

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Von

Dr.-Ing. Hans Polster

Mit 76 Abbildungen



584

Ingenieurbau

aus der Sammlung Göschen

Stand vom Frühjahr 1930

Jeder Band in Leinwand geb. RM. 1.80

Bei gleichzeitiger Abnahme gleicher oder inhaltlich zusammengehöriger Bände treten folgende Gesamtpreise in Kraft: 10 Expl. RM. 16.—; 25 Exemplare RM. 37.50; 50 Exemplare RM. 70.—

-
- Geologie** von Prof. Dr. Edgar Daqué.
I. Allgemeine Geologie. Mit 73 Figuren Nr. 13
II. Stratigraphie. Mit 56 Abbild. und 7 Tafeln Nr. 846
- Mineralogie** von Prof. Dr. R. Brauns. Mit 132 Abb. Nr. 29
- Petrographie** (Gesteinskunde) von Prof. Dr. W. Bruhns.
Neubearb. von Prof. Dr. P. Ramdohr. Mit 10 Figuren Nr. 173
- Praktisches Zahlenrechnen** von Professor Dr.-Ing.
P. Werkmeister. Mit 58 Figuren Nr. 405
- Technische Tabellen und Formeln** von Prof. Dr.-Ing.
W. Müller. Mit 105 Figuren Nr. 579
- Materialprüfungswesen.** Einführung in die moderne
Technik der Materialprüfungen von Dipl.-Ing. K. Memmler.
I. Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfs-
mittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren Nr. 311
II. Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmitteln der
Maschinentechnik. Einiges über Metallographie. Bau-
stoffprüfung. Papierprüfung. Textiltechn. Prüfungen.
Schmiermittelprüfung. Farben-, Lack- und Anstrich-
mittelprüfung. Mit 30 Figuren Nr. 312
- Statik** von Dipl.-Ing. Prof. W. Hauber.
I. Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Fig. Nr. 178
II. Angewandte Statik. Mit 61 Figuren Nr. 179
- Graphische Statik** mit bes. Berücksicht. d. Einflußlinien
von Dipl.-Ing. Otto Henkel. 2 Bde. Mit 207 Fig. Nr. 603, 695
- Festigkeitslehre** von Prof. W. Hauber. Mit 56 Fig. u. 1 Taf. Nr. 288
- Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lö-
sungen** von Dipl.-Ing. R. Haren. Neubearb. von Dipl.-Ing.
I. Furtmayer. Mit 15 Fig. Nr. 491
- Hydraulik** Nr. 397
- Kinematik** Nr. 584
- Dynamik** Nr. 902, 903
- Technische Mechanik** Nr. 953, 961

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298060

- Elastizitätslehre für Ingenieure** von Prof. Dr.-Ing. Max
Enßlin. 2 Bde. Mit 109 Figuren Nr. 519, 957
- Nomographie des Bauingenieurs** von Prof. Dr.-Ing.
Max Mayer. Mit 47 Figuren Nr. 959
- Die Baumaschinen** v. Ing. Johannes Körting. Mit 126 Abb. Nr. 702
- Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik**
von Oberg. Prof. Dr. M. Pirani. Mit 58 Fig. Nr. 728
- Geometrisches Zeichnen** von H. Becker, neubearbeitet
von Prof. J. Vonderlinn. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln . Nr. 58
- Schattenkonstruktionen** von Prof. J. Vonderlinn. Mit
114 Figuren Nr. 236
- Parallelperspektive.** Rechtwinklge und schiefwinklge
Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn. Mit 121 Figuren . . Nr. 260
- Zentral-Perspektive** von Hans Freyberger, neubearbeitet
von Prof. J. Vonderlinn. Mit 132 Figuren Nr. 57
- Darstellende Geometrie** von Prof. Dr. Robert Haufner.
I. Mit 110 Figuren, II. Mit 88 Figuren Nr. 142, 143
- Die Baustoffkunde** von Prof. H. Haberstroh. 3 Bände.
Mit 74 Figuren Nr. 506, 853, 854
- Vermessungskunde** von Prof. Dipl.-Ing. P. Werkmeister.
I. Stückmessung und Nivellieren. Mit 140 Abbild. . . Nr. 468
II. Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punk-
ten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Abb. Nr. 469
III. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung.
Tachymetrie und Topographie. Mit 61 Abbild. . . . Nr. 862
- Die Kostenberechnung im Ingenieurbau** von Professor
E. Kuhlmann und Dr.-Ing. H. Nitzsche. Mit 5 Tafeln . . . Nr. 750
- Die Baustoffe des Beton- und Eisenbetonbaus** von
Prof. Otto Graf. Mit 43 Abb. Nr. 984
- Baustoffverarbeitung und Baustellenprüfung des
Betons** von Prof. Dr.-Ing. A. Kleinlogel. Mit 22 Abb. . . Nr. 978
- Der Grundbau I: Der Baugrund und die Baugrube** von
Privatdoz. Dr.-Ing. Joachim Schultze. Mit 58 Abbild. . . Nr. 990
- Erdbau** von Reg.-Baumeister Erwin Link. Mit 72 Abbild. Nr. 630
- Erddruck, Futter- und Stützmauern** vom Städt. Bau-
rat Dr.-Ing. Felix Kann. Mit 102 Textabbild. Nr. 1011
- Landstraßenbau** von Ober-Ing. A. Liebmann. Mit 44 Abb. Nr. 598
- Stadtstraßenbau** von Dr.-Ing. Georg Klose. Mit 50 Abb. Nr. 740
- Der Betonstraßenbau** von Reg.-Baumstr. a. D. Dr.-Ing.
W. Petry. Mit 49 Abb. Nr. 976
- Die Entwicklung des neuzeitlichen Eisenbahnbaues**
von Dipl.-Ing. Prof. Alfred Birk. Mit 28 Abbild. Nr. 553
- Die Linienführung d. Eisenbahnen** v. Prof. H. Wegele.
Mit 58 Abbild. Nr. 623
- Hochbauten d. Bahnhöfe** v. Eisenbahnbauinsp. C. Schwab.
I. Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterschuppen.
Lokomotivschuppen. Mit 91 Abbild. Nr. 515
- Bahnhofsanlagen** von Prof. Dr.-Ing. H. Wegele.
I. Band. Mit 92 Abb. und einer Tafel Nr. 989

- Die mechanischen Stellwerke der Eisenbahnen** von Oberbaurat a. D. S. Scheibner. 3 Bände. Mit 143 Abbild. u. 2 Tafeln Nr. 674, 688, 747
- Die Kraftstellwerke der Eisenbahnen** von Oberbaurat a. D. S. Scheibner. 2 Bände. Mit 70 Abb. u. 1 Taf. Nr. 689, 690
- Das elektrische Fernmeldewesen bei den Eisenbahnen** von Geh. Baurat K. Link. Mit 54 Abbild. . . Nr. 707
- Eisenbahnfahrzeuge** v. Reg.-Baumeister H. Hinnenthal.
 I. Die Dampflokomotiven. Mit 95 Abbild. und 2 Tafeln. Nr. 107
 II. Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anhang: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 85 Abbild. Neubearbeitet von Ad. Wolff Nr. 108
- Schmalspurbahnen** (Klein-, Arbeits- und Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. August Boshart. Mit 99 Abbild. Nr. 524
- Straßenbahnen** v. Dipl.-Ing. August Boshart. Mit 72 Abb. Nr. 559
- Kolonial- und Kleinbahnen** v. Geh. Oberbaurat Prof. F. Baltzer.
 I. Begriff und Wesen, Kolonialbahnen Afrikas, Kleinbahnen der wichtigsten Länder u. a. Mit 7 Abbild. Nr. 816
 II. Bauliche Ausgestaltung von Bahn und Fahrzeug, Betrieb und Verkehr. Mit 22 Abbild. Nr. 817
- Die allgemeinen Grundlagen des Brückenbaues** von Dr.-Ing. K. Schaechterle. Mit 59 Abbild. Nr. 687
- Gründungen d. Brücken** v. Prof. Th. Janssen. Mit 40 Abb. Nr. 803
- Holzbrücken** von Dr.-Ing. K. Schaechterle. Mit 217 Abb. Nr. 964
- Eisenbetonbrücken** von Dr.-Ing. K.W. Schaechterle. Mit 106 Abbild. Nr. 627
- Eiserne Balkenbrücken** von Prof. Dr.-techn. Dr.-Ing. I. Melan. Mit 93 Abbild. Nr. 977
- Hydraulik** von Prof. Dipl.-Ing. W. Hauber. Mit 45 Fig. . . Nr. 397
- Kreislauf des Wassers und Gewässerkunde** von Dr.-Ing. R. Drenkhahn. Mit 46 Abbild. u. 16 Zahlentafeln Nr. 960
- Wehr- und Stauanlagen** von Reg.-Baurat Dr.-Ing. Paul Böß. Mit 59 Abbild. und 5 Berechnungsbeispielen . . . Nr. 965
- Flußbau** von Reg.-Baumstr. Otto Rappold. Mit 105 Abbild. Nr. 597
- Kanal- und Schleusenbau** von Regierungsbaumeister Otto Rappold. Mit 80 Abbild. Nr. 585
- Wasserkraftanlagen** von Dr.-Ing. Felix Bundschu.
 I. Allgemeines und Stauwerke. Mit 67 Abbild. Nr. 665
 II. Werkwasserleitungen u. Entwurfsgrundlagen. Mit 77 Abb. Nr. 666
- Meliorationen** von Oberbaurat Otto Fauser. 2 Bände. Mit 103 Abbild. Nr. 691, 692
- See- und Hafnenbau** von Reg.-Baum. a. D. Franz Franzius und Marinebaurat K. Bökemann. Mit 100 Abbild. . . . Nr. 962
- Wasserversorgung der Ortschaften** von Prof. Dr.-Ing. Robert Weyrauch. Mit 79 Figuren Nr. 5
- Entwässerung und Reinigung der Gebäude** von Dipl.-Ing. Wilhelm Schwaab. Mit 92 Abbild. Nr. 822
- Gas- und Wasserversorgung der Gebäude** von Dipl.-Ing. Wilhelm Schwaab. Mit 119 Figuren Nr. 412

Sammlung Göschen

Kinematik

Von

Dr.-Ing. Hans Polster

Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik
Merseburg-Leuna

Mit 76 Abbildungen

Zweite Auflage



Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

1920



1-301307

~~126~~

Alle Rechte, namentlich das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



Druck
der Spamerschen
Buchdruckerei in Leipzig

Akc. Nr. ~~3584~~ / 51

3PU-3-568/2016

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Literaturverzeichnis	5
--------------------------------	---

Allgemeines.

§ 1. Die Kinematik in ihrer Stellung zur Geometrie und Mechanik	11
§ 2. Geschichtliche Entwicklung der Kinematik	12

Theoretischer Teil.

I. Ebene Bewegung eines Punktes.

§ 3. Geradlinige Bewegung	14
§ 4. Zusammensetzung zweier geradliniger Bewegungen	17
§ 5. Krummlinige Bewegung	20

II. Ebene Bewegung zweier Ebenen.

§ 6. Schiebung	22
§ 7. Drehung um einen festen Punkt	23
§ 8. Momentanpol zweier beliebig sich bewegendes Ebenen	26
§ 9. Geschwindigkeiten	27
§ 10. Polkurven	28
§ 11. Hüllkurven	29
§ 12. Umkehrung der Bewegung	30
§ 13. Beschleunigungspol	30
§ 14. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol. Wendekreis und Wechselkreis	34
§ 15. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Bahn eines bewegten Punktes nach Hartmann	38
§ 16. Konstruktion der Polwechselgeschwindigkeit aus den Geschwindigkeiten und Krümmungszentren zweier Punkte	40

III. Ebene Bewegung dreier Ebenen.

§ 17. Zwei Schiebungen gegen die feste Ebene	42
§ 18. Schiebung einer Ebene und Drehung einer andern um einen festen Punkt der ersten	42
§ 19. Drehung zweier Ebenen gegen eine dritte um feste Punkte	44
§ 20. Die Pole dreier beliebig bewegter Ebenen	48
§ 21. Geschwindigkeiten dreier beliebig bewegter Ebenen	48
§ 22. Beschleunigungen dreier beliebig bewegter Ebenen	50
§ 23. Coriolis-Beschleunigung	51

IV. Die Zykloiden.

§ 24. Allgemeines	57
§ 25. Konstruktion der Zykloide als Hüllkurve	58

§ 26.	Punktweise Konstruktion	58
§ 27.	Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes nach Bobillier	59
§ 28.	Sonderfall: gleiche Rollkreise	60

V. Die Evolventen.

§ 29.	Allgemeines	62
§ 30.	Konstruktion der Evolvente	63

Anwendungen.

VI. Zahnräder.

§ 31.	Allgemeines	63
§ 32.	Allgemeine Verzahnung	65
§ 33.	Zykloiden-Verzahnung	69
§ 34.	Evolventen-Verzahnung	71
§ 35.	Grissongetriebe	72
§ 36.	Spezifisches Gleiten	74
§ 37.	Normaldruck	77
§ 38.	Reibungsarbeit	79
§ 39.	Beispiel	79

VII. Gelenkviereck.

§ 40.	Allgemeines und Bezeichnungen	80
§ 41.	Ermittlungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach Land	82
§ 42.	Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unter Benutzung der Relativbewegungen	85

VIII. Vom Gelenkviereck abgeleitete Getriebe.

§ 43.	Antrieb eines Schwinghebels durch ein Exzenter mit langer Exzenterstange	90
§ 44.	Schubkurbelgetriebe mit ungleichförmig rotierender Kurbel	92
§ 45.	Schubkurbelgetriebe mit gleichförmig rotierender Kurbel	93
§ 46.	Mohrsche Konstruktion der Beschleunigung des Kreuzkopfes	93
§ 47.	Andere Ableitung der Mohrschen Konstruktion	94
§ 48.	Rotierende Kurbelschleife. Allgemeines	95
§ 49.	Desgl. Ermittlung der Bewegung der Schleifkurbel	96
§ 50.	Desgl. Ermittlung der Bewegung der Kurbel	98
§ 51.	Sonderfälle der rotierenden Kurbelschleife	100
§ 52.	Oszillierender Zylinder	102
§ 53.	Die Massenwirkung der schweren Schubstange im geraden Schubkurbelgetriebe. Allgemeines	104

	Seite
§ 54. Bestimmung des Rückdruckes der bewegten Schubstange auf den Kolben nach Mollier	104
§ 55. Bestimmung der Resultierenden der auf eine schwere Schubstange wirkenden Trägheitskräfte nach Mohr	110

IX. Steuerungen mittels Schubkurvengetriebe.

§ 56. Nockensteuerungen. Allgemeines	111
§ 57. Analyse des Getriebes	112
§ 58. Beispiel	115
§ 59. Schwingdaumensteuerungen. Analyse des Getriebes	118
§ 60. Bewegungsverhältnisse	119
§ 61. Beispiel	127
§ 62. Wälzhebelsteuerungen. Allgemeines	130
§ 63. Wälzhebel mit beweglichem Drehpunkt	132
§ 64. Wälzhebel mit festem Drehpunkt	141

X. Hilfskonstruktionen.

§ 65.	147
— Namen- und Sachregister	150

Literaturverzeichnis.

A. Werke über Kinematik.

1. F. Reuleaux, Theoretische Kinematik, I. Teil, Braunschweig 1875. Desgl., II. Teil, Braunschweig 1900.
2. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888.
3. H. Weiß, Grundsätze der Kinematik, I. Teil, Leipzig 1900.
4. K. Heun, Lehrbuch der Mechanik, I. Teil: Kinematik, Leipzig 1906.
5. Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik, Berlin 1910.
6. H. Polster, Kinematik, Sammlung Göschen, 1912.
7. W. Hartmann, Die Maschinengetriebe, Berlin 1913.
8. M. Grübler, Getriebelehre, Berlin 1917.

B. Werke über Sondergebiete der Kinematik und Dissertationen.

9. H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen, Leipzig 1901.
10. Schubert, Theorie des Schlickschen Massenausgleichs bei mehrkurbligen Dampfmaschinen, Leipzig 1901.
11. M. Schwabach, Dynamische Theorie der Verschwindlafetten und kinemat. Schußtheorie, Diss., Berlin 1904.
12. H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes, Diss., 1905.

13. Brandt, Die rotierende Kurbelschleife und die Schleppekurbel als Antrieb für Propellerrinnen, Diss., Berlin 1908.
14. K. Doehne, Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit Schwingdaumen, Diss., Berlin 1908.
15. Essich, Über Steuerungsgetriebe mit Wälzhebeln, Diss., Berlin 1909
16. F. Döhne, Über Druckwechsel und Stöße bei Maschinen mit Kurbeltrieb, Diss., Berlin 1911.
17. H. Polster, Experimentelle Untersuchung der Druckwechsel u. Stöße im Schubkurbelgetriebe, Diss., Dresden 1913.
18. C. Herre, Bewegungsmechanismen.
19. P. Moser, Druckwechsel bei Maschinen mit Kurbeltrieb, Diss. Zürich 1917.

C. Aufsätze über Sonderprobleme der Kinematik.

a) Allgemeines.

20. Aronhold, Grundzüge d. kinemat. Geometrie, Gew. 1872.
21. C. Schadwill, Das Gliedervierseit als Grundlage der ebenen Kinematik, Gew. 1876.
22. T. Rittershaus, Die kinemat. Kette, ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit, Civ. 1876.
23. Derselbe, Die Beschleunigung der ebenen Bewegung, Civ. 1878.
24. L. Burmeister, Über d. Beschleunigungszustand ähnlichveränderlicher starrer ebener Systeme, Civ. 1878.
25. O. Mohr, Die geom. Konstruktion d. Beschleunigung d. ebenen Bewegung, Civ. 1879.
26. L. Burmeister, Über die momentane Bewegung ebener kinemat. Ketten, Civ. 1880.
27. A. Ramisch, Der momentane Beschleunigungspol und seine Konstruktion, Gew. 1880.
28. M. Grübler, Allgem. Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, Civ. 1883.
29. R. Mehmke, Über die Geschwindigkeit beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich veränderlichen ebenen Systems, Civ. 1883.
30. A. Ramisch, Beiträge z. kinemat. Geometrie, Gew. 1884.
31. M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten, Gew. 1885.
32. O. Mohr, Über Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan, Civ. 1887.
33. A. Ramisch, Über ebene kinemat. Zylinderketten und deren momentane Bewegung, Gew. 1888.
34. M. Grübler, Wandlungen der Kinematik in der Gegenwart, Civ. 1889
35. W. Hartmann, Geometrie, Mechanik u. Kinematik, Z. 1890.
36. F. Reuleaux, Über das Verhältnis zwischen Geometrie, Mechanik u. Kinematik, Z. 1890.

37. C. Bodenberg, Quadratische Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinemat. Kette, Z. d. Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins 1890.
38. W. Hartmann, Ein neues Verfahren zur Aufsuchung des Krümmungskreises, Z. 1893.
39. Wittenbauer, Die Beschleunigungspole der kinematischen Ketten, Z. f. Math. 1895.
40. R. Land, Der Geschwindigkeits- u. Beschleunigungsplan für Mechanismen, nebst Anwendung auf die Schubkurbel, Z. 1896.
41. C. Bodenberg, Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstr. Ermittlung, Civ. 1896.
42. F. Wittenbauer, desgl., Civ. 1896.
W. Hartmann, Konstruktion d. Normalen u. d. Krümmungskreise der Polbahnen d. Vierzylinderkette, Civ. 1902.
44. Wittenbauer, Graphische Dynamik, Z. f. Math. 1904.
45. H. Rieder, Kinetographische Verwandtschaft, Diss. 1907.
46. W. Hartmann, Die Beschleunigung der rollenden Bewegung und ihre Bedeutung für die Untersuchung der Bewegungsverhältnisse von Maschinengetrieben, Gew. 1908.
47. K. Hübsch, Eine kinetographische Verwandtschaft bei speziellen Schleifschiebergetrieben, Diss., 1909.
48. Wittenbauer, Das Gleichgewicht ebener kinematischer Ketten, 1916.
49. M. Krause, Theorie der ebenen veränderlichen Systeme.
50. Derselbe, Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme.
51. Derselbe, Theorie der affin veränderlichen Systeme.

b) Spezielle Kurbelgetriebe.

52. T. Rittershaus, Das Kurbelgetriebe und seine Anwendungen, Civ. 1878.
53. Derselbe, Die Beschleunigungen am Kurbelgetriebe, Civ. 1879.
54. Derselbe, Die Interferenzkurbelkette, Civ. 1880.
55. O. Mohr, Notiz betr. die Konstruktion d. Beschleunigung am Kurbelgetriebe, Civ. 1880.
56. A. Ramisch, Theoret. Untersuchung einiger in der Praxis angewandter kinematischer Zylinderketten, Gew. 1881.
57. Wehage, Über den ruhigen Gang der Dampfmaschinen mit Kurbelwelle, Z. 1884.
58. J. Täubeles, Über die Beschleunigung des Kreuzkopfs eines Kurbelmechanismus, Civ. 1886.
59. Werner, Dampfmaschinen mit schnellem Umlauf, Z. 1886.
60. Kirsch, Graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung, Z. 1890 und 1891.
61. W. Hartmann, Dynamische Theorie der Dampfmaschine, Z. 1892 und 1893.
62. Striebeck, Die bei Dampfmaschinen auftretenden Stöße an Kurbel- und Kreuzkopfzapfen, Z. 1893.

63. J. Missong, Über die Steigerung der Arbeitsgeschwindigkeit v. Maschinen mit hin- u. hergehenden Massen, Z. 1893.
64. R. Krause, Graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung beim Kurbelgetriebe, Z. 1894.
65. O. Mohr, Die Trägheitskräfte einer Schubstange, Civ. 1895.
66. E. Autenrieth, Beitrag zur Bestimmung der Trägheitskräfte einer Schubstange, Z. 1895.
67. Pflüger, dasselbe, Z. 1896.
68. J. Wittenberg, Bestimmung des Massendruckes der hin- u. hergehenden Teile d. Dampfmaschine, Z. 1896.
69. O. Mohr, Die geometr. Bestimmung der Resultierenden der auf eine Schubstange wirkenden äußeren Kräfte, Z. 1899.
70. J. Meifort, Stöße und Momente in Dampfmaschinen, Z. 1899.
71. R. Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange, Z. 1903.
72. J. Torka, Die Kegelabschnitte im Kurbelgetriebe, Gew. 1904.
73. Derselbe, Die Flächen 2. Ordnung in d. mathematischen Getrieben, Gew. 1905.
74. H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes, Dingl. 1905.
75. Wittenbauer, Dynam. Kraftplan des Kurbelgetriebes, Z. 1906.
76. M. Enßlin, Die Trägheitskräfte einer Schubstange, Dingl. 1907.
77. C. Herbst, Analyt. Ermittlung der günstigsten Bewegungsverhältnisse eines Schwinghebelantriebes, Dingl. 1908.
78. P. Brandt, Die rotierende Kurbelschleife u. die Schleppekurbel als Antrieb für Propellerrinnen, Dingl. 1908.
79. J. Torka, Die Maschinengetriebe und ihre mathematischen Grundgebilde, Gew. 1908.
80. M. Kroll, Beitrag zur graph. Berechnung des Kurbelgetriebes, Dingl. 1911.
81. H. Polster, Experimentelle Untersuchung der Druckwechsel u. Stöße im Schubkurbelgetriebe, Forsch.-Arb. Hefte 172 und 173 sowie Z. 1914.

c) Steuerungen.

82. S. M. Schoenelies, Kinematisch-geometrische Untersuchungen über Hebedaumen, Diss. 1872.
83. W. Schenker, Ventilerhebungsverlauf und Kraftwirkungen in Ventilsteuerungen, Dingl. 1902.
84. W. Hartmann, Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit unrunder Scheiben, Z. 1905.
85. E. Dafinger, Graphodyn. Untersuchung einer Heusinger-Joy-Steuerung, Dingl. 1907.
86. K. Doehne, Die Bewegungsverhältnisse von Steuergetrieben mit Schwingdaumen, Gew. 1908.
87. H. Holzer, Wälzhebel, Z. 1908.
88. E. Essich, Über Steuerungsgetriebe mit Wälzhebeln, Gew. 1909.

89. M. Osthoff, Die Lenzsteuerung an Lokomotiven, Dingl. 1909
 90. H. Götz, Theoret. Untersuchung einer Bonjour-Lachaussee-Dampfrmaschine auf Massendruck der Steuerung und Resonanz des Regulators, Gew. 1909.
 91. O. Mader, Konstruktion der Ventilbeschleunigung bei Füllungsänderung, Dingl. 1911.
 92. R. Bestehorn, Die Form der Steuerungsnocken, Z. 1919.

d) Massenausgleich und Ungleichförmigkeitsgrad.

93. Schlick, Vibrationserscheinung bei Dampfern, Z. 1894.
 94. Lorenz, Die Massenwirkung am Kurbelgetriebe u. ihre Ausgleichung bei mehrkurbeligen Maschinen, Z. 1897.
 95. Fränzel, Das Taylorsche Verfahren zur Ausbalancierung der Schiffsmaschinen, Z. 1898.
 96. Berling, Schiffsschwingungen, Ursachen u. Kritik der Mittel zu ihrer Verminderung, Z. 1899.
 97. Mollier, Der Ungleichförmigkeitsgrad von Gasmaschinen mit Aussetzer-Regulierung, Z. 1903.
 98. Rüdenberg, Die günstigsten Kurbelwinkel f. Mehrkurbelmaschinen, Dingl. 1904.
 99. Mollier, Ausgleich von Vierzylindermaschinen, Z. 1905.
 100. Bestehorn, Massenausgleich bei Kurbelgetrieben, insbesondere durch Gegengewichte, Z. 1920.

e) Geradföhrung und Indikatorschreibzeuge.

101. Burmester, Über die Geradföhrung durch das Kurbelgetriebe, Civ. 1876.
 102. Kirsch, Zur Theorie der Geradföhrungen, Civ. 1876.
 103. A. Ramisch, Die allgemeine Konstruktion der Geradföhrungen, Gew. 1879.
 104. Burmester, Die Geradföhrung und Proportionalität am Indikator, Z. 1888.
 105. W. Hartmann, Die Geradföhrung u. Proportionalität am Indikator, Z. 1896.

f) Zahnräder und zyklische Kurven.

106. R. Heger, Eine kinematische Aufgabe, Civ. 1876.
 107. R. Striebeck, Die Abnutzung der Zahnräder und ihre Folgen, Z. 1894.
 108. M. Kohn, Zahnreibung, Z. 1895.
 109. J. Goebel, Die Reibung der Zahnräder, Z. 1896.
 110. E. Herrmann, Die Eingriffsdauer der Zahnräder bei äußerer Verzahnung, Dingl. 1898.
 111. O. Herre, Das exzentrische Kreisradgetriebe, Dingl. 1900.
 112. W. Müller, Das Grissongetriebe, Dingl. 1900.
 113. G. Lindner, Neuere Zahnformen, Z. 1900.

114. K. Büchner, Abnutzungs- und Reibungsverhältnisse der Stirnzahnräder, Z. 1902.
 115. Ebner, Elementares über die zyklischen Kurven, Dingl. 1902.
 116. Grisson, Über Grissongetriebe, Z. 1903.
 117. W. Hartmann, Genauigkeitsgrad und Geschwindigkeitsverhältnis bei Verzahnungen, Z. 1905.
 118. P. Hoppe, Satzräder mit Evolventenverzahnung, Gew. 1909.
 119. Bach, Maschinenelemente.
 120. Kutzbach, Entwicklung der Zahnrädergetriebe, Z. 1916.
 121. Hütte, Taschenbuch.

g) Verschiedenes.

122. T. Rittershaus, Über Ellipsographen, Gew. 1874.
 123. Derselbe, Parallelräder u. verwandte Mechanismen, Gew. 1875.
 124. Brauer, Kinemat. Untersuchung der Passigdrehbank, Gew. 1876.
 125. A. Slaby, Beitrag zur Kenntnis des Ellipsographen, Gew. 1876.
 126. F. Reuleaux, Über die Sperrwerke u. ihre Anwendungen, Gew. 1877.
 127. H. Wehage, Mechanismus zum Auflösen linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Gew. 1878.
 128. R. Wirth, Über elliptische Bewegung, Gew. 1890.
 129. Koob, Das Regulierproblem in vorwiegend graphischer Behandlung, Z. 1904.
 130. Burmester, Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges, 1918.

Hierbei bedeuten:

Z. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

Gew. = Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleißes in Preußen.

Dingl. = Dinglers polytechnisches Journal.

Z. f. Math. = Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Civ. = Der Civilingenieur.

Forsch.-Arb. = Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens (Verein deutscher Ingenieure).

Allgemeines.

§ 1. Die Kinematik in ihrer Stellung zur Geometrie und Mechanik.

Kinematik (von *κίνημα* Bewegung) ist die Wissenschaft, die den räumlichen und zeitlichen Verlauf der Bewegungen von Körpern erforscht.

Soweit es sich nur um Lagenbeziehungen ohne Berücksichtigung der Zeit handelt, müssen sich naturgemäß die Gebiete von Kinematik und Geometrie decken.

Ziehen wir die Zeit mit in den Bereich unserer Betrachtungen, so kommen wir von den Raumgrößen „Strecke“ und „Winkel“ zu einer Anzahl neuer Größen, die die Geometrie nicht kennt. Es sind dies „Geschwindigkeit“ und „Beschleunigung“ sowie „Winkelgeschwindigkeit“ und „Winkelbeschleunigung“.

Während man nun im allgemeinen in der Mechanik noch einen Schritt weitergeht und zu Raum und Zeit auch noch den Begriff der Masse hinzunimmt, nimmt die Kinematik auf diese keine Rücksicht und behandelt lediglich die Probleme, in denen Raum und Zeit eine Rolle spielen. Man kann daher die Kinematik als Sondergebiet der Mechanik, die Geometrie als Sondergebiet der Kinematik ansehen.

Ebenso wie für Geometrie und Mechanik gibt es auch für die Kinematik eine rechnerische und eine graphische Methode, die zu lösenden Aufgaben zu behandeln. In dem vorliegenden Bändchen soll vor allem die graphische Methode eingehend angewendet werden, die für den Ingenieur in den meisten Fällen wegen

ihrer Anschaulichkeit und Einfachheit die empfehlenswertere ist. Das schließt jedoch nicht aus, daß teilweise auch zur Rechnung übergegangen wird, wo diese besondere Vorteile bietet.

§ 2. Geschichtliche Entwicklung der Kinematik.

Die Kinematik ist eine verhältnismäßig junge Wissenschaft und noch stetig im Ausbau begriffen.

Toricelli (1608 bis 1647) und Viviani (1622 bis 1703) haben sich, als sie sich mit dem Zykloidenproblem beschäftigten, wohl zum ersten Male mit rein kinematischen Aufgaben befaßt. Im Jahre 1742 wurde von Johann Bernoulli der grundlegende Satz vom Momentanpol einer ebenen Bewegung gefunden.

D'Alembert, Euler und Kant, sowie nach ihnen auch Carnot behandelten die Bewegungsprobleme rein geometrisch, indem sie sie von ihren Ursachen vollkommen loslösten, und begründeten damit „die geometrische Bewegungslehre“ als eine selbständige Disziplin, während Ampère, der geistvolle Franzose, dem die Wissenschaft auch auf anderen Gebieten vieles zu danken hat, in seinem Buche „Philosophie des sciences (1843“) zum ersten Male den Namen Kinematik einführt. In seinem Werke nimmt Ampère eine genaue Umgrenzung dieser Spezialwissenschaft vor und beleuchtet ihre Sonderstellung in dem großen Gebiete der Mechanik.

Für die praktische Anwendung der Kinematik im Maschinenbau war es ein bedeutender Schritt, als Poncelet 1838 die kinematische Theorie der wichtigsten zur Bewegungsübertragung dienenden Mechanismen in seine Vorlesungen an der Sorbonne in Paris aufnahm. Damit wurde das Interesse an kinematischen Problemen

in weite Kreise getragen und nun erst die Allgemeinheit auf die Wichtigkeit der neuen Wissenschaft für die Kenntnis der Maschinen aufmerksam gemacht.

Der beste Beweis für die Förderung der Kinematik durch Poncelets Vorlesungen ist wohl darin zu erkennen, daß in kurzer Zeit eine ganze Reihe von Werken erschien, die sich mit den Bewegungsvorgängen der Maschinenmechanismen befaßten.

Hierher gehören besonders die Namen von Willis, Giulio, Laboulaye, Rankine, Goodeve, Haton de la Goupillièrre, Bour, Resal, Morin, Girault, Belanger, Dwelshauers-Déry und Collignon.

Besonders tätig in der weiteren Entwicklung einzelner Theorien waren nach Ampère die Franzosen Poinsot, Chasles, Hachette, Savary, Bobillier u. a.

In Deutschland wurde zunächst außer einigen theoretischen Abhandlungen nichts geschaffen. Erst 1870 erschien ein größeres Werk von Schell, 1872 ein anderes von Aronhold und 1875 Reuleaux' berühmtes Werk: „Theoretische Kinematik“. Eine umfangreiche Bearbeitung fanden die bisher erschienenen Abhandlungen in Burmesters „Lehrbuch der Kinematik“, das im Jahre 1888 herauskam.

Außer den schon Genannten haben noch eine Reihe anderer Männer durch eine große Anzahl von Abhandlungen über Sonderprobleme der Kinematik wesentlichen Anteil an deren stetiger Entwicklung gehabt. Es seien unter anderen hier die Namen genannt Cauchy, Steiner, Schellbach, Möbius, Breton, Transon, Stegmann, Bresse, Jonquières, Lamarle, Mannheim, Grashof, Gilbert, Nicolaidés, Küpper, Somoff, Proell, Sylvester, Saint-Loup, Lignine, Ball, Kempe, Rittershaus, Schadwill, Mohr,

Geisenheimer, Habich, Helm, Schumann, Grübler, Mehmke, Kraft, Rodenberg, Wittenbauer, Land, Koenigs, Mollier, Büchner, Hartmann, Weiß, Holzer, Doehne, Essich.

Theoretischer Teil.

I. Ebene Bewegung eines Punktes.

§ 3. Geradlinige Bewegung.

Weg:

Auf der geraden Linie fg (Fig. 1) bewege sich ein Punkt A . Wir wählen einen Bezugspunkt O auf der Geraden und wollen, um die Lage des Punktes A rechts oder links von O



Fig. 1.

unterscheiden zu können, den Abständen $OA = s$ rechts von O ein positives, links von O ein negatives Vorzeichen geben. Die Bewegung in der Richtung f nach g soll entsprechend als Bewegung im positiven, die von g nach f als solche im negativen Sinne bezeichnet werden.

Die Bewegung ist eindeutig bestimmt, sobald man zu jeder Zeit t die Entfernung $OA = s$ durch eine Funktion

$$s = f(t)$$

angeben kann.

Markiert man auf der Bahnkurve die Stellen, wo sich der Punkt zur Zeit $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ sec befindet, so erhält man ein Bild vom zeitlichen Verlauf der Bewegung.

Viel anschaulicher wird der Vorgang dargestellt, wenn man in einem besonderen rechtwinkligen Koordinatensystem über der Zeit t als Abszisse den Weg s als Ordinate aufträgt. Diese Darstellung heißt die Zeit-Weg-Kurve (Fig. 2).

Geschwindigkeit :

Als Geschwindigkeit v des Punktes A zur Zeit t bezeichnet man das Verhältniß des in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegten Weges ds zu diesem Zeitelement dt , also

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}f(t) \\ = f'(t).$$

Aus Fig. 2 erkennt man, daß

$$v = \tan \alpha.$$

Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem über der Zeit t die Geschwindigkeit v auf, so erhält man das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm (Fig. 3).

Aus der Definition der Geschwindigkeit Gl. (1) ergibt sich

$$ds = v \cdot dt,$$

so daß wir den zwischen den Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ zurückgelegten Weg

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

aus dem tv -Diagramm als Fläche $A_0A_1B_1B_0$ entnehmen können.

Das Weg-Geschwindigkeits-Diagramm (Fig. 5)

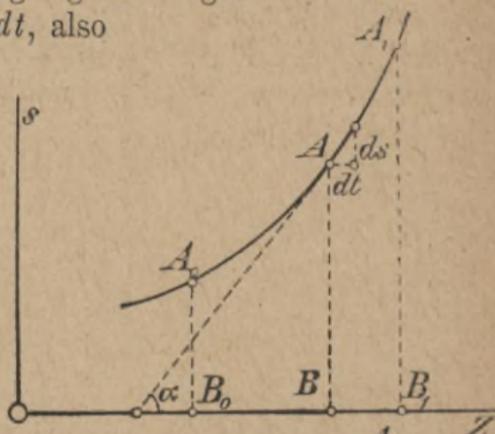


Fig. 2.

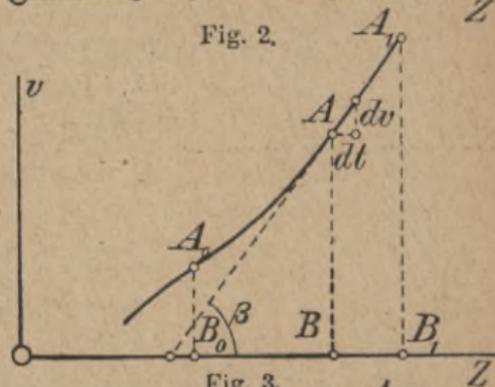


Fig. 3.

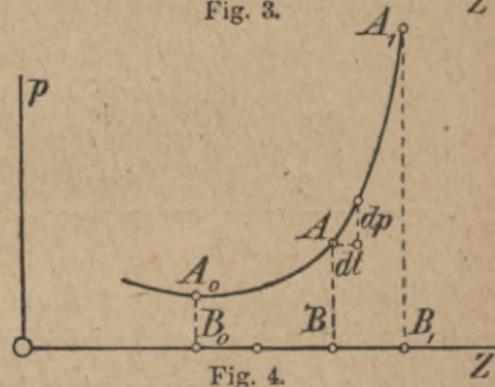


Fig. 4.

erhält man, wenn man die Geschwindigkeit v als Funktion des Weges s aufzeichnet.

Beschleunigung:

Unter der Beschleunigung p des Punktes A zur Zeit t versteht man den Quotienten aus dem in der unendlich kleinen Zeit dt stattfindenden Geschwindigkeitszuwachs dv (nach Größe, Richtung und Richtungssinn) und dem Zeitelement dt , also

$$(2) \quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Aus Fig. 3 ergibt sich, daß

$$p = \tan \beta.$$

Schreibt man

$$(3) \quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds},$$

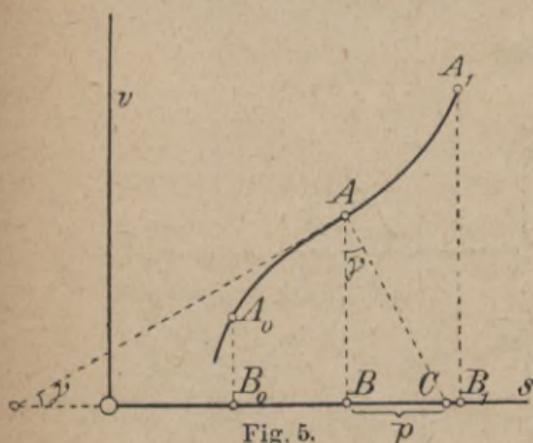


Fig. 5.

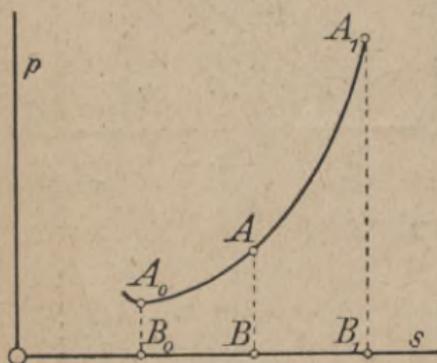


Fig. 6.

so erkennt man aus Fig. 5, daß die Beschleunigung p im v/s — Diagramm als die Subnormale BC gefunden werden kann, da $BC = v \cdot \tan \gamma = v \cdot \frac{dv}{ds} = p$ ist.

Zeichnet man die Werte p als Funktion der Zeit t in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf, so erhält man

die Zeit-Beschleunigungs-Kurve (Fig. 4).

Aus der Definition der Beschleunigung Gl. (2) folgt

$$dv = p dt,$$

und daher läßt sich aus dem p/t — Diagramm die Geschwindigkeit v_1 zur Zeit t_1 durch Planimetrieren der Fläche $A_0 A_1 B_1 B_0$ finden, wenn man ihren Wert v_0 zur Zeit t_0 kennt; denn es ist

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} p dt .$$

Zum Weg-Beschleunigungs-Diagramm gelangt man durch Aufzeichnung der Beschleunigung p über dem Weg s (Fig. 6).

Aus Gl. (3) folgt

$$v dv = p ds ,$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2 \int_{s_0}^{s_1} p ds ,$$

so daß man, wenn freilich umständlicher, auch aus dem ps -Diagramm zur Zeit t_1 die Geschwindigkeit v_1 bestimmen könnte, sobald ihr Wert v_0 zur Zeit t_0 bekannt ist.

§ 4. Zusammensetzung zweier geradliniger Bewegungen.

Zusammensetzung der Wege:

Bewegt sich ein Punkt A (Fig. 7) in der Zeit t gegen eine Ebene E_1 geradlinig, wobei er den Weg $A_0 A_1 = s_r$ gegen den ursprünglich in der Ebene E_1 innegehabten Punkt A_0 zurücklegt, und wird die Ebene E_1 in der gleichen Zeit t gegen eine feste Bezugsebene E_0 um den Weg s_1 in gerader Richtung verschoben, so fällt der Punkt A_1 nach diesen t sec mit dem Punkte A_2 der Ebene E_0 zusammen, den man als Endpunkt der Diagonale $A_0 A_2 = s$ im Parallelogramm $A_0 A_1 A_2 A'_1$ erhält. Zu diesem Punkte gelangt man also durch Aneinandersetzen der Wege s_r und s_1 unter Berücksichtigung der richtigen Wegrichtungen (auch dem Bewegungssinne nach).

Dieses Verfahren heißt „geometrische Addition“ und kann symbolisch geschrieben werden

$$s = s_r \hat{+} s_1 ,$$

wobei das Zeichen $\hat{+}$ über dem $+$ diese Summe von einer gewöhnlichen algebraischen Summe unterscheidet.

