nen

orie

Von

Dr. W. Sternberg

II

Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie

Mit 1 Figur

944

Stand vom Frühjahr 1931

Bibliothek zur Mathematik u. Astronomie

aus der Sammlung Göschen

Geschichte der Mathematik von Oberstudiendirektor Dr. H. Wieleitner. 2 Bände . . . . Nr. 226, 875

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Haußner. Nr. 81

Fünfstellige Logarithmen von Direktor Prof. Aug. Adler. Nr. 423

Mathematische Formelsammlung v. Prof. O. Th. Bürklen. Neubearb. von Dr. F. Ringleb. Mit 38 Fig. . . . . . . Nr. 51

Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades von Prof. Dr. H. Schubert, neubearb. von Prof. P. B. Fischer. Nr. 47

Elementare Algebra von Prof. P. B. Fischer. Mit 20 Fig. Nr. 930

Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Prof. Dr. Herm. Schubert, neubearb. v. Prof. P. B. Fischer. M. 8 Fig. Nr. 48

Höhere Algebra von Prof. Dr. H. Hasse. 2 Bände . . Nr. 931, 932

Praktisches Zahlenrechnen v. Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Figuren . . . . Nr. 405

Elementare Reihenlehre von Prof. Dr. H. Falckenberg. Mit 4 Fig. im Text . . . . Nr. 943

Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen von Prof. Dr. H. Falckenberg. Mit 3 Fig. . Nr 1027

Fouriersche Reihen von Prof. Dr. W. Rogosinski. Mit 4 Figuren . . . . Nr. 1022

Mengenlehre von Prof. Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren . . Nr. 999

Determinanten von Prof. P. B. Fischer . . . . Nr. 402

Gruppentheorie von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. Nr. 837

Niedere Analysis von Prof. Dr. B. Sporer. Mit 5 Figuren Nr. 53

Differentialrechnung von Prof. Dr. A. Witting. Mit vielen Figuren . . . . Nr. 87

Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Rektor Dr. Friedr. Junker. Neubearb. von Prof. Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren . . . . Nr. 146

Höhere Analysis II: Integralrechnung von Rektor Dr. Friedrich Junker. Mit 50 Figuren . . . . Nr. 88

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Rektor Dr. Fried. Junker. Mit 52 Figuren Nr. 147

Gewöhnliche Differentialgleichungen v. Dr. G. Hoheisel Nr. 920

Partielle Differentialgleichungen v. Prof. Dr. G. Hoheisel Nr. 1003

Funktionentheorie von Prof. Dr. Konrad Knopp.
I. Grundlagen der allg. Theorie der analyt. Funktionen. Mit 8 Fig. Nr. 668
II. Anwendungen u. Weiterführung d. allgem. Theorie. M. 7 Fig. Nr. 703

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie von Prof. Dr. K. Knopp. 2 Bde. . . . . Nr. 877, 878

Einführung in die konforme Abbildung von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach . . . . Nr. 768

Potentialtheorie v. Dr. W. Sternberg. 2 Bände. Mit 6 Fig. Nr. 901, 944

Vektoranalysis von Prof. Dr. Siegfr. Valentiner. Mit 13 Fig. Nr. 354

Graphische Integration v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. Nr. 801

Numerische Integration von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig. Nr. 864

Ebene Geometrie v. Prof. D. G. Mahler. 110 zweifarb. Fig. Nr. 41

Ebene und sphärische Trigonometrie von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren . . . . Nr. 99

Sammlung v. Aufgaben aus d. ebenen u. sphärischen Trigonometrie v. Studienrat Dr. Fritz Heiland. Mit 26 Fig. Nr. 848

Stereometrie von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 81 Figuren Nr. 97

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren . . . . Nr. 779

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2 Bände. Mit 114 Figuren . Nr. 72, 876

Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Robert Haußner. 3 Bände. Mit zahlreichen Figuren . . . . Nr. 142, 143, 144

Nichteuklidische Geometrie von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig. . . . . Nr. 970

Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs. Mit 56 Figuren . . . . Nr. 532

Analytische Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haußner. Mit 60 Fig. im Text . . . . Nr. 65

Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haußner. Mit 22 Figuren . . . . Nr. 256

Analytische Geometrie des Raumes von Prof. Dr. M. Simon. Mit 27 Figuren . . . . Nr. 89

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 8 Figuren Nr. 309

Koordinatensysteme von Prof. P. B. Fischer. Mit 8 Figuren Nr. 507

Algebraische Kurven. Neue Bearb. v. Prof. Dr. H. Wieleitner.

I. Gestaltl. Verhältnisse. Mit 97 Figuren . . . . Nr. 435

II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren . . . Nr. 436

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bände. Mit 10 Figuren . . . . Nr. 508, 871

Politische Arithmetik von Dr. E. Förster . . . . Nr. 879

Ausgleichungsrechnung n. d. Methode d. kleinsten Quadrate von Prof. W. Weitbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig. Nr. 302, 641

Vermessungskunde von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bände. Mit 294 Figuren . . . . Nr 468, 469, 862

Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung) von Prof. Dr. G. Förster. Mit 33 Figuren . . . . Nr. 102

Mathematische Instrumente v. Dr. Fr. A. Willers. M. 68 Fig. Nr. 922

Astronomische Geographie von Prof. Dr. Siegmund Günther. Mit 52 Abbildungen . . . . Nr. 92

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neubearb. v. Prof. Dr. Herm. Kobold.

I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren . . . . Nr. 11

II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten . . . . Nr. 529

Astrophysik von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neubearb. von Dr. H. Ludendorff. Mit 14 Figuren . . . . Nr. 91

Kartenkunde von Dr. M. Groll, neubearb. v. Dr. Otto Graf.

I. Die Projektionen. Mit 56 Abbildungen . . . . . . Nr. 30

II. Der Karteninhalt u. d. Messen auf Karten. Mit 39 Abb. Nr. 599

Kartographische Aufnahmen u. geogr. Ortsbestimmung auf Reisen von Prof. Dr.-Ing. R. Hugershoff u. Prof. Dr.-Ing. O. Israel. I. Topograph. Aufnahmen. Mit 66 Figuren. Nr. 607

Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie von Prof. Dr. Hans Dock. Mit 57 Abbildungen . . . . Nr. 699

Versicherungsmathematik von Prof. Dr. Friedr. Boehm. 2 Bände . . . . Nr. 180, 917

Sammlung Göschen

Potentialtheorie

Von

Dr. W. Sternberg

Privatdozent in Heidelberg

II

Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie

Mit 1 Figur

Berlin und Leipzig

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1926

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
923426

Inhaltsübersicht.

Kapitel I.
Allgemeines.

Kapitel II.
Das Poissonsche Integral in der Ebene.

Kapitel III.
Das Poissonsche Integral im Raume.

Kapitel IV.
Die Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen.

Kapitel V.
Die Lösung der Randwertaufgaben in der Ebene für beliebige Gebiete.

Kapitel VI.
Die Lösung der Randwertaufgaben im Raume für beliebige Gebiete.

Kapitel I.

Allgemeines.

§ 1. Problemstellung.

Wir haben bereits in Bd. I § 14 im Anschluß an die Gleichung (15) darauf hingewiesen, daß man nicht gleichzeitig die Werte einer Potentialfunktion *und* ihrer Normalableitung auf der Begrenzung des Regularitätsgebietes vorschreiben darf. Jetzt werden wir sehen, daß eine Potentialfunktion bereits eindeutig bestimmt ist, wenn *entweder* die Werte der Funktion *oder* die Werte der Normalableitung auf der Begrenzung des Regularitätsgebietes gegeben sind. Zunächst handelt es sich darum, die so entstehenden Probleme exakt zu formulieren.

Sei T ein beschränktes räumliches Gebiet, S seine Begrenzung. Wir nehmen an, daß S eine geschlossene Fläche mit im allgemeinen stetiger Normale ist; jedoch ist eine endliche Anzahl von Kanten und konischen Punkten zulässig. Da wir den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes nicht ausschließen, ist es auch gestattet, daß S aus einer endlichen Anzahl einander nicht schneidender Flächen der obigen Art besteht. Sei f eine für alle Punkte von S erklärte stetige Funktion des Ortes. Dann lautet *die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie: Es ist eine in T reguläre, in $T+S$ stetige Lösung u der Differential-*

gleichung $\Delta u = 0$ *zu bestimmen, welche auf* S *die vorgeschriebenen Werte* f *annimmt.* Die letzte Bedingung besagt, daß u bei Annäherung an S von innen her gegen f konvergiert, daß also für jeden Punkt von S die Limesgleichung $u_i = f$ gilt. Die erste Randwertaufgabe wird auch als „*Dirichletsches Problem*" bezeichnet.

Die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie lautet: Es ist eine in T *reguläre, bei Annäherung an* S *nebst ihrer Normalableitung stetige Lösung* u *der Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ *zu bestimmen, deren Normalableitung* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *auf* S *die vorgeschriebenen Werte* f *annimmt.* Die letzte Forderung bedeutet, daß für alle Punkte von S die Limesgleichung $\frac{\partial u_i}{\partial n} = f$ gelten soll. Aus der Gl. (9) des § 13 in Bd. I geht hervor, daß f jetzt nicht völlig willkürlich sein darf, sondern der Bedingung $\iint\limits_S f\, d\omega = 0$ genügen muß.

In der Theorie des logarithmischen Potentials stellt man in analoger Weise die erste und die zweite Randwertaufgabe, deren Formulierung mit der obigen völlig übereinstimmt. Die Begrenzung S des beschränkten ebenen Gebietes T ist hier eine geschlossene Kurve, welche bis auf eine endliche Anzahl von Ecken eine stetige Tangente besitzt. Oder S besteht aus einer endlichen Anzahl einander nicht schneidender Kurven dieser Art.

Die Randwertprobleme sind aus der theoretischen Physik hervorgegangen. Insbesondere tritt die erste Randwertaufgabe in der Elektrostatik und in der Wärmeleitung, die zweite in der Hydrodynamik auf.

So wird z. B. in der Theorie der Wärmeleitung bewiesen, daß die Temperatur u eines Körpers, wenn sie von der Zeit unabhängig, d. h. wenn der Zustand „stationär" ist, der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt, also ein Potential in unserm allgemeinen Sinne darstellt. Hier können nun die Werte der Temperatur auf der Oberfläche des Körpers beliebig als Funktion des Ortes gegeben sein.

Oder handelt es sich um die stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, so kann ein „Geschwindigkeitspotential" u existieren. Das ist eine Funktion, deren Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen an jeder Stelle mit den Geschwindigkeitskomponenten des dort befindlichen Flüssigkeitsteilchens übereinstimmen. Diese Funktion genügt wieder der Gleichung von Laplace, ist also ein Potential. Die durch ein Oberflächenelement in der Zeiteinheit einströmende Flüssigkeitsmenge ist nun proportional der Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ und kann willkürlich gegeben sein. Nur muß die Funktion $f = \frac{\partial u}{\partial n}$ die Bedingung $\iint\limits_S f\,d\omega = 0$ erfüllen. Diese Bedingung hat hier die Bedeutung, daß im Bereiche einer stationären Flüssigkeitsströmung durch eine geschlossene Fläche S jederzeit ebensoviel Flüssigkeit hinein- wie hinausströmt, wonach also die Gesamtmenge der durch S strömenden Flüssigkeit algebraisch, d. h. mit Berücksichtigung des Vorzeichens berechnet, verschwindet.

Wird die stationäre Temperaturverteilung eines Körpers untersucht, welcher nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetze Wärme an eine Umgebung abgibt, deren Temperatur von der Zeit unabhängig ist, so sind die Werte von $k\frac{\partial u}{\partial n} + hu$ auf der Oberfläche des Körpers gegeben; dabei bedeutet k das innere, h das äußere Leitvermögen des Körpers, es sind also ständig positive Größen. Hiernach formuliert man die dritte Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Bei dieser ist die Randbedingung $k\dfrac{\partial u}{\partial n}+hu=f$ vorgeschrieben, in welcher k, h, f gegebene stetige Funktionen sind, von denen die beiden ersten ständig positiv sein müssen. Die erste und die zweite Randwertaufgabe können, wenn man allgemeiner annimmt, daß k und h nicht negativ sein dürfen, als spezielle Fälle der dritten für $k=0$ bzw. $h=0$ angesehen werden. Mit der dritten Randwertaufgabe werden wir uns nicht so ausführlich wie mit den beiden ersten beschäftigen.

Wir werden zunächst die Eindeutigkeit der Lösungen der ersten und zweiten Randwertaufgabe beweisen (§ 2). Dann werden wir den Existenzbeweis für die erste Randwertaufgabe beim Kreise bzw. bei der Kugel mittels des Poissonschen Integrals führen (Kap. II und III) und schließlich mit der Methode der Integralgleichungen (Kap. IV) die Randwertaufgaben allgemein für beliebige Gebiete (Kap. V und VI) erledigen.

Einen allgemeinen Existenzbeweis hatte zuerst Dirichlet versucht. Seine Methode, die Riemann das „Dirichletsche Prinzip“ nannte, wurde aber von Weierstraß als nicht exakt nachgewiesen. Später lieferten C. Neumann, H. Poincaré, H. A. Schwarz, E. R. Neumann strenge Beweise. Neuerdings sind die Randwertaufgaben von J. Fredholm auf sehr elegante Art mit der Methode der Integralgleichungen gelöst worden. Ferner hat D. Hilbert nebst R. Courant das Dirichletsche Prinzip in einwandfreier Form neu begründet und O. Perron den Existenzsatz auf völlig neue Art bewiesen.

§ 2. Eindeutigkeitssätze.

Die erste Randwertaufgabe hat höchstens eine Lösung.

Seien in der Tat u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann ist zu beweisen, daß $v = u_1 - u_2$ in $T + S$ identisch verschwindet. Offenbar ist v eine in T reguläre, in $T + S$ stetige Potentialfunktion, welche in allen Punkten von S verschwindet. Nehmen wir an, v wäre in einem Punkte von T nicht 0, also positiv oder negativ. Dann müßte v ihr Maximum oder ihr Minimum in T annehmen, was nach § 17 des Bd. I unmöglich ist. Daher bleibt nur die Möglichkeit, daß v in T überall verschwindet, w. z. b. w.

Der Beweis gilt sowohl fürs Newtonsche wie fürs logarithmische Potential.

Die zweite Randwertaufgabe hat bis auf eine additive willkürliche Konstante höchstens eine Lösung.

Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann ist zu beweisen, daß $v = u_1 - u_2$ in $T + S$ konstant bleibt. Es ist klar, daß v ein in T reguläres Potential ist, daß v und $\frac{\partial v}{\partial n}$ auch bei Annäherung an S stetig bleiben und daß auf S identisch $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ ist. Wir können sagen, daß v die zweite Randwertaufgabe in dem speziellen Falle $f = 0$ löst. Auf die Funktion v wenden wir (indem wir nur den Newtonschen Fall weiter verfolgen, da der logarithmische ganz analog erledigt wird), die Formel (10) des § 13 in Bd. I an. Diese Formel

$$\iiint\limits_T \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = -\iint\limits_S v \frac{\partial v}{\partial n}\, d\omega$$

ergibt wegen der Randbedingung $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$

$$\iiint\limits_T \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = 0.$$

Beachtet man, daß der Integrand $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \geqq 0$ sein muß, so folgert man unmittelbar, daß zunächst für alle inneren Punkte des Bereiches $T + S$, d. h. für alle Punkte von T die Gleichungen $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, also $v = \text{const}$ gelten. Wäre nämlich in irgendeinem inneren Punkte die Funktion v nicht konstant, so müßte der Integrand in diesem Punkte und folglich wegen seiner Stetigkeit (man bedenke, daß aus der Voraussetzung der Regularität von u_1 und u_2 die Stetigkeit der ersten Ableitungen von $v = u_1 - u_2$ nur in T, nicht aber auf S gefolgert werden kann) in einer gewissen Umgebung dieses Punktes positiv sein. Dann wäre aber auch das Integral positiv, während es doch 0 ist. Daher ist die Funktion in allen Punkten von T konstant. Da sie nun bei Annäherung an S stetig bleibt, besteht die Identität $v = \text{const}$ in ganz $T + S$, w. z. b. w.

§ 3. Inneres und äußeres Problem.

Bei der Formulierung der Randwertaufgaben im § 1 hatten wir das Regularitätsgebiet T als beschränkt angenommen. Es war im einfachsten Falle von einer einzigen geschlossenen Fläche bzw. Linie S begrenzt. Es war das „Innengebiet" von S, das jetzt mit T_i bezeichnet werden möge.

Wir stellen uns nun zuerst im logarithmischen als dem leichteren Falle die folgende Aufgabe: *Es soll eine im ganzen „Außengebiete" T_a von S mit Einschluß des unendlich fernen Punktes reguläre, in $T_a + S$ stetige Potentialfunktion u bestimmt werden, welche auf S die vorgeschriebenen Werte f annimmt.* Die letzte Bedingung besagt, daß $u_a = f$ wird. Von der Kurve S ist ebenso wie in § 1 angenommen, daß sie geschlossen, ohne mehrfache Punkte und aus einer endlichen Anzahl von Stücken mit stetiger Tangente zusammengesetzt ist. Die Randfunktion f soll stetig sein. Unser neues Problem heißt das „*äußere*", das frühere im Gegensatz hierzu das „*innere*". Die Aufgabe kann noch etwas verallgemeinert werden, indem man zuläßt, daß die Begrenzung S aus mehreren getrennten, ganz außerhalb voneinander liegenden Kurven der obigen Art besteht. Dann bedeutet T_a dasjenige Gebiet der Ebene, welches außerhalb einer jeden der Begrenzungslinien liegt.

Wir wollen das äußere Problem auf das innere zurückführen, wobei wir der Einfachheit halber wieder annehmen, daß S aus einer einzigen Kurve besteht. Wir wählen den Anfangspunkt 0 des Koordinatensystems im Innengebiete von S und führen die Transformation durch reziproke Radien

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

aus. Dann geht der geschlossene Rand S in einen geschlossenen Rand S_1 mit im allgemeinen stetiger Tangente über, das Außengebiet von S in das Innengebiet von S_1, der unendlich ferne Punkt in den Nullpunkt. Ferner wird $u(x, y)$ in eine Funktion $u\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$ $\equiv v(x_1, y_1)$ von x_1, y_1 transformiert, welche als Funktion dieser Variablen ein im ganzen Innengebiet von S_1 mit Einschluß des Nullpunktes reguläres Potential darstellt (vgl. Bd. I § 16). Dieses Potential v muß auf S_1 die Werte f annehmen. Hat man also die Lösung $v(x_1, y_1)$ des inneren Problems für S_1 bestimmt, so ergibt die Identität $u(x, y) \equiv v\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ die Lösung des äußeren Problems für S. Aus der Identität der Lösungen folgt unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösung des äußeren Problems, da ja der Eindeutigkeitssatz für das innere Problem schon bewiesen ist.

Wir gehen jetzt zum Newtonschen Potential über.

Aus den Entwicklungen des § 16 in Bd. I ergibt sich folgendes: Ein Potential u mit der Masse M, welches ja in der Umgebung des unendlich fernen Punktes die Entwicklung

$$u(x, y, z) = c + \frac{M}{R} + a_1 \frac{x}{R^3} + a_2 \frac{y}{R^3} + a_3 \frac{z}{R^3} + \dots$$

gestattet, geht mittels der Transformation durch reziproke Radien

$$x_1 = \frac{x}{R^2}, \qquad y_1 = \frac{y}{R^2}, \qquad z_1 = \frac{z}{R^2}$$

in eine Funktion $v(x_1, y_1, z_1) \equiv u\left(\frac{x_1}{R_1^2}, \frac{y_1}{R_1^2}, \frac{z_1}{R_1^2}\right)$ über mit der Eigenschaft, daß

$$w(x_1, y_1, z_1) \equiv \frac{v - c}{R_1} \equiv R(u - c)$$

ein Potential in den Variablen x_1, y_1, z_1 darstellt, das sich in der Umgebung des Nullpunktes, diesen eingeschlossen, regulär verhält und im Nullpunkte den Wert M annimmt.

Hieran knüpfen wir an, um das äußere Problem im Raume zu formulieren. Es ist eine Begrenzung S von derselben Art wie beim inneren Problem (vgl. § 1) gegeben. Der Einfachheit halber sei S eine einzige Fläche. Auf S ist eine willkürliche stetige Funktion f gegeben. Dann lautet das äußere Problem: *Es soll ein im Außenraume T_a von S mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes reguläres, in $T_a + S$ stetiges Potential u bestimmt werden, das sich in der Umgebung des unendlich fernen Punktes wie ein Potential mit Masse verhält, in diesem Punkte selbst den beliebig vorgeschriebenen Wert c und auf S die Werte f annimmt.*

Die letzte Bedingung besagt, daß $u_a = f$ wird. Das in dieser Form gestellte äußere Problem kann wieder auf das innere zurückgeführt werden. Durch die obige Transformation geht, wenn wir den Anfangspunkt im Innengebiet von S wählen, die Fläche S in eine Fläche S_1 mit denselben Regularitätseigenschaften, das Außengebiet von S in das Innengebiet von S_1 und der unendlich ferne Punkt in den Nullpunkt über. Die Funktion $w\,(x_1, y_1, z_1)$ (s. o.) ist ein im Innengebiete von S_1 mit Einschluß des Nullpunktes reguläres, bei Annäherung an S_1 stetiges Potential, welches auf S_1 die Werte $\frac{f - c}{R_1}$ annimmt, die eine stetige Ortsfunktion bilden. Hat man die Lösung $w(x_1, y_1, z_1)$ des inneren Problems für S_1 mit den Randwerten $\frac{f - c}{R_1}$ gefunden, so liefert die Identität $u(x, y, z) \equiv c + R_1 w$

$$\equiv c + \frac{w\left(\frac{x}{R^2}, \frac{y}{R^2}, \frac{z}{R^2}\right)}{R}$$ die Lösung des vorgelegten äußeren Problems für S mit den Randwerten f.

Da u und w durch eine lineare Relation miteinander verknüpft sind, ergibt sich wieder unmittelbar der Eindeutigkeitssatz auch für das äußere Problem. Wollte man aber die Bedingung, daß u im unendlich fernen Punkte den vorgeschriebenen Wert c annimmt, fallen lassen, so würde der Eindeutigkeitssatz nicht mehr bestehen. Es ist übrigens keine wesentliche Beschränkung, wenn man $c = 0$ nimmt; denn ist dies von vornherein nicht der Fall, so setze man $u - c \equiv u_1$ und bestimme das Potential u_1, das im Unendlichen verschwindet und auf S die Werte $f - c$ annimmt. Damit ist auch $u \equiv u_1 + c$ bestimmt.

Wir bemerken noch, daß bei unserm äußeren Problem der unendlich ferne Punkt gewissermaßen als Randpunkt, als mit zur Begrenzung gehörig, angesehen werden kann. Denn einerseits braucht das Potential dort nicht regulär zu sein und andrerseits wird der Wert des Potentials daselbst beliebig vorgeschrieben.

Mit der Übertragung der zweiten Randwertaufgabe auf das Außengebiet einer Kurve oder Fläche beschäftigen wir uns nicht.

Kapitel II.

Das Poissonsche Integral in der Ebene.

§ 4. Lösung der ersten Randwertaufgabe für den Kreis.

Wir wollen jetzt die Lösung der ersten Randwertaufgabe für ein von einem Kreise begrenztes Gebiet bestimmen. Die Lösung kann hier explizite durch ein über die Kreisperipherie erstrecktes Integral dargestellt werden, welches von Poisson angegeben worden ist.

Es sei ein Kreis K um den Nullpunkt mit dem Radius l und auf seiner Peripherie S eine stetige Funktion f gegeben. Es soll zunächst die Lösung des inneren Problems gefunden werden.

Die Lösung des inneren Problems wird durch das Integral

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S f \left\{ \frac{\cos(r, n)}{r} - \frac{1}{2l} \right\} ds \tag{1}$$

geliefert. Dabei ist r wie immer die Entfernung des Randpunktes $Q(\xi, \eta)$ von dem im Inneren liegenden Punkte

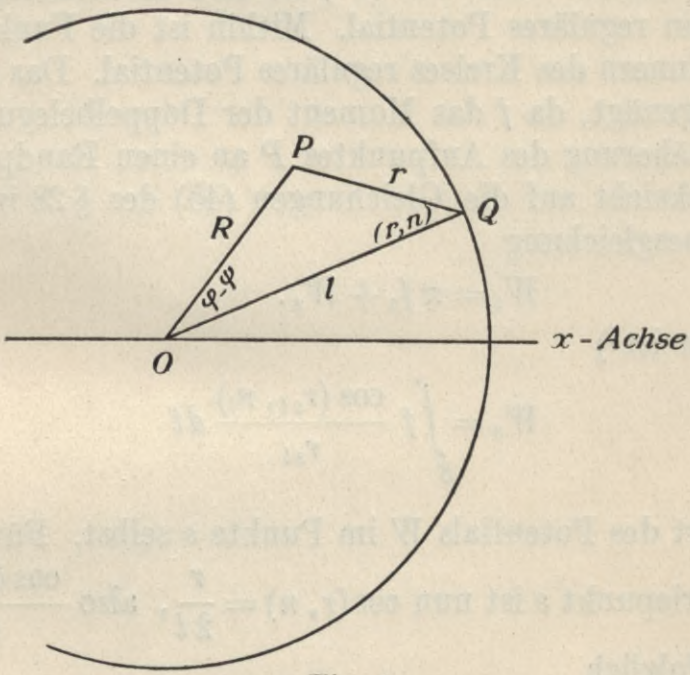

Fig. 1.

$P(x, y)$ und (r, n) der Winkel zwischen der gerichteten Strecke QP und der inneren Normale in Q, die hier beim Kreise mit dem Radius QO zusammenfällt (s. Fig. 1).

Zum Beweise schreiben wir u in der Form

$$u = \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{f\cos(r,n)}{r}\,ds - \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{f}{2l}\,ds. \tag{1*}$$

Das Integral

$$W = \int\limits_S \frac{f\cos(r,n)}{r}\,ds$$

ist das Potential der doppelt belegten Linie S, also ein im Innern des Kreises reguläres Potential. Das zweite Integral auf der rechten Seite von (1*) ist eine Konstante, daher sicher ein reguläres Potential. Mithin ist die Funktion u ein im Innern des Kreises reguläres Potential. Das Potential W genügt, da f das Moment der Doppelbelegung ist, bei Annäherung des Aufpunktes P an einen Randpunkt s mit Rücksicht auf die Gleichungen (45) des § 28 in Bd. I der Limesgleichung

$$W_i = \pi f_s + W_s.$$

Hierin ist[1])

$$W_s = \int\limits_S f\,\frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}}\,dt$$

der Wert des Potentials W im Punkte s selbst. Für einen Peripheriepunkt s ist nun $\cos(r,n) = \frac{r}{2l}$, also $\frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}} = \frac{1}{2l}$, folglich

$$W_i = \pi f_s + \int\limits_S \frac{f}{2l}\,dt.$$

---

[1]) Wir bezeichnen jetzt das Bogenelement mit dt (vgl. Bd. I § 28 Gl. (43)) und den variablen Randpunkt mit t statt mit Q.

Demnach bekommt man schließlich

$$u_i = f_s + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{f}{2l}\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{f}{2l}\,dt = f_s.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Das in (1) auftretende Integral kann in eine für die Anwendungen besser passende Form gebracht werden. Hierzu führt man Polarkoordinaten mit dem Kreismittelpunkt als Pol ein. Die Polarkoordinaten von P seien R und φ, die von Q seien l und ψ. Offenbar ist

$$\begin{aligned} R^2 &= l^2 + r^2 - 2lr\cos(r, n), \\ r^2 &= l^2 + R^2 - 2lR\cos(\varphi - \psi), \\ ds &= l\,d\psi. \end{aligned}$$

Daher wird

$$\frac{l^2 - R^2}{2lr^2} = \frac{\cos(r, n)}{r} - \frac{1}{2l}.$$

Wir können also (1) in der Form schreiben

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S f\frac{l^2 - R^2}{l r^2}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\frac{l^2 - R^2}{l^2 + R^2 - 2lR\cos(\varphi - \psi)}\,d\psi. \quad (2)$$

In dieser Form ist das Integral von Poisson gefunden worden und wird nach ihm genannt.

Man kann übrigens den Faktor $l^2 - R^2$ im Zähler auch vor das Integral setzen.

Das Poissonsche Integral hat für die Potentialtheorie grundlegende Bedeutung. Es ist für die Weiterentwicklung der Theorie nach verschiedenen Richtungen von größter Wichtigkeit.

Das äußere Problem für den Kreis kann leicht direkt, ohne daß man von der Zurückführung auf das innere Gebrauch macht, gelöst werden. Die Lösung ist unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen gegeben durch die Formel

$$u = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{f}{2l}\,ds - \frac{1}{\pi}\int_S \frac{f\cos(r,n)}{r}\,ds \tag{3}$$

oder

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{R^2 - l^2}{r^2}\,d\psi. \tag{4}$$

Rein formal unterscheiden sich, wie man sieht, die hier auftretenden Integrale von denen der Formeln (1) oder (2) nur durch das Vorzeichen. Um zu beweisen, daß (3) wirklich die Lösung liefert, bedenken wir, daß u als Summe aus einer Konstanten und dem Potential einer Doppelbelegung in ganz T_a, insbesondere auch im unendlich fernen Punkte regulär ist. Ferner benutzen wir die für $W = \int_S \frac{f\cos(r,n)}{r}\,ds$ geltende Limesgleichung (vgl. Bd. I § 28 Gl. (45))

$$W_a = -\pi f_s + W_s = -\pi f_s + \int_S \frac{f}{2l}\,dt.$$

Aus ihr folgt

$$u_a = -\frac{W_a}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_S \frac{f}{2l}\,dt = f_s,$$

womit der Beweis vollendet ist.

§ 5. Entwicklung im Kreise.

Die im vorigen Paragraphen gewonnene und durch ein Kurvenintegral dargestellte Lösung u des innern Problems für den Kreis werden wir nun in eine unendliche Reihe der Form

$$u(R,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}R^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

entwickeln, wobei a_n und b_n Konstante sind.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß unser Kreis der Einheitskreis, daß also der Radius $l=1$ ist. Das kann man ja durch die Ähnlichkeitstransformation $\frac{R}{l}=R_1$ oder $\frac{x}{l}=x_1$, $\frac{y}{l}=y_1$ immer erreichen. Da u auch in den neuen Variablen x_1, y_1 ein Potential darstellt, so erkennt man, daß unsere Annahme keine Beschränkung der Allgemeinheit ist. Aus der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen wird jetzt

$$u(R,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\psi)}d\psi. \tag{5}$$

Setzen wir

$$z=x+iy=Re^{\varphi i}=R(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

so ergibt sich leicht, daß $u(R,\varphi)$ der reelle Teil von

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{e^{\psi i}+z}{e^{\psi i}-z}d\psi \tag{6}$$

ist. Wir haben in der Tat

$$\frac{e^{\psi i}+z}{e^{\psi i}-z}=\frac{\cos\psi+R\cos\varphi+i(\sin\psi+R\sin\varphi)}{\cos\psi-R\cos\varphi+i(\sin\psi-R\sin\varphi)}=\frac{A+iB}{C+iD}.$$

Nun ist

$$Re\left[\frac{A+Bi}{C+Di}\right]=Re\left[\frac{(A+Bi)(C-Di)}{C^2+D^2}\right]=\frac{AC+BD}{C^2+D^2},$$

also

$$Re\left[\frac{e^{\psi i}+z}{e^{\psi i}-z}\right]$$

$$=\frac{(\cos\psi+R\cos\varphi)(\cos\psi-R\cos\varphi)+(\sin\psi+R\sin\varphi)(\sin\psi-R\sin\varphi)}{(\cos\psi-R\cos\varphi)^2+(\sin\psi-R\sin\varphi)^2}$$

$$=\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\psi)}.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß wirklich

$$u(R,\varphi)=Re\,[F(z)] \tag{7}$$

ist. Wir werden jetzt $F(z)$ in eine nach positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln. Setzen wir für einen Augenblick

$$z\,e^{-\psi i}=q,$$

so ist

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{1+q}{1-q}\,d\psi.$$

Nun gilt auch bei komplexem q die Entwicklung in die „geometrische Reihe"

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

welche für jedes q, das der Bedingung $|q|<1$ genügt, absolut und in jedem Bereiche, der mit Einschluß des Randes ganz innerhalb des Einheitskreises $|q|=1$ liegt, gleichmäßig konvergiert. (Das setzen wir aus den Elementen der Reihenlehre als bekannt voraus.) Mithin ist ebenfalls für $|q|<1$

$$\frac{1+q}{1-q}=(1+q)(1+q+q^2+\ldots)$$

$$=1+2(q+q^2+\ldots)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

und für $|z| = R < 1$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-n\psi i} \right\} d\psi.$$

Da die im Integranden auftretende Reihe für jedes z, das der Bedingung $|z| < 1$ genügt, gleichmäßig in ψ konvergiert, darf gliedweise integriert werden. Demnach ergibt sich für $|z| < 1$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{2\pi} f(\psi)\, e^{-n\psi i}\, d\psi. \tag{8}$$

Wir können auch schreiben

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\, d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \int_0^{2\pi} f e^{n(\varphi - \psi) i}\, d\psi. \tag{8*}$$

Daraus findet man sofort

$$u = Re[F(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\, d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \int_0^{2\pi} f \cos n(\varphi - \psi)\, d\psi$$

oder wegen $\cos n(\varphi - \psi) = \cos n\varphi \cos n\psi + \sin n\varphi \sin n\psi$ die gesuchte Entwicklung

$$u(R, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{9}$$

worin die Konstanten a_n und b_n die Werte haben

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi\, d\psi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi\, d\psi \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Die obige Entwicklung ist gültig für $R < 1$, also *im Innern des Einheitskreises.* Da die durch gliedweise beliebig oft wiederholte Differentiation nach R oder φ aus (9) entstehenden Reihen offenbar in jedem einschließlich des Randes ganz innerhalb des Einheitskreises liegenden Bereiche gleichmäßig konvergieren, stellen sie, was aus der Reihenlehre bekannt ist, die entsprechenden Ableitungen von $u(R, \varphi)$ dar. (Eine Entwicklung der Form (9) hatten wir schon im § 19 des Bd. I erhalten. Dort wurden aber wichtige Sätze der Funktionentheorie als bekannt angenommen. Hier haben wir uns von dieser unabhängig gemacht. Überdies haben wir für die Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n die fundamentalen Formeln (10) gewonnen.)

Aus unsern Ergebnissen geht der folgende Satz hervor, welcher das Analogon zu dem Satze von Cauchy über die Potenzreihenentwicklung einer analytischen Funktion einer komplexen Variablen in ihrem Regularitätsgebiete bildet: *Ist u ein in irgendeinem Gebiete T reguläres Potential und ist O ein beliebiger Punkt von T* (den man ohne Beschränkung der Allgemeinheit zum Anfangspunkt machen kann), *so darf u in eine Reihe der Form* (9) *entwickelt werden. Die Reihe konvergiert im Innern des größten Kreises C um O, dessen Inneres noch ganz in T liegt, und in jedem Bereiche, welcher einschließlich seines Randes ganz im Innern von C liegt, gleichmäßig. Sie kann innerhalb C beliebig oft gliedweise differentiiert werden.*

Zum Beweise braucht man nur, wenn P ein innerer Punkt von C ist, einen mit C konzentrischen etwas kleineren, P noch in seinem Innern enthaltenden Kreis C_1 herzustellen, für C_1 das Poissonsche Integral anzusetzen[1]) und dann die obigen Entwicklungen vorzunehmen.

---

[1]) Man beachte, daß u auf C_1 stetig ist, während es in denjenigen Punkten von C, die zur Begrenzung S von T gehören, nicht definiert zu sein braucht.

Wir fügen noch hinzu: *Die Entwicklung von u in der Form* (9) *ist nur auf eine Art möglich.* Denn gäbe es eine zweite Entwicklung

$$u = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n' \cos n\varphi + b_n' \sin n\varphi),$$

so würde die Identität

$$\frac{a_0 - a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \{(a_n - a_n') \cos n\varphi + (b_n - b_n') \sin n\varphi\} = 0$$

in einer gewissen Umgebung von O gelten. Bei beliebigem, aber festem φ hat man eine Potenzreihe von R vor sich, die für alle Werte eines gewissen Intervalls von R verschwindet. Dann müssen bekanntlich die Koeffizienten der Potenzen von R einzeln verschwinden. Es wird also

$$a_0 - a_0' = 0,$$

$$(a_n - a_n') \cos n\varphi + (b_n - b_n') \sin n\varphi = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da diese Gleichungen identisch in φ gelten, folgt

$$a_n - a_n' = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$b_n - b_n' = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

w. z. b. w.

§ 6. Entwicklung auf dem Kreisrande. Fouriersche Reihen.

Es kann vorkommen, daß die Reihe (9) des § 5 noch für $R = 1$ und ein bestimmtes φ, d. h. daß die mit den Koeffizienten (10) gebildete Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{11}$$

für ein bestimmtes φ konvergiert. Eine solche nach den Sinus- und Kosinusfunktionen der Vielfachen des Arguments φ fortschreitende Reihe nennt man *Fouriersche Reihe* nach dem Mathematiker und Physiker Fourier, der als erster solche Reihen in der Theorie der Wärmeleitung benutzt hat. Im Falle der Konvergenz der Fourierschen Reihe ergibt sich aus (9) durch den Grenzübergang $R \to 1$ eine Entwicklung in dem Randpunkte mit dem betreffenden Werte von φ

$$\lim_{R=1} u(R,\varphi) = f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (12)$$

Dabei ist von der Limesgleichung

$$\lim_{R=1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (13)$$

Gebrauch gemacht, also der Grenzübergang statt vor dem Summenzeichen hinter demselben in jedem einzelnen Summanden ausgeführt, d. h. die Reihenfolge von Summation und Grenzübergang vertauscht. Die Berechtigung hierzu gibt uns der den Elementen der Reihenlehre entnommene *Satz von Abel* über die gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen, den wir wenigstens hier anführen wollen. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n R^n$ sei im offenen Intervall $-1 < R < +1$ konvergent. Dann konvergiert sie zunächst einmal in jedem geschlossenen Intervall, das im Innern des obigen liegt, also für $-k \leqq R \leqq +k$, wo $0 < k < 1$ ist, gleichmäßig und definiert eine stetige Funktion $G(R)$. Konvergiert nun auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, so kann nach Abel die Stelle

$R = 1$ in den Bereich der gleichmäßigen Konvergenz einbezogen werden, d. h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n R^n$ konvergiert für $-k \leqq R \leqq 1$ gleichmäßig. Ihr Grenzwert $G(R)$ ist dann auch für $R = 1$ (natürlich bei Annäherung von links her) stetig; es ist also $\lim\limits_{R=1-0} G(R) = G(1)$. Das ist aber der Inhalt der Limesgleichung (13).

Konvergiert die Fouriersche Reihe für jeden Wert von $\varphi\ (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$, so gilt die Entwicklung (12) für jedes φ, also auf der ganzen Kreisperipherie. Man sagt dann, die Funktion $f(\varphi)$ sei in eine Fouriersche Reihe entwickelbar. Wir bemerken ohne Beweis, daß für diese Entwickelbarkeit die Stetigkeit von f keine hinreichende Bedingung ist, daß die Entwicklung aber sicher dann gilt, wenn man von der Funktion $f(\varphi)$ außer Stetigkeit noch verlangt, daß sie nicht unendlich viele Maxima oder Minima besitzt (vgl. Riemann-Weber, l. c., Bd. I, Vierter Abschnitt).

Um das Verständnis für Fouriersche Reihen etwas zu vertiefen, beweisen wir den folgenden Satz: Ist die Funktion $f(\varphi)$ in eine für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe entwickelbar

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

so sind die Koeffizienten a_n und b_n durch die Formeln bestimmt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Die Entwicklung ist also nur auf eine Art möglich. Die so bestimmten Größen a_n, b_n heißen die „Fourierkoeffizienten“ von $f(\varphi)$. Man bemerkt, daß die durch die Gleichungen (10) des § 5 bestimmten Zahlen a_n, b_n nichts anderes als die Fourierkoeffizienten der Randfunktion f sind.

Beim Beweise des Satzes benutzen wir die sog. „Orthogonalitätseigenschaft“ der trigonometrischen Funktionen, die durch folgende Formeln ausgedrückt wird. Es ist für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ und $n \lesseqgtr m$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)\varphi \, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)\varphi \, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)\varphi \, d\varphi = 0,$$

sowie für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, auch wenn $n = m$ ist,

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+m)\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n-m)\varphi \, d\varphi = 0.$$

Nun bekommen wir, indem wir die gleichmäßig konvergente Entwicklung von f zwischen den Grenzen 0 und 2π gliedweise integrieren,

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) \, d\varphi = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = \pi a_0$$

und, indem wir nach Multiplikation mit $\cos m\varphi$ bzw. $\sin m\varphi$ gliedweise integrieren,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi &= a_m\int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi\,d\varphi,\\ \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin m\varphi\,d\varphi &= b_m\int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi\,d\varphi.\end{aligned}\right\}\quad m=1,2,\ldots$$

Berücksichtigen wir die für $m = 1, 2, \ldots$ gültigen Formeln

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2m\varphi}{2}\,d\varphi = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2m\varphi}{2}\,d\varphi = \pi,$$

so ergibt sich die obige Koeffizientenbestimmung.

§ 7. Die Niveaulinien als analytische Kurven.

Im § 10 des Bd. I waren die Niveaulinien $u = \text{const}$ eingeführt worden. Wir werden jetzt insbesondere mit Hilfe der Reihenentwicklungen des § 5 wichtige Eigenschaften derselben ableiten. Das in T reguläre Potential u nehme in einem beliebigen Punkte O von T, den wir zum Anfangspunkt machen, den Wert u_0 an. Wir untersuchen die Niveaulinie

$$u(x, y) = u_0 = \text{const} \tag{14}$$

in der Umgebung von O.

Ist wenigsten seine der beiden Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ der nach § 15 des Bd. I analytischen Funktion u, etwa $\frac{\partial u}{\partial x}$ in O

von Null verschieden, so ist O ein regulärer Punkt der Kurve. Nach dem Fundamentalsatze über implizite Funktionen existiert eine und nur eine analytische Funktion $y = f(x)$, die sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$ regulär verhält, dort den Wert 0 annimmt und die Gleichung $u = u_0$ identisch befriedigt. In der Umgebung von O sind die Kurven $u = u_0$ und $y = f(x)$ mit einander identisch.

Verschwinden aber beide Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ in O, so ist O ein singulärer und zwar ein mehrfacher Punkt, wie sich jetzt zeigen wird. Wir erhalten, wenn $m \geqq 2$ die Ordnung der niedrigsten nicht verschwindenden Ableitung ist, nach Gleichung (9) des § 5

$$u = u_0 + \sum_{n=m}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

da die Koeffizienten von $R, R^2, \ldots R^{m-1}$ verschwinden, während a_m, b_m nicht gleichzeitig verschwinden können.

Um nun die Gleichung

$$u - u_0 = \sum_{n=m}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 0 \tag{14*}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\begin{aligned} H(R, \varphi) &\equiv \sum_{n=m}^{\infty} R^{n-m} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \\ &\equiv a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi + R(\ldots) = 0 \end{aligned} \tag{14**}$$

in der Umgebung des Anfangspunktes O nach φ aufzulösen, verfährt man folgendermaßen. Man bestimmt zuerst ein der obigen Gleichung genügendes Wertepaar $R = 0$, $\varphi = \varphi_0$. Es muß φ_0 die Gleichung

$$a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi = 0$$

befriedigen. Man erhält aus einer Lösung dieser Gleichung alle übrigen durch Addition von $\frac{k\pi}{m}$, wo k irgendeine ganze Zahl ist. Die Gleichung besitzt daher für $0 \leqq \varphi < \pi$ genau m verschiedene Lösungen, von denen je zwei unmittelbar aufeinander folgende sich um $\frac{\pi}{m}$ unterscheiden. Die Ableitung

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = m(-a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi) + R(\ldots)$$

kann für $R = 0$, $\varphi = \varphi_0$ nicht verschwinden. Sonst wäre gleichzeitig

$$-a_m \sin m\varphi_0 + b_m \cos m\varphi_0 = 0,$$
$$b_m \sin m\varphi_0 + a_m \cos m\varphi_0 = 0,$$

also $a_m^2 + b_m^2 = 0$, während doch a_m und b_m nicht beide verschwinden können. Daher gibt es eine und nur eine analytische Funktion $\varphi = \varphi(R)$, welche in der Umgebung von $R = 0$ regulär ist, für $R = 0$ den Wert φ_0 annimmt und die Gleichung $H(R, \varphi) = 0$ oder $u = u_0$ identisch befriedigt. Den m verschiedenen Werten φ_0 entsprechend, gibt es m solche analytische Funktionen $\varphi(R)$. Die zugehörigen Kurvenäste sind in der Umgebung des Punktes O mit der Kurve $u = u_0$ identisch. Sie schneiden einander unter gleichen Winkeln $\frac{\pi}{m}$. Damit ist der Satz bewiesen:

Die Niveaulinien $u = const$ sind analytische Kurven. Ein etwaiger singulärer Punkt einer Niveaulinie kann nur ein mehrfacher Punkt sein, in dem sich eine endliche Anzahl von Kurvenästen unter gleichen Winkeln schneidet.

Andere Singularitäten wie Spitzen oder Ecken oder Endpunkte sind also ausgeschlossen.

In dem Beispiele $u = x^2 - y^2$ des § 10 in Bd. I zerfällt die Niveaulinie $x^2 - y^2 = 0$ in das Geradenpaar $y = x$ und $y = -x$, und diese beiden Geraden schneiden einander tatsächlich im Anfangspunkte unter gleichen Winkeln $\frac{\pi}{2}$.

§ 8. Entwicklung im Kreisringe.

Nachdem wir in § 5 die Entwicklung eines in einem Kreise regulären Potentials angegeben haben, wollen wir jetzt die Entwicklung in einem Kreisringe gewinnen. Diese wird das Analogon der Laurentschen Reihenentwicklung der Funktionentheorie sein.

Das Potential u sei in dem von den Kreisen K_1 und K_2 um den Nullpunkt O mit den Radien l_1 bzw. l_2 ($l_1 > l_2$) begrenzten Ringgebiete T regulär. Sei P irgendein Punkt von T. Wir denken uns zwei Kreise C_1 und C_2 um O mit den Radien R_1 bzw. R_2 ($R_1 > R_2$), von denen der erste wenig kleiner als l_1, der zweite wenig größer als l_2 ist, so daß P noch in dem von C_1 und C_2 begrenzten Ringgebiete T^* liegt. Auf T^* können wir die Formel (18) des § 14 in Bd. I anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}\left\{u\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \log\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2}\left\{u\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \log\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds \qquad (15) \\ &= u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Untersuchen wir nun die Funktionen u_1 und u_2 einzeln, so sehen wir zunächst, daß jede von ihnen ein Aggregat aus einem Potential der einfachen und einem der Doppelschicht darstellt. Sie sind also für alle endlichen Punkte, die nicht auf C_1 bzw. C_2 liegen, regulär. Insbesondere ist das Potential u_1 sicher im Innengebiete von C_1 regulär und darf dort, demnach auch in P in der Form

$$u_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{16}$$

entwickelt werden. Das Potential u_2 ist sicher für alle endlichen Punkte außerhalb C_2 regulär. Der Bestandteil

$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2} u \frac{\partial\left(\log \frac{1}{r}\right)}{\partial n} ds$ ist als Potential einer Doppelschicht auch noch im unendlich fernen Punkte regulär (vgl. Bd. I § 9). Dagegen wird sich $-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2} \log\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} ds$ wie ein Potential mit der Masse $M = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds$ verhalten. Dasselbe gilt also auch für u_2 selbst, und wir bekommen

$$u_2 = M \log \frac{1}{R} + v, \tag{17}$$

wo das Potential v außerhalb C_2 mit Einschluß des unendlich fernen Punktes regulär ist und außerdem im Unendlichen verschwindet. Um das letztere einzusehen, braucht man nur die Definitionsgleichung von u_2 mit der auch für Potentiale mit Masse gültigen Formel (19) des § 14 in Bd. I zu vergleichen. Dann erkennt man, daß die dort mit c bezeichnete Konstante, welche den Grenzwert $\lim\limits_{R=\infty} v$ darstellt, wirklich verschwindet. Was übrigens den Wert der

Konstanten M betrifft, so ist dieser von der speziellen Wahl des Kreises C_2 unabhängig; denn bedeutet C irgendeinen zwischen K_1 und K_2 gelegenen Kreis um O, so folgt aus der Formel (9*) des § 13 in Bd. I sofort $\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_{C_2} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$.

Das Potential v wird durch die Transformation der reziproken Radien $R' = \frac{1}{R}$, $\varphi' = \varphi$ in ein Potential übergeführt, das im Nullpunkte der (x', y')-Ebene regulär ist (vgl. Bd. I § 16) und dort wegen $\lim\limits_{R=\infty} v = 0$ verschwindet. Wir erhalten also für die transformierte Funktion eine Entwicklung

$$v\left(\frac{1}{R'}, \varphi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} R'^{\,n} (a_{-n} \cos n\varphi + b_{-n} \sin n\varphi)$$

mit Konstanten a_{-n}, b_{-n}. Sie ist gültig für $R' < \frac{1}{R_2}$. Daraus ergibt sich

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} R^{-n} (a_{-n} \cos n\varphi + b_{-n} \sin n\varphi) \tag{18}$$

für $R > R_2$, d. h. außerhalb C_2.

Die Reihen für u_1 und v haben das gemeinsame Konvergenzgebiet $R_2 < R < R_1$. Daher ist in diesem Gebiete, also auch in P

$$u = \tfrac{1}{2}(a_0 + a_0' \log R)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n R^n + a_{-n} R^{-n}) \cos n\varphi + (b_n R^n + b_{-n} R^{-n}) \sin n\varphi\}, \tag{19}$$

wobei $M = -\frac{a_0'}{2}$ gesetzt ist. Das ist die gesuchte Entwicklung. Da P ein beliebiger Punkt von T ist, haben wir den Satz: *Ein in einem Kreisringe T um den Nullpunkt reguläres Potential u kann für alle Punkte von T in eine Reihe der Form* (19) *entwickelt werden. Die Reihe ist gleichmäßig konvergent in jedem einschließlich des Randes ganz in T liegenden Bereiche und darf dort beliebig oft gliedweise differentiiert werden.*

Die gleichmäßige Konvergenz und die gliedweise Differentiierbarkeit ergibt sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der Reihen für u_1 und v. Die Koeffizienten der Entwicklung (19) können auf folgende Art bestimmt werden. Zunächst ist für jedes der Ungleichung $l_2 < R < l_1$ genügende R

$$a_0 + a_0' \log R = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\,d\varphi,$$

$$\left.\begin{aligned} a_n R^n + a_{-n} R^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \\ b_n R^n + b_{-n} R^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Wählt man nun für R die beiden den Ungleichungen $l_2 < R_2 < R_1 < l_1$ genügenden Werte R_1 und R_2, so findet man unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_{20}\log R_1 - a_{10}\log R_2}{\log R_1 - \log R_2}, \quad a_0' = \frac{a_{10} - a_{20}}{\log R_1 - \log R_2}, \\ a_n &= \frac{a_{1n}R_1^n - a_{2n}R_2^n}{R_1^{2n} - R_2^{2n}}, \quad a_{-n} = \frac{a_{1n}R_1^{-n} - a_{2n}R_2^{-n}}{R_1^{-2n} - R_2^{-2n}}, \\ b_n &= \frac{b_{1n}R_1^n - b_{2n}R_2^n}{R_1^{2n} - R_2^{2n}}, \quad b_{-n} = \frac{b_{1n}R_1^{-n} - b_{2n}R_2^{-n}}{R_1^{-2n} - R_2^{-2n}}, \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (20)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a_{kn} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R_k, \varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \\ b_{kn} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R_k, \varphi)\sin n\varphi\, d\varphi \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k &= 1, 2 \\ n &= 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \qquad (21)$$

zu setzen ist. Aus der Koeffizientenbestimmung ergibt sich: *Die Entwicklung* (19) *ist nur auf eine Art möglich.* Denn wäre u auf zwei Arten entwickelbar, so würde man durch Subtraktion eine in T geltende Identität der Form

$$0 = \tfrac{1}{2}(c_0 + c_0' \log R)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{(c_n R^n + c_{-n} R^{-n}) \cos n\varphi + (d_n R^n + d_{-n} R^{-n}) \sin n\varphi\}$$

mit Konstanten c, d erhalten. Dann würden zunächst die den a_{kn}, b_{kn} entsprechenden Größen c_{kn}, d_{kn}, die sich aus den Formeln (21) ergeben, indem man dort $u \equiv 0$ setzt, und folglich die Koeffizienten $c_0, c_0', c_n, c_{-n}, d_n, d_{-n}$ alle verschwinden.

Man erhält besondere Fälle des obigen Entwicklungssatzes, wenn $l_2 = 0$ oder wenn $l_1 = \infty$ ist. Besonders wichtig ist der erste Fall, der die Entwicklung in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle liefert. Die Entwicklung (19) ist dann für jedes von 0 verschiedene der Ungleichung $R < l_1$ genügende R gültig.

Wir sind jetzt in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen: *Ist die logarithmische Potentialfunktion u in der Umgebung des endlichen Punktes O, diesen höchstens ausgenommen, regulär und bleibt sie bei Annäherung an O beschränkt, so ist sie auch in O regulär.* Denn man mache O zum Anfangspunkt und führe die Entwicklung (19) aus, die für $0 < R < l_1$ gilt. Bei der Koeffizientenbestimmung kann man R_2 jeden noch so kleinen positiven Wert geben. Läßt man R_2 gegen 0 konvergieren, so bleiben a_{2n} und b_{2n} wegen der Voraussetzung über u nach (21) beschränkt. Daraus folgt leicht nach (20), daß $|a_0'|$, $|a_{-n}|$, $|b_{-n}|$ durch Verkleinern von R_2 beliebig klein gemacht werden können. Da sie aber Konstante sind, die nicht von der Wahl des R_2 abhängen, müssen sie verschwinden, w. z. b. w.

Wir behaupten: *Der obige Satz bleibt gültig, wenn O der unendlich ferne Punkt ist.* Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus der Anwendung der Transformation mittels reziproker Radien.

Die Bedingung der Beschränktheit von u bei Annäherung an den unendlich fernen Punkt ist sicher erfüllt, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{R=\infty} u$ existiert. Wir können also folgende spezielle Form des letzten Satzes aussprechen: *Ist das logarithmische Potential u in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, diesen höchstens ausgenommen, regulär und existiert* $\lim\limits_{R=\infty} u = c$, *so ist u auch im unendlich fernen Punkte selbst regulär.*

Dieser Satz war in den §§ 9 und 29 des Bd. I bereits angekündigt worden.

§ 9. Die Sätze von Harnack.

