hen

Repetitorium

und

Aufgabensammlung

zur

Integralrechnung

von

Prof. Dr. Fr. Junker

Mit 50 Figuren im Text

Wenden!

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

42 **Urgeschichte der Menschheit** von Dr. Moritz Hoernes, Professor a. d. Universität und Custosadjunkt am k. und k. naturhistor. Hofmuseum in Wien. Mit 48 Abb.

43 **Geschichte des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Professor an der Universität München. Mit 6 Bildern und 1 Karte.

44 **Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben** von Oberlehrer Dr. E. Dennert in Rüngsdorf. Mit 96 Abbildungen.

45 **Römische Altertumskunde** v. Dr. Leo Bloch, Dozent a. d. Universität Zürich. Mit 8 Vollbildern.

46 **Das Waltharilied,** im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Professor Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar.

47 **Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg.

48 **Beispielsammlung z. Arithmetik u. Algebra,** 2765 Aufgaben, systematisch geordnet, von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums i. Hamburg.

49 **Griechische Geschichte** von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an d. deutschen Universität Prag.

50 **Schulpraxis.** Methodik d. Volksschule von R. Seyfert, Schuldirektor in Ölsnitz in V.

51 **Mathemat. Formelsammlung** u. Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, mathem. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung v. O. Th. Bürklen, Professor am kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren.

52 **Geschichte der römischen Litteratur** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg.

53 **Niedere Analysis** von Professor Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Figuren.

54 **Meteorologie** von Dr. W. Trabert, Dozent a. d. Universität u. Sekretär der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien. Mit 49 Abb. u. 7 Taf.

55 **Das Fremdwort im Deutschen** v. Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig.

56 **Deutsche Kulturgeschichte** v. Dr. Reinh. Günther i. Burgdorf b. Bern.

57 **Perspektive** nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion u. Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Fachlehrer an der Kunstgewerbesch. i. Magdebg. Mit 88 Abb.

58 **Geometrisches Zeichnen** von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule i. Magdeburg. Mit 282 Abbildungen.

59 **Indogermanische Sprachwissenschaft** von Dr. R. Meringer, Professor a. d. Universität Wien. Mit einer Tafel.

60 **Tierkunde** v. Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen.

61 **Deutsche Redelehre** von H. Probst, Gymnasiallehrer in München. Mit einer Tafel.

62 **Länderkunde von Europa** v. Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen u. einer Karte der Alpeneinteilung.

63 **Länderkunde der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen und Profilen.

64 **Deutsches Wörterbuch** von Dr. Ferdinand Detter, Professor an der Universität Prag.

65 **Analytische Geometrie d. Ebene** von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren.

66 **Russische Grammatik** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag.

67 **Russisches Lesebuch** mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag.

68 **Russisch-deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag.

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite.

Sammlung Göschen

Repetitorium

und

Aufgabensammlung

zur

Integralrechnung

von

Dr. Fr. Junker

Professor am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm

Mit 50 Figuren im Text

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1902

Druck von Carl Rembold & Co. in Heilbronn.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einfache unbestimmte Integrale.

§ 1. Das Integral eines Differentials.

Die Integralrechnung hat die Aufgabe, zu einem gegebenen Differential die ursprüngliche Funktion aufzusuchen. Sie ist in dieser Hinsicht als die Umkehrung der Differentialrechnung anzusehen.

Das Integral des Differentials $dy = f(x)\,dx$, geschrieben

$$y = \int f(x)\,dx = F(x)$$

und gelesen „Integral f (x) dx“ ist die Funktion, welche nach x abgeleitet f (x) giebt. Dasselbe ist somit definiert durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \int f(x)\,dx}{dx} = f(x) = F'(x).$$

Diese Beziehung ändert sich nicht, wenn man F (x) um eine beliebige Konstante C vermehrt (oder vermindert). Man nennt deshalb

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ und bezeichnet C als Integrationskonstante.

§ 2. Die einfachsten Integralformen.

Durch einfache Umkehrung der entsprechenden Formeln der Differentialrechnung gelangt man zu folgenden fundamentalen Integralformeln:

1. $\int a\,dx = ax + C$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = l\,x + C$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a} + C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C'$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$.

§ 3. Sätze und Integrationsmethoden.

a) Konstante Faktoren unter dem Integralzeichen dürfen vor dasselbe gesetzt werden.

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

b) Das Integral einer Summe von Differentialen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Differentiale

$$\int \left\{ f(x) + \varphi(x) + \ldots \right\} dx = \int f(x)\, dx + \int \varphi(x)\, dx + \ldots$$

c) Integration durch Substitution einer neuen Veränderlichen.

12. Beispiel. Das Integral $\int (a + b\,x)^n\, dx$ zu ermitteln.

Setze $a + b\,x = y$, so ist $b\,dx = dy$, $dx = \frac{dy}{b}$ und

$$\int (a + b\,x)^n\, dx = \frac{1}{b} \int y^n\, dy = \frac{1}{b} \cdot \frac{y^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{(a + b\,x)^{n+1}}{b\,(n+1)} + C.$$

13. Beispiel.

$\int tg\, x\, dx$ geht mit $\cos x = y$, $-\sin x\, dx = dy$ über in

$$\int tg\, x\, dx = -\int \frac{dy}{y} = -\, l\, y = -\, l \cos x.$$

14. Beispiel. Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$ zu berechnen.

Setze

$b^2 x^2 = a^2 \sin^2 \varphi$ oder $b x = a \sin \varphi$, $b\,dx = a \cos \varphi\, d\varphi$,

so folgt

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = a \cos \varphi$$

und geht das Integral über in

$$\frac{1}{b}\int d\varphi = \frac{1}{b}\varphi = \frac{1}{b} \arc\sin \frac{b x}{a}.$$

d) Ist der Zähler eines Bruches gleich der Ableitung des Nenners, so ist das Integral desselben gleich dem Logarithmus des Nenners

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{d\,f(x)}{f(x)} = l\,f(x) + C.$$

15. Beispiel.

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l \sin x + C.$$

16. Beispiel.

$$\int \frac{(4 x^3 - 14 x)\,dx}{x^4 - 7 x^2 + 8} = l\,(x^4 - 7 x^2 + 8).$$

e) Die teilweise Integration beruht auf der Anwendung der Formel

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du,$$

wo u und v als Funktionen von x zu betrachten sind.

17. Beispiel. $\int x \cos x\, dx$ zu berechnen.

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

18. Beispiel. $J = \int \cos^2 x \, dx$ zu berechnen.

Es ist

$$J = \int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \, d \sin x = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$

$$= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \cos x \sin x + x - J,$$

woraus folgt

$$J = \frac{1}{2} (\cos x \sin x + x).$$

§ 4. Uebungsbeispiele.

19. $\int 6 \, x^7 \, dx = \frac{3}{4} x^8$

20. $\int (a^4 + x^4) \, dx = a^4 x + \frac{x^5}{5}$

21. $\int 3 \sqrt{x} \, dx = 2 \sqrt{x^3}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{x}$

23. $\int (1 + \sqrt[3]{x^2}) \, dx = x + \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5}$

24. $\int \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) dx = a x + b \, l \, x - \frac{c}{x}$

25. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2}\right)^3 dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{4} x^{\frac{8}{3}}$

$$+ \frac{8}{17} x^{\frac{17}{6}} - \frac{8}{51} x^3$$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + x}} = 2 \sqrt{a + x}$

27. $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\,e^{kx}$

28. $\int \frac{dx}{1+(x-2)^2} = \operatorname{arc\,tg}\,(x-2)$

29. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = 1 - x - 2\,l\,(1-\sqrt{x})$ $[1-\sqrt{x}=y]$

30. $\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^3} = -\frac{a+2bx^2}{4b^2(a+bx^2)^2}$ $[x^2=y]$

31. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^4} = \operatorname{arc\,tg}\,x^2$

32. $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = l\,f(x)$

33. $\int \frac{\cos x\,dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{b}\,l\,(a+b\sin x)$

34. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x-a} = l\,(e^x-a)$

35. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg}\,x} = l\,(\operatorname{arc\,tg}\,x)$

36. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

37. $\int (x-1)^2\,e^x\,dx = e^x\,(x^2-4x+5)$

38. $\int x^5\,(1+x)^2\,dx = \frac{x^6}{6}\,(1+x)^2 - \frac{1}{3}\int x^6\,(1+x)\,dx$

39. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x\cos x)$

40. $\int x^2 \cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x.$

II. Abschnitt.

Integration rationaler algebraischer Differentiale.

§ 5. Integration echt gebrochener rationaler Funktionen.

a) Zur Ermittlung des Integrals

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)(x-b)\ldots(x-n)}$$

zerlege man in Partialbrüche

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{N}{x-n}$$

dann folgt

$$A = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-n)},$$

$$B = \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-n)},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$N = \frac{f(n)}{(n-a)(n-b)\ldots(n-m)}$$

oder auch

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},\ B = \frac{f(b)}{F'(b)},\ \ldots,\ N = \frac{f(n)}{F'(n)}.$$

Nach Berechnung der Zähler A, B, ... ergiebt sich für das gesuchte Integral der Ausdruck

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = A\,l\,(x-a) + B\,l\,(x-b) + \ldots + N\,l\,(x-n).$$

41. Beispiel.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 - x + 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$A = \frac{1 + 1 + 4}{(-2)(+1)} = -3, \quad B = \frac{1 - 1 + 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$C = \frac{4 + 2 + 4}{(-1)(-3)} = \frac{10}{3}$$

daher ist

$$\int \frac{x^2 - x + 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx = -3\, l(x + 1) + \frac{2}{3} l(x - 1) + \frac{10}{3} l(x + 2) + C.$$

b) Enthüllt der Nenner imaginär conjugierte Faktoren z. B. $x - a - ib$ und $x - a + ib$, und ergiebt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{x - a - ib} + \frac{B}{x - a + ib}$$

für die Zähler

$$A = \frac{f(a + ib)}{F'(a + ib)} = p + iq, \quad B = \frac{f(a - ib)}{F'(a - ib)} = p - iq,$$

so erhält man durch Vereinigung der Brüche

$$\frac{p + iq}{x - a - ib} + \frac{p - iq}{x - a + ib} = \frac{2p(x - a) - 2bq}{(x - a)^2 + b^2}$$

und hieraus durch Integration

$$\int \frac{A\,dx}{x - a - ib} + \int \frac{B\,dx}{x - a + ib}$$

$$= p \int \frac{2(x - a)}{(x - a)^2 + b^2} dx - 2bq \int \frac{d(x - a)}{(x - a)^2 + b^2}$$

$$= p\, l\left\{(x - a)^2 + b^2\right\} - 2q \operatorname{arc\,tg} \frac{x - a}{b}.$$

42. Beispiel. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ zu berechnen.

Man erhält

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}} + \frac{C}{x - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}}$$

Da nun $f(x) = 1$, $F(x) = x^3 + 1$, $F'(x) = 3x^2$ ist, so folgt

$$F'(-1) = 3,\quad F'\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i\sqrt{3},$$

$$F'\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} i\sqrt{3}$$

und $$A = \frac{1}{3},\quad B = -\frac{1}{6} - \frac{i}{6}\sqrt{3},$$

$$C = -\frac{1}{6} + \frac{i}{6}\sqrt{3},\quad p = -\frac{1}{6},\quad q = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\, l(x+1) - \frac{1}{6}\, l(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

§ 6. Uebungsbeispiele.

43. $$\int \frac{4x^3 - 7x + 2}{2x+1}\, dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2}\, l(2x+1)$$

44. $$\int \frac{31x - 96}{6(x^2 - 3x - 18)}\, dx = \frac{5}{3}\, l(x-6) + \frac{7}{2}\, l(x+3)$$

45. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} = \frac{1}{2a} l \frac{x - a}{x + a}$

46. $\int \frac{2x - 6}{x^2 - 2x + 5} dx = 2 l \{(x-1)^2 + 4\} - 2 \operatorname{arc tg} \frac{x-1}{2}$

47. $\int \frac{-2x^2 + 8x + 14}{(x^2 - 1)(x - 3)} dx = 2 l (x - 1) - 3 l (x + 1) - l (x - 3)$

48. $\int \frac{2x^3 - 16ax^2 - 8a^2x + 16a^3}{(x^2 - a^2)(x^2 - 4a^2)} dx = l (x^2 - a^2) - 4 l \frac{x - 2a}{x + 2a}$

49. $\int \frac{5x^2 + 3ax + 9a^2}{x^3 - 3ax^2 + 2a^2x} dx = \frac{9}{2} l x - 17 l (x - a) + \frac{35}{2} l (x - 2a)$

50. $\int \frac{x - 3}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} l (x^2 + 1) - 3 \operatorname{arc tg} x$

51. $\int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)} = l x - \frac{1}{2} l (x^2 + x + 1) + \frac{3\sqrt{3}}{16} \operatorname{arc tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$

52. $\int \frac{-2x^2 + 6x + 13}{(x - 1)(x^2 + 5x + 11)} dx = l (x - 1) - \frac{3}{2} l (x^2 + 5x + 11) + \frac{13}{4} \sqrt{19} \operatorname{arc tg} \frac{2x + 5}{\sqrt{19}}$

53. $\int \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 1} dx = 2 l (x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$

§ 7. Mehrfach vorkommende Wurzelfaktoren im Nenner.

a) Das Integral $\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^n}$ zu ermitteln, wenn der Grad von f (x) kleiner als n ist.

Man setze

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_{n-2}}{(x-a)^{n-2}} + \dots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a}$$

dann ist

$$f(x) = A_n + A_{n-1}(x-a) + A_{n-2}(x-a)^2 + \dots + A_1 (x-a)^{n-1}$$

woraus folgt

$$A_n = f(a),\ A_{n-1} = \frac{1}{1!} f'(a),\ A_{n-2} = \frac{1}{2!} f''(a), \dots,$$

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

und ist das gesuchte Integral angegeben durch

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A_n}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{A_{n-1}}{(n-2)(x-a)^{n-2}} - \dots - \frac{A_2}{x-a} + A_1 \, l\,(x-a).$$

54. Beispiel.

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}$$

$$f(x) = x^3 + 1 = A_4 + A_3 (x-1) + A_2 (x-1)^2 + A_1 (x-1)^3$$

$$f'(x) = 3x^2 = A_3 + 2A_2 (x-1) + 3A_1 (x-1)^2$$

$$f''(x) = 6x = 2A_2 + 6A_1 (x-1)$$

$$f'''(x) = 6 = 6A_1,$$

somit folgt für $x = 1$

$$A_4 = f(1) = 2, \qquad A_3 = f'(1) = 3,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} f''(1) = 3, \quad A_1 = \frac{1}{6} f'''(1) = 1$$

und

$$\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4} dx = -\frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + 1(x-1).$$

55. Beispiel.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{1}{8} 1 \frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$$

b) Wenn der zu integrierende Bruch von der Form $\frac{x^m}{(x-a)^n}$ ist, wo $m < n$ ist, so kann auch die Methode der teilweisen Integration zur Reduktion des Integrals angewendet werden.

Man erhält

$$\int \frac{x^m dx}{(x-a)^n} = -\frac{x^m}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{m}{n-1} \int \frac{x^{m-1} dx}{(x-a)^{n-1}}$$

56. Beispiel. Nach dieser Formel ist

$$\int \frac{x^3}{(x-a)^4} dx = -\frac{x^3}{3(x-a)^3} + \int \frac{x^2 dx}{(x-a)^3}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-a)^3} = -\frac{x^2}{2(x-a)^2} + \int \frac{x\,dx}{(x-a)^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x-a)^2} = -\frac{x}{x-a} + \int \frac{dx}{x-a}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = l\,(x-a), \quad \text{somit}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-a)^4} = -\frac{x^3}{3(x-a)^3} - \frac{x^2}{2(x-a)^2} - \frac{x}{x-a} + l\,(x-a).$$

c) Das Integral zu ermitteln $J = \int \frac{f(x)}{(x-a)^k} \frac{dx}{\varphi(x)}$.
Man setze

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k \varphi(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

so folgt hieraus

$$f(x) = \varphi(x)\left\{A_k + A_{k-1}(x-a) + \ldots + A_1 (x-a)^{k-1}\right\} + \psi(x)(x-a)^k$$

und erhält man zur Bestimmung von $A_k, A_{k-1}, \ldots$ die Gleichungen

$$f(a) = A_k\,\varphi(a)$$

$$f'(a) = A_k\,\varphi'(a) + A_{k-1}\,\varphi(a)$$

$$f''(a) = A_k\,\varphi''(a) + A_{k-1}\,.\,2\varphi'(a) + A_{k-2}\,.\,2\varphi(a)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f^{(n)}(a) = A_k\,\varphi^{(n)}(a) + A_{k-1}\,.\,n\,\varphi^{(n-1)}(a) + A_{k-2}\,.\,n(n-1)\,\varphi^{(n-2)}(a) + \ldots + A_{k-n+1}\,.\,n!\,\varphi(a).$$

Das Integral der ursprünglichen gebrochenen Funktion ergiebt sich alsdann durch Integration der einzelnen Partialbrüche

57. Beispiel. $J = \int \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 (x-1)^3} dx$

Setze

$$\frac{f(x)}{x^2 (x-1)^3} = \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 (x-1)^3} = \frac{A_3}{(x-1)^3}$$
$$+ \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{\psi(x)}{x^2},$$

dann ist

$$f(x) = x^3 + 3x + 2 = x^2 \left\{A_3 + A_2 (x-1) + A_1 (x-1)^2\right\}$$
$$+ \psi(x)(x-1)^3$$

$$f(1) = 6 = A_3$$
$$f'(1) = 6 = 2A_3 + A_2$$
$$f''(1) = 6 = 2A_3 + 4A_2 + 2A_1,$$

woraus folgt

$$A_3 = 6, \; A_2 = -6, \; A_1 = 9.$$

Setzt man ebenso

$$\frac{f(x)}{x^2 (x-1)^3} = \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 (x-1)^3} = \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_1}{x} + \frac{\psi(x)}{(x-1)^3},$$

so ist

$$f(x) = x^3 + 3x + 2 = (x-1)^3 \left\{B_2 + B_1 x\right\} + \psi(x) . x^2$$

und

$$f(0) = 2 = -B_2$$
$$f'(0) = 3 = 3B_2 - B_1,$$

woraus folgt

$$B_2 = -2, \; B_1 = -9.$$

Das gesuchte Integral ist somit

$$J = \int \frac{6\,dx}{(x-1)^3} - \int \frac{6\,dx}{(x-1)^2} + \int \frac{9\,dx}{x-1} - \int \frac{2\,dx}{x^2} - \int \frac{9\,dx}{x}$$

$$= -\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1} + \frac{2}{x} + 9\,l\,\frac{x-1}{x}.$$

§ 8. **Uebungsbeispiele.**

58. $$\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}\,dx = -\frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{4}{x+2} + l\,(x+2)$$

59. $$\int \frac{(x+1)^3}{(x-1)^4}\,dx = -\frac{6x^2-6x+\frac{8}{3}}{(x-1)^3} + l\,(x-1)$$

60. $$\int \frac{x^3+2x^2-1}{x^2(x-1)}\,dx = x - \frac{1}{x} - l\,x - 2\,l\,(x-1)$$

61. $$\int \frac{dx}{x(x-a)^2} = -\frac{1}{a(x-a)} - \frac{1}{a^2}\,l\,\frac{x-a}{x}$$

62. $$\int \frac{x^4-5x^3-30x^2-36x}{(x+1)^3(x^2-4)}\,dx = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$
$$+ 2\,l\,\frac{x+2}{x-2} + l\,(x+1)$$

63. $$\int \frac{dx}{(x-1)^3(x-2)^2 x} = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-2)}$$
$$+ 2\,l\,(x-1) - \frac{1}{4}\,l\,x - \frac{7}{4}\,l\,(x-2)$$

64. $$\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{4x-7}{54(x-1)^2} + \frac{1}{27}\,l\,\frac{x-1}{x+2}$$
$$+ \frac{1}{27(x+2)}$$

65. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{1}{8}\,l\,\frac{x-1}{x+1} - \frac{x}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x$$

66. $$\int \frac{x^5\,dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\,l\,(x^3+1) + \frac{1}{3(x^3+1)}.$$

III. Abschnitt.

Integration irrationaler Differentiale.

