den vierten harmonischen bezüglich A und B zu konstruieren.

Wir ziehen (Fig. 15) durch den gegebenen Punkt C eine beliebige Gerade, wählen auf ihr irgend zwei Punkte E und F, ziehen die Verbindungslinien EA, EB, sowie FA und FB. Ist dann G der Schnittpunkt von FA und BE, ferner H der Schnittpunkt von FB und AE, so liefert GH auf der gegebenen Geraden den vierten harmonischen Punkt D. Der Beweis ergiebt sich sofort aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks EFGH.

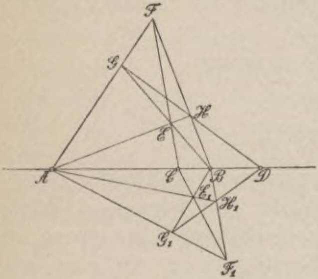

Fig. 15.

Natürlich kann man die verschiedensten Vierecke zur Konstruktion benutzen. In der Figur ist noch ein zweites Viereck $E_1 F_1 G_1 H_1$ gezeichnet. Es muss dann $G_1 H_1$ durch den gleichen Punkt D gehen.

Diese Konstruktion erfordert bloss das Ziehen von geraden Linien, ist also mittels des Lineals allein ausführbar, während bei der in 27. gegebenen Lösung auch der Zirkel benutzt werden musste.

Liegen umgekehrt vier harmonische Punkte A, B, C, D gegeben vor und zeichnet man in der eben durchgeführten Weise zu A und B den vierten harmonischen bezüglich C, so muss dieser mit D zusammenfallen.

Zu bemerken ist noch, dass in Bezug auf das vollständige Viereck die beiden Punktpaare der harmonischen Gruppe eine verschiedene Rolle spielen, indem nämlich A und B Nebenecken sind, während durch C und D die Gegenseiten laufen. Wir wissen aber schon aus dem Früheren (20.), dass von den beiden Punktpaaren in einem Doppelverhältnis keines vor dem anderen ausgezeichnet ist. Für die harmonischen Punkte wäre diese Gleichberechtigung der beiden Paare auch geometrisch durch Konstruktion eines zweiten Viereckes leicht zu erweisen.

Aufgabe 8. Die Strahlen a, b, c eines Büschels sind gegeben, zu c den vierten harmonischen bezüglich a und b zu konstruieren.

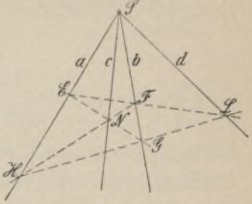

Fig. 16.

Wir wählen auf c einen Punkt N beliebig (Fig. 16), ziehen durch ihn zwei beliebige Gerade EG und HF, bringen EF und HG in L zum Schnitt, dann ist SL der verlangte Strahl d. Die Konstruktion erfordert bloss das Ziehen von geraden Linien, ist „linear“, wie wir sagen.

Anwendungen des Satzes vom vollständigen Viereck.

29. Hat man in einer Ebene zwei gerade Linien a und b und einen Punkt S und legen wir durch S beliebige Gerade, welche a und b je in A, B, A′, B′, u. s. w. schneiden (Fig. 17); ziehen wir ferner AB′ und A′B, welche einen Punkt D liefern, A′B″ und A″B′, welche sich in D′ schneiden u. s. w., so liegen alle so konstruierten Punkte D auf einer Geraden, welche auch den Schnittpunkt F der gegebenen Geraden a und b enthält.

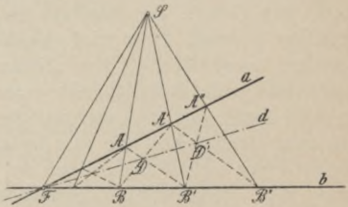

Fig. 17.

Denn verbinden wir F mit S und D und nennen diese Strahlen s und d, so sind a, b, s, d vier harmonische Strahlen, wie sich aus dem Viereck AA′B′B ergiebt, also (absd) = — 1. Zu den drei Strahlen a, b, s giebt es aber bloss einen vierten harmonischen, also müssen alle Punkte D auf einem Strahl durch F liegen.

Aufgabe 9. Gegeben sind in einer Ebene zwei Gerade a und b, deren Schnittpunkt nicht mehr gezeichnet werden kann und ein Punkt D. Man soll diesen Punkt D mit dem unzugänglichen Schnittpunkt durch eine Gerade verbinden.

Wir benutzen den eben bewiesenen Satz und ziehen durch D (vergl. Fig. 17) irgend zwei Gerade AB′ und A′B. Dann liefern AB und A′B′ einen Punkt S. Irgend eine durch S weiter gezogene Gerade, welche a und b in A″ und B″ trifft, bestimmt einen Punkt D′, der mit D verbunden, die gesuchte Gerade giebt.

Anmerkung. Dem vollständigen Viereck entspricht nach dem Gesetz der Dualität in der Ebene (7a) das vollständige Vierseit. Dies wird gebildet von vier ganz beliebigen Geraden einer Ebene, den „Seiten" des Vierseites. Diese bestimmen sechs Schnittpunkte oder „Ecken", welche wieder in drei Paare von „Gegenecken" zerfallen derart, dass durch ein Paar Gegenecken alle vier Seiten hindurchgehen. Mittels dieser Figur erhält man dann in durchaus analoger Weise eine rein geometrische Definition für vier harmonische Strahlen.

Auch in der reinen Geometrie der Lage kann man harmonische Elemente auf Grund ihrer geometrischen Eigenschaft behandeln; das Doppelverhältnis dagegen in der hier gegebenen Definition ist auszuschliessen wegen der vorkommenden Strecken oder Winkel. Den Inbegriff von irgend vier gegebenen Elementen eines Grundgebildes erster Stufe bezeichnet man in der Geometrie der Lage als einen „Wurf".

§ 11. Metrische Relationen bei harmonischen Gebilden.

30. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so ist also (ABCD) = — 1 oder

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

Ist weiter (Fig. 18) M die Mitte der Strecke AB, so können wir die letzte Gleichung auch schreiben

$$\frac{AM + MC}{BM + MC} = \frac{DM + MA}{BM + MD}.$$

Multipliziert man aus, so ergiebt sich unter Rücksicht auf die Gleichung AM = MB

$$MC \cdot MD = MA^2 = MB^2. \tag{1}$$

Dies liefert einen leicht in Worte zu fassenden Satz über harmonische Punkte. Ist umgekehrt Glei-

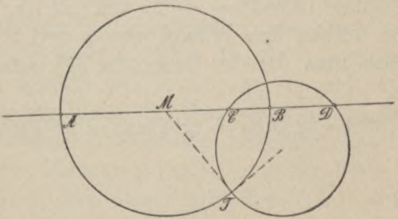

Fig. 18.

chung (1) erfüllt, so liegen die Punkte harmonisch.

Legen wir durch die Punkte C und D irgend einen Kreis und von M aus eine Tangente an ihn, so ist $MC \cdot MD$ die Potenz des Punktes M in Bezug auf diesen Kreis und gleich dem Quadrat der Tangente. Wird der Berührungspunkt der Tangente mit T bezeichnet, so hat man demnach

$$MT^2 = MC \cdot MD. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$MT = MA = BM,$$

d. h. T liegt auf dem Kreise über AB als Durchmesser. Die Tangenten an die beiden Kreise in T stehen also aufeinander senkrecht oder anders ausgedrückt: die beiden Kreise schneiden sich rechtwinkelig oder orthogonal. Damit ist bewiesen:

Satz 11. „Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so schneidet jeder Kreis durch die beiden zugeordneten Punkte C und D den über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis orthogonal.“

Aufgabe 10. Sind a, b, c, d vier harmonische Strahlen, so dass also $(abcd) = -1$ und ist m einer der Strahlen, welche den Winkel von a und b halbieren, so beweise man die der Gleichung (1) entsprechende Relation

$$\operatorname{tg}(mc) \cdot \operatorname{tg}(md) = \operatorname{tg}^2(ma) = \operatorname{tg}^2(mb).$$

III. Abschnitt.

Die projektive Beziehung der einförmigen Grundgebilde.

§ 12. Die konstruktive Behandlung der projektiven Beziehung.

Definition projektiver Grundgebilde.

31. An perspektiven Grundgebilden erster Stufe haben wir im I. Abschnitt zweierlei Eigenschaften als charakteristisch erkannt: die Eigenschaft der Lage (14.) und die daraus sich ergebende metrische Eigenschaft der Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Elementen (23.). Denken wir uns nun in zwei perspektiven Grundgebilden erster Stufe z. B. zwei Punktreihen g und g_1 (Fig. 4) die sämtlichen, entsprechenden Punkte wie A und A_1, B und B_1 u. s. w. in irgend einer Weise an den (etwa als materiell gedachten) Punktreihen markiert. Dann heben wir den geometrischen Zusammenhang zwischen den Punktreihen g und g_1 und dem Strahlenbüschel S auf, indem wir g und g_1 in irgend eine beliebige Lage bringen. Während dadurch die perspektive Lagenbeziehung zerstört wird, bleibt die metrische Eigenschaft nach wie vor erhalten. Wir nennen die Punktreihen dann noch „projektiv" — wofür auch das Zeichen $\overline{\wedge}$ gebraucht wird. Allgemein stellen wir auf als

Definition. Zwei Grundgebilde erster Stufe heissen projektiv, wenn sie eindeutig, Element für Element, dadurch aufeinander bezogen sind, dass je vier Elemente des einen Gebildes und die vier entsprechenden des anderen das gleiche Doppelverhältnis bilden.

Um uns solche projektive Grundgebilde zu verschaffen, steht uns zunächst kein anderes Mittel zu Gebote, als dass wir zwei Grundgebilde perspektiv aufeinander beziehen und dann gewissermassen „auseinandernehmen". Es ist aber leicht, auch direkt eine projektive Beziehung zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe zu vermitteln.

Konstruktion projektiver Punktreihen.

32. Wir führen dies zunächst durch für zwei Punktreihen, deren Träger g und g_1 sich in einer Ebene befinden mögen. Irgend drei beliebigen Punkten A, B, C auf g ordnen wir drei beliebige Punkte A_1, B_1, C_1 auf g_1 zu. Wir verbinden (Fig. 19) A mit A_1 und wählen auf dieser Verbindungslinie zwei beliebige Punkte S und S_1. Die Linien SB und S_1B_1 mögen sich in **B**, SC und S_1C_1 in **C** schneiden. Weiter legen wir durch **B** und **C** eine Linie p, welche AA_1 in **A** treffen möge. Zu einem beliebigen Punkte D von g verschaffen wir uns jetzt einen entsprechenden auf g_1 in folgender Weise: SD trifft p in **D**, und S_1**D** schneidet dann g_1 in einem Punkte D_1, der dem Punkte D zugewiesen wird. Dann ist offenbar für jede Lage von D nach den Sätzen von 23.

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (\mathbf{ABCD}).$$

Beschreibt D die eine Punktreihe, so durchwandert D_1 die andere und es sind immer die Büschel S und

S_1 je perspektiv zur Punktreihe **A**, **B**, **C** . . . auf p und also auch zu einander perspektiv. Es bilden folglich auch irgend vier Punkte auf g und die vier entsprechenden auf g_1 das gleiche Doppelverhältnis. Damit haben wir also in der That projektive Punktreihen konstruiert und gleichzeitig gefunden, dass wir drei Paare entsprechende Punkte beliebig annehmen können. Dadurch ist die projektive Beziehung dann gerade bestimmt.

Aufgabe 11. Man konstruiere die Punkte, welche den unendlich fernen Punkten von g und g_1 bezüglich entsprechen. — Der Schnittpunkt der beiden Träger g und g_1 kann als Punkt von g mit E und als

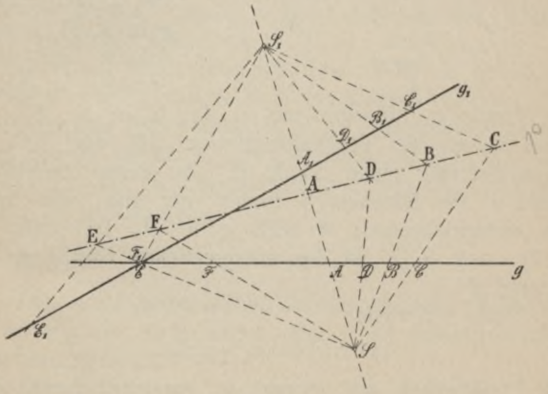

Fig. 19.

Punkt von g_1 mit F_1 bezeichnet werden. Man konstruiere die beiden entsprechenden Punkte E_1 und F (siehe Fig. 19).

Konstruktion projektiver Strahlenbüschel.

33. Zwei in einer Ebene befindliche Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen, gelingt durch die entsprechende duale Betrachtung. Wir greifen im Büschel S drei beliebige Strahlen a, b, c heraus, denen wir im Büschel S_1 drei beliebige Strahlen a_1, b_1, c_1 zuordnen (Fig. 20). Durch den Schnittpunkt von a und a_1 ziehen wir willkürlich zwei Gerade g und g_1 und bringen g in A, B, C zum Schnitt mit den Strahlen a, b, c, die Gerade g_1 hingegen mit a_1, b_1, c_1 in A_1, B_1, C_1. Dann liefern die Verbindungslinien BB_1 und CC_1 in ihrem Schnitte einen Punkt P. Zu einem beliebigen Strahl d des Büschels S finden wir nun, wie folgt, den entsprechenden: d trifft g in D, DP trifft g_1 in D_1 und $S_1 D_1$ ist der entsprechende Strahl d_1 im Büschel S_1.

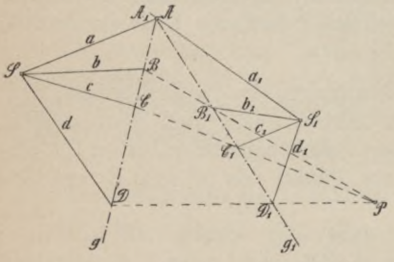

Fig. 20.

Dann ist wieder

$$(a\,b\,c\,d) = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1).$$

Die Punktreihen auf g und g_1, welche durch entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1 ausgeschnitten werden, sind perspektiv.

Aufgabe 12. „Man zeichne in den beiden projektiven Büscheln die Strahlen e_1 und f, welche dem Verbindungsstrahl SS_1 entsprechen, wenn dieser als e und f_1 genommen wird.“

Um eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen, schneiden wir den Büschel mit einer Geraden in einer Punktreihe und beziehen diese auf die gegebene Punktreihe.

Wären ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel in projektive Beziehung zu setzen, so bringen wir die Ebene des Strahlenbüschels zum Schnitt mit dem Ebenenbüschel und beziehen die beiden Strahlenbüschel projektiv aufeinander.

Zusatz. Statt durch eine geometrische Konstruktion können wir uns die projektive Beziehung auch von Anfang an durch eine Doppelverhältnisrelation festgelegt denken. Sind z. B. g und g_1 die Träger zweier Punktreihen und A, B, C, sowie A_1, B_1, C_1 beliebig auf ihnen ausgewählt, so bildet ein beliebiger Punkt D auf g mit A, B, C ein Doppelverhältnis von bestimmtem Wert $(ABCD) = \lambda$. Dann giebt es auf g_1 einen Punkt D_1, für welchen $(A_1 B_1 C_1 D_1) = \lambda$. Dies ist der D entsprechende Punkt D_1. Es gilt also die Beziehung

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1).$$

Die angeführten Konstruktionen lehren, Elemente zu finden, die stets dieser oder einer entsprechenden Beziehung genügen.

Es drängt sich aber noch die Frage auf: Ist vielleicht die soeben direkt begründete, projektive Beziehung allgemeinerer Art als die Beziehung, in der zwei perspektive Grundgebilde stehen, nachdem ihre gegenseitige Lagenbeziehung aufgehoben ist?

Dies ist bei den Grundgebilden erster Stufe in der That nicht der Fall. Denn wir wollen im folgenden Paragraphen zeigen, dass sich zwei projektive Grundgebilde erster Stufe stets in perspektive Lage bringen (perspektiv „orientieren") lassen.

§ 13. Die perspektive Orientierung projektiver Grundgebilde erster Stufe.

Projektive Punktreihen, in perspektive Lage gebracht.

34. Liegen zwei, in der soeben beschriebenen Weise projektiv aufeinander bezogene Punktreihen g und g_1 vor, in denen also irgend vier Punkten der einen vier Punkte der anderen entsprechen, vom gleichen Doppelverhältnis, so seien E und E_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte. Dann gilt für irgend drei weitere entsprechende Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1 die Relation

$$(1) \qquad (ABCE) = (A_1 B_1 C_1 E_1).$$

Bringen wir nun g und g_1 in eine solche gegenseitige Lage, dass E_1 auf E zu liegen kommt, während die Träger g und g_1 selbst nicht zusammenfallen. Wir verbinden A mit A_1, B mit B_1 und zeichnen den Schnittpunkt S dieser Verbindungsstrahlen.*) Dann geht auch die Linie CC_1 durch diesen Punkt S. Denn angenommen, die Verbindungslinie SC_1 treffe g in C', so ist nach 23.

$$(2) \qquad (ABC'E) = (A_1 B_1 C_1 E_1),$$

*) Es wird dem Leser geraten, die Figuren nach den Angaben des Textes **stets** selbst zu entwerfen, **auch wenn** sie beigedruckt sind. Es erleichtert das Verständnis ungemein, wenn man die Figur, Schritt für Schritt der Entwickelung folgend, erst allmählich **entstehen** sieht.

also mit Rücksicht auf (1)

$$(3) \qquad (ABC'E) = (ABCE).$$

Dann muss aber notwendig C' mit C zusammenfallen, also $C' = C$ sein; denn es giebt nach 25. nur einen Punkt C, der mit A, B und E ein Doppelverhältnis von gegebenem Werte $(ABCE)$ bildet. Ganz in der gleichen Weise zeigt man, dass jede Verbindungslinie irgend zweier anderer entsprechender Punkte, wie D und D_1 u. s. w., auch immer durch den Punkt S gehen muss. Die beiden Punktreihen sind also dargestellt als Schnitte des Büschels S, sie sind in perspektive Lage gebracht.

Dies ist offenbar noch auf unendlich verschiedene Arten möglich, da ja nur nötig war, irgend zwei entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen im Schnittpunkt der beiden Träger zur Deckung zu bringen. Der Punkt S heisst wohl auch das „Centrum der Perspektivität". Wir erhalten also den

Satz 12. „Hat man zwei projektive Punktreihen g und g_1 und liegen im Schnittpunkte der beiden Träger entsprechende Punkte der Punktreihen vereinigt, während die Träger g und g_1 selbst nicht zusammenfallen, so liegen die beiden Punktreihen perspektiv, d. h. alle Verbindungslinien entsprechender Punkte von g und g_1 laufen durch einen Punkt, das Centrum der Perspektivität."

Projektive Strahlenbüschel, in perspektive Lage gebracht.

35. Um zwei in einer Ebene befindliche, projektive Strahlenbüschel S und S_1 in perspektive Lage zu bringen, greifen wir irgend zwei entsprechende Strahlen

e und e_1 heraus und bringen sie zur Deckung, jedoch so, dass S und S_1 nicht aufeinander zu liegen kommen. Dann zeigt die duale Betrachtung, dass die Büschel perspektiv liegen. Dies liefert den

Satz 13. „Liegen zwei in einer Ebene befindliche, projektive Strahlenbüschel so, dass in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechende Strahlen der beiden Büschel vereinigt sind, während die Mittelpunkte nicht zusammenfallen, so sind die Büschel „perspektiv“, d. h. alle entsprechenden Strahlen schneiden sich auf einer Geraden, der »Achse der Perspektivität«“.

Die Aufgabe, eine Punktreihe und einen zu ihr projektiven Strahlenbüschel perspektiv zu legen, verlangt, den Büschel so zu orientieren, dass drei Strahlen a, b, c durch die ihnen entsprechenden Punkte A, B, C der Punktreihe gehen. (Beweis!) Dies ist auf Grund planimetrischer Sätze leicht durchführbar.

Mehr Schwierigkeiten bietet es, einen Strahlenbüschel und einen zu ihm projektiven Ebenenbüschel in perspektive Lage zu bringen. Wir übergehen die Lösung, da sie für das Folgende ohne Belang ist.

§ 14. Anwendungen.

36. Fügen wir bei, dass die in § 12 gegebenen Konstruktionen der projektiven Beziehung noch manche Spezialisierungen zulassen. So kann man z. B. bei der Konstruktion der projektiven Punktreihen in 32. die auf dem Verbindungsstrahl AA_1 noch ganz beliebig angenommenen Punkte S und S_1 auch so wählen, dass S nach A_1 und S_1 nach A fällt. Dann hat

man zur Durchführung der gleichen Betrachtung wie damals die Linienpaare

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1 B \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1 C \end{matrix}\right\}$$

zu benutzen, deren erstes einen Punkt **B**, das zweite einen Punkt **C** liefert (Fig. 21), während die Verbindungslinie **BC** der perspektive Schnitt der Büschel A

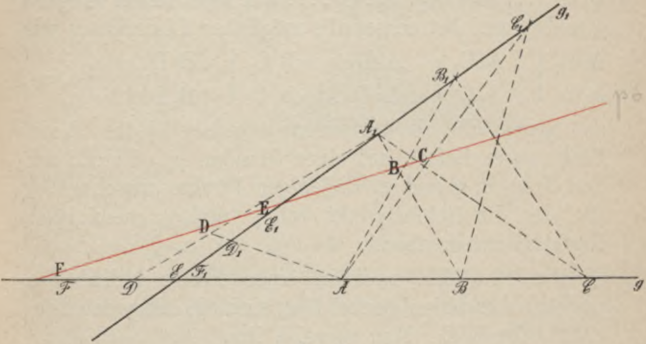

Fig. 21.

und A_1 ist, den wir mit p_0 bezeichnen wollen. Irgend zwei entsprechende Punkte D und D_1 der projektiven Punktreihen sind daraus zu erhalten, dass das Linienpaar

$$\left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1 D \end{matrix}\right\}$$

einen auf p_0 gelegenen Schnittpunkt **D** besitzt. Konstruiert man jetzt wieder die dem Schnittpunkt von g und g_1 entsprechenden Punkte, so liefert die Figur unmittelbar das Ergebnis, dass dies die Punkte E_1 und F sind, in denen p_0 den Trägern g_1 und g begegnet.

Ist nun die projektive Beziehung von g und g_1 gegeben, so sind damit diese Punkte E_1 und F und also auch p_0 bestimmt. Ebensogut wie nach A und A_1 hätten wir die Hilfspunkte S_1 und S aber auch nach B und B_1 oder nach C und C_1 u. s. w. verlegen können und müssen dadurch die gleiche Achse p_0 erhalten. Es folgt dann aber folgender

Satz 14. „Hat man zwei projektive Punktreihen A, B, C, ... und $A_1, B_1, C_1, \ldots$ auf zwei festen Trägern g und g_1 und betrachtet alle möglichen Linienpaare wie

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1 B \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1 C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1 D \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} B\,C_1 \\ B_1 C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} B\,D_1 \\ B_1 D \end{matrix}\right\} \text{ u. s. w.,}$$

so liegen die Schnittpunkte, welche jedes dieser Linienpaare liefert, auf einer Geraden p_0, welche aus den Trägern g und g_1 diejenigen Punkte ausschneidet, die den im Schnittpunkt von g und g_1 vereinigten Punkten entsprechen.“

Aufgabe 13. Für zwei in einer Ebene befindliche, projektive Strahlenbüschel lässt sich ein entsprechender Satz aufstellen. Man beweise ihn.

Der Satz von Desargues.

37. Als ein Beispiel für die Brauchbarkeit dieser Betrachtungen erweisen wir noch folgenden sehr bekannten Satz:

Satz 15. „Wenn zwei in einer Ebene gelegene Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ die Eigenschaft haben, dass 1) die Verbindungslinien $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ durch einen Punkt gehen, so weiss man, dass 2) die Schnittpunkte von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$, $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ auf einer Geraden liegen und aus 2) folgt auch umgekehrt 1).“

Nehmen wir drei durch einen Punkt S gehende Strahlen a, b, c (Fig. 22) und auf ihnen bezüglich die Punktpaare A_1, A_2, B_1, B_2 und C_1, C_2, so ist damit

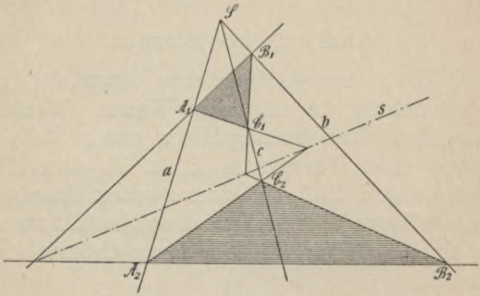

Fig. 22.

die Bedingung 1) für die beiden Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ erfüllt. Betrachten wir nun den Büschel S, so schneidet derselbe die Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ in zwei perspektiven Punktreihen. Diese perspektiven Punktreihen projizieren wir aus C_1 und C_2 beziehungsweise. Dann sind diese Büschel C_1 und C_2 projektiv und, wie man leicht erkennt, überdies perspektiv, da der Verbindungsstrahl $C_1 C_2$ sich selbst entspricht. Es schneiden sich mithin entsprechende Strahlen auf einer Geraden, der Achse der Perspektivität: also müssen auf einer Geraden S liegen: der Schnittpunkt von $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$, der Schnittpunkt von $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ und der Schnittpunkt von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (da nach ihm auch entsprechende Strahlen der Büschel C_1 und C_2 laufen). Damit ist der Satz bewiesen. Ganz ähnlich verfährt man bei der Umkehrung desselben.

Zusatz. Liegen die beiden Dreiecke von Anfang an in verschiedenen Ebenen, so ergeben sich die gleichlautenden Sätze durch einfache stereometrische Betrachtungen.

Analytischer Ansatz.

38. Die rechnende Geometrie behandelt die projektive Beziehung in folgender Weise: Werden die Elemente des einen Grundgebildes erster Stufe durch die Werte eines Parameters λ, z. B. eines Doppelverhältnisses (vgl. 25.), die eines zweiten Grundgebildes durch einen Parameter μ festgelegt und besteht zwischen λ und μ eine in Bezug auf jede dieser Grössen lineare Relation

$$\text{(1)} \qquad \alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0,$$

wo α, β, γ, δ beliebige, aber feste Zahlenwerte sind, so ordnet diese Gleichung, nach λ oder nach μ aufgelöst, jedem Wert des einen Parameters einen des andern zu. Es sind also auch die beiden Grundgebilde erster Stufe dadurch eindentig, Element für Element, aufeinander bezogen. Weiter zeigt man: Sind die beiden Grundgebilde eindeutig aufeinander bezogen und zwar durch eine solche „bilineare“ Gleichung wie (1), so folgt daraus schon, dass vier Elemente des einen Grundgebildes und ihre vier entsprechenden das gleiche Doppelverhältnis bilden, d. h. dass die Grundgebilde projektiv sind. Eine solche Relation (1) stellt also den analytischen Ausdruck der Projektivität dar.

Wir wollen dies am einfachsten Beispiel zweier projektiven Punktreihen g und g_1 noch genauer verfolgen. Auf g wird ein Punkt O willkürlich angenommen und ein beliebiger Punkt P von g durch seine Abscisse

$OP = x$ festgelegt, deren Zahlenwert nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten Seite negativ genommen wird. Ebenso werden die Punkte von g_1 durch Abscissen x_1 dargestellt. Zwischen diesen Parametern möge jetzt die Gleichung bestehen

$$(2) \qquad \alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0\,.$$

Dann ist vermöge derselben auch

$$(3) \qquad x = -\frac{\gamma x_1 + \delta}{\alpha x_1 + \beta} \quad \text{und} \quad x_1 = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}.$$

Diese Gleichungen gestatten, zu jedem x oder x_1 das entsprechende x_1 oder x zu berechnen. Der Ausdruck für das Doppelverhältnis von vier Punkten P, P', P'' P''' wird aber, wie man sofort erkennt,

$$(4) \qquad (PP'P''P''') = \frac{x - x''}{x' - x''} : \frac{x - x'''}{x' - x'''},$$

wenn diese Punkte durch die Abscissen x, x', x'', x''' gegeben sind. Den vier Punkten P, P', P'', P''' entsprechen vier andere Punkte P_1, P_1', P_1'', P_1''' auf g_1 mit den Abscissen

$$x_1 = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \quad x_1' = -\frac{\beta x' + \delta}{\alpha x' + \gamma} \text{ u.s.w.}$$

Dann zeigt eine leichte Rechnung, dass

$$(P_1P_1'P_1''P_1''') = (PP'P''P''')\,.$$

§ 15. Metrische Relationen. Spezielle Fälle.

Die Fluchtpunkt-Relation.

39. Führen wir in die Beziehung, welche die Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Punkten in zwei projektiven Punktreihen

zum Ausdruck bringt, die uneigentlichen Punkte der beiden Träger g und g_1 ein, so erhalten wir eine metrische Relation im speziellen Sinn, indem die Doppelverhältnisse in einfache Verhältnisse übergehen. Denken wir uns nämlich die beiden Punktreihen irgendwie perspektiv gelegt und sind (Fig. 4) R und Q_1 die den unendlich fernen Punkten von g_1 und g entsprechenden Punkte, die wir als „Fluchtpunkte“ bezeichnen, so hat man

$$(ABRQ) = (A_1 B_1 R_1 Q_1)$$

und daraus mit Rücksicht auf 25.

$$\frac{AR}{BR} = \frac{B_1 Q_1}{A_1 Q_1}$$

oder

$$AR, \; A_1 Q_1 = BR, \; B_1 Q_1 \,.$$

Es sind also alle diese Rechtecke, je mit entsprechenden Punkten A, A_1, B, B_1, C, C_1 . . . gebildet, flächengleich. Den gemeinsamen Flächeninhalt derselben erhält man auch, wenn man das im Schnittpunkt der Träger vereinigte Punktpaar E E_1 herausgreift, für welches

$$ER, \; E_1 Q_1 = Q_1 S, \; RS = k\,.$$

Es ist also

$$AR, \; A_1 Q_1 = BR, \; B_1 Q_1 = \ldots = k = \text{konst.}$$

Ähnliche, kongruente Punktreihen.

40. Aus der allgemeinen, projektiven Beziehung zweier Punktreihen ergiebt sich eine spezielle, wenn wir die uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte der beiden Träger besonders berücksichtigen, was dadurch möglich

wird, dass wir dieselben in der projektiven Beziehung einander entsprechen lassen. Sind Q und Q_1 diese unendlich fernen Punkte, so ist also

$$(ABCQ) = (A_1 B_1 C_1 Q_1)$$

folglich

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1}$$

oder auch

$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = c.$$

Es muss daher überhaupt das Verhältnis irgend zweier entsprechenden Strecken unveränderlich $= c$ sein. Solche Punktreihen heissen „ähnlich“.

Ist $c = 1$, so sind je zwei entsprechende Strecken gleich lang, die projektiven Punktreihen werden als „kongruent“ bezeichnet.

Aufgabe 14. Man zeige, dass man ähnliche (unter Umständen kongruente) Punktreihen enthält, wenn man zwei parallele Gerade mit einem beliebigen Strahlenbüschel oder zwei beliebige Gerade mit einem Parallelstrahlenbüschel schneidet.

Ebenso heissen zwei projektive Strahlenbüschel kongruent, wenn irgend zwei Strahlen den gleichen Winkel einschliessen wie die ihnen entsprechenden. Solche Strahlenbüschel erhält man z. B. wenn man eine Punktreihe aus zwei Punkten S und S_1 projiziert, die gleichweit entfernt von derselben und auf einer Senkrechten zu ihr liegen.

IV. Abschnitt.

Die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger.

---

§ 16. Die Doppelelemente und ihre Konstruktion.

Bestimmung einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger.

41. Denken wir uns zwei Punktreihen g und g_1 projektiv aufeinander bezogen. Dann können wir auch den Träger der einen Punktreihe mit dem der andern zusammenfallen lassen. Wir haben also nur noch einen Träger, der gewissermassen doppelt zu nehmen und „projektiv auf sich selbst bezogen“ ist. Die Möglichkeit einer solchen Beziehung lässt sich auch direkt leicht erkennen: denn ordnen wir drei Punkten A, B, C eines Trägers g drei andere Punkte A_1, B_1, C_1 des gleichen Trägers zu, so ist dadurch die projektive Beziehung auf der Punktreihe g festgelegt. Um sie nämlich konstruktiv zu verfolgen, projizieren wir A, B, C aus einem beliebigen (nicht auf g gelegenen) Punkt S und A_1, B_1, C_1 aus einem Punkte S_1 je durch einen Strahlenbüschel. Dann ist die projektive Beziehung dieser beiden Büschel bestimmt und entsprechende Strahlen derselben schneiden entsprechende Punkte auf g aus. Ist ein Punkt auf dem Träger g gegeben, ohne dass hinzugefügt ist, welcher der beiden Punktreihen er angehören soll, so kann man ihn als Punkt der einen

oder andern Punktreihe nehmen und demgemäss mit J oder K_1 bezeichnen. Verbindet man ihn dann entweder mit S oder mit S_1, so kann man die beiden entsprechenden Punkte J_1 und K finden, die im allgemeinen nicht zusammenfallen werden. Ganz ebenso können wir auch einen Strahlenbüschel oder einen Ebenenbüschel projektiv auf sich selbst beziehen.

Die Doppelelemente.

42. Bis hierher unterschied sich die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger nicht wesentlich von der früher auf verschiedenen Trägern betrachteten. Ein neuer Gesichtspunkt wird erst durch folgende Fragestellung gewonnen: Giebt es auf einem projektiv auf sich selbst bezogenen Träger Elemente, die sich mit den ihnen entsprecheuden decken? Können wir z. B. bei einer projektiven Beziehung auf einer Geraden einen Punkt X finden, der mit dem entsprechenden X_1 zusammenfällt? Wir werden einen solchen Punkt einen „Doppelpunkt“ nennen; ihnen entsprechen „Doppelstrahlen“ und „Doppelebenen“ beim Strahlen- bezw. Ebenenbüschel.

Von der Möglichkeit der Existenz solcher „Doppelelemente“ überzeugen wir uns durch folgende Betrachtung. Ein Strahlenbüschel sei projektiv auf sich selbst bezogen, den Strahlen a, b, c u. s. w. entsprechen die Strahlen a_1, b_1, c_1 u.s.w. Ein beweglich gedachter Strahl durchlaufe den Büschel im Sinne „abc“ (vergl. 16.) nach irgend einem Gesetz, etwa mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Die Bewegung eines zweiten Strahles des gleichen Büschels sei dadurch bestimmt, dass er sich in a_1 befinden soll, wenn der erste Strahl in a ist, in b_1, wenn dieser b passiert u. s. w., dass also die beiden beweglichen Strahlen im gleichen Zeitmoment sich immer in entsprechenden Strahlen der projektiven Beziehung befinden. Dann wird sich der zweite bewegliche Strahl im Sinne $a_1 b_1 c_1$ bewegen. Ist dieser Sinn der gleiche wie abc (Fig. 23a), rotieren also beide Strahlen in der gleichen Richtung (etwa wie

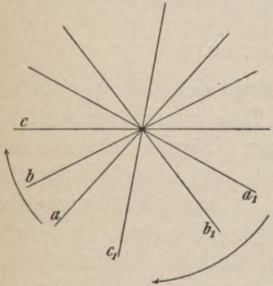

Fig. 23a.

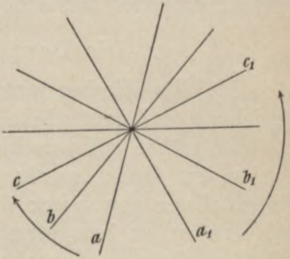

Fig. 23b.

die Zeiger einer Uhr) so heissen die Büschel „gleichlaufend". Ist der Sinn abc der entgegengesetzte wie $a_1 b_1 c_1$ (Fig. 23b) so heissen die Büschel „entgegengesetzt laufend". Stellt man sich im letztern Falle die beiden beweglichen Strahlen vor, so werden sie im Verlauf der Bewegung übereinander wegeilen. Einer solchen Stellung, wo sich für einen Moment die beiden Strahlen decken, entspricht offenbar ein Doppelstrahl der beiden projektiven Büschel. Ganz die gleichen Überlegungen gelten für projektive Punktreihen auf dem gleichen Träger. Bei entgegengesetzt laufenden projektiven Gebilden existieren demnach immer Doppelelemente. Bei gleichlaufenden projektiven Beziehungen dagegen kann man dies nicht von vornherein behaupten. Hier können Doppelelemente auftreten oder auch nicht.

In keinem Falle jedoch können mehr als zwei Doppelelemente vorhanden sein. Denn angenommen es gebe in einer projektiven Beziehung auf einer Punktreihe drei Doppelpunkte M, N, P, so wäre für ein Paar entsprechender Punkte A und A_1

$$(MNPA) = (M_1 N_1 P_1 A_1),$$

wobei M_1 mit M, N_1 mit N, P_1 mit P zusammenfällt. Es ist aber unmöglich, dass zwei verschiedene Punkte P und P_1 mit drei Punkten das nämliche Doppelverhältnis bilden, also fällt auch A mit A_1 zusammen und überhaupt je zwei entsprechende Punkte der projektiven Beziehung d. h.

Satz 16. „Wenn in einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger drei Elemente mit den ihnen entsprechenden sich decken, so deckt sich überhaupt jedes Element mit dem entsprechenden, d. h. man hat eine Identität.“

Demnach kann die Zahl der auftretenden Doppelelemente 0, 1 oder 2 sein. Ihre Bestimmung lässt sich zurückführen auf den Fall der Konstruktion der Doppelpunkte zweier ineinanderliegenden, projektiven Punktreihen. Denn aus einem projektiv auf sich bezogenen Strahlenbüschel schneidet eine Gerade seiner Ebene zwei projektive Punktreihen aus, nach deren Doppelpunkten die Doppelstrahlen des Büschels laufen, und ein projektiv auf sich bezogener Ebenenbüschel wird von einer beliebigen Ebene in einem projektiv auf sich bezogenen Strahlenbüschel geschnitten, durch dessen Doppelstrahlen auch die Doppelebenen des Ebenenbüschels gehen. Zur Konstruktion der Doppelpunkte zweier projektiven Punktreihen bedienen wir uns eines Kreises, der ein für allemal gezeichnet vorliegen kann, müssen aber zu dem Zweck noch vorher eine Eigenschaft des Kreises kennen lernen.

Hilfssatz über den Kreis.

43. Sind P und P_1 zwei beliebige Punkte auf einem Kreis (Fig. 24) und projizieren wir aus ihnen die übrigen Punkte des Kreises, also den Punkt A durch die Strahlen a und a_1, den Punkt B durch die Strahlen b und b_1 u.s.w., so erhalten wir die Büschel P und P_1, und diese sind projektiv d. h. es gilt der

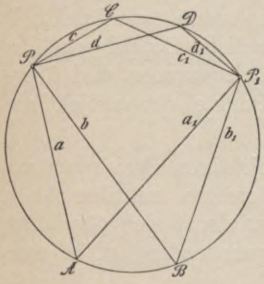

Fig. 24.

Satz 17. „Aus irgend zwei beliebigen Punkten eines Kreises werden die übrigen Punkte desselben durch projektive Büschel projiziert."

In der That ist ja

$$\sphericalangle (ab) = \sphericalangle (a_1 b_1)$$

oder

$$\sphericalangle (ad) = 180^0 - \sphericalangle (a_1 d_1).$$

In beiden Fällen wird

$$\sin (ab) = \sin (a_1 b_1)$$
$$\sin (ad) = \sin (a_1 d_1).$$

Es ist folglich auch

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1),$$

wenn dies irgend vier Strahlenpaare sind, die aus P und P_1 Punkte der Kreisperipherie projizieren; also sind die Büschel P und P_1 projektiv.

Die Steiner'sche Konstruktion der Doppelpunkte.

44. Es liege jetzt ein Kreis gezeichnet vor und in seiner Ebene befindet sich der Träger g, auf dem eine projektive Beziehung durch die Punktpaare $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1$ gegeben ist (Fig. 25). Um nun über

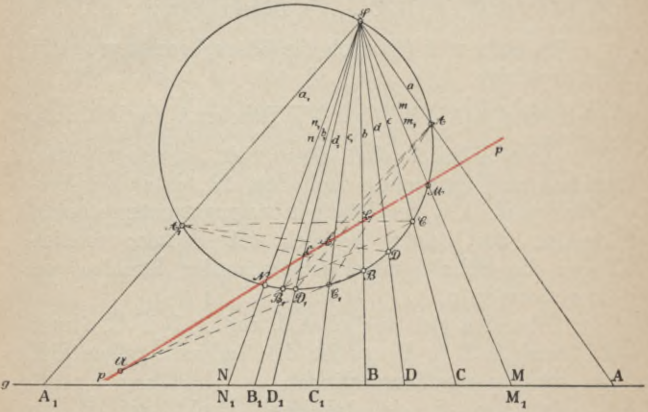

Fig. 25.

das Vorhandensein von Doppelpunkten einen sicheren Aufschluss zu gewinnen, wählen wir zunächst auf dem Kreise beliebig einen Punkt S und ziehen die Linien S$\mathbf{A}$, S$\mathbf{B}$, S$\mathbf{C}$, S$\mathbf{A}_1$, S$\mathbf{B}_1$, S$\mathbf{C}_1$, welche den Kreis zum zweitenmal in A, B, C, A_1, B_1, C_1 schneiden mögen. Wir haben dann die beiden gegebenen Punktreihen „auf den Kreis projiziert".

Bezeichnen wir ferner die eben genannten sechs Strahlen der Reihe nach mit a, b, c, a_1, b_1, c_1, so liegen in S projektive Büschel vereinigt, also

(1) Büschel (a, b, c . . .) $\overline{\wedge}$ Büschel (a_1, b_1, c_1 . . .).

Projizieren wir nun die Punkte A, B, C u. s. w. aus A_1, sowie die Punkte A_1, B_1, C_1 u. s. w. aus A je durch einen Strahlenbüschel, so ergeben sich nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz folgende Projektivitäten:

(2) Büschel $A(A_1, B_1, C_1 \ldots) \barwedge$ Büschel $S(a_1, b_1, c_1 \ldots)$,

(3) Büschel A_1 $(A, B, C \ldots) \barwedge$ Büschel $S(a, b, c \ldots)$*).

Da aber nach (1) auch die Büschel rechts projektiv sind, so folgt

(4) Büschel $A(A_1, B_1, C_1 \ldots) \barwedge$ Büschel A_1 $(A, B, C \ldots)$.

Diese Büschel sind aber nicht bloss projektiv, sondern auch perspektiv nach Satz 13, da in der Verbindungslinie AA_1 der Büschelmittelpunkt entsprechende Strahlen der beiden Büschel sich decken; folglich liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden p.

Schneiden sich folglich AB_1 und A_1B in $\mathfrak{C}$, ferner AC_1 und A_1C in $\mathfrak{B}$, so ist die Verbindungslinie $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Achse p der Perspektivität.

Ist also $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Punkt auf p, so liefern $A\mathfrak{E}$ und $A_1\mathfrak{E}$ die zweiten Schnittpunkte D_1 und D mit dem Kreise und D und D_1 geben aus S auf g projiziert zwei entsprechende Punkte $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}_1$ der projektiven Punktreihen.

Nun möge die Achse p den Kreis in M und N schneiden. Führt man dann für diese Punkte von p die gleiche Betrachtung durch wie gerade für den beliebigen Punkt $\mathfrak{E}$, so ergiebt sich aus der Figur, dass

---

*) Die Bezeichnung ist leicht verständlich: Büschel $A(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ bedeutet den Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt A, dessen Strahlen nach A_1, B_1, C_1, ... laufen.

M und N aus S auf g projiziert die Doppelpunkte **M** und **N** der projektiven Punktreihen liefern.

Schneidet p den Kreis nicht, so giebt es keine Doppelpunkte; würde p den Kreis berühren, so wäre nur ein Doppelpunkt vorhanden.

Zusatz. Statt der Punkte A und A_1 hätte man ebensogut auch B und B_1 oder C und C_1 u. s. w. als Mittelpunkte der perspektiven Büschel wählen können. Die Punkte M und N, also auch die Gerade p müssen sich dadurch ebenso ergeben. Es muss demnach auch der Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ von BC_1 und B_1C, der Schnittpunkt $\mathfrak{F}$ von BD_1 und B_1D u. s. w. auf p liegen. Die Achse p enthält demnach alle Schnittpunkte wie

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1 B \end{matrix}\right\}\mathfrak{C} \qquad \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1 C \end{matrix}\right\}\mathfrak{B} \qquad \left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1 D \end{matrix}\right\}\mathfrak{E}$$

$$\left.\begin{matrix} B\,C_1 \\ B_1 C \end{matrix}\right\}\mathfrak{A} \qquad \left.\begin{matrix} B\,D_1 \\ B_1 D \end{matrix}\right\}\mathfrak{F} \qquad \left.\begin{matrix} C\,D_1 \\ C_1 D \end{matrix}\right\}\mathfrak{G}$$

u. s. w.

Diese Konstruktion der Doppelelemente ersann der deutsche Geometer Jacob Steiner. [Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833.]

Ein weiterer Satz über die Doppelelemente.

45. Sind M, N die Doppelpunkte, A, A_1, B, B_1 zwei Paare entsprechender Punkte zweier projektiven Punktreihen, so hat man

$$(MNAB) = (M_1 N_1 A_1 B_1).$$

Führt man die Ausdrücke für die Doppelverhältnisse ein, so ergiebt eine leichte Umformung die andere Relation

$$(\mathrm{MNAA_1}) = (\mathrm{MNBB_1}).$$

Der Wert dieses Doppelverhältnisses muss also für alle Paare entsprechender Punkte der gleiche sein, etwa $= k =$ konst. Damit ist für reelle Doppelelemente bewiesen der allgemein gültige

Satz 18. „Je zwei entsprechende Elemente einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger bilden mit den beiden Doppelelementen ein konstantes Doppelverhältnis."

Bestimmung der Doppelelemente durch die Rechnung.

46. Bemerken wir noch kurz, wie die Rechnung die Doppelelemente liefert. Wird eine und dieselbe Gerade als X- und X_1-Achse genommen, so ist eine projektive Beziehung auf derselben nach 38. gegeben durch eine Gleichung

$$\alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0.$$

Ein Doppelpunkt hat die Eigenschaft, dass für ihn $x = x_1$, vorausgesetzt, dass wir die x und x_1 vom gleichen Anfangspunkt aus und in derselben Richtung positiv rechnen. Setzen wir also in der Relation $x = x_1$, so kommt die quadratische Gleichung

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma) x + \delta = 0,$$

deren beide Wurzeln die Abscissen der Doppelpunkte liefern. Sind die Wurzeln der Gleichung imaginär, so giebt es keine Doppelpunkte; wir sagen: die Doppelpunkte sind imaginär.

Alle Aufgaben, deren Lösung schliesslich auf eine Gleichung 2. Grades führt, bezeichnen wir als Aufgaben 2. Grades. Ihre geometrische Erledigung finden diese immer durch die soeben bewiesene Steiner'sche Konstruktion, bei der ein Kreis und ausserdem das Lineal zu benutzen ist. Führt eine Aufgabe analytisch zu einer linearen Gleichung, also zu einer Gleichung 1. Grades, so wird sie als Aufgabe 1. Grades bezeichnet. Konstruktiv muss sie sich dann behandeln lassen lediglich unter Benutzung des Lineals. Bei einer solchen linearen Aufgabe kommen also bloss die Operationen vor: den Schnittpunkt zweier Geraden zu zeichnen und durch zwei Punkte eine Gerade zu legen. Bei der Steiner'schen Konstruktion dagegen hatte man die Schnittpunkte einer Geraden (p) mit einem Kreis zu zeichnen.

Aufgabe 15. Eine Gerade g soll projektiv so auf sich bezogen werden, dass den zwei gegebenen Punkten A und B zwei andere A_1 und B_1 entsprechen und dass der weiter gegebene Punkt M einer der Doppelpunkte der projektiven Beziehung wird.

1. Lösung. Bezeichnet man M auch noch als M_1, so hat man drei Paare entsprechender Punkte und kann unter Zuhilfenahme eines Kreises nach 44. den noch fehlenden Doppelpunkt finden. Man führe die Konstruktion wirklich durch.

2. Lösung. Ist von den beiden Doppelelementen eines gegeben, so hängt die Aufgabe, das fehlende zu bestimmen, nur noch von einer linearen Gleichung ab; sie ist also eine Aufgabe 1. Grades und muss sich folglich auch ohne Benutzung eines Kreises, lediglich mit dem Lineal lösen lassen. In der That ziehen wir durch M irgend eine Gerade und wählen auf

ihr die Punkte S und S_1 willkürlich. Aus S projizieren wir die Punkte A, B, M, aus S_1 die Punkte A_1, B_1, M_1. Dann sind diese beiden Büschel projektiv, sofern entsprechende Strahlen derselben je entsprechende Punkte der Punktreihen projizieren; die Büschel sind aber überdies wieder perspektiv, weil im Verbindungsstrahl SS_1 entsprechende Strahlen vereinigt liegen. Sie liefern eine Perspektivitätsachse p, die bestimmt ist durch die Punkte $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, wobei der erstere der Schnittpunkt von SA und S_1A_1, während in $\mathbf{B}$ sich SB und S_1B_1 begegnen. Der Schnittpunkt von p mit g ist dann aber der zweite Doppelpunkt N der projektiven Beziehung.

Aufgabe 16. Von einer projektiven Beziehung auf einer Geraden sind gegeben ein Paar entsprechender Punkte A, A_1, sowie die beiden Doppelpunkte M und N. Weitere entsprechende Punkte zu konstruieren.

Aufgabe 17. In einem Strahlenbüschel sind gegeben die Strahlenpaare a, a_1, b, b_1 und der Strahl m. Man beziehe den Büschel projektiv so auf sich, dass m ein Doppelstrahl und a, a_1 und b, b_1 zwei Paare entsprechender Strahlen.

Lösung. Ziehe durch einen Punkt von m zwei Gerade g und g_1 und bringe sie bezüglich zum Schnitt mit den Büscheln.

Aufgabe 18. Von einer projektiven Beziehung eines Strahlenbüschels sind gegeben ein Paar entsprechender Strahlen a, a_1, sowie die beiden Doppelstrahlen m und n. Weitere entsprechende Strahlen zu konstruieren.

Aufgabe 19. Gegeben sind drei Gerade g_1, g_2, g_3, und drei Punkte P_1, P_2, P_3; man zeichne ein Dreieck A_1, A_2, A_3, dessen Ecken in dieser Reihenfolge bezüglich auf den drei Geraden liegen und dessen Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ bezw. durch die Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgehen.

Lösung. Wählen wir auf g_1 einen Punkt A_1 ganz beliebig, ziehen wir die Verbindungslinie $A_1 P_1$, welche g_2 in A_2 treffen möge. Die Verbindungslinie $A_2 P_2$ schneide g_3 in A_3 und die Verbindungslinie $A_3 P_3$ endlich liefere auf g_1 einen Schnittpunkt A_1'. Lassen wir A_1 die Punktreihe g_1 durchlaufen, so beschreibt der Punkt A_1' eine dazu projektive Punktreihe. Wir bestimmen diese projektive Beziehung, indem wir zu drei Lagen des einen Punktes die entsprechenden des andern zeichnen. Sind dann die Doppelpunkte dieser projektiven Punktreihe reell vorhanden, so liefert jeder derselben ein Dreieck von der verlangten Eigenschaft. Verallgemeinerung für n-Ecke!

§ 17. Die involutorische Beziehung.

Herleitung der involutorischen Beziehung.

47. Betrachten wir noch einen speziellen, aber besonders wichtigen Fall der projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger. Nehmen wir eine projektiv auf sich bezogene Punktreihe, so wird einem beliebigen Punkte A ein Punkt A_1 entsprechen. Bezeichnen wir den gleichen Punkt A mit B_1, indem wir ihn als einen Punkt der andern Punktreihe auffassen, so wird ihm ein Punkt B zugewiesen sein, der von A_1 verschieden ist. Es frägt sich nun: Kann B mit A_1 zusammenfallen und kann dies noch für weitere Punkte einer projektiven Beziehung eintreten? Darauf giebt Antwort folgender

Satz 19. „Wenn in einer projektiven Beziehung auf einer Punktreihe einmal die beiden einem Punkte entsprechenden Punkte zusammenfallen, so fallen sie für jeden Punkt zusammen.“

Wählen wir, um dies nachzuweisen, A und A_1 sowie C und C_1 ganz beliebig (Fig. 26), B_1 ferner falle

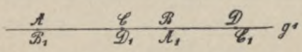

Fig. 26.

mit A und B mit A_1 zusammen, dann ist durch die drei Paare AB, CA_1, B_1C_1 sicher eine projektive Beziehung bestimmt. Bezeichnen wir jetzt den Punkt C mit D_1, so entspricht ihm ein Punkt D derart, dass

$$
\begin{aligned}
(ABCD) &= (A_1B_1C_1D_1) \\
&= (BAC_1C) \\
\text{oder nach 24.} \qquad &= (ABCC_1).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt aber dann, dass D mit C_1 zusammenfällt. Ganz in der gleichen Weise zeigt man, dass einem beliebigen Punkte E, F_1 ein Punkt E_1, F entspricht. Es ist also nicht nötig, die beiden Punktreihen in der Bezeichnung zu unterscheiden, jedem Punkte des Trägers ist ein bestimmter Punkt zugewiesen. Es zerfällt der ganze Träger in Punktpaare und wir wollen die Punkte eines Paares als entsprechende oder zugeordnete Punkte bezeichnen. Die analogen Betrachtungen gelten für den Strahlen- und Ebenenbüschel. Wir nennen eine solche projektive Beziehung, in der jedem Element ein anderes doppelt entspricht, eine „involutorische“ oder auch eine „Involution“ von Punkten bezw. Strahlen oder Ebenen. Bezeichnen wir in Figur 26 den Punkt AB_1 mit **A**, den Punkt A_1 B mit **A**′, C und C_1 mit **B** und **B**′, so zeigt die eben durchgeführte Betrachtung, dass die Involution auf der Geraden durch die beiden Paare von zugeordneten Punkten **A**, **A**′ und **B**, **B**′ gerade bestimmt ist oder allgemein

Satz 20. „Eine Involution ist durch zwei Paare von zugeordneten Elementen bestimmt.“

Die Doppelelemente einer Involution.

48. Die Doppelelemente der projektiven Beziehung finden wir natürlich auch wieder bei der Involution. Jedes Doppelelement stellt ein Paar von Elementen vor, die einander unendlich nahe gerückt sind. Sind die Doppelelemente vorhanden, so heisst die Involution wohl auch eine „hyperbolische“, bei nicht vorhandenen Doppelelementen dagegen eine „elliptische“ und endlich eine „parabolische“, wenn die Doppelelemente sich in ein Element vereinigt haben.

Sind M, N die Doppelpunkte einer Punktinvolution, während A, A′, B, B′ u. s. w. Paare von zugeordneten Punkten, so folgt aus Satz 18, der hier ja auch gilt

$$(\mathrm{M\,N\,A\,A'}) = (\mathrm{M\,N\,A'A}) = \text{konst.} = \mathrm{k}.$$

Es ist aber nach 23., Gleichung (3)

$$(\mathrm{M\,N\,A'A}) = \frac{1}{(\mathrm{M\,N\,A\,A'})},$$

also

$$(\mathrm{M\,N\,A\,A'})^2 = 1.$$

Als Wert des Doppelverhältnisses (M N A A′) ergiebt sich daraus — 1, da der Wert + 1 nicht zulässig (28); es ist also k = — 1 und A und A′ liegen harmonisch zu M und N, ebenso B und B′ u. s. w. Allgemein kann man beweisen

Satz 21. „Eine Involution besteht aus all den Paaren von Elementen, welche die zwei Doppelelemente, (die reell oder imaginär sein können) harmonisch trennen.“

Giebt man sich also z. B. irgend zwei Gerade m und n, die sich in S schneiden, so kann man zu jedem beliebigen Strahle a des Büschels S einen Strahl a′ konstruieren, derart, dass a und a′ das Strahlenpaar m n harmonisch trennen. Alle diese Strahlenpaare a, a′ bilden eine Strahleninvolution.

Irgend eine nicht durch S gehende Gerade wird von derselben in einer Punktinvolution geschnitten, wie überhaupt aus involutorischen Gebilden durch Projizieren und Schneiden wiederum solche Gebilde hervorgehen.

Lässt man m und n oder allgemein die Doppelelemente einer Involution zusammenfallen, so muss von den beiden Elementen eines jeden Paares der Involution eines sich stets mit diesem Doppelelement vereinigen. In einer solchen parabolischen (uneigentlichen) Involution entspricht daher dem Doppelelement jedes Element des Trägers.

§ 18. Die Punktinvolution.

Die verschiedenen Typen.

49. Hat man eine Punktinvolution auf einer Geraden, so kann man auch zum unendlich fernen Punkt O′ ihres Trägers den entsprechenden Punkt O sich verschaffen. Dieser Punkt O heisst der Mittelpunkt der Involution. Weitere Paare entsprechender Punkte seien A, A′, B, B′ u. s. w. Dann gilt die Relation

$$(ABOO') = (A'B'O'O).$$

da ja die involutorische Beziehung nur ein spezieller Fall der projektiven. Rechnet man die Ausdrücke aus und beachtet, dass O′ im Unendlichen liegt, so ergiebt sich

$$AO \cdot A'O = BO \cdot B'O .$$

Demnach muss dies Produkt, gebildet für irgend zwei entsprechende Punkte, immer den gleichen Wert haben. Bezeichnen wir denselben mit c, so sind folgende Fälle möglich:

1) c positiv, also etwa $c = d^2$. Dann müssen die Strecken AO und A′O, BO und B′O u. s. w. stets gleichgerichtet sein, da ihr Produkt positiv.*) Es liegen also entsprechende Punkte A, A′ u. s. w. immer auf der gleichen Seite von O, beide rechts oder beide links vom Mittelpunkt O (Fig. 27a). In der Entfer-

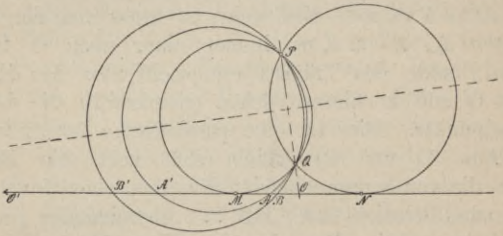

Fig. 27 a.

nung d vom Mittelpunkt finden wir rechts und links die Doppelpunkte dieser hyperbolischen Involution.

2) c negativ, also etwa $c = -d^2$. Dann müssen entsprechende Punkte wie A, A′ u. s. w. stets auf verschiedenen Seiten von O liegen, der eine rechts,

*) Wir wählen auf dem Träger der Involution eine Richtung als die positive.

der andere links vom Mittelpunkt (Fig. 27b). Die Involution besitzt keine Doppelpunkte, ist elliptisch.

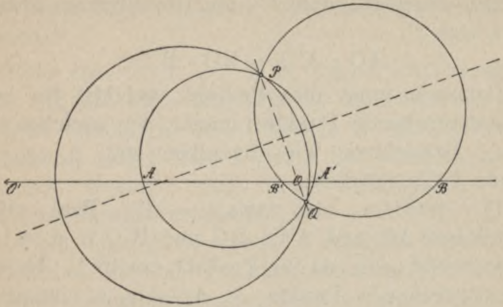

Fig. 27 b.

3) c = 0 liefert den Übergangsfall. Soll das Produkt AO · A′O stets Null sein, so muss von den zwei Punkten A, A′ u. s. w. immer einer nach O fallen. Jedem Punkte des Trägers entspricht also der Mittelpunkt O und in diesen rücken gleichzeitig die beiden Doppelpunkte. Dies ist eine parabolische Involution.

Aus 1) und 2) ergiebt sich noch die Regel: Wenn die von entsprechenden Punkten einer Involution begrenzten Strecken AA′, BB′ . . . übereinander greifen, so existieren keine Doppelpunkte (Fig. 27b); wenn aber eines der Paare AA′ und BB′ ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt, so sind reelle Doppelpunkte vorhanden (Fig. 27a).

Geometrische Erzeugung einer Punktinvolution.

50. Sind zwei Punktpaare A, A′, B, B′ einer Punktinvolution gegeben (Fig. 27a oder 27b), so legen wir durch einen beliebigen Punkt P und durch A und A′,

sowie durch P, B und B′ je einen Kreis. Diese beiden Kreise schneiden sich zum zweitenmale in einem Punkte Q. Die Verbindungslinie PQ trifft den Träger der Involution in einem Punkte O. Alle Kreise, die durch P und Q gehen, bilden einen „Kreisbüschel". Schneidet irgend einer dieser Kreise den Träger in den Punkten C und C′, so ergiebt sich nach planimetrischen Sätzen

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'.$$

Also bilden die Punktpaare, in denen der Kreisbüschel den Träger g schneidet, die gegebene Punkt-Involution. O ist der Mittelpunkt derselben. Trennen sich die Punktpaare A, A′, B, B′ nicht wie in Figur 27a, so giebt es in dem Büschel auch zwei Kreise, welche den Träger berühren. Die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte M, N der Involution. In der Figur 27b, wo die Punktpaare A, A′, B, B′ sich trennen, existieren keine Doppelpunkte. Umgekehrt wird jeder Kreisbüschel von irgend einer Geraden seiner Ebene in einer Punktinvolution geschnitten, die jedem der drei genannten Typen angehören kann. Legt man die Gerade durch P oder Q, so erhält man auf ihr als Schnitt mit dem Kreisbüschel eine parabolische Involution.

§ 19. Die Strahleninvolution.

Das rechtwinkelige Strahlenpaar einer Strahleninvolution.

51. War für die metrische Behandlung der Punktinvolution der Mittelpunkt derselben von Bedeutung, so können wir bei einer Strahleninvolution immer ein Strahlenpaar finden, dessen beide Elemente aufeinander senkrecht stehen.

In der That ist im Punkte S eine Involution gegeben durch die Strahlenpaare a, a′ und b, b′, so schneiden wir mit einer beliebigen Geraden g diese Strahleninvolution in einer Punktinvolution A, A′, B, B′

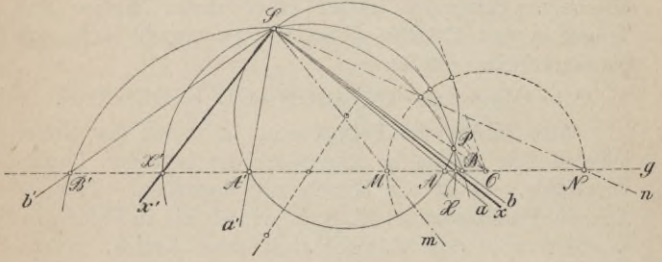

Fig. 28a.

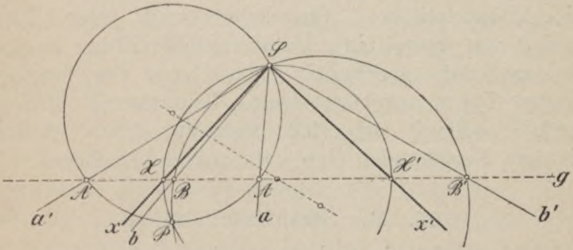

Fig. 28b.

(Fig. 28a und 28b). Durch die Punkte S, A, A′ sowie durch S, B, B′ zeichnen wir bezw. Kreise, die sich zum zweitenmal in P begegnen. Dann können wir die Punktinvolution auf g auch vermittels des Kreisbüschels durch S und P erzeugen. In diesem findet sich aber stets auch ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf g hat. Begegnet dieser der Geraden g in X und X', so werden diese beiden Punkte aus S durch ein Strahlenpaar x, x' der Strahleninvolution projiziert, das einen rechten Winkel einschliesst.

In Figur 28a sind die Doppelpunkte M und N der Punktinvolution auf g konstruiert, indem nach 50 vom Schnittpunkt O aus an einen der Kreise des Büschels die Tangente gezeichnet wurde. Nach ihnen laufen die Doppelstrahlen m und n der Strahleninvolution; die Strahlen x, x' halbieren nach Aufgabe 6 die Winkel von m und n. Es gilt ferner auch (vergl. Aufgabe 10) die Relation

$$\operatorname{tg}(xa) \cdot \operatorname{tg}(xa') = \operatorname{tg}(xb) \cdot \operatorname{tg}(xb') \ldots = \operatorname{tg}^2(xm) = \operatorname{tg}^2(xn) = \text{konst.}$$

Die Rechtwinkelinvolution.

52. Errichtet man zu den Strahlen a, b, c eines Büschels in dessen Mittelpunkte S die Senkrechten a', b', c' . . . (Fig. 29), so sind die Büschel a, b, c . . . und a', b', c' . . . projektiv. Sie stehen aber weiter in involutorischer Beziehung. Denn dem Strahle a', genommen als Strahl d, entspricht wieder a als Element d'. Diese Paare rechter Winkel bilden eine Strahleninvolution, die man als rechtwinkelige Strahleninvolution, als „circulare“ oder kurz als „Rechtwinkelinvolution“ bezeichnet. Selbstverständlich hat sie keine reellen Doppelstrahlen.

Zwei Paare rechtwinkeliger Strahlen a, a' und b, b' bestimmen jedenfalls eine Involution. Schneiden wir (Fig. 29) sie durch eine Gerade g in der Punktinvolution A, A′, B, B′ und legen abermals durch S, A, A′, sowie durch S, B, B′ je einen Kreis. Der zweite Schnittpunkt P dieser Kreise liegt dann symmetrisch zu S in Bezug auf g und alle Kreise des da-

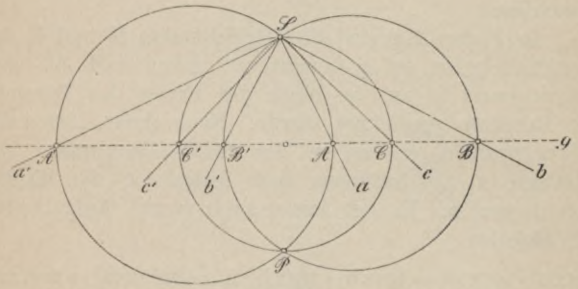

Fig. 29.

durch bestimmten Kreisbüschels haben ihre Mittelpunkte auf dieser Geraden. Folglich wird irgend ein Strahl c der Involution auf dem ihm zugeordneten c′ senkrecht stehen. Es folgt daher

Satz 22. „Eine Strahleninvolution besitzt stets ein Strahlenpaar, dessen Strahlen aufeinander senkrecht stehen. Treten aber in einer Involution zwei Paare zu einander rechtwinkeliger Strahlen auf, so steht jeder Strahl auf dem ihm entsprechenden senkrecht, die Involution ist eine Rechtwinkelinvolution.

V. Abschnitt.

Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe.

§ 20. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Strahlenbüschel.

Die Erzeugung neuer Gebilde.

53. Im Bisherigen haben wir uns damit beschäftigt, die einförmigen Grundgebilde projektiv aufeinander oder auf sich selbst zu beziehen und die Eigenschaften solcher Beziehungen zu untersuchen. Dies ist aber nicht unser Endzweck; vielmehr wollen wir jetzt projektive Grundgebilde erster Stufe dazu benutzen, um aus ihnen neue geometrische Gebilde abzuleiten. In zwei projektiven Grundgebilden sind ja die Elemente einzeln einander zugeordnet. Wenn nun zwei solche einander entsprechende Elemente vermöge der Operationen des Projizierens oder Schneidens ein neues Element festlegen, so bestimmen die beiden projektiven Grundgebilde — vorausgesetzt, dass man alle die unendlich vielen entsprechenden Elemente zusammen nimmt — eine unendliche Anzahl neuer Elemente, also ein neues, geometrisches Gebilde, das wir als „Erzeugnis“ der projektiven Grundgebilde bezeichnen.

Hat man z. B. zwei projektive Strahlenbüschel, die in einer Ebene gelegen sind, so kann man jeden

Strahl des einen Büschels mit dem ihm entsprechenden des andern Büschels zum Schnitt bringen und man erhält so zunächst lauter einzelne Punkte, die aber um so mehr einen ununterbrochenen Linienzug, also eine „Kurve" bilden werden, je mehr man die Strahlen in den Büscheln verdichtet.

Zwei beliebig im Raume gelegene, projektive Strahlenbüschel dagegen würden zunächst kein neues Gebilde „erzeugen", weil zwei im Raum gelegene Gerade kein neues Element festlegen.

Hat man aber zwei projektive Punktreihen, so kann man jeden Punkt mit seinem entsprechenden durch eine Gerade verbinden und erhält so als Erzeugnis ein System von unendlich vielen Geraden. Dies ist möglich, gleichgültig, ob die Punktreihen in einer Ebene liegen oder beliebig im Raume. Das Erzeugnis ist freilich in beiden Fällen ein ganz verschiedenes. Denn im ersten Falle liegen alle diese Verbindungsgeraden in der gleichen Ebene, im zweiten sind sie im Raume angeordnet. Auf diese Weise kann man neue geometrische Gebilde erzeugen und dies sind gerade die einfachsten und wichtigsten der Geometrie und die nämlichen, zu denen man auch durch die anderen mathematischen Untersuchungsmethoden geführt wird. Wir betrachten zunächst das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel in der gleichen Ebene. Dies ist, wie bereits erwähnt eine Kurve. Daher müssen wir einige, auf diesen Gegenstand sich beziehende Bemerkungen vorausschicken.

Ordnung und Klasse einer Kurve.

54. Unter einer „ebenen Kurve" oder kurz einer „Kurve" wollen wir einen ununterbrochenen Linienzug

verstehen, dessen einzelne, alle in einer Ebene befindliche, Punkte sich nach einem mathematischen Gesetze bestimmen.*) In der rechnenden (analytischen) Geometrie teilt man die Kurven ein nach der Natur der Gleichung, durch welche sie, etwa in rechtwinkeligen Koordinaten x, y, dargestellt werden. Diese Gleichung kann durch eine „transcendente" Funktion der Variabeln gegeben werden — „transcendente Kurven" oder durch eine „algebraische" Funktion — „algebraische" Kurven. Die Aufgabe, die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einer Kurve zu bestimmen, führt dann auf eine Gleichung, deren Wurzeln, sofern sie reell sind, die geometrisch in die Erscheinung tretenden Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve liefern, etwaigen imaginären Wurzeln dagegen entsprecben keine geometrisch sichtbaren Schnittpunkte. Ist die Kurvengleichung transcendent, so erhält man auf einer beliebigen Geraden im allgemeinen unendlich viele Schnittpunkte mit der Kurve, da auch die Gleichung für die Schnittpunkte dann transcendent sein wird. Liegt eine algebraische Kurvengleichung vor vom Grade n, (bei der also die Summe der Exponenten von x und y in jedem Term n nicht übersteigt), so ist auch die Gleichung zur Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden algebraisch und vom n^{ten} Grad. Diese Zahl n nennen wir die „Ordnung" der Kurve ohne Rücksicht darauf, ob die Wurzeln der letzteren Gleichung reell oder (paarweise) komplex sind. Natürlich kann dann auch die Zahl der reellen Schnitt-

*) Auf die genaueren, zum Teil schwierigen Definitionen, wie sie nur die Analysis zu liefern im stande ist, können wir hier nicht eingehen.

punkte einer beliebigen Geraden mit einer solchen Kurve n^{ter} Ordnung nie grösser, sondern höchstens $= n$ sein. Doch braucht die Zahl von n reellen Schnittpunkten mit einer Geraden nicht erreicht zu werden. Es kann vielmehr vorkommen, dass, n z. B. als gerade vorausgesetzt, eine beliebige Gerade immer nur $n - 2$ oder $n - 4$ u. s. w. reelle Schnittpunkte mit der Kurve n^{ter} Ordnung liefert.

Um zu dem Begriff der Tangente einer Kurve zu gelangen, sei P ein Punkt einer Kurve, P_1 ein anderer Punkt derselben. Der Punkt P_1 rückt auf der Kurve gegen P hin. Dann kann man immer die Verbindungslinie PP_1 zeichnen. Je mehr sich nun P_1 dem Punkte P nähert, um so mehr nimmt die Verbindungslinie PP_1 eine bestimmte Grenzlage, die der Tangente in P, an, die erreicht wird, wenn P_1 mit P zusammenfällt. Dies beweist die Differentialrechnung. Eine Kurve bestimmt also auch eine unendliche Anzahl von geraden Linien, ihre Tangenten. Jede Tangente berührt im „Berührungspunkt“ die Kurve.

Ist umgekehrt eine Reihe von unendlich vielen Geraden gegeben, die ununterbrochen (stetig) aufeinander folgen, so ist auch dadurch eine Kurve bestimmt, die von diesen Geraden als Tangenten „umhüllt“ wird (Fig. 30). Halten wir eine der Geraden, etwa t fest, und wählen eine zweite, etwa t_1, näher und näher an t, so nähert sich der Schnittpunkt von t und t_1 mehr und mehr einem bestimmten Punkt auf t, den er erreicht, wenn t_1 mit t zusammenfällt. Dieser Punkt ist der Berührungspunkt T von t mit der umhüllten Kurve. Von den durch T an die Kurve gehenden Tangenten haben sich also zwei in der Tangente t vereinigt.

Die Aufgabe, die Tangenten einer algebraischen Kurve zu bestimmen, die durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der Kurve gehen, führt rechnerisch auf

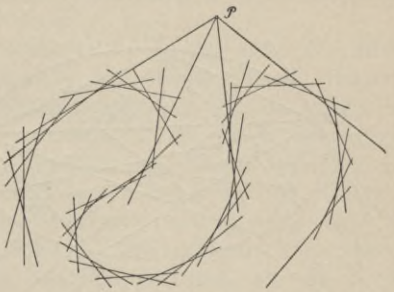

Fig. 30.

eine gewisse Gleichung. Den Grad dieser Gleichung bezeichnet man als die „Klasse" der Kurve und zwar in rein analytischem Sinne, also ohne Rücksicht auf die Realität dieser Tangenten. Diese Zahl ist dann auch wieder eine obere Grenze für die Anzahl der reellen Tangenten, die durch einen Punkt an eine Kurve gehen können. An eine Kurve ν^{ter} Klasse können also auch von keinem Punkte aus mehr als ν reelle Tangenten gezogen werden.

Die Kurve 2. Ordnung.

55. Betrachten wir jezt das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel S und S_1 in der gleichen Ebene. Die projektive Beziehung derselben sei festgelegt durch die drei Paare entsprechender Strahlen a, a_1, b, b_1, c, c_1, welche sich bezüglich in **A**, **B**, **C** schneiden

(Fig. 31).*) Um weitere Punkte der von den Büscheln erzeugten Kurve zu erhalten, konstruieren wir noch andere entsprechende Strahlen der beiden Büschel nach

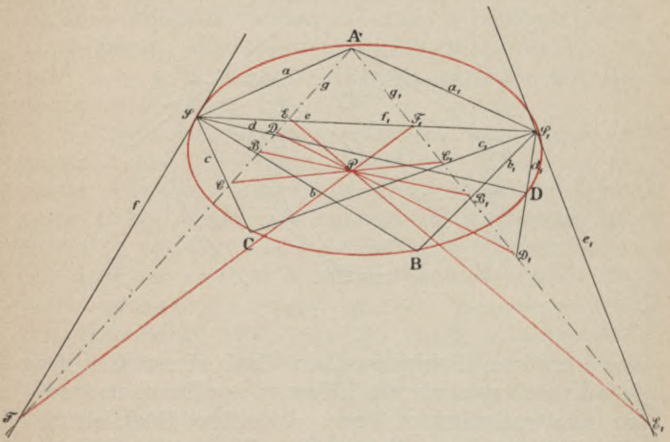

Fig. 31.

der in 33. (Fig. 20) gegebenen Methode. Wir wählen zwei Gerade g und g_1 beliebig durch **A**, bringen g mit a, b, c in A, B, C, g_1 mit a_1, b_1, c_1 in A_1, B_1, C_1 zum Schnitt; dann liefern BB_1 und CC_1 in ihrem Schnittpunkt das Centrum P der Perspektivität für die Punktreihen auf g und g_1.

Zu einem beliebigen Strahl d des Büschels S finden wir dann den entsprechenden d_1 im Büschel S_1 gemäss der Vorschrift, dass der Schnittpunkt D von d und g mit dem Schnittpunkt D_1 von d_1 und g_1 auf

*) Man lege sich, wie immer, die Figur selbst an.

einer Geraden durch P liegen muss. Die Strahlen d und D_1 schneiden sich in einem weiteren Punkt **D** der erzeugten Kurve, die wir kurz mit k^2 bezeichnen wollen und von der wir auf diese Weise beliebig viel Punkte zeichnen können.

Wir behaupten nun, dass auch die Büschelmittelpunkte S und S_1 auf der k^2 liegen. Denn betrachten wir den Verbindungsstrahl SS_1 als einen Strahl des Büschels S, weswegen er mit e bezeichnet werden möge, so entspricht ihm der in der Figur gezeichnete Strahl e_1 und es erscheint S_1 als Schnitt der entsprechenden Strahlen e und e_1, also liegt S_1 auf der erzeugten Kurve. Ebenso kann SS_1 aber auch als Strahl des Büschels S_1, also als ein Strahl f_1 betrachtet werden, wonach ihm dann der in der Figur konstruierte Strahl f entspricht. S ist jetzt Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen f und f_1, mithin ebenfalls ein Punkt von k^2.

Die Kurve k^2 ist ferner von der 2. Ordnung d. h. eine beliebige Gerade l schneidet sie im allgemeinen in zwei Punkten. Um dies zu beweisen, konstruieren wir in einer eigenen, neuen Figur die Schnittpunkte A, B, C von l mit den Strahlen a, b, c und die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 von l mit a_1, b_1, c_1. Denken wir uns die beiden projektiven Büschel S und S_1 mit l geschnitten, so sind die auf l entstehenden Punktreihen A, B, C ... und A_1, B_1, C_1 ... ebenfalls projektiv. Ist M ein Doppelpunkt dieser beiden Punktreihen, so schneiden sich in ihm entsprechende Strahlen SM und S_1M der beiden Büschel, folglich liegt ein solcher Doppelpunkt auf der k^2. Andererseits muss ein Schnittpunkt von l mit k^2 notwendig einen Doppelpunkt der projektiven Punktreihen liefern. Folglich liegen auf der Geraden l soviel Schnittpunkte mit der Kurve k^2 als Doppelpunkte der beiden projektiven Punktreihen vorhanden sind d. h. zwei, die natürlich reell oder nicht vorhanden (imaginär) oder in einem vereinigt sein können. Die Kurve k^2 ist also von der 2. Ordnung. Wir nennen sie wohl auch eine „Punktreihe 2. Ordnung". Die wirkliche Durchführung der Konstruktion der Schnittpunkte auf l folgt später als Aufgabe 20.

Kehren wir nun wieder zu der Figur 31 zurück. Jede durch S gehende Gerade wie z. B. d hat also mit der k^2 ausser S noch einen Punkt gemein und zwar ist dies der Punkt **D**, wo d von dem entsprechenden Strahl d_1 getroffen wird. Betrachten wir nun aber den Strahl f, so wird dieser Strahl von dem entsprechenden Strahl f_1 wieder in S getroffen: es fallen mithin für den Strahl f die beiden Schnittpunkte mit der k^2 nach S, demnach ist f die Tangente in S an die Kurve k^2. Ebenso folgert man, dass der Strahl e_1 die Kurve k^2 in S_1 berührt.

Zusammenfassend gelangen wir zu folgendem

Satz 23. „Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene befindlicher Strahlenbüschel ist eine Kurve 2. Ordnung, welche auch durch die Büschelmittelpunkte hindurchgeht und in diesen diejenigen Strahlen zu Tangenten hat, welche dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte bezüglich entsprechen."

Weitere Sätze über die Kurve 2. Ordnung.

56. Die Punkte S und S_1 nahmen bis jetzt eine ausgezeichnete Stellung ein gegenüber den anderen Punkten der k^2. Trotzdem spielen sie auf dieser Kurve

gar keine besondere Rolle, vielmehr können, wie wir jetzt zeigen wollen, irgend zwei beliebige Punkte von k^2 als Mittelpunkte projektiver Büschel genommen werden, welche die Kurve k^2 erzeugen.

Es seien wieder (Fig. 32) die beiden projektiven Strahlenbüschel S und S_1 gegeben durch die Strahlen-

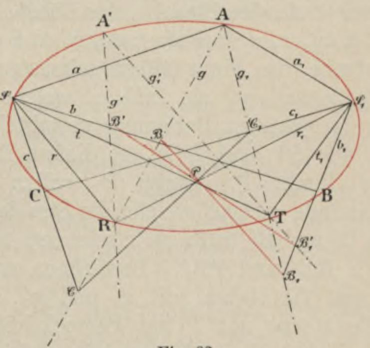

Fig. 32.

paare a, a_1, b, b_1, c, c_1, welche die Punkte **A**, **B**, **C** liefern, ferner seien durch **A** die Hilfsgeraden g und g_1 gezeichnet und das Centrum P der perspektiven Punktreihen auf g und g_1 konstruiert. Wenn wir dann SP ziehen, so ist der Schnittpunkt **T** von SP mit g_1 ein Punkt der erzeugten Kurve k^2 und ebenso der Punkt **R**, in welchem g von S_1P getroffen wird. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergiebt sich direkt durch die Bemerkung, dass S**T** und S_1**T**, ebenso S**R** und S_1**R** gemäss unserer Konstruktion entsprechende Strahlen t, t_1 bezw. r, r_1 sind. — Man erhält dann die nämliche projektive Beziehung der Büschel S und S_1, also auch die gleiche Kurve k^2, wenn man statt von den Strahlenpaaren a, a_1, b, b_1, c, c_1 ausgeht von den drei Strahlenpaaren b, b_1, r, r_1, t, t_1.

Wir denken uns nun, wir hätten die Kurve k^2, ausgehend von den projektiven Büscheln S und S_1, konstruiert. Darauf greifen wir auf ihr drei Punkte beliebig heraus, die wir $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{R}$ nennen, während die nach ihnen laufenden Strahlen der Büschel S und S_1 bezw. b, b_1, t, t_1, r, r_1 heissen mögen, und stellen uns jetzt die Aufgabe, die Figur 32 zu rekonstruieren, also zwei Gerade g und g_1 zu finden, welche die Konstruktion der projektiven Beziehung vermitteln.

Ziehen wir $S\mathbf{T}$ und $S_1\mathbf{R}$, so liefert ihr Schnittpunkt einen Punkt P. Durch P wollen wir jetzt irgend eine Gerade ziehen, welche die Strahlen b und b_1 bezüglich in B' und B_1' trifft. Wir zeichnen den Schnittpunkt $\mathbf{A}'$ von $\mathbf{R}B'$ und $\mathbf{T}B_1'$. Bezeichnen wir die Geraden $\mathbf{RA}'$ und $\mathbf{TA}'$ bezw. mit g' und g_1', so können wir unter Benutzung von P als Perspektivitätscentrum die Büschel S und S_1 jetzt projektiv aufeinander beziehen und diese projektive Beziehung muss notwendig die gleiche sein, wie die ursprünglich gegebene, da sie in drei Paaren entsprechender Strahlen b, b_1, t, t_1, r, r_1 mit ihr übereinstimmt. Dann schneiden sich aber in $\mathbf{A}'$ entsprechende Strahlen der gegebenen projektiven Büschel d. h $\mathbf{A}'$ liegt auch auf der Kurve k^2.

Nun war aber die Gerade durch P, welche B' und B_1' auf b und b_1 ausschnitt, noch ganz beliebig. Lassen wir sie den Büschel P durchlaufen, so beschreiben B' und B_1' auf b und b_1 zu einander perspektive Punktreihen. Die Strahlen $\mathbf{R}B'$ und $\mathbf{T}B_1'$, welche diese Punktreihen je aus $\mathbf{R}$ und $\mathbf{T}$ projizieren, werden also projektive Strahlenbüschel durchlaufen und entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden sich immer in Punkten **A′** der Kurve k^2. Folglich werden die Punkte **A′** aus **R** und **T** durch projektive Büschel projiziert.

Die Rechnung zeigt nun ferner, dass die durch projektive Strahlenbüschel erzeugte Kurve die allgemeinste Kurve 2. Ordnung ist. Wir haben also den

Satz 24. „Die Punkte einer Kurve 2. Ordnung werden aus zweien beliebigen ihrer Punkte durch projektive Strahlenbüschel projiziert.“

Zusatz 1. Da wir in den Büschelmittelpunkten S und S_1 nach 55. die Tangenten an die Kurve 2. Ordnung konstruieren konnten, so ist es uns jetzt auch möglich, in einem beliebigen Punkt der Kurve die Tangente zu zeichnen, in dem wir den Mittelpunkt des einen erzeugenden Büschels in diesen Punkt verlegen.

Zusatz 2. Der Kreis ist auch eine Kurve 2. Ordnung und besitzt die in Satz 24 zum Ausdruck gebrachte Eigenschaft (43), die wir übrigens bei der Steiner’schen Konstruktion bereits benutzten (44). Da aber diese Konstruktion bloss diese Eigenschaft voraussetzte, so könnten wir dazu statt des Kreises auch eine beliebige Kurve 2. Ordnung benutzen.

Bestimmung einer Kurve 2. Ordnung.

57. Aus der Erzeugung der Kurve 2. Ordnung durch projektive Büschel, folgt auch leicht, dass es eine und nur eine solche Kurve giebt, welche fünf beliebig in einer Ebene gelegene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 enthält. Denn wählen wir z. B. die Punkte 1 und 2 als Büschelmittelpunkte, so müssen den Strahlen 13,

14, 15 der Reihe nach entsprechen die Strahlen 23, 24, 25, wodurch die projektive Beziehung der Büschel gerade festgelegt ist. Die Büschel 1 und 2 erzeugen dann die durch die fünf Punkte gehende Kurve 2. Ordnung. Es kann keine zweite solche Kurve geben. Denn auch eine solche zweite Kurve würde aus 1 und 2 durch projektive Büschel projiziert und diese projektive Beziehung muss mit der eben bestimmten notwendig zusammenfallen, da sie drei Paare entsprechender Strahlen mit ihr gemein hat. Also folgt

Satz 25. „Durch fünf beliebige Punkte einer Ebene geht eine und stets eine Kurve 2. Ordnung.“

Würden von den fünf gegebenen Punkten drei, etwa die Punkte 3, 4, 5 in einer Geraden p liegen, so wären die Strahlenbüschel aus 1 und 2 perspektiv und die Gerade p wäre die Achse der Perspektivität. Das Erzeugnis dieser perspektiven Strahlenbüschel 1 und 2 bestände zunächst in der Geraden p, da sich ja entsprechende Strahlen stets auf p begegnen. Weiter gehört aber auch die Verbindungslinie 12 der Büschelmittelpunkte diesem Erzeugnis an. Denn in ihr fallen zwei entsprechende Strahlen der perspektiven Büschel ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen, so dass jeder Punkt dieser Linie als Schnittpunkt dieser beiden entsprechenden Strahlen der perspektiven Büschel betrachtet werden kann. Bei perspektiven Büscheln besteht also das Erzeugnis in zwei geraden Linien, die Kurve 2. Ordnung ist, wie man sich ausdrückt, „zerfallen“ und zwar in zwei Gerade, d. h. zwei Kurven 1. Ordnung.

Aufgabe 20. Eine Kurve 2. Ordnung ist gegeben durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5; die Schnittpunkte mit einer Geraden l zu konstruieren.

Lösung. Wir führen den in 55. angegebenen Gedankengang durch. Die Punkte 1 und 2 werden als Mittelpunkte der die Kurve erzeugenden Büschel genommen (Fig. 33); die Punktreihen, welche die ge-

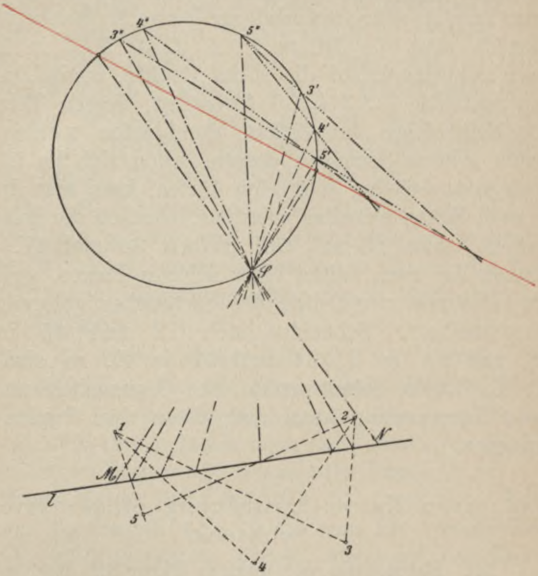

Fig. 33.

gebene Gerade l auf diesen Büscheln ausschneidet, projizieren wir aus S auf den gezeichnet vorliegenden Hilfskreis. Die Steiner'sche Konstruktion liefert dann die verlangten Schnittpunkte M und N.

Aufgabe 21. In den Punkten 1 und 4 die Tangenten an die Kurve 2. Ordnung zu konstruieren.

Lösung. Siehe Zusatz 1 von 56.

§ 21. Der Satz von Pascal.

Gegenseiten eines Sechsecks.

58. Aus irgend sechs Punkten in einer Ebene kann man in sehr verschiedener Weise Sechsecke bilden. Verteilt man die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 in irgend einer Anordnung auf die sechs Punkte, so ist dadurch das Sechseck 1 2 3 4 5 6 festgelegt, dessen Ecken in der Reihenfolge der Ziffern durchlaufen werden. In einem solchen Sechseck, dessen Seiten sich im übrigen noch ganz beliebig schneiden dürfen, kann man dreimal je zwei Seiten einander zuordnen, nämlich die Seiten 12 und 45, dann 23 und 56, endlich 34 und 61. Wir nennen die zwei Seiten eines solchen Paares, zwischen denen immer vier Seiten des Sechseckes gelegen sind, „Gegenseiten". Schneiden sich 12 und 45 in X, 23 und 56 in Y, 34 und 61 in Z, so sind also X, Y, Z die Schnittpunkte der Gegenseiten und für jede Numerierung kann man diese drei Punkte konstruieren.

Das einer Kurve 2. Ordnung eingeschriebene Sechseck.

59. Betrachten wir jetzt in Figur 32 das Sechseck der auf der Kurve k^2 gelegenen Punkte $\mathbf{A}\mathbf{T}\mathrm{S}\mathbf{B}\mathrm{S}_1\mathbf{R}$, das wir in dieser Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 numerieren. Dann sind in ihm Gegenseiten $\mathbf{AT}$ und $\mathbf{B}\mathrm{S}_1$, ferner $\mathbf{T}\mathrm{S}$ und $\mathrm{S}_1\mathbf{R}$, endlich $\mathrm{S}\mathbf{B}$ und $\mathbf{RA}$. Die Schnittpunkte dieser Gegenseiten sind der Reihe nach B_1, P, B und nach der Figur liegen diese drei Punkte auf einer Geraden. Vermöge dieser Eigenschaft fanden wir ja immer andere Punkte $\mathbf{A}'$ ... der Kurve k^2. Die sechs

Punkte **A**, **T**, ..., **R** können aber als sechs beliebige Punkte auf der Kurve 2. Ordnung betrachtet werden. Würde man sie in irgend einer anderen Weise numerieren, so könnte man auch wieder die Punkte, auf welche die Zahlen 3 und 5 fallen, als Mittelpunkt der die Kurve erzeugenden Strahlenbüschel nehmen, die Punkte mit den Ziffern 2 und 6 liessen wir die Rolle der Punkte **R** und **T** spielen u. s. w. Wir erhalten dann ein neues Sechseck, aber auch in diesem müssen wiederum die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen; demnach ergiebt sich der

Satz 26. „Sind irgend sechs Punkte auf einer Kurve 2. Ordnung gegeben und numeriert man sie in irgend einer Weise zu einem Sechseck, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Sechsecks auf einer Geraden."

Dies ist der wichtige Lehrsatz von Pascal, den dieser, 16 Jahre alt, im Jahre 1640 veröffentlichte. Ein Sechseck, in dem die Gegenseiten-Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, heisst auch ein Pascal'sches Sechseck und diese Gerade die Pascal'sche Linie (P. L.).

Wenn ferner bei der in 55. gegebenen Konstruktion die Punkte **A**′, ..., die man für verschiedene durch P gehende Gerade erhielt, stets auf der Kurve 2. Ordnung k^2 lagen, so liefert dieses offenbar den

Satz 27. „Liegen in einem Sechseck, das irgendwie numeriert ist, die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden, so liegen die sechs Ecken des Sechsecks auf einer Kurve 2. Ordnung."

Es geht also die durch fünf der Ecken des Sechseckes bestimmte Kurve 2. Ordnung dann von selbst auch durch die letzte Ecke des Sechsecks. Ein Pascal-sches Sechseck ist mithin stets einer Kurve 2. Ordnung eingeschrieben. Wenn ferner bei irgend einer Numerierung in einem Sechseck die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen, so hat das Sechseck diese Eigenschaft bei jeder möglichen Numerierung.

Spezialisierungen des Pascal'schen Satzes.

60. Aus dem Satze von Pascal können wir noch andere, speziellere Sätze ableiten. Lassen wir von den

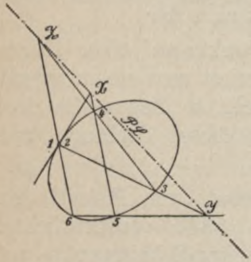

Fig. 34a.

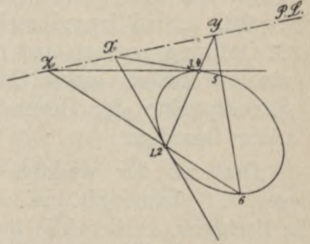

Fig. 34b.

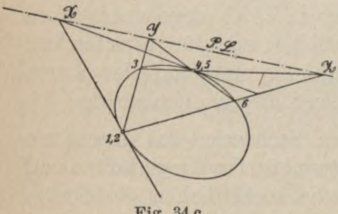

Fig. 34c.

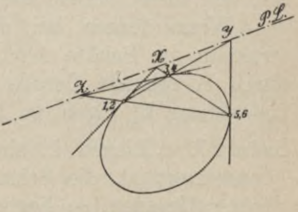

Fig. 34d.

Ecken des der Kurve eingeschriebenen Sechsecks die Ecke 2 der Ecke 1 auf der Kurve näher und näher rücken, so fällt schliesslich 2 mit 1 zusammen, so dass man bloss noch ein Fünfeck hat, als Verbindungsseite 1 2 aber müssen wir die Tangente in 1 betrachten. Wie sich der Pascalsche Satz dann modifiziert, dürfte aus Figur 34a zu entnehmen sein.

Ebenso können wir zweimal zwei Ecken des Sechsecks zusammenrücken lassen und erhalten dadurch zwei in den Figuren 34b und 34c dargestellte Sätze.

Wenn endlich dreimal zwei Ecken zusammenfallen, so ergiebt sich der in Figur 34d zur Anschauung gebrachte

Satz 28. „Hat man ein einer Kurve 2. Ordnung eingeschriebenes Dreieck, so liegen die Schnittpunkte jeder Dreiecksseite mit der Tangente in der gegenüberliegenden Ecke in einer Geraden.“

Anwendungen des Pascal'schen Satzes.

61. Der Satz von Pascal gab seiner Ableitung nach nur einen anderen, bequemeren Ausdruck für die Konstruktion, vermittels welcher man entsprechende Strahlen in den eine Kurve 2. Ordnung erzeugenden, projektiven Strahlenbüscheln fand. Er kann daher auch benutzt werden, um von einer solchen Kurve, sofern sie irgendwie, z. B. durch fünf Punkte, bestimmt ist, weitere Punkte zu konstruieren. Wir lassen die beiden Aufgaben 1. Grades folgen, deren Lösung der Pascal'sche Satz leistet.

Aufgabe 22. Fünf Punkte einer Kurve 2. Ordnung sind gegeben, sowie durch einen dieser Punkte eine Gerade. Man konstruiere den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve 2. Ordnung.

Lösung. Der Punkt, durch den die gegebene Gerade l geht, sei mit 1 bezeichnet (Fig. 35), der zweite, gesuchte Schnittpunkt auf 1 sei 2, so dass also die Seite 1 2 jedenfalls mit der Geraden 1 zusammenfällt; die übrigen gegebenen Punkte seien 3, 4, 5, 6. Das Sechseck, welches der gesuchte Punkt 2 mit den gegebenen Punkten bildet, ist ein Pascal'sches. Die Pascal'sche Linie (P. L.) können wir konstruieren als Verbindungslinie der Punkte X und Z, wobei X Schnittpunkt von 12 und 45, Z Schnittpunkt von 34 und 61. Auf ihr müssen sich auch schneiden 23 und 56. Die letztere Linie liefert also auf der P.L. den Punkt Y und 3Y schneidet den gesuchten Punkt 2 auf 1 aus.

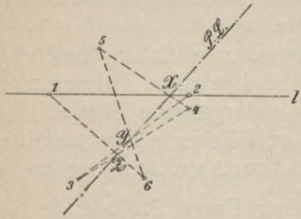

Fig. 35.

Aufgabe 23. Von einer Kurve 2. Ordnung sind fünf Punkte gegeben; in einem derselben die Tangente an die Kurve zu konstruieren.

Lösung. In der Absicht, uns ein Pascal'sches Sechseck bezw. Fünfeck zu numerieren, bezeichnen wir den Punkt, in dem die Tangente konstruiert werden soll, mit 1,2 (Fig. 36); die anderen gegebenen Punkte mit 3, 4, 5, 6. Dann kann man wieder die Punkte Y und Z der Pascal'schen Linie, also diese selbst, konstruieren. Auf ihr schneidet 45 den Punkt X aus, durch den nach den Erörterungen von 57. die Tangente 12 im Punkte 1 geht.

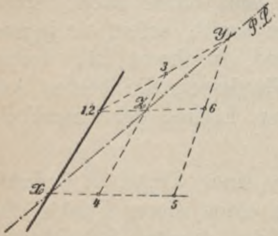

Fig. 36.

Eine andere Lösung der vorstehenden Aufgabe war in Aufgabe 21 angedeutet.

Ganz in ähnlicher Weise behandelt man die beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe 24. Von einer Kurve 2. Ordnung sind vier Punkte gegeben und in einem derselben die Tangente. In einem der übrigen Punkte die Tangente an die Kurve zu konstruieren.

Aufgabe 25. Von einer Kurve 2. Ordnung sind drei Punkte gegeben und in zweien derselben die Tangenten an die Kurve; im dritten Punkte die Tangente zu konstruieren.

§ 22. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Punktreihen.

Die Kurve 2. Klasse.

62. Zwei in einer Ebene befindliche, projektiv aufeinander bezogene Punktreihen g und g_1 liefern ein Erzeugnis, sofern wir je zwei entsprechende Punkte derselben durch eine Gerade verbinden. Wir erhalten zunächst ein Polygon, dessen Seiten von solchen Verbindungsgeraden gebildet werden und schliesslich, nach Ausführung des Grenzübergangs, als Umhüllungsgebilde der unendlich vielen Verbindungsstrahlen eine Kurve, deren Tangenten eben alle diese Strahlen sind.

Um diese Kurve näher zu untersuchen, sei (Fig. 37) die projektive Beziehung von g und g_1 durch drei Paare entsprechender Punkte gegeben, A, A_1, B, B_1, C, C_1, welche verbunden drei Tangenten a, b, c der erzeugten Kurve liefern. Weitere Tangenten derselben finden wir unter Benutzung der in 32. Figur 19 angegebenen Methode zur Konstruktion entsprechender Punkte der projektiven Punktreihen. Es werden also auf a die Punkte S und S_1 beliebig angenommen, sodann

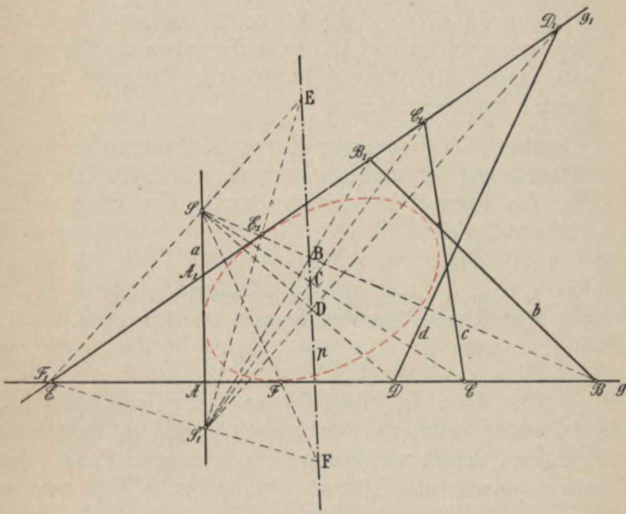

Fig. 37.

aus ihnen g und g_1 durch perspektive Strahlenbüschel projiziert, welche als perspektiven Schnitt die Gerade p liefern.

Zu einem beliebigen Punkte D auf g finden wir nun den entsprechenden D_1 auf g_1 mit Rücksicht darauf, dass sich SD und $S_1 D_1$ wieder in einem Punkte **D** von p schneiden müssen. DD_1 ist dann eine weitere Tangente der erzeugten Kurve.

Unter Anwendung der gleichen Konstruktion ermitteln wir jetzt auch die Punkte E_1 und F, welche dem Schnittpunkt von g und g_1 entsprechen, wenn wir ihn als E und F_1 bezeichen. Es treten dabei die Hilfspunkte **E** und **F** auf. Dann ist aber g die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte F und F_1, während g_1 die entsprechenden Punkte E und E_1 verbindet. Also sind auch g und g_1 Tangenten der erzeugten Kurve, die wir $\varkappa^2$ nennen wollen.

Diese Kurve ist von der 2. Klasse, d. h. durch einen beliebigen Punkt P gehen, algebraisch gesprochen, zwei ihrer Tangenten. Dies erkennen wir an einer eigenen Figur in folgender Weise. Um die durch P gehenden Tangenten der $\varkappa^2$ zu finden, haben wir bloss zuzusehen, wie oft es vorkommen kann, dass eine Verbindungslinie entsprechender Punkte von g und g_1 durch P läuft. Projizieren wir nun aber die Punktreihen g und g_1 aus P je durch einen Strahlenbüschel, so haben die Doppelstrahlen dieser projektiven Büschel die Eigenschaft, Tangenten durch P an die Kurve $\varkappa^2$ zu liefern und nur für diese Doppelstrahlen tritt dies ein. Die Kurve $\varkappa^2$ ist also in der That von der 2. Klasse.

Wählen wir einen Punkt D auf g, so gehen durch ihn auch zwei Tangenten an $\varkappa^2$, die eine ist die Tangente g, die andere ist die Verbindungslinie d von D mit dem entsprechenden Punkt D_1. Diese zwei Tangenten sind immer verschieden, nur für den Punkt F fällt diese zweite Tangente auch mit g zusammen. Durch F gehen also zwei unendlich benachbarte Tangenten der $\varkappa^2$, mithin ist nach 54. F der Berührungspunkt von g mit der Kurve $\varkappa^2$. Ebenso ist natürlich E_1 der Berührungspunkt der Tangente g_1. Wir haben damit erhalten:

Satz 29. „Das Erzeugnis zweier projektiven, in der gleichen Ebene gelegenen Punktreihen ist eine Kurve 2. Klasse, welche auch die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat. Die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten sind die Punkte, welche den im Schnittpunkte der Träger vereinigten bezüglich entsprechen.“

Weitere Eigenschaften der Kurve 2. Klasse.

63. In den soeben durchgeführten Betrachtungen waren die Tangenten g und g_1, die Träger der projektiven Punktreihen, vor den übrigen Tangenten wie a, b, c, ... ausgezeichnet. Wir wollen nun zeigen, dass irgend zwei Tangenten der Kurve $\varkappa^2$ die Rolle von g und g_1 übernehmen können, in dem die übrigen Tangenten auch auf ihnen projektive Punktreihen ausschneiden.

Konstruieren wir wieder (Fig. 38), ausgehend von drei Paaren A, A_1, B, B_1, C, C_1 entsprechender Punkte, den perspektiven Schnitt p. Dieser treffe g und g_1 in zwei Punkten, die als Hilfspunkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ betrachtet werden mögen. Dann erkennt man dass $S_1 \mathfrak{Q}$ eine Tangente q der erzeugten Kurve (Q fällt mit $\mathfrak{Q}$ zusammen, während Q_1 der Schnitt von $S_1 \mathfrak{Q}$ und g_1 ist) und ebenso ist $S\mathfrak{R}$ eine Tangente r von $\varkappa^2$.

Statt nun von g, g_1, a, b, c als Tangenten der erzeugten Kurve $\varkappa^2$ auszugehen, können wir auch g, g_1, b, r, q zur Bestimmung von $\varkappa^2$ benutzen, da ja r und q in gleicher Weise entsprechende Punkte der gegebenen projektiven Punktreihen g und g_1 ausschneiden.

Denken wir uns jetzt die Kurve $\varkappa^2$ tangentenweise konstruiert, indem wir von g, g_1, a, b, c ausgehen. Dann seien drei beliebige ihrer Tangenten herausgegriffen, die wir mit b, r, q bezeichnen. Wir wollen nun die vorige Figur rekonstruieren mit diesen Elementen. Die Tangente r trifft g_1 in R, die Tan-

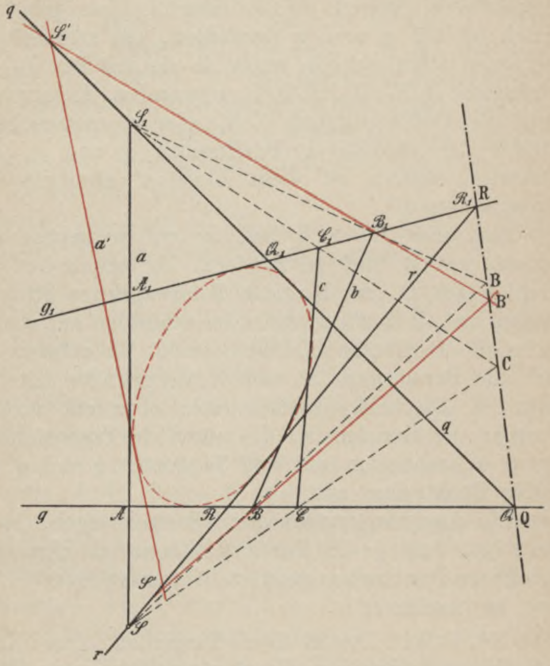

Fig. 38.

gente q den Träger g in **Q**, die Tangente b schneidet auf g und g_1 zwei Punkte B und B_1 aus, die Verbindungslinie **QR** sei p.

Wählen wir nun auf p irgend einen Punkt **B**′ beliebig, so möge B**B**′ mit r den Schnittpunkt S′, B_1**B**′ mit q den Schnittpunkt S_1' liefern. Dann können wir mit S′ und S_1' als Büschelmittelpunkten und p als perspektivem Schnitt dieser Büschel eine projektive Beziehung auf g und g_1 herstellen, die aber mit der gegebenen identisch sein muss, da sie mit ihr die drei Punktpaare B, B_1, R, R_1, Q, Q_1 gemein hat. Es muss also auch die Verbindungslinie $S'S_1'$ oder a′ entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen g und g_1 ausschneiden, mithin ist diese Linie a′ ebenfalls eine Tangente von $\varkappa^2$.

Nun war **B**′ noch beliebig auf p anzunehmen. Lassen wir **B**′ auf p wandern, so beschreiben die Strahlen aus B und B_1 nach **B**′ perspektive Strahlenbüschel und diese Strahlenbüschel schneiden auf r und q bezüglich die Punkte S′ und S_1' aus. Es müssen also auch die Punktreihen S′ und S_1' als Schnitte mit perspektiven Büscheln projektiv sein oder mit anderen Worten: die Geraden a′, die sämtlich Tangenten der Kurve $\varkappa^2$, schneiden auf den Tangenten r und q projektive Punktreihen aus.

Die Analysis ergänzt diese Betrachtungen, indem sie zeigt, dass jede Kurve 2. Klasse als Erzeugnis projektiver Punktreihen dargestellt werden kann. Demnach ist bewiesen:

Satz 30. „Auf irgend zwei Tangenten einer Kurve 2. Klasse schneiden die übrigen Tangenten dieser Kurve projektive Punktreihen aus.“

Bestimmung einer Kurve 2. Klasse.

64. Aus der eben nachgewiesenen Erzeugung der Kurven 2. Klasse ergiebt sich unmittelbar, dass man

sich fünf Tangenten einer solchen Kurve beliebig geben darf, dass es also stets eine und nur eine solche Kurve giebt, welche fünf vorgegebene Gerade berührt.

Denn sind I, II, III, IV, V diese Geraden, so wählen wir etwa I und II aus und ordnen die Punkte einander zu, welche III, IV und V je auf ihnen ausschneiden. Dadurch ist die projektive Beziehung der Punktreihen auf I und II gerade festgelegt. Die durch diese Punktreihen erzeugte Kurve ist die verlangte. Es giebt nur eine solche Kurve, wie man ebenso zeigt wie in 57., also folgt

Satz 31. „Es giebt eine und nur eine Kurve 2. Klasse, welche fünf beliebige Gerade berührt.“

Gehen von den fünf gegebenen Geraden drei, etwa III, IV und V durch einen Punkt S, so werden die Punktreihen auf I und II perspektiv. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden also den Strahlenbüschel S. Ausserdem fallen aber in dem Schnittpunkt von I und II entsprechende Punkte E und E_1 der perspektiven Punktreihen auf I und II zusammen. Jede durch E gehende Linie kann mithin als eine Gerade gelten, welche entsprechende Punkte, nämlich E und E_1, verbindet. Es gehört also auch der Strahlenbüschel E dem Erzeugnis der perspektiven Punktreihen auf I und II an. Das Erzeugnis perspektiver Punktreihen besteht folglich in zwei Strahlenbüscheln, deren Strahlen je den Büschelmittelpunkt umhüllen. Die Kurve 2. Klasse ist in ein Punktpaar d. h. in zwei „Kurven 1. Klasse“ zerfallen.

Aufgabe 26. Von einer Kurve 2. Klasse sind fünf Tangenten gegeben, man zeichne die durch einen Punkt S an die Kurve gehenden Tangenten.

Lösung. In Verfolgung des in 62. bereits erörterten Gedankengangs greifen wir zwei der gegebenen Tangenten, etwa I und II heraus (Fig. 39), markieren die Punktreihen, welche die drei übrigen Tangenten

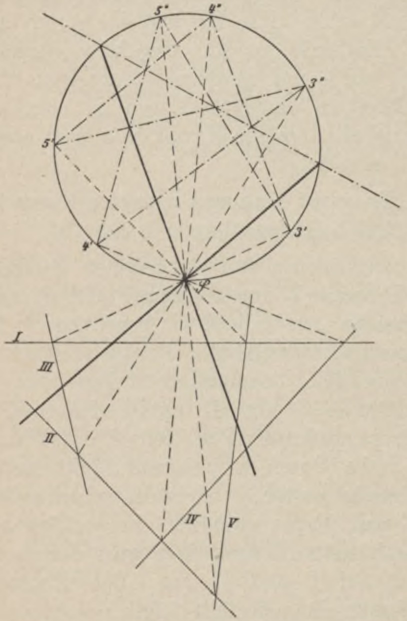

Fig. 39.

auf ihnen ausschneiden und projizieren diese auf den Hilfskreis, von dem wir annehmen, dass er durch den gegebenen Punkt S gehe. Die Doppelstrahlen der dadurch entstehenden Strahlenbüschel, die nach 44. konstruiert sind, liefern die gesuchten Tangenten.

§ 23. Der Satz von Brianchon.

Gegenecken eines Sechsseits.

65. Irgend sechs Gerade in einer Ebene lassen sich in verschiedenster Weise zu einem Sechsseit zusammenfassen. Verteilen wir auf die sechs Gerade irgendwie die Nummern I, II, III, IV, V, VI und durchlaufen die Seiten in der Reihenfolge der Nummern, so sind als Schnittpunkte aufeinander folgender Seiten auch sechs Ecken bestimmt, nämlich der Schnittpunkt von I und II, den wir als Punkt (I, II) bezeichnen, der Punkt (II, III) u. s. w., endlich der Punkt (VI, I). Es folgt also auf VI wieder I. (Cyklische Vertauschung.) Aus diesen sechs Ecken eines numerierten Sechsseits lassen sich drei Paare von „Gegenecken" bilden, die Ecke (I, II) und (IV, V), dann (II, III) und (V, VI), endlich (III, IV) und (VI, I). Je zwei solche Gegenecken können wir durch eine Gerade verbinden und erhalten so drei Verbindungslinien von Gegenecken, die wir in der angegebenen Reihenfolge x, y, z nennen.

Das einer Kurve 2. Klasse umschriebene Sechsseit.

66. Betrachten wir jetzt in Figur 38 das Sechsseit $aqgbg_1r$ und numerieren es in dieser Reihenfolge mit I, II, III, IV, V, VI, so sind die Verbindungslinien der Gegenecken die drei Geraden S_1B_1, $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, BS, welche nach der Figur durch einen Punkt $\mathfrak{B}$ gehen. Die sechs Seiten des Sechsseits dürfen als sechs beliebige Tangenten der Kurve 2. Klasse angesehen werden. Würde man sie in irgend einer andern Weise numerieren, so könnte man doch wieder die Tangenten,

welche dann die Nummern III und V tragen, als erzeugende Punktreihen für die Kurve 2. Klasse benutzen, ferner könnte man die Tangente mit der Nummer I die Rolle der Tangente a spielen lassen u. s. w., kurz man erhielte für das neue Sechsseit, dass der anderen Numerierung entspricht, auch wieder einen (anderen) Punkt **B**, durch den die drei Verbindungslinien der Gegenecken hindurchgehen müssten. Es ist also bewiesen:

Satz 32. „Irgend sechs Tangenten einer Kurve 2. Klasse liefern, auf irgend eine Weise numeriert, ein der Kurve umschriebenes Sechsseit, in dem sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkt schneiden."

Das ist der Lehrsatz von Brianchon, den dieser französische Gelehrte 1806 veröffentlichte. Den Punkt **B**, in dem sich die Verbindungslinien der Gegenecken schneiden, nennen wir den Brianchon'schen Punkt (B. P.).

Aber auch eine Umkehrung dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Figur 38. Dort fanden wir ja weitere Tangenten a' der Kurve 2. Klasse, indem wir immer Sechsseite konstruierten, für welche sich $S'B$ und $S_1'B_1$ in Punkten **B**$'$ von **QR** begegneten. Wir können also auch behaupten:

Satz 33. „Wenn in einem irgendwie numerierten Sechsseit die Verbindungslinien der Gegenecken sich in einem Punkte schneiden, so ist das Sechsseit einer Kurve 2. Klasse umschrieben, d. h. die Kurve 2. Klasse, welche fünf dieser Seiten berührt, berührt von selbst auch die sechste Seite des Sechsseits."

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass sich die Sätze von Pascal und Brianchon nach dem Gesetz der Dualität entsprechen.

Spezialisierungen des Brianchon'schen Satzes.

67. Denken wir uns ein einer Kurve 2. Klasse umschriebenes Sechsseit gegeben und halten wir fünf seiner Seiten, etwa I, III, IV, V, VI fest, während wir die Seite II sich so ändern lassen, dass sie sich der Seite I mehr und mehr nähert. Ist dann im Grenzfall II mit I zusammengefallen, so haben wir statt des

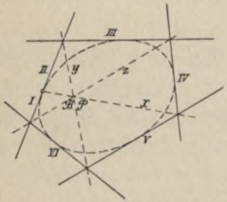

Fig. 40 a.

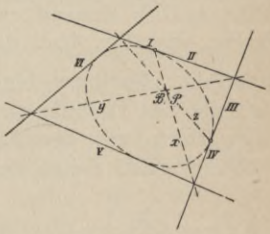

Fig. 40 b.

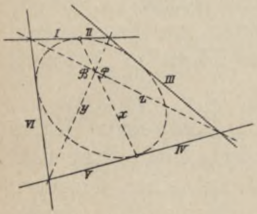

Fig. 40 c.

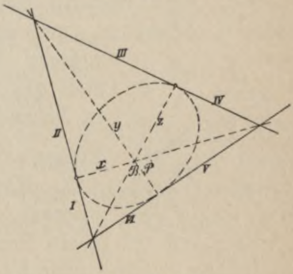

Fig. 40 d.

Sechsseits ein Fünfseit. Dagegen sind noch sechs Ecken vorhanden. Denn als Schnittpunkt von I und II müssen wir den Berührungspunkt der Tangente I mit der Kurve nehmen. Der Brianchon'sche Satz lässt sich dann in entsprechender Weise für dies Fünfseit formulieren: es mag genügen, auf Figur 40a zu verweisen, die den Satz veranschaulicht. Ferner können wir in dem Sechsseit zweimal zwei Tangenten zusammenfallen lassen, wodurch wir aus dem Satze von Brianchon Sätze über das Vierseit erhalten, das einer Kurve 2. Klasse umschrieben ist. Die Figuren 40b und 40c werden hinreichen, um auch den Wortlaut derselben zu liefern. Fallen endlich dreimal zwei Tangenten zusammen, so erhalten wir (Fig. 40d) den

Satz 34. „Hat man ein einer Kurve 2. Klasse umschriebenes Dreieck, so gehen die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt."

Anwendungen des Brianchon'schen Satzes.

68. Nach Satz 33 können wir das Brianchon'sche Sechsseit benutzen, um von einer Kurve 2. Klasse weitere Tangenten zu konstruieren und die beiden folgenden Aufgaben zu behandeln.

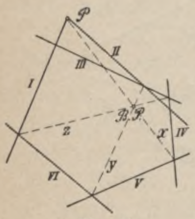

Fig. 41.

Aufgabe 27. Von einer Kurve 2. Klasse sind fünf Tangenten gegeben und auf einer derselben ein Punkt P. Man soll die zweite, durch diesen Punkt gehende Tangente der Kurve zeichnen.

Lösung. Wir numerieren uns ein Brianchonsches Sechsseit. Die Tangente, auf der P liegt, sei I (Fig. 41), die gesuchte Tangente sei II, die übrigen gegebenen Tangenten erhalten die Nummern III, IV, V, VI. Dann ist P der Schnittpunkt (I, II). Die Linien x und z können wir zeichnen und sie liefern den Brianchon'schen Punkt (B. P.). Durch ihn und (V, VI) geht y und diese Linie schneidet auf III einen Punkt aus, der mit P verbunden die gesuchte Tangente giebt.

Aufgabe 28. Eine Kurve 2. Klasse ist gegeben durch fünf Tangenten, den Berührungspunkt einer derselben zu bestimmen.

Lösung. Die Tangente, deren Berührungspunkt bestimmt werden soll, bezeichnen wir mit I und II (Fig. 42), die übrigen mit III ... VI. Dann kann man zwei der Verbindungslinien der Gegenecken, nämlich z und y zeichnen, deren Schnitt der Brianchon'sche Punkt ist. Durch diesen und (IV, V) geht x und diese Linie schneidet auf I den Berührungspunkt T aus.

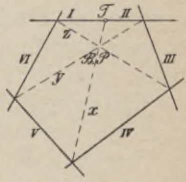

Fig. 42.

Ganz in ähnlicher Weise sind folgende Aufgaben zu behandeln:

Aufgabe 29. Von einer Kurve 2. Klasse sind fünf Tangenten gegeben; eine Tangente an die Kurve zu zeichnen, die parallel einer der gegebenen ist. Lösung wie Aufgabe 27, nur liegt P in unendlicher Ferne.

Aufgabe 30. Von einer Kurve 2. Klasse sind vier Tangenten gegeben und auf einer derselben ihr Berührungspunkt; man konstruiere die Berührungspunkte der anderen Tangenten.

Lösung. Brianchon'scher Satz für ein Vierseit.

Aufgabe 31. Von einer Kurve 2. Klasse sind zwei Tangenten gegeben und ihre Berührungspunkte, sowie eine dritte Tangente; man zeichne deren Berührungspunkt.

§ 24. Identität der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse.

Die Mac-Laurin'sche Konfiguration.

69. Hatten wir eine Kurve 2. Ordnung durch projektive Büschel erzeugt, so konnten wir in jedem ihrer Punkte die Tangente bestimmen. Von welcher Klasse ist nun die erzeugte Kurve zweiter Ordnung?

Lag andererseits eine Kurve 2. Klasse vor als Erzeugnis projektiver Punktreihen, so war auf jeder Tangente ein Punkt, der Berührungspunkt, festgelegt. Von welcher Ordnung ist die von den Berührungspunkten gebildete Kurve?

Um diese nahe liegenden Fragen zu beantworten, gehen wir aus von einer Kurve 2. Klasse, die durch vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt A von a bestimmt sein möge (Fig. 43). Die Berührungspunkte B, C, D von b, c, d, die damit dann schon gegeben sind, wollen wir nun nicht wie in Aufgabe 30 mittels des Brianchonschen Satzes bestimmen, sondern unter Benutzung des Satzes 14. in 36. Für den vorliegenden Fall haben wir zu berücksichtigen, dass auf irgend zwei Tangenten einer Kurve 2. Klasse die übrigen Tangenten projektive Punktreihen ausschneiden und ferner, dass die auf Grund des angezogenen Satzes zu konstruierende Linie p_0 die Berührungspunkte der beiden Tangenten ausschneidet (62). Die Tangenten a, b, c, d bilden nun ein vollständiges Vierseit. Es sei der Schnittpunkt von a und b mit M bezeichnet, also kurz $(ab) = M$, ebenso $(cd) = M_1$, ferner $(ac) = N$, $(bd) = N_1$, endlich $(ad) = P$ und $(bc) = P_1$, so dass N, N_1, M, M_1, P, P_1 die drei Paare von Gegenecken des

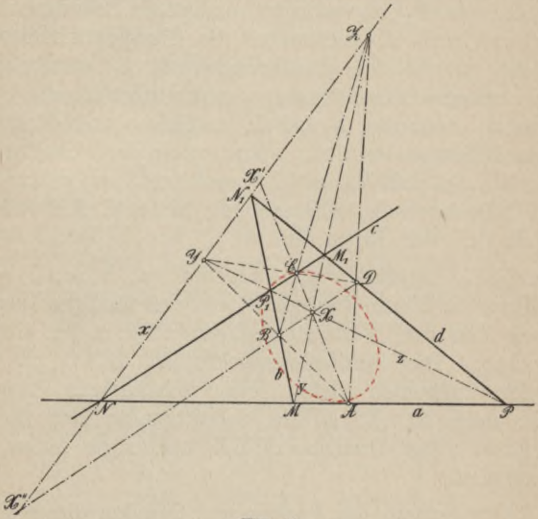

Fig. 43.

Vierseites. Weiter bezeichnen wir die Verbindungslinie NN_1 mit x, MM_1 mit y, PP_1 mit z.

Greifen wir jetzt zunächst die beiden Tangenten a und b heraus, so schneiden die übrigen Tangenten c, d u. s. w. auf a und b projektive Punktreihen aus und zwar entsprechen den Punkten N, P bezüglich die Punkte P_1, N_1. Die Linie p_0 des Satzes 14. geht mithin durch den Schnittpunkt Y der Verbindungslinien PP_1 und NN_1 und ausserdem durch A. Es schneidet also die Verbindungslinie AY auf b den Berührungspunkt B aus.

Betrachten wir in gleicher Weise a und c als Träger projektiver Punktreihen, so haben wir M und M_1 sowie P und P_1 zu verbinden und deren Schnittpunkt X bestimmt mit A verbunden die Perspektivitätsachse, welche auf C den Berührungspunkt C ausschneidet. Die analogen Betrachtungen, durchgeführt für die Paare a und d, b und c, b und d, endlich c und d, liefern dann folgendes Resultat: Wird noch der Schnittpunkt von NN_1 und MM_1 mit Z bezeichnet, so gehen AC und BD durch X, AB und CD durch Y, AD und BC durch Z. Wir haben also

Satz 35. „Irgend vier Tangenten a, b, c, d einer Kurve 2. Klasse bestimmen ein vollständiges Vierseit mit den drei Verbindungslinien x, y, z der Gegenecken. Die Berührungspunkte A, B, C, D der vier Tangenten liefern ein vollständiges Viereck, in dem X, Y, Z die Schnittpunkte der Gegenseiten. Die Dreiecke XYZ und xyz fallen zusammen.“

Das System der Punkte und Geraden dieser Figur ist bekannt als die Mac-Laurin'sche Konfiguration.*)

Die Kurve 2. Klasse ist von der 2. Ordnung.

70. Lassen wir jetzt Bewegung in unsere Figur kommen, indem wir a, b, c festhalten, dagegen der Tangente d andere und andere Lagen geben, jedoch so, dass sie immer die Kurve 2. Klasse berührt. Da-

*) Mac-Laurin: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus. (London 1748.)

bei ist AC eine feste Linie und bei jeder Wahl von d ergiebt sich auf ihr ein Punkt X.

Wir können aber auch umgekehrt X beliebig auf AC wählen und erhalten dann dazu eine Linie d, wenn wir uns der Führung der Figur anvertrauen. Liegen nämlich a, b, c, A, B, C, X und also auch M, N, P_1 gezeichnet vor, so schneidet die Verbindungslinie MX die Tangente c in M_1 und die Verbindungslinie P_1X trifft a in P. Dann ist leicht zu beweisen, dass M_1P eine Tangente d der Kurve 2. Klasse und dass BX deren Berührungspunkt D ausschneidet. In der That numerieren wir uns ein Brianchon'sches Sechsseit, von dem I und II auf b, III auf c, IV und V auf M_1P und VI auf a fallen, so schneiden sich BD, P_1P und M_1M im Brianchon'schen Punkt X, also ist (Satz 33) M_1P eine Tangente d der Kurve 2. Klasse und D deren Berührungspunkt (Fig. 40c).

Dann muss sich aber auch die ganze Figur wie oben herstellen lassen. Bringen wir also BC mit MX in Z zum Schnitt und ziehen NZ, so liefert AB auf NZ den Punkt Y. Durch Y geht jetzt auch CD oder anders ausgedrückt: man kann D auch erhalten als Schnittpunkt der Strahlen BX und CY.

Lassen wir jetzt X auf AC fortrücken, so beschreibt der Strahl BX einen zur Punktreihe X perspektiven Strahlenbüschel und ebenso MX; der Punkt Z wandert auf der Geraden BC weiter, Y auf AB und der Strahl CY beschreibt einen Büschel um C.

Man hat mithin folgende Reihe von perspektiven Grundgebilden:

Strahlenbüschel BX $\overline{\wedge}$ Punktreihe X $\overline{\wedge}$ Strahlenbüschel MX
$\overline{\overline{\wedge}}$ „ Z $\overline{\wedge}$ „ NZ
$\overline{\overline{\wedge}}$ „ Y $\overline{\wedge}$ „ CY.

Also ist auch

Strahlenbüschel B X $\overline{\wedge}$ Strahlenbüschel C Y.

Folglich ist der Ort der Punkte D dargestellt als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel, also liegen alle Berührungspunkte D der Tangenten der Kurve 2. Klasse auf einer Kurve 2. Ordnung, welche natürlich auch durch die Punkte A, B, C, D geht, da ja die bewegliche Tangente d auch mit a, b, c, d zusammenfallen kann.

Die entsprechende duale Betrachtung, deren Durchführung dem Leser angeraten wird, zeigt, dass die Tangenten einer Kurve 2. Ordnung eine Kurve 2. Klasse bilden. Wir haben demnach

Satz 36. „Die Berührungspunkte der Tangenten einer Kurve 2. Klasse liegen auf einer Kurve 2. Ordnung und die Tangenten einer Kurve 2. Ordnung bilden eine Kurve 2. Klasse."

Ob man also von projektiven Punktreihen oder projektiven Strahlenbüscheln ausgeht, man erhält die gleiche Kurve, nur das einemal tangentenweise, das anderemal punktweise erzeugt. Die Kurven 2. Klasse sind auch von der 2. Ordnung und umgekehrt. Wir wollen diese Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse „Kegelschnitte" nennen. Die Berechtigung dieser Bezeichnung wird in einem späteren Abschnitte dargethan werden.

§ 25. Die verschiedenen Arten der Kegelschnitte.

Unendlich ferne Punkte. Asymptoten.

71. Wir wollen jetzt sehen, welche verschiedene Formen die Kegelschnitte annehmen können. Man teilt diese Kurven ein nach ihrem Verhalten gegenüber

der unendlich fernen Geraden der Ebene, in welcher der Kegelschnitt liegt. Der Kegelschnitt kann diese unendlich ferne Gerade nämlich entweder in zwei reellen Punkten schneiden oder sie gar nicht schneiden (d. h. in zwei imaginären Punkten) oder er kann sie berühren. Um für diese abstrakten Möglichkeiten geometrisch brauchbare Unterscheidungen zu erhalten, sei ein Kegelschnitt durch projektive Büschel S und S_1 erzeugt, deren projektive Beziehung durch drei Paare entsprechender Strahlen a, b, c, und a_1, b_1, c_1 festgelegt sein möge. Um nun die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der *unendlich fernen* Geraden zu bestimmen, haben wir nur das Verfahren, auf Grund dessen wir in 55. und Aufgabe 20 die Schnittpunkte einer endlichen Geraden l mit dem Kegelschnitt bestimmten, entsprechend umzuändern. Da sich in jedem Punkte des Kegelschnittes entsprechende Strahlen der projektiven Büschel S und S_1 begegnen, so sind etwaige unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes dadurch ausgezeichnet, dass nach ihnen *entsprechende* Strahlen der Büschel S und S_1 laufen, die überdies noch *parallel* sind. Um solche Strahlen zu finden, verschieben wir den Büschel S_1 parallel zu sich selbst, bis S_1 nach S fällt. Dies führen wir aus, indem wir durch S folgende Strahlen ziehen: $a_1' \parallel a_1$, $b_1' \parallel b_1$, $c_1' \parallel c_1$. Dann ist, wie leicht zu sehen, auch der Büschel (a, b, c) projektiv zum Büschel (a_1', b_1', c_1'), wobei dem Strahl a der Strahl a_1' entspricht u. s. w. Die Doppelstrahlen dieser Büschel aber liefern entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1', die parallel laufen. Denn wenn $n = n_1'$ ein solcher Doppelstrahl, so ist $n_1 \parallel n_1'$, also auch $n \parallel n_1$. Die genannten Doppelstrahlen, die sich nach der Steiner'schen Konstruktion ermitteln lassen, geben folglich die Richtungen, in denen unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes gelegen sind. Jede Parallele zu einer solchen Richtung geht auch durch diesen unendlich fernen Punkt der Kurve hindurch. Dies entspricht dem Umstand, dass durch irgend einen, im endlichen gelegenen, Punkt einer Kurve ein Büschel von Strahlen hindurchgeht. Wie nun in diesem, eben genannten Strahlenbüschel die Tangente an die Kurve enthalten ist, so ist auch in dem Parallelstrahlenbüschel durch einen unendlich fernen Punkt einer Kurve ein Strahl vorhanden, der die Kurve in dem unendlich fernen Punkt berührt, also die Tangente in diesem Punkte. Wir nennen allgemein die Tangente in einem unendlich fernen Punkt einer Kurve eine „Asymptote" der Kurve. Ihre Konstruktion bleibt die gleiche wie die der Tangente, nur tritt an Stelle des im Endlichen gelegenen Punktes der durch eine Richtung gegebene unendlich ferne Punkt.

Ellipse, Hyperbel, Parabel.

72. Zurückkehrend zur Einteilung der Kegelschnitte müssen wir mithin folgende Fälle unterscheiden:

Fig. 44

a) Die beiden projektiven Strahlenbüschel (a, b, c) und (a_1', b_1', c_1') haben keine Doppelstrahlen. Der erzeugte Kegelschnitt besitzt keine unendlich fernen Punkte, liegt also ganz im Endlichen. Man nennt ihn „Ellipse" (*ἔλλειψις*) (Fig. 44). Sie kann speziell in den Kreis übergehen.*)

---

*) Es giebt Kurven **höherer** Ordnung, die infolge ihrer ovalen Form sich **äusserlich** nur wenig von einer

b) Die Doppelstrahlen der beiden projektiven Büschel sind reell. Der Kegelschnitt hat also zwei reelle, unendlich ferne Punkte. Er heisst Hyperbel (ὑπερβολή) (Fig. 45). Die Asymptoten sind a und b.

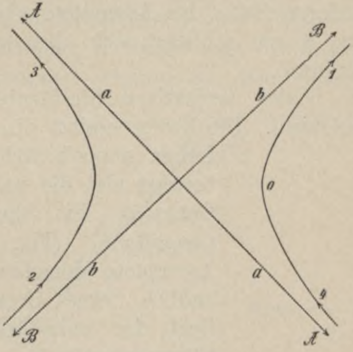

Fig. 45.

Die Kurve besteht aus zwei Teilen, die sich den Asymptoten mehr und mehr nähern. Die Kurve hat nur

---

Ellipse unterscheiden. Wählt man auf einer solchen Kurve zwei Punkte S und S_1 beliebig, so kann man die Strahlenbüschel S und S_1 durch die Kurve eindeutig aufeinander beziehen, indem man solche Strahlen einander zuweist, die sich auf der Kurve begegnen. Trotzdem sind diese Büschel dann nicht projektiv, und es ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen nicht gleich dem der entsprechenden Strahlen des anderen. Denn analytisch betrachtet, schneidet irgend ein Strahl durch S die Kurve ausser in den zwei reellen Punkten noch in imaginären Punkten, die für die Rechnung ebenso zu berücksichtigen sind wie die geometrisch sichtbaren Punkte. (Vergl. die Definition projektiver Grundgebilde in 31.).

zwei unendlich ferne Punkte, nämlich die unendlich fernen Berührungspunkte A und B von a und b. Geht man auf der Kurve von 0 aus gegen 1 ins Unendliche, so kehrt man daraus über B zurück nach 2; geht man in der Richtung nach 3 ins Unendliche, so kehrt man auf der anderen Seite der Asymptote über A nach 4 zurück. Die Kurve schliesst sich also durch das Unendliche hindurch.

c) Die beiden projektiven Strahlenbüschel haben einen Doppelstrahl. Die Kurve besitzt einen unendlich fernen (doppelt zählenden) Punkt, berührt also die unendlich ferne Gerade. Sie heisst Parabel ($\pi\alpha\varrho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$) (Fig. 46). Die Asymptote derselben ist die unendlich ferne Gerade, auf ihr liegt der unendlich ferne Berührungspunkt P.

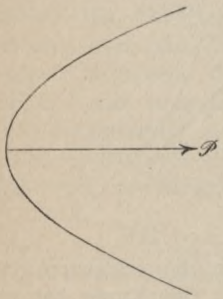

Fig. 46.

Diese Bezeichnungen der drei Kegelschnitte stammen schon von den Griechen her. Sie beziehen sich auf die eigentümliche Art und Weise, wie diese die Gleichungen dieser Kurven als Beziehungen zwischen Flächeninhalten deuteten.

Tangentenweise Konstruktion der Parabel.

73. Erzeugen wir einen Kegelschnitt durch projektive Punktreihen, so können wir ebenfalls, wenn auch weniger einfach, die drei Arten von Kegelschnitten unterscheiden. Wann die Parabel entsteht, ist sofort einzusehen: nämlich immer und nur dann, wenn die

unendlich fernen Punkte der erzeugenden Punktreihen g und g_1 in der projektiven Beziehung einander entsprechen. Denn dann ist die Verbindungslinie dieser beiden unendlich fernen Punkte, also die unendlich ferne Gerade der Ebene, eine Tangente der erzeugten Kurve, diese muss demnach eine Parabel sein. Projektive Punktreihen, in denen sich die unendlich fernen Punkte entsprachen, nannten wir aber (40.) ähnliche;

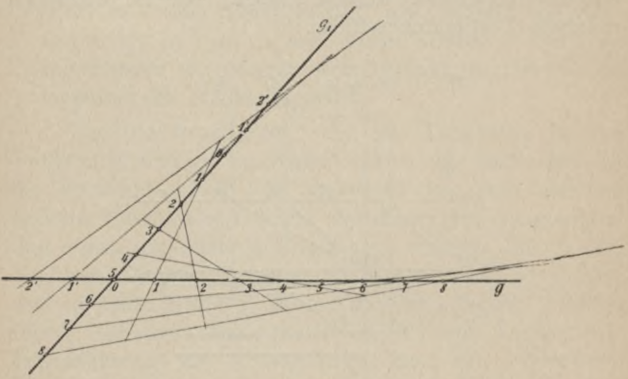

Fig. 47.

folglich schneiden die Tangenten einer Parabel auf irgend zwei festen Tangenten derselben solche ähnliche Punktreihen aus. Daraus ergiebt sich eine einfache Konstrnktion der Tangenten einer Parabel. Sind g und g_1 die gegebenen Tangenten (Fig. 47) und bezeichnen wir deren Berührungspunkte mit 5 und 0, so teilen wir die Strecken von ihnen aus bis zum Schnittpunkt von g und g_1 je in fünf gleiche Teile. Dann liefern entsprechende Teilpunkte verbunden stets eine

Tangente der Parabel. Durch Fortsetzung der Teilung erhält man, wie aus der Figur zu ersehen, weitere Tangenten derselben.

Aufgaben über die Hyperbel und Parabel.

74. Wir fügen hier noch einige Aufgaben bei, aus denen hervorgehen mag, dass unendlich ferne Elemente (Asymptoten, unendlich ferne Gerade) ganz ebenso konstruktiv verwendet werden können, wie im Endlichen gelegene Bestimmungsstücke.

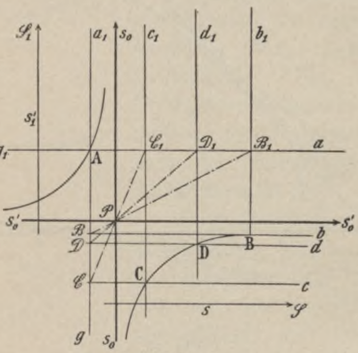

Fig. 48.

Aufgabe 32. Von einer Hyperbel sind gegeben die Richtungen der Asymptoten und drei Punkte. Weitere Punkte der Kurve, sowie die Asymptoten selbst zu konstruieren.

Lösung. Sind s und s_1' die Richtungen der Asymptoten (Fig. 48), so sind also die unendlich fernen Punkte S und S_1 dieser Geraden Punkte der Hyperbel. Wir wählen sie als Mittelpunkte von die

Kurve erzeugenden Strahlenbüscheln, die in diesem Falle in Parallelstrahlenbüschel übergehen. Durch die weiter gegebenen Punkte **A**, **B**, **C** sind dann den drei Strahlen a, b, c des Büschels S als entsprechende im Büschel S_1 die Strahlen a_1, b_1, c_1 zugewiesen. Wir konstruieren die projektive Beziehung der beiden Büschel nach 33., lassen aber zur Vereinfachung g mit a_1 und g_1 mit a zusammenfallen. Dann erhalten wir in bekannter Weise das Centrum P der Perspektivität als (Schnitt von BB_1 und CC_1) und zu irgend einem Strahle d den entsprechenden d_1, dessen Schnittpunkt **D** mit d der Hyperbel als Punkt angehört.

Um die Asymptoten, also die Tangenten in den Punkten S und S_1 zu finden, haben wir nach Satz 23 die Verbindungslinie SS_1 als Strahl des einen und des anderen Büschels zu nehmen und immer den entsprechenden Strahl im anderen Büschel zu suchen. Diese Verbindungslinie SS_1 ist hier die unendlich ferne Gerade und sie trifft g und g_1 in den unendlich fernen Punkten dieser Geraden. Man findet dann durch konsequente Durchführung der Konstruktion, dass die Asymptoten die Linien s_0 und s_0' sind, die durch P parallel zu s und s′ laufen. — In der Figur stehen die Richtungen der Asymptoten aufeinander senkrecht. Eine solche Hyperbel heisst eine „gleichseitige“.

Aufgabe 33. Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein unendlich ferner Punkt, sowie zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten. Man zeichne die Asymptote in dem gegebenen unendlich fernen Punkte.

Lösung. Sind a und b die Tangenten mit den Berührungspunkten A und B, während S der gegebene unendlich ferne Punkt (Fig. 49), so sei die gesuchte Asymptote die Verbindungslinie 1 2, A sei 3, 4 und 5, 6 falle mit B zusammen. Dann erhalten wir in dem Pascal'schen Sechseck 1 2 3 4 5 6 die Punkte Y und Z des Pascal'schen Linie (Satz 28) auf der sich auch 1 2 und 4 5 schneiden müssen. Es geht also durch diesen Schnittpunkt X die Asymptote s_0.

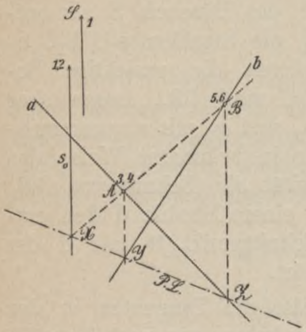

Fig. 49.

Man zeichne auch die zweite Asymptote.

Aufgabe 34. Man löse die vorletzte Aufgabe 32 unter Anwendung des Pascalschen Satzes.

Aufgabe 35. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und ein Punkt; man zeichne weitere Punkte der Kurve.

Lösung. Nehmen wir die unendlich fernen Punkte S und S_1 der Kurve als Mittelpunkte der die Hyperbel erzeugenden projektiven Strahlenbüschel und verfahren wir im Übrigen durchaus nach der in 55. Figur 31 bereits besprochenen Methode. Die Parallelen durch den gegebenen Punkt **A** der Hyperbel (Fig. 50) zu den Asymptoten liefern entsprechende Strahlen a und a_1 der beiden Strahlenbüschel und die Asymptoten selbst sind bezw. mit f und e_1 zu bezeichnen, während die unendlich ferne Gerade die Bezeichnungen f_1 und e trägt. Für die Hilfsgeraden g und g_1 wollen wir im vorliegenden Falle eine speziellere Annahme machen, indem wir g mit a_1

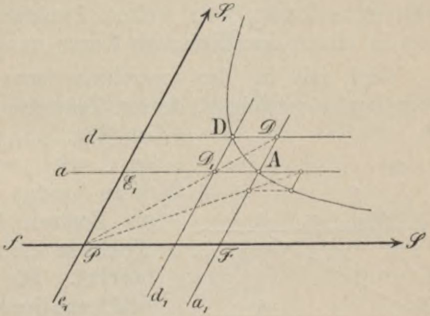

Fig. 50.

und g_1 mit a zusammenfallen lassen. Dann kommt der Hilfspunkt P der Figur 31 in den Schnittpunkt der beiden Asymptoten (also in den Mittelpunkt der Hyperbel) zu liegen. Weitere Punkte der Kurve ermitteln wir, indem wir durch P irgend eine Gerade ziehen, welche a_1 und a in D und D_1 trifft. Die Parallelen d und d_1 geben in ihrem Schnitte e einen weiteren Punkt **D** der Hyperbel.

Die Figur 50 lässt weiter erkennen, dass unsere Konstruktion neuer Hyperbelpunkte geometrisch auch in der Weise gedeutet werden kann, dass durch dieselbe das Parallelogramm $\mathbf{AFPE_1}$ der Figur in ein flächengleiches mit der Ecke **D** verwandelt wird. Wir haben mithin folgende metrische Eigenschaft der Hyperbel bewiesen: Zieht man durch die Punkte einer Hyperbel Parallele zu den Asymptoten, so besitzt das von diesen

Parallelen und von den Asymptoten gebildete Parallelogramm konstanten Flächeninhalt.

Aufgabe 36. Von einer Parabel sind gegeben der unendlich ferne Punkt, zwei weitere Punkte und die Tangente in einem derselben; die Kurve zu zeichnen.

Lösung. Wird mit S_1 der unendlich ferne Punkt, mit S der Punkt bezeichnet, dessen Tangente gegeben ist (Fig. 51), so wählen wir wiederum diese beiden Punkte als Zentren der projektiven Strahlenbüschel. Die unendlich ferne Gerade muss dann als Tangente e_1 in S_1 aufgefasst werden, während f die gegebene Tangente ist. Deren unendlich ferne Punkt giebt bei Durchführung ganz der gleichen Betrachtung wie vorhin, den Hilfspunkt P. Um weitere Punkte der Parabel zu zeichnen, haben wir also mit irgend einer Parallelen zu f die Geraden a_1 und a in D und D_1 zu schneiden. Die Strahlen d und d_1 begegnen sich in einem neuen Punkte **D** der Parabel.

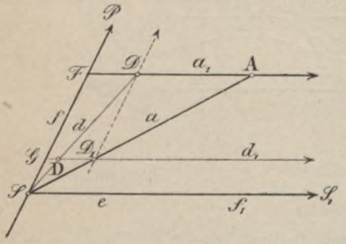

Fig. 51.

Für praktische Zwecke lässt sich dieses Verfahren noch etwas bequemer gestalten. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von d_1 und f mit G, so gilt die Proportion

$$\frac{FD}{FA} = \frac{SD_1}{SA} = \frac{SG}{SF}.$$

Wenn also z. B.

$$FD = \frac{1}{n} F\mathbf{A},$$

so ist auch

$$SG = \frac{1}{n} SF.$$

Darauf beruht folgende bekannte Konstruktion der Parabel: wir teilen (Fig. 52) die Strecke F**A** sowohl

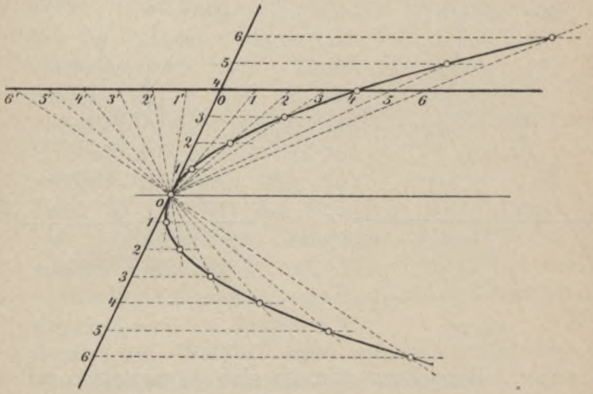

Fig. 52.

als auch SF in gleichviel gleiche Teile, z. B. vier, und ziehen die zugehörigen Strahlen der Büschel. Die Teilung darf nach bei den Seiten fortgesetzt werden.

Aufgabe 37. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und ein Punkt; man zeichne dessen Tangente.

Lösung. Sind a und b die Asymptoten und ist **A** der weiter gegebene Punkt (Fig. 53) so liefert der

Satz von Pascal ohne weiteres die gesuchte Tangente t und es zeigt sich aus der Figur, dass das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente durch den Berührungspunkt halbiert wird.

Aufgabe 38. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und eine Tangente; weitere Tangenten der Kurve zu zeichnen.

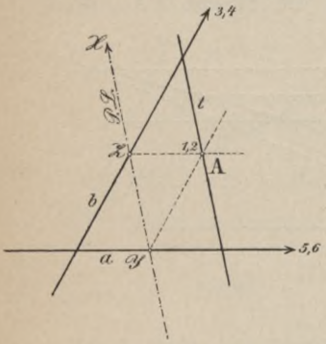

Fig. 53

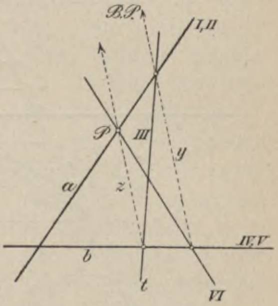

Fig. 54.

Lösung. Bezeichnen wir die eine Asymptote a mit I und II, die andere b mit IV und V, die gegebene Tangente t mit III, während die gesuchte Tangente VI durch einen auf a beliebig angenommenen Punkt P gehen soll (Fig. 54). Der Brianchon'sche Punkt wird in diesem Falle ein unendlich ferner und die Hauptdiagonalen y und z sind parallel.

Man erkennt dann aus der Figur die folgende Eigenschaft: Die Tangenten einer Hyperbel begrenzen mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Flächeninhalte.

Aufgabe 39. Von einer Parabel sind vier Tangenten gegeben. Den Berührungspunkt einer derselben zu konstruieren.

Lösung. Da der Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so berührt er die unendlich ferne Gerade der Ebene; diese unendlich ferne Gerade ist aber mit der Ebene gleichzeitig gegeben als fünfte Tangente. Um die Aufgabe zu lösen, bezeichnen wir diejenige Tangente, deren Berührungspunkt wir finden wollen, mit I und II, die unendlich ferne Gerade mit III, mit IV, V, VI die drei anderen Tangenten (Fig. 55).

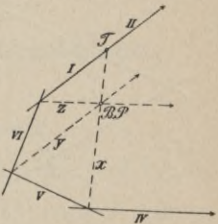

Fig. 55.

Dann ist (II, III) der unendlich ferne Punkt der mit II bezeichneten Tangente, (III, IV) der unendlich ferne Punkt von IV. Durch den Brianchon'schen Satz finden wir nun leicht den Berührungspunkt T auf der Tangente I.

Aufgabe 40. Parallel einer gegebenen Richtung an eine Parabel die Tangente zu konstruieren.

Lösung. Verlangt man, parallel einer gegebenen Geraden l die Tangenten an einem beliebigen Kegelschnitt zu finden, so giebt es deren zwei. Denn die Aufgabe kommt darauf hinaus, durch den Schnittpunkt von l mit der unendlich fernen Geraden die Tangenten an den Kegelschnitt zu legen. Berührt aber der Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade, wie dies bei der Parabel der Fall ist, so ist die unendlich ferne Gerade selbst eine der Tangenten durch diesen Punkt, es bleibt also bloss noch eine im Endlichen gelegene Tangente, parallel der Geraden l, die Aufgabe wird eine lineare.

Ist nun die Parabel etwa gegeben durch zwei Tangenten a und b mit ihren Berührungspunkten A und B (Fig. 56), so numerieren wir uns ein Brianchon-sches Sechsseit. I, II fallen auf a, III und IV auf b, V sei die gesuchte, zur gegebenen Geraden l parallele Tangente, VI sei die unendlich ferne Gerade. Dann ergiebt sich V wieder durch Konstruktion des Brianchon'schen Punktes, wobei noch zu beachten, dass der Schnittpunkt (V, VI) natürlich der unendlich ferne Punkt von l ist.

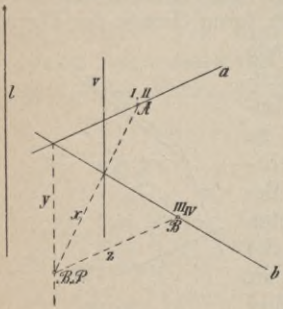

Fig. 56.

Aufgabe 41. Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten. Ihren unendlich fernen Punkt (die Richtung der Achse) zu bestimmen.

Lösung. Bezeichnen wir (Fig. 57) die vier gegebenen Tangenten mit I, II, III, IV, die unendlich ferne Gerade mit V und VI, so giebt die Linie y, welche in dem Brianchon'schen Sechsseit nach dem Berührungspunkt (V, VI) läuft, die Richtung, in welcher der unendlich ferne Punkt der Parabel liegt.

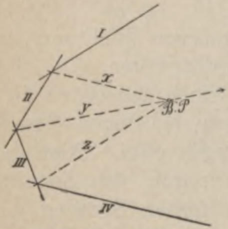

Fig. 57.

VI. Abschnitt.

Die Polarentheorie der Kegelschnitte.

§ 26. Pol und Polare.

Konjugierte Punkte und konjugierte Gerade.

75. Liegt ein Kegelschnitt k^2 gegeben vor und ist g eine Gerade, welche ihn in den Punkten A und B trifft (Fig. 58), so kann man zu irgend einem Punkte X von g den vierten harmonischen X′ bezüglich A und B

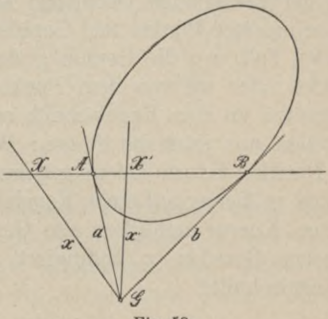

Fig. 58.

konstruieren, so dass also $(X X' A B) = -1$. Wir nennen zwei solche Punkte X und X′ „konjugiert" in Bezug auf den Kegelschnitt.

Würde die Gerade g den Kegelschnitt berühren, so vereinigen sich A und B in einen Punkt, etwa C. Der vierte harmonische zu einem Punkt X fiele dann, wo auch X auf der Tangente liegen mag, wieder mit C zusammen. Zu jedem Punkte einer Tangente ist also der Berührungspunkt konjugiert.

Gehen andererseits von einem Punkte G aus zwei Tangenten a und b an den Kegelschnitt, so kann man zu irgend einer Geraden x durch G den vierten harmonischen Strahl x′ bestimmen in Bezug auf a, b. Es ist also dann $(x x' a b) = -1$. Wir nennen zwei solche Strahlen x, x′ „konjugierte Gerade" in Bezug auf den Kegelschnitt. Rückt G auf den Kegelschnitt nach G_0, so fallen die beiden Tangenten in eine zusammen, nämlich in die Tangente c in G_0 an den Kegelschnitt. Zu irgend einer Geraden durch den Punkt G_0 des Kegelschnittes ist dann c stets die konjugierte Gerade. — In der rechnenden Geometrie kann man diese Definition konjugierter Punkte und Geraden formal übertragen auf den Fall, wo die Gerade g den Kegelschnitt nicht schneidet oder wo von dem Punkte G aus keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt möglich sind.

Wir stellen uns jetzt die Fragen: Wo liegen überhaupt alle Punkte, die zu einem gegebenen Punkte X konjugiert sind in Bezug auf einen Kegelschnitt? Ferner: Was für eine Kurve umhüllen alle Geraden, die zu einer gegebenen Geraden x konjugiert sind in Bezug auf einen Kegelschnitt?

Polare eines Punktes.

76. Wir gehen aus von der Mac-Laurinschen Konfiguration, wie sie in Figur 43 erörtert wurde. Bringen wir dort noch AC in X′, BD in X″ zum Schnitt

mit NN_1, so folgt aus dem Viereck ABCD, dass sowohl $(XX'AC) = -1$ als auch $(XX''BD) = -1$.

Es sei nun der Kegelschnitt gegeben, sowie der Punkt X; durch X ziehen wir eine Sehne AC beliebig. Bringen wir die Tangenten a und c in A und C in N zum Schnitt und konstruieren ferner X′ als den vierten harmonischen zu X bezüglich A und C, so ist durch N und X′ die Linie NN_1 oder x festgelegt. Wie man

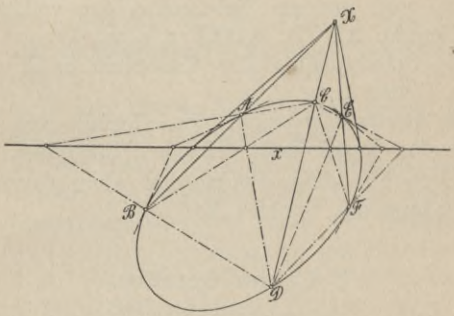

Fig. 59.

also auch eine Sehne BD durch X zieht, der vierte harmonische X″ zu X bezüglich B und D muss stets auf dieser Linie x gelegen sein. Diese Gerade x ist demnach der Ort aller zum Punkte X konjugierter Punkte. Wir nennen sie die „Polare" des Punktes X in Bezug auf den Kegelschnitt. Auf ihr müssen sich dann auch die Tangenten b und d in B und D begegnen. Ebenso ist XZ oder y die Polare von Y und XY oder z die Polare von Z.

Es ergeben sich also folgende Eigenschaften der Polaren eines Punktes, die wir durch die Figur 59 zur Anschauung bringen:

Satz 37. „Hat man einen Punkt X und einen Kegelschnitt und zieht durch ihn alle möglichen Linien, welche in A, B oder C, D oder E, F u. s. w. den Kegelschnitt treffen, und konstruiert man

1) Zu A, B oder C, D oder E, F u. s. w. den vierten harmonischen in Bezug auf X,
2) die zwei anderen Nebenecken der vollständigen Vierecke ABCD, ABEF u. s. w.,
3) die Schnittpunkte der Tangenten in A und B, in C und D u. s. w.,
4) die Berührungspunkte der allenfalls von X aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten,

so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden x, der Polaren des Punktes X.“*)

Pol einer Geraden.

77. Ganz in ähnlicher Weise zeigen wir, dass alle zu einer Geraden x konjugierten Geraden durch einen Punkt X gehen, den wir den „Pol“ von x nennen. In der That denken wir uns in Figur 43 noch die Linien NX und N_1X gezogen, die mit x' bezw. x'' bezeichnet werden mögen, so ist sowohl $(xx'ac) = -1$ als auch $(xx''bd) = -1$. Haben wir nun x oder NN_1 beliebig angenommen, ferner von einem Punkte N aus die Tan-

*) In dieser Figur, sowie in den folgenden, ist der Bequemlichkeit wegen als Kegelschnitt eine Ellipse gewählt. Selbstverständlich gelten die Sätze für jeden Kegelschnitt, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist.

genten a und c an den Kegelschnitt gezogen, welche in A und C berühren, so können wir X schon bestimmen als Schnittpunkt von AC und dem Strahle x′, der zu x harmonisch ist bezüglich a und c. Wo dann auch auf x ein Punkt N_1 weiter angenommen wird, immer muss die Berührungssehne BD der durch N_1 gehenden Tangenten b und d durch den bereits festgelegten Punkt X gehen und immer muss auch der Strahl x″, der zu x harmonisch in Bezug auf b und d, ebenfalls durch X laufen. Damit ergiebt sich (Fig. 43).

Satz 38. „Legt man von den Punkten einer Geraden x aus die Tangentenpaare an einen Kegelschnitt und konstruiert

1) zu x den vierten harmonischen Strahl bezüglich eines solchen Tangentenpaares,
2) in dem von zwei solchen Tangentenpaaren gebildeten vollständigen Vierseit die zwei anderen Verbindungslinien der Paare von Gegenecken,
3) die zu einem Tangentenpaar gehörige Berührungssehne (Verbindungslinie der Berührungspunkte),
4) in den (etwaigen) Schnittpunkten von x mit dem Kegelschnitt die Tangenten,

so gehen alle diese Linien durch einen Punkt X, den Pol von x.“

Natürlich gehört zu X wieder x als Polare. Ferner folgt aus 3) in den beiden letzten Sätzen noch:

Zusatz. „Liegt der Punkt X auf dem Kegelschnitt, so wird seine Polare die Tangente und ebenso wird der Pol einer Tangente der Berührungspunkt derselben.“

Aufgabe 42. Zerfällt der Kegelschnitt (die Kurve 2. Ordnung) in zwei Gerade, so folgt aus Satz 37 der früher in 29. erwähnte Satz. Welcher Satz ergiebt sich, wenn der Kegelschnitt (als Kurve 2. Klasse) in zwei Punkte zerfällt?

§ 27. Das Polardreieck.

78. Wählen wir einen Punkt X in der Ebene eines Kegelschnittes beliebig und zeichnen seine Polare x; auf x sei der Punkt Y beliebig angenommen. Dann muss die Polare y von Y jedenfalls durch X gehen, da X und Y konjugierte Punkte. Der Schnittpunkt von x und y sei Z. Dieser Punkt Z ist konjugiert zu X und Z ist auch konjugiert zu Y, also ist XY oder z die Polare des Punktes Z. In XYZ haben wir folglich ein Dreieck erhalten von der Eigenschaft, dass jede seiner Ecken die gegenüberliegende Seite zur Polaren hat. Wir nennen ein solches Dreieck ein „Polardreieck" des Kegelschnittes.

Wir haben schon in Figur 43 in XYZ ein Polardreieck erhalten; aus dieser Figur können wir entnehmen, wie man sich in anderer Weise ein Polardreieck eines Kegelschnittes verschaffen kann. Sind nämlich A, B, C, D irgend vier Punkte auf dem Kegelschnitt, so konstruieren wir in dem vollständigen Viereck derselben die drei Nebenecken: diese bilden dann ein Polardreieck. — Ist umgekehrt in Figur 60 ein Polardreick XYZ konstruiert, so finden wir in folgender Weise eine Gruppe von Punkten A, B, C, D, die zu ihm in der gleichen Beziehung steht. Wir wählen A beliebig irgendwo auf dem Kegelschnitt, ziehen AZ, welche Linie zum zweitenmal in B den Kegelschnitt trifft; dann verbinden wir X mit A und B, wodurch wir die Schnittpunkte C und D auf diesen Verbindungslinien erhalten. Der Schnittpunkt von CD und AB muss auf der Polaren x von X liegen, also geht CD durch Z. Ebenso müssen AD und BC durch Y laufen. — Lassen wir jetzt den Punkt X auf Z fortrücken und konstruieren für jede Lage seine Polare. Um z. B. die Polare für X′ zu finden, ziehen wir AX′, welche Linie den Kegelschnitt nochmals in C′ trifft. Dann liefert BC′ auf z

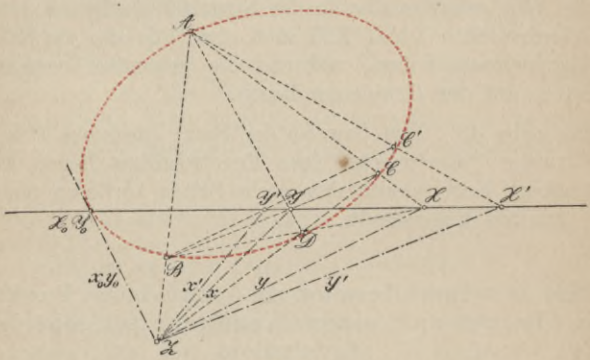

Fig. 60.

den Punkt Y′, so dass ZY′ oder x′ die Polare von X′ wird. Es ist folglich

$$\begin{aligned}\text{P. Reihe } (X, X' \ldots) &\;\overline{\overline{\wedge}}\; \text{Str. Büschel } A\,(X, X' \ldots)\\ &\;\overline{\wedge}\; \text{Str. Büschel } B\,(C, C' \ldots)\\ &\;\overline{\wedge}\; \text{P. Reihe } (Y, Y' \ldots)\\ &\;\overline{\overline{\wedge}}\; \text{Str. Büschel } Z\,(Y, Y' \ldots).\end{aligned}$$

Also ist auch die Punktreihe X, X′ ... projektiv zum Büschel x, x′ ... der Polaren und wir erhalten

Satz 39. „Rückt ein Punkt X auf einer Geraden z fort, so beschreibt seine Polare x in Bezug auf einen

Kegelschnitt einen Strahlenbüschel um den Pol Z von z und dieser Strahlenbüschel ist projektiv zu der von dem Punkte beschriebenen Punktreihe.“

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt Z, so bewegt sich ebenso der Pol dieser Geraden auf der Polaren z dieses Punktes.

Wir erhalten also in der Figur 60 ein System von Polardreiecken XYZ, X′Y′Z u. s. w., die alle die Ecke Z gemeinsam haben, während die gegenüberliegenden Seiten auf der Geraden z liegen.

Aufgabe 43. Man beweise den Satz: Die sechs Ecken zweier Polardreiecke eines Kegelschnittes liegen auf einem Kegelschnitt, ihre sechs Seiten berühren einen zweiten Kegelschnitt.

Die zu einer Geraden und zu einem Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt gehörige Involution.

79. Die Punktreihe X, X′ . . . ist nicht bloss projektiv zur Punktreihe Y, Y′ . . ., sondern sie liegt zu ihr involutorisch, da ja die Polare y von Y durch X geht. Die Paare X, Y, X′Y′ . . . bilden eine Punktinvolution, eben die Involution konjugierter Punkte auf z. Ebenso gehören die Strahlenpaare x, y, x′, y′ . . . einer Involution an, der Involution konjugierter Geraden durch Z. Schneidet z den Kegelschnitt in reellen Punkten, so sind dies die Doppelpunkte der Punktinvolution (z. B. X_0, Y_0). Gehen von Z aus reelle Tangenten an den Kegelschnitt, so liefern diese die Doppelstrahlen der Strahleninvolution (z. B. x_0, y_0). Aber auch wenn z den Kegelschnitt n i c h t in reellen Punkten

trifft, so kann man trotzdem die Punktinvolution nach dem eben Bemerkten festlegen. Sie wird dann natürlich eine elliptische und kann dazu dienen, die imaginären Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt in geometrisch brauchbarer Weise zu ersetzen. Wenn ferner von Z aus keine Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden können, so wird die Involution der konjugierten Geraden durch Z, die immer noch bestimmt werden kann, eine elliptische. Statt der imaginären Tangenten von Z aus führt man dann diese Involution in die Betrachtung ein. Berührt z den Kegelschnitt, oder fällt Z auf denselben, so wird die zu z oder Z gehörige Involution eine parabolische.

Das Dualitätsgesetz in der Ebene.

80. Ist in einer Ebene ein Kegelschnitt k^2, speziell etwa auch ein Kreis, gegeben und irgend eine Figur, so kann man zu jedem Punkte die Polare, zu jeder Geraden den Pol in Bezug auf k^2 zeichnen. Den Punkten einer Geraden entsprechen dann nach Satz 39 Gerade, die alle durch den Pol dieser Geraden gehen. Vier Punkten einer Geraden sind also vier Strahlen durch einen Punkt zugeordnet und es ist überdies das Doppelverhältnis der vier Strahlen gleich dem der vier Punkte. Dem Schnittpunkt zweier Geraden entspricht die Verbindungslinie der Pole der beiden Geraden u. s. w. Aus der ersten Figur können wir demnach eine zweite ableiten, die ihr genau nach dem Dualitätsgesetz der Ebene 7. a entspricht. Jetzt ist aber zwischen den beiden Figuren auch ein direkter, geometrischer Zusammenhang hergestellt, sie sind „reziprok“ zu einander in Bezug auf den Kegelschnitt. Irgend einer Kurve

als Ort von Punkten entspricht eine Kurve, eingehüllt von den entsprechenden Geraden. Die Klasse dieser letzteren ist gleich der Ordnung der ersten Kurve. Die Punkte des Kegelschnittes k^2 sind dadurch ausgezeichnet, dass die ihnen entsprechenden Geraden, nämlich die Tangenten von k^2, durch sie hindurchgehen.

§ 28. Mittelpunkt, Durchmesser, Achsen eines Kegelschnittes.

Der Mittelpunkt.

81. Aus den allgemeinen Sätzen der Polarentheorie erhalten wir wieder spezielle, metrische, wenn wir das Unendlich-Ferne hereinziehen. Wir haben die Annahme als zulässig und notwendig erkannt, dass alle unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden liegen. Auch zu dieser unendlich fernen Geraden können wir dann den Pol zeichnen in Bezug auf einen Kegelschnitt und wir erhalten ihn, indem wir von den Punkten der unendlich fernen Geraden aus Tangentenpaare an den Kegelschnitt legen. Die zugehörigen Berührungssehnen gehen alle durch diesen Pol. Wir nennen den Pol der unendlich fernen Geraden den „Mittelpunkt" des Kegelschnittes, jede durch ihn gehende Sehne einen „Durchmesser". Die beiden Schnittpunkte eines Durchmessers mit dem Kegelschnitt müssen harmonisch getrennt werden durch den Mittelpunkt und durch den Schnittpunkt des Durchmessers mit der unendlich fernen Geraden, also muss jeder Durchmesser im Mittelpunkt halbiert werden (Satz 37, 1).

Für die Ellipse und Hyperbel liegt der Mittelpunkt im Endlichen, bei der letzteren ist er (Satz 38, 4) der Schnittpunkt der Asymptoten; für die Parabel, welche die unendlich ferne Gerade berührt, fällt der

Mittelpunkt in den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden, also in den unendlich fernen Punkt der Parabel. Alle Durchmesser der Parabel sind folglich parallel.

Es hat sich mithin ergeben:

Satz 40. „Die Verbindungslinien der Berührungspunkte paralleler Tangenten eines Kegelschnittes (Ellipse oder Hyperbel) gehen alle durch den Mittelpunkt und heissen Durchmesser. Jeder Durchmesser wird im Mittelpunkt halbiert (Fig. 61a und 61b)."

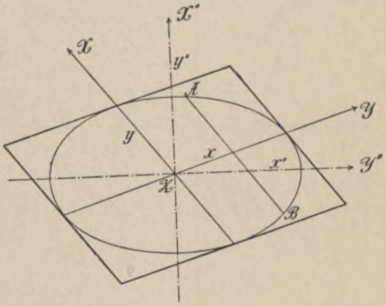

Fig. 61a.

Konjugierte Durchmesser.

82. Nehmen wir jetzt in Figur 60 z als die unendlich ferne Gerade. Dann wird Z der Mittelpunkt des Kegelschnittes (Fig. 61a und 61b). Die Linien xy, x′y′ werden konjugierte Gerade durch den Mittelpunkt: wir nennen sie „konjugierte Durchmesser". Jeder von ihnen ist also die Polare des unendlich fernen Punktes des anderen. Zieht man zu einem der kon-

jugierten Durchmesseer eine parallele Sehne AB, so muss die Mitte dieser Sehne auf dem konjugierten Durchmesser liegen, da sie mit X zusammen A und B harmonisch trennt. In Bezug auf konjugierte Durchmesser zeigt also der Kegelschnitt eine „schiefe Symmetrie". Dies liefert

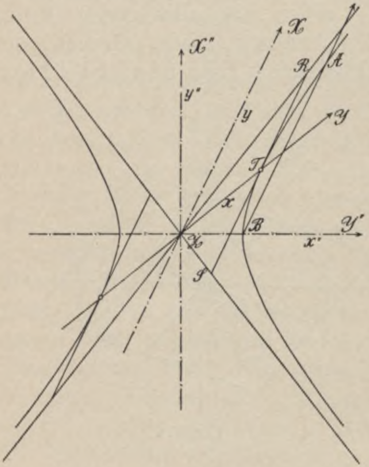

Fig. 61 b.

Satz 41. „Die konjugierten Geraden durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes liefern die Involution der konjugierten Durchmesser. Jeder von zwei konjugierten Durchmessern halbiert alle Sehnen, die zum anderen parallel laufen. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser. Je zwei konjugierte Durchmesser bilden mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck (Fig. 61a und 61b)."

Hat man (Fig. 61c) eine Parabel und sind AB, A′B′, . . . parallele Sehnen, M, M′ . . . deren Mitten, so liegen diese alle auf einem Durchmesser, der durch

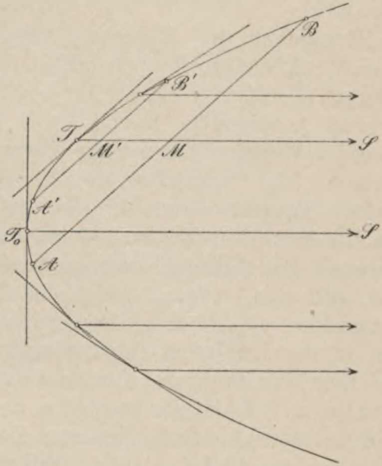

Fig. 61 c.

den unendlich fernen Punkt S der Parabel geht. Der Durchmesser schneidet die Parabel nochmals in T und die Tangente in diesem Punkte ist parallel AB.

Die Achsen eines Kegelschnittes.

83. In der Involution der konjugierten Durchmesser eines Mittelpunkt-Kegelschnittes sind nach Satz 22 stets auch zwei aufeinander senkrechte (x″, y″) vorhanden.

Man bezeichnet dieselben als die „Hauptachsen“ des Kegelschnittes.

Bei der Ellipse muss gemäss ihrer Definition (vergl. 72) die Involution der konjugierten Durchmesser eine elliptische sein, beide Achsen schneiden die Kurve in reellen Punkten (grosse und kleine Achse) (Fig. 61a).

Zum Mittelpunkt der Hyperbel dagegen gehört eine Involution mit reellen Doppelstrahlen. Diese sind die Aymptoten der Kurve. Jede Asymptote ist also zu sich selbst konjugiert. Irgend zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel trennen die Asymptoten harmonisch. Daraus folgt unmittelbar, dass der Berührungspunkt T einer Tangente (Fig. 61b) in der Mitte des Abschnittes RS liegt, den die Asymptoten auf der Tangente erzeugen. Die Achsen halbieren die Winkel der Asymptoten, die eine, x'', schneidet die Hyperbel in reellen, die andere, y'', in imaginären Punkten.

Treten in der Involution der konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes zwei Paare auf einander senkrechter Strahlen auf, so ist die Involution nach Satz 22 eine rechtwinkelige und alle konjugierten Durchmesserpaare bilden rechte Winkel. Dieser Fall tritt immer und nur dann ein, wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht. Dagegen kann man bei jedem Kegelschnitt einzelne Punkte finden, welche sich dadurch auszeichnen, dass die zu ihnen in Bezug auf den Kegelschnitt gehörigen Strahleninvolutionen rechtwinkelige sind. Dies sind die „Brennpunkte“ des Kegelschnittes.

Unter den parallelen Durchmessern einer Parabel giebt es einen T_0S, der senkrecht steht auf der Tangente, die in seinem (eigentlichen) Schnittpunkt T_0 mit der Parabel konstruiert werden kann (Fig. 61c). Dieser

Durchmesser heisst die „Achse“, der Punkt T_0 der Scheitel der Parabel.

Aufgabe 44. Schneidet eine beliebige Gerade eine Hyperbel in den Punkten A und B und die Asymptoten in C und D, so ist $CA = BD$. Beweis durch Anwendung des soeben bewiesenen Satzes über die Tangente.

Aufgabe 45. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegeben. Seinen Mittelpunkt zu konstruieren.

Lösung. Man verschaffe sich parallele Tangenten und damit einen Durchmesser.

Aufgabe 46. Man betrachte die Mac-Laurin'sche Konfiguration (Fig. 43) für den Fall, dass z die unendlich ferne Gerade ist und leite auf diese Weise den Satz ab: In irgend einem, einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser.

VII. Abschnitt.

Die Kegel- und Regel-Flächen 2. Ordnung als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde.

§ 29. Über Flächen im allgemeinen.

Regelflächen.

84. Unter einer Fläche (z. B. einer Ebene, einer Kugel, einem Kegel) verstehen wir den Inbegriff von zweifach unendlich vielen (∞^2) Punkten, die durch ein mathematisches Gesetz bestimmt werden können. In der rechnenden Geometrie wird eine Fläche definiert durch eine Gleichung, der die Koordinaten (x, y, z) eines jeden ihrer Punkte genügen müssen.

Eine Fläche kann in Sonderheit die Eigenschaft haben, dass sie erzeugt werden kann durch Bewegung einer festen Kurve, die wir uns etwa aus Draht hergestellt denken. Im einfachsten Falle wird diese Kurve eine Gerade sein. Die Flächen, die auf diese Weise durch Bewegung einer Geraden entstehen, heissen allgemein „Regelflächen". Sie enthalten, gemäss ihrer Erzeugung, ein einfach unendliches System von geraden Linien, die wir die „Erzeugenden" der Fläche nennen. Solche „geradlinige" Flächen treten uns entgegen, sobald wir die Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe betrachten, die beliebig im Raume liegen, wie ja z. B. zwei beliebig im Raume gelegene projektive Punktreihen nach 53. als Erzeugnis ein solches System von einfach unendlich vielen, im Raume angeordneten Geraden lieferten.