Sei T ein beschränktes ebenes Gebiet, S sein Rand. Wir wollen folgenden Satz von A. Harnack beweisen: *Ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y), \tag{22}$$

deren Glieder u_n in T reguläre, in $T + S$ stetige Potentialfunktionen sind, auf dem Rande S gleichmäßig konvergent, *so ist sie im Bereiche $T+S$ gleichmäßig konvergent und stellt eine in T reguläre, in $T+S$ stetige Potentialfunktion $u(x, y)$ dar. Die durch gliedweise Differentiation der obigen Reihe entstehenden Reihen konvergieren in jedem ganz in T liegenden Bereiche gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von u.*

Der Beweis beruht teils auf dem Satze über die Lage der Extrema, teils auf dem Poissonschen Integrale. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf S läßt sich zu jedem noch so kleinen positiven ε ein Index n finden, derart daß für alle Punkte s von S und beliebiges positives ganzzahliges p

$$|u_{n+1}(s) + u_{n+2}(s) + \ldots u_{n+p}(s)| < \varepsilon$$

ist. Das n ist von s unabhängig, nur von ε abhängig. Nun stellt die endliche Summe $u_{n+1}(x, y) + \ldots u_{n+p}(x, y)$ eine in T reguläre, in $T+S$ stetige Potentialfunktion dar. Ihr Wert liegt für alle Punkte von S zwischen den Grenzen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$. Da sie nach Bd. I § 17 sowohl ihr Maximum wie ihr Minimum auf S annimmt, schwankt sie auch für alle Punkte von T zwischen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$. Demnach ist in $T+S$

$$|u_{n+1}(x, y) + u_{n+2}(x, y) + \ldots u_{n+p}(x, y)| < \varepsilon,$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz von (22) in $T+S$ folgt. Die Funktion

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \tag{23}$$

ist als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Reihe in $T+S$ stetiger Funktionen selbst in $T+S$ stetig. Um zu zeigen, daß sie ein in T reguläres Potential darstellt, benutzen wir das Poissonsche Integral. Sei $P(x, y)$ ein beliebiger Punkt von T. Wir beschreiben einen ganz in T liegenden Kreis K, der P in seinem Innern enthält. Der

Mittelpunkt von K kann zum Anfangspunkt O gemacht werden, der Radius von K heiße l. Nach Gleichung (2) des § 4 ist für $n = 1, 2, \ldots$

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\psi)\frac{l^2 - R^2}{r^2}\,d\psi, \tag{24}$$

wo natürlich $u_n(\psi)$ den Wert von $u_n(x, y)$ auf K bezeichnet. Daher wird

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\psi)\frac{l^2 - R^2}{r^2}\,d\psi.$$

Da nun $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ in $T + S$, also auch auf der Peripherie von K gleichmäßig konvergiert und das letztere offenbar auch für $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\psi)\frac{l^2 - R^2}{r^2}$ gilt, darf gliedweise integriert werden.

Wir erhalten also

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\psi)\right\}\frac{l^2 - R^2}{r^2}\,d\psi$$

oder

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\frac{l^2 - R^2}{r^2}\,d\psi, \tag{25}$$

wo $u(\psi)$ die Werte von u auf K bezeichnet. Demnach ist die Funktion $u(x, y)$ innerhalb K durch ein Poissonsches Integral mit den stetigen Randwerten $u(\psi)$ ausgedrückt, stellt mithin ein in K, insbesondere in der Umgebung von

P und folglich, weil P beliebig gewählt war, ein in ganz T reguläres Potential dar.

Genau ebenso kann man zeigen: Eine in jedem ganz in T liegenden Bereiche gleichmäßig konvergente Reihe in T regulärer Potentiale stellt wieder ein in T reguläres Potential dar.

Was die partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ betrifft, so ist z. B. für alle Punkte innerhalb K

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{l^2-R^2}{r^2}\right) d\psi\,,$$

andrerseits für $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\psi)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{l^2-R^2}{r^2}\right) d\psi\,,$$

daher wieder durch gliedweise Integration

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\psi)\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{l^2-R^2}{r^2}\right) d\psi = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{26}$$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte $P(x, y)$ von T. Da die Reihe $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{l^2-R^2}{r^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\psi)$ für alle Punkte ψ der Peripherie von K und alle Punkte (x, y) jedes ganz in K liegenden Bereiches gleichmäßig konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}$ in jedem solchen Bereiche gleichmäßig. Daraus folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz in jedem ganz in T liegenden Kreisbereiche. Ebenso zeigt man allgemein, daß in ganz T bei beliebigem p und q die Gleichung

$$\frac{\partial^{p+q} u(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{p+q} u_n(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} \tag{27}$$

richtig ist.

Die rechtsstehende Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem ganz in T liegenden Kreise. Um zu zeigen, daß die gleichmäßige Konvergenz in jedem ganz in T liegenden Bereiche gilt, benutzen wir den Heine-Borelschen Satz: Wird um jeden Punkt eines beschränkten Bereiches (oder auch nur einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge) ein Kreis beschrieben, so genügt schon eine *endliche Anzahl* dieser Kreise, um den ganzen Bereich zu überdecken. (Beweis z. B. bei K. Knopp l. c. I. S. 26.) Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Damit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Es gilt folgender zweite ebenfalls von A. Harnack herrührende Satz: *Ist $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ ... eine unendliche Folge in T regulärer, nicht negativer Potentialfunktionen und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ in einem Punkte O von T, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem ganz in T liegenden Bereiche und stellt eine in T reguläre Potentialfunktion u dar.* Zum Beweise beschreiben wir um den Konvergenzpunkt O als Mittelpunkt einen möglichst großen, aber noch ganz in T liegenden Kreis K mit Radius l und erhalten für alle inneren Punkte $P(x, y)$ von K

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\psi) \frac{l^2 - R^2}{r^2} d\psi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Da sowohl u_n wie $l^2 - R^2$ nirgends negativ sind, wird der Wert des Integrals vergrößert, wenn man r verkleinert.

Der kleinste Wert, den r annehmen kann, ist $l - R$. Demnach findet man

$$u_n(x, y) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\psi)\frac{l^2 - R^2}{(l - R)^2}\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\,\frac{l+R}{l-R}\int_0^{2\pi} u_n(\psi)\,d\psi,$$

also

$$u_n(x, y) < \frac{l+R}{l-R}\,u_n(O) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (28)$$

nach Gleichung (32) des § 17 in Bd. I, wenn $u_n(O)$ den Wert von u_n im Punkte O bezeichnet. Die Ungleichung (28) gilt für alle inneren Punkte $P(x, y)$ von K. Aus ihr und der Konvergenz der Reihe in O ergibt sich, daß die Reihe für alle diese Punkte P und zwar in jedem ganz in K liegenden Bereiche gleichmäßig konvergiert. Sie stellt also (s. o.) ein innerhalb K reguläres Potential dar. Nun denken wir uns irgendeinen in K der Peripherie nahe liegenden Punkt O' und beschreiben um diesen einen möglichst großen, aber noch in T liegenden Kreis K', der teilweise über K hinausgreift. Dann ist die Reihe im Punkte O', folglich für alle Punkte innerhalb K' konvergent und ergibt dort ein reguläres Potential. Fährt man so fort, so findet man Konvergenz und Potentialeigenschaft in jedem beliebigen Punkte von T. Überdies konvergiert die Reihe in jedem ganz in T liegenden Kreise, mithin (s. o.) in jedem ganz in T liegenden Bereiche gleichmäßig.

§ 10. Analytische Fortsetzung eines regulären Potentials.

Analog dem entsprechenden Begriffe in der Funktionentheorie erklärt man den Begriff der „analytischen Fortsetzung eines regulären Potentials“, wofür man auch „harmonische Fortsetzung“ sagt: Eine in einem Gebiete T definierte reguläre Potentialfunktion u ist analytisch fortgesetzt, wenn in einem Gebiete T_1, das wenigstens ein Teilgebiet T^* mit T gemein hat und andrerseits über T hinausgreift, ein reguläres Potential definiert ist, das in T^* mit u identisch ist.

Die analytische Fortsetzung über ein bestimmtes Randstück hinüber ist nur auf eine Art möglich. Denn könnte man durch Fortsetzung über ein bestimmtes Randstück hinüber zwei in einem Gebiete T_1 reguläre Potentiale v und w gewinnen, die beide in T^* mit u übereinstimmen, so würde das in T_1 reguläre Potential $v - w$ in T^* identisch verschwinden. Dann müßte $v - w$ aber nach dem Satze am Schluß des § 15 von Bd. I in ganz T_1 verschwinden, sodaß v und w identisch sind.

Die aus der Funktionentheorie bekannte Methode der Fortsetzung einer analytischen Funktion mittels Potenzreihen hat hier ihr Gegenstück in der Fortsetzung des Potentials mittels Reihen der Form (9) des § 5. Dies hat keine Schwierigkeit.

Dagegen müssen wir uns ausführlicher mit der ebenfalls aus der Funktionentheorie übernommenen Fortsetzung durch „Spiegelung" befassen. Wir beginnen mit dem folgenden Satze: *Ist das Potential u regulär in einem Gebiete T, dessen Begrenzung zum Teil aus einem Stück AB der x-Achse besteht, und verschwindet u überall in den inneren Punkten von AB, so kann man u in das durch Spiegelung von T an AB entstehende Gebiet T' hinein fortsetzen, indem man der Fortsetzung in dem zum Punkte P von T in bezug auf AB symmetrischen Punkte P' den Wert $-u_P$ zuschreibt.* Zunächst ist klar, daß die durch die Gleichung

$$F = \begin{cases} u_P & \text{in den Punkten } P \text{ von } T \\ 0 & \text{in den inneren Punkten von } AB \\ -u_P & \text{in den Punkten } P' \text{ von } T' \end{cases} \tag{29}$$

definierte Funktion F in ihrem ganzen Definitionsgebiete, das T_1 heißen möge, insbesondere auch in den inneren Punkten von AB stetig ist. Sie ist ferner ein reguläres Potential sowohl in T wie in T'. Daß sie nun auch in den inneren Punkten von AB ein reguläres Potential darstellt, ist der springende Punkt der Behauptung und wird mit Hilfe des Poissonschen Integrals bewiesen. Sei O irgendein innerer Punkt von AB. Wir schlagen um O einen ganz in T_1 liegenden Kreis K mit Radius l und untersuchen die Funktion

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{l^2 - R^2}{r^2}\,d\psi\,. \tag{30}$$

Dabei setzen wir $f = u$ in den Punkten des in T gelegenen Halbkreises (dieser sei der obere) und $f = -u$ in den entsprechenden Punkten des unteren. Die Funktion Φ ist ein im Innern von K reguläres Potential. Sie verschwindet in den in K gelegenen Punkten von AB, weil je zwei symmetrische Integrationselemente einander aufheben. Ferner stimmt Φ im oberen Halbkreise mit u überein, weil Φ und u in diesem Halbkreise reguläre Potentiale sind, welche auf der Begrenzung des Halbkreises gleiche Werte annehmen, sodaß der Eindeutigkeitssatz der ersten Randwertaufgabe (vgl. § 2) angewandt werden kann. Ebenso stimmt Φ im unteren Halbkreise mit $-u$ überein. Daher gilt in ganz K die Identität

$$\Phi = F. \tag{31}$$

Mithin ist F in der Umgebung von O ein reguläres Potential, und da O ein beliebiger innerer Punkt von AB war, ist der Beweis vollendet.

Wir verallgemeinern jetzt den obigen Satz: *Nimmt die in T reguläre Potentialfunktion u längs AB analytische Werte $g(x)$ an, so kann sie über AB hinaus harmonisch fortgesetzt werden.*

Wegen ihres analytischen Charakters kann $g(x)$ in der Umgebung irgendeines inneren Punktes x_0 von AB in eine Potenzreihe entwickelt werden, also

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Es ist bekannt, daß eine konvergente Potenzreihe auch für komplexe Werte des Arguments konvergiert und eine analytische Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ in einer gewissen kreisförmigen Umgebung von $z = x_0$ darstellt. Wir gewinnen also eine analytische Funktion $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - x_0)^n$, die in einer gewissen beiderseitigen Umgebung von AB definiert ist und längs AB die Werte $g(x)$ annimmt. Ihr reeller Teil $Re\,[g(z)] = u_1$ ist ein zu beiden Seiten von AB erklärtes reguläres Potential, das auf AB mit $g(x)$ übereinstimmt. Daher ist $u - u_1$ ein in einer gewissen Umgebung oberhalb AB erklärtes reguläres Potential, welches auf AB verschwindet. Nach dem vorigen Satze kann $u - u_1$ über AB hinaus fortgesetzt werden. Und da u_1 bereits unterhalb AB erklärt ist, so ist auch u fortgesetzt.

Wir verallgemeinern das Spiegelungsprinzip noch weiter, indem wir folgenden Satz beweisen: *Ist das Potential u regulär in einem Gebiete T, zu dessen Begrenzung ein analytischer Kurvenbogen AB ohne singuläre Punkte gehört, und nimmt u längs AB analytische Werte an, so kann u über AB hinaus analytisch fortgesetzt werden.* Sei in der Tat O ein beliebiger innerer Punkt von AB. Die Gleichungen der analytischen Kurve AB seien in der Umgebung von O

$$x = \varphi(t) = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \ldots,$$
$$y = \psi(t) = b_0 + b_1 (t - t_0) + b_2 (t - t_0)^2 + \ldots,$$

wobei dem Punkte O der Parameterwert $t = t_0$ entspricht. Da AB keine singulären Punkte enthält, kann angenommen werden, daß $\varphi'(t_0) = a_1$ und $\psi'(t_0) = b_1$ nicht alle beide verschwinden. Wir bilden

$$z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$$
$$= a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(t - t_0) + (a_2 + ib_2)(t - t_0)^2 + \dots$$

Diese Reihe konvergiert nun nicht bloß für reelle, sondern auch für komplexe Werte des Arguments, welches jetzt mit Z bezeichnet werde, und es stellt

$$z = f(Z) = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(Z - t_0) + \dots$$

eine analytische Funktion von Z dar, die in einer gewissen kreisförmigen Umgebung von $Z = t_0$ definiert ist. Da $\left.\dfrac{dz}{dZ}\right|^{Z=t_0} = a_1 + ib_1 \neq 0$ ist, existiert nach dem Fundamentalsatze über die Umkehrung einer analytischen Funktion eine und nur eine analytische Funktion $Z = F(z)$, die in der Umgebung von $z_0 = a_0 + ib_0$ regulär ist, in z_0 den Wert t_0 annimmt und die Gleichung $z = f(Z)$ identisch befriedigt. Durch diese Funktion wird die Umgebung des Punktes $z = z_0$ umkehrbar eindeutig und konform auf die Umgebung des Punktes $Z = t_0$ abgebildet. Dabei geht das den Punkt O umgebende Stück der Kurve AB in ein den Punkt $Z = t_0$ enthaltendes Stück der reellen Achse der Z-Ebene über. Setzt man für den Augenblick $Z = X + iY$, so ergibt sich mit Rücksicht auf Bd. I § 21: Das auf einer Seite von AB definierte reguläre Potential $u(x, y)$ wird in ein Potential der neuen Variablen X, Y transformiert, welches in einem von einer Seite an die reelle Achse heranreichenden Gebiete der Z-Ebene regulär ist und längs eines den Punkt $Z = t_0$ enthaltenden Stückes dieser Achse analytische Werte annimmt. Nach dem vorigen Satze kann das transformierte Potential über dies Stück der reellen Achse und folglich $u(x, y)$ über das entsprechende den Punkt O umgebende Stück der Kurve AB fortgesetzt werden. Da O ein beliebiger innerer Punkt von AB war, ist die Fortsetzung über den ganzen Bogen AB möglich.

Wir machen noch folgenden Zusatz: Besteht der Rand S von T aus einer einzigen analytischen Kurve ohne singuläre Punkte (z. B. aus einem Kreise), so kann ein in T reguläres Potential u, das auf S analytische Werte annimmt, über den ganzen Rand in ein Gebiet fortgesetzt werden, welches $T+S$ in seinem Innern enthält. Besteht aber S aus mehreren analytischen Bögen, die in gewissen Punkten $A_1, A_2, \ldots$ zusammenstoßen, in welchen S nicht mehr analytisch ist, so können diese Punkte im allgemeinen nicht als innere Punkte eines erweiterten Regularitätsgebietes angesehen werden.

§ 11. Die Greensche Funktion in der Ebene.

Sei T ein beschränktes ebenes Gebiet, S sein Rand. *Die Greensche Funktion G des Gebietes T ist eine Funktion zweier Punkte $P(x, y)$ und $Q(\xi, \eta)$, von denen der eine P in T, der andere Q in $T+S$ variiert, mit folgenden Eigenschaften: Sie stellt als Funktion von ξ, η ein mit Ausschluß von P in T reguläres, in $T+S$ stetiges Potential dar. Sie wird in P logarithmisch unendlich, derart daß*

$$G(x, y; \xi, \eta) - \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = w(x, y; \xi, \eta) \qquad (32)$$

ein auch in P reguläres Potential ist. Sie verschwindet auf dem Rande S, d. h. sie verschwindet für alle Punkte Q von S und P von T. Daß die Greensche Funktion für ein gegebenes Gebiet überhaupt existiert, muß natürlich erst bewiesen werden. Wir nehmen an, daß S bis auf eine endliche Anzahl singulärer Stellen eine stetige Tangente besitzt. Die Bestimmung der Greenschen Funktion ist dann ein spezieller Fall der ersten Randwertaufgabe, da w als Funktion von ξ, η ein in T reguläres, in $T+S$ stetiges Potential ist, welches auf S die Werte $-\log\frac{1}{r}$ annimmt, die, weil P nicht auf S liegt, eine stetige Randfunktion bilden. Hieraus folgt unmittelbar, daß jedenfalls nicht mehrere Greenschen Funktionen für dasselbe Gebiet existieren können, da ja auf w der Eindeutigkeitssatz der ersten Randwertaufgabe (s. § 2) anwendbar ist.

Besitzt G auf S eine stetige Normalableitung $\frac{\partial G}{\partial n}$, so ist es möglich, die Randwertaufgabe bei beliebig gegebenen stetigen Randwerten auf die Bestimmung von G, d. h. das allgemeine Problem auf ein spezielles zurückzuführen. Hierzu brauchen wir die Formeln

$$\int\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0 \quad \text{und}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left\{u\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\log\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds,$$

die für zwei in T reguläre, in $T+S$ stetige, mit stetigen Normalableitungen versehene Potentiale u und v gelten, da $P(x, y)$ in T liegt. Durch Addition ergibt sich

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left\{u\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r}+v\right)}{\partial n}-\left(\log\frac{1}{r}+v\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds. \quad (33)$$

Wählen wir für v die obige Funktion $w = G - \log\frac{1}{r}$, was zulässig ist, da aus der Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial G}{\partial n}$ die von $\frac{\partial w}{\partial n}$ folgt, so erhalten wir die wichtige Formel

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S u\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds\,. \tag{34}$$

Die bisher gemachte Voraussetzung der Existenz einer stetigen Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf S können wir noch beseitigen, wobei wir etwas näher auf die Eigenschaften von G eingehen müssen. Da w in $T+S$, insbesondere auch im Punkte P stetig, also beschränkt bleibt, $\log\frac{1}{r}$ aber bei Annäherung an P positiv unendlich wird, so wird auch G selbst positiv unendlich. Umgeben wir also P mit einem kleinen ganz in T liegenden Kreise, so nimmt G auf der Peripherie C große positive Werte an. Da nun G auf C positiv und auf S Null ist und das Minimum von G auf dem Rande des von S und C begrenzten Gebietes liegen muß, ist G in diesem Gebiete überall positiv. Hieraus folgt, weil der Radius von C beliebig klein genommen werden kann, daß die Greensche Funktion in ganz T positiv ist. Wir wollen nun annehmen, daß T einfach zusammenhängend ist. *Die Gleichung*

$$G = \text{const} = c > 0$$

stellt dann eine innerhalb S gelegene, geschlossene, den Punkt P in ihrem Innern enthaltende analytische Kurve S_c ohne singuläre Punkte dar. Denn zunächst ist S_c als Niveaulinie nach § 7 analytisch. Ferner erstreckt sich die Kurve S_c nicht ins Unendliche, da sie die Begrenzung S, auf der $G = 0$ ist, nicht schneidet, und hat andrerseits nach § 7 keine Endpunkte, muß also geschlossen sein. Würde endlich S_c den Punkt P nicht umschließen oder besäße S_c mehrfache Punkte, so müßte ein P nicht enthaltendes Teilgebiet von T existieren, auf dessen Begrenzung überall $G = c$ wäre, während im Innern G regulär bliebe. Dann würde wegen des Eindeutigkeitssatzes des § 2 in diesem ganzen Teilgebiete die Identität $G = c$ gelten und schließlich wegen des Satzes am Schluß des § 15 in Bd. I im ganzen Regularitätsgebiete von G, was unmöglich ist.

Die Kurve S_c liegt nahe an S, wenn die positive Konstante c klein, und nahe an P, wenn sie groß ist. Es ist klar, daß die Kurvenschar $G = c$ $(0 \leqq c \leqq +\infty)$ den Bereich $T + S$ einfach überdeckt. Im Grenzfalle $c = 0$ geht S_c in die Randkurve S über, im Grenzfalle $c = +\infty$ schrumpft sie in den Punkt P zusammen. Die Kurve S_c teilt T in zwei Gebiete; innerhalb S_c ist überall $G > c$, außerhalb $G < c$. Auf S_c ist also die nach der inneren Normale genommene Ableitung von G ständig positiv, d. h. $\frac{\partial G}{\partial n} > 0$.

Wir wenden nun die Formel (33) mit $v \equiv w$ statt auf S auf S_c an, da u auf S_c sicher eine stetige Normalableitung besitzt, und erhalten

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_c} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_c} u \frac{\partial G}{\partial n} ds - \frac{c}{2\pi} \int\limits_{S_c} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

folglich

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_c} u \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

wegen Gleichung (9*) des § 13 in Bd. I. Machen wir nun den Grenzübergang $\lim c = 0$ und berücksichtigen die Stetigkeit von u und $\frac{\partial G}{\partial n}$ bei Annäherung an S, so ergibt sich in der Tat wieder (34).

Da in (34) die Randwerte von $\frac{\partial u}{\partial n}$ eliminiert sind, bloß noch die von u selbst auftreten, so haben wir mittels der Greenschen Funktion G die Lösung der ersten Randwertaufgabe u explizite dargestellt, *wenn* eine solche Lösung existiert. Wir brauchen bloß in dem Integral von (34) für u die gegebene stetige Funktion f zu setzen. *Daß* aber $u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S f \frac{\partial G}{\partial n} ds$ die Lösung wirklich ist, muß noch bewiesen werden, worauf wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

Ist das Gebiet T nicht beschränkt und zwar der Einfachheit halber das Außengebiet einer geschlossenen Kurve S, so kann die obige Definition der Greenschen Funktion ungeändert übertragen werden. Diese muß dann im unendlich fernen Punkte regulär sein.

Was die oben gemachte Voraussetzung der Stetigkeit von $\frac{\partial G}{\partial n}$ auf S betrifft, so ist diese sicher erfüllt, wenn S eine analytische Kurve ohne singuläre Punkte, z. B. ein Kreis ist. Denn da das Potential w auf S analytische Werte $-\log\frac{1}{r}$ annimmt, kann w nach § 39 harmonisch fortgesetzt werden, derart, daß alle Punkte von S innere Punkte des erweiterten Regularitätsgebietes werden. Mithin existiert eine stetige Normalableitung $\frac{\partial w}{\partial n}$ und folglich $\frac{\partial G}{\partial n}$ auf S.

Über die Beziehung der Greenschen Funktion zur Theorie der konformen Abbildung s. z. B. L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung, § 21 oder E. Goursat, Cours d'analyse, Bd. III, Nr. 517.

§ 12. Die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion.

Die Greensche Funktion ist symmetrisch in bezug auf die Punkte P und Q, d. h. es gilt die Identität

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y). \tag{35}$$

Zum Beweise denken wir uns zwei beliebige Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ in T, beschreiben um diese zwei kleine ganz in T liegende Kreise K_1 und K_2 mit den Radien δ_1 und δ_2, bezeichnen das nach Wegnahme von K_1 und K_2 aus T entstehende Gebiet mit T^* und wenden auf T^* die Greensche Formel (6*) des § 13 in Bd. I an. Als Funktionen u und v nehmen wir

$$u(\xi, \eta) = G(x_1, y_1; \xi, \eta) = G_1, \quad v(\xi, \eta) = G(x_2, y_2; \xi, \eta) = G_2,$$

indem wir zunächst die Existenz eines stetigen $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ auf S voraussetzen. Dann ergibt sich, weil G_1 und G_2 als Funktionen von ξ, η in T^* reguläre Potentiale sind,

$$\int\limits_S \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n}\right) ds + \int\limits_{K_1} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n}\right) ds$$
$$+ \int\limits_{K_2} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Da sowohl G_1 wie G_2 auf S verschwindet, fällt das über S erstreckte Integral fort. Ferner ist, wenn wir

$$G_1 = \log\frac{1}{r_1} + w_1\,,\; G_2 = \log\frac{1}{r_2} + w_2$$

setzen, wobei r_1 und r_2 natürlich die Entfernungen $P_1 Q$ bzw. $P_2 Q$ bezeichnen,

$$\int\limits_{K_1}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)ds = \int\limits_{K_1}\left(v_1\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial v_1}{\partial n}\right)ds$$

$$+\int\limits_{K_1}\left(\log\frac{1}{r_1}\,\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}\right)ds,$$

also, wenn man den Beweis für die Gleichung (18) des § 14 von Bd. I berücksichtigt,

$$\lim_{\delta_1=0}\int\limits_{K_1}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)ds = \frac{1}{2\pi}\,G_2\Bigg|^{\xi=x_1,\ \eta=y_1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,G(x_2, y_2;\, x_1, y_1),$$

analog

$$\lim_{\delta_2=0}\int\limits_{K_2}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)ds = -\frac{1}{2\pi}\,G_1\Bigg|^{\xi=x_2,\ \eta=y_2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,G(x_1, y_1;\, x_2, y_2).$$

Mithin ist tatsächlich

$$G(x_1, y_1;\; x_2, y_2) - G(x_2, y_2;\; x_1, y_1) = 0$$

für irgend zwei Punkte P_1, P_2 in T.

Ohne die Existenz eines stetigen $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ auf S vorauszusetzen, verfahren wir folgendermaßen. Wir benutzen die Niveaulinie S_ε von G_1 mit der Gleichung $G_1 = \varepsilon > 0$ und führen dann den Grenzübergang $\lim \varepsilon = 0$ aus. Die Greensche Formel wird auf das von S_ε und den Kreisperipherien K_1, K_2 begrenzte Gebiet T_ε^* angewandt, und es genügt offenbar, die Limesgleichung

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{S_\varepsilon} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds = 0$$

zu beweisen. Nun ist $\displaystyle\int_{S_\varepsilon} G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds = \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G_2}{\partial n} ds$ und

$\displaystyle\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G_2}{\partial n} ds = \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial v_2}{\partial n} ds + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_2}\right)}{\partial n} ds$. Man hat aber

$\displaystyle\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial v_2}{\partial n} ds = 0$ wegen Gleichung (9*) des § 13 in Bd. I, ferner

$\displaystyle\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_2}\right)}{\partial n} ds = \int_{K_2} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_2}\right)}{\partial n} ds$, weil $\log \dfrac{1}{r_2}$ in dem von S_ε und K_2 begrenzten, den Punkt P_2 nicht enthaltenden Gebiete regulär ist. Andrerseits wird $\displaystyle\int_{K_2} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_2}\right)}{\partial n} ds = 2\pi$. Daher folgt schließlich

$$\int_{S_\varepsilon} G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds = 2\pi\varepsilon.$$

Bezeichnen wir das Maximum von $|G_2|$ auf S_ε mit μ und berücksichtigen, daß auf S_ε ständig $\frac{\partial G_1}{\partial n} > 0$ ist, so finden wir weiter,

$$\left| \int\limits_{S_\varepsilon} G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} ds \right| < \mu \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial G_1}{\partial n} ds = 2\pi\mu.$$

Demnach ergibt sich

$$\left| \int\limits_{S_\varepsilon} \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds \right| < 2\pi(\varepsilon + \mu).$$

Konvergiert nun ε gegen 0, so geht S_ε in S über, und da G_2 auf S verschwindet, wird auch μ beliebig klein. Hieraus folgt in der Tat die gesuchte Limesgleichung.

Aus der Symmetrie ergibt sich, daß G auch als Funktion von x, y ein reguläres Potential ist.

Durch die obigen Ausführungen ist die Symmetrie von $G(x, y; \xi, \eta)$ für alle Punkte $P(x, y)$ und $Q(\xi, \eta)$ von T bewiesen. Wir können nun den Definitionsbereich von G erweitern, indem wir zulassen, daß auch P, nicht bloß Q, auf den Rand S gelangt. Wir setzen $G(x, y; \xi, \eta) = 0$ für alle Punkte P von S und Q von $T + S$, wobei nur ein Zusammenfallen von P und Q ausgeschlossen wird. Dann ist G für alle von einander verschiedenen Punktepaare P und Q von $T + S$ definiert. Das Symmetriegesetz gilt jetzt in $T + S$.

§ 13. Die Greensche Funktion für den Kreis.

Die Greensche Funktion für den Kreis kann in expliziter Form mit Hilfe elementarer Funktionen dargestellt werden. Der Kreis habe den Anfangspunkt O zum Mittelpunkt und den Radius l. Wir bezeichnen den zu $P(x, y)$ in bezug auf den Kreis „konjugierten" Punkt mit $P'(x', y')$; das ist der Punkt, dessen Polarkoordinaten R', φ' durch die Gleichungen

$$RR' = l^2, \; \varphi' = \varphi$$

bestimmt sind. Bedeutet r' die Entfernung des Punktes $Q(\xi, \eta)$ von P', so ist für alle Punkte Q der Kreisperipherie S das Verhältnis $\frac{r}{r'} = \text{const}$, d. h. von Q unabhängig, also nur von P abhängig. Man hat nämlich wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OPQ und OQP'

$$\frac{r}{r'} = \frac{R}{l}$$

für die Punkte Q von S. Demnach ergibt sich für die Greensche Funktion der konkrete Ausdruck

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\log\frac{r}{r'} + \log\frac{R}{l} = \log\frac{1}{r} - \log\left(\frac{l}{R}\cdot\frac{1}{r'}\right). \tag{36}$$

Es ist leicht, an diesem Ausdruck die definierenden Eigenschaften der Greenschen Funktion nachzuweisen.

Die Symmetrie von G kann folgendermaßen in Evidenz gesetzt werden. Da $x' = \frac{l^2 x}{R^2}$, $y' = \frac{l^2 y}{R^2}$ ist, ergibt sich

$$r'R = R\sqrt{\left(\frac{l^2 x}{R^2} - \xi\right)^2 + \left(\frac{l^2 y}{R^2} - \eta\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{l^2 x}{R} - \xi R\right)^2 + \left(\frac{l^2 y}{R} - \eta R\right)^2}$$

$$= \sqrt{l^4 - 2l^2(x\xi + y\eta) + R^2(\xi^2 + \eta^2)}.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} G(x, y;\, \xi, \eta) &= -\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \\ &+ \log\sqrt{l^4 - 2l^2(x\xi + y\eta) + (x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2)} - \log l, \end{aligned} \tag{36*}$$

wodurch die Symmetrie augenscheinlich wird.

Die Greensche Funktion für das Außengebiet des Kreises ist ebenfalls

$$G = \log\frac{1}{r} - \log\left(\frac{l}{R}\cdot\frac{1}{r'}\right).$$

Natürlich liegt jetzt P außerhalb, P' innerhalb S, während es oben umgekehrt war. Daß G regulär bleibt, wenn $Q(\xi, \eta)$ ins Unendliche rückt — die übrigen Eigenschaften der Greenschen Funktion sind unmittelbar ersichtlich —, erkennt man so: Es ist $G = \log\frac{r'}{r} + \log\frac{R}{l}$. Da $\frac{R}{l}$ von ξ, η unabhängig ist, genügt es, die Regularität des Potentials $g = \log\frac{r'}{r}$ im Unendlichen zu beweisen. Nun ist für $\xi^2 + \eta^2 \to \infty$ bei festem $P(x, y)$ offenbar $\lim\frac{r'}{r} = 1$, also $\lim g = 0$. Diese Limesgleichung ist aber nach § 8 hinreichend.

Wir geben jetzt eine neue Ableitung des Poissonschen Integrals, indem wir die Formel (34) des § 11 auf den speziellen Fall des Kreises anwenden. Diese Formel ist hier sicher anwendbar, da beim Kreise eine stetige Normalableitung von G existiert. Es ist nun

$$G = -\log r + \log r' + \log\frac{R}{l},$$

daher $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial \log r}{\partial n} + \frac{\partial \log r'}{\partial n}$, weil $\log \frac{R}{l}$ von ξ, η unabhängig ist,

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\cos(r, n)}{r} - \frac{\cos(r', n)}{r'} \quad \text{(vgl. Bd. I, § 6).}$$

Wegen
$$R^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos(r, n),$$
$$R'^2 = l^2 + r'^2 - 2lr'\cos(r', n)$$
wird
$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2l}\left(\frac{l^2 - R^2}{r^2} - \frac{l^2 - R'^2}{r'^2}\right).$$

Nun hat man $RR' = l^2$ und $\frac{r}{r'} = \frac{R}{l}$ wegen der Lage von Q auf S, woraus leicht folgt $\frac{l^2 - R'^2}{r'^2} = \frac{R^2 - l^2}{r^2}$.
Demnach ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{l}\,\frac{l^2 - R^2}{r^2}$$

und
$$u = \frac{1}{2\pi}\int_S u\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds = \frac{1}{2\pi l}\int_S u\,\frac{l^2 - R^2}{r^2}\,ds.$$

Das ist tatsächlich das Poissonsche Integral.

Kapitel III.

Das Poissonsche Integral im Raume.

§ 14. Lösung der ersten Randwertaufgabe für die Kugel.

Die Lösung der ersten Randwertaufgabe für das Innengebiet der Kugel um den Anfangspunkt O mit dem Radius l ist gegeben durch das Poissonsche Integral

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f\left(\frac{\cos(r, n)}{r^2} - \frac{1}{2lr}\right) d\omega, \qquad (1)$$

worin die Integration über die ganze Kugeloberfläche S zu erstrecken ist. Denn erstens ist u als Differenz aus einem Potential der Doppelschicht

$$W = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f\frac{\cos(r, n)}{r^2}\, d\omega$$

und einem Potential der einfachen Schicht

$$V = \frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S \frac{f}{r}\, d\omega$$

im Innern der Kugel regulär. Und zweitens erhält man bei Annäherung von $P(x, y, z)$ an einen beliebigen Punkt s von S wegen Gleich. (14) des § 24 in Bd. I

$$W_i = f_s + W_s = f_s + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f\frac{\cos(r_{sQ}, n_Q)}{r_{sQ}^2}\, d\omega,$$

also, da für einen Oberflächenpunkt s die Gleichung $\cos(r, n) = \frac{r}{2l}$ gilt,

$$W_i = f_s + \frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S \frac{f}{r_{sQ}}\,d\omega,$$

ferner wegen der Stetigkeit von v in den Punkten von S

$$V_i = V_s = \frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S \frac{f}{r_{sQ}}\,d\omega,$$

demnach

$$u_i = W_i - V_i = f_s.$$

Das in (1) auftretende Integral kann folgendermaßen umgeformt werden. Es ist

$$R^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos(r, n)$$

$$\frac{\cos(r,n)}{r^2} - \frac{1}{2lr} = \frac{l^2 - R^2}{2lr^3},$$

mithin

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S f\,\frac{l^2 - R^2}{lr^3}\,d\omega. \tag{2}$$

Bezeichnen wir den Winkel, den die Geraden OP und OQ miteinander bilden, mit α, so ist

$$r^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\alpha,$$

folglich

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S f\,\frac{l^2 - R^2}{(l^2 + R^2 - 2\,l\,R\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,d\omega. \tag{2*}$$

Die Polarkoordinaten von P seien R, φ, ϑ, wobei ϑ die sog. „Poldistanz“, φ die „geographische Breite“ darstellt, sodaß

$$x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \cos \vartheta$$

ist. Die Polarkoordinaten von Q seien l, φ', ϑ'. Ist $\bar{P}$ mit den Polarkoordinaten l, φ, ϑ die Projektion von P auf die Kugeloberfläche S und N der Schnittpunkt der positiven z-Achse mit S („Nordpol“), so liefert der Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, angewandt auf das Kugeldreieck $\bar{P}QN$, die Beziehung

$$\cos\alpha = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi'). \tag{3}$$

Dieser Ausdruck für $\cos\alpha$ ist in dem Integral von (2*) einzutragen.

Ferner hat man für das Flächenelement der Kugel $d\omega = l^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$. Demnach wird

$$u = \frac{l}{4\pi} \int\!\!\int \frac{f(\vartheta', \varphi')(l^2 - R^2) \sin\vartheta'}{(l^2 + R^2 - 2lR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\, d\vartheta'\, d\varphi', \tag{4}$$

worin für ϑ' die Grenzen 0 und π, für φ' die Grenzen 0 und 2π zu nehmen sind.

Die Formel (4) zusammen mit (3) ist der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Lösung u nach Kugelfunktionen, welche das Analogon zu der im Falle des logarithmischen Potentials im vorigen Kapitel hergeleiteten Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen [s. Gl. (9) des § 5] bildet[1]).

Wir können auch das äußere Problem für die Kugel lösen, d. h. dasjenige Potential bestimmen, welches außerhalb der Kugel, abgesehen vom unendlich fernen Punkte,

---

[1]) Die Theorie der Kugelfunktionen ist z. B. dargestellt in dem Werke von A. Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Bd. 2.

regulär ist, in der Umgebung des unendlich fernen Punktes sich wie ein Potential mit Masse verhält, dort selbst verschwindet und auf S die stetigen Randwerte f annimmt. Die Lösung ist gegeben durch das Integral

$$u = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S f\left(\frac{1}{2\,l r} - \frac{\cos(r, n)}{r^2}\right) d\omega = V - W. \quad (5)$$

Denn erstens sind die beiden Potentiale V und W außerhalb S, mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes, regulär. Zweitens ist W auch im Unendlichen regulär, während V sich wie ein Potential mit der Masse $\frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S f d\omega$ verhält. Drittens verschwindet sowohl V wie W im Unendlichen. Und viertens ist

$$W_a = -f_s + \frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S \frac{f}{r_{sQ}}\, d\omega,$$

$$V_a = \frac{1}{4\pi l}\iint\limits_S \frac{f}{r_{sQ}}\, d\omega,$$

also
$$u_a = V_a - W_a = f_s.$$

Verlangt man statt des Verschwindens im Unendlichen, daß u dort den Wert c annimmt, so erhält man als Lösung

$$u = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S (f - c)\left(\frac{1}{2\,l r} - \frac{\cos(r, n)}{r^2}\right) d\omega + c. \quad (6)$$

Anmerkung. Die Harnackschen Sätze des § 9 können, nachdem das Poissonsche Integral für die Kugel abgeleitet worden ist, wörtlich aufs Newtonsche Potential übertragen werden. Der Leser führe den Beweis durch!

§ 15. Die Greensche Funktion im Raume.

Sei T ein beschränktes räumliches Gebiet, dessen Begrenzung S eine, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Kanten und konischen Punkten, mit stetiger Normale versehene Fläche ist. *Die Greensche Funktion G des Gebietes T ist eine Funktion zweier Punkte $P(x, y, z)$ und $Q(\xi, \eta, \zeta)$, von denen der eine P in T, der andere Q in $T+S$ variiert, mit folgenden Eigenschaften: Sie stellt als Funktion von ξ, η, ζ ein mit Ausschluß von P in T reguläres, in $T+S$ stetiges Potential dar. Sie wird in P wie der reziproke Wert der Entfernung PQ unendlich, derart daß*

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} = w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \tag{7}$$

ein auch in P reguläres Potential ist. Sie verschwindet für alle Punkte Q von S und P von T.

Die Bestimmung der Greenschen Funktion ist ein spezieller Fall der ersten Randwertaufgabe, da die Werte des Potentials w auf dem Rande $= -\frac{1}{r}$ vorgeschrieben sind.

Nimmt man an, daß die Greensche Funktion eine stetige Normalableitung $\frac{\partial G}{\partial n}$ auf S besitzt, und bedeutet u ein in T reguläres bei Annäherung an S nebst seiner Normalableitung stetiges Potential, so gilt die Formel [vgl. Gl. (34) des § 11]

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint_S u \frac{\partial G}{\partial n} \, d\omega .$$

Die Greensche Funktion besitzt wieder die Symmetrieeigenschaft

$$G(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta;\ x, y, z).$$

Bei der Greenschen Funktion für das Außengebiet einer geschlossenen Fläche wird noch, während die andern obengenannten Eigenschaften bestehen bleiben, verlangt, daß sie im Unendlichen verschwindet und sich dort wie ein Potential mit Masse (also nicht regulär) verhält.

Die Greensche Funktion für das Innengebiet einer Kugel um den Anfangspunkt O mit dem Radius l ist

$$G = \frac{1}{r} - \frac{l}{R} \cdot \frac{1}{r'}. \tag{8}$$

Dabei ist r' die Entfernung des Punktes Q von dem zu P in bezug auf die Kugel konjugierten Punkte P', der auf der Verlängerung von OP über P hinaus liegt und die Entfernung $R' = \frac{l^2}{R}$ vom Mittelpunkte O hat, während im übrigen die Bezeichnungen von früher beibehalten sind. Daß tatsächlich $G = 0$ wird, wenn Q auf die Kugeloberfläche S rückt, ergibt sich aus der für die Punkte Q von S geltenden Beziehung

$$\frac{r}{r'} = \frac{R}{l},$$

die ebenso wie im § 13 bewiesen wird. Wir bringen noch die Symmetrie von G zur Anschauung. Es ist wegen

$$x' = \frac{l^2 x}{R^2}, \qquad y' = \frac{l^2 y}{R^2}, \qquad z' = \frac{l^2 z}{R^2}$$

$$Rr' = \sqrt{\left(\frac{l^2 x}{R} - R\xi\right)^2 + \left(\frac{l^2 y}{R} - R\eta\right)^2 + \left(\frac{l^2 z}{R} - R\zeta\right)^2},$$

daher

$$G = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^4-2l^2(x\xi+y\eta+z\zeta)+(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}}. \tag{8*}$$

Die Greensche Funktion für das Außengebiet der Kugel ist ebenfalls gegeben durch

$$G = \frac{1}{r} - \frac{l}{Rr'}.$$

Der Leser zeige, daß sich G als Funktion von ξ, η, ζ im Unendlichen wie ein Potential mit der Masse $1-\frac{l}{R}$ verhält!

Kapitel IV.

Die Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen.

Bisher haben wir die Randwertaufgaben nur für Kreis und Kugel und auch hier nur die erste Randwertaufgabe gelöst. Wir werden jetzt die Randwertaufgaben allgemein für beliebige Gebiete behandeln.

Von den vielen Methoden, die für die allgemeine Lösung in Betracht kommen, wählen wir die modernste, nämlich die Fredholmsche Methode der Integralgleichungen, die sich durch große Eleganz und andererseits durch besondere Tragweite auszeichnet.

In diesem Kapitel entwickeln wir zunächst die Grundzüge der Fredholmschen Theorie.

§ 16. Begriff der Integralgleichung.

Eine Integralgleichung ist eine Funktionalgleichung, in der die unbekannte Funktion auch unter dem Integralzeichen auftritt.

Die beiden wichtigsten Typen von Integralgleichungen sind die folgenden

$$\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x) \tag{A}$$

und

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x). \tag{B}$$

Dabei sind $K(x,\xi)$ und $f(x)$ gegeben, $\varphi(x)$ ist die gesuchte unbekannte Funktion, λ ist ein Parameter.

Die Variablen x und ξ sind auf das reelle Intervall $a \ldots b$ beschränkt. Dagegen können die Funktionen $K(x,\xi)$ und $f(x)$ auch komplexe Werte annehmen, also komplexe Funktionen ihrer reellen Argumente sein. Auch der Parameter λ darf komplex sein.

Die Funktion $K(x,\xi)$ wird *Kern* der Integralgleichung genannt. Die Gleichung (A), in der die unbekannte Funktion φ nur unter dem Integralzeichen erscheint, wird *Integralgleichung erster Art*, die Gleichung (B), in der $\varphi(x)$ sowohl innerhalb wie außerhalb des Integrals erscheint, *Integralgleichung zweiter Art* genannt. Setzt man in dieser voraus, daß $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ nicht identisch verschwindet, so hat man die *unhomogene* Gleichung zweiter Art vor sich, während für $f(x) \equiv 0$

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,dx = 0 \tag{C}$$

die *zugehörige homogene Gleichung* darstellt.

Die obigen Integralgleichungen sind alle *linear* in Bezug auf die unbekannte Funktion $\varphi(x)$, da diese überall nur in erstem Grade auftritt. (Mit nichtlinearen beschäftigen wir uns nicht.) Derartige Gleichungen lassen sich leicht für zwei-, drei- und mehrdimensionale Gebiete bilden. So hat man z. B., wenn T irgendein beschränktes ebenes Gebiet bedeutet, die Integralgleichungen

$$\iint_T K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = f(x, y), \tag{A*}$$

$$\varphi(x, y) - \lambda \iint_T K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = f(x, y), \tag{B*}$$

$$\varphi(x, y) - \lambda \iint_T K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = 0. \tag{C*}$$

Auch für krumme Flächen kann man solche Integralgleichungen aufstellen, wenn man krummlinige Koordinaten einführt, durch welche die Lage eines Flächenpunktes umkehrbar eindeutig bestimmt ist. Gibt man in (A*), (B*), (C*) den Variablen x, y und ξ, η die Bedeutung von krummlinigen Koordinaten (z. B. Polarkoordinaten φ, ϑ auf einer Kugel) und bedeutet T einen Teil der Fläche oder auch die ganze Fläche, wenn diese geschlossen ist, so hat man tatsächlich Integralgleichungen der angegebenen Art.

Nimmt man in der Gleichung

$$U(x, y) = \iint_T \varrho(\xi, \eta) \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \, d\xi \, d\eta$$

(T bedeutet jetzt wieder ein ebenes Gebiet), durch welche das logarithmische Flächenpotential definiert wird, U als gegebene und ϱ als unbekannte Funktion an, so hat man ein Beispiel für eine Integralgleichung erster Art mit dem Kern

$$K(x, y; \xi, \eta) = \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$$

Die Lösung wird durch die Gleichung von Poisson (Bd. I, S. 128, Gleichung (41)) in der Form

$$\varrho(x, y) = -\frac{\Delta U}{2\pi}$$

geliefert.

Ebenso kann im Raume

$$U(x, y, z) = \iiint\limits_T \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

als Integralgleichung erster Art mit dem Kerne

$$K(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

und der Lösung

$$\varrho(x, y, z) = -\frac{\Delta U}{4\pi}$$

angesehen werden.

Im folgenden werden wir es nun in der Regel mit Integralgleichungen zweiter Art zu tun haben, deren Theorie von Fredholm[1]) begründet worden ist[2]).

---

[1]) Siehe insbesondere Acta math., Bd. 27.

[2]) Neue Begründungen der Theorie der Integralgleichungen bei Hilbert, „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Leipzig und Berlin (1912); Plemelj, „Potentialtheoretische Untersuchungen"; Jablonowski-Preisschrift Nr. 40, §§ 14—18, Leipzig (1911) (diese Darstellung ist

§ 17. Das erste Theorem Fredholms.

Wir beschäftigen uns also jetzt mit der Funktionalgleichung für $\varphi(x)$

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x). \tag{I}$$

Zunächst nehmen wir an, daß $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ und $K(x,\xi)$ für $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq \xi \leqq b$ stetig sind. Es wird uns gelingen, eine für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\varphi(x)$ notwendige und hinreichende Bedingung zu finden, sowie auch die Lösung selbst explizite darzustellen.

Mit Fredholm führen wir die abkürzenden Bezeichnungen ein für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$K\binom{x_1, x_2, \ldots, x_n}{y_1, y_2, \ldots, y_n} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1), K(x_1, y_2), \ldots, K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1), K(x_2, y_2), \ldots, K(x_2, y_n) \\ \vdots \\ K(x_n, y_1), K(x_n, y_2), \ldots, K(x_n, y_n) \end{vmatrix}; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\binom{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n \\ C_0 &= 1; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

besonders kurz und elegant); Courant-Hilbert, „Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, insbesondere S. 128ff., Berlin (1924); E. Schmidt, „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen", Math. Ann. Bd. 63 und 64. Siehe auch das an interessanten Anwendungen reiche Buch von A. Kneser, „Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik", 2. Aufl., Braunschweig (1922).

$$\left.\begin{aligned} C_n(x, y) &= \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n \\ C_0(x, y) &= K(x, y); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Größen C_n oder $C_n(x, y)$ mit negativem Index sind stets gleich Null zu setzen.

Entwickelt man die Determinante $K\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}$ nach den Elementen der ersten Zeile, so folgt

$$\begin{aligned} K\begin{pmatrix} x, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} &= K(x, y) K\begin{pmatrix} \xi_1, \ldots, \xi_n \\ \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k K(x, \xi_k) K\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \xi_n \\ y\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dividiert man durch $n!$ und integriert nach $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von a bis b, so ergibt sich leicht für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$C_n(x, y) = C_n \cdot K(x, y) - \int_a^b K(x, \xi)\, C_{n-1}(\xi, y)\, d\xi. \quad (5)$$

Denn für $n = 0$ hat man einfach $K(x, y) = K(x, y)$. Für $n > 0$ berücksichtige man neben (2) und (3), daß für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ die Identität gilt

$$\begin{aligned} K&\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \qquad\qquad\qquad \xi_n \\ y, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{k-1} K\begin{pmatrix} \xi_k, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n \\ y, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher

$$\frac{(-1)^k}{n!}\int\cdots\int K(x,\xi_k)\,K\begin{pmatrix}\xi_1,\xi_2,\ldots, & & & \xi_n\\ y,\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n$$

$$=-\frac{1}{n!}\int K(x,\xi_k)\,d\xi_k\int\cdots\int K\begin{pmatrix}\xi_k,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n\\ y,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_{k-1}\,d\xi_{k+1}\ldots d\xi_n$$

$$=-\frac{1}{n}\int K(x,\xi_k)\,C_{n-1}(\xi_k,y)\,d\xi_k$$

$$=-\frac{1}{n}\int K(x,\xi)\,C_{n-1}(\xi,y)\,d\xi\,.$$

Multipliziert man jetzt beide Seiten der so bewiesenen Identität (5) mit $(-\lambda)^n$ und summiert über n von 0 bis ∞, so erhält man, wenn man noch

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-\lambda)^n \tag{6}$$

und

$$D\binom{x}{y}; \lambda\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y)(-\lambda)^n \tag{7}$$

setzt,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y)(-\lambda)^n = K(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(-\lambda)^n$$
$$+ \lambda \int_a^b K(x, \xi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1}(\xi, y)(-\lambda)^{n-1} \right\} d\xi$$

oder

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right) = K(x, y) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) D\left(\begin{matrix} \xi \\ y \end{matrix}; \lambda\right) d\xi. \tag{8}$$

Wir werden bald beweisen, daß sowohl die Reihe für $D(\lambda)$ wie die für $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ *ständig konvergent* ist, daß also $D(\lambda)$ und $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ *ganze transzendente Funktionen* des Parameters λ sind. Man bezeichnet $D(\lambda)$ als „*Determinante*“ des Kerns $K(x, y)$, $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ als „*Unterdeterminante erster Ordnung*“.

Diese Bezeichnung gründet sich darauf, daß $D(\lambda)$ bei der Lösung der linearen Integralgleichung (I) eine ganz ähnliche Rolle spielt wie die Determinante der Koeffizienten bei einem System von linearen Gleichungen. Dasselbe gilt von $D\binom{x}{y}; \lambda)$ und den im nächsten Paragraphen auftretenden Unterdeterminanten höherer Ordnung, die den Unterdeterminanten der eben genannten Koeffizientendeterminante entsprechen[1]).

Wir müssen jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem für den gegebenen Parameterwert λ, für den wir die Gleichung (I) lösen wollen, die Determinante $D(\lambda)$ verschwindet oder nicht. In diesem Paragraphen behandeln wir den Fall

$$D(\lambda) \neq 0. \tag{9}$$

Dividieren wir (8) durch $D(\lambda)$ und setzen

$$\mathsf{K}(x, y; \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)}{D(\lambda)}, \tag{10}$$

so folgt

$$\mathsf{K}(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \mathsf{K}(\xi, y; \lambda)\, d\xi = K(x, y). \tag{11}$$

Die Funktion $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ wird als „*lösender Kern*“ oder „*lösende Funktion*“ oder „*Resolvente*“ des gegebenen Kernes $K(x, y)$ bezeichnet, weil man mit ihrer Hilfe zur Lösung von (I) gelangt.

Offenbar ist $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ ein Quotient zweier ganzer Funktionen, also eine *meromorphe Funktion* des Parameters λ.

Die Gleichung (11) kann als spezielle Integralgleichung zweiter Art angesehen werden. Man erhält sie aus (I), indem man für $f(x)$ den Kern $K(x, y)$ selbst nimmt (es

---

[1]) Daher hat auch Hilbert in seinem Buche (s. Anm. 2 auf S. 66) einen Grenzübergang aus dem Algebraischen zur Neubegründung der Fredholmschen Theorie benutzt, desgleichen Plemelj (Anm. 2 auf S. 66).

tritt also hier noch ein Parameter y auf). Die Lösung $\varphi(x)$ von (11) ist $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$, also die lösende Funktion.

Entwickelt man die Determinante $K\begin{pmatrix} x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ y, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}$ nach den Elementen der ersten Spalte statt nach denen der ersten Zeile und verfährt im übrigen so wie oben, so erhält man an Stelle von (4) eine ähnliche Relation und gelangt von dieser aus statt zu (8) und (11) zu den Gleichungen

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big) = K(x, y) \cdot D(\lambda) + \lambda \int_a^b D\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}; \lambda\Big) K(\xi, y)\, d\xi \qquad (8^*)$$

und

$$\mathsf{K}(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b \mathsf{K}(x, \xi; \lambda) K(\xi, y)\, d\xi = K(x, y). \qquad (11^*)$$

Bevor wir (I) mit Hilfe der Resolvente $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ auflösen, wollen wir die Konvergenz der in (6) und (7) auftretenden Reihen beweisen. Die Konvergenz beruht auf dem *Determinantensatz von Hadamard* (s. § 22).

Danach genügt die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

der Ungleichung

$$|A| \leqq k^n \sqrt{n^n},$$

wenn für jedes Element a_{sr} die Ungleichung

$$|a_{sr}| \leqq k \qquad [s, r = 1, 2, \ldots, n]$$

vorausgesetzt wird. Die Elemente dürfen auch komplexe Werte annehmen.

Ist also M eine Konstante, die von dem Betrage der stetigen Funktion $K(x, y)$ nicht übertroffen wird, d. h. besteht für $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ die Ungleichung

$$|K(x, y)| < M,$$

so wird nach (2)

$$\begin{aligned} |C_n| &< \frac{1}{n!} M^n \sqrt{n^n} \int_a^b \ldots \int_a^b d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n \\ &= \frac{M^n (b-a)^n \sqrt{n^n}}{n!} \end{aligned} \qquad [n = 1, 2, \ldots].$$

Für die Reihe (6) ist also

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n (b-a)^n \lambda^n n^{\frac{n}{2}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

eine *Majorantenreihe*, und es genügt, die ständige Konvergenz dieser letzteren zu beweisen.

Nun ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\lambda M (b-a)}{n+1} \sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} \\ &= \frac{\lambda M (b-a)}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}. \end{aligned}$$

Da aber

$$\lim_{n=\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,$$

welchen Wert man auch dem λ geben mag.

Damit ist die ständige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ und folglich auch der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(-\lambda)^n$ erwiesen.

Ebenso wird der Beweis für $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x, y)(-\lambda)^n$ geführt.

Wir behaupten nun, daß (immer unter der Voraussetzung (9)) die vorgelegte Gleichung (I) eine und nur eine Lösung hat, welche durch

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi \tag{II}$$

dargestellt wird, wo $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ der in (10) definierte lösende Kern ist.

Es ist also erstens zu zeigen, daß, falls eine Lösung $\varphi(x)$ von (I) existiert, sie die Form (II) haben muß, und zweitens, daß die durch (II) gegebene Funktion $\varphi(x)$ wirklich eine Lösung von (I) ist.

Sei erstens $\varphi(x)$ eine Lösung von (I). Dann ergibt sich leicht

$$\int_a^b \varphi(\xi)\, \mathsf{K}(x, \xi; \lambda)\, d\xi - \lambda \int_a^b \int_a^b K(\xi, y)\, \mathsf{K}(x, \xi; \lambda)\, \varphi(y)\, d\xi\, dy$$
$$= \int_a^b f(\xi)\, \mathsf{K}(x, \xi; \lambda)\, d\xi\,.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit λ und addiert sie zu (I), so folgt

$$f(x)+\lambda\int_a^b \mathsf{K}(x,\xi;\lambda)\,f(\xi)\,d\xi$$

$$=\varphi(x)+\lambda\int_a^b \mathsf{K}(x,\xi;\lambda)\,\varphi(\xi)\,d\xi-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$-\lambda^2\int_a^b\int_a^b K(\xi,y)\,\mathsf{K}(x,\xi;\lambda)\,\varphi(y)\,d\xi\,dy$$

$$=\varphi(x)+\lambda\int_a^b \varphi(y)\,dy\Big\{\mathsf{K}(x,y;\lambda)-K(x,y)-\lambda\int_a^b \mathsf{K}(x,\xi;\lambda)K(\xi,y)\,d\xi\Big\}$$

$$=\varphi(x)$$

wegen (11*).

Setzt man zweitens das durch (II) gegebene $\varphi(x)$ in (I) ein, so folgt:

$$f(x)+\lambda\int_a^b \mathsf{K}(x,\xi;\lambda)\,f(\xi)\,d\xi-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$$

$$-\lambda^2\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\,\mathsf{K}(\xi,y;\lambda)\,f(y)\,d\xi\,dy$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b f(y)\,dy\Big\{\mathsf{K}(x,y;\lambda)-K(x,y)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\mathsf{K}(\xi,y;\lambda)\,d\xi\Big\}$$

$$=f(x)$$

wegen (11), was zu beweisen war.

Damit ist das *erste Theorem* Fredholms bewiesen:

Die Integralgleichung zweiter Art (I) *besitzt, wenn λ keine Nullstelle der Determinante $D(\lambda)$ ist, eine und nur eine Lösung $\varphi(x)$, welche durch* (II) *dargestellt wird.*

Es ist klar, daß $\varphi(x)$ stetig ist, da $f(x)$ und $K(x,\xi)$ als stetig vorausgesetzt wurden, woraus sich auch die Stetigkeit von $\mathsf{K}(x,\xi;\lambda)$ ergibt.

Durch eine Untersuchung, die der oben geführten ganz analog ist, beweist man, daß die zu (I) „assoziierte" Integralgleichung

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(\xi, x)\, \psi(\xi)\, d\xi = g(x) \tag{I*}$$

unter der Voraussetzung

$$D(\lambda) \neq 0$$

eine und nur eine Lösung besitzt, welche durch

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(\xi, x; \lambda)\, g(\xi)\, d\xi \tag{II*}$$

gegeben wird.

Man bestätigt leicht, daß die assoziierten Kerne $K(x, \xi)$ und $K(\xi, x)$ identische Determinanten $D(\lambda)$ haben. (Hierüber s. auch den § 19!)

§ 18. Die Unterdeterminanten von $D(\lambda)$.

Um den Fall $D(\lambda) = 0$ vollständig erledigen zu können, braucht man neben $D(\lambda)$ und $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)$ noch andere in λ ganze Funktionen, welche Unterdeterminanten höherer Ordnung von $D(\lambda)$ genannt werden, sowie Beziehungen zwischen der Determinante $D(\lambda)$ und ihren Unterdeterminanten. Hierzu werden wir jetzt gelangen.

Aus den Definitionen (2) und (3) des vorigen Paragraphen ergibt sich

$$n\, C_n = \int_a^b C_{n-1}(\xi, \xi)\, d\xi\,,$$

daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(-\lambda)^{n-1} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b (-\lambda)^{n-1} C_{n-1}(\xi, \xi)\, d\xi$$

oder

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -\int_a^b D\binom{\xi}{\xi}; \lambda\Big)\, d\xi. \tag{12}$$

Um die Unterdeterminanten höherer Ordnung zu definieren, setzen wir zunächst für $n = 1, 2, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} &C_n\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix} \\ &\qquad = \frac{1}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n,^{1)} \\ &C_0\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dann ist

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{matrix}; \lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{pmatrix}(-\lambda)^n \tag{14}$$

die Unterdeterminante m-ter Ordnung $[m = 1, 2, \ldots]$.

Man beweist wieder mit Hilfe des Hadamardschen Determinantensatzes, daß die in (14) auftretende Reihe ständig konvergiert.

Ferner ergibt sich für $m = 1, 2, \ldots$

$$\frac{d^m D(\lambda)}{d\lambda^m} = (-1)^m \int_a^b \ldots \int_a^b D\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m, \tag{15}$$

worin (12) als spezieller Fall für $m = 1$ enthalten ist.

---

[1]) Das obige $C_n(x, y)$ wäre jetzt als $C_n\binom{x}{y}$ zu bezeichnen.

Entwickelt man $K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y_1, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}$ nach den Elementen der ersten Zeile, so erhält man als Verallgemeinerung von (4) die Relation

$$
\begin{aligned}
K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y_1, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}
&= K(x_1, y_1)\, K\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y_2, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{m-1} K(x_1, y_m)\, K\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m, & \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y_1, \ldots, y_{m-1}, & \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^m K(x_1, \xi_1)\, K\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m, & \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m, & \xi_2, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}. \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{16}
$$

Dividiert man durch $n!$ und integriert nach $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von a bis b, so folgt

$$
\begin{aligned}
C_n\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{pmatrix} &= K(x_1, y_1)\, C_n\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m \\ y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{m-1} K(x_1, y_m)\, C_n\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_{m-1} \end{pmatrix} \\
&\quad - \int_a^b K(x_1, \xi)\, C_{n-1}\begin{pmatrix} \xi, x_2, x_3, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m \end{pmatrix} d\xi
\end{aligned} \tag{17}
$$

für $n = 1, 2, \ldots$. Diese Identität bleibt aber auch für $n = 0$ wegen $C_{-1}\begin{pmatrix} \xi, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix} \equiv 0$ gültig, wofür sie die Entwicklung von $K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{pmatrix}$ nach den Elementen der ersten Zeile liefert.

Multipliziert man nun (17) mit $(-\lambda)^n$ und summiert über n von 0 bis ∞, so ergibt sich schließlich als Verallgemeinerung von (8) die Gleichung

$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{pmatrix}; \lambda\Big) &= K(x_1, y_1)\, D\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m \\ y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix}; \lambda\Big) \\ &\;\;\vdots \\ &+ (-1)^{m-1} K(x_1, y_m) D\begin{pmatrix} x_2, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_{m-1} \end{pmatrix}; \lambda\Big) \\ &+ \lambda \int_a^b K(x_1, \xi)\, D\begin{pmatrix} \xi, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix}; \lambda\Big)\, d\xi. \end{aligned} \tag{18}$$

§ 19. Das zweite Theorem Fredholms.

Aus dem ersten Theorem Fredholms geht hervor, daß die homogene Gleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0, \tag{19}$$

in der $f(x) \equiv 0$ ist, unter der Voraussetzung $D(\lambda) \neq 0$ nur die triviale Lösung $\varphi(x) \equiv 0$ besitzt.

Von jetzt an machen wir aber die Voraussetzung

$$D(\lambda) = 0 \tag{20}$$

und werden beweisen, daß in diesem Falle die Gleichung (19) noch andere Lösungen besitzt.

Sei zunächst c eine *einfache* Nullstelle von $D(\lambda)$. Dann kann $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; c\Big)$ nicht identisch in x und y verschwinden.

weil sonst $D\binom{\xi}{\xi}; c)$ identisch in ξ verschwände, nach (12) die Gleichung[1]) $D'(c)=0$ bestünde und daher c eine mindestens zweifache Nullstelle wäre.

Wegen $D(c)=0$ nimmt nun die Gleichung (8) die Form

$$D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}; c\right)-c\int_a^b K(x,\xi)\,D\left(\begin{matrix}\xi\\y\end{matrix}; c\right)d\xi=0 \tag{21}$$

an.

Wählt man für x und y Werte x_1 bzw. y_1 derart, daß $D\left(\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}; c\right)$ nicht verschwindet (was ja stets möglich ist, da $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}; c\right)$ nicht identisch verschwindet), so stellt $D\left(\begin{matrix}x\\y_1\end{matrix}; c\right)$ bei festem y_1 als Funktion von x eine nicht identisch in x verschwindende Lösung von (19) dar.

Aus dem identischen Verschwinden von $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}; c\right)$ folgt nach (12) das Verschwinden von $D'(c)$; aber es gilt nicht das Umgekehrte. Machen wir nun statt der obigen Voraussetzung, daß c eine einfache Nullstelle von $D(\lambda)$ sei, die etwas allgemeinere, daß $D(c)=0$ ist und $D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}; c\right)$ nicht identisch in x und y verschwindet, so erhalten wir genau ebenso die Lösung $\varphi(x)\equiv D\left(\begin{matrix}x\\y_1\end{matrix}; c\right)$. In diesem Falle ist c eine *mindestens* einfache Wurzel von (20).

Wir verallgemeinern jetzt die Untersuchung, indem wir annehmen, daß für $\lambda=c$ nicht bloß $D(\lambda)$, sondern auch die

[1]) $D'(c)$ bedeutet die Ableitung $\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}$ an der Stelle $\lambda=c$.

Unterdeterminanten bis zur $(m-1)$-ten Ordnung, und zwar identisch in ihren Variablen $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_1, \ldots, x_{m-1}}{y_1, \ldots, y_{m-1}}$ verschwinden, während die Unterdeterminante m-ter Ordnung $D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{matrix}; c\right)$ nicht identisch verschwinden möge. Aus (15) ergibt sich, daß jedenfalls $D'(c), \ldots, D^{(m-1)}(c)$ [1]) verschwinden, daß also $\lambda = c$ eine mindestens $m$fache Wurzel von (20) ist.

Die Identität (18) nimmt jetzt die Form

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{matrix}; c\right) - c\int_a^b K(x_1, \xi)\, D\left(\begin{matrix} \xi, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}; c\right) d\xi = 0 \quad (22)$$

an, oder, wenn man x statt x_1 schreibt,

$$D\left(\begin{matrix} x, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}; c\right) - c\int_a^b K(x, \xi)\, D\left(\begin{matrix} \xi, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}; c\right) d\xi = 0. \quad (22^*)$$

Daher ist $D\left(\begin{matrix} x, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}; c\right)$ eine nicht triviale Lösung von (19), falls man $x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ solche Werte gibt, daß diese Funktion nicht identisch in x verschwindet.

In analoger Weise erhält man allgemein die m Lösungen

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m \end{matrix}; c\right)$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$, da man ja die Variablenpaare $\binom{x_k}{y_k}$ bei der Determinantenentwicklung an die erste Stelle

[1]) Das sind die Ableitungen von $D(\lambda)$ bis zur $(m-1)$-ten Ordnung an der Stelle c.

rücken kann. Mit Fredholm setzen wir die Lösungen in die Form

$$\varphi_k(x) = \frac{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m \end{pmatrix}; c)}{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m \end{pmatrix}; c)} \tag{23}$$

$$[k = 1, 2, \ldots, m].$$

Der Nenner des Bruches in (23) ist ja von x unabhängig, also konstant, und man kann aus einer Lösung der homogenen Gleichung (19) andere Lösungen erhalten, indem man mit Konstanten multipliziert oder dividiert.

Offenbar ist

$$\varphi_k(x_k) \equiv 1 \qquad [k = 1, 2, \ldots, m].$$

Wir wollen nun beweisen, daß unsere m Lösungen $\varphi_k(x)$ linear unabhängig sind. Hierzu bemerken wir zunächst, daß (22) unter Benutzung der Bezeichnung (23) und wegen $\varphi_1(x_1) \equiv 1$ in der Form

$$1 - c\int_a^b K(x_1, \xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi = 0 \tag{22*}$$

geschrieben werden kann.

Allgemein ist

$$\int_a^b K(x_k, \xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi = \frac{1}{c} \qquad [k = 1, 2, \ldots, m]. \tag{24}$$

Ferner setzen wir in der Relation (16)

$$x_1 = x_2,$$

so daß die linksstehende Determinante die Form

$$K\begin{pmatrix} x_2, x_2, x_3, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \\ y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \end{pmatrix}$$

annimmt und folglich, weil sie zwei gleiche Zeilen hat, identisch verschwindet. Durch Entwicklungen, welche den obigen analog sind, erhält man dann statt (22*) die Gleichung

$$\int_a^b K(x_2, \xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi = 0.$$

Allgemein ist

$$\int_a^b K(x_k, \xi)\,\varphi_h(\xi)\,d\xi = 0. \qquad [h \neq k] \tag{25}$$

Wären nun $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ linear abhängig, d. h. bestünde eine Relation

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) \equiv 0$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$, so wäre für $k = 1, 2, \ldots, m$

$$c_1\int_a^b K(x_k, \xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi + \ldots + c_k\int_a^b K(x_k, \xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi + \ldots$$
$$+ c_m\int_a^b K(x_k, \xi)\,\varphi_m(\xi)\,d\xi = 0,$$

also wegen (24) und (25)

$$c_k = 0 \qquad [k = 1, 2, \ldots, m],$$

was zu beweisen war.

Schließlich zeigen wir noch, daß *jede* Lösung von (19) ein lineares homogenes mit konstanten Koeffizienten gebildetes Aggregat der $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ ist. (Daß umgekehrt jedes solche Aggregat eine Lösung darstellt, ist eine triviale Folge des linearen homogenen Charakters der Gleichung (19).)

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen: Bedeutet $\varphi(x)$ irgendeine Lösung der Gleichung (I) (nachher setzen wir $f(x) \equiv 0$), so ist

$$\int_a^b L(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi - \lambda \int_a^b\int_a^b L(x,\xi)\,K(\xi,y)\,\varphi(y)\,d\xi\,dy = \int_a^b L(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

wenn $L(x,\xi)$ eine beliebige stetige Funktion von x und ξ bezeichnet. Multipliziert man diese Gleichung mit λ und addiert sie zu (I), so findet man

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x) + \lambda \int_a^b L(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi. \tag{26}$$

Dabei ist der Kern $G(x,\xi)$ dieser Integralgleichung durch

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) - L(x,\xi) + \lambda \int_a^b L(x,y)\,K(y,\xi)\,dy \tag{27}$$

gegeben. (Hiervon wurde auch in § 17 mit $L(x,\xi) \equiv \mathsf{K}(x,\xi;\lambda)$ Gebrauch gemacht.) Wir nehmen nun

$$L(x,\xi) \equiv \frac{D\begin{pmatrix} x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}; c)}{D\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}; c)}. \tag{28}$$

Dann ergibt sich durch Entwicklung von

$$D\begin{pmatrix} x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}; c)$$

nach Art von (18) die Gleichung

$$G(x,\xi) = \frac{1}{D\begin{pmatrix}\xi_1, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \ldots, \eta_n\end{pmatrix}; c} \left\{ K(\xi_1, \xi)\, D\begin{pmatrix} x, \xi_2, \ldots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \end{pmatrix}; c \right. \tag{29}$$
$$\vdots$$
$$\left. + (-1)^n K(\xi_n, \xi)\, D\begin{pmatrix}\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, x \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \quad\quad \eta_n\end{pmatrix}; c \right\}.$$

Bedenkt man nun, daß *jede* Lösung von (I) auch (26), daß also *jede* Lösung von (19) auch der Gleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

genügt, setzt für $G(x,\xi)$ den Ausdruck (29) ein und berücksichtigt die Gleichungen (23), so ergibt sich in der Tat $\varphi(x)$ als Aggregat der $\varphi_k(x)$.

Untersucht man die zu (19) assoziierte Gleichung

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(\xi, x)\, \psi(\xi)\, d\xi = 0, \tag{19*}$$

so findet man unter denselben Voraussetzungen wie bisher, daß sie ebenfalls m linear unabhängige Lösungen besitzt, welche sich in der Form

$$\psi_k(x) = \frac{D\begin{pmatrix} y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m \\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_m \end{pmatrix}; c}{D\begin{pmatrix} y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_m \\ x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_m \end{pmatrix}; c} \tag{30}$$

darstellen lassen, und daß die allgemeinste Lösung ein lineares homogenes Aggregat dieser m Lösungen ist.

Bezeichnet man nämlich die zum assoziierten Kerne $K(\xi, x)$ gehörigen Größen durch Überstreichen, so ist

$$\overline{K}\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} y_1, \ldots, y_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix},$$

folglich

$$\overline{C}_n = C_n, \qquad \overline{C}_n(x, y) = C_n(y, x),$$

also

$$\overline{D}(\lambda) = D(\lambda),$$

$$\overline{D}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big) = D\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}; \lambda\Big)$$

und allgemein

$$\overline{D}\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{pmatrix}; \lambda\Big) = D\begin{pmatrix} y_1, \ldots, y_m \\ x_1, \ldots, x_m \end{pmatrix}; \lambda\Big),$$

woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt.

Die Resultate dieses Paragraphen fassen wir in folgendem Satze zusammen:

Ist $\lambda = c$ eine Nullstelle der Determinante $D(\lambda)$ des Kerns $K(x, y)$ und verschwinden für $\lambda = c$ die Unterdeterminanten bis zur $(m-1)$-ten Ordnung identisch, während die Unterdeterminante m-ter Ordnung nicht identisch verschwindet, so besitzt jede der homogenen Gleichungen

$$\varphi(x) - c\int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$\psi(x) - c\int_a^b K(\xi, x)\, \psi(\xi)\, d\xi = 0$$

genau m linear unabhängige Lösungen $\varphi_k(x)$ bzw. $\psi_k(x)$ $[k = 1, \ldots, m]$, welche durch (23) bzw. (30) gegeben sind.

Die allgemeinsten Lösungen der obigen Gleichungen sind lineare mit m willkürlichen Konstanten versehene Aggregate der $\varphi_k(x)$ bzw. $\psi_k(x)$.

Insbesondere ergibt sich *das zweite Theorem Fredholms*:

Ist $\lambda = c$ eine Wurzel m-ter Ordnung der Gleichung $D(\lambda) = 0$, so hat die homogene Gleichung

$$\varphi(x) - c\int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

mindestens eine und höchstens m linear unabhängige Lösungen.

Die Wurzeln der Gleichung $D(\lambda) = 0$ werden *Eigenwerte*, die zugehörigen Lösungen der homogenen Integralgleichung *Eigenfunktionen* des Kerns $K(x, \xi)$ genannt. Irgendeine Wurzel c von $D(\lambda) = 0$ kann nur eine endliche Vielfachheit besitzen, da $D(\lambda)$ eine analytische ganze Funktion ist. Zu irgendeinem Eigenwert gehört also stets nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Eigenfunktionen. Übrigens besitzt nicht jeder Kern Eigenwerte. Nur für symmetrische Kerne (die also der Identität $K(x, \xi) \equiv K(\xi, x)$ genügen) läßt sich allgemein beweisen, daß die Gleichung $D(\lambda) = 0$ mindestens eine Wurzel haben muß; doch können wir hierauf nicht näher eingehen.

§ 20. Das dritte Theorem Fredholms.

Wir untersuchen nun noch die unhomogene Gleichung

$$\varphi(x) - c\int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x) \tag{31}$$

wieder unter der Voraussetzung, daß c eine Nullstelle von $D(\lambda)$ ist und daß für $\lambda \neq c$ die Unterdeterminanten bis zur $(m-1)$-ten Ordnung identisch verschwinden, nicht aber die m-ter Ordnung.

Wir zeigen zuerst, daß (31) im allgemeinen, d. h. bei beliebiger Wahl der Funktion $f(x)$ keine Lösung besitzt, daß vielmehr $f(x)$ gewisse Bedingungen erfüllen muß, welche für die Existenz einer Lösung zugleich notwendig und hinreichend sind.

Sei in der Tat $\varphi(x)$ eine Lösung von (31). Dann ergibt sich durch Multiplikation mit einer Funktion $\psi_k(x)$ (s. Gleichung (30)) und Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx &= \int_a^b \varphi(x)\,\psi_k(x)\,dx - c\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\psi_k(x)\,dx\,d\xi\\ &= \int_a^b \varphi(x)\,dx\left\{\psi_k(x) - c\int_a^b K(\xi, x)\,\psi_k(\xi)\,d\xi\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

wegen (19*).

Für die Existenz einer Lösung von (31) sind also die m Bedingungen

$$\int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx = 0 \qquad [k = 1, 2, \ldots, m] \tag{32}$$

notwendig.

Man nennt zwei Funktionen, deren über ein gewisses Intervall erstrecktes Produktintegral verschwindet, *orthogonal* zueinander bezüglich dieses Intervalls. Demnach muß $f(x)$ zu allen $\psi_k(x)$ bezüglich des Intervalls $a \ldots b$ orthogonal sein.

Diese m Bedingungen sind nun auch für die Existenz einer Lösung hinreichend; denn sind sie erfüllt, so stellt

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{c}{D\begin{pmatrix}\xi_1, \ldots, \xi_m\\ \eta_1, \ldots, \eta_m\end{pmatrix}; c)}\int_a^b D\begin{pmatrix}x, \xi_1, \ldots, \xi_m\\ y, \eta_1, \ldots, \eta_m\end{pmatrix}; c\Big) f(y)\,dy \tag{33}$$

eine Lösung dar.

Um das einzusehen, setzen wir die Funktion $\Phi(x)$ für $\varphi(x)$ in (31) ein und finden nach einfachen Reduktionen

$$\frac{1}{D\begin{pmatrix}\xi_1,\ldots,\xi_m\\ \eta_1,\ldots,\eta_m\end{pmatrix}; c}\int_a^b D\begin{pmatrix}x,\xi_1,\ldots,\xi_m\\ y,\eta_1,\ldots,\eta_m\end{pmatrix}; c) f(y)\,dy$$

$$=\int_a^b K(x,\xi)\left\{f(\xi)+\frac{c}{D\begin{pmatrix}\xi_1,\ldots,\xi_m\\ \eta_1,\ldots,\eta_m\end{pmatrix}; c}\int_a^b D\begin{pmatrix}\xi,\xi_1,\ldots,\xi_m\\ y,\eta_1,\ldots,\eta_m\end{pmatrix}; c) f(y)\,dy\right\}d\xi.$$

Diese Gleichung führt nun, wenn man nach Art von (18)

$$\begin{aligned}D\left(\begin{matrix}x,\xi_1,\ldots,\xi_m\\ y,\eta_1,\ldots,\eta_m\end{matrix};c\right)&=K(x,y)\,D\left(\begin{matrix}\xi_1,\ldots,\xi_m\\ \eta_1,\ldots,\eta_m\end{matrix};c\right)\\ &\quad-K(x,\eta_1)\,D\left(\begin{matrix}\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\\ y,\eta_2,\ldots,\eta_m\end{matrix};c\right)\\ &\quad\;\vdots\\ &\quad+(-1)^m K(x,\eta_m)\,D\left(\begin{matrix}\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\\ y,\eta_1,\ldots,\eta_{m-1}\end{matrix};c\right)\\ &\quad+c\int_a^b K(x,\xi)\,D\left(\begin{matrix}\xi,\xi_1,\ldots,\xi_m\\ y,\eta_1,\ldots,\eta_m\end{matrix}\right)d\xi\end{aligned}$$

entwickelt und die Definitionsgleichungen (30) berücksichtigt, unmittelbar zu einer Relation der Form

$$\int_a^b f(y)\{a_1\psi_1(y)+\ldots a_m\psi_m(y)\}\,dy=0,$$

wo die a_m von y unabhängige Größen, also Konstante sind. Diese Relation ist aber richtig, weil f zu allen ψ_k orthogonal ist, und darum Φ eine Lösung von (31).

Nachdem wir unter den Voraussetzungen (32) die spezielle Lösung (33) von (31) gefunden haben, bemerken wir, daß diese nicht die einzige ist. Addieren wir nämlich zu dieser Lösung $\Phi(x)$ der unhomogenen Gleichung irgendeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, d. h. einen Ausdruck der Form $c_1 \varphi_1(x) + \ldots c_m \varphi_m(x)$, wo die $c_1, \ldots, c_m$ willkürliche Konstante sind, so erhalten wir offenbar wieder eine Lösung der unhomogenen Gleichung. Da andererseits die Differenz zweier beliebiger Lösungen von (31) eine Lösung der homogenen Gleichung ist, so ist die allgemeinste Lösung von (31) in der Form

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(x) \tag{34}$$

dargestellt.

Wir können das folgende *dritte Theorem von Fredholm* aussprechen: *Ist c eine Wurzel der Gleichung* $D(\lambda) = 0$, *so ist für die Existenz von Lösungen der unhomogenen Gleichung* (31) *die Bedingung notwendig und hinreichend, daß* $f(x)$ *zu sämtlichen linear unabhängigen Lösungen* $\psi_k(x)$ $[k = 1, \ldots, m]$ *der assoziierten homogenen Gleichung orthogonal ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man die allgemeinste Lösung von* (31), *indem man zu einer speziellen, etwa der durch* (33) *dargestellten* $\Phi(x)$, *die allgemeine von* m *willkürlichen Konstanten abhängige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung addiert.*

Man sieht, daß die Fredholmschen Sätze über die lineare Integralgleichung zweiter Art die größte Analogie mit den bekannten Sätzen über ein System von m linearen Gleichungen mit m Unbekannten zeigen.

Die Fredholmschen Theoreme führen unmittelbar zu folgendem Satze, den wir bei der Lösung der Randwertaufgaben benutzen werden:

Hat die homogene Gleichung $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=0$ *keine Lösung, so hat die unhomogene Gleichung*

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi=f(x)$$

eine und nur eine Lösung.

Besitzt die homogene Gleichung genau m *linear unabhängige Lösungen* $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x)$, *so besitzt die assoziierte Gleichung* $\psi(x)-\lambda\int_a^b K(\xi,x)\psi(\xi)\,d\xi=0$ *ebenfalls genau* m *linear unabhängige Lösungen* $\psi_1(x),\ldots,\psi_m(x)$. *Die unhomogene Gleichung hat in diesem Falle dann und nur dann Lösungen, wenn* $f(x)$ *zu den* $\psi_k(x)$ *orthogonal ist, und ist diese Bedingung erfüllt, so hängt die allgemeine Lösung von* m *willkürlichen Konstanten ab.*

Hat nämlich die homogene Gleichung keine Lösung (natürlich außer der trivialen 0), so ist $D(\lambda)\neq 0$, woraus sich der erste Teil des Satzes ergibt.

Besitzt andererseits die homogene Gleichung genau m linear unabhängige Lösungen, so ist $D(\lambda)=0$ und die Unterdeterminanten bis zur $(m-1)$-ten Ordnung verschwinden identisch, nicht aber die m-ter Ordnung, woraus der zweite Teil des Satzes folgt.

§ 21. Die iterierten Kerne.

Wir haben in § 17 gesehen, daß die Resolvente

$$\mathsf{K}(x,y;\lambda)=\frac{D\binom{x}{y};\lambda)}{D(\lambda)}$$

eine analytische Funktion des komplexen Parameters λ und zwar eine meromorphe Funktion ist. Da die Nennerfunktion $D(\lambda)$ für $\lambda = 0$ nicht verschwindet — es ist ja $D(0) = 1$ —, so ist $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ im Punkte $\lambda = 0$ regulär und kann in der Umgebung dieses Punktes in eine Potenzreihe von λ entwickelt werden. Wir setzen

$$\mathsf{K}(x, y; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K^{n+1}(x, y)\,\lambda^n. \text{[1]} \tag{35}$$

Diese Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreises um den Mittelpunkt $\lambda = 0$, innerhalb dessen keine singuläre Stelle von $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$, d. h. keine Nullstelle von $D(\lambda)$ liegt. Ist also c_0 der Eigenwert von kleinstem Betrage, so ist $|c_0|$ der Konvergenzradius der in (35) auftretenden Reihe. Hat $K(x, y)$ keine Eigenwerte, so ist die Reihe (35) ständig konvergent, also $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ selbst eine ganze Funktion.

Die mit $K^{n+1}(x, y)$ bezeichneten Koeffizienten der Potenzen von λ werden, nachdem man

$$K^1(x, y) = \mathsf{K}(x, y; 0) = K(x, y) \tag{36}$$

gefunden hat, durch Rekursionsformeln bestimmt, indem man die Entwicklung (35) in (11) einträgt und die Koeffizienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten der Gleichung einander gleichsetzt. So ergibt sich

$$K^2(x, y) = \int_a^b K(x, \xi)\, K(\xi, y)\, d\xi,$$

$$K^3(x, y) = \int_a^b K(x, \xi)\, K^2(\xi, y)\, d\xi.$$

$$\vdots$$

---

[1]) $K^{n+1}(x, y)$ bedeutet nicht eine Potenz von $K(x, y)$.

Allgemein ist

$$K^n(x, y) = \int_a^b K(x, \xi) K^{n-1}(\xi, y)\, d\xi \quad [n = 2, 3, \ldots]. \tag{37}$$

Man bestätigt leicht die Gültigkeit der Formeln

$$K^n(x, y) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, \xi_1) K(\xi_1, \xi_2) \ldots K(\xi_{n-1}, y)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}, \tag{37*}$$

$$K^{m+n}(x, y) = \int_a^b K^m(x, \xi) K^n(\xi, y)\, d\xi,$$

insbesondere

$$K^{2n}(x, y) = \int_a^b K^n(x, \xi) K^n(\xi, y)\, d\xi.$$

Die Funktionen $K^n(x, y)$ werden *iterierte Kerne* genannt. Sie spielen bei der Erweiterung der Fredholmschen Theorie auf nicht beschränkte Kerne $K(x, y)$ eine wesentliche Rolle (s. § 23).

§ 22. Beweis des Hadamardschen Determinantensatzes.

Wir beweisen jetzt den bereits im § 17 benutzten Satz von Hadamard.

Ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = [a_{sr}] \tag{38}$$

und

$$|a_{s1}|^2 + |a_{s2}|^2 + \ldots |a_{sn}|^2 = z_s, \quad [s = 1, 2, \ldots, n] \tag{39}$$

so genügt es, die Ungleichung

$$|A|^2 \leqq z_1 z_2 \ldots z_n \tag{40}$$

zu beweisen. Denn hat man

$$|a_{sr}| \leqq k \qquad [s, r = 1, 2, \ldots, n],$$

so folgt

$$z_s \leqq n k^2$$

und wegen (40)

$$|A|^2 \leqq k^{2n} n^n,$$

was in § 17 behauptet wurde.

Um (40) zu beweisen, führen wir noch die konjugierte Determinante[1])

$$\bar{A} = [\bar{a}_{sr}] \tag{38*}$$

ein und setzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{sr}}{\sqrt{z_s}} &= b_{sr}, \\ \frac{\bar{a}_{sr}}{\sqrt{z_s}} &= \bar{b}_{sr}, \end{aligned}\right\} \qquad [s, r = 1, 2, \ldots, n],$$

sowie

$$B = [b_{sr}],$$
$$\bar{B} = [\bar{b}_{sr}].$$

Dann ist für die Determinante B die Ungleichung

$$|B|^2 = B\bar{B} \leqq 1 \tag{40*}$$

zu beweisen.

Aus (39) ergibt sich

$$b_{s1}\bar{b}_{s1} + \ldots + b_{sn}\bar{b}_{sn} = 1 \quad [s = 1, 2, \ldots, n]. \tag{39*}$$

---

[1]) Wir bezeichnen allgemein mit $\bar{g}$ die zu g konjugiert komplexe Zahl.

Wir wollen die Zahlen b_{sr} und $\bar{b}_{sr}$ oder, indem wir

$$\begin{aligned} b_{sr} &= x_{sr} + i y_{sr} \\ \bar{b}_{sr} &= x_{sr} - i y_{sr} \end{aligned} \qquad [i = \sqrt{-1}]$$

setzen, die x_{sr} und y_{sr} als Variable ansehen, welche den Relationen (39*) genügen, also nicht von einander unabhängig sind, und das Maximum von $|B|^2$ als Funktion dieser Variablen mit den Nebenbedingungen (39*) bestimmen. Das ist eine Aufgabe aus der Theorie der „relativen Extrema" oder „Extrema mit Nebenbedingungen", welche nach einer von Lagrange herrührenden Methode in folgender Weise gelöst wird. Man bildet mit zunächst noch unbekannten Parametern l_s $[s = 1, \ldots, n]$ die Funktion

$$B\bar{B} - l_1 \sum_{r=1}^{n} b_{1r}\bar{b}_{1r} - \ldots - l_n \sum_{r=1}^{n} b_{nr}\bar{b}_{nr}$$

und bestimmt deren Extremum so, als wenn die x_{sr} und y_{sr} unabhängige Variable wären. Man bringt also die nach den x_{sr} und y_{sr} genommenen Ableitungen zum Verschwinden.

Sind B_{sr} bzw. $\bar{B}_{sr}$ die ersten Unterdeterminanten von B bzw. $\bar{B}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} B\bar{B}_{sr} + \bar{B}B_{sr} &= 2 l_s x_{sr}, \\ i(-B\bar{B}_{sr} + \bar{B}B_{sr}) &= 2 l_s y_{sr}, \end{aligned} \qquad [s, r = 1, 2, \ldots, n]$$

da ja

$$\frac{\partial B}{\partial x_{sr}} = B_{sr}, \qquad \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_{sr}} = \bar{B}_{sr}$$

und

$$\frac{\partial B}{\partial y_{sr}} = i B_{sr}, \qquad \frac{\partial \bar{B}}{\partial y_{sr}} = -i\bar{B}_{sr}$$

ist. Man hat also

$$\bar{B}B_{sr} = l_s(x_{sr} - i y_{sr}) = l_s \bar{b}_{sr}.$$

Es folgt weiter durch Multiplikation mit $\mathfrak{b}_{sr}$ und Summation über r

$$\begin{aligned}\bar{B}\sum_{r=1}^{n} B_{sr}\mathfrak{b}_{sr} &= l_s \sum_{r=1}^{n} \mathfrak{b}_{sr}\bar{\mathfrak{b}}_{sr}\\ &= \bar{B}B\\ &= l_s\end{aligned}$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$.

Demnach sind alle l_s einander gleich, und man kann l ohne Index schreiben.

Ferner ist die aus den Elementen $\bar{B}B_{sr}$ gebildete Determinante gleich der aus den Elementen $l\bar{\mathfrak{b}}_{sr}$ gebildeten, mithin

$$\begin{aligned}[\bar{B}B_{sr}] &= \bar{B}^n [B_{sr}]\\ &= \bar{B}^n B^{n-1}\\ &= [l\bar{\mathfrak{b}}_{sr}]\\ &= l^n \bar{B}\\ &= B^n \bar{B}^{n+1}.\end{aligned}$$

Demnach wird $B\bar{B} = |B|^2 = 1$.

Da das Maximum von $|B|^2$ den Wert 1 annimmt, ist die Ungleichung (40*) bewiesen.

($B\bar{B} = 0$ würde das Minimum liefern.)

§ 23. Kerne, die nicht beschränkt sind.

Die Fredholmschen Sätze bleiben richtig, wenn man vom Kerne $K(x, \xi)$ nicht Stetigkeit, sondern bloß Beschränktheit und Integrabilität voraussetzt. An den Beweismethoden braucht dann nichts geändert zu werden. Etwas anders verhält es sich, wenn der Kern nicht mehr beschränkt ist, da dann die mit Benutzung des Kerns definierten Größen $C_n, C_n(x, y)$ usw. unter Umständen ihren Sinn verlieren

(s. u.). Bei der Lösung der Randwertaufgaben werden nun gerade Integralgleichungen auftreten, deren Kerne nicht in ihrem ganzen Definitionsgebiete beschränkt, sondern bloß *integrabel* sind, und es fragt sich, unter welchen Voraussetzungen man die Fredholmsche Theorie auf Integralgleichungen mit unbeschränkten Kernen übertragen kann. *Wir setzen voraus, daß der n-te iterierte Kern $K^n(x, y)$ beschränkt bleibt*, wo n ein fester Index ist. Dann sind auch alle höheren iterierten Kerne $K^{n+1}(x, y)$ usw. beschränkt. Für eine Integralgleichung mit dem Kerne $K^n(x, y)$ ist die Fredholmsche Theorie gültig. Man kann die Determinante und die Unterdeterminanten für diesen Kern bilden, die wir mit dem Index n bezeichnen, also insbesondere $D_n(\lambda)$ und $D_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)$. Sie sind ganze Funktionen von λ.

Die Resolvente von $K^n(x, y)$ wird durch

$$\mathsf{K}_n(x, y; \lambda) = \frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)}{D_n(\lambda)} \tag{41}$$

oder auch durch

$$\mathsf{K}_n(x, y; \lambda) = K^n(x, y) + K^{2n}(x, y)\lambda + \ldots + K^{(s+1)n}(x, y)\lambda^s + \ldots \tag{42}$$

dargestellt, wo K^n, K^{2n}, ... iterierte Kerne bedeuten. Die letztere Darstellung gilt nur in einer gewissen Umgebung der Stelle $\lambda = 0$, die erstere aber allgemein.

Die Resolvente $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ des gegebenen nicht beschränkten Kerns $K(x, y)$ ist zunächst nicht definiert, da $D(\lambda)$ und $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ nicht definiert sind. In den Anwendungen ist es nämlich gewöhnlich so, daß der Kern $K(x, y)$ gerade für $y = x$ (geometrisch gesprochen, auf der durch den Anfangspunkt gehenden Diagonale des Quadrats

$a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$) unendlich wird; dann verlieren aber die durch (2) und (3) erklärten Koeffizienten C_n und $C_n(x, y)$ ihre Bedeutung, weil bei ihrer Definition Ausdrücke der Form $K(\xi, \xi)$ auftreten. Um zu einer Definition von $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ auch im Falle eines nicht beschränkten Kerns $K(x, y)$ zu gelangen, leiten wir zunächst unter der Voraussetzung eines beschränkten $K(x, y)$ eine neue Darstellung für $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ her, welche auch bei nicht beschränktem, bloß integrablem $K(x, y)$, aber beschränktem $K^n(x, y)$ ihren Sinn behält.

Aus (42) ergibt sich für $s = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\int_a^b K^s(x, \xi)\, \mathsf{K}_n(\xi, y; \lambda)\, d\xi = K^{n+s}(x, y) \\ + K^{2n+s}(x, y)\,\lambda + K^{3n+s}(x, y)\,\lambda^2 + \ldots .$$

Daher wird, wenn man

$$\mathsf{K}(x, y; \lambda) = K(x, y) + K^2(x, y)\,\lambda + K^3(x, y)\,\lambda^2 + \ldots$$

berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \mathsf{K}(x, y; \lambda) = K(x, y) &+ K^2(x, y)\,\lambda + \ldots \\ &+ K^{n-1}(x, y)\,\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}\, \mathsf{K}_n(x, y; \lambda^n) \\ &+ \lambda^n \int_a^b \{K(x, \xi) + K^2(x, \xi)\,\lambda + \ldots \\ &+ K^{n-1}(x, \xi)\,\lambda^{n-2}\}\, \mathsf{K}_n(\xi, y; \lambda^n)\, d\xi . \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$S(x, y; \lambda) = K(x, y) + K^2(x, y)\,\lambda + \ldots + K^{n-1}(x, y)\,\lambda^{n-2}, \tag{43}$$

so hat man

$$\begin{aligned} \mathsf{K}(x, y; \lambda) &= S(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1}\, \mathsf{K}_n(x, y; \lambda^n) \\ &+ \lambda^n \int_a^b S(x, \xi; \lambda)\, \mathsf{K}_n(\xi, y; \lambda^n)\, d\xi . \end{aligned} \tag{44}$$

Diese zunächst für beschränkte Kerne $K(x, y)$ gewonnene Darstellung der Resolvente $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ behält nun offenbar auch in unserem allgemeineren Falle ihre Bedeutung. Nimmt man in (44) für $\mathsf{K}_n(x, y; \lambda^n)$ den Ausdruck (42), wo bloß λ^n statt λ zu schreiben ist, so erhält man eine nur in einer gewissen Umgebung von $\lambda = 0$ gültige Formel. Benutzt man aber (41), so folgt

$$\begin{aligned}\mathsf{K}(x, y; \lambda) = S(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1} \frac{D_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda^n\Big)}{D_n(\lambda^n)} \\ + \lambda^n \int_a^b S(x, \xi; \lambda) \frac{D_n\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}; \lambda^n\Big)}{D_n(\lambda^n)} d\xi,\end{aligned} \tag{44*}$$

und diese Darstellung gilt für alle Werte von λ mit Ausnahme der Nullstellen von $D_n(\lambda^n)$. Offenbar ist $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ wieder der Quotient zweier ganzer Funktionen von λ, wobei $D_n(\lambda^n)$ die Nennerfunktion ist:

$$\mathsf{K}(x, y; \lambda) = \frac{D_n(\lambda^n) S(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1} D_n\Big(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda^n\Big) + \lambda^n \int_a^b S(x, \xi; \lambda) D_n\Big(\begin{matrix} \xi \\ y \end{matrix}; \lambda^n\Big) d\xi}{D_n(\lambda^n)}. \tag{44**}$$

Nachdem dieser Ausdruck für die Resolvente gefunden worden ist, können die Fredholmschen Sätze auf unseren allgemeineren Fall übertragen werden. So hat z. B. die unhomogene Gleichung (I), wenn λ keine Nullstelle von $D_n(\lambda^n)$ ist, eine und nur eine Lösung, welche wieder durch (II) gegeben ist. Man muß nur für $\mathsf{K}(x, y; \lambda)$ den Ausdruck (44) setzen. Auch die anderen Theoreme von Fredholm bleiben gültig. Ausführlicher können wir hierauf nicht eingehen.

§ 24. Integralgleichungen in mehrdimensionalen Gebieten.

Die Fredholmschen Sätze über die Integralgleichungen zweiter Art

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x)$$

und

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

bleiben gültig, wenn man unter x und ξ Punkte eines mehrdimensionalen beschränkten Gebietes T versteht. Die Lage eines solchen Punktes wird dann durch mehrere unabhängige Variable bestimmt. Die Integrale werden zwei- oder drei- oder mehrfache Integrale (man kann aber der Einfachheit halber das Zeichen $\int$ beibehalten). Insbesondere kann das Gebiet T auch eine geschlossene krumme Fläche oder ein Teil einer krummen Fläche sein. Von $f(x)$ wird wieder Stetigkeit, von $K(x, \xi)$ Integrabilität und von $K(x, \xi)$ oder wenigstens von $K^n(x, \xi)$ Beschränktheit vorausgesetzt.

Kapitel V.

Die Lösung der Randwertaufgaben in der Ebene für beliebige Gebiete.

§ 25. Erste Randwertaufgabe. Inneres Problem.

Wir sind jetzt in der Lage, die Randwertaufgaben der Potentialtheorie für beliebige Gebiete sowohl in der Ebene wie im Raume zu lösen, und beginnen mit der ersten Randwertaufgabe in der Ebene. Zuerst behandeln wir das innere, im nächsten Paragraphen das äußere Problem.

Gegeben ist ein ebenes beschränktes Gebiet T, das von einer geschlossenen Kurve S begrenzt wird. Diese Begrenzungskurve setzen wir als stetig gekrümmt voraus. Gegeben ist ferner eine auf S eindeutig erklärte stetige Funktion des Ortes, welche wir mit $f(s)$ bezeichnen, wobei wir unter s die Bogenlänge auf S, gemessen von einem beliebigen Anfangspunkte aus, verstehen.

Gesucht ist eine in T reguläre[1]), in $T + S$ stetige Lösung u der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, welche auf S die vorgeschriebenen Werte u annimmt, in dem Sinne, daß u bei der Annäherung des Punktes (x, y) an S von innen her gegen f konvergiert, daß also

$$u_i = f \tag{1}$$

wird.

Um die Lösung unseres Problems zu gewinnen, machen wir den Ansatz

$$u = \int_S \nu \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt, \tag{2}$$

d. h. wir stellen u als Potential einer auf dem Rande S ausgebreiteten Doppelbelegung dar, deren Moment ν noch unbekannt ist.

Das Moment ν suchen wir als stetige Funktion des Ortes auf S, also als Funktion von s, so zu bestimmen, daß die Randbedingung (1) erfüllt ist.

Ist ν bestimmt, so liefert die Gleichung (2) tatsächlich die Lösung u unserer Randwertaufgabe. Denn offenbar ist das durch (2) in T definierte u eine in T reguläre Potential-

[1]) Siehe Bd. I, S. 40.

funktion, und vervollständigen wir die Definition der Funktion u, indem wir ihr auf S die Werte f beilegen, so wird sie mit Rücksicht auf (1) zu einer in $T+S$ stetigen Funktion.

Für ν ergibt sich nun eine Integralgleichung. Es ist nämlich nach Bd. I, § 28, Gleich. (45)

$$u_i = \pi \nu_s + \int_S \nu_t \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}} dt = f(s). \tag{3}$$

Das ist eine unhomogene Integralgleichung zweiter Art, wie wir sie im vorigen Kapitel behandelt haben.

Das Integral ist zwar ein Kurvenintegral; es kann aber, indem man die Bogenlänge als unabhängige Variable einführt und den Integranden als Funktion von s und t darstellt, in ein bestimmtes Integral der gewöhnlichen Art umgeformt werden. Im übrigen ist es ohne Schwierigkeit möglich, die Integralgleichungstheorie auf Kurvenintegrale zu übertragen.

Der Kern der Integralgleichung (3) ist

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}}. \tag{4}$$

Man kann, wenn etwa l die Länge der Kurve S ist,

$$\nu(s) + \int_0^l K(s,t)\, \nu(t)\, dt = \frac{f(s)}{\pi} \tag{3*}$$

schreiben, wobei wir jetzt bei der Funktion ν die Größen s und t nicht mehr als Indizes, sondern in der gewöhnlichen Weise als Argumente schreiben. Der Kern $K(s,t)$ ist nicht nur, wenn die Punkte t und s voneinander verschieden sind, sondern auch wenn t gegen s konvergiert, beschränkt.

Bedeutet nämlich $\varrho(s)$ den Krümmungshalbmesser in s, der nach unserer Voraussetzung der stetigen Krümmung von S einen bestimmten von 0 verschiedenen Wert haben muß, so ist

$$\lim_{t=s} \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}} = \frac{1}{2\varrho(s)}.$$

Die Fredholmsche Theorie kann also ohne weiteres angewandt werden. Der Satz am Schluß des § 20 lehrt uns, daß (3) oder (3*) eine und nur eine Lösung ν besitzt, wenn die zugehörige homogene Gleichung

$$\pi \bar{\nu}(s) + \int\limits_S \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}} \bar{\nu}(t)\, dt = 0$$

keine Lösung hat.

Um die Nichtexistenz einer Lösung der homogenen Gleichung zu beweisen, nehmen wir an, es wäre doch eine Lösung $\bar{\nu}$ vorhanden. Bilden wir mit dieser das Potential der Doppelschicht

$$\bar{u} = \int\limits_S \bar{\nu} \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt,$$

so ist

$$\bar{u}_i = \pi \bar{\nu}(s) + \int\limits_S \bar{\nu}(t) \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt = 0.$$

Weil $\bar{u}_i = 0$ ist, muß $\bar{u}$ wegen der bereits bewiesenen Eindeutigkeit der Lösung der ersten Randwertaufgabe in ganz T identisch verschwinden. In T ist also

$$\bar{u} \equiv 0,$$

mithin

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} = 0.$$

Da der Grenzwert der Normalableitung des Potentials $\bar{u}$ einer Doppelschicht bei Annäherung von innen her existiert, muß auch (Bd. I, § 28, Ende) der Grenzwert bei Annäherung von außen her existieren und dem ersten Grenzwert gleich sein. Demnach ist

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial n} = 0.$$

Folglich ist $\bar{u}$ im Außengebiete T_a von S zunächst konstant. Wendet man nämlich die Formel (10*) des § 13 im Bande I auf das Potential $\bar{u}$ und das Gebiet T_a an, was zulässig ist, da $\bar{u}$ als Potential einer Doppelschicht im ganzen Außengebiet mit Einschluß des unendlich fernen Punktes regulär ist, so folgt

$$\iint\limits_{T_a} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 \right\} d\omega = -\int\limits_S \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} dt = 0,$$

also

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, \qquad \bar{u} = \text{const in } T_a.$$

Nun verschwindet $\bar{u}$ im unendlich fernen Punkte.

Daher besteht auch im Außengebiet von S die Identität

$$\bar{u} \equiv 0.$$

Mithin ist

$$\bar{u}_a = 0.$$

Aus $\bar{u}_i = 0$ und $\bar{u}_a = 0$ folgt aber wegen

$$\pi \bar{\nu}(s) = \tfrac{1}{2}(\bar{u}_i - \bar{u}_a)$$

die Identität

$$\bar{\nu}(s) = 0.$$

Die homogene Integralgleichung hat also nur die triviale Lösung $\bar{\nu} = 0$, was zu beweisen war.

Schreiben wir (3*) in der Form

$$\nu(s) - \lambda \int_0^l K(s, t)\, \nu(t)\, dt = \frac{f(s)}{\pi}, \tag{3**}$$

so ist

$$\lambda = -1,$$

und wir haben bewiesen, daß -1 kein Eigenwert des Kerns $\mathrm{K}(s, t)$ ist.

Die Gleichung (3) hat also eine und nur eine Lösung, welche in bekannter Weise durch

$$\nu(s) = \frac{f(s)}{\pi} + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^l \mathsf{K}(s, t; \lambda)\, f(t)\, dt \tag{5}$$

mit $\lambda = -1$ oder durch

$$\nu(s) = \frac{f(s)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^l \mathsf{K}(s, t; -1)\, f(t)\, dt \tag{5*}$$

dargestellt ist.

Führen wir diese Funktion ν in (2) ein, so haben wir die Lösung unseres Problems.

§ 26. Erste Randwertaufgabe. Äußeres Problem.

Im § 3 haben wir bereits das äußere Problem formuliert und auf das innere zurückgeführt. Nachdem wir im vorigen Paragraphen das innere Problem gelöst haben, ist damit das äußere im Prinzip ebenfalls erledigt. Es empfiehlt sich aber doch, auch eine direkte Methode zur Lösung des äußeren Problems anzugeben, was wir in diesem Paragraphen tun wollen.

Gesucht ist eine in T_a reguläre, in $T_a + S$ stetige Potentialfunktion u, welche auf S bei Annäherung von außen her die vorgeschriebenen Werte f annimmt, so daß

$$u_a = f \tag{6}$$

wird.

Ebenso wie im vorigen Paragraphen wird die Kurve S als stetig gekrümmt, die Funktion $f(s)$ als stetig vorausgesetzt.

Daß unser Problem höchstens eine Lösung hat, wollen wir als aus § 3 bekannt voraussetzen.

Der Ansatz

$$u = \int_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r} dt$$

würde jetzt nicht zum Ziele führen, da dieses Potential einer Doppelschicht im unendlich fernen Punkte verschwindet. Die Lösung des äußeren Problems braucht aber im Unendlichen nicht 0 zu werden. Wir machen daher den allgemeineren Ansatz

$$u = \int_S \nu \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt + C, \tag{7}$$

wo C eine Konstante ist. Es muß sowohl die Konstante C wie die Ortsfunktion ν bestimmt werden.

Hat man unter Berücksichtigung von (6) diese Größen gefunden, so liefert (7) die Lösung des Problems. Denn u ist als Summe aus einem Potential einer Doppelschicht und einer Konstanten in ganz T_a mit Einschluß des unendlich fernen Punktes regulär, und ergänzt man die Definition der Funktion u, welche durch (7) nur in T_a definiert ist, indem man ihr auf S die Werte f zuschreibt, so ist u in $T_a + S$ stetig.

Aus (7) ergibt sich nun

$$u_a = -\pi\nu(s) + \int_S \nu(t)\frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}}\,dt + C = f(s) \tag{8}$$

oder mit Benutzung des durch (4) definierten Kerns $K(s, t)$

$$\nu(s) - \int_0^l K(s, t)\,\nu(t)\,dt = \frac{C - f(s)}{\pi} \tag{8*}$$

oder

$$\nu(s) - \lambda\int_0^l K(s, t)\,\nu(t)\,dt = \frac{C - f(s)}{\pi}, \tag{8**}$$

wo

$$\lambda = +1$$

zu nehmen ist. Der wesentliche Unterschied gegenüber dem inneren Problem besteht nun darin, daß $+1$ ein Eigenwert des Kerns $K(s, t)$ ist, daß also die homogene Gleichung

$$\bar{\nu}(s) - \int_0^l K(s, t)\,\bar{\nu}(t)\,dt = 0$$

von 0 verschiedene Lösungen besitzt.

Sie hat die Lösung

$$\bar{\nu} = 1,$$

weil die Identität

$$\frac{1}{\pi}\int_S \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}}\,dt = 1$$

für alle Punkte s von S besteht.

Wir behaupten nun, daß $\bar{\nu} = 1$, abgesehen von einem trivialen konstanten Faktor, die einzige Lösung ist. Es ist also zu beweisen, daß jede Lösung der homogenen Gleichung die Form $\bar{\nu} = \text{const}$ haben muß.

Sei $\bar{\nu}$ eine beliebige Lösung. Wir bilden mit ihr das Potential der Doppelschicht

$$\bar{u} = \int\limits_S \bar{\nu} \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt.$$

Dann ist

$$\bar{u}_a = -\pi \bar{\nu}(s) + \int\limits_S \bar{\nu}(t) \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des äußeren Problems muß in ganz T_a identisch

$$\bar{u} = 0$$

sein.

Folglich ist auch

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial n} = 0,$$

daher ist ebenfalls

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} = 0.$$

Da die Lösung der zweiten Randwertaufgabe bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, ergibt sich für das Innengebiet von S

$$\bar{u} = \text{const},$$

demnach

$$\bar{u}_i = \text{const}.$$

Schließlich ist

$$\bar{\nu}(s) = \frac{1}{2\pi}(\bar{u}_i - \bar{u}_a),$$

mithin wegen $\bar{u}_a = 0$ und $\bar{u}_i = \text{const}$

$$\bar{\nu}(s) = \frac{\bar{u}_i}{2\pi} = \text{const},$$

was zu beweisen war.

Auch die assoziierte Gleichung

$$\bar{\varkappa}(s)-\int\limits_S K(t,s)\,\bar{\varkappa}(t)\,dt=0$$

oder

$$-\pi\bar{\varkappa}(s)+\int\limits_S\frac{\cos(r_{st},n_s)}{r_{st}}\,\bar{\varkappa}(t)\,dt=0$$

hat nach dem Satze am Schluß des § 20, abgesehen von einem konstanten Faktor, eine einzige Lösung $\bar{\varkappa}(s)$. Die unhomogene Gleichung (8*) hat dann und nur dann eine Lösung, wenn $C-f(s)$ zu $\bar{\varkappa}(s)$ orthogonal ist. Wir haben also zur Bestimmung der Konstanten C die Gleichung

$$C\int\limits_S\bar{\varkappa}(s)\,ds=\int\limits_S f(s)\,\bar{\varkappa}(s)\,ds,$$

$$C=\frac{\int\limits_S f\bar{\varkappa}\,ds}{\int\limits_S\bar{\varkappa}\,ds}. \tag{9}$$

Geben wir dem C diesen Wert, so besitzt (8*) Lösungen. Ist ν eine spezielle Lösung von (8) oder (8*), nämlich nach § 20 Gleichung (33)

$$\nu(s)=\frac{C-f(s)}{\pi}+\frac{1}{D\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix};1)}\int\limits_0^l D\begin{pmatrix}s,\xi_1\\t,\xi_2\end{pmatrix};1\Big)\frac{C-f(t)}{\pi}\,dt, \tag{10}$$

so hat die allgemeine Lösung die Form

$$\mathsf{N}=\nu+A, \tag{11}$$

wo A eine Konstante ist, da ja $\bar{\nu}=A$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist.

Die Lösung des äußeren Problems wird jetzt gegeben durch

$$
\begin{aligned}
u &= \int_S \mathsf{N} \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt + C \\
&= \int_S \nu_t \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt + A \int_S \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt + C \\
&= \int_S \nu_t \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt + C,
\end{aligned}
$$

da ja für alle Punkte von T_a die Identität

$$\int_S \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt = 0$$

besteht. Man sieht, daß es gleichgültig ist, welche der verschiedenen Lösungen (11) von (8) man in (7) einsetzt. Damit ist auch das äußere Problem direkt gelöst.