Wie man aus Fig. 7 sieht, ist es dabei gleichgültig, ob man den Linienzug $A_0 A_1 A_2$ oder $A_0 A'_1 A_2$ verfolgt,

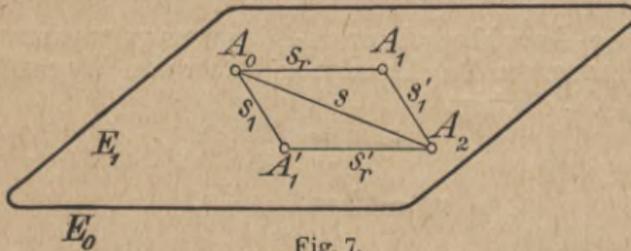


Fig. 7.

d. h. die Reihenfolge der Summanden ist beliebig, und wir können auch schreiben

$$s = s_1 \hat{+} s_r.$$

Man kann das Verhältnis

$$v_m = \frac{s}{t}$$

die **mittlere Geschwindigkeit** der zusammengesetzten Bewegung nennen, nicht zu verwechseln mit der tatsächlichen Geschwindigkeit. Mit dieser würde sie nur dann übereinstimmen, wenn beide Bewegungen, sowohl die Relativbewegung des Punktes gegen die bewegte Ebene E_1 , als auch deren Bewegung gegen E_0 während der in Frage kommenden Zeit t gleichförmige Bewegungen sind.

Zusammensetzung der Geschwindigkeiten:

Das Parallelogramm der Wege für geradlinige Bewegungen gilt auch, wenn das Zeitelement dt , in dem wir die Bewegungen betrachten, unendlich klein wird. Da wir in dieser kurzen Zeit sogar die einzelnen Bewegungen als gleichförmig ansehen können, so wird die mittlere Geschwindigkeit im betrachteten Zeitelement zur tatsächlichen Geschwindigkeit der zusammengesetzten

Bewegung, d. h. die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung ist

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_r \hat{+} ds_1}{dt} = v_r \hat{+} v_1,$$

wenn $v_r = \frac{ds_r}{dt}$ und $v_1 = \frac{ds_1}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes A relativ zur bewegten Ebene E_1 und die der letzteren gegen die ruhende Ebene sind.

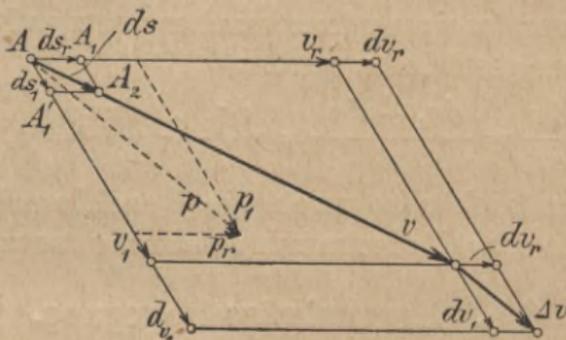


Fig. 8.

Wir können also die tatsächliche Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung durch geometrische Addition der Geschwindigkeiten der Einzelbewegungen finden.

Zusammensetzung der Beschleunigungen:

Beobachten wir die zusammengesetzte Bewegung in zwei um dt zeitlich verschiedenen Punkten, und sind zunächst v_r und v_1 die Geschwindigkeiten der Einzelbewegungen, während sie im 2. Punkte $v_r + dv_r$ und $v_1 + dv_1$ sind, so erhalten wir die Geschwindigkeit v der zusammengesetzten Bewegung

im 1. Zeitpunkte

$$v = v_r \hat{+} v_1,$$

im 2. Zeitpunkte

$$\begin{aligned} v \hat{+} \Delta v &= (v_r + dv_r) \hat{+} (v_1 + dv_1), \\ v \hat{+} \Delta v &= (v_r \hat{+} v_1) \hat{+} (dv_r \hat{+} dv_1), \\ \Delta v &= dv_r \hat{+} dv_1, \end{aligned}$$

d. h. der geometrische Zuwachs der Geschwindigkeit oder die sogenannte „Elementarbeschleunigung“ der zusammengesetzten Bewegung Δv ist die geometrische Summe der Elementarbeschleunigungen dv_r und dv_1 der Einzelbewegungen.

Die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung kann daher geschrieben werden

$$p = \frac{\Delta v}{dt} = \frac{dv_r \hat{+} dv_1}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \hat{+} \frac{dv_1}{dt} = p_r \hat{+} p_1.$$

Es lassen sich also auch die Beschleunigungen nach dem Parallelogramm zusammensetzen.

§ 5. Krummlinige Bewegung.

Das bei der geradlinigen Bewegung für den Weg und die Geschwindigkeit Gesagte gilt sinngemäß auch für die krummlinige Bewegung.

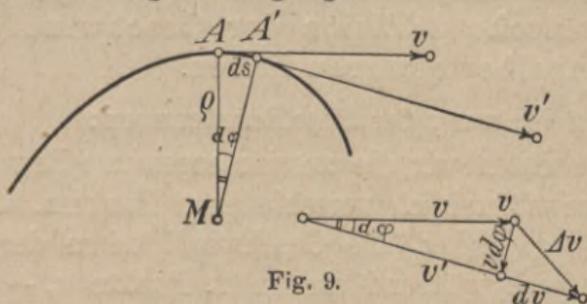


Fig. 9.

Für die Beschleunigungen treten jedoch allgemeinere Verhältnisse ein. Um die hierfür geltenden Beziehungen abzuleiten, denken wir uns zu einer Lage A des bewegten Punktes (Fig. 9) die Nachbarlage A' ermittelt, in

die er von A aus nach Verlauf des Zeitelements dt gelangt ist. Die Geschwindigkeit in A sei v , die in A' sei v' . Da die Geschwindigkeiten in die Richtung der Bahntangenten der Punkte A und A' fallen, so müssen v und v' denselben Winkel $d\varphi$ einschließen, wie diese Tangenten.

Um nach Größe und Richtung zur Geschwindigkeit v' zu gelangen, müssen wir nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten mit v eine kleine Geschwindigkeit Δv , die oben mit „Elementarbeschleunigung“ bezeichnet wurde, zusammensetzen. Diese Elementarbeschleunigung wird durch eine Beschleunigung p verursacht, welche in gleicher Richtung und in gleichem Sinne wie Δv auf den Punkt A einwirkt und die Größe hat

$$p = \frac{\Delta v}{dt}.$$

An Stelle von Δv können wir zwei Komponenten einführen dv in Richtung der Geschwindigkeit v' , also in der Tangentenrichtung, und $v d\varphi$ in dazu senkrechter Richtung, also in der Normalenrichtung,

was wir symbolisch schreiben können

$$\Delta v = dv \hat{+} v d\varphi.$$

Dann wird die Gesamtbeschleunigung

$$p = \frac{\Delta v}{dt} = \frac{dv \hat{+} v d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{+} v \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

d. h. die Gesamtbeschleunigung läßt sich geometrisch aus zwei Einzelbeschleunigungen zusammensetzen, von denen die Komponente

$$(4) \quad p_t = \frac{dv}{dt}$$

in die Richtung von v' , also in die Tangentenrichtung fällt und daher **Tangentialbeschleunigung** genannt wird. Diese Komponente wirkt lediglich auf die Größenveränderung der Geschwindigkeit v ein.

Die andere Komponente

$$(5) \quad p_n = v \frac{d\varphi}{dt}$$

fällt in die Richtung von $v d\varphi$, also steht sie senkrecht zur Tangente und heißt daher **Normalbeschleunigung**. Sie verursacht lediglich die Richtungsänderung der Geschwindigkeit.

Zieht man die beiden Normalen der Kurve in A und A' , so schneiden sie sich im Krümmungsmittelpunkt M und bilden den Winkel $d\varphi$ miteinander. $AM = A'M = \varrho$ ist der Krümmungsradius der Bahn im Punkte A . Wir können dann setzen

$$ds = \varrho \cdot d\varphi,$$

$$d\varphi = \frac{ds}{\varrho}$$

und mithin läßt sich der oben für die Normalbeschleunigung erhaltene Ausdruck [Gl. (5)] in der Form schreiben

$$p_n = \frac{v d\varphi}{dt} = v \cdot \frac{ds}{\varrho \cdot dt} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

II. Ebene Bewegung zweier Ebenen.

§ 6. Schiebung.

Eine Ebene vollzieht gegen eine andere eine Schiebung, wenn eine in ihr liegende Gerade während der Bewegung ständig einer festen Geraden parallel bleibt.

Dann beschreiben sämtliche Körperpunkte kongruente, gleichliegende Bahnkurven und folgen dem gleichen Bewegungsgesetz. Kennt man daher die Bahn eines einzelnen Punktes der bewegten Ebene und seine Bewegungsgleichung auf ihr

$$s = f(t),$$

so ist damit auch die Bewegung eines jeden anderen Punktes bekannt.

§ 7. Drehung um einen festen Punkt.

Eine Ebene vollzieht gegen eine andere Ebene eine Drehung, wenn einer ihrer Punkte seine Lage ständig beibehält. Der feste Punkt heißt der Drehpunkt, Drehpol oder das Drehzentrum.

Drehwinkel:

In Fig. 10 sei M der Drehpunkt der Bewegung. Wir wählen die durch M gehende feste Bezugsgerade MN und wollen, um den Drehsinn der Bewegung angeben zu können, die Drehung im Sinne des Uhrzeigers als Drehung im positiven, die im umgekehrten Sinne als solche im negativen Sinne bezeichnen.

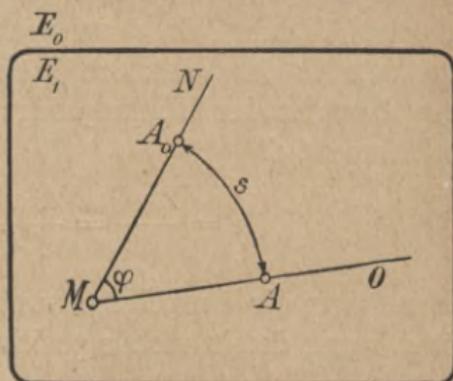


Fig. 10.

Die Drehung der bewegten Ebene E_1 ist eindeutig bestimmt, wenn man zu jeder Zeit t den Winkel φ , den eine mit derselben fest verbundene Gerade MO mit MN einschließt, durch eine Funktion

$$\varphi = f(t)$$

angeben kann. Es kann also φ positives oder negatives Vorzeichen haben, je nach dem Drehsinn.

Winkelgeschwindigkeit:

Als Winkelgeschwindigkeit ω der Ebene E_1 zur Zeit t bezeichnet man das Verhältnis des in der unendlich kleinen Zeit dt beschriebenen Winkels $d\varphi$ zu diesem Zeitelement dt , also

$$(7) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (f(t)) = f'(t).$$

Da $d\varphi$ je nach dem Drehsinn positiv oder negativ sein kann, so wird ω entsprechend positiv, wenn die Drehung im Sinne des Uhrzeigers, negativ, wenn sie im entgegengesetzten Sinne stattfindet.

Winkelbeschleunigung:

Unter der Winkelbeschleunigung ε der Ebene E_1 zur Zeit t versteht man den Quotienten aus dem in der unendlich kleinen Zeit dt stattfindenden Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ und dem Zeitelement dt

$$(8) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t).$$

Je nachdem die Winkelgeschwindigkeit zu- oder abnimmt, ist $d\omega$ und damit auch ε positiv oder negativ.

Bewegung eines beliebigen Punktes der rotierenden Ebene:

Alle Punkte der rotierenden Ebene beschreiben konzentrische Kreise um den Drehpunkt. Ist A_0 die Lage eines Punktes A der rotierenden Ebene zur Zeit $t = 0$, wobei $MA_0 = r$ sein Drehradius ist, A seine Lage zur Zeit t und bezeichnet $\sphericalangle A_0MA = \varphi$ den bei der Drehung

in t sec beschriebenen Drehwinkel, so ist der von A in dieser Zeit zurückgelegte Weg

$$s = r \cdot \varphi .$$

Nach den für die krummlinige Bewegung eines Punktes in § 5 abgeleiteten Beziehungen erhält man aus dieser Bewegungsgleichung die Geschwindigkeit des Punktes A zur Zeit t

$$(9) \quad v = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega ,$$

die Tangentialbeschleunigung des Punktes A zur Zeit t

$$(10) \quad p_t = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon ,$$

die Normalbeschleunigung des Punktes A zur Zeit t

$$(11) \quad p_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 ,$$

die Gesamtbeschleunigung

$$(12) \quad p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = \sqrt{(r\varepsilon)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} ,$$

den Winkel α derselben gegen den Drehradius MA aus der Beziehung

$$\tan \alpha = \frac{p_t}{p_n} = \frac{r\varepsilon}{r\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

und wir erhalten somit den Satz:

Bei der Drehung einer Ebene um einen festen Punkt beschreiben alle ihre Punkte konzentrische Kreise. Ihre Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (auch Tangential- und Normalbeschleunigungen) sind den Drehradien proportional. Ihre Beschleunigungen schließen mit ihren Drehradien gleiche Winkel ein.

§ 8. Momentanpol zweier beliebig sich bewegender Ebenen.

Die ebene Bewegung einer Ebene E_1 (Fig. 11) gegen eine feste Bezugsebene E_0 ist vollständig bestimmt, wenn man die Bewegung zweier ihrer Punkte A und B kennt. Nehmen wir an, diese Punkte hätten sich im Zeitelement dt aus ihren Lagen $A_0 B_0$ in die Lagen $A_1 B_1$ längs ihrer Bahn-

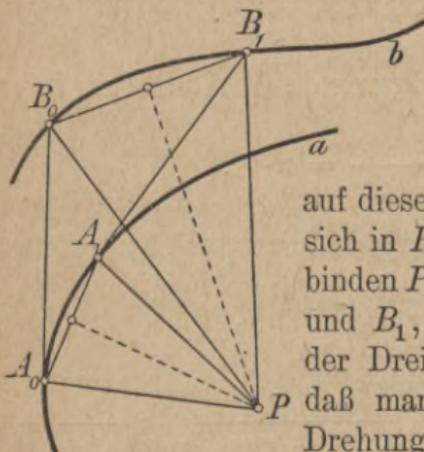


Fig. 11.

kurven a und b bewegt. Ersetzen wir die Kurvenelemente $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ durch ihre kleinen Sehnen $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$, errichten auf diesen die Mittelsenkrechten, die sich in P schneiden mögen, und verbinden P mit A_0 und B_0 sowie mit A_1 und B_1 , so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $A_0 P B_0$ und $A_1 P B_1$, daß man die Strecke $A_0 B_0$ durch Drehung um P in die Lage $A_1 B_1$ überführen kann.

Ist das Zeitelement dt unendlich klein, so gehen die Sehnen $A_0 A_1$ und $B_0 B_1$ in die Tangenten der Kurven a und b , und ihre Mittelsenkrechten in die Normalen über. Die Bewegung läßt sich also im betrachteten Zeitpunkt als eine Elementardrehung um den Schnittpunkt P der Bahnnormalen auffassen.

Wir nennen dann P das Momentanzentrum, den Geschwindigkeitspol, Momentanpol oder Pol der Bewegung. Der Momentanpol ist somit der einzige Punkt der bewegten Ebene, der im betrachteten Zeitpunkt in Ruhe bleibt. Alle anderen Punkte sind in Bewegung. Da es gleichgültig ist, welche beiden die Bewegung

bestimmenden Punkte der bewegten Ebene herausgegriffen werden, so müssen die augenblicklichen Normalen der Bahnen aller Punkte sich im Momentanpol schneiden.

Alle diese Strahlen, welche die Punkte der Ebene mit dem Pol verbinden, heißen Hauptstrahlen.

§ 9. Geschwindigkeiten zweier beliebig sich bewegender Ebenen.

Wie man des weiteren bald einsehen wird, kann man die zeichnerische Ermittlung der Geschwindigkeiten sehr vereinfachen, wenn man die letzteren um 90° im Uhrzeigersinne dreht, so daß sie in die Hauptstrahlen der Punkte fallen. Wir sprechen dann von den gedrehten, orthogonalen oder „normalen“ Geschwindigkeiten der Punkte.

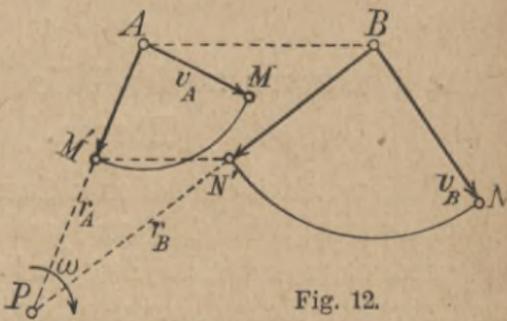


Fig. 12.

Kennt man den Momentanpol P (Fig. 12) sowie die Geschwindigkeit v_A irgendeines Punktes A der Ebene E_1 , so ist die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit um den Momentanpol

$$\omega = \frac{v_A}{r_A}$$

und die Geschwindigkeit v_B eines beliebigen anderen Punktes B der Ebene

$$v_B = \omega \cdot r_B = \frac{r_B}{r_A} \cdot v_A,$$

d. h. wir erhalten zeichnerisch v_B als die vierte geometrische

Proportionale aus den drei bekannten Größen r_A , r_B und v_A .

Sind z. B. $AM = v_A$ und $BN = v_B$ die Geschwindigkeiten von A und B in richtiger Größe und Lage, so sind $AM' = v_A$ und $BN' = v_B$ die gedrehten Geschwindigkeiten der Punkte A und B und es muß auf Grund der obigen Beziehung

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{r_B}{r_A},$$

also auch $M'N' \parallel AB$ sein, d. h. wir finden v_B , falls v_A bekannt ist, wenn wir A mit B verbinden und $M'N' \parallel AB$ ziehen.

§ 10. Polkurven zweier beliebig sich bewegender Ebenen.

Während eines unendlich kleinen Zeitelements dt ist jede Bewegung eine Drehung um einen Momentanpol. Während einer endlichen Zeit muß also jede Bewegung aus einer unendlichen Anzahl solcher Elementardrehungen bestehen. Wenn wir es nicht mit dem Spezialfall der Drehung um einen festen Punkt zu tun haben, so muß der Pol in beiden Ebenen seine Lage stetig ändern und gegenüber jeder der beiden Ebenen eine Kurve beschreiben. Diese Kurven heißen die Polbahnen oder Polkurven, und zwar wird die in der festen Ebene liegende Polbahn die ruhende Polkurve (Rastpolbahn), die in der bewegten Ebene liegende die bewegliche Polkurve (Gangpolbahn) genannt.

In jedem Zeitpunkt haben beide Polkurven den Pol gemeinsam. Durch eine Elementardrehung (Drehung um einen unendlich kleinen Winkel) um diesen gemeinsamen Punkt müssen die Nachbarpunkte der Polkurven zur

Deckung gekommen sein. Das ist nur möglich, wenn sich die Polkurven im Pol berühren und während der Bewegung aufeinander abrollen, ohne zu gleiten. Sie heißen aus diesem Grunde auch Rouletten oder Rollkurven.

Sind die Polbahnen sowie das Gesetz bekannt, nach dem sie aufeinander abrollen, so ist hierdurch die Bewegung der Ebenen völlig bestimmt.

§ 11. Hüllkurven.

Es sei die Bewegung einer Ebene gegen eine andere bekannt. Mit der bewegten Ebene seien zwei Kurven α und β verbunden und ihre Hüllkurven a und b in der ruhenden Ebene bestimmt (Fig. 13). A und B seien die momentanen Berührungspunkte der beiden Kurvenpaare.

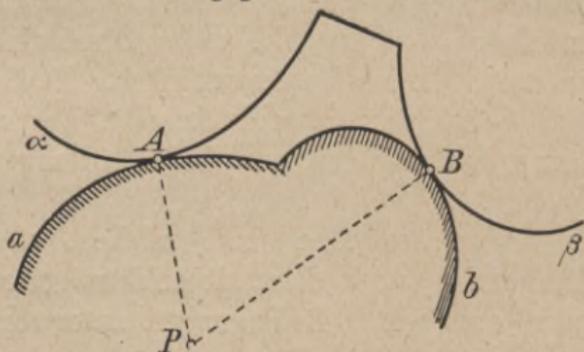


Fig. 13.

Wenn α bzw. β bei der Bewegung weder in a bzw. b eindringen, noch sich davon abheben sollen — und dies ist die Voraussetzung der Hüllkurven —, so müssen sich die Punkte A und B längs ihrer Tangenten bewegen. Das ist nur möglich, wenn die Bewegung eine momentane Drehung um den Schnittpunkt P der beiden Berührungsnormalen ist. P ist also der Pol der Bewegung.

§ 12. Umkehrung der Bewegung.

Da es bei der Bewegung zweier Ebenen stets nur auf die relative Lage der einen Ebene gegenüber der anderen ankommt, so ist es gleich, welche der beiden Ebenen als die ruhende angesehen wird. Die Lage der Pole ändert sich dadurch nicht, und die Rollkurven bleiben dieselben. Nur wird die ruhende Polbahn zur beweglichen, die bewegliche zur ruhenden Polbahn.

§ 13. Beschleunigungspol.

Wie wir oben sahen, beschreiben bei der allgemeinen Bewegung einer Ebene gegenüber einer anderen alle ihre Punkte krummlinige Bahnen und haben daher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Nur der Geschwindigkeitspol allein besitzt keine Geschwindigkeit. Es liegt nahe zu fragen, ob es auch einen Punkt gibt, der keine Beschleunigung hat und den wir Beschleunigungspol nennen wollen.

Vorausgesetzt, es gäbe einen solchen, so darf er weder Tangential- noch Normalbeschleunigung haben; d. h. er muß den beiden Bedingungen unterworfen sein

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$p_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

Der Geschwindigkeitspol befindet sich momentan in Ruhe. Im nächsten Augenblick nimmt er eine Geschwindigkeit an; er muß also eine Beschleunigung haben und kann daher nicht zugleich Beschleunigungspol sein.

Dann muß der Beschleunigungspol ein Punkt sein, der selbst eine endliche Geschwindigkeit besitzt. Die erste der beiden obigen Bedingungen sagt uns, daß seine Geschwindigkeit v augenblicklich einen Maxi-

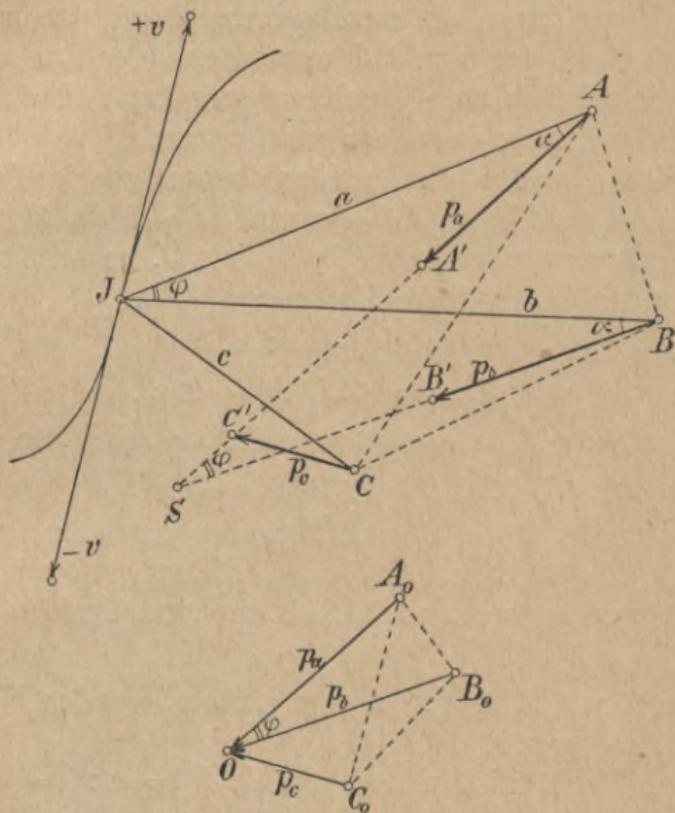


Fig. 14.

mal- oder Minimalwert hat. Die zweite Bedingung kann bei endlichem v nur erfüllt werden, wenn $\rho = \infty$ wird, d. h. wenn sich der Punkt in einem Wendepunkte seiner Bahn befindet.

In Fig. 14 sei J der Beschleunigungspol, v seine Geschwindigkeit. Da diese während der unendlich kleinen Zeit dt konstant bleibt, so ändert man an den

Beschleunigungen der einzelnen Punkte der Ebene nichts, wenn man allen Punkten der Ebene eine zusätzliche Geschwindigkeit erteilt, die gleich der Geschwindigkeit v des Punktes J und entgegengesetzt gerichtet ist. Auf diese Weise kann man die Bewegung der Ebene in eine Drehung um den Punkt J verwandeln, der nun weder Geschwindigkeit noch Beschleunigung hat und also als fester Drehpunkt angesehen werden kann.

Sind p_a und p_b die Beschleunigungen zweier Punkte A und B der Ebene, $JA = a$ und $JB = b$ die Abstände dieser Punkte vom festen Drehpunkt J , so erhält man nach früherem (§ 7) die Beziehung

$$(1) \quad p_a : p_b = a : b,$$

$$(2) \quad \sphericalangle JAA' = \sphericalangle JBB' = \sphericalangle \alpha.$$

Ist S der Schnittpunkt von AA' und BB' , so ist

$$(3) \quad \sphericalangle ASB = \sphericalangle AJB = \sphericalangle \varphi.$$

Kennt man die Beschleunigungen p_a und p_b zweier Punkte A und B nach Größe und Richtung, so wird der Beschleunigungspol J somit als Spitze eines Dreiecks AJB mit

a) der Basis AB , dem ihr gegenüberliegenden Winkel $AJB = \varphi$ und

b) dem Verhältnis der Seiten $AJ : JB = a : b = p_a : p_b$ gefunden.

Die Bedingung a) ist erfüllt, wenn J mit A , B und S auf einem Kreise liegt, da dann $\sphericalangle AJB = \sphericalangle ASB = \sphericalangle \varphi$ gleiche Peripheriewinkel über der Sehne AB sind.

Die Bedingung b) wird erfüllt, wenn J auf einem Halbkreise liegt, welcher über der Verbindungslinie der Punkte U und V geschlagen ist, die AB innen und außen im Verhältnis $p_a : p_b$ teilen (Apollonischer Lehrsatz).

Zu einer bequemerem Ermittlung von J führt folgende Überlegung:

Trägt man die Beschleunigung p_a und p_b in wahrer Größe und Richtung von einem Punkte O aus in einem besonderen Beschleunigungsplan auf, so daß $A_0O = p_a$, $B_0O = p_b$, so ist

$$\sphericalangle A_0OB_0 = \sphericalangle ASB = \sphericalangle AJB = \sphericalangle \varphi.$$

Da nun

$$p_a : p_b = a : b,$$

so sind die Dreiecke $\triangle A_0OB_0$ und $\triangle AJB$ ähnlich.

Trägt man für einen beliebigen anderen Punkt C mit Abstand $CJ = c$ und der Beschleunigung $p_c = CC'$ im Beschleunigungsplan seine Beschleunigung $C_0O = p_c$ nach Größe und Richtung ein, so ergibt sich analog wie oben

$$\triangle C_0OB_0 \sim \triangle CJB,$$

$$\triangle C_0OA_0 \sim \triangle CJA,$$

und man erkennt, daß auch

$$\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle ABC.$$

Kennt man also die Beschleunigung p_a und p_b zweier Punkte A und B und will man diejenige p_c eines beliebigen anderen Punktes C der Ebene finden, so muß man im Beschleunigungsplan über A_0B_0 das dem Dreieck ABC ähnliche Dreieck $A_0B_0C_0$ errichten und findet sodann $C_0O = p_c$ in richtiger Größe und Richtung.

Zu jedem Punkte der Ebene gehört somit ein bestimmter Punkt des Beschleunigungsplanes und umgekehrt. Zum Punkte O des Beschleunigungsplanes gehört die Beschleunigung $p = 0$; er muß also dem Beschleunigungspol J entsprechen. Diesen findet man demnach, wenn man über AB als Basis $\triangle AJB \sim \triangle A_0OB_0$ konstruiert.

Da im Beschleunigungsplan stets ein einziger Punkt O existiert, zu dem es keine Beschleunigung gibt, so erkennt man hieraus, daß es stets einen einzigen Punkt J

der bewegten Ebene gibt, der keine Beschleunigung hat; d. h.: Es gibt stets einen, aber nur einen einzigen Beschleunigungspol.

§ 14. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungspol. Wendekreis und Wechselkreis.

Die relative Bewegung zweier Ebenen sei durch die Polkurven π und p , die sich zur Zeit t im Momentanpol P

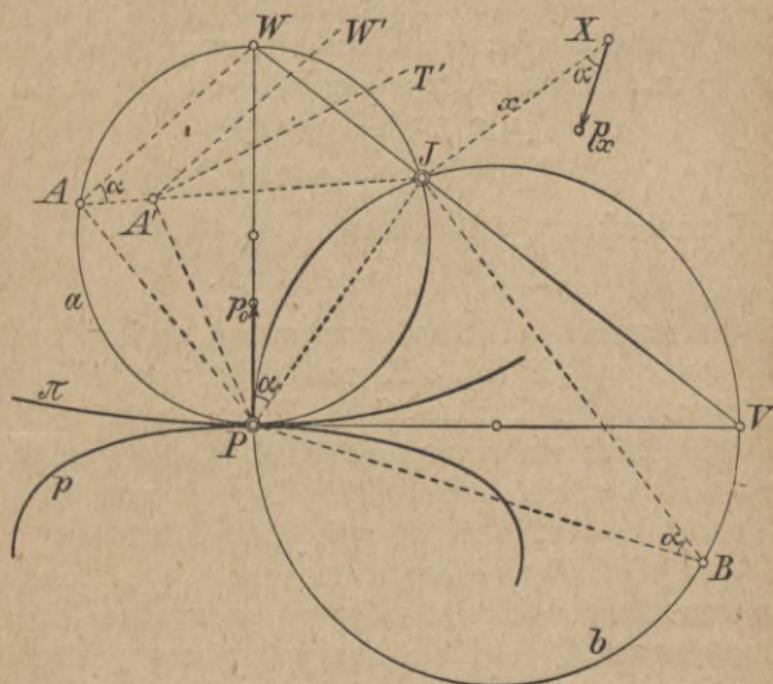


Fig. 15.

berühren, und durch den augenblicklichen Beschleunigungspol J gegeben. (Fig. 15). Es seien weiter durch P und J zwei Kreise a und b so gezeichnet, daß die Polkurven in P von a berührt, von b dagegen senkrecht geschnitten werden.

Der Pol P hat momentan keine Geschwindigkeit, erhält aber nach der unendlich kleinen Zeit dt eine solche und zwar in Richtung der Normalen in P , die den Kreis a in W schneiden möge. P hat also eine Beschleunigung p_0 , die in die Richtung der Normalen PW fällt und mit dem Strahl PJ den Winkel $WPJ = \alpha$ bilden möge. Die Beschleunigung p_x jedes anderen Punktes X der Ebene muß mit dem Strahl XJ den gleichen Winkel α bilden.

Verbinden wir einen beliebigen Punkt A des Kreises a mit P , J und W , so ist $\sphericalangle WAJ = \sphericalangle WPJ = \alpha$ als Peripheriewinkel über gleichem Bogen und damit AW die Richtung der Beschleunigung p_a . Da nun $\sphericalangle WAP = 90^\circ$ als Peripheriewinkel über einem Halbkreis, AP die augenblickliche Bahnnormale des Punktes A und somit AW seine augenblickliche Bahntangente ist, so fällt die Gesamtbeschleunigung des Punktes A in die Tangente seiner Bahn; d. h. der Punkt A hat nur eine Tangentialbeschleunigung und keine Normalbeschleunigung. Es muß also für ihn

$$p_n = \frac{v_a^2}{\rho_a} = 0$$

sein. Da seine Drehgeschwindigkeit v_a um den Pol P einen endlichen Wert hat, so kann $p_n = 0$ nur dann werden, wenn der Krümmungsradius seiner Bahn $\rho_a = \infty$ ist; d. h. der Punkt A und damit alle anderen Punkte des Kreises a befinden sich in Wendepunkten ihrer Bahnen. Der Kreis a heißt daher der Wendekreis.

Jeder beliebige andere Punkt A' innerhalb oder außerhalb des Wendekreises, der auf AJ gelegen ist, hat eine Beschleunigung $A'W' \parallel AW$. Da aber seine Bahntangente $A'T' \perp A'P$ sein muß, so fällt $A'W'$ mit $A'T'$

nicht mehr zusammen, d. h. A' muß eine Normalbeschleunigung haben und kann sich daher nicht in einem Wendepunkte seiner Bahnkurve befinden. Damit ist erwiesen, daß der Wendekreis der geometrische Ort aller Punkte überhaupt ist, die sich im betrachteten Augenblick in Wendepunkten ihrer Bahn befinden.

Verbinden wir einen beliebigen Punkt B des Kreises b mit P und J , so ist $\sphericalangle JBP = \sphericalangle JPW = \alpha$, weil Peripherie- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen gleich sind. Die Beschleunigung p_b von Punkt B fällt also mit der Bahnnormalen BP zusammen. Der Punkt B und mit ihm alle Punkte des Kreises b haben daher nur eine Normalbeschleunigung, aber keine Tangentialbeschleunigung. Es muß also für diese Punkte

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

sein; d. h. die Geschwindigkeiten aller Punkte des Kreises b haben augenblicklich einen Maximal- oder Minimalwert. Da die Tangentialbeschleunigung in diesen Punkten in eine Verzögerung oder umgekehrt übergeht, also ihr Vorzeichen wechselt, so heißt dieser Kreis der Wechselkreis.

Analog wie vorher läßt sich zeigen, daß es weder innerhalb noch außerhalb des Wechselkreises Punkte B' gibt, deren Tangentialbeschleunigung $p_t = 0$ wird, und wir erhalten damit den Satz:

Der Wechselkreis ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Geschwindigkeit einen Maximal- oder Minimalwert besitzt.

Sind P und P' zwei benachbarte Momentanpole (Fig. 16), wobei $PP' = ds$, und ist die momentane Winkelgeschwindigkeit um den Pol ω , die Winkelbeschleunigung ε , während

der Pol selbst seine Lage auf den Polbahnen mit der Polwechselgeschwindigkeit

$$u = \frac{ds}{dt}$$

ändert, so hat P nach der Zeit dt die Geschwindigkeit

$$\Delta v = \omega \cdot ds$$

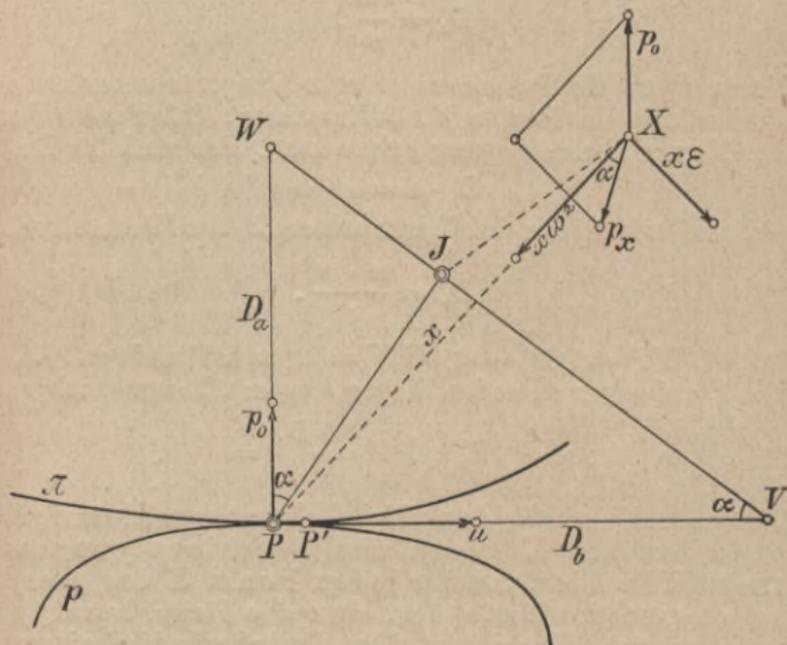


Fig. 16.

angenommen. Die Beschleunigung des Punktes P ist also

$$(13) \quad p_0 = \frac{\Delta v}{dt} = \omega \cdot \frac{ds}{dt} = \omega \cdot u.$$

Jeder beliebige Punkt X mit dem Polabstand $PX = x$ hat infolge der Drehung um den Pol die Normalbeschleunigung

$$p_n = x \omega^2$$

und die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = x \epsilon.$$

Außerdem muß er noch die Beschleunigung p_0 des Poles selbst haben.

Vom Punkte W im Abstand $PW = D_a$ wissen wir, daß er nur die Tangentialbeschleunigung $D_a \cdot \varepsilon$ haben kann. Daher müssen sich die übrigen Beschleunigungen aufheben, d. h. es muß

$$D_a \omega^2 = \hat{=} u \cdot \omega$$

sein, woraus sich der Durchmesser D_a des Wendekreises ergibt.

$$(14) \quad D_a = \frac{u}{\omega}.$$

Die in P an die Polbahnen gelegte Tangente schneide den Wechselkreis im Punkte V . Wir wissen, daß Punkt V nur eine Normalbeschleunigung haben kann, also muß für ihn

$$D_b \cdot \varepsilon = u \cdot \omega$$

sein, und wir finden den Durchmesser D_b des Wechselkreises

$$(15) \quad D_b = \frac{u \cdot \omega}{\varepsilon}.$$

Da $\sphericalangle JVP = 90^\circ - \sphericalangle JPV = \sphericalangle \alpha$ ist und da W , J und V auf einer Geraden liegen, so erhält man auch noch

$$(16) \quad \tan \alpha = WP : PV = \frac{D_a}{D_b} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

d. h. der Winkel, den die Gesamtbeschleunigung eines Punktes X gegen den Beschleunigungspolstrahl JX bildet, ist für jeden Punkt X der gleiche und ebenso groß wie der, den die Beschleunigung des Punktes X gegen den Geschwindigkeitspolstrahl PX bilden würde, wenn der Geschwindigkeitspol ein fester Drehpunkt wäre.

§ 15. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Bahn eines bewegten Punktes nach Hartmann.

Der Punkt A (Fig. 17) lege als Punkt einer bewegten Ebene E_1 gegen die ruhende Ebene E_0 in der Zeit dt mit der momentanen Geschwindigkeit $v_a = AV_a$ das Weg-element $AA_1 = ds$ seiner Bahnkurve c zurück, deren Krümmungsmittelpunkt in A mit C_a , deren Krümmungsradius mit $AC_a = R$ bezeichnet sei.

Man kann dann die Bewegung von A allein als eine Drehung um C_a mit der Winkelgeschwindigkeit ω_c ansehen. Da

$$v_a = \frac{ds}{dt} = R \cdot \omega_c$$

ist, so erhält man für den Krümmungsradius den Wert

$$AC_a = R = \frac{v_a}{\omega_c}.$$

Auf AC_a liegt der Momentanpol P von E_1 gegen E_0 . Dieser ändert seine Lage auf der ruhenden Polkurve p mit der „Polwechselgeschwindigkeit“ $PU = u$, die in die beiden Komponenten $u_a \perp PC_a$ und $u_c \parallel PC_a$ zerlegt werden kann; d. h. der Pol P verschiebt sich auf dem sich drehenden Strahl AC_a mit der Geschwindigkeit u_c und dreht sich gleichzeitig um C_a mit u_a . Da P während der Bewegung von A nach A_1 den Strahl AC_a nicht verlassen kann, so muß

$$u_a = \overline{PC_a} \cdot \omega_c$$

oder

$$\omega_c = \frac{u_a}{\overline{PC_a}}$$

oder

$$\frac{AC_a}{\overline{PC_a}} = \frac{v_a}{u_a}$$

sein; d. h. verbinden wir die Endpunkte V_a und U_a miteinander, so geht diese Verbindungslinie durch den Krümmungsmittelpunkt C_a .

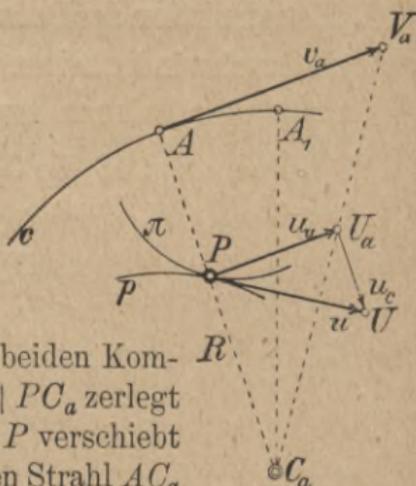


Fig. 17.

Man findet also aus der Geschwindigkeit $AV_a = v_a$ von A und der Polwechselgeschwindigkeit u des Poles P den Krümmungsmittelpunkt C_a , indem man die Komponente $u_a = PU_a$ von u senkrecht zu AP ermittelt und die Gerade AP und V_aU_a in C_a zum Schnitt bringt.

§ 16. Konstruktion der Polwechselgeschwindigkeit u aus den Geschwindigkeiten und Krümmungszentren der Bahnen zweier Punkte.

Es seien in Fig. 18 die Geschwindigkeiten $v_a = AV_a$ und $v_b = BV_b$ der Punkte A und B einer bewegten

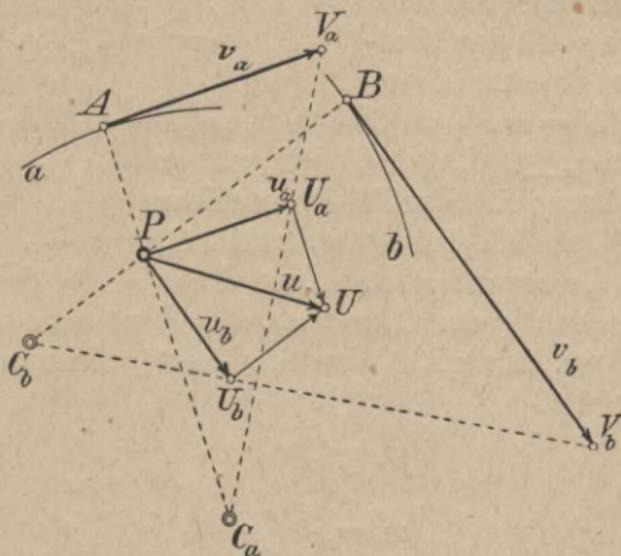


Fig. 18.

Ebene E_1 gegenüber der ruhenden Ebene E_0 und die augenblicklichen Krümmungszentren C_a und C_b ihrer Bahnen a und b bekannt. Dann ist der Momentanpol P von E_1 gegen E_0 als der Schnittpunkt der Bahnnormalen AC_a und BC_b gegeben.

Zieht man durch P die Parallelen zu v_a und v_b bis zu ihren Schnittpunkten U_a und U_b mit den Strahlen $V_a C_a$ und $V_b C_b$ und durch U_a bzw. U_b die Parallelen zu AP bzw. BP , die sich in U schneiden mögen, so ist $PU = u$ die Polwechselgeschwindigkeit nach Größe, Richtung und Sinn; damit ist auch PU die Tangente an die Polkurven in P und die dazu Senkrechte in P die Richtungslinie der Beschleunigung p_0 des Poles P

III. Ebene Bewegung dreier Ebenen.

§ 17.

Es mögen sich die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 gegeneinander bewegen. Wenn wir uns als Beobachter auf eine der Ebenen stellen und damit alle ihre Bewegungen mitmachen würden, so müßte uns diese Ebene als eine feste Ebene erscheinen und wir könnten die Relativbewegung der beiden anderen gegen diese Ebene beobachten. Es steht uns frei, eine der Ebenen als eine solche „feste Ebene“ jederzeit anzusehen. Wir wollen die Ebene E_1 als feste Ebene wählen und mit der Papierebene zusammenfallen lassen.

Denkt man sich während der Bewegung eine Stelle A durch einen plötzlichen Nadelstich auf allen drei Ebenen markiert, so sollen die drei übereinander liegenden Punkte je nach der Ebene, der sie angehören, die Buchstaben A_1, A_2, A_3 erhalten. Entsprechend mögen die Geschwindigkeiten dieser Punkte v_{31}, v_{21} und v_{23} , die Beschleunigungen p_{31}, p_{21} und p_{23} heißen, wobei z. B. v_{31} die Geschwindigkeit bedeutet, die ein Punkt als Punkt der Ebene E_3 gegenüber der Ebene E_1 hat. Umgekehrt würde die Geschwindigkeit des Punktes als Punkt der

Ebene E_1 gegen die Ebene E_3 mit v_{13} zu bezeichnen sein; hierbei muß offenbar

$$v_{31} = -v_{13}$$

werden.

Zwei Schiebungen gegen die feste Ebene.

Es sei zunächst angenommen, beide Ebenen E_2 und E_3 machen gegen E_1 Schiebungen. Dann bleiben ihre beiden sich augenblicklich mit a_1 deckenden Geraden a_2 und a_3 während der ganzen Bewegung zu a_1 parallel. a_2 und a_3 bleiben also auch unter sich parallel und wir finden, daß die Relativbewegung zweier Ebenen, die gegen eine dritte Schiebungen vollführen, ebenfalls wieder eine Schiebung ist.

Umgekehrt können wir auch sagen, daß wir die Schiebung einer Ebene gegen eine zweite mit der Schiebung dieser zweiten gegen eine dritte zu einer Schiebung der ersten gegen die dritte zusammensetzen können.

Kennt man die Bahnkurve c_{32} eines Punktes A_3 gegenüber der Ebene E_2 , sowie das zugehörige Bewegungsgesetz $s_{32} = f_{32}(t)$ und die Bahn c_{21} eines Punktes A_2 gegen E_1 mit dem Bewegungsgesetz $s_{21} = f_{21}(t)$, so kann man in jedem Zeitpunkte die Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Punktes A_3 gegen die feste Ebene E_1 mit Hilfe der Parallelogramme der Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen finden.

Infolge der Schiebung müssen alle anderen Punkte der Ebene E_3 sich vollkommen gleichartig mit A_3 bewegen.

§ 18. Schiebung einer Ebene und Drehung einer anderen um einen festen Punkt der ersten.

Die Ebene E_3 möge sich um den festen Punkt P der Ebene E_2 drehen, die ihrerseits gegen die feste

Ebene E_1 eine Schiebung ausführt. Ein beliebiger Punkt A_3 (Fig. 19) der Ebene E_3 im Abstand a vom Drehpunkt P hat gegen E_2 die Geschwindigkeit

$$v_{32} = a \cdot \omega ,$$

wenn ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung um P ist. Der sich mit A_3 deckende Punkt A_2

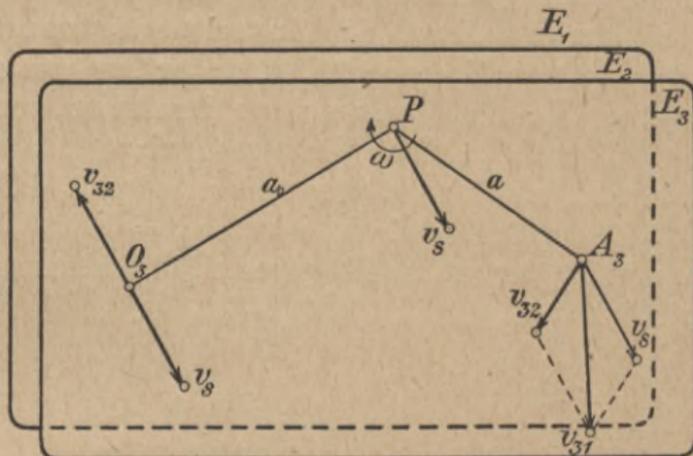


Fig. 19.

hat die Schiebungsgeschwindigkeit v_s . Die wirkliche Geschwindigkeit v_{31} des Punktes A_3 gegen E_1 wird daher als Resultierende aus v_{32} und v_s gefunden, d. h.

$$v_{31} = v_{32} \hat{+} v_s .$$

Offenbar wird es einen Punkt O_3 geben, der gegen Ebene E_1 in Ruhe ist; für diesen muß

$$v_{32} \hat{+} v_s = 0$$

werden; d. h. v_{32} und v_s müssen von gleicher Größe und entgegengesetzt gerichtet sein, also

$$v_{32} = \hat{-} v_s , \quad a_0 \cdot \omega = v_s ,$$

$$a_0 = \frac{v_s}{\omega} .$$

Der Punkt O_3 muß auf einer in P auf der Schiebungsgeschwindigkeit v_s errichteten Senkrechten liegen und zwar nach der Seite hin, nach welcher v_s bei einer im Sinne von ω vorgenommenen Drehung um 90° zeigen würde.

Man erkennt leicht, daß es nur einen solchen Punkt O_3 gibt, der sich gegen Ebene E_1 in absoluter Ruhe befindet. Wir erhalten also durch die Zusammensetzung der Schiebung von E_2 gegen E_1 und der Drehung von E_3 gegen E_2 um P eine neue Drehung von E_3 gegen E_1 um O_3 . Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ω_0 erhält man, wenn man bedenkt, daß der Punkt P_3 die Drehgeschwindigkeit $v_{32} = 0$ und daher als Punkt P_3 der Ebene E_3 gegen E_1 die absolute Geschwindigkeit

$$v_{31} = v_s$$

hat. Damit muß

$$a_0 \omega_0 = v_s,$$

$$\omega_0 = \frac{v_s}{a_0} = \frac{v_s}{\frac{v_s}{\omega}} = \omega$$

werden. Die neue Drehung um O findet also mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit statt, wie die ursprüngliche um P (auch dem Sinne nach gleich).

§ 19. Drehung zweier Ebenen gegen eine dritte um feste Punkte.

Die Ebenen E_2 und E_3 (Fig. 20) mögen sich gegen die ruhende Ebene E_1 um die festen Punkte P_{21} und P_{31} mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_{21} und ω_{31} drehen. Ein Punkt A mit den Abständen a_2 und a_3 von den

Drehpunkten P_{21} und P_{31} hat dann gegen E_1 die Geschwindigkeiten

$$v_{21} = a_2 \cdot \omega_{21} ,$$

$$v_{31} = a_3 \cdot \omega_{31} ,$$

je nachdem er als Punkt A_2 der Ebene E_2 oder als Punkt A_3 der Ebene E_3 angesehen wird. Hierbei steht

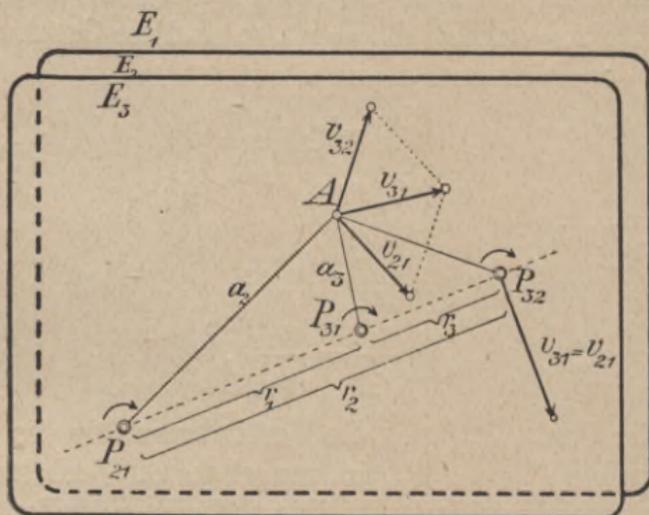


Fig. 20.

$v_{21} \perp AP_{21}$ und $v_{31} \perp AP_{31}$. Infolge der Relativbewegung von E_3 gegen E_2 hat er als Punkt A_3 gegen E_2 die Geschwindigkeit v_{32} . Offenbar muß man v_{31} als geometrische Summe von v_{32} und v_{21} erhalten, d. h.

$$v_{31} = v_{32} \hat{+} v_{21} .$$

Ließe sich ein Punkt A so finden, daß er als Punkt A_3 gegen Ebene E_2 in relativer Ruhe wäre, so würde sich dieser Punkt als Drehpunkt der Ebene E_3 gegen Ebene E_2 auffassen lassen. Für einen solchen Punkt müßte also

$$v_{32} = 0 ,$$

$$v_{31} = \hat{+} v_{21}$$

sein; d. h. er müßte sowohl als A_3 wie als A_2 gegen E_1 gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten haben. Gleichgerichtet können diese beiden Geschwindigkeiten nur sein, wenn ihre Normalen AP_{21} und AP_{31} in eine Gerade, also in die Richtung $P_{21}P_{31}$ fallen, d. h. der betreffende Punkt muß auf die Verbindungslinie der beiden anderen Drehpunkte in die Lage P_{32} fallen. Bezeichnet man $P_{21}P_{32} = r_2$, $P_{31}P_{32} = r_3$, so sind die Geschwindigkeiten des Punktes P_{32}

$$v_{21} = r_2 \omega_{21},$$

$$v_{31} = r_3 \omega_{31}$$

gleich, wenn

$$r_2 \omega_{21} = r_3 \omega_{31},$$

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}},$$

d. h. der Punkt P_{32} teilt die Verbindungslinie der beiden Drehpunkte P_{21} und P_{31} im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten. Diese Teilung findet außen statt, wenn ω_{21} und ω_{31} gleichen Drehsinn haben, innen dagegen, wenn beide Winkelgeschwindigkeiten in ungleichem Sinne drehen.

Wir erkennen daraus, daß die Relativbewegung zweier sich gegen eine dritte Ebene drehenden Ebenen wiederum eine Drehung ist. Der Drehpunkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden anderen Drehpunkte und teilt sie im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten.

Die Umkehrung dieses Satzes ergibt, daß sich die Relativdrehung einer Ebene gegen eine zweite mit deren Drehung gegen eine dritte zu einer Drehung der ersten gegen die dritte zusammensetzen läßt.

Ist $P_{21}P_{31} = r_1$, so finden wir die Abstände r_2 und r_3 aus der Beziehung:

a) wenn ω_{21} und ω_{31} gleichen Drehsinn haben:

$$\begin{aligned} r_2 - r_3 &= r_1, \\ \frac{r_2}{r_3} &= \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}, \\ r_2 &= r_1 \cdot \frac{\omega_{31}}{\omega_{31} - \omega_{21}}, \\ r_3 &= r_1 \cdot \frac{\omega_{21}}{\omega_{31} - \omega_{21}}; \end{aligned}$$

b) wenn ω_{21} und ω_{31} entgegengesetzten Drehsinn haben:

$$\begin{aligned} r_2 + r_3 &= r_1, \\ \frac{r_2}{r_3} &= \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}, \\ r_2 &= r_1 \cdot \frac{\omega_{31}}{\omega_{31} + \omega_{21}}, \\ r_3 &= r_1 \cdot \frac{\omega_{21}}{\omega_{31} + \omega_{21}}. \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_{32} der Relativdrehung von E_3 gegen E_2 erhält man, wenn man bedenkt, daß für den Punkt P_{31} die Beziehung bestehen muß

$$\begin{aligned} v_{31} &= v_{32} \hat{+} v_{21} = 0, \\ v_{32} &= \hat{-} v_{21}. \end{aligned}$$

Nun sind im Falle a)

$$\begin{aligned} v_{32} &= -r_3 \omega_{32}, \\ v_{21} &= r_1 \omega_{21}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} r_3 \omega_{32} &= r_1 \omega_{21}, \\ \omega_{32} &= r_1 \frac{\omega_{21}}{r_3} = \omega_3 - \omega_{21}, \end{aligned}$$

wogegen im Falle b)

$$\begin{aligned} v_{32} &= -r_3 \omega_{32}, \\ v_{21} &= r_1 \omega_{21}, \end{aligned}$$

also

$$r_3 \omega_{32} = r_1 \omega_{21}$$

$$\omega_{32} = \frac{r_1 \omega_{21}}{r_3} = \omega_{31} + \omega_{21}$$

wird. Die Relativdrehung von E_3 gegen E_2 erfolgt also mit einer Winkelgeschwindigkeit im Falle a) gleich der Differenz, im Falle b) gleich der Summe der beiden anderen Winkelgeschwindigkeiten.

§ 20. Die Pole dreier beliebig bewegter Ebenen.

Die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 (Fig. 21) mögen sich beliebig gegeneinander bewegen. E_1 soll wieder als feste Ebene angesehen werden. Dann kann man die augenblickliche Bewegung von E_2 gegen E_1 als Drehung um einen Momentanpol P_{21} und ebenso die Bewegung von E_3 gegen E_2 als Drehung um einen Momentanpol P_{32} auffassen. Wir können diese beiden Momentandrehungen auf Grund des vorigen Abschnitts zu einer resultierenden Drehung von E_3 gegen E_1 um einen Drehpunkt P_{31} zusammensetzen, der auf die Verbindungslinie $P_{21}P_{32}$ fallen und der Momentanpol der Ebene E_3 gegen E_1 sein muß. Wir erhalten damit den sogenannten Polsatz:

Die drei Momentanpole von drei sich beliebig bewegendenden Ebenen liegen stets auf einer Geraden, der Polgeraden der drei Ebenen.

§ 21. Die Geschwindigkeiten dreier beliebig bewegter Ebenen.

Die drei sich momentan in A (Fig. 21) deckenden Punkte A_1, A_2, A_3 der drei Ebenen haben je nach der Ebene, der sie angehören, und der Ebene, gegen die sie sich bewegen, die folgenden sechs verschiedenen Relativgeschwindigkeiten:

Punkt	A_1	besitzt	v_{12}	gegen Ebene	E_2 ,
"	A_1	"	v_{13}	"	" E_3 ,
"	A_2	"	v_{21}	"	" E_1 ,
"	A_2	"	v_{23}	"	" E_3 ,
"	A_3	"	v_{31}	"	" E_1 ,
"	A_3	"	v_{32}	"	" E_2 .

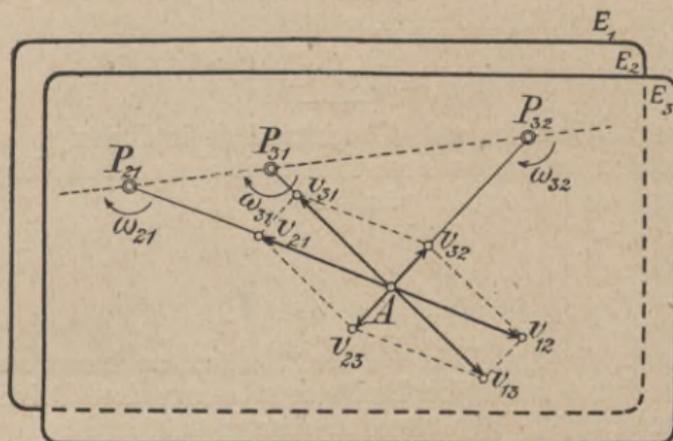


Fig. 21.

Hierbei sind je zwei Geschwindigkeiten dem absoluten Werte nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, und zwar sind

$$v_{12} = \widehat{v}_{21} ; \quad v_{23} = \widehat{v}_{32} ; \quad v_{31} = \widehat{v}_{13} .$$

Wie früher (§ 9) mögen alle Geschwindigkeiten im Uhrzeigersinne um 90° gedreht werden, so daß sie in die Polstrahlen fallen. Die Einzeichnung der sechs Geschwindigkeiten in die Figur liefert dann das Geschwindigkeitssechseck und man erkennt, daß sich je zwei Geschwindigkeiten geometrisch, d. h. nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten, zu der dritten zusammensetzen lassen. Es sind nämlich

$$\begin{array}{l|l} v_{32} \hat{+} v_{21} = v_{31} & v_{12} \hat{+} v_{23} = v_{13} \\ v_{21} \hat{+} v_{13} = v_{23} & v_{31} \hat{+} v_{12} = v_{32} \\ v_{13} \hat{+} v_{32} = v_{12} & v_{23} \hat{+} v_{31} = v_{21} . \end{array}$$

Man achte auf die Gesetzmäßigkeit in der Reihenfolge der Indizes. Jede Geschwindigkeit hat zwei Ziffern als Index, von denen die erste die Ebene angibt, der der Punkt angehört, die zweite jene Ebene bezeichnet, gegen die seine Geschwindigkeit zu ermitteln ist. Will man wissen, zu welcher resultierenden Geschwindigkeit sich zwei Geschwindigkeiten, z. B. v_{32} und v_{21} , zusammensetzen lassen, so schreibe man ihre geometrische Summe in der Reihenfolge, daß ihre gleichen Indizes in der Mitte stehen, also

$$v_{32} \hat{+} v_{21}$$

und lese als resultierende Geschwindigkeit diejenige ab, die sich aus den beiden anderen Indizes in ihrer Reihenfolge von links nach rechts ergibt, nämlich

$$v_{31},$$

so daß also

$$v_{32} \hat{+} v_{21} = v_{31}.$$

Kennt man die drei Pole der drei Ebenen, so kennt man für jeden Punkt A auch die Richtungen seiner drei Polstrahlen und damit auch die Richtungen seiner gedrehten Geschwindigkeiten. Ist eine Geschwindigkeit dann der Größe nach gegeben, so sind damit alle anderen Geschwindigkeiten des Geschwindigkeitssechsecks bekannt.

§ 22. Die Beschleunigungen dreier beliebig bewegter Ebenen.

Die drei sich momentan in A deckenden Punkte $A_1 A_2 A_3$ der drei Ebenen haben analog den Geschwindigkeiten die folgenden sechs Relativbeschleunigungen:

Punkt A_1	hat	p_{12}	gegen	Ebene	E_2 ,
„ A_1	„	p_{13}	„	„	E_3 ,
„ A_2	„	p_{21}	„	„	E_1 ,
„ A_2	„	p_{23}	„	„	E_3 ,
„ A_3	„	p_{31}	„	„	E_1 ,
„ A_3	„	p_{32}	„	„	E_2 ,

wovon ebenfalls wieder je zwei einander dem absoluten Werte nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind; nämlich

$$p_{12} = \hat{-} p_{21} ; \quad p_{23} = \hat{-} p_{32} ; \quad p_{31} = \hat{-} p_{13} .$$

Im Gegensatz zu den Geschwindigkeiten ergeben aber zwei dieser sechs Beschleunigungen im allgemeinen nicht eine andere dieser Gruppe; sondern es gehört zu jedem Paar noch eine weitere Zusatzbeschleunigung, die von ihrem Entdecker Coriolis den Namen „Coriolis-Beschleunigung“ trägt. Erst mit dieser zusammen geben die beiden ersten eine andere der sechs oben angegebenen Beschleunigungen.

§ 23. Die Coriolis-Beschleunigung.

Um die Größe und Richtung der Coriolis-Beschleunigung zu ermitteln, möge ein Punkt A_2 , (Fig. 22) der zur Zeit t_0 die Lage A_0 gegenüber der festen Ebene E inne hat, während seiner im Zeitelement dt vor sich gehenden Bewegung beobachtet werden.

Als Punkt A_2 bewegt er sich relativ zur Ebene E_1 auf einer Bahnkurve σ_0 und besitzt zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_{σ_0} gegenüber E_1 . Als Punkt A_1 bewegt er sich mit E_1 innerhalb der unendlich kleinen Zeit dt auf einem Kreisbogen ϱ_0 um den Momentanpol O der Ebene E_1 gegen E und zwar mit der Geschwindigkeit

$$v_{\varrho_0} = r \omega_{e_0} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} .$$

Hierin bedeuten: $A_0 O = r$ der Polabstand, $d\varphi$ der in der Zeit dt um O beschriebene Drehwinkel und ω_{e_0} die momentane Winkelgeschwindigkeit der Ebene E_1 um O gegenüber E .

Die tatsächliche Bahn des Punktes A_2 gegen E ist das Resultat aus den beiden Einzelbewegungen auf σ_0 und ρ_0 und möge mit τ bezeichnet werden. Zur Zeit t_0 ist nach früherem die tatsächliche Geschwindigkeit v_{τ_0} des Punktes A_2 gegen E

$$v_{\tau_0} = v_{\sigma_0} \hat{+} v_{\rho_0}.$$

Wenn E_1 gegen E in Ruhe wäre, würde A_2 in dt sec

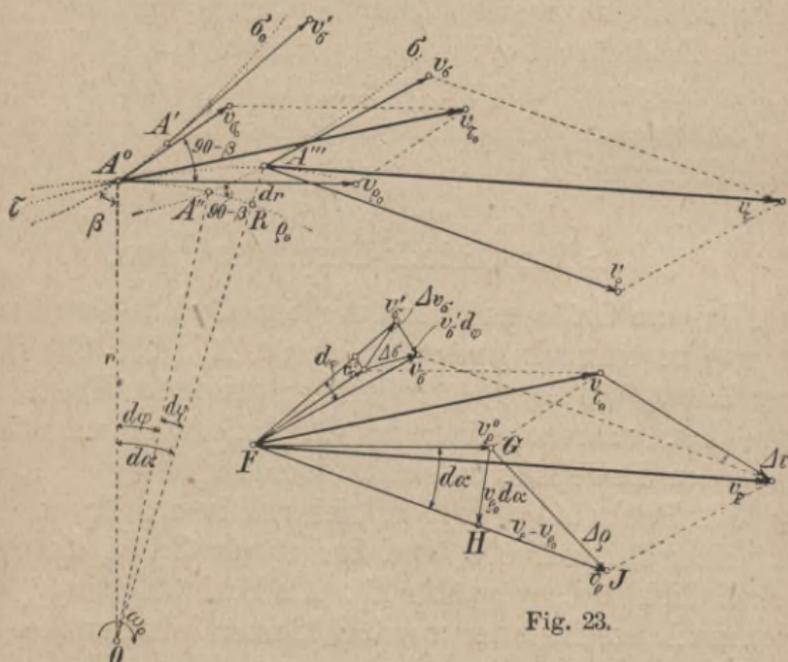


Fig. 23.

Fig. 22.

nach A' wandern und dabei das Wegelement $A_0A' = v_{\sigma_0} dt$ zurücklegen. Wenn dagegen A_2 gegenüber E_1 in Ruhe wäre, so müßte A_2 nach dieser Zeit nach A'' gewandert sein und dabei das Wegelement $A_0A'' = v_{\rho_0} \cdot dt$ beschrieben haben. In Wirklichkeit finden beide Einzelbewegungen gleichzeitig statt und der Punkt A_2 bewegt sich tatsächlich innerhalb dt sec längs seiner Bahn τ in

die Lage A''' . Hier sei seine tatsächliche Geschwindigkeit gegenüber E v_τ geworden. Diese muß offenbar jetzt die Resultierende aus der Relativgeschwindigkeit v_σ , die A_2 gegen E_1 auf seiner Bahn σ im Punkte A''' besitzt, und der Drehgeschwindigkeit v_e sein, die A_1 im Punkte A''' gegen E hat.

Damit sich während der Zeit dt die Geschwindigkeit v_{τ_0} nach Größe und Richtung in v_τ verändern kann, muß sie mit einer Elementarbeschleunigung $\Delta\tau$ zusammengesetzt werden, die ihrerseits die wirkliche Beschleunigung p_{τ_0} des Punktes A_2^0 gegen E zur Ursache hat.

Offenbar kann man $\Delta\tau$ in zwei Komponenten $\Delta\sigma$ und $\Delta\varrho$ zerlegen, von denen die erstere lediglich die Größen- und Richtungsänderung von v_{σ_0} in v_σ bewirkt, während die zweite lediglich die Geschwindigkeit v_{e_0} in die Geschwindigkeit v_e nach Größe und Richtung verwandelt.

Zunächst ist in Fig. 23 $\Delta\sigma$ aufgesucht. Bei ruhender Ebene E_1 würde sich v_{σ_0} in v'_σ infolge der Elementarbeschleunigung Δv_σ ändern; da aber die Bahn σ_0 nach dt sec in die Lage σ gekommen ist und damit auch ihre Tangentenrichtungen um den kleinen Drehwinkel $d\varphi$ verdreht worden sind, so muß v'_σ mit der Elementarbeschleunigung $v'_\sigma d\varphi$ zusammengesetzt werden, um v_σ zu ergeben. Um v_{σ_0} in v_σ zu verwandeln, bedarf es also der beiden Elementarbeschleunigungen:

1. $\Delta v_\sigma =$ die natürliche Elementarbeschleunigung, um die Geschwindigkeit des Punktes A_2 auf σ zu verändern,
2. $v'_\sigma d\varphi = v_\sigma d\varphi = v_\sigma \omega dt =$ eine zusätzliche Elementarbeschleunigung, deren Richtung senkrecht auf v_{σ_0} steht und zwar nach der Seite hin, nach welcher v_{σ_0} bei einer Drehung um 90° im Sinne von ω_{e_0} zeigen würde.

In Fig. 23 ist auch die andere Komponente $\Delta\varrho = GJ$ ermittelt. Schneidet OA''' den Kreis ϱ_0 in R , wird

$RA''' = dr$, $\sphericalangle A_0 OA''' = d\alpha$, $\sphericalangle A'' OA''' = d\psi$ genannt und ist endlich $\sphericalangle A'' A''' R = \sphericalangle \beta$ der Winkel der Relativbahn σ gegen OA''' , so ist

$$A'' A''' = A_0 A' = v_{\sigma_0} \cdot dt,$$

$$A'' R = r \cdot d\psi = A'' A''' \sin \beta = v_{\sigma_0} dt \sin \beta,$$

$$RA''' = dr = A'' A''' \cos \beta = v_{\sigma_0} dt \cdot \cos \beta.$$

Weiter folgt

$$d\psi = \frac{v_{\sigma_0} dt \sin \beta}{r},$$

$$d\alpha = d\varphi + d\psi = d\varphi + \frac{v_{\sigma_0} dt \sin \beta}{r}.$$

Nun ist $v_{e_0} \perp OA_0$, $v_e \perp OA'''$; mithin ergibt sich der von v_{e_0} und v_e eingeschlossene Winkel $\sphericalangle GFJ = \sphericalangle d\alpha$. Man erhält v_e aus v_{e_0} , wenn man letzteres mit der Elementarbeschleunigung $GJ = \Delta \varrho$ zusammensetzt. Letztere aber kann wieder in die beiden rechtwinkligen Komponenten zerlegt werden:

- (3) $GH = v_{e_0} \cdot d\alpha$, welches die Richtungsänderung von v_{e_0} in v_e bedingt, und
- (4) $HJ = v_e - v_{e_0}$, welches die Größenänderung von v_{e_0} in v_e hervorruft.

Man kann diese Elementarbeschleunigung weiter umformen, wenn man bedenkt, daß

$$v_{e_0} = r \cdot \omega_{e_0}$$

$v_e = (r + dr)(\omega_{e_0} + d\omega_e) = r\omega_{e_0} + \omega_{e_0} dr + r d\omega_e$ gesetzt werden kann. Führt man noch die Winkelbeschleunigung $\varepsilon_{e_0} = \frac{d\omega_e}{dt}$ der Ebene E_1 gegen E um

den Drehpol O ein, so kann man weiter schreiben:

$$(3a) \quad GH = v_{\varrho_0} d\alpha = r \omega_{\varrho_0} \left[d\varphi + \frac{v_{\sigma_0} dt \sin \beta}{r} \right]$$

$$= r \omega_{\varrho_0}^2 dt + v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt \sin \beta,$$

$$(4a) \quad HJ = v_e - v_{\varrho_0} = \omega_{\varrho_0} dr + r d\omega_{\varrho_0}$$

$$= v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt \cos \beta + r \varepsilon_{\varrho_0} dt.$$

Die Elementarbeschleunigung GH wirkt in Richtung des Pohlstrahls OA''' und zerfällt in die beiden Teile

$$r \omega_{\varrho_0}^2 dt \quad \text{und} \quad v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt \sin \beta.$$

Die Elementarbeschleunigung HJ wirkt senkrecht zum Polstrahl und besteht aus den beiden Teilen

$$r \varepsilon_{\varrho_0} dt \quad \text{und} \quad v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt \cos \beta.$$

Dann lassen sich $r \omega_{\varrho_0}^2 dt$ und $r \varepsilon_{\varrho_0} dt$ zur Elementarbeschleunigung

$$(5) \quad \Delta v_e = \left[\sqrt{r^2 \varepsilon_0^2 + r^2 \omega_{\varrho_0}^4} \right] dt$$

des Punktes A_1^0 zur Zeit t_0 und ebenso $v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt \sin \beta$ und $v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt \cos \beta$ zu einer Elementarbeschleunigung

$$(6) \quad v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta} dt = v_{\sigma_0} \omega_{\varrho_0} dt$$

zusammensetzen, die gegen den Polstrahl OA''' und im Grenzfall auch gegen OA_0 den Winkel $(90 - \beta)$ bildet, also senkrecht auf v_{σ_0} steht. Da diese Elementarbeschleunigung nach Größe, Richtung und Richtungssinn mit der unter (2) gefundenen völlig übereinstimmt, so kann sie mit dieser in eine doppelt so große vereinigt werden.

Somit ergeben sich insgesamt die folgenden Elementarbeschleunigungen:

Ia. Δv_{σ} (siehe 1) = ist die natürliche Elementarbeschleunigung, um die Geschwindigkeitsänderung der Relativbewegung des Punktes A_2 auf σ zu bewirken,

IIa. Δv_{ρ} (siehe 5) = die natürliche Elementarbeschleunigung, um die Geschwindigkeitsänderung des rotierenden Punktes A_1 auf ρ zu bewirken,

IIIa. $2v_{\sigma_0}\omega_{\rho_0}dt$ [siehe 2) und 6)], eine Zusatz-Elementarbeschleunigung, die auf v_{σ_0} senkrecht steht und nach der Richtung zeigt, nach der v_{σ_0} bei einer im Sinne von ω_{ρ_0} vorgenommenen Drehung um 90° zeigen würde.

Um diese Elementarbeschleunigungen zu erzeugen, müssen die folgenden 3 Beschleunigungen, die mit ihnen gleiche Richtung und gleichen Sinn haben, im Punkte A_0 auf A_2 wirken, um diesen Punkt längs seiner Bahn τ von A_0 nach A''' zu bringen:

I. $p_{\sigma} = \frac{\Delta v_{\sigma}}{dt}$ = die Relativbeschleunigung von A_2 gegen E_1 ,

II. $p_{\rho} = \frac{\Delta v_{\rho}}{dt}$ = die Rotationsbeschleunigung von A_1 gegen E ,

III. $p_{\gamma} = \frac{2v_{\sigma_0}\omega_{\rho_0}dt}{dt} = 2v_{\sigma_0}\omega_{\rho_0}$ = Coriolisbeschleunigung in dem unter IIIa angegebenen Richtungssinn.

Besonderer Fall.

Der besondere Fall, bei welchem die Bewegung der Ebene E_1 gegen E eine Schiebung wird, tritt ein, wenn der Drehpunkt O beider Ebenen unendlich fern fällt und damit die Drehradien unendlich groß, die Winkelgeschwindigkeit ω_{ρ_0} aber unendlich klein werden. In diesem Sonderfall nimmt die Coriolisbeschleunigung den Wert

$$p_{\gamma} = 2v_{\sigma_0} \cdot \omega_{\rho_0} = 0$$

an, d. h. sie verschwindet, und man hat nur noch die beiden ersten Komponenten I und II zur Resultierenden zusammenzusetzen, wenn man die tatsächliche Beschleunigung des Punktes A_2 gegen die Ebene E finden will.

IV. Die Zykloiden.

§ 24. Allgemeines.

Läßt man einen Kreis k_1 (Fig. 24) auf einem andern k_2 abrollen, ohne daß er gleitet, so beschreibt ein beliebiger

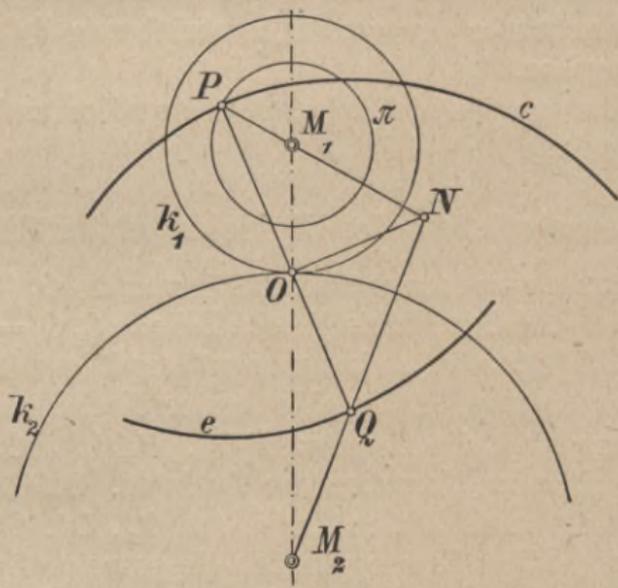


Fig. 24.

in seiner Ebene liegender Punkt P eine Zykloide c gegen k_2 . Je nachdem k_1 außen oder innen auf k_2 rollt, unterscheidet man Epizykloiden und Hypozykloiden; je nach der Lage des erzeugenden Punktes P innerhalb, außerhalb oder auf der Peripherie des rollenden Kreises k_1 ergeben sich „verkürzte“, „verlängerte“ oder „gemeine“ Zykloiden.

Rollt k_1 innerhalb eines doppelt so großen Kreises k_2 ab, so entartet die Zykloide zu einem Durchmesser des großen Kreises k_2 , wenn P auf k_1 lag.

Wird der Mittelpunkt M_1 des Rollkreises als erzeugender Punkt gewählt, so gehen die von ihm beschriebenen Zykloiden in Kreise um M_2 über.

In allen diesen Fällen ist k_2 die feste, k_1 die bewegliche Polbahn der beiden Kreisebenen E_1 und E_2 . Da der augenblickliche Berührungspunkt O beider Kreise der Momentanpol der Bewegung ist, so muß die augenblickliche Bahnnormale der von P beschriebenen Zykloide c durch O gehen.

Hieraus ergeben sich folgende beiden Konstruktionen der Zykloide:

§ 25. Konstruktion der Zykloide als Hüllkurve.

Trägt man vom momentanen Berührungspunkte O_1 (Fig. 25) aus auf Roll- und Grundkreis gleiche Teile ab $O_1 O'_1 = O_2 O_2$, $O'_1 O''_1 = O'_2 O''_2$ usw., so kommen während des Abrollens die entsprechenden Teilpunkte beider Kreise als Pole in Deckung und die Geraden $P O_1$, $P O'_1$, $P O''_1$ usw. sind nacheinander Normalen der Zykloide. Schlägt man daher mit ihnen als Radien Kreise um O_2 , O'_2 , O''_2 usw., dann müssen diese Kreise sämtlich die gesuchte Zykloide berühren und letztere kann auf diese Weise als Hüllkurve der ersteren gefunden werden.

§ 26. Punktweise Konstruktion der Zykloide.

Ist in Fig. 25 beim Abrollen von k_1 auf k_2 beispielsweise O'_1 mit O''_2 in Deckung gekommen, so hat sich O_2 in die Lage O'' begeben, die man findet, wenn man $\triangle O'' O_1 O'_2 \cong \triangle O''_1 O'_2 O_1$ macht. Das Dreieck $P O_1 O''_1$ verändert

zwar seine Lage, nicht aber seine Gestalt und Größe während des Rollens, so daß es, über $O'' O_2''$ als Basis errichtet, den Punkt P'' der Zykloide ergibt, in welchem

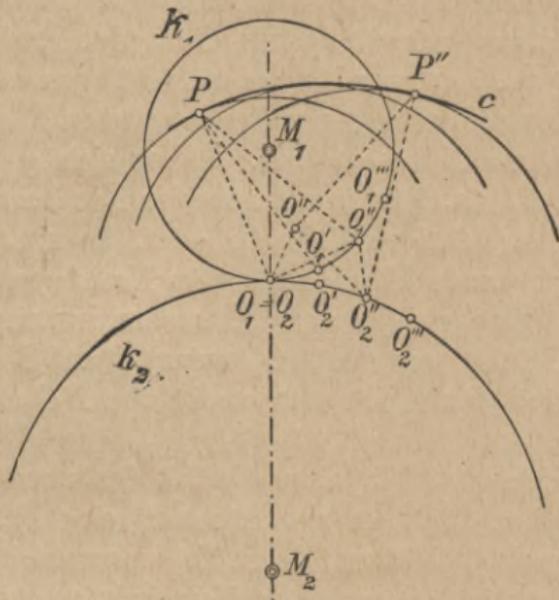


Fig. 25.

sich der erzeugende Punkt P befindet, wenn O_1'' Pol geworden ist.

§ 27. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes nach Bobillier.

Lassen wir in Fig. 24 die beiden Kreise k_1 und k_2 sich so um ihre beiden festen Mittelpunkte M_1 und M_2 drehen, daß sie ohne Gleiten aufeinander rollen, so beschreibt der erzeugende Punkt P der ruhenden Ebene gegenüber einen Kreis π um M_1 , gegen die Ebene E_2 dagegen die Zykloide c . Die Normale PO bewegt sich mit ihrem Fußpunkt P daher auf dem Kreise π , während

sie ständig durch O hindurchgleitet. Ihr momentaner Drehpunkt gegen die ruhende Ebene wird daher als Schnittpunkt N der in O auf PO errichteten Senkrechten ON mit dem Radius PM_1 des Kreises π gefunden.

Der Krümmungsmittelpunkt Q für den Punkt P der Zykloide c muß auf der Normalen PO liegen und daher wie alle deren Punkte gegenüber der festen Ebene einen Kreisbogen um N beschreiben. Da er sich aber gegen die Ebene E_2 als Schnittpunkt zweier Nachbarnormalen momentan in relativer Ruhe befindet, so muß er sich gegen die ruhende Ebene auf einem Kreisbogen um M_2 bewegen. Eine gleichzeitige Elementardrehung um N und um M_2 ist nur denkbar, wenn Q auf NM_2 liegt. Daher wird Q als Schnittpunkt von PO und NM_2 gefunden.

Rollt man k_2 auf k_1 ab und wählt Q als erzeugenden Punkt, so beschreibt er gegenüber k_1 eine Zykloide e , deren Normale QO ist und deren Krümmungsmittelpunkt nach der soeben angegebenen Konstruktion mit P zusammenfallen muß. Man erkennt daher, daß e der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte, d. h. die „Evolute“ von e ist. Umgekehrt stellt e die Evolute von c dar.

§ 28. Sonderfall: gleiche Rollkreise.

Es seien in Fig. 26 M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden gleichen Kreise k_1 und k_2 , O ihr momentaner Berührungspunkt, Q die Lage desselben, nachdem k_1 auf k_2 bis in die Stellung M_1' abgerollt ist. Dann ist O nach O' gekommen und es ist $OQ = O'Q$ und damit auch $\sphericalangle OM_2Q = \sphericalangle O'M_1'Q$. Ist P_1 der erzeugende Punkt, so hat er sich nach dem Abrollen in die Lage P_1' auf $M_1'O'$ begeben. Zieht man durch M_2 die Parallele zu $M_1'O'$ und durch P_1' die Parallele zu $M_1'M_2$, so schneiden sich beide im Punkte R und RP_1' trifft die Zentrale M_1M_2 im Punkte P_2 . Man erkennt, daß $M_2R P_1' M_1'$

ein Parallelogramm, $M_2 P_2 P_1' M_1'$ ein gleichschenkliges Trapez ist, und daher ergibt sich

$$R P_1' = M_2 M_1' = M_1 M_2$$

und $M_2 R = M_2 P_2 = M_1' P_1' = P_1 M_1$.

Wählt man daher P_2 auf $M_2 M_1$ so, daß $M_2 P_2 = M_1 P_1$ wird und zieht um M_2 durch P_2 den Kreis π , so findet man alle Punkte P_1' der Zykloide c als Endpunkte von Strahlen durch P_2 , deren Anfangspunkt R auf π liegt und deren Länge $R P_1'$ gleich dem Abstand $M_1 M_2$ ist. — $P_1' Q$ ist die Normale

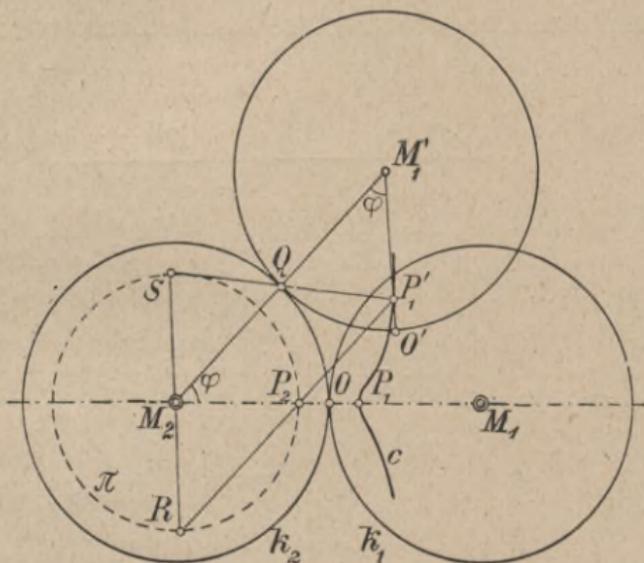


Fig. 26.

der Zykloide in P_1' , da Q der Momentanpol für die betreffende Lage ist.

Verlängert man $R M_2$ über M_2 bis zum Schnittpunkt S mit der Normalen $P_1' Q$, so ist $M_2 Q = Q M_1'$, $M_2 R \parallel M_1' P_1'$ und daher gilt auch wegen der Kongruenz der Dreiecke $\triangle Q M_2 S$ und $\triangle Q M_1' P_1'$ die Beziehung

$$M_2 S = M_1' P_1' = R M_2,$$

d. h. S liegt auf dem Kreise π .

Man findet somit die Normale der Zykloide im Punkte P_1' , wenn man den Schnittpunkt S von $R M_2$ und dem Kreise π mit dem Zykloidenpunkte P_1' verbindet.

P_2 heißt der Gegenpunkt, π der Gegenkreis zum erzeugenden Punkte P_1 .

V. Die Evolventen.

§ 29. Allgemeines.

Läßt man eine Gerade g (Fig. 27) ohne Gleiten auf einem Kreise k (Grundkreis) abwälzen, so beschreibt jeder ihrer Punkte P eine Kreisevolvente e . Die Evolvente ist der-

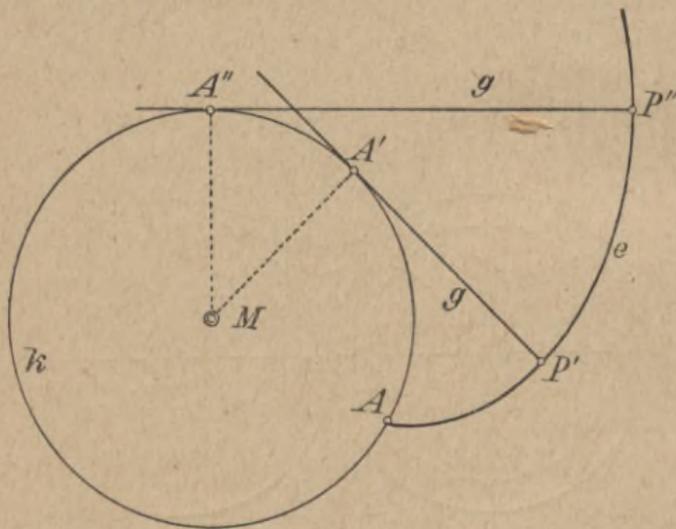


Fig. 27.

jenige Spezialfall der Zykloide, bei welchem der Radius des Rollkreises ∞ wird.

Der augenblickliche Berührungspunkt A von Gerade und Kreis ist der Momentanpol der Bewegung zwischen Ebene der Geraden und Ebene des Kreises. Daher ist auch der Kreis die ruhende, die Gerade die bewegliche Polkurve.

Der Pol A' ist gleichzeitig der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente für ihren Punkt P' und daher ist k die Evolute der Evolvente e .

§ 30. Konstruktion der Evolvente.

Da die abgewickelte Gerade $A'P'$ gleich dem Abwälzungsbogen $\widehat{A'A}$ ist, so erhält man einen Punkt P' der Evolvente, indem man die in A' an k gelegte Tangente $A'P = \widehat{A'A}$ macht. Diese Tangente an den Kreis ist die Normale der Evolvente im Punkte P' , der mit ihr um A' geschlagene Kreis der Krümmungskreis.

Anwendungen.

VI. Zahnräder.¹⁾

§ 31. Allgemeines.

Drehen sich zwei einander ständig berührende Körper um zwei Achsen, die ihre relative Lage gegeneinander nicht ändern, so daß eine Bewegung des einen eine eindeutig bestimmte des andern Körpers erzwingt, so bilden sie eine allgemeine Verzahnung.

Es soll im folgenden nur der einfache und in der Technik bei weitem häufigste Fall paralleler Achsen behandelt werden, bei welchem wir es mit einer ebenen Bewegung zu tun haben. Die beiden sich um M_1 und M_2 (Fig. 28) drehenden Zahnräder mögen dann durch die Ebenen E_1 und E_2 , das feste Gestell durch die zu den Achsen M_1 und M_2 senkrechte feste Ebene E_3 ersetzt werden.

Die beiden sich ständig berührenden Zahnprofile c_1 und c_2 berühren einander im „Eingriffspunkt“ A , der während der Bewegung der Räder seine relative Lage zur festen Ebene längs der sogenannten „Eingriffslinie“ e ändert.

¹⁾ Weiteres siehe Bach, Masch.-Elem.

Den Momentanpol P der beiden Räder findet man als Schnittpunkt der Verbindungslinie der beiden andern

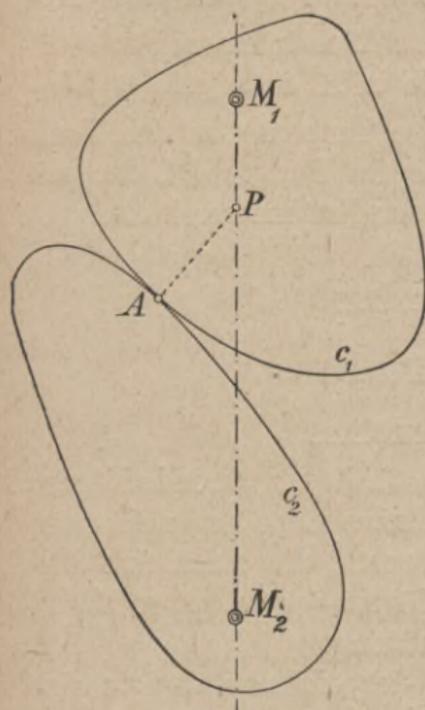


Fig. 28.

Pole M_1 und M_2 mit der in A auf c_1 bzw. c_2 errichteten Senkrechten (als Folge des Polsatzes § 20 und des in § 11 gezeigten Satzes von der Berührungsnormalen).

Der Momentanpol P kann sich während der Bewegung relativ zur festen Ebene nur auf der Polgeraden M_1M_2 verschieben. Gegenüber den Zahnkörpern verändert er seine Lage kontinuierlich längs der beiden Polkurven p_1 und p_2 , die sich in P berühren.

Wir können nun zwei verschiedene Anforderungen an die Verzahnung stellen:

1. Wir verlangen, daß eine gleichförmige Drehung des einen Zahnes eine bestimmte ungleichförmige des andern erzwingt. Diese Aufgabe muß häufig beim Entwurf von Steuerungen gelöst werden. Ihre Behandlung soll daher in den Kapiteln „Steuerungen“ erfolgen.
2. Wir wünschen, daß einer gleichförmigen Drehung des einen Zahnkörpers eine ebensolche des andern entspricht. Diese Forderung konstanten Übersetzungsverhältnisses müssen fast alle „Zahnräder im eigentlichen Sinne“ erfüllen. Sie soll daher in diesem über Zahnräder handelnden Kapitel stets vorausgesetzt werden.

§ 32. Allgemeine Verzahnung.

Es sei in Fig. 29 der Momentanpol der Zahnradeneben E_1 und E_2 mit P , seine Abstände von M_1 und M_2 mit R_1 und R_2 , die Winkelgeschwindigkeiten der Räder mit ω_1 bzw. ω_2 , ihr Verhältnis, das sogenannte Übersetzungsverhältnis, mit $\omega_1 : \omega_2 = \varepsilon$ bezeichnet.

Da die Relativgeschwindigkeiten des Poles P als Punkt der Räder gegenüber der festen Ebene gleich, also

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$$

sein müssen, so erhält man

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \varepsilon = \text{konst.},$$

d. h. der Pol der beiden Räder behält seine Lage gegenüber E_3 stets bei. Relativ zu den

sich um M_1 bzw. M_2 drehenden Radebenen muß er sich also auf den Kreisen k_1 und k_2 bewegen. Diese sind also die Polkurven der beiden Radebenen und heißen Teilkreise.

Da die Berührungsnormale der beiden Zahnkurven stets durch den Pol gehen muß, so gilt für eine Verzahnung mit konstantem Übersetzungsverhältnis das wichtige „Verzahnungsgesetz“:

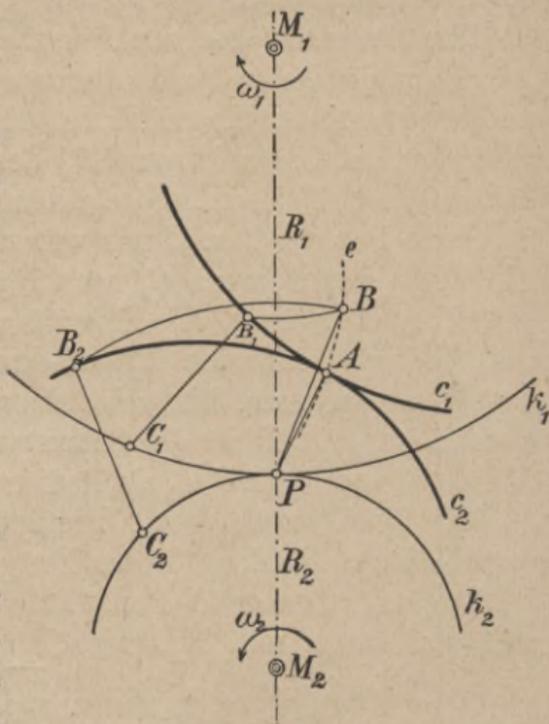


Fig. 29.

Die Normale im jeweiligen Berührungspunkte beider Zahnflanken geht stets durch den Berührungspunkt der beiden Teilkreise.

Aufgabe: Es sei das Zahnprofil c_1 des treibenden Rades I bekannt, es möge die Eingriffslinie e und das Gegenprofil c_2 des getriebenen Rades ermittelt werden.

Der Fußpunkt des von P auf c_1 gefällten Lotes sei A . Dann ist dieser Punkt der momentane Berührungspunkt und ein Punkt der Eingriffslinie. Errichten wir in einem weiteren beliebigen Punkte B_1 des Zahnprofils c_1 die Senkrechte auf diesem, so schneidet sie den Teilkreis k_1 in einem Punkte C_1 und wir wissen, daß Punkt B_1 im Eingriff sein muß, wenn C_1 nach P gekommen ist. Seine neue Lage B während des Eingriffs wird gefunden, wenn man bedenkt, daß sich B_1 auf einem Kreise um M_1 so weit bewegen muß, bis sein Abstand $BP = B_1 C_1$ geworden ist, d. h. B ist der Schnittpunkt der um M_1 mit $M_1 B_1$ und um P mit $C_1 B_1$ als Radien geschlagenen Kreise.

Die Wahl verschiedener Profilverpunkte B_1 führt so zu verschiedenen Punkten B der Eingriffslinie e .

Der entsprechende Punkt B_2 des Gegenprofils c_2 muß auf einem mit $M_2 B$ um M_2 geschlagenen Kreise liegen. Macht man den Bogen $\widehat{C_2 P}$ auf k_2 gleich $\widehat{C_1 P}$ auf k_1 , so ist C_2 der Punkt von k_2 , welcher zur gleichen Zeit mit C_1 in den Pol P fällt. Die auf c_2 im gesuchten Punkte B_2 errichtete Normale muß durch C_2 gehen und es muß $B_2 C_2 = B_1 C_1$ sein. Also liegt B_2 auf dem um C_2 mit $B_1 C_1$ geschlagenen Kreise und wird als dessen Schnittpunkt mit dem obenerwähnten um M_2 geschlagenen Kreise gefunden.

Dieses Verfahren wurde zuerst von Reuleaux angewendet.

Ein anderes Verfahren, zu einem gegebenen Zahnprofil das andere zu finden, ohne jedoch die Eingriffslinie bestimmen zu müssen, rührt von Poncelet her.

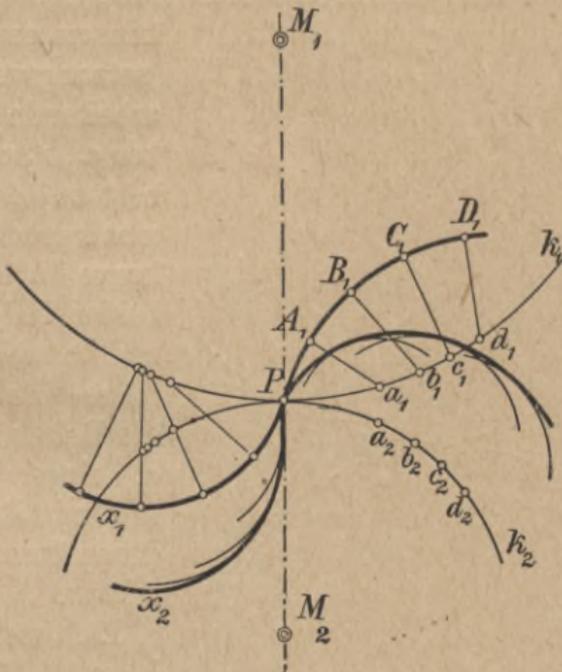


Fig. 30.

Sind nämlich (Fig. 30) k_1 und k_2 die Teilkreise, A_1, B_1, C_1 usw. beliebige Punkte des Profils x_1 und zieht man in diesen die Normalen auf x_1 $A_1 a_1, B_1 b_1, C_1 c_1$ usw. bis zu ihren Schnittpunkten a_1, b_1, c_1 mit Teilkreis k_1 , macht man ferner auf k_2 die Bögen $\widehat{Pa_2} = \widehat{Pa_1}, \widehat{Pb_2} = \widehat{Pb_1}, \widehat{Pc_2} = \widehat{Pc_1}, \dots$ und schlägt um die neuen Teilpunkte a_2, b_2, c_2 Kreisbögen mit den entsprechenden Radien $A_1 a_1, B_1 b_1, C_1 c_1$ usw., so ergibt die Einhüllende aller dieser Kreisbögen das gesuchte Gegenprofil x_2 .

Wie man erkennt, läßt sich als eine Zahnflanke jede beliebig gestaltete Kurve verwenden, vorausgesetzt, daß alle ihre Normalen den Teilkreis schneiden.

Ein sehr allgemeines Verfahren, richtig (d. h. mit

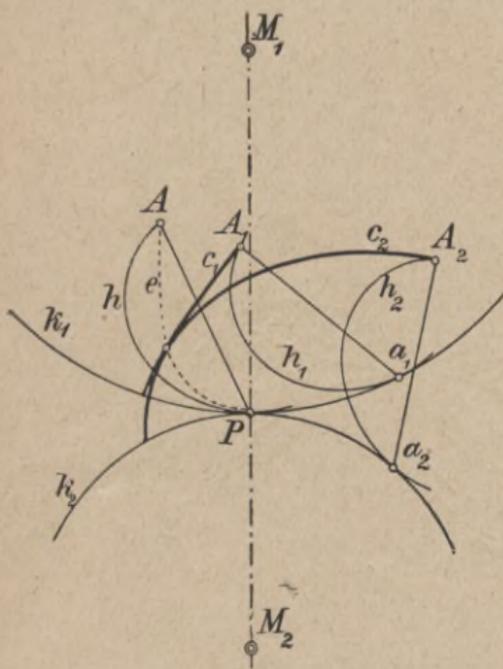


Fig. 31.

konstantem Übersetzungsverhältnis) arbeitende Zahnflanken c_1, c_2 zu erhalten besteht darin, daß man irgend eine Hilfskurve h_0 sich auf beiden Teilkreisen k_1 und k_2 abrollen läßt (ohne Gleiten) und die Relativbahnen c_1, c_2 eines beliebigen fest mit ihr verbundenen Punktes A ermittelt.

Läßt man nämlich h_0 auf k_1 bis in die Lage h_1 rollen, so kommt der erzeugende

Punkt A_0 nach A_1 und h_1 berührt k_1 in a_1 ; da a_1 der Momentanpol dieser Rollbewegung ist, so muß die augenblickliche Normale der von A_1 erzeugten Zahnkurve c_1 durch a_1 gehen.

Rollt man h_0 auf k_2 bis zur Lage h_2 , wobei a_2 der neue Berührungspunkt und A_2 die Stellung des erzeugenden Punktes A_0 ist, so geht aus dem gleichen Grunde die augenblickliche Normale der von A_2 erzeugten Zahnkurve c_2 durch a_2 .

Ist der Bogen $\widehat{Pa_1} = \widehat{Pa_2}$ und dreht man beide Räder so weit, bis die Punkte a_1 und a_2 ihrer Teilkreise in P zusammenfallen, so erkennt man, daß in dieser gedrehten Lage auch h_1 und h_2 in h und A_1 mit A_2 im Punkte A der Eingriffslinie zur Deckung kommen und die Normalen $A_1 a_1$ und $A_2 a_2$ übereinander fallen. Die beiden Zahnflanken haben dann also den Punkt A gemeinsam, ihre beiden Normalen fallen in eine AP zusammen, gehen also durch den Pol P und das Verzahnungsgesetz ist demnach erfüllt.

Die Eingriffslinie erhält man, wenn man die Hilfskurve h_0 in allen Lagen zeichnet, in denen sie die Teilkreise im Punkte P berührt, und dann die Lagen des erzeugenden Punktes A dabei ermittelt.

§ 33. Zykloidenverzahnung.

Wählt man (Fig. 32) als Hilfskurve h_0 einen Kreis, den sogenannten Rollkreis, so erhält man als Zahnflanken die in Kap. IV behandelten Zykloiden, die in der Technik als Zahnkurven eine große Rolle spielen. Als erzeugenden Punkt benutzt man hierbei wohl stets einen auf der Peripherie des Rollkreises liegenden Punkt, so daß man es mit gemeinen Epi- oder Hypozykloiden zu tun hat.

Jedes Zahnprofil wird aus zwei Teilen, dem „Kopf“ und dem „Fuß“ zusammengesetzt und zwar benutzt man zur Erzeugung des Kopfes des treibenden und Fußes des getriebenen Rades einen Rollkreis h_2 (Radius ρ_2), zur Erzeugung des Kopfes des getriebenen und Fußes des treibenden Rades einen andern Rollkreis h_1 (Radius ρ_1).

Ist t die „Teilung“ des Zahnrades, d. h. der von „Zahn“ und „Zahnlücke“ auf dem Teilkreis

begrenzte Bogen, so macht man gewöhnlich die Kopfhöhe $0,3t$, die Fußhöhe $0,4t$.

Aus dem in § 32 (S. 69) Gesagten ergibt sich, daß die Eingriffslinie der Zykloidenverzahnung

- mit dem Rollkreis zusammenfällt, wenn der erzeugende Punkt auf diesem liegt,
- ein zum Rollkreis konzentrischer Kreis sein muß, wenn der erzeugende Punkt außerhalb oder innerhalb des Rollkreises liegt.

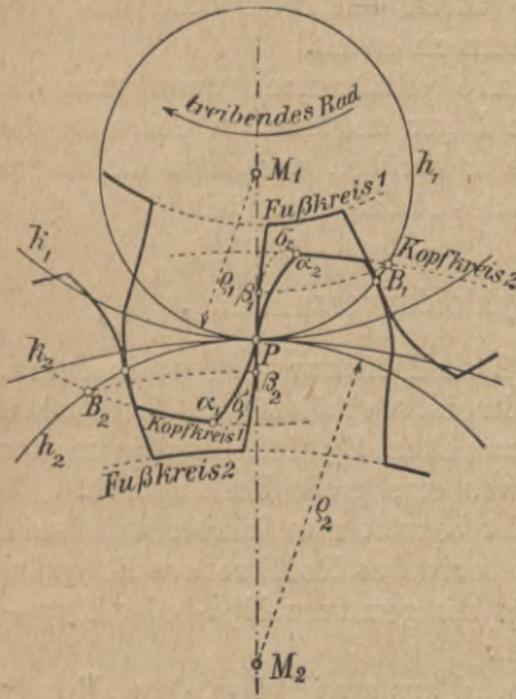


Fig. 32.

Während die Kopfprofile $\alpha_1 P$ bzw. $\alpha_2 P$ in ihrer ganzen Ausdehnung zwischen Kopf- und Teilkreisen arbeiten, wird von den Fußprofilen nur das kurze Stück $\beta_1 P$ bzw. $\beta_2 P$ zur eigentlichen Zahnkurve herangezogen. Das übrig bleibende bis zum Fußkreis reichende Stück des Fußes kann daher auch durch jede andere Kurve ersetzt werden, wenn sie nur außerhalb der Relativbahnen $\sigma_1 \sigma_2$ der Kopfkanten α_1 und α_2 liegt.

Da wir gewöhnlich zwei Rollkreise benutzen und somit die Flanken eigentlich aus zwei verschiedenen Zahnkurven bestehen, so setzt sich auch die Eingriffslinie $B_1 B_2$ aus den beiden Rollkreisbögen $B_1 P$ und $P B_2$ zusammen, die zwischen den Kopfkreisen der Räder abgeschnitten werden.

§ 34. Evolventenverzahnung.

Legt man (Fig. 33) durch den Berührungspunkt P der beiden Teilkreise k_1 und k_2 zweier Räder unter einem beliebigen Winkel φ zur Zentrale $M_1 M_2$ eine Gerade und zeichnet um M_1 und M_2 die beiden sogenannten „Grundkreise“ h_1

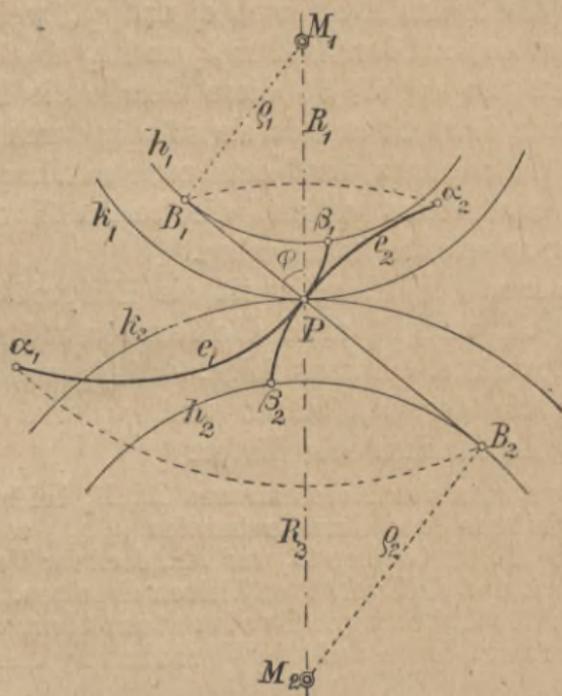


Fig. 33.

und h_2 , welche die Gerade in den Punkten B_1 und B_2 berühren, so erkennt man, daß ihre Radien ρ_1 und ρ_2 in der Beziehung stehen

$$\rho_2 : \rho_1 = R_2 : R_1 = \omega_1 : \omega_2 = \varepsilon,$$

$$\rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2,$$

d. h. die beiden Grundkreise haben gleiche Umfangsgeschwindigkeit. Man kann daher vom Kreise h_2

einen Faden $B_1 B_2$ abwickeln und gleichzeitig auf h_1 aufwickeln, während sich die Räder drehen, ohne daß er zerreißen oder schlaff werden würde. Der Punkt P des Fadens bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit, die gleich der Umfangsgeschwindigkeit der Kreise h_1 oder h_2 ist, auf $B_1 B_2$ und beschreibt den beiden Rädern gegenüber die beiden Evolventen e_1 und e_2 , weil er ein Punkt einer sich auf den Kreisen h_1 und h_2 abwälzenden Geraden ist. Da nach § 30 diese Gerade die Normale der Evolvente darstellt und da sie ständig durch P geht, so ist das Grundgesetz der Verzahnung mit konstantem Übersetzungsverhältnis erfüllt, die beiden Evolventen sind richtig arbeitende Zahnflanken.

Die Gerade $B_1 B_2$ selbst ist die Eingriffslinie; die Punkte B_1 und B_2 sind die letzten möglichen Eingriffspunkte. Daraus folgt, daß β_1 und β_2 die letzten Punkte der Fußflanken und α_1 und α_2 die letzten der Kopfflanken sein dürfen.

Verändert man den Achsenabstand $M_1 M_2$ beider Räder unter Beibehaltung der Grundkreisradien ρ_1, ρ_2 , so ändern sich zwar die Teilkreisradien R_1 und R_2 , doch ihr Verhältnis bleibt konstant und die Evolventen bleiben dieselben. Daher kann man die Achsen von Evolventenrädern nähern oder entfernen, ohne daß die Verzahnung unrichtig arbeitete.

§ 35. Grissongetriebe.¹⁾

Bei diesem Getriebe (Fig. 34) besitzt das große Rad an Stelle der sonst üblichen Zähne eine Anzahl sogenannter „Triebstöcke“, das sind kreisrunde Bolzen (Radius r), deren Mittelpunkte in gleichen Abständen auf einem mit dem Teilkreis k_2 konzentrischen Kreise \varkappa liegen und die den

¹⁾ Siehe Grisson, Über Grissongetriebe, Z. 1903 und Bach, Masch.-Elemente.

Teilkreis k_2 von innen berühren. Das kleine Rad ist mit zwei Zähnen ausgerüstet, die um 180° versetzt sind und in zwei parallelen Ebenen liegen. Das Profil dieser Zähne ist die im Abstand r gezeichnete Äquidistante zu derjenigen Zykloide, welche vom Mittelpunkt B_0 eines Bolzens beim Abrollen der Teilkreise aufeinander gegen das kleine Rad beschrieben wird.

Die Eingriffslinie e wird in folgender Weise gefunden. Beim Arbeiten der Räder wandert der Mittelpunkt des Bolzens auf dem Kreise κ z. B. in die Lage B . Nach dem

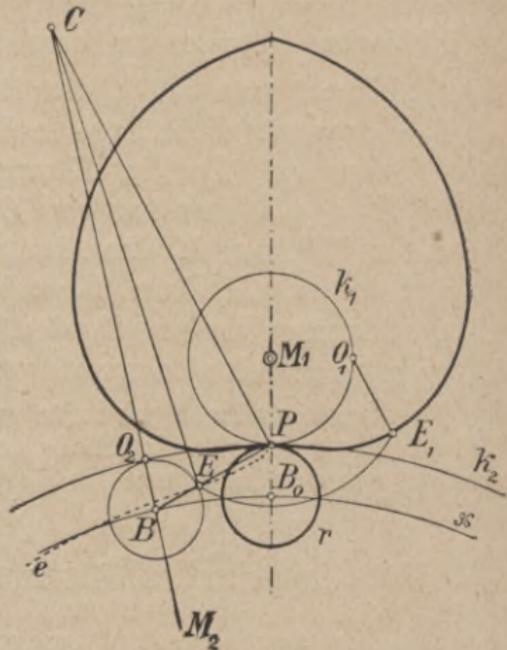


Fig. 34.

Verzahnungsgesetz muß die Normale im Eingriffspunkt durch den Pol P gehen, also

ist BP die augenblickliche Normale und der auf ihr liegende Eingriffspunkt E muß als Punkt des Bolzens von B um $BE = r$ entfernt sein. Durch mehrmalige Wiederholung dieser Konstruktion erhält man beliebig viele Punkte der Eingriffslinie.

Die Eingriffslinie e kann man sich auch als die Bahn des Punktes E einer Geraden BP erzeugt denken, die beständig durch P hindurchgleitet, während sich ihr Punkt B auf dem Kreise κ bewegt. Hieraus ergibt sich das Momentanzentrum dieser bewegten Geraden als

Schnitt C der in P auf BP errichteten Normalen mit dem durch B gezogenen Radius M_2B . Die Verbindungslinie CE ist mithin die Normale der Eingriffslinie e im Punkte E .

Das Zahnprofil des kleinen Rades erhält man wie folgt: Zieht man M_2B bis zum Schnitt O_2 mit k_2 , so ist Bogen $\widehat{O_2P}$ der auf dem Teilkreis k_2 abgerollte Bogen. Macht man auf k_1 den Bogen $\widehat{O_1P} = \widehat{O_2P}$, so ist O_1 die ursprüngliche Lage des in P liegenden Punktes des Kreises k_1 . Der in E zum Eingriff kommende Punkt E_1 des Zahnes hat von O_1 die Entfernung der Normalen EP , von M_1 den Abstand EM_1 , wird also als Schnitt der mit M_1E um M_1 und mit $O_1E_1 = PE$ um O_1 geschlagenen Kreise gefunden. Durch Wiederholung läßt sich das gesuchte Zahnprofil punktweise konstruieren.

Das Grissongetriebe wird für große Übersetzungen von 5:1 bis 50:1 gebaut. An Stelle der festen Bolzen werden Rollen angeordnet, um die Reibung zu vermindern.

§ 36. Spezifisches Gleiten der Zahnräder.¹⁾

Das Zusammenarbeiten zweier Zahnflanken besteht zum Teil aus einem Abrollen, zum Teil aus einem Gleiten derselben. Würde nur reines Rollen stattfinden, so könnte eine Abnutzung der Räder lediglich durch ein Zerquetschen des Materials eintreten, das aber ganz vermieden werden kann, wenn die durch den Zahndruck hervorgebrachten kleinen Deformationen der Flanken innerhalb der Elastizitätsgrenze bleiben.

Das Gleiten dagegen ruft auch schon bei geringeren Drücken eine Abnutzung hervor. Bezeichnet man die in

¹⁾ Siehe Büchner, Abnutzung der Zahnräder, Z. 1902.

der unendlich kurzen Zeit dt vom Eingriffspunkt auf den Flanken durchlaufenen Strecken mit ds_1 bzw. ds_2 , so würde, falls $ds_1 = ds_2$ wäre, reines Rollen stattfinden. Das Gleiten wächst mit der Zunahme des Unterschiedes $ds_1 - ds_2$ und macht sich für die Abnutzung um so mehr bemerkbar, je kleiner die Strecken ds_1 bzw. ds_2 sind, auf die es sich verteilt. Daher ist das sogenannte „spezifische Gleiten“

$$\gamma_1 = \frac{ds_1 - ds_2}{ds_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{ds_1 - ds_2}{ds_2}$$

ein Maßstab für die Abnutzung. Durch Division mit der unendlich

kleinen Zeit dt erhält man unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{ds_1}{dt} = v_1, \quad \frac{ds_2}{dt} = v_2$$

die Geschwindigkeiten darstellen, mit denen der Eingriffspunkt sich längs der Flanken bewegt, die Werte

$$\gamma_1 = \frac{v_1 - v_2}{v_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{v_1 - v_2}{v_2}.$$

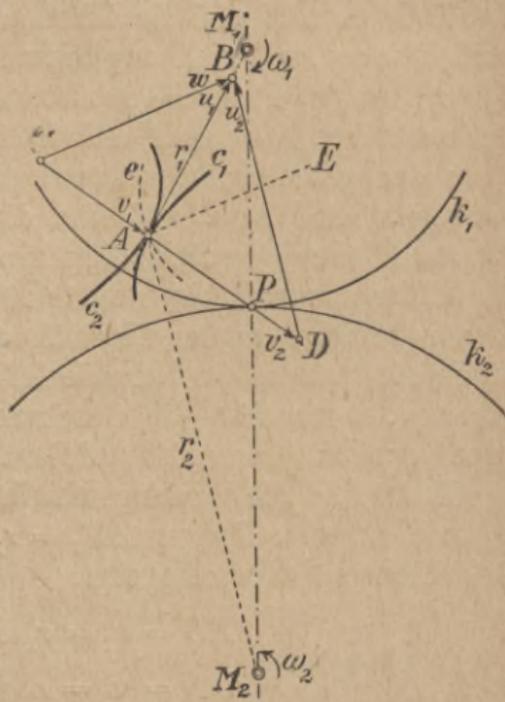


Fig. 35.

Um das spezifische Gleiten in einem Punkte der Zahnflanken zu bestimmen, ist es daher nötig, die oben-erwähnten Geschwindigkeiten v_1, v_2 zu ermitteln.

Es seien in Fig. 35 die Zahnflanken e_1, e_2 und die Eingriffslinie e einer Verzahnung bekannt. Ist A der momentane Eingriffspunkt, P der Momentanpol, so ist AP die Normale auf dem Zahnprofil und fällt daher mit der Richtung der gedrehten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zusammen. AM_1 bzw. AM_2 sind die Richtungen der gedrehten Umfangsgeschwindigkeiten u_1 und u_2 , welche die Räder momentan im Punkte A haben. Die gedrehte Geschwindigkeit w des Eingriffspunktes längs der Eingriffslinie fällt in die Normale AE derselben und wird erhalten, wenn man die Geschwindigkeiten u_1 mit v_1 bzw. u_2 mit v_2 geometrisch addiert.

Kennt man die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bzw. ω_2 , so sind aus den Radien $AM_1 = r_1$ und $AM_2 = r_2$ auch die Umfangsgeschwindigkeiten

$$AB = u_1 = r_1 \omega_1,$$

$$DB = u_2 = r_2 \omega_2$$

bekannt. Zieht man $BC \parallel AE$ und $BD \parallel AM_2$ bis zu ihren Schnittpunkten C bzw. D mit AP , so hat man die gesuchten Geschwindigkeiten

$$CA = v_1, \quad CD = v_2;$$

denn

$$CB = w \text{ resultiert aus } CA = v_1 \text{ und}$$

$$AB = u_1$$

oder aus

$$CD = v_2 \text{ und}$$

$$DB = u_2.$$

Also wird das spezifische Gleiten dargestellt durch den Quotienten

$$\gamma_1 = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{AD}{CA},$$

$$\gamma_2 = \frac{v_1 - v_2}{v_2} = \frac{AD}{CD}.$$

Der Bequemlichkeit halber nimmt man stets $\omega_1 = 1$ an, weil dann

$$AB = u_1 = r_1 \omega_1 = AM_1$$

wird, also B mit M_1 zusammenfällt.

§ 37. Normaldruck.

Außer vom spezifischen Gleiten γ ist die Abnutzung Δ in einem Punkte der Flanke abhängig vom Normaldruck N , dem Reibungskoeffizienten μ , der Zahnbreite b , der Tourenzahl n , der Eingriffsdauer τ [= Verhältnis des Eingriffsbogens¹⁾ zur Teilung], der Betriebsdauer ϑ und einer Materialkonstanten c (von der Härte, der Oberflächenbeschaffenheit usw. abhängig), so daß

$$\Delta = c \mu \cdot \frac{\gamma}{b \tau} \cdot N n \vartheta.$$

Der Normaldruck N der Flanken (Fig. 36) ergibt sich aus der Forderung, daß er mit der durch ihn erzeugten Radreibung μN eine resultierende Kraft N' ergeben muß, die auf das getriebene Rad 2 ein konstantes Drehmoment M_d ausübt.

¹⁾ Der Eingriffsbogen ist der vom Beginn bis zum Ende des Eingriffs eines Zahnes auf dem Teilkreis durchlaufene Bogen.

Da N in die Richtung der Flankennormalen AP fällt und μN dazu senkrecht und mit N ständig in der Beziehung steht

$$\mu N = \tan \varrho \cdot N,$$

wobei ϱ der Reibungswinkel ist, so ist die Richtungs-

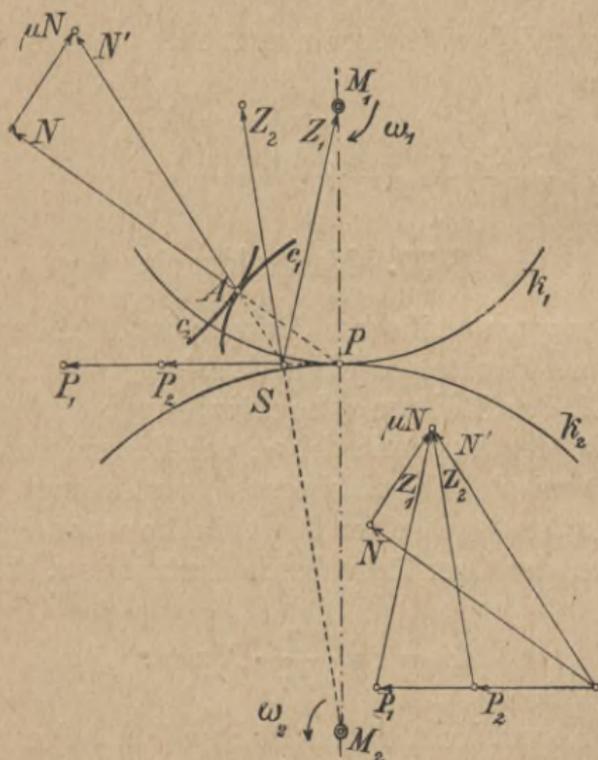


Fig. 36.

linie der Kraft N' stets um diesen Winkel ϱ gegen N geneigt, also der Lage nach und daher auch ihr Hebelarm a , unter dem sie am Rade 2 angreift, der Größe nach bekannt. Da nun

$$a \cdot N' = M_d,$$

so ist auch

$$N' = \frac{M_d}{a}$$

berechenbar.

Will man die Rechnung umgehen und graphisch arbeiten, so hat man N' aus einer am Teilkreisumfang des zweiten Rades wirkenden konstanten Kraft P_2 , die aus $P_2 = \frac{M_d}{R_2}$ bekannt ist, und einer durch die Achse M_2 gehenden Kraft Z_2 , die also kein Drehmoment auf Rad 2 ausübt, zusammensetzen.

§ 38. Reibungsarbeit.

Zerlegt man N' in eine am Umfang des treibenden Rades 1 angreifende Kraft P_1 und eine durch M_1 gehende Kraft Z_1 , so ergibt $P_1 - P_2$ diejenige Kraft, die am Teilkreisumfang von Rad 1 aufzuwenden ist, um die Reibung zu überwinden.

Ist ds das Bogenelement des Teilkreises für die Zeit dt , so ist

$$dA = (P_1 - P_2) \cdot ds$$

die in der Zeit dt aufzuwendende Reibungsarbeit; die gesamte Reibungsarbeit wird also

$$A = \int (P_1 - P_2) ds,$$

wenn über dem gesamten Eingriff eines Zahnes integriert wird. Trägt man $P_1 - P_2$ als Ordinate über dem abgewickelten Teilkreise auf, so ist die entstehende Fläche ein Maß der Reibungsarbeit.

§ 39. Beispiel.

Ein Beispiel einer Untersuchung von spezifischem Gleiten, Normaldruck und Reibungsarbeit ist in

Fig. 37 an einem Grissor-
getriebe mit festen Bolzen
ohne Rollen durchgeführt.

Naturgemäß sind die
dabei erhaltenen Resultate
nicht gültig für ein mit
Rollen armiertes Getriebe,
dessen Abnutzung und Rei-
bungsverlust weit geringer
ausfällt. Nach Versuchen
von Roser haben solche
Getriebe Wirkungsgrade bis
90% ergeben.

Die dem Beispiel zugrunde gelegenen
Daten sind die folgenden:

• II Übersetzungsverhältnis ε	= 5
Kleiner Teilkreis halbm. R_1	= 22 mm
Großer " " R_2	= 110 "
Bolzenbreite b	= 45 "
Reibungskoeffizient . . μ	= 0,1
Übertragene Leistung N	= 2,75 PS
Umdrehzahlen n_1	= 400 1/min
	n_2 = 80 "

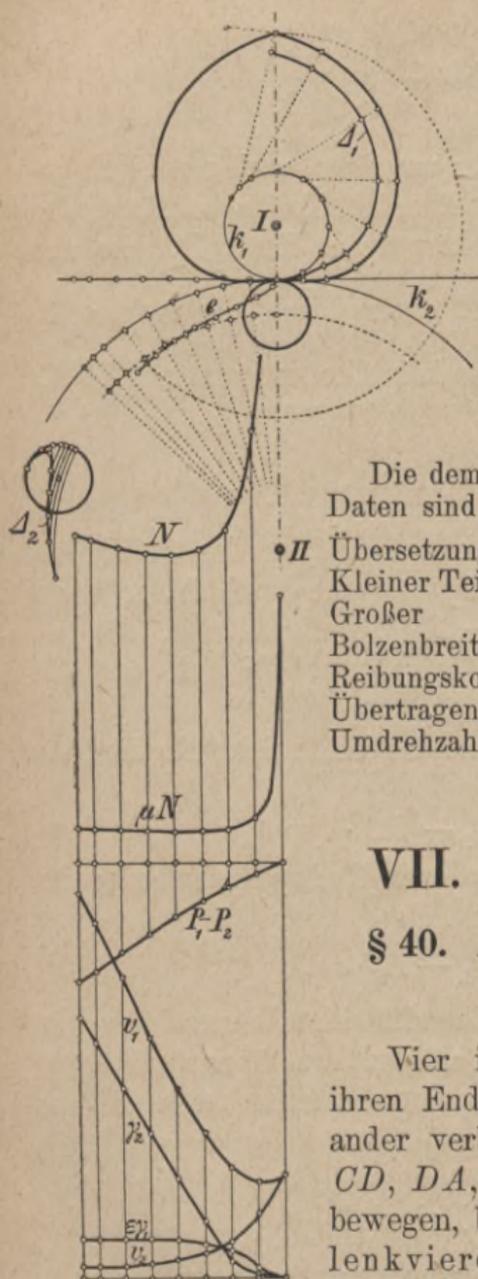


Fig. 37.

VII. Gelenkviereck.

§ 40. Allgemeines und Be- zeichnungen.

Vier im Viereck liegende, an
ihren Enden durch Gelenke mitein-
ander verbundene Stäbe AB , BC ,
 CD , DA , die sich in einer Ebene
bewegen, bilden ein sogenanntes Ge-
lenkviereck oder eine Vierzy-
linderkette (Fig. 38).

Jeder Stab kann als Repräsentant einer Ebene aufgefaßt werden. Hält man einen von den Stäben, z. B. AD fest, so heißt er das Gestell; die beiden an ihn angrenzenden AB und CD werden als Kurbeln oder

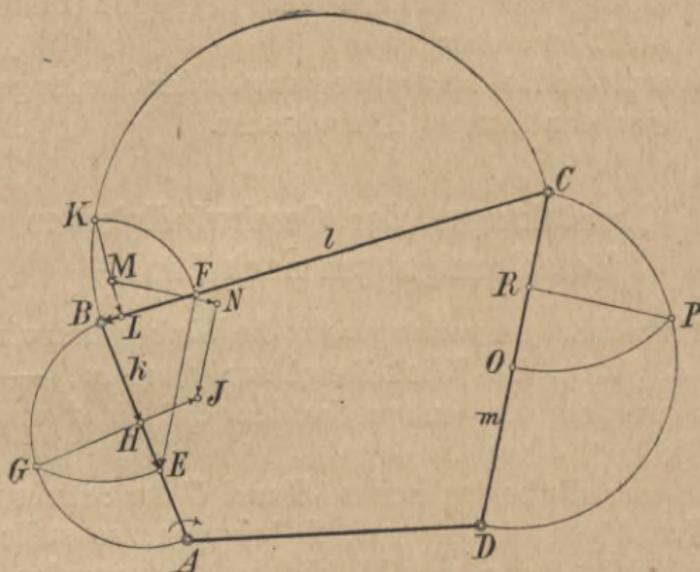


Fig. 38.

Schwingen bezeichnet, und den letzten die beiden Kurbeln zusammenkuppelnden Stab BC nennt man die Kuppelstange oder Koppel.

Die einzelnen Stablängen seien $AB = k$, $BC = l$, $CD = m$, die Diagonale $AC = n$ (Fig. 40). Die Winkelgeschwindigkeit, mit der ein Stab sich gegen seinen Nachbarstab um den gemeinsamen Gelenkpunkt dreht, möge mit demselben kleinen lateinischen, die entsprechende Winkelbeschleunigung mit demselben kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden wie der Gelenkpunkt, so daß a, b, c, d die Winkelgeschwindigkeiten und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Winkelbeschleunigungen um die Punkte A, B, C, D bedeuten.

Zur Ermittlung der Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsverhältnisse kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, je nachdem man entweder

- a) lediglich die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung der einzelnen Ebenen gegen das Gestell oder aber
- b) auch die Relativbewegungen der Glieder gegeneinander festzustellen wünscht.

§ 41. Ermittlungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach Land.¹⁾

Als bekannt sei vorausgesetzt die Winkelgeschwindigkeit a , bzw. die Winkelbeschleunigung α . — Gesucht werden die entsprechenden Größen d und δ . (Fig. 38.)

