

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

~~26~~

en

nung

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Methode der kleinsten Quadrate

Von

Prof. Wilh. Weitbrecht

II. Teil

Zahlenbeispiele

Mit 8 Figuren



641

Sammlung Götschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Götschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W. 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leicht-
verständliche und übersichtliche Einführung
in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und
Technik zu geben; in engem Rahmen, auf
streng wissenschaftlicher Grundlage und unter
Berücksichtigung des neuesten Standes der
Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen
zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne
Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber
dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zu-
sammenhange miteinander, so daß das Ganze,
wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche,
systematische Darstellung unseres gesamten
Wissens bilden dürfte.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

21 u
der b



100000297961

iff e
postfrei

Bibliothek zur Mathematik und Astronomie

aus der Sammlung Göschen

- Geschichte der Mathematik** von Prof. Dr. H. Wieleitner.
2 Bände Nr. 226, 875
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmische und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben** zusammengestellt von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Haufner. Nr. 81
- Fünfstellige Logarithmen** von Direktor Prof. Aug. Adler. Nr. 423
- Mathematische Formelsammlung** v. Prof. O.Th. Bürklen. Neubearb. von Dr. F. Ringleb. Mit 36 Fig. Nr. 51
- Arithmetik** v. Prof. Dr. H. Schubert u. Prof. P. B. Fischer. Nr. 47
- Elementare Algebra** von Prof. P. B. Fischer. Mit 20 Fig. Nr. 930
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert u. Prof. P. B. Fischer Nr. 48
- Höhere Algebra** von Prof. Dr. H. Hasse. 2 Bände Nr. 931, 932
- Praktisches Zahlenrechnen** v. Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Figuren Nr. 405
- Elementare Reihenlehre** von Prof. Dr. H. Falckenberg. Mit 4 Fig. im Text Nr. 943
- Determinanten** von Prof. P. B. Fischer Nr. 402
- Gruppentheorie** von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. Nr. 837
- Niedere Analysis** mit 6 Figuren von Prof. Dr. B. Sporer. Nr. 53
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung** mit 68 Fig. von Rektor Dr. Friedrich Junker Nr. 87
- Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung** mit 46 Figuren von Rektor Dr. Friedr. Junker. Nr. 146
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** m. 89 Figuren von Rektor Dr. Friedrich Junker Nr. 88
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** mit 50 Figuren von Rektor Dr. Friedr. Junker. Nr. 147
- Gewöhnliche Differentialgleichungen** von G. Hohelsel Nr. 920
- Einleitung in die Funktionentheorie** (Theorie der komplexen Zahlenreihen) v. Oberl. M. Rose. Mit 10 Fig. Nr. 581
- Funktionentheorie** von Prof. Dr. Konrad Knopp.
I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren Nr. 668
II. Anwendungen d. Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 10 Figuren Nr. 703
- Aufgabensammlung zur Funktionentheorie** von Prof. Dr. K. Knopp. 2 Bde. Nr. 877, 878
- Einführung in die konforme Abbildung** von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach Nr. 768
- Potentialtheorie** v. Dr. W. Sternberg. 2 Bände. Nr. 901, 944
- Vektoranalysis** mit 16 Fig. von Prof. Dr. Stegfr. Valentiner. Nr. 354
- Graphische Integration** v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig. Nr. 801
- Numerische Integration** von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig. Nr. 864
- Ebene Geometrie** m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41
- Ebene und sphärische Trigonometrie** mit 59 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg Nr. 99
- Sammlung v. Aufgaben aus d. ebenen u. sphärischen Trigonometrie** mit 26 Fig. v. Studienrat Dr. Fritz Helland. Nr. 848

Stereometrie mit 81 Figuren von Prof. Dr. Robert Glaser.	Nr. 97
Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren	Nr. 779
Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Figuren von Prof. Dr. K. Doehlemann. 2 Bände	Nr. 72, 876
Darstellende Geometrie von Prof. Dr. Robert Haubner. 2 Bände mit 150 Figuren	Nr. 142, 143
Nichteuklidische Geometrie von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig.	Nr. 970
Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn.	Nr. 58
Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs	Nr. 532
Graphische Darstellung in Wissenschaft u. Technik von Obering. Privatdoz. Dr. Marcello Pirani. Mit 58 Fig.	Nr. 728
Analytische Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haubner. Mit 50 Fig. im Text	Nr. 65
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen.	Nr. 256
Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Figuren von Prof. Dr. M. Simon	Nr. 89
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 7 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen.	Nr. 309
Koordinatensysteme von Prof. P. B. Fischer	Nr. 507
Algebraische Kurven. Neue Bearb. v. Prof. Dr. H. Wieleitner. I. Gestaltl. Verhältnisse. Mit 97 Figuren	Nr. 435
II. Theorie u. Kurven dritter u. vierter Ordnung. Mit 52 Fig.	Nr. 436
Wahrscheinlichkeitsrechnung von Prof. Dr. O. Knopf. Mit 10 Figuren. 2 Bände	Nr. 508, 871
Politische Arithmetik von Prof. Dr. E. Foerster	Nr. 879
Ausgleichsrechnung n. d. Methode d. kleinsten Quadrate von Prof. Wilhelm Weltbrecht. 2 Bände. Nr.	302, 641
Vermessungskunde von Prof. Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bände mit 300 Figuren	Nr. 468, 469, 862
Geodäsie von Prof. Dr. G. Förster. Mit 32 Figuren	Nr. 102
Mathematische Instrumente von Fr. A. Willers. Mit 68 Fig.	Nr. 922
Astronomische Geographie mit 52 Figuren v. Prof. Dr. Siegmund Günther	Nr. 92
Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Hermann Kobold.	
I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren	Nr. 11
II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten	Nr. 529
Astrophysik von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Mit 15 Fig. Neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff	Nr. 91
Kartenkunde von Dr. M. Groll, neubearb. v. Dr. Otto Graf. I. Die Projektionen. Mit 56 Figuren	Nr. 30
II. Der Karteninhalt u. d. Messen auf Karten. Mit 39 Fig.	Nr. 599
Kartographische Aufnahmen u. geogr. Ortsbestimmung auf Reisen von Prof. Dr.-Ing. R. Hegershoff u. Prof. Dr.-Ing. O. Israel. I. Topograph. Aufnahmen. Mit 66 Figuren.	Nr. 607
Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie von Prof. Dr. Hans Dock. Mit 59 Figuren	Nr. 699
Versicherungsmathematik von Prof. Dr. Friedr. Boehm. 2 Bände	Nr. 180, 917

Sammlung Göschen

Ausgleichsrechnung
nach der
Methode der kleinsten Quadrate

Von

Wilh. Weitbrecht

Professor der Geodäsie in Stuttgart

Zweite, veränderte Auflage

II. Teil

Zahlenbeispiele

Mit 8 Figuren

Neudruck



Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.

1920

KD 519.281.2(024):526(075.8)



~~126~~

I-301352

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



Druck
der Spammerschen
Buchdruckerei in Leipzig.

Akc. Nr.

~~4002/51~~

DPZ-B-562/2016

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt. Direkte Beobachtungen.

1. Kapitel.

Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

	Seite
Formeln	5
1. Beispiel: Mit Rechenschieber erreichbare Rechengenauigkeit . .	6
2. Beispiel: Mittelwert und mittlerer Fehler eines mehrfach beobachteten Winkels	9
3. Beispiel: Libelleneinstellgenauigkeit	9

2. Kapitel. Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

Formeln	11
4. Beispiel: Mittelwert und mittlerer Fehler eines mehrfach, mit wechselnder Genauigkeit beobachteten Winkels	13
5. Beispiel: Mittelwert und mittlerer Fehler einer mit verschiedenartigen Geräten gemessenen Strecke	15
6. Beispiel: Berechnung der Höhe eines Punktes aus Neigungswinkel und Länge mehrerer von Höhenfestpunkten nach ihm gerichteter Zielstrahlen	17
7. Beispiel: Ausgleichung eines verdunkelten Grenzzugs aus noch vorhandenen Überresten früherer Grenzzeichen	20

II. Abschnitt. Vermittelnde Beobachtungen.

1. Kapitel. Übertragung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

Formeln	23
8. Beispiel: Mittlerer Fehler der Summe oder Differenz mit verschieden großer Genauigkeit beobachteter Einzelgrößen . . .	24
9. Beispiel: Mittlerer Fehler des Vielfachen einer beobachteten Einzelgröße	25
10. Beispiel: Mittlerer, von ungenauer Maßstablänge und ungenauem Anlegen herrührender Fehler eines Streckenmaßes	25
11. Beispiel: Mittl. Fehler einer ohne Überbestimmung aus beobachteten Strecken und Winkeln berechneten Dreieckseite . .	25

2. Kapitel. Ausgleichung vermittelnder, gleichgenauer Beobachtungen.

A. Auf graphischem Weg.

Erklärungen	27
12. Beispiel: Feststellung der Lage und Richtung einer Geraden auf Grund einer überschüssigen Zahl mehr oder weniger unsicherer Stützpunkte	28

B. Auf rechnerischem Weg.

Formeln	34
13. Beispiel: Ausgleichung einer in allen möglichen Strahlenkombinationen auf einem Punkt ausgeführten Winkelmessung . .	40

14. Beispiel: Koordinaten eines Punktes aus seinen Entfernungen von gegebenen Festpunkten (Bogenschnitt)	46
15. Beispiel: Koordinatenumformung	50

3. Kapitel. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

Formeln	59
16. Beispiel: Ausgleichung einer Netzeinwägung	63

Trigonometrische Punkteinschaltung.

Einleitung	69
----------------------	----

I. Graphische Fehlerausgleichung.

Erklärungen	70
Auswahl des endgültigen Punktes in der fehlerzeigenden Figur	72
Genauigkeitsuntersuchung	77
17. Beispiel: Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden	79

II. Rechnerische Fehlerausgleichung.

Einfluß kleiner Änderungen an den Koordinaten des Anfangs- oder Endpunktes einer Strecke auf deren Richtungswinkel. Rich- tungskoeffizienten	86
--	----

Vorwärtseinschnitt.

Strahlengewicht	88
Fehlergleichungen, Normalgleichungen und deren Auflösung	90
18. Beispiel: Bestimmung der Koordinaten eines Neupunktes	93

Rückwärtseinschnitt.

A. Im Falle der Winkelbeobachtung.

Ableitung der Fehler- und der Normalgleichungen, sowie der mitt- leren Beobachtungs- und Koordinatenfehler	98
19. Beispiel: Bestimmung der Koordinaten eines Neupunktes	103

B. Im Falle der Richtungsbeobachtung.

Ableitung der Fehler- und Normalgleichungen, sowie der mittleren Beobachtungs- und Koordinatenfehler	106
20. Beispiel: Bestimmung der Koordinaten eines Neupunktes	113

Vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden.

Richtungskoeffizienten. Gewicht der Beobachtungswerte	117
Gegenüberstellung sämtlicher für die Punkteinschaltung mit rech- nerischer Ausgleichung abgeleiteter Formeln	120
21. Beispiel: Rechnerische Behandlung des Beispiels 17	122

III. Abschnitt. Bedingte direkte Beobachtungen.

Erklärung und Formeln	130
22. Beispiel: Ausgleichung der drei gemessenen Winkel eines Dreiecks	136
23. Beispiel: Ausgleichung zweier in entgegengesetzter Richtung aus- geführter, dieselben Zwischenpunkte erfassender Einwä- gungen eines Linienzugs	136
24. Beispiel: Ausgleichung einer Netzeinwägung	138

I. Abschnitt.

Direkte Beobachtungen.

1. Kapitel.

Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

Formeln:

Bezeichnen wir

die Einzelergebnisse der n mal wiederholten Beobachtung einer Größe X mit $l_1, l_2 \dots l_n$, deren nötigenfalls unter Zuhilfenahme eines Näherungswertes N daraus zu errechnenden Mittelwert mit L , die Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerte l vom wahren Wert X —: $X - l = v_w$, vom Mittelwert L —: $L - l = v$ und vom Näherungswert N —: $l - N = v$, den durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung mit d , den mittleren Fehler einer Beobachtung mit m und den mittleren Fehler des Mittelwertes aus sämtlichen Beobachtungen mit M ,

so ist

$$(1) \quad \begin{cases} (L - l_1) + (L - l_2) + \dots + (L - l_n) \\ \equiv v_1 + v_2 + \dots + v_n \equiv [v] = 0, \end{cases}$$

$$(2) \text{ u. } (7) \quad L = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} \equiv \frac{[l]}{n} = N + \frac{[v]}{n}$$

$$(3) \quad d = \frac{[\text{abs.}v]}{n},$$

$$(8) \quad [v v] = [v v] - n(L - N)^2 = [v v] - \frac{[v]^2}{n},$$

$$(4) \text{ u. } (6) \quad [v v] = \text{Minimum}; \quad [v_w v_w] = [v v] + n \cdot M^2,$$

$$(5) \quad m = \pm \sqrt{\frac{[v_w v_w]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n - 1}}$$

und

$$(11) \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\max} \text{ (d. h. unter 368 unabhängigen Beobachtungs-} \\ \text{wiederholungen wahrscheinlich einmal sich einstel-} \\ \text{lende Höchstabweichung des jeweiligen Beobach-} \\ \text{tungswertes vom Mittelwert)} \equiv (L - l)_{\max} = 3 \text{ m.} \end{array} \right.$$

1. Beispiel: Die mit der oberen Teilung gewöhnlicher (25 cm langer) Rechenschieber mit Glasläufer im Mittel erreichbare Rechengenauigkeit im Falle der Multiplikation zweier Faktoren soll durch Vergleichung einer Anzahl von damit errechneten Produkten mit den entsprechenden Sollwerten festgestellt werden.

Lösung: Rechnen wir eine Anzahl von Produkten (die wir wegen der Verschiedenheit der Teilungsintervalle zweckmäßigerweise je nach ihrer Größe in Gruppen zusammenfassen) zuerst mittels Rechenschiebers und dann genau aus, so erhalten wir im Unterschied je zweier zusammengehöriger Werte eine wahre Verbesserung v_w , deren Gesamtheit den mittleren Fehler m einer Rechenschieberrechnung nach Gleichung 5 liefert.

Faktoren	Ergebnis der Multiplikation auf vier zählende Ziffern		v_w in Einheiten der vierten Stelle		v_w^2 [$v_w v_w$]
	genau	Rechen- schieber	+	-	

Gruppe I.

854 × 1514	1293	1292	1		1	$m = \pm \sqrt{\frac{20}{5}} = \pm 2$ Einheiten der vierten Stelle
347 × 458	1589	1590		1	1	
1532 × 673	1031	1032		1	1	
2124 × 632	1342	1341	1		1	
4221 × 413	1743	1739	4		16	
			6	2	20	

Gruppe II.

2371 × 881	2089	2090		1	1	$m = \pm \sqrt{\frac{55}{5}} = \pm 3,3$ Einheiten der vierten Stelle
391 × 613	2397	2400		3	9	
612 × 424	2595	2590	5		25	
756 × 371	2805	2803	2		4	
443 × 669	2964	2960	4		16	
			11	4	55	

Faktoren	Ergebnis der Multiplikation auf vier zählende Ziffern		v_w in Einheiten der vierten Stelle		v_w^2 [$v_w v_w$]
	genau	Rechen- schieber	+	-	

Gruppe III.

423 × 741	3134	3140		6	36	$m = \pm \sqrt{\frac{146}{5}} = \pm 5,4$ Einheiten der vierten Stelle
385 × 854	3288	3290		2	4	
342 × 1042	3564	3560	4		16	
244 × 1538	3753	3750	3		9	
1314 × 303	3981	3990		9	81	
			7	17	146	

Gruppe IV.

1891 × 221	4179	4165	14		196	$m = \pm \sqrt{\frac{478}{5}} = \pm 9,8$ Einheiten der vierten Stelle
1543 × 281	4336	4340		4	16	
1813 × 333	4372	4380		8	64	
723 × 653	4721	4730		9	81	
1191 × 414	4931	4920	11		121	
			25	21	478	

Gruppe V.

215 × 238	5117	5120		3	9	$m = \pm \sqrt{\frac{582}{5}} = \pm 10,8$ Einheiten der vierten Stelle
223 × 234	5218	5230		12	144	
1724 × 3152	5434	5420	14		196	
325 × 1781	5788	5780		8	64	
1426 × 442	6303	6290	13		169	
			27	23	582	

Gruppe VI.

1766 × 387	6834	6850		16	256	$m = \pm \sqrt{\frac{694}{5}} = \pm 11,8$ Einheiten der vierten Stelle
1426 × 442	6303	6290	13		169	
1975 × 327	6458	6450	8		64	
236 × 279	6584	6590		6	36	
284 × 242	6873	6860	13		169	
			34	22	694	

Gruppe VII.

303 × 236	7151	7140	11		121	$m = \pm \sqrt{\frac{1351}{5}} = \pm 16,4$ Einheiten der vierten Stelle
206 × 352	7251	7240	11		121	
471 × 1592	7498	7510		12	144	
249 × 308	7669	7700		31	961	
1582 × 498	7878	7880		2	4	
			22	45	1351	

Gruppe VIII.

1426 × 568	8100	8090	10		100	$m = \pm \sqrt{\frac{2488}{5}} = \pm 22,3$ Einheiten der vierten Stelle
1942 × 436	8467	8500		33	1089	
2625 × 324	8505	8500	5		25	
3075 × 286	8795	8830		35	1225	
376 × 228	8573	8580		7	49	
			15	75	2488	

Faktoren	Ergebnis der Multiplikation auf vier zählende Ziffern		v_w in Einheiten der vierten Stelle		v_w^2 [$v_w v_w$]
	genau	Rechen- schieber	+	-	

Gruppe IX.

286 × 326	9320	9340		20	400	$m = \pm \sqrt{\frac{1394}{5}} = \pm 16,7$ Einheiten der vierten Stelle
462 × 206	9517	9530		13	169	
180 × 532	9576	9590		14	196	
645 × 154	9933	9910	23		529	
314 × 343	10770	10760	10		100	
			33	47	1394	

Die mittleren Fehler sind, wie angesichts der Verschiedenheit der Teilungsintervalle zu erwarten stand, nicht gleich, sondern zeigen ein gewisses Wachstum mit zunehmender Größe der ersten Ziffer des Produktes. Um das dafür geltende Gesetz zu ermitteln („vermittelnde Beobachtungen“) (was einwandfrei sich natürlich nicht aus einer so beschränkten Zahl von Feststellungen durchführen läßt), kann man zu den einzelnen, oder den mittleren Produktwerten als Abszissen die Abweichungen v_w , oder die mittleren Fehler m als Ordinaten in beliebigem Maßstab auftragen. Verbindet man dann die erhaltenen Bildpunkte durch eine ausgleichende stetige Kurve, so gibt deren Verlauf einen Einblick in das Fehlergesetz: zur Abszissenachse paralleler oder unregelmäßiger Verlauf würde die Unabhängigkeit der Fehler- von der Produktengröße anzeigen, geradlinige Divergenz: lineare Beziehung usw.

Das Ergebnis der obigen Untersuchung zeigt, daß bei Multiplikationen mit zwei Faktoren die dritte Stelle sich noch einigermaßen zuverlässig ergibt, wenn das Produkt mit den Ziffern 1 bis 3 beginnt, daß aber bei größerer Anfangsziffer schon die dritte Stelle normalerweise um 1 bis 2 Ein-

heiten, im Maximum sogar bis zu fünf Einheiten unrichtig sein kann.

2. Beispiel: Ein Winkel wurde unter gleichen äußeren Umständen wiederholt gemessen, wobei sich die nachfolgenden in Spalte 1 eingetragenen Werte l ergaben. Wie groß ist dessen wahrscheinlichster Wert L , der mittlere Fehler m einer Messung und derjenige M des Endergebnisses?

1	$N = 85^{\circ} 42' 00''$ $v'' = l - N''$		v^2	$v'' = (L - l)''$		v^2
	+	-		+	-	
1	2		3	4		5
85° 42' 12''	12		144		9	81
85° 42' 00''	0		0	3		9
85° 41' 58''		2	4	5		25
85° 42' 04''	4		16		1	1
85° 42' 06''	6		36		3	9
85° 42' 09''	9		81		6	36
85° 42' 03''	3		9	0		0
85° 42' 08''	8		64		5	25
85° 41' 54''		6	36	9		81
85° 41' 56''		4	16	7		49
	42	12	406	24	24	316
	[] = +30			[] = 0		

Endergebnis:

$$L = 85^{\circ} 42' 00'' + \frac{30''}{10} = 85^{\circ} 42' 03'' \pm 1,9''$$

$$[v v] = 406 - 10 \cdot 3^2 = 316$$

(übereinstimmend mit der direkten Rechnung)

$$m = \pm \sqrt{\frac{316}{9}} = \pm 5,9''$$

$$M = \pm \sqrt{\frac{316}{9 \cdot 10}} = \pm \frac{5,9''}{\sqrt{10}} = \pm 1,9''$$

3. Beispiel: Es soll die Genauigkeit der Einstellung einer Röhrenlibelle ermittelt werden. (Lösungs. S. 10 unten.)

Latten- Ein- stellung <i>l</i>	Luftblasen-								
	I. Vorwärts			II. Rückwärts			III. Vorwärts		
	<i>W</i> vorn	<i>W</i> hinten	<i>W</i> mitt.	<i>W</i> vorn	<i>W</i> hinten	<i>W</i> mitt.	<i>W</i> vorn	<i>W</i> hinten	<i>W</i> mitt.
2,246	0,8	30,2	15,5	0,8	30,8	15,8	1,0	30,4	15,7
2,248	2,0	31,4	16,7	2,1	32,1	17,1	2,5	31,8	17,15
2,250	3,4	33,0	18,2	3,8	33,8	18,8	3,6	33,0	18,3
2,252	5,2	35,0	20,1	5,0	35,0	20,00	5,5	35,0	20,25
2,254	6,8	36,0	21,4	6,0	36,0	21,00	6,4	36,0	21,2
2,256	7,8	37,3	22,55	7,3	37,2	22,25	7,8	37,2	22,5
2,258	9,2	38,6	23,9	8,9	38,9	23,9	8,9	38,3	23,6
2,260	10,4	39,8	25,1	10,1	40,0	25,05	10,8	40,0	25,4
2,262	12,2	41,6	26,9	11,7	41,5	26,6	11,8	41,2	26,0
2,264	13,2	42,7	27,95	13,0	43,0	28,0	13,5	42,8	28,15
2,266	14,5	44,2	29,35	14,3	44,0	29,15	14,8	44,2	29,5
2,268	15,8	45,5	30,65	16,0	45,6	30,8	16,8	46,0	31,4

$$\text{Empfindlichkeit } E'' = \frac{\Delta l \times c}{\Delta W \times d} = \frac{2 \times 206265}{1,377 \times 5000} = 5,99''$$

Lösung: Setzen wir die Wasserwage der Länge nach auf eine Fernröhre und stellen das Fadenkreuz der letzteren mehrfach auf bestimmte Teilpunkte einer in einiger Entfernung lotrecht aufgestellten Latte ein, so sollten die zu gleichen Einstellungen gehörigen Ablesungen an der Libellenteilung einander gleich sein. Aus etwaigen Abweichungen der letzteren von ihrem Mittel können wir nach Gleichung (5) den mittleren Einstellfehler berechnen. Im vorstehenden Beispiel, dessen Zweck die Untersuchung der Libelle zum Nivellierinstrument Nr. 29 der württembergischen Fachschule für Vermessungswesen in bezug auf Libellenschliff und -Empfindlichkeit ε war, war die Latte $d = 50$ m vom Instrument entfernt aufgestellt. Die Einstellung auf ihr erfolgte, je um $\Delta l = 2$ mm sich ändernd, mehrmals in beiderlei Richtung, d. h. vor und zurück.

Beispiel 3.

bewegung IV. Rückwärts stand W			Mittel aus den Luft- blasen- mitten	ΔW	v_1	v_1^2	v_2	v_2^2	v_3	v_3^2	v_4	v_4^2
W vorn	W hinten	W mitt.										
1,0	30,8	15,9	15,73	1,23	0,23	529	$\times 93$	49	3	9	$\times 83$	289
2,2	31,6	16,9	16,96	1,55	0,26	676	$\times 86$	196	$\times 81$	361	6	36
4,0	33,5	18,75	18,51	1,53	0,31	961	$\times 71$	841	21	441	$\times 76$	576
5,0	34,6	19,8	20,04	1,19	$\times 94$	36	4	16	$\times 79$	441	24	576
6,6	36,0	21,3	21,23	1,20	$\times 83$	289	23	529	3	9	$\times 93$	49
7,8	37,0	22,4	22,43	1,37	$\times 88$	144	18	324	$\times 93$	49	3	9
9,0	38,6	23,8	23,80	1,40	$\times 90$	100	$\times 90$	100	20	400	00	00
10,5	40,0	25,25	25,20	1,35	10	100	15	225	$\times 80$	400	$\times 95$	25
12,0	41,2	26,6	26,65	1,38	$\times 75$	625	5	25	15	225	5	25
13,2	42,8	28,0	28,03	1,35	8	64	3	9	$\times 88$	144	3	9
14,8	44,2	29,5	29,38	1,50	3	9	23	529	$\times 88$	144	$\times 88$	144
15,9	45,4	30,65	30,88		23	529	8	64	$\times 48$	2704	23	529

$$\Delta W_{\text{Mittel}} = \frac{15,15}{11} = 1,377 \qquad \underbrace{4062 \quad 2907 \quad 5327 \quad 2267}_{14563 = [vv]}$$

mittlerer Einstellfehler $m = \sqrt{\frac{14563}{47}} = 0,18$ Teilstriche.

2. Kapitel.

Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

Formeln:

Bezeichnen wir wieder mit $l_1, l_2 \dots l_n$ die Einzelergebnisse der Beobachtung einer Größe X , mit $p_1, p_2 \dots p_n$ deren Gewichte, mit L deren (nötigenfalls unter Zuhilfenahme eines Näherungswertes N) daraus zu errechnenden Mittelwert.

mit $v_1, v_2 \dots$ deren Abweichungen $(l_1 - N), (l_2 - N) \dots$ vom Näherungswert,

mit $v_1, v_2 \dots v_n$ deren Abweichungen $(L - l_1), (L - l_2) \dots$ vom Mittelwert,

mit μ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit,

mit $m_1, m_2 \dots$ den mittleren Fehler der Beobachtung $l_1, l_2 \dots$

mit M den mittleren Fehler des Mittelwertes L ,

so ist:

$$(13) \text{ u. } (18) \quad L = \frac{[p l]}{[p]} = N + \frac{[p v]}{[p]},$$

der mittlere Fehler vor der Ausgleichung

$$(14) \quad m_r = \frac{\mu}{\sqrt{p_r}} \left. \vphantom{\begin{matrix} (14) \\ (21) \text{ u. } (22) \end{matrix}} \right\} \text{ wobei } p_r = \frac{\mu^2}{m_r^2},$$

$$(21) \text{ u. } (22) \quad M = \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

$$(15) \quad m_1 : m_2 = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1},$$

$$(16) \quad [p v] = 0,$$

$$(17) \text{ u. } (19) \quad [p v v] = [p v v] - [p] (L - N)^2 = \text{Min.}$$

$$(20) \quad P_L = [p]$$

und endlich

$$(23) \quad \left. \begin{array}{l} \text{der mittlere} \\ \text{Fehlernach} \\ \text{der Aus-} \\ \text{gleichung} \end{array} \right\} \begin{cases} \mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v v]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n-1}}, \\ m_r = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p_r}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{(n-1) p_r}}, \\ M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{(n-1) [p]}}. \end{cases}$$

4. Beispiel: Die mittels verschiedenerlei Theodoliten und nach verschiedenerlei Verfahren mehrfach wiederholte Messung eines Winkels ergab für ihn folgende Mittelwerte l und mittleren Fehler m :

Ordnungszahl	Zahl der Wiederholungen n	Mittelwert l	Mittlerer Fehler m einer Messung
1	2	$58^{\circ} 43' 18''$	$\pm 10''$
2	4	$58^{\circ} 43' 30''$	$\pm 15''$
3	6	$58^{\circ} 43' 12''$	$\pm 20''$
4	8	$58^{\circ} 43' 22''$	$\pm 12''$

Wie groß berechnet sich unter Berücksichtigung aller Einzelmittel sein endgültiger Mittelwert L und dessen mittlerer Fehler M ?

Lösung: Aus den mittleren Fehlern jeder Messung gewinnen wir zunächst das Gewicht p jedes der Zwischenmittel l und (falls gewünscht) den mittleren Fehler M_1, \dots der letzteren sowie des Endergebnisses L vor der Ausgleichung. Wählen wir zu diesem Zweck als Gewichtseinheit etwa eine Messung, welche den mittleren Fehler $\mu = 10''$ erwarten läßt, so erhalten wir für die Zwischenmittel als

Mittleren Fehler der Zwischenresultate (vor der Ausgleichung)	Gewicht $p_r = \frac{\mu^2}{M_r^2} = \frac{n_r \cdot \mu^2}{m_r^2}$
$M_r = \frac{m_r}{\sqrt{n_r}}$	
$M_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} = \pm 7,1''$	2,0
$M_2 = \frac{15}{\sqrt{4}} = \pm 7,5''$	1,8
$M_3 = \frac{20}{\sqrt{6}} = \pm 8,2''$	1,5
$M_4 = \frac{12}{\sqrt{8}} = \pm 4,2''$	5,6

woraus sich ergibt

des Schlußergebnisses Gewicht $P_L = [p] = 10,9$;

mittl. Fehler vor der Ausgleichung $M = \pm \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm \frac{10''}{\sqrt{10,9}} = \pm 3,03''$

Der Näherungswert $N = 58^{\circ} 43' 20''$ liefert dann

$l - N \equiv v$		$p v''$		$p v v$
+	-	+	-	
10	2	18,0	4,0	8,0
	8		12,0	180,0
2		11,2		96,0
		29,2	16,0	22,4
		13,2		306,4

woraus

$$[p v v] = [p v v] - [p] (L - N)^2 = 306,4 - 10,9 \cdot 1,2^2 = 200,7$$

und

$$L = N + \frac{[p v]}{[p]} = 58^{\circ} 43' 20'' + \frac{13,2''}{10,9} = 58^{\circ} 43' 21,2''.$$

Direkte Rechnung liefert zur Probe:

$L - l \equiv v''$		$p v$		$p v v$
+	-	+	-	
3,2		6,4		20,5
	8,8		15,8	139,0
9,2		18,8		127,0
	0,8		4,5	3,6
		20,2	20,3	290,1

0,1
(soll 0
s. Gl. 16)

(Abweichung 0,6 gegen den oben errechneten Wert infolge von Abrundungsfehlern)

woraus als mittlerer Fehler des Schlußergebnisses nach der Ausgleichung:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{[p] (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{200}{10,9 \cdot 3}} = \pm 3,0'',$$

letzteres selbst: $L = 58^{\circ} 43' 21,2'' \pm 3''$.

Die beiden mittleren Fehler M des Schlußergebnisses vor und nach der Ausgleichung sind, wie dies der Fall sein soll, einander gleich. Ihre etwaige Verschiedenheit würde das Vorhandensein regelmäßiger oder grober neben den zufälligen Fehlern m , bzw. die nicht genügend sichere Bestimmung der letzteren beweisen.

5. Beispiel*): Eine Strecke L wurde je mit gleicher Genauigkeit gemessen:

$$\begin{array}{l} \text{a) mit Meßstangen} \left\{ \begin{array}{l} l_1 = 285,34 \\ l_2 = 285,40 \\ l_3 = 285,30 \\ l_4 = 285,44 \end{array} \right. \\ \text{zu} \left\{ \begin{array}{l} l_5 = 285,40 \\ l_6 = 285,56 \\ l_7 = 285,51 \end{array} \right. \\ \text{c) mit Meßkette} \left\{ \begin{array}{l} l_8 = 285,30 \\ l_9 = 285,46 \end{array} \right. \end{array}$$

Es liefert: Welches ist ihr bestmöglicher Wert und welches dessen mittl. Fehler?
 die Messungs- das Messungsergebnis die mittleren Fehler vor der Ausgleichung
 gruppe (Gleichung 2) (Gleichung 5b) (Gleichung 11)

$$\begin{array}{l} \text{Stangenmessung } L_{St} = 285,37 \quad m_{St} = \pm \sqrt{\frac{116}{3}} = \pm 6,2 \text{ cm} \quad M_{St} = \pm \sqrt{\frac{116}{3 \cdot 4}} = \pm 3,1 \text{ cm.} \\ \text{Bandmessung } L_B = 285,49 \quad m_B = \pm \sqrt{\frac{134}{2}} = \pm 8,2 \text{ cm} \quad M_B = \pm \sqrt{\frac{134}{2 \cdot 3}} = \pm 4,7 \text{ cm.} \\ \text{Kettenmessung } L_K = 285,38 \quad m_K = \pm \sqrt{\frac{128}{1}} = \pm 11,3 \text{ cm} \quad M_K = \pm \sqrt{\frac{128}{1 \cdot 2}} = \pm 8,0 \text{ cm.} \end{array}$$

Zur Vereinigung der drei ungleichwertigen Ergebnisse der Stangen-, Band- und Kettenmessung haben wir zunächst deren Gewichte p_{St} , p_B und p_K festzustellen**).

*) Das vorstehende Beispiel eignet sich strenggenommen nicht für die Vereinigung aller Beobachtungen zu einem Gesamtergebnis, weil den verschiedenen Meßgeräten abweichende Normalmeter zugrunde legen können, wodurch, wie auch durch die verschiedenen Messungsverfahren, regelmäßige Widersprüche in den Teilergebnissen (Stange, Band, Kette) erzeugt (oder teilweise aufgehoben) werden, die mit dem unregelmäßigen Beobachtungsfehler nichts zu schaffen haben. Es wurde aber trotzdem und zwar deshalb gewählt, um Tatsache und Größe des Unterschieds zwischen dem mittleren Fehler vor und demjenigen nach der Ausgleichung und seine Ursache zu zeigen.
 **) Bei der Fehler- und Gewichtsbestimmung aus wenigen Beobachtungen (bei der Meßkette hier nur zwei!) kann der Zufall leicht eine verhängnisvolle Rolle spielen, indem er Ergebnisse an sich unzuverlässiger Beobachtungen einander nahezu gleich und daher das zugehörige Gewicht besonders groß erscheinen läßt. Es ist in solchen Fällen besser, hierfür — statt der nach vorstehendem errechneten — als mittlere Fehler diejenigen Beträge einzuführen, welche nach früher gemachten praktischen Erfahrungen zu erwarten sind.

Wählen wir als Gewichtseinheit eine einmalige Kettenmessung, welcher der mittlere Fehler

$$\mu = m_K = \pm \sqrt{128} = \pm 11,3 \text{ cm}$$

anhafte, so wird nach Gleichung (14)

$$p_K = 2, \quad p_B = \frac{3 \cdot 128}{134} = 2 \cdot \frac{8,0^2}{4,7^2} = 5,7, \quad p_{sl} = \frac{4 \cdot 128}{116} = 2 \cdot \frac{8,0^2}{3,1^2} = 13,2,$$

woraus nach Gleichung (20) und (22)

$$P_L = [p] = 20,9, \quad M_L = \pm \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm \frac{11,3}{\sqrt{20,9}} = \pm 2,5 \text{ cm} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{als Gewicht und mittlerer Fehler des Endresultates vor der} \\ \text{Ausgleichung erscheint,} \end{array} \right.$$

Vereinigung der drei Gruppenergebnisse: Für $N = 285,30$ liefert Gleichung (18) und (19)

	v cm +	p	$p v$ cm +	$p v v$ qcm	v cm +	v cm -	$p v$ cm +	$p v v$ qcm
$L_{sl} = 285,37$	7	13,2	92,4	646,8	3,4		44,9	152
$L_B = 285,49$	19	5,7	108,3	2057,7		8,6	48,9	422
$L_K = 285,38$	8	2	16,0	128,0	2,4		4,8	11
		20,9	216,7	2832,5			49,7	585
$\frac{[p v]}{[p]} = + \frac{216,7}{20,9} = +10,4 \text{ cm}$				$p v v = 2832,5 - 20,9 \cdot 10,4^2$ $= 2832,5 - 2250 = 583$			Ab- rundungs- fehler +0,8. (Beruht.)	Ab- rundungs- fehler gegen 583 (s. links) = 2. (Beruht.)

somit

$$L = N + \frac{[p v]}{[p]} = 285,40_4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{als Endresultat aus den} \\ \text{drei Messungsgruppen.} \end{array} \right.$$

Hieraus liefert als mittlere Fehler nach der Ausgleichung:

$$\text{Gleichung (23 a)} \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{585}{2}} = \pm 17,2 \text{ cm}$$

$$\text{Gleichung (23 b)} \quad \begin{cases} M_{St} = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 13,2}} = \pm 4,7 \text{ cm} \\ M_B = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 5,7}} = \pm 7,2 \text{ cm} \\ M_K = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 2}} = \pm 12,1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Gleichung (23 c)} \quad M = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 20,9}} = \pm 3,7 \text{ cm.}$$

Die mittleren Fehler vor der Ausgleichung weichen von denjenigen nach der Ausgleichung erheblich ab. Diese Abweichungen haben ihre Ursache teils im Vorhandensein solcher Beobachtungsfehler, die — ihrem Betrag nach zwar nicht erheblich genug, um zur Nachmessung zu veranlassen — nach ihrer Entstehung den groben Fehlern zugerechnet werden müßten und welche das Messungsergebnis und die Bestimmung der Gewichte und mittleren Fehler um so stärker beeinflussen, je kleiner die Wiederholungszahl ist. Namentlich wird die Abweichung aber hervorgerufen (s. Fußnote S. 15) durch regelmäßige Fehler, die, bei den verschiedenen Beobachtungsgruppen in verschiedenem Betrag auftretend, innerhalb jeder einzelnen Gruppe gleich wirken, in ihr selbst also überhaupt nicht bemerkbar sind.