Nach Erledigung des inneren und des äußeren Problems stellen wir uns noch folgende Aufgabe, bei der sowohl der innere Grenzwert u_i wie der äußere u_a in der Randbedingung auftritt:

Es wird das Moment ν einer auf S ausgebreiteten Doppelbelegung gesucht, deren Potential

$$u = \int_S \nu \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt$$

der Bedingung

$$h u_i + k u_a = f \tag{12}$$

genügt, wo f wieder eine stetige Ortsfunktion, h und k Konstante sind.

Wegen

$$u_i = \pi \nu_s + \int_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r} dt$$

und

$$u_a = -\pi \nu_s + \int_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r} dt$$

haben wir zur Bestimmung von ν die Gleichung

$$h u_i + k u_a = \pi (h - k) \nu_s + (h + k) \int_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r} dt = f. \quad (13)$$

In dem einfachen Falle $k = -h$ fällt das Integral fort, und es wird

$$\pi \nu_s = \frac{f(s)}{2h},$$

was ja wegen (12) mit der wohlbekannten Formel

$$\pi \nu_s = \frac{u_i - u_a}{2}$$

übereinstimmt.

In dem Falle $k = h$ wird

$$\int_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r} dt = \frac{f(s)}{2h}.$$

Das ist eine Integralgleichung erster Art für ν.

Sehen wir von diesem Falle ab, so können wir (13) durch $\pi (h - k)$ dividieren und finden

$$\nu_s + \frac{h + k}{\pi (h - k)} \int_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r} dt = \frac{f(s)}{\pi (h - k)} \quad (13^*)$$

oder

$$\nu(s) - \lambda \int_0^l K(s, t) \nu(t) dt = \frac{f(s)}{\pi (h - k)}, \quad (13^{**})$$

wenn wir

$$\frac{k+h}{k-h} = \lambda$$

setzen.

Ist λ kein Eigenwert von $K(s, t)$, so hat (13**) eine und nur eine Lösung ν, und diese stellt das gesuchte Moment der Doppelschicht dar.

Ist aber λ ein Eigenwert von $K(s, t)$, so hat (13**) und daher auch das vorgelegte Problem im allgemeinen, d. h. bei beliebiger Wahl von f, keine Lösung. Dagegen hat in diesem Falle das homogene Problem mit $f(s) \equiv 0$ eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

Wir sehen also: *Entweder hat das vorgelegte unhomogene Problem mit der Randbedingung $hu_i + ku_a = f$ eine und nur eine Lösung. Oder das zugehörige homogene Problem mit der Randbedingung $hu_i + ku_a = 0$ besitzt eine endliche Zahl linear unabhängiger Lösungen.*

Im letzteren Falle hat das unhomogene Problem dann und nur dann Lösungen, wenn f gewissen Orthogonalitätsbedingungen genügt, und die Lösung ist nicht mehr eindeutig.

Das innere Problem entspricht den Werten $h = 1$, $k = 0$

$$\lambda = -1,$$

was kein Eigenwert ist.

Das äußere entspricht aber den Werten $h = 0$, $k = 1$

$$\lambda = +1.$$

Da $+1$ ein Eigenwert ist, gibt es tatsächlich bei beliebiger Wahl von f kein Moment der gewünschten Art. (Daher waren wir ja auch bei der Lösung des äußeren Problems zu der Einführung einer Konstanten C genötigt.)

§ 27. Zweite Randwertaufgabe.

Gegeben ist bei der zweiten Randwertaufgabe ebenso wie in den vorigen Paragraphen eine stetig gekrümmte geschlossene Kurve S und eine stetige Ortsfunktion $f(s)$. Gesucht ist eine im Innengebiete T von S reguläre, bei Annäherung an S von innen her nebst Normalableitung stetige Potentialfunktion u, deren Normalableitung auf S die vorgeschriebenen Werte f annimmt, in dem Sinne, daß

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = f \tag{14}$$

wird.

Wir wissen bereits aus § 2, daß die zweite Randwertaufgabe, abgesehen von einer willkürlichen additiven Konstanten, höchstens eine Lösung besitzt, und aus § 1, daß f die Bedingung

$$\int\limits_S f(s)\,ds = 0 \tag{15}$$

erfüllen muß, damit eine Lösung existieren kann.

Wir werden jetzt zeigen, daß die Bedingung (15), welche der Gleichung (9*) des § 13 in Bd. I entspricht, für die Existenz einer Lösung auch hinreichend ist, und ferner die Lösung explizite angeben.

Wir nehmen die Lösung u in Form eines Potentials der einfachen Schicht an, wir machen also den Ansatz

$$u = \int\limits_S \varkappa \log \frac{1}{r}\,dt \tag{16}$$

und suchen die unbekannte Belegungsdichte $\varkappa$ durch die Randbedingung (14) zu bestimmen.

Nachdem $\varkappa$ als stetige Ortsfunktion auf S bestimmt ist, haben wir in (16) tatsächlich die Lösung der Aufgabe vor uns. Denn u ist als Potential einer einfachen Schicht in T regulär, sowie in $T+S$ stetig, und ferner geht $\frac{\partial u}{\partial n}$ bei Annäherung an S von innen her in die Randwerte f über, welche eine stetige Ortsfunktion bilden, d. h. u hat auf S eine stetige Normalableitung (s. Bd. I, § 3, Schluß).

Die Bestimmung von $\varkappa$ führt wieder auf eine unhomogene Integralgleichung zweiter Art. Es ist nämlich

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_s} = -\pi\varkappa_s + \int_S \varkappa_t \frac{\partial}{\partial n_s}\left(\log\frac{1}{r_{st}}\right) dt$$

(s. Bd. I, § 28, Gleichung (43)) oder

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = -\pi\varkappa_s + \int \varkappa_t \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{r_{st}} dt = f(s) \tag{17}$$

oder

$$\varkappa(s) - \int_0^l K(t, s)\varkappa(t)\, dt = -\frac{f(s)}{\pi}, \tag{17*}$$

indem wir entsprechend (4)

$$\frac{1}{\pi}\frac{\cos(r_{st}, n_s)}{r_{st}} = K(t, s) \tag{4*}$$

setzen, sodaß $K(s, t)$ und $K(t, s)$ assoziierte Kerne sind.

Die homogene Gleichung

$$\bar{\varkappa}(s) - \int_0^l K(t, s)\bar{\varkappa}(t)\, dt = 0 \tag{18}$$

hat, wie schon im vorigen Paragraphen bewiesen worden war, eine einzige Lösung, da die assoziierte Gleichung

$$\bar{\nu}(s) - \int_0^l K(s, t)\bar{\nu}(t)\, dt = 0$$

die einzige Lösung $\bar{\nu} = 1$ hat (immer abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor).

Die unhomogene Gleichung (17*) hat also dann und nur dann eine Lösung, wenn $-\frac{f}{\pi}$ oder f selbst zu 1 orthogonal ist, d. h. wenn die Gleichung

$$\int\limits_S f(s)\,ds = 0$$

besteht. Das ist wieder die Bedingung (15), die wir ja als erfüllt annehmen.

Ist nun $\varkappa$ eine spezielle Lösung von (17*), etwa

$$\varkappa(s) = -\frac{f(s)}{\pi} - \frac{1}{D\left(\begin{matrix}\eta_1\\ \xi_1\end{matrix}; 1\right)} \int\limits_0^l D\left(\begin{matrix}t, \eta_1\\ s, \xi_1\end{matrix}; 1\right) \frac{f(t)}{\pi}\,dt, \tag{19}$$

so hat die allgemeine Lösung die Form

$$\varkappa + C\bar{\varkappa},$$

wo C eine willkürliche Konstante und $\bar{\varkappa}$ eine Lösung von (18) darstellt.

Das gesuchte Potential ist demnach

$$u = \int\limits_S \varkappa \log\frac{1}{r}\,dt + C\int\limits_S \bar{\varkappa}\log\frac{1}{r}\,dt.$$

Nun ist aber

$$\bar{u} = \int\limits_S \bar{\varkappa}\log\frac{1}{r}\,dt = \text{const}$$

für alle Punkte des Innengebietes T von S. Denn $\bar{u}$ ist ein Potential, das wegen (18) der Bedingung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} = 0$$

genügt, und die Lösung der zweiten Randwertaufgabe ist ja bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wir haben also endgültig als Lösung des vorgelegten Problems

$$u = \int_S \varkappa \log \frac{1}{r}\, dt + \text{const},$$

wo für $\varkappa$ die Funktion (19) genommen werden kann.

§ 28. Dritte Randwertaufgabe.

Gegeben ist eine stetig gekrümmte geschlossene Kurve S und auf ihr zwei stetige Ortsfunktionen $h(s)$ und $f(s)$. Gesucht ist ein im Innengebiete T von S reguläres, bei Annäherung an S von innen her nebst Normalableitung stetiges Potential u, das der Randbedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = f \tag{20}$$

genügt. (Diese Randbedingung geht aus der etwas allgemeineren im § 1 zugrunde gelegten durch die Wahl $k \equiv 1$ hervor. Daß aber der Koeffizient von $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ gleich 1 wird, kann man durch Division mit k immer erreichen, vorausgesetzt, daß die stetige Funktion k auf S ständig dasselbe Vorzeichen bewahrt, also nirgends verschwindet. Unter dieser Voraussetzung ist also die Wahl $k \equiv 1$ keine Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung.)

Wird die Voraussetzung gemacht, daß h in (20) nirgends positiv ist und andererseits nicht identisch verschwindet (wohl aber ist ein Verschwinden der Funktion $h(s)$ in einzelnen Punkten von S gestattet), so läßt sich die Eindeutigkeit der Lösung der dritten Randwertaufgabe leicht beweisen (vgl. § 1 über die erste und zweite Randwertaufgabe).

Existierten nämlich zwei Lösungen u_1 und u_2, so wäre für das reguläre Potential

$$u_1 - u_2 = v$$

offenbar

$$\frac{\partial v_i}{\partial n} + h v_i = 0 .$$

Nun ist

$$\iint_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} d\omega = -\int_S v \frac{\partial v}{\partial n} ds = \int_S h v^2 ds$$

oder

$$\iint_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} d\omega + \int_S (-h) v^2 ds = 0 .$$

Daraus folgt wegen

$$-h \geqq 0$$

unmittelbar

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ in } T,$$

$$v = 0 \text{ auf } S,$$

$$v = \text{const in } T$$

und schließlich, da v in $T + S$ stetig ist,

$$v = 0 \text{ in } T,$$

was zu beweisen war.

Wir lassen jetzt jede Voraussetzung über das Vorzeichen von h fallen. Um nun zu einer Lösung der dritten Randwertaufgabe zu gelangen, machen wir ebenso wie bei der zweiten[1]) den Ansatz

$$u = \int\limits_S \varkappa \log \frac{1}{r}\, dt \tag{21}$$

und bestimmen die unbekannte Funktion $\varkappa$ durch die Bedingung (20).

Es ist

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_s} = -\pi \varkappa_s + \int\limits_S \varkappa_t \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{r_{st}}\, dt,$$

$$u_s = \int\limits_S \varkappa_t \log \frac{1}{r_{st}}\, dt.$$

Man berücksichtige, daß das Potential der einfachen Schicht beim Durchgange durch die belegte Linie S stetig bleibt, daß also insbesondere $u_i = u_s$ ist!

Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial n_s} + h u_i = -\pi \varkappa(s) + \int\limits_S \varkappa(t) \left\{ \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{r_{st}} + h(t) \log \frac{1}{r_{st}} \right\} dt \\ = f(s)\end{aligned} \tag{22}$$

oder

$$\varkappa(s) - \int\limits_0^l G(s, t)\, \varkappa(t)\, dt = -\frac{f(s)}{\pi}, \tag{22*}$$

wo

$$G(s, t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{r_{st}} + h(t) \log \frac{1}{r_{st}} \right\} \tag{23}$$

zu setzen ist.

---

[1]) Die zweite Randwertaufgabe kann als spezieller Fall der dritten für $h \equiv 0$ angesehen werden.

Wir haben also für $\varkappa$ wieder eine unhomogene Integralgleichung zweiter Art.

Der Kern $G(s,t)$ wird bei Zusammenfallen von t und s logarithmisch unendlich, da ja der Ausdruck $\log\frac{1}{r_{st}}$ auftritt. Wenn nun auch nicht $G(s,t)$ selbst, so ist doch der iterierte Kern $G^2(s,t)$ beschränkt (s. nächsten Paragraphen!). Mithin kann die Fredholmsche Theorie angewandt werden (§ 23).

Daher ergibt sich:

Entweder hat das unhomogene Randwertproblem mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = f$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Oder das homogene Problem mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = 0$$

besitzt eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

Im letzteren Falle hat das unhomogene Problem dann und nur dann Lösungen, wenn $f(s)$ gewissen Orthogonalitätsbedingungen genügt, und die Lösung ist nicht mehr eindeutig. Der erstere Fall tritt jedenfalls dann ein, wenn $h \leqq 0$ ist, ohne identisch zu verschwinden (s. o.).

§ 29. Beweis der Beschränktheit des iterierten Kerns $G^2(s,t)$.

Die Beschränktheit von

$$G^2(s,t) = \int_0^l G(s,t_1)\, G(t_1,t)\, dt_1$$

ergibt sich in folgender Weise:

Bekanntlich ist

$$\lim_{z=0} z^{\alpha} \log z = 0,$$

wie klein auch die positive Konstante α gewählt werden mag.

Daher bleibt $r_{st}^{\alpha} \log r_{st}$ und folglich

$$r_{st}^{\alpha} G(s, t)$$

bei beliebiger Annäherung des Punktes t an den Punkt s beschränkt.

Nun ist

$$\lim_{t=s} \frac{|s-t|}{r_{st}} = 1,$$

weil die Bogenlänge $|s-t|$ die Länge der Sehne r_{st} für $t = s$ zum Grenzwert hat. Mithin läßt sich eine Konstante (d. h. von t und s unabhängige Größe) C angeben, sodaß für alle Punkte t und s von S die Ungleichung

$$|s-t| < C r_{st}$$

besteht. Demnach ist

$$\frac{|s-t|^{\alpha}}{C^{\alpha}} G(s, t)$$

und schließlich

$$|s-t|^{\alpha} G(s, t)$$

beschränkt. Wir können also

$$G(s, t) = \frac{H(s, t)}{|s-t|^{\alpha}}$$

schreiben, wo $|H(s, t)|$ beschränkt, etwa $< M$ und die positive Konstante α beliebig klein, z. B. $< \frac{1}{2}$ ist. Dann wird

$$G^2(s, t) = \int_0^l \frac{H(s, t_1) H(t_1, t)}{|s-t_1|^{\alpha} |t_1-t|^{\alpha}} dt_1.$$

(Wie oben ist l die Länge der Kurve S; s und t sind irgend zwei Zahlen zwischen 0 und l.) Mithin ergibt sich die Ungleichung

$$|G^2(s,t)| < M^2 \int_0^l \frac{dt_1}{|s-t_1|^\alpha \, |t_1-t|^\alpha}.$$

Diese Ungleichung gilt für $0 \leqq s \leqq l$, $0 \leqq t \leqq l$, auch wenn s und t zusammenfallen, wobei sie die Form

$$|G^2(s,s)| < M^2 \int_0^l \frac{dt_1}{|s-t_1|^{2\alpha}}$$

annimmt; denn da $2\alpha < 1$ ist, behält das rechtsstehende Integral seinen Sinn.

Kapitel VI.

Die Lösung der Randwertaufgaben im Raume für beliebige Gebiete.

§ 30. Erste Randwertaufgabe.

Gegeben ist eine geschlossene Fläche S von stetiger Krümmung und eine stetige Ortsfunktion $f(s)$.

Gesucht ist eine im Innengebiete T von S reguläre, in $T+S$ stetige Potentialfunktion u, welche der Randbedingung

$$u_i = f \tag{1}$$

genügt.

Wir nehmen, wie in der Ebene, u als Potential einer auf S ausgebreiteten Doppelbelegung an

$$u = \iint_S \nu \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega. \tag{2}$$

Das Moment ν wird durch die Bedingung[1])

$$u_i = 2\pi\nu(s) + \iint_S \nu(\omega) \frac{\cos(r_{\omega s}, n_\omega)}{r_{\omega s}^2} d\omega = f(s) \tag{3}$$

bestimmt. Setzen wir

$$K(s, \omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(r_{\omega s}, n_\omega)}{r_{\omega s}^2}, \tag{4}$$

so wird

$$\nu(s) - \lambda \iint_S K(s, \omega)\, \nu(\omega)\, d\omega = \frac{f(s)}{2\pi} \tag{3*}$$

mit

$$\lambda = -1.$$

Was den Kern $K(s, \omega)$ dieser Integralgleichung zweiter Art betrifft, so wird er bei unbegrenzter Annäherung des Punktes ω an den Punkt s unendlich von erster Ordnung in Bezug auf $\frac{1}{r_{\omega s}}$, da $\frac{\cos(r_{\omega s}, n_\omega)}{r_{\omega s}}$ bei diesem Grenzübergange wegen der stetigen Krümmung der Fläche S beschränkt bleibt[2]).

Das Unendlichwerden des Kerns ist eine wichtige Verschiedenheit vom zweidimensionalen Problem, bei welchem der Kern beschränkt bleibt (s. § 25).

---

[1]) Wir bezeichnen jetzt den Punkt, der im Integrationselemente $d\omega$ liegt, mit ω, während er in Bd. I mit Q bezeichnet wurde.

[2]) Vgl. die in der Ebene geltende Limesgleichung

$$\lim_{t=s} \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}} = \frac{1}{2\varrho(s)}$$

des § 25.

Nun ist aber der iterierte Kern

$$K^3(s,\omega) = \iint \iint K(s,\omega_1)\, K(\omega_1,\omega_2)\, K(\omega_2,\omega)\, d\omega_1\, d\omega_2$$

in ganz S, auch bei Zusammenfallen von ω und s, beschränkt, wie wir im nächsten Paragraphen beweisen werden. Mithin kann die Fredholmsche Theorie doch wieder angewandt werden.

Die Integralgleichung (3*) hat also eine und nur eine Lösung ν, wenn die zugehörige homogene Gleichung keine Lösung (außer 0) besitzt.

Es werde angenommen, die Gleichung

$$\bar{\nu}(s) + \iint\limits_S K(s,\omega)\, \bar{\nu}(\omega)\, d\omega = 0$$

habe eine Lösung $\bar{\nu}$.

Bilden wir mit dieser das Potential der Doppelschicht

$$\bar{u} = \iint\limits_S \bar{\nu}\, \frac{\cos(r, n_\omega)}{r^2}\, d\omega,$$

so ist

$$\bar{u}_i = 0,$$

daher in ganz T identisch

$$\bar{u} \equiv 0$$

wegen der Eindeutigkeit der Lösung der ersten Randwertaufgabe.

Folglich ist

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} = 0,$$

mithin auch (vgl. Bd. I, § 28, Ende)

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial n} = 0.$$

Demnach ist im ganzen Außengebiet T_a von S zunächst

$$\bar{u} = \text{const}.$$

Aus der Formel (10) des § 13 im Bd. I ergibt sich nämlich[1])

$$\iiint\limits_{T_a} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = - \iint\limits_{S} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} d\omega = 0,$$

$$\text{also} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{u} = \text{const}.$$

Da aber $\bar{u}$ im Unendlichen verschwindet, ist in T_a

$$\bar{u} \equiv 0,$$

also

$$\bar{u}_a = 0.$$

Schließlich wird wegen (s. Bd. I, § 24, Gleichung (15))

$$2\pi \bar{\nu}(s) = \tfrac{1}{2} (\bar{u}_i - \bar{u}_a)$$

und $\bar{u}_i = 0$, $\bar{u}_a = 0$ auch

$$\bar{\nu}(s) = 0,$$

was zu beweisen war.

Die Lösung ν von (3) ergibt sich jetzt in der Form

$$\nu(s) = \frac{f(s)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S} \mathsf{K}(s, \omega; -1) f(\omega) \, d\omega, \tag{5}$$

und die Randwertaufgabe ist durch die Gleichungen (2) und (5) gelöst.

Was das äußere Problem betrifft, das schon im § 3 formuliert wurde, so begnügen wir uns hier mit dem Hinweis

---

[1]) Diese Formel ist anwendbar, weil $\bar{u}$ als Potential einer Doppelbelegung in ganz T_a mit Einschluß des unendlich fernen Punktes regulär ist.

darauf, daß es in dem genannten Paragraphen auf das innere zurückgeführt wurde und daher nunmehr nach Lösung des inneren Problems mit erledigt ist (vgl. im Gegensatz hierzu § 26).

§ 31. Beweis der Beschränktheit des iterierten Kerns $K^3(s, \omega)$.

Bevor wir die Beschränktheit von $K^3(s, \omega)$ beweisen, schicken wir einen allgemeinen Hilfssatz voraus.

Sei T irgendein beschränktes *ebenes* Gebiet, s und ω Punkte von T, sei ferner $g(s, \omega)$ eine Funktion, die, wo auch s und ω in T liegen mögen, die Darstellung

$$g(s, \omega) = \frac{G(s, \omega)}{r_{s\omega}^{\alpha}}$$

gestattet[1]). Dabei möge

$$0 < \alpha < 2$$

und $G(s, \omega)$ bei jeder Lage der Punkte s und ω beschränkt sein, etwa

$$|G(s, \omega)| < M.$$

Sei ebenso

$$h(s, \omega) = \frac{H(s, \omega)}{r_{s\omega}^{\beta}}$$

mit

$$0 < \beta < 2$$

und

$$|H(s, \omega)| < M.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f(s, \omega) &= \iint_T g(s, \omega_1)\, h(\omega_1, \omega)\, d\omega_1 \\ &= \iint_T \frac{G(s, \omega_1)\, H(\omega_1, \omega)}{r_{s\omega_1}^{\alpha}\; r_{\omega_1\omega}^{\beta}}\, d\omega_1 \end{aligned}$$

1) Wie üblich bezeichnet $r_{s\omega}$ die Entfernung der Punkte s und ω.

und untersuchen das Verhalten von $f(s, \omega)$ bei unbegrenzter Annäherung von ω an s.

Bekanntlich hat das Integral

$$\iint\limits_T \frac{dx\,dy}{r^\alpha},$$

wo r die Entfernung des Punktes (x, y) vom Anfangspunkte O bezeichnet, für $\alpha < 2$ auch dann einen bestimmten Wert, wenn O in T liegt. Dies beweist man leicht, indem man Polarkoordinaten einführt, wobei

$$\iint\limits_T \frac{dx\,dy}{r^\alpha} = \iint \frac{dr\,dy}{r^{\alpha-1}}$$

wird und der Exponent $\alpha - 1 < 1$ ist.

Daher ist zunächst, wenn ω eine endliche Entfernung von s hat, $f(s, \omega)$ beschränkt.

Läßt man nun ω sich s unbegrenzt nähern, so bleibt $f(s, \omega)$, wenn

$$\alpha + \beta - 2 < 0$$

ist, immer noch beschränkt, weil das Integral

$$\iint\limits_T \frac{G(s, \omega_1)\,H(\omega_1 s)}{r_{s\,\omega_1}^{\alpha+\beta}}\,d\omega_1$$

seinen Sinn behält.

Anders ist es aber, wenn $\alpha + \beta - 2 \geqq 0$ ist. Wir behaupten, daß für

$$\alpha + \beta - 2 > 0$$

die Funktion

$$r_{s\omega}^{\alpha+\beta-2} f(s, \omega) = F(s, \omega)$$

beschränkt bleibt, also $f(s,\omega)$ im allgemeinen unendlich von der Ordnung $\alpha+\beta-2$ in Bezug auf $\frac{1}{r_{s\omega}}$ wird, und daß für

$$\alpha+\beta-2=0$$

$f(s,\omega)$ logarithmisch unendlich wird.

Zum Beweise schlagen wir um den als fest angenommenen Punkt s einen Kreis mit Radius $2r_{\omega s}$ und bezeichnen dessen Fläche mit T_1, den übrigbleibenden Teil von T mit T_2. Es ist

$$f(s,\omega)=\iint\limits_T\ldots=\iint\limits_{T_1}\ldots+\iint\limits_{T_2}\ldots.$$

Liegt ω_1 id T_2, so bleibt der Quotient

$$\frac{r_{\omega\omega_1}}{r_{s\omega_1}}$$

zwischen endlichen, von 0 verschiedenen Grenzen, etwa

$$0<a<\frac{r_{\omega\omega_1}}{r_{s\omega_1}}<b,$$

sodaß man bei Abschätzungen $r_{\omega\omega_1}$ durch $r_{s\omega_1}$ ersetzen kann und umgekehrt. Daher ist

$$\left|\iint\limits_{T_2}\frac{G(s,\omega_1)\,H(\omega_1,\omega)}{r_{s\omega_1}^{\alpha}\,r_{\omega\omega_1}^{\beta}}\,d\omega_1\right|<\frac{M^2}{a^\beta}\iint\limits_{T_2}\frac{d\omega_1}{r_{s\omega_1}^{\alpha+\beta}}.$$

Führt man Polarkoordinaten mit s als Pol ein, so wird für $\alpha+\beta-2>0$

$$\iint\limits_{T_2}\frac{d\omega_1}{r_{s\omega_1}^{\alpha+\beta}}<2\pi\int\limits_{2r_{s\omega}}^{R}\frac{dr}{r^{\alpha+\beta-1}}=\frac{2\pi}{(\alpha+\beta-2)r^{\alpha+\beta-2}}\Bigg|_{r=2r_{s\omega}}^{r=R},$$

wenn R so groß ist, daß der Kreisring $2r_{\omega s} \leqq r \leqq R$ die Fläche T_2 ganz enthält. Demnach ist jetzt

$$\iint_{T_2} g(s,\omega_1)\,h(\omega_1,\omega)\,d\omega_1 = O\left(\frac{1}{r_{s\omega}^{\alpha+\beta-2}}\right).\,^{1)}$$

Für $\alpha+\beta-2=0$ wird aber wegen $\int \frac{dr}{r} = \log r$ offenbar das Integral $\iint\limits_{T_2} g(s,\omega_1)\,h(\omega_1,\omega)\,d\omega_1$ unendlich wie $\log r_{s\omega}$.

Ferner ist

$$\left|\iint_{T_1} g(s,\omega_1)\,h(\omega_1,\omega)\,d\omega_1\right| < M^2 \iint_{T_1} \frac{d\omega_1}{r_{s\omega_1}^{\alpha}\; r_{\omega_1\omega}^{\beta}}.$$

Hier führen wir eine Ähnlichkeitstransformation mit s als Pol aus, sodaß der Kreis T_1 um s mit dem Radius

$$2r_{\omega s} = k$$

in den Einheitskreis übergeführt wird. Dann ist, wenn wir die neuen Variablen bzw. Argumentpunkte durch Überstreichen bezeichnen

$$r_{s\omega_1} = k\,r_{\bar{s}\bar{\omega}_1},$$

$$r_{\omega_1\omega} = k\,r_{\bar{\omega}_1\bar{\omega}},$$

$$d\omega_1 = k^2\,d\bar{\omega}_1$$

und

$$\iint_{T_1} \frac{d\omega_1}{r_{s\omega_1}^{\alpha}\; r_{\omega_1\omega}^{\beta}} = \frac{1}{k^{\alpha+\beta-2}} \iint \frac{d\bar{\omega}_1}{r_{\bar{s}\bar{\omega}_1}^{\alpha}\; r_{\bar{\omega}_1\bar{\omega}}^{\beta}}.$$

Das Integral rechts ist über den Einheitskreis zu erstrecken und hat einen von der Lage der Punkte s und ω

---

[1]) Dabei bedeutet O das bekannte Landausche Symbol.

und dem Grenzübergange $\omega \to s$ unabhängigen konstanten Wert. Daher ergibt sich für $\alpha + \beta - 2 > 0$

$$\iint_{T_1} g(s, \omega_1)\, h(\omega_1, \omega)\, d\omega_1 = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta-2}}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{r_{\omega s}^{\alpha+\beta-2}}\right),$$

und für $\alpha + \beta - 2 = 0$ bleibt das Integral $\iint_{T_1} \ldots$ beschränkt.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Behauptung bleibt richtig, wenn man statt des ebenen Gebietes T eine krumme Fläche S nimmt, die wir wie oben als stetig gekrümmt voraussetzen wollen.