Da sich die beiden Punkte B und C der Schubstange auf Kreisbögen um A bzw. D bewegen, so stellt der Schnittpunkt P der augenblicklichen Bahnnormalen, d. h. der Kurbeln BA und CD , den Geschwindigkeitspol der Stange BC dar. Die Stange macht also eine Momentandrehung mit der vorläufig unbekanntem Winkelgeschwindigkeit ω bzw. Winkelbeschleunigung ε um P . Man kann nach bekannten Grundsätzen der Mechanik diese Drehung ersetzen durch eine Schiebung der Stange BC mit der Geschwindigkeit v_B bzw. Beschleunigung p_B des Punktes B (Ersatzschiebung), verbunden mit einer gleichzeitigen Drehung um diesen Punkt mit der Winkelgeschwindigkeit ω bzw. der Winkelbeschleunigung ε (Ersatzdrehung).

¹⁾ R. Land, Geschw.- und Beschl.-Plan für Mechanismen usw., Z. 1896.

Geschwindigkeiten:

Mit a ist auch die Geschwindigkeit $BE = v_B = k a$ des Kurbelzapfens B , also des Punktes B der Schubstange BC bekannt. Im Geschwindigkeitsdreieck BEF ergibt sich die Geschwindigkeit $FE = v_e = m d$ als Resultierende, wenn man die bekannte Geschwindigkeit $BE = v_B$ der Ersatzschiebung mit der Geschwindigkeit $FB = l \omega$ zusammensetzt, die der Punkt C infolge der Ersatzdrehung um B besitzt und die in die Richtung CB fällt. Die Richtung von $FE = v_e$ ist die des Polstrahls CD . Zieht man daher $EF \parallel CD$ bis zum Schnitt F mit BC , so ist tatsächlich

$$FB \hat{+} BE = FE,$$

d. h. es ist $FE = v_e = m d$.

Beschleunigungen:

Mit a und α kennt man auch die Beschleunigung $BJ = p_B$ des Punktes B , die sich aus den beiden Komponenten

$$BH = k a^2 = \text{Normalbeschleunigung},$$

$$HJ = k \alpha = \text{Tangentialbeschleunigung},$$

zusammensetzt.

Die Beschleunigung $MJ = p_c$ des Punktes C findet man als Resultierende aus der bekannten Beschleunigung $BJ = p_B$ der Ersatzschiebung und der Beschleunigung $MB = \sqrt{(ML)^2 + (LB)^2}$ der Ersatzdrehung um B , wobei

$$LB = l \omega^2 \text{ die Normalbeschleunigung,}$$

$$ML = l \varepsilon \text{ die Tangentialbeschleunigung}$$

dieser Drehbewegung bedeuten.

Die Beschleunigung $MJ = p_c$ muß sich andererseits aus den beiden Komponenten

$$NJ = m d^2 = \text{Normalbeschleunigung,}$$

$$MN = m \delta = \text{Tangentialbeschleunigung}$$

der Drehung des Punktes C um D zusammensetzen lassen.

Zum Punkte M kann man also längs zweier verschiedener Beschleunigungszüge gelangen

a) längs des Linienzuges $JHBLM$,

b) „ „ „ „ JNM .

Nach L kommt man, wenn man $LB = l \omega^2$ aus $CB = l$ und aus $FB = l \omega$ in der in § 65 angedeuteten Weise konstruiert. Von $LM = l \varepsilon$ ist nur die Richtung $\perp BC$ bekannt.

Von J gelangt man nach N , wenn man $NJ = CR = m d^2$ in gleicher Weise aus $CD = m$ und aus $CO = FE = m \delta$ ermittelt. Von $NM = m \delta$ ist wieder nur die Richtung $\perp CD$ bekannt; daher wird M als Schnitt von NM mit

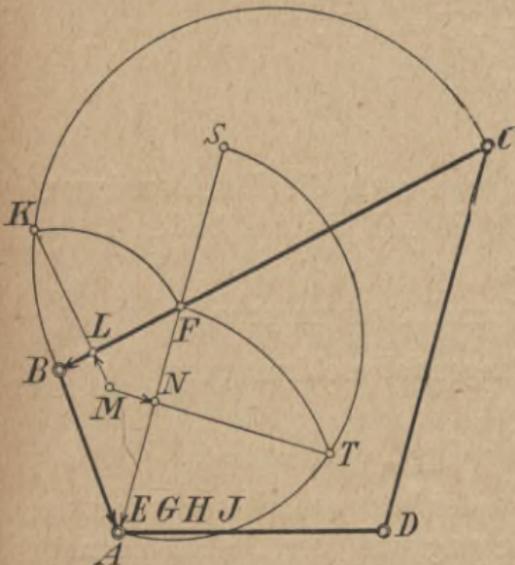


Fig. 39.

ML gefunden und die Beschleunigung p_c ist somit als MJ bekannt.

Besonderer Fall:

$$a = \text{const; } \alpha = 0.$$

Rotiert die Kurbel BA (Fig. 39) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit a , so empfiehlt es sich, den Geschwindigkeitsmaßstab $1:a$ zu wählen, da dann die Punkte A, E, G, H, J sämtlich mit A zusammenfallen.

Man kann dann die Ermittlung von $JN = m d^2$ gleich mit an den Punkt A verlegen, indem man AF über F bis S verlängert, so daß $AS = DC = m$, dann über AS den Halbkreis und um A mit AF den Kreis schlägt, der den ersteren in T schneidet, und von T das Lot $TN \perp AT$ bis zum Schnitt M mit KL zieht.

Will man auch über die Relativbewegungen der einzelnen Glieder des Gelenkvierecks gegeneinander Aufschluß haben, so ist die in § 41 genannte Methode nicht anwendbar. Man muß dann vielmehr den folgenden Weg einschlagen.

§ 42. Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unter Benutzung der Relativbewegungen.

Geschwindigkeiten:

Der Punkt C (Fig. 40) deckt sich momentan mit einem Punkte C_k , der der Ebene k angehört und die Geschwindigkeit $CG = na$ (Bezeichnungen siehe § 40) gegen das Gestell besitzt. Setzt man diese mit der Geschwindigkeit $l \cdot b$ zusammen, die C gegen die Ebene k hat und die in die Richtung CB fällt, so erhält man in der Resultierenden beider die gesuchte Geschwindigkeit von C gegen das Gestell, deren Richtung mit CD zusammenfällt. Daher schneidet die durch G zu CD gezogene Parallele auf BC den Punkt H so an, daß

$$HC = l \cdot b,$$

$$HG = m \cdot d$$

und

$$HC \hat{+} CG = HG \text{ ist.}$$

Beschleunigungen:

Als bekannt sei vorausgesetzt die Winkelgeschwindigkeit a und Winkelbeschleunigung α . Es möge die Beschleunigung p_c des Punktes C gegen das Gestell aufgesucht werden. C ist ein Punkt der Schwinge m und

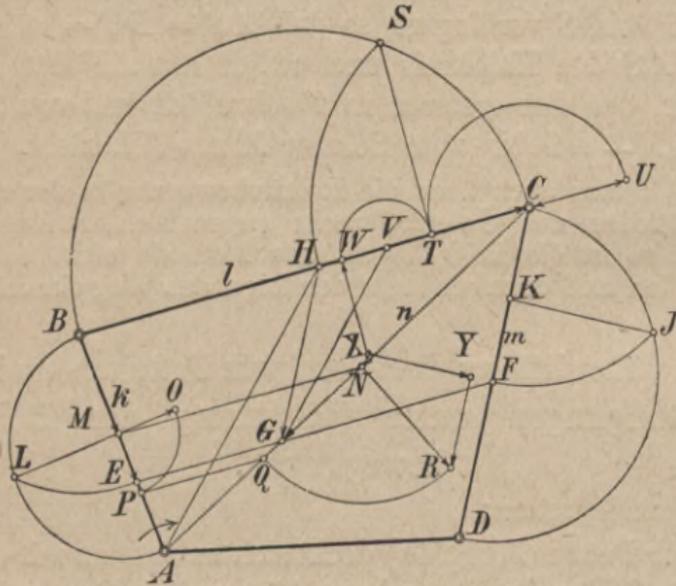


Fig. 40.

seine Beschleunigung setzt sich daher zusammen aus

- Aa) der Normalbeschleunigung $m d^2$,
 Bb) der Tangentialbeschleunigung $m \delta$.

Erstere Aa) läßt sich in der auf S. 147 geschilderten Weise aus den bekannten Strecken $CD = m$ und $CF = m d$ finden, indem man über CD den Halbkreis, um C mit CF den Kreisbogen bis J schlägt und von J das Lot JK auf CD fällt, so daß $CK = m d^2$ wird.

Letztere Bb) steht senkrecht auf der vorigen, ist aber der Größe nach vorläufig noch nicht zu ermitteln.

Betrachten wir die Ebenen k , l und das Gestell, so können wir nach § 23 die Beschleunigung p_c auch finden, wenn wir sie als Resultante der folgenden drei Beschleunigungen ermitteln:

1. Absolutbeschleunigung von C als Punkt C_k der Ebene k gegen das Gestell, bestehend aus den beiden zueinander rechtwinkligen Komponenten:
 - a) Normalbeschleunigung na^2 ,
 - b) Tangentialbeschleunigung $n\alpha$;
2. Relativbeschleunigung von C als Punkt der Ebene l gegen Ebene k , bestehend aus den beiden rechtwinkligen Komponenten:
 - a) Normalbeschleunigung lb^2 ,
 - b) Tangentialbeschleunigung $l\beta$;
3. Coriolis-Beschleunigung $2lb \cdot a$.

Von diesen Beschleunigungskomponenten lassen sich alle außer 2b) wie folgt konstruieren:

- 1a) Aus $BE = ka$ und $AB = k$ findet man nach S. 147 $BM = k \cdot a^2$, wenn man um B mit BE den Kreisbogen bis zum Schnitt L mit dem über AB geschlagenen Halbkreis schlägt und von L das Lot LM auf AB fällt. Zieht man noch $MN \parallel BC$ bis zum Schnitt N mit AC , so ist $CN = na^2$.
- b) Die bekannte Tangentialbeschleunigung $MO = k\alpha$ wird um M in die Lage MP geklappt, durch P die Parallele zu BC bis zum Schnitt Q mit AC gezogen und NQ um N um 90° bis in die Lage NR herumgeklappt. Dann ist $NR = n\alpha$.
- 2a) Aus $CH = lb$ und $BC = l$ findet man nach S. 147 $CT = lb^2$, wenn man um C mit CH den Kreisbogen bis zum Schnitt S mit dem Halbkreis über BC zieht und das Lot ST auf BC fällt. Da $CT = lb^2$ von C

nach dem Drehpunkt B gerichtet ist, so muß es als $UC = CT = lb^2$ an die Beschleunigungen CN und NR angesetzt werden, um im Beschleunigungsplan im richtigen Sinne zu erscheinen.

3. Die Coriolis-Beschleunigung steht senkrecht zu der nicht gedrehten Relativgeschwindigkeit lb und zwar in dem Richtungssinn, in welchem lb zeigen müßte, wenn man es im Sinne der Winkelgeschwindigkeit a um 90° dreht. Sie fällt daher in die Stabrichtung BC , von B nach C zeigend. Ihre Größe $2lba$ findet man, wenn man $CH = lb$ im Verhältnis $\frac{na}{n} = \frac{CG}{CA}$ verkleinert und die dabei erhaltene Strecke verdoppelt. Verbindet man A mit H und zieht durch G dazu die Parallele GV bis zum Schnitt V mit BC , so ist

$$CV = CH \cdot \frac{CG}{CA} = lba.$$

Schlägt man um V mit VT den Kreisbogen bis zum Schnitt W mit BC , so ist

$$WU = 2(VT + TC) = 2lba$$

nach Größe, Lage und Richtungssinn.

- 2b) Die in W auf BC errichtete Senkrechte fällt mit der Richtung der noch unbekanntenen Tangentialbeschleunigung $l\beta$ zusammen. Wäre ihr Anfangspunkt X bekannt, so wäre die Resultierende XR des Beschleunigungszuges $XWUCNR$ die gesuchte Beschleunigung p_c . Diese muß sich aber auch aus den beiden Komponenten Aa) und Bb) zusammensetzen lassen.

Trägt man daher im Punkte R $YR = CK = md^2$ so an, daß es von Y nach R im Sinne wie von C nach D

zeigt, und errichtet man in Y auf YR die Senkrechte, entsprechend der Richtung der noch unbekanntes Tangentialbeschleunigung $m\delta$, so schneidet sie sich mit der in W errichteten Normalen im gesuchten Punkte X und XY ist nach Größe, Lage und Richtungssinn die Tangentialbeschleunigung $m\delta$.

Wie man erkennt, ist der Punkt U zwar zur Überlegung unerlässlich, aber zur Konstruktion selbst nicht nötig. Seine Bestimmung kann daher ohne Schaden fortgelassen werden.

Besonderer Fall:

$$a = \text{const}; \alpha = 0.$$

Die Konstruktion läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn die Antriebskurbel AB mit konstanter Winkelgeschwindigkeit a rotiert. Wählt man dann den Geschwindigkeitsmaßstab $1 : a$ der natürlichen Größe, so fallen, wie der Vergleich der Fig. 40 und 41 zeigt, die Punkte

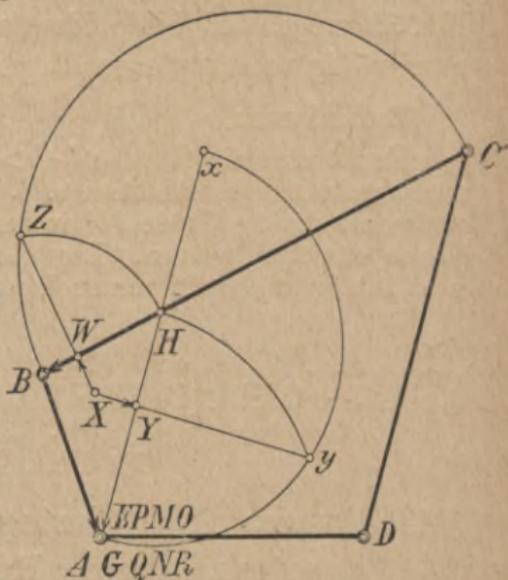


Fig. 41.

E, P, M, O und G, Q, N, R sämtlich im Punkte A zusammen, und da V nach H fällt, so kann man nach der auf S. 149 beschriebenen Ersatzkonstruktion den Punkt W einfacher finden, indem man, anstatt die Punkte S und T zu ermitteln und mit VT um V den Kreis bis W zu schlagen, einfacher mit BH um B den Kreisbogen bis zum Schnitt Z mit dem über BC geschlagenen Halbkreise schlägt und das Lot ZW auf BC fällt.

Da in diesem Spezialfall auch R mit A zusammenfällt, so ist es bequem, die Ermittlung von $CK = m d^2$ gleich an den Punkt A zu verlegen, indem man AH über H bis zum Punkte x verlängert, so daß $Ax = DC$ ist, dann den Halbkreis über Ax und einen mit AH um A geschlagenen Kreisbogen in y zum Schnitt bringt und das Lot yY von y auf Ax fällt. Dieses schneidet sich mit der in W errichteten Senkrechten im Punkte X . Ein Vergleich mit der auf S. 84 gegebenen Konstruktion Fig. 39 zeigt, daß beide identisch sind, obwohl sie auf zwei völlig verschiedenen Wegen abgeleitet worden sind.

Bemerkung:

Ergibt sich die Strecke $l \cdot b > l$, so läßt sich die oben angewandte Hilfskonstruktion (s. S. 147b) nicht durchführen, es muß vielmehr die Größe $l b^2$ in der auf S. 147b angegebenen Weise ermittelt werden. Die übrige Konstruktion ist aber ganz analog wie sonst vorzunehmen.

VIII. Vom Gelenkviereck abgeleitete Getriebe.

§ 43. Antrieb eines Schwinghebels durch ein Exzenter mit langer Exzenterstange.

Bei den meisten Ventilsteuerungen haben wir den Fall, daß die Bewegung eines Schwinghebels vermittels einer Exzenterstange von einem Exzenter aus erfolgt, dessen Welle (die Steuerwelle), wenn man vom Ungleichförmigkeitsgrade der Maschine absieht, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Im allgemeinen ist die Länge der Exzenterstange gegenüber der Exzentrizität so groß (etwa das 20—30fache), daß man sie mit guter Genauigkeit bei der graphischen Untersuchung als

unendlich annehmen kann. Dann vereinfacht sich die auf S. 83 unter Fig. 39 angegebene Konstruktion noch etwas.

Ist nämlich in Fig. 39 AB die Exzenterkurbel, BC die Exzenterstange und CD der Schwinghebel und lassen wir BC unter Beibehaltung der mittleren Exzenterstangenrichtung sowie der Größe und Richtung der Glieder AB und CD immer größer und größer und schließlich unendlich lang werden, so rücken die Punkte C und D natürlich immer weiter weg, aber die Punkte A, B, F, S, T, N behalten ihre Lage bei und der Punkt L fällt im Grenzfall mit B zusammen. Die in L errichtete Senkrechte geht in die in B auf der Exzenterstangenrichtung BC errichtete Senkrechte über.

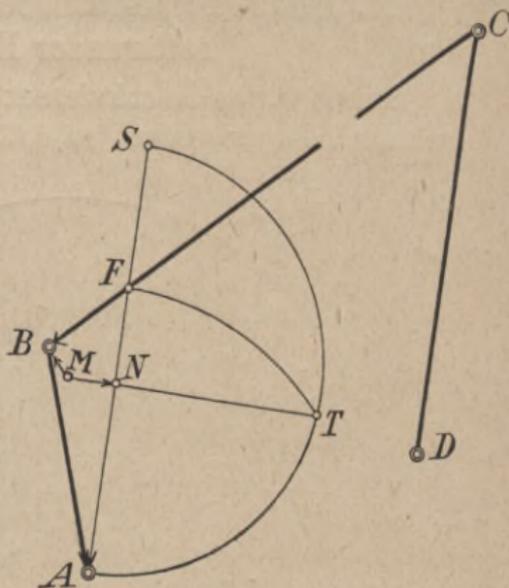


Fig. 42.

Wir erhalten dann die folgende in Fig. 42 wiedergegebene Konstruktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwinghebelpunktes C :

Man verlege den Schwinghebel CD nach Größe und Richtung an den Mittelpunkt A der Steuerwelle, so daß D mit A zusammenfällt und S den freien Endpunkt bezeichnet, bringe AS in F zum Schnitt mit der durch das Exzentermittel B gezogenen mittleren Exzenterstangenrichtung und schlage mit AF um A den Kreis bis zum

Wird $CD = \infty$, so erkennen wir, daß in Fig. 40 Punkt K nach C und so auch Y nach R fällt, daß also in der Konstruktion der Beschleunigung p_c des Kreuzkopfes C eine kleine Vereinfachung eintritt, weil man nicht erst $CK = m d^2$ ermitteln muß, sondern gleich durch R die Parallele RX zur Gleitbahnrichtung gg bis zum Schnitt X mit der in W errichteten Normalen ziehen kann.

Im übrigen bleibt aber die für das Gelenkviereck entwickelte Konstruktion unverändert bestehen, wobei natürlich an Stelle der früheren Parallelen zum Lenker CD die Normale zur Gleitbahn gg tritt.

Wesentlich einfacher gestalten sich jedoch die Verhältnisse, wenn wir den nächsten sehr häufigen Fall voraussetzen:

§ 45. Schubkurbelgetriebe mit gleichförmig rotierender Kurbel.

Gehen wir von der in § 41 Fig. 39 für das Gelenkviereck bei gleichförmiger Drehung der Kurbel AB entwickelten Konstruktion aus und lassen die Schwinge CD unendlich groß werden, so erkennen wir, daß N nach A fällt und somit der Punkt M gefunden wird, indem man durch A die Parallele zur Gleitbahn gg zieht und sie mit der in L auf BC errichteten Senkrechten in M zum Schnitt bringt. (Fig. 43.)

§ 46. Mohrsche Konstruktion der Beschleunigung des Kreuzkopfs.¹⁾

Aus der Konstruktion des Punktes L (Fig. 43) folgt, daß

$$BL \cdot BC = (BK)^2 = (BF)^2, \quad BL = \frac{(BF)^2}{BC}.$$

¹⁾ O. Mohr, Konstr. der Beschl. am Kurbelgetriebe, Civ. 1880.

Wir können daher an Stelle der in Fig. 43 zur Ermittlung von L angewandten Konstruktion auch die Hilfskonstruktion S. 149 (Fig. 75) benutzen, indem wir Punkt A als den Punkt betrachten, von dem aus die drei Strahlen nach den Punkten B , F und C gezogen sind. Wir haben dann durch F parallel AC bis zum Schnitt E mit AB und durch E parallel AF bis zum Schnitt L mit BC zu ziehen, auf BC in L die Senkrechte zu errichten und sie mit der durch A parallel zur Gleitbahn gg gelegten Geraden in M zum Schnitt zu bringen.

§47. Andere Ableitung der Mohrschen Konstruktion.

Eine etwas andere Überlegung führt ebenfalls zur Mohrschen Konstruktion.

Die bekannte Geschwindigkeit $BA = ka$ des Kurbelzapfens B (Fig. 43) läßt sich zerlegen in die beiden Komponenten:

1. $FA = v_c =$ Geschwindigkeit, die B als Punkt des Kreuzkopfs hat,
2. $BF = l \cdot c =$ Relativgeschwindigkeit des Kurbelzapfens B gegenüber dem Kreuzkopf.

Die bekannte Beschleunigung $BA = ka^2$ des Kurbelzapfens läßt sich in ähnlicher Weise zerlegen in:

1. die Beschleunigung $MA = p_c$, die B als Punkt des Kreuzkopfs hat,
2. die Relativbeschleunigung BM , die B gegenüber dem Kreuzkopf besitzt, bestehend aus den beiden rechtwinkligen Komponenten:
 - a) $BL = lc^2 =$ Normalbeschleunigung,
 - b) $LM = l \cdot \gamma =$ Tangentialbeschleunigung.

Man kann nun

$$BL = lc^2 = \frac{(lc)^2}{l} = \frac{(BF)^2}{BC}$$

in der vorher (§ 46) angegebenen Weise durch Ziehen von $FE \parallel AC$ und $EL \parallel AF$ finden, in L die Senkrechte auf BC

errichten und durch A die Parallele zu gg ziehen, die sich in M schneiden. Dann ergibt der Beschleunigungszug $BLMA$ der obigen drei Komponentenbeschleunigungen 1), 2a), 2b) die Resultierende BA und die Strecke MA stellt wieder die gesuchte Kreuzkopfbeschleunigung p_c dar.

§ 48. Rotierende Kurbelschleife. Allgemeines.

Halten wir im Schubkurbelgetriebe ABC (Fig. 43) die Kurbel AB fest und lassen sich dafür das Gestell AC

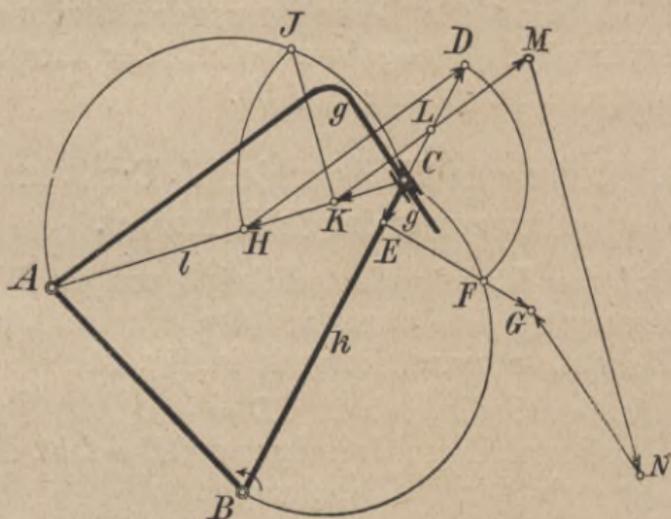


Fig. 44.

bewegen, so gelangen wir zur rotierenden Kurbelschleife ABC (Fig. 44).

Wir nennen jetzt AB das Gestell, BC die Kurbel, AC die Schleifkurbel und das in C befindliche und gegenüber AC die Führung besorgende Stück das Gleitstück.

Wir wollen die Antriebskurbel $BC = k$ und den augenblicklichen Abstand $AC = l$ nennen. Die Winkelgeschwindigkeit bzw. -beschleunigung der Kurbel BC

um B soll wie bisher immer b bzw. β , die der Schleifkurbel AC um A entsprechend a bzw. α heißen. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Gleitstücks gegenüber der Schleifkurbel sei mit v_c bzw. p_c bezeichnet.

Dann können wir folgende Aufgaben stellen:

I. Es sind die Bewegungsverhältnisse der Kurbel BC bekannt, es sollen die entsprechenden Größen für die Schleifkurbel ermittelt werden. (Lösung in § 49.)

II. Es sind die Bewegungsverhältnisse der Schleifkurbel AC gegeben und die der Kurbel BC aufzusuchen. (Lösung in § 50.)

§ 49. Rotierende Kurbelschleife. Ermittlung der Bewegung der Schleifkurbel.

Sind die Winkelgeschwindigkeit b und die Winkelbeschleunigung β bekannt, mit der sich die Kurbel k um B dreht, so kennt man auch in Fig. 44

a) die Geschwindigkeit $CD = kb$,

b) die Normalbeschleunigung $CE = kb^2$, die mit der vorigen in der Beziehung steht

$$CE = k \cdot b^2 = \frac{(k \cdot b)^2}{k} = \frac{(CD)^2}{BC} = \frac{(CF)^2}{BC},$$

c) die Tangentialbeschleunigung $EG = k\beta$, mit denen sich C um B bewegt.

Geschwindigkeiten:

Die Geschwindigkeit CD kann man zerlegen in:

1. die Geschwindigkeit v_c des Gleitstücks C gegenüber der Schleifkurbel; sie fällt in die Richtung gg und steht — nach der üblichen Drehung aller Geschwindigkeiten um 90° — senkrecht zu gg ;

2. die Geschwindigkeit $l a$, mit der sich der augenblicklich mit C zusammenfallende Punkt der Schleifkurbel um A dreht. Sie fällt nach der Drehung in den Polstrahl AC der Schleifkurbel. Zieht man daher von D das Lot auf die Gleitbahn gg bis zum Schnitt H mit AC , so ist im Geschwindigkeitsdreieck CDH

$$\begin{aligned} HD &= v_c, \\ CH &= l \cdot a. \end{aligned}$$

Da uns l und nun auch $l \cdot a$ bekannt sind, so kennen wir auch die gesuchte Winkelgeschwindigkeit a .

Beschleunigungen:

Die aus CE und EG resultierende bekannte Beschleunigung CG des Punktes C kann man zerlegen in:

1. die Beschleunigung p_c des Gleitstücks C gegenüber der Schleifkurbel AC ; sie fällt in die Richtung gg ;
2. die Beschleunigung des mit C zusammenfallenden Punktes der Schleifkurbel gegen das Gestell, bestehend aus den beiden rechtwinkligen Komponenten:
 - a) $l a^2 =$ Normalbeschleunigung in die Richtung CA fallend,
 - b) $l \cdot \alpha =$ Tangentialkomponente, senkrecht zur vorigen;
3. die Coriolis-Beschleunigung von der Größe $2 v_c \cdot a$, senkrecht zur wirklichen Richtung von v_c in dem Sinne zeigend, in dem v_c bei einer im Drehsinn von a vorgenommenen Drehung um 90° zeigen müßte. Diese Beschleunigung steht also senkrecht zu gg und zeigt im Sinne von H nach D .

Da die Beschleunigungskomponenten p_c und $l \alpha$ vorläufig nur der Richtung nach bekannt sind, so werden sie in dem nunmehr aufzuzeichnenden Beschleunigungsplan bis zuletzt aufgespart. Zunächst wird die Beschleunigung $CK = l a^2$ aus $AC = l$ und $CH = l a$ in

der gewohnten Weise (s. Hilfskonstruktion S. 147) ermittelt, indem man über AC den Halbkreis und um C mit HC den Kreisbogen schlägt und vom gemeinsamen Schnittpunkt J das Lot JK auf AC fällt; denn es ist

$$CK = \frac{(CJ)^2}{CA} = \frac{(CH)^2}{CA} = \frac{(la)^2}{l} = la^2.$$

Dann kann die Coriolis-Beschleunigung $2v_c \cdot a$ gefunden werden, indem man $HD = v_c$ im Verhältnis $a:1$ verkleinert und das Resultat verdoppelt. Zieht man zu diesem Zwecke $KL \parallel HD$ bis zum Schnitt L mit CD , so findet man

$$KL = HD \cdot \frac{CK}{CH} = v_c \cdot \frac{la^2}{la} = v_c \cdot a;$$

verlängert man KL über L um sich selbst bis M , so ist $KM = 2v_c a$ und der Linienzug CKM stellt die Beschleunigungen 2a) und 3) nach Größe, Richtung und Richtungssinn dar.

Zieht man noch durch G die Parallele zu gg und durch M die Senkrechte zu AC , die sich in N schneiden mögen, so stellt NG die Gleitbeschleunigung p_c , MN die Tangentialbeschleunigung $l\alpha$ dar und zwar beide nach Größe, Richtung und Richtungssinn.

Da nun $l\alpha$ sowie l bekannt sind, so sind auch die gesuchte Winkelbeschleunigung α und damit die Bewegungsverhältnisse der Schleifkurbel gefunden.

§ 50. Rotierende Kurbelschleife. Ermittlung der Bewegung der Kurbel.

Sind die Winkelgeschwindigkeit a und Winkelbeschleunigung α bekannt, so führt die gleiche Überlegung wie in § 49 zur Ermittlung von b und β . Nur

sind diesmal als unbekannte Beschleunigungen im Beschleunigungsplan

die Gleitbeschleunigung p_c und
die Tangentialbeschleunigung $k \cdot \beta$

anzusehen.

Geschwindigkeiten:

Durch den Endpunkt H (Fig. 44) der bekannten Geschwindigkeit $CH = la$ legt man die Senkrechte $HD \perp gg$ bis zum Schnitt D mit der Kurbel BC . Das dadurch gebildete Geschwindigkeitsdreieck CHD enthält dann als Seite CD die Geschwindigkeit $k \cdot b$ des Punktes C , aus der in Gemeinschaft mit $BC = k$ die gesuchte Winkelgeschwindigkeit b hervorgeht.

Beschleunigungen:

Mit der Winkelgeschwindigkeit a und der Winkelbeschleunigung α sind auch die Normalbeschleunigung $CK = la^2$ und die Tangentialbeschleunigung $l\alpha$ bekannt. Wie in § 49 erhält man die Coriolis-Beschleunigung $KM = 2v_c a$, indem man durch K $KL \parallel HD$ bis zum Schnitt L mit CD zieht und KL bis M über L hinaus verdoppelt. $MN = l\alpha$ wird nun senkrecht zu AC gezogen unter Beachtung des richtigen Richtungssinnes. Die durch N parallel zu gg gelegte Gerade fällt dann in die Richtung der Gleitbeschleunigung p_c und muß zum Punkte G führen, der einerseits der Endpunkt des Beschleunigungszuges $CKMNG$, andererseits der Endpunkt der Gesamtbeschleunigung des Punktes C ist. Von letzterer ist die Normalkomponente $CE = kb^2$ aus $CD = kb$ und $BC = k$ in gewohnter Weise zu finden, indem man über BC den Halbkreis, sowie um C mit CD den Kreisbogen bis zum gemeinsamen Schnitt F zieht und von F auf BC das Lot FE fällt. Dieses gibt zu-

Wir konstruieren also (Fig. 45) zunächst das Geschwindigkeitsdreieck CDH , indem wir $DH \perp AC$ ziehen. Dann wird der Endpunkt K der Normalbeschleunigung $CK = la^2$ wie bisher ermittelt, indem man vom Schnittpunkt J des über AC geschlagenen Halbkreises und des um C mit $CH = la$ geschlagenen Kreisbogens das Lot JK auf AC fällt. Verlängert man dieses

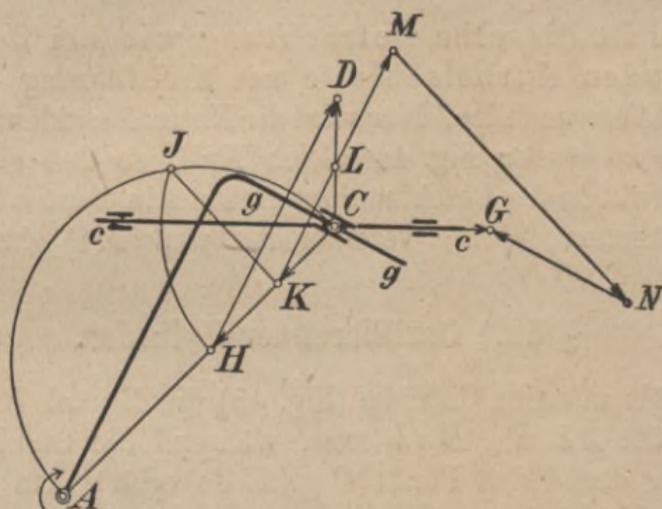


Fig. 46.

über K bis zum Schnitt N mit der durch G zur Gleitrichtung AC gezogenen Parallelen GN und macht $LM = KL$, so ist

$KM = 2 KL = 2 v_c \cdot a$ die Coriolis-Beschleunigung,

$MN = la$ die gesuchte Tangentialbeschleunigung des Schleifkurbelpunktes C ,

$NG = p_c$ die Gleitbeschleunigung des Gleitstücks.

Gleichförmige Drehung der Kurbel k .

$b = \text{const}; \beta = 0.$

Dann vereinfacht sich die Konstruktion noch mehr, da bei Wahl des Geschwindigkeitsmaßstabes $1:b$ die

Punkte E, F, G mit B zusammenfallen und daher anstatt durch G durch B die Parallele BN bis zum Schnitt N mit KL zu ziehen ist.

2. Der Lenker CB wird unendlich lang. Dann erhalten wir die in Fig. 46 skizzierte

Rotierende Kurbelschleife mit gerader Führung des Punktes C .

Es ist dieselbe Betrachtung wie bei der rotierenden Kurbelschleife mit Kreisführung von C (Fig. 44) anzustellen. Nur wird die Normalbeschleunigung $CE = k \cdot b^2$ der Fig. 44 gleich Null, so daß sich die Konstruktion des Beschleunigungsplanes in der aus Fig. 46 ersichtlichen Weise vereinfacht, weil EG durch C geht.

§ 52. Oszillierender Zylinder.

Hält man im Getriebe (Fig. 45) die Kurbel BC fest und läßt AB um B rotieren, während die Stange AC ständig durch den Punkt C geht, so erhält man das in Fig. 47 skizzierte Getriebe, wie es bei einem „os-zillierenden Zylinder“ vorliegt.

Es seien b und c bzw. β und γ die Winkelgeschwindigkeiten bzw. Winkelbeschleunigungen der Kurbel AB um B und des Zylinders um C ; ferner sei $AB = m$, die veränderliche Länge $AC = l$.

Als bekannt seien vorausgesetzt b und β , also auch die Geschwindigkeit $AD = mb$, Normalbeschleunigung $AE = mb^2$ und Tangentialbeschleunigung $EG = m\beta$ des Kurbelzapfens A .

Geschwindigkeiten:

Die bekannte Geschwindigkeit $AD = mb$ des Kurbelzapfens A setzt sich zusammen aus:

$HD = v_a$ = Geschwindigkeit des Kolbenstangenpunktes A relativ zum Zylinder ($HD \perp AC$),
 $AH = lc$ = Schwingungsgeschwindigkeit des Punktes A der Zylinderebene gegenüber dem Gestell.

Beschleunigungen:

Die Gesamtbeschleunigung AG des Kurbelzapfens ist nach Größe und Richtung der Voraussetzung nach bekannt, ließe sich aber auch durch Zusammensetzung folgender Beschleunigungen erhalten:

1. der Beschleunigung NG = p_a des Kolbenstangenpunktes A gegenüber dem Zylinder, in die Richtung CA fallend,
2. der Beschleunigung des Zylinderpunktes A , bestehend aus den beiden zueinander rechtwinkligen Komponenten:

$$a) AK = \frac{(AJ)^2}{AC} = \frac{(AH)^2}{AC} = \frac{(lc)^2}{l}$$

= lc^2 = Normalbeschleunigung, in Richtung AC fallend,

b) $MN = l\gamma$ = Tangentialbeschleunigung, senkrecht AC fallend,

3. der Coriolis-Beschleunigung

$$KM = 2 KL = 2 HD \cdot \frac{AK}{AH} = 2 v_c \frac{lc^2}{lc} = 2 v_c \cdot c.$$

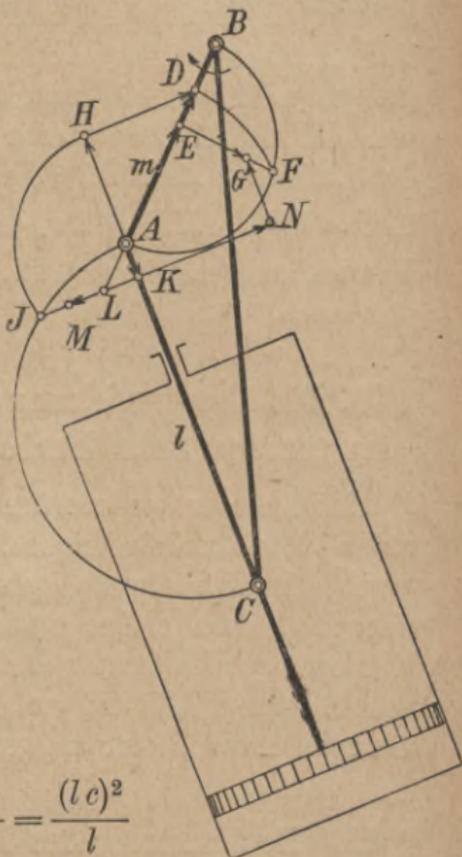


Fig. 47.

Zur Konstruktion der Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen fällen wir daher $DH \perp AC$ und erhalten das Geschwindigkeitsdreieck AHD . Dann bringen wir den Halbkreis über AC mit dem um A mit AH geschlagenen Kreisbogen zum Schnitt J , ziehen das Lot $JK \perp AC$ und bringen es in N mit der durch G zu AC gezogenen Parallelen zum Schnitt. Ist L der Schnitt von JK mit AB und macht man $LM = LK$, so enthält der Linienzug $AKMNG$ die einzelnen Beschleunigungen $AK = lc^2$, $KM = 2v_a \cdot c$, $MN = l\gamma$, $NG = p_a$ in wirklicher Größe und Richtung, auch dem Richtungssinn nach.

§ 53. Die Massenwirkung der schweren Schubstange im geraden Schubkurbelgetriebe. Allgemeines.

Infolge der außerordentlichen Bedeutung des geraden Schubkurbelgetriebes, bei dem die Gleitrichtung durch die Kurbelwelle geht, für die Praxis seien im folgenden noch einige etwas weitergehende graphische Methoden zur Ermittlung der Massenwirkung der schweren Schubstange angeführt, von denen die erste von Mollier, die zweite von Mohr angegeben worden ist.

§ 54. Bestimmung des Rückdrucks der bewegten Schubstange auf den Kolben nach Mollier.¹⁾

Bei der Bewegung des Schubkurbelgetriebes äußert sich die fortwährende Änderung der in der Schubstange enthaltenen kinetischen Energie E in einem variablen

¹⁾ R. Mollier, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange. Z. 1903.

Rückdruck P auf den Kolben. Die Änderung dE der kinetischen Energie während der Zeit dt muß hierbei gleich der in dieser Zeit von der Kraft P auf ihrem Wege dx geleisteten Arbeit Pdx sein, wobei $dx = w dt$ den in der Zeit dt vom Kreuzkopf C mit der Geschwindigkeit w durchlaufenen Weg darstellt. Es ist also

$$dE = P \cdot w \cdot dt,$$

$$(18) \quad P = \frac{1}{w} \cdot \frac{dE}{dt}.$$

Die Bewegung der Schubstange (Fig. 48) kann aufgefaßt werden entweder

1. als eine Schiebung längs der Gleitbahn gg des Kreuzkopfes C mit der Kreuzkopfgeschwindigkeit w , verbunden mit einer gleichzeitigen Relativedrehung um C

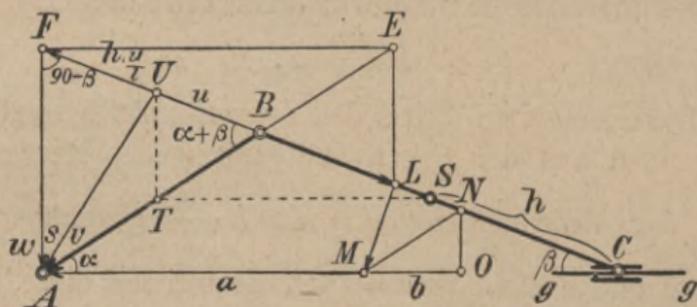


Fig. 48.

gegenüber der Kreuzkopfebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{l}$, wenn u die Relativgeschwindigkeit des Punktes B gegenüber der Kreuzkopfebene bedeutet; oder

2. als eine Schiebung mit der Geschwindigkeit s des Schwerpunktes S und eine gleichzeitige Drehung um

den Schwerpunkt mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{l}$ wie vorher.

Bezeichnet M die Masse, J_s das Trägheitsmoment der Stange um ihren Schwerpunkt, so ergibt sich die gesamte kinetische Energie der Stange

$$(19) \quad E = \frac{M}{2} s^2 + \frac{J_s}{2} \left(\frac{u}{l} \right)^2.$$

Zieht man $AF \perp gg$ bis zum Schnitt F mit BC , so ergeben nach Früherem im Geschwindigkeitsdreieck BFA die Komponenten:

$$BF = u,$$

$$FA = w$$

als Resultierende die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens B

$$BA = v.$$

Die Geschwindigkeit s des Schwerpunktes setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit w des Kreuzkopfs und der Relativgeschwindigkeit $h \cdot \frac{u}{l}$ gegenüber der Kreuzkopfebene, wobei $h = SC$. Man findet diese, wenn man $BF = u$ im Verhältnis $\frac{h}{l}$ verkleinert, d. h. durch $S ST \parallel AC$ bis zum Schnitt T mit der Kurbel und $TU \parallel AF$ bis zum Schnitt U mit BC zieht. Dann ist

$$UF = h \cdot \frac{u}{l},$$

und da

$$UF \hat{+} FA = UA$$

ist, aber auch

$$h \cdot \frac{u}{l} \hat{=} w = s$$

sein muß, so ergibt sich, daß

$$UA = s$$

ist. Bezeichnet man die Winkel der Kurbel bzw. der Schubstange gegen die Gleitbahn gg mit α bzw. β , so wird

$$\sphericalangle AFB = 90 - \beta,$$

$$\sphericalangle ABF = \alpha + \beta$$

und wir können aus den beiden Dreiecken AUF und ABF die Beziehungen ableiten

$$s^2 = w^2 + \left(h \frac{u}{l}\right)^2 - 2w \cdot \frac{hu}{l} \sin \beta,$$

$$v^2 = w^2 + u^2 - 2w \cdot u \cdot \sin \beta.$$

Die Elimination von β hieraus führt zu der Gleichung

$$(20) \quad s^2 = w^2 + \left(h \cdot \frac{u}{l}\right)^2 - \frac{h}{l} (w^2 + u^2 - v^2).$$

Führt man an Stelle von J_s das Trägheitsmoment J um den Kreuzkopfpapfen C und dafür wieder den Trägheitsradius $k = \sqrt{\frac{J}{M}}$ ein, so kann man schreiben

$$(21) \quad J_s = J - Mh^2 = M(k^2 - h^2).$$

Setzt man (20) und (21) in (19) ein, so erhält man als Gesamtenergie der Schubstange

$$(22) \quad E = \frac{M}{2} \left[w^3 \frac{l-h}{l} - u^2 \cdot \left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) + \frac{h}{l} v^2 \right].$$

Die Differentiation von E nach der Zeit t ergibt hiernach

$$\frac{dE}{dt} = M \left[w \frac{dw}{dt} \frac{l-h}{l} - u \frac{du}{dt} \left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) + v \frac{dv}{dt} \cdot \frac{h}{l} \right],$$

so daß die Gleichung (18) übergeht in die andere

$$(23) \quad P = M \left[\frac{dw}{dt} \frac{l-h}{l} - \frac{u}{w} \frac{du}{dt} \left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) + \frac{v}{w} \frac{dv}{dt} \frac{h}{l} \right].$$

Da hierin noch keinerlei beschränkende Voraussetzung für die Winkelgeschwindigkeit ω der Kurbel gemacht wurde, so gilt diese Gleichung auch für variable Kurbelzapfengeschwindigkeit v .

Spezialfall; $\omega = \text{konst.}$

In den meisten Fällen wird man die vereinfachende Annahme machen können, daß die Kurbel mit konstanter Geschwindigkeit rotiert. Dann wird

$$v = \text{konst.}, \quad \frac{dv}{dt} = 0,$$

und Gleichung (23) geht in die einfachere über

$$(24) \quad P = M \left[\frac{dw}{dt} \frac{l-h}{l} - \frac{u}{w} \frac{du}{dt} \left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) \right].$$

Wählen wir als Maßstab der Beschleunigungen wie üblich $1 : \omega^2$ und wenden wir die Mohrsche Konstruktion an, nämlich $AF \perp gg$, $FE \parallel AC$, $EL \parallel AF$, $LM \perp BC$ und $AM \parallel gg$, so stellt

$$AM = a = \frac{1}{\omega^2} \cdot p_c = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{dw}{dt} \text{ die Beschleunigung des Kreuzkopfs,}$$

$$LM = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{du}{dt} \text{ die Tangentialbeschleunigung } \frac{du}{dt} \text{ des Punktes } B \text{ relativ zum Kreuzkopf dar.}$$

Nun ergibt sich aus $\triangle ABF$ die Beziehung

$$\frac{u}{w} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Zieht man daher $MN \parallel AB$, $NO \perp gg$ bis zum Schnitt O mit AM , so ist

$$MN = \frac{LM}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$MO = b = MN \cos \alpha = LM \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{u}{w} \right) \frac{du}{dt},$$

und wir können daher für (24) schreiben

$$(25) \quad P = M \cdot \omega^2 \left[a \cdot \frac{l-h}{l} - b \left(\frac{h}{l} - \frac{k^2}{l^2} \right) \right],$$

wobei a und b die oben angegebenen Strecken AM und MO bedeuten, die in m zu messen sind, wenn das Kurbelgetriebe im natürlichen Maßstabe aufgezeichnet worden ist.

Größe von a und b in den Totlagen $\alpha = 0$, $\alpha = 180^\circ$.

a) In beiden Totlagen wird $BF = u = AB = r$, also auch $BL = \frac{u^2}{l} = \frac{r^2}{l} = r\lambda$ und daher

$$(26) \quad a_{0^\circ} = [AB]_{0^\circ} + [BL]_{0^\circ} = r + r\lambda = r(1 + \lambda),$$

$$(27) \quad a_{180^\circ} = -[AB]_{180^\circ} + [BL]_{180^\circ} = -r + r\lambda = -r[1 - \lambda],$$

wobei $\lambda = \frac{r}{l}$ das Schubstangenverhältnis bedeutet.

b) Rechnerisch ergibt sich aus Fig. 48:

1. allgemein:

$$b = MN \cos \alpha = AB \frac{MC}{AC} \cos \alpha = r \frac{AC - a}{AC} \cos \alpha,$$

$$(28) \quad b = r \cdot \left[1 - \frac{a}{r \cos \alpha + l \cos \beta} \right] \cos \alpha;$$

2. für die Totlagen:

$$(29) \quad \alpha = 0^\circ; \quad \beta = 0^\circ; \quad b_0 = r[1 - \lambda],$$

$$(30) \quad \alpha = 180^\circ; \quad \beta = 0^\circ; \quad b_{180^\circ} = -r[1 + \lambda].$$

§ 55. Bestimmung der Resultierenden der auf eine schwere Schubstange wirkenden Trägheitskräfte nach Mohr.¹⁾

Ist ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Kurbel CB (Fig. 49), S der Schwerpunkt der Schubstange AB , ferner $m \cdot \overline{BS} \cdot \overline{SD}$ die Größe des Trägheitsmoments der Schubstangenmasse m in bezug auf den

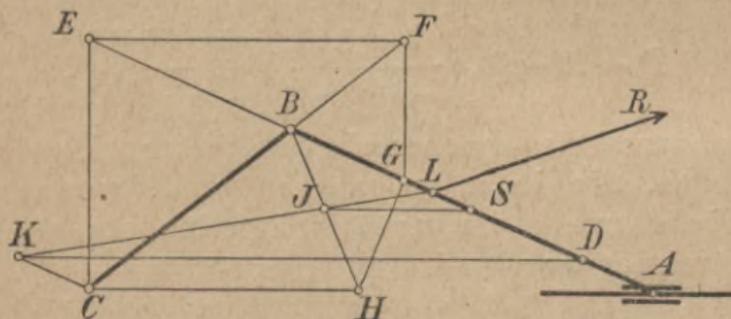


Fig. 49.

Schwerpunkt S , woraus die Bedeutung und Lage des Punktes D hervorgeht, und zieht man $CE \perp AC$, $EF \parallel AC$, $FG \perp AC$, $GH \perp AB$, und außerdem SJ und DK parallel zu AC , CK parallel zu AB , bezeichnet ferner den Schnittpunkt von KJ und AB mit L , so geht die im Zeitpunkt der Betrachtung den äußeren auf die Stange einwirkenden Kräften das Gleichgewicht haltende Trägheitskraft R durch den Punkt L , ist parallel zu CJ , hat den Sinn \overline{CJ} und die Größe

$$(31) \quad R = m \cdot \omega^2 \overline{CJ} \text{ in kg,}$$

¹⁾ O. Mohr, Z. 1899.

wenn im natürlichen Maßstab gezeichnet und \overline{CJ} in m gemessen wird.

Der Beweis der Richtigkeit dieser Konstruktion ist von Mohr zuerst im Civiling., Bd. XLI, Heft 8 gegeben worden.

IX. Steuerungen mittels Schubkurvengetriebe.

§ 56. Nockensteuerungen. Allgemeines.

Eine auf einer Achse A (Fig. 50 und 51) festgekeilte unrunde Scheibe, die mit der Achse rotiert, bietet ein sehr einfaches Mittel, aus der Drehbewegung der „Steu erwelle“ A eine bestimmte hin und her gehende Bewegung der Rolle C abzuleiten. Man kann dabei den Rollenmittelpunkt C zwingen, entweder

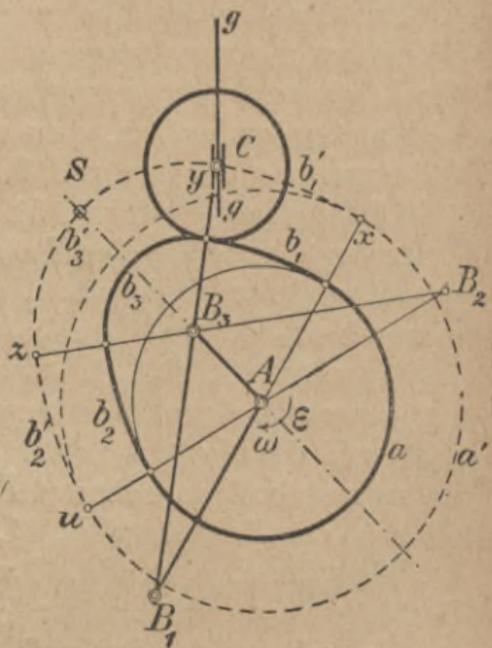


Fig. 50.

- I. sich auf einer Geraden gg (Fig. 50) zu bewegen, indem man die Rolle an einem auf der Geraden auf und nieder gehenden Gleitstück befestigt, oder
- II. einen Kreis um einen Punkt D (Fig. 51) zu beschreiben, indem man die Rolle mittels des Lenkers $CD = l$ an dem Punkte D befestigt.

Man wird in allen Fällen die Bewegungsverhältnisse (d. h. die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung ε) des Nockens bzw. der Steuerwelle A kennen. Es besteht die Aufgabe, Weg s , Geschwindigkeit $v = l\omega'$ und Tangentialbeschleunigung $p_t = l\varepsilon'$ des Rollenmittelpunktes C zu untersuchen, wenn das Profil des Nockens bekannt ist. Hierin sind ω' , ε' die Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung von l um D .

§ 57. Analyse des Getriebes einer Nockensteuerung.

Das Profil des Nockens besteht in den meisten Fällen aus mehreren tangential ineinander übergehenden Kreisbögen. Der tangentielle Übergang ist unbedingt erforderlich, wenn man harte und gefährliche Stöße zwischen Nocken und Rolle vermeiden will.

In den Figuren 50 und 51 setzt sich das Profil der unrunder Scheibe aus den Kreisbögen a um A , b_1 und b_2 um B_1 und B_2 und b_3 um B_3 zusammen. Es ist leicht einzusehen, daß man die Rolle, ohne die Bewegung ihres Mittelpunktes C dabei zu ändern, in den Punkt C zusammenschrumpfen lassen kann, wenn man gleichzeitig das Profil des Nockens zu der im Abstände des Rollenradius gestrichelt gezeichneten Äquidistanten erweitert, die aus den Kreisbögen a' , b'_1 , b'_3 , b'_2 zusammengesetzt ist. Es seien x , y , z , u die Trennpunkte, in denen diese Kreisbögen tangential aneinander stoßen.

Man erkennt, daß Punkt C , während sich der Nocken im Uhrzeigersinne dreht, zunächst eine Zeitlang (zwischen u und x) mit dem Kreis a' in Berührung und somit selbst in Ruhe war. Von x bis y erhebt er sich dem Kreisbogen b'_1 entsprechend bis in die gezeichnete Lage und darauf weiter bis zum Scheitel S des Kreises b'_3 längs

des letzteren in seine höchste Lage, sinkt darauf längs b_3 bis x und längs b'_2 bis u in die Ruhelage zurück, die er wieder bis x beibehält, um von neuem sich zu erheben.

Im Intervalle $x - y$ bleibt offenbar die Entfernung CB_1 zwischen C und dem sich mit dem Nocken drehenden Punkte B_1 dauernd dieselbe, so daß man die gleiche Bewegung von C auch erhielte, wenn man durch eine Kuppelstange CB_1 das Rollenmittel C mit dem Nockenpunkte B_1 verbinden und dafür die unrunde Scheibe

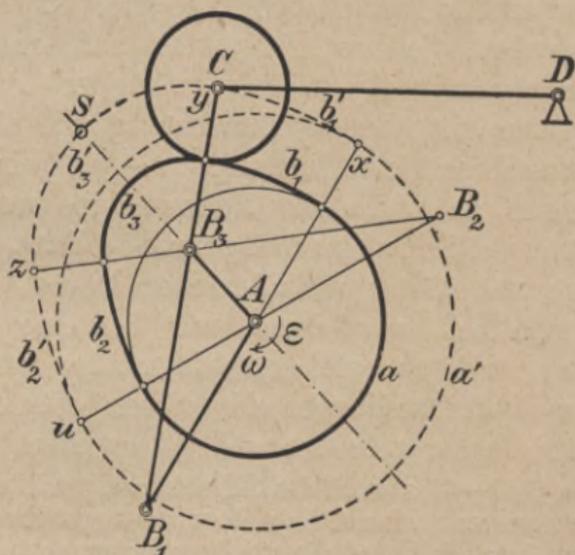


Fig. 51.

ganz fortlassen würde, d. h. wir können den Nocken im Intervall $x - y$ im Falle I durch das Schubkurbelgetriebe AB_1C (Fig. 50), im Falle II durch das Gelenkviereck AB_1CD (Fig. 51) ersetzen.

Im Intervall $y - x$ bleibt die Entfernung CB_3 dauernd die gleiche; an Stelle des Nockens kann somit das Schubkurbelgetriebe AB_3C (Fig. 50) bzw. das Gelenkviereck AB_3CD (Fig. 51) treten.

Im Intervall $x - u$ endlich ändert sich der Abstand zwischen C und B_2 nicht, sondern behält ständig den Wert $B_2 x$; also kann man hier den Nocken durch das Schubkurbelgetriebe AB_2C (Fig. 50) bzw. das Gelenkviereck AB_2CD (Fig. 51) ersetzen, wobei in beiden Fällen die Schubstange B_2C die Länge $B_2 x$ hat.

Besteht das Profil des Nockens nicht aus Kreisen, sondern aus anderen Kurven mit veränderlicher Krümmung, so kann man sich dasselbe gleichwohl als aus einer großen Anzahl kurzer Kreisbögen zusammengesetzt denken, die ihre Mittelpunkte auf der Evolute (Krümmungsmittelpunktskurve) der Profilkurve haben. Dann gilt dieselbe Betrachtung wie oben, aber nur für unendlich kleine Intervalle $x - y$. Wir erhalten infolgedessen an Stelle des Nockens eine unendlich große Anzahl Schubkurbelgetriebe bzw. Gelenkvierecke mit stetig veränderlicher Kurbel AB und Schubstange BC , von denen wir für eine Reihe in gewissen (praktisch gleichen) Intervallen aufeinander folgender Nockenstellungen die diesen entsprechenden Ersatzgetriebe herausgreifen und untersuchen.

Da in § 41—47 sowohl das Schubkurbelgetriebe wie auch das Gelenkviereck hinsichtlich ihrer Bewegungsverhältnisse eingehend behandelt und die zu ihrer Untersuchung nötigen graphischen Verfahren angegeben und begründet sind, so erübrigt es sich, hier nochmals darauf einzugehen.

Besteht das Profil einer unrunder Scheibe zum Teil aus geradlinigen Stücken, so kann man den Nocken nicht mehr durch ein Schubkurbelgetriebe oder Gelenkviereck ersetzen. Wie man aus Fig. 52 und 53 vielmehr erkennt, erhält man in diesem Falle das Getriebe einer rotierenden Kurbelschleife, die mit der bekannten Winkelgeschwindigkeit ω bzw. Winkelbeschleunigung ε der Steuerwelle A rotiert, während das Gleitstück C

gezwungen wird, sich entweder auf der Geraden ss oder auf dem Kreise um B zu bewegen. Wir erhalten also

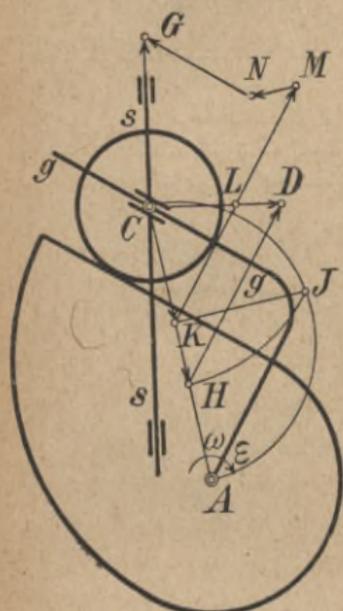


Fig. 52.

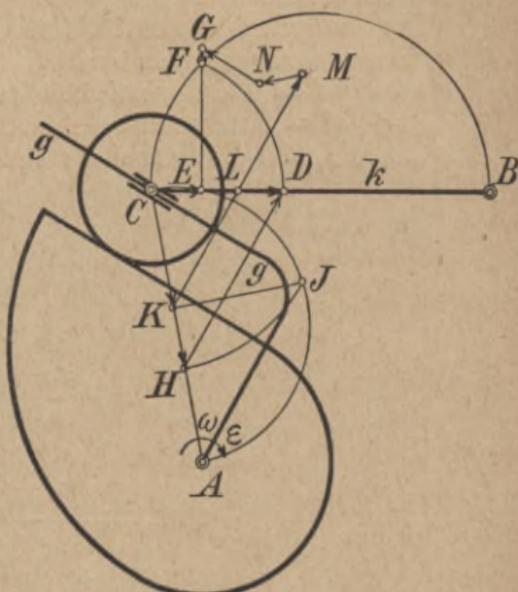


Fig. 53.

die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung von C , indem wir in der in § 48—51 angegebenen Weise verfahren.

§ 58. Beispiel.

Es sei nur auf Fig. 54 aufmerksam gemacht, in der für den dort gezeichneten Nocken einer Hochofengebläsemaschine, dessen Maße weiter unten angegeben werden, die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktion für die Lage y des Punktes C eingezeichnet sind; und zwar sind die ausgezogenen Linien die Konstruktionslinien für das Kurbelgetriebe AB_1CD , die punktierten diejenigen für das Kurbelgetriebe AB_3CD . Da dieselben Buchstaben gewählt sind wie früher beim Gelenkviereck, so wird es leicht sein, durch Vergleich mit Fig. 39 die Konstruktion zu verfolgen und die einzelnen Linien zu deuten. Es sei noch bemerkt,

daß die nur für das Getriebe AB_1CD in Frage kommenden Buchstaben mit dem Index 1, die nur für AB_3CD gebrauchten mit dem Index 3 versehen sind, während die für beide Getriebe gemeinsamen keinen Index tragen.

Die hauptsächlichsten Vektoren im Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsplan sind

$FA = l\omega' =$ Geschwindigkeit des Punktes C ,

$MN = l\varepsilon' =$ Tangentialbeschleunigung des Punktes C ;

Aus ihnen sind damit auch das gesuchte ω' und ε' bekannt.

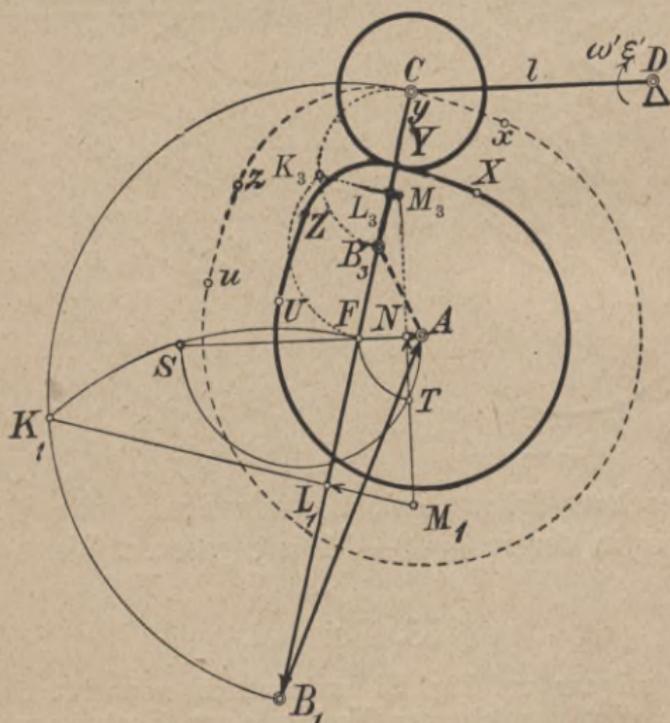


Fig. 54.

In Fig. 55 sind Weg s , Geschwindigkeit $v = l\omega'$ und Tangentialbeschleunigung $p_t = l\varepsilon'$ über dem der Zeit proportionalen Kurbelwinkel als Abszisse aufgetragen. Man erkennt, daß in den Punkten x, y, z, u in bezug auf den Verlauf der Beschleunigungen Unstetigkeiten auftreten, indem nämlich in x die Beschleunigung plötzlich vom Werte 0 auf einen verhältnismäßig großen positiven Wert, in y von

einem positiven auf einen negativen, in z umgekehrt von einem negativen auf einen positiven Wert springt, bis sie schließlich in u von einem positiven auf den Wert 0 plötzlich zurücksinkt. In der Geschwindigkeitskurve macht sich naturgemäß diese Unstetigkeit in einem plötzlichen Wechsel der Tangentenrichtung, in der Wegkurve in einem

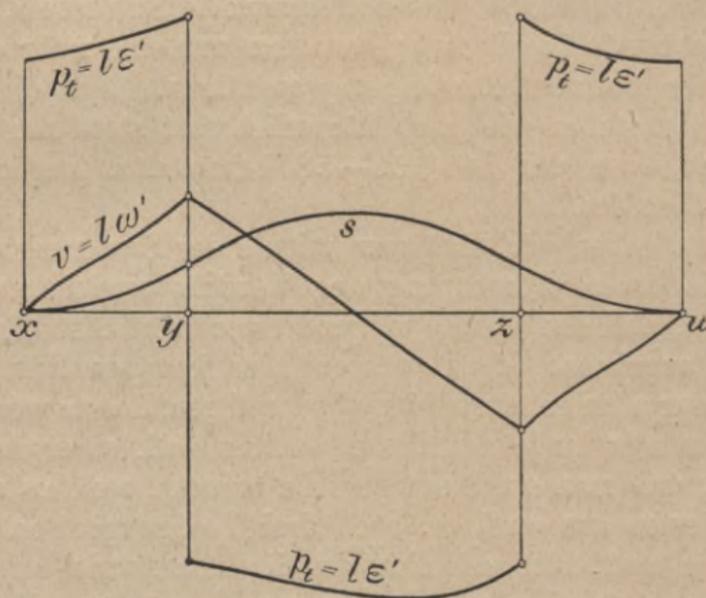


Fig. 55.

freilich dem Auge nicht so auffallenden plötzlichen Wechsel der Krümmung bemerkbar.

Für die Berechnung der Ventildfedern kommt in der Hauptsache nur die größte negative Beschleunigung (zwischen y und z) in Frage.

Die wirklichen Maße des Nockens (Fig. 54) waren die folgenden:

Radius der unrunnen Scheibe	$AX = 150$ mm
„ „ Rolle	$CY = 75$ „
Krümmungsradius	$B_1Y = 535$ „
	$AB_3 = 98$ „
	$CD = l = 250$ „
	$\sphericalangle XAU = 99$ „

§ 59. Schwingdaumensteuerungen. Analyse des Getriebes.

Bei einer großen Anzahl moderner Ventilsteuerungen für Dampf und Gasmaschinen verwendet man sogenannte Schwingdaumen, das sind unrunde Scheiben, die keine beständige Drehung, sondern nur eine mehr oder minder kurze Schwingung ausführen. Aus diesem Grunde stellen sie auch körperlich fast stets nur ein Stück einer der in § 56—58 behandelten unrunder Scheiben dar.

Bedenken wir, daß man mittels der Steuerung eine periodische Bewegung des Ventils erreichen will, derart, daß das Ventil während einer möglichst kurzen Zeit angehoben, dann während der knappen Zeit der Füllung offen gehalten, hierauf schnell geschlossen werden und relativ lange geschlossen bleiben soll, so ergibt es sich, daß man ein Steuergetriebe braucht, welches zum mindesten aus zwei ev. auch drei Teilgetrieben bestehen muß, falls man nicht den direkten Antrieb mittels unrunder Scheiben von der Steuerwelle wählen will wie im vorigen Kapitel.

Von den Teilgetrieben hat

Getriebe I aus der kontinuierlichen Drehung der Steuerwelle eine beständige Schwingbewegung des Schwinghebels zu erzeugen;

Getriebe II muß aus dieser beständigen Schwingbewegung eine periodisch durch längere Ruhepausen unterbrochene Schwingbewegung entweder des Ventils direkt oder erst eines Zwischenhebels ableiten. Im letzteren Falle macht es sich nötig, daß auch noch

Getriebe III diese zweite Schwingbewegung auf das Ventil selbst überträgt.

§ 60. Bewegungsverhältnisse.

Was die Bewegungsverhältnisse anlangt, so ist stets die in den meisten Fällen konstante Winkelgeschwindigkeit ω der Steuerwelle A (Fig. 56—61) bekannt. Man hat daraus die Bewegung, d. h. Weg s , Geschwindigkeit v und Beschleunigung p eines Punktes der Ventilspindel ss zu finden. Dies geschieht, indem man der Reihe nach in den Getrieben I, II, III die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen graphisch ermittelt.

Getriebe I. In allen Fällen wird die Bewegung von der Steuerwelle A durch ein Exzenter, d. i. kinematisch eine kleine Kurbel $AB = r$, mittels einer langen Schubstange $BC = l$ auf den Punkt C übertragen, der, wie aus den Figuren 56, 57, 58, 60, 61 ersichtlich ist, durch einen Hebel CD zu einer Drehung um einen festen Punkt D gezwungen wird. Wir haben somit als erstes Getriebe ein Gelenkviereck $ABCD$, dessen Antriebskurbel mit der bekannten, aus der Tourenzahl n ermittelten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi n}{30}$ rotiert. Wir können daher die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes C finden, wenn wir die in § 41, 42 angegebene

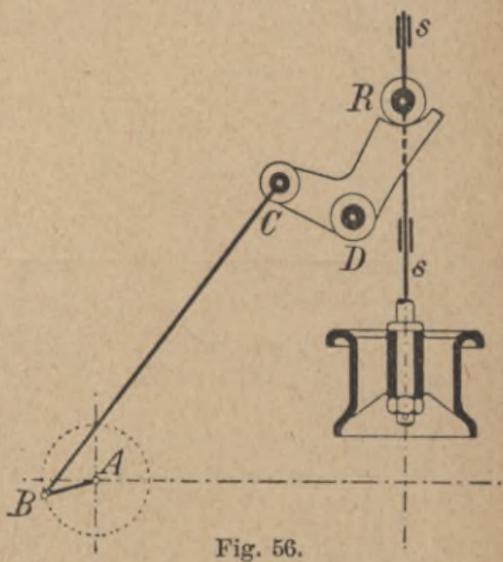


Fig. 56.

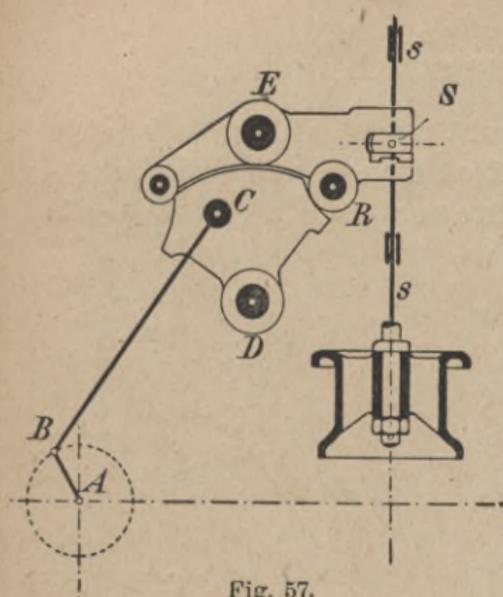


Fig. 57.

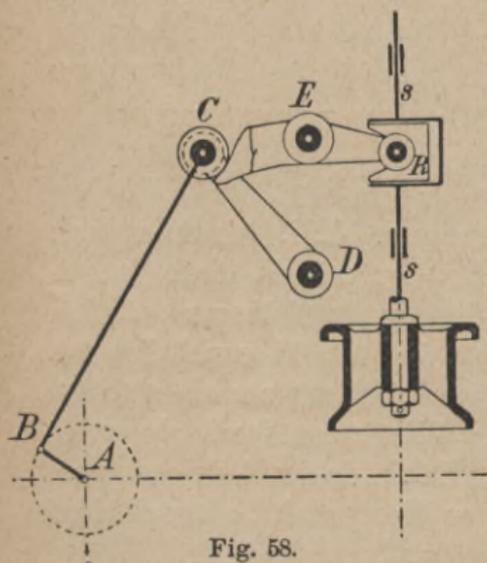


Fig. 58.

Konstruktion anwenden. Da $r : l$ sehr klein ist und meist unter $1 : 20$ liegt, so genügt es praktisch, die Näherungskonstruktion § 43, Fig. 42 zu benutzen, die für den Fall $r : l = 1 : \infty$ absolut genau wäre.

In Fig. 59 beschreibt C eine Äquidistante zu der schwarzen Schubkurve (siehe auch Fig. 62), die aus Kreisbögen und geraden Stücken zusammengesetzt ist. D. h. C bewegt sich auf Kreisbahnen um die Krümmungszentren A_1 bzw. A_2 der Schubkurve (Fig. 62) oder geradlinig längs $b'c'$, so daß wir entweder ebenfalls ein Gelenkviereck $ABCA_1$ bzw. $ABCA_2$ oder ein Schubkurbelgetriebe ABC haben.

Getriebe II. Mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung des

Punktes C ist auch die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung des Schwinghebels CD um D bekannt. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Entweder trägt der Schwinghebel CD die Schubkurve, wie in Fig. 56, 57, 60, 61. Dann haben wir als zweites Getriebe eine unrunde Scheibe, die mit bekannter, aber veränderlicher Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung sich dreht und eine Rolle R entweder (Fig. 56) auf gerader Bahn ss oder (Fig. 57, 60, 61) auf einem Kreisbogen um E bewegt, so so daß wir wieder wie bei den unrunderen Scheiben (§ 57) ein Schubkurbelgetriebe (§ 44, Fig. 43) oder Gelenkviereck (§ 41, Fig. 38), bei geradlinigem Profil der

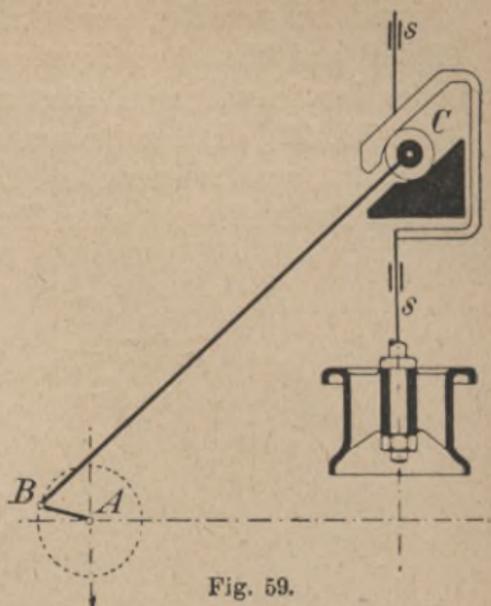


Fig. 59.

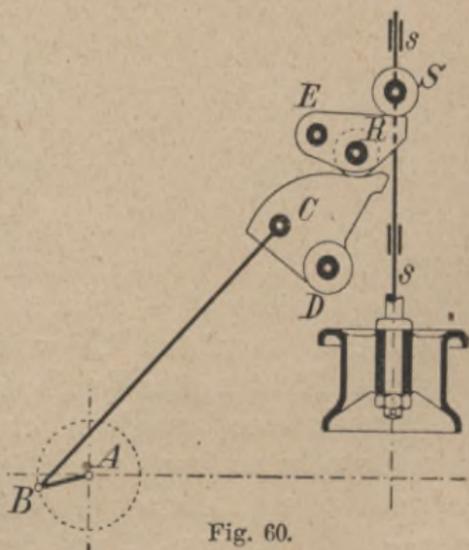


Fig. 60.

Schubkurve eine rotierende Kurbelschleife mit geradlinig bewegtem Punkt C (§ 51, Fig. 46) oder mit kreisförmig bewegtem Punkt C (§ 50, Fig. 44) haben,

- diesmal mit variabler, aber bekannter Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der Antriebskurbel.
2. Oder der Schwinghebel trägt am Ende eine Rolle C (Fig. 58, 59), die ihre Bewegung auf eine Schubkurve überträgt, welche entweder (Fig. 58) sich um einen festen Punkt E dreht oder (Fig. 59) sich längs einer

Geraden ss hin und her bewegen kann.

Wir haben also in Fig. 58 wieder dasselbe Getriebe wie bei einer unrunder Scheibe, nur geht der Antrieb nicht von der unrunder Scheibe, sondern von der Rolle C aus, so daß in Fig. 54 im Gelenkviereck $ABCD$ der Lenker CD zur Antriebskurbel, die Kurbel AB zum Gegenlenker wird. Das

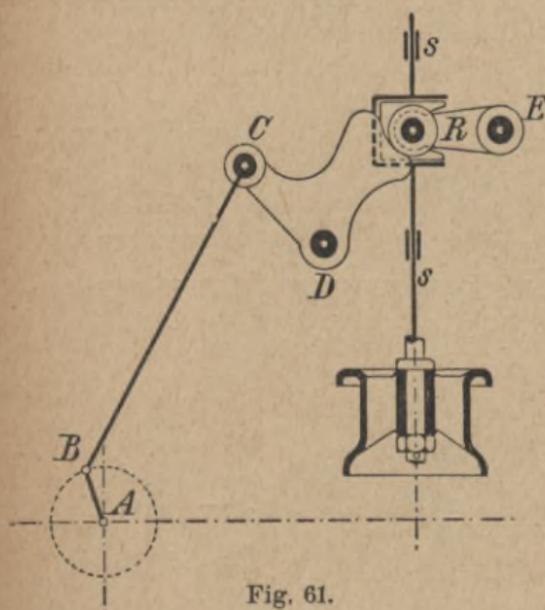


Fig. 61.

Getriebe II in Fig. 58 stellt somit ein Gelenkviereck dar, das entsprechend § 41, Fig. 39 zu untersuchen wäre.

In Fig. 59 kann sich die weiße Schubkurve nur in der geraden Richtung der Ventilspindel bewegen. Dieser Fall erfordert eine besondere Betrachtung. In Fig. 62 ist das Getriebe nochmals vergrößert aufgezeichnet. Die schwarze Kurve besteht aus den beiden Kreisbögen $a - b$ und $c - d$ um A_1 bzw. A_2 und der Geraden $b - c$, tangential an beiden Kreisbögen. Die weiße Schubkurve setzt sich aus den Kreisbögen $\alpha - \beta$ und $\gamma - \delta$ um C_1 und C_2 und ihrer gemeinsamen Tangente $\beta - \gamma$ zusammen.

Der Mittelpunkt C der Rolle bewegt sich relativ zu beiden Profilen auf deren Äquidistanten im Abstand des Rollenradius, nämlich auf $a'b'c'd'$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

Die Rolle ist in der Lage gezeichnet, in der sie das schwarze Profil in b berührt. Das weiße Profil kann

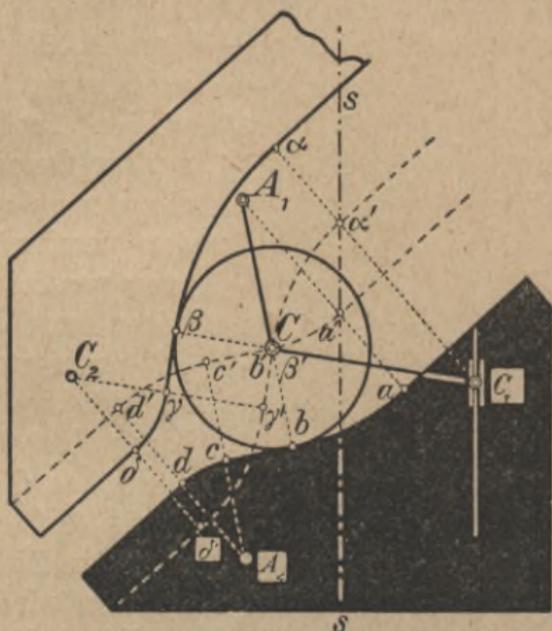


Fig. 62.

nun entweder noch auf dem Kreise $\alpha - \beta$ oder schon auf der Geraden $\beta - \gamma$ berührt werden. In der Zeichnung ist die Zwischenlage β angenommen, die beide Fälle in sich vereinigt. Es ergeben sich damit vier verschiedene Möglichkeiten, die zu ebensoviel verschiedenen Getrieben führen:

- a) C wird als Punkt des Kreises $a'b'$ um A_1 angesehen. Gegenüber dem weißen Profil bewegt sich C auf dem Kreise $\alpha'\beta'$ um C_1 , wobei sich C_1 selber in der Richtung ss der Ventilspindel bewegt. Dann können wir

das Getriebe als ein Schubkurbelgetriebe A_1CC_1 (Fig. 62a) auffassen, dessen Kurbelzapfen C sich mit bekannter, aus Getriebe I ermittelter Geschwindigkeit und Beschleunigung bewegt. Nach § 44, Fig. 43 läßt sich dann auch die Geschwindigkeit und Beschleunigung von C_1 finden.

b) C ist Punkt des Kreises $a' - b'$ um A_1 , bewegt sich

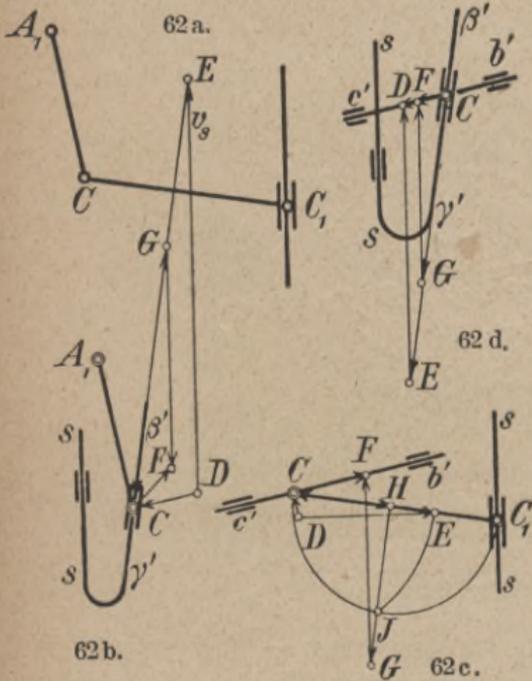


Fig. 62a—62d.

nicht gedreht) $v_B = DC \perp A_1C$ läßt sich zerlegen in die gesuchte Ventilgeschwindigkeit $v_s = DE$ in Richtung ss und die Relativgeschwindigkeit $v_r = EC$ des Punktes C auf der Geraden $\beta'\gamma'$.

Desgleichen kann man die bekannte Beschleunigung $p_c = CF$ des Punktes C , die aus dem Getriebe I nach Größe und Richtung ermittelt worden ist, in die

aber gegenüber dem weißen Profil schon auf der Geraden $\beta'\gamma'$, die ihrerseits sich in der Ventilspindelrichtung verschiebt. Wir haben dann das in Fig. 62b skizzierte Getriebe $A_1C\beta'\gamma'$, wo die antreibende Kurbel A_1C das Gleitstück C so an das Profil $\beta'\gamma'$ drückt, daß dieses in Richtung ss gehoben wird.

Die bekannte Geschwindigkeit von C um A_1 (die Geschwindigkeiten seien hier einmal ausnahmsweise

gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ in Richtung s und die Relativbeschleunigung $p_r = CG$ des Gleitstücks C gegenüber $\beta'\gamma'$ in Richtung $\beta'\gamma'$ zerlegen.

- c) C befindet sich schon auf der Geraden $b'e'$, bewegt sich aber relativ zum weißen Profil noch auf dem Kreise $\alpha'\beta'$, dessen Mittelpunkt C_1 selbst sich in der Richtung ss verschiebt. In diesem Falle können wir an Stelle der Schubkurven das in Fig. 62c angegebene Getriebe $b'e'CC_1$ setzen.

Zeichnen wir wie üblich die Geschwindigkeiten in ihrer um 90° gedrehten Lage, so setzt sich im Geschwindigkeitsdreieck CDE die bekannte Geschwindigkeit $v_c = DC \perp b'e'$ aus der Ventilgeschwindigkeit $DE = v_s \perp ss$ und der Relativgeschwindigkeit $v_r = EC$ des Punktes C um C_1 zusammen.

In gleicher Weise kann man die bekannte Beschleunigung $p_s = CF$ im Beschleunigungsplan $CHGF$ in die gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ in Richtung ss und die Relativbeschleunigung $p_r = CG$ von C um C_1 zerlegen, wobei deren Normalkomponente $p_n = CH$ als der Ausdruck $\frac{(CE)^2}{CC_1}$ in bekannter Weise konstruiert

werden kann, indem über CC_1 der Halbkreis und um C der Kreisbogen mit dem Radius CE in J zum Schnitt gebracht werden und das Lot $JH \perp CC_1$ gefällt wird. Dieses schneidet dann auf der durch F zu ss gezogenen Parallelen die gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ ab.

- d) C bewegt sich auf der Geraden $b'e'$, während er gegenüber dem weißen Profil die Gerade $\beta'\gamma'$ beschreibt, die sich mit der Ventilspindel in der Richtung ss geradlinig verschiebt. Wir haben dann das Getriebe

Fig. 62d. Die bekannte Geschwindigkeit $v_c = CD$ (nicht gedreht) zerfällt in die gesuchte Ventilgeschwindigkeit $v_s = ED$ in Richtung ss und die Relativgeschwindigkeit $v_r = CE$ des Punktes C gegen $\beta'\gamma'$.

Genau so kann man die bekannte Beschleunigung $p_c = CF$ in die gesuchte Ventilbeschleunigung $p_s = GF$ in Richtung ss und die Relativbeschleunigung $p_r = CG$ von C gegen $\beta'\gamma'$ zerlegen.

Ganz dieselben Betrachtungen hat man für diejenigen Lagen anzustellen, in denen die Rolle die Profile auf den Strecken bc und $\gamma\delta$ oder cd und $\beta\gamma$ oder cd und $\gamma\delta$ gleichzeitig berührt. Man kommt dann auf dieselben Getriebe wie unter a), b), c) erörtert und in Fig. 62 a), b), c) skizziert. Natürlich erhält man andere Abmessungen der Getriebe als vorher.

Getriebe III. In Fig. 57, 58, 60, 61 haben wir mit der Geschwindigkeit v_R und Beschleunigung p_R des Punktes R noch nicht die der Ventilspindel selbst gefunden.

In Fig. 58 und 61 haben wir v_R in die gesuchte Ventilgeschwindigkeit v_s in Richtung ss und die Relativgeschwindigkeit von R gegen die Ventilspindel, nämlich $v_r \perp ss$ zu zerlegen. Nur in der Mittellage $ER \perp ss$ wäre $v_R = v_s$. Doch sind die Ventilhübe gegenüber ER meist so klein, daß die Abweichung der Richtung ER von der zur Spindel ss senkrechten Lage vernachlässigt und die Geschwindigkeit v_R an Stelle der Ventilgeschwindigkeit v_s gesetzt werden kann.