6. Beispiel: Um die Höhe eines Punktes P zu ermitteln, wurden von ihm aus die Neigungswinkel nach 4 Höhenfestpunkten in der Weise gemessen, daß auf

jedem von ihnen eine Zieltafel im lotrechten Abstand gleich der Instrumentenhöhe aufgestellt und angezielt wurde. Aus den nachfolgend angegebenen Festpunkthöhen H , Neigungswinkeln α und horizontalen Längen s der Zielstrahlen soll die Höhe von P samt ihrem mittleren Fehler abgeleitet werden.

Höhenfestpunkt	Gegeben, bzw. gemessen					Berechnet aus H , α und s berechnete Höhe (Zwischenmittel l) m
	Gegebene Höhe H m	Horizontalentfernung s m	Neigungswinkel α (Höhenwinkel = +) (Tiefenwinkel = -) in neuer Teilung			
			°	'	''	
1	786,24	1812	+14	87	50	354,73
2	737,48	984	+23	61	20	354,72
3	272,96	2308	- 2	26	73	354,84
4	126,24	4210	- 3	47	56	355,09

Lösung: Jeder Zielstrahl liefert mittels folgender Gleichung einen Wert l für die gesuchte Höhe H_P :

$$H_P = H_F - s \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{s^2}{2r} (1 - k) - \frac{s^2}{r} \left(1 - \frac{k}{2}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

wobei r den Erdhalbmesser ($\log r = 6,80489$ in m), und k den Refraktionskoeffizienten (0,13) vorstellt. Die Ausrechnung ergibt hiernach die in der letzten Vertikalspalte vorstehender Tafel eingetragenen Zwischenwerte l .

Zur Mittelbildung müssen wir zunächst deren Gewichte p feststellen, welche nach Gleichung (14) von ihren mittleren Fehlern abhängen. Der Bestimmung der letzteren, die ihrerseits wieder von den mittleren Fehlern von α , s und k abhängen, werden wir in Abschnitt II näher treten. Hier wollen wir uns vorerst mit der (für große Ziellängen und starke Zielneigungen allerdings nicht richtigen) Annahme begnügen, die Unsicherheiten in den einzelnen Höhenbestimmungen werden nur von den (gleich großen) Fehlern m_α in der Messung der Neigungswinkel α erzeugt, wachsen also proportional zur Ziellänge. Damit verändern sich die Gewichte der Einzelbestimmungen l umgekehrt proportional den Quadraten der Ziellängen oder:

$$p = \frac{c}{s^2}.$$

Die Konstante c und die Maßeinheit für die Ziellängen s können dabei beliebig gewählt werden. Schreiben wir z. B. einer Bestimmung aus $s = 2000$ m das Gewicht 1 zu und wählen als Maßeinheit für s in obiger Gleichung das km, so wird $c = 2^2$ und

$$\left. \begin{aligned}
 p_1 &= \frac{2^2}{1,812^2} = 1,2 \\
 p_2 &= \frac{2^2}{0,984^2} = 4,1 \\
 p_3 &= \frac{2^2}{2,308^2} = 0,75 \\
 p_4 &= \frac{2^2}{4,210^2} = 0,2 \\
 [p] &= 6,25
 \end{aligned} \right\}$$

Unter Annahme eines vorläufigen Höhenwertes $N = 354,8$ wird damit

$l - N \equiv v$ cm		$p v$ cm		$p v v$	zur Probe:				
					$L - l \equiv v$ cm		$p v$ cm		$p v v$
+	-	+	-	+	-	+	-		
1	7		8,4	58,8	1,8		2,2		4,0
2	8		32,8	262,4	2,8		11,5		32,2
3	4	3,0		12,0		9,2		6,9	63,5
4	29	5,8		168,0		34,2		6,8	232,6
		[] = 8,8	41,2	501,2			13,7	13,7	332,3*
		32,4			0,0				

$$L = 354,8 - \frac{32,4}{6,25} = 354,8 - 5,2 \text{ cm} = 354,748,$$

$$[p v v] = 501,2 - (6,25 \cdot 5,2^2 = 168,2) = 333^* ,$$

womit die mittleren Fehler nach der Ausgleichung werden:

a) der Gewichtseinheit: $\mu = \pm \sqrt{\frac{333}{3}} = \pm 10,5 \text{ cm} = \pm 0,11 \text{ m},$

b) des Zwischenmittels l_1 : $m_1 = \pm \sqrt{\frac{333}{3 \times 1,2}} = \pm 9,6 \text{ cm usw.}$

c) des Endwertes L : $M = \pm \sqrt{\frac{333}{3 \cdot 6,25}} = \pm 4,2 \text{ cm} = \pm 0,04 \text{ m.}$

Gewicht des Endwertes:

$$P_L = 6,25,$$

d. h. dem Endwert wohnt die gleiche Genauigkeit inne, wie wenn er aus etwas mehr als 6 Beobachtungen je mit der Ziellänge 2000 m bestimmt worden wäre.

Für den Endwert erhalten wir also:

$$L \equiv H_P = 354,75 \pm 0,04.$$

*) Die kleine Differenz beider Werte rührt von der Abrundung des Wertes für L her, welche bei der Berechnung von $[p v v]$ aus $[p v v]$ nicht berücksichtigt wurde. Sie beeinflusst den Wert von μ und M nicht.

7. Beispiel: Ein ursprünglich geradliniger, jetzt verdunkelter Grenzzug soll durch möglichste Anschmiegung an vorhandene für den fraglichen Zweck an sich gleichwertige Zaunüberreste P , welche an einzelnen Stellen aufgefunden und samt den ihnen anhaftenden Unsicherheiten mittels rechtwinkliger Koordinaten auf eine beliebige Abszisse aufgenommen wurden, wiederhergestellt werden. Die dazu nötigen Elemente sind durch Ausgleichung festzustellen.

Punkt Nr.	Abszisse x	Ordinate y
1	+ 10,84 \pm 0,14	-42,97 \pm 0,10
2	+ 51,02 \pm 0,10	-24,96 \pm 0,10
3	+ 96,72 \pm 0,08	- 4,00 \pm 0,08
4	+144,06 \pm 0,05	+17,10 \pm 0,05
5	+150,02 \pm 0,10	+20,24 \pm 0,05
6	+198,34 \pm 0,10	+42,00 \pm 0,10
7	+245,82 \pm 0,20	+63,92 \pm 0,10
	[] = +896,82	[] = +71,33

Lösung: Die gesuchte Ausgleichungsgerade geht (vgl. Beispiel 12) durch den Schwerpunkt S der aufgenommenen Stützpunkte, dessen Ordinaten sich ergeben aus:

$$x_S = \frac{[x]}{n} = + \frac{896,82}{7} = + 128,12 \quad y_S = \frac{[y]}{n} = + \frac{71,23}{7} = + 10,19.$$

Ihre Richtung ergibt sich demnach als arithmetisches Mittel aus den Richtungen der Verbindungsgeraden dieses Schwerpunktes mit den aufgenommenen Stützpunkten.

Für die mittleren Fehler der Schwerpunktskoordinaten erhalten wir nach Gleichungen (9) und (10) (s. vermittelnde Beobachtungen) in Einheiten von cm:

$$m_{x_S} = \frac{m_{[x]}}{n} = \pm \frac{\sqrt{14^2 + 10^2 + 8^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 20^2}}{7} = \pm \frac{\sqrt{985}}{7} \\ = \pm 4,5 \text{ cm,}$$

$$m_{y_S} = \frac{m_{[y]}}{n} = \pm \frac{\sqrt{10^2 + 10^2 + 8^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2}}{7} = \pm \frac{\sqrt{514}}{7} \\ = \pm 3,2 \text{ cm.}$$

Zur Berechnung der Richtungswinkel φ der obengenannten Verbindungsgeraden und ihrer mittleren Fehler mittels der Formeln:

$$\operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{tg} (x - S - P) = \frac{y_P - y_S}{x_P - x_S}, \text{ also } \log \operatorname{tg} \varphi = \log (y_P - y_S) - \log (x_P - x_S)$$

und

$$m_{\log \operatorname{tg} \varphi} = \pm \sqrt{m^2_{\log (y_P - y_S)} + m^2_{\log (x_P - x_S)}}$$

bilden wir für die:

Strecken	die Koordinatenunterschiede und (mittels Rechenschiebers) ihre mittleren Fehler			
	$x_P - x_S$	$m_{x_P - x_S}$	$y_P - y_S$	$m_{y_P - y_S}$
	m	± cm	m	± cm
S-1	-117,28	15	-53,16	11
S-2	- 77,10	11	-35,15	11
S-3	- 31,40	9	-14,19	9
S-4	+ 15,94	7	+ 6,91	6
S-5	+ 21,90	11	+10,05	6
S-6	+ 70,22	11	+31,81	11
S-7	+117,70	21	+53,73	11

Wir erhalten daraus die Richtungswinkel φ samt ihren mittleren Fehlern m_φ für die Verbindungsstrecken des Schwerpunktes S mit den einzelnen Grenzstützpunkten P , z. B. für die Strecke $S-1$:

Koordinaten- unterschiede	log	$m_{\log} \left\{ \begin{matrix} \Delta y \\ \Delta x \\ \operatorname{tg} \varphi \end{matrix} \right.$	$m^2_{\log} \left\{ \begin{matrix} \Delta y \\ \Delta x \\ \operatorname{tg} \varphi \end{matrix} \right.$
		in Einheiten der 5 ^{ten} Log.-Stelle	
- 53,16 ± 0,11 = Δy	1.72558 <i>n</i>	± 90	8100
-117,28 ± 0,15 = Δx	2.06923 <i>n</i>	± 56	3136
$\varphi = 227^\circ 09,2' \pm 5,8' \operatorname{tg} \varphi$ (in neuer Teilung)	9.65635	± 106	11236

usw. für die übrigen Strecken.

Zusammenstellung der Einzelwerte von φ , ihrer mittleren Fehler und Gewichte. Berechnung von φ_{Mittel} .

Strecke	φ in neuer Teilung	m_φ	Gewicht p der Werte φ für $\mu = 10'$ *) als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit $p = \frac{100}{m_\varphi^2}$	für $N = 227^\circ$ wird:				
				ν'		$p\nu'$		$p\nu\nu$
				+	-	+	-	
S-1	227°09,2'	± 5,8'	3,0	9,2		27,6		254
S-2	227°23,2'	± 8,2'	1,5	23,2		34,8		807
S-3	227°02,1'	± 16,7'	0,4	2,1		0,8		2
S-4	26°04,1'	± 22,5'	0,2		95,9		19,2	1841
S-5	27°39,0'	± 18,8'	0,3	39,0		11,7		456
S-6	27°07,8'	± 9,2'	1,2	7,8		9,4		73
S-7	27°26,3'	± 6,5'	2,4	26,3		63,1		1660
	11,7'		[] = 9,0	107,6	95,9	147,4	19,2	5093
				11,7		128,2		

Also mittlerer Fehler des Endwertes φ vor der Ausgleichung:

$$M = \pm \frac{10'}{\sqrt{9,0}} = \pm 3,3' (*),$$

$$\varphi = 227^\circ + \frac{128,2'}{9,0} = 227^\circ 14,2',$$

$$[p v v] = 5093 - 9 \left(\frac{128,2}{9,0} \right)^2 = 3267.$$

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{3267}{6}} = \pm 23,3' (*).$$

Mittlerer Fehler des Endwertes von φ nach der Ausgleichung:

$$M_{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{3267}{6 \times 9,0}} = \pm 7,8' (*).$$

Probe:

Strecke	$v' = \varphi_{\text{Mittel}} - \varphi_r$		$p v'$		$p v v$
	+	-	+	-	
S-1	5,0		15,0		75
S-2		9,0		13,5	122
S-3	12,1		4,8		58
S-4	110,1		22,0		2422
S-5		24,8		7,4	184
S-6	6,4		7,7		49
S-7		12,1		29,0	351
			49,5	49,9	3261
			0,4 Abrundungs- einfluß		soll 3267 (s. oben) Abrundungs- einfluß —: 6

Aus den Schwerpunktskoordinaten x_S und y_S und dem Richtungswinkel φ läßt sich nun die verlangte, durch den Schwerpunkt gehende Grenzlinie direkt, oder nach Berechnung anderer Absteckungselemente auf das Gelände übertragen. Am besten eignen sich dafür die in der Ordinatenrichtung gemessenen Abstände v der ausgeglichenen Grenzlinie von den aufgenommenen und durch Pflöcke ersetzten Zaunüberresten P :

$$v_P = y_{P_{\text{soll}}} - y_{P_{\text{ist}}} = y_S + (x_P - x_S) \operatorname{tg} \varphi - y_{P_{\text{ist}}}.$$

Wir erhalten daraus:

$$v_1 = -0,11; \quad v_2 = +0,13; \quad v_3 = -0,07; \quad v_4 = +0,33; \quad v_5 = -0,10; \\ v_6 = +0,01; \quad v_7 = -0,27; \quad [v] = 0.$$

*) Die großen Unterschiede zwischen den mittleren Fehlern vor und den entsprechenden nach der Ausgleichung weisen darauf hin, daß die Grenze ursprünglich nicht gerade verlief, oder daß die Zaunüberreste nicht genau auf der Grenze sich befinden.

Anmerkung: Die Aufgabe läßt sich bequemer noch nach Art der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen analog Beispiel 12 lösen, wenn man die Koordinaten der Grenzüberreste vorgängig auf eine zur Grenzrichtung ungefähr parallele Achse umrechnet.

II. Abschnitt.

Vermittelnde Beobachtungen.

1. Kapitel.

Übertragung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

Sind die Beobachtungswerte $L_1, L_2 \dots L_n$ mit den mittleren Fehlern $m_1, m_2 \dots m_n$ behaftet, so erzeugen die letzteren am Wert einer beliebigen Funktion F der Beobachtungsgrößen den mittleren Fehler M , wobei

$$(24) \quad M_{F(L_1, L_2 \dots L_n)}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1} m_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2} m_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n} m_n \right)^2$$

oder, wenn wir kürzerer Schreibweise wegen setzen:

$$\frac{\partial F}{\partial L_1} = l_1, \dots, \frac{\partial F}{\partial L_n} = l_n,$$

$$(24) \quad M_{F(L_1, L_2 \dots L_n)} = \pm \sqrt{[m m l l]}.$$

Für das Gewicht P_X der berechneten Größe $X = F(L_1, L_2 \dots L_n)$ ergibt sich daraus: $P_X = \frac{\mu^2}{[m m l l]}$ oder, wenn wieder μ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit und p_r das Gewicht des Beobachtungswertes L_r darstellt:

$$\frac{1}{P_X} = \frac{1}{\mu^2} [m m l l] = \left[\frac{l l}{p} \right].$$

Spezielle Fälle:

$$(9) \text{ Für } X = a \cdot L \text{ wird } M_X \equiv M_{a \cdot L} = \pm a \cdot m_L; \quad P_X \equiv P_{a \cdot L} = \frac{p}{a^2}$$

Für $X = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n$ wird

$$(10) \begin{cases} M_X \equiv M_{(L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n)} = \pm \sqrt{m_{L_1}^2 + m_{L_2}^2 + \dots + m_{L_n}^2}; \\ \frac{1}{P_X} = \left[\frac{1}{p} \right], \end{cases}$$

woraus für gleiche mittlere Fehler m der n Einzelsummanden L :

$$(10a) \quad M_{L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n} = m \sqrt{n}; \quad P_X = \frac{pL}{n},$$

8. Beispiel: Wie groß ist der mittlere Fehler M und das Gewicht P eines Winkels DBR , dessen Größe durch Addition, bzw. Subtraktion von drei Einzelwinkeln

$$ABC = 84^\circ 93' 12'' \pm 12''$$

$$ABD = 124^\circ 84' 58'' \pm 10''$$

$$CBR = 78^\circ 15' 83'' \pm 20''$$

zu bilden ist?

Lösung: Allgemein ist

$$DBR \equiv ABC - ABD + CBR, \text{ also hier } DBR = 38^\circ 24' 37''$$

und nach Gleichung (10)

$$M_{DBR} = \pm \sqrt{12^2 + 10^2 + 20^2} = \pm \sqrt{644} = \pm 25,4''.$$

Um das Gewicht des Winkels DBR festzustellen, müssen wir zuerst eine Gewichtseinheit wählen. Erklären wir dafür z. B. eine mit dem mittleren Fehler $\mu = \pm 20''$ behaftete Winkelmessung, so erhalten wir unter Benutzung von

$$M_{DBR} = \pm 25,4'' \quad \therefore \quad P_{DBR} = \frac{20^2}{25,4^2} = 0,62$$

oder aus den Einzelgewichten

$$p_1 = \frac{20^2}{12^2} = 2,77; \quad p_2 = \frac{20^2}{10^2} = 4; \quad p_3 = \frac{20^2}{20^2} = 1;$$

$$\frac{1}{P_{DBR}} = \frac{1}{2,77} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = 0,36 + 0,25 + 1,00 = 1,61,$$

woraus wie oben

$$P_{DBR} = \frac{1}{1,61} = 0,62.$$

9. Beispiel: Wie groß ist der mittlere Fehler M und das Gewicht P einer mit einem Reichenbachschen Entfernungsmesser bestimmten Strecke d , wenn der Lattenabschnitt L mit dem mittleren Fehler $m_L = \pm 0,5$ cm behaftet ist, und die Konstanten c und k als fehlerfrei angenommen werden?

Lösung:

$$\begin{cases} M_d = M(c + kL) = \pm \sqrt{m_c^2 + (k \cdot m_L)^2} = \pm k \cdot m_L, \\ P_d = \frac{p_L}{k^2} \quad \text{oder für } p_L = 1 \quad \therefore P_d = \frac{1}{k^2}. \end{cases}$$

10. Beispiel: Mit welchem mittleren Fehler M ist das Maß einer Strecke von 150 m Länge behaftet, wenn sie mit 5 m langen Meßstangen gemessen wird und wenn die im jedesmaligen Anlegen begründete Unsicherheit im Mittel $m_a = \pm 2$ mm, diejenigen der Stangenlänge in Folge rohen Vergleichsapparates $m_v = \pm 1$ mm beträgt? Wie groß wird dieser Streckenfehler im Falle der Anwendung nur 3 m langer Maßstangen unter Voraussetzung gleich großer Fehlerelemente?

Lösung: Zur ersten Frage:

$$\begin{aligned} M &= \pm \sqrt{m_a^2 + \dots + m_a^2 + (30 m_v)^2} \\ &= \pm \sqrt{30 \times 2^2 + 900 \times 1^2} = \pm 32 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Zur zweiten Frage:

$$M = \pm \sqrt{m_a^2 + \dots + m_a^2 + (50 m_v)^2} = \pm \sqrt{50 \times 2^2 + 2500 \times 1^2} = \pm 52 \text{ mm.}$$

11. Beispiel: Wie groß ist der mittlere Fehler M_c einer Dreieckseite $AB = c$ und ihr Gewicht P_c , wenn gemessen wurde:

$$\begin{aligned} b &= AC = 106,00 \quad \pm 0,06 \text{ m} \\ \sphericalangle \beta &= 29^\circ 39' \quad \pm 1' \\ \sphericalangle \gamma &= 120^\circ 07' \quad \pm 2' ? \end{aligned}$$

Lösung: Die Trigonometrie liefert die Beziehung: $c = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma$,
woraus mittels Gleichung (24c)

$$\begin{aligned} M_c^2 &= \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \gamma}\right)^2 m_\gamma^2 \\ &= \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} m_b^2 + \left(\frac{b \sin \gamma}{\sin^2 \beta} \cos \beta\right)^2 m_\beta^2 + \left(\frac{b}{\sin \beta} \cos \gamma\right)^2 m_\gamma^2 \\ &= \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} m_b^2 + c^2 \operatorname{ctg}^2 \beta \cdot m_\beta^2 + c^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot m_\gamma^2 \end{aligned}$$

(m_β und m_γ in analytischem Maß ausgedrückt).

Statt die mittleren Beobachtungsfehler m_β und m_γ durch Division mit ϱ' auf analytisches Maß zurückzuführen, können wir auch die zugehörigen partiellen Ableitungen mit ϱ' dividieren und als Winkeleinheit die Minute, als Längeneinheit das cm wählen, wodurch wir erhalten:

$$M_c^2 = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} \cdot 6^2 + \frac{c^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{\varrho'^2} \cdot 1^2 + \frac{c^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{\varrho'^2} \cdot 2^2$$

			90,25 = l_2^2 1·9528
			l_2 0·9764
	b 2·02531	$\sin \beta$ 9·6943	$\operatorname{ctg} \beta$ 0·2447
$E \sin \beta$	0·80566	$\sin \gamma$ 9·9870	c 4·2680
$\sin \gamma$	9·98702	l_1 0·2427	$E \varrho'$ 6·4637
185,35 = c	2·26799	3,06 = l_1^2 0·4854	$\operatorname{ctg} \gamma$ 9·7635
			l_3 0·4952
			9,78 = l_3^2 0·9904

$$\begin{aligned} M_c^2 &= 3,06 \cdot 36 + 90,25 \cdot 1 + 9,78 \cdot 4 \\ &= 110 + 90 + 39 = 239 = [m m l], \end{aligned}$$

$$M_c = \pm \sqrt{239} = \pm 15,5 \text{ cm.}$$

Also ist

$$c = 185,35 \pm 0,15, \text{ m.}$$

Einfacher noch, als wie in obiger Lösung gezeigt, läßt sich der mittlere Fehler eines aus fehlerhaften Faktoren gebildeten Produkts mittels Logarithmieren finden. Wir haben

$$\log c = \log b + \log \sin \gamma - \log \sin \beta,$$

somit nach Gleichung (10)

$$M_{\log c} = \pm \sqrt{m_{\log b}^2 + m_{\log \sin \gamma}^2 + m_{\log \sin \beta}^2}.$$

Man hat jetzt nur beim Aufschlagen von $\log b$, $\log \sin \gamma$, $\log \sin \beta$ gleichzeitig zu notieren, welchen Einfluß auf die

letzte (hier die fünfte) Stelle des log eine Änderung des Numerus um m_b , m_β , m_γ hier also 6 cm bzw. 2' bzw. 1' ausübt.

	log	m_{\log}	m_{\log}^2
b	2·02531	24 ₆	605
$E \sin \beta$	0·30566	22	484
$\sin \gamma$	9·93702	7	49
$185,35 \pm 0,15 = c$	2·26799 ± 34*)		1138

Ein mittlerer Fehler am loge von ± 34 Einheiten der fünften Stelle liefert (gleichzeitig mit dem Aufschlagen von c) den mittleren Fehler von c : $M_c = \pm 15$ cm.

Das Gewicht P der berechneten Seite c erhalten wir mittels Gleichung (24d) oder einfacher aus der Proportion $P_c : (p=1) = \mu^2 : M_c^2$.

Geben wir der Messung der Seite b das Gewicht 1, so wird $\mu = 6$ cm

und

$$P_c = \frac{36}{2,9} = 0,15.$$

Ein weiteres hierher gehöriges Beispiel, und gleichzeitig die wiederholte Anwendung des vorstehenden Lösungswegs zeigt die Berechnung der Richtungswinkel φ aus unsicheren Koordinatenunterschieden im 7. Zahlenbeispiel.

2. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder, gleichgenauer Beobachtungen.

A. Auf graphischem Weg.

Stehen zwei veränderliche Größen in (zum voraus bekannte, oder zunächst unbekannter) Abhängigkeit von einander, und sind zusammengehörige Wertpaare derselben durch Beobachtung ermittelt, so tragen wir die zu der einen gehörigen Werte als Abszissen x , die anderen als zugehörige Ordinaten y je in passendem (nicht notwendig für beide gleichem) Verjüngungsverhältnis auf.

*) $m_{\log c} = \pm \sqrt{1138} = \pm 34$.

Die stetige Verbindung der dabei erhaltenen Bildpunkte liefert eine (durch die unvermeidlichen Beobachtungsungenauigkeiten zunächst entstellte) Kurve, aus deren Gestalt die Form der zwischen x und h d. h. zwischen den beiden veränderlichen Größen bestehenden Beziehung, falls sie unbekannt wäre, erschlossen werden kann (gerade Linie beweist lineare Form, jeder Wendepunkt einen weiteren algebraischen Grad). Ist das Wesen der Funktion zum voraus bekannt, so ist der Einfluß der Beobachtungsungenauigkeiten auf die Kurve direkt aus der gezeichneten Form ersichtlich, eine ihr anzuschmiegende, der tatsächlich vorliegenden Beziehung entsprechende Linie kann wohl den gezeichneten Bildpunkten möglichst genähert, aber keinesfalls so gezeichnet werden, daß sie die letzteren sämtlich genau erfassen würde. Die Abweichungen v beider stellen alsdann nach Vorzeichen und Größe die Beobachtungsfehler vor, deren Summe $[v]$ wir gleich 0 und deren Quadratsumme $[vv]$ wir zum Minimum zu machen suchen. Andernfalls wird man suchen, eine möglichst einfache stetige Linie den gezeichneten Bildpunkten gleichfalls so anzuschmiegen, daß $[v] = 0$ und $[vv] = \text{Min}$. Die endgültige Wahl der Linienform wird man aber von der vorherigen Gewinnung und Benutzung einer genügend großen Zahl von Beobachtungspaaren abhängig machen müssen.

12. Beispiel (zum voraus bekannte Form der Funktionslinie):

Zum Zweck der Wiederherstellung der wahrscheinlichen Lage einer Baulinie an einer bauplanmäßig 15,00 m breiten Straße wurde eine Anzahl sicherer Gebäudeecken auf eine vorläufige, zu ihr im Abstände von 3 m ungefähr parallel verlaufende Abszisse aufgenommen. Gesucht ist die Lage der allen Gebäudeecken möglichst sich anpassenden, endgültigen Parallelen.

Lösung: Die abgesteckte Abszisse sowohl, als die gesuchte endgültige Parallele zur wahrscheinlichen Baulinie sind gerade Linien. Wäre es daher möglich, die in der Ordinatenrichtung gemessenen Entfernungen irgendwelcher durch gleiche Abszissenmaße bestimmter Punkte beider Geraden zu finden, so könnte man sie als Ordinaten zur abgesteckten Linie als Abszissenachse und zu den zugehörigen Abszissenmaßen auftragen. Die Verbindungslinie der dadurch erhaltenen Punkte müßte dann eine Gerade sein und die Abszissenachse in demselben Punkt schneiden, in dem in Wirklichkeit die gesuchte Parallele die abgesteckte Aufnahmelinie schneidet. Daran würde nichts geändert, auch wenn die genannten Entfernungen (die nur klein sein können) in größerem Maßstab als die Abszissen aufgetragen würden. Solche Entfernungen zwischen beiden, nur um wenig divergenten Geraden lassen sich nun wie folgt berechnen: Setzen wir voraus, daß die aufgenommenen Gebäudeecken genau auf den Baulinien liegen, also genau den Sollabstand ($a_1 = 3$ m bzw. $a_2 = 12$ m) von der gesuchten Parallelen haben, setzen wir ferner voraus, daß ihre von uns aufgenommenen Ordinaten y fehlerfrei gemessen sind, so erhalten wir von der abgesteckten Abszisse aus je einen Punkt der gesuchten Parallelen, wenn wir (unter Beachtung, daß wegen der geringen Divergenz von abgesteckter und Sollinie die bezüglichen Ordinaten ihrer Lage nach zusammenfallen) im betreffenden Fußpunkt die Ordinate

$$\eta = a - y$$

mit entgegengesetztem Vorzeichen auftragen. Die gesuchte gegenseitige Lage beider Geraden ist dann in der Figur direkt ersichtlich: Die Funktionslinie stellt die abzusteckende Sollinie vor. Da die berechneten und für die gesuchte Lage der Sollinie bestimmenden Ordinaten η von Punkten der letzteren sehr klein sind im Verhältnis zu den zugehörigen Abszissen, so wird man beide in verschiedenem Maßstab (etwa die Abszissen im Maßstab 1:1000, die Ordinaten η in 1:10) auftragen.

Würde nun die Verbindungslinie der gezeichneten Punkte (Funktionslinie), welche nach Obigem gerade gehen soll, in der Zeichnung tatsächlich gerade sein, so wären Lage der Gebäudeecken und eigene Messung fehlerfrei und eine Ausgleichung unnötig. Anderenfalls (und dies wird infolge von Gebäudesetzungen, Absteckungs- und Messungsfehlern die

Regel sein) muß jetzt diejenige Gerade gesucht werden, für welche die algebraische Summe der in der Ordinatenrichtung gemessenen Abstände v von den Fehlerbildpunkten gleich 0 ($[v] = 0$) und, da die Zahl solcher Geraden unendlich groß ist, gleichzeitig $[v v] = \text{Min.}$ wird.

Alle die Geraden, für welche $[v] = 0$, gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt S des Systems gezeichneter Punkte, dessen Koordinaten

$$\begin{cases} x_s = \frac{[x]}{n} \\ y_s = \frac{[y]}{n} \end{cases}$$

Zahlenbeispiel.

Punkt Nr.	Gemessene		Sollordinate a m	$y = a - y$ cm
	Abszisse $+x$ m	Ordinate y m		
1	53,95	-3,06	-3,00	+6
2	57,02	+11,94	+12,00	+6
3	72,54	+11,98	+12,00	+2
4	94,86	-2,94	-3,00	-6
5	140,22	+12,08	+12,00	-8
6	161,05	-2,95	-3,00	-5
7	212,84	-3,00	-3,00	0
8	221,95	+12,07	+12,00	-7
9	245,36	-2,90	-3,00	-10

$$x_s = \frac{1259,79}{9}$$

$$= 139,98 \text{ m}$$

$$y_s = \frac{-22}{9}$$

$$= -2,44 \text{ cm}$$

Um die Lage derjenigen durch S gehenden Geraden zu finden, für welche $[v v] = \text{Min.}$, kann man jetzt für 3 oder mehr verschiedene Versuchsgerade die Abstände v von den Fehlerbildpunkten (in der Ordinatenrichtung) abgreifen (wobei jedesmal $[v] = 0$ sein wird) und je $[v v]$ berechnen. Trägt man dann diese Werte $[v v]$ als Ordinaten in den Schnittpunkten I, II usw. dieser Versuchsgeraden mit irgend einer der ursprünglichen Ordinaten als Fußpunkten auf und zeichnet

durch die erhaltenen Punkte eine zu dieser neuen Ordinatenrichtung (\perp zur alten x -Achse) symmetrische Kurve, so stellt die Ordinate des unteren Kulminationspunktes den niedersten

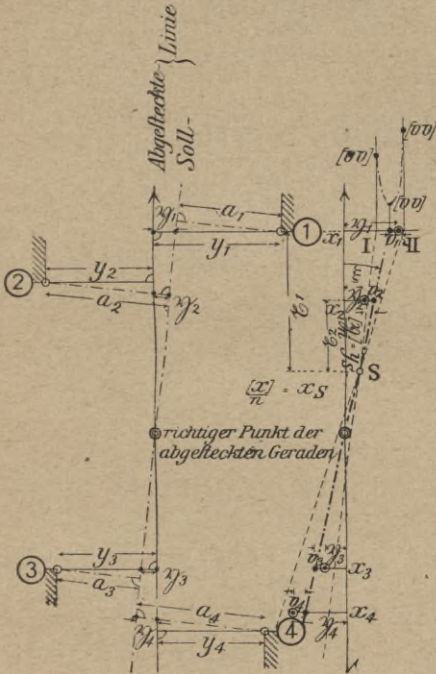


Fig. 1.

Wert für $[vv]$, deren Fußpunkt (neben dem Schwerpunkt S) einen zweiten Punkt der Sollgeraden vor. Nach Einzeichnung der letzteren wird man für das gegenwärtige Beispiel aus der Figur ablesen: Die gesuchte Gerade schneidet die abgesteckte bei der Abszisse 98 m und ist gegen-

über der letzteren um 6 cm auf 100 m Länge im positiven Sinn verdreht.

Das gezeigte Verfahren zur rein graphischen Auffindung der Funktionslinie ist schwerfällig. Bequemer ist es, zu diesem Zweck das graphische Verfahren durch Rechnung zu unterstützen.

Zieht man durch S eine beliebige Gerade $S - I$ und greift in der Ordinatenrichtung deren Entfernungen V von den gezeichneten Punkten ab, so wird für sie zwar $[V] = 0$, aber nicht $[VV] = \text{Min.}$ sein. Es ist vielmehr zu diesem Zwecke noch eine gewisse Verdrehung um den unbekannt Winkel ξ und um den Schwerpunkt S nötig. Diese Verdrehung ändert sämtliche Entfernungen V um den Betrag $x \cdot \xi$, wenn x die Entfernungen der Fußpunkte vom Schwerpunkt S darstellen. Es wird daher an Stelle von V der Abstand v der endgültigen Funktionslinie vom Fehlerbildpunkt treten, wo bei Einführung von Vorzeichen für die verschiedenen Richtungen von x , v , V und ξ allgemein gültig

$$v = V - x \xi$$

und wobei wir verlangen:

$$[v v] = \text{Min.}$$

Es muß demnach sein

$$[v v] \equiv [(V - x \xi)^2] = V_1^2 - 2 V_1 x_1 \xi + x_1^2 \xi^2 + \dots + V_n^2 - 2 V_n x_n \xi + x_n^2 \xi^2 = \text{Min.}$$

Die einzige Veränderliche ist ξ , und man hat für deren Berechnung aus

$$F(\xi) = [(V - x \xi)^2] = \text{Min.}:$$

$$\frac{dF}{d\xi} = 0 = -2 V_1 x_1 + 2 x_1^2 \xi - \dots - 2 V_n x_n + 2 x_n^2 \xi,$$

oder

$$\xi = \frac{2 V_1 x_1 + 2 V_2 x_2 + \dots + 2 V_n x_n}{2 x_1^2 + 2 x_2^2 + \dots + 2 x_n^2} = \frac{[V x]}{[x x]}.$$

Für die praktische Durchführung wird man natürlich nicht eine beliebige Gerade verwenden, von der aus der Verdrehungswinkel ξ berechnet wird, sondern eine Parallele zur

Aufnahmelinie durch den Schwerpunkt S . Damit wird allgemein gültig:

$$\xi = x - x_s = x - \frac{[x]}{n}$$

$$V = y - y_s = y - \frac{[y]}{n}$$

Man hat also nur die Durchschnittswerte der Abszissen und der Ordinaten je von den letzteren abzuziehen, ein Verfahren, das wir noch des öfteren, z. B. bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Rückwärtseinschnitt anwenden werden.

Die obige Tabelle liefert jetzt

Punkt Nr.	$\xi = x - x_s$ m		$V = y - y_s$ cm		$\xi \cdot V$ (Rechen- schieber)		$\xi \xi$
	+	-	+	-	+	-	
1		86,03		8,44	725		7 401
2		82,96		8,44	700		6 882
3		67,44		4,44	299		4 548
4		45,12	3,56			161	2 036
5	0,24		5,56		1		0
6	21,07		2,56		54		444
7	72,86			2,44		178	5 309
8	81,97		4,56		374		6 719
9	105,38		7,56		797		11 105
	281,52	281,55	23,80	23,76	2950	339	44 444

(3)

(4)

+ 2611

(Abrundungsfehler) oder 26,11 für v in m.

$$\xi_{\text{analytisch}} = + \frac{26,11}{44\,444} = + 0,000\,587,$$

also: nötige Verdrehung ξ in positivem Sinn um 5,9 cm auf 100 m.

Schnittpunkt der Sollinie mit der Abszisse vom Schwerpunkt S rückwärts um

$$\frac{100 \cdot 2,44}{5,87} = 41,5 \text{ m,}$$

d. h. bei Abszisse $139,98 - 41,5 = 98,5$ m.

Die Aufgabe hätte sich auch wie Nr. 7 nach der Methode der Ausgleichung direkter Beobachtungen behandeln lassen.

B. Auf rechnerischem Weg.

Zwischen den Beobachtungsgrößen L und den n Unbekannten X, Y, \dots mögen λ Beziehungen bestehen von der in L expliziten Form:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_r(x, y, z \dots) - L_r = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Ist die Zahl λ der mit kleinen Beobachtungsfehlern behafteten Beobachtungsgrößen L größer als diejenige der Unbekannten, so können die Gleichungen (25) nicht scharf erfüllt sein. Es muß vielmehr, um dies zu erreichen, jedem Beobachtungswert L ein kleiner unbekannter Verbesserungszuschlag v erteilt werden, womit die Gleichungen (25) übergehen in

$$(25a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} F_r(x, y, z \dots) - (L_r + v_r) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \\ \text{oder} \\ \left\{ \begin{array}{l} F_r(x, y, z \dots) - L_r = v_r \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Ersetzen wir der Bequemlichkeit der Rechnung sowohl, als (im Falle nicht linearer Form der bestehenden Beziehung F) der Möglichkeit der Reihenentwicklung wegen jede Unbekannte $X, Y \dots$ durch einen möglichst angenäherten Wert N_x, N_y und einen Zuschlag $x, y \dots$, so daß

$$X = N_x + x; \quad Y = N_y + y,$$

aus welchen mittels des Gaußschen Reduktionsverfahrens und in den Gaußschen Symbolen:

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] \equiv [bl \cdot 1] \\ [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] \equiv [bb \cdot 1] \\ [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] \equiv [bs \cdot 1] \text{ usw.} \\ [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bl \cdot 1] \equiv [cl \cdot 2] \\ [df \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bf \cdot 1] \equiv [df \cdot 2] \text{ usw.} \\ [ef \cdot 2] - \frac{[ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cf \cdot 2] \equiv [ef \cdot 3] \\ [fl \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cl \cdot 2] \equiv [fl \cdot 3] \text{ usw.} \\ [fl \cdot 3] - \frac{[df \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}[dl \cdot 3] \equiv [fl \cdot 4] \text{ usw.} \\ [fl \cdot 4] - \frac{[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]}[el \cdot 4] \equiv [fl \cdot 5] \text{ usw.} \end{array} \right.$$

ausgedrückt, die zuhinterst stehende Unbekannte sich ergibt:

im Falle einer einzigen Unbekannten:

$$(27) \text{ u. } (28) \quad x = -\frac{[al]}{[aa]}; \quad X = N_X + x; \quad [av] = 0$$

im Falle zweier Unbekannten:

$$(30) \text{ u. } (31) \quad x_2 = -\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}; \quad X_2 = N_{X_2} + x_2; \quad \begin{cases} [av] = 0 \\ [bv] = 0 \end{cases}$$

im Falle dreier Unbekannten:

$$(32) \text{ u. } (33) \quad x_3 = -\frac{[el \cdot 2]}{[ec \cdot 2]}; \quad X_3 = N_{X_3} + x_3; \quad \begin{cases} [av] = 0 \\ [bv] = 0 \\ [cv] = 0 \end{cases}$$

im Falle von vier Unbekannten:

$$(34) \text{ u. } (35) \quad x_4 = -\frac{[dl \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}; \quad X_4 = N_{X_4} + x_4; \quad \begin{cases} [av] = 0 \\ [bv] = 0 \\ [cv] = 0 \\ [dv] = 0 \end{cases} \text{ usw.}$$

Der mittlere Fehler der Beobachtungswerte L ist

$$(36) \quad m_L = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{\lambda - \varkappa}},$$

$$(38) \text{ u. } (39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{der mittlere Fehler der Unbekannten } X \text{ im Falle } \lambda = 1: \\ M_{X_1} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(\lambda - 1)[aa]}} \text{ und ihr Gewicht } P_X = [aa] \\ \text{der mittlere Fehler der Unbekannten } X_2 \text{ im Falle } \lambda = 2: \\ M_{x_2} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(\lambda - 2)[bb \cdot 1]}} \text{ und ihr Gewicht } P_{x_2} = [bb \cdot 1] \\ \text{der mittlere Fehler der Unbekannten } X_3 \text{ im Falle } \lambda = 3: \\ M_{x_3} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(\lambda - 3)[cc \cdot 2]}} \text{ und ihr Gewicht } P_{x_3} = [cc \cdot 2] \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

Durchgreifende **Rechenproben** erhalten wir durch Einführung der Summengrößen

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \dots + l_1 \\ s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \dots + l_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

womit die Koeffizienten der Normalgleichungen für sich die Gleichungen erfüllen müssen:

$$\begin{cases}
 [a a] + [a b] + [a c] + \dots + [a l] = [a s] \\
 [a b] + [b b] + [b c] + \dots + [b l] = [b s] \\
 \vdots \\
 [a l] + [b l] + [c l] + \dots + [l l] = [l s] \\
 [a s] + [b s] + [c s] + \dots + [l s] = [s s]
 \end{cases}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(41) \left\{ \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccc}
 \underline{[a a]} & [a b] & [a c] & \dots & [a l] \\
 & \downarrow & & & \downarrow \\
 \cdot & \underline{[b b]} & [b c] & \dots & [b l] \\
 \cdot & \cdot & \underline{[c c]} & \dots & [c l] \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \underline{[l l]}
 \end{array} & \begin{array}{c}
 \text{Probe} \\
 [a s] \\
 [b s] \\
 [c s] \\
 [l s] \\
 \hline
 [s s]
 \end{array}
 \end{array} \right.$$

Die Reduktion nach Gauß liefert daraus für die erste, zweite usw. Reduktionsstufe die Kontrollgleichungen:

$$\begin{cases}
 [b b \cdot 1] + [b c \cdot 1] + \dots + [b l \cdot 1] = [b s \cdot 1] \\
 [b c \cdot 1] + [c c \cdot 1] + \dots + [c l \cdot 1] = [c s \cdot 1] \\
 \vdots \\
 [b l \cdot 1] + [c l \cdot 1] + \dots + [l l \cdot 1] = [l s \cdot 1] \\
 [b s \cdot 1] + [c s \cdot 1] + \dots + [l s \cdot 1] = [s s \cdot 1]
 \end{cases}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42) \left\{ \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccc}
 \underline{[b b \cdot 1]} & [b c \cdot 1] & \dots & [b l \cdot 1] \\
 & & & \vdots \\
 \cdot & & & \underline{[l l \cdot 1]}
 \end{array} & \begin{array}{c}
 \text{Probe} \\
 [b s \cdot 1] \\
 [c s \cdot 1] \\
 [l s \cdot 1] \\
 \hline
 [s s \cdot 1]
 \end{array}
 \end{array} \right.$$

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} [c c \cdot 2] + \dots + [c l \cdot 2] = [c s \cdot 2] \\ \vdots \\ [c l \cdot 2] + \dots + [l l \cdot 2] = [l s \cdot 2] \\ [c s \cdot 2] + \dots + [l s \cdot 2] = [s s \cdot 2] \\ \text{oder abgekürzt geschrieben:} \\ \begin{array}{c|c} \underline{[c c \cdot 2]} \dots [c l \cdot 2] & \begin{array}{l} \text{Probe} \\ [c s \cdot 2] \end{array} \\ \vdots & \\ \cdot \dots \underline{[l l \cdot 2]} & [l s \cdot 2] \\ \hline & \underline{[s s \cdot 2]} \end{array} \end{array} \right.$$

und schließlich z. B. im Fall dreier Unbekannter

$$(44) \left\{ \begin{array}{l} [l l \cdot 3] = [l s \cdot 3] \\ [l s \cdot 3] = [s s \cdot 3] \end{array} \right\} \text{ oder abgekürzt } \underline{[l l \cdot 3]} \mid [l s \cdot 3] \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{= [v v]} \text{ geschrieben: } \cdot \mid \underline{[s s \cdot 3]}$$

Lassen sich zwischen den Unbekannten $X, Y \dots$ und den Beobachtungsgrößen L nur Beziehungen von **impliziter Form** aufstellen, wobei wegen der den Beobachtungswerten L anhaftenden Ungenauigkeiten entweder die rechten Seiten der Gleichungen statt des Wertes 0 die Werte $-w$ annehmen:

$$(25 a') \left\{ \begin{array}{l} F_r(L_1, L_2, \dots, L_\lambda, X, Y, Z, \dots) = -w_r \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

oder die Werte L der Beobachtungsgrößen in $(L + v)$ übergehen

$$(25 b') \left\{ \begin{array}{l} F_r(L_1 + v_1, (L_2 + v_2), \dots, (L_\lambda + v_\lambda), X, Y, Z, \dots) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

so liefert die Entwicklung nach Taylor nach vorgängiger Ersetzung der Unbekannten X durch $N_X + x$; Y durch $N_Y + y$ usw. die Gleichungen (25 c'):

$$F_r(L_1, L_2, \dots, L_\lambda, N_x, N_y, N_z, \dots) + \left\{ \frac{\partial F_r}{\partial L_1} v_1 + \frac{\partial F_r}{\partial L_2} v_2 + \dots + \frac{\partial F_r}{\partial L_\lambda} v_\lambda \right\} + \left\{ \frac{\partial F_r}{\partial N_X} x + \frac{\partial F_r}{\partial N_Y} y + \frac{\partial F_r}{\partial N_Z} z + \dots \right\} = 0$$

Für die zweite Klammer der linken Seite von Gleichung (25 c') liefert (25 a')

$$F_r(L_1, L_2, \dots, L_\lambda, X, Y, Z, \dots) \equiv \frac{\partial F_r}{\partial L_1} v_1 + \frac{\partial F_r}{\partial L_2} v_2 + \dots + \frac{\partial F_r}{\partial L_\lambda} v_\lambda = -w_r,$$

womit die Gleichungen (25 c') übergehen in die

Fehlergleichungen (25 e')

$$\frac{\partial F_r}{\partial N_X} x + \frac{\partial F_r}{\partial N_Y} y + \frac{\partial F_r}{\partial N_Z} z + \dots + F_r(L_1, L_2, \dots, L_\lambda, N_X, N_Y, N_Z, \dots) = w_r,$$

oder unter sinngemäßer Wiederverwendung der durch Gleichungen (25 d) eingeführten Symbole in abgekürzter Schreibweise:

$$(25 e') \left\{ \begin{array}{l} a_r x + b_r y + c_r z + \dots + l_r = w_r \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Die Weiterbehandlung muß wegen der Ungleichwertigkeit der Einflüsse w der Beobachtungsfehler v dem Kapitel 3 vorbehalten bleiben.

13. Beispiel (lineare Beziehungen zwischen den Unbekannten und den Beobachtungsgrößen): Zwischen vier von einem Punkte O ausgehenden Strahlen OA , OB , OC , OD werden sämtliche mögliche Winkel je mit

gleicher Genauigkeit gemessen (Winkelmessung in allen Kombinationen) und zwar:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $AOB = 106^{\circ} 52' 43''$ n. T. | 7) $BOD = 178^{\circ} 74' 13''$ n. T. |
| 2) $BOC = 99^{\circ} 78' 12''$ „ „ | 8) $BOA = 293^{\circ} 47' 50''$ „ „ |
| 3) $COD = 78^{\circ} 95' 97''$ „ „ | 9) $COA = 193^{\circ} 69' 29''$ „ „ |
| 4) $DOA = 114^{\circ} 73' 35''$ „ „ | 10) $COB = 300^{\circ} 21' 78''$ „ „ |
| 5) $AOC = 206^{\circ} 30' 68''$ „ „ | 11) $DOB = 221^{\circ} 25' 90''$ „ „ |
| 6) $AOD = 285^{\circ} 26' 60''$ „ „ | 12) $DOC = 321^{\circ} 04' 00''$ „ „ |

Welches sind deren ausgeglichene Werte?

Lösung: Zur gegenseitigen Festlegung von vier Strahlen genügen drei voneinander unabhängige Winkel. Die Zahl der Unbekannten ist also 3, diejenige der überschüssigen Stücke $12 - 3 = 9$ und die Zahl der Fehlergleichungen 12.

Als zu bestimmende Unbekannte wollen wir einführen

$$\begin{aligned} \text{den Winkel } AOB &= X, \\ & \text{„ } BOC = Y, \\ & \text{„ } COD = Z. \end{aligned}$$

Die in § 14 aufgestellte Normalform der Fehlergleichungen (s. Gleichung 25 a) ist im vorliegenden Fall einfach durch Gegenüberstellung der gesuchten Soll- und der beobachteten Ist-Werte zu erreichen:

Soll - Ist = Verbesserung.

Im Interesse bequemer Rechnung [also nicht (wie im Falle nicht-linearer Funktion) zur Linearmachung der Beziehungen (25)] führen wir auch hier Näherungswerte für die Unbekannten ein und setzen:

$$\begin{aligned} AOB &= X = N_X + x = 106^{\circ} 52' 43'' + x, \\ BOC &= Y = N_Y + y = 99^{\circ} 78' 12'' + y, \\ COD &= Z = N_Z + z = 78^{\circ} 95' 97'' + z. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir durch Subtraktion jedes gemessenen Winkelwertes je von dem durch entsprechende Zusammensetzung der Unbekannten gewonnenen Sollwerte die 12 Fehlergleichungen:

1) $x + 0 = v_1$	7) $+y + z - 4'' = v_7$
2) $y + 0 = v_2$	8) $-x + 7'' = v_8$
3) $z + 0 = v_3$	9) $-x - y + 16'' = v_9$
4) $-x - y - z + 13'' = v_4$	10) $-y + 10'' = v_{10}$
5) $+x + y - 13'' = v_5$	11) $-y - z + 1'' = v_{11}$
6) $+x + y + z - 8'' = v_6$	12) $-z + 3'' = v_{12}$

Die Koeffizienten der Unbekannten sind demnach alle gleich 1 oder 0. Zur bequemeren Rechnung ist es wünschenswert, daß auch die Absolutglieder l möglichst nahe dem Wert 1 liegen. Dies wird erreicht, wenn man als Einheit sowohl für die Absolutglieder l , als auch für die unbekanntes Zuschläge x, y, z statt der Sekunden Dekasekunden (Zehnersekunden) wählt. Damit erhält man tabellarisch angeordnet folgende Koeffizienten der Fehler- und der Normalgleichungen:

Rehler- gleichung	a	b	c	l	s	aa +	ab +	ac +	al -	as +	bb +	bc +	bl -	bs +	cc +	cl -	cs +	ll +	ls -	ss +
1	+1	0	0	0	+1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
4	-1	-1	-1	+1,3	-1,7	1	1	1	1,3	1,7	1	1	1,3	1,7	1	1,3	1,7	1,69	2,21	2,89
5	+1	+1	0	-1,3	+0,7	1	1	0	1,3	0,7	1	0	1,3	0,7	0	0	0	1,69	0,91	0,49
6	+1	+1	+1	-0,8	+2,2	1	1	1	0,8	2,2	1	1	0,8	2,2	1	0,8	2,2	0,64	1,76	4,84
7	0	+1	+1	-0,4	+1,6	0	0	0	0	0	1	1	0,4	1,6	1	0,4	1,6	0,16	0,64	2,56
8	-1	0	0	+0,7	-0,3	1	0	0	0,7	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0,49	0,21	0,09
9	-1	-1	0	+1,6	-0,4	1	1	0	1,6	0,4	1	0	1,6	0,4	0	0	0	2,56	0,64	0,16
10	0	-1	0	+1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
11	0	-1	-1	+0,1	-1,9	0	0	0	0	0	1	1	0,1	1,9	1	0,1	1,9	0,01	0,19	3,61
12	0	0	-1	+0,3	-0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,3	0,7	0,09	0,21	0,49
	[]=0	0	0	+2,5	+2,5	6	4	2	5,7	6,3	8	4	6,5	9,5	6	2,9	9,1	8,33	6,77	18,13

Ausrechnung mittels Rechenschiebers:

Koeffiz. d. Normalgleichungen u. Reduktion					Probe
<u>+6</u>	+4	+2	-5,7	+ 6,3	+ 6,3
	(-2 $\frac{2}{3}$)	(-1 $\frac{1}{2}$)	(+3,8)	(- 4,2)	
.	<u>+8</u>	+4	-6,5	+ 9,5	+ 9,5
		(- $\frac{2}{3}$)	(+1,9)	(- 2,1)	
.	.	<u>+6</u>	-2,9	+ 9,1	+ 9,1
			(-5,42)	(+ 5,98)	
.	.	.	<u>+8,33</u>	- 6,77	- 6,77
				(- 6,62)	
.	.	.	.	<u>+18,13</u>	+18,13

1. Reduktionsstufe und Reduktion				Probe
<u>+5$\frac{1}{2}$</u>	+2 $\frac{2}{3}$	-2,7	+ 5,3	+ 5,3
	(-1 $\frac{1}{2}$)	(+1,35)	(- 2,65)	
.	<u>+5$\frac{1}{2}$</u>	-1,0	+ 7,0	+ 7,0
	.	(-1,37)	(+ 2,68)	
.	.	<u>+2,91</u>	- 0,79	- 0,79
			(- 5,27)	
.	.	.	<u>+11,51</u>	+11,51

2. Reduktionsstufe und Reduktion			Probe
<u>+4</u>	+0,35	+ 4,35	+ 4,35
	(-0,02)	(- 0,38)	
.	<u>+1,54</u>	+ 1,89	+ 1,89
		(- 4,74)	
.	.	<u>+6,24</u>	+ 6,24

Hieraus

$$z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = -\frac{0,35}{4} = -0,09 \text{ Dekasekd.} = -0,9''$$

$$Z = 78^\circ 95' 97'' - 0,9'' = 78^\circ 95' 96,1''$$

$$P_2 = [cc \cdot 2] = 4.$$

3. Reduktionsstufe und Schlußprobe $[vv]$.

$$\begin{array}{r} \underline{+1,52} \\ \quad \cdot \\ \underline{+1,50} \end{array}$$

Mittlerer Fehler eines durch Messung erhaltenen Winkelwertes

$$m = \pm \sqrt{\frac{1,51}{9}} = \pm 0,41 \text{ Dekasekd.} = \pm 4,1''$$

mittlerer Fehler des Winkels Z

$$\div \cdot M_2 = \frac{m}{\sqrt{P_2}} = \pm \frac{4,1}{2} = \pm 2''$$

Zum Zweck der Berechnung der vorletzten Unbekannten y erfolgt Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen und Wiederholung des Verfahrens:

Koeffiz. der Normalgleichungen u. Reduktion					Probe
<u>+6</u>	+2	+4	-2,9	+ 9,1	+ 9,1
.	(- $\frac{2}{3}$)	(-1 $\frac{1}{3}$)	(+ 0,97)	(- 3,0)	
.	<u>+6</u>	+4	-5,7	+ 6,3	+ 6,3
.	.	(-2 $\frac{2}{3}$)	(+ 1,93)	(- 6,07)	
.	.	<u>+8</u>	-6,5	+ 9,5	+ 9,5
.	.	.	(-1,40)	(+ 4,40)	
.	.	.	<u>+8,33</u>	- 6,77	- 6,77
.	.	.	.	(-13,8)	
.	.	.	.	<u>+18,13</u>	+18,13

1. Reduktionsstufe und Reduktion

1. Reduktionsstufe und Reduktion				Probe
<u>+5$\frac{1}{3}$</u>	+2 $\frac{2}{3}$	-4,73	+ 3,27	+3,3
.	(-1 $\frac{1}{3}$)	(+ 2,37)	(-1,64)	
.	<u>+5$\frac{1}{3}$</u>	-4,57	+ 3,43	+3,43
.	.	(-4,20)	(+ 2,90)	
.	.	<u>+6,93</u>	- 2,37	-2,37
.	.	.	(-2,00)	
.	.	.	<u>+4,33</u>	+4,33

2. Reduktionsstufe und Reduktion

2. Reduktionsstufe und Reduktion				Probe
.	<u>+4</u>	-2,20	+1,80	+1,79
.	.	(-1,21)	(+ 0,99)	
.	.	<u>+2,73</u>	+ 0,53	+0,53
.	.	.	(-0,81)	
.	.	.	<u>+2,33</u>	+2,33

Hieraus

$$y = -\frac{[bl \cdot 2]}{[bb \cdot 2]} = -\frac{-2,20}{4} = +0,55 \text{ Dekasekd.} = +5,5'',$$

also

$$Y = 99^\circ 78' 12'' + 5,5'' = 99^\circ 78' 17,5''$$

$$P_y = [bb \cdot 2] = 4.$$

3. Reduktionsstufe und Schlußprobe $[vv]$.

$$\begin{array}{r} +1,52 \\ +1,52 \\ \hline +1,52 \end{array}$$

in Übereinstimmung mit der Reduktion für Z .

Die Berechnung ergibt für die Winkel y und z dasselbe Gewicht 4. Dies war angesichts der symmetrischen Anordnung der Winkelbeobachtung vorauszusehen, denn jeder der drei gesuchten Winkel erscheint

durch die zwölf gemessenen Winkel viermal bestimmt. Wir sind aber dadurch der nochmaligen Umstellung und Reduktion für die Berechnung von x entbunden. Diese letzte Unbekannte x werden wir durch Einsetzung von y und z in eine der Normalgleichungen ermitteln.

Z. B. liefert die erste Normalgleichung:

$$6x + 4y + 2z - 5,7 = 0$$

$$x = \frac{5,7 - 4 \cdot 0,55 - 2 \cdot (-0,09)}{6}$$

$$= \frac{5,7 - 2,2 + 0,18}{6} = \frac{3,68}{6}$$

$$= +0,61 \text{ Dekasekd.} = +6,1''$$

und

$$X = 106^\circ 52' 43'' + 6,1'' = 106^\circ 52' 49,1''$$

$$P_X = 4$$

$$M_X = \pm 2''. \quad (\text{Fortsetzung s. S. 46 oben.})$$

Fehlergleichung	v		av		bv		cv		vv
	+	-	+	-	+	-	+	-	
1	0,61		0,61		0		0		0,37
2	0,55		0		0,55		0		0,30
3		0,09	0		0			0,09	0,01
4	0,23			0,23		0,23		0,23	0,05
5		0,14		0,14		0,14	0		0,02
6	0,27		0,27		0,27		0,27		0,07
7	0,06		0		0,06		0,06		0
8	0,09			0,09	0			0	0,01
9	0,44			0,44		0,44		0	0,19
10	0,45		0			0,45		0	0,20
11		0,36	0		0,36		0,36		0,13
12	0,39		0		0			0,39	0,15
			[] = 0,88	0,90	1,24	1,26	0,69	0,71	1,50
			0,02		0,02		0,02		1,52

(Abrundungsdifferenzen)

Wir haben also als Schlußresultat:

$$\left. \begin{aligned} X &= 106^{\circ} 52' 49,1'' \pm 2'' \\ Y &= 99^{\circ} 78' 17,5'' \pm 2'' \\ Z &= 78^{\circ} 95' 96,1'' \pm 2'' \end{aligned} \right\} P_X = P_Y = P_Z = 4.$$

Eine durchgreifende Probe erhalten wir schließlich durch Einsetzung der gefundenen Werte für x , y , z in die Fehlergleichungen. Die berechneten v müssen alsdann den Gleichungen (33) entsprechen:

$$[av] = 0, \quad [bv] = 0, \quad [cv] = 0,$$

und es muß überdies

$$[vv] = 1,52 \quad (\text{s. S. 45 unten}).$$

Anmerkung: Hätten wir vorgängig den Beobachtungswert jedes Winkels mit demjenigen seines Implementes zu einem Werte vereinigt (gemittelt), so wäre die Zahl der Fehlergleichungen auf die Hälfte reduziert, das Gewicht jedes so gewonnenen Winkels auf das Doppelte gesteigert worden. Im übrigen wäre der Weg der Rechnung derselbe geblieben.

14. Beispiel (für nichtlineare Form der Beziehungen): Gegeben sind die nachfolgend aufgeführten Koordinaten der 5 auf dem Gelände vermarkten Festpunkte A , B , C , D , E , von denen ausgehend die unten angegebenen Horizontalentfernungen L nach einem Geländepunkt P gemessen wurden. Die Koordinaten X und Y des letzteren sollen samt ihren mittleren Fehlern M_X und M_Y berechnet werden:

x	y	
$A + 3140,22$	$+ 2148,42$	$L_A \equiv AP = 169,60$
$B + 3310,82$	$+ 2084,43$	$L_B \equiv BP = 166,58$
$C + 3258,37$	$+ 1833,38$	$L_C \equiv CP = 169,61$
$D + 3073,84$	$+ 1844,23$	$L_D \equiv DP = 173,82$
$E + 3010,75$	$+ 2012,47$	$L_E \equiv EP = 170,55$

Auflösung: Zunächst haben wir Beziehungen zwischen den gesuchten Koordinaten und den gemessenen Strecken L aufzustellen von der Form $F(x, y) - L = 0$, deren rechte Seite wegen der vorhandenen Überbestimmung übergeht in die Verbesserung v der jeweiligen gemessenen Strecke, so daß wir die Fehlergleichungen erhalten:

$$(25a) \quad F(x, y) - L = v,$$

oder speziell:

$$\begin{aligned} \sqrt{(X - x_A)^2 + (Y - y_A)^2} - L_A &= v_A \\ \vdots & \\ \sqrt{(X - x_E)^2 + (Y - y_E)^2} - L_E &= v_E, \end{aligned}$$

	A		B		C		D		E	
x_A, x_B, \dots, x_E	+	3140,22	+	3310,82	+	3258,37	+	3073,84	+	3010,75
y_A, y_B, \dots, y_E	+	2148,42	+	2084,43	+	1833,38	+	1844,23	+	2012,47
$N_x - x_A, B, \dots, E$	+	38,18	-	132,42	-	79,97	+	104,56	+	167,65
$N_y - y_A, B, \dots, E$	-	164,92	-	100,93	+	150,12	+	139,27	-	28,97
$\log(N_x - x_A, B, \dots, E)$	1	58184	2	12195 <i>n</i>	1	90293 <i>n</i>	2	01937	2	22440
$\log \cos \varphi$	9	35323	9	90054 <i>n</i>	9	67225 <i>n</i>	9	77844	9	99861
$\log \sin \varphi$	9	98866 <i>n</i>	9	78261 <i>n</i>	9	94576	9	90293	9	23116 <i>n</i>
$\log(N_y - y_A, B, \dots, E)$	2	21727 <i>n</i>	2	00402 <i>n</i>	2	17644	2	14386	1	46195 <i>n</i>
$\log \cotg \varphi$	9	36457 <i>n</i>	0	11793	9	72649 <i>n</i>	9	87551	0	76245 <i>n</i>
$\log(L_A, B, \dots, E \text{ nach } N_P)$	2	22861	2	22141	2	23068	2	24093	2	23079
$L(A, B, \dots, E \text{ nach } N_P)$		169,28		166,50		170,09		174,15		170,14
$L \text{ soll (gemessen)}$		169,60		166,58		169,61		173,82		170,55
$l = \frac{L_{\text{aus N\u00e4herung berechnet}}}{L_{\text{gemessen}}}$	-	<u>0,32</u>	-	<u>0,08</u>	+	<u>0,48</u>	+	<u>0,33</u>	-	<u>0,41</u>
$a = \cos \varphi$	+	<u>0,23</u>	-	<u>0,80</u>	-	<u>0,47</u>	+	<u>0,60</u>	+	<u>0,99</u>
$b = \sin \varphi$	-	<u>0,97</u>	-	<u>0,61</u>	+	<u>0,88</u>	+	<u>0,80</u>	-	<u>0,17</u>

Anschrieb und Reduktion der Normalgleichungen:

<u>+2,25</u>	+0,16	-0,44	+1,97	
.	(-0,01)	(+0,03)	(-0,14)	
.	<u>+2,76</u>	+1,12	+4,04	
.	.	(-0,09)	(+0,38)	
.	.	<u>+0,62</u>	+1,30	
			(-1,72)	
.	.	.	<u>+7,31</u>	soll +7,30

1. Reduktionsstufe.

<u>+2,75</u>	+1,15	+3,90	soll +3,90
.	(-0,48)	(-1,63)	
.	<u>+0,53</u>	+1,68	soll +1,68
		(-5,52)	
.	.	<u>+5,58</u>	soll +5,59

Hieraus

$$y = -\frac{1,15}{2,75} = -0,42 \text{ m}$$

und

$$Y = +1983,50 - 0,42 = +1983,08 .$$

2. Reduktionsstufe.

<u>+0,05</u>	+0,05
.	<u>+0,06</u>

somit

$$[vv] = [ll \cdot 2] = 0,05$$

und

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{\lambda - z}} = \pm \sqrt{\frac{0,05}{3}} = \pm 0,13 \text{ m},$$

$$M_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}} = \sqrt{\frac{0,05}{3 \cdot 2,75}} = \frac{0,13}{\sqrt{2,75}} = \pm 0,08 .$$

Umgestellt (zur Bestimmung von X).

<u>+2,76</u>	+0,16	+1,12	+4,04	
.	(-0,01)	(-0,06)	(-0,23)	
.	<u>+2,25</u>	-0,44	+1,97	
.	.	(-0,41)	(-1,64)	
.	.	<u>+0,62</u>	+1,30	
			(-5,91)	
.	.	.	<u>+7,31</u>	soll +7,30

1. Reduktionsstufe.				
<u>+2,24</u>	-0,50	+1,74	soll	+ 1,74
.	(-0,12)	(+0,39)		
.	<u>+0,17</u>	-0,33	soll	- 0,34
.	.	(-1,34)		
.	.	<u>+1,41</u>	soll	+ 1,40

Hieraus:

$$x = -\frac{-0,50}{2,24} = +0,23$$

und

$$X = +3178,40 + 0,23 = +3178,63.$$

2. Reduktionsstufe.

<u>+0,05</u>	+0,06
.	<u>+0,05</u>

$$[vv] = [11 \cdot 2] = +0,05;$$

somit

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{0,05}{3}} = \pm 0,13 \text{ (wie oben), } M_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}} = \frac{0,13}{\sqrt{2,24}} = \pm 0,09.$$

15. Beispiel: Die mit gewöhnlichen Hilfsmitteln (Zirkel, Transversalmaßstab, Schiebedreieck) erreichbare Zeichengenauigkeit ist aus den nachfolgenden rechtwinkligen Koordinaten einer Anzahl beliebiger Punkte zu berechnen, welche in bezug auf zwei beliebige Koordinatenachsen im Maßstab 1:1000 abgegriffen wurden:

Punkt Nummer	Koordinaten in bezug auf das System:			
	A	B		
	X	Y	x	y
1	— 29,70	— 31,05	— 26,55	+ 36,20
2	+ 8,64	+ 17,66	— 13,00	+ 96,64
3	+ 68,80	— 30,02	+ 61,80	+ 79,78
4	+ 133,88	+ 7,38	+ 104,12	+ 141,74
5	+ 42,80	— 125,26	+ 79,58	— 17,40
6	— 46,62	— 87,20	— 17,58	— 21,92

Lösung: Formt man die Koordinaten aus dem einen System („Nebensystem“, z. B. B) ins andere („Hauptsystem“, z. B. A) um, so zeigen die Abweichungen v der umgeformten von den entsprechenden direkt

abgegriffenen Kōordinaten den Einfluß beider zur Wirkung gelangender Abgreiffehler, also $\frac{v}{\sqrt{2}}$ denjenigen einmaligen Eingreifens.

Zur Koordinatenumformung dienen die Gleichungen:

$$(a) \quad \begin{cases} F(a, b, \varphi) \equiv X = a + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ F'(a, b, \varphi) \equiv Y = b + x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

deren wir ebenso viele Paare haben, als Punkte benutzt wurden (hier also 6) und in denen die 3 Größen a , b und φ (die Koordinaten des Ursprungs und der Richtungswinkel φ der Abszissenachse vom System B in bezug auf das System A) zunächst unbekannt und durch Ausgleichung zu ermitteln sind. Am bequemsten ergeben sich a und b , wenn wir den Ursprung des Nebensystems in einen der benutzten Punkte (z. B. 1) unter entsprechender Parallelverschiebung der Achse B verlegen. Zu diesem Zweck haben wir lediglich sämtliche Koordinaten x und y dieses Systems um $x_1 = -26,55$ bzw. $y_1 = +36,20$ zu reduzieren, wobei wir gleichzeitig als Näherungswerte für a und b erhalten:

$$N_a = -29,70, \quad N_b = -31,05.$$

Einen Näherungswert N_φ für den Verdrehungswinkel φ erhalten wir als Unterschied beider Richtungswinkel φ_H und φ_N der Verbindungsstrecke zweier beliebiger von den 6 benutzten Punkten (z. B. 4 und 6):

$$N_\varphi = \varphi_H - \varphi_N = 371^\circ 43',$$

(siehe Abteilung 1 der Lösung). Den Gleichungen (a) geben wir nun die Form der Festergleichungen:

$$(b) \quad \begin{cases} F(a, b, \varphi) - X \equiv a + x \cos \varphi - y \sin \varphi - X = v, \\ F'(a, b, \varphi) - Y \equiv b + x \sin \varphi + y \cos \varphi - Y = v', \end{cases}$$

welche wir durch Einführung der Näherungswerte N_a, N_b, N_φ , denen die noch unbekannteren Zuschläge $da, db, d\varphi$ zu erteilen sind, reduzieren. Die allgemeine Form der reduzierten Fehlergleichungen nimmt damit im vorliegenden Fall folgende Gestalt an:

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db + \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi + \{F(N_a, N_b, N_\varphi) - X\} \right\} = v, \\ \left\{ \frac{\partial F'}{\partial a} da + \frac{\partial F'}{\partial b} db + \frac{\partial F'}{\partial \varphi} d\varphi + \{F'(N_a, N_b, N_\varphi) - Y\} \right\} = v', \end{cases}$$

oder, unter Ausführung der partiellen Ableitungen:

$$(c) \quad \begin{cases} \left\{ da - (x \sin \varphi + y \cos \varphi) d\varphi + \{F(N_a, N_b, N_\varphi) - X\} \right\} = v, \\ \left\{ db + (x \cos \varphi - y \sin \varphi) d\varphi + \{F'(N_a, N_b, N_\varphi) - Y\} \right\} = v', \\ \left\{ da + (b - Y) d\varphi + \{F(N_a, N_b, N_\varphi) - X\} \right\} = v, \\ \left\{ db + (X - a) d\varphi + \{F'(N_a, N_b, N_\varphi) - Y\} \right\} = v'. \end{cases}$$

Zum Zweck der Ausrechnung der Absolutglieder

$$(N_a, N_b, N_\varphi) - X \quad (\text{bzw. } F'(N_a, N_b, N_\varphi) - Y)$$

muß nun unter Benutzung der Näherungswerte N_a, N_b, N_φ die Koordinatenumformung durchgeführt werden (siehe Abteilung 2, S. 53). Damit erhalten wir dann die in Abteilung 3 unten eingetragenen Werte.

Die Koeffizienten der Fehlergleichungen und die Absolutglieder sind sehr ungleiche Zahlen. Dadurch wird die Weiterbehandlung erschwert. Um dem abzuhelfen, drücken wir die Absolutglieder und damit sämtliche Streckenmaße statt in m in dm aus. Dadurch werden allerdings auch die Koeffizienten des bisher in analytischem Maß ausgedrückten Winkels $d\varphi$ je 10 mal größer. Wir wählen daher als neue Einheit für diesen unbekanntem Winkel 10^{er}-Minuten, wodurch auch die zugehörigen Koeffizienten 10^{er}-Minuten, das ist 636,6 mal kleiner werden. Damit erhalten wir neue Koeffizienten und Absolutglieder (Abteilung 4, S. 54).

Abteilung 1. Berechnung von N_φ .

Punkt	A. Hauptsystem			B. Nebensystem				
	X	Y		log	x	y	log	
A=4	+133,88	+ 7,38	ΔY	1.97580 n	+104,12	+141,74	Δy	2.21394 n
B=6	- 46,62	-87,20			- 17,58	- 21,92		
$\Delta X, \Delta Y$	-180,50	-94,58	ΔX	2.25648 n	-121,70	-163,66	Δx	2.08529 n
$\varphi_H = 230^\circ 72' 65''$ n. T.	tg φ_H			9.71932	$\varphi_N = 259^\circ 29' 43''$		tg φ_N	0.12865

$$N_\varphi = \varphi_H - \varphi_N = 371^\circ 43' 22''$$

$$\text{oder genähert} = 371^\circ 43' \text{ n. T.}$$

Abteilung 3.

Koeffizienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen.

(l und l' entnommen der Abteilung 2, S. 53.)

Nr. Pkt.	Abszissenfunktion F				Pkt. Nr.	Ordinatenfunktion F'			
	Koeffizienten für			Absolutglieder		Koeffizienten für			Absolutglieder
	da	db	$d\varphi$	l		da	db	$d\varphi$	l
1	+1	0	0	0	1	0	+1	0	0
2	+1	0	-48,71	+0,09	2	0	+1	+ 38,34	-0,14
3	+1	0	- 1,03	0	3	0	+1	+ 98,50	-0,10
4	+1	0	-38,43	-0,07	4	0	+1	+163,58	-0,04
5	+1	0	+94,21	-0,14	5	0	+1	+ 72,50	-0,13
6	+1	0	+56,15	-0,22	6	0	+1	- 16,92	-0,11

(Fortsetzung s. S. 55.)

Abteilung 4.

Pkt. Nr.	Koeffizienten der reduzierten Fehler- gleichungen für		Absolut- glied l bzw. l'	ξ	Koeffizienten der Normalgleichungen										$\xi\xi$ +	
	da (= $2a$)	db (= $2b$)			$d\varphi$ (= ξ)	$\eta\eta$ +	$\eta\eta$	$\eta\xi$	ηl +	$\eta\xi$ +	ηl	$\xi\xi$ +	$(\xi + l)^2$ +	ll +		
1	+1	0	0	+1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000
2	+1	0	-0,76	+1,14	1	0	-0,76	+0,9	0	0	0	0	0,5776	0,0196	0,8100	1,2996
3	+1	0	-0,02	+0,98	1	0	-0,02	0	0	0	0	0	0,0004	0,0004	0	0,9604
4	+1	0	-0,60	-0,30	1	0	-0,60	-0,7	0	0	0	0	0,3600	1,6900	0,4900	0,0900
5	+1	0	+1,48	-1,08	1	0	+1,48	-1,4	0	0	0	0	2,1904	0,0064	1,9600	1,1664
6	+1	0	+0,88	-0,32	1	0	+0,88	-2,2	0	0	0	0	0,7744	1,7424	4,8400	0,1024
1'	0	+1	0	+1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1,0000
2'	0	+1	+0,60	+0,2	0	0	0	0	1	+0,60	-1,4	0,3600	0,6400	1,9600	0,4000	0,0400
3'	0	+1	+1,55	+1,55	0	0	0	0	1	+1,55	-1,0	2,4025	0,3025	1,0000	2,4025	0,0000
4'	0	+1	+2,58	+3,18	0	0	0	0	1	+2,58	-0,4	6,6564	4,7524	0,1600	10,1124	0,0000
5'	0	+1	+1,14	+0,84	0	0	0	0	1	+1,14	-1,3	1,2996	0,0256	1,6900	0,7056	0,0000
6'	0	+1	-0,27	-0,37	0	0	0	0	1	-0,27	-1,1	0,0729	1,8769	1,2100	0,1369	0,0000
[] =	+6	+6	+6,58	+9,98	+6	0	+0,98	-3,4	+6	+5,60	-5,20	14,6942	11,0562	14,1200	19,0162	0,0000

[ll] = 14,1200

28,8142

$$\begin{aligned} & - 17,7580 = 2 [\xi l] \\ & - 8,8790 = [\xi l] \end{aligned}$$

Koeffizienten und Reduktion der Normalgleichungen.

<u>+6</u>	0	+ 0,98	- 3,40	+ 3,58	
	(0)	(0)	(0)	(0)	
•	<u>+6</u>	+ 5,60	- 5,20	+ 6,40	
		(- 0,16)	(+ 0,56)	(- 0,58)	
•	•	<u>+14,69</u>	- 8,88	+12,39	
			(- 1,93)	(+ 2,03)	
•	•	•	<u>+14,12</u>	- 3,36	
				(- 2,14)	
•	•	•	•	<u>+19,01</u>	soll +19,02
1. Reduktionsstufe.					
<u>+6</u>	+ 5,60	- 5,20	+ 6,40	soll + 6,40	
	(- 5,22)	(+ 4,85)	(- 5,97)		
•	<u>+14,53</u>	- 8,32	+11,81	soll +11,81	
		(- 4,51)	(+ 5,54)		
•	•	<u>+12,19</u>	- 1,33	soll - 1,33	
				(- 6,83)	
•	•	•	<u>+16,88</u>	soll +16,87	
2. Reduktionsstufe.					
	<u>+9,31</u>	- 3,47	+ 5,84	soll + 5,84	
		(- 1,29)	(+ 2,18)		
•		<u>+7,68</u>	+ 4,21	soll + 4,21	
				(- 3,66)	
•	•	•	<u>+10,05</u>	soll +10,05	
3. Reduktionsstufe.					
	<u>+6,39</u>		+ 6,39		
			<u>+6,39</u>		

$$m_{\text{vom-Auftragen + Abgreifen}} = \pm \sqrt{\frac{6,39}{9}} = \pm 0,8 \text{ dm} = \pm 0,08 \text{ m}$$

$$m_{\text{Auftragen}} = \frac{0,08}{\sqrt{2}} = \underline{0,06 \text{ m}}$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Will man noch die Koordinatenumformung selbst endgültig durchführen, so bedarf es zunächst der Bestimmung der endgültigen Werte für a , b und φ , deren letzterer samt seinem Gewicht und mittlerem Fehler sich aus vorstehender Reduktion wie folgt ergibt:

$$d\varphi = -\frac{-3,47}{9,31} = +0,372 \text{ Dekaminuten}, \quad P_{\varphi} = 9,31,$$

$$m\varphi = \pm \sqrt{\frac{6,39}{9 \cdot 9,31}} = 0,28 \text{ Dekaminuten}, \quad = \pm 2,8 \text{ Minuten.}$$

also $\varphi = 371^{\circ} 43' + 3' 72'' = 371^{\circ} 46' 72'' \pm 2' 80''$.

Umsetzung der Koeffizienten ergibt:

<u>+14,69</u>	+0,98	+5,60	- 8,88	<u>+12,39</u>
.	(- 0,06)	(- 0,37)	(+ 0,59)	(- 0,83)
.	<u>+6</u>	0	- 3,40	+ 3,58
.	.	(- 2,14)	(+ 3,38)	(- 4,73)
.	.	<u>+6</u>	- 5,20	+ 6,40
.	.	.	(- 5,37)	(+ 7,50)
.	.	.	<u>+14,12</u>	- 3,36
				(- 10,44)
.	.	.	.	<u>+19,01</u>

1. Reduktionsstufe.

<u>+5,94</u>	- 0,37	- 2,81	+ 2,76	soll + 2,76
.	(- 0,02)	(- 0,17)	(+ 0,17)	
.	<u>+3,86</u>	- 1,82	+ 1,67	soll + 1,67
.	.	(- 1,33)	(+ 1,31)	
.	.	<u>+8,75</u>	+ 4,12	soll + 4,14
				(- 1,28)
.	.	.	<u>+8,55</u>	soll + 8,57

2. Reduktionsstufe.

<u>+3,84</u>	- 1,99	+ 1,85	soll + 1,84	
.	(- 1,03)	(+ 0,96)		
.	<u>+7,42</u>	+ 5,43	soll + 5,43	
				(- 0,88)
.	.	<u>+7,28</u>	soll + 7,27	

3. Reduktionsstufe.

<u>+6,39</u>	+ 6,39
	<u>+6,39</u>

$$db = - \frac{-1,99}{3,84} = + 0,51 \text{ dm} = + 0,05 \text{ m}$$

$$P_b = 3,84$$

$$m_b = \pm \sqrt{\frac{6,39}{9 \cdot 3,84}} = 0,4 \text{ dm} = \pm 4 \text{ cm}$$

(Max.-Fehler = 12 cm.)

$$b = - 31,05 + 0,05 = - 31,00 \pm 0,04 .$$

Nochmals umgesetzt:

<u>+6</u>	+ 5,60	0	- 5,20		+ 6,40
.	(- 5,28)	(0)	(+ 4,85)		(- 5,97)
.	<u>+14,60</u>	+0,98	- 8,88		+12,39
.	.	(0)	(0)		(0)
.	.	<u>+6</u>	- 3,40		+ 3,58
.	.	.	(- 4,51)		(+ 5,55)
.	.	.	<u>+14,12</u>		- 3,36
<hr/>					(- 6,83)
.	.	.	.		<u>+19,01</u>

1. Reduktionsstufe.

<u>+9,46</u>	+0,98	- 4,03		+ 6,41	soll + 6,42
.	(- 0,10)	(+ 0,42)		(- 0,67)	
.	<u>+6</u>	- 3,40		+ 3,58	
.	.	(- 1,72)		(+ 2,74)	
.	.	<u>+9,61</u>		+ 2,18	soll + 2,19
<hr/>					(- 4,36)
.	.	.		<u>+12,17</u>	soll +12,18

2. Reduktionsstufe.

<u>+5,90</u>	- 2,98		+ 2,92	soll + 2,91	
.	(- 1,51)		(+ 1,48)		
.	<u>+7,89</u>		+ 4,91	soll + 4,92	
<hr/>					(- 1,45)
.	.		<u>+7,83</u>	soll + 7,81	

3. Reduktionsstufe.

<u>+6,38</u>		+ 6,39
.		<u>+6,38</u>

$$da = -\frac{-2,98}{5,90} = +0,51 \text{ dm} = +0,05 \text{ m}$$

daraus

$$a = -29,70 + 0,05 = -29,65 \text{ m.}$$

$$P_a = 5,90$$

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{6,39}{9 \cdot 5,90}} = 0,35 \text{ dm} = \pm 3,5 \text{ cm}$$

(Max.-Fehler 10,5 cm.)

$$a = -29,70 + 0,05 = -29,65 \pm 0,035 .$$

Zur Probe kann nun mit den ausgeglichenen Werten von a , b , φ die Umformung wiederholt durchführen (s. Abteilung 5).

3. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

Kommen den λ Beobachtungswerten L verschieden-große mittlere Fehler m und daher verschiedene Gewichte p zu, und bezeichnen wir die an ihnen anzubringenden Verbesserungs-schläge wieder mit v , so sind die Unbekannten X, Y, \dots so auszuwählen, daß die zwischen ihnen und den verbesserten Beobachtungswerten $L + v$ festgestellten Beziehungen streng erfüllt werden und gleichzeitig (17) $[p v v] = \text{Min.}$ ist. Unter Wiederverwendung bzw. Erweiterung der Bezeichnungen und Symbole des 2. Kapitels, wodurch letztere z. B. folgende Form annehmen:

$$(29a) \quad [p d l \cdot 3] = [p d l \cdot 2] - \frac{[p c d \cdot 2]}{[p c c \cdot 2]} [p c l \cdot 2] \text{ usw.}$$

ergeben sich daraus für den Fall expliziter Form der Fehlergleichungen [(s. Gleichungen (25) und (25a)] die Normalgleichungen:

$$(26a) \quad \begin{cases} [p a a]x + [p a b]y + [p a c]z + \dots + [p a l] = 0 \\ [p a b]x + [p b b]y + [p b c]z + \dots + [p b l] = 0 \\ [p a c]x + [p b c]y + [p c c]z + \dots + [p c l] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

woraus beispielsweise für den Fall der Bestimmung von 4 Unbekannten wird:

$$(34a) \quad x_4 = - \frac{[p d l \cdot 3]}{[p d d \cdot 3]}$$

$$(35 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} [p a v] = 0 \\ \vdots \\ [p d v] = 0 \end{array} \right\}$$

$$(37 d) \quad [p l l \cdot 4] = [p v v].$$

Wir erhalten jetzt für die **mittleren Fehler nach der Ausgleichung** folgende Ausdrücke:

mittlerer Fehler der Gewichtseinheit:

$$(36 a) \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{\lambda - 4}},$$

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht p :

$$(36 b) \quad m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{(\lambda - 4)p}},$$

mittlerer Fehler der rechtsstehenden Unbekannten:

$$(38 a) \quad M = \pm \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{[p d d \cdot 3](\lambda - 4)}},$$

Gewicht der bei der Reduktion jeweils rechtsstehenden Unbekannten:

$$(39 a) \quad P_X = [p d d \cdot 3].$$

Wurden die Beziehungen zwischen den Beobachtungsgrößen L und den Unbekannten $X \dots$ und damit die Fehlergleichungen nach Gleichung (25') bzw. (25 a') in impliziter Form aufgestellt:

$$(25') \quad \left\{ \begin{array}{l} F_r(L_1, L_2, \dots, L_\lambda, X, Y \dots) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

bzw. wegen der Überbestimmung,

$$(25a) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_r(L_1, L_2, \dots, L_\lambda, x, y \dots) + w_1 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\},$$

so entstehen durch Einführung von Verbesserungszuschlägen v für die Beobachtungswerte L und Zerlegung jeder Unbekannten in die Summe eines Näherungswertes und eines zu ermittelnden Zuschlages: $X = N_x + x$ usw. die Fehlergleichungen

$$(25e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_r}{\partial N_x} x + \frac{\partial F_r}{\partial N_y} y + \frac{\partial F_r}{\partial N_z} z + \dots + F_r(L_1, L_2 \dots L_\lambda, N_x, N_y \dots) = w_r \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \\ \text{oder in abgekürzter Schreibweise} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_r x + b_r y + c_r z + \dots + l_r = w_r \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Hier sind diejenigen Werte für die unbekanntem Zuschläge $x, y \dots$ zu ermitteln, welche $[pww]$ zum Minimum machen. Das Gewicht p_r des Widerspruches w_r ist aber nicht mehr von der Genauigkeit einer einzigen, sondern von den mittleren Fehlern m aller in der jeweiligen Beziehung (25 e') verwendeten Beobachtungsgrößen und von dieser Beziehung abhängig:

$$(25g') \quad \left\{ \begin{array}{l} M_r^2 = \left(\frac{\partial w_r}{\partial L_1} \right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial w_r}{\partial L_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial w_r}{\partial L_\lambda} \right)^2 m_\lambda^2 \\ p_r = \frac{\text{Konstante}}{M_r^2} \end{array} \right.$$

Die Verwendung der Fehlergleichungen (25 e') zur Bildung der Normalgleichungen und die Weiterbehandlung

ist nun dieselbe, wie im Falle expliziter Funktion. Ebenso verhält es sich für beide Fälle bezüglich der Rechenproben.

Wenn die auf die Gewichtseinheit zurückgeführten Fehlergleichungen lauten:

$$\begin{array}{l} (25f) \\ \text{bzw.} \\ (25f') \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_r \sqrt{p_r} x + b_r \sqrt{p_r} y + c_r \sqrt{p_r} z + \dots + l_r \sqrt{p_r} = v_r \sqrt{p_r} \text{ bzw. } = w_r \sqrt{p_r} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

und wir setzen

$$(40a) \left\{ \begin{array}{l} a_r \sqrt{p_r} + b_r \sqrt{p_r} + c_r \sqrt{p_r} + \dots + l_r \sqrt{p_r} = s_r \sqrt{p_r} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

so gehen daraus die Koeffizientenkontrollgleichungen hervor:

$$(41a) \left\{ \begin{array}{l} [paa] + [pab] + [pac] + \dots + [pal] = [pas] \\ [pab] + [pbb] + [pbc] + \dots + [pbl] = [pbs] \\ \vdots \\ [pas] + [pbs] + [pcs] + \dots + [pls] = [pss], \end{array} \right\}$$

welche ebenso für die verschiedenen Reduktionsstufen gelten:

$$(42a) \left\{ \begin{array}{l} [pbb \cdot 1] + [pbc \cdot 1] + \dots + [pbl \cdot 1] = [pbs \cdot 1] \\ \vdots \\ [pbl \cdot 1] + [pci \cdot 1] + \dots + [pll \cdot 1] = [pls \cdot 1] \\ [pbs \cdot 1] + [pcs \cdot 1] + \dots + [pls \cdot 1] = [pss \cdot 1] \end{array} \right\}$$

$$(43a) \left\{ \begin{array}{l} [pcc \cdot 2] + \dots + [pcl \cdot 2] = [pcs \cdot 2] \\ \vdots \\ [pcl \cdot 2] + \dots + [pll \cdot 2] = [pls \cdot 2] \\ [pcs \cdot 2] + \dots + [pls \cdot 2] = [pss \cdot 2] \quad \text{usw.} \end{array} \right\}$$

Als Abschlußprobe des ganzen Reduktionsgeschäfts kommt schließlich z. B. im Fall dreier Unbekannter:

$$(44a) \quad [pll \cdot 3] = [pls \cdot 3] = [pss \cdot 3] = [pvv].$$

16. Beispiel: Zur Bestimmung der Höhenunterschiede von vier Festpunkten A , B , D und E wurden deren direkte Verbindungen mit durchweg gleichen Ziel-längen und nach gleichem Verfahren teils ein-, teils mehrmals eingewogen, wobei sich folgende Werte ergaben:

	Strecke	nivellierte Länge	Höhenunterschied	
1.	AB	4,2 km	+ 10,338 m	
2.	BD	5,1 km	+ 3,965 „	} Mittel 3,9475
			+ 3,930 „	
3.	DE	2,8 km	- 4,952 „	} 4,9545
			- 4,957 „	
4.	EA	3,6 km	- 9,328 „	} 9,343
			- 9,359 „	
			- 9,342 „	

Zur weiteren Probe wurden sodann die Verbindungsstrecken jedes der genannten Punkte mit einem zu ihnen zentral gelegenen Punkt C auf dieselbe Weise mit folgenden Ergebnissen eingewogen:

	Strecke	nivellierte Länge	Höhenunterschied	
5.	AC	3,95 km	+ 14,087 m	
6.	BC	2,9 km	+ 3,717 „	
7.	DC	2,7 km	- 0,235 „	
8.	EC	3,0 km	+ 4,725 „	} Mittel 4,7335
			+ 4,742 „	

Wie groß sind die ausgeglichenen Werte der Höhenunterschiede und wie groß ist der mittlere Fehler μ einer einmaligen Einwägung auf 1 km Entfernung?

Lösung: Der mittlere Fehler einer einmaligen Einwägung wächst im vorliegenden Fall proportional zur Quadratwurzel aus der Verbindungsstrecke s . Erklären wir daher als Gewichtseinheit, welcher der mittlere Fehler μ zukommt, ein einmaliges Nivellement von 1 km Länge, so erhalten wir für den mittleren Fehler m bzw. das Gewicht p eines einmaligen s km langen Nivellements:

$$m_s^2 : \mu^2 = 1 : p_s \quad \text{oder} \quad p_s = \frac{\mu^2}{m_s^2} = \frac{\mu^2}{(\mu \sqrt{s})^2} = \frac{1}{s} \quad \text{und}$$

$$\text{im Fall der } n\text{-maligen Wiederholung} \quad p_s = \frac{n}{s}.$$

Damit kommen den vorstehenden Beobachtungsergebnissen bzw. im Fall mehrfach wiederholter Einwägung ihren arithmetischen Mitteln folgende Gewichte zu:

$$p_1 = \frac{1}{4,2} = 0,24; \quad p_2 = \frac{2}{5,1} = 0,39; \quad p_3 = \frac{2}{2,8} = 0,71; \quad p_4 = \frac{3}{3,6} = 0,83;$$

$$p_5 = \frac{1}{3,95} = 0,25; \quad p_6 = \frac{1}{2,9} = 0,35; \quad p_7 = \frac{1}{2,7} = 0,37; \quad p_8 = \frac{2}{3,0} = 0,67.$$

Zur Feststellung der gegenseitigen Höhe der 5 Punkte A, B, C, D, E sind nun von den 8 beobachteten bloß 4 Höhenunterschiede nötig, aus denen die übrigen sich übereinstimmend ergeben müssen, gleichgültig, welche Zusammenstellung wir zu ihrer Bildung benutzen mögen. Denn die gegenseitige Höhe der Punkte wäre schon bestimmt gewesen, wenn man z. B. von C aus bloß nach A, B, D und E , oder von B aus nach A, C, D und schließlich von C nach E nivelliert hätte, usw. Setzen wir zum Zweck der Ausgleichung der Beobachtungsergebnisse die Höhenunterschiede*)

$$\left. \begin{array}{l} \text{von } A \text{ nach } B \equiv \Delta h_A^B = W \\ \text{„ } B \text{ „ } C \equiv \Delta h_B^C = X \\ \text{„ } E \text{ „ } C \equiv \Delta h_E^C = Y \\ \text{„ } B \text{ „ } D \equiv \Delta h_B^D = Z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{und führen als} \\ \text{Näherungswerte} \\ N_w, N_x, N_y, N_z \\ \text{die zugehörigen} \\ \text{Einwägungsergeb-} \\ \text{nisse ein, womit:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Delta h_A^B = W = (+10,338 + w) \\ \Delta h_B^C = X = (+3,717 + x) \\ \Delta h_E^C = Y = (+4,7335 + y) \\ \Delta h_B^D = Z = (+3,9475 + z) \end{array} \right.$$

so können wir die Fehlergleichungen in der Form:

$$F_r(W, X, Y, Z) - L_r = v_r$$

*) Da von dem Zentralpunkt C aus die Höhenunterschiede nach jedem der übrigen 4 Punkte eingewogen wurden und auch die Probeinwägungen symmetrisch zu C angeordnet sind, wird man zweckmäßigerweise die 4 Höhenunterschiede CA, CB, CD, CE als Unbekannte setzen. Um (aus instruktiven Gründen) die dabei sich ergebende Gleichförmigkeit der Lösung zu vermeiden, wird jedoch im vorliegenden Fall von dieser (einfacheren) Behandlung abgesehen.

oder, da sie von Haus aus linear sind, sogar sofort die Fehlergleichungen in reduzierter Form anschreiben:

$$F_r(w, x, y, z) + \{F_r(Nw, Nx, Ny, Nz) - L_r\} = v_r.$$

Wir entwerfen zu diesem Zweck aus den Netzpunkten und den eingewogenen Strecken eine Skizze, in welcher wir die Gefällsrichtungen durch Pfeile andeuten. Alsdann stellen wir der Reihe nach jeden beobachteten Höhenunterschied L mit so vielen der Unbekannten, als dabei in Betracht kommen, zu einer Schleife (geschlossenem Polygon) zusammen. Umgehen wir die Schleifen in irgendwelcher Richtung, so kommt jetzt in jeder von ihnen denjenigen Höhenunterschieden, deren Pfeilen wir beim Umgehen auf den Kopf treten, das Vorzeichen +, den anderen das Vorzeichen - zu. Die Summe aller in einer Schleife benutzten Höhenunterschiede soll 0 sein, ist aber wegen des Beobachtungsfehlers an L gleich v . Daraus ergeben sich folgende Fehlergleichungen:

- (1) $W - 10,338 = v_1$
- (2) $Z - 3,9475 = v_2$
- (3) $-X + Y - 4,9545 + Z = v_3$
- (4) $X - Y - 9,343 + W = v_4$
- (5) $X - 14,087 + W = v_5$
- (6) $X - 3,717 = v_6$
- (7) $-X - 0,235 + Z = v_7$
- (8) $Y - 4,7335 = v_8$

oder unter Einsetzung der Summe aus jedem Näherungswert und dem ihm beizufügenden unbekanntem Zuschlag an Stelle der Unbekannten selbst:

- (1) $w + (10,338 - 10,338 = 0) = v_1$
- (2) $z + (3,9475 - 3,9475 = 0) = v_2$
- (3) $-x + y + z + (3,717 + 4,7335 - 4,9545 + 3,9475 = +0,0095) = v_3$
- (4) $w + x - y + (10,338 + 3,717 - 4,7335 - 9,343 = -0,0215) = v_4$
- (5) $w + x + (10,338 + 3,717 - 14,087 = -0,032) = v_5$
- (6) $+x + (3,717 - 3,717 = 0) = v_6$
- (7) $-x + z + (-3,717 - 0,235 + 3,9475 = -0,0045) = v_7$
- (8) $+y + (4,7335 - 4,7335 = 0) = v_8.$

Bezeichnen wir wie bisher den Koeffizienten

- der 1. Unbekannten (hier w) mit a ,
 „ 2. „ „ x „ b ,
 „ 3. „ „ y „ c ,
 „ 4. „ „ z „ d ,

so erhalten wir daraus folgende Koeffizienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen samt den Gewichten der letzteren:

	a	b	c	d	l cm	s	p
1	+1	0	0	0	0	+1	0,24
2	0	0	0	+1	0	+1	0,39
3	0	-1	+1	+1	+0,95	+1,95	0,71
4	+1	+1	-1	0	-2,15	-1,15	0,83
5	+1	+1	0	0	-3,2	-1,2	0,25
6	0	+1	0	0	0	+1	0,35
7	0	-1	0	+1	-0,45	-0,45	0,37
8	0	0	+1	0	0	+1	0,67
[] =	+3	+1	+1	+3	-4,85	+3,15	3,81

Koeffizienten und Absolutglieder der Normalgleichungen.

	paa +	pab	pac	pad	pal	pbab +	pbc	pbdb	pbl	pcc +	pcd	pcl	pdab +	pdt	ptl +	pss +
1	0,24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,24
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,39	0	0	0,39
3	0	0	0	0	0	0,71	-0,71	-0,67	-0,67	0,71	+0,71	+0,67	0,71	+0,67	0,61	2,70
4	0,83	+0,83	-0,83	0	-1,78	0,83	-0,83	0	-1,78	0,83	0	+1,78	0	0	3,84	1,10
5	0,25	+0,25	0	0	-0,80	0,25	0	0	-0,80	0	0	0	0	0	2,56	0,36
6	0	0	0	0	0	0,35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,35
7	0	0	0	0	0	0,37	0	-0,37	+0,17	0	0	0	0,37	-0,17	0,07	0,07
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,67	0	0	0	0	0	0,67
I =	+1,32	+1,08	-0,83	±0	-2,58	+2,51	-1,54	-1,08	-3,08	+2,21	+0,71	+2,45	+1,47	+0,50	+7,11	+5,88

Hieraus:

Reduktion der Normalgleichungen.

<u>+1,32</u>	+1,08	-0,83	0	-2,58	-1,01
	(-0,88)	(+0,68)	(0)	(+2,11)	(+0,83)
.	<u>+2,51</u>	-1,54	-1,08	-3,08	-2,11
		(-0,52)	(0)	(-1,62)	(-0,64)
.	.	<u>+2,21</u>	+0,71	+2,45	+3,00
			(0)	(0)	(0)
.	.	.	<u>+1,47</u>	+0,50	+1,60
				(-5,04)	(-1,98)
.	.	.	.	<u>+7,11</u>	+4,40
					(-0,77)
.	<u>+5,88</u> (stimmt)

1. Reduktionsstufe.

<u>+1,63</u>	-0,86	-1,08	-0,97	-1,28
	(-0,43)	(-0,57)	(-0,51)	(-0,68)
.	<u>+1,69</u>	+0,71	+0,83	+2,36
		(-0,72)	(-0,64)	(-0,85)
.	.	<u>+1,47</u>	+0,50	+1,60
			(-0,58)	(-0,76)
.	.	.	<u>+2,07</u>	+2,42
				(-1,01)
.	.	.	.	<u>+5,11</u>

2. Reduktionsstufe.

<u>+1,24</u>	+0,14	+0,32	+1,68
	(-0,02)	(-0,04)	(-0,19)
.	<u>+0,75</u>	-0,14	+0,75
		(-0,08)	(-0,43)
.	.	<u>+1,49</u>	+1,66
			(-2,28)
.	.	.	<u>+4,10</u>

3. Reduktionsstufe.

<u>+0,73</u>	-0,18	+0,86
	(-0,04)	(+0,14)
.	<u>+1,41</u>	+1,23
		(-0,43)
.	.	<u>+1,82</u>

4. Reduktionsstufe.

<u>+1,37</u>	+1,37
.	<u>+1,39</u>

Die 3. Reduktionsstufe liefert die rechts stehende Unbekannte

$$z = -\frac{-0,18}{0,73} - + 0,25 \text{ cm,}$$

womit

$$\Delta h_B^D = Z = 3,9475 + 0,0025 = 3,9500.$$

$$P_Z = 0,73.$$

Die 4. Reduktionsstufe liefert

$$[p v v] = 1,37,$$

womit der mittlere Fehler einer einmaligen Einwägung auf 1 km Länge:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1,37}{8-4}} = \pm 0,58 \text{ cm} = \pm 5,8 \text{ mm}$$

und

$$M_Z = \pm \sqrt{\frac{1,37}{(8-4) \cdot 0,73}} = \pm 0,68 \text{ cm} = \pm 6,8 \text{ mm}.$$

Wollen wir die mittleren Fehler M und die Gewichte P auch der übrigen ausgeglichenen Höhenunterschiede kennen lernen, so muß jetzt Umstellung der Normalgleichungen und wiederholte Reduktion erfolgen, wobei sich zuerst y , dann nach Wiederholung des Verfahrens x und schließlich w ergibt. Andernfalls kann man den gefundenen Wert für z in die 1. Gleichung der 2. Reduktionsstufe einsetzen, wodurch sich y ergibt und so weiter rückwärts. Wir wollen einmal letzteren Weg gehen:

1. Gleichung der 2. Reduktionsstufe:

$$1,24 y + 0,14 z + 0,32 = 0,$$

$$y = \frac{-0,32 - (0,14 \cdot 0,25)}{1,24} = -0,29 \text{ cm; } Y = +4,7335 - 0,0029 = +4,7306,$$

1. Gleichung der 1. Reduktionsstufe:

$$1,63 x - 0,86 y - 1,08 z - 0,97 = 0,$$

$$x = \frac{0,97 + (1,08 \cdot 0,25) + (0,86 \cdot -0,29)}{1,63} = +0,61 \text{ cm; } X = +3,717 + 0,006 = +3,723.$$

1. Normalgleichung.

$$1,32 w + 1,08 x - 0,83 y + 0 z - 2,58 = 0,$$

$$w = \frac{2,58 + 0,83 \cdot (-0,29) - 1,08 \cdot 0,61}{1,32} = +1,27 \text{ cm:}$$

$$W = +10,338 + 0,013 = +10,351.$$

Zur Probe kann man die erhaltenen Werte für w , x , y und z in irgendeine der übrigen Normalgleichungen einsetzen, welche dadurch gleichfalls befriedigt sein muß.

Schwieriger als bei vorstehendem Beispiel gestaltet sich die Aufstellung der Beziehungen zwischen den Unbekannten X , $Y \dots$ und den zu ihrer Bestimmung

dienenden beobachteten Größen L in der gewünschten Form (25) bzw. (25') im Falle der in der Geodäsie am häufigsten auftretenden Ausgleichungsaufgabe, der

trigonometrischen Punkteinschaltung.

Letztere bezweckt die Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten x_P und y_P von „Neupunkten“ P auf Grund von Bestimmungsstrahlen, die von — auf dem Gelände sowohl, als ihren Koordinaten nach — gegebenen „Festpunkten“ $A, B \dots F$ ausgehen und deren Richtung durch Beobachtung der Winkel α im Neupunkt zwischen den **Neustrahlen** selbst, oder der Winkel β in den Festpunkten zwischen diesen Neustrahlen und den Verbindungslinien nach anderen Festpunkten, den „**Feststrahlen**“ gewonnen wird. Sind solche Winkel β nur in (mindestens zwei) Festpunkten gemessen, so hat man die Aufgabe des „**Vorwärts-**“, sind nur Winkel α im Neupunkt zwischen den (mindestens drei) Bestimmungsstrahlen gemessen, diejenige des „**Rückwärtseinschnittes**“. Wurden Winkel α sowohl im Neupunkt zwischen den Bestimmungsstrahlen selbst, als auch Winkel β in den Festpunkten zwischen Fest- und Neustrahlen gemessen, so wird der Neupunkt durch „**vereinigtes Vor- und Rückwärtseinschneiden**“ bestimmt. In jedem Fall suchen wir mittels der beobachteten Winkel oder Richtungen α oder β die von den Festpunkten gegen den Neupunkt gerichteten Bestimmungsstrahlen, die **Neustrahlen**, zu „orientieren“, d. h. ihre Divergenz gegen die durch den Festpunkt gedachte Parallele zur Abszissenachse oder ihren „**Richtungs-** (Neigungs-) **Winkel**“ μ zu berechnen. Jede (gleichgültig, ob rein rechnerische oder durch graphische Hilfsmittel unterstützte) Lösung geht sodann aus von einem seinen Koordinaten x_N und y_N nach irgendwie ermittelten, möglichst nahe dem endgültigen Neupunkt gelegenen „**Näherungs-**“ oder „**vor-**

läufigen“ Punkt N , so daß als neue Unbekannte nicht mehr die Koordinaten x und y des Neupunktes P selbst, sondern, in Übereinstimmung mit dem bisherigen, die Zuschläge dx und dy gelten, deren Addition die vorläufigen Koordinaten zu den endgültigen ergänzt.

$$(45) \quad \begin{cases} x_P = x_N + dx \\ y_P = y_N + dy \end{cases}$$

Diese unbekanntes Zuschläge dx , und dy wollen wir im Falle des **Vorwärts-** und des **vereinigten Vor- und Rückwärtseinschneidens** zunächst mit Unterstützung **graphischer Hilfsmittel** zu bestimmen suchen.

Wir beachten zu diesem Zweck, daß die Bestimmungsstrahlen infolge von Ungenauigkeiten in unserer eigenen Winkelmessung, sowie infolge von Projektionsverzerrungen und Mißstimmigkeiten zwischen den gegebenen Koordinaten der Festpunkte und dem Standort der letzteren sich nicht in einem Punkte und noch viel weniger gerade im Näherungspunkte N schneiden, sondern eine fehlerzeigende Figur miteinander bilden werden, in deren Nähe N liegt und innerhalb welcher wir den wahrscheinlichsten Punkt P auswählen müssen. Es wird sich also zunächst darum handeln, die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen und des vorläufigen Punktes N zu erkennen, — in möglichst großem Maßstabe aufzuzeichnen.

Zur Zeichnung der Strahlenlage und -Richtung in der Gegend des Neupunktes haben wir zwei Wege:

Entweder (s. Fig. 2) berechnen wir aus ihren orientierten Richtungswerten μ die Entfernungen a derjenigen Punkte vom vorläufigen Punkt N , in denen die von den Festpunkten F ausgehenden Bestimmungsstrahlen die eine, oder die andere der durch N gezogenen Parallelen zu den beiden Koordinatenachsen (die Achsen der zu entwerfenden graphischen Darstellung) schneiden. Diese Entfernungen ergeben sich allgemein nach Vorzeichen und Wert:

$$(46a) \quad \begin{cases} \text{für Abtragung auf der } y\text{-Achse zu:} \\ a = y_F + (x_N - x_F) \operatorname{tg} \beta - y_N, \\ \text{für Abtragung auf der } x\text{-Achse zu:} \\ a = x_F + (y_N - y_F) \operatorname{ctg} \beta - x_N. \end{cases}$$

Tragen wir die berechneten Entfernungen a im gewählten Maßstab (1 : 10) von N aus auf den genannten Achsen in der durch ihr Vorzeichen bestimmten Richtung ab, -so erhalten wir je einen Punkt des zugehörigen, zu zeichnenden Neustrahls. Durch ihn ziehen wir letzteren selbst, als Parallele zum rechten Schenkel des mit dem negativen Zweig der x -Achse als linkem

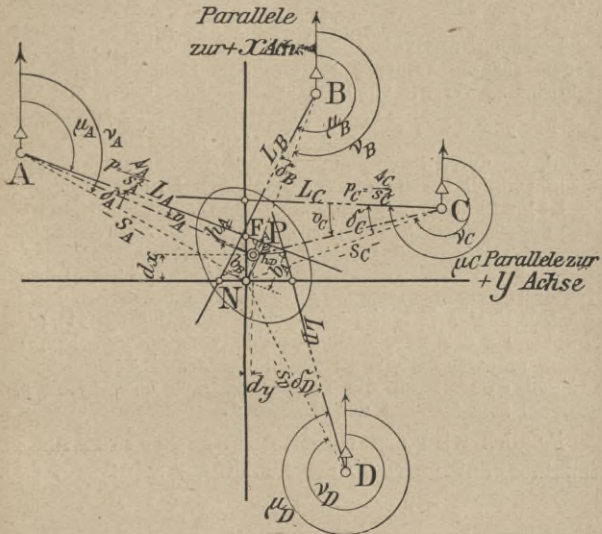


Fig. 2.

Schenkel und mit N als Scheitel (mittels eines Transporteurs, oder unter Verwendung einer Sehnens- oder Tangenstafel) aufgezeichneten Richtungswinkelwertes μ . (Zur $-x$ -Achse, weil die jetzt zu zeichnenden, vom Neupunkt P ausgehenden Strahlen statt der Neigung $\mu_P = n FP$ den Richtungswinkel $\mu_P + 2R = n PF$ besitzen.) Oder wir berechnen außer den orientierten beobachteten Richtungen μ mittels der Koordinaten ihrer Endpunkte noch die entsprechenden Richtungs- (Neigungs-) Winkel ν

von den Festpunkten F nach dem vorläufigen Punkt N und aus der Differenz

$$(46b) \quad \delta = \mu - \nu$$

und der Strahlenlänge s die senkrechte Querabweichung

$$(46c) \quad b = \frac{\delta}{e} s$$

des Bestimmungsstrahls vom vorläufigen Punkt N . Sie wird in dem für die Fehlerfigur gewählten Maßstab von N aus senkrecht zu der wie oben gewonnenen Richtung μ und zwar, vom Festpunkt aus gesehen nach $\begin{matrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{matrix}$ für $\delta = \mp$ abgetragen, um durch ihren Endpunkt den Bestimmungsstrahl wie vorhin parallel zu ebendieser Richtung μ zu zeichnen.

Ist jetzt auf die eine oder die andere Weise die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen unter sich und zum Näherungspunkt N zeichnerisch bekannt, so handelt es sich um die **Auswahl des endgültigen Punktes P in der entstandenen „fehlerzeigenden Figur“**. Dabei ist zu beachten, daß bei gleichem Fehler in der Richtungsbeobachtung die lineare Abweichung des Bestimmungsstrahls vom wahren Punkt P wächst proportional der Strahlenlänge s und demgemäß das Strahlengewicht für die Punkbestimmung umgekehrt proportional zum Quadrat der Strecke s .

Folglich wird das Bestimmungsgewicht für die Punktauswahl innerhalb der Fehlerfigur sein:

$$(48a) \quad p_s = \frac{t}{s^2},$$

wobei wir $t = 1$ setzen, wenn die Beobachtung des Strahls ein-, gleich zwei dagegen, wenn sie zweiseitig, d. h. sowohl im Fest-, wie im Neupunkt erfolgte. Wo ferner auch immer der endgültige Punkt P gewählt werden möge: seine Abstände h von den Bestimmungsstrahlen stellen deren Querverfehlung dar, aus welcher sich rückwärts die an den beobachteten orientierten Rich-

tungen μ anzubringenden Verbesserungszuschläge v nach Richtung und Größe berechnen lassen:

$$(47) \quad v'' = \frac{h}{s} \varrho''.$$

Gleiche Genauigkeit der Richtungsbeobachtung vorausgesetzt, ist das Richtungsgewicht p_μ gleich 1 oder 2 je nachdem ein- oder zweiseitige Beobachtung vorliegt, allgemein gleich t und wir müssen daher nach bisherigem verlangen:

$$(48b) \quad [t v v] = \left[t \frac{h^2}{s^2} \right] \varrho^2 = \varrho^2 \left(t_1 \frac{h_1^2}{s_1^2} + t_2 \frac{h_2^2}{s_2^2} + \dots \right) = \text{Min.}$$

oder unter Beachtung von (48a)

$$(48c) \quad [t v v] = \varrho^2 (p_1 h_1^2 + p_2 h_2^2 + \dots) = \varrho^2 [p h h] = \text{Min.},$$

d. h. wir haben in der Fehlerfigur den endgültigen Punkt P so auszuwählen, daß

$$(48c) \quad \underline{[p h h]} = \text{Min.}$$

Von den verschiedenen, auf (48c) sich stützenden Verfahren der Punktauswahl in der fehlerzeigenden Figur benützen wir das von Bertot 1876 erstmals gezeigte.

Wir müssen aber, ehe wir auf die Lösung selbst eingehen, noch einige Sätze vorausschicken, deren Beweis wir hier übergehen wollen:

1. „Sind r Gerade $L_A, L_B \dots L_R$ vom Gewicht $p_A, p_B \dots p_R$ gegeben, so ist derjenige Punkt P , für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände h je multipliziert mit dem Strahlengewicht p ein Minimum ist, zugleich der Schwerpunkt des aus seinen eigenen Lotfußpunkten F gebildeten Systems von Massenpunkten, wenn jedem von ihnen das Gewicht des Strahls beilegt wird.“

Würden wir hiernach durch Schätzung in der Fehlerfigur zufälligerweise den richtigen Punkt P gefunden haben, für welchen $[p h h] = \text{Min.}$, so würden wir diese Tatsache daraus erkennen, daß er der Schwerpunkt S seiner eigenen Lotfußpunkte F , d. h. daß

$$(49) \quad X_P = \frac{[p \cdot x_F]}{[p]} \quad \text{und} \quad y_P = \frac{[p \cdot y_F]}{[p]}$$

wäre.

Um P aufzusuchen, benützen wir den

2. Satz: „Sind mehrere Gerade L gegeben, und ist wieder für den Punkt P die Summe der Quadrate seiner Abstände h von ihnen je multipliziert mit dem Strahlengewicht p ein Min., so ist der Schwerpunkt der Lotfußpunkte $\mathfrak{F}_A \dots$ irgend eines anderen Punktes A , wenn diesen ebenfalls je das Strahlengewicht $p_A \dots$ zugeschrieben wird, ein Punkt S , welcher zugleich der Schwerpunkt der mit denselben Gewichten bedachten Massenpunkte Q ist, in denen ein Kreis über AP als Durchmesser die von A nach den Strahlen gefällten Projektionslote schneidet.“

(Die in Satz 2 ausgesprochene Behauptung, auf Fig. 3 übertragen, lautet also: Die Punkte \mathfrak{F} und Q haben denselben Schwerpunkt S .)

Nun kennen wir zwar zunächst den Kreis M nicht, auf welchem P als gesuchter Gegenpunkt des beliebigen Punktes A liegt, also auch nicht die Schnittpunkte Q der Projektionslote mit ihm. Dagegen können wir einen beliebigen, den gesuchten Kreis M schneidenden zweiten Kreis \mathfrak{M} durch A mit dem beliebigen Halbmesser r zeichnen, der dem ersten (wie alle Kreise untereinander) ähnlich ist. Erklären wir, was bei sich schneidenden Kreisen zulässig ist, A als inneren Ähnlichkeitspunkt

beider, so schneidet jede durch A gehende Gerade die letzteren nach einem homologen Punktepaar, folglich sind die Schnittpunkte \mathcal{Q} des Kreises \mathcal{M} mit den Projektionsloten homolog den Schnittpunkten Q der letzteren mit

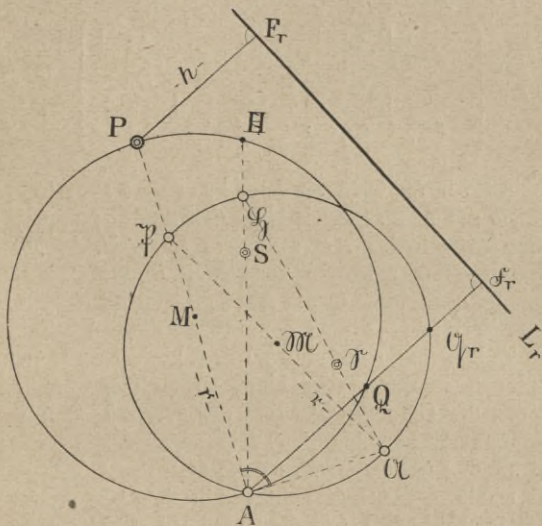


Fig. 3.

dem gesuchten Kreis M . Dann ist aber auch ihr Schwerpunkt \mathcal{S} homolog dem Schwerpunkt S der Q und \mathcal{S} . Die Mittelpunkte \mathcal{M} und M beider Kreise sind einander selbstverständlich homolog, während der auf dem Kreis \mathcal{M} liegende, zu A auf Kreis M homologe Punkt \mathcal{A} der Schnittpunkt der Tangente in A an Kreis M mit Kreis \mathcal{M} ist.

Bestimmen wir demnach in der fehlerzeigenden Figur auf Grund der ihr entnommenen Koordinaten jetzt die Schwerpunkte \mathfrak{S} und S der beiden Punktgruppen \mathfrak{Q} und \mathfrak{F} (wobei die \mathfrak{F} und die Q identischen Schwerpunkt besitzen):

$$(49a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\mathfrak{S}} = \frac{[p \cdot x_{\mathfrak{Q}}]}{[p]}, \quad y_{\mathfrak{S}} = \frac{[p \cdot y_{\mathfrak{Q}}]}{[p]} \\ x_S = \frac{[p \cdot x_{\mathfrak{F}}]}{[p]}, \quad y_S = \frac{[p \cdot y_{\mathfrak{F}}]}{[p]}, \end{array} \right\} \quad (\text{s. Beispiel 12})$$

so haben wir in ihnen ein Paar homologer Punkte beider Systeme gefunden. Auch ohne den Schnittpunkt H des Ähnlichkeitsstrahles AS mit dem Kreis M zu kennen, finden wir ferner seinen homologen Punkt \mathfrak{H} auf dem Kreise \mathfrak{M} als Schnitt dieses Ähnlichkeitsstrahles mit ihm. Da die Verbindungslinien homologer Punkte in ähnlichen Figuren homolog sind und andere homologe Linien in homologen Punkten schneiden, so ist die Gerade HS homolog der Geraden $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ und der dadurch zu findende Kreispunkt \mathfrak{A} homolog A . Dann ist aber $A\mathfrak{A}$ Tangente in A an den gesuchten Kreis M , sein Durchmesser AP steht somit $\perp \mathfrak{A}A$ und geht durch den Gegenpunkt \mathfrak{B} von \mathfrak{A} im Kreis \mathfrak{M} . Für die Strecke $AP = 2r$ folgt aus der Ähnlichkeit der Kreise M und \mathfrak{M} die Proportion:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} (AP \equiv 2r) : 2r = AS : \mathfrak{A}\mathfrak{S}, \quad \text{d. h.} \\ AP \equiv 2r = \frac{AS}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}} \cdot 2r. \end{array} \right.$$

Ist mittels des berechneten Maßes AP der endgültige Punkt P in die fehlerzeigende Figur auf der Geraden $A\mathfrak{B}$ eingetragen, so bilden seine der graphischen Dar-

stellung analog Fig. 5 zu entnehmenden Koordinaten die Zuschläge dx und dy , womit man mittels Gleichung (a) die gesuchten Koordinaten x_P und y_P gewinnt.

Also Zusammenfassung der Lösung: Nach Aufzeichnung der Fehlerfigur folgt die Zeichnung eines beliebigen Kreises \mathcal{M} und Annahme eines beliebigen Punktes A auf seinem Umfang.

Zum Zweck bequemer Berechnung von AP wählen wir als Halbmesser dieses beliebigen Kreises:

$$r = 50 \text{ cm.}$$

Die Kreisschnittpunkte \mathcal{Q} ergeben sich um so schärfer, je mehr der Schnittwinkel zwischen Kreis und Lot sich einem Rechten nähert. Um dies zu erreichen, wählen wir den Punkt A auf dem gezeichneten Kreis so, daß die von ihm ausgehenden Lote nach den Bestimmungsstrahlen möglichst durch \mathcal{M} gehen, also etwa im Schnittpunkt eines von den übrigen Strahlenrichtungen besonders stark abweichenden Bestimmungsstrahls mit dem Kreis.

Nun: Bestimmung der Schwerpunkte S (der \mathcal{F}) und \mathcal{C} (der \mathcal{Q}). Zeichnung des Linienzuges $AS\mathcal{H}$, $\mathcal{H}\mathcal{C}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{B}$ und zur Probe $A\mathcal{B} \perp A\mathcal{A}$. Abtragen der Strecke $AP = \frac{AS}{\mathcal{A}\mathcal{C}} \cdot 2r$ in dem für die Fehlerfigur gewählten Maßstab, Abgreifen von dx und dy .

Will man sich über die bei der Winkelbeobachtung erreichte Genauigkeit Aufschluß verschaffen, so entnimmt man die Abstände h des gefundenen Punktes P von den Bestimmungslinien aus der fehlerzeigenden Figur und erhält unter Beachtung, daß 2 von den r beobachteten Strahlen zur Bestimmung nötig, also $r - 2$ überschüssig sind, die mittlere lineare Querverfehlung eines Strahls vom Gewicht p

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} h_p = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(r-2)p}}, \\ \text{die mittlere lineare Unsicherheit in der Punkt-} \\ \text{bestimmung} \\ h_{\text{Mittel}} = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(r-2)[p]}} \\ \text{und} \\ \text{den mittleren Fehler einer einseitig beobachte-} \\ \text{ten Richtung} \\ m_{\mu}'' = \pm \sqrt{\frac{[t v v]}{r-2}} = \pm \varrho'' \sqrt{\frac{[t \cdot \frac{h^2}{s^2}]}{r-2}}. \end{array} \right.$$

Die nach (51) berechnete mittlere lineare Unsicherheit in der Punktbestimmung gestattet ebensowenig wie der Betrag des mittleren Richtungsfehlers einen erschöpfenden Einblick in deren Genauigkeit. Vielmehr kann die letztere nach verschiedenen Seiten eine durchaus verschiedene sein. Wird nämlich ein Punkt als Schnitt zweier oder mehrerer durch Beobachtungsfehler um einen gewissen mittleren Betrag m_{μ} verschwenkter Strahlen be-

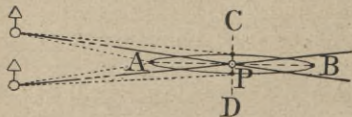


Fig. 4.

stimmt und sind diese Strahlen nicht gleichmäßig über den Horizont verteilt, so bildet die Gesamtheit derjenigen Punkte $A, B, C, D \dots$, welche infolge jenes mittleren

Richtungsfehlers an die Stelle des wahren Schnittpunktes P (für zwei Strahlen s. Fig. 4) treten können, eine

„Fehlerellipse“, deren $\left. \begin{array}{l} \text{gro\ss e} \\ \text{kleine} \end{array} \right\}$ Achse die Richtung der gr\u00f6\u00dften $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bestimmungsunsicherheit, und deren Achsen-} \\ \text{kleinsten} \end{array} \right.$ Verh\u00e4ltnis das Verh\u00e4ltnis dieser Unsicherheiten anzeigt. Um eine solche Fehlerellipse zu zeichnen, braucht man nur f\u00fcr verschiedene (am besten profilartig angeordnete) Punkte der Fehlerfigur nach Gleichung (51) die Werte f\u00fcr h_{Mittel} oder m_{μ} zu berechnen, sodann durch Interpolation die Lage von Punkten mit einem bestimmten runden Wert dieses h oder m aufzusuchen und die so konstruierten Punkte schlie\u00dflich durch eine stetige Kurve zu verbinden. Je n\u00e4her letztere der Kreisform kommt, die (n\u00f6tigenfalls durch Einschaltung weiterer Bestimmungsstrahlen) anzustreben ist, wenn gleiche Bestimmungs-genauigkeit nach allen Richtungen erfordert wird, und je kleiner sie f\u00fcr einen bestimmten Betrag von h_{Mittel} oder m_{μ} ist, umso besser.

17. Beispiel: Im trigonometrischen Neupunkt 1 wurden Richtungen α nach benachbarten Dreieckspunkten und in letzteren solche nach dem Neupunkt und weiteren Festpunkten in je drei vollen S\u00e4tzen beobachtet. Die Koordinaten der benutzten Dreieckspunkte sind bekannt und als fehlerfrei anzunehmen.

Gemessen wurde:

Im Neupunkt 1 nach	Killesberg	399° 99' 64"
	Feuerbach	122° 19' 08"
	Eychen	189° 23' 41"
	Zuffenhausen	232° 97' 25"
In Sand\u00e4cker nach	Eychen	355° 00' 62"
	Feuerbach	399° 97' 65"
	Neupunkt 1	4° 68' 37"
	Killesberg	16° 78' 41"

In Eychen nach	Feuerbach	49° 14' 48"
	Neupunkt 1	399° 98' 99"
	Killesberg	2° 37' 63"
In Killesberg nach	Feuerbach	0° 03' 93"
	Eychen	49° 28' 01"
	Neupunkt 1	57° 66' 26"
	Falget	314° 31' 56"

Gegebene Koordinaten:

	x	y
	+	+
Eychen	32632,85	8101,42
Falget	31114,51	8061,89
Feuerbach	31962,93	7858,74
Killesberg	31690,30	8485,65
Sandäcker	31940,47	7360,85
Zuffenhausen	34691,00	9175,86

Gesucht sind die rechtwinkligen Koordinaten des Neupunktes 1.

Lösung: Wir orientieren zunächst die in den Festpunkten beobachteten Richtungsbüschel α nach den von ersteren ausgehenden, auf dieselben Strahlen sich beziehenden Richtungswinkeln φ und erhalten dadurch in nachfolgendem Formular die „orientierten Richtungen“ β samt den Beobachtungsfehlern v der Richtungswerte für die Feststrahlen. (Die endgültigen Richtungswinkel φ , die Verbesserungen v und die Streckenlängen s für die **Neustrahlen**, die ebenfalls im nachstehenden Abriß eingetragen sind, ergeben sich später.)

Mit Benutzung von zweien der im Abriß ermittelten, möglichst um 1 R voneinander abweichenden orientierten Richtungswerte β berechnen wir nun vorläufige Koordinaten für den Neupunkt, wobei wir erhalten mögen:

$$X_N = + 31909,96, \quad Y_N = + 8428,22.$$

Sie benutzend, finden wir für die Richtungswinkel ν und Längen s der Verbindungsstrecken von den Festpunkten zum vorläufigen Neupunkt N folgende Werte:

n - Sandäcker - N	$\equiv \nu_S = 101^\circ 81' 92''$; $s_S = 1068$ m
n - Eychen - N	$\equiv \nu_E = 172^\circ 97' 06''$; $s_E = 793,3$ „
n - Killesberg - N	$\equiv \nu_K = 383^\circ 72' 00''$; $s_K = 227,1$ „
n - Feuerbach - N	$\equiv \nu_{Fe} = 105^\circ 90' 45''$; $s_{Fe} = 571,9$ „
n - Zuffenhausen - N	$\equiv \nu_Z = 216^\circ 71' 93''$; $s_Z = 2879$ „

(Fortsetzung des Textes s. S. 84.)

Abteilung 1. „Abriß“.

Ziel- punkte	Beobachtete Richtungen α			Endgültige Richtungs- winkel φ			Unterschiede $\varphi - \alpha$ Orien- tierungswinkel $\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$			Orientierte Richtungen $\beta = \alpha + \omega$			Ver- besse- rung $v = \varphi - \beta$		Strecken- länge s m	
	o	/	//	o	/	//	o	/	//	o	/	//	+	-		
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.									
A. Festpunkte.																
Standpunkt Sandäcker.																
Eychen	355	00	62	52	14	01	97	13	39	52	15	15		114	1014	
Feuerbach ..	399	97	65	97	13	01	97	15	36	97	12	18	83		498,4	
Neupunkt 1.	4	68	37	101	83	27				101	82	90	37		1068	
Killesberg ..	16	78	41	113	93	25	97	14	84	113	92	94	31		1152	
		45	05		03	54			13	59		03	17	114	114	
	$4\omega =$	58	12		-	37			3				151	114		
		03	17		03	17	$\omega =$	97	14	53				37		
Standpunkt Eychen.																
Feuerbach ..	49	14	48	222	12	56	172	98	08	222	12	58		2	712,5	
Neupunkt 1.	399	98	99	172	96	94				172	97	09		15	793,3	
Killesberg ..	2	37	63	175	35	75	172	98	12	175	35	73	2		1018	
	$3\omega =$	51	10		45	25	$\omega =$	172	98	10		45	40	2	2	
		94	30		+ 15								2	17		
		45	40		45	40								15		
Standpunkt Killesberg.																
Feuerbach ..	0	03	93	326	11	47	326	07	54	326	11	53		6	688,6	
Neupunkt 1.	49	28	01	375	35	75	326	07	74	375	35	61	14		1018	
Feuerbach ..	57	66	26	383	73	63				383	73	86		23	227,1	
Falget	314	31	56	240	39	08	326	07	52	240	39	16		8	714,9	
	$4\omega =$	29	76		59	93			1	80		60	16	14	14	
		30	40		+ 23				3				14	37		
		60	16		60	16	$\omega =$	326	07	60					23	
B. Neupunkte.																
Standpunkt Neupunkt 1.																
Killesberg ..	399	99	64	183	73	63	183	74	06	183	73	54	9		227,0	
Feuerbach ..	122	19	08	305	92	88	183	73	68	305	92	98		10	571,9	
Eychen	189	23	41	372	96	94	183	73	50	372	97	31		37	793,3	
Zuffenh.....	232	97	25	16	71	54	183	74	29	16	71	15	39		2879	
	$4\omega =$	39	38		34	99			15	61		34	98	48	47	
		95	60		-	1			4				1			
		34	98		34	98	$\omega =$	183	73	90						

Bemerkung: Die senkrechten Ziffern beziehen sich auf beobachtete oder aus gegebenen berechnete, die schrägen auf neu gewonnene Größen. Letztere werden mit roter Tinte eingesetzt und zwar die Werte φ , v und s für die Neustrahlen erst nach erfolgter Bestimmung der endgültigen Neupunktskoordinaten.

Bezeichnung der Festpunkte	Beobachtete Richtungen rückwärts α			Orientierte Richtungen vorwärts β (s. Abriß)			Unterschiede $\beta - \alpha$ Orientierungs-Winkel $\omega = \frac{[\beta - \alpha]}{n}$			Orientierte Richtungen rückwärts $\gamma = \alpha + \omega$		
	o	i	ii	o	i	ii	o	i	ii	o	i	ii
1. Killesberg .	399	99	64	383	73	86	383	74	22	383	73	59
2. Sandäcker .				101	82	90						
3. Eychen . . .	189	23	41	172	97	09	323	73	68	172	97	36
4. Feuerbach .	122	19	08							105	93	03
5. Zuffenhau- sen	232	97	25							216	71	20
4 $\omega =$		39	38				383	73	95		35	18
		95	80									
		35	18									

Nr. des Strahles	p	Schwerpunkt S der Lotfußpunkte ξ für A (+48,4 cm, +12,9 cm)						Schwerpunkt ξ für		
		x_{ξ}	y_{ξ}	$p x_{\xi}$		$p y_{\xi}$		x_{ξ}	y_{ξ}	
		cm	cm	+	-	+	-	cm	cm	
1	38,6	+43,6	-4,7	1683,0				181,4	+35,6	-35,0
2	0,9	-16,7	+11,0		15,0		9,9		-49,1	+10,3
3	3,2	+33,9	-17,6	108,5				56,3	+21,6	-45,2
4	3,1	-23,9	+6,2		74,1		19,2		-49,9	+4,0
5	0,1	+39,8	+45,1	4,0			4,5		+48,4	+12,9
	45,9			1795,5	89,1		33,6	237,7		

$$x_S = \frac{+1706,4}{45,9}$$

$$= +37,2 \text{ cm}$$

$$y_S = \frac{-204,1}{45,9}$$

$$= -4,4 \text{ cm}$$

$$AP = \frac{AS}{\vartheta \xi} \cdot 2r = \frac{20,6}{28,6} \cdot 100 = 72,0 \text{ cm.}$$

Neupunkt 1.

$X_N = + 31909,96$; $Y_N = + 8428,22$.

Mittel $\mu = \frac{\beta + \gamma}{2}$			Aus Näherung berechnete Richtungs- winkel ν			Wider- spruch $\delta = \mu - \nu$		Strahlen- länge s	Quer- ver- schiebung $b = \frac{\delta}{\varrho} s$	Gewicht $p = \frac{t}{s^2}$ (s in km)		
o	l	''	o	l	''	±	''	m	±	cm	t	p
383	73	72,5	383	72	00	+	172,5	227,1	+	6,1	2	38,6
101	82	90	101	81	92	+	98	1068	+	16,4	1	0,9
172	97	22,5	172	97	06	+	16,5	793,3	+	2,1	2	3,2
105	93	03	105	90	45	+	258	571,9	+	23,2	1	3,1
216	71	20	216	71	93	-	73	2879	-	33,0	1	0,1
	18	08		13	36	+	472					
			+	4	72							
				18	08							

lung 3.

der Kreisschnittpunkte Ω $A (+48,4 \text{ cm}, +12,9 \text{ cm})$				Proberechnung Schwerpunkt der Lotfußpunkte F für $P (-23 \text{ cm}, +12 \text{ cm})$			
$px\Omega$ cm		$py\Omega$ cm		x_F	y_F	px_F	py_F
+	-	+	-	cm	cm	-	+
1381,9			1351,0	-22,9	+12,2	883,9	470,9
	44,2	9,3		-16,8	+12,2	15,1	11,0
69,1			144,6	-24,5	+ 8,6	78,4	27,5
	154,7	12,4		-24,4	+11,6	75,6	36,0
4,8		1,3		-27,0	+27,1	2,7	2,7
1455,8	198,9	23,0	1495,6			1055,7	548,1
						-1055,7	+548,1
$r_{\Omega} = \frac{+1256,9}{45,9}$		$y_{\Omega} = \frac{-1472,6}{45,9}$				45,9	45,9
= +27,2 cm		= -32,1 cm				$x_P = -23,0 \text{ cm}$	$+12,0 \text{ cm} = y_P$

Die Querabweichungen b der Bestimmungsstrahlen vom Näherungspunkt N , welche in der Tafel Abtheilung 2 aus den Strahlenlängen s und den Winkelwerten $\delta = \mu - \nu = \frac{\beta + \gamma}{2} - \nu$ berechnet sind und welche wir im gewählten Verjüngungsverhältnis (1:10) vom Ursprung M eines Koordinatensystems aus senkrecht zur Richtung der Richtungswinkelwerte β , γ , μ oder ν auftragen, bilden in Verbindung mit letzteren die Elemente zur Aufzeichnung der (fehlerzeigenden) Fig. 5, welche direkt die Größe der linearen Abweichungen der Bestimmungsstrahlen in der Gegend des Neupunktes voneinander zeigt.

Ist sie gezeichnet, so können wir in ihr je nach der Größe dieser Unstimmigkeiten den endgültigen Punkt P , dessen Abweichungen h von den Bestimmungsstrahlen die Bedingung (48 c): $[p h h] = \text{Min.}$ erfüllen müssen, entweder durch Schätzung ohne weiteres annehmen, oder nach dem Seite 74—76 gezeigten Verfahren konstruieren. Letzterenfalls zeichnen wir um den Ursprung $N = M$ einen Kreis von beliebigem Halbmesser r (z. B. 50 cm), auf dessen Umfang wir einen Punkt A beliebig annehmen. (In Fig. 5 zum Zweck möglicher Vermeidung schiefer Schnitte der Lote $A\Omega$ mit dem Kreis, z. B. als Endpunkt des zum Strahl 5, Zuffenhausen, parallelen Halbmessers.) Von ihm aus fallen wir Lote $A\mathfrak{F}$ nach den Bestimmungsstrahlen, welche den Kreis in den Punkten Ω schneiden. Für den Schwerpunkt S der Ω liefern die Berechnungen Abt. 3, S. 82—83 auf Grund der Gleichungen:

$$x_S = \frac{[p \cdot x_\Omega]}{[p]}, \quad y_S = \frac{[p \cdot y_\Omega]}{[p]}$$

die Werte $x_S = +27,2$ cm, $y_S = -32,1$ cm, für den Schwerpunkt S der \mathfrak{F} (d. h. der Punkte Q in Fig. 3), $x_S = +37,2$ cm, $y_S = -4,4$ cm. Der Linienzug $AS\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}\mathfrak{E}\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}\mathfrak{M}\mathfrak{P}$; $A\mathfrak{P} \dots$ bildet in seiner Endrichtung schließlich einen Ort für den Minimumspunkt P , den wir mittels der S. 82 unten berechneten Strecke $AP = \frac{AS}{\mathfrak{U}\mathfrak{E}} \cdot 2r = 72,0$ cm (s. S. 82) jetzt konstruieren können.

Eine Probe für die richtige Konstruktion von P in der Fehlerfigur erhalten wir schließlich durch Berechnung der Schwerpunktskoordinaten für die Lotfußpunkte F des Punktes P . Sie müssen mit denen von Punkt P selbst identisch sein (Abt. 3, S. 83 hinten).

Der Figur entnehmen wir jetzt direkt

$$dx = -0,23, \quad dy = +0,12,$$

woraus wir als endgültige Koordinaten des Neupunktes erhalten:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_P = X_N + dx = + 31909,96 - 0,23 = + 31909,73 \\ y_P = Y_N + dy = + 8428,22 + 0,12 = + 8428,34 \end{array} \right\}$$

Zur schließlichen Feststellung der erreichten Beobachtungsgenauigkeit, d. h. der an den orientierten Richtungen β oder an den Beobachtungswerten α zum Zweck der Zusammenführung aller Bestimmungsstrahlen nach einem Punkt P anzubringenden Verbesserungen v , sowie zur Probe können wir jetzt noch die endgültigen Richtungswinkel $\varphi \equiv nFP$ der Verbindungsstrecken von den Festpunkten mit dem Neu-

Abteilung 4.

	1. Killesberg			2. Sandäcker			3. Eychen			4. Feuerbach			5. Zuffenhausen		
	o	/	//	o	/	//	o	/	//	o	/	//	o	/	//
φ (s. Abriß)	183	73	63	301	83	27	372	96	94	305	92	88	16	71	54
μ (s. Abt. 2)	183	73	72,5	301	82	90	372	97	22,5	305	93	03	16	71	20
$u = \varphi - \mu$	-9,5''			+37''			-28,5''			-15''			+34''		
h cm	-0,4			+6,2			- 3,7			-1,6			+15,6		
$u_1'' = \frac{h}{s} \rho''$	-11''			+37''			-30''			-18''			+34''		

Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung.

Zur rechnerischen Bestimmung der den Näherungskordinaten N_X und N_Y für den Neupunkt beizufügenden Zuschläge dx und dy [s. Gleichung (45)] wollen wir vorbereitend die **Beziehung** feststellen, welche **zwischen kleinen Koordinatenänderungen dx und dy des Endpunktes B einer Strecke AB und der dadurch hervorgerufenen Änderung $d\varphi$ ihres Richtungs- (Neigungs-) Winkels $\varphi = n AB$ besteht.** Für die Koordinaten des Endpunktes B einer unter dem Richtungswinkel $n AB$ von A ausgehenden Strecke $AB = s$ hat man allgemein:

$$(52) \quad \begin{cases} y_B = y_A + AB \cdot \sin n AB \\ x_B = x_A + AB \cdot \cos n AB, \end{cases}$$

woraus

$$(52a) \quad \operatorname{tg} n AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{und} \quad n AB = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus folgt durch Differentiation, wenn man $AB \equiv s$ und $n AB \equiv \varphi$ setzt:

$$(53) \left\{ \begin{aligned} d(nAB) &\equiv d\varphi \underset{\text{analyt.}}{=} \frac{\Delta x}{s^2} dy - \frac{\Delta y}{s^2} dx, \quad \text{oder} \\ d\varphi'' &= \frac{\Delta x}{s^2} \varphi'' dy - \frac{\Delta y}{s^2} \varphi'' dx \\ &= \frac{\cos \varphi}{s} \varphi'' dy - \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' dx \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta x} \varphi'' dy - \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta y} \varphi'' dx \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{\varphi''}{\Delta y} dy - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{\varphi''}{\Delta x} dx. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir

(54) den Koeffizienten von dy in den vorstehenden Gleichungen mit b , denjenigen von dx mit a , wobei also b das Vorzeichen von $\cos nAB$ bzw. Δx , a das entgegengesetzte Vorzeichen des \sin bzw. von Δy zukommt, so erhalten wir für die Veränderung $d\varphi''$, welche der Richtungswinkel $nAB = \varphi$ dadurch erleidet, daß man den Endpunkt B der Strecke AB um die kleinen Beträge dx und dy parallel den Koordinatenachsen verschiebt:

$$(55) \quad d\varphi'' = a dx + b dy.$$

Die Koeffizienten a *Parallele zur +x Achse* und b heißt man „**Richtungskoeffizienten**“.

Verschiebt man statt des Endpunktes E den Anfangspunkt A der Strecke um dieselben Beträge, so ändert sich (wie auch geometrisch

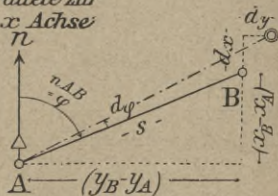


Fig. 6.

klar) der Richtungswinkel φ um denselben Betrag $d\varphi$, aber in entgegengesetztem Sinn. Die nach (54) zu berechnenden Werte für die Richtungskoeffizienten a und b werden aber dadurch nicht beeinflusst. Sie bleiben vielmehr für jeden Strahl AB unverändert, gleichgültig, ob man ihn in der Richtung AB , oder in der Richtung BA verwendet. Durch die Vertauschung von Anfangs- und Endpunkt ändert sich nämlich der Richtungswinkel φ um $2R$, womit dessen \cos und \sin wie die Koordinatenunterschiede Δx und Δy ihr Vorzeichen wechseln.

Wir können nun zur eigentlichen Aufgabe der Punkteinschaltung übergehen, und zwar wollen wir zunächst den reinen **Vorwärtseinschnitt** betrachten.

Die in jedem der n_p zur Neubestimmung benutzten Festpunkte nach dem Neupunkte beobachteten „äußeren“ oder „Vorwärts“-Richtungen α seien auf Grund von n_f von den ersteren nach anderen Festpunkten beobachteten Richtungen oder Winkeln α und den zugehörigen, aus den Koordinaten ihrer Endpunkte berechneten Richtungs- (Neigungs-) Winkeln φ orientiert. Die orientierten Richtungswerte β nach dem Neupunkt erhalten dabei das Gewicht $1, 2 \dots n_f$, wenn zu ihrer Gewinnung $1, 2 \dots n_f$ gemessene Winkel zwischen dem Neustrahl und $1, 2 \dots n_f$ Feststrahlen verwendet worden sind und wenn der Bestimmung durch einen Winkel das Gewicht 1 beigelegt wird. Wurde die Beobachtung satzweise ausgeführt, und sind in die Sätze außer dem Neustrahl noch n_f Richtungen $\alpha_1 \dots$ nach Festpunkten (Feststrahlen) aufgenommen worden, so ist das beobachtete Richtungs- büschel α zum Zweck seiner Orientierung um den Winkel ω zu verdrehen, der sich ergibt als arithmetisches Mittel

$$(56a) \quad \omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_f}.$$

Damit wird die orientierte Richtung vom Fest- nach dem Neupunkt P :

$$(56b) \quad \beta = \alpha_P + \frac{[\varphi - \alpha]}{n_f} = \alpha_P + \omega$$

und ihr mittlerer Fehler

$$(56c) \quad m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_\omega^2}.$$

Setzt man die Richtungswinkel φ der Feststrahlen als fehlerfrei voraus, so ist der mittlere Fehler von $(\varphi - \alpha)$ gleich demjenigen von α , somit, da zur Bildung von $\omega \div \cdot n_f$

Werte verwendet wurden, $m_\omega = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_f}}$. Damit wird

$$(56d) \quad m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{n_f}} = m_\alpha \sqrt{\frac{n_f + 1}{n_f}}$$

und wir erhalten aus der Proportion (15) $p_\beta : p_\alpha = m_\alpha^2 : m_\beta^2$, das Gewicht der in den Festpunkten satzweise beobachteten „äußeren“ oder „Vorwärts“-Richtungen β nach dem Neupunkte:

$$(56e) \quad p_\beta = p_\alpha \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} = p_\alpha \cdot \frac{n_f}{n_f + 1}.$$

Für $p_\alpha = 1$ wird

$$(56) \quad p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}.$$

Die Gleichung (56) zeigt, daß die Orientierung der Neustrahlen im Falle der Ausführung von Richtungsbeobachtungen durch Vermehrung der in die Beobachtung aufgenommenen Feststrahlen über 2 oder 3 hinaus kaum mehr verbessert wird, letztere also unwirtschaftlich wäre.

Sind statt der n_f Richtungen n_f Winkel je zwischen einem Fest- und dem Neustrahl beobachtet, so kommt der Orientierung des letzteren das Gewicht $\frac{n_f}{2}$ zu, wenn die Beobachtung einer Richtung als Gewichtseinheit gilt.

Wir kommen nun zur **Aufstellung der Beziehungen zwischen den gesuchten Koordinaten X, Y des Neupunktes** (oder den Verbesserungszuschlägen dx, dy zu ihren Näherungswerten N_x, N_y) **und den beobachteten Richtungen β der Neustrahlen** von der Form $F(x, y) - L = v$, oder womöglich in linearer Form:

$$(25e) \quad a \, dx + b \, dy + l = v.$$

Dabei haben wir dreierlei von jedem der Festpunkte $A, B \dots$ ausgehende, gegen den Neupunkt P gerichtete Strahlen zu unterscheiden. Die

- 1) 1^{te} Gruppe ist bestimmt durch die Richtungs- oder Winkelbeobachtungen in jedem der benützten Festpunkte A, B, \dots , aus welchen mittels Orientierung nach den mitbeobachteten Feststrahlen die „orientierten Richtungswerte“ $\beta_A \equiv nAP$, $\beta_B \equiv nBP, \dots$ der „Neustrahlen“ berechnet werden. Letztere werden sich infolge von Ungenauigkeiten (in der Messung, den Festpunktskoordinaten usw.) nicht, wie es sein sollte, in einem Punkte schneiden. Die nächste Strahlengruppe bilden:
- 2) die Verbindungslinien der Festpunkte mit dem vorläufigen Punkt N , deren aus den Koordinaten zu berechnende Richtungs- (Neigungs-) Winkel mit $(nAP), (nBP) \dots$ bezeichnet sein mögen, die letzte:
- 3) die Verbindungslinien der Festpunkte mit dem endgültigen, seiner Lage nach zunächst noch unbekanntem Neupunkt P , deren zunächst unbekanntem Richtungswinkel wir mit $[nAP], [nBP]^*$ \dots bezeichnen wollen.

*) [] hat hier und im folgenden jeweils nicht die dem Zeichen bisher allein zugeschriebene Summenbedeutung, sondern auch noch die Aufgabe, endgültige Winkel- oder Richtungswerte als solche zu kennzeichnen! Ob die eine oder andere Bedeutung in Frage kommt, ergibt sich aus dem Sinne der Ableitung.

Die nähere Betrachtung dieser Strahlen liefert folgende Gleichungen für die auftretenden, je in Sekunden ausgedrückten, von der Überführung der oben unter (1) und (2) in die unter (3) genannten Strahlen verursachten kleinen Winkeländerungen (linksläufige Drehung, s. z. B. den Verbesserungsbetrag v_C der Richtung CP in Fig. 2 bzw. $d\varphi_A$ des Strahls AN in Fig. 7 bedeutet negativen Wert):

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \text{Verbesserungs-} \\ \text{zuschlag an:} \end{array} \right. \begin{array}{l} \beta_A \equiv v'_A = [nAP] - nAP \equiv \varphi_A - \beta_A, \\ \beta_B \equiv v'_B = [nBP] - nBP \equiv \varphi_B - \beta_B \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Veränderung $d\varphi$ der vorläufigen Richtungswinkel v , welche eintritt, wenn man den vorläufigen Strahlenendpunkt N um die zunächst unbekanntem Beträge dx , dy nach P verschiebt

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} d\varphi''_A \equiv nAP - nAN \equiv [nAP] - (nAP) \\ d\varphi''_B \equiv nBP - nBN \equiv [nBP] - (nBP) \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ersetzt man die endgültigen Richtungswinkel $[nAP]$, ... in Gleichungen (b) durch $nAP + v_A$, ... aus Gleichungen (a), so erhält man

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} d\varphi''_A = nAP - (nAP) + v''_A \\ d\varphi''_B = nBP - (nBP) + v''_B \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{oder} \\ v''_A = d\varphi''_A + (nAP) - nAP \\ v''_B = d\varphi''_B + (nBP) - nBP \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Die Änderungen $d\varphi$ der Richtungswinkel können wir mittels Gleichung (55) in den Koordinatenzuschlägen dx

und dy ausdrücken. Bezeichnen wir ferner die Unterschiede $(n AP) - n AP \dots$ zwischen den (Näherungs-) Richtungswinkeln nach dem vorläufigen Neupunkt N und

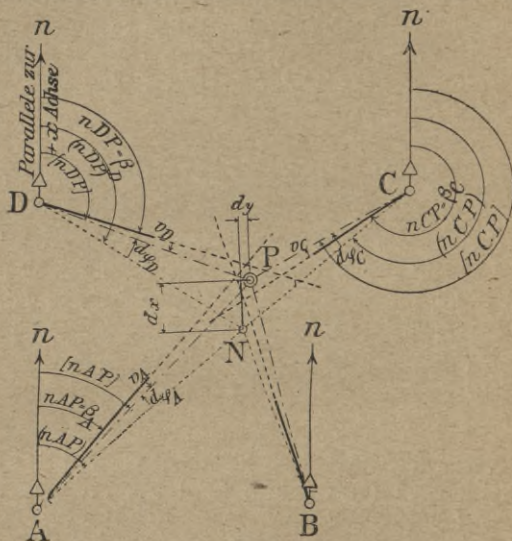


Fig. 7.

den gemessenen, orientierten Richtungen β analog Gleichung (25 d) mit $l_A, l_B \dots$, dann gehen die obigen Gleichungen (c) in die gewünschte Form der Fehlergleichungen (25 e) über:

$$a dx + b dy + l = v,$$

deren wir zur Berechnung der Koordinatenzuschläge dx und dy ebenso viele (nämlich n_v) erhalten, als orientierte gemessene Richtungen β nach dem Neupunkt vorhanden

sind. Die Gewichte p der Absolutglieder l sind gleich denen der orientierten Richtungen β , welche wir oben abgeleitet haben.

Wir können daher jetzt die Koeffizienten der Normalgleichungen

$$(26a) \quad \begin{cases} [p a a] dx + [p a b] dy + [p a l] = 0 \\ [p a b] dx + [p b b] dy + [p b l] = 0 \end{cases}$$

und die zur Rechenprobe und zur Fehlerermittlung weiter erforderlichen Produkten- und Quadratsummen

$$[p l l], [p a s], [p b s], [p l s], [p s s]$$

ermitteln, alsdann zuerst die Unbekannte $dy = -\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]}$

und deren Gewicht $P_y = [p b b \cdot 1]$ und darauf, nach erfolgter Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen, den Zuschlag dx berechnen. Schließlich ergibt Gleichung (45) die gesuchten Koordinaten x_P und y_P . Wir erhalten weiter

$$(37b) \quad [p v v] = [p l l \cdot 2]$$

und, da zur Punktbestimmung zwei Strahlen nötig, also $(n_v - 2)$ davon überschüssig sind

$$(57) \quad M_y = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 2]}{(n_v - 2) P_y}} = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 2]}{(n_v - 2) [p b b \cdot 1]}}$$

Zum Schluß liefert die Gleichung (55) eine durchgreifende **Rechenprobe** für die richtige Einführung und Verwendung jedes einzelnen Bestimmungsstrahls. Mittels der gewonnenen Koordinatenzuschläge erhalten wir nämlich

$$a_R \cdot dx + b_R \cdot dy = d\varphi''_R \equiv [n R P] - (n R P) \equiv \varphi_R - v_R.$$

18. Beispiel: Auf den trigonometrischen Festpunkten Halde, Egart, Lauch und Talwiesen wurden folgende

Richtungen α nach Festpunkten und nach dem Neupunkt 9, Haide in je drei vollen Sätzen beobachtet:

in 1) Halde	$\left(\begin{array}{l} x = + 34059,05 \\ y = + 419,27 \end{array} \right)$	nach	<table> <tbody> <tr> <td>(9) Haide</td> <td>107° 26' 74"</td> </tr> <tr> <td>(5) Berg</td> <td>182° 75' 75"</td> </tr> <tr> <td>(6) Galgen</td> <td>289° 18' 72"</td> </tr> </tbody> </table>	(9) Haide	107° 26' 74"	(5) Berg	182° 75' 75"	(6) Galgen	289° 18' 72"
(9) Haide	107° 26' 74"								
(5) Berg	182° 75' 75"								
(6) Galgen	289° 18' 72"								
in 2) Egart	$\left(\begin{array}{l} x = + 34391,39 \\ y = + 86,52 \end{array} \right)$	nach	<table> <tbody> <tr> <td>(5) Berg</td> <td>169° 51' 71"</td> </tr> <tr> <td>(7) Stumpen</td> <td>289° 14' 92"</td> </tr> <tr> <td>(9) Haide</td> <td>114° 94' 33"</td> </tr> </tbody> </table>	(5) Berg	169° 51' 71"	(7) Stumpen	289° 14' 92"	(9) Haide	114° 94' 33"
(5) Berg	169° 51' 71"								
(7) Stumpen	289° 14' 92"								
(9) Haide	114° 94' 33"								
in 3) Lauch	$\left(\begin{array}{l} x = + 34465,54 \\ y = + 1649,18 \end{array} \right)$	nach	<table> <tbody> <tr> <td>(8) Schloßberg</td> <td>255° 11' 82"</td> </tr> <tr> <td>(5) Berg</td> <td>189° 19' 78"</td> </tr> <tr> <td>(9) Haide</td> <td>253° 69' 17"</td> </tr> </tbody> </table>	(8) Schloßberg	255° 11' 82"	(5) Berg	189° 19' 78"	(9) Haide	253° 69' 17"
(8) Schloßberg	255° 11' 82"								
(5) Berg	189° 19' 78"								
(9) Haide	253° 69' 17"								
in 4) Talwiesen	$\left(\begin{array}{l} x = + 33559,19 \\ y = + 989,67 \end{array} \right)$	nach	<table> <tbody> <tr> <td>(5) Berg</td> <td>176° 16' 42"</td> </tr> <tr> <td>(6) Galgen</td> <td>289° 68' 26"</td> </tr> <tr> <td>(9) Haide</td> <td>26° 95' 76"</td> </tr> </tbody> </table>	(5) Berg	176° 16' 42"	(6) Galgen	289° 68' 26"	(9) Haide	26° 95' 76"
(5) Berg	176° 16' 42"								
(6) Galgen	289° 68' 26"								
(9) Haide	26° 95' 76"								

Gegeben sind ferner die Koordinaten von

5) Berg	$x = + 29699,93$	$y = + 2462,28$
6) Galgen	$x = + 33014,51$	$y = - 2559,92$
7) Stumpen	$x = + 34157,42$	$y = - 1359,25$
8) Schloßberg	$x = + 31425,32$	$y = - 1928,84$

Gesucht sind die Koordinaten von Haide und ihre mittleren Fehler.

Lösung: Zum Zweck der Orientierung der in den Festpunkten nach dem Neupunkt beobachteten Richtungen α berechnen wir aus den Koordinaten der ersteren zunächst die Richtungswinkel φ und die zugehörigen Streckenlängen s der beobachteten Feststrahlen, wobei wir erhalten für:

<i>n</i> -Halde-Berg	172° 09' 86".	Die Strahlenlängen s ergeben sich dabei zu:	4814 m
<i>n</i> -Halde-Galgen	278° 53' 20".	" " " " " "	3157 "
<i>n</i> -Egart-Berg	170° 15' 81".	" " " " " "	5259 "
<i>n</i> -Egart-Stumpen	289° 78' 61".	" " " " " "	1465 "
<i>n</i> -Lauch-Schloßberg	255° 16' 18".	" " " " " "	4695 "
<i>n</i> -Lauch-Berg	189° 24' 17".	" " " " " "	4885 "
<i>n</i> -Talwiesen-Berg	176° 79' 36".	" " " " " "	4131 "
<i>n</i> -Talwiesen-Galgen	290° 30' 68".	" " " " " "	3591 "

Aus: $\beta = \omega + \alpha = \frac{[\varphi] - [\alpha]}{n_f} + \alpha$ erhalten wir jetzt die orientierten

Richtungswerte für die Neustrahlen:

$$\beta_{\text{Halde}} = \frac{50^{\circ}63'06'' - 71^{\circ}94'47''}{2} + 107^{\circ}26'74'' = 96^{\circ}61'04'',$$

$$\beta_{\text{Egart}} = \frac{59^{\circ}94'42'' - 58^{\circ}66'63''}{2} + 114^{\circ}94'33'' = 115^{\circ}58'23'',$$

$$\beta_{\text{Lauch}} = \frac{44^{\circ}40'35'' - 44^{\circ}31'60''}{2} + 253^{\circ}69'17'' = 253^{\circ}73'55'',$$

$$\beta_{\text{Talwiesen}} = \frac{67^{\circ}10'04'' - 65^{\circ}84'68''}{2} + 26^{\circ}95'76'' = 27^{\circ}58'44''.$$

Zwei der orientierten Richtungen β (z. B. β_{Egart} und $\beta_{\text{Talwiesen}}$) samt den Koordinaten ihrer Ausgangspunkte benutzend, erhalten wir durch Berechnung im Dreieck nun Näherungskoordinaten für den Neupunkt 9, Halde, nämlich $x_N = +34102,97$, $y_N = +1241,23$, und aus ihnen die Richtungswinkel ν der Verbindungsstrecken der Festpunkte mit dem vorläufigen Punkt N und die Richtungskoeffizienten a und b für die Neustrahlen:

$$\nu_{\text{Halde}} \equiv n\text{-Halde-Haide}^N = 96^{\circ}60'16'', \quad a = -772,4, \quad b = +41,3$$

$$\nu_{\text{Egart}} \equiv n\text{-Egart-Haide}^N = 115^{\circ}58'23'', \quad a = -519,0, \quad b = -129,6$$

$$\nu_{\text{Lauch}} \equiv n\text{-Lauch-Haide}^N = 253^{\circ}74'51'', \quad a = +872,0, \quad b = -775,0$$

$$\nu_{\text{Talwiese}} \equiv n\text{-Talwiese-Haide}^N = 27^{\circ}58'44'', \quad a = -446,2, \quad b = +964,5$$

Wir haben damit die Möglichkeit des Anschriebs der Koeffizienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen gewonnen. Im Interesse vereinfachter Rechnung wollen wir diese Werte jedoch möglichst einander gleich groß haben. Wir erreichen dies, wenn wir statt der Unbekannten dx und dy neue Unbekannte $10 dx$ und $10 dy$ (d. h. beide Zuschläge in dm ausgedrückt) überdies als Winkeleinheit $10''$ (Dekasek.) wählen, womit wir erhalten:

Strahl	a	b	$\nu - \beta \equiv l$ Dekasek.	Summe s
Halde	-7,72	+ 0,41	-8,8	-16,11
Egart	-5,19	- 1,30	0	- 6,49
Lauch.....	+8,72	- 7,75	+9,6	+10,57
Talwiese	-4,46	+ 9,64	0	+ 5,18
[] =	-8,65	+10,00	+0,8	- 6,88

Die Gewichte p der Absolutglieder ergeben sich hier aus Gleichung (56) durchweg gleich, und zu $\frac{2}{3}$, weil die Beobachtung auf jedem Festpunkt neben dem Neustrahl 2 Feststrahlen erfaßte. Wir können daher dem aus 2 Feststrahlen orientierten Richtungswert β einfacher das Gewicht 1 zuschreiben, womit die Ausgleichung auf diejenigen von Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit zurückgeführt ist.

aa +	$(a+b)^2$ + *)	$(a+l)^2$ + *)	bb +	$(b+l)^2$ + *)	ll +	ss +
59,60	53,44	272,91	0,17	70,39	77,44	259,53
26,94	42,12	26,94	1,69	1,69	0	42,12
76,04	0,94	335,62	60,06	3,42	92,16	111,72
19,89	26,83	19,89	92,93	92,93	0	26,83
182,47	123,33	655,36	154,85	168,43	169,60	440,20

$$[ab] = \frac{123,33 - 182,47 - 154,85}{2} = -107,00^*),$$

$$[al] = \frac{655,36 - 182,47 - 169,60}{2} = +151,65^*),$$

$$[bl] = \frac{168,43 - 154,85 - 169,60}{2} = -78,01^*).$$

Koeffizienten der Normalgleichungen und Reduktion.

+182,47	-107,00	+151,65	+227,12	
	(- 62,75)	(+ 88,93)	(+133,18)	
	+154,85	- 78,01	- 30,16	
		(-126,04)	(-188,76)	
		+169,60	+243,24	
			(-282,70)	
			+440,20	soll +440,20

1. Reduktionsstufe.

<u>+92,10</u>	+10,92	+103,02	soll +103,02
	(- 1,30)	(- 12,21)	
	<u>+43,56</u>	+ 54,48	„ + 54,48
		(-115,23)	
		<u>+157,50</u>	„ +157,50

2. Reduktionsstufe.

+42,26	+42,27
	+42,27

*) Die Produkte ab , al und bl könnten wir, soweit die mittels Rechenstabs erreichbare Genauigkeit nicht genügt, Produktentafeln entnehmen oder mittels einer Rechenmaschine ermitteln. Wir wollen hier Quadrattafeln verwenden unter Beachtung, daß

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ also } ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

und

$$[ab] = \frac{1}{2} \{ [(a+b)^2] - [aa] - [bb] \} \text{ usw.}$$

$$dy = -\frac{10,92}{92,10} = -0,12 \text{ dm} = -0,01 \text{ m},$$

$$y = +1241,23 - 0,01 = +1241,22,$$

$$P_y = 92,1,$$

$$[vv] = 42,27,$$

$m_\beta \equiv$ mittlerer Fehler einer in drei Sätzen beobachteten und nach zwei Feststrahlen orientierten Richtung

$$= \pm \sqrt{\frac{42,27}{4-2}} = \pm \sqrt{21,135} = \pm 4,6 \text{ Dekasek.} = \pm 46'',$$

$$M_y = \pm \sqrt{\frac{42,27}{2+92,1}} = \pm 0,48 \text{ dm} = \pm 0,05 \text{ m also } y = +1241,22 \pm 0,05.$$

Durch Umstellung erhalten wir die Normalgleichungen zur Bestimmung der bisher linksstehenden Unbekannten:

+154,85	-107,00	- 78,01	- 30,16	
	(- 73,94)	(- 53,90)	(- 20,84)	
	+182,47	+151,65	+227,12	
		(- 39,30)	(- 15,19)	
		+169,60	+243,24	
			(- 5,87)	
			+440,20	soll +440,20

1. Reduktionsstufe.

+108,53	+ 97,75	+206,28	soll +206,28
	(- 88,04)	(-185,79)	
	+130,30	+228,05	„ +228,05
		(-392,08)	
		+434,33	„ +434,33

2. Reduktionsstufe.

+42,26	+42,26
	+42,25

$$dx = -\frac{97,75}{108,53} = -0,90 \text{ dm} = -0,09 \text{ m},$$

$$x = +34102,97 - 0,09 = +34102,88,$$

$$P_x = 108,53,$$

$$M_x = \pm \sqrt{\frac{42,26}{2 \cdot 108,53}} = \pm 0,44 \text{ dm} = \pm 0,04,$$

$$x = +34102,88 \pm 0,04.$$

Zur Probe für die richtige Berechnung der Werte v und l erhalten wir jetzt unter Benutzung der ausgeglichenen Neupunktkoordinaten als

endgültige Richtungswinkel der Neustrahlen je vom Neupunkt ausgehend:

nach: 1) Halde 2) Egart 3) Lauch 4) Talwiesen
 $\varphi = 296^{\circ}60'85''$ $315^{\circ}58'73''$ $53^{\circ}73'80''$ $227^{\circ}58'74''$.

Ihnen stellen wir gegenüber die früher aus Näherungskordinaten ermittelten Werte:

$\nu \pm 2R = 296^{\circ}60'16''$ $315^{\circ}58'23''$ $53^{\circ}74'51''$ $227^{\circ}58'44''$,

woraus: Einfluß der Verschiebung des Näherungspunktes N nach P um dx und dy auf die Richtungswinkel:

$$\delta\varphi'' \equiv \varphi - (\nu \pm 2R) = \quad + 69'' \quad + 50'' \quad - 71'' \quad + 30''.$$

Dieselben Werte muß die Ausrechnung nach Gleichung (55) liefern:

$a dx =$	+6,93	+4,65	-7,85	+4,02 Dekasek.
$b dy =$	-0,05	+0,16	+0,93	-1,16 „
$d\varphi =$	+6,9	+4,8*)	-6,9*)	+2,9*) Dekasek.

Der Vergleich der endgültigen Richtungswinkel φ mit den orientierten Richtungen β liefert (unter Voraussetzung fehlerfreier Festpunktskordinaten) die Größe ν der Beobachtungsfehler und gleichzeitig eine durchgreifende Probe der Reduktionsarbeit:

$\beta \pm 2R =$	$296^{\circ}61'04''$	$315^{\circ}58'23''$	$53^{\circ}73'55''$	$227^{\circ}58'44''$
$\nu = \varphi - (\beta \pm 2R) =$	-1,9	+5,0	+2,5	+3,0 Dekasek.
$\nu^2 =$	3,61	25,0	6,25	9,0 „

und $[vv] = 43,86$ (gegen 42,26, vgl. das Schlußglied der Reduktion der Normalgleichungen).

Wir gehen jetzt über zur rechnerischen Behandlung des **Rückwärtseinschnittes** (Beobachtung nur im Neupunkt).

Für die Lösung ist wieder zu unterscheiden zwischen A) Winkel- und B) Richtungsbeobachtung.

A) Lösung bei Winkelbeobachtung.

Wie bisher setzen wir wieder voraus, daß uns die Koordinaten x_N, y_N eines vorläufigen Punktes N möglichst nahe dem gesuchten Punkt P bekannt und daß nur die

*) Die kleinen Abweichungen entspringen Abrundungseinflüssen. Eine Koordinatengenauigkeit um $\frac{1}{2}$ cm erzeugt z. B. auf 1000 m Strahlenlänge einen Richtungswinkelfehler von im Max.: $\frac{0,005 \cdot \rho''}{1000} = 3''$.

kleinen Zuschläge dx und dy gesucht sind, durch deren Addition wir nach Gleichung (45) die Koordinaten x_P und y_P des Neupunktes erhalten. Wären letztere schon gefunden, so könnten wir die endgültigen Richtungswinkel

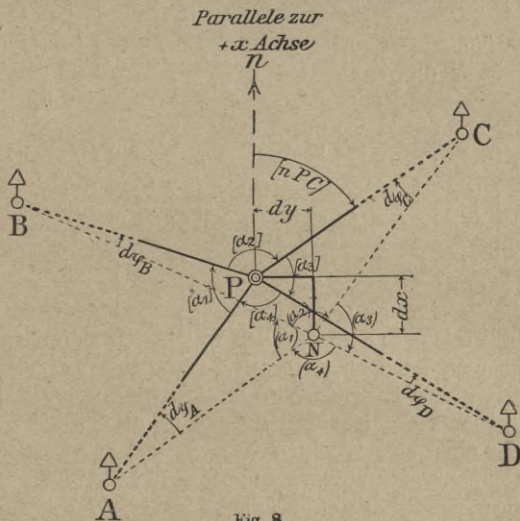


Fig. 8.

$[nPA]$, $[nPB]$... der Verbindungslinien vom Neupunkt nach den benutzten Festpunkten ableiten und aus ihnen durch Subtraktion die endgültigen Werte

$$[\alpha_1] = [APB] = [nPB] - [nPA]$$

$$[\alpha_2] = [BPC] = [nPC] - [nPB]$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

der gemessenen Winkel. Dann könnten wir auch die den Messungsergebnissen $\alpha_1 = APB$, $\alpha_2 = BPC$ usw.

zuzufügenden Verbesserungszuschläge v_1, v_2, \dots ermitteln:

$$(a) \begin{cases} v_1 \equiv [\alpha_1] - \alpha_1 = [APB] - \alpha_1 = [nPB] - [nPA] - \alpha_1 \\ v_2 \equiv [\alpha_2] - \alpha_2 = [BPC] - \alpha_2 = [nPC] - [nPB] - \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Nun können wir aus den Koordinaten des Näherungspunktes N die vorläufigen Richtungswinkel (nPA) , (nPB) ... vom Neupunkt nach den Festpunkten (Scheitel in N), und aus ihnen durch Subtraktion Näherungswerte (α_1) , (α_2) ... für die beobachteten Winkel ableiten:

$$(b) \begin{cases} (\alpha_1) \equiv ANB \equiv (APB) \equiv (nPB) - (nPA) \\ (\alpha_2) \equiv BNC \equiv (BPC) \equiv (nPC) - (nPB) \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Wir können weiter die Veränderungen $d\varphi_A, d\varphi_B, \dots$, welche die vorläufigen Richtungswinkel (nPA) , (nPB) ... dadurch erleiden, daß man den vorläufigen Punkt N um die kleinen, noch unbekanntenen Koordinatenzuschläge dx und dy nach P verschiebt, mittels Gleichung (55) in ebendiesen Verschiebungen dx und dy ausdrücken, wobei wir allerdings beachten müssen, daß wir jetzt nicht den Endpunkt, sondern den Anfangspunkt der Strecke verschieben, wodurch $d\varphi$ das entgegengesetzte Vorzeichen erhält. Setzen wir daher (s. S. 87 u. 88)

$$(54a) \quad \begin{cases} a = -a = \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' \\ b = -b = -\frac{\cos \varphi}{s} \varphi'', \end{cases}$$

so wird

$$(c) \quad \begin{cases} d\varphi_A = [nPA] - (nPA) = \alpha_A dx + b_A dy \\ d\varphi_B = [nPB] - (nPB) = \alpha_B dx + b_B dy \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

oder

$$(c) \begin{cases} [n PA] = (n PA) + a_A dx + b_A dy \\ [n PB] = (n PB) + a_B dx + b_B dy \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Setzen wir die gewonnenen Werte für $[n PA] \dots$ in Gleichung (a) ein, so erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$d) \begin{cases} v_1 = (n PB) + a_B dx + b_B dy - (n PA) - a_A dx - b_A dy - \alpha_1 \\ v_2 = (n PC) + a_C dx + b_C dy - (n PB) - a_B dx - b_B dy - \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Wenn wir endlich unter Benutzung der Gleichungen (b) wie bisher setzen: l = Näherungswert — gemessener Wert des beobachteten Winkels:

$$(e) \begin{cases} (n PB) - (n PA) - \alpha_1 = (\alpha_1) - \alpha_1 = l_1 \\ (n PC) - (n PB) - \alpha_2 = (\alpha_2) - \alpha_2 = l_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

und ferner

$$(e) \begin{cases} a_{\text{des rechten Schenkels}} - a_{\text{des linken Schenkels}} = \mathfrak{A} \\ b_{\text{des rechten Schenkels}} - b_{\text{des linken Schenkels}} = \mathfrak{B}, \end{cases}$$

so erscheinen die Fehlergleichungen (d) in der gewöhnlichen Form:

$$(25 e) \begin{cases} v_1 = \mathfrak{A}_1 dx + \mathfrak{B}_1 dy + l_1 \\ v_2 = \mathfrak{A}_2 dx + \mathfrak{B}_2 dy + l_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{Normalform} \\ \text{der Fehler-} \\ \text{gleichungen.} \end{array}$$

Ihre Zahl n_r , ist gleich derjenigen der im Neupunkt beobachteten Winkel α . Letztere, folglich auch die Absolutglieder l , sind gleichgewichtig. Wir erhalten daher

die gesuchten Koordinatenzuschläge dx und dy aus den zwei Normalgleichungen:

$$(26a) \quad \begin{cases} [AA] dx + [AB] dy + [AT] = 0 \\ [AB] dx + [BB] dy + [BT] = 0. \end{cases}$$

Zum Zweck von Rechenproben und zur Fehlerberechnung führen wir analog Gleichungen (40) bis (44) in die Reduktion weiter ein die Produkt- und Quadratsummen:

$$[ll], \quad [A\mathcal{E}], \quad [B\mathcal{E}], \quad [l\mathcal{E}], \quad [\mathcal{E}\mathcal{E}]$$

und erhalten

$$\text{die rechts stehende Unbekannte } dy = -\frac{[B l \cdot 1]}{[BB \cdot 1]}$$

$$\text{und ihr Gewicht } P_{dy} = P_y = [BB \cdot 1],$$

ferner

$$(37b) \quad [vv] = [ll \cdot 2],$$

und (weil zwei der n_r in P gemessenen Winkel α zur Bestimmung von P nötig, also $(n_r - 2)$ überschüssig sind)

$$(58) \quad \begin{cases} m_l = m_\alpha = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n_r - 2}} \\ My = \pm \sqrt{\frac{[ll \cdot 2]}{(n_r - 2) [BB \cdot 1]}}. \end{cases}$$

Die zweite Unbekannte dx , ihr Gewicht und mittlerer Fehler ergibt sich nach erfolgter Umstellung der Normalgleichungen auf dieselbe Weise wie dy .

Eine durchgreifende **Rechenprobe** erhalten wir schließlich wie beim 18^{ten} Zahlenbeispiel (s. Schluß der zugehörigen Erklärungen) aus den Gleichungen (25c), (e) und (a) durch Bildung der Unterschiede zwischen den

ausgeglichenen und den Näherungswerten der gemessenen Winkel α :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 dx + \mathfrak{B}_1 dy = r_1 - l_1 = \{[\alpha_1] - \alpha_1\} - \{(\alpha_1) - \alpha_1\} = [\alpha_1] - (\alpha_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

19. Beispiel: Zum Zweck der Bestimmung der Koordinaten des trigonometrischen Neupunktes 4 und ihrer mittleren Fehler wurden auf ihm die Winkel zwischen folgenden Strahlenpaaren nach trigonometrischen Festpunkten gemessen:

von Heinrizau	nach Himmelreich	$\alpha_1 = 125^\circ 67' 70''$
„ Himmelreich	„ Zazenhausen	$\alpha_2 = 64^\circ 13' 70''$
„ Zazenhausen	„ Freiberg I	$\alpha_3 = 25^\circ 10' 46''$
„ Freiberg I	„ Postweg	$\alpha_4 = 127^\circ 66' 84''$
„ Postweg	„ Heinrizau	$\alpha_5 = 57^\circ 41' 30''$

Die Koordinaten der angezielten Festpunkte sind:

	x	y
	+	+
Heinrizau	35892,09	9855,10
Himmelreich	36414,27	10775,70
Zazenhausen	35791,80	10805,81
Freiberg I	35406,07	11272,56
Postweg	35549,58	10089,90

Lösung: Auf irgendwelche Weise seien die Näherungskordinaten des Neupunktes gefunden:

$$4^N = \begin{array}{l} x \\ + \\ 35799,18 \end{array} \quad \begin{array}{l} y \\ + \\ 10372,31. \end{array}$$

Sie benutzend rechnen wir die vorläufigen Richtungswinkel von 4^N nach

	Heinrizau	Himmelreich	Zazenhausen	Freiberg I	Postweg
(φ)	$311^\circ 31' 53''$	$36^\circ 95' 30''$	$101^\circ 08' 37''$	$126^\circ 21' 04''$	$253^\circ 92' 12''$
u. d. Richtungs-	$a = -1192$	$+474,7$	$+1468$	$+593,9$	-1266
koeffizienten	$b = -214,2$	$-723,8$	$+25,0$	$+259,4$	$+1119,$

woraus wir die Absolutglieder l sowie die Richtungskoeffizienten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} der Fehlergleichungen wie folgt berechnen:

Winkel Nr.	(α)	a_R	b_R
	$\frac{\alpha}{l}$	$\frac{a_L}{\mathfrak{A}}$	$\frac{b_L}{\mathfrak{B}}$
	o / //		
1	125 63 77	+ 474,7	- 723,8
	125 67 70	- 1192	- 214,2
	- 3 93	+ 1667	- 510
2	64 13 07	+ 1468	+ 25,0
	64 13 70	+ 474,7	- 723,8
	- 63	+ 993	+ 749
3	25 12 67	+ 593,9	+ 259,4
	25 10 46	+ 1468	+ 25
	+ 2 21	- 874	+ 234
4	127 71 08	- 1266	+ 1119
	127 66 84	+ 593,9	+ 259,4
	+ 4 24	- 1860	+ 860
5	57 39 41	- 1192	- 214,2
	57 41 30	- 1266	+ 1119
	- 1 89	+ 74	- 1333
$\square = \begin{matrix} - 6 45 \\ + 6 45 \end{matrix}$		$\begin{matrix} - 2734 \\ + 2734 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - 1843 \\ + 1843 \end{matrix}$ } zur Probe.

Zusammenstellung.

Gleichung Nr.	Absolutglieder \mathfrak{A} und \mathfrak{B} und Koeffizienten l der Fehlergleichungen (Winkel in Sekunden, Strecken in m ausgedrückt)			Zum Zwecke der Rechen- vereinfachung (ungefähr gleichgroße Werte für \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und l) wählen wir als Winkeleinheit die Minute und drücken dx und dy in dm aus, wodurch			
	\mathfrak{A}	\mathfrak{B}	l	\mathfrak{A}	\mathfrak{B}	l	\mathfrak{C}
1	+ 1667	- 510	- 393	+ 1,67	- 0,51	- 3,93	- 2,77
2	+ 993	+ 749	- 63	+ 0,99	+ 0,75	- 0,63	+ 1,11
3	- 874	+ 234	+ 221	- 0,87	+ 0,23	+ 2,21	+ 1,57
4	- 1860	+ 860	+ 424	- 1,86	+ 0,86	+ 4,24	+ 3,24
5	+ 74	- 1333	- 189	+ 0,07	- 1,33	- 1,89	- 3,15
				$\square = 0$	0	0	0

Bildung der Koeffizienten und Absolutglieder der Normalgleichungen.

	$\mathcal{A}\mathcal{A}$	$\mathcal{A}\mathcal{B}$	$\mathcal{A}l$	$\mathcal{B}\mathcal{B}$	$\mathcal{B}l$	ll	$\mathcal{C}\mathcal{C}$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2$	$(\mathcal{A}+l)^2$	$(\mathcal{B}+l)^2$	
1	2,79	-0,85	-6,57	0,26	+2,01	15,44	7,67	1,35	5,11	19,71	
2	0,98	+0,74	-0,62	0,56	-0,47	0,40	1,23	3,03	0,13	0,01	
3	0,76	-0,20	-1,92	0,05	+0,51	4,88	2,46	0,41	1,80	5,95	
4	3,46	-1,61	-7,89	0,74	+3,64	17,98	10,50	1,00	5,66	26,01	
5	0,00	-0,09	-0,13	1,77	+2,52	3,57	9,92	1,59	3,31	10,37	
	+7,99	-2,01	-17,13	+3,38	+8,21	+42,27	+31,78	7,38	16,01	62,05	
								-7,99	-7,99	-3,38	
								-3,38	-42,27	-42,27	
								Produktensumme = $\frac{1}{2}$ von	-3,99	-34,25	+16,40

Koeffizienten der Normalgleichungen und Reduktion derselben zur Bestimmung von $d y$.

+7,99	-2,00	-17,13	-11,14
	(-0,50)	(-4,30)	(-2,80)
	+3,38	+8,20	+9,58
		(-36,67)	(-23,84)
		+42,27	+33,34
			(-15,58)
			+31,78
			soll 31,78

1. Reduktionsstufe.

+2,88	+3,90	+6,78	soll 6,78
	(-5,35)	(-3,26)	
	+5,60	+9,50	" 9,48
		(-15,98)	
		+16,20	" 16,21

2. Reduktionsstufe.

+0,25	+0,24	
	+0,22	soll 0,21 (nach 2. Reduktion)

$d y = -\frac{3,90}{2,88} = -1,3 \text{ dm}$,

$y = +10372,31 - 0,13 = +10372,18 \pm 0,02$,

$P_y = 2,88$,

mittlerer Fehler der gemessenen Winkel

$\mu = \pm \sqrt{\frac{0,22}{3}} = \pm 0,27'$, $M_y = \pm \sqrt{\frac{0,22}{3 \cdot 2,88}} = \pm 0,17 \text{ dm}$.

Koeffizienten der Normalgleichungen nach erfolgter Umstellung und Reduktion zur Bestimmung von dx .

+3,38	-2,00	+ 8,20	+ 9,58
	(-1,20)	(- 4,97)	(+ 5,68)
	+7,99	-17,13	-11,14
		(-19,96)	(-23,28)
		+42,27	+33,34
			(-27,18)
			31,78

1. Reduktionsstufe.

+6,79	-12,25	- 5,46	soll - 5,48
	(-22,10)	(- 9,86)	
	+22,31	+10,06	„ +10,07
		(- 4,39)	
		+ 4,60	„ + 4,58

2. Reduktionsstufe.

+ 0,21	+ 0,20	
	+ 0,21	soll 0,24 (nach 1. Reduktion)

$$dx = -\frac{-12,25}{6,79} = +1,81 \text{ dm,}$$

$$x = +35799,18 + 0,18 = +35799,36 \pm 0,01,$$

$$P_x = 6,79$$

$$M_x = \pm \sqrt{\frac{0,22}{3 \cdot 6,79}} = \pm 0,10 \text{ dm.}$$

Schlußprobe:

	Heinrizau	Himmelreich	Zazenhausen	Freiberg I	Postweg	Heinrizau
[n PF]	311° 29' 67''	36° 97' 10''	101° 10' 98''	126° 21' 77''	253° 88' 39''	311° 29' 67''
[α]	125° 67' 43''	64° 13' 88''	25° 10' 79''	127° 66' 62''	57° 41' 28''	
(α)	125° 63' 77''	64° 13' 07''	25° 12' 67''	127° 71' 08''	57° 39' 41''	
$d\alpha$	+ 3' 66''	+ 0' 81''	- 1' 88''	- 4' 46''	+ 1' 87''	
$\mathfrak{A} dx$	+ 3' 00''	+ 1' 78''	- 1' 57''	- 3' 35''	+ 0' 13''	
$\mathfrak{B} dy$	+ 0' 69''	- 0' 98''	- 0' 31''	- 1' 16''	+ 1' 80''	
$\mathfrak{A} dx + \mathfrak{B} dy$	+ 3' 69''	+ 0' 80''	- 1' 88''	- 4' 51''	+ 1' 93''	

B) Lösung bei Richtungsbeobachtung.

Das soeben vorgeführte Verfahren ließe sich ohne weiteres auch auf Richtungsbeobachtungen anwenden, wenn man die als gemessen vorausgesetzten Winkel

durch Subtraktion je zweier Richtungswerte gewinnen wollte. Die Zahl der zu verwendenden Winkel und Fehlergleichungen wäre aber dann beim Vorhandensein von n_r beobachteten und gleichmäßig zu berücksichtigenden Richtungen = $\binom{n_r}{2}$, also sehr groß. Wir suchen daher für die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen ein einfacheres Verfahren. Wie bisher mögen die Koordinaten x_N, y_N eines in möglichster Nähe des gesuchten Neupunktes P gelegenen vorläufigen Punktes N bereits berechnet, also nur noch die ihnen zuzufügenden Zuschläge dx und dy [s. Gleichung (45)] gesucht sein.