§ 9. Gebrochene Exponenten von x oder n^{te} Wurzel aus $a + bx$ in $f(x)$.

a) Sind in dem Integral $\int f(x)\,dx$ neben ganzen Potenzen von x auch solche mit gebrochenen Exponenten vorhanden, deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfache k ist, so setze man $x = t^k$, $dx = k\,t^{k-1}\,dt$, dann geht obiges Integral in ein rationales über

$$\int f(x)\,dx = k \int f(t^k)\,t^{k-1}\,dt.$$

67. Beispiel.

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}},\ x = t^6,\ dx = 6\,t^5\,dt$$

$$J = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} = 6\int \left\{ t^2 - t + 1 + \frac{1}{t+1} \right\} dt$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\,l\left(\sqrt[6]{x} + 1\right).$$

b) Integrale von der Form $\int f(x, \sqrt[n]{a+bx})\,dx$ werden rational gemacht, indem man setzt

$$a + bx = y^n,\ x = \frac{1}{b}(y^n - a),\ dx = \frac{n}{b}\,y^{n-1}\,dy.$$

68. Beispiel. Zu integrieren $J = \int x\sqrt{a-x}\,dx$
$a - x = y^2,\ x = a - y^2,\ dx = -2y\,dy$

$$J = -2\int y^2(a - y^2)\,dy = -\frac{2}{3}\,a\,y^3 + \frac{2}{5}\,y^5$$

$$= -\frac{2}{15}(2a + 3x)\sqrt{(a-x)^3}.$$

§ 10. Uebungsbeispiele.

69. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -x - 4\sqrt{x} - 4\,l(\sqrt{x} - 1)$

70. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+1} + l\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

71. $$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1}\,dx = \frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x} + \frac{6}{7}\,x\sqrt[6]{x} + x$$
$$+ \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}$$
$$+ 9\,l\left(\sqrt[6]{x} - 1\right) + 3\,l\left(\sqrt[6]{x} + 1\right)$$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{5}\sqrt{a+bx}$

73. $\int \sqrt{(a+bx)^m}\,dx = \frac{2}{(m+2)\,b}\sqrt{(a+bx)^{m+2}}$

74. $$\int x^2 \sqrt{a+x}\, dx = \frac{2}{105} \sqrt{a+x}\,(8a^3 - 4a^2 x + 3ax^2 + 15x^3)$$

75. $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{3} \sqrt{a-x}\,(x+2a)$$

76. $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\, dx = \sqrt{a+bx} + \frac{\sqrt{a}}{2}\, l\, \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}}$$

77. $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{a-x}} = -\frac{3}{10} \sqrt[3]{(a-x)^2}\,(2x+3a)$$

78. $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[5]{a+bx}} = \frac{1}{36 b^2} \sqrt[5]{(a+bx)^4}\,(4bx - 5a)$$

79. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} = \frac{1}{3a} \left\{ (x+a)^{\frac{3}{2}} + (x-a)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

80. $$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \sqrt{1-x^2} + l\, \frac{1+x}{2}.$$

§ 11. Ausdruck zweiten Grads unter dem Quadratwurzelzeichen.

Das Integral zu ermitteln

$$J = \int f(x, \sqrt{a + 2bx + cx^2})\, dx = \int f(x, W)\, dx.$$

Kommt die Quadratwurzel W in irgend einem Glied der Funktion f im Zähler vor, so schaffe man sie in den Nenner, indem man mit $W = \sqrt{a + 2bx + cx^2}$ erweitert, dann bleiben nur Glieder von der Form

$$\frac{x^n}{W} \text{ oder } \frac{1}{(x-\alpha)^k W}$$

zu integrieren.

Da die letzteren durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{y}$ in solche der ersten Art übergehen, so hat man nur noch Integrale von der Form zu behandeln

$$\int \frac{x^n}{W}\, dx \text{ oder } \int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{W}\, dx,$$

welche sich mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten zurückführen lassen auf das Integral $\int \frac{dx}{W}$, indem man setzt

$$\int \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{W}\, dx = (\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_0)\, W + \beta \int \frac{dx}{W},$$

woraus die Koeffizienten α und β nach beiderseitiger Differentiation dieser Gleichung durch Koeffizientenvergleichung gewonnen werden.

In Betreff des Integrals $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$ unterscheidet man folgende Fälle:

Erster Fall: Der Koeffizient von x^2 ist positiv gleich $+c$, dann ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c}}\, l \left\{ b + cx \pm \sqrt{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2} \right\}.$$

Zweiter Fall: Der Koeffizient von x^2 ist negativ gleich $-c$, dann ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b - cx}{\sqrt{b^2 + ac}}.$$

Dritter Fall: Wird in dem Ausdruck

$$W = \sqrt{a + 2bx + cx^2} \qquad b^2 - ac = 0,$$

so ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, l\,(x\sqrt{c} + \sqrt{a}).$$

81. Beispiel. Zur Reduktion des Integrals setze man

$$\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{1 - 2x + 3x^2}} \, dx = (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) W + \beta \int \frac{dx}{W}$$

wo α_2, α_1, α_0 und β unbestimmte Koeffizienten bedeuten. Um dieselben zu bestimmen, differentiiere man vorstehende Gleichung und multipliziere mit

$$W = \sqrt{1 - 2x + 3x^2}$$

durch, dann ergiebt sich die Gleichung

$$9x^3 - 3x^2 + 2 = (2\alpha_2 x + \alpha_1)(1 - 2x + 3x^2) + (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)(-1 + 3x) + \beta,$$

woraus durch Koeffizientenvergleichung folgt

$$\alpha_2 = 1, \ \alpha_1 = \frac{1}{3}, \ \alpha_0 = -\frac{1}{3}, \ \beta = \frac{4}{3}.$$

Da nun der Koeffizient von x^2 in $\sqrt{1 - 2x + 3x^2}$ positiv ist, so folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x + 3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \, l\left\{-1 + 3x + \sqrt{3}\sqrt{1 - 2x + 3x^2}\right\}.$$

Das gesuchte Integral ist daher dargestellt durch

$$\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{1 - 2x + 3x^2}} \, dx = \left(x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) W + \frac{4}{3\sqrt{3}} \, l\left\{-1 + 3x + \sqrt{3}\, W\right\}.$$

§ 12. Uebungsbeispiele.

W bedeutet die zu dem betr. Integral gehörige Wurzel.

a) Reduktionen.

82. $$\int \frac{4x^2+7x+5}{\sqrt{2x^2+6x+7}}\,dx = (x-1)\,W - 5\int\frac{dx}{W}$$

83. $$\int \frac{1+2x+2x^2}{\sqrt{1-2x-4x^2}}\,dx = \left(-\frac{x}{8}+\frac{13}{32}\right)W + \frac{57}{32}\int\frac{dx}{W}$$

84. $$\int \frac{A+2Bx+Cx^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{c}x + \frac{4Bc-3Cb}{c^2}\right)W$$
$$+\left(A - \frac{Cac+4Bbc-3Cb^2}{2c^2}\right)\int\frac{dx}{W}$$

85. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{W}{c} - \frac{b}{c}\int\frac{dx}{W}$$

86. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{2c^2}\right)W$$
$$+\frac{3b^2-ac}{2c^2}\int\frac{dx}{W}$$

87. $$\int\sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int\frac{a+2bx+cx^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$
$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)W + \left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int\frac{dx}{W}$$

88. $$\int\sqrt{7+8x-5x^2}\,dx = \frac{1}{10}(5x-4)\,W + \frac{51}{10}\int\frac{dx}{W}$$

b) Integrale von der Form $\int\frac{dx}{W}$.

89. $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = l\left(\frac{1}{2}+x+W\right)$$

90. $$\int \frac{dx}{\sqrt{-3 + 2x + x^2}} = l\,(1 + x + \sqrt{-3 + 2x + x^2})$$

91. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\,(bx \pm \sqrt{b}\,\sqrt{a + bx})$$

92. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left\{b + cx + \sqrt{c}\, W\right\}$$

93. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ arc sin } \frac{b - cx}{\sqrt{b^2 + ac}}$$

94. $$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 6x - 4x^2}} = \frac{1}{2} \text{ arc sin } \frac{3 - 4x}{\sqrt{21}}$$

95. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin } \frac{x}{a}$$

96. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{c} + \sqrt{a}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,(x\sqrt{c} + \sqrt{a}) \text{ für } b^2 - ac = 0$$

97. $$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x + \frac{x^2}{3}}} = \sqrt{3}\, l\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, x - \sqrt{3}\right).$$

c) Weitere Integrale mit Reduktionen.

98. $$\int \sqrt{a + bx^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + bx^2}$$
$$+ \frac{a}{2\sqrt{b}}\, l\left\{bx + \sqrt{b}\,\sqrt{a + bx^2}\right\}$$

99. $$\int \sqrt{a - bx^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a - bx^2}$$
$$+ \frac{a}{2\sqrt{b}} \text{ arc sin } x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

100. $\int \sqrt{2\,a\,x + x^2}\,dx = \frac{a + x}{2} W - \frac{a^2}{2} l\,(a + x + W)$

101. $\int \sqrt{2\,a\,x - x^2}\,dx = \frac{x - a}{2} W - \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \frac{a - x}{a}$

102. $\int x \sqrt{2\,a\,x - x^2}\,dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{a\,x}{6} - \frac{a^2}{2}\right) W$

$$+ \frac{a^3}{2} \text{arc sin} \frac{x - a}{a}$$

103. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$

104. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$

105. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b\,x^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{a + b\,x^2}$

106. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a + b\,x^2}} = \frac{x}{2\,b} W - \frac{a}{2\,b\sqrt{b}} l\,(b\,x + \sqrt{b}\,W)$

107. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a + b\,x^2}} = \left(\frac{x^2}{3\,b} - \frac{2\,a}{3\,b^2}\right) W.$

d) Integrale von der Form $J = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\,W}$ werden ermittelt, indem man setzt

$$x - \alpha = \frac{1}{y},\ dx = -\frac{dy}{y^2},$$

womit das Integral übergeht in

$$J = -\int \frac{dy}{\sqrt{c + 2\,(b + c\,\alpha)\,y + (a + 2\,b\,\alpha + c\,\alpha^2)\,y^2}}$$

worin $a + 2\,b\,\alpha + c\,\alpha^2 > 0$ oder < 0 und gleich Null sein kann und dann die oben behandelten Fälle eintreten können.

108. $$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-3y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{x-2}$$

109. $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{3}}$$

110. $$\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-8x+10}} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x+4}{(x-3)\sqrt{8}}$$

Allgemein ist für $a + 2b\alpha + c\alpha^2 > 0$ und $= p$:

111. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{p}}\, l\, \frac{a + b\alpha + (b + c\alpha)x \pm W}{x-\alpha}$$

Für $a + 2b\alpha + c\alpha^2 < 0$ und $= -q$, wo q positiv ist, erhält man

112. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \arcsin \frac{a + b\alpha + (b + c\alpha)x}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}$$

113. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\, \frac{a + bx + \sqrt{a}\, W}{x}$$

114. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{-a+bx}{x\sqrt{b^2+ac}}$$

a positiv.

Auch die Integrale von der Form $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k W}$ werden durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{y}$ in solche von der Form $\int \frac{y^{n-1}\,dy}{W}$ übergeführt. Letztere werden wie das Integral 81 reduziert und schliesslich integriert. Man erhält z. B. mit dieser Substitution

115. $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\int \frac{y^{n-1}\,dy}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)y+(a+2b\alpha+c\alpha^2)y^2}}$$

116. $$\int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{6-6y+y^2}} = -\frac{1}{x-1} W + 2\,l\,\frac{3-2x-W}{x-1}$$

117. $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{W}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{xW}$$

118. $$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-4x-2x^2}} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x}\right) W + 7\,l\,\frac{1-2x-W}{x}$$

119. $$\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2-2x-2}} = -\frac{W}{x+1} + 2\,l\,\frac{-1-2x-W}{x+1}.$$

e) Integrale von der Form $J = \int \frac{f(x)}{F(x)\,W}\,dx$ werden dadurch ermittelt, dass man $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche zerlegt, wodurch das Integral J in eine Summen von solchen der seitherigen Arten übergeht.

120. $$\int\frac{dx}{(x^2-4)\,W}=\frac{1}{4}\int\left\{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right\}\frac{dx}{W}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-2)\,W}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+2)\,W}$$

121. $$\int\frac{(x+2)\,dx}{(x-3)^2\,W}=5\int\frac{dx}{(x-3)^2\,W}+\int\frac{dx}{(x-3)\,W}$$

122. $$\int\frac{(x-2)\,dx}{x^2\sqrt{x^2+6x+45}}=\frac{2}{45}\,\frac{W}{x}$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{5}}\,l\,\frac{x+15-\sqrt{5}\,W}{x}$$

f) Besondere irrationale Integrale. Durch Einführung neuer Veränderlichen lassen sich folgende Integrale auf einfachere zurückführen und integrieren.

123. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y}}=-\sqrt{a^2-x^2}\quad [x^2=y]$$

124. $$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+cx^4}}=\frac{1}{2c}\sqrt{a+cx^4}$$

125. $$\int\sqrt{\frac{x}{a^3-x^3}}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{a^3-y^2}}$$
$$=\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}\qquad [x^3=y]$$

126. $$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$$

127. $$\int x^3 \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}\, dx = \frac{x^2 - 2a^2}{4} \sqrt{a^4 - x^4} - \frac{a^4}{4} \arcsin \frac{x^2}{a^2}.$$

IV. Abschnitt.

Integration transcendenter Differentiale.

§ 13. Exponential- und logarithmische Funktionen.

a) Grundformeln.

128. $$\begin{cases} \int e^x\, dx = e^x \\ \int a^x\, dx = \frac{a^x}{l\, a} \end{cases}$$

b) Integration durch Substitution.

129. $$\int f(e^{kx})\, e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} \int f(y)\, dy$$

$$e^{kx} = y, \quad e^{kx}\, dx = dy$$

130. $$\int \frac{dx}{e^{kx}} = - \frac{1}{k e^{kx}}$$

131. $$\int \frac{e^x\, dx}{(e^x + a)^n} = - \frac{1}{(n-1)(e^x + a)^{n-1}}$$

132. $$\int f(e^{kx})\, dx = \frac{1}{k} \int f(y) \frac{dy}{y}$$

$$e^{kx} = y, \quad dx = \frac{dy}{k y}$$

133. $$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx = l\,(e^x - 2 + e^{-x})$$

134. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = l(\sqrt{1+e^x}-1) - l(\sqrt{1+e^x}+1)$

135. $\int f(a^x)\, a^x\, dx = \frac{1}{la} \int f(y)\, dy$

$$a^x = y,\ a^x\, la\, dx = dy$$

136. $\int \frac{a^x\, dx}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2la}\, l(a^{2x}+1)$

137. $\int f(a^x)\, dx = \frac{1}{la} \int f(y) \frac{dy}{y}$

$$a^x = y,\ a^x\, la\, dx = dy$$

138. $\int \frac{a^x+1}{a^x-1}\, dx = \frac{1}{la}\, l\, \frac{(a^x-1)^2}{a^x}$

139. $\int f(a^x)\, dx = \int f(e^{kx})\, dx$

$$a = e^k,\ k = la$$

140. $\int \frac{a^x}{a^x-1}\, dx = \int \frac{e^{kx}\, dx}{e^{kx}-1} = \frac{1}{k}\, l(e^{kx}-1)$

141. $\int \frac{dx}{a^x + a^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{kx}+e^{-kx}} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} e^{kx}$

$$= \frac{1}{la} \operatorname{arc\,tg} a^x$$

142. $\int f(lx) \frac{dx}{x} = \int f(lx)\, dlx = \int f(y)\, dy$

$$lx = y,\ \frac{dx}{x} = dy$$

143. $\int \frac{lx}{x}\, dx = \int y\, dy = \frac{(lx)^2}{2}$

144. $\int \frac{(lx)^2+1}{x}\, dx = \frac{1}{3}(lx)^3 + lx$

145. $\int \frac{dx}{x(lx+1)} = \int \frac{dy}{y+1} = l(lx+1)$

c) Die Methode der teilweisen Integration nach der Formel $\int u dv = uv - \int v du$ wird mit Vorteil angewendet, wenn es sich darum handelt, Integrale von folgender Art zu ermitteln.

146. $\int x^2 e^x dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$

$\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$

$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$

147. $\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

148. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

$$= e^x \left\{x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \ldots\right\}$$

149. $\int x^n e^{kx} dx = \frac{x^n e^{kx}}{k} - \frac{n}{k} \int e^{kx} x^{n-1} dx$

150. $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2x + \frac{2}{9}\right) e^{3x}$

151. $\int (a + bx)^n e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} (a + bx)^n - \frac{nb}{k} \int (a + bx)^{n-1} e^{kx} dx$

152. $\int \frac{e^{kx} dx}{(a+bx)^n} = - \frac{1}{b(n-1)} \frac{e^{kx}}{(a+bx)^{n-1}} + \frac{k}{b(n-1)} \int \frac{e^{kx} dx}{(a+bx)^{n-1}}$

Integrale von der Form $\int \frac{e^{kx} dx}{a+bx}$ lassen sich nur durch Reihenentwicklung ermitteln.

153. $$\int \frac{e^x\,dx}{x} = \int\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)dx$$
$$= l\,x + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \ldots$$

154. $$\int \frac{e^x\,dx}{x^2} = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}\,dx \text{ usw.}$$

155. $\int l\,x\,dx = x\,(l\,x - 1)$

156. $\int (l\,x)^2\,dx = x\left\{(l\,x)^2 - 2\,l\,x + 2\right\}$

157. $\int (l\,x)^n\,dx = x\,(l\,x)^n - n\int (l\,x)^{n-1}\,dx$

158. $$\int x^n\,l\,x\,dx = \frac{x^{n+1}\,l\,x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(l\,x - \frac{1}{n+1}\right)$$

159. $$\int \frac{l\,x}{x^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\left(l\,x + \frac{1}{n-1}\right)$$

160. $$\int (a+b\,x)^2\,l\,x\,dx = \frac{(a+b\,x)^3\,l\,x}{3\,b}$$
$$- \frac{1}{3\,b}\int \frac{(a+b\,x)^3}{x}\,dx$$

§ 14. Trigonometrische Funktionen.

a) Grundformeln.