Desgleichen wäre eine Zerlegung der Beschleunigung von p_R in Richtung ss und senkrecht dazu auszuführen. Auch hier bleibt man in der Regel innerhalb guter Genauigkeit, wenn man die Tangentialbeschleunigung von p_R an Stelle der Ventilbeschleunigung p_s setzt.

In Fig. 57 hat man zunächst aus v_R und p_R die Geschwindigkeit v_S und Beschleunigung p_S des Punktes S vom Rollenhebel ER zu ermitteln, indem man v_R bzw. p_R im Verhältnis $ES:ER$ vergrößert. Dann kann man analog dem eben für Fig. 58 und 61 Gesagten v_S für die Ventilgeschwindigkeit v_s und die Tangentialkomponente von p_S für die Ventilbeschleunigung p_s setzen.

In Fig. 60 haben wir ein anderes Getriebe. Man erkennt, daß der Hebel ER als eine unrunde Scheibe mit geradem Profil angesehen werden kann, welche die Rolle S in Richtung der Ventilspindel ss geradlinig bewegt. Daher stellt das Getriebe ERS wie bei den unrunder Scheiben eine rotierende Kurbelschleife dar, bei welcher das Gleitstück sich auf einer Geraden verschiebt, während sich die Kurbelschleife mit einer aus v_R und p_R bekannten Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung um E dreht. Wir haben damit das in § 51, Fig. 46 behandelte Getriebe und können in der dort besprochenen Weise die Geschwindigkeit und Beschleunigung von S finden.

§ 61. Beispiel.

Als Beispiel ist in Fig. 63 und 64 die Untersuchung einer Pröllsteuerung älterer Art (Fig. 58) angegeben. Fig. 63 zeigt oben den Schwinghebel, dessen Profil aus den beiden Kreisbögen ab um A_1 und cd um A_2 , sowie aus der Geraden bc tangential an diese Kreise zusammengesetzt ist. Die entsprechenden Punkte der Äquidistante durch C zu $abcd$ sind $a'b'c'd'$. Die zu diesen Punkten gehörigen Lagen $a''b''c''d''$ des Rollenmittels C liegen auf Kreisen durch $a'b'c'd'$ um E und außerdem auf dem Kreise durch C um D .

Der Exzenterkreis e (= Kurbelkreis der Kurbel AB in Fig. 58) ist an den Punkt D verlegt. Die Kurbelstellungen α' und α'' bei „Anheben“ und „Aufsetzen“ des Ventils liegen symmetrisch zur mittleren Exzenterstangenrichtung mm , die aus den Maschinenabmessungen bekannt

ist. Der Winkel $\alpha'D\alpha''$ ist die Summe der Kurbelwinkel, die zu den im Beispiel als $4,4\%$ und $35,9\%$ (für Kurbelseite) angenommenen Kolbenwegen gehören. Die zu $b''c''d''$ gehörigen Stellungen $\beta'\gamma'\delta'\gamma''\beta''$ findet man, wenn man den

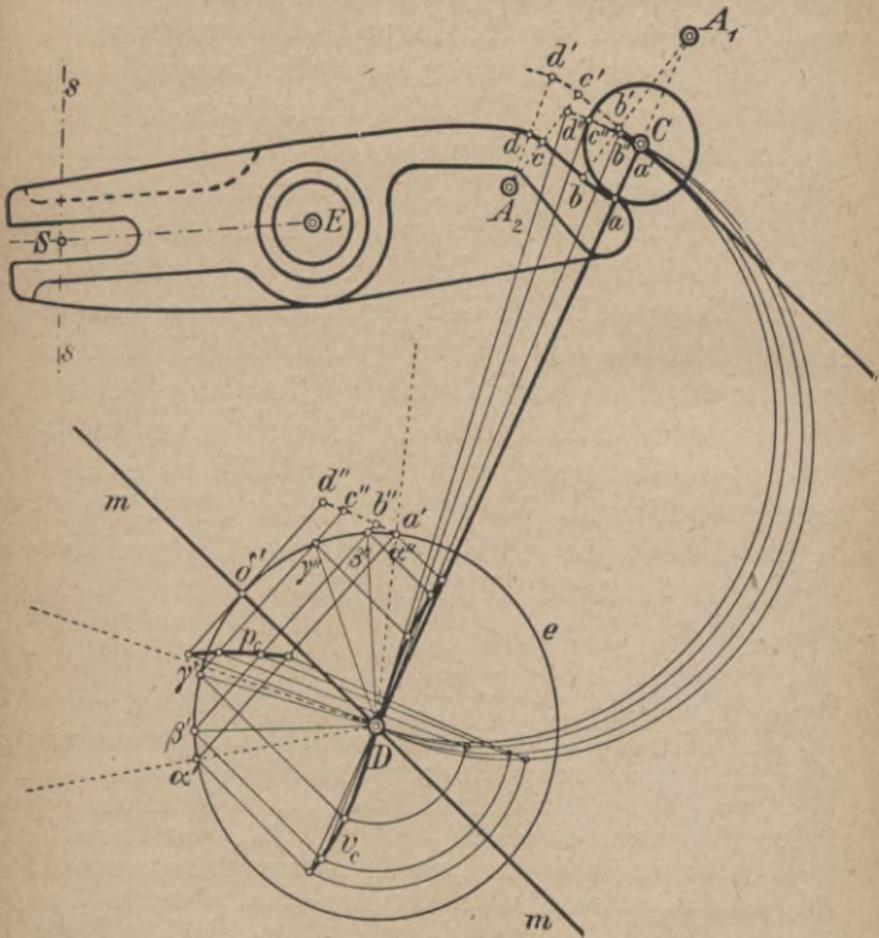


Fig. 63.

Kreisbogen $a'b'c'd''$ parallel zu sich selbst nach dem Punkte α'' verlegt und von $b''c''d''$ aus lotrecht zu $m m$ den Exzenterkreis e anschneidet.

Die in Fig. 63 von D aus nach den Kurven v_c bzw. p_c gezogenen Strahlen geben die Geschwindigkeiten bzw.

Beschleunigungen des Rollenmittels C an, die unter Voraussetzung konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ für die Steuerwelle und unter Vernachlässigung der endlichen Exzenterstangenlänge in der in § 43, Fig. 42 angegebenen Weise gefunden wurden. Hiervon sind v_c und die Tangentialkomponente p_t von p_c in Fig. 64 über der Zeit aufge-

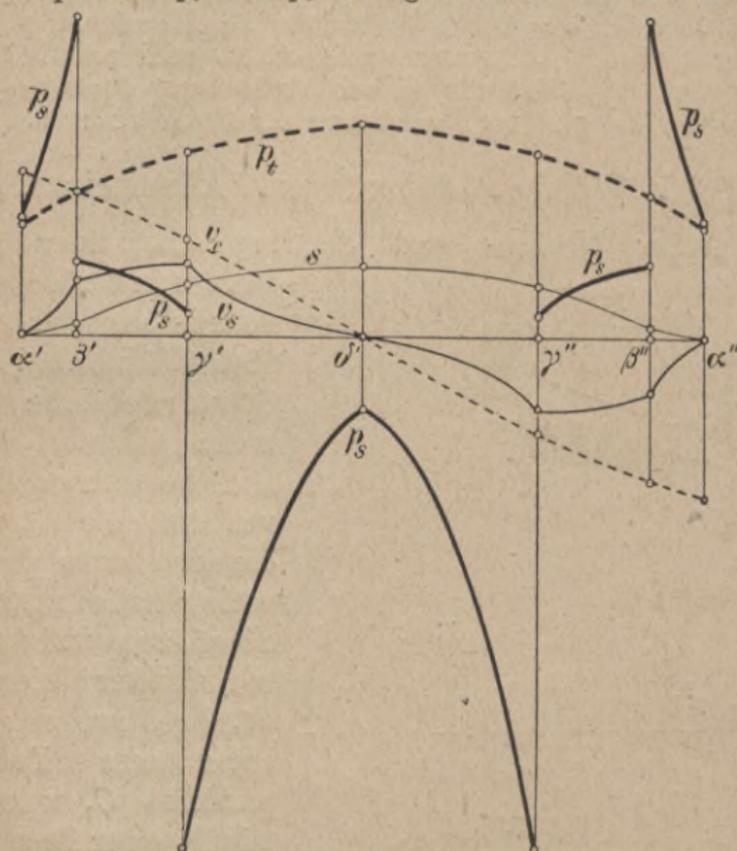


Fig. 64.

getragen, die den Wegen des Kurbelzapfens auf dem Exzenterkreis proportional ist.

In der weiter oben erörterten Weise (§ 50) ist aus v_c und p_c mittels der für das Getriebe DCE zu benutzenden Konstruktionen der Weg s , die Geschwindigkeit v_s und die Tangentialbeschleunigung p_s des Punktes S vom Hebel ES ermittelt und im Diagramm Fig. 64 aufgezeichnet worden.

Ähnlich dem bei den unrundern Scheiben erhaltenen Resultat erkennt man, daß die Punkte $abcd$ Unstetigkeitspunkte des Getriebes sind, in welchen sich die Beschleunigungen p_s sprunghaft ändern.

Zur Berechnung der Ventilder Feder ist die Beschleunigung p_s für die Zeitpunkte γ' bzw. γ'' zugrunde zu legen. Ist man über den ungefähren Verlauf der Beschleunigung p_s bei einer ähnlichen Steuerung orientiert, so wird praktisch in den meisten Fällen die genaue Aufsuchung derselben im Punkte γ' oder γ'' zur Berechnung der Feder genügen.

§ 62. Wälzhebelsteuerungen. ¹⁾ Allgemeines.¹⁾

Außer Nocken- und Schwingdaumensteuerungen

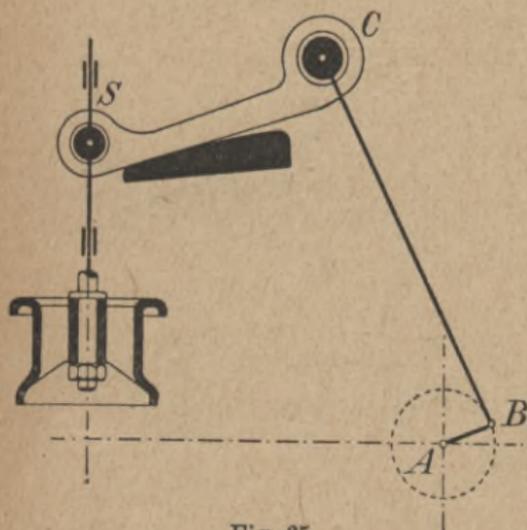


Fig. 65.

werden in der Technik noch in ausgedehntem Maße Wälzhebel als Steuergetriebe benutzt. Es sind dies nach bestimmten Kurven geformte Körper, die sich stets paarweise aufeinander abwälzen und dabei in geeigneter Weise die ständige Bewegung des sogenannten Treibpunktes C , welcher mittels einer längeren Exzenterstange an den Kurbelzapfen B einer Exzenterkurbel AB angeschlossen ist, auf einen Punkt S der Ventilspindel, den sogenannten Hubpunkt, übertragen.

In den Figuren 65—68 sind einige typische Fälle solcher Steuerungen schematisch wiedergegeben.

¹⁾ Siehe auch H. Holzer, Wälzhebel, Z. 1908.

Man unterscheidet nun zwei wesentlich verschiedene Anordnungen, nämlich:

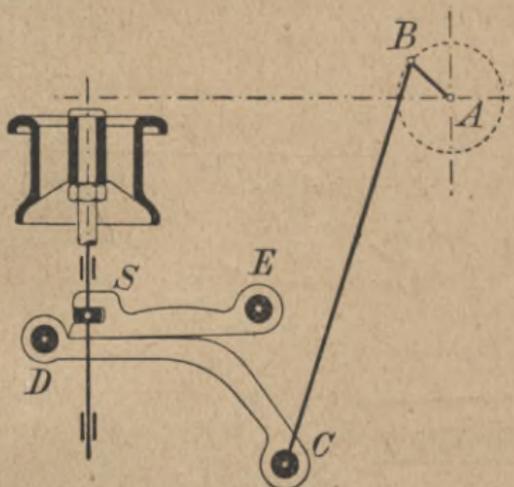


Fig. 66.

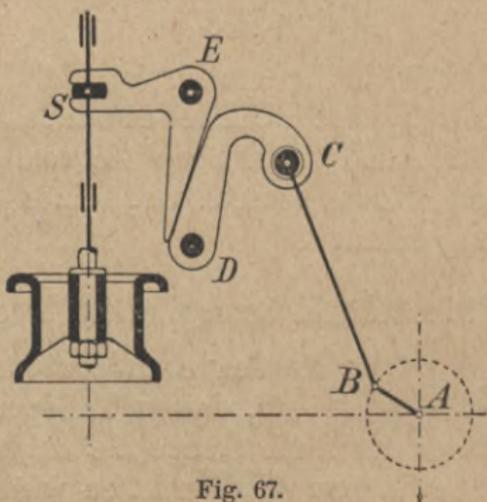


Fig. 67.

I. Wälzhebel mit beweglichem Drehpunkt (Fig. 65 und 68), bei denen der Drehpunkt mit dem Hubpunkt *S* identisch ist und sich auf der Ventilspindelachse

verschiebt. Bei diesen ist die eine Wälzkurve (in den Figuren die schwarze) fest und unbeweglich mit dem Gestell verbunden.

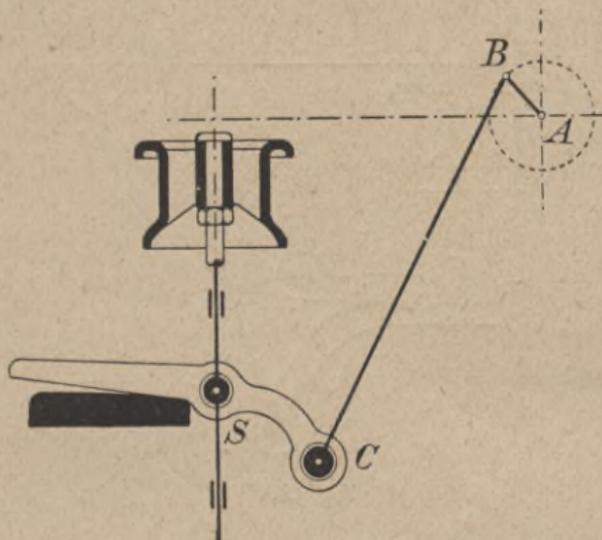


Fig. 68.

II. Wälzhebel mit festem Drehpunkt (Fig. 66 und 67), bei denen sich beide Wälzhebel um feste Punkte D und E drehen und der Hubpunkt S vom getriebenen Wälzhebel unter Zwischenschaltung eines Gleitstücks seine Bewegung erhält.

§ 63. Wälzhebel mit beweglichem Drehpunkt.

In Fig. 69 sei π die feste „Wälzbahn“, p der bewegliche „Wälzhebel“, dessen Treibpunkt C vom Exzenter AB aus durch die Stange BC angetrieben und in ständiger Schwingbewegung erhalten wird. Im Hubpunkt S ist p mit der Ventilspindel ss gelenkig verbunden. E sei der momentane Berührungspunkt der Wälzkurven, Ω und O ihre Krümmungszentren für den Punkt E .

Ebenso wie mittels der Schwingdaumensteuerungen wünscht man mittels der Wälzhebelgetriebe aus einer ununterbrochenen Schwingbewegung des Treibpunktes C eine periodisch durch längere Ruhepausen unterbrochene Schwingungsbewegung des Ventils abzuleiten. Diese Aufgabe könnte durch unendlich viele verschiedene Wälzkurvenpaare gelöst werden. Die Auswahl unter dieser Fülle von Möglichkeiten wird durch folgende drei hauptsächlichsten Anforderungen beschränkt, die im Interesse ruhigen Ganges und geringer Abnutzung des Triebwerkes eine ideale Wälzhebelsteuerung erfüllen mußte:

1. Die im Hubpunkt S auf die Ventilspindel ausgeübte Kraft soll möglichst keine zu ihr senkrechte Komponente haben, um die Spindelführung nicht zu belasten.
2. Um die Abnutzung der Kurven auf einen Mindestwert zu beschränken, soll zwischen den Hebeln reines Rollen ohne Gleiten stattfinden.
3. Um Stoßwirkungen, sogenanntes „Klatschen“, zwischen den Wälzkurven zu vermeiden, muß ein Aufeinandertreffen der Wälzkurven mit endlicher Geschwindigkeitsdifferenz verhindert werden.

Wie wir sehen werden, ist es unmöglich, allen diesen Anforderungen gleichzeitig vollkommen zu genügen. Die für ihre Erfüllung maßgebenden Gesichtspunkte mögen jedoch im folgenden betrachtet werden.

Zu 1: Die auf p wirkenden Kräfte sind die in C in Richtung der Exzenterstange CB wirkende Zugkraft dieser Stange, die in E senkrecht zu den Wälzkurven stehende Stützkraft, die also in die Richtung EO fällt, und schließlich der im Gelenk S auftretende Zapfendruck in vorläufig noch unbekannter Richtung.

Da diese drei Kräfte ständig im Gleichgewicht sein müssen, so müssen sie sich in einem Punkte schneiden. Die Richtung des Zapfendrucks in S wird also gefunden, indem man S mit dem Schnittpunkt D der Exzenterstange BC und der Stütznormalen EO verbindet. Soll der Zapfendruck in S keine Komponente senkrecht zur

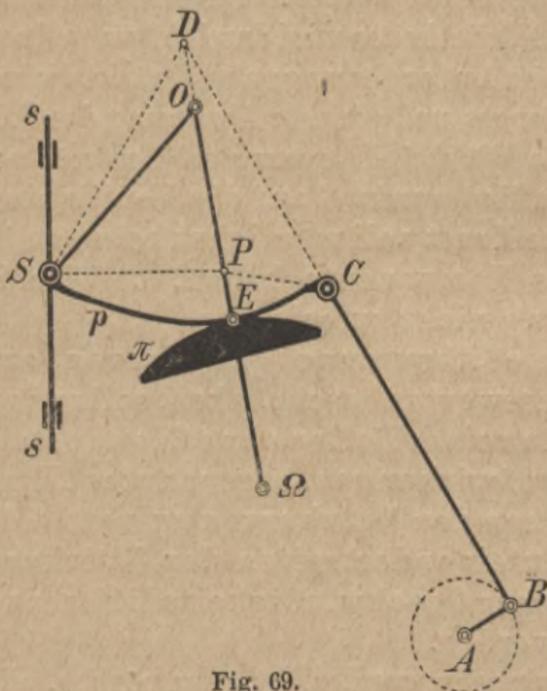


Fig. 69.

Ventilspindel haben, so muß ständig D auf die Spindel ss fallen.

Zu 2: Die Bewegung des Wälzhebels p ist durch die Bahn ss seines Punktes S und durch die Hüllkurve π seiner Kurve p festgelegt. Nach § 8 und § 11 ergibt sich daher der Momentanpol P als Schnitt der in S auf ss errichteten Senkrechten und der Berührungsnormalen in E . Soll augenblicklich zwischen den Kurven p und

π reines Rollen stattfinden, so muß der Momentanpol P in den Berührungspunkt E fallen. Soll diese Bedingung ständig erfüllt sein, so muß p die bewegliche, π die ruhende Polkurve sein, oder auch es muß beständig $ES \perp ss$ stehen.

Zu 3: Die Ebene p dreht sich momentan um P . Daher sind die Geschwindigkeiten vom Treibpunkt C und Hubpunkt S ihren Polstrahlen CP und SP proportional und das Verhältnis $SP:CP$ ist das Übersetzungsverhältnis. Im Augenblick vor dem Hubbeginn hat C eine endliche Geschwindigkeit, S die Geschwindigkeit Null. Damit die Bewegung von S mit unendlich kleiner Geschwindigkeit, einer endlichen Beschleunigung entsprechend, beginnen kann, wie durch Bedingung 3 vorgeschrieben wird, muß beim Hubbeginn dieses Übersetzungsverhältnis $= 0$ sein, d. h. S muß der Pol sein oder die Berührungsnormale EP muß durch S gehen.

Um zu brauchbaren Wälzkurven zu kommen, möge zunächst aus der Anfangslage S_0 und C_0 des Hub- und Treibpunktes die Anfangslage E_0 des Berührungspunktes E und seine Anfangsberührungsnormale E_0P_0 auf Grund obiger Anforderungen ermittelt werden.

Bedingung 1, 2 und 3 sind im Anfangshubpunkt S_0 erfüllt; wenn E_0 mit P_0 zusammenfällt, $P_0S_0 = 0$ wird, also auch E_0 mit S_0 zusammenfällt und die Berührungsnormale E_0O_0 in die Ventilspindelachse ss zu liegen kommt. Diese Anordnung hat aber den großen praktischen Nachteil, daß im Moment des Niedersetzens des Ventils der Hubpunkt S_0 ein Punkt der festen Wälzbahn und gleichzeitig der nunmehr in Ruhe bleibende Drehpunkt des Wälzhebels ist, so daß sich Wälzhebel und Wälzbahn von nun an ständig in S_0 berühren, also

während der Ruhelage des Ventils nicht wieder auseinander treten können. Bei der geringsten Ungenauigkeit der Einstellung kann daher das Ventil nicht auf seinen Sitz gelangen und völlig dichten, ein Zustand, der unbedingt vermieden werden muß und nur dadurch vermieden werden kann, wenn man E_0 und S_0 nicht zusammenfallen läßt, d. h. wenn man für den Anfangshubpunkt die Forderung fallen läßt, daß Bedingung 2 und 3 gleichzeitig erfüllt sein sollen.

Damit erhalten wir die beiden praktisch ausführbaren Fälle:

- a) Bedingung 1 und 2 sind erfüllt, wenn $E_0 S_0 \perp ss$ und $E_0 O_0$ mit $C_0 B_0$ sich in D_0 auf ss schneiden. Wir haben dann entlastete Ventilspindel, reines Rollen, aber endliche Anfangsübersetzung, also Stoß, der um so geringer und ungefährlicher wird, je weiter E_0 nach ss zu liegt. Dieser Fall wird praktisch häufig ausgeführt.
- b) Bedingung 1 und 3 sind erfüllt, wenn E_0 auf ss liegt und $E_0 O_0$ in ss hineinfällt. Wir haben dann entlastete Ventilspindel, stoßfreien Anhub, aber an Stelle des Rollens reines Gleiten, das um so weniger störend wirkt, je näher E_0 bei S_0 liegt. Konstruktiv hat man die Unbequemlichkeit, die Wälzkurven in der Nähe der Ventilspindel gabeln zu müssen, um die Spindel hindurchzulassen. Dieser Fall wird praktisch ebenfalls ausgeführt, wenn auch nicht so häufig wie der vorige.

Nachdem der Anfangsberührungspunkt E_0 festgelegt ist, sind die Kurven der Wälzhebel so zu bestimmen, daß sie die drei obengenannten Bedingungen ganz oder annähernd erfüllen, daß aber auch noch außerdem ein brauchbares Ventilerhebungsdiagramm zustande

kommt. Zu diesem Zwecke kann die Methode von Holzer (Z. 1908, S. 2043) empfohlen werden, die aber hier nicht wiedergegeben werden soll.

Es mag dagegen im folgenden die Aufgabe gelöst werden, für zwei gegebene Wälzhebel p und π (Fig. 69) die Bewegungsverhältnisse des Hubpunktes S zu ermitteln, wenn die Steuerwelle A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Hierfür ist es nötig, die Krümmungsmittelpunkte O und Ω der Wälzkurven zu kennen.

Für eine unendlich kleine Bewegung des Hebels p lassen sich die Kurven p und π durch ihre Krümmungskreise um O und Ω ersetzen. Man kann dann die Bewegung von p als die Zusammensetzung einer momentanen Drehung des Punktes O um den Punkt Ω mit der Geschwindigkeit v_0 mit einer gleichzeitigen Drehung von p um O ansehen. Es läßt sich also an Stelle der beiden Wälzhebel ein Schubkurbelgetriebe ΩOS setzen, in dem ΩO die Antriebskurbel, OS d. h. p die Schubstange, S der Kreuzkopf ist.

Da C ein Punkt von p , in unserm Getriebe ΩOS also ein Punkt der Schubstange OS ist, so haben wir den bisher noch nicht gehabtten Fall, daß die Bewegung der Antriebskurbel AB auf einen beliebigen Punkt C der Schubstange OS anstatt auf einen Punkt der Kurbel ΩO übertragen wird.

Für die Ermittlung der Geschwindigkeiten (Fig. 70) treten keine weiteren Komplikationen auf, da man den Pol P als momentanen Drehpunkt der Schubstange OS , also PC als den Gegenlenker in einem Gelenkviereck $ABCP$ ansehen und damit die Geschwindigkeit $v_c = CF$ des Punktes C in gewohnter Weise konstruieren kann. Stellt BA die Geschwindigkeit des Punktes B dar, so zieht

man durch A die Parallele zu BC bis zum Schnitt F mit CP . Die Geschwindigkeit $v_s = SH$ von S ist das $SP : CP$ -fache der von C , wird also gefunden, indem man $FH \parallel CS$ bis zum Schnitt H mit SP zieht oder, wenn so spitze Schnitte eintreten wie in Fig. 70, lieber $FG \parallel CO$ und $GH \parallel OS$ legt.

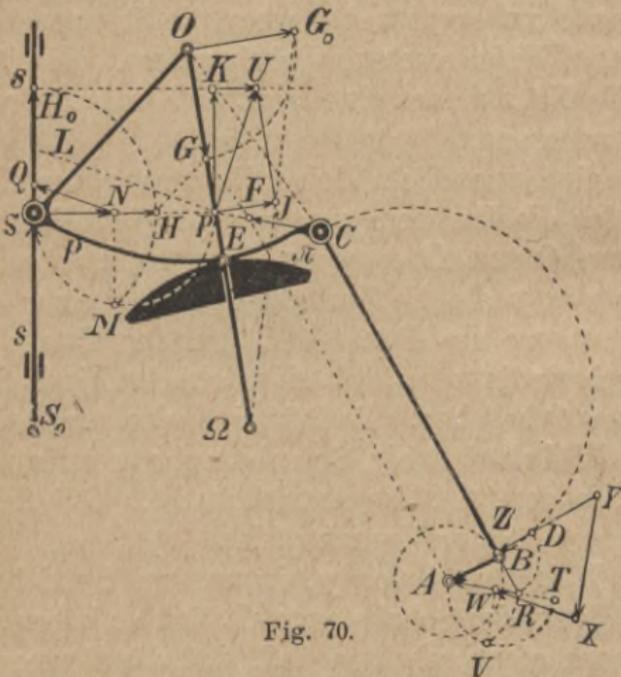


Fig. 70.

Was die Beschleunigungen anlangt, so ist zu beachten, daß der Geschwindigkeitspol P selbst eine Beschleunigung p_0 hat (siehe § 14), so daß die Beschleunigung irgendeines andern Punktes der Stange SO , beispielsweise des Punktes C , sich aus p_0 und der Beschleunigung zusammensetzt, die C infolge der Momentandrehung um P hat. Letztere Beschleunigung besteht aus

der Normalbeschleunigung $\overline{CP} \cdot \omega^2$, in Richtung des Polstrahls CP , und

der Tangentialbeschleunigung $\overline{CP} \cdot \varepsilon$, senkrecht auf CP stehend,

wenn unter ω bzw. ε die Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung der Momentandrehung um P verstanden wird.

Um die Richtung der Polbeschleunigung p_0 zu finden, bedenke man, daß die Geschwindigkeiten v_s und v_o der Punkte S und O , ebenso die Krümmungszentren ihrer Bahnen — das von S liegt unendlich fern, das von O ist Ω — bekannt sind. Nach der in § 16 angegebenen Weise findet man die Polwechselgeschwindigkeit u , indem man die Endpunkte H_0 bzw. G_0 der nicht gedrehten Geschwindigkeiten von S und O ($SH_0 = SH$, $OG_0 = OG$) mit den entsprechenden Krümmungszentren verbindet, d. h. $H_0K \parallel SP$ und $G_0\Omega$ bis zu den Schnittpunkten K und J der durch P zu SH_0 bzw. OG_0 gelegten Parallelen zieht. Die in K auf PK und in J auf PJ errichteten Senkrechten schneiden sich im Punkte U und $PU = u$ ist die gesuchte Polwechselgeschwindigkeit. Die dazu senkrechte Gerade PL ist die Richtung der Polbeschleunigung p_0 .

Die Größe der Polbeschleunigung p_0 findet man, wenn man den Beschleunigungsplan für den Punkt S aufzeichnet. Bekannt ist von vornherein die Richtung $s s$ der Gesamtbeschleunigung p_s von S , die Richtungen der drei Komponenten $p_0 \parallel PL$, $\overline{PS} \cdot \omega^2 \parallel PS$ und $\overline{PS} \cdot \varepsilon \perp PS$. Außerdem läßt sich $\overline{PS} \cdot \omega^2$ aus $SH = \overline{PS} \cdot \omega$ und \overline{PS} in bekannter Weise auf Grund der Beziehung

$$\overline{PS} \cdot \omega^2 = \frac{[\overline{PS} \cdot \omega]^2}{\overline{PS}}$$

graphisch ermitteln, indem man über PS den Halbkreis

und um S mit SH einen Kreisbogen schlägt, die sich in M schneiden. Das Lot $MN \perp PS$ schneidet dann auf PS die Normalbeschleunigung $SN = \overline{PS} \cdot \omega^2$ ab. Zieht man $NQ \parallel PL$ bis zum Schnitt Q mit ss , so ist $NQ = p_0$ die gesuchte Polbeschleunigung, da sich andernfalls nach Zufügung der letzten Komponente $\overline{PS} \cdot \varepsilon \parallel ss$ keine Resultierende p_s ergeben könnte, die in die Richtung ss fällt.

Die Normalbeschleunigung $CP \cdot \omega^2$ wird analog dem Obigen aus $CF = \overline{CP} \omega$ und CP konstruiert. Es soll jedoch aus Gründen bequemer Konstruktion diese Ermittlung an den Punkt A verlegt werden. Wir verschieben daher FC parallel sich selbst an den Punkt A in die Lage AR . Dann ist R auch der Schnittpunkt von CB mit der durch A zu CP gelegten Parallelen und es ist $AR = \overline{CP} \omega$. Verlängern wir AR über R bis T , so daß $AT = PC$, schlagen über AT den Halbkreis und um A mit AR einen Kreisbogen, die sich in V schneiden, und fällen dann $VW \perp AR$, so ist $WA = \overline{CP} \cdot \omega^2$ der Größe, der Richtung und dem Sinne nach. Verlegen wir $NQ = p_0$ parallel sich selbst nach dem Punkte W so, daß — auch dem Sinne nach — $XW = NQ$, und ziehen durch X die Senkrechte zu AW , die mit der Tangentialbeschleunigung $\overline{CP} \cdot \varepsilon$ des Punktes C parallel geht, so liegt auf dieser der Anfangspunkt Y der Beschleunigung von C und diese hat die Größe, die Richtung und den Sinn YA . Doch ist Y selbst vorläufig noch unbekannt.

Nun kann man aber die Beschleunigung p_c von C auch finden, wenn man die Momentandrehung der Stange BC um ihren Pol (Winkelgeschwindigkeit ω' , Winkelbeschleunigung ε') durch die Schiebung ihres Punktes B

und gleichzeitige Drehung um B mit der Winkelgeschwindigkeit ω' und der Winkelbeschleunigung ε' ersetzt. Man kommt dann auf die in § 41 für das Gelenkviereck abgeleitete Konstruktion, die hier in folgender Weise durchzuführen wäre:

Man schlage über BC den Halbkreis und um B mit BR einen Kreisbogen, die sich in D schneiden mögen, und fälle das Lot $DZ \perp BC$; dann ist $ZB = \overline{BC} \cdot \omega'^2$ die Normalbeschleunigung, DZ die Richtung der Tangentialbeschleunigung $\overline{BC} \cdot \varepsilon'$ und BA die Beschleunigung des Punktes B , also muß der Anfangspunkt Y der Gesamtbeschleunigung $p_e = YA$ auf ZD liegen, d. h. wir haben einen zweiten geometrischen Ort für Y . Y ist somit der Schnitt von XY und ZY und es ist $YX = \overline{CP} \cdot \varepsilon$.

Vergrößert man YX im Verhältnis $SP : CP$, trägt die so erhaltene Strecke $S_0S = [SP : CP] \cdot YX$ auf ss so an, das S_0S im gleichen Sinne um P dreht, wie YX , so stellt S_0Q die Beschleunigung des Ventilkpunktes S dar; denn es ist dann $S_0S = \overline{SP} \cdot \varepsilon$, $SN = SP \cdot \omega^2$, $NQ = p_0$ nach Größe, Richtung und Sinn.

§ 64. Wälzhebel mit festem Drehpunkt.

In Fig. 71 sei π der treibende, p der getriebene Wälzhebel; beide berühren sich in E und drehen sich um feste Punkte D und F . Im Treibpunkte C wird die Bewegung von der Antriebkurbel AB mittels der Schubstange BC eingeleitet. $ABCD$ stellt dabei ein gewöhnliches Gelenkviereck dar. Im Hubpunkt S wird die Bewegung unter Zwischenschaltung eines Gleitstückes auf die Spindel übertragen.

Diese Anordnung dient dem gleichen Zweck wie die mit beweglichem Drehpunkt. Auch die Anforderungen für betriebssichere Konstruktion bei geringem Verschleiß decken sich im wesentlichen mit denen der Anordnung I

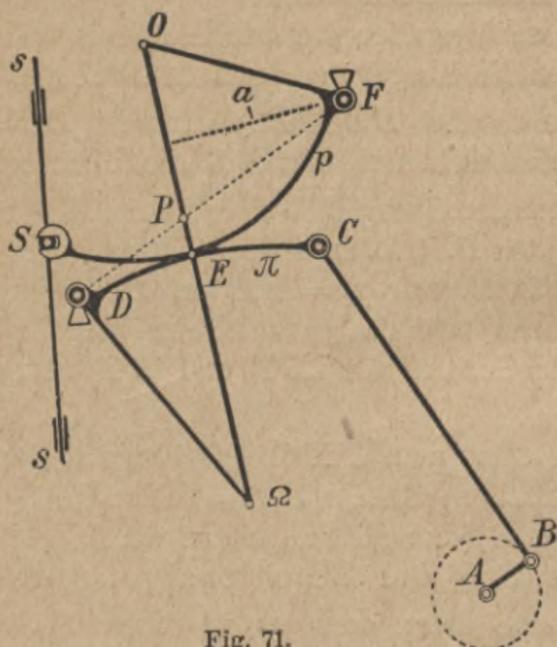


Fig. 71.

und lassen sich hier wie dort durch drei Bedingungen festlegen, nämlich:

1. Die Berührungsnormale EP der Wälzkurven p , π soll vom festen Drehpunkt F einen nicht zu geringen Abstand a haben, damit das zur Öffnung des Ventils erforderliche Drehmoment des getriebenen Hebels p keinen zu großen Normaldruck zwischen den Hebeln bedingt.
2. Die Hebel sollen aufeinander rollen, ohne zu gleiten, um die Abnutzung gering zu halten.

3. Die Anfangsübersetzung soll den Wert Null haben, um Stoßen zu vermeiden.

Zu 1: Bedingung 1 ist im allgemeinen leicht erfüllbar und bedarf keiner weiteren Erklärung.

Zu 2: Die beiden Wälzhebel sind als eine allgemeine Verzahnung aufzufassen, bei welcher F , D die festen Drehpunkte, p und π die Zahnflanken sind. Ihr gegenseitiger Momentanpol P liegt also zugleich auf der „Zentralen“ DF wie auf der Berührungsnormale EP . Sollen die beiden Kurven ständig aufeinander rollen ohne zu gleiten, so muß immer P mit dem Berührungspunkt E zusammenfallen, d. h. E muß ständig auf der Zentralen liegen, oder p und π müssen die beiden Polkurven der Wälzhebel sein. Fällt E mit D zusammen, so tritt nur dann reines Rollen ein, wenn die Wälzkurven in E die Zentrale berühren.

Zu 3: Da der Pol zweier Zahnräder die Zentrale im umgekehrten Übersetzungsverhältnis teilt, so stellt das Verhältnis $PD:PF$ das Übersetzungsverhältnis der Wälzhebel dar. Damit die Anfangsübersetzung Null werde, ist es nötig, daß für die Anhublage P mit D zusammenfällt.

Zunächst möge auf Grund dieser drei Bedingungen die Anfangslage E_0 des Berührungspunktes und die seiner Berührungsnormale festgelegt werden, wenn die festen Drehpunkte D und F gegeben sind.

Bedingung 2 und 3 sind für die Anhublage erfüllt, wenn E_0 auf die Zentrale fällt und die Berührungsnormale E_0P durch D hindurchgeht, d. h.:

a) Entweder fällt E_0 nicht mit D zusammen; dann fällt aber die Berührungsnormale E_0P in die Zentrale, geht also durch den festen Drehpunkt des getriebenen

Hebels, was im schärfsten Widerspruch mit der Bedingung 1 steht. Es tritt ein „Festklemmen“ der Wälzhebel ein. Dieser Fall ist somit praktisch unbrauchbar.

- b) Oder E_0 fällt mit D zusammen; dann geht die Berührungsnormale von selbst durch D . Man hat hierbei nur dann reines Rollen, wenn das Anfangselement der Wälzkurven tangential zur Zentralen, also die Berührungsnormale in E_0 senkrecht zu ihr liegt. Dieser Fall schließt den großen praktischen Nachteil ein, daß nach Schluß des Ventils die beiden Wälzhebel in ständiger Berührung bleiben, daß also bei den geringsten Montageungenauigkeiten ein dauernd sicherer Schluß des Ventils nicht gewährleistet ist. Somit scheidet auch dieser Fall für die praktische Anwendung aus.

Wir müssen uns daher für die Anhublage begnügen, außer der Bedingung 1 nur eine der beiden anderen 2 und 3 vollkommen zu erfüllen.

Bedingung 1 und 2 sind erfüllt, sobald der Anfangsberührungspunkt E_0 auf der Zentralen liegt und die Berührungsnormale nicht mit ihr zusammenfällt. Man wird, um auch der Bedingung 3 nicht zu sehr zu widersprechen, E_0 möglichst nahe an D heranlegen. Dieser Fall ist praktisch gut brauchbar.

Bedingung 1 und 3 sind erfüllt, wenn die Berührungsnormale durch D geht, ohne mit DF zusammenzufallen, E_0 also außerhalb der Zentrale liegt. Das Gleiten wird um so geringer, die Abnutzung daher um so unschädlicher, je näher man E_0 an die Zentrale heranlegt. Auch dieser Fall findet häufig Anwendung in der Praxis.

Nachdem der Anfangspunkt E_0 gewählt ist, kann man mit der früher erwähnten Methode von Holzer (Z. 1908) die Wälzkurven so bestimmen, daß sie den obigen Bedingungen Genüge leisten und ein brauchbares Ventilerhebungsdiagramm ergeben.

Hier soll noch die Aufgabe behandelt werden, für zwei gegebene Wälzhebel p und π (Fig. 71) die Bewegungsverhältnisse des Hubpunktes zu ermitteln, wenn die Steuerwelle A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

Dabei ist es nötig, die Krümmungsmittelpunkte O und Ω der Wälzkurven p und π zu ihrem jeweiligen Berührungspunkt C zu kennen.

Da man für ein kleines Stück die Wälzkurven durch ihre Krümmungskreise ersetzen kann, so kann man π momentan als einen sich um D drehenden Kreis mit dem Mittelpunkt Ω , p als einen sich um F drehenden Kreis mit dem Mittelpunkt O auffassen. Man erkennt, daß in der betrachteten kleinen Zeit der Abstand $O\Omega$ konstant bleibt, während sich Ω um D , O um F drehen. Damit ergibt sich, daß das Gelenkviereck $D\Omega OF$ augenblicklich ein gleichwertiger Ersatz für das Wälzhebelgetriebe ist. $D\Omega$ ist dabei fest mit dem treibenden, FO fest mit dem getriebenen Wälzhebel verbunden.

Der treibende Hebel π bildet, wie schon oben erwähnt, mit AB , BC und dem Gestell AD ein Gelenkviereck $ABCD$. Man kann daher zunächst nach § 41 oder wenn man die Länge der Exzenterstange gegenüber der kleinen Antriebskurbel AB als unendlich groß annimmt, nach der vereinfachten Konstruktion § 43 die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes C aufsuchen und beide dann im Verhältnis $D\Omega : DC$ vergrößern. Dann hat

man Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes Ω , d. h. des Kurbelzapfens der Antriebkurbel $D\Omega$ im Gelenkviereck $D\Omega OF$ und kann in der in § 41 angegebenen Weise Geschwindigkeit und Tangentialbeschleunigung des Punktes O finden. Werden beide im Verhältnis $SF:OF$ vergrößert, so hat man Geschwindigkeit und Tangentialbeschleunigung des sich mit dem Ventilpunkt S momentan deckenden Punktes des Wälzhebels p , die man bei geringen Winkelausschlägen von p mit guter Annäherung für die Ventilgeschwindigkeit bzw. Beschleunigung setzen kann, falls SF nicht zu weit von der Senkrechten auf ss abweicht. Sonst ist in der auf S. 126 für die Schwingdaumensteuerungen besprochenen Weise zu verfahren.

Spezialfälle:

- a) Fällt Punkt O unendlich fern, d. h. wird p eine Gerade, so wird aus dem Gelenkviereck $D\Omega OF$ die rotierende Kurbelschleife $D\Omega F$; denn die Gerade p behält während einer kleinen Zeit ihren Abstand von Ω bei, d. h. die ihr parallele Gerade p_0 gleitet durch Ω hindurch.

Da man die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Antriebkurbel $D\Omega$ kennt, so kann man nach § 49 Geschwindigkeit und Tangentialbeschleunigung des Punktes Ω der Schleifkurbel und damit auch durch entsprechende Vergrößerung im Maßstabe $SF:OF$ die ihres Punktes S finden.

- b) Fällt Punkt Ω unendlich fern, d. h. wird π eine Gerade, so wird aus dem Gelenkviereck $D\Omega OF$ die rotierende Kurbelschleife DOF , da die Gerade π für kurze Zeit ihren Abstand von O beibehält, also die zu ihr parallele Gerade π_0 durch O hindurchgleitet.

Man kennt mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung von C auch die der antreibenden Schleifkurbel DO und kann nach § 50 daraus die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kurbel FO bzw. ihres Punktes S finden.

X. Hilfskonstruktionen.

§ 65.

1. Es seien zwei Strecken l und $l\omega$ bekannt; es soll eine dritte von der Größe $l\omega^2$ gesucht werden.

Es können zwei Fälle eintreten.

a) $l > l\omega$. (Fig. 72.)

Man schlage über $AB = l$ den Halbkreis und um A mit $AC = l\omega$ einen Kreisbogen, fälle vom Schnittpunkt C' beider Kreise das Lot $C'D$ auf AB . Dann ist $AD = l\omega^2$. Denn zieht man noch $C'A$ und $C'B$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABC' nach dem pythagoreischen Lehrsatz

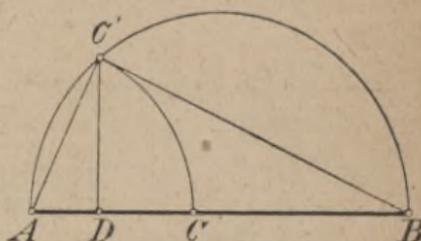


Fig. 72.

$$(AC')^2 = AD \cdot AB,$$

$$AD = \frac{(AC')^2}{AB} = \frac{(l\omega)^2}{l} = l\omega^2.$$

b) $l < l\omega$. (Fig. 73.)

Man errichte im Endpunkt A der Strecke $AB = l$ die Senkrechte, schlage um B mit $BC = l\omega$ den Kreisbogen und errichte in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt C' die Senkrechte auf $C'B$. Diese schneidet auf AB die gesuchte Strecke $BD = l\omega^2$ ab. Denn es ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$(BC')^2 = AB \cdot BD,$$

$$BD = \frac{(BC')^2}{AB} = \frac{(l\omega)^2}{l} = l\omega^2.$$

Dieselbe Aufgabe kann auch auf andere Weise ohne Benutzung eines Zirkels gelöst werden. (Fig. 74 und 75.)

- c) Liegen in einem Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsplan die beiden Strecken $AB = l$ und $BC = l\omega$ schon in derselben Geraden und haben sie den Endpunkt B gemeinsam, so findet man $BE = l\omega^2$, wenn man von einem beliebigen Punkte O Strahlen nach A , B und C zieht, durch C parallel OA bis zum Schnitt D mit OB und durch D parallel OC bis zum Schnitt E mit AB zieht.

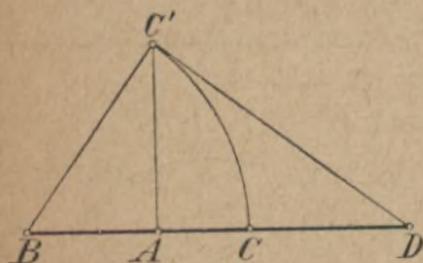


Fig. 73.

Denn es ist

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BO} = \frac{BC}{BA},$$

also

$$BE = \frac{(BC)^2}{BA} = \frac{(l\omega)^2}{l} = l\omega^2.$$

Wie man erkennt, ist es dabei gleichgültig, ob die beiden Strecken l und $l\omega$ aufeinander oder nebeneinander in derselben Geraden liegen. (Fig. 74 bez. 75.)

2. Bei der Untersuchung der Beschleunigungen in Getrieben kommt öfters (§ 42) die folgende Konstruktion vor:

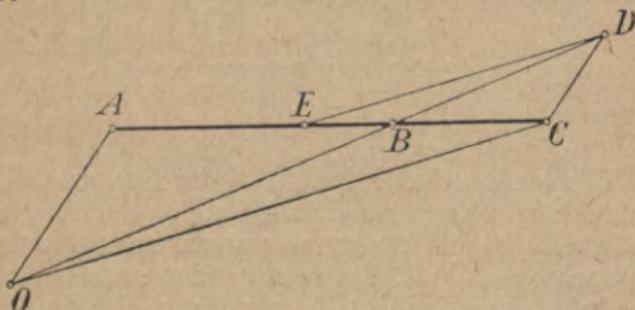


Fig. 74.

Eine Strecke AB (Fig. 76) sei durch einen Punkt P in die beiden Teile $AP = a$ und $BP = b$ geteilt. Man schlage über AB den Halbkreis und um A mit $AP = a$ den Kreis bis zum Schnittpunkt beider C , falle von C das Lot CD auf AB und schlage mit $PD = x$ den Kreis um P bis zum Schnittpunkt E mit AB .

Dieses Verfahren läßt sich durch folgendes einfachere ersetzen:

Man schlage um B mit $BP = b$ den Kreis bis zum Schnittpunkt C' mit dem über AB geschlagenen Halbkreis

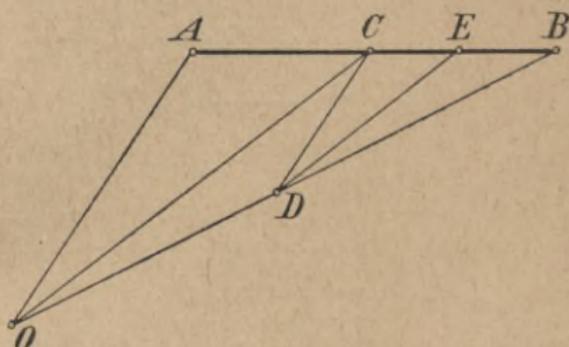


Fig. 75.

und falle von C' das Lot $C'D'$ auf AB . D' wird dann mit dem Punkte E in einem Punkt zusammenfallen.

Beweis: Es möge $PD = x$, $PD' = y$ heißen. Dann gelten nach Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken ACB und $AC'B$ die

Beziehungen:

$$(AC)^2 = AD \cdot AB,$$

also

$$a^2 = (a - x)(a + b),$$

$$x = \frac{a \cdot b}{a + b},$$

$$(BC')^2 = BD' \cdot AB,$$

also

$$b^2 = (b - y)(a + b),$$

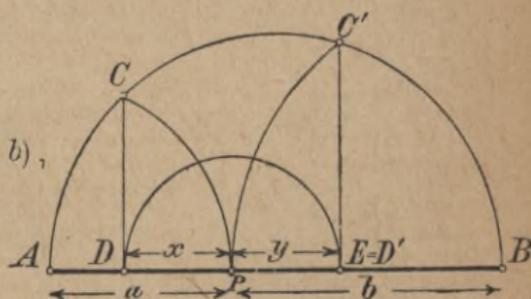


Fig. 76.

$$y = \frac{a \cdot b}{a + b},$$

mithin

$$x = y.$$

Da nun $PE = PD = x$, $PD' = y$, so fallen E und D' in einen Punkt. Die obige Ersatzkonstruktion ist also richtig.



Namen- und Sachregister.

- | | | |
|---|---|---|
| <p>D'Alembert 12.
Allgemeine Verzahnung 63—69.
Ampère 12.
Apollonischer Lehrsatz 32.
Aronhold 13.</p> <p>Bahnnormale 26.
Ball 13.
Belanger 13.
Bernouilli 12.
Berührungsnormale 29.
Beschleunigung 16.
Beschleunigungsplan 33.
Beschleunigungspol 30 bis 34.
Bewegungsumkehr 30.
Bobillier 13, 59.
Bour 13.
Bresse 13.
Breton 13.
Büchner 14.
Burmester 13.</p> <p>Carnot 12.
Cauchy 13.
Chasles 13.
Collignon 13.
Coriolis-Beschleunigung 51, 88, 98.</p> <p>Doehne 14.
Drehpol 23.
Drehsinn 23.
Drehung 23.
Drehwinkel 23.
Dwelshauers-Déry 13.</p> <p>Eingriffsbogen 77.
Eingriffsdauer 77.
Eingriffslinie 63, 66.</p> | <p>Eingriffspunkt 63.
Elementarbeschleunigung 20.
Elementardrehung 26.
Epizykloide 57.
Ersatzdrehung 82.
Ersatzschiebung 82.
Essich 14.
Euler 12.
Evolute 60.
Evolvente 62.
Evolventenverzahnung 71—72.
Exzenter 119.
Exzenterantrieb 90.
Exzenterkreis 127.</p> <p>Gangpolbahn 28.
Gedrehte Geschwindigkeiten 27.
Gegenkreis 62.
Gegenpunkt 62.
Geisenheimer 14.
Gelenkviereck 80—90.
Geometrie 11.
Geometrische Addition 17.
— Bewegungslehre 12.
Geradlinige Bewegung 14.
Geschichtliches 12—14.
Geschwindigkeit 15.
Geschwindigkeitspol 26.</p> <p>Geschwindigkeitssechseck 49.
Gestell 81.
Gilbert 13.
Girault 13.
Giulio 13.
Gleitbahn 93.
Gleitstück 95.
Goodeve 13.</p> | <p>Grashof 13.
Grissongetriebe 72—74, 80.
Grübler 14.
Grundkreis 62, 71.</p> <p>Habich 14.
Hachette 13.
Hartmann 14, 38.
Haton de la Goupillière 13.
Hauptstrahlen 27.
Helm 14.
Hilfskonstruktionen 147—149.
Holzer 14, 130, 137.
Hubpunkt 130.
Hüllkurven 29.
Hypozykloide 57.</p> <p>Jonquières 13.</p> <p>Kant 12.
Kempe 13.
Kinematik 11.
Koenigs 14.
Kopfkreis 70.
Koppel 81.
Kraft 14.
Kreisevolvente 62.
Kreuzkopf 92.
Krummlinige Bewegung 20.
Krümmungsmittelpunkt 38, 59.
Kuppelstange 81.
Küpper 13.
Kurbel 81.
Kurbelschleife 95—100.</p> <p>Laboulaye 13.
Lamarle 13.
Land 14, 82.
Lignine 13.</p> |
|---|---|---|

- Mannheim 13.
 Mechanik 11.
 Mehmke 14.
 Mittlere Exzenterstan-
 genrichtung 91.
 — Geschwindigkeit 18.
 Möbius 13.
 Mohr 13, 110.
 Mohrsche Konstruktion
 93—95.
 Mollier 14, 104.
 Momentanpol 26.
 Morin 13.
- Nicolaidés 13.
 Nocken, Ersatzgetriebe
 113—114.
 Nockenprofile 112, 114.
 Nockensteuerungen 111
 bis 117.
 Normalbeschleunigung
 22.
 Normaldruck 77.
 Normale Geschwindig-
 keiten 27.
- Orthogonale Geschwin-
 digkeiten 27.
 Oszillierender Zylinder
 102.
- Parallelogramm der
 Beschleunigungen 20.
 — — Geschwindigkei-
 ten 19.
 — — Wege 17.
 Pleuelstange 92.
 Poinot 13.
 Pol 26.
 Polbahnen 28.
 Polbeschleunigung 37,
 41.
 Polgerade 48.
 Polkurven 28.
 Polsatz 48.
 Polwechselgeschwin-
 digkeit 39—40.
 Poncelet 12, 67.
- Proell 13.
- Rankine 13.
 Rastpolbahn 28.
 Reibungsarbeit 79.
 Resal 13.
 Reuleaux 13, 66.
 Rittershaus 13.
 Rodenberg 14.
 Rollkreis 58, 69.
 Rollkurven 29.
 Rückdruck der Schub-
 stange 104—110.
- Saint-Loup 13.
 Savary 13.
 Schadwill 13.
 Schell 13.
 Schellbach 13.
 Schiebung 22.
 Schleifkurbel 95.
 Schleifkurbelgetriebe
 100.
 Schubkurbelgetriebe
 92—95.
 Schubkurvengetriebe
 111—146.
 Schubstange 104—111.
 Schumann 14.
 Schwingdaumen, Er-
 satzgetriebe 121—126.
 Schwingdaumensteu-
 erungen 118—130.
 Schwinde 81.
 Somoff 13.
 Spezifisches Gleiten 74.
 Stegmann 13.
 Steiner 13.
 Steuerwelle 90, 111, 119.
 Sylvester 13.
- Tangentialbeschleuni-
 gung 22.
 Teilkreise 65.
 Torricelli 12.
 Trägheitskräfte der
 Schubstange 110.
 Transon 13.
 Treibpunkt 130.
- Triebstock 72.
- Übersetzungsverhält-
 nis 65, 135, 143.
 Unrunde Scheiben 111
 bis 117.
- Verzahnungsgesetz 65.
 Vierzylinderkette 80.
 Viviani 12.
- Wälzbahn 132.
 Wälzhebel 132.
 — mit beweglichem
 Drehpunkt 131—141.
 — — — Ersatzgetriebe
 137.
 — — — festem Drehpunkt
 141—146.
 — — — Ersatzgetriebe
 145—146.
 Wälzhebelsteuerungen
 130—146.
 Wechselkreis 36.
 Weg-Beschleunigungs-
 kurve 17.
 Weg-Geschwindig-
 keitskurve 15.
 Wendekreis 35.
 Weiß 14.
 Willis 13.
 Winkelbeschleunigung
 24.
 Winkelgeschwindig-
 keit 24.
 Wittenbauer 14.
- Zahnfuß 69.
 Zahnkopf 69.
 Zahnücke 69.
 Zahnräder 63—80.
 Zeit-Beschleunigungs-
 kurve 16.
 Zeit-Geschwindigkeits-
 kurve 15.
 Zeit-Wegkurve 14.
 Zentrale 60, 143.
 Zykloide 57.
 Zykloidenverzahnung
 69.

Sammlung Schubert

Eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, die einheitlich angelegt, in systematisch sich entwickelnden Einzeldarstellungen alle Gebiete der Mathematik umfaßt. Ein Verzeichnis der zur Zeit vorliegenden Bände wird gern versandt.

Als 37. Band erschien:

Lehrbuch der Mechanik

I. Band:

Kinematik

von

Professor Dr. Karl Heun
in Karlsruhe

Preis: Gebunden M. 8.—

und 100% Verleger-Teuerungszuschlag

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER

WALTER DE GRUYTER & CO., vormals G. J. Göschen'sche
Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung -
Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.

BERLIN W 10

Sommer  1930

Mathematische Literatur in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 10

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger. Wissenschaftlicher Beirat: H. Brandt, M. Dehn, G. Doetsch, A. Fraenkel, O. Haupt, F. Hausdorff, E. Hellinger, G. Kowalewski, H. Rademacher, K. Reidemeister, A. Rosenthal, C. Schaefer, W. Schmeidler, F. Schottky, O. Toeplitz. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155—156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband II), Band 159—162 je RM. 36.—

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von Karl Ohrtmann und Felix Müller, fortgeführt von Emil Lampe. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von H. Hahn, E. Hecke, G. Herglotz, O. Hölder, A. Loewy, L. Neder, O. Perron, E. Salzkowski, G. Szegő, A. Wangerin, H. Weyl herausgegeben von Leon Lichtenstein. Band 1—50: Jahrgang 1868—1924. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 RM. 75.—, Band 46 RM. 92.—, Band 47 RM. 74.—, Band 48 RM. 121.—, Band 49 RM. 77.—, Band 50 RM. 78.—. Von Band 51 ab (Jahrg. 1925 ff.) erfolgt die Herausgabe durch die Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Im Druck: Band 51 (1925) und Band 53 (1927).

Ausgabe in Sonderheften.

Sonderheft I: Geschichte, Philosophie, Pädagogik, Mengenlehre. Sonderheft II: Arithmetik und Algebra. Sonderheft III: Analysis. Sonderheft IV: Geometrie. Sonderheft V: Anwendungsgebiete (Mechanik, mathem. Physik). Es liegen bisher vor: Aus Band 53 (Literatur 1927) Sonderheft I (II, 75 S.) RM. 8.60; Sonderheft II (II, 99 Seiten) RM. 11.20.

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik, Mechanik, Relativitätstheorie, Astronomie und mathematischen Physik. Auch die Geschichte und Philosophie der Mathematik wie die Fragen der Didaktik finden sorgfältige Berücksichtigung.

Geschichte der Mathematik. Von Oberstudien-Dir. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. 1922. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Nr. 226, 875) . . Geb. je RM. 1.80

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18.) . Geb. RM. 17.40 II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudiendirektor Dr. H. Wieleitner in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 222 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64.) Geb. RM. 3.50

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. Johannes Tropfke, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lexikon-Oktav.

Band 1: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. RM. 7.20, geb. RM. 8.20
Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921.

RM. 8.50, geb. RM. 9.50
Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922.

RM. 6.—, geb. RM. 7.—
Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. RM. 9.—, geb. RM. 10.—

Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 1923. RM. 7.50, geb. RM. 8.50

Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 1924.
RM. 7.—, geb. RM. 8.—

Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924.
RM. 6.50, geb. RM. 7.50

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“
Naturwissenschaften.

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923. RM. 0.80

In leichtverständlicher Darstellung berichtet der Verfasser über den Aufbau der Theorie der Integralgleichungen und ihre Anwendungen, die Erforschung der Grundlagen der mathematischen Physik, die Verallgemeinerung des Begriffs der konvergenten Reihen und die Entwicklung der modernen Relativitätstheorie. Dasselbe in englischer Sprache. 1923. RM. 0.80

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909. Geb. RM. 20.—

Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 Geb. RM. 16.—

Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer Ausgabe vor.
Geb. RM. 26.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Aufl. 117 Seiten und 1 Tafel. 1929. (Samml. Götschen Bd. 423)
Geb. RM. 1.80

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 Geb. RM. 7.—

In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benützung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der 8stelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Achtundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1927 Geb. RM. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“

Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haussner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neudruck 1926. (Samml. Göschens Bd. 81) Geb. RM. 1.80

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“

Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 Geb. RM. 1.50

„Diese Logarithmentafel zeichnet sich durch übersichtliche Anordnung und Reichtum des Gebotenen aus.“

Deutsche Schulzeitung in Polen.

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gefündet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Fünfunddreißigste bis vierzigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 188 Seiten und eine Tafel. 1929 Geb. RM. 7.50

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrten Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuauflage erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“

Zeitschrift für angewandte Chemie.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1928 RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschiedenen großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“

Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Von Dr. F. G. Mehler. Neu bearbeitet von Oberstudien-direktor A. Schulte-Tigges. Oktav.

Ausgabe A. 31. Auflage des Stammbuches. Mit 107 Figuren im Text und auf 1 Tafel. XII, 280 Seiten. 1921 RM. 2.80

Ausgabe B mit Übungen. Unterstufe. 13. Auflage. Mit 6 Tafeln. IX, 223 Seiten. 1927. RM. 2.80

- Ausgabe B ohne Übungen. 12. Auflage. (Sonst wie die vorige.)
 Unterstufe. Mit 3 Tafeln. 156 Seiten. 1923 RM. 1.80
 Oberstufe. 8. Auflage. Mit 6 Tafeln. VII, 254 Seiten. 1925. RM. 4.—
 Geometrische Aufgaben und Übungen (aus der Ausgabe B).
 Unterstufe. Mit 2 Tafeln. 58 Seiten. 1923 RM. 0.60
 Oberstufe. 89 Seiten. 1925. RM. 1.50
 Hierzu sind erschienen:
 Rechentafeln für höhere Lehranstalten. 2. Auflage. 18 Seiten.
 1929 RM. 0.30
- Arithmetische Aufgabensammlung** (aus der Ausgabe B).
 Unterstufe. Mit 4 Tafeln. V, 100 Seiten. 1927 RM. 2.50
 Oberstufe. 106 Seiten. 1929 RM. 3.—
 Ergebnisse zur Unterstufe. 42 Seiten. 1928 RM. 3.—
 Auflösungen zur Oberstufe. IV, 92 Seiten. 1929 RM. 4.—
 Ferner folgende Einzelteile der Oberstufe mit Übungen:
 Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit
 zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 1 Tafel. 63 Seiten.
 1925 RM. 1.—
 Grundzüge der darstellenden Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben
 für höhere Schulen. Mit 4 Tafeln. 63 Seiten. 1925 RM. 1.50
- Mathematische Formelsammlung.** Von Professor O. Th. Bürklen †.
 Vollständig umgearbeitete Neuauflage von Dr. F. Ringleb. Mit 36 Figuren.
 241 Seiten. 1928. (Sammlung Göschen Bd. 51) Geb. RM. 1.80
*„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche
 wohlgeegnet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den
 Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze
 System der Elementarmathematik zu geben.“ Fortschritte der Mathematik.*
- Mathematische Mußestunden.** Eine Sammlung von Geduldspielen,
 Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof.
 Dr. Hermann Schubert. Vierte Auflage, neu bearbeitet von Professor
 Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. RM. 6.—
*„Das kleine, auch äußerlich hübsch ausgestattete Buch wird allen Lesern
 Freude machen, und insbesondere der Lehrer wird in ihm eine Fülle von
 Anregungen für den Unterricht vorfinden. Wir empfehlen die ‚Mußestunden‘
 allgemeiner Beachtung.“ Zeitschrift für das Realschulwesen.*
- Arithmetik** nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. Her-
 mann Schubert. Dritte Auflage, Neubearbeitet von Professor P. B. Fischer,
 Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 5 Figuren. 132 Seiten.
 1923. (Samml. Göschen Bd. 47) Geb. RM. 1.80
*Die neue Bearbeitung des vorliegenden Bandes ist durch einen Abschnitt
 über Kombinatorik bereichert.*
- Mengenlehre.** Von Professor Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren. 160 Seiten.
 1928. (Samml. Göschen Bd. 999) Geb. RM. 1.80
*Der Band behandelt die grundlegenden Tatsachen der Mengenlehre, die für
 alle Zweige der Mathematik so große Bedeutung gewonnen hat. Die Definition
 der Menge erfolgt im Anschluß an Cantor. Besondere Vorkenntnisse werden
 nicht vorausgesetzt.*
- Mengenlehre.** Von Dr. F. Hausdorff, o. Professor an der Universität Bonn.
 Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 1927. 285 Seiten. (Göschens
 Lehrbücherei Bd. 7) RM. 12.—, geb. RM. 13.50
*Das Lehrbuch setzt beim Lesen keine höheren mathematischen Kenntnisse als
 die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, allerdings aber eine
 gewisse Schärfe des abstrakten Denkens voraus und wird von Studierenden in
 mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden können.*
- Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. Beck, o. Professor
 an der Universität Bonn. 1926. X, 198 Seiten. (Göschens Lehr-
 bücherei Bd. 6) RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

Lehrbuch der Algebra. Von Dr. Alfred Loewy, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915 RM. 12.—, geb. RM. 13.20

Elementare Algebra. Von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. 1926. (Sammlung Göschen Bd. 930) Geb. RM. 1.80

„Der erste Teil des Bandes behandelt die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, der zweite besondere Gleichungen und Lösungsverfahren. Dem Text sind gut gewählte Zahlenbeispiele beigegeben.“ *Allg. Vermessungs-Nachrichten.*

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle.

I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 931) Geb. RM. 1.80

II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 932) Geb. RM. 1.80

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ *Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.*

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 4 Figuren. VIII, 307 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) RM. 10.—, geb. RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9.) RM. 8.—, geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient als Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 48.) Geb. RM. 1.80

Die bekannte Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von H. Schubert erscheint hiermit in einer neuen Bearbeitung. Änderungen gegen die allen Auflagen sind neben unerheblichen Kürzungen und mehrfachen Verbesserungen insofern eingetreten, als die Aufgaben zur Algebra ganz erheblich erweitert wurden.

Gruppentheorie. Von Dr. Ludwig Baumgartner in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837) Geb. RM. 1.80

Determinanten. Von Professor Studienrat Paul B. Fischer. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 402) Geb. RM. 1.80

Der in einer wesentlich umgearbeiteten Auflage vorliegende Band soll die Studierenden der Mathematik, Physik und technischen Wissenschaften in die Grundzüge der Determinanten einführen.

- Einführung in die Determinantentheorie** einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verb. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 Seiten. 1925. RM. 14.—, geb. RM. 15.50
„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart.
- Zahlentheorie.** Von Dr. Kurt Hensel, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. RM. 10.—, geb. RM. 12.—
- Grundlehren der neueren Zahlentheorie.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Zweite, verbesserte Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Hauffner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. 1921. XV, 246 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3) RM. 8.50, geb. RM. 9.50
Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.
- Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. VIII, 277 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4) RM. 10.—, geb. RM. 12.—
Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.
- Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 RM. 2.50
In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.
- Irrationalzahlen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. VIII, 186 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1.) RM. 6.—, geb. RM. 7.—
Inhalt: Die Grundlagen — Der Begriff der Grenze — Potenzen und Logarithmen — Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale — Algebraische und transzendente Zahlen.
- Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. Alfred Lotze, Privatdoz. für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13) RM. 12.—, geb. RM. 13.—
Das Buch gibt eine Einführung in die Punktrechnung, einschließlich der Vektorrechnung, welche dabei als Teilgebiet der umfassenden Punktrechnung erscheint. Neben der ursprünglichen Großmann'schen Darstellung, die sich auf den Fall der Euklidischen Geometrie beschränkte, wird auch eine rein projektive Begründung der Punktrechnung durchgeführt. Der zweite Teil enthält zahlreiche Anwendungen auf Algebra, projektive und Differentialgeometrie sowie auf Mechanik und zeigt daran die Vorzüge und die Tragweite der entwickelten Methoden.
- Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik.** Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Fig. Sechste, verb. Aufl. Lex.-Okt. VIII, 743 S. 1925. RM. 30.—, geb. RM. 33.—
Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.
- Niedere Analysis.** Von Professor Dr. Benedikt Sporer. Mit 5 Figuren. Zweite verbesserte Auflage. Sechster Abdruck. 179 Seiten. 1919. (Sammlung Göschens Bd. 53.) Geb. RM. 1.80

Ohne den wissenschaftlichen Boden zu verlassen, war es das Bestreben des Verfassers, alle Ableitungen in den verschiedenen Kapiteln dieses umfangreichen Gebietes so einfach und verständlich wie möglich darzustellen und durch Beispiele klarer zu machen.

Höhere Analysis. Von Dr. Fr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen (Württemberg). Erster Teil: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen und 67 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 204 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 87) Geb. RM. 1.80
Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 132 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 88) Geb. RM. 1.80

„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen.“

Magazin für Pädagogik.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 146) Geb. RM. 1.80

Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfuhre bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 135 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 147) Geb. RM. 1.80

„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden.“

Schweizer Pädagogische Zeitschrift.

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) Geb. RM. 1.80

Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.

Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 2 Figuren im Text. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1027) Geb. RM. 1.80

Fouriersche Reihen. Von Dr. W. Rogosinski, a. o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit 4 Figuren. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) Geb. RM. 1.80

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926 RM. 14.—, geb. RM. 16.—

„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann.“

Allgemeine Österr. Chemiker- u. Techniker-Zeitung.

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von Dr. Heinrich Liebmann, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901 RM. 6.—, geb. RM. 7.20

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. Ludw. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922 RM. 10.—, geb. RM. 11.—

Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920) Geb. RM. 1.80
Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10) RM. 9.—, geb. RM. 10.50
Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) Geb. RM. 1.80
Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt.
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14.) RM. 11.—, geb. 12.—
In diesem einführenden Lehrbuch, das seine Eigenart ganz aus dem bewährten Programm von „Göschens Lehrbücherei“ herleitet, werden sowohl lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie sie in der mathematischen Physik vorkommen, als auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung behandelt, sowohl Randwert- als auch Anfangswertprobleme, durchweg unter Beschränkung auf zwei unabhängige Veränderliche; es wird auch eine Einführung in die häufig benutzte Theorie der Integralgleichungen gegeben.
- Funktionentheoretische Vorlesungen.** Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.
 I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 RM. 6.—, geb. RM. 7.20
 I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 RM. 9.—, geb. RM. 10.50
 II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 RM. 14.—, geb. RM. 15.50
Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.
- Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
 Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 668) Geb. RM. 1.80
 Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 S. 1926. (Samml. Göschen Bd. 703.) Geb. RM. 1.80
*„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“
 Monatsschrift für Mathematik und Physik.*
- Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.
 Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 136 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 877) Geb. RM. 1.80

Zweiter Teil : Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878) Geb. RM. 1.80

Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie“ (Samml. Göschen Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.

Einführung in die konforme Abbildung. Von Dr. Ludwig Bieberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. 131 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 768.)

Geb. RM. 1.80

„Der Autor faßt seine Aufgabe, eine Einführung in die konforme Abbildung zu geben, in doppeltem Sinne auf. Er vermittelt dem Leser die eigentlich elementaren Teile der Theorie der konformen Abbildung; andererseits eröffnet er durch Eingehen auf einzelne neue Entwicklungen den Zugang zu den modernsten und tiefsten Untersuchungen der gesamten Funktionentheorie.“

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Automorphe Funktionen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. X, 205 Seiten. 1924. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5.)

RM. 8.—, geb. RM. 9.20

Im ersten Abschnitt wird die Kernfrage an einfachen Beispielen behandelt, darauf die notwendigsten Sätze aus der nichteuklidischen Geometrie unter Heranziehung der Kreisverwandtschaften. Es folgt der Diskontinuitätsbeweis der zugehörigen Gruppe von Verschiebungen und der Existenzbeweis für die zu einem Normalpolygon gehörigen automorphen Funktionen.

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Das Buch will den Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Elliptische Funktionen. Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil : Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten, Neudruck. 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) Geb. RM. 20.—

II. Teil : Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61.)

Geb. RM. 5.—

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923. RM. 3.50, geb. RM. 4.—

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg, a. o. Professor in Breslau.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) Geb. RM. 1.80

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944) Geb. RM. 1.80

„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen.“

Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht.

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil : Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) Geb. RM. 4.—

II. Teil : Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59.)

Geb. RM. 4.—

- Numerische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) Geb. RM. 1.80
Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.
- Graphische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) Geb. RM. 1.80
- Methoden der praktischen Analysis.** Von Dr. Fr. A. Willers, o. Professor a. d. Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12.) RM. 20.—, geb. RM. 21.50
Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.
- Praktisches Zahlenrechnen.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) Geb. RM. 1.80
Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.
- Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922.) Geb. RM. 1.80
Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.
- Vermessungskunde.** Von Dr.-Ing. P. Werkmeister, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.
 I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 140 Figuren. Vierte Auflage. 156 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 468) Geb. RM. 1.80
 II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Dritte Auflage. 136 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 469) Geb. RM. 1.80
 III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Topographie. Mit 61 Figuren. Zweite Auflage. 136 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 862) Geb. RM. 1.80
- Grundlagen der Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 17) RM. 6.50, geb. RM. 7.80
Inhalt: I. Gleichheit, Ordnung und Stetigkeit. II. Die Messung durch Zahlen. (Streckenmessung, Winkelmessung, Flächenmessung.) III. Die projektive Geometrie in der Ebene. (Der Fundamentalsatz, Analyse des Fundamentalsatzes, Beweis des Fundamentalsatzes. IV. Die projektive Geometrie im Raume. (Der Fundamentalsatz, Der Desarguessche Satz, Die Koordinatengeometrie.) V. Künstliche Geometrien.
- Ebene Geometrie.** Von G. Mahler, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 166 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 41.) Geb. RM. 1.80
- Grundzüge der ebenen Geometrie.** Von Professor Dr. Fr. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Fig. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2.) Geb. RM. 3.90
- Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3) Geb. RM. 4.40
Das Buch enthält die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die beigegebenen Beispiele sollen den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit und Bedeutsamkeit der Trigonometrie gewähren. Das letzte Kapitel bietet die wichtigsten Anwendungen der Sphärik auf die mathematische Geographie.

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Dr. Gerhard Hessenberg, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 99) Geb. RM. 1.80

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“

Archiv der Mathematik und Physik.

Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Dr. Fritz Heiland, Studienrat am Gymnasium in Jena. Mit 26 Fig. 152 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 848.) Geb. RM. 1.80

Die Sammlung schließt sich nach Anordnung und Bezeichnung dem Lehrbuch Hessenbergs (Samml. Göschen Bd. 99) an. Wichtigere Formeln sind vorangestellt, zum Teil mit Ableitung. Zu sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen angegeben.

Stereometrie. Von Professor Dr. Robert Glaser. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. Mit 81 Figuren. 139 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 97) Geb. RM. 1.80

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Professor Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren. 168 Seiten. 1917. (Samml. Göschen Bd. 779) Geb. RM. 1.80

Aufgaben über Prisma und Zylinder — Projektionszeichnungen — Pyramiden und Kegel — Kugel und Kugelteile — konoidartige Körper — Prismatoide — schief abgeschnittene Prismen und Zylinder — Guldin'sche Regel.

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929 Geb. RM. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. Friedrich Schur, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. RM. 6.50, geb. RM. 7.70

Analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. R. Haufner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 65) Geb. RM. 1.80

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnisse voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen, vornehmlich über die Kegelschnitte.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene mit den vollständigen Lösungen. Von Dr. R. Haufner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 22 Figuren im Text. 140 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 256) Geb. RM. 1.80

Analytische Geometrie des Raumes. Von Professor Dr. Max Simon, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 208 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 89.) Geb. RM. 1.80

Das Werk besitzt den Charakter eines ausführlichen Lehrbuches; es gibt eine übersichtliche und abgeschlossene Darstellung der analytischen Geometrie des Raumes nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung und bietet zuverlässige Belehrung über die analytisch-geometrischen Theorien.

Aufgaben zur analytischen Geometrie des Raumes. Von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. 109 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 309) Geb. RM. 1.80

Die vorliegende Sammlung ist für die erste Einführung bestimmt. Sie soll dem Schüler oder Studierenden Gelegenheit geben, die analytischen Methoden anzuwenden, die Gebilde in ihren verschiedenen Lagen und ihren besonderen Fällen sowie ihre Beziehungen zueinander zu erfassen und zugleich seine Raumanschauung zu bilden.

Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Die Elementargeometrie wird nicht vom Standpunkte des Schulunterrichts, sondern von dem der Wissenschaft aus behandelt. Ausgangspunkt ist das (etwas modifizierte) Hilbertsche Axiomensystem. In der Darstellung treten zwei Momente in den Vordergrund: die geschichtliche Entwicklung und die prinzipielle Begründung der einzelnen Gebiete.

Koordinatensysteme. Von Professor Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 507.) Geb. RM. 1.80

Der Verfasser versucht den Koordinatenbegriff von einem allgemeinen Standpunkt aus darzustellen. Durch sorgfältig ausgewählte, zahlreiche Literaturangaben wird der Wert des Bandes erhöht.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970.) Geb. RM. 1.80

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Kreis und Kugel. Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von H. Wieleitner, Oberstudien-
direktor in München.

Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 435.) Geb. RM. 1.80

Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 123 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 436) . . . Geb. RM. 1.80

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) . . . Geb. RM. 18.—

II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51.)

Geb. RM. 9.50

Ein besonderer Vorzug dieses vorliegenden Lehr- und Einführungsbuches sind die jedem Bande beigegebenen Übungsaufgaben, zu deren Lösung sich am Schluß eine Anleitung befindet.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München.

Fünfte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 72.)

Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 876.)

Geb. je RM. 1.80

„Die Darstellung ist musterhaft klar und leichtverständlich und wird durch übersichtliche Zeichnungen und zahlreiche Aufgaben aufs trefflichste illustriert.“

Bayerische Blätter für das Gymnasialschulwesen.

Geometrische Transformationen. Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen.

VIII, 246 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15) . . Im Druck

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 RM. 13.—, geb. RM. 14.50
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verb. Auflage. XI, 582 Seiten. 1922.
RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Register erhöhen den Wert des Werkes das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Von Oberstudiendirektor Dr. Viktor Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Tübingen. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII, 184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29) Geb. RM. 3.—
II. Teil. Dritte Auflage. Mit 13 Figuren. IV, 196 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 44) Geb. RM. 3.—

In der neuen Auflage werden u. a. die Untersuchungen Salkowskis über die Raumkurven und die Bertrandschen Kurven berücksichtigt.

Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Von Oberstudiendirektor Dr. Viktor Kommerell in Tübingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Tübingen. Mit 9 Figuren. VI, 171 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 62) Geb. RM. 7.30

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 37 Abbildungen im Text. Gr.-Okt. VI, 147 Seiten. 1929 RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Das Buch stellt die Grundzüge der Vektoranalyse in engstem Zusammenhange mit ihrer Anwendung auf Mechanik, Hydrodynamik, Elektrizitätslehre und Relativitätstheorie dar.

Vektoranalysis. Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 354) Geb. RM. 1.80

Darstellende Geometrie. Von Dr. Robert Haufjner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.

Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 142) Geb. RM. 1.80

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 143) Geb. RM. 1.80

In vier Abschnitten werden die Parallelprojektion ebener und räumlicher Gebilde, die Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen sowie ebenflächige Gebilde behandelt.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Figuren. 1913. Anastatischer Nachdruck. 1921 RM. 16.50, geb. RM. 18.—

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916 RM. 6.20, geb. RM. 7.20

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 RM. 10.80, geb. RM. 12.—

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. RM. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. RM. 7.50
„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen.“

Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871.) Geb. je RM. 1.80

Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Wilhelm Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 302.) Geb. RM. 1.80

II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) Geb. RM. 1.80

Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitungen zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.

Versicherungsmathematik. Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München.

I. Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 180) Geb. RM. 1.80

II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917.) Geb. RM. 1.80

Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.

Politische Arithmetik. (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.)

Von Dr. Emil Foerster, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879.) Geb. RM. 1.80

In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. Marcello Pirani, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Figuren. Neudruck. 126 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 728) Geb. RM. 1.80

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrecten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bauwerkshochschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695.)

Geb. je RM. 1.80

- Statik.** I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Dr. Ing. Ferd. Schleicher in Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) Geb. RM. 1.80
 II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179) Geb. RM. 1.80
- Kinematik.** Von Dr.-Ing. Hans Polster, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 584.) Geb. RM. 1.80
Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und Wälzhebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.
- Festigkeitslehre.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten und 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) Geb. RM. 1.80
In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.
- Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen.** Von R. Haren. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage von Josef Furtmayr, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 491) Geb. RM. 1.80
- Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) Geb. RM. 1.80
Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.
- Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) Geb. je RM. 1.80
Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger. Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.
- Einführung in die geometrische Optik.** Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) Geb. RM. 1.80
Nach der Einleitung über die Grundgesetze der geometrischen Optik folgen die Abschnitte über die Reflexion an ebenen Flächen und sphärischen Flächen. Dann wird die Brechung an ebenen Flächen, an einer Kugelfläche und durch ein zentriertes System von Kugelflächen behandelt. In Kapitel VI finden die Linsen und Linsensysteme Beachtung.
- Theoretische Physik.** Von Dr. Gustav Jäger, Professor der Physik an der Universität Wien. 5 Bände.
 I. Band: Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 76) Geb. RM. 1.80
 II. Band: Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77.)
 Geb. RM. 1.80

- III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 78.) Geb. RM. 1.80
- IV. Band: Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 374.) Geb. RM. 1.80
- V. Band: Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 128 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1017) Geb. RM. 1.80

Allen, welche sich ein Kompendium der theoretischen Physik anschaffen wollen, seien diese Bändchen empfohlen. Der Verfasser hat den Stoff aus dem Gesamtgebiet sorgfältig ausgewählt und dabei die neuesten Resultate der Forschung berücksichtigt.

- Einführung in die theoretische Physik** mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Fünfte und sechste, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930 RM. 15.—, geb. RM. 16.50
- II. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 72 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 379 Seiten. 1924 RM. 8.50, geb. RM. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfanges, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw. vertraut macht.“

Monatshefte für Mathem. u. Physik.

- Einführung in die theoretische Physik.** Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929. RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band: Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. X, 660 Seiten. 1929 RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band: Erscheint Mitte 1930.

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“ *Annalen der Physik.*

- Atomphysik.** Von Dr. Hans Leßheim in Breslau. I. Band. Mit 36 Abbildungen. 134 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 1009.) Geb. RM. 1.80

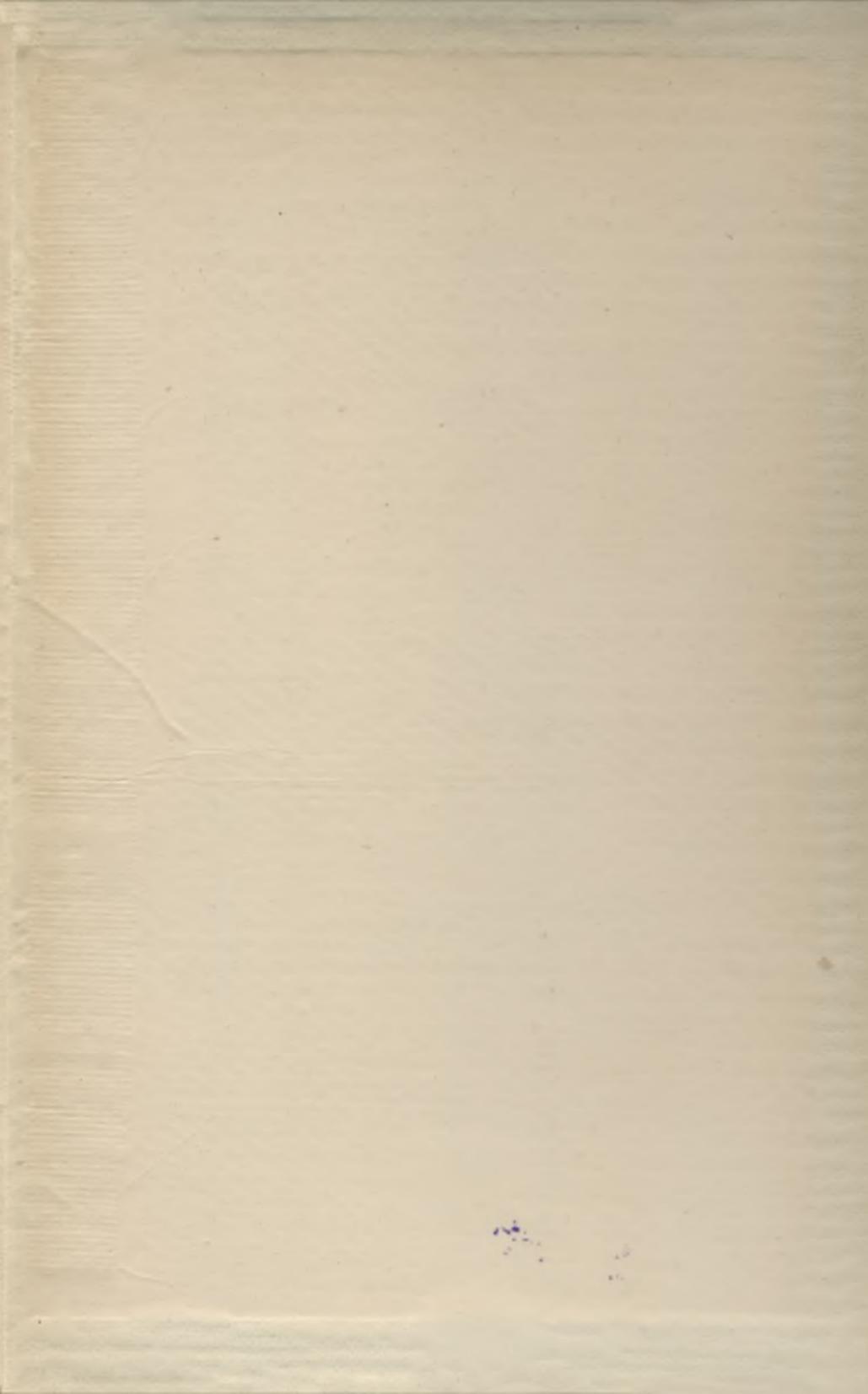
- Vorlesungen über Thermodynamik.** Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. XI, 288 Seiten. 1930. Geb. RM. 11.50

**VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.
IN BERLIN W 10 UND LEIPZIG**

Röderdruck Leipzig.

2.00

S - 96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301307



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298060