Außer diesen beiden Unbekannten tritt aber jetzt noch eine dritte auf, nämlich der Verdrehungswinkel Z , um den das beobachtete Richtungsbüschel zu verdrehen, d. h. der jedem beobachteten Richtungswert zugeschlagen werden muß, um ihn — ohne Änderung der zwischen den einzelnen Neustrahlen beobachteten Richtungsunterschiede — möglichst zur Übereinstimmung zu bringen mit dem endgültigen Richtungswinkelwert des zugehörigen Neustrahls. Diese drei Unbekannten stellen gewissermaßen den Effekt der Schiebungen und Drehungen eines auf Pauspapier gezeichneten (dem gemessenen entsprechenden) Richtungsbüschels dar, welche das letztere erleiden muß, wenn man es auf einen Plan, der die Lage der Festpunkte enthält, so legen will, daß jedes Individuum des Büschels möglichst scharf durch den entsprechenden Festpunkt geht. Wären die Richtungsbeobachtungen fehlerfrei ausgeführt, die Koordinaten der Festpunkte fehlerfrei gegeben und Projektionsverzerrungen nicht vorhanden, so müßte schließlich eine Lage des Büschels gefunden werden, bei der sämtliche Strahlen genau durch die entsprechenden Festpunkte gehen: die Unterschiede zwischen den endgültigen

Richtungswinkel $[nPA] \dots$ und den endgültig orientierten Richtungswerten $[\alpha_A] \dots$ wären gleich 0. Trifft dies nicht zu, so stellt der Unterschied beider direkt die am endgültig orientierten Richtungswert $[\alpha_A] \dots$ anzubringende Verbesserung v_A dar. Den unbekanntem Verdrehungswinkel Z zerlegen wir, wie gewohnt, in einen Näherungswert ω und den unbekanntem Zuschlag z , womit wir erhalten:

$$(59) \quad Z = \omega + z$$

und womit die im Neupunkt P endgültig orientierten gemessenen Richtungen werden:

$$(60) \quad \begin{cases} [\alpha_A] = \alpha_A + \omega + z \\ [\alpha_B] = \alpha_B + \omega + z. \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{cases}$$

Den Näherungsbetrag ω gewinnen wir, wenn wir das im Neupunkt gemessene Strahlenbüschel mit dem Scheitel statt auf den endgültigen, aber unbekanntem Punkt P vorerst auf den vorläufigen Punkt N legen und dann so verdrehen, daß die Summe der Abweichungen l' der vorläufig orientierten Richtungswerte $\alpha_A + \omega$, $\alpha_B + \omega$, \dots von den zugehörigen vorläufigen Richtungswinkeln $(nPA) \equiv v_A$, $(nPB) \equiv v_B \dots$ gleich 0 wird, d. h. daß:

$$(60a) \quad (nPA) - (\alpha_A + \omega) + (nPB) - (\alpha_B + \omega) + \dots \\ = v_A - \alpha_A^0 + v_B - \alpha_B^0 + \dots = [l'] = 0.$$

In diesem Falle ist also der vorläufige Verdrehungswinkel:

$$\omega = \frac{(nPA) - \alpha_A + (nPB) - \alpha_B + \dots + (nPR) - \alpha_R}{n_r}$$

oder

$$(61) \quad \omega = \frac{\sum \text{der vorl. Richt.-Winkel} - \sum \text{der gemess. Richt.}}{n_r}$$

Die durch Addition von ω zu den gemessenen Richtungswerten α vorläufig orientierten, aber in ihrer gegenseitigen Lage dadurch nicht veränderten Richtungswerte $\alpha + \omega$ mögen heißen α^0 . Wir haben für jeden Bestimmungsstrahl jetzt vier Werte zu unterscheiden, nämlich

- 1) die im Punkt N vorläufig orientierte, im Neupunkt gemessene Richtung α^0 ,
- 2) den Richtungswinkel (nPA) , (nPB) ... der Verbindungsstrecke vom vorläufigen Punkt N zum Festpunkt A , B ...
- 3) die im Neupunkt P endgültig orientierte gemessene Richtung $[\alpha] = \alpha + \omega + z = \alpha^0 + z$ und
- 4) den Richtungswinkel $[nPA]$, $[nPB]$... der Verbindungsstrecke vom endgültigen Neupunkt P zum Festpunkt A , B ...

Die Werte (2) und (4) unterscheiden sich voneinander um die Änderung $d\varphi''$ am Richtungswinkel (nPA) ..., welchen eine Verschiebung des Anfangspunktes N der Strecke NA ,... um die Koordinatenzuschläge dx und dy , d. h. nach P hervorruft. Nach Gleichung (c) ist also

$$\begin{aligned} [nPA] &= (nPA) + a_A dx + b_A dy \\ [nPB] &= (nPB) + a_B dx + b_B dy \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Bezeichnen wir endlich, wie gewohnt und schon oben angegeben, den Unterschied: vorläufiger Wert — Beobachtungswert,

$$\text{hier } \{(nPA = v) - \alpha^0\} = v - \alpha \quad - \omega = \omega - \omega$$

gemessen Mittel Mittel

mit l' und die am endgültig orientierten Beobachtungswert $[\alpha]$ noch anzubringende Verbesserung mit v , so erhalten wir die **Fehlergleichungen**:

$$v_A = [nPA] - [\alpha_A] = (nPA) + a_A dx + b_A dy - \alpha_A^0 - z \\ = a_A dx + b_A dy - z + l'_A$$

$$v_B = [nPB] - [\alpha_B] = (nPB) + a_B dx + b_B dy - \alpha_B^0 - z \\ = a_B dx + b_B dy - z + l'_B$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Ihre Zahl ist gleich derjenigen der beobachteten inneren Richtungen, also gleich n_r . Setzen wir, um den Koeffizienten der dritten Unbekannten positiv zu erhalten, $d\omega = -z$, so daß der gesuchte Verdrehungswinkel

$$(59) \quad Z = \omega + z = \omega - d\omega,$$

so gehen die Fehlergleichungen über in:

$$(25e) \quad \begin{cases} v_A = d\omega + a_A dx + b_A dy + l'_A \\ v_B = d\omega + a_B dx + b_B dy + l'_B \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Die inneren Richtungen α , folglich auch die Absolutglieder l' sind in der Regel gleichwertig. Man erhält dann unter Beachtung, daß der Koeffizient der ersten Unbekannten $d\omega$ (sonst a) jetzt 1 heißt, für die Bestimmung der drei Unbekannten $d\omega, dx, dy$ an Stelle der Form (26) (s. S. 35) folgende Form der **drei Normalgleichungen**:

$$(26a) \quad \begin{cases} n_r \cdot d\omega + [a] dx + [b] dy + [l'] = 0 \\ [a] d\omega + [aa] dx + [ab] dy + [al'] = 0 \\ [b] d\omega + [ab] dx + [bb] dy + [bl'] = 0. \end{cases}$$

Der normale Weg der Auflösung würde nun eine zweimalige Reduktion der Normalgleichungen erfordern.

Der Umstand aber, daß alle Koeffizienten der ersten Unbekannten $d\omega$ in den Fehlergleichungen (25 e) einander gleich sind, ermöglicht eine Vereinfachung durch vorausgehende Eliminierung dieser ersten und **Zurückführung der Aufgabe auf den Fall zweier Unbekannter**.

Aus den Fehlergleichungen (63) erhält man jetzt zwei Normalgleichungen für die Berechnung der unbekanntenen Koordinatenzuschläge, nämlich

$$(64) \quad \begin{cases} [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] dx + [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] dy + [\mathfrak{A} \mathfrak{L}] = 0 \\ [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] dx + [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] dy + [\mathfrak{B} \mathfrak{L}] = 0 \end{cases}$$

und durch Reduktion

$$(65) \quad \begin{cases} dy = - \frac{[\mathfrak{B} \mathfrak{L} \cdot 1]}{[\mathfrak{B} \mathfrak{B} \cdot 1]} \\ P_{dy} = P_y = [\mathfrak{B} \mathfrak{B} \cdot 1] \end{cases}$$

und, da die Zahl der nötigen Richtungen = 3, die der überschüssigen also = $n_r - 3$ ist:

$$(66) \quad M_y = \pm \sqrt{\frac{[\mathfrak{L} \mathfrak{L} \cdot 2]}{(n_r - 3)[\mathfrak{B} \mathfrak{B} \cdot 1]}}$$

Wollen wir schließlich noch den Verdrehungszuschlag $z = -d\omega$ berechnen, so liefert Gleichung (62)

$$z = -d\omega = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy + \frac{[l']}{n_r}$$

und da $[l'] = 0$:

$$(67) \quad z = -d\omega = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy,$$

womit später im Abriß noch die Probe sich ergibt, daß der bei der Richtungsorientierung im endgültigen Neupunkt P auftretende Verdrehungswinkel sein muß

$$(59) \quad Z = \omega + z = \omega - d\omega.$$

Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen liefert auf gleiche Weise die zweite Unbekannte dx , ihr Gewicht P_x und ihren mittleren Fehler M_x .

Rechenproben. Werden mittels der ausgeglichenen Neupunkts-Koordinaten X und Y zum Schluß noch die end-

gültigen Richtungswinkel $[nPA] \equiv \varphi_A$; $[nPB] \equiv \varphi_B \dots$ der Neustrahlen berechnet und mit deren vorläufigen Werten (den Richtungswinkeln $nNA \equiv \nu_A$; $nNB \equiv \nu_B \dots$ der Verbindungsstrecken des Näherungspunktes N mit den Festpunkten) verglichen, so muß sein:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi_A'' \equiv \varphi_A - \nu_A = \alpha_A dx + \beta_A dy \\ d\varphi_B'' \equiv \varphi_B - \nu_B = \alpha_B dx + \beta_B dy \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ (s. S. 87 u. 100).}$$

Endlich erhalten wir für den ausgeglichenen Verdrehungswinkel Z des im Neupunkt beobachteten Richtungsbüschels α 2 Werte, welche miteinander übereinstimmen müssen, nämlich:

$$Z \equiv [\varphi] - [\alpha_{\text{gemessen}}] \equiv \omega + z = \omega + \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy$$

20. Beispiel: Der Neupunkt „Talwiese“ wurde durch Beobachtung vollständiger Richtungssätze nach trigonometrischen Festpunkten rückwärts eingeschnitten. Gesucht sind seine Koordinaten, ihre mittleren Fehler und der mittlere Fehler einer Richtung nach der Ausgleichung.

Gegeben bzw. gemessen:

In „Talwiese“ wurden beobachtet die Richtungen

	x	y	
1) Berg (Kircht. Helmstange)	-17621,09	+2576,85	0° 00' 00"
2) Galgen (Δ mitten)	-19851,27	-2435,86	13° 50' 62"
3) Koppental (Δ nördl.)	-19408,96	+1207,01	13° 88' 40"
4) Hohe Anwand (Δ östl.)	-28234,48	-1841,31	102° 28' 79"
5) Haide (Δ westl.)	-17903,76	-8587,76	252° 70' 40"
			<hr/> [] = 38' 21"

Lösung: Irgendwie seien die vorläufigen Koordinaten von Talwiese:

$$x_N = -20109,36 \text{ und } y_N = -4409,97$$

ermittelt worden.

Aus ihnen und den Koordinaten der Festpunkte F ergeben sich für die vorläufigen Richtungswinkel $\nu \equiv nNF$, die Streckenlängen s sowie die Richtungskoeffizienten α und β der Neustrahlen (unter Annahme des dm als Maßeinheit für dx und dy) folgende Werte:

	ν	$\log s$	s	α	β
1)	78° 21' 91''	3.87021	7417	+ 80,9	- 28,8
2)	91° 72' 39''	3.29905	1991	+ 317,1	- 41,5
3)	92° 10' 25''	3.75285	5661	+ 111,6	- 13,9
4)	180° 50' 70''	3.93051	8521	+ 22,5	+ 71,2
5)	330° 92' 35''	3.67438	4724	- 119,2	- 62,9

$$\frac{[a]}{n} = + 82,6 \quad \frac{[b]}{n} = - 15,2$$

Wir erhalten daraus:

$\nu - \alpha = \omega$	$(\nu - \alpha) - \omega$ Mittel = $l' = \varrho$		$\alpha - \frac{[a]}{n_r} = \mathfrak{A}$		$\beta - \frac{[b]}{n_r} = \mathfrak{B}$	
	+	-	+	-	+	-
78° 21' 91''	3''			1,7		13,6
78° 21' 77''		11''	234,5			26,3
78° 21' 85''		3''	29,0		1,3	
78° 21' 91''	3''			60,1	86,4	
78° 21' 95''	7''			201,8		47,7
$\omega = 78^\circ 21' 88''$ Mittel	13''	14''	263,5	263,6	87,7	87,6
	1''*)		0,1*)		0,1*)	

und als Koeffizienten der Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A} \mathfrak{A}] &= + 1000,0 & [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] &= - 17,2 \\ [\mathfrak{A} \varrho] &= - 426,1 & [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] &= + 106,3 \\ [\mathfrak{B} \varrho] &= + 17,4 & [\varrho \varrho] &= + 197,0 \\ [\mathfrak{C} \mathfrak{C}] &= + 451,5 \end{aligned}$$

Koeffizienten der Normalgleichungen und Reduktion zur Bestimmung der Unbekannten dy .

<u>+1000,0</u>	- 17,2	- 426,1	+ 556,7	
	(- 0,3)	(- 7,3)	(+ 9,6)	
.	<u>+106,3</u>	+ 17,4	+ 106,5	
		(- 181,6)	(+ 237,2)	
.		<u>+197,0</u>	- 211,7	
			(- 309,9)	
.			<u>+451,5</u>	soll 451,5

1. Reduktionsstufe:

<u>+106,0</u>	+ 10,1	+ 116,1
	(- 1,0)	(- 11,1)
.	<u>+15,4</u>	+ 25,5
		(- 127,2)
.		+ 141,6

*) Die kleinen Abweichungen vom Sollwert 0 entspringen Abrundungsfehlern.

2. Reduktionsstufe:

<u>+14,4</u>	+14,4
.	<u>+14,4</u>

$$dy = -\frac{10,1}{106,0} = -0,1 \text{ dm} = -0,01,$$

$$P_y = 106,$$

$$m_\alpha = \pm \sqrt{\frac{14,4}{2}} = \pm 2,7'',$$

$$M_y = \pm \frac{2,7}{\sqrt{106}} = \pm 0,26 \text{ dm} = \pm 0,03, \quad y = -4409,98 \pm 0,03.$$

Nach erfolgter Umstellung zum Zwecke der Berechnung der Unbekannten dx

Koeffizienten der Normalgleichungen und Reduktion:

<u>+106,3</u>	- 17,2	+ 17,4	+106,5
.	(- 2,8)	(+ 2,8)	(+ 17,2)
.	<u>+1000,0</u>	-426,1	+556,7
.	.	(- 2,8)	(- 17,4)
.	.	<u>+197,0</u>	-211,7
			(- 106,7)
.	.	.	<u>+451,5</u>

1. Reduktionsstufe:

<u>+997,2</u>	-423,3	+573,9
.	(-179,7)	(+243,6)
.	<u>+194,2</u>	-229,1
		(-330,3)
.	.	<u>+344,8</u>

2. Reduktionsstufe:

<u>+14,5</u>	+14,5
.	<u>+14,5</u>

$$dx = -\frac{-423,3}{997,2} = +0,4 \text{ dm} = +0,04,$$

$$P_x = 997,$$

$$M_x = \pm \sqrt{\frac{14,5}{2 \times 997}} = \pm 0,09 \text{ dm} = \pm 0,01, \quad x = -20109,32 \pm 0,01,$$

$$d_\omega = + (8,3 \cdot 0,4) + (-1,5) \cdot (-0,1) = +3,32 + 0,15 = +3,5''$$

$$Z = \omega_{\text{Mittel}} + d\omega = 78^\circ 21' 88'' + 3,5'' = 78^\circ 21' 91,5''.$$

(Dieser Wert muß — eine Rechenprobe — mit dem im Abriss zu bildenden Verdrehungswinkel übereinstimmen.)

Probe- und Schlußrechnung.

Endgültige Richtungswinkel φ und Verbesserungen $d\varphi''$.

	1) Berg			2) Galgen			3) Koppental			4) Hohe Anwand			5) Haide		
	o	l	ll	o	l	ll	o	l	ll	o	l	ll	o	l	ll
Endgültige Richtungswinkel φ	78	21	95	91	72	52	92	10	30	180	50	70	330	92	30
Vorläufige Richtungswinkel ν	78	21	91	91	72	39	92	10	25	180	50	70	330	92	35
$d\varphi'' = \varphi - \nu$	+4			+13			+5			0			-5		
a $d x$	+3,2			+12,7			+4,5			+0,9			-4,8		
b $d y$	+0,3			+0,4			+0,1			-0,7			+0,6		
$d\varphi'' = a dx + b dy =$	+3,5			+13,1			+4,6			+0,2			-4,2		

Abriß für den Neupunkt „Talwiese“.

	Gemessene Richtungen α			Endgültige Richtungswinkel φ			$Z = \varphi - \alpha$			Orientierte Richtungen β			Verbesserungen $v'' = \varphi - \beta$		v^2
	o	l	ll	o	l	ll	o	l	ll	o	l	ll	+	-	
1) Berg.....	0	00	00	78	21	95	78	21	95	78	21	91	4		16
2) Galgen...	13	50	62	91	72	52		21	90	91	72	53		1	1
3) Koppental.....	13	88	40	92	10	30		21	90	92	10	31		1	1
4) Hohe Anwand....	102	28	79	180	50	70		21	91	180	50	70		0	0
5) Haide....	252	70	40	330	92	30		21	90	330	92	31		1	1
	[α]	38	21	47	77		$Z = 78\ 21\ 91$			47	76		4	3	19
	$5\omega =$	09	55		-1		Mittel						1		(soll 14,5
	[β]	47	76	47	76		in Übereinstimmung mit dem Reduktionsergebnis (s. S. 115)								s. S. 115)

Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für **vereinigt**es Vor- und Rückwärtseinschneiden.

Sind zur Bestimmung der Koordinaten x_P und y_P eines Neupunktes P Winkel oder Richtungen sowohl in den Festpunkten A, B, \dots nach dem Neupunkt („äußere“ oder „Vorwärts“richtungen), als auch im Neupunkt nach den Festpunkten beobachtet („innere“ oder „Rückwärts“richtungen), so kann man für die ersteren die Fehlergleichungen S. 92, für die letzteren diejenigen S. 101 und 110 gleichzeitig zur Anwendung bringen.

Man hat also statt n_v , wie im Falle des Vor-, oder n_r , wie im Falle des Rückwärtseinschnittes, jetzt $(n_v + n_r)$ Fehlergleichungen, wenn von den Festpunkten zum Neupunkt herein n_v , vom Neupunkt zu den Festpunkten hinaus n_r Strahlen beobachtet wurden. Die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen setzen sich also aus $(n_v + n_r)$ Summanden zusammen. Wir erkennen ferner, daß die Richtungskoeffizienten a und α , bzw. b und β der Fehlergleichungen nach Vorzeichen und Größe einander gleich sind, wenn sie sich auf denselben Bestimmungsstrahl beziehen, d. h. wenn dieser zweiseitig, sowohl von außen nach innen, als von innen nach außen beobachtet wurde. Für den Strahl AP ist z. B.:

$$a_A = -\frac{\sin n AP}{AP} \varrho'' = +\frac{\sin n PA}{AP} \varrho'' = \alpha_A$$

$$b_A = +\frac{\cos n AP}{AP} \varrho'' = -\frac{\cos n PA}{AP} \varrho'' = \beta_A,$$

ebenso für den Strahl BP bzw. PB usw.

Nur die **Gewichte** p der Absolutglieder $l_A, l_B, \dots, l_1, l_2, \dots, l'_A, l'_B, \dots$ bzw. $\varrho_A, \varrho_B, \dots$ verlangen jetzt, da gleichzeitig innere und äußere Richtungen zur Be-

stimmung der Unbekannten verwendet werden, noch eine vergleichende Untersuchung.

Als Gewicht p einer äußeren Richtung oder der Absolutglieder $l_A, l_B \dots$ haben wir S. 88 u. 89 für den Fall des Vorwärtseinschnittes festgestellt:

a) im Falle der Winkelmessung: $p_i = 1, 2 \dots n_f$, wenn der Neustrahl durch $1, 2 \dots n_f$ gemessene Winkel mit $1, 2 \dots n_f$ Feststrahlen verbunden ist;

b) im Falle der Richtungsbeobachtung: $p_i = p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$
wenn außer dem Neustrahl noch n_f Feststrahlen dem beobachteten Richtungsbüschel angehören.

Die Gewichte p_i der inneren Winkel und Richtungen oder der betreffenden Absolutglieder $l_1, l_2 \dots$ bzw. l'_A, l'_B und ϱ_A, ϱ_B sind für den Fall des Rückwärtseinschnittes je unter sich gleich, also nicht weiter zu berücksichtigen. Sollen sie aber mit äußeren Richtungen in Verbindung gebracht werden, so müssen wir das Verhältnis der beiderseitigen Gewichte feststellen.

Dies ist bei vorhandener Winkelmessung sehr einfach, da bei gleich genauer Beobachtung jedem Winkel — gleichviel, ob sein Scheitel im Festpunkt oder im Neupunkt liegt — gleiches Gewicht zukommt.

Anders ist es bei der Richtungsbeobachtung. Denken wir uns das innere Richtungsbüschel mit dem Scheitel im endgültigen Neupunkt P nach den benützten fehlerfreien Festpunkten $A, B \dots$ orientiert, so wird jede beobachtete orientierte Richtung um einen gewissen Fehlerbetrag von ihrem wahrscheinlichen Wert, dem Richtungswinkel $[nPA], [nPB] \dots$ abweichen, der sich wie bei der Ableitung S. 89 zusammensetzt aus dem Beobachtungsfehler m_x einer inneren Richtung und aus dem

Fehler $m_z = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_r}}$ des Verdrehungswinkels Z [s. Gleichung (59)]. Daher ist der mittlere Fehler einer orientierten inneren Richtung (im Falle der Beibehaltung dreier Unbekannten $d\omega$, dx , dy gleich demjenigen des Absolutgliedes l') analog S. 89):

$$m_i = m_{i'} = m_\alpha \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}},$$

und da m_α für innere und äußere Richtungen gleich ist analog Gleichung (56)

$$(68) \quad p_i \equiv p_{i'} = \frac{n_r}{n_r + 1}.$$

Wendet man das Verfahren der vorgängigen Eliminierung von $d\omega$ an, so wird das Absolutglied statt l' :

$$\div \cdot \mathcal{L} \equiv l' - \frac{[l']}{n},$$

und sein mittlerer Fehler

$$m_{\mathcal{L}} = \sqrt{m_i^2 + \frac{m_i^2}{n_r}} = m_i \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}} = m_\alpha \cdot \frac{n_r + 1}{n_r}.$$

Damit wird

$$(68a) \quad p_{\mathcal{L}} = \left(\frac{n_r}{n_r + 1} \right)^2.$$

Mit wachsendem n_r konvergieren $\frac{n_r}{n_r + 1}$ und $\left(\frac{n_r}{n_r + 1} \right)^2$ gegen 1. Da nun $n_r \leq 4$, wenn im Fall des Rückwärtschnittes überhaupt von Ausgleichung die Rede sein soll, so setzen amtliche Vermessungsanweisungen der Einfachheit halber

$$p_i = p_{i'} = p_{\mathcal{L}} = 1.$$

Die Zahl der überschüssigen Richtungen zum Zwecke der Fehlerberechnung ergibt sich aus der Betrachtung, daß im Falle der Richtungsbeobachtung zur Berechnung der drei Unbekannten dx , dy und x jedenfalls drei Bestimmungsstücke nötig, also $(n_v + n_r - 3)$ Stücke überschüssig sind.

Wir haben also bei **vereinigtem Vor- und Rückwärts-einschneiden**:

A. Im Falle der **Winkelbeobachtung**

	Fehlergleichungen	Gewicht p
n_v Gleichungen für n_v Zielungen vorwärts	$\left\{ \begin{array}{l} v_A = a_A dx + b_A dy + l_A \\ v_B = a_B dx + b_B dy + l_B \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} n_{r_A} \\ n_{r_B} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$
n_r Gleichungen für n_r Zielungen rückwärts	$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \mathfrak{A}_1 dx + \mathfrak{B}_1 dy + l_1 \\ v_2 = \mathfrak{A}_2 dx + \mathfrak{B}_2 dy + l_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$

Normalgleichungen

$$([paa] + [\mathfrak{A}\mathfrak{A}]) dx + ([pab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) dy + ([p al] + [\mathfrak{A}l]) = 0,$$

$$([pab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) dx + ([pbb] + [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]) dy + ([pbl] + [\mathfrak{B}l]) = 0.$$

Führt man für die Koeffizienten von dx und dy in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein, und setzt z. B.

$$([paa] + [\mathfrak{A}\mathfrak{A}]) = [paa] \text{ usw.},$$

so erhält man

$$dy = - \frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$$

$$P_v = [pbb \cdot 1]$$

$$M_v = \pm \sqrt{\frac{[p ll \cdot 2]}{[pbb \cdot 1] \cdot (n_v + n_r - 2)}}.$$

B. Im Falle der **Richtungs**beobachtung und:

1) der Beibehaltung der dritten Unbekannten $d\omega$:

	Fehlergleichungen	Gewicht p der Beobachtung oder des Absolutgliedes
n_v Gleichungen für n_v Zielungen vorwärts	$\begin{cases} v_A = a_A dx + b_A dy + l_A \\ v_B = a_B dx + b_B dy + l_B \\ \vdots \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{n_{f_A}}{n_{f_A} + 1} \\ \frac{n_{f_B}}{n_{f_B} + 1} \\ \vdots \end{cases}$
n_r Gleichungen für n_r Zielungen rückwärts	$\begin{cases} v_A = d\omega + a_A dx + b_A dy + l'_A \\ v_B = d\omega + a_B dx + b_B dy + l'_B \\ \vdots \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{n_r}{n_r + 1} \\ \frac{n_r}{n_r + 1} \\ \vdots \end{cases}$

} oder genähert 1

Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
 [p_r] d\omega + [p_r a] dx + [p_r b] dy + [p_r l] &= 0, \\
 [p_r a] d\omega + ([p_v a a] + [p_r a a]) dx + ([p_v a b] + [p_r a b]) dy + ([p_v a l] + [p_r a l]) &= 0, \\
 [p_r b] d\omega + ([p_v a b] + [p_r a b]) dx + ([p_v b b] + [p_r b b]) dy + ([p_v b l] + [p_r b l]) &= 0.
 \end{aligned}$$

Führt man für die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein und setzt:

$$\begin{aligned}
 [p_r] &= [p a a], \quad [p_r a] = [p a b], \quad [p_r b] = [p a c], \\
 ([p_v a a] + [p_r a a]) &= [p b b], \quad ([p_v a b] + [p_r a b]) = [p b c] \\
 &\text{usw.,}
 \end{aligned}$$

so hat man

$$\begin{aligned}
 dy &= - \frac{[p c l \cdot 2]}{[p c c \cdot 2]}, \\
 P_v &= [p c c \cdot 2], \\
 M_v &= \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 3]}{[p c c \cdot 2] (n_v + n_r - 3)}}.
 \end{aligned}$$

Im Falle der Richtungsbeobachtung und:

2) der vorgängigen Eliminierung der Unbekannten $d\omega$:

	Fehlergleichungen	Gewicht p der Beobachtung oder des Absolutgliedes
n_v Gleichungen für n_v Zielungen vorwärts	$\begin{cases} v_A = a_A dx + b_A dy + l_A \\ v_B = a_B dx + b_B dy + l_B \\ \vdots \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{n_{r_A}}{n_{r_A} + 1} \\ \frac{n_{r_B}}{n_{r_B} + 1} \\ \vdots \end{cases}$
n_r Gleichungen für n_r Zielungen rückwärts	$\begin{cases} v_A = \mathfrak{A}_A dx + \mathfrak{B}_A dy + \mathfrak{L}_A \\ v_B = \mathfrak{A}_B dx + \mathfrak{B}_B dy + \mathfrak{L}_B \\ \vdots \end{cases}$	$\begin{cases} \left(\frac{n_r}{n_r + 1}\right)^2 \\ \left(\frac{n_r}{n_r + 1}\right)^2 \\ \vdots \end{cases}$
	} oder genähert 1	

Normalgleichungen.

$$([p_v a a] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{A}]) dx + ([p_v a b] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dy + ([p_v a l] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{L}]) = 0.$$

$$([p_v a b] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dx + ([p_v b b] + [p_r \mathfrak{B} \mathfrak{B}]) dy + ([p_v b l] + [p_r \mathfrak{B} \mathfrak{L}]) = 0.$$

Führt man für die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein, setzt also

$$([p_v a a] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{A}]) = [p a a] \quad \text{usw.},$$

so wird wieder

$$dy = - \frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]},$$

$$P_y = [p b b \cdot 1],$$

$$M_y = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 2]}{[p b b \cdot 1](n_v + n_r - 3)}}.$$

21. Beispiel: Zur Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten des trigonometrischen Neupunktes 1 wurden auf ihm Richtungen nach benachbarten Dreieckspunkten

und in letzteren solche nach dem Neupunkte beobachtet. Die Koordinaten der benutzten Dreieckspunkte sind bekannt und als fehlerfrei anzunehmen.

Gemessen wurde:

Im Neupunkt 1 nach	Killesberg	399° 99' 64"
	Feuerbach	122° 19' 08"
	Eychen	189° 23' 41"
	Zuffenhausen	232° 97' 25"
In Sandäcker nach	Eychen	355° 00' 62"
	Feuerbach	399° 97' 65"
	Neupunkt 1	4° 68' 37"
	Killesberg	16° 78' 41"
In Eychen nach	Feuerbach	49° 14' 48"
	Neupunkt 1	399° 98' 99"
	Killesberg	2° 37' 63"
In Killesberg nach	Feuerbach	0° 03' 93"
	Eychen	49° 28' 01"
	Neupunkt 1	57° 66' 26"
	Falget	314° 31' 56"

Gegebene Koordinaten:

	x	y
	+	+
Eychen	32632,85	8101,42
Falget	31114,51	8061,89
Feuerbach	31962,93	7858,74
Killesberg	31690,30	8485,65
Sandäcker	31940,47	7360,85
Zuffenhausen	34691,00	9175,86

Lösung: Für den Neupunkt 1 seien auf irgendwelche Weise die Näherungskordinaten:

$$X_N = +31909,96, \quad Y_N = +8428,22$$

ermittelt worden.

Mittels der Formel:

$$\operatorname{tg} n AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

seien ferner wie bisher die in Spalte 3 von Formular 1 (Abriß s. S. 81) mit senkrechten Ziffern eingetragenen Richtungswinkel φ der Verbindungsstrecken zwischen den durch obige Koordinaten bestimmten Festpunkten berechnet. Damit erfolgt die Orientierung der in den Festpunkten beobachteten und in Spalte 2 des Formulars 1 eingetragenen Richtungsbüschel α .

Der hierfür nötige Verdrehungswinkel ω ist in Spalte 4, die orientierten Richtungen β (worunter auch diejenige des Neustrahles) sind in Spalte 5 und die hiernach sich ergebenden Beobachtungsverbesserungen v für die Feststrahlen in Spalte 6 berechnet.

Die in den Festpunkten beobachteten orientierten Richtungen β für die Neustrahlen werden jetzt aus Formular 1 als „Richtungen vorwärts“, die im Neupunkt beobachteten Richtungen α direkt aus dem Feldbuch als „Richtungen rückwärts“ in das Formular 2 S. 126, Abteilung 1, Spalte 2 übertragen. Gleichzeitig erfolgt der Eintrag der im Formular 1 zur Orientierung der Vorwärtsrichtungen benutzten Zahl n_f von Feststrahlen in Spalte 4 S. 126 und die Berechnung der Richtungsgewichte

$p\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$ (den Richtungen rückwärts möge durchweg das Gewicht 1

zugeschrieben werden). Hieraus ergeben sich die Gewichtungsfaktoren \sqrt{p} in Spalte 7 des Formulars 2 (Abteilung 1). Durch die Orientierung der Vorwärtsrichtungen (Verdrehung des ganzen Büschels der in den Festpunkten beobachteten Richtungen um den Winkel ω) in Formular 1 ist an deren gegenseitiger Lage, also an ihrer Eigenschaft als Beobachtungswerte, materiell nichts geändert. Mit ihnen werden nun die aus den Näherungskordinaten für den Neupunkt abgeleiteten Richtungswinkel $\nu = (NAP), (NBP) \dots$ (s. Spalte 3 der Abteilung 1 von Formular 2) verglichen, wobei sich in Spalte 5 die Absolutglieder l der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen ergeben.

Auch die Rückwärtsrichtungen α sollten, und zwar zunächst nach den vorläufigen Richtungswinkeln ν (s. Spalte 3 von Formular 2), vorläufig orientiert werden:

$$\alpha_0 = \alpha + \omega,$$

wodurch sich dann die Absolutglieder l' ergeben würden aus:

$$l' = \nu - \alpha_0 = (\nu - \alpha) - \omega.$$

Die letztere Gleichung zeigt aber, daß zur Bildung dieser Absolutglieder die Durchführung der vorläufigen Orientierung entbehrlich ist: wir finden sie kürzer als Überschuß der Einzelwerte $(\nu - \alpha)$ für den Verdrehungswinkel über dessen Mittelwert ω .

Gleichzeitig mit der Berechnung der Richtungswinkel ν der Verbindungsstrecken vom vorläufigen Punkt 1 nach den zu seiner endgültigen Bestimmung zu benützenden Festpunkten, oder umgekehrt mögen die Strecken selbst

$$s = \frac{\Delta y}{\sin \nu} = \frac{\Delta x}{\cos \nu}$$

und die Richtungskoeffizienten

$$a = \frac{\sin \nu}{s} \varrho, \quad b = -\frac{\cos \nu}{s} \varrho$$

(ν vom Neupunkt zum Festpunkt) logarithmisch oder mittels eines speziellen Hilfsmittels (Zahlentafel, Rechenschieber, Diagramm) gewonnen worden sein. Letztere werden in Spalte 6 des Formulars 2 eingetragen. Zur Erzielung bequemer Rechnung sind dabei möglichst gleiche Zahlenwerte für die Absolutglieder l bzw. l' und für die Richtungskoeffizienten a und b (Koeffizienten der Fehlergleichungen) erwünscht. Dies wird erreicht durch Wahl solcher Maßeinheiten, welche der nor-

malen Beobachtungsgenauigkeit und der mittleren Strahlenlänge angepaßt sind oder durch Ersetzung der Unbekannten dx und dy etwa durch $10 dx$ und $10 dy$. [Letzteres kommt in der Wirkung der Wahl des Dezimeters statt des Meters als Streckeneinheit für diese Unbekannten (aber auch nur für sie!) gleich.] Als Winkeleinheit (für l, l', ϱ) wählen wir im vorliegenden Fall die Dekasekunde.

Nun bilden wir in den Spalten 8–10 des Formulars 2, Abteilung 1 durch Multiplikation der Koeffizienten a und b und der Absolutglieder l je mit $\sqrt{p_\beta}$ die Koeffizienten $a\sqrt{p_\beta}$, $b\sqrt{p_\beta}$, $l\sqrt{p_\beta}$ der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen, durch Subtraktion der Durchschnittswerte $\alpha_0 \equiv \frac{[a_r]}{n_r}$ und $\beta_0 \equiv \frac{[b_r]}{n_r}$ für a und b von diesen Richtungskoeffizienten und Multiplikation mit $\sqrt{p_i}$ diejenigen für die Rückwärtsrichtungen

$$(\mathfrak{A} = (a - \alpha_0)\sqrt{p_i}; \quad \mathfrak{B} = (b - \beta_0)\sqrt{p_i}; \quad \mathfrak{L} = l'\sqrt{p_i}).$$

Für letztere besteht die Probe:

$$[\mathfrak{A}] = 0, \quad [\mathfrak{B}] = 0, \quad [\mathfrak{L}] = 0.$$

Schließlich erfolgt die Bildung der Summenglieder

$$s\sqrt{p_\beta} = a\sqrt{p_\beta} + b\sqrt{p_\beta} + l\sqrt{p_\beta}$$

für die Vorwärts-, bzw.

$$s\sqrt{p_\beta} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$$

für die Rückwärtsrichtungen, wobei die Rechenprobe sich ergibt:

$$\left[\begin{array}{c} a\sqrt{p_\beta} \\ \mathfrak{A} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} b\sqrt{p_\beta} \\ \mathfrak{B} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} l\sqrt{p_\beta} \\ \mathfrak{L} \end{array} \right] = [s\sqrt{p_\beta}].$$

(Durch Benutzung dekadischer Ergänzungen wird die Summierung hier, wie auch später in Abteilung 2 des Formulars 2, erheblich bequemer.)

Die Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen erfolgt in Abteilung 2 des Formulars 2. Zur Ausrechnung der einzelnen, hernach zu addierenden Quadrate und Produkte werden Logarithmen-, Quadrat- und Produktentafeln, Rechenmaschinen, oder — bei ungefährgleich- und nicht allzu großen Koeffizienten — Rechenschieber benutzt. Die in Abteilung 2 gebildeten Koeffizienten der Normalgleichungen werden nach Abteilung 3 des Formulars 2 übertragen, wo die Reduktion der Gleichungen unter Beachtung der Rechenproben entsprechend dem Vordruck und den früheren Ableitungen erfolgt. Abteilung 4 ist für die Berechnung der mittleren Fehler der Beobachtungswerte und der Unbekannten bestimmt.

Eine durchgreifende Rechenprobe erzielt man schließlich in Formular 1 S. 81 nach Gewinnung der endgültigen Koordinaten des Neupunktes durch Aufstellung des „Abrisses“ auch für ihn und Abschluß desselben für die benutzten Festpunkte. Die endgültigen Richtungswinkel φ vom Neu- nach den benutzten Festpunkten oder umgekehrt (welche von den früher berechneten, vorläufigen Werten ν , um den Betrag $d\varphi \equiv \varphi - \nu = a dx + b dy$ abweichen, der zur Probe aus letzterer Gleichung mittels Rechenschiebers ermittelt wird und in den hier vorliegenden Fällen beträgt:

für Killesberg	+1' 63"	bzw.	+1' 62"
„ Feuerbach	+2' 43"	„	+2' 43"
„ Eychen	- 12"	„	- 12"
„ Zuffenhausen	- 39"	„	- 39"
„ Sandäcker	+1' 35"	„	+1' 36"

mögen nach den in der Einleitung hierfür angegebenen Formeln berechnet, und nach Spalte 3 des Abrisses sowohl zu den Festpunkten, als zum Neupunkt übertragen sein (vgl. schräge Ziffern). Nun wird das auf letzterem beobachtete Richtungsbüschel α zum Zweck seiner Orientierung um den Winkel $\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_r}$ verdreht, wobei die orientierten Richtungswerte β , wie früher für die Festpunkte, so jetzt auch für den

P. Neu-

Näherungskoord.: $X_N = +31\,909,96$, $Y_N = +8428,22$; Verbesserung.: $dx = -0,23$,

Formular 2. Abt. 1: Bildung

1. Bezeichnung der Festpunkte	2.			3.			4.			5. $l = v - \beta$ $l' = (v - \alpha) - \omega$ Deka- sek.
	Beobachtete Richtungen vorwärts = β , beob. Richtungen rückwärts = α			Aus Näherung berechnete Richtungswinkel ν			Anzahl der benutzten festen Richtungen n_f	Gewicht $p\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$		
	o	′	″	o	′	″	Unterschied $\nu - \alpha$ $\omega = \frac{\nu - \alpha}{n_r}$			
							o	′	″	±
										Richtungen
Sandäcker.....	101	82	90	101	81	92	3			- 9,8
Eychen.....	172	97	09	172	97	06	2			- 0,3
Killesberg.....	383	73	86	383	72	00	3			- 18,6
										Richtungen
Killesberg.....	399	99	64	183	72	00	183	72	36	- 6,6
Feuerbach.....	122	19	08	305	90	45	183	71	37	- 16,5
Eychen.....	189	23	41	372	97	06	183	73	65	+ 6,3
Zuffenhausen.....	232	97	25	16	71	93	183	74	68	+ 16,6
$[[\alpha] =$		39	38	$[\nu] =$	31	44		12	06	- 23,1
								4		+ 22,9
							$\omega = 183$	73	02	

Neupunkt erscheinen. Dabei muß dieser endgültige Verdrehungswinkel ω von dem in Spalte 4 der Abteilung 1 vom Formular 2 benutzten vorläufigen um den Betrag

$$z = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy = a_0 dx + b_0 dy$$

abweichen:

$$\omega_{\text{endgültig}} = \omega_{\text{vorläufig}} + z.$$

Bildet man schließlich sämtliche Differenzen $v = \varphi - \beta$, und multipliziert jede Verbesserung v mit dem zugehörigen \sqrt{p} , so muß, als Schlussprobe, sein:

$$[p v v] = [p l l \cdot 2].$$

punkt 1.

$dy = +0,12$; Endgült. Koord.: $X = +31909,73 \pm 0,03$, $Y = +8428,34 \pm 0,01$.

der Fehlergleichungen.

6.		7.	8.	9.	10.	11.		
Koeffizienten der Unbekannten		\sqrt{p}	$a \sqrt{p_\beta}$ $\mathfrak{A} = (a - a_0) \sqrt{p_i}$	$b \sqrt{p_\beta}$ $\mathfrak{B} = (b - b_0) \sqrt{p_i}$	$l \sqrt{p_\beta}$ $\mathfrak{L} = l' \sqrt{p_i}$	$s \sqrt{p} = (a \sqrt{p} + b \sqrt{p} + l \sqrt{p})$ bzw. $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$		
dx	dy							
a $a_0 = \frac{[a_r]}{n_r}$	b $b_0 = \frac{[b_r]}{n_r}$							
\pm	\pm		\pm	\pm	\pm	\pm		
vorwärts.								
-	6,0	-	0,2	-	8,8	-	14,4	
-	3,3	-	7,3	-	0,2	-	8,6	
+	7,1	+	27,1	+	16,7	+	14,1	
rückwärts.								
+	7,1	+	27,1	+	6,6	+	25,1	
-	11,1	-	1,0	-	16,5	-	31,1	
-	3,3	-	7,3	-	6,3	-	6,8	
+	0,6	-	2,1	+	16,6	+	12,6	
+	7,7	+	27,1	Probe {	+	22,9	+	37,7
-	14,4	-	10,4		-	23,0	-	37,9
$a_0 = -\frac{6,7}{4}$ $= -1,7$	$b_0 = +\frac{16,7}{4}$ $= +4,2$	+	17,5		+	47,3	+	51,8
		-	19,0		-	29,0	-	60,9
		[] =	-	1,5	+	18,3	-	9,1

Form. 2. Abt. 2: Bildung der Koeff. für die Normalgleichungen.

	$p_{\beta a a}$ ⓂⓂ	$p_{\beta b b}$ ⓈⓈ	$p_{\beta l l}$ ℓℓ	$p_{s s}$		$p_{\beta a b}$ ⓂⓈ	$p_{\beta a l}$ Ⓜℓ	$p_{\beta b l}$ Ⓢℓ		
	+	+	+	+						
1	29,16	0,04	77,44	207,36	+	1,08	+	47,52	+	1,76
2	6,76	33,64	0,04	73,96	+	15,08	+	0,52	+	1,16
3	40,96	595,36	278,89	198,81	+	156,16	-	106,88	-	407,48
1	77,44	524,41	43,56	630,01	+	201,52	-	58,08	-	151,14
2	88,36	27,04	272,25	967,21	+	48,88	+	155,10	+	85,80
3	2,56	132,25	39,69	46,24	+	18,41	-	10,08	-	72,45
4	5,29	39,69	275,56	158,76	-	14,49	+	38,18	-	104,58
=	250,53 [paa]	1352,43 [pbb]	987,43 [pll]	2282,35 [pss]	+	426,64 [pab]	+	66,28 [pal]	-	646,93 [pbl]

Normale Bezeichnung.

Formular 2. Abt. 3: Auflösung der Normalgleichungen.

	I. Für die Unbekannte dy				Probe [pss]				
	a]	b]	l]	s]					
$[pa]$	+	250,5	+	426,6	+	66,3	+	743,4	ist +2282,3 soll +2282,3
$[pb]$			+	1352,4	-	646,9	+	1132,1	
$-\frac{[pab]}{[paa]}[pa]$			-	726,5	-	112,9	-	1266,0	
$[pl]$					+	987,4	+	406,8	
$-\frac{[pal]}{[paa]}[pa]$					-	17,5	-	196,7	
				b·1]	l·1]	s·1]			
$dy = -\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}_I$	I. Red.-Stufe	$[pb]$	+	625,9	-	759,8	-	133,9	(statt -133,9)
$-\frac{-759,8}{625,9}$		$[pl]$			+	969,9	+	210,1	(statt +210,1)
$= +1,2 \text{ dm}$		$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}[pb]$			-	922,4	-	162,6	
	II.				l·2]	s·2]			
				$[pl]$	+	47,5	+	47,5	

Formular 2. Abt. 3.

		II. Bestimmung der Unbekannten dx (nach Umstellung der Koeff.)				
		a]	b]	l]	s]	
$[pa$	+	1352,4	+ 426,6	- 646,9	+ 1132,1	
$[pb$			+ 250,5	+ 66,3	+ 743,4	
$-\frac{[pab]}{[paa]} [pa$			- 134,6	+ 204,1	- 357,1	
$[pl$				+ 987,4	+ 406,8	[] ist 2282,3 soll 2282,3
$-\frac{[pat]}{[paa]} [pa$				- 309,5	+ 541,5	
			b · 1]	l · 1]	s · 1]	
$dx = -\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]_{II}}$		$[pb$	+ 115,9	+ 270,4	+ 386,3	(statt + 336,3)
		$[pl$		+ 677,9	+ 948,3	(statt + 948,3)
$= -\frac{270,4}{115,9}$		$-\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} [pb$		- 630,9	- 901,2	
$= -2,3 \text{ dm}$				l · 2]	s · 2]	
	II.		$[pl$	+ 47,0	+ 47,1	soll n. Red. I 47,5

Formular 2. Abt. 4:

Berechnung der Verbesserungen und mittleren Fehler.

$dx = -0,23 \text{ m}$	$M_X = \pm 0,03 \text{ m}$	$[p v v] = [p l l] \cdot 2 = +$	47,5
		$n = n_v + n_r - 3 = +$	4
		$m^2 = \frac{[p l l \cdot 2]}{n} = +$	11,9
		$m \pm$	3,5 Dekasek.
$dy = +0,12 \text{ m}$	$M_Y = \pm 0,01 \text{ m}$	$\sqrt{p_X} = \sqrt{[p b b \cdot 1]_{II}} = \pm$	$\sqrt{115,9} = \pm 10,8$
Zuschlag zum vorläufigen Verdrehungswinkel des im Neupunkt gemessenen Rich- tungsbüschels		$\sqrt{p_Y} = \sqrt{[p b b \cdot 1]_I} = \pm$	$\sqrt{625,9} = \pm 25$
$z = a_0 dx + b_0 dy$		$m_X = \frac{m}{\sqrt{p_X}} = \pm$	$\frac{3,5}{10,8} = \pm 0,32 \text{ dm}$
$= (-1,7) (-2,3) + (4,2 \times 1,2)$		$m_Y = \frac{m}{\sqrt{p_Y}} = \pm$	$\frac{3,5}{25} = \pm 0,14 \text{ dm}$
$= +3,9 + 5,0$			
$= 8,9 \text{ Dekasek.}$			
$= +89''$			
soll (s. Abriß S. 81, bzw. Spalte 4 von Formular 2, Abt. 1):			
$183^\circ 73' 90'' - 183^\circ 73' 02''$			
$= +88''$			
(Abrundungsfehler 1')			

III. Abschnitt.

Bedingte direkte Beobachtungen.

Müssen die λ Beobachtungsgrößen, deren bestmögliche Werte $X, Y \dots$ wir aus den mit kleinen Ungenauigkeiten behafteten Beobachtungswerten $L_1, L_2 \dots$ ermitteln sollen, gleichzeitig β in Gleichungsform ausgedrückte Nebenbedingungen streng erfüllen, so eliminieren wir **entweder** mittels der letzteren β von ihnen, indem wir sie in den $\varkappa - \beta$ übrigen ausdrücken und berechnen alsdann diese nach dem Verfahren der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, **oder** wir gesellen den \varkappa ursprünglichen noch β neue, vorgängig zu bestimmende Unbekannte, die „**Korrelaten** k “ hinzu, mit denen die \varkappa ersteren in möglichst einfacher Beziehung stehen. Aus ihnen leiten wir hernach die eigentlichen Unbekannten, nämlich die ausgeglichenen Werte $X, Y \dots$ der Beobachtungsgrößen ab. Das letztere, der Ausgleichung bedingter Beobachtungen speziell zugehörige Verfahren ist das einfachere jedenfalls dann, wenn die Zahl β der Bedingungsgleichungen kleiner ist, als die halbe Zahl $\left(\frac{\varkappa}{2}\right)$ der ursprünglichen Unbekannten und wenn die Elimination von β der letzteren mit Hilfe der Bedingungsgleichungen unbequem ist.

Den Bedingungsgleichungen

$$(73a) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(X, Y, \dots) = 0 \\ \vdots \\ F_\beta(X, Y, \dots) = 0 \end{array} \right\}$$

werden die Beobachtungswerte L wegen der ihnen anhaftenden Ungenauigkeiten nicht scharf genügen. Vielmehr

werden bei Einsetzung der letzteren in die Bedingungs-
gleichungen Widersprüche w sich einstellen, welche an
Stelle der 0 in (73 a) treten und welche letztere Gleichungen
überführen in:

$$(73\text{ b}) \quad \begin{cases} F_1(L_1, L_2, \dots) = w_1 \\ \vdots \\ F_\beta(L_1, L_2, \dots) = w_\beta. \end{cases}$$

Zur Annullierung der Widersprüche w werden wir den
Beobachtungswerten L kleine positive oder negative Ver-
besserungszuschläge v erteilen müssen, wodurch (73 a) und
(73 b) übergehen in:

$$(73\text{ c}) \quad \begin{cases} F_1(L_1 + v_1, L_2 + v_2, \dots) \\ \quad = F_1(L_1, L_2, \dots) + v_1 \frac{\partial F_1}{\partial L_1} + v_2 \frac{\partial F_1}{\partial L_2} + \dots = 0 \\ \vdots \\ F_\beta(L_1 + v_1, L_2 + v_2, \dots) \\ \quad = F_\beta(L_1, L_2, \dots) + v_1 \frac{\partial F_\beta}{\partial L_1} + v_2 \frac{\partial F_\beta}{\partial L_2} + \dots = 0 \end{cases}$$

Durch Subtraktion der beiden zusammengehörigen
Gleichungen jeder der beiden Gruppen (73 c) und (73 b)
erhalten wir daraus unter gleichzeitiger Benutzung der
Substitutionsgleichungen

$$(25\text{ d}) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial L_1} = a_1, & \frac{\partial F_1}{\partial L_2} = a_2, \dots \\ \frac{\partial F_2}{\partial L_1} = b_1, & \frac{\partial F_2}{\partial L_2} = b_2, \dots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

die reduzierten Bedingungs-gleichungen:

$$(73\text{ d}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{array}{l} [av] = -w_1 \\ [bv] = -w_2 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

leitungen von φ nach den einzelnen Zuschlägen v , die „Korrelatengleichungen“ erfüllt wird:

$$(75) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} = 2v_1 - 2(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v_2} = 2v_2 - 2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v_x} = 2v_x - 2(a_x k_1 + b_x k_2 + \dots) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \vdots \\ \\ \end{array}$$

oder vereinfacht:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots \\ \vdots \\ v_x = a_x k_1 + b_x k_2 + c_x k_3 + \dots \end{array} \right\}$$

Aus den Korrelatengleichungen (75) können wir die x unbekanntenen Verbesserungszuschläge v berechnen, sobald uns die β Korrelaten k bekannt sind. Um letztere zu finden setzen wir die v aus (75) in (73d) ein. Horizontale Addition liefert uns dann zur Berechnung der Korrelaten β Normalgleichungen:

$$(76) \left\{ \begin{array}{l} [a a] k_1 + [a b] k_2 + [a c] k_3 + \dots + w_1 = 0 \\ [a b] k_1 + [b b] k_2 + [b c] k_3 + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

die wir zur Bestimmung der k genau ebenso benutzen, wie die Normalgleichungen in Kapitel 2 bzw. 3 des II. Abschnittes zur Bestimmung der x , y usw.

Bilden wir schließlich entweder aus den berechneten Verbesserungszuschlägen v direkt, oder mittels

$$(78) \quad - [k w] = [v v]$$

noch die Fehlerquadratsumme, so erhalten wir, da β überschüssige Beobachtungen vorhanden sind (die wir mittels der Bedingungsgleichungen hätten eliminieren können), für den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$(77) \quad m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{\beta}}.$$

Im Fall

ungleich genauer Beobachtungswerte $L_1, L_2 \dots$ denen bzw. die Gewichte $p_1, p_2 \dots$ zukommen, ändert sich nur die Minimumsbedingung (4) in

$$(17) \quad -[p v v] = \text{Min.}$$

Damit geht (74) in folgende Form über:

$$(74a) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(v_1, v_2, \dots) &\equiv p_1 v_1^2 - 2v_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots) \\ &+ p_2 v_2^2 - 2v_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots) + \dots \\ &- 2(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots), \end{aligned} \right.$$

woraus für Berechnung der Zuschläge v aus den Korrelaten k sich durch partielle Ableitung nach jedem dieser gesuchten Zuschläge die **Korrelatengleichungen** ergeben:

$$(75a) \quad \left\{ \begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 + \dots \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 + \dots \\ &\vdots \\ v_x &= \frac{a_x}{p_x} k_1 + \frac{b_x}{p_x} k_2 + \frac{c_x}{p_x} k_3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Setzen wir die Ausdrücke für v aus (75 a) wieder in die reduzierten Bedingungsgleichungen (73 d) ein, so erhalten wir für die Berechnung der Korrelaten k die **Normalgleichungen**:

22. Beispiel (für den Fall gleichgenauer Beobachtungen): Die Beobachtung der drei Winkel eines Dreiecks habe für sie — an Stelle der unbekanntesten bestmöglichen Werte α , β und γ — die mit gleichgroßen Ungenauigkeiten behafteten Werte L_1 , L_2 und L_3 geliefert, die zusammen, statt des Sollbetrags $2R$ den Betrag $2R + w$ ergeben. Wie groß ist der an jedem von ihnen anzubringende Verbesserungszuschlag v ?

1. Einzige Bedingungsgleichung:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha + \beta + \gamma - 2R = 0.$$

2. Einsetzung der Beobachtungswerte liefert:

$$F(L_1, L_2, L_3) \equiv L_1 + L_2 + L_3 - 2R = w.$$

3.
$$\frac{\partial F}{\partial L_1} = 1 = a_1; \quad \frac{\partial F}{\partial L_2} = 1 = a_2; \quad \frac{\partial F}{\partial L_3} = 1 = a_3,$$

so daß die reduzierte Bedingungsgleichung lautet

$$v_1 + v_2 + v_3 = -w.$$

4. Hieraus kommt $[aa] = 3$ und die Normalgleichung

$$3k_1 + w = 0,$$

woraus

5.
$$k_1 = -\frac{w}{3}.$$

Nun liefert die Korrelatengleichung (75) die Unbekannten:

6.
$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 k_1 = -\frac{w}{3} \\ v_2 = a_2 k_1 = -\frac{w}{3} \\ v_3 = a_3 k_1 = -\frac{w}{3} \end{array} \right\} \text{ und damit } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = L_1 + v_1 = L_1 - \frac{w}{3} \\ \beta = L_2 + v_2 = L_2 - \frac{w}{3} \\ \gamma = L_3 + v_3 = L_3 - \frac{w}{3} \end{array} \right.$$

7.
$$[vv] = -k_1 w = \frac{w}{3} \cdot w = \frac{w^2}{3}.$$

8.
$$m = \pm \sqrt{\frac{\frac{w^2}{3}}{1}} = \frac{w}{\sqrt{3}}$$

23. Beispiel: Als verbindender Linienzug zwischen zwei Höhenfestpunkten A und E , deren als fehlerfrei anzunehmende Höhen gegeben sind zu:

$H_A = 278,354$, $H_E = 292,380$, wurden die Teilstrecken $A - 1$, $1 - 2$, $2 - 3$ und $3 - E$ mit den in nachfolgender Tafel eingetragenen Ergebnissen je einfach eingewogen:

Teilstrecke	Gemittelter eingewogener Höhenunterschied	Gewicht p $= \frac{1}{d}$	$\frac{1}{p}$
1 = A - 1	+ 18,402	2	0,50
2 = 1 - 2	- 9,706	3	0,33
3 = 2 - 3	- 1,204	4	0,25
4 = 3 - E	+ 6,514	1	1,00

$$[\Delta h] = + 14,006 \quad [] = 10 \quad [] = 2,08$$

Wie groß sind die ausgeglichenen Höhenunterschiede der Teilstrecken und ihre mittleren Fehler?

Lösung: Die einzige Bedingungsgleichung lautet im vorliegenden Fall:

$$H_A + \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 - H_E = w,$$

oder in Zahlen ausgedrückt:

$$278,354 + 18402 - 9,706 - 1,204 + 6,514 - 292,380 = - 20 \text{ mm} = w.$$

Wir erhalten daraus nach Gleichung (76 a), da $a = 1$:

$$\left[\frac{a a}{p} \right] k + w = 0 \quad \text{oder} \quad k = - \frac{w}{\left[\frac{a a}{p} \right]} = - \frac{-20}{2,08} = + 9,6 \text{ mm.}$$

Daraus liefern die Korrelatengleichungen die Verbesserungszuschläge

	x	H 278,354	$p v v$
$v_1 = + \frac{9,6}{2} = + 4,8 \text{ mm}$	und die endgültigen Höhenunterschiede	$x_1 = + 18,407$	4,6
$v_2 = + \frac{9,6}{3} = + 3,2 \text{ mm}$		$x_2 = - 9,703$	30,6
$v_3 = + \frac{9,6}{4} = + 2,4 \text{ mm}$		$x_3 = - 1,202$	23,2
$v_4 = + \frac{9,6}{1} = + 9,6 \text{ mm}$		$x_4 = + 6,524$	92,1
+ 20,0 mm		+ 24,931	} $[\] = 191,9$ = - $k \cdot w$.
		- 10,905	
		+ 14,026	

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{191,9}{1}} = \pm 13,8 \text{ mm.}$$

$$m_1 = \pm \frac{13,8}{\sqrt{2}} = \pm 9,8 \text{ mm usw. für } m_2, m_3, m_4.$$

24. Beispiel: Mittels geometrischer Einwägung wurden folgende Höhenunterschiede zwischen fünf Punkten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* bestimmt:

Strecke Nr.	von	nach	Δh	Länge der nivellierten Strecke	Zahl der Niv. Wiederholungen
1	<i>D</i>	<i>E</i>	+10,194 m	3,5 km	1
2	<i>E</i>	<i>B</i>	+10,659 „	2,6 „	1
3	<i>D</i>	<i>B</i>	+20,871 „	1,7 „	1
4	<i>D</i>	<i>C</i>	+40,791 „	1,0 „	1
5	<i>B</i>	<i>C</i>	+19,930 „	2,3 „	1
6	<i>A</i>	<i>E</i>	+38,460 „	4,2 „	2
7	<i>A</i>	<i>D</i>	+28,248 „	1,9 „	2
8	<i>A</i>	<i>C</i>	+69,076 „	2,8 „	2

Die Höhe des Festpunktes *A* ist zu 201,754 m gegeben. Welches sind die Höhen der übrigen Punkte?

Lösung: Die eingewogenen Strecken bilden zusammen vier geschlossenen Figuren:

$$EDB, CDA, ADE, BDC.$$

Bezeichnen wir die ausgeglichenen, zunächst noch unbekanntenen Werte für die eingewogenen Höhenunterschiede der Strecken mit *X*, wobei jeder dieser Unbekannten die in der Aufgabe gewählte Streckennummer als Index zukommt, so erhalten wir hieraus vier Bedingungsgleichungen, nämlich:

$$F_1(X...) \equiv X_1 + X_2 - X_3 = 0,$$

$$F_2(X...) \equiv X_4 - X_3 + X_7 = 0,$$

$$F_3(X...) \equiv X_1 - X_6 + X_7 = 0,$$

$$F_4(X...) \equiv X_3 - X_4 + X_5 = 0.$$

Durch partielle Ableitung der Bedingungsgleichungen nach den Unbekannten erhalten wir für den Fall gleichwertiger Beobachtungen die Koeffizienten der Korrelatengleichungen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_1} = a_1 = +1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_2} = a_2 = +1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_3} = a_3 = -1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_4} = a_4 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_5} = a_5 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_6} = a_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_7} = a_7 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_8} = a_8 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_1} = b_1 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_2} = b_2 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_3} = b_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_4} = b_4 = +1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_5} = b_5 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_6} = b_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_7} = b_7 = +1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_8} = b_8 = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_1} = c_1 = +1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_2} = c_2 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_3} = c_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_4} = c_4 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_5} = c_5 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_6} = c_6 = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_7} = c_7 = +1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_8} = c_8 = 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_1} = d_1 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_2} = d_2 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_3} = d_3 = +1;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_4} = d_4 = -1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_5} = d_5 = +1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_6} = d_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_7} = d_7 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_8} = d_8 = 0.$$

Die Einsetzung der beobachteten an Stelle der ausgeglichenen (zunächst unbekannt)en Werte von $X \dots$ liefert die Widersprüche:

$$F_1 \equiv 10,194 + 10,659 - 20,871 = w_1 = -18 \text{ mm} = -1,8 \text{ cm},$$

$$F_2 \equiv 40,791 - 69,076 + 28,248 = w_2 = -37 \text{ mm} = -3,7 \text{ cm},$$

$$F_3 \equiv 10,194 - 38,460 + 28,248 = w_3 = -18 \text{ mm} = -1,8 \text{ cm},$$

$$F_4 \equiv 20,871 - 40,791 + 19,930 = w_4 = +10 \text{ mm} = +1,0 \text{ cm}.$$

Setzen wir als Gewichtseinheit eine einfach eingewogene Strecke von 1 km Länge fest und beachten, daß (gleiche Zielweiten vorausgesetzt) der mittlere Fehler einer geometrischen Einwägung wächst proportional zur Wurzel aus der Länge, ihr Gewicht also umgekehrt proportional zur Länge, so erhalten die beobachteten Höhenunterschiede die Gewichte:

$$p_1 = \frac{1}{3,5}; \quad p_2 = \frac{1}{2,6}; \quad p_3 = \frac{1}{1,7}; \quad p_4 = \frac{1}{1,0};$$

$$p_5 = \frac{1}{2,3}; \quad p_6 = \frac{2}{4,2}; \quad p_7 = \frac{2}{1,9}; \quad p_8 = \frac{2}{2,8}.$$

Damit gehen die Koeffizienten der Korrelatengleichungen über in:

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{3,5}; \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} = \sqrt{2,6}; \quad \alpha_3 = \frac{a_3}{\sqrt{p_3}} = -\sqrt{1,7};$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0.$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0; \quad b_4 = \frac{b_4}{\sqrt{p_4}} = 1; \quad b_5 = b_6 = 0; \quad b_7 = \frac{b_7}{\sqrt{p_7}} = \sqrt{\frac{1,9}{2}};$$

$$b_8 = \frac{b_8}{\sqrt{p_8}} = -\sqrt{\frac{2,8}{2}}$$

$$c_1 = \frac{c_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{3,5}; \quad c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{c_6}{\sqrt{p_6}} = -\sqrt{\frac{4,2}{2}};$$

$$c_7 = \frac{c_7}{\sqrt{p_7}} = \sqrt{\frac{1,9}{2}}; \quad c_8 = 0.$$

$$d_1 = d_2 = 0; \quad d_3 = \frac{d_3}{\sqrt{p_3}} = \sqrt{1,7}; \quad d_4 = \frac{d_4}{\sqrt{p_4}} = -1; \quad d_5 = \frac{d_5}{\sqrt{p_5}} = \sqrt{2,3};$$

$$d_6 = d_7 = d_8 = 0.$$

Wir haben damit die Koeffizienten der reduzierten Bedingungs-
gleichungen gefunden, welche uns diejenigen der Normalgleichungen zur
Berechnung der vier Korrelaten vermitteln.

	a	b	c	d	a a	a b	a c	a d	b b	b c	b d	c c	c d	d d
					+		+	-	+	+	-	+		+
1.	+1,87	0	+1,87	0	3,5	0	3,5	0	0	0	0	3,5	0	0
2.	+1,61	0	0	0	2,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	-1,30	0	0	+1,30	1,7	0	0	1,7	0	0	0	0	0	1,7
4.	0	1	0	-1,00	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1,0
5.	0	0	0	+1,52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,3
6.	0	0	-1,45	0	0	0	0	0	0	0	0	2,1	0	0
7.	0	+0,97	+0,97	0	0	0	0	0	0,95	0,95	0	0,95	0	0
8.	0	-1,18	0	0	0	0	0	0	1,4	0	0	0	0	0
					7,8	0	3,5	1,7	3,35	0,95	1,0	6,55	0	5,0

Aus den Normalgleichungen:

$$\underline{7,8} k_1 + 0 k_2 + 3,5 k_3 - 1,7 k_4 - 1,8 = 0,$$

$$0 k_1 + \underline{3,35} k_2 + 0,95 k_3 - 1,0 k_4 - 3,7 = 0,$$

$$3,5 k_1 + 0,95 k_2 + \underline{6,55} k_3 + 0 k_4 - 1,8 = 0,$$

$$-1,7 k_1 - 1,0 k_2 + 0 k_3 + 5,0 k_4 + 1,0 = 0$$

ergeben sich auf bekannte Weise die vier Korrelaten $k_1 \dots k_4$ und aus ihnen mittels der Korrelatengleichungen die eingewichtigen Verbesserungen v , welche durch Division mit \sqrt{p} in die gesuchten, den Beobachtungswerten zuzuschlagenden Verbesserungen v übergehen.



Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

- Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.
- Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von Prof. G. Mahler. Nr. 41.
- Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.
- Stereometrie mit 66 Figuren von Professor Dr. Glaser. Nr. 97.
- Sammlung v. Aufgaben aus der Stereometrie von Professor Dr. Glaser. Nr. 779.
- Niedere Analysis mit 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Prof. Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.
- Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Prof. Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 146.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 50 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 147.
- Analytische Geometrie d. Ebene m. 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon. Nr. 65.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.
- Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 309.
- Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Figuren von Professor Dr. K. Doehle mann. Nr. 72.
- Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.
- — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.
- Konforme Abbildung, Einführ. in die, v. Prof. Dr. L. Bieberbach. Nr. 768.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung v. Dr. Franz Hack, Prof. am Eberhard-Ludwigs-Gymnas. in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausg. von Dr. Robert Haußner, Professor an der Universität Jena. Nr. 81.
- Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO., vormalig G. J. Göschen'sche

Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung /

Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

- Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik** mit 18 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.
Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Prof. Wilh. Weitzbrecht. 2 Bändchen. Nr. 302 u. 641.
Vektoranalysis m. 16 Fig. von Prof. Dr. Siegf. Valentiner. Nr. 354.
Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.
 — — II: Theorie und Kurven 3. u. 4. Ordnung. Mit 52 Figuren. Nr. 436.
Koordinatensysteme von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 507.
Einführung in die geom. Optik von Dr. W. Hinrichs in Berlin. Nr. 532.
Einleitung in die Funktionentheorie (Theorie der kompl. Zahlenreihen) von Oberlehrer Max Rose in Berlin. Mit 10 Figuren. Nr. 581.
Funktionentheorie von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität in Königsberg. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren. Nr. 668.
 — — II: Anwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 9 Figuren. Nr. 702.
Graphische Integration von Dr. F. A. Willers. Nr. 801.
Versicherungsmathematik von Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.
Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren u. 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Professor J. Vonderlinn. Nr. 58.
Vermessungskunde von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.
Geodäsie von Professor Dr. C. Reinhardt, neubearbeitet von Dr. G. Förster in Potsdam. Mit 68 Abbildungen. Nr. 102.
Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie von Professor Dr. Hans Dock. Mit 59 Abbildungen. Nr. 699.
Kartographische Aufnahmen und geograph. Ortsbestimmung auf Reisen von Prof. Dr.-Ing. R. Hugerhoff. Mit 73 Figuren. Nr. 607.
Kartenkunde von Dr. M. Groll. I: Die Projektionen. Mit 56 Fig. Nr. 30.
 — — II: Der Karteninhalt u. d. Messen auf Karten. Mit 39 Fig. Nr. 599.
Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper, von F. A. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.
 — — II: Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.
Astrophysik mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.
Astronomische Geographie mit 52 Fig. von Prof. Dr. S. Günther. Nr. 92.
Nautik. Kurzer Abriß der Schifffahrtskunde mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze. Nr. 84.
Luft- und Meeresströmungen v. Dr. Fr. Schulze. Mit 27 Abb. Nr. 551.

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO., vormals G. J. Göschen'sche

Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung /

Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

In unserem Verlagserschien ferner:

Geodäsie

Von Prof. Dr. A. Galle

Gr.-8° (XI, 284 Seiten). Mit 96 Figuren

(Sammlung Schubert Band XXIII)

Gebunden Mark 8.—

100 % Verleger-Teuerungszuschlag

Das Werk behandelt die Anwendung der Mathematik hauptsächlich auf die niedere Geodäsie und unterscheidet sich von andern Lehrbüchern dieses Gegenstandes durch den Verzicht auf die Abbildung und Beschreibung der Instrumente. Indessen wurde nach Möglichkeit auch auf die praktische Ausführung der Messungen und auf die Fehler der Instrumente hingewiesen.

Der Inhalt schließt sich bezüglich der Horizontalmessungen in der Hauptsache den preußischen Vermessungsanweisungen an, gelegentlich wurde aber auch auf ausländische Vorschriften Rücksicht genommen. Die Meßtischaufnahmen wurden trotz einzelner mathematischer Aufgaben, zu denen sie Anlaß geben, übergangen, dagegen die Photogrammetrie, die zwar auch noch selten Anwendung findet, als neuere, für besondere Geländeverhältnisse bedeutungsvolle Methode aufgenommen. Das für Ingenieure wichtige Kapitel über Kurvenabsteckungen enthält einen Überblick der wichtigsten Verfahren. Bei den Vertikalmessungen ist das Nivellement möglichst umfassend behandelt, die trigonometrische und barometrische Höhenmessung aber ausgelassen worden. Im ersten Abschnitt, welcher die Flächenmessung und Flächenberechnung begreift, und im dritten, den Methoden der Punktbestimmung gewidmeten Abschnitte wird jedesmal am Schlusse (Kapitel IV und XII) die Krümmung der Erde anhangsweise berücksichtigt, während im zweiten, den Linien eingeräumten Abschnitte hiervon abgesehen wurde, da die Einfügung der Theorie der geodätischen Linie ein umfangreiches, der höheren Geodäsie zugehörendes Kapitel erfordert hätte. Die Einflüsse der Beobachtungsfehler auf die Methoden und auf die Ergebnisse und die Ausgleichung der letzteren wurden besonders ins Auge gefaßt.

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO., vormals G. J. Göschen'sche

Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung /

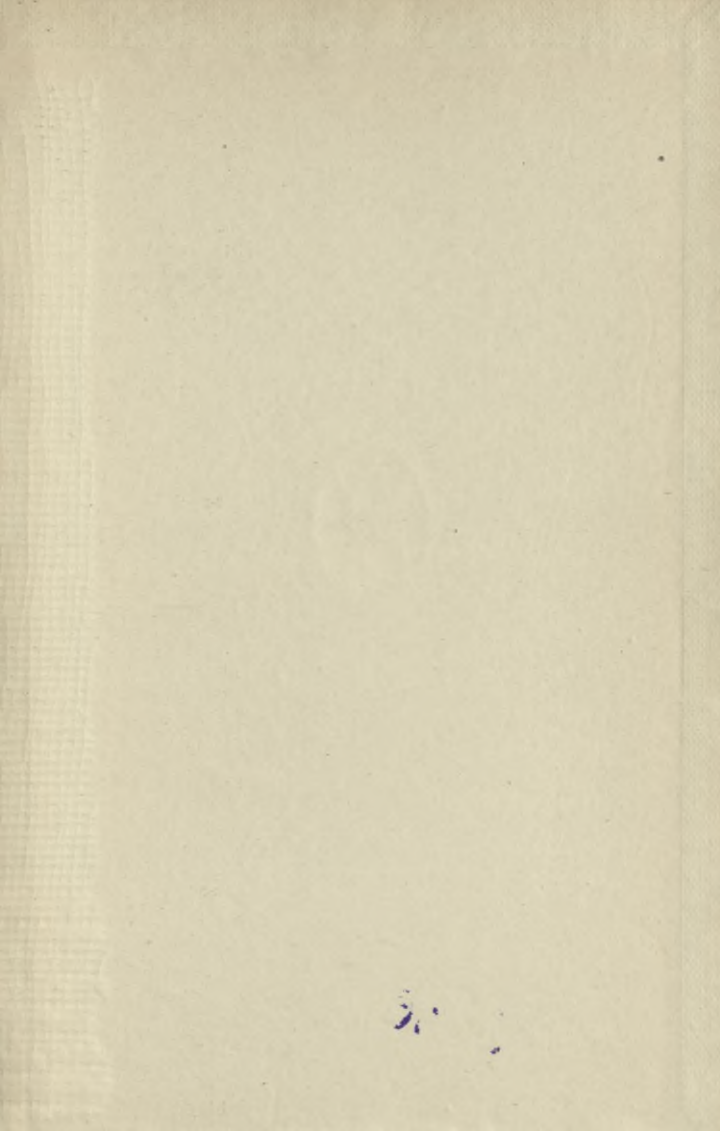
Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

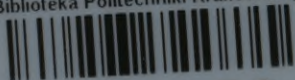
88-2

2,00

8-96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301352



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297961