161. $\int \cos x\,dx = \sin x$

162. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

163. $$\int \cos n\,x\,dx = \frac{1}{n}\sin n\,x$$

164. $$\int \sin n\,x\,dx = -\frac{1}{n}\cos n\,x$$

165. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

166. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$

b) Integration durch Substitution.

167. $\int f(\sin x) \cos x \, dx = \int f(y) \, dy$

$$\sin x = y, \ \cos x \, dx = dy$$

168. $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -l \cos x$

169. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \, dx = l \sin x - l \cos x = l \operatorname{tg} x$

170. $\int \cos^n x \sin x \, dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x$

171. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x}$

172. $\int f(\sin x) \cos^{2n+1} x \, dx = \int f(\sin x) (1 - \sin^2 x)^n \, d \sin x$

173. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x \, (1 - \sin^2 x) \, d \sin x$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$$

174. $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x$

175. $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x$

176. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - l \cos x$

177. $\int \frac{\sin^5 x \, dx}{\cos x} = \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{4} - l \cos x$

178. $$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}$$

179. $$\int \sin^{2n+1} x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n\, d \cos x$$

180. $$\int \sin^3 x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)\, d \cos x$$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

181. $$\int \sin^5 x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2\, d \cos x$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$$

182. $$\int \sin^7 x\, dx = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x$$

183. $$\int \mathrm{tg}^{2n+1} x\, dx = -\int \frac{(1 - \cos^2 x)^n}{\cos^{2n-1} x}\, d \cos x$$

184. $$\int \mathrm{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{l} \cos x$$

185. $$\int \mathrm{tg}^5 x\, dx = \frac{1}{4} \mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{l} \cos x$$

186. $$\int f(\mathrm{tg}\, x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\mathrm{tg}\, x)\, d\, \mathrm{tg}\, x$$

187. $$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx = \int \mathrm{tg}\, x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \mathrm{tg}\, x\, d\, \mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}$$

188. $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x\, d\, \mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}$$

189. $$\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x}\, dx = \int \mathrm{tg}^n x\, d\, \mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{tg}^{n+1} x}{n+1}$$

190. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\mathrm{tg}\, x \cos^2 x} = \int \frac{d\, \mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x} = \mathrm{l}\, \mathrm{tg}\, x$$

191. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Durch die Substitution

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2},$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x = dy$$

werden folgende Integrale rational gemacht und leicht integrierbar

192. $$\int \frac{dx}{\sin^{2m} x \cos^{2n} x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^{2m} x} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m+n-1}$$
$$= \int \frac{(1 + y^2)^{m+n-1}}{y^{2m}} dy$$

193. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} 2x$$

194. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x.$$

Setzt man $\sin x = y$, $\cos x \, dx = dy$, so ergeben sich folgende Integrale, die durch Partialbruchzerlegung weiterzuführen sind.

195. $$\int \frac{f(\sin x)\, dx}{\cos^{2n-1} x} = \int f(\sin x) \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^n} = \int \frac{f(y)\, dy}{(1 - y^2)^n}$$

196. $$\int \frac{\sin^n x \, dx}{\cos x} = \int \frac{\sin^n x \, d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{y^n \, dy}{1 - y^2}$$

197. $$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\sin x - \frac{1}{2} l \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$$

198. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x - \mathrm{l}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

199. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x}\, dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x$

$$+ \mathrm{l}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

200. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, dx = \frac{1}{\cos^2 x}\left(-\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin x\right)$

$$-\frac{3}{2}\,\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Die Substitution $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = y$ giebt

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2},\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2},\ \mathrm{tg}\,x = \frac{2y}{1-y^2},$$

$$\mathrm{ctg}\,x = \frac{1-y^2}{2y},\ dx = \frac{2\,dy}{1+y^2}$$

201. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{y} = \mathrm{l}\,y = \mathrm{l}\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)$

202. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int dy = y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$

203. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{\sin\alpha}{a}\,\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\,\frac{x+\alpha}{2}\ \left[\frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha\right]$

c) Integration durch allmähliche Reduktion nach der Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

204. $\int \sin^n x\, dx = -\int \sin^{n-1} x\, d\cos x = -\cos x \sin^{n-1} x$

$$+ (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

$$- (n-1)\int \sin^n x\,dx.$$

Hieraus folgt

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Setzt man $x = \frac{\pi}{2} - y$, $dx = -dy$ und schreibt nachher wieder x für y, so folgt hieraus

205. $$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Werden diese Formeln umgekehrt und wird alsdann $n-2$ durch $-n$ ersetzt, so ergeben sich hieraus die weiteren Formeln

206. $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

207. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

208. $$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x$$

209. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

210. $$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}(\sin^2 x + 2)\cos x$$

211. $$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \cos x\left(\frac{\sin^3 x}{4} + \frac{3}{8}\sin x\right)$$

212. $$\int \sin^5 x\,dx = -\cos x\left(\frac{1}{5}\sin^4 x + \frac{4}{15}\sin^2 x + \frac{8}{15}\right)$$

213. $\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{16}\,x - \cos x\left(\frac{1}{6}\sin^5 x + \frac{5}{24}\sin^3 x + \frac{5}{16}\sin x\right)$

214. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$

215. $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\cos x\left(\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3\sin x}\right)$

$$= -\,\mathrm{ctg}\,x - \frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3 x$$

Auf Integrale dieser Art lassen sich auch die folgenden zurückführen, wie folgt:

216. $\int \cos^{2m} x \sin^{2n} x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^m \sin^{2n} x\,dx$

217. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x\,dx$

$$= \int \cos^2 x\,dx - \int \cos^4 x\,dx$$

$$= \frac{x}{8} + \cos x\left(\frac{\sin^3 x}{4} - \frac{\sin x}{8}\right)$$

218. $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \frac{x}{16} + \cos x\left(-\frac{\sin x}{16} - \frac{\sin^3 x}{24} + \frac{\sin^5 x}{6}\right)$

219. $\int f(\sin x)\cos^{2n} x\,dx = \int f(\sin x)(1 - \sin^2 x)^n\,dx$

220. $\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^5 x (1 - \sin^2 x)\,dx$

$$= \int \sin^5 x\,dx - \int \sin^7 x\,dx$$

221. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^5 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^5 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x}$

Die teilweise Integration führt auch zu folgenden Formeln:

222. $\int \mathrm{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx$

223. $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \mathrm{tg}\, x - x$

224. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 x + l \cos x$

225. $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx = \frac{1}{3} \mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + x$

§ 15. Vermischte transcendente Integrale.

a) Integration durch Substitution.

226. $\int f(\mathrm{arc}\sin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(y)\, dy$

$$\mathrm{arc}\sin x = y,\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dy$$

227. $\int \frac{\mathrm{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \mathrm{arc}\sin x\, d\, \mathrm{arc}\sin x$

$$= \frac{1}{2} (\mathrm{arc}\sin x)^2$$

228. $\int f(\mathrm{arc\,tg}\, x) \frac{dx}{1+x^2} = \int f(y)\, dy$

$$\mathrm{arc\,tg}\, x = y,\ \frac{dx}{1+x^2} = dy$$

229. $\int \mathrm{arc\,tg}\, x \frac{dx}{1+x^2} = \int \mathrm{arc\,tg}\, x\, d\, \mathrm{arc\,tg}\, x$

$$= \frac{1}{2} \left\{\mathrm{arc\,tg}\, x\right\}^2$$

Vermittelst der teilweisen Integration ergeben sich die Integrale.

230. $\int \mathrm{arc}\sin x\, dx = x\, \mathrm{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}$

231. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - l \sqrt{1 + x^2}$

232. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{arc} \sin x \, dx = x - \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arc} \sin x$

233. $\int x^n \operatorname{arc} \sin x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc} \sin x$

$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

234. $\int x^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1 + x^2} \, dx$$

235. $\int x^n \sin x \, dx = - x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$

236. $\int \frac{\sin x}{x^n} \, dx = - \frac{\sin x}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} \, dx$

237. $\int \frac{\cos x}{x^n} \, dx = - \frac{\cos x}{(n-1) x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} \, dx$

238. $\int e^x \sin x \, dx = - e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$

239. $\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

Aus den beiden letzten Integralen folgt

240. $\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$

241. $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$

V. Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

§ 16. Regeln und Lehrsätze über das bestimmte Integral.

a) Regel. Das bestimmte Integral $\int_b^a f(x)\,dx$ zwischen den Grenzen a und b wird erhalten, indem man ohne Rücksicht auf die Konstante C das unbestimmte Integral F (x) ermittelt und hierauf die Differenz der Werte bildet, welche dasselbe für $x = a$ und $x = b$ annimmt.

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b).$$

242. Beispiel.

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

b) Satz. Ein bestimmtes Integral geht in seinen entgegengesetzten Wert über, wenn man die Grenzen miteinander vertauscht.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Satz. Ein bestimmtes Integral verschwindet, wenn die Grenzen einander gleich werden.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Satz. Anstatt die Integration von der Grenze b bis zur Grenze a direkt auszuführen, kann man eine (oder mehrere) Zwischengrenze c einführen und zunächst von b bis c integrieren und nachträglich die Integration von c bis a fortsetzen.

$$\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx.$$

c) Integration bis $x = \infty$. Wird eine der Grenzen, z. B. die obere, unendlich gross, so wird der Grenzwert

$$\lim_{x=\infty} \int_b^x f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \left\{ F(x) - F(b) \right\}$$

als der Wert des Integrals bezeichnet für die obere Grenze $x = \infty$.

243. Beispiel.

$$\int_b^{x=\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x=\infty} \left\{ \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} b \right\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} b.$$

(Siehe Fig. 1.)

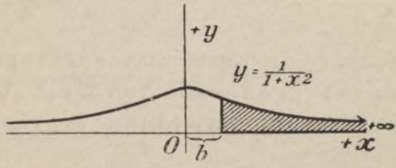

Fig. 1.

244. Beispiel.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x=+\infty} \operatorname{arc\,tg} x - \lim_{x=-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(Siehe Fig. 2.)

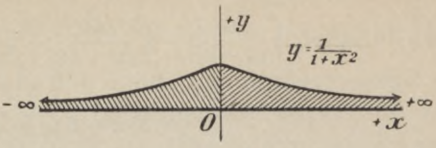

Fig. 2.

d) Integration bis zu einer Unstetigkeitsstelle von f (x).

Wird f (x) für eine der Grenzen, z. B. die obere $x = a$ selbst unstetig durch Unendlichwerden, so heisst

$$\int_b^{x=a} f(x)\,dx = \lim_{x=a} \int_b^x f(x)\,dx = \lim_{x=a} \left\{ F(x) - F(b) \right\}$$

der Wert des Integrals für den Fall, dass sich hiebei überhaupt ein bestimmter Grenzwert ergiebt. Ist dies nicht der Fall, so darf die Integration auch nicht bis $x = a$ ausgedehnt werden.

245. Beispiel. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{x=a} \arcsin \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$

e) Integration über eine Unstetigkeitsstelle von f (x).

Wird f (x) für einen Wert $x = c$, der zwischen den Grenzen b und a des Integrals liegt ($b < c < a$), unstetig, so ist der Wert des bestimmten Integrals dargestellt durch den Grenzwert

$$\int_x^a f(x)\,dx = \lim_{x=c} \int_b^x f(x)\,dx + \lim_{x=c} \int_x^a f(x)\,dx$$

246. **Beispiel.** $\int\limits_0^{2a}\frac{dx}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}=\int\limits_0^{a}\frac{dx}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}+\int\limits_a^{2a}\frac{dx}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}$

$$=3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{a}=6\sqrt[3]{a}.$$

f) **Geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals.**

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen a und x lässt sich als Grenzwert definieren, welchem die Summe

$$Un=\triangle x\left\{f(x)+f(x+\triangle x)+\ldots\right.$$
$$\left.+f(x+[n-1]\triangle x)\right\}$$

der n elementaren Flächenstreifen (Fig. 3) bei unendlich wachsendem n zustrebt und stellt geometrisch den In-

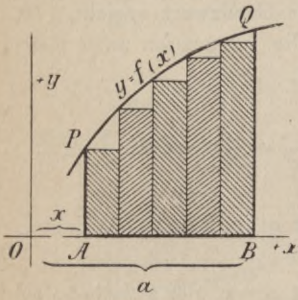

Fig. 3 a.

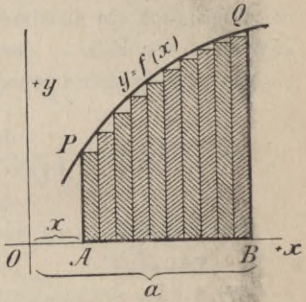

Fig. 3 b

halt der Fläche P A B Q = U dar, der von der Abscissenaxe, den Ordinaten P A und Q B und der Curve y = f (x) begrenzt wird.

$$U=\lim Un=\int\limits_x^a f(x)\,dx=F(a)-F(x)$$

Satz. Das bestimmte Integral $\int\limits_x^a f(x)\,dx$ zwischen den endlichen Grenzen a und x lässt sich, wenn f (x) innerhalb derselben endlich und stetig ist, in eine konvergente nach Potenzen von (a − x) fortschreitende Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten durch Ableitung von f (x) gewonnen werden:

$$\int\limits_x^a f(x)\,dx = (a-x)\,f(x) + \frac{1}{2!}(a-x)^2 f'(x) + \frac{1}{3!}(a-x)^3 f''(x) + \ldots$$

§ 17. Uebungsbeispiele.

247. $\int\limits_{-1}^{+1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$

248. $\int\limits_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = -\frac{1}{4}$

249. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

250. $\int\limits_0^1 a^{kx}\,dx = \frac{1}{k\,l\,a}(a^k - 1)$

251. $\int\limits_0^1 x\,e^x\,dx = 1.$

252. $\int\limits_0^1 x^n\,l\,x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$

253. $\int_1^\infty \frac{lx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)^2}$

254. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}$

255. $\int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 \, d\varphi = 3\pi$

256. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{4}{3}$

257. $\int_0^\infty e^{-kx} \, dx = \frac{1}{k}$

258. $\int_0^{-\infty} a^x \, dx = -\frac{1}{la}$

259. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}$

260. $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n!$

261. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

262. $\int_0^a \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a$ (Fig. 21.)

263. $$\int_0^{\frac{4}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{32}{27}$$

264. $$\int_0^a \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{3}{16}\pi a^4$$

265. $$\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

266. $$\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)a$$

267. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\quad 2n}$$

268. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi = \frac{2.4.6\ldots\quad 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$

VI. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die ebene Geometrie.

§ 18. Rektifikation ebener Kurven.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Die Länge s. des Bogens P Q der Kurve $y = f(x)$ (Fig. 4) zu bestimmen.

Die gesuchte Länge ist dargestellt durch das bestimmte Integral

$$s = \int_b^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_b^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

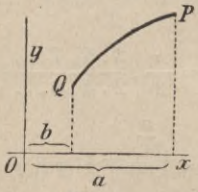

Fig. 4.

269. Beispiel. Die Länge des Kreisbogens zu berechnen.

Es ist die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

woraus folgt

$$y^2 = a^2 - x^2,\ y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2},\ y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ \text{somit}$$

$$s = \int_0^a ds = a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} a.$$

270. **Beispiel.** Die Länge des Bogens der Epicykloide mit den Gleichungen

$$x = (a + r) \cos \varphi - r \cos \frac{a + r}{r} \varphi$$

$$y = (a + r) \sin \varphi - r \sin \frac{a + r}{r} \varphi$$

zu berechnen.

Vorstehende Gleichungen geben

$$dx = -(a + r) \left(\sin \varphi - \sin \frac{a + r}{r} \varphi \right) d\varphi,$$

$$dy = (a + r) \left(\cos \varphi - \cos \frac{a + r}{r} \varphi \right) d\varphi,$$

daher ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2 (a + r)^2 \left\{ 1 - \cos \frac{a \varphi}{r} \right\} d\varphi^2$$

$$= 4 (a + r)^2 \sin^2 \frac{a \varphi}{2 r} d\varphi^2,$$

$$ds = 2 (a + r) \sin \frac{a \varphi}{2 r} d\varphi,$$

$$s = 2 (a + r) \int_0^\varphi \sin \frac{a \varphi}{2 r} d\varphi$$

$$s = \frac{4}{a} r (a + r) \left\{ 1 - \cos \frac{a \varphi}{2 r} \right\} = \frac{8 r}{a} (a + r) \sin^2 \frac{a \varphi}{4 r}.$$

Der Winkel φ hängt mit dem Wälzungswinkel ψ des rollenden Kreises durch die Gleichung zusammen $a \varphi = r \psi$. Wird nun $\psi = 2 \pi$, also $\varphi = 2 \pi \frac{r}{a}$, so erhält man hieraus als Länge einer Epicykloide

$$s = \frac{8\,r}{a}\,(a + r).$$

Ist der Radius des rollenden Kreises n-mal so gross als der feste Kreis $a = n\,r$, so schliesst sich die Kurve; man erhält als Länge eines Zweiges $s = 8\,r\,\frac{n+1}{n}$ und somit als ganze Länge der Kurve

$$S = n\,s = 8\,r\,(n + 1).$$

Für den Fall $n = 1$ geht die Kurve in eine Kardioide über, deren Länge nach Beispiel 271 $S = 16\,r$ ist.

b) Für Polarkoordinaten.

Die Länge des Bogens AB der Kurve $r = f(\varphi)$ (Fig. 5) zu berechnen.

Man erhält als Länge des Bogens AB

$$s = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,\varphi}\right)^2}\, d\,\varphi.$$

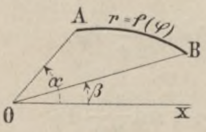

Fig. 5.

271. Beispiel. Die Länge des Bogens der Kardioide (Fig. 6) $r = 2\,a\,(1 + \cos\varphi)$ zu berechnen.

Es ist

$$r' = -\,2\,a\sin\varphi,$$

$$ds = 2\,a\sqrt{2\,(1 + \cos\varphi)}\,d\,\varphi = 4\,a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\,\varphi$$

$$s = \int_0^\varphi ds = 4\,a \int_0^\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8\,a\,\sin\frac{\varphi}{2}.$$

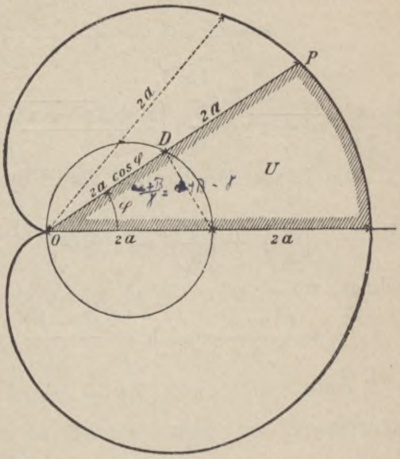

Fig. 6.

Für $\varphi = \pi$ ergiebt sich hieraus als halber Umfang der Kardioide

$$\frac{S}{2} = 8\,a; \text{ somit ist } \mathbf{S = 16\,a.}$$

§ 19. **Uebungsbeispiele.**

272. Die Länge des Parabelbogens (Fig. 7) zu berechnen.

$$f(x\,y) = x^2 - 2\,p\,y = 0,\; y' = \frac{x}{p},\; s = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\;dx$$

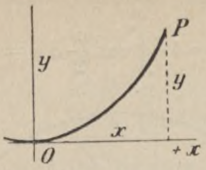

Fig. 7.

$$s = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2+x^2} + \frac{p}{2}\,l\left\{\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}\right\}.$$

273. Die Länge der Evolute der Ellipse (Fig. 8)

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$$

zu berechnen, wo

$$a_1 = \frac{a^2-b^2}{a} \text{ und } b_1 = \frac{a^2-b^2}{b}$$

gesetzt ist.

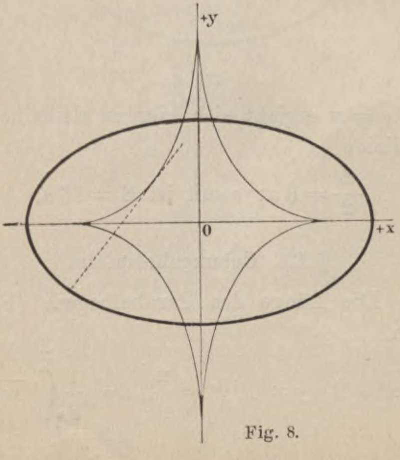

Fig. 8.

Setzt man $x = a_1 \cos^3 \varphi$, so folgt $y = b_1 \sin^3 \varphi$ und

$$s = \frac{1}{a_1^{\,2} - b_1^{\,2}} \sqrt{(a_1^{\,2} \sin^2 \varphi + b_1^{\,2} \cos^2 \varphi)^3} - b_1^{\,3}.$$

274. Den Bogen der Neilschen Parabel

$$f = a y^2 - x^3 = 0$$

zu berechnen.

$$s_x = \frac{a}{27} \left\{ \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}.$$

275. Die Länge der Kurve $r = 2a(\cos\varphi + \sin\varphi)$ zu berechnen.

$$r' = 2a(\cos\varphi - \sin\varphi), \quad \sqrt{r^2 + r'^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$s = \int_0^{\varphi} 2a\sqrt{2}\, d\varphi = 2a\sqrt{2} \,.\, \varphi$$

Ganzer Umfang $\quad S_{2\pi} = 4\pi a \sqrt{2}.$

Die Kurve ist ein Kreis vom Radius $r = 2a\sqrt{2}\cdot$

276. Zu beweisen, dass die Kreisevolvente mit den Gleichungen

$$x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \quad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

die Länge besitzt $\quad s = a\dfrac{\varphi^2}{2}.$

277. Die Länge der Hypocykloide mit den Gleichungen

$$x = (a - r)\cos\varphi + r\cos\frac{a - r}{r}\varphi,$$

$$y = (a - r)\sin\varphi - r\sin\frac{a - r}{r}\varphi$$

zu berechnen. Man erhält

$$s = \frac{8r(a - r)}{a} \sin^2 \frac{a\varphi}{4r},$$

woraus für $\varphi = \frac{2\pi r}{a}$ als Länge einer Hypocykloide folgt

$$s = \frac{8\,r\,(a - r)}{a}.$$

278. Den Bogen der archimedischen Spirale $r = a\,\varphi$ zu rektifizieren.

$$s = a\left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\,l\,(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\right]_0^\varphi.$$

§ 20. Quadratur ebener Kurven.

a) Für Parallelkoordinaten.

Den Flächeninhalt U zu bestimmen (Fig. 9), der von der x-Axe, der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten der Punkte A und B begrenzt ist.

Zwei Parallelen zur y-Axe, in der Entfernung x und $x + dx$ gezogen, schneiden aus der Fläche einen elementaren Streifen heraus, der näherungsweise gleich

$$d\,U = y\,dx = f(x)\,dx$$

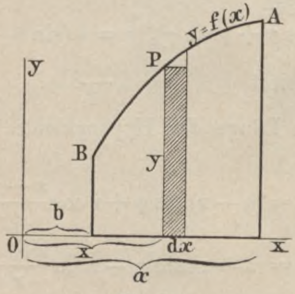

Fig. 9.

ist. Der gesuchte Inhalt ist daher angegeben durch das bestimmte Integral

$$U = \int_b^a y\,dx = \int_b^a f(x)\,dx.$$

279. Beispiel. Den Flächeninhalt der Ellipse von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu berechnen.

Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

woraus folgt

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Da man nur das obere Zeichen zu nehmen braucht, ist

$$U = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right\}_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{x\,y}{2} + \frac{a\,b}{2} \arcsin \frac{x}{a} \Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{a\,b}{2} \left\{ \arcsin \frac{x_2}{a} - \arcsin \frac{x_1}{a} \right\}.$$

280. Beispiel. Den Inhalt der gleichseitigen Hyperbel $x\,y = a^2$ zwischen den Geraden $x_1 = a$ und $x_2 = x$ zu berechnen. (Fig. 10.)

Man erhält

$$U = \int_a^x y\,dx = a^2 \int_a^x \frac{dx}{x} = a^2 \left\{ l\,x - l\,a \right\}$$

Setzt man $a = 1$, $x_1 = 1$ und $x_2 = x$, so erhält man

$$U = l\,x$$

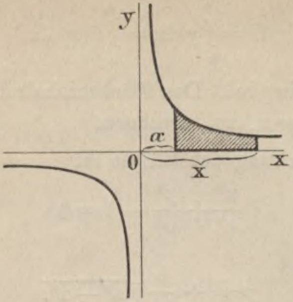

Fig. 10.

281. Beispiel. Den Flächeninhalt der Cykloide zu berechnen.

Die Kurve ist dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),\ y = a(1 - \cos\varphi).$$

Es ist daher $dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi$, also

$$U\varphi = \int y\,dx = a^2\int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^2\,d\varphi \text{ oder}$$

$$U\varphi = \frac{a^2}{2}\left\{3\varphi - \sin\varphi\,(4 - \cos\varphi)\right\}.$$

Der Inhalt eines Cykloidenabschnitts ergiebt sich hieraus für $\varphi = 2\pi$ $U_{2\pi} = 3\pi a^2$.

c) Für Probekoordinaten.

Den Flächeninhalt des Sektors O A B (Fig. 11) zu

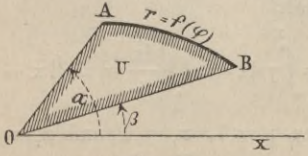

Fig. 11.

bestimmen, der von den Radienvektoren O A und O B und dem Bogen A B der Kurve $r = f(\varphi)$ begrenzt ist.

Der gesuchte Inhalt ist, da

$$dU = r\,d\varphi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}\,d\varphi \text{ ist, angegeben durch}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} f^2(\varphi)\,d\varphi$$

282. **Beispiel.** Den Inhalt der Fusspunktskurve der Ellipse (Fig. 12) $r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$ zu berechnen.

Man erhält

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi + \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

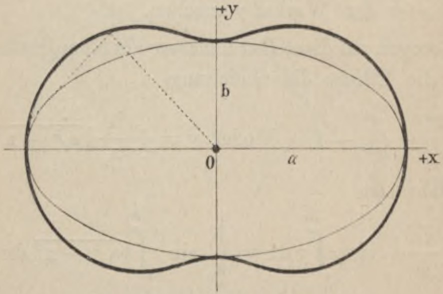

Fig. 12.

d) **Für schiefwinklige Koordinaten** ist der Flächeninhalt (Fig. 13), der von der x-Axe, der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten der Punkte A und B begrenzt ist, angegeben durch

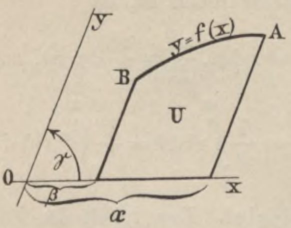

Fig. 13.

$$U = \sin\gamma \int_\beta^\alpha y\,dx = \sin\gamma \int_\beta^\alpha f(x)\,dx,$$

wo γ den Winkel der Koordinatenaxen bezeichnet.

283. Beispiel. Den Flächeninhalt der Ellipse zu bestimmen, wenn von derselben zwei konjugierte Durchmesser von den Längen $2a_1$ und $2b_1$ bekannt sind, die miteinander den Winkel γ machen.

Bezogen auf diese Durchmesser als Koordinatenaxen, erhält die Ellipse die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0 \text{ oder } y = \pm \frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - x^2}.$$

Daher ist

$$\frac{U}{4} = \sin\gamma \int_0^{a_1} y\,dx = \frac{b_1}{a_1}\sin\gamma \int_0^{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\gamma\, a_1\, b_1,$$

somit ist $$U = \pi \sin\gamma\, a_1\, b_1.$$

§ 21. Uebungsbeispiele.

284. Allgemeine parabolische Kurven $y^n = p\,x^m$.

$$U = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}}\, dx = \frac{n}{m+n}\, x\, y$$

285. Die Kurve

$$f(x\,y) = x^2 y^2 + a^2 y^2 - b^2 x^2 = 0$$

zu quadrieren.

$$U = b \int_0^x \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{b}{2}\left(\sqrt{a^2 + x^2} - a\right).$$

286. Quadratur der Kurve (Fig. 14)

$$y^2 = x^3 - x^2 \text{ von } x = 1 \text{ bis } x = x.$$

$$U = \int_1^x y\, dx = \frac{2}{15}\sqrt{x-1}\,(x+1)\,(x-2).$$

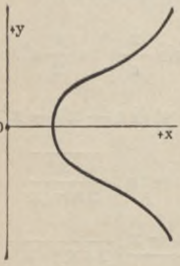

Fig. 14.

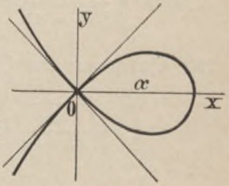

Fig. 15.

287. Den Inhalt der Kurve (Fig. 15)

$$a\,(y^2 - x^2) + x^3 = 0$$

zu berechnen.

$$U = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a x \sqrt{a - x}\, dx = \frac{4}{15} a^2.$$

288. Quadratur der Kurve (Fig. 16)

$$f(x\,y) = y^2 (a^2 - x^2) - a^2 x^2 = 0$$

$$U = \int_0^a \frac{a\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2$$

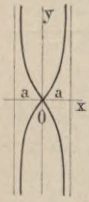

Fig. 16.

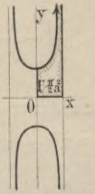

Fig. 17.

289. $f = y^2 (a^2 - x^2) - a^4 = 0$ (Fig. 17),

$$U = a^2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} a^2.$$

290. Quadratur der Cissoide $y^2 (2a - x) - x^3 = 0$

$$U = \int_0^x x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\, dx = 3 a^2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$
$$- \frac{3a + x}{2} \sqrt{2ax - x^2}.$$

Für $x = 2a$ folgt hieraus als halber Inhalt der Fläche zwischen Kurve und Asymptote

$$\frac{U}{2} = \frac{3\pi}{2} a^2, \text{ somit ist } U = 3\pi a^2.$$

291. Der Flächeninhalt der Asteroide

$$f = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

ist angegeben durch

$$U = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

292. Den Inhalt des gemeinschaftlichen Flächenstücks der beiden Parabeln $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ zu bestimmen.

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right\} dx = \frac{4}{3} p^2.$$

293. Archimedische Spirale. $r = a\varphi$

$$U_\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{6} \varphi^3 = \frac{\varphi}{6} r^2.$$

294. Logarithmische Spirale $r = a e^{k\varphi}$

$$U_\varphi = \frac{a^2}{4k} (e^{2k\varphi} - 1) = \frac{r^2 - a^2}{4k}$$

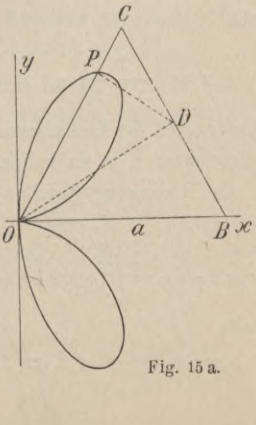

Fig. 15 a.

295. Quadratur der Kurve $r = 2\,a\cos\varphi\sin^2\varphi$. (Fig. 15 a.) Inhalt einer Schleife ist

$$\frac{U}{2} = \frac{\pi}{16}\,a^2,$$

somit ergiebt sich als Inhalt der ganzen Kurve

$$U = \frac{\pi}{8}\,a^2.$$

296. Die Fläche der Kreisevolvente $r = a\sqrt{1+\varphi^2}$ zu bestimmen.

$$U = \frac{\varphi^3 a^2}{6}.$$

297. Die Fläche der Parabel $y^2 - 2\,p\,x = 0$ durch eine Parallele zur y-Axe im Verhältnis $m : n$ zu teilen.

Die Abscisse x der teilenden Parallelen berechnet sich aus

$$\int_0^x y\,dx : \int_x^a y\,dx = m : n \text{ oder aus}$$

$$x^{\frac{3}{2}} : \left(a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) = m : n,$$

womit sich ergiebt

$$x = \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{2}{3}} a.$$

298. Den Quadranten der Lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\,\varphi$ durch einen Radiusvektor r, φ zu halbieren.

Man erhält als Bedingungsgleichung zur Berechnung von φ

$$\int_0^\varphi \cos 2\,\varphi\, d\varphi = \int_\varphi^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\,\varphi\, d\varphi,$$

woraus sich ergiebt

$$\sin 2\,\varphi = 1 - \sin 2\,\varphi \text{ oder } 2\sin 2\,\varphi = 1,$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{6}, \ \varphi = \frac{\pi}{12}; \ r = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

womit eine einfache Konstruktion angezeigt ist.

Soll die Fläche durch einen Radiusvektor im Verhältnis m : n geteilt werden, so berechnet sich das zugehörige Azimut φ aus

$$n \sin 2\varphi = m(1 - \sin 2\varphi)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{m}{m+n}, \ \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{m}{m+n},$$

womit r den Wert erhält

$$r = a\left(\frac{2}{m+n}\right)^{\frac{1}{2}}(2mn + n^2)^{\frac{1}{4}}.$$

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integralrechnung auf die Geometrie des Raums.

§ 22. Kubatur begrenzter Räume.

a) Von beliebigen Flächen.

Schneidet eine Ebene parallel zur yz-Ebene aus der Fläche (Fig. 18), deren Gleichung $F(xyz) = 0$ sei,

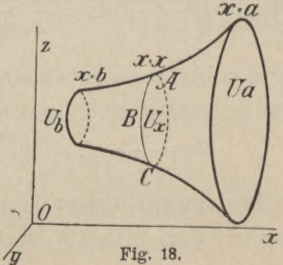

Fig. 18.

eine Scheibe vom Inhalt $U_x = f(x)$ aus, so ist der Rauminhalt des ganzen Körpers zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ dargestellt durch

$$V = \int_b^a U_x\,dx = \int_b^a f(x)\,dx.$$

299. Beispiel. Den Rauminhalt des dreiaxigen Ellipsoids von der Gleichung

$$F(xyz) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zu berechnen.

Eine Ebene, parallel zur yz-Ebene in der Entfernung x gelegt, schneidet dasselbe nach einer Ellipse mit den Halbaxen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\ \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und dem Inhalt

$$U_x = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Der Inhalt des ganzen Ellipsoids ist somit angegeben durch

$$V = \int_{-a}^{+a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc,$$

woraus sich für $c = b = a$ als Inhalt einer Kugel vom Radius a ergiebt

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

b) Von Umdrehungsflächen.

Eine Kurve $y = f(x)$ (Fig. 19) beschreibt bei der

Drehung um die x-Axe einen Rotationskörper, dessen Inhalt angegeben ist durch

$$V = \pi \int_b^a y^2\, dx = \pi \int_b^a \{f(x)\}^2\, dx.$$

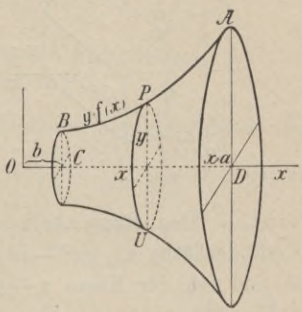

Fig. 19.

300. Beispiel. Die Parabel $y^2 = 2px$ erzeugt bei der Drehung um die x-Axe, bzw. y-Axe einen Umdrehungskörper vom Inhalt

$$V_x = \pi \int_0^x y^2\, dx = \pi \int_0^x 2px\, dx = \pi p x^2, \text{ bzw.}$$

$$V_y = \pi \int_0^y x^2\, dy = \pi \int_0^y \frac{y^4}{4p^2}\, dy = \frac{\pi}{20} \frac{y^5}{p^2} = \frac{\pi}{5} x^2 y.$$

c) Von cylindrischen **Räumen**.

Der Rauminhalt, der von den beiden Cylinderflächen (Fig. 20)

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x),$$

der xy-Ebene, zx-Ebene und den beiden Parallelebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, ist angegeben durch

$$V = \int_b^a y\,z\,dx = \int_b^a f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

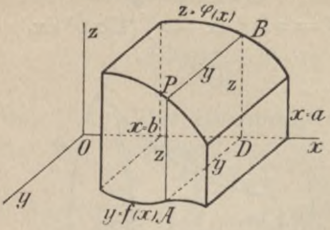

Fig. 20.

301. Beispiel. Den Rauminhalt zu bestimmen, der von der Cylinderfläche $x^2 + z^2 - a^2 = 0$, der xy- und yz-Ebene und von der Ebene $x + y - a = 0$ begrenzt wird. (Fig. 21.)

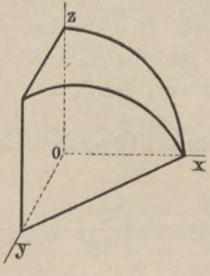

Fig. 21.

Es ist $y = f(x) = a - x$, $z = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, somit ist

$$V = \int_0^a (a - x)\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)a^3 = 0{,}452\,a^3.$$

§ 23. Uebungsbeispiele.

302. Den Inhalt des Kreiskegels von der Gleichung $F(x\,y\,z) = y^2 + z^2 - p\,x^2 = 0$ zu berechnen.

Es ist $U_x = \pi\, p\, x^2$, also

$$V = \pi \int_0^a p\, x^2\, dx = \frac{\pi}{3}\, p\, a^3.$$

303. Den Inhalt des elliptischen Kegels, dessen Gleichung $F = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$ ist, zu bestimmen.

$$U_x = \pi \frac{b\,x}{a} \cdot \frac{c\,x}{a} = \pi \frac{b\,c\,x^2}{a^2}$$

$$V_x = \int_0^x U_x\, dx = \pi \frac{b\,c}{a^2} \frac{x^3}{3}.$$

Für $x = a$ folgt hieraus

$$V a = \frac{\pi}{3}\, a\, b\, c.$$

304. Der Inhalt des Paraboloids zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = a$ ist

$$V = \int_0^a U_x\, dx = \int_0^a \pi \frac{b\,c\,x}{a}\, dx = \frac{\pi}{2}\, a\, b\, c.$$

305. Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, der von der Fläche $F = x\, y^2 + c\, z^2 - a^2\, x = 0$ und den Ebenen $x = 0$ und $x = x$ begrenzt wird.

U_x ist eine Ellipse von den Halbaxen a und $a\sqrt{\frac{x}{c}}$, daher ist

$$V_x = \int_0^x U_x\,dx = \pi \int_0^x a^2 \sqrt{\frac{x}{c}}\,dx = \frac{2}{3}\pi a^2 x \sqrt{\frac{x}{c}}.$$

Für $x = a$ folgt $Va = \frac{2}{3}\pi a^3$.

306. Ein Kreis bewegt sich stets parallel zur yz-Ebene mit seinem Mittelpunkt auf der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

und berührt beständig die x-Axe. Welches ist der Rauminhalt des erzeugten Körpers?

$$U_x = \pi z^2 = \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$\frac{V}{2} = \int_{-a}^{a} \pi z^2\,dx = \frac{4}{3}\pi b^2 a,\quad V = \frac{8}{3}\pi b^2 a.$$

307. Tritt an Stelle der Ellipse in der letzten Aufgabe die Asteroide $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$, so ist

$$U_x = \pi z^2 = \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \text{ und ist}$$

$$\frac{V}{4} = \pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \pi \frac{16}{105} a^3 = \frac{4}{35} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3.$$

308. Eine Gerade (Fig. 22) bewegt sich parallel zur yz-Ebene und schneidet beständig die beiden Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ und } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

in der xy- bzw. zx-Ebene. Gesucht ist der Rauminhalt des erzeugten Körpers.

$$U_x = \frac{yz}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{bc}{a^2}\,(a^2 - x^2),\ V = \int_0^a U_x\,dx = \frac{1}{3}\,abc.$$

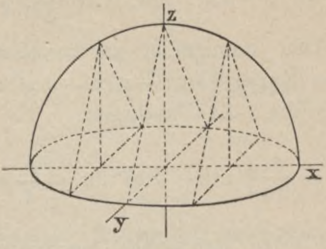

Fig. 22.

309. Ein sich ähnlich bleibendes Rechteck $(z:y = \lambda)$ bewegt sich parallel zur yz-Ebene mit einer Ecke A auf der x-Axe, einer anderen Ecke D auf dem Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ in der xy-Ebene. Gesucht ist der Rauminhalt des erzeugten cylindrischen Raumes.

$$V = \int_{-a}^{+a} yz\,dx = \lambda \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\,\lambda\,a^3.$$

310. Den Inhalt der Kugelzone von der Höhe h zu berechnen. $U_x = \pi\,(a^2 - x^2)$

$$V = \pi \int_c^{c+h} (a^2 - x^2)\,dx = \pi h \left\{a^2 - \frac{h^2}{3} - c\,(c+h)\right\}.$$

Für $c = 0$ und $h = a$ folgt hieraus als Inhalt der Halbkugel vom Radius a $V = \frac{2}{3}\,\pi\,a^3$.

311. Dreht sich die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ um

die x-Axe, bzw. y-Axe, so beschreibt sie einen Rotationskörper vom Inhalt

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2, \text{ bzw. } V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

312. Den Rauminhalt zu berechnen, den die Schleife der Kurve $9 a y^2 - x (x - 3 a)^2 = 0$ bei der Drehung um die x-Axe beschreibt.

$$V = \frac{\pi}{9 a} \int_0^{3 a} x (x - 3 a)^2 \, dx = \frac{3}{4} \pi a^3.$$

313. Welchen Rauminhalt beschreibt die Kurve $x^2 y^2 + a^2 y^2 - b^2 x^2 = 0$ bei der Drehung um die x-Axe?

$$V = \pi b^2 \int_0^x \frac{x^2 \, dx}{a^2 + x^2} = \pi b^2 \left(x - a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}\right).$$

314. Den Rauminhalt des Körpers zu bestimmen, der von den beiden Cylinderflächen $z^2 = 2 p x$, $x^2 = 2 p y$, der $x y$- und $z x$-Ebene und der Ebene $x = x$ begrenzt ist.

$$V = \int_0^x \frac{x^2}{2 p} \sqrt{2 p x} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{\frac{x}{2 p}}.$$

315. Den gemeinschaftlichen Raum der beiden Cylinderflächen (Fig. 23)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \quad x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

zu berechnen.

$$\frac{V}{8} = \int_0^a y z \, dx = \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{16}{105} a^3, \quad V = \frac{128}{105} a^3.$$

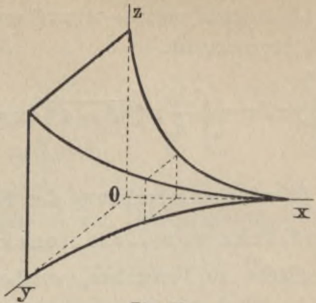

Fig. 23.

316. Welchen Rauminhalt schneidet die Ebene $x + z - a = 0$ von der Cylinderfläche

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0 \text{ ab?}$$

$$V = \int_0^a y\,z\,dx = \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} (a - x)\,dx$$

$$= \left(\frac{3\pi}{32} - \frac{8}{105}\right) a^3.$$

317. Die Durchdringung der Flächen

$$2p(z - c) + x^2 = 0 \text{ und } y\,a - b\,x = 0$$

(Teil eines Klostergewölbes) zu bestimmen.

$$V = \int_0^x y\,z\,dx = \int_0^x \frac{b\,x}{a}\left(c - \frac{x^2}{2p}\right) dx = \frac{1}{8}\,\frac{b\,x^2}{a}\left(4c - \frac{x^2}{p}\right).$$

Für $x = \sqrt{2pc}$ ergiebt sich als Inhalt des ganzen Raumes

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,p\,c^2.$$

318. Den Inhalt des kreisförmigen Klostergewölbes zu bestimmen.

Derselbe bildet den Raum, der von den Koordinatenebenen, dem Cylinder $x^2 + z^2 - a^2 = 0$ und der Ebene $b\,x - a\,y = 0$ begrenzt ist.

$$V = \int_0^a y\,z\,dx = \int_0^a \frac{b}{a}\,x\,\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2 b}{3}.$$

§ 24. Oberflächenberechnung der Körper.

a) Oberfläche von Rotationskörpern.

Die Oberfläche zu berechnen, welche eine Kurve $y = f(x)$ bei der Drehung um eine der Axen erzeugt.

Irgend ein Punkt $P\,(x\,y)$ der Kurve $y = f(x)$ (Fig. 24) beschreibt bei der Drehung um die x-Axe

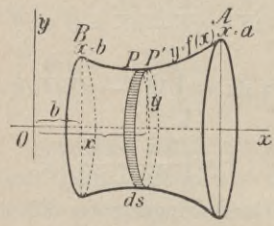

Fig. 24.

einen Kreis vom Radius $y = f(x)$, dessen Umfang

$$2\,\pi\,y = 2\,\pi\,f(x).$$

Der Bogen $P\,P' = ds$ beschreibt hiebei eine reifförmige Fläche vom Oberflächeninhalt

$$d\,O = 2\,\pi\,y\,ds = 2\,\pi\,f(x)\,ds$$

und der Kurvenbogen $B\,A$ einen Umdrehungskörper, dessen Oberfläche ist:

$$O = 2\,\pi \int_b^a y\,ds = 2\,\pi \int_b^a f(x)\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Bei der Drehung um die y-Axe wird ein Rotationskörper erzeugt vom Oberflächeninhalt

$$O = 2\pi \int_{y=c}^{y=d} x\, ds = 2\pi \int_{c}^{d} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

319. Beispiel. Die Oberfläche des Ellipsoids zu berechnen, das bei der Drehung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

um eine ihrer Axen entsteht.

Bei der Drehung um die x-Axe ist, wenn

$$a^2 - b^2 = e^2$$

gesetzt wird:

$$O = 2 \cdot \frac{2 b \pi}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - e^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{2 b \pi}{a^2} \left\{ x \sqrt{a^4 - e^2 x^2} + \frac{a^4}{e^2} \arcsin \frac{e x}{a^2} \right\}_0^a$$

oder

$$O = 2 \pi b^2 + \pi \frac{a^2 b}{e} \arcsin \frac{e}{a}.$$

Bei der Drehung um die y-Axe entsteht ein Ellipsoid vom Oberflächeninhalt

$$O = 2 \cdot \frac{2 a \pi}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + e^2 y^2}\, dy$$

$$= 2 \pi \frac{a}{b^2} \left\{ y \sqrt{b^4 + e^2 y^2} + \frac{b^4}{e}\, l (e^2 y + e \sqrt{b^4 + e^2 y^2}) \right\}_0^b$$

oder

$$O = 2 \pi a^2 + \pi \frac{a b^2}{e}\, l \frac{a + e}{b}.$$

Für $b = a$ wird $e = 0$ und geht die Oberfläche beidemal in diejenige einer Kugel vom Radius a über.

b) Oberfläche von Cylinderflächen.

Stirn- und Scheitelfläche des Durchdringungskörpers (Fig. 25) der beiden Cylinderflächen

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x)$$

zu berechnen.

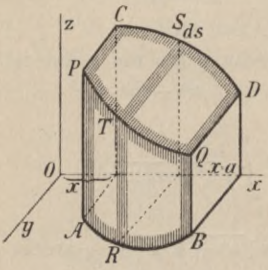

Fig. 25.

Durchschneiden sich beide Flächen nach der Raumkurve PQ und ist T ein Punkt derselben mit den Koordinaten x y z, so ist das Element der Stirnfläche PABQ angegeben durch

$$d\,O_{xy} = TR \,.\, ds = z\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

und das der Scheitelfläche PCDQ durch

$$d\,O_{zx} = TS \,.\, ds_1 = y\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

Hieraus ergiebt sich als Gesamtoberfläche:

$$\text{Stirnfläche } PABQ = O_{xy} = \int_b^a z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_b^a \varphi(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$\text{Scheitelfläche } PCDQ = O_{zx} = \int_b^a y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_b^a f(x)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx.$$

320. Beispiel. Es sollen Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Cylinderflächen

$$y = f(x) = \sqrt{ax - x^2}, \quad z = \varphi(x) = 2\sqrt{ax}$$

berechnet werden. (Fig. 25 a.)

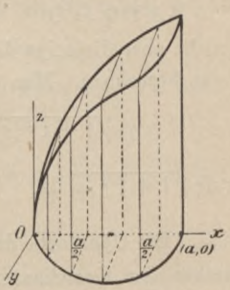

Fig. 25 a.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{a}{x}}$$

somit Stirnfläche

$$O_{xy} = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = 2a^2,$$

Scheitelfläche

$$O_{zx} = \int_0^a \sqrt{ax - x^2}\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}a^2.$$

c) Ist an Stelle der einen Cylinderfläche, z. B. $z = \varphi(x)$, eine allgemeinere Fläche $z = F(xy)$ gegeben, welche die Cylinderfläche nach der Kurve PQ durchschneiden möge, so lässt sich nur die Oberfläche

$$PABQ = O$$

dieses Cylinders, nicht aber diejenige der Fläche $F(xy)$ in der obigen Weise berechnen. Man findet

$$O = \int z\,ds = \int F(xy)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \quad \text{oder}$$

$$O = \int_b^a F(x, f)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

321. Beispiel. Die Oberfläche der Cylinderfläche $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ zwischen den Koordinatenebenen und der Kugelfläche

$$z = F(xy) = \sqrt{a^2k^2 - x^2 - y^2}$$

zu berechnen.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad F(x, f) = \sqrt{a^2k^2 - a^2} = a\sqrt{k^2 - 1},$$

somit

$$U = \int_0^a a\sqrt{k^2-1}\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= a^2\sqrt{k^2-1}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a^2\sqrt{k^2-1}\ \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}a^2\sqrt{k^2-1}.$$

§ 25. Uebungsbeispiele.

a) Rotationsflächen.

322. Die Mantelfläche eines Kegels zu berechnen, den die Gerade

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

bei der Drehung um die x-Axe beschreibt.

Es ist

$$y=\frac{b}{a}(a-x),\ dy=-\frac{b}{a}dx,\ ds=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\,dx,$$

daher

$$O=2\pi\int_0^a y\,ds = 2\pi\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}\int(a-x)\,dx$$

$$=\pi b\sqrt{a^2+b^2}.$$

323. Die Oberfläche einer Kugelzone von der Höhe h zu berechnen.

Es ist

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$O=2\pi\int_b^{b+h} y\,ds = 2\pi a\int_b^{b+h} dx = 2\pi h.$$

324. Die Umdrehungsfläche der Parabel $y^2 = 2px$ zu berechnen.

a) Drehung um die x-Axe:

$$O_x = 2\pi \sqrt{p} \int_0^x \sqrt{p + 2x}\, dx = \frac{2\pi}{3} \sqrt{p} \left\{ (p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right\}$$

b) Drehung um die y-Axe:

$$O_y = \frac{\pi}{p^2} \int_0^y y^2 \sqrt{p^2 + y^2}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{8} \frac{y}{p^2} (p^2 + 2y^2) \sqrt{p^2 + y^2} - \frac{\pi p^2}{8} l \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

325. Die Oberfläche des Körpers zu berechnen, welchen die Cykloide bei der Drehung um ihre Axe erzeugt.

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

$$O = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi) \sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\, d\varphi$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

326. Die Rotationsoberfläche der Asteroide zu berechnen.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0,$$

$$\frac{O}{2} = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6}{5} \pi a^2;$$

somit ist

$$O = \frac{12}{5} \pi a^2 = \frac{3}{5} \cdot 4\pi a^2.$$

327. Rotationsoberfläche der Sinuslinie $y = \sin x$

$$U_x = 2\pi \int_0^x y \, ds$$

Es ist $y' = \cos x$, $ds = \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$, somit

$$U_x = 2\pi \int_0^x \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = 2\pi \int_x^0 \sqrt{1 + \cos^2 x}\, d\cos x$$

$$= 2\pi \Big\{ \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{2} \, l \left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) \Big\}_x^0$$

Ein Abschnitt der Sinuslinie beschreibt somit bei der Drehung die Oberfläche

$$U_\pi = 4\pi\sqrt{2} - \pi \, l \left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

328. Die Oberfläche des Wulstes zu berechnen, der bei der Drehung des Kreises $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ oder $r = 2a \sin\varphi$ um die x-Axe entsteht.

Es ist $ds = 2a\, d\varphi$, somit

$$O = 2\pi \int_0^\pi r \sin\varphi \, . \, 2a\, d\varphi = 4\pi^2 a^2.$$

329. Fläche, erzeugt durch Drehung der Schleife der Lemniscate um die x-Axe.

Es ist

$$r^2 = 4a^2 \cos\varphi \sin\varphi, \text{ somit } r' = a\, \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}} \text{ und}$$

$$ds = \frac{a\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}},$$

womit sich ergiebt

$$U = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, ds = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi = 4\pi a^2.$$

330. Den Flächeninhalt zu berechnen, den die Lemniscate $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ bei der Drehung um die x-Axe, bzw. y-Axe beschreibt.

Man findet $ds = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, somit

$$\frac{U_x}{2} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} y\, ds = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \sin\varphi\, ds = 4a^2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Die ganze Oberfläche, die von beiden Schleifen beschrieben wird, ist daher angegeben durch

$$U_x = 8a^2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Ebenso ist

$$\frac{U_y}{2} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, ds = 2\pi \int r \cos\varphi\, ds = 2\pi a^2 \sqrt{2},$$

$$U_y = 4\pi a^2 \sqrt{2}.$$

331. Fläche, erzeugt durch Drehung der Cardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ um die Polaraxe.

Es ist

$$ds = 4a \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,\ y = r\sin\varphi = 2a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$$

somit

$$O = 2\pi \int_0^{\pi} y\, ds = \frac{128}{5}\pi a^2 = \frac{32}{5} \cdot 4\pi a^2.$$

b) Oberfläche von Cylinderflächen.

332. Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Kreiscylinder (Fig. 26)

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},\ z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

zu berechnen.

$$O_{zx} = O_{xy} = \int_0^a z\sqrt{1 + y'^2}\, dx = a^2.$$

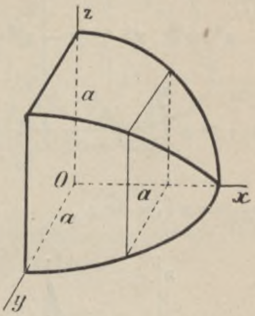

Fig. 26.

333. Die Oberfläche der Durchdringung der beiden Flächen $2p(z - c) + x^2 = 0$ und $a y - b x = 0$ zu berechnen.

$$\text{Stirnfläche } O_{xy} = \frac{2}{3}\frac{c}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)\, 2pc}$$

$$\text{Scheitelfläche } O_{zy} = \frac{b}{3ap}(p^2 + 2pc)^{\frac{3}{2}}.$$

334. Desgl. für die Flächen

$$x^2 + z^2 - a^2 = 0,\ ay - bx = 0$$

(kreisförmiges Klostergewölbe).

$$\text{Stirnfläche } O_{xy} = \int_0^a z\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Scheitelfläche } O_{zx} = \int_0^a y\sqrt{1+z'^2}\,dx = \int_0^a \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ab.$$

335. Die Oberfläche der Durchdringung der beiden Flächen (Fig. 27)

$$x^2+y^2-a^2=0,\quad x^2+(z-a)^2-a^2=0$$

zu berechnen.

$$\text{Stirnfläche } O_{xy} = a\int_0^a \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}+1\right)dx = \left(\frac{\pi}{2}+1\right)a^2$$

$$\text{Scheitelfläche } O_{zx} = a\int_0^a dx = a^2.$$

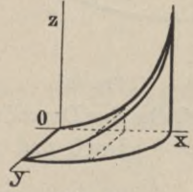

Fig. 27.

336. Desgleichen für $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{ax-x^2}$ (Fig. 27a).

$$\text{Stirnfläche } O_{xy} = \frac{a}{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{x}}\,dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{2} - \frac{a^2}{4}\,l\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\text{Scheitelfläche } O_{zx} = a\int_0^a \sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$$

$$= a^2\sqrt{2} + \frac{a^2}{2}\,l\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

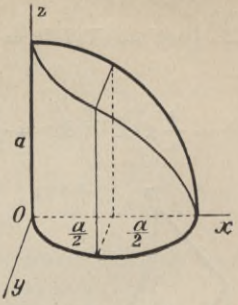

Fig. 27 a.

337. Die Oberfläche des gemeinschaftlichen Raumes der beiden Cylinderflächen

$$z^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

zu berechnen.

Man erhält als ganze Oberfläche

$$O = 8\, O_{xy} = 8\int_0^a z\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$= 8\, a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

oder

$$O = 8 \cdot \frac{3}{5}\, a^2 = \frac{24}{5}\, a^2.$$

338. Stirn- und Scheitelfläche der Durchdringung der beiden Cylinderflächen (Fig. 28)

$$z^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \; y = b - \frac{b}{a}\, x$$

zu berechnen. Man findet

$$O_{xy} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{32} a \sqrt{a^2+b^2}$$

$$O_{zx} = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \left(b - \frac{b}{a} x\right) x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{9}{10} a b.$$

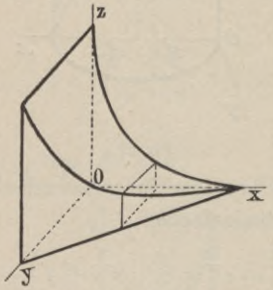

Fig. 28.

c) Besondere cylindrische Oberflächen.

339. Die Oberfläche des Kreiscylinders

$$y = \sqrt{2ax - x^2}$$

zu berechnen, der unten durch die xy-Ebene und oben durch die Kugelfläche $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ begrenzt ist

$$O = \int_0^{2a} z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2a\sqrt{2a} \int_0^{2a} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 4a^2.$$

340. Das Stück der Cylinderfläche $y = \sqrt{2ax - x^2}$ zu berechnen, welches von der xy-Ebene und der parabolischen Fläche $x^2 + y^2 - 2az = 0$ begrenzt ist.

$$\frac{O}{2} = a \int_0^{2a} \frac{x\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \pi a^2, \quad O = 2\pi a^2.$$

341. Berechne ebenso die Stirnfläche des Cylinders $y = \sqrt{2\,a\,x - x^2}$, der oben durch die Kegelfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

begrenzt ist.

$$O = c\sqrt{2\,a}\int\limits_0^{2\,a} \frac{dx}{\sqrt{2\,a - x}} = 4\,a\,c.$$

342. Die Stirnfläche des Cylinders

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$$

zu berechnen, der oben von der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

und unten von der $x\,y$-Ebene begrenzt ist

$$\frac{O}{8} = \sqrt{3}\,a^{\frac{2}{3}}\int\limits_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}\,dx = 3\sqrt{3}\,\frac{\pi}{16}\,a^2,$$

$$O = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\pi\,a^2.$$

§ 26. **Rektifikation der Raumkurven.**

Eine Raumkurve (Fig. 29) kann als Schnittkurve zweier Flächen $F(x\,y\,z) = 0$, $\Phi(x\,y\,z) = 0$ oder als Schnitt zweier Cylinderflächen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ betrachtet werden. In letzterem Fall ist

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$$

und ist das Linienelement der Raumkurve angegeben durch

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich als Länge des Kurvenbogens zwischen den Punkten P und Q mit den Abscissen x_0 und x

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

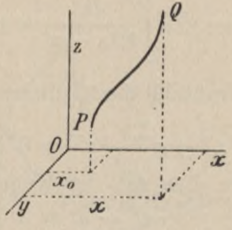

Fig. 29.

Werden die Koordinaten eines Punkts der Raumkurve in Funktion eines Parameters t ausgedrückt

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ z = \chi(t),$$

so ist

$$s = \int_{x_0 = \varphi(t_0)}^{x = \varphi(t)} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2}\, dt.$$

343. Beispiel. Die Länge der Schraubenlinie

$$x = a \cos t, \ y = a \sin t, \ z = \frac{h}{2\pi} t$$

zu bestimmen.

Es ist

$$\frac{dx}{dt} = - a \sin t, \ \frac{dy}{dt} = a \cos t, \ \frac{dz}{dt} = \frac{h}{2\pi},$$

somit

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{h^2 + 4\pi a^2} \,.\, t.$$

§ 27. Uebungsbeispiele.

344. Die Länge der Schnittkurve der beiden Cylinderflächen $2x^3 - 3a^2y = 0$, $x^2 - az = 0$ zu berechnen.

$$y' = \frac{2x^2}{a^2}, \quad z' = \frac{2x}{a},$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4x^4}{a^4}}\, dx = \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right) dx$$

$$s = \int_0^x \left(1 + \frac{2x^2}{a^2}\right) dx = x + \frac{2x^3}{3a^2} = x + y.$$

345. Die Schnittlinie der beiden Cylinderflächen $16y^2 - 9ax = 0$, $9z^4 - 16ax^3 = 0$ zu rektifizieren.

Man findet

$$ds = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{9a}{64x}, \text{ also}$$

$$s = x + \frac{3}{2}\sqrt{ax} + \frac{9}{64}\, a\, l\, x.$$

346. Wird die archimedische Spirale als Cylinderfläche angesehen, so schneidet dieselbe den Kegel

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

nach einer konischen Spirale, welche die Gleichungen erhält $x = a\varphi\cos\varphi$, $y = a\varphi\sin\varphi$, $z = a\varphi$.

Ihre Länge wird für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$

$$s = \frac{a\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2 + 2} + a\, l\, \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 2}}{\sqrt{2}}.$$

347. Die parabolische Schraubenlinie ist die Schnittlinie der beiden Flächen

$$x^2 + y^2 - 2az = 0, \quad z = 2a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

und kann durch die Gleichungen dargestellt werden

$$x = 2a\sqrt{\varphi}\cos\varphi,\quad y = 2a\sqrt{\varphi}\sin\varphi,\quad z = 2a\varphi.$$

Ihre Länge wird

$$s = \sqrt{2az} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{z^3}{2a}} = r + \frac{1}{3}\frac{rz}{a}.$$

348. Die Länge der konischen Spirale

$$x = ae^{k\varphi}\cos\varphi,\quad y = ae^{k\varphi}\sin\varphi,\quad z = ae^{k\varphi}$$

zu finden.

Man erhält $ds = ae^{k\varphi}\sqrt{1+2k^2}\,d\varphi$ und

$$s = a\sqrt{1+2k^2}\int_0^{\varphi} e^{k\varphi}\,d\varphi = \frac{a}{k}\sqrt{1+2k^2}\,(e^{k\varphi}-1).$$

349. Die Schnittlinie der beiden Flächen

$$cz = \sqrt{2}\,(x^2 - y^2),\quad z(x-y) = 2(x^2+y^2)$$

zu rektifizieren. Man erhält für den Bogen vom Ursprung bis zum Punkt $P(xyz)$ die Länge

$$s = 3x - 3y + z.$$

VIII. Abschnitt.

Schwerpunktsbestimmungen.

§ 28. Schwerpunkt von ebenen Kurvenbögen.

a) Für rechtwinklige Koordinaten.

Die Schwerpunktskoordinaten $\xi\,\eta$ des Kurvenbogens AB (Fig. 30) bestimmen sich aus

$$\xi\int_b^a ds = \int_b^a x\,ds,\quad \eta\int_b^a ds = \int_b^a y\,ds$$

wo $\int ds$ die Länge des Bogens AB bedeutet.

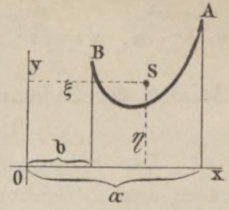

Fig. 30

350. Beispiel. Den Schwerpunkt des Viertelskreisbogens zu bestimmen.

Die Gleichung des Kreises sei $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, dann ist

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \int_0^a ds = \frac{\pi}{2} a \quad \text{und}$$

$$\int_0^a x\, ds = \int_0^a y\, ds = a \int_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2,$$

somit ergiebt sich

$$\xi = \eta = a^2 : \frac{\pi}{2} a = \frac{2a}{\pi}.$$

b) Für Polarkoordinaten.

Wenn die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist $r = f(\varphi)$, so gelten für ξ, η die Ausdrücke (Fig. 31)

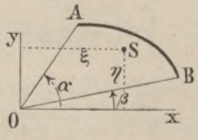

Fig. 31.

$$\xi = \int_\beta^\alpha r \cos\varphi \, ds : \int_\beta^\alpha ds, \quad \eta = \int_\beta^\alpha r \sin\varphi \, ds : \int_\beta^\alpha ds,$$

wo α und β die Azimuts der Radienvektoren O A und O B bedeuten.

351. Beispiel. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu bestimmen, dessen Gleichung $r = a$ ist.

Man erhält $ds = a \, d\varphi$, somit

$$\xi = \int_\beta^\alpha a^2 \cos\varphi \, d\varphi : \int_\beta^\alpha a \, d\varphi, \quad \eta = \int_\beta^\alpha a^2 \sin\varphi \, d\varphi : \int_\beta^\alpha a \, d\varphi \text{ oder}$$

$$\xi = a \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\alpha - \beta}, \quad \eta = -a \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\alpha - \beta}.$$

Hieraus ergeben sich für $\beta = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ als Schwerpunktskoordinaten des Viertelskreisbogens

$$\xi = \eta = \frac{2a}{\pi}.$$

§ 29. Uebungsbeispiele.

352. Den Schwerpunkt des Asteroidenbogens zu bestimmen. Die Gleichung der Kurve ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Man setze $x = a \cos^3\varphi$, $\eta = a \sin^3\varphi$, dann folgt für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$

$$\xi = \int_0^\varphi x \, ds : \int_0^\varphi ds = \frac{2}{5} a \, (1 - \cos^5\varphi),$$

$$\eta = \int_0^\varphi y \, ds : \int_0^\varphi ds = \frac{2}{5} a \sin^5\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt hieraus

$$\xi = \eta = \frac{2}{5}\,a.$$

353. Den Schwerpunkt des Bogens der Cykloide

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi),\quad y = a\,(1 - \cos\varphi)$$

für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ zu bestimmen.

Man findet

$$\xi = 2\,a\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$\eta = 2\,a\,\frac{\frac{2}{3} - \cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Für $\varphi = 2\,\pi$ ergeben sich hieraus als Koordinaten des Schwerpunkts eines Cykloidenzweigs

$$\xi = \pi\,a,\quad \eta = \frac{5}{3}\,a.$$

354. Den Schwerpunkt des Bogens der Kurve $9\,a\,y^2 - x\,(x - 3\,a)^2 = 0$ zwischen $x = 0$ und $x = x$ zu bestimmen.

$$\xi = \frac{x\,(3\,x + 5\,a)}{5\,(x + 3\,a)},\quad \eta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}\cdot\frac{x^2 - 3\,a\,x - 9\,a^2}{x + 3\,a}.$$

Für $x = 3\,a$ folgt $\xi = \frac{4}{5}\,a$, $\eta = -\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

355. Den Schwerpunkt des Bogens $\overset{\frown}{PA}$ der Kurve (Kreis) $r = 2\,a\cos\varphi$ für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ zu bestimmen. (Fig. 32.) Es ist

$$\xi = \frac{a}{\varphi}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right),\quad \eta = \frac{a}{\varphi}\sin^2\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergeben sich hieraus als Schwerpunktskoordinaten des Halbkreisbogens

$$\xi = a,\quad \eta = \frac{2a}{\pi}.$$

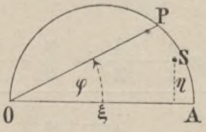

Fig. 32.

356. Kettenlinie. Den Schwerpunkt des Bogens von $x = 0$ bis $x = x$ zu bestimmen.

$$\xi = x - a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - 2 + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}},\quad \eta = \frac{4x + a\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)}{4\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)}.$$

357. Den Schwerpunkt des Bogens der Kurve $y^2 = 2ax - x^2$ von $x = 0$ bis $x = x$ zu bestimmen.

$$\xi = a - \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-x}{a}},\quad \eta = \frac{x}{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a-x}{x}}.$$

Für $x = 2a$ folgt hieraus, wie in 355

$$\xi = a,\quad \eta = \frac{2a}{\pi}.$$

§ 30. Schwerpunkt von ebenen Flächengebilden.

a) Den Schwerpunkt des Flächenstücks P A B Q (Fig. 33) zu bestimmen.

Das Moment des schraffierten elementaren Flächenstreifens in Bezug auf die y-Axe, resp. x-Axe ist

$$y\,dx\,.\,x \text{ resp. } y\,dx\,.\,\frac{y}{2},$$

daher ist, wenn $U = \int_b^a y\,dx$ den Inhalt der Fläche P A B Q und ξ, η die Koordinaten des Schwerpunkts bezeichnen

$$\xi\,U = \int_b^a x\,y\,dx, \qquad \eta\,U = \frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx,$$

woraus folgt

$$\xi = \int_b^a x\,y\,dx : U, \quad \eta = \frac{1}{2}\int_b^a y^2\,dx : U.$$

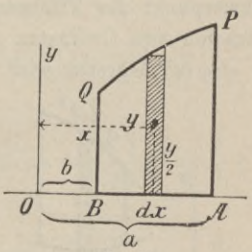

Fig. 33.

358. Beispiel. Den Schwerpunkt des Kreisquadranten zu bestimmen. (Fig. 34.)

Für die Kreisgleichung $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ erhält man

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$U = \int_0^a y\,dx = \frac{\pi}{4}\,a^2,$$

$$\int_0^a x\,y\,dx = -\frac{1}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = \frac{a^3}{3},$$

daher ist

$$\xi = \eta = \frac{a^3}{3} : \frac{\pi}{4}\,a^2 = \frac{4\,a}{3\,\pi}.$$

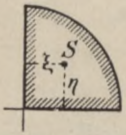

Fig. 34.

b) Den Schwerpunkt des Flächenstücks (Fig. 35) zu bestimmen, das von zwei Ordinaten und den Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ begrenzt wird.

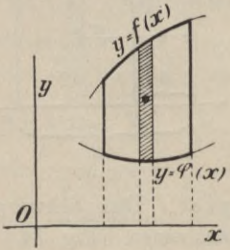

Fig. 35.

Man erhält für die Koordinaten ξ und η des gesuchten Schwerpunkts die Ausdrücke

$$\xi = \frac{M\,x}{U}, \quad \eta = \frac{M\,y}{U},$$

wo $$U = \int_b^a \left\{ f(x) - \varphi(x) \right\} dx$$

den Flächeninhalt und

$$M_x = \int_b^a x \left\{ f(x) - \varphi(x) \right\} dx, \text{ bzw.}$$

$$M_y = \frac{1}{2} \int_b^a \left\{ f^2(x) - \varphi^2(x) \right\} dx$$

die Momente des Flächenstücks P A B Q in Bezug auf die x-Axe, resp. y-Axe darstellen.

359. Beispiel. Den Schwerpunkt des gemeinschaftlichen Flächenstücks der beiden Parabeln (Fig. 36) $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ zu bestimmen.

Man setze

$$y = \sqrt{2px} = f(x) \text{ und } y = \frac{x^2}{2p} = \varphi(x),$$

dann ist

$$U = \int_0^{2p} \left\{ \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right\} dx = \frac{4}{3} p^2 \text{ und}$$

$$M_x = \int_0^{2p} x \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{6}{5} p^3,$$

$$M_y = \frac{1}{2} \int_0^{2p} \left\{ 2px - \frac{x^4}{4p^2} \right\} dx = \frac{6}{5} p^3,$$

somit ergiebt sich

$$\xi = \eta = \frac{Mx}{U} = \frac{My}{U} = \frac{6}{5} p^3 : \frac{4}{3} p^2 = \frac{9}{10} p.$$

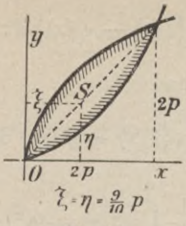

Fig. 36.

360. Beispiel. Den Schwerpunkt des (kleineren) Kreissegments (Fig. 37) zu bestimmen, welches durch die Gerade $x + y - a = 0$ von dem Kreis

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

abgeschnitten wird.

Man erhält

$$U = \frac{a^2}{4}(\pi - 2),\quad M_x = M_y = \frac{a^3}{6},\ \text{daher ist}$$

$$\xi = \eta = \frac{2a}{3(\pi - 2)}$$

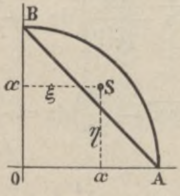

Fig. 37.

c) Für Polarkoordinaten. Den Schwerpunkt eines Flächensektors (Fig. 38) zu bestimmen, der von der Kurve $r = f(\varphi)$ und zwei Radienvektoren bestimmt ist.

Die Entfernung p des Schwerpunkts des Sektors

A O B von der Polaraxe (Fig. 38) ist angegeben durch

$$p = \frac{1}{3}\int_{\beta}^{\alpha} r^3 \sin\varphi \, d\varphi : \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} r^2 \, d\varphi$$

Das Azimut ψ des Vektors nach dem Schwerpunkt wird durch die Bedingung bestimmt, dass die beiden Sektoren A O C und C O B gleich sein müssen:

$$\int_{\psi}^{\alpha} r^2 \, d\varphi = \int_{\beta}^{\psi} r^2 \, d\varphi$$

Der zugehörige Radiusvektor erhält die Länge

$$\varrho = \frac{p}{\sin\psi}$$

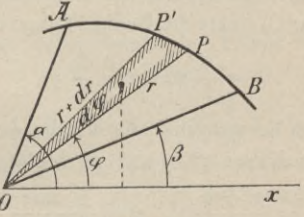

Fig. 38.

361. Beispiel. Den Schwerpunkt eines Kreissektors zu bestimmen.

Die Gleichung des Kreises ist $r = a$, somit ist

$$p = \frac{1}{3}\int_{0}^{\alpha} a^3 \sin\varphi \, d\varphi : \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} a^2 \, d\varphi$$

$$= -\frac{a}{3}\cos\varphi : \frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\varphi} \text{ oder}$$

$$p = \frac{a}{3}(1 - \cos\alpha) : \frac{\alpha}{2} = \frac{2a}{3\alpha}(1 - \cos\alpha)$$

$$\varrho = \frac{p}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2a}{3\alpha} \cdot \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{4a}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt hieraus wie oben No. 358 als Schwerpunktsordinate eines Kreisquadranten

$$p = \frac{4a}{3\pi}$$

§ 31. Uebungsbeispiele.

362. Den Schwerpunkt der Parabelfläche vom Ursprung bis zur Ordinate des Punkts P (x y) zu bestimmen.

$$\xi = \frac{3}{5}x, \quad \eta = \frac{3}{8}y.$$

363. Den Schwerpunkt der Fläche der allgemeinen parabolischen Kurve $y^n = a x^m$ zu bestimmen.

$$\xi = \frac{m+n}{m+2n}x, \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{m+n}{n+2m}y.$$

364. Den Schwerpunkt des Halbkreises zu ermitteln.

$$\eta = \frac{4a}{3\pi}.$$

365. Den Schwerpunkt der Fläche der Cykloide mit den Gleichungen $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ zu bestimmen.

$$\xi = \pi a, \quad \eta = \frac{5}{6}a.$$

366. Den Schwerpunkt des Asteroidenquadranten zu bestimmen. Gleichung der Asteroide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

$$\xi = \eta = \frac{256}{315}\,\frac{a}{\pi}$$

367. Den Schwerpunkt des Ellipsenquadranten zu berechnen.

Es ergeben sich als Koordinaten des Schwerpunkts

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

368. Den Schwerpunkt der halben Schleife der Curve $a y^2 = a x^2 - x^3$ zu berechnen.

$$\xi = -\frac{4}{7}\,a, \quad \eta = \frac{5}{32}\,a.$$

369. Den Schwerpunkt der Fläche der Neil'schen Parabel $a y^2 = x^3$ zu bestimmen.

$$\xi = \frac{5}{7}\,x, \quad \eta = \frac{5}{16}\,y.$$

370. Den Schwerpunkt der halben gemeinschaftlichen Fläche O A P (Fig. 39) der beiden Kreise

$$y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } y = \varphi(x) = a - \sqrt{a^2 - x^2}$$

zu bestimmen.

$$\xi = \frac{5a}{2(4\pi - 3\sqrt{3})}, \quad \eta = \frac{a}{2}.$$

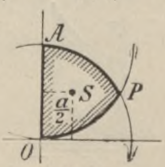

Fig. 39.

371. Den Schwerpunkt der halben gemeinschaftlichen Fläche der Parabel $x^2 = 2py$ und des Kreises $x^2 - y^2 - 8p^2 = 0$ zu bestimmen.