Denken wir uns nämlich im Punkte s von S die Tangentialebene, zerlegen die Fläche S in eine genügend kleine Umgebung S' von s und den übrigen Teil S'' und projizieren S' auf die Tangentialebene, sodaß auf dieser ein Gebiet T entsteht, so entspricht einem Punkte von S' ein Punkt des ebenen Gebietes T umkehrbar eindeutig. Die Entfernung $r_{\omega s}$ zweier Punkte s und ω von S einerseits und die Entfernung der beiden entsprechenden Punkte von T andererseits haben ein Verhältnis, das zwischen endlichen, von 0 verschiedenen Grenzen liegt. Dasselbe gilt von einander entsprechenden Integrationselementen. Daher ergibt sich zunächst

$$\iint_{T} \ldots = O\left(\frac{1}{r_{\omega s}^{\alpha+\beta-2}}\right)$$

und dann

$$\iint_{S'} \ldots = O\left(\frac{1}{r_{\omega s}^{\alpha+\beta-2}}\right),$$

sowie schließlich, da ja $\iint\limits_{S''} \ldots$ beschränkt bleibt,

$$\iint\limits_{S} \ldots = O\left(\frac{1}{r_{\omega s}^{\alpha+\beta-2}}\right),$$

wobei $\alpha + \beta - 2 > 0$ vorausgesetzt ist. Im Falle $\alpha + \beta - 2 = 0$ aber erhält man wieder die logarithmische Unendlichkeit zunächst für $\iint\limits_{T} \ldots$ und schließlich für $\iint\limits_{S} \ldots$.

Nachdem unser Hilfssatz in genügender Allgemeinheit bewiesen ist, folgert man leicht die Beschränktheit von $K^3(s, \omega)$.

Bildet man zunächst

$$K^2(s, \omega) = \iint\limits_{S} K(s, \omega_1)\, K(\omega_1, \omega)\, d\omega_1,$$

so ist, weil

$$K(s, \omega) = \frac{G(s, \omega)}{r_{s\omega}}$$

bei beschränktem $G(s, \omega)$ gesetzt werden kann,

$$\alpha = 1, \beta = 1, \quad \alpha + \beta - 2 = 0.$$

Daher wird $K^2(s, \omega)$ unendlich wie $\log r_{s\omega}$.

Bildet man nun

$$K^3(s, \omega) = \iint\limits_{S} K(s, \omega_1)\, K^2(\omega_1, \omega)\, d\omega_1,$$

so ist $\alpha = 1$, während man für β eine beliebig kleine positive Zahl nehmen kann. Demnach bleibt wegen $\alpha + \beta - 2 < 0$ tatsächlich $K^3(s, \omega)$ beschränkt.

§ 32. Zweite Randwertaufgabe.

Bei der Behandlung der zweiten und der dritten Randwertaufgabe können wir uns etwas kürzer fassen.

Zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe, bei welcher die Randbedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = f \tag{6}$$

vorgeschrieben ist, machen wir den Ansatz

$$u = \iint\limits_S \frac{\varkappa}{r}\, d\omega. \tag{7}$$

Dann wird

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = -2\pi\,\varkappa(s) + \iint\limits_S \varkappa(\omega)\,\frac{\cos(r, n_s)}{r^2}\, d\omega = f(s) \tag{8}$$

oder

$$\varkappa(s) - \iint\limits_S \varkappa(\omega)\, K(\omega, s)\, d\omega = -\frac{f(s)}{2\pi}, \tag{8*}$$

wo

$$K(\omega, s) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos(r_{\omega s}, n_s)}{r_{\omega s}^2} \tag{9}$$

der zu $K(s, \omega)$ assoziierte Kern ist (vgl. Gleichung (4)).

Die Fredholmsche Theorie ist anwendbar, weil $K^3(\omega, s)$ beschränkt ist.

Die homogene Gleichung

$$\bar{\varkappa}(s) - \iint\limits_S \bar{\varkappa}(\omega)\, K(\omega, s)\, d\omega = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte Lösung, weil die assoziierte Gleichung

$$\bar{\nu}(s) - \iint\limits_S K(s, \omega)\, \bar{\nu}(\omega)\, d\omega = 0$$

die eine Lösung

$$\bar{\nu} = \text{const}$$

besitzt. Daß diese Lösung, deren Richtigkeit auf der für alle Punkte s von S gültigen Identität

$$\iint_S \frac{\cos(r_{\omega s}, n_\omega)}{r_{\omega s}^2} d\omega = 2\pi$$

beruht, die einzige ist, wird ähnlich wie in § 26 bewiesen. Die Randwertaufgabe hat dann und nur dann eine Lösung, wenn die Bedingung

$$\iint_S f(\omega)\, d\omega = 0 \tag{10}$$

erfüllt ist, welche der Gleichung (9) des § 13 in Bd. I entspricht. Da wir die Bedingung (10) als erfüllt voraussetzen, hat unser Problem eine Lösung, welche bis auf eine willkürliche additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

Wir haben in der Tat

$$\varkappa(s) = -\frac{f(s)}{2\pi} - \frac{1}{D\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \xi_1\end{pmatrix}; 1)} \iint_S D\begin{pmatrix}\omega, \eta_1 \\ s, \xi_1\end{pmatrix} \frac{f(\omega)}{2\pi} d\omega\,^{1)} \tag{11}$$

und

$$u = \iint_S \frac{\varkappa}{r} d\omega + \text{const}.$$

§ 33. Dritte Randwertaufgabe.

Hier ist die Bedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = f \tag{12}$$

---

[1]) Ebenso wie s und ω bedeuten ξ_1 und η_1 hier Punkte auf S, die also von zwei unabhängigen Variablen abhängen.

vorgeschrieben, wo h und f stetige, nicht identisch verschwindende Ortsfunktionen auf S sind.

Wir machen den Ansatz

$$u = \iint_S \frac{\varkappa}{r}\, d\omega \tag{13}$$

und finden

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = -2\pi\varkappa(s) + \iint_S \varkappa(\omega)\left\{\frac{\cos(r, n_s)}{r^2} + \frac{h(\omega)}{r}\right\} d\omega = f(s). \tag{14}$$

Der Kern dieser Integralgleichung ist

$$G(s, \omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\cos(r, n_s)}{r^2} + \frac{h(\omega)}{r}\right\}. \tag{15}$$

Er wird also bei Heranrücken des Punktes ω an den Punkt s unendlich von erster Ordnung in Bezug auf $\dfrac{1}{r_{\omega s}}$, sodaß $G^3(s, \omega)$ beschränkt ist und die Fredholmsche Theorie anwendbar bleibt.

Wir haben also wieder die Alternative:

Entweder hat das vorgelegte unhomogene Randwertproblem mit der Bedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = f$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Oder das zugehörige homogene Problem mit der Bedingung

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + h u_i = 0$$

besitzt eine endliche Zahl linear unabhängiger Lösungen.

Frühjahr *1 9 3 1*

Mathematische Literatur

in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 10

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger. Wissenschaftlicher Beirat: H. Brandt, M. Dehn, G. Doetsch, A. Fraenkel, O. Haupt, F. Hausdorff, E. Hellinger, G. Kowalewski, H. Rademacher, K. Reidemeister, A. Rosenthal, C. Schaefer, W. Schmeidler, F. Schottky, O. Toeplitz. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155—156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II), Band 159—163 je RM. 36.—

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik" darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von Carl Ohrtmann und Felix Müller, fortgeführt von Emil Lampe, Arthur Korn. Leon Lichtenstein. Herausgegeben ab Band 51 von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter: Georg Feigl. Band 1—50: Jahrgang 1868—1924. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 RM. 75.—, Band 46 RM. 92.—, Band 47 RM. 74.—, Band 48 RM. 121.—, Band 49 RM. 77.—, Band 50 RM. 78.—, Band 53 (1927) RM. 108.—. Im Druck: Band 51 (1925), Band 52 (1926), Band 54 (1928) und Band 55 (1929).

Ausgabe in Sonderheften.

Sonderheft I: Geschichte, Pilosophie, Pädagogik. Mengenlehre. Sonderheft II: Arithmetik und Algebra. Sonderheft III: Analysis. Sonderheft IV: Geometrie. Sonderheft V: Angewandte Mathematik. Es liegen bisher vor: Aus Band 53 (Literatur 1927) Sonderheft I (II, 75 S.) RM. 8.60; Sonderheft II (II, 99 Seiten) RM. 11.20; Sonderheft III (II, 360 Seiten) RM. 40.50; Sonderheft IV (II, 186 Seiten) RM. 21.—.

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik, Mechanik, Relativitätstheorie, Astronomie und mathematischen Physik. Auch die Geschichte und Philosophie der Mathematik wie die Fragen der Didaktik finden sorgfältige Berücksichtigung.

Geschichte der Mathematik. Von Oberstudien-Dir. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. 1922. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Nr. 226, 875) . . Geb. je RM. 1.80

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18) . Geb. RM. 17.40

II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudiendirektor Dr. H. Wieleitner in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 222 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64.) Geb. RM. 3.50

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Lexikon-Oktav.

Band 1: Rechnen. VII, 222 Seiten. 3. Aufl., 1930. RM. 12.—, geb. RM. 13.20
Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 2. Aufl., 1921. RM. 8.50, geb. RM. 9.50
Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 2. Aufl., 1922. RM. 6.—, geb. RM. 7.—
Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 2. Aufl., 1922. RM. 9.—, geb. RM. 10.—
Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 2. Aufl., 1923. RM. 7.50, geb. RM. 8.50
Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 2. Aufl., 1924. RM. 7.—, geb. RM. 8.—
Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 2. Aufl., 1924. RM. 6.50, geb. RM. 7.50

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“ Naturwissenschaften.

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923. . . . . . RM. 0.80

In leichtverständlicher Darstellung berichtet der Verfasser über den Aufbau der Theorie der Integralgleichungen und ihre Anwendungen, die Erforschung der Grundlagen der mathematischen Physik, die Verallgemeinerung des Begriffs der konvergenten Reihen und die Entwicklung der modernen Relativitätstheorie.

Dasselbe in englischer Sprache. 1923 . . . . RM. 0.80

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 . . . . Geb. RM. 20.—
Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 . . . . Geb. RM. 26.—
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer Ausgabe vor. Geb. RM. 26.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Aufl. 117 Seiten und 1 Tafel. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. RM. 1.80

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 . . . . Geb. RM. 7.—

In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benutzung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der 8stelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.

Ausgabe B ohne Übungen. 12. Auflage. (Sonst wie die vorige.)
Unterstufe. Mit 3 Tafeln. 156 Seiten. 1923 . . . . RM. 1.80
Oberstufe. 8. Auflage. Mit 6 Tafeln. VII, 254 Seiten. 1925. RM. 4.—
Geometrische Aufgaben und Übungen (aus der Ausgabe B).
Unterstufe. Mit 2 Tafeln. 58 Seiten. 1923 . . . . RM. 0.60
Oberstufe. 89 Seiten. 1925. . . . . RM. 1.50
Hierzu sind erschienen:
Rechentafeln für höhere Lehranstalten. 2. Auflage. 18 Seiten. 1929 . . . . RM. 0.30

Arithmetische Aufgabensammlung (aus der Ausgabe B).
Unterstufe. Mit 4 Tafeln. V, 100 Seiten. 1927 . . . . RM. 2.50
Oberstufe. 106 Seiten. 1929 . . . . RM. 3.—
Ergebnisse zur Unterstufe. 42 Seiten. 1928 . . . . RM. 3.—
Auflösungen zur Oberstufe. IV, 92 Seiten. 1929. . . . RM. 4.—
Ferner folgende Einzelteile der Oberstufe mit Übungen:
Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 1 Tafel. 63 Seiten. 1925 . . . . RM. 1.—
Grundzüge der darstellenden Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 4 Tafeln. 63 Seiten. 1925 . . . . . RM. 1.50

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. Mit 38 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 256 Seiten. 1931. (Sammlung Göschen Bd. 51) . . . . Geb. RM. 1.80

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben." Fortschritte der Mathematik.

Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert. Vierte Auflage, neu bearbeitet von Professor Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. RM. 6.—

„Das kleine, auch äußerlich hübsch ausgestattete Buch wird allen Lesern Freude machen, und insbesondere der Lehrer wird in ihm eine Fülle von Anregungen für den Unterricht vorfinden. Wir empfehlen die ‚Mußestunden' allgemeiner Beachtung." Zeitschrift für das Realschulwesen.

Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Dritte Auflage, neubearbeitet von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 5 Figuren. 132 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 47) . . . . Geb. RM. 1.80

Die neue Bearbeitung des vorliegenden Bandes ist durch einen Abschnitt über Kombinatorik bereichert.

Mengenlehre. Von Professor Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren. 160 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 999) . . . . Geb. RM. 1.80

Der Band behandelt die grundlegenden Tatsachen der Mengenlehre, die für alle Zweige der Mathematik so große Bedeutung gewonnen hat. Die Definition der Menge erfolgt im Anschluß an Cantor. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt.

Mengenlehre. Von Dr. F. Hausdorff, o. Professor an der Universität Bonn. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 1927. 285 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 7) . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.50

Das Lehrbuch setzt beim Lesen keine höheren mathematischen Kenntnisse als die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, allerdings aber eine gewisse Schärfe des abstrakten Denkens voraus und wird von Studierenden in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden können.

Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. 1926. X, 198 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6) . . . . RM. 9.—. geb. RM. 10.50

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

Lehrbuch der Algebra. Von Dr. Alfred Loewy, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915 . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.20

Elementare Algebra. Von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. 1926. (Sammlung Göschen Bd. 930) . . . . Geb. RM. 1.80

„Der erste Teil des Bandes behandelt die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, der zweite besondere Gleichungen und Lösungsverfahren. Dem Text sind gut gewählte Zahlenbeispiele beigegeben.“ Allg. Vermessungs-Nachrichten.

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Marburg.

I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 931) Geb. RM. 1.80

II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 932) . . . . Geb. RM. 1.80

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.

Algebraische Theorie der Körper. Von Prof. Dr. Ernst Steinitz. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Dr. Reinhold Baer und Prof. Dr. Helmut Hasse. Oktav. 134 Seiten und 27 Seiten Erläuterungsheft. 1930. RM. 9.—, geb. RM. 10.20

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 4 Figuren. VIII, 307 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) RM. 8.—, geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 48) Geb. RM. 1.80

Gruppentheorie. Von Dr. Ludwig Baumgartner in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837) . . . . . Geb. RM. 1.80

Determinanten. Von Studienrat Professor Paul B. Fischer. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 402) . . . . Geb. RM. 1.80

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verb. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 Seiten. 1925 . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart.

Zahlentheorie. Von Dr. Kurt Hensel, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. RM. 10.—, geb. RM. 12.—

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Dritte, neu durchgesehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haußner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. 1931. XV, 246 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3) . . RM. 8.50, geb. RM. 9.50

Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.

Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. VIII, 277 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4) . . . . RM. 10.—, geb. RM. 12.—

Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 . . . . . RM. 2.50

In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.

Irrationalzahlen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. VIII, 186 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1) RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Inhalt: Die Grundlagen — Der Begriff der Grenze — Potenzen und Logarithmen — Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale — Algebraische und transzendente Zahlen.

Punkt- und Vektor-Rechnung. Von Dr. Alfred Lotze, Privatdoz. für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13) . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.—

Das Buch gibt eine Einführung in die Punktrechnung, einschließlich der Vektorrechnung, welche dabei als Teilgebiet der umfassenden Punktrechnung erscheint. Neben der ursprünglichen Graßmannschen Darstellung, die sich auf den Fall der Euklidischen Geometrie beschränkte, wird auch eine rein projektive Begründung der Punktrechnung durchgeführt. Der zweite Teil enthält zahlreiche Anwendungen auf Algebra, projektive und Differentialgeometrie sowie auf Mechanik und zeigt daran die Vorzüge und die Tragweite der entwickelten Methoden.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Fig. Sechste, verb. Aufl. Lex.-Okt. VIII, 743 S. 1925. RM. 30.—, geb. RM. 33.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Niedere Analysis. Von Professor Dr. Benedikt Sporer. Mit 5 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Sechster Abdruck. 179 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 53) . . . . Geb. RM. 1.80

Ohne den wissenschaftlichen Boden zu verlassen, war es das Bestreben des Verfassers, alle Ableitungen in den verschiedenen Kapiteln dieses umfangreichen Gebietes so einfach und verständlich wie möglich darzustellen und durch Beispiele klarer zu machen.

Höhere Analysis. Von Dr. Fr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen (Württemberg). Erster Teil: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen und 67 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 204 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . . Geb. RM. 1.80
Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 132 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 88) Geb. RM. 1.80

„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen."
Magazin für Pädagogik.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . . Geb. RM. 1.80

Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfuhr bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 135 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 147) Geb. RM. 1.80

„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden."
Schweizer Pädagogische Zeitschrift.

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . . Geb. RM. 1.80

Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.

Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) Geb. RM. 1.80

Fouriersche Reihen. Von Dr. W. Rogosinski, a. o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) . . . . Geb. 1.80

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926 . . . . RM. 14.—, geb. RM. 16.—

„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann."
Allgemeine Österr. Chemiker- u. Techniker-Zeitung.

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von Dr. Heinrich Liebmann, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901 . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. Ludw. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922 . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.—

Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920) . . . . Geb. RM. 1.80

Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10) RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.

Partielle Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) . . . . Geb. RM. 1.80

Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt.

Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14) RM. 11.—, geb. 12.—

In diesem einführenden Lehrbuch, das seine Eigenart ganz aus dem bewährten Programm von „Göschens Lehrbücherei" herleitet, werden sowohl lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie sie in der mathematischen Physik vorkommen, als auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung behandelt, sowohl Randwert- als auch Anfangswertprobleme, durchweg unter Beschränkung auf zwei unabhängige Veränderliche; es wird auch eine Einführung in die häufig benutzte Theorie der Integralgleichungen gegeben.

Integralgleichungen. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 18) . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 140 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 668) . . . . Geb. RM. 1.80

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 S. 1926. (Samml. Göschen Bd. 703) Geb. RM. 1.80

„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen."

Monatsschrift für Mathematik und Physik.

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 136 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 877) . . . . Geb. RM. 1.80

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878) . . . . Geb. RM. 1.80

Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie" (Samml. Göschen Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.

Einführung in die konforme Abbildung. Von Dr. Ludwig Bieberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. 131 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 768) Geb. RM. 1.80

„Der Autor faßt seine Aufgabe, eine Einführung in die konforme Abbildung zu geben, in doppeltem Sinne auf. Er vermittelt dem Leser die eigentlich elementaren Teile der Theorie der konformen Abbildung; andererseits eröffnet er durch Eingehen auf einzelne neue Entwicklungen den Zugang zu den modernsten und tiefsten Untersuchungen der gesamten Funktionentheorie."

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Automorphe Funktionen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. X, 205 Seiten. 1924. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5) RM. 8.—, geb. RM. 9.20

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Das Buch will den Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Elliptische Funktionen. Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten, Neudruck. 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . . . Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923 . . . . RM. 3.50, geb. RM. 4.—

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg, a. o. Professor in Breslau.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) . . . . Geb. RM. 1.80

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944) . . . . Geb. RM. 1.80

„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen."

Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht.

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) . . . . Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) Geb. RM. 4.—

Numerische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) . . . . . Geb. RM. 1.80

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) . . . . . Geb. RM. 1.80

Methoden der praktischen Analysis. Von Dr. Fr. A. Willers, o. Professor a. d. Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12) . . . RM. 20.—, geb. RM. 21.50

Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) . . . . Geb. RM. 1.80

Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) Geb. RM. 1.80

Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.

Vermessungskunde. Von Dr.-Ing. P. Werkmeister, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 140 Figuren. Vierte Auflage. 156 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 468) . . . . . Geb. RM. 1.80

II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Dritte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 469) . . . . . Geb. RM. 1.80

III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Topographie. Mit 61 Figuren. Zweite Auflage. 136 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 862) . . . . Geb. RM. 1.80

Grundlagen der Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 17) . . . . RM. 6.50, geb. RM. 7.80

Inhalt: I. Gleichheit, Ordnung und Stetigkeit. II. Die Messung durch Zahlen. (Streckenmessung, Winkelmessung, Flächenmessung.) III. Die projektive Geometrie in der Ebene. (Der Fundamentalsatz. Analyse des Fundamentalsatzes. Beweis des Fundamentalsatzes. IV. Die projektive Geometrie im Raume. (Der Fundamentalsatz. Der Desarguessche Satz. Die Koordinatengeometrie.) V. Künstliche Geometrien.

Ebene Geometrie. Von G. Mahler, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 166 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 41) Geb. RM. 1.80

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. Fr. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Fig. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2) Geb. RM. 3.90

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3) . . . . Geb. RM. 4.40

Das Buch enthält die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die beigegebenen Beispiele sollen den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit und Bedeutsamkeit der Trigonometrie gewähren. Das letzte Kapitel bietet die wichtigsten Anwendungen der Sphärik auf die mathematische Geographie.

Ebene und sphärische Trigonometrie.. Von Dr. Gerhard Hessenberg, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 99) . . . . Geb. RM. 1.80

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst."

Archiv der Mathematik und Physik.

Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Dr. Fritz Heiland, Studienrat am Gymnasium in Jena. Mit 26 Fig. 152 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 848) Geb. RM. 1.80

Die Sammlung schließt sich nach Anordnung und Bezeichnung dem Lehrbuch Hessenbergs (Samml. Göschen Bd. 99) an. Wichtigere Formeln sind vorangestellt, zum Teil mit Ableitung. Zu sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen angegeben.

Stereometrie. Von Professor Dr. Robert Glaser. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. Mit 81 Figuren. 139 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 97) . . . . Geb. RM. 1.80

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Professor Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren. 168 Seiten. 1917. (Samml. Göschen Bd. 779) . . . . Geb. RM. 1.80

Aufgaben über Prisma und Zylinder — Projektionszeichnen — Pyramiden und Kegel — Kugel und Kugelteile — konoidartige Körper — Prismatoide — schief abgeschnittene Prismen und Zylinder — Guldinsche Regel.

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929 . . . . Geb. RM. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. Friedrich Schur, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. RM. 6.50, geb. RM. 7.70

Analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 65) . . . . Geb. RM. 1.80

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnisse voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen, vornehmlich über die Kegelschnitte.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene mit den vollständigen Lösungen. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 22 Figuren im Text. 139 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 256) . . . . . . Geb. RM. 1.80

Analytische Geometrie des Raumes. Von Professor Dr. Max Simon, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 208 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 89) Geb. RM. 1.80

Das Werk besitzt den Charakter eines ausführlichen Lehrbuches; es gibt eine übersichtliche und abgeschlossene Darstellung der analytischen Geometrie des Raumes nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung und bietet zuverlässige Belehrung über die analytisch-geometrischen Theorien.

Aufgaben zur analytischen Geometrie des Raumes. Von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. 109 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 309) . . . . Geb. RM. 1.80

Die vorliegende Sammlung ist für die erste Einführung bestimmt. Sie soll dem Schüler oder Studierenden Gelegenheit geben, die analytischen Methoden anzuwenden, die Gebilde in ihren verschiedenen Lagen und ihren besonderen Fällen sowie ihre Beziehungen zueinander zu erfassen und zugleich seine Raumanschauung zu bilden.

Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Die Elementargeometrie wird nicht vom Standpunkte des Schulunterrichts, sondern von dem der Wissenschaft aus behandelt. Ausgangspunkt ist das (etwas modifizierte) Hilbertsche Axiomensystem. In der Darstellung treten zwei Momente in den Vordergrund: die geschichtliche Entwicklung und die prinzipielle Begründung der einzelnen Gebiete.

Koordinatensysteme. Von Professor Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 507) Geb. RM. 1.80

Der Verfasser versucht den Koordinatenbegriff von einem allgemeinen Standpunkt aus darzustellen. Durch sorgfältig ausgewählte, zahlreiche Literaturangaben wird der Wert des Bandes erhöht.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) Geb. RM. 1.80

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Kreis und Kugel. Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von H. Wieleitner, Oberstudiendirektor in München.

Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 435) Geb. RM. 1.80

Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 123 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 436) . . . . . Geb. RM. 1.80

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) . . . . Geb. RM. 18.—

II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51) Geb. RM. 9.50

Ein besonderer Vorzug dieses vorliegenden Lehr- und Einführungsbuches sind die jedem Bande beigegebenen Übungsaufgaben, zu deren Lösung sich am Schluß eine Anleitung befindet.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Fünfte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 72)
Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 876) Geb. je RM. 1.80

„Die Darstellung ist musterhaft klar und leichtverständlich und wird durch übersichtliche Zeichnungen und zahlreiche Aufgaben aufs trefflichste illustriert."
Bayerische Blätter für das Gymnasialschulwesen.

Geometrische Transformationen. Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) Geb. RM. 7.50

„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen."

Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1.80

Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Wilhelm Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 302) Geb. RM. 1.80

II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) . . . . Geb. RM. 1.80

Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitungen zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München.

I: Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 180) . . . . Geb. RM. 1.80

II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917) Geb. RM. 1.80

Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.

Politische Arithmetik. (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. Emil Foerster, Honorardozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879) Geb. RM. 1.80

In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. Marcello Pirani, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Figuren. Neudruck. 126 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 728) . . . . Geb. RM. 1.80

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Baugewerkschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695) Geb. je RM. 1.80

Statik. I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Privatdozent Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Karlsruhe. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) . . . . . . Geb. RM. 1.80

II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179) . . . . Geb. RM. 1.80

Kinematik. Von Dr.-Ing. Hans Polster, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 584) Geb. RM. 1.80

Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und Wälzhebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten und 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) . . . . Geb. RM. 1.80

In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen. Von R. Haren. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage von Josef Furtmayr, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 491) . . . . Geb. RM. 1.80

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . . Geb. RM. 1.80

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . Geb. je RM. 1.80

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger. Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) . . . . . . Geb. RM. 1.80

Nach der Einleitung über die Grundgesetze der geometrischen Optik folgen die Abschnitte über die Reflexion an ebenen Flächen und sphärischen Flächen. Dann wird die Brechung an ebenen Flächen, an einer Kugelfläche und durch ein zentriertes System von Kugelflächen behandelt. In Kapitel VI finden die Linsen und Linsensysteme Beachtung.

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor der Physik an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Band: Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 76) . . . . . . Geb. RM. 1.80

II. Band: Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. RM. 1.80

III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 78) Geb. RM. 1.80

IV. Band: Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 374) Geb. RM. 1.80

V. Band: Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 128 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1017) . . . . Geb. RM. 1.80

Allen, welche sich ein Kompendium der theoretischen Physik anschaffen wollen, seien diese Bändchen empfohlen. Der Verfasser hat den Stoff aus dem Gesamtgebiet sorgfältig ausgewählt und dabei die neuesten Resultate der Forschung berücksichtigt.

Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

II. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930. RM. 17.—, geb. RM. 18.50

Die vorliegende neue (5. und 6.) Auflage bringt die Kapitel „Atomtheorie" und „Statistische Physik" in fast völlig neuer Behandlung, der Teil „Relativitätstheorie" ist vermehrt und zum Teil umgearbeitet. Die „Deutsche Literaturzeitung" schreibt am 10. Mai 1930: „Das Buch erfüllt seinen Zweck, eine Einführung in die theoretische Physik zu geben, auf das vollkommenste. Es ist überaus klar und bündig geschrieben und für den Anfänger zum Selbststudium trefflich geeignet. Die wenigen etwas schwierigen Paragraphen sind so eingefügt, daß sie beim ersten Angriff auch beiseitegelassen werden können. Schließlich bildet die kurze Zusammenfassung des Inhalts am Ende des Buches eine nicht geringe Lernhilfe für den Studierenden."

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929. RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band: Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. X, 660 Seiten. 1929 . . . . . RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band: Erscheint Mitte 1931.

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht." *Annalen der Physik.*

Atomphysik. Von Dr. Hans Leßheim in Breslau. I. Band. Mit 36 Abbildungen. 134 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 1009) Geb. RM. 1.80

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. XI, 288 Seiten. 1930. Geb. RM. 11.50

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.
IN BERLIN W 10 UND LEIPZIG

C. G. Röder A.-G., Leipzig

2,00