Wir können nun zwei durchaus verschiedene Typen von Regelflächen unterscheiden je nach dem Verhalten unendlich benachbarter Erzeugenden der Fläche. Folgende Fälle sind nämlich zu trennen:

a) Irgend zwei unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche schneiden sich stets. Dann bestimmen dieselben eine Ebene und der zwischen den Erzeugenden gelegene Teil der Ebene ist ein Element der Fläche. Es sind also die Elemente der Fläche sämtlich eben (Fig. 62). Eine solche Fläche (die auch durch Bewegung einer Ebene erzeugt werden kann) heisst eine „abwickelbare“ (développable). Irgend zwei einander nicht unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche brauchen sich natürlich nicht zu schneiden.

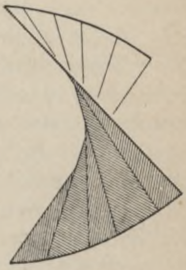
Fig. 62.

Die einfachste abwickelbare Fläche ist der „Kegel“. Er entsteht, wenn eine Gerade sich irgendwie bewegt, während einer ihrer Punkte festgehalten wird. Dieser fixierte Punkt heisst die „Spitze“ des Kegels. Liegt die Spitze im Unendlichen, bewegt sich also eine Gerade nach irgend einem Gesetze, aber stets parallel zu sich selbst, so entsteht aus dem Kegel der „Cylinder“.

b) Je zwei unendlich benachbarte Gerade der Flächen schneiden sich nicht. Die einzelnen Elemente der Fläche sind nicht eben, sondern gekrümmt, da zwei Nachbargerade auf der Fläche, so nahe aneinander man sie auch wählen mag, sich nicht scheiden, sondern windschief zu einander verlaufen. Solche Flächen heissen „windschiefe" Regelflächen. Wir werden ein Beispiel einer solchen Fläche weiter unten kennen lernen.

Tangentialebene einer Fläche.

85. Ist auf einer Fläche ein Punkt P gegeben, so können wir durch P auf der Fläche unendlich viele Kurven zeichnen, etwa die Schnittkurven mit den Ebenen eines Büschels, dessen Achse durch P geht. Jede dieser Kurven besitzt in P eine Tangente und diese Tangente hat mit der betreffenden Kurve, also auch mit der Fläche, zwei Nachbarpunkte in P gemein, ist also auch eine Tangente der Fläche. Nun zeigt die Analysis, dass alle diese Tangenten in einem Punkte P an eine Fläche in einer Ebene liegen, der Tangentialebene in P an die Fläche. P heisst der Berührungspunkt der Tangentialebene. Jede durch P in dieser Ebene gezogene Gerade hat in P zwei benachbarte Punkte mit der Fläche gemein.

Liegt eine Gerade h ganz auf einer Fläche, so geht also die Tangentialebene in jedem Punkte von h jedenfalls durch diese Gerade hindurch.

Liegen auf einer Fläche zwei gerade Linien, die sich schneiden, so ist die Tangentialebene in ihrem Schnittpunkt bestimmt als die Ebene dieser beiden Geraden, gleichgültig ob die beiden Geraden unendlich benachbart sind oder ob sie einen endlichen Winkel einschliessen.

Ist P ein Punkt einer Kegelfläche, so geht die Tangentialebene in P jedenfalls durch die Erzeugende hindurch, welche durch P läuft. Dies ist die Verbindungslinie von P mit der Spitze S des Kegels. Durch S giebt es eine zu dieser Erzeugenden benachbarte Erzeugende und die durch beide bestimmte Ebene muss die Tangentialebene in P sein. Es ist also für alle Punkte einer Erzeugenden einer Kegelfläche (und allgemeiner einer abwickelbaren Fläche) die Tangentialebene die gleiche. Folglich berührt die Tangentialebene einer Kegelfläche oder abwickelbaren Fläche längs einer Erzeugenden die Fläche (Beispiel: der Kreiskegel).

Ordnung und Klasse einer Fläche.

86. Unter der Ordnung einer Fläche versteht man die Anzahl der Schnittpunkte, welche eine beliebige Gerade mit der Fläche liefert und zwar im algebraischen Sinne, also ohne Rücksicht auf die Realität (vgl. 54.). Diese Ordnung giebt dann auch die Maximalzahl der reellen Schnittpunkte, welche eine Gerade mit der Fläche gemein haben kann.

Hat man eine Kegelfläche, z. B. eine von der 2. Ordnung, so wird sie von irgend einer Geraden in zwei Punkten geschnitten. Nach diesen zwei Punkten laufen nun zwei Erzeugende der Kegelfläche, nämlich die Verbindungslinien derselben mit der Spitze. Die durch die Gerade und die Spitze gehende Ebene hat mit der Kegelfläche die genannten beiden Erzeugenden und bloss diese gemein. Bei einer Kegelfläche giebt also die Ordnung auch die Zahl der Erzeugenden, welche eine beliebige, durch die Spitze gehende, Ebene aus dem Kegel ausschneidet.

Der Schnitt irgend einer Ebene mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Kurve n^{ter} Ordnung, da jede

Gerade in dieser Ebene n Punkte mit der Fläche, folglich eben so viele mit der Schnittkurve gemein hat.

Unter der Klasse einer Fläche verstehen wir die Anzahl der Tangentialebenen, die durch eine beliebige Gerade an die Fläche gelegt werden können, auch wieder im Sinne der Analysis.

Eine Kegelfläche, überhaupt jede abwickelbare Fläche besitzt nur einfach unendlich viele (∞^1) Tangentialebenen. Bei diesen Flächen definiert man die Klasse als die Zahl ihrer Tangentialebenen, die durch einen beliebigen Punkt hindurchgehen.

Beispiel einer windschiefen Regelfläche.

87. Gegeben sind drei Gerade h, h_1, h_2, von denen keine zwei in einer Ebene liegen. Eine Gerade bewegt sich so, dass sie beständig jede dieser drei Geraden schneidet. Man beweise

1) die bewegte Gerade schneidet auf den drei festen Geraden projektive Punktreihen aus;
2) schneidet irgend eine Gerade die bewegte Gerade in drei ihrer Lagen, so schneidet sie dieselbe in jeder Lage.

Zunächst ist zu zeigen, wie man sich Gerade verschaffen kann, welche h, h_1 und h_2 begegnen. Wählen wir auf h einen Punkt A willkürlich (Fig. 63), so können wir durch A und h_1 eine Ebene $(A h_1)$, sowie durch A und h_2 eine Ebene $(A h_2)$ legen. Diese beiden Ebenen schneiden sich dann in einer Geraden a, welche h_1 in A_1, sowie h_2 in A_2 trifft, also die verlangte Eigenschaft hat. Auf diese Weise können wir unendlich viele solche Gerade b, c, d u. s. w. finden, indem wir auf h Punkte B, C, D ... wählen. Es ist klar, dass irgend zwei solche Gerade z. B. a und b sich nicht schneiden. Denn wenn sie sich schneiden würden, lägen sie in einer Ebene und in der gleichen Ebene müssten auch h, h_1, h_2 liegen, was gegen

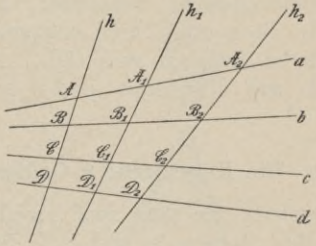

Fig. 63.

unsere Voraussetzung ist. Also beschreibt die Gerade eine windschiefe Regelfläche. Es ist aber dann nach 23, Satz 4

$$(ABCD) = [(Ah_1)(Bh_1)(Ch_1)(Dh_1)] = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

und

$$(ABCD) = [(Ah_2)(Bh_2)(Ch_2)(Dh_2)] = (A_1 B_1 C_1 D_1)$$

folglich

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

Es sei ferner eine Gerade h_x gefunden, welche a, b und c schneidet. Projizieren wir nun die projektiven Punktreihen A, B, C . . . auf h und A_1, B_1, C_1 . . . auf h_1 je aus h_x durch einen Ebenenbüschel, so sind diese Ebenenbüschel projektiv. Dann sind aber folgende Ebenen identisch:

$$(A h_x) \equiv (A_1 h_x) \equiv (h_x a)$$
$$(B h_x) \equiv (B_1 h_x) \equiv (h_x b)$$
$$(C h_x) \equiv (C_1 h_x) \equiv (h_x c).$$

Es fallen also in den projektiven Büscheln drei Ebenen mit ihren entsprechenden zusammen, folglich muss überhaupt jede Ebene mit ihrer entsprechenden identisch sein. Es ist demnach auch $(D h_x) \equiv (D_1 h_x)$ d. h. die Gerade d und überhaupt jede solche Gerade schneidet h_x.

§ 30. Die Kegelfläche 2. Ordnung.

88. Betrachten wir jetzt zwei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen s und s_1, die sich in S schneiden mögen (Fig. 64). Dann liefern je zwei entsprechende Ebenen eine Schnittlinie, die auch durch S geht. Das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel ist demnach eine Kegelfläche mit der Spitze S. Wir fragen zunächst nach der Ordnung derselben. Zählen wir also ab, in wieviel Punkten eine beliebige Gerade g dieser Kegelfläche begegnet. Zu dem Zwecke werde durch g irgend eine Ebene gelegt. Diese wird die projektiven Ebenenbüschel s und s_1 in zwei projektiven Strahlenbüschel S und S_1 schneiden und die Schnittkurve der Ebene mit der Kegelfläche stellt sich dar als das Erzeugnis dieser projektiven Strahlenbüschel. Also ist diese Schnittkurve der Ebene mit dem Kegel ganz allgemein ein Kegelschnitt. Die Gerade g aber trifft diesen in zwei Punkten und das sind zugleich ihre Schnittpunkte mit der Kegelfläche. Es ist mithin die Kegelfläche von der 2. Ordnung. Die analytische Geometrie zeigt überdies, dass sich jede Kegelfläche 2. Ordnung in dieser Weise durch projektive Ebenen-

büschel erzeugen lässt. Es ist also die hier betrachtete Kegelfläche die allgemeine 2. Ordnung. Fügen wir noch die Bemerkung hinzu, dass eine Tangentialebene des Kegels die gewählte Ebene in einer Linie

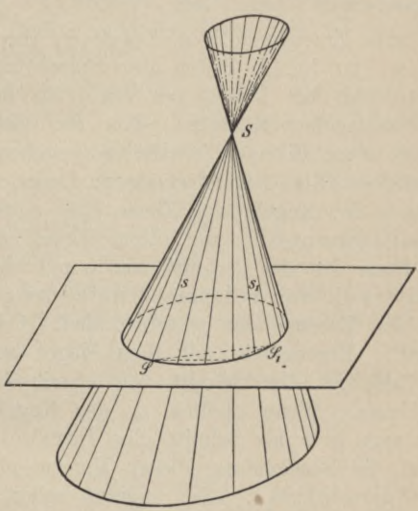

Fig. 64.

schneidet, welche Tangente des Schnittkegelschnittes in dieser Ebene sein muss, so ergiebt sich ganz ebenso wie in 55.

Satz 42. „Zwei projektive Ebenenbüschel mit sich schneidenden Achsen s und s_1 erzeugen durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen einen allgemeinen Kegel 2. Ordnung, der auch die Achsen s und s_1 als Erzeugende enthält. Die Tangentialebenen längs dieser beiden Erzeugenden sind die Ebenen, welche der Verbindungsebene $(s\,s_1)$ bezüglich entsprechen. Der Schnitt des Kegels mit einer beliebigen Ebene ist ein Kegelschnitt. Der Kegel ist auch von der 2. Klasse."

Da jede Erzeugende des Kegels in ihrer ganzen Ausdehnung zu beiden Seiten der Spitze zu nehmen ist, so besteht der Kegel aus zwei in der Spitze zusammenhängenden Mänteln. Was den Schnitt des Kegels mit einer Ebene ε betrifft, so ergeben sich die drei möglichen Fälle folgendermassen: Legen wir durch die Spitze S des Kegels eine Ebene $\varepsilon_0 \# \varepsilon$, so kann ε_0 zwei reelle Erzeugende mit dem Kegel gemeinsam haben. Dann ist der Schnitt von ε mit dem Kegel eine Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen durch diese beiden Erzeugenden gegeben sind. Oder ε_0 hat keine reelle Erzeugende mit dem Kegel gemein, in diesem Falle ist der Schnitt von ε mit dem Kegel eine Ellipse. Wenn endlich ε_0 den Kegel berührt, so wird man in ε als Schnitt eine Parabel erhalten. Damit ist die Bezeichnung dieser Kurven als „Kegelschnitte" gerechtfertigt. Sie stammt schon von den Griechen her.*)

89. Legt man von einem Punkte S im Raume die projizierenden Strahlen nach den Punkten eines Kreises, so erhält man eine Kegelfläche. Wählt man zwei ihrer Erzeugenden aus, so kann man mit diesen als Achsen die Kegelfläche durch projektive Ebenenbüschel erzeugen, ausgehend von der Erzeugung des Kreises durch projektive Strahlenbüschel. Die Kegelfläche ist also von der 2. Ordnung — sie ist, wie

*) Apollonius von Pergae: „Conica" (250 v. Chr.).

man zeigen kann, identisch mit der allgemeinen Kegelfläche 2. Ordnung — und wird also von einer beliebigen Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten. Dies liefert den

Satz 43. „Projiziert man einen Kreis aus irgend einem Punkte auf eine Ebene, so ist die Projektion ein Kegelschnitt."

Wird der Punkt S speziell auf der Senkrechten angenommen, die man im Mittelpunkte M des Kreises auf der Ebene desselben errichten kann, so erhält man einen speziellen Kegel 2. Ordnung, der auch erzeugt werden kann durch Drehung eines rechtwinkeligen Dreieckes um die Kathede SM. Dieser Kegel heisst „gerader Kreiskegel", „Umdrehungskegel", „Rotationskegel". Der Schnitt desselben mit einer beliebigen Ebene ist aber auch wieder ein Kegelschnitt.

Nimmt man die Achsen s und s_1 der projektiven Ebenenbüschel parallel an, so rückt die Spitze S des

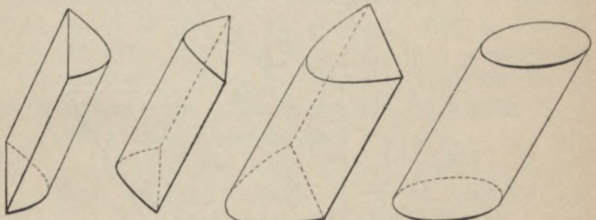

Fig. 65 a. Fig. 65 b. Fig. 65 c.

Kegels ins Unendliche und man erhält als Erzeugnis einen „Cylinder 2. Ordnung". Derselbe kann drei verschiedene Formen annehmen, je nachdem die unendlich ferne Ebene zwei reelle oder zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Gerade aus dem Cylinder ausschneidet. Es giebt deswegen einen hyperbolischen (Fig. 65a), einen parabolischen (Fig. 65b) und einen elliptischen (Fig. 65c) Cylinder 2. Ordnung. Man kann zeigen, dass der letztere auch erhalten wird, wenn man durch die Punkte eines Kreises in beliebiger Richtung unter sich parallele Gerade legt.

Steht endlich die Richtung dieser parallelen Geraden auf der Ebene des Kreises senkrecht, so geht der elliptische Cylinder in den „Umdrehungs"-, „Rotations"- oder „Kreis"-Cylinder über.

§ 31. Die geradlinige Fläche 2. Ordnung.

90. Betrachten wir jetzt zwei projektive Ebenenbüschel in allgemeiner Lage, deren Achsen s und s_1

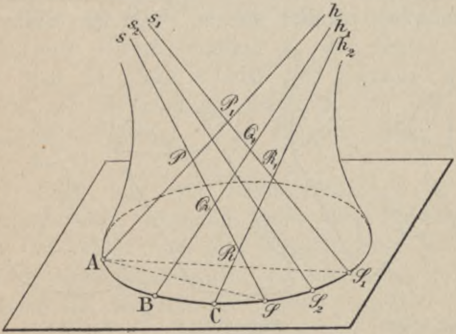

Fig. 66.

sich also nicht schneiden. Je zwei entsprechende Ebenen der Büschel, wie etwa α und α_1, werden sich in einer Geraden h schneiden, die sowohl s in P als s_1 in P_1 treffen muss (Fig. 66). Wir erhalten auf diese Weise unendlich viele Gerade h, h_1, h_2 u. s. w., die offenbar eine windschiefe Regelfläche bilden (Beweis dafür wie in 87.). Wir nennen das System dieser Geraden auch eine „Regelschar" und bezeichnen es kurz mit [h]. Die dadurch gegebene Regelfläche ist von der 2. Ordnung. Denn schneiden wir sie mit irgend einer Ebene, so werden die projektiven Ebenenbüschel s und s_1 in projektiven Strahlenbüscheln S und S_1 getroffen, deren Erzeugnis den Schnitt mit der Ebene liefert. Es schneidet also die beliebige Ebene die Regelfläche nach einem Kegelschnitt, mithin ist die Fläche von der 2. Ordnung. Die Rechnung zeigt wieder, dass die allgemeine Fläche 2. Ordnung, wie sie durch eine beliebige Gleichung 2. Grades gegeben wird, in dieser Weise erzeugt werden kann. Diese geradlinige Fläche 2. Ordnung heisst auch „einschaliges Hyperboloid".

Es ergiebt sich sofort auch eine zweite Erzeugung unserer Fläche. Trifft die Erzeugende h_1 in Q und Q_1, ferner h_2 in R und R_1 die Achsen s und s_1 u. s. w., so ist die Reihe der Punkte P_1, Q_1, R_1 ... perspektiv zu den Ebenen α, β, γ des Büschels s, durch die sie ausgeschnitten wird. Ebenso ist die Punktreihe P, Q, R ... auf s zum Ebenenbüschel α_1, β_1, γ_1 ... perspektiv. Da aber die beiden Ebenenbüschel projektiv, so ist auch die Punktreihe P, Q, R ... projektiv zur Punktreihe P_1, Q_1, R_1 ... Die Regelschar [h] kann also auch dadurch erhalten werden, dass man in zwei projektiven Punktreihen im Raume entsprechende Punkte durch Gerade verbindet.

Daraus folgt aber noch eine weitere merkwürdige Eigenschaft. Ist nämlich s_2 irgend eine Gerade, welche die drei Geraden h, h_1, h_2 schneidet, so sind alle Voraussetzungen erfüllt, um den in 87., 2 ausgesprochenen Satz anwenden zu können. Demnach muss s_2 jede Gerade h der Regelschar [h] schneiden und jede Gerade, welche h, h_1, h_2 trifft, hat diese Eigenschaft. Alle diese Geraden bilden aber wieder eine Regelschar [s], die auch von der 2. Ordnung und alle Erzeugende dieser zweiten Regelschar müssen ebenfalls auf unserer Fläche 2. Ordnung gelegen sein, da durch jeden Punkt einer Geraden von [s] ja eine Gerade von [h] geht. Die Achsen s und s_1 gehören auch zu dieser Regelschar [s]. Wir haben folglich:

Satz 44. „Das Erzeugnis zweier projektiver Ebenenbüschel in allgemeiner Lage ist eine Regelschar [h] oder eine geradlinige Fläche 2. Ordnung. Dieselbe Fläche kann auch dadurch erzeugt werden, dass man in zwei projektiven Punktreihen im Raume entsprechende Punkte durch Gerade verbindet. Auf der Fläche liegt noch eine zweite Regelschar [s]. Alle Geraden h sind untereinander windschief, ebenso alle Geraden s, aber jede Gerade h schneidet jede Gerade s. Irgend zwei Gerade einer Regelschar werden von den Geraden der anderen Schar in projektiven Punktreihen geschnitten."

Die Fläche ist dieselbe wie die in 87. erwähnte, und sie lässt sich in doppelter Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugen. Denn greift man irgend drei Gerade der einen Regelschar heraus und lässt eine Gerade sich so bewegen, dass sie stets diese drei Geraden schneidet, so beschreibt die bewegte Gerade die andere Regelschar. Hat man überhaupt zwei Systeme [h] und [s] von unendlich vielen Geraden derart, dass alle Geraden eines Systems untereinander windschief sind, während jede Gerade des einen Systems jede des anderen schneidet, so bilden dieselben die beiden Regelscharen einer solchen geradlinigen Fläche 2. Ordnung (Monge 1795).

91. Legt man durch eine Gerade h_x der Regelschar [h] irgend eine Ebene, so wird diese noch eine Gerade aus der Fläche ausschneiden, da die Schnittkurve im ganzen von der 2. Ordnung sein muss. Diese Gerade kann dann, da sie h_x schneidet, nur der Regelschar [s] angehören und heisse s_x. Für den Schnittpunkt von h_x und s_x ist diese Ebene also (85) die Tangentialebene. Es muss folglich jede Ebene, die durch eine Gerade der Fläche 2. Ordnung hindurchgeht, eine Tangentialebene der Fläche sein. In jedem Punkte der Fläche wird die Tangentialebene bestimmt als die Ebene der beiden durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden.

Die verschiedenen Typen der geradlinigen Fläche 2. Ordnung erhalten wir, wenn wir uns die Fläche durch projektive Punktreihen s und s_1 erzeugt denken. Es sind dann folgende zwei Fälle möglich:

a) Die unendlich fernen Punkte von s und s_1 entsprechen einander nicht in der projektiven Beziehung dieser beiden Punktreihen. Es entspricht also z. B. dem unendlich fernen Punkt von s ein bestimmter endlicher Punkt auf s_1. Die Parallele durch diesen Punkt zu s ist eine Erzeugende h_s, der Regelschaar [h]. In gleicher Weise giebt es zu jeder Erzeugenden eine parallele Erzeugende der anderen Schar. Die dadurch erzeugte Fläche lag unseren bisherigen Betrachtungen zu Grunde und wir nannten sie bereits das einschalige Hyperboloid (Fig. 67). Die unendlich ferne Ebene schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt.

b) Tritt der speziellere Fall ein, dass die unendlich fernen Punkte von s und s_1 einander entsprechen, so sind diese Punktreihen also ähnlich. Die Verbindungslinie dieser beiden unendlich fernen Punkte ist eine ganz im Unendlichen gelegene Gerade h_∞, die bestimmt ist durch die Stellung der Ebene,

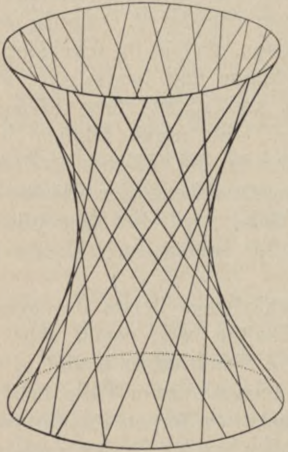

Fig. 67.

welche parallel zu s und s_1 läuft. Alle Geraden der Regelschar [s] müssen aber h_∞ schneiden, also sind sie alle parallel zu dieser Ebene.

Die unendlich ferne Ebene enthält nun von unserer Fläche die Gerade h_∞, sie muss mithin noch eine Gerade s_∞ der anderen Schar enthalten. Alle Geraden h müssen s_∞ schneiden, also sind auch alle Geraden der Regelschar [h] parallel einer bestimmten Ebene. Die dadurch entstehende Fläche heisst „windschiefes“ oder „hyperbolisches Paraboloid“ (Fig. 68). Die Geraden einer jeden der beiden Regelscharen auf der Fläche

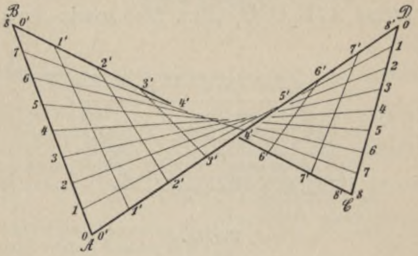

Fig. 68.

sind je parallel einer Ebene. Diese beiden Ebenen heissen die „Leitebenen“. Die Fläche berührt die unendlich ferne Ebene.

Man erhält die Fläche auch, wenn man eine Gerade sich so bewegen lässt, dass sie beständig zwei feste Gerade schneidet und dabei parallel bleibt zu einer gegebenen, festen Ebene.

Eine einfache Erzeugung dieser Fläche besteht darin, dass man (Fig. 68) in einem Tetraeder zwei Paare von Gegenkanten (AB und CD, BC und AD) in gleichviel Teile teilt und entsprechende Teilpunkte verbindet.

Dass diese beiden Systeme von Geraden der gleichen Fläche angehören, folgt leicht aus den abgeleiteten Sätzen. Wählt man ferner eine Ebene, welche zu AB und CD parallel ist, so giebt sie die Stellung der einen Leitebene, während die andere Leitebene zu den Gegenkanten BC und AD parallel läuft. Schneiden sich zwei Ebenen dieser beiden Ebenenbüschel in einer Geraden g und nehmen wir eine Tafel senkrecht zu g, um in diese das Tetraeder und die Geraden der Fläche orthogonal zu projizieren, so erhalten wir als Bild das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 69) sowie die Parallelen

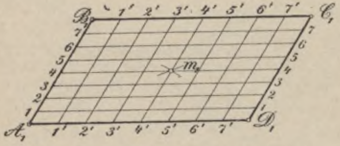

Fig. 69.

zu den Seiten. Der Schnittpunkt m_1 der Diagonalen ist die Projektion der Linie m, welche die Mitten des letzten Paares von Gegenkanten AC und BD des Tetraeders verbindet. Die beiden Leitebenen sind also auch zu m parallel.

Register.

(Die beigesetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

Wenden!