Man erhält

$$U = \int_0^{2p} \left\{ \sqrt{8p^2 - x^2} - \frac{x^2}{2p} \right\} dx = \left(\frac{2}{3} + \pi \right) p^2,$$

$$M_x = \int_0^{2p} \left\{ x\sqrt{8p^2 - x^2} - \frac{x^3}{2p} \right\} dx = \frac{16\sqrt{2} - 14}{3} p^3,$$

$$M_y = \frac{1}{2} \int_0^{2p} \left\{ 8p^2 - x^2 - \frac{x^4}{4p^2} \right\} dx = \frac{88}{15} p^3,$$

somit ist

$$\xi = \frac{Mx}{U} = \frac{16\sqrt{2} - 14}{2 + 3\pi} p, \quad \eta = \frac{My}{U} = \frac{88p}{5(2 + 3\pi)}$$

372. Den Schwerpunkt der Fläche (Fig. 40) zu bebestimmen, die von den Parallelen $x = a$ und $x = 0$ sowie den Parabeln $x^2 - 2p(y - b) = 0$ und $x^2 - 2py = 0$ begrenzt ist. — Man findet

$$U = ab, \quad Mx = \frac{a^2 b}{2}, \quad My = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^2}{2},$$

womit sich ergiebt

$$\xi = \frac{a}{2}, \quad \eta = \frac{a^2 + 3bp}{6p}.$$

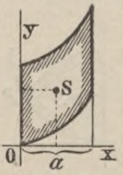

Fig. 40.

373. Den Schwerpunkt des Flächenstücks (Fig. 41) zu bestimmen, das von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dem Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und der Ordinatenaxe begrenzt ist. — Man findet

$$U = \frac{\pi}{4} a (a - b), \quad M_x = \frac{a^2}{3} (a - b), \quad M_y = a \frac{(a^2 - b^2)}{3},$$

somit ist

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = \frac{4(a + b)}{3\pi}.$$

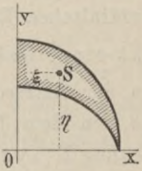

Fig. 41.

374. Den Schwerpunkt der Fläche der archimedischen Spirale $r = a\varphi$ zu bestimmen.

Man findet

$$p = \frac{2a}{\varphi^3}\left\{ - \varphi^3 \cos\varphi + 3\varphi^2 \sin\varphi + 6\varphi\cos\varphi - 6\sin\varphi \right)$$

Für das Azimut ψ des Schwerpunkts erhält man

$$\psi = \frac{\varphi}{2}\sqrt[3]{4}, \quad \varrho = \frac{p}{\sin\psi}.$$

375. Den Schwerpunkt der Fläche $r = a\cos\varphi\sin\varphi$ zu bestimmen.

Man erhält

$$\xi = \eta = \frac{64a}{105\pi}.$$

376. Den Schwerpunkt der Fläche $r^2 = a^2 \sin\varphi$ zu bestimmen.

$$p = \frac{2}{3} a.$$

377. Den Schwerpunkt der halben Fläche der Cardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ zu bestimmen.

Man erhält

$$p = \frac{32a}{9\pi}.$$

§ 32. Schwerpunkt von räumlichen Gebilden. Die Guldinischen Regeln.

a) Schwerpunkt eines beliebigen Körpers.

Schneidet eine in der Entfernung x senkrecht zur x-Axe gelegte Ebene von dem Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung $F(xyz) = 0$ oder $z = f(xy)$ dargestellt ist, eine scheibenförmige Figur vom Inhalt U aus, so berechnet sich die Schwerpunktsabscisse ξ desjenigen Teils des Körpers, der zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt, aus

$$\xi \int_b^a U\,dx = \int_b^a x\,U\,dx,$$

woraus folgt

$$\xi = \int_b^a x\,U\,dx : \int_b^a U\,dx$$

378. Beispiel. Den Schwerpunkt einer Zone des Ellipsoids

$$F(xyz) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zwischen den Ebenen x und $x + h$ zu berechnen.

Eine Ebene, senkrecht zur x-Axe, in der Entfernung x gelegt, schneidet aus dem Körper eine Ellipse von den Halbaxen $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ aus, welche demnach den Inhalt $U = \pi b c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ hat. Es ist daher die Abscisse des Schwerpunkts der Zone angegeben durch

$$\xi = \int_x^{x+h} x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx : \int_x^{x+h}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx,$$

wofür man erhält

$$\xi = \frac{3}{4}(2x+h)\frac{2x^2+2hx+h^2-2a^2}{3x^2+3hx+h^2-3a^2}$$

Für $x = 0$ und $h = a$ ergiebt sich hieraus als Schwerpunktsabscisse des halben Ellipsoids

$$\xi = \frac{3}{8}a.$$

b) Schwerpunkt von Rotationskörpern.

Wird die ebene Kurve $y = f(x)$ um die x-Axe gedreht, so beschreibt sie einen Umdrehungskörper, für welchen $U = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ ist und dessen Schwerpunkt demnach vom Ursprung die Entfernung hat

$$\xi = \int_b^a x f^2(x)\, dx = \int_b^a f^2(x)\, dx$$

379. Beispiel. Die Parabel $y^2 = 2px$ erzeugt bei der Drehung um die x-Axe einen Rotationskörper, dessen Schwerpunktsabscisse ξ ist

$$\xi = \int_0^x x y^2\, dx : \int_0^x y^2\, dx \text{ oder } \xi = \int_0^x x^2\, dx : \int_0^x x\, dx,$$

woraus folgt $\xi = \frac{2}{3} x.$

c) Erste Guldinische Regel.

Der Rauminhalt V eines Rotationskörpers, der durch Drehung einer Figur — Meridianfigur (Fig. 42) — um eine in ihrer Ebene liegende Axe erzeugt wird, ist gleich dem Flächeninhalt U dieser Figur multipliziert mit dem Weg $2\pi\eta$, den ihr Schwerpunkt S bei der Drehung beschreibt.

$$V = 2\pi\eta \,.\, U.$$

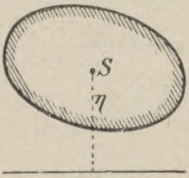

Fig. 42.

Dieser Satz heisst die erste Guldinische Regel und gilt für jede beliebige Figur, welche Umgrenzung dieselbe auch haben möge.

Wenn V und U bekannt sind, lässt sich hieraus auch die Ordinate η des Schwerpunkts der Meridianfigur berechnen

$$\eta = \frac{V}{2\pi U}.$$

380. Beispiel. Den Rauminhalt zu bestimmen, den ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a bei der Drehung um eine Seite beschreibt.

Flächeninhalt des Dreiecks $U = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},$

Schwerpunktsordinate $\eta = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3},$

somit ist

$$V = 2 \pi \eta \,.\, U = 2 \pi \frac{a}{6} \sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{\pi}{4} a^3.$$

381. **Beispiel.** Den Schwerpunkt der Halbkreisfläche zu bestimmen.

Wird dieselbe um den Durchmesser gedreht, so erzeugt sie eine Kugel vom Inhalt $V = \frac{4}{3} \pi a^3$. Die Fläche des Halbkreises selbst ist $U = \frac{\pi}{2} a^2$, daher ist, wenn η die zu suchende Schwerpunktsordinate ist

$$2 \pi \eta \cdot \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

woraus folgt
$$\eta = \frac{4 a}{3 \pi}.$$

d) Schwerpunkt von Umdrehungsflächen.

Das Bogenelement ds der Kurve $y = f(x)$ erzeugt bei der Drehung um die x-Axe eine reifförmige Fläche vom Inhalt $2 \pi y \, ds$, dessen Moment in Bezug auf eine durch den Ursprung senkrecht zur x-Axe gelegte Ebene ist $x \,.\, 2 \pi y \, ds$. Ist daher ξ die Schwerpunktsabscisse der Rotationsfläche zwischen den Ebenen $x = a$ und $x = b$, so ist $\xi \int_b^a y \, ds = \int_b^a x y \, ds$, woraus folgt

$$\xi = \int_b^a x y \, ds : \int_b^a y \, ds.$$

382. Beispiel. Den Schwerpunkt der Kegeloberfläche zu bestimmen, die erzeugt wird, indem sich die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ um die x-Axe dreht.

Es ist

$$y = \frac{b}{a}(a - x),\ y' = -\frac{b}{a},\ ds = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx,$$

somit

$$\int_0^a y\, ds = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^a (a - x)\, dx$$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2 + b^2}\left(a\,x - \frac{x^2}{2}\right)_0^a = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^a x\, y\, ds = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^a (a\,x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2 + b^2}\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = \frac{a\,b}{6}\sqrt{a^2 + b^2},$$

somit ist $\xi = \frac{1}{3} a.$

383. Beispiel. Den Schwerpunkt der Halbkugelfläche zu bestimmen, die bei der Drehung eines Viertelskreises um einen Halbmesser erzeugt wird.

Man findet

$$\int_0^a y\, ds = a^2,\quad \int_0^a x\, y\, ds = \frac{a^3}{2},\ \text{somit ist}\ \xi = \frac{a}{2}.$$

c) Zweite Guldinische Regel.

Eine geschlossene oder offene ebene Kurve (Fig. 43) (oder irgend eine Figur) beschreibt bei der Drehung um eine ausserhalb ihres Umfangs liegende Axe einen Flächeninhalt O, der gleich dem Produkt aus der Länge S dieser Kurve mal dem Weg $2\pi\eta$ ihres Umfangschwerpunkts ist $O = 2\pi\eta S$.

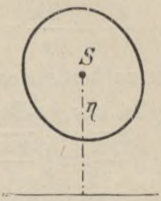

Fig. 43.

Dieser Satz kann auch dazu dienen, den Umfangsschwerpunkt einer Kurve zu bestimmen, wenn ihre Länge S und die Oberfläche O bekannt ist, welche sie bei der Drehung um eine Gerade erzeugt.

384. Beispiel. Die Oberfläche zu berechnen, welche ein gleichseitiges Dreieck von der Seite a bei der Drehung um eine Seite beschreibt.

$$S = 3a, \quad \eta = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3},$$

$$O = 2\pi\eta \cdot S = \pi\sqrt{3}\,a^2.$$

385. Beispiel. Den Schwerpunkt des Halbkreisbogens zu berechnen.

Der Halbkreis erzeugt bei der Drehung um den Durchmesser eine Kugelfläche vom Inhalt $O = 4\pi a^2$; da ferner $S = \pi a$ ist, so folgt

$$4\pi a^2 = 2\pi\eta \cdot \pi a, \quad \eta = \frac{2a}{\pi},$$

wie sich auch weiter oben schon ergeben hat.

§ 33. Uebungsbeispiele.

a) Schwerpunkt von beliebigen Körpern.

386. Den Schwerpunkt des Paraboloids

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2x}{a} = 0$$

von $x = 0$ bis $x = x$ zu bestimmen.

Ein Schnitt parallel zur yz-Ebene ist eine Ellipse von den Halbaxen $b\sqrt{\frac{2x}{a}}$, $c\sqrt{\frac{2x}{a}}$, somit ist

$$U_x = 2\pi \frac{bcx}{a}, \quad V = \int_0^x U\,dx = \pi \frac{bcx^2}{a}$$

$$\int_b^a x\,U\,dx = 2\pi \frac{bc}{a} \int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi \frac{bc}{a} x^3 \text{ und}$$

$$\xi = \int x\,U\,dx : \int U\,dx = \frac{2}{3} x.$$

387. Den Schwerpunkt des einmantligen Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

zu bestimmen.

$$U_x = \frac{\pi bc}{a^2}(x^2 - a^2), \quad V = \int_0^x U\,dx = \frac{\pi bc}{3a^2}(3a^2x - x^3)$$

$$\int_0^a x\,U\,dx = \frac{\pi bc}{4a^2}(2a^2x^2 - x^4), \quad \xi = \frac{3x}{4}\,\frac{2a^2 - x^2}{3a^2 - x^2}.$$

Für $x = a$ folgt hieraus $\xi = \frac{3}{8} a.$

388. Die Schwerpunktsabscisse des gemeinschaftlichen Raumes der beiden Cylinderflächen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

zwischen $x = 0$ und $x = a$, sowie $y = 0$ und $y = a$ zu bestimmen.

$$U_x = yz = a^2 - x^2, \quad V = \frac{2}{3} a^3,$$

$$\int_0^a x\, Ux\, dx = \int_0^a (a^2 x - x^3)\, dx = \frac{a^4}{4},$$

$$\xi = \frac{a^4}{4} : \frac{2}{3} a^3 = \frac{3}{8} a.$$

b) Schwerpunkt von Umdrehungskörpern. Erste Guldinische Regel.

389. Schwerpunkt der Halbkugel, erzeugt durch Drehung eines Kreisquadranten um einen Halbmesser

$$U_x = \pi (a^2 - x^2), \quad V = \frac{2}{3} \pi a^3,$$

$$\int_0^a x\, Ux\, dx = \frac{\pi}{4} a^4, \quad \xi = \frac{3}{8} a.$$

390. Den Schwerpunkt des Rotationskörpers der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

zu bestimmen.

a) Bei der Drehung um die x-Axe:

$$U_x = \pi \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2), \quad V = \frac{\pi b^2}{3 a^2} (x^3 - 3 a^2 x),$$

$$\int_a^x x\, U\, dx = \frac{\pi}{4} \frac{b^2}{a^2} (x^4 - 2 a^2 x^2), \quad \xi = \frac{3}{4} \; \frac{x^3 - 2 a^2 x}{x^2 - 3 a^2}.$$

b) Bei der Drehung um die y-Axe ist

$$U_y = \pi \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2),\ V = \frac{\pi}{3}\frac{a^2}{b^2}(y^3 + 3b^2 y),$$

$$\int y\,U\,dy = \frac{\pi}{4}\frac{a^2}{b^2}(y^4 + 2b^2 y^2),$$

woraus folgt $$\eta = \frac{3}{4}\frac{y^3 + 2b^2 y}{y^2 + 3b^2}.$$

391. Den Schwerpunkt des Körpers zu bestimmen, den die Schleife der Kurve $a(y^2 - x^2) + x^3 = 0$ bei der Drehung um die x-Axe beschreibt.

$$\xi = \frac{3}{5}a.$$

392. Welchen Rauminhalt (Wulst) beschreibt ein Kreis vom Radius a bei der Drehung um eine Gerade, welche vom Mittelpunkt desselben die Entfernung p hat?

$$V = 2\pi p \,.\, \pi a^2 = 2\pi^2 p a^2.$$

393. Den Rauminhalt zu bestimmen, den das gemeinschaftliche Flächenstück der beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$ bei der Drehung um eine der Axen beschreibt.

$$V = \frac{12}{5}\pi p^3.$$

394. Den Rauminhalt des Körpers zu berechnen, den das gemeinschaftliche Flächenstück der beiden Kurven

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

bei der Drehung um die Axen beschreibt.

a) Bei der Drehung um die x-Axe ist:

$$V = \frac{4}{3}\pi a(a^2 - b^2).$$

b) Bei der Drehung um die y-Axe ist:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 (a - b).$$

Für $b = 0$ folgt hieraus beidesmal:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

als Inhalt einer Kugel vom Radius a. Für $b = a$ dagegen ist $V = 0$.

395. Den Rauminhalt zu bestimmen, den das Segment des Kreises $r = 2a \cos\varphi$, welches durch den Vektor zum Azimut α abgeschnitten wird, bei der Drehung um die Polaraxe beschreibt.

Man erhält

$$V = \frac{4\pi}{3} \cos^3\alpha \,.\, a^3.$$

Für $\alpha = 0$ folgt hieraus als Inhalt der Kugel

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

396. Den Rauminhalt zu berechnen, den das schraffierte Flächenstück in Fig. 41 No. 373 bei der Drehung um die x-Axe beschreibt.

$$V = \frac{2}{3} \pi a (a^2 - b^2).$$

Für $a = b$ folgt hieraus $V = 0$ und für $b = 0$

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3$$

(Halbkugel), wie es sein soll.

397. Den Schwerpunkt des Ellipsenquadranten zu bestimmen.

Bei der Drehung um die y-Axe ist $V_1 = \frac{2}{3} \pi a^2 b$,

„ „ „ „ „ x-Axe „ $V_2 = \frac{2}{3} \pi a b^2$.

Da $U = \frac{\pi}{4} a b$ ist, so folgt nach der ersten Guldinischen Regel

$$V_1 = 2 \pi \xi U, \quad V_2 = 2 \pi \eta U,$$

woraus sich ergiebt

$$\xi = \frac{4 a}{3 \pi}, \quad \eta = \frac{4 b}{3 \pi}.$$

398. Den Rauminhalt zu berechnen, den eine Cykloide bei der Drehung um die Bahnlinie beschreibt.

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^3 \, d\varphi = 5 \pi^2 a^3.$$

Da $U = 3 \pi a^2$ und $\eta = \frac{5}{6} a$, so giebt auch die Guldinische Regel denselben Wert

$$V = 2 \pi \, . \, \frac{5}{6} a \, . \, 3 \pi a^2 = 5 \pi^2 a^3.$$

c) Schwerpunkt von Umdrehungsflächen. Zweite Guldinische Regel.

399. Den Schwerpunkt der Kugelzone zu berechnen. (Fig. 44.)

$$O \, . \, \xi = \pi \int_{x_1}^{x_2} x y \, ds = 2 \pi \int a x \, dx = \pi a (x_2^{\,2} - x_1^{\,2}).$$

Da $O = 2 \pi a (x_2 - x_1)$ ist, so folgt

$$\xi = \frac{1}{2} (x_1 + x_2).$$

Für die Kugelhaube $x_2 = a$ und $x_1 = x$ folgt hieraus

$\xi = \frac{1}{2}(a + x)$ und für die Halbkugelfläche $\xi = \frac{a}{2}$.

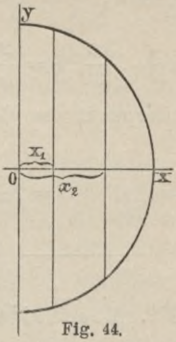

Fig. 44.

400. Den Schwerpunkt der Oberfläche des Rotationsparaboloids zu bestimmen.

$$\xi = \frac{1}{5} \frac{(p + 2x)^{\frac{1}{2}}(6x^2 + px - p^2) + p^{\frac{5}{2}}}{(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}}.$$

401. Die Oberfläche zu berechnen, die eine Cykloide bei der Drehung um die Bahnlinie beschreibt.

$$O = 2\pi\eta . S = 2\pi . \frac{5}{3}a . 8a = \frac{80}{3}\pi a^2 = \frac{20}{3} . 4\pi a^2.$$

402. Die Oberfläche zu berechnen, die das gemeinschaftliche Flächenstück der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad (x - a)^2 + (y - a)^2 - a^2 = 0$$

bei der Drehung um eine der Axen beschreibt

$$O = 2\pi\eta S = 2\pi . \frac{a}{2} . \pi a = \pi^2 . a^2.$$

403. Den Schwerpunkt des halben Asteroidenbogens zu bestimmen.

Es ist

$$\frac{O}{2} = \frac{6}{5}\,\pi\,a^2, \quad \frac{S}{4} = \frac{3\,a}{2}, \quad \text{somit}$$

$$\frac{6}{5}\,\pi\,a^2 = 2\,\pi\,\eta \cdot \frac{3\,a}{2}, \quad \eta = \frac{2}{5}\,a.$$

404. Den Schwerpunkt des Bogens der Cykloide zu berechnen.

$$O = \frac{64}{3}\,\pi\,a^2, \quad S = 8\,a, \qquad O = 2\,\pi\,\eta \,.\, S, \quad \eta = \frac{4}{3}\,a.$$

IX. Abschnitt.

Anwendung von Doppelintegralen zur Berechnung von Flächen- und Raumgebilden.

§ 34. Quadratur und Kubatur mit Doppelintegralen.

a) Den ebenen Flächeninhalt (Fig. 45) zu berechnen, der von der Kurve $y = f(x)$ und den beiden Koordinatenaxen begrenzt wird.

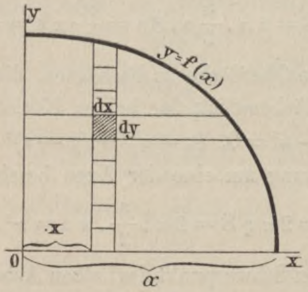

Fig. 45.

Zieht man in der Entfernung x und x + dx zwei Parallelen zur y-Axe, so wird hiedurch aus der zu berechnenden Fläche ein Streifen ausgeschnitten, der als eine Summe von Rechteckchen von der Breite dx und der Höhe dy angesehen und demgemäss durch das Integral

$$d\,U = \int_0^y dy\, dx$$

dargestellt werden kann, in welchem dx als konstant zu betrachten ist und y aus der Gleichung $y = f(x)$ der begrenzenden Kurve in Funktion von x ausgedrückt werden kann. Will man alle derartige elementare Streifen von $x = 0$ bis $x = a$ summieren, so kann dies durch Integration von d U nach x geschehen. Auf diese Weise erhält man das bestimmte Doppelintegral

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=f(x)} dy \right\} dx,$$

durch welches der gesuchte Flächeninhalt angegeben ist.

405. Beispiel. Den Kreisquadranten zu berechnen.

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dy \right\} dx = \int_0^a y\, dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\, a^2.$$

Zusatz. Hiebei ist zu bemerken, dass man ebenso gut auch zuerst nach x integrieren und hernach durch Integration nach y alle horizontalen Flächenstreifen summieren kann.

b) Den ebenen Flächeninhalt (Fig. 46) zu berechnen, der von der Kurve $r = f(\varphi)$ und den Vektoren der Azimuts $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ begrenzt ist.

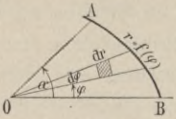

Fig. 46.

Werden zu den Azimuts φ und $\varphi + d\varphi$ die zugehörigen Vektoren gezogen und um den Pol 0 zwei Kreise von den Radien r und $r + dr$ beschrieben, so begrenzen diese vier Linien ein elementares Flächenstück, das näherungsweise gleich einem Rechteck von der Breite $r\,d\varphi$ und der Höhe dr und dem Inhalt $r\,d\varphi\,dr$ gesetzt werden kann. Die Summe aller derartigen elementaren Flächenstücke zwischen der Kurve und den Vektoren der Azimuts $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha$ ist angegeben durch das Doppelintegral

$$U = \int_0^{\alpha} \left\{ \int_0^{r=f(\varphi)} r\,dr \right\} d\varphi,$$

das nach Ausführung der Integration nach dr direkt in das bekannte einfache Integral

$$U = \int_0^{\alpha} \frac{r^2}{2}\,d\varphi$$

übergeht.

c) Den Rauminhalt (Fig. 47) zu bestimmen, der von der Cylinderfläche $y = \varphi(x)$, den Koordinatenebenen und der Fläche $z = f(xy)$ begrenzt ist.

Legt man in der Entfernung x und $x + dx$ zwei Ebenen senkrecht zur x-Axe, so schneidet die erste derselben den zu berechnenden Körper nach der Fläche CDEF vom Inhalt

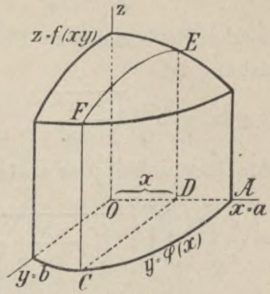

Fig. 47.

$$CDEF = \int_0^{y=\varphi(x)} z\,dy = \int_0^{y=\varphi(x)} f(xy)\,dy$$

und beide zusammen aus dem Körper eine Scheibe aus, welche näherungsweise den Inhalt

$$U\,dx = \left\{\int_0^{y=\varphi(x)} f(xy)\,dy\right\} dx$$

hat. Die Summe aller derartigen elementaren Scheiben zwischen den Ebenen $x = 0$ bis $x = a$ ist alsdann angegeben durch das Doppelintegral

$$V = \int_0^{x=a} \left\{\int_0^{y=\varphi(x)} f(xy)\,dy\right\} dx,$$

womit der gesuchte Rauminhalt ermittelt ist.

406. Beispiel. Zur Berechnung eines Oktanten des dreiaxigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

setze man

$$z = f(x\,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Die Fläche schneidet aus der xy-Ebene eine Ellipse aus, deren Gleichung ist

$$y = \varphi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Der gesuchte Rauminhalt des Oktanten ist daher

$$V = \frac{c}{b}\int_0^a \left\{\int_0^{y=\varphi(x)} \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy\right\} dx.$$

Für das innere Integral, in welchem x als konstant anzusehen ist, ergiebt sich der Ausdruck

$$\int \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}$$
$$+ \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsin \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}},$$

der nach Einführung der Grenzen übergeht in

$$\frac{\pi}{4}\, b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);\ \text{daher ist}$$

$$V = \frac{\pi\, b\, c}{4}\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi\, a\, b\, c}{6}.$$

Das Gesamtvolumen des Ellipsoids ist also

$$8\,V = \frac{4}{3}\,\pi\, a\, b\, c.$$

d) Den Rauminhalt (Fig. 48) zu berechnen, der von der Cylinderfläche $r = f(\varphi)$, der xy-Ebene und von der Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzt wird.

Der gesuchte Rauminhalt ist ausgedrückt durch das Doppelintegral

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=f(\varphi)} F(r, \varphi)\, r\, dr \right\} d\varphi.$$

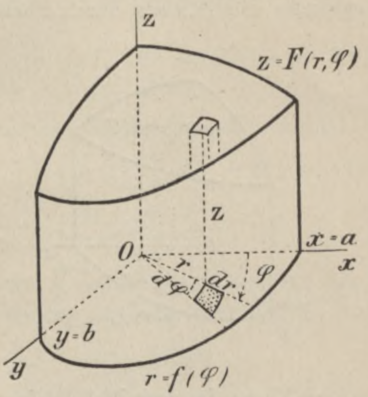

Fig. 48.

407. Beispiel. Den Rauminhalt zu bestimmen, der von der Cylinderfläche $r = a$, der xy-Ebene und der Fläche des Paraboloids $2\,p\,z = x^2 + y^2$ begrenzt wird.

Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so folgt $z = \dfrac{r^2}{2\,p}$.

Der gesuchte Inhalt ist daher angegeben durch

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=a} \frac{r^2}{2\,p}\, r\, dr \right\} d\varphi = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^4}{p}.$$

Für $a = p$ folgt hieraus $\quad V = \dfrac{\pi}{4}\, p^3.$

§ 35. Oberflächenberechnung mit Doppelintegralen.

a) Um die Oberfläche desjenigen Teils der Fläche (Fig. 49) $z = f(xy)$ zu berechnen, welches senkrecht über der Kurve $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ in der xy-Ebene liegt, zerlege man die letztere durch Ebenen parallel

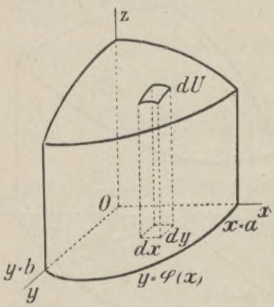

Fig. 49.

zur yz- und zx-Ebene in unendlich kleine Rechtecke $dx\,dy$. Das senkrecht über einem solchen Rechteck liegende Element dU der Fläche $z = f(xy)$ kann ohne Fehler als eben und in der Tangentialebene liegend angesehen werden. Ist alsdann γ der Neigungswinkel desselben gegen die xy-Ebene, so ist $dx\,dy = dU \cos\gamma$ oder $dU = \dfrac{dx\,dy}{\cos\gamma}$.

Da nun γ auch der Winkel ist, den die Flächennormale mit der xy-Ebene macht, so folgt

$$dU = dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

wo $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ist, woraus sich U in Form des

Doppelintegrals ergiebt

$$U = \int_0^a \left\{ \int_0^{y=\varphi(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy \right\} dx \quad \text{oder}$$

$$U = \int_0^b \left\{ \int_0^{x=\psi(y)} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx \right\} dy.$$

408. **Beispiel.** Die Oberfläche der Kugel zu berechnen $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Schreibt man die Gleichung der Kugel in der Form

$$z = f(x\,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \text{ so folgt}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},\ q = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Da ferner $y = \varphi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ist, so ergiebt sich für die Oberfläche des Kugeloktanten der Ausdruck

$$\frac{U}{8} = a \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right\} dx.$$

Das innere Integral ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \arc\sin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

womit U übergeht in

$$\frac{U}{8} = \frac{\pi}{2}\, a \int_0^a dx = \frac{\pi}{2}\, a^2,$$

somit ist $U = 4\,\pi\, a^2$.

b) Eine zur z-Axe parallel laufende Cylinderfläche habe in Polarkoordinaten die Gleichung $r = f(\varphi)$ und werde nach oben durch die Fläche $z = F(r, \varphi)$ begrenzt.

Den Flächeninhalt der oberen Begrenzungsfläche zu bestimmen.

Bezeichnet d U den Inhalt des senkrecht über dem schraffierten Element $r\,d\varphi\,dr$ der x y-Ebene liegenden Elements der Fläche $z = F(r, \varphi)$, so ist wie in a)

$$dU = \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\gamma}.$$

Die Oberfläche U selbst ist somit ausgedrückt durch

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{f(\varphi)} \frac{r\,dr}{\cos\gamma} \right\} d\varphi,$$

wo $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ist.

409. Beispiel. Die Oberfläche der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

zu berechnen.

Führt man Polarkoordinaten ein

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so ist

$$z = F(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2}, \quad r = f(\varphi) = a \text{ und}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} \text{ und}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Daher ist

$$\frac{U}{2} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{a} \frac{a\,r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} a^2\,d\varphi = 2\pi a^2 \text{ und}$$

$$U = 4\pi a^2.$$

§ 36. Uebungsbeispiele.

410. Inhalt und Schnittfläche des Körpers zu berechnen, der von der x y-Ebene, der Kugelfläche

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

und der Cylinderfläche $y^2 - ax + x^2 = 0$ begrenst wird.

Werden Polarkoordinaten eingeführt, so folgt

$$z = F(r,\varphi) = \frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{cr}{a},\ r = f(\varphi) = a\cos\varphi,$$

$$\frac{V}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{a\cos\varphi}\frac{c}{a}r\,.\,r\,d\varphi\right\}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c\,a^2\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}\,c\,a^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\,c\,a^2.$$

Ferner ergiebt sich

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a}\cos\varphi,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c}{a}\sin\varphi,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$ somit ist

$$\frac{U}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{a\cos\varphi}\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\,r\,dr\right\}d\varphi = \frac{\pi}{8}\,a\sqrt{a^2+c^2},$$

$$U = \frac{\pi}{4}\,a\sqrt{a^2+c^2}.$$

411. Inhalt und obere Begrenzungsfläche des cylindrischen Raumes zu berechnen, der von der x y-Ebene, der Cylinderfläche $r = b$ und von dem Paraboloid $az = x^2 + y^2$ begrenzt ist.

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=b} \frac{r^2}{a} \cdot r\, dr \right\} d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{b^4}{a},$$

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=b} \frac{r\, dr}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right\} d\varphi = \frac{\pi}{2} a \sqrt{a^2 + 4 b^2}.$$

Für $b = a$ folgt hieraus

$$V = \frac{\pi}{2} a^3, \quad U = \frac{\pi}{2} a^2 \sqrt{5}.$$

412. Den Rauminhalt zu berechnen, der durch die beiden Cylinderflächen

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \text{ und } x^2 + ax + y^2 = 0$$

aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ausgeschnitten wird.

Gemeinschaftlicher Rauminhalt der drei Flächen

$$V_1 = \frac{4}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

Rest des Kugelinhalts

$$V_2 = \frac{16}{9} a^3.$$

413. Rauminhalt und Scheitelfläche des Körpers zu berechnen, der von der xy-Ebene, der Cylinderfläche $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und der Kegelfläche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

begrenzt wird.

$$V = \frac{2\pi}{3} c a^2, \quad U = \pi a \sqrt{c^2 + a^2}.$$

414. Dieselbe Aufgabe zu lösen für die Cylinderfläche $r = k\varphi$ und die Kegelfläche

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 + y^2) = \frac{c^2}{a^2} r^2 \text{ oder } z = \frac{c}{a} r.$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=k\varphi} \frac{c}{a} r^2 \, dr \right\} d\varphi = \frac{4}{3} \pi^4 k^3 \frac{c}{a}.$$

$$U = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{r=k\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\} d\varphi = \frac{4}{3} \pi^3 \frac{k^2}{a} \sqrt{c^2 + a^2}.$$

415. Ein veränderlicher Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung dreht sich um die z-Axe und schneidet beständig den Kreis $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ in der xy-Ebene. Gesucht ist der Rauminhalt des erzeugten Körpers.

Als Gleichung desselben ergiebt sich

$$z^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = 0.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so ergiebt sich als Rauminhalt

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{r=2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2\cos^2\varphi - r^2} \,.\, r\,dr \right\} d\varphi = \frac{16}{9} a^3,$$

somit $V = \frac{64}{9} a^3$.

416. In der xy-Ebene liegt der Kreis $r = 2a\cos\varphi$. Eine veränderliche Gerade PQ scheidet beständig den Kreis in P und die z-Axe in Q, so dass $OQ = k\,OP$ ist. Gesucht ist der Rauminhalt (und die Oberfläche) des erzeugten Körpers. (Fig. 50.)

Als Gleichung der Fläche erhält man

$$z = F(x, y) = k \left\{ \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

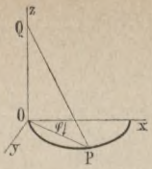

Fig. 50.

Für $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ergiebt sich für den gesuchten Rauminhalt der Ausdruck

$$\frac{V}{2} = k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{r=2a\cos\varphi}(2a\cos\varphi - r)\,r\,dr\right\}d\varphi = \frac{8}{9}\,k\,a^3.$$

somit ist

$$V = \frac{16}{9}\,k\,a^3.$$

417. Inhalt und Scheitelfläche des Körpers zu bestimmen, der von der Cylinderfläche $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ und der Ebene

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$

begrenzt ist.

$$V = \pi\gamma a^2,\ U = \pi a^2\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}}.$$

Verzeichnis

von neueren Lehr- und Uebungsbüchern der Differential- und Integralrechnung.

Autenheimer, Fr., Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung. 5. Aufl. 1901.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bde. Leipzig 1898.

Dienger, J., Die Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. 2 Bde. Stuttgart 1868.

Dölp, G., Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung. 9. Aufl., bearb. von E. Netto. 1901.

Fricke, R., Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. 3 Teile. Braunschweig 1897.

Genocchi-Peano, Differential- und Integralrechnung. Deutsch von G. Bohlmann. Leipzig 1899.

Harnack, A., Die Elemente der Differentialrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Leipzig 1881.

Kiepert, L., Grundriss der Differential- und Integralrechnung. I. Differentialrechnung. 9. Auflage 1901. II. Integralrechnung. 7. Aufl. 1900.

Kleyer, A., Lehrbuch der Differentialrechnung. 2. Aufl., 3 Teile. Stuttgart 1888, 1893 und 1894.

" " Lehrbuch der Integralrechnung. 2 Bde. 1889 und 1900. (Bd. II. herausgeg. von A. Haas.)

Lipschitz, R., Lehrbuch der Analysis. I. Grundlagen. 1877. II. Differential- und Integralrechnung. 1880.

Lorentz, H. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch von C. G. Schmidt. 1900.

Meyer, W. F., Differential- und Integralrechnung. Bd. I Differentialrechnung. Leipzig 1901.

Navier, L., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch von Th. Wittstein. 4. Aufl. 2 Bde. 1875.

„ Lehrbuch der höheren Mechanik. Deutsch von L. Mejer. Suppl. zum Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Hannover 1858.

Nernst, W. und Schönflies, A., Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. 3. Aufl. 1901.

Pasch, M., Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1882.

Schlömilch, O., Compendium der höheren Analysis. 5. Aufl. 2 Bde. Braunschweig 1895.

„ Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 4. Aufl. 2 Bde. Leipzig 1888.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch von A. Harnack. 2. Aufl. Bd. I, II. Leipzig 1897—99.

Sohncke, L., Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. 5. Aufl. 2 Teile. Halle 1885.

Stolz, O., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3 Teile. Leipzig 1893, 1896, 1900.

Wenck, J., Die Grundlehren der höheren Analysis. Leipzig 1872.

2,00

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

94 **Photographie.** Von H. Keßler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen.
95 **Paläontologie.** Von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen.
96 **Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymn zu Hannover. Mit 14 Abbildungen.
97 **Stereometrie** von Dr. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren.
98 **Grundriß der Psychophysik** von Dr. G. F. Lipps in Straßburg. Mit 3 Figuren.
99 **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. Gerh. Hessenberg in Charlottenburg. Mit 69 ein- u. zweifarbigen Figuren.
100 **Sächsische Geschichte** von Prof. Dr. Otto Kaemmel, Rektor des Nicolaigymnasiums zu Leipzig.
101 **Sociologie** von Prof. Dr. Thom. Achelis in Bremen.
102 **Geodäsie** von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild.
103 **Wechselkunde** von Dr. G. Funk in Mannheim. Mit vielen Formul.
104 **Oesterreichische Geschichte I:** Von der Urzeit bis 1526 von Hofrat Dr. Frz. v. Krones, Professor an der Universität Graz.
105 **Oesterreich. Geschichte II:** Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Frz. v. Krones, Professor an der Universität Graz.
106 **Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstl. Versuchswesens.
107 **Geschichte der Malerei I** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.
108 **Geschichte der Malerei II** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.
109 **Geschichte der Malerei III** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.
110 **Geschichte der Malerei IV** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.
111 **Geschichte der Malerei V** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.
114 **Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe d. Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren.
115 **Buchführung.** Lehrgang der einfachen und doppelten Buchhaltung von Robert Stern, Oberlehrer der Oeffentl. Handelslehranstalt und Dozent der Handeshochschule zu Leipzig. Mit vielen Formularen.
116 **Die Plastik des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln.
117 **Griechische Grammatik I:** Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. a. d. Klosterschule z. Maulbronn.
118 **Griechische Grammatik II:** Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Professor a. d. Klosterschule zu Maulbronn.
119 **Abriß der Burgenkunde** v. Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 29 Abbildungen.
120 **Harmonielehre** von A. Halm, Musikdirektor in Stuttgart. Mit vielen Notenbeilagen.
121 **Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik** von Dr. A. Möhler in Tübingen. Mit zahlreichen Abbildgn. u. Musikbeilagen.
122 **Das Pflanzenreich.** Einteilung d. gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau u. Dr. W. Migula, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Figuren.
123 **Nutzpflanzen** von Dr. J. Behrens in Weinsberg. Mit 53 Abbildungen.
124 **Die deutschen Altertümer** von Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen.
125 **Italienische Litteraturgeschichte** von Dr. Karl Voßler, Privatdozent a. d. Universität Heidelberg.