

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw. ....

~~26~~

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

# Hyperbolische Geometrie der Ebene

Von

Prof. Dr. Richard Baldus

Mit 71 Figuren im Text



970

# Sammlung Götschen

Unser heutiges Wissen in kurzen, klaren,  
allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen

Jeder Band in Leinwand geb. Rm. 1.62

Bei gleichzeitiger Abnahme gleicher oder inhaltlich zusammengehöriger  
Bände treten folgende Gesamtpreise in Kraft: 10 Exemplare Rm. 14.40;

25 Exemplare Rm. 33.75; 50 Exemplare Rm. 63.—

---

Walter de Gruyter & Co.

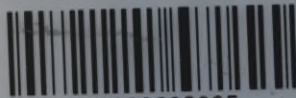
vormals G. J. Götschen'sche Verlagsbuchhandlung / J. Guttentag, Verlags-  
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

---

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“  
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leicht-  
verständliche und übersichtliche Einführung  
in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und  
Technik zu geben; in engem Rahmen, auf  
streng wissenschaftlicher Grundlage und unter  
Berücksichtigung des neuesten Standes der  
Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen  
zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne  
Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber  
dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zu-  
sammenhange miteinander, so daß das Ganze,  
wenn es vollständig ist, eine vollständige, syste-  
matische Darstellung der Wissenschaften dar-  
stellt.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298005

U u  
ber b

f f e  
offfrei

# Bibliothek zur Mathematik u. Astronomie

a u s d e r S a m m l u n g G ö s c h e n

- Geschichte der Mathematik** von Oberstudienrat  
Dr. H. Wieleifner. 2 Bände . . . . . Nr. 226, 875
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarith-  
misches und trigonometrisches Rechnen in zwei  
Farben** zusammengestellt von Prof. Dr. Hermann  
Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Hausner. Nr. 81
- Fünfstellige Logarithmen** von Direktor Prof. Aug. Adler. Nr. 423
- Mathematische Formelsammlung** v. Prof. O. Th. Bürk-  
len. Neubearb. von Dr. F. Ringleb. Mit 38 Fig. . . . . . Nr. 51
- Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades** von  
Prof. Dr. H. Schubert, Neubearb. von Prof. P. B. Fischer. Nr. 47
- Elementare Algebra** von Prof. P. B. Fischer. Mit 20 Fig. Nr. 930
- Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra** v. Prof.  
Dr. Herm. Schubert, Neubearb. v. Prof. P. B. Fischer. M. 8 Fig. Nr. 48
- Höhere Algebra** von Prof. Dr. H. Hasse. 2 Bände . . . . . Nr. 931, 932
- Mengenlehre** von Prof. Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren . . . . . Nr. 999
- Determinanten** von Prof. P. B. Fischer . . . . . Nr. 402
- Gruppentheorie** von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. Nr. 837
- Praktisches Zahlenrechnen** v. Prof. Dr.-Ing. P. Werk-  
meister. Mit 58 Figuren . . . . . Nr. 405
- Elementare Reihenlehre** von Prof. Dr. H. Falckenberg.  
Mit 4 Fig. im Text . . . . . Nr. 943
- Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und kom-  
plexe Reihen** von Prof. Dr. H. Falckenberg. Mit 3 Fig. . . . . . Nr. 1027
- Fouriersche Reihen** von Prof. Dr. W. Rogosinski. Mit  
4 Figuren . . . . . Nr. 1022
- Niedere Analysis** von Prof. Dr. B. Sporer. Mit 5 Figuren Nr. 53
- Differentialrechnung** von Prof. Dr. A. Witting. Mit 94  
Figuren und 185 Beispielen . . . . . Nr. 87
- Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differential-  
rechnung** von Rektor Dr. Friedr. Junker. Neubearb. von  
Prof. Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren . . . . . Nr. 146
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** von Rektor  
Dr. Friedrich Junker. Mit 50 Figuren . . . . . Nr. 88
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integral-  
rechnung** von Rektor Dr. Friedr. Junker. Mit 52 Figuren Nr. 147
- Gewöhnliche Differentialgleichungen** v. Dr. G. Hoheisel Nr. 920
- Partielle Differentialgleichungen** v. Prof. Dr. G. Hoheisel Nr. 1003
- Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und  
partiellen Differentialgleichungen** von Prof. Dr.  
G. Hoheisel . . . . . Nr. 1059
- Funktionentheorie** von Prof. Dr. Konrad Knopp.  
I. Grundlagen der allg. Theorie der analyt. Funktionen, Mit 8 Fig. Nr. 668  
II. Anwendungen u. Weiterführung d. allgem. Theorie. M. 7 Fig. Nr. 703
- Aufgabensammlung zur Funktionentheorie** von Prof.  
Dr. K. Knopp. 2 Bde. . . . . Nr. 877, 878
- Einführung in die konforme Abbildung** von Prof.  
Dr. Ludwig Bieberbach . . . . . Nr. 768
- Potentialtheorie** v. Dr. W. Sternberg. 2 Bände. Mit 6 Fig. Nr. 901, 944
- Vektoranalysis** von Prof. Dr. Siegf. Valentiner. Mit 13 Fig. Nr. 354



<b>Graphische Integration</b> v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig.	Nr. 801
<b>Numerische Integration</b> von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig.	Nr. 864
<b>Ebene Geometrie</b> v. Prof. G. Mahler. 110 zweifarb. Fig.	Nr. 41
<b>Ebene und sphärische Trigonometrie</b> von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren . . . . .	Nr. 99
<b>Sammlung v. Aufgaben aus d. ebenen u. sphärischen Trigonometrie</b> v. Studienrat Dr. Fritz Heiland. Mit 26 Fig.	Nr. 848
<b>Stereometrie</b> von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 81 Figuren	Nr. 97
<b>Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie</b> von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren . . . . .	Nr. 779
<b>Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung</b> von Prof. Dr. K. Doehle mann. 2 Bände. Mit 114 Figuren .	Nr. 72, 876
<b>Aufgabensammlung zur Projektiven Geometrie</b> von Prof. Dr. H. Timerding . . . . .	Nr. 1060
<b>Darstellende Geometrie</b> von Prof. Dr. Robert Haufner. 3 Bände. Mit zahlreichen Figuren . . . . .	Nr. 142, 143, 144
<b>Nichteuklidische Geometrie</b> von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig. . . . . .	Nr. 970
<b>Einführung in die geometrische Optik</b> von Dr. W. Hinrichs. Mit 56 Figuren . . . . .	Nr. 532
<b>Analytische Geometrie der Ebene</b> von Prof. Dr. R. Haufner. Mit 60 Fig. im Text . . . . .	Nr. 65
<b>Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene</b> von Prof. Dr. R. Haufner. Mit 22 Figuren . . . . .	Nr. 256
<b>Analytische Geometrie des Raumes</b> von Prof. Dr. M. Simon. Mit 27 Figuren . . . . .	Nr. 89
<b>Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes</b> von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 8 Figuren	Nr. 309
<b>Koordinatensysteme</b> von Prof. P. B. Fischer. Mit 8 Figuren	Nr. 507
<b>Algebraische Kurven.</b> Neue Bearb. v. Prof. Dr. H. Wieleitner. I. Gestaltl. Verhältnisse. Mit 97 Figuren . . . . .	Nr. 435
II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren . . . . .	Nr. 436
<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bände. Mit 10 Figuren . . . . .	Nr. 508, 871
<b>Politische Arithmetik</b> von Dr. E. Förster . . . . .	Nr. 879
<b>Versicherungsmathematik</b> von Prof. Dr. Friedr. Boehm. 2 Bände . . . . .	Nr. 180, 917
<b>Ausgleichsrechnung n. d. Methode d. kleinsten Quadrate</b> von Prof. W. Weltbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig.	Nr. 302, 641
<b>Vermessungskunde</b> von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bände. Mit 294 Figuren . . . . .	Nr. 463, 469, 862
<b>Geodäsie</b> (Landesvermessung und Erdmessung) von Prof. Dr. G. Förster. Mit 33 Figuren . . . . .	Nr. 102
<b>Mathematische Instrumente</b> v. Dr. Fr. A. Willers. M. 68 Fig.	Nr. 922
<b>Astronomische Geographie</b> von Prof. Dr. Siegmund Günther. Mit 52 Abbildungen . . . . .	Nr. 92
<b>Astronomie.</b> Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, Neubearb. v. Prof. Dr. Herm. Kobold. I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren . . . . .	Nr. 11
II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten . . . . .	Nr. 529
<b>Astrophysik</b> von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neubearb. von Dr. H. Ludendorff. Mit 14 Figuren . . . . .	Nr. 91



Sammlung Göschen

---

# Nichteuklidische Geometrie

Hyperbolische Geometrie der Ebene

Von

**Dr. phil. Richard Baldus**

ordentlicher Professor der Geometrie  
an der Technischen Hochschule  
Karlsruhe

Mit 71 Figuren im Text



Berlin und Leipzig  
Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-  
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

1927

KD 513.814: 513.1/.2(023)



~~196~~

1-301280

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Druck von C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig. 859627.

Akc. Nr. \_\_\_\_\_

~~4190/51~~

BpL-Z-569/2816

## Literatur.

1. *R. Bonola*, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von H. Liebmann. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1921, 207 S.
2. *F. Engel*, N. I. Lobatschewskij, Zwei geometrische Abhandlungen. Leipzig 1899, 476 S.
3. *F. Engel und P. Stäckel*, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig 1895, 325 S.
4. *F. Enriques*, Prinzipien der Geometrie; Enzyklop. d. math. Wissenschaften III, 1. Leipzig 1907—1910, S. 1—129.
5. *F. Enriques*, Fragen der Elementargeometrie, I. Teil, deutsch von H. Thieme. Leipzig 1911, 366 S.
6. *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie. 6. Aufl. Leipzig 1923, 264 S.
7. *H. Liebmann*, Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1923, 150 S.
8. *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin 1909, 192 S.
9. *P. Stäckel*, W. und J. Bolyai, 2 Teile, Leipzig und Berlin 1913, 281 + 274 S.
10. *J. Tropfke*, Geschichte der Elementarmathematik, IV. Bd. Ebene Geometrie, 2. Aufl. Berlin und Leipzig 1923, 238 S.
11. *M. Zacharias*, Elementargeometrie und elementare Nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung; Enzyklop. d. math. Wissenschaften III, 1<sub>2</sub>. Leipzig 1914 — 1921, S. 859—1172.



# Inhalt.

## I. Abschnitt.

### Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie.

	Seite
1—3. Euklids Elemente . . . . .	7
4—9. Aus der Geschichte des Parallelenaxioms . . . . .	9
10—12. Die Entdecker der Nichteuklidischen Geometrie . . . . .	15

## II. Abschnitt.

### Axiomatik der absoluten Geometrie.

13—14. Bedeutung der absoluten Geometrie . . . . .	20
15—16. Formalisierung der Geometrie . . . . .	22
17. Die Axiome der Verknüpfung I, 1—3 . . . . .	24
18—19. Die Axiome der Anordnung II, 1—4 . . . . .	26
20—22. Die Axiome der Kongruenz III, 1—5 . . . . .	28
23—26. Folgerungen aus den Axiomgruppen I—III . . . . .	33
27. Einige Sätze über den Kreis . . . . .	39
28—29. Die Axiome der Stetigkeit: Das Archimedische Axiom IV, 1 . . . . .	40
30—33. Die Axiome der Stetigkeit: Das Cantorsche Axiom IV, 2 . . . . .	44
34. Weitere Sätze über den Kreis . . . . .	48
35—36. Rechtwinkelige Koordinaten und Vollständigkeitsatz . . . . .	49

## III. Abschnitt.

### Die Euklidische Geometrie.

37—38. Das Euklidische Parallelenaxiom V . . . . .	52
--	----

## IV. Abschnitt.

### Axiomatik der hyperbolischen Geometrie im Einheitskreise.

39—40. Die Axiome I, 1—3 und II, 1—4 . . . . .	56
41—44. Hyperbolische Streckenkongruenz. Die Axiome III, 1—3 . . . . .	57
45. Das Archimedische und das Cantorsche Axiom . . . . .	60
46—48. Automorphe Kollineationen des Randkreises . . . . .	61
49—51. Hyperbolische Winkelkongruenz. Die Axiome III, 4 und III, 5 . . . . .	64
52. Der Widerspruch mit dem Euklidischen Parallelenaxiom . . . . .	67
53—54. Widerspruchslosigkeit der hyperbolischen Geometrie . . . . .	67

	Seite
55—56. Das Nichteuklidische Parallelenaxiom $V'$ . . . . .	70
57. Einzigartigkeit der hyperbolischen Geometrie . . . . .	72

## V. Abschnitt.

## Die hyperbolische Geometrie als selbständige Disziplin.

58—59. Vorbemerkungen . . . . .	73
60—61. Hyperbolische Gebilde in spezieller Lage zum Randkreise . .	74
62. Orthogonalität . . . . .	76
63—64. Parallele Gerade . . . . .	77
65—66. Abstandslinien . . . . .	79
67. Kreise . . . . .	81
68. Winkelmessung . . . . .	83
69—70. Winkelsumme im Dreieck . . . . .	85
71—73. Streckenmessung; hyperbolische Funktionen . . . . .	87
74. Der Parallelwinkel . . . . .	92
75—76. Parallelogramme und Trapeze . . . . .	93
77—81. Die Hjelmsevsche Mittellinie . . . . .	95
82—85. Fundamentalkonstruktionen . . . . .	101
86—91. Merkwürdige Punkte des Dreiecks . . . . .	106
92—95. Trigonometrie . . . . .	112
96—98. Reguläre $n$ -Ecke . . . . .	117
99—100. Umfang des Kreises . . . . .	119
101—104. Analytische Geometrie mit rechtwinkligen Koordinaten . .	121
105—106. Der Dreiecksinhalt . . . . .	126
107—108. Flächeninhalt des Kreises . . . . .	131
109—110. Flächen zwischen parallelen Geraden . . . . .	133
111—112. Asymptotische Dreiecke . . . . .	135
113—115. Grenzkreise . . . . .	136
116—117. Absoluter Charakter der Strecken- und Inhaltsmessung . .	141

## VI. Abschnitt.

## Schlußbetrachtungen.

118. Beweiskraft der Deutung $\{\mathfrak{D}\}$ . . . . .	144
119—120. Die elliptische Geometrie . . . . .	145
121—123. Geometrie und Wirklichkeit . . . . .	148
Register . . . . .	150





## I. Abschnitt.

### Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie.

#### Euklids Elemente.

1. Euklid, der große griechische Geometer, der um 300 v. Chr. lebte, hat in seinen berühmten 13 Büchern der „Elemente“ (στοιχεῖα, elementa) die Grundlagen der Geometrie in einer Weise dargestellt, die sich trotz der fortschreitenden Entwicklung der Mathematik, trotz immer wiederholten Verbesserungsversuchen über 2000 Jahre lang im wesentlichen als wissenschaftlich unantastbar erwiesen hat. Und viel von ihm hierin Geleistetes gilt auch noch in unseren Augen, deren Blick durch die einschlägigen neueren mathematischen Forschungen geschärft ist, die in den letzten 100 Jahren weit über Euklid hinausgeführt haben.

Bei den Alten hieß das Geometrie, was wir heute mit Mathematik bezeichnen; wir werden das Wort Geometrie immer im heutigen Sinne gebrauchen.

Den folgenden Betrachtungen legen wir die vorzügliche, textkritische, griechisch-lateinische Parallelausgabe der Elemente Euklids von I. L. Heiberg, Leipzig, I. Bd. 1883, zugrunde.

2. Euklid beginnt das erste Buch seiner Elemente mit 23 Definitionen (ὅροι, definitiones), die aber nicht Ausdruck einer einheitlichen Absicht sind, sondern die zwei verschiedene Aufgaben zu erfüllen haben: So soll z. B. Def. I „Ein Punkt ist etwas, dessen Teil nichts ist“, ebenso wie Def. II „Eine Linie ist eine Länge ohne Breite“ oder wie Def. IV „Eine Linie ist gerade, wenn sie gleichmäßig

zu ihren Punkten liegt“ im Leser eine anschauliche Vorstellung dieser räumlichen Gebilde wecken, ohne daß damit irgend welche mathematische Aussagen verbunden wären, die später verwendet werden sollen; diese Definitionen haben eine psychologische, aber keine abstrakt-mathematische Bedeutung. Dagegen enthält eine ganze Reihe von Definitionen mathematische Aussagen, die für spätere Überlegungen verwertbar sind, wie etwa Def. XVII „Durchmesser des Kreises ist irgend eine durch den Mittelpunkt gezogene und auf beiden Seiten vom Kreisumfange begrenzte Gerade, sie hälftet den Kreis“ oder Def. XXIII „Parallel sind gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert auf keiner Seite miteinander zusammentreffen“.

3. Auf die Definitionen folgen bei Euklid 5 Postulate (αιτήματα, postulata) und 5 Axiome (κοινὰ ἔννοιαι, communes animi conceptiones). Die Postulate sind:

I. Es wird gefordert, daß man von jedem Punkte zu jedem Punkt eine Gerade ziehen kann.

II. Und daß man eine unbegrenzte Gerade ununterbrochen verlängern kann.

III. Und daß man um jeden Mittelpunkt mit jedem Halbmesser einen Kreis beschreiben kann.

IV. Und daß alle rechten Winkel einander gleich sind.

V. Und wenn eine Gerade zwei andere Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sollen jene beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die kleiner als zwei Rechte sind.

Die Axiome lauten:

I. Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind auch einander gleich.

II. Und wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, dann sind auch die Summen gleich.

III. Und wenn von Gleichem Gleiches abgezogen wird, dann sind auch die Reste gleich.

VII. \*) Und Dinge, die zur Deckung gebracht werden können, sind einander gleich.

VIII. Und das Ganze ist größer als ein Teil.

Nun reiht Euklid die Konstruktionen und die Beweise der Sätze an, welche das Gebäude der Geometrie bilden, mit der Absicht, dabei anschauliche Beweismittel zu vermeiden, rein logisch vorzugehen, und zwar so, daß neben den mathematischen Aussagen der in Nr. 2 genannten zweiten Art von Definitionen nur die Postulate und Axiome in den Schlußweisen verwendet werden sollen. Diese Absicht ist für immer größere Teile der Mathematik vorbildlich geworden, mit ihr hat Euklid den Grundstein zur Axiomatik gelegt.

Der Ausdruck Axiom tritt erst bei den Kommentatoren Euklids auf. Die Elemente enthalten in den späteren Büchern noch weitere Definitionen — es werden im ganzen 118 Definitionen eingeführt —, aber keine Postulate und Axiome mehr. Die Postulate enthalten Aussagen über geometrische Gebilde (Gerade, Kreis, Winkel), die Axiome dagegen reine Größenaussagen; diese Unterscheidung ist für den modernen Standpunkt unwesentlich, man spricht heute vielfach nur noch von Axiomen. Auch wir gebrauchen daher weiterhin den Ausdruck Postulat nur noch in Verbindung mit einer bestimmten Nummer (II. Postulat) und meinen mit den Axiomen Euklids seine Postulate und Axiome, mit Axiomensystem die Gesamtheit beider, mit Parallelenaxiom das V. Postulat.

#### Aus der Geschichte des Parallelenaxioms.

4. Während die übrigen Axiome naheliegende Grundannahmen einfachster Art enthalten, machte das Parallelen-

---

\*) Die Bezeichnung des 4. und 5. Axioms mit VII und VIII hat textkritische Gründe.



axiom schon den Alten den Eindruck eines verwickelten geometrischen Satzes. Dazu kommt noch, daß Euklid möglichst lange die Verwendung des Parallelenaxioms vermeidet und es zum ersten Male beim Beweise des 29. Satzes im 1. Buche heranzieht, weiterhin, daß Satz 28 „Schneidet eine Gerade zwei andere Gerade und bildet mit ihnen auf einer Seite innere Winkel, deren Summe zwei Rechte beträgt, dann sind die beiden Geraden parallel“ formal und inhaltlich mit dem Axiom aufs engste verwandt ist.

So wird es begreiflich, daß die Versuche das Parallelenaxiom zu beweisen und damit zu zeigen, daß es ein Satz, aber kein Axiom ist, fast so alt sind wie die Elemente Euklids. Diese Versuche bildeten bis zum Beginne des 19. Jahrhunderts den Hauptteil der kritischen Beschäftigung mit Euklid. Mit unermesslicher Mühe suchte man immer wieder vergebens einen Weg zum heiß ersehnten Ziel eines Beweises für das Parallelenaxiom zu finden.

Erst nach 2000 Jahren waren einige bedeutende Mathematiker dazu reif geworden, sich von der Logik, der man bisher den Weg aufzwingen wollte, führen zu lassen, und nun erkannten sie fast gleichzeitig und ohne gegenseitigen Zusammenhang, daß die früheren Versuche deshalb ihr Ziel verfehlen mußten, weil dieses gar nicht existierte.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, mit der Sorgfalt für Einzelheiten wie ein mathematischer Historiker dieser ganzen Entwicklung nachzugehen, über die man reichliche historische Angaben in den Darstellungen Engel-Stäckel [3]\*) und Bonola-Liebmann [1] findet; wir wollen nur zurückblickend das für den modernen Beschauer Wesentliche betrachten. Mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden

---

\*) Unsere Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Beginne des vorliegenden Buches.

Raum wollen wir uns dabei im folgenden ausschließlich mit der Geometrie der Ebene, der Planimetrie, beschäftigen.

5. Aus der gegen den Schluß von Nr. 3 angegebenen Absicht des axiomatischen Aufbaues ergibt sich, daß keine Axiome stillschweigend eingeführt werden dürfen. Diese Forderung nach der Vollständigkeit des Axiomensystems hat Euklid nicht erfüllt, wie sehr er sich auch darum bemühte. So ist, um nur einige Beispiele zu nennen, in der in Nr. 2 angeführten Def. XVII stillschweigend angenommen, daß jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Teile trennt, eine Annahme, die auch in die Def. XXIII hereinspielt, im V. Postulat ist stillschweigend vorausgesetzt, daß jede Gerade die Ebene in zwei Gebiete teilt, im Axiom VII werden Dinge zur Deckung gebracht und damit Bewegungen in die geometrischen Betrachtungen hereingezogen, ohne daß deren Axiome ausgesprochen wären.

Die Beschäftigung mit dem Parallelenaxiom hat in solchem Maße die Aufmerksamkeit auf dieses gelenkt, daß man die soeben genannten und ähnliche wirkliche Mängel des Euklidischen Systems wenig oder gar nicht beachtete.

Bei den Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen, hatte man die Absicht, das V. Postulat nach geglücktem Beweis als aus den übrigen Axiomen ableitbar wegzulassen. Darin kam die selbstverständliche Forderung zum Ausdruck, daß keine überflüssigen Axiome eingeführt werden sollten, eine Forderung, die man später zu dem Verlangen nach einem möglichst einfachen Axiomensystem erweitert hat.

Wenn zwei verschiedene Axiomensysteme für dasselbe Gebiet der Mathematik vorliegen, kann man zwar nicht immer rein logisch entscheiden, welches davon einfacher ist, hier wird oft das Gefühl, der persönliche Geschmack mitzusprechen haben, jedenfalls wird aber der Ausschluß überzähliger Axiome durch die Forderung der Einfachheit erzwungen.

6. Die vermeintlichen Beweise des Parallelenaxioms hatten stets das gleiche Schicksal: man konnte dem Urheber eines solchen Beweisversuches nachweisen, daß er eine über die Euklidischen Annahmen hinausgehende Voraussetzung stillschweigend eingeführt hatte. So lieferten die mißglückten Beweisversuche die positive mathematische Aussage, daß gewisse Annahmen, im Euklidischen System an die Stelle des Parallelenaxioms gesetzt, mit den übrigen Axiomen zusammen wieder die Sätze Euklids ergeben; man erhielt dadurch dem Parallelenaxiom gleichwertige, äquivalente Axiome. Unter diesen treten die folgenden auf:

a) Trifft eine Gerade die eine von zwei Parallelen, dann trifft sie auch die andere.

b) Durch einen im Innern eines spitzen Winkels angenommenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, welche die beiden Schenkel des Winkels trifft.

c) Die auf derselben Seite einer Geraden von dieser gleich weit entfernten Punkte liegen selbst auf einer Geraden.

d) Durch drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte läßt sich immer ein Kreis legen.

e) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten.

f) Es gibt zwei ähnliche, nicht kongruente Dreiecke.

Ersetzt man das Parallelenaxiom durch eine dieser Annahmen, dann läßt sich die Aussage des Parallelenaxioms aus dieser Annahme und den übrigen Axiomen als Satz beweisen. Dabei muß allerdings ein vollständiges Axiomensystem der Euklidischen Geometrie vorliegen, mit dessen Aufstellung man erst spät begann (vgl. Nr. 5). Den ersten großen Fortschritt in dieser Richtung erzielte der noch lebende Mathematiker M. Pasch (geb. 1843) in seinem im Jahr 1882 erschienenen Buche „Vorlesungen über neuere Geometrie“.\*)

\*) 2. Aufl. 1926 mit einem lesenswerten Anhang von M. Dehn.



Da die Ergänzung der Euklidischen Axiome zu einem vollständigen System bis zu einem gewissen Grade willkürlich ist, geht diese Willkür in die ganze kritische Betrachtung der Beweisversuche für das Parallelenaxiom ein, z. B. auch in die Aussage, daß die soeben genannten Axiome dem Parallelenaxiom äquivalent seien.

7. Mit einem wesentlich neuen, für die Folge sehr wichtigen Gedanken bereicherte der scharfsinnige Jesuitenpater G. Saccheri (1667—1733) die Forschungen über das Parallelenaxiom:

Er betrachtet, worin er Vorgänger hat, das Viereck  $ABCD$  (Fig. 45, S.94) mit den beiden rechten Winkeln  $\alpha, \beta^*$  und den beiden gleichen Seiten  $AD$  und  $BC$ . Unabhängig vom Parallelenaxiom folgt nun  $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta$ , ohne daß aber zu entscheiden wäre, ob dies rechte, stumpfe oder spitze Winkel sind. Tritt jedoch einer dieser drei Fälle bei einem einzigen solchen Viereck ein, dann geschieht es bei jedem. Dies führt zu den drei Hypothesen des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels. Die Hypothese des rechten Winkels läßt sich aus dem Parallelenaxiom beweisen und ist diesem äquivalent. Die aus den beiden anderen Hypothesen und den Euklidischen Annahmen mit Ausnahme des Parallelenaxioms entstehenden Geometrien sucht Saccheri, und das ist sein neuer Gedanke, als in sich widerspruchsvoll nachzuweisen; gelänge dies, dann wäre damit vermittels eines indirekten Beweises das Parallelenaxiom als ein Satz der Euklidischen Geometrie erkannt.

Gerolamo (Hieronymus) Saccheri war Lehrer der Grammatik, Philosophie, polemischen Theologie, Arithmetik, Algebra, Geometrie sowie anderer Fächer, zuletzt an der Universität Pavia. Sein hier besprochenes Werk erschien 1733 in Mailand unter dem Titel „Euclides ab omni naevo vindicatus“, der von jedem Makel befreite Euklid; man findet es in Engel-Stäckel [3] abgedruckt.

\*) Doppelbogen bezeichnen in unseren Figuren immer rechte Winkel. Der Punkt  $S$  der Figur wird erst später benötigt werden.



Er setzt darin die vom Parallelenaxiom absehenden Euklidischen Annahmen den ersten 26 Sätzen Euklids gleichwertig, was nach dem 1. Absatz unserer Nr. 4 nahe liegt.

Aus der Hypothese des stumpfen Winkels folgert Saccheri, daß die Winkelsumme in jedem Dreiecke  $> 2R$  ist. Hier entstehen tatsächlich Widersprüche, wenn man mit Euklid die unendliche Länge der Geraden voraussetzt, indem sich dann aus der Hypothese des stumpfen Winkels das Parallelenaxiom beweisen läßt, aus dem die Hypothese des rechten Winkels folgt.

Bei der Hypothese des spitzen Winkels dagegen glückt es Saccheri nicht, den gesuchten Widerspruch zu finden, so absurd auch für den an Euklid geschulten Geometer die Folgerungen sind: die Winkelsumme im Dreieck ist hier  $< 2R$ ; der Winkel im Halbkreis ist  $< R$ ; es kann hier vorkommen, daß sich zwei Gerade nicht treffen, deren eine auf einer dritten Geraden senkrecht steht, während die andere zu der dritten nicht senkrecht steht; es gibt Paare von Geraden, die kein gemeinsames Lot haben und die sich asymptotisch nahe kommen, sich jedoch nicht schneiden usw. Infolge eines Trugschlusses glaubt Saccheri auch hier einen Widerspruch nachweisen zu können, in Wirklichkeit läßt er die Frage nach der logischen Widerspruchslosigkeit der auf der Hypothese des spitzen Winkels aufgebauten Geometrie offen.

8. Die bedeutenden Leistungen Saccheris fanden ihre Fortsetzung in Überlegungen des namhaften Mathematikers, Physikers und Philosophen J. H. Lambert (1728—1777), der noch weitere Folgerungen aus der Hypothese des spitzen Winkels zog, so z. B. die Existenz einer absoluten Längeneinheit aus dieser erschloß und erkannte, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks dem Unterschiede zwischen dessen Winkelsumme und  $2R$  proportional wäre. Weiterhin vermutete er einen Zusammenhang zwischen der Hypo-

these des spitzen Winkels und der Geometrie auf einer imaginären Kugel. Auch Lambert vermochte nicht, die Hypothese des spitzen Winkels zwingend ad absurdum zu führen.

Johann Heinrich Lamberts hier in Betracht kommende Schrift, die man ebenfalls in Engel-Stäckel [3] abgedruckt findet, hat den Titel „Theorie der Parallellinien“. Sie stammt aus dem Jahre 1766, wurde aber erst 1786 aus seinem Nachlaß im „Magazin für die reine und angewandte Mathematik“ veröffentlicht.

Hier sei auch der bekannte französische Mathematiker A. M. Legendre (1752—1833) genannt, dem interessante Sätze über die Winkelsumme im Dreieck in den Fällen der drei Hypothesen zu verdanken sind, vgl. Bonola-Liebmann [1]. Durch seine weitverbreiteten „Eléments de Géométrie“ hat er die Forschungen über das Parallelenaxiom sehr gefördert.

9. Griechische, arabische, italienische, deutsche, englische, französische, ungarische Gelehrte bemühten sich im Laufe zweier Jahrtausende um einen Beweis für das Parallelenaxiom, immer wieder vergeblich. Welche Unsumme von Arbeit dabei geleistet wurde, erhellt beispielsweise aus der Tatsache, daß nach Engel-Stäckel [3] über 250 ernst zu nehmende Schriften bekannt sind, die sich, ohne zum Ziele zu kommen, mit der Parallelentheorie beschäftigen. Wohl mit keinem anderen Problem im Gebiete der exakten Wissenschaften wurde so lange ohne Entscheidungsgerungen, so daß es verständlich wird, daß es Mathematiker gab, welche die Versuche als aussichtslos aufzugeben empfahlen, während andere in immer steigender Zahl, vor allem etwa seit 1780, sich um die Überwindung der Schwierigkeiten bemühten, ohne daß jemand an der alleinigen Berechtigung der Euklidischen Geometrie gezweifelt hätte.

### Die Entdecker der Nichteuklidischen Geometrie.

10. Dem großen Göttinger Mathematiker C. F. Gauß (1777—1855) war es vorbehalten, als erster die Lösung des Rätsels des Parallelenaxioms zu finden: in jahrelanger,

1792 beginnender, mühsamer Gedankenarbeit rang er sich zu der Überzeugung durch, daß eine Geometrie denkbar ist, die ein dem Parallelenaxiom widersprechendes Axiom und dazu die übrigen Euklidischen Annahmen voraussetzt. Er entwickelte eine solche Geometrie, ähnlich wie es Saccheri und Lambert bei der Hypothese des spitzen Winkels machten, aber nicht, und das ist das wesentlich Neue, um einen Widerspruch zu finden, sondern in dem klaren Bewußtsein, eine neue, Nichteuklidische Geometrie aufzubauen, die in sich ebenso frei von logischen Widersprüchen ist wie die Euklidische. Obwohl Gauß über diese seine Untersuchungen nichts veröffentlicht und sich nur gelegentlich in Briefen auf sie bezogen hat, steht fest, daß er spätestens 1816 volle Klarheit über die logische Berechtigung der Nichteuklidischen Geometrie gewonnen und diese Disziplin weit ausgebaut hatte. Diese Nichteuklidische Geometrie ist nichts anderes als die nach Nr. 7 aus der Hypothese des spitzen Winkels sich ergebende Geometrie. Dasselbe gilt von der „Astralgeometrie“, zu deren Anfängen der Jurist F. K. Schweikart (1780—1857) gelangt war, unabhängig von Gauß und gleichfalls ohne etwas darüber zu veröffentlichen.

Carl Friedrich Gauß, Direktor der Sternwarte zu Göttingen, war einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten und Völker von genialer schöpferischer und kritischer Kraft. Der X. Band seiner gesammelten Werke enthält in der 2. Abteilung eine 1923 erschienene Abhandlung von P. Stäckel über Gauß als Geometer, die sich eingehend mit der Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie durch Gauß beschäftigt. Dort findet man auch S. 31ff. nähere Angaben über Schweikart, desgleichen in Engel-Stäckel [3].

11. Zwei Mathematiker teilen sich in den Ruhm, als erste in selbständigen, ausführlichen Veröffentlichungen die Nichteuklidische Geometrie begründet zu haben, und zwar



unabhängig von Gauß und voneinander. Es sind das der Pole N. I. Lobatschewskij (1793—1856) und der Ungar J. Bolyai (1802—1860).

Nachdem sich Lobatschewskij schon seit 1815 mit der Theorie der Parallelen beschäftigt hatte, entdeckte er zwischen 1823 und 1825 die Nichteuklidische Geometrie. Eine Abhandlung darüber, die er 1826 der Universität Kasan vorlegte, ist verlorengegangen, deren Ergebnisse sind in die russisch geschriebene Abhandlung „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ hineingearbeitet, die 1829 und 1830 im Kasaner Boten erschienen ist. In dieser ersten Veröffentlichung Lobatschewskijs über seine Nichteuklidische Geometrie ist deren logische Berechtigung betont, und zwar wieder der Geometrie, welcher die Hypothese des spitzen Winkels zugrunde liegt. Lobatschewskij kannte zwar die Ergebnisse Lamberts, wurde aber, wie anzunehmen ist, nicht von Gauß beeinflusst.

Gleichzeitig mit Lobatschewskij gelangte Johann Bolyai 1823 zu derselben Nichteuklidischen Geometrie, durch den mathematischen Verkehr mit seinem mit Gauß befreundeten Vater Wolfgang Bolyai zur Beschäftigung mit dem Parallelenaxiom angeregt. Der Weg, auf dem J. Bolyai seine Ergebnisse fand, war von dem Lobatschewskijs verschieden und der gleiche, den Gauß eingeschlagen hatte, ohne daß J. Bolyai etwas von Gaußens Arbeiten gewußt hätte. 1832 veröffentlichte Wolfgang Bolyai ein zweibändiges Lehrbuch der Mathematik und als Anhang zu diesem Tentamen teilte Johann Bolyai seine Ergebnisse mit.

Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij war Studierender, dann Professor an der Universität Kasan\*). Seine wissenschaftliche Großtat war die Begründung der Nichteuklidischen Geometrie,

---

\*) Gaußens Freund I. M. C. Bartels war Lobatschewskijs Lehrer in der Mathematik, aber ohne daß Lobatschewskij auf diesem Weg indirekt durch Gauß zur Nichteuklidischen Geometrie hingeführt worden wäre.



für die er den Namen „Imaginäre Geometrie“, später „Pan-geometrie“ wählte. Da wir auf den für uns in Betracht kommenden Inhalt der Schriften Lobatschefskijs und J. Bolyais an den sachlich entsprechenden Stellen unserer späteren Ausführungen zurückkommen werden, wollen wir uns hier mit der Aufzählung der Titel, zunächst der Schriften Lobatschefskijs, begnügen:

a) Die schon genannte Abhandlung „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ 1829—1830, deren Übersetzung in das Deutsche man in Engel [2] findet (nebst einer ausführlichen Biographie des Gelehrten).

b) Es folgte die „Imaginäre Geometrie“, und zwar russisch in den Kasaner Gelehrten Schriften 1835, französisch in Crelles Journal, Bd. XVII, 1837, S. 295—320.

c) Wieder russisch und in derselben Zeitschrift wie b) erschien 1835—1838 die ausführliche Darstellung „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien“. Auch diese ist in Engel [2] übersetzt.

d) In gleicher Weise erfolgte 1836 die Veröffentlichung der „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“. b) und d) sind in deutscher Übersetzung 1904 von H. Liebmann herausgegeben worden.

e) 1840 ließ Lobatschefskij in deutscher Sprache in Berlin die Zusammenfassung „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ erscheinen.

f) Schwer leidend schloß der große Gelehrte sein mathematisches Lebenswerk mit seinem Beitrage für die Jubiläumsschrift zur Feier des 50jährigen Bestehens der Universität Kasan ab, „Pan-géométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles“ (deutsch von H. Liebmann, Ostwalds Klassiker Nr. 130). Als das Werk gedruckt wurde, war Lobatschefskij erblindet.

Johann Bolyai war 1818—1823 Zögling der k. k. Ingenieur-Akademie in Wien. In dieser Zeit reiften seine Ideen über das Parallelenaxiom, die ihn zur Nichteuklidischen Geometrie führten, so daß er Ende 1823 schreiben konnte, er hätte aus nichts eine neue Welt geschaffen. Damit hatte der 21jährige eine Leistung vollbracht, die später den mit Lobsprüchen sehr zurückhaltenden Gauß zu der Äußerung veranlaßte „ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Größe.“ Es ist wohl das erschütterndste Kapitel in der Geschichte der großen Mathematiker, wie der frühreife, hochbegabte, leidenschaftliche, aufbrausende J. Bolyai unter dem Mangel an Verständnis litt, mit dem seine

Entdeckung allenthalben, auch vom eigenen Vater, aufgenommen wurde, wie er sich von Gauß benachteiligt glaubte, wie er sich immer mehr in krankhaftes Mißtrauen hineinsteigerte, wie er seelisch und körperlich verfiel, bis er, der sich immer wieder vergebens zu weiteren großen mathematischen Leistungen aufzuraffen versuchte, als längst pensionierter Hauptmann gänzlich vereinsamt in Dürftigkeit in Maros-Vásárhely endigte. Eine ausführliche Schilderung dieses wahrhaft tragischen Lebensganges enthält Stäckel [9], dazu (neben der Wiedergabe verschiedener anderer Schriften der beiden Bolyais in deutscher Sprache) Teile des Gesamtwerkes, als dessen Anhang J. Bolyais Nichteuklidische Geometrie erschien. Der Titel des Gesamtwerkes lautet: „Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici“, während Johann Bolyais prachtvoller Anhang die Überschrift trägt: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica“\*).

12. Mit der Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie hatte der mathematische Geist Fesseln gesprengt, von denen er sich 2 Jahrtausende lang vergeblich zu befreien versucht hatte. Wie außerordentlich groß die Widerstände waren, die dabei überwunden werden mußten, können wir in der neueren Mathematik Aufgewachsenen nicht mehr ursprünglich empfinden, höchstens reflektierend erkennen. Wir müssen zu diesem Zweck an Tatsachen denken wie die, daß ein Mathematiker von der überragenden Autorität eines Gauß aus Scheu vor dem „Geschrei der Böötier“ die eigenen umstürzenden Ergebnisse über das Parallelenaxiom zurückhielt, daß es über 30 Jahre dauerte, bis in die zweite Hälfte der 60er Jahre des 19. Jahrhunderts, ehe weitere mathematische Kreise die genialen Leistungen Loba-

\*) Es sei hierzu bemerkt, daß in zahlreichen Euklid-Ausgaben das V. (das Parallelen-) Postulat als XI. Axiom aufgeführt wurde, weiterhin, daß die Quadratur auch nur eines einzigen Kreises zwar in der Euklidischen Geometrie unmöglich, in der Nichteuklidischen Geometrie aber, wovon wir noch in Nr. 108 sprechen werden, durchführbar ist.

tschefskijs und Bolyais zu beachten und zu verstehen anfangen.

Nun wurde es klar, warum all die Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, nicht hatten zum Ziele führen können: Angenommen, das Parallelenaxiom wäre aus den übrigen Axiomen beweisbar. Dann würde es in jeder Geometrie, welche diese übrigen Annahmen erfüllt, als eine Folge aus ihnen auch gelten. Die Nichteuklidische Geometrie ist aber ein Beispiel einer in sich widerspruchsfreien Geometrie, in welcher zwar die übrigen Euklidischen Annahmen gelten, aber nicht die Aussage des Parallelenaxioms. Daher kann das Parallelenaxiom nicht beweisbar sein.

Damit war der erste Unmöglichkeitbeweis in der Mathematik geführt. Jetzt erst gelang es über das, was Euklid, der Begründer der Axiomatik, erreicht hatte, wesentlich hinauszukommen, und in zäher, aber stetig fortschreitender Arbeit entstand, die verschiedensten mathematischen Gebiete erhellend, die moderne Axiomatik.

## II. Abschnitt.

### Axiomatik der absoluten Geometrie.

#### Bedeutung der absoluten Geometrie.

**13.** Da die Nichteuklidische Geometrie, wie wir wissen, die sämtlichen Euklidischen Annahmen mit Ausnahme des Parallelenaxioms verwendet und da (Nr. 5) Euklids Axiomensystem unvollständig ist, müssen wir unsere Betrachtungen über Nichteuklidische Geometrie mit der Angabe eines vollständigen Axiomensystems der Euklidischen Geometrie beginnen. Die Aufgabe, die Lücken in Euklids Axiomensystem auszufüllen, läßt (Nr. 6, Schluß) naturgemäß verschiedene Lösungen zu; wir schließen uns bei der



Auswahl, die zur Verfügung steht, eng an das System an, das D. Hilbert mit Benutzung zahlreicher fremder, besonders deutscher und italienischer Ergebnisse in seinen berühmten „Grundlagen der Geometrie“\*) [6] entwickelt hat. Die dabei auftretenden Sätze der Euklidischen Geometrie werden wir, mit einigen wenigen Ausnahmen, ohne Beweise anführen, da deren Ableitungen in die Euklidische Geometrie gehören, deren Kenntnis wir voraussetzen.

David Hilberts „Grundlagen“ erschienen ursprünglich als Beitrag zur Festschrift anlässlich der Enthüllung des Göttinger Gauß-Weber-Denkmales. Wir beziehen uns im folgenden stets auf die 4. Auflage des Buches (1913). Die neueste 6., ebenso wie die 5. Auflage ist ein anastatischer Neudruck der 4. mit einigen am Schluß angefügten, für unsere Untersuchungen nicht in Betracht kommenden Zusätzen. In Hilberts „Grundlagen“ sind die Beweise vielfach weggelassen. Leider gibt es noch keine Darstellung des Hilbertschen Aufbaues der Euklidischen Geometrie mit vollständig durchgeführten Beweisen. Weiteres Material, vor allem auch Angaben über die Literatur zu den von uns im Zusammenhange mit der Axiomatik berührten Fragen, findet man vor allem in Enriques [4] und Zacharias [11]. Ein von dem hier gewählten abweichendes Axiomensystem ist in Schur [8] eingehend behandelt.

**14.** In Nr. 4 hatten wir darauf hingewiesen, daß Euklid möglichst lange das Parallelenaxiom vermeidet. Wenn wir im folgenden ebenso vorgehen und in dieser Richtung noch über Euklid hinausgehen werden, so liegt der Grund dafür nicht in einer Scheu vor dem Parallelenaxiom, sondern in etwas anderem:

Alle Sätze, die ohne das Parallelenaxiom beweisbar sind, gelten gleichzeitig in der Euklidischen und der Nichteuklidischen Geometrie, sie gehören, wie man es seit J. Bolyai vielfach kurz bezeichnet, der „absoluten Geometrie“ an. Wenn man, wie wir es tun werden, das Hilbertsche Axiomensystem der Euklidischen Geometrie so abändert, daß an letzter Stelle das Parallelenaxiom eingeführt wird, dann

\*) Im folgenden kurz zitiert als „Grundlagen“.



bilden die mit den vorhergehenden Axiomen ableitbaren Sätze den Inhalt der absoluten Geometrie und damit den gemeinsamen Unterbau der Euklidischen und der Nichteuklidischen Geometrie. Je nachdem man nun diesen vorhergehenden Axiomen das Euklidische Parallelenaxiom oder ein ihm widersprechendes Parallelenaxiom hinzufügt, erhält man die Euklidische oder die Nichteuklidische\*) Geometrie. Dabei gelten die Sätze, die man von nun ab beweisen kann (zu deren Beweis das hinzugefügte Axiom notwendig ist), jeweils nur in der einen der beiden Geometrien, dagegen nicht in der anderen. Damit liegen dann die Gemeinsamkeiten und die Verschiedenheiten der beiden Geometrien zutage.

### Formalisierung der Geometrie.

15. Der Beschäftigung mit dem Hilbertschen Axiomensystem der Euklidischen Geometrie wollen wir einige grundsätzliche Bemerkungen über die moderne Axiomatik der Geometrie vorausschicken:

Die Frage nach der Berechtigung der Nichteuklidischen Geometrie läßt sich von zwei Seiten her behandeln, nämlich als Frage nach der rein logischen Berechtigung oder als Frage nach einer nicht allein durch die rein logische Berechtigung gesicherten Existenz, beispielsweise durch Untersuchung ihrer Übereinstimmung mit der Wirklichkeit oder mit unserer räumlichen Anschauung. Die auf den zweiten Punkt bezüglichen Überlegungen bis Nr. 121 — 123 zurückstellend, wollen wir uns zunächst ausschließlich mit der rein logischen Seite des Problems beschäftigen.

Hier hat Euklid selbst in seinem axiomatischen Aufbau den ersten, entscheidenden Schritt getan, indem er (Nr. 3,

---

\*) Die durchaus berechtigte Frage, ob man nicht das absolute Axiomensystem in verschiedenen Nichteuklidischen Weisen fortsetzen könne, werden wir in Nr. 57 verneinen, indem wir zeigen, daß es nur eine in diesem Sinne Nichteuklidische Geometrie gibt. Daher sprechen wir immer von „der“ und nicht von „einer“ Nichteuklidischen Geometrie.

Schluß) in den Beweisen von der Anschauung unabhängig, rein logisch vorgehen wollte. Es ist für den rein logischen Standpunkt nur konsequent, wenn man diese Loslösung von der Anschauung auch in den Definitionen durchführt, womit die in Nr. 2 genannten Euklidischen Definitionen der ersten Art (z. B. Def. I, II, IV) ihre Berechtigung verlieren. Punkte und Gerade sind jetzt lediglich Worte für irgendwelche Dinge, welche nur formallogisch die durch die Axiome ausgesprochenen Beziehungen erfüllen müssen. Da die Geometrie, wie erwähnt, ausschließlich mit den durch die Axiome ausgedrückten Beziehungen zwischen den mit den Worten Punkt und Gerade bezeichneten (aber nicht über die Axiome hinaus beschriebenen) Dingen rein logisch operiert, können wir diese Worte und ihre Beziehungen in jeder mit den Axiomen verträglichen Art deuten. Jede solche formallogisch mögliche Deutung des Axiomensystems, ob sie nun räumlich-an-schaulich, z. B. mit der üblichen Vorstellung der Punkte und der Geraden, oder auf dem Wege über die Zahlen oder sonstwie entsteht, ist jeder anderen logisch gleichwertig\*).

So ist es beispielsweise durchaus zulässig, das Axiom „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade“ derart zu deuten, daß man sich die zwei Punkte in der üblichen Weise vorstellt und unter der Geraden den Kreis mit den beiden Punkten als Durchmesserendpunkten versteht, oder in der Weise, daß man unter den Punkten Menschen, unter der durch zwei von ihnen bestimmten Geraden die Summe ihrer Geburtsjahre versteht. Diese beiden Deutungen des Axiomensystems scheitern allerdings an späteren Euklidischen Axiomen\*\*).

**16.** Die räumliche Anschauung ist von großem Werte bei der schöpferischen axiomatischen Arbeit, indem

\*) Die Notwendigkeit dieser Formalisierung findet man beispielsweise bei K. Boehm, „Begriffsbildung“ (Karlsruhe 1922) nachgewiesen.

\*\*) Eine naheliegende, brauchbare, von der üblichen abweichende Deutung der Axiome der Euklidischen Geometrie findet man z. B. in R. Baldus, „Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik“ (Karlsruhe 1924) auf S. 11 behandelt.

sie angibt, was axiomatisch gefaßt werden soll, den Weg für die abstrakte Formulierung der Axiome weist und zu neuen Ergebnissen hinleitet. Dessenungeachtet wird auf sie in der fertigen axiomatischen Darstellung nirgends Bezug genommen. Man könnte vergleichend sagen, die räumliche Anschauung sei das Gerüst, das beim Bau des axiomatischen Gebäudes benötigt und nach dessen Fertigstellung als nunmehr überflüssig abgebrochen wird. Darüber hinaus ist eine brauchbare anschauliche Deutung der geometrischen Axiome für den Leser der axiomatischen Darstellung nötig, denn sie erst füllt die abstrakt-logischen Deduktionen über die Möglichkeit der Prüfung auf deren logische Richtigkeit hinaus mit einem Inhalt und macht damit aus einer Menge zwar unanfechtbarer, aber scheinbar willkürlich angehäufter Logik ein seinem Aufbau und Inhalte nach verständliches System. Trotzdem ist bei der rein axiomatischen Behandlung der Geometrie die Unterdrückung jeder Bezugnahme auf die Anschauung, die logische Formalisierung zulässig\*).

Es ist ohne weiteres zuzugeben, daß man durch die vollständige Formalisierung wichtige erkenntnistheoretische Fragen beiseite schiebt, beispielsweise solche, die bei Euklids wiederholt erwähnten Definitionen der 1. Art auftauchen. Andererseits steht aber fest, daß es erst durch die einseitige Beschränkung auf die formallogische Seite der Angelegenheit möglich geworden ist, im rein Logischen bis in die letzten Zusammenhänge hinein so klar zu sehen, wie wir es heute tun.

### Die Axiome der Verknüpfung I, 1—3.

17. Wir wollen uns nun dem in Nr. 13 erwähnten vollständigen Axiomensystem der Euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms und den daraus folgenden Sätzen zuwenden, d. h. der absoluten Geometrie.

---

\*) Vgl. hierzu auch Schur [8], 1. Absatz von Nr. 37, S. 106. Weitere hier einschlägige Bemerkungen findet man in R. Baldus, „Mathematik und räumliche Anschauung“, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XXX, 1921, S. 1—15.



Hilbert baut sein System in 5 Axiomgruppen auf. Dabei ist die „Erklärung“ der Worte „Punkt“, „Gerade“ usw., die er an die Spitze stellt, ganz im Sinn unserer Nr. 15 zu verstehen.

Erklärung 1. Wir denken zwei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir „Punkte“ und bezeichnen sie mit  $A, B, C \dots$ , die Dinge des zweiten Systems nennen wir „Gerade“ und bezeichnen sie mit  $a, b, c \dots$ . Wir denken die Punkte und Geraden in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „kongruent“; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie\*).

Die Axiome der Verknüpfung I, 1—3:

I, 1. Zwei Punkte bestimmen stets eine einzige Gerade.

I, 2. Irgend zwei Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I, 3. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte.

Das Hilbertsche Axiom I, 1 entspricht dem I. Postulat Euklids (Nr. 3), die beiden anderen Axiome fehlen bei Euklid.

Man braucht bei einer geometrisch-anschaulichen Deutung dieser Axiome keineswegs in der üblichen Weise anzunehmen, daß die Punkte einer Geraden räumlich auf ihr liegen. Beispielsweise würde die folgende Deutung den Axiomen der Verknüpfung (allerdings nicht den späteren Axiomen) genügen: man denkt sich im Raume 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte  $A, B, C, D$  und nennt diese „Punkte“; sie bestimmen ein Tetraeder, dessen Kanten nennt man „Gerade“, und nun deutet man die Axiome I, 1—3 so, daß man als Gerade durch zwei Punkte nicht die durch sie gelegte Tetraederkante annimmt, sondern deren Gegenkante.

\*) Die Formulierungen der Axiome in den „Grundlagen“ S. 3ff., S. 120ff., S. 146ff. gehen stellenweise etwas auseinander. Wir werden im folgenden einzelne Axiome sprachlich etwas anders fassen als Hilbert. Inhaltliche Abweichungen von Hilbert werden wir als solche kennzeichnen.



Den weiteren Axiomen werden wir, wie es übrigens auch Hilbert tut, teilweise Figuren beigeben, um sie im Sinn unserer Nr. 16 verständlich zu machen und dem Gedächtnis einzuprägen, wobei die übliche, aus der Elementargeometrie bekannte Deutung der Worte „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“ usw. zugrunde gelegt wird. Dabei bleibt selbstverständlich hier überall, da uns nur die rein logischen Zusammenhänge interessieren, gemäß Nr. 15 die Freiheit bestehen, die Axiome auch in einer von den Figuren abweichenden Weise zu deuten.

### Die Axiome der Anordnung II, 1–4.

18. Als zweite Axiomgruppe führt Hilbert die „Axiome der Anordnung“ ein:

Erklärung 2. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „zwischen“ dient.

Die Axiome der Anordnung II, 1–4:

II, 1. Wenn  $A, B, C$  Punkte einer Geraden sind und  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt, so liegt  $B$  auch zwischen  $C$  und  $A$ .

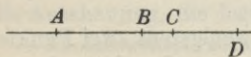


Fig. 1.

(Fig. 1.)

II, 2. Wenn  $A$  und  $C$  zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es wenigstens einen Punkt  $B$ , der zwischen  $A$  und  $C$  liegt und wenigstens einen Punkt  $D$  so, daß  $C$  zwischen  $A$  und  $D$  liegt. (Fig. 1.)

II, 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets genau einen\*), der zwischen den beiden anderen liegt.

Erklärung 3. Die zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  gelegenen Punkte heißen auch die Punkte der „Strecke“  $AB^{**}$ ).

II, 4. (Axiom von Pasch.) Es seien  $A, B, C$  drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und  $a$  eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält; wenn dann  $a$  durch einen

\*) D. h. so viel wie einen einzigen.

\*\*\*) Die Endpunkte einer Strecke werden daher nicht zu den Punkten der Strecke gerechnet.

Punkt der Strecke  $AB$  geht, so geht  $a$  auch durch einen Punkt der Strecke  $BC$  oder der Strecke  $AC$ . (Fig. 2.)\*

Treibt man räumliche Geometrie, dann muß man in II, 4 noch hinzufügen, daß  $a$  eine Gerade der Ebene  $ABC$  sein soll. Dadurch, daß hier dieser Zusatz weggelassen wurde, führt das vorliegende Axiomensystem auf die ebene Geometrie.

19. Von den Sätzen, die man mit den bisher eingeführten Axiomen (der Verknüpfung und der Anordnung) beweisen kann, seien die folgenden drei genannt:

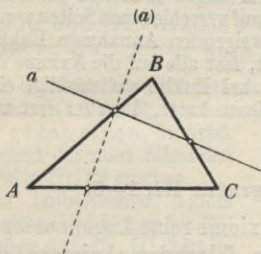


Fig. 2.

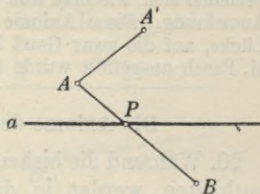


Fig. 3.

a) Jede Strecke enthält eine unendliche Menge von Punkten \*\*).

b) Jede Gerade  $a$  (Fig. 3) teilt die nicht auf ihr liegenden Punkte in zwei Gebiete, und zwar derart, daß jeder Punkt des einen Gebietes mit jedem Punkte des anderen Gebietes eine Strecke begrenzt, die einen Punkt von  $a$  enthält (z. B.  $AB$ ), während irgend zwei Punkte desselben Gebietes eine Strecke begrenzen (z. B.  $AA'$ ), die keinen Punkt von  $a$  enthält.

Man sagt auch, die Punkte  $A$  und  $A'$  liegen „auf der gleichen Seite von  $a$ “, die Punkte  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $a$ .

c) Irgendein Punkt  $O$  einer Geraden  $a$  teilt die Gerade in zwei Halbgerade \*\*\*): zwei von  $O$  verschiedene Punkte

\*) Die Axiome der Gruppe II sind zuerst von M. Pasch in seinem in Nr. 6 genannten Buch eingehend behandelt worden.

\*\*\*) Beweis in Liebmann [7], S. 11—12.

\*\*\*)) Beweise dieses und des vorhergehenden Satzes findet man bei G. Feigl, „Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie“, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 33, 1924, S. 2—24.

von  $a$  liegen auf verschiedenen oder auf derselben Halbgeraden (Fig. 4), je

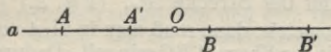


Fig. 4.

nachdem die von ihnen begrenzte Strecke  $O$  enthält (z. B.  $AB, A'B$ )

oder nicht enthält (z. B.  $AA', BB'$ ). Jeder von  $O$  verschiedene Punkt liegt in einer dieser beiden Halbgeraden\*).

Man sagt auch, die Punkte  $A$  und  $A'$  liegen „auf der gleichen Seite von  $O$ “, die Punkte  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $O$ .

Die in Nr. 5 erwähnten stillschweigenden Annahmen Euklids beziehen sich, wie man nun erkennt, fast alle auf die Axiome der Anordnung. Diese Axiome fehlen bei Euklid vollständig, eine Lücke, auf die zwar Gauß hingewiesen hatte, die aber erst von M. Pasch ausgefüllt wurde (Nr. 6).

### Die Axiome der Kongruenz III, 1—5.

20. Während die bisherigen Axiome reine Lagenaussagen enthielten, werden in den nun folgenden Axiomen der Kongruenz Gleichheitsbeziehungen zwischen Strecken, dann zwischen Winkeln eingeführt.

Erklärung 4. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns das Wort „kongruent“ dient.

Die Axiome der Kongruenz III, 1—3:

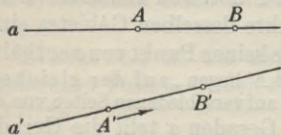


Fig. 5.

III, 1. Wenn  $A, B$  zwei Punkte einer Geraden  $a$  sind (Fig. 5), wenn ferner  $A'$  ein Punkt derselben oder einer anderen Geraden  $a'$  ist, dann gibt es auf einer gegebenen Seite der Geraden  $a'$  von  $A'$  mindestens

einen Punkt  $B'$  so, daß die Strecke  $AB$  der Strecke  $A'B'$

\*) Der Endpunkt einer Halbgeraden zählt demnach nicht zu deren Punkten.



kongruent ist, in Zeichen  $AB \equiv A'B'^*$ ). Es ist immer  $AB \equiv BA$ .

III, 2. Wenn eine Strecke  $AB$  sowohl der Strecke  $A'B'$  als auch der Strecke  $A''B''$  kongruent ist, so ist auch  $A'B'$  der Strecke  $A''B''$  kongruent, d. h. aus  $AB \equiv A'B'$  und  $AB \equiv A''B''$  folgt  $A'B' \equiv A''B''$ .

III, 3. Es sei  $B$  ein Punkt einer Strecke  $AC$  auf einer Geraden  $a$ , ferner  $B'$  ein Punkt einer Strecke  $A'C'$  auf  $a$  oder einer anderen Geraden  $a'$  (Fig. 6); ist dann  $AB \equiv A'B'$  und  $BC \equiv B'C'$ , so ist auch  $AC \equiv A'C'$ .

Daß es nicht nur mindestens einen Punkt  $B'$  gibt, welcher das Axiom III, 1 erfüllt, sondern immer genau einen, wird sich auf Grund der noch folgenden Axiome in Nr. 22 ergeben.

Dem Hilbertschen Axiom III, 1 entspricht keines der Euklidischen Axiome. III, 2 ist im ersten Euklidischen Axiom enthalten, III, 3 im zweiten. Die aus dem dritten Euklidischen Axiom sich ergebende Aussage (daß kongruente Strecken von kongruenten Strecken subtrahiert wieder kongruente Strecken ergeben) kann man mittels der Hilbertschen Kongruenzaxiome (einschließlich III, 4) als Satz beweisen. An Stelle der allgemein gehaltenen Größenaussagen der Euklidischen Axiome I—III treten bei Hilbert schärfere, engere Aussagen.

21. Hilbert definiert die Winkel folgendermaßen:

Erklärung 5. Ein von einem Punkt  $O$  ausgehendes Paar von Halbgeraden  $h, k$ , die nicht zu derselben Geraden gehören, nennen wir einen „Winkel“ und bezeichnen ihn mit

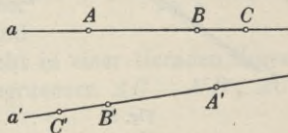


Fig. 6.

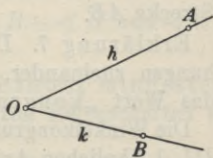


Fig. 7.

\*) J. Bolyai hat dieses Zeichen für die Kongruenz aus der Gaußschen Zahlentheorie in die Geometrie übernommen.

$\sphericalangle (h, k)$ . Ist  $A$  ein Punkt der Halbgeraden  $h$ ,  $B$  ein solcher von  $k$  (Fig. 7), dann bezeichnen wir den Winkel auch mit  $\sphericalangle AOB$ .

Erklärung 6. Ergänzt man die Halbgerade  $h$  zu der (Voll-) Geraden  $\bar{h}$ , die Halbgerade  $k$  zu der Geraden  $\bar{k}$  (Fig. 8), dann bildet

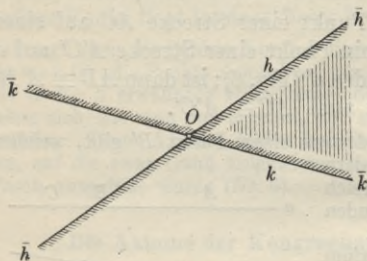


Fig. 8.

die Gesamtheit derjenigen von  $h, k$  und  $O$  verschiedenen Punkte der Ebene, welche auf der gleichen Seite von  $\bar{h}$  wie die Punkte von  $k$  liegen und auf der gleichen Seite von  $\bar{k}$  wie die Punkte von  $h$ , das „Innere“ des Winkel-

kels. Die Gesamtheit der übrigen von  $h, k$  und  $O$  verschiedenen Punkte bildet das „Äußere“ des Winkels.

Aus dieser Erklärung folgt, daß es nur hohle Winkel gibt, keine gestreckten und erhabenen. Aus dem Axiom von Pasch II, 4 folgt der Satz

a) Jede Gerade durch den Scheitel  $O$  eines  $\sphericalangle AOB$ , welche einen Punkt des Winkelinnern enthält, trifft die Strecke  $AB$ .

Erklärung 7. Die Winkel stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Bezeichnung uns ebenfalls das Wort „kongruent“ dient.

Die Winkelkongruenz wird nun in folgendem, dem Axiom III, 1 ähnlichen Axiom behandelt:

Kongruenzaxiom III, 4. Es sei ein  $\sphericalangle (h, k)$  und eine Gerade  $a'$  gegeben sowie eine bestimmte Seite von  $a'$ . Es bedeute  $h'$  eine Halbgerade von  $a'$  (Fig. 9), die vom

Punkt  $O'$  ausgeht: dann gibt es genau eine Halbgerade  $k'$  so, daß der  $\sphericalangle(h, k)$  kongruent dem  $\sphericalangle(h', k')$  ist und zugleich alle inneren Punkte des  $\sphericalangle(h', k')$  auf der gegebenen Seite von  $a'$  liegen, in Zeichen  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ . Für jeden  $\sphericalangle(h, k)$  gilt  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h)^*$ .

22. Das nun folgende letzte Kongruenzaxiom schlägt die Brücke zwischen der Strecken- und der Winkelkongruenz. Es lautet (Fig. 10):

Kongruenzaxiom III, 5.  
Sind  $A, B, C$  drei nicht in einer Geraden liegende Punkte und  $A', B', C'$  drei ebenfalls nicht in einer Geraden liegende Punkte und gelten die Kongruenzen  $AB \equiv A'B', AC \equiv$

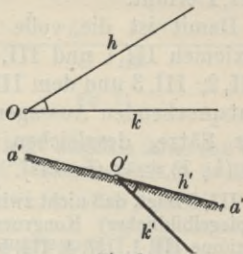


Fig. 9.

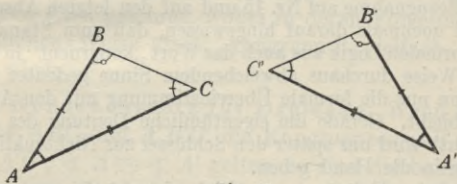


Fig. 10.

$A'C'$ ,  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ , so gilt auch  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$  und  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'^{**}$ .

Nach dem Axiom III, 1 ist die Existenz mindestens eines Punktes  $B'$  mit den verlangten Eigenschaften ge-

\*) In den Axiomen III, 1 und III, 4, desgleichen bei der Definition des Innern eines Winkels sind wir von den „Grundlagen“ S. 10—11 etwas abgewichen, und zwar im Anschluß an A. Rosenthal, „Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome“, Math. Ann. 71, 1911, S. 257—274.

\*\*\*) Die kurze und übersichtliche Bezeichnung der Dreieckswinkel mit  $\sphericalangle A$  statt  $\sphericalangle BAC$  usw. kann hier nicht mißverstanden werden.



fordert, aus den übrigen Kongruenzaxiomen folgt nun der Satz

a) Es gibt immer genau einen Punkt  $B'$ , der das Axiom III,1 erfüllt.

Damit ist die volle Übereinstimmung zwischen den Axiomen III,1 und III,4 hergestellt. Die den Axiomen III,2, III,3 und dem III. Euklidischen Axiom für Winkel entsprechenden Aussagen ergeben sich nunmehr ebenfalls als Sätze, desgleichen die Tatsachen  $AB \equiv AB$  und  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)^*$ .

III, 5 zeigt, daß nicht zwischen gleichsinniger und gegensinniger (spiegelbildlicher) Kongruenz unterschieden wird. Durch die Axiome III, 1, III, 4, III, 5 sind diejenigen Beziehungen gefaßt, welche dem Euklidischen Bewegungsbegriffe\*\*) zugrunde liegen. Man kann nun davon sprechen, daß man eine Strecke auf eine Gerade „legt“, einen Winkel an eine Gerade „anlegt“ usw., um die durch diese drei Hilbertschen Axiome gewährleistete kongruente Übertragung kurz zu kennzeichnen.

Unter Bezugnahme auf Nr. 15 und auf den letzten Absatz von Nr. 17 sei nochmals darauf hingewiesen, daß vom Standpunkte der rein formalen Logik aus auch das Wort „kongruent“ in von der üblichen Weise durchaus abweichendem Sinne gedeutet werden kann, wenn nur die formale Übereinstimmung mit den Axiomen erhalten bleibt. Gerade die eigentümliche Deutung des Wortes „kongruent“ wird uns später den Schlüssel zur Nichteuklidischen Geometrie in die Hand geben.

Als wichtige Folgerung aus bisherigen Axiomen und dem Satz 22 a ergibt sich nun der Satz

b) Auf einer Geraden  $g$  liege der Punkt  $B$  zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  (Fig. 11). Auf einer von einem Punkt  $A'$  begrenzten Halbgeraden  $a'$  (die auf oder außerhalb  $g$  liegen kann) bestimme man die Punkte  $B'$  und  $C'$  so, daß  $A'B' \equiv$

\*) Der Beweis des Satzes 22 a und die Beweise für die soeben genannten Tatsachen findet man in der in unserer Anmerkung zu S. 31 genannten Abhandlung von A. Rosenthal. Dort ist auch der dem Axiom III, 3 nachgebildete Satz für Winkel, der in den „Grundlagen“ S. 17, Satz 15, ungenügend formuliert ist, vollständig ausgesprochen.

\*\*) Einschließlich der Umlegungen, welche die Figuren in gegensinnig kongruente verwandeln.

$AB$  ist und  $A'C' \equiv AC$ . Dann liegt auch  $B'$  zwischen  $A'$  und  $C'$ .

Beweis: Nach den Sätzen 19 c und 22 a kann man (Fig. 11) einen einzigen Punkt  $C''$  auf  $a'$  so bestimmen, daß  $B'$  zwischen  $A'$  und  $C''$  liegt und daß  $B'C'' \equiv BC$  ist. Dann ist nach Axiom III, 3 auch  $A'C'' \equiv AC$ , und da

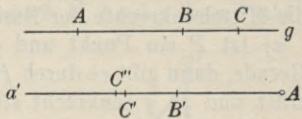


Fig. 11.

auch  $A'C' \equiv AC$  vorausgesetzt ist, folgt aus Satz 22 a, daß  $C'$  mit dem soeben angegebenen Punkte  $C''$  zusammenfällt, d. h. daß  $B'$  auch zwischen  $A'$  und  $C'$  liegt.

### Folgerungen aus den Axiomgruppen I—III.

23. Mit den Axiomen der bisher genannten drei Gruppen (der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz) kann man viele bekannte Sätze der Euklidischen und damit auch der absoluten Geometrie in bekannter Art beweisen. Einige von ihnen seien genannt, wobei in deren Formulierung in der üblichen Weise statt „kongruent“ vielfach „gleich“ gesagt wird:

a) 1. Kongruenzsatz für Dreiecke: Wenn für zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Kongruenzen  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$  gelten, so sind die beiden Dreiecke kongruent, d. h. es ist auch  $BC \equiv B'C'$ ,  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ ,  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ . (Beweis in „Grundlagen“, S. 14.)

b) Man kann jeden Winkel und jede Strecke in eindeutiger Weise halbieren.

c) Es gibt Winkel, welche einem ihrer Nebenwinkel gleich sind.

Erklärung 8. Ein Winkel, der einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, heißt ein „rechter Winkel“\*).

\*) Die Erklärungen für die Worte „Mittelsenkrechte“, „Nebenwinkel“, „Scheitelwinkel“ und ähnliche bekannte Bezeichnungen haben wir der Kürze

d) Im gleichschenkeligen Dreiecke sind die Basiswinkel gleich, die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze ist die Mittelsenkrechte der Basis.

e) Ist  $P$  ein Punkt und  $g$  eine ihn nicht enthaltende Gerade, dann gibt es durch  $P$  genau eine Gerade, welche  $g$  trifft und zu  $g$  senkrecht steht.

f) Es gibt in jedem Punkt einer Geraden genau ein Lot zur Geraden.

g) Sind  $A$  und  $B$  zwei Punkte, dann haben alle und nur die Punkte der Mittelsenkrechten zu  $AB$  von den beiden Punkten gleichen Abstand.

h) 3. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Seiten des einen den Seiten des anderen kongruent sind.

i) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.

j) Scheitelwinkel sind einander gleich.

k) Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht.

Auch die bekannten Umkehrungen von Satz d) kann man leicht beweisen. „Grundlagen“ S. 17 wird gezeigt, daß man mit den Axiomen der Gruppen I—III auch den Satz beweisen kann, daß alle rechten Winkel gleich sind; durch diese Axiome wird daher das Euklidische IV. Postulat überflüssig. Da, wie wir schon bemerkten (Nr. 6, Schluß), die Ergänzung des unvollständigen Euklidischen Axiomensystems nicht eindeutig bestimmt ist, kann man Euklid auch in anderer Weise als Hilbert und dann so vervollständigen, daß Euklids IV. Postulat als Axiom bestehen bleibt.

Der Beweis des wichtigen Satzes 23 e muß, wovon am Schlusse von Nr. 27 noch zu sprechen sein wird, anders als bei Euklid geführt werden, etwa in der folgenden Weise: Der Punkt  $P$  liege nicht auf der Geraden  $g$  (Fig. 12). Man verbindet  $P$  mit einem beliebigen Punkte  $D$  von  $g$ , macht  $\sphericalangle \alpha_1 \equiv \sphericalangle \alpha$  (Axiom III, 4) sowie  $\overline{DQ} \equiv \overline{DP}$  (22 a) und bezeichnet den Schnittpunkt von  $PQ$  und  $g$  mit  $C$ . Dann ist wegen  $\overline{DC} \equiv \overline{DC}$  nach III, 5  $\sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle QCD$ , und diese Winkel sind rechte Winkel (Erkl. 8), d. h.

halber weggelassen. Die Numerierung der Erklärungen ist bei uns nur wegen der Rückverweisungen eingeführt. Einige unserer noch folgenden Erklärungen sind in den „Grundlagen“ nicht besonders aufgeführt.



$PC$  ist ein Lot von  $P$  auf  $g$ . Es ist auch das einzige, denn wären  $PA$  und  $PC$  Lote auf  $g$  (man hat die Fig. 12 noch einmal entstehend zu denken), dann könnte man nach II, 2 auf  $g$  einen Punkt  $D$  außerhalb der Strecke  $AC$  annehmen. Mache man nun  $\sphericalangle \alpha_1 \equiv \sphericalangle \alpha$ ,  $DQ \equiv DP$ , dann wäre nach III, 5  $\sphericalangle DCQ \equiv \sphericalangle DCP$ , daher läge nach Erkl. 8 und wegen der Gleichheit aller rechten Winkel der Punkt  $Q$  auf der Verlängerung von  $PC$ . Ebenso müßte aber  $Q$  auf der Verlängerung von  $PA$  liegen, die beiden Lote würden auf zwei Geraden liegen, die im Widerspruch mit I, 1 die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  gemeinsam hätten.

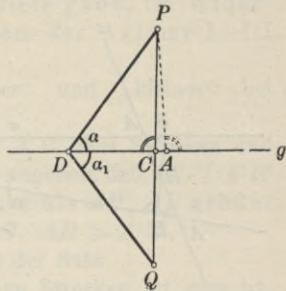


Fig. 12.

Den Satz 23 f beweist man einfach dadurch, daß man ein gezeichnetes gleichschenkeliges Dreieck mit der Basis auf die Gerade und mit dem Basismittelpunkt auf den gegebenen Punkt legt.

24. Unter den weiteren mit den Axiomen I—III beweisbaren Sätzen kommen für uns vor allem auch die folgenden in Betracht:

a) Bilden zwei verschiedene Gerade mit einer dritten Geraden gleiche Wechselwinkel, dann haben sie keinen Punkt gemeinsam.

Hier ein Beweis dieses Satzes:  $a$  und  $a'$  schneiden  $c$  in  $A$  und  $A'$  (Fig. 13) unter gleichen Wechselwinkeln. Sind dies rechte Winkel, dann folgt der zu beweisende Satz unmittelbar aus 23 e. Die Wechselwinkel seien nun keine rechten Winkel. Dann nehmen wir an,  $a$  und  $a'$  hätten einen Schnittpunkt  $S$ . Man könnte dann  $AA'$  in  $H$  halbieren (23 b) und das Lot  $HB$  auf  $a$  fallen (23 e). Weiterhin könnte man  $A'B' \equiv AB$  machen (22 a), dann wäre nach Axiom III, 5  $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle B$  ein rechter Winkel und  $\sphericalangle AHB \equiv \sphericalangle A'H B'$ . Zuzufolge 23 j und III, 4 wären diese beiden letzten Winkel Scheitelwinkel, daher lägen die Punkte  $B, H, B'$  in einer Geraden, zu welcher es im Widerspruch mit 23 e aus  $S$  die zwei Lote  $SB$  und  $SB'$  gäbe.

Erklärung 9. Zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man „parallel“.

Ein oft benötigter Spezialfall des Satzes a) ist der Satz

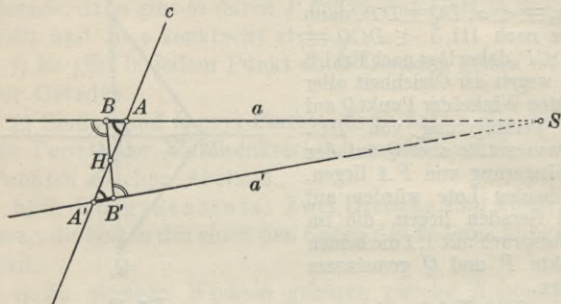


Fig. 13.

b) Stehen zwei Gerade auf einer dritten senkrecht, dann sind sie parallel.

Die für uns wichtigste Folgerung aus dem Satz a) lautet

c) Es gibt zu jeder Geraden durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt mindestens eine Parallele.

Beweis (Fig. 14): Ist  $a'$  die Gerade,  $A$  der Punkt, dann wählt man

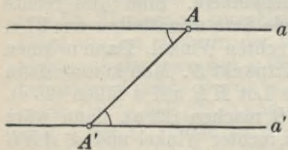


Fig. 14.

$A'$  auf  $a'$  beliebig und macht nach III, 4 die in der Figur gleich bezeichneten Wechselwinkel gleich. Dann sind nach dem Satz a) die Geraden  $a$  und  $a'$  parallel.

Das Wort „mindestens“ in diesem Satze c) ist deshalb nötig, weil man aus den Axiomen

I—III allein nicht beweisen kann, daß die Gerade  $a$  unabhängig von der Wahl des Punktes  $A'$  ist.

Da demnach aus den Axiomen I—III die Existenz der Parallelen folgt, müßte eine Geometrie, in der es auch nur zu einer einzigen Geraden durch einen einzigen Punkt keine Parallele gäbe, im Widerspruch mit mindestens einem der Axiome I—III stehen.

**25.** Die Beziehungen „größer“ und „kleiner“ bei Strecken faßt man durch die

Erklärung 9. Sind  $AB$  und  $A'B'$  zwei Strecken und kann man einen Punkt  $C$  in  $AB$  so angeben, daß  $AC \equiv A'B'$  ist, dann nennt man  $A'B'$  kleiner als  $AB$ ,  $AB$  größer als  $A'B'$ , in Zeichen  $A'B' < AB$ ,  $AB > A'B'$ .

Aus Satz 22b folgt nun sofort der Satz

a) Von zwei nicht kongruenten Strecken ist eine bestimmte kleiner als die andere.

Entsprechendes findet man für Winkel an der Hand der

Erklärung 10. Sind  $\sphericalangle(a, b)$  und  $\sphericalangle(a', b')$  zwei Winkel und kann man eine vom Scheitel von  $\sphericalangle(a, b)$  innerhalb des Winkels ausgehende Halbgerade  $c$  so angeben, daß  $\sphericalangle(a, c) \equiv \sphericalangle(a', b')$  ist, dann nennt man  $\sphericalangle(a', b')$  kleiner als  $\sphericalangle(a, b)$ ,  $\sphericalangle(a, b)$  größer als  $\sphericalangle(a', b')$ .

In diesen Definitionen von größer und kleiner steckt das Euklidische Axiom VIII für Strecken- und Winkelgrößen.

**26.** Hieran anschließend beweist man die bekannten Sätze

a) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder ihm nicht benachbarte Innenwinkel\*).

b) Im Dreiecke kann höchstens ein Winkel nicht spitz sein.

c) Im spitzwinkligen Dreiecke liegt jede Höhe innerhalb des Dreiecks, im nicht spitzwinkligen die vom größten Winkel ausgehende.

\*) Auf diesem Satze baut Euklid in den Elementen I, 26 den Beweis für die Existenz von Parallelen auf.



d) 2. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind kongruent, wenn  $AB \equiv A'B'$  ist,  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$  und weiterhin entweder  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$  oder  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ .

e) Sind  $a, b$  zwei sich schneidende Gerade und  $h, k$  die Halbierungslinien der vier durch  $a$  und  $b$  bestimmten Winkel, dann haben alle und nur die Punkte der Geraden  $h$  und  $k$  gleichen Abstand von  $a$  und  $b$ .

f) Die drei Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt innerhalb des Dreiecks.

g) Im Dreiecke liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel gegenüber und dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite.

h) Die Summe von zwei Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite.

i) 4. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  sind kongruent, wenn  $AB \equiv A'B'$  ist,  $BC \equiv B'C'$ ,  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$  und  $AB > BC$ .

j) Ist  $A$  ein Punkt,  $g$  eine ihn nicht enthaltende Gerade und  $G$  der Fußpunkt des von  $A$  auf  $g$  gefällten Lotes (23 e), dann ist  $AG$  die kürzeste Strecke mit dem einen Endpunkt  $A$  und dem anderen Endpunkt auf  $g$ .

k) Haben  $A, g, G$  die Bedeutung des vorigen Satzes und sind  $P$  und  $Q$  zwei weitere Punkte von  $g$ , wobei  $GP > GQ$  ist, dann ist auch  $AP > AQ$ .

Aus g) folgt, daß im rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse größer ist als jede Kathete, nach i) sind zwei rechtwinklige Dreiecke, die in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen, kongruent.

Bei Euklid treten nur die drei ersten Kongruenzsätze auf, und zwar im ersten Buche der Elemente, der 1. Kongruenzsatz als Satz 4, der 3. als Satz 8 und der 2. als Satz 26. Der 4. Kongruenzsatz ist zum erstenmal im Jahre 1750 ausgesprochen worden (vgl. Tropfke [10], S. 76).

**Einige Sätze über den Kreis.**

27. Man definiert nun nach Hilbert den Kreis durch die Erklärung 11. Ist  $M$  ein beliebiger Punkt, so heißt die Gesamtheit derjenigen Punkte  $A_i$ , für welche die Strecken  $MA_i$  einander kongruent sind, ein „Kreis“;  $M$  heißt der Mittelpunkt des Kreises, die Strecken  $MA_i$  heißen Halbmesser des Kreises.

Aus den Axiomen I—III ergeben sich unter anderem folgende Sätze über den Kreis:

a) Im Kreise gehören zu gleichen Zentriwinkeln gleiche Sehnen und zu gleichen Sehnen gleiche Zentriwinkel.

b) Eine Gerade trifft einen Kreis höchstens in zwei Punkten.

c) Ist  $A$  ein Punkt eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$ , dann trifft jede Gerade durch  $A$ , die nicht zu  $AM$  senkrecht steht, den Kreis in genau einem weiteren Punkte, während die in  $A$  zu  $AM$  senkrechte Gerade den Kreis nicht mehr trifft. Diese letztere Gerade heißt Tangente des Kreises in  $A$ ,  $A$  ihr Berührungspunkt.

d) Durch jeden vom Berührungspunkte verschiedenen Punkt einer Kreistangente kann man noch genau eine weitere Tangente an den Kreis legen.

e) Ist  $P$  ein Punkt, durch den zwei Tangenten an einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  gehen und sind  $A_1$  und  $A_2$  deren Berührungspunkte, dann ist  $PA_1 \equiv PA_2$  und  $\sphericalangle A_1PM \equiv \sphericalangle A_2PM$ .

f) Zu jedem Dreiecke gehört genau ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Innern des Dreiecks liegt und der die Dreiecksseiten zu Tangenten hat, Inkreis des Dreiecks.

g) Zwei Kreise können höchstens zwei Punkte gemeinsam haben, ihre Mittelpunkte liegen dann auf der Mittelsenkrechten zu der durch diese beiden Punkte begrenzten Strecke.

h) Haben zwei Kreise genau einen Punkt gemeinsam, dann haben sie in ihm die Tangente gemeinsam.

Erklärung 12. Ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$  und einem Halbmesser  $MA$  gegeben, dann bilden diejenigen Punkte  $B_i$ , für welche  $MB_i < MA$  ist, das „Innere“ des Kreises, diejenigen Punkte, für welche  $MB_i > MA$  ist, das „Äußere“ des Kreises.

Zu Satz 23 e sei nachträglich bemerkt, daß bei Euklid I, 12 das Lot aus einem Punkte  $P$  auf eine Gerade  $g$  (Fig. 15) in der Weise konstruiert wird, daß man auf der von  $P$  abgewendeten Seite von

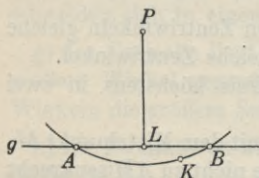


Fig. 15.

$g$  einen Punkt  $K$  annimmt, um  $P$  den Kreis durch  $K$  beschreibt und die von den Schnittpunkten dieses Kreises mit  $g$  begrenzte Strecke  $AB$  in  $L$  halbiert.  $PL$  ist dann das gesuchte Lot. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß  $g$  diesen Kreis schneidet. Tatsächlich kann man bei ausschließlicher Verwendung der Axiome I—III diese Annahme Euklids, daß eine Gerade, die einen Punkt

innerhalb eines Kreises enthält, den Kreis trifft, nicht beweisen\*).

Euklid definiert in der Def. XV des ersten Buches den Kreis folgendermaßen: „Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie eingeschlossene Figur, bei der die Geraden, die sich nach ihr von einem gewissen Punkt innerhalb der Figur erstrecken, alle einander gleich sind“. Man könnte diese Definition so auffassen, daß darin die Tatsache ausgesprochen ist, daß der Kreis die Ebene in zwei Gebiete teilt, und dann würde der angegebene Satz aus der Definition des Kreises folgen. Diese Definition hätte aber dann den Mangel, daß sie nicht, wie die Hilbertschen Erklärungen, nur schon bekannte Eigenschaften verwendet oder neue Worte einführt, sondern daß sie, was nur die Axiome tun sollen, neue Eigenschaften einführt. Deshalb wechseln auch bei Hilbert Erklärungen und Axiome miteinander ab.

### Die Axiome der Stetigkeit: Das Archimedische Axiom IV, 1.

28. In Hilberts „Grundlagen“ folgt auf die Axiome der Kongruenz als einziges der Gruppe IV das Axiom der Parallelen. Es

\*) Vgl. hierzu Enriques [5], S. 141.



schließen sich in der Axiomgruppe V die Axiome der Stetigkeit an, nämlich das Archimedische Axiom V, 1 und das Vollständigkeitsaxiom V, 2. Damit ist Hilberts Axiomensystem abgeschlossen. Da unser Ziel zufolge Nr. 14 ein Axiomensystem der absoluten Geometrie ist, müssen wir von den „Grundlagen“ im folgenden in einigen Punkten abweichen: zunächst werden wir an Stelle des Hilbertschen Vollständigkeitsaxioms V, 2 ein von G. Cantor stammendes Stetigkeitsaxiom verwenden, dann werden wir das Parallelenaxiom weglassen, so daß später zur Gewinnung der Euklidischen Geometrie das Parallelenaxiom dem Axiomensystem der absoluten Geometrie angefügt werden kann. Dies liefert folgende Fortsetzung des Axiomensystems:

Stetigkeitsaxiom IV, 1 (Archimedisches Axiom\*). Es gibt einen Punkt  $A$  und eine von ihm ausgehende Halbgerade  $a$  von folgenden Eigenschaften (Fig. 16):  $B$  sei ein

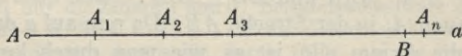


Fig. 16.

beliebiger, von  $A$  verschiedener Punkt auf  $a$ ,  $A_1$  ein beliebiger Punkt der Strecke  $AB$ ; man konstruiere dann die Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots$  so, daß  $A_1$  zwischen  $A$  und  $A_2$ , ferner  $A_2$  zwischen  $A_1$  und  $A_3$ , ferner  $A_3$  zwischen  $A_2$  und  $A_4$  usw. liegt und daß überdies die Strecken  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 \dots$  kongruent sind: dann gibt es in der Reihe der Punkte  $A_2, A_3, A_4 \dots$  stets einen solchen Punkt  $A_n$ , daß  $B$  zwischen  $A$  und  $A_n$  liegt.

Dieses Axiom trägt seinen Namen zu Unrecht: es geht jedenfalls schon auf Eudoxus zurück und wird deshalb in der neueren Literatur manchmal auch als Axiom des Eudoxus bezeichnet (z. B. in Zacharias [11]). Wir bleiben bei der in der Literatur viel häufiger auftretenden Bezeichnung des Axioms als Archimedisches Axiom, die sich auch bei Hilbert und seiner Schule findet. Wenn man, wie in Nr. 25, die Bezeichnung kleiner und größer für Strecken schon eingeführt hat, dann kann man das Archimedische Axiom

\*) Die hier gewählte Fassung des Archimedischen Axioms ist enger als die in den „Grundlagen“; dasselbe gilt später vom Euklidischen Parallelenaxiom. Vgl. auch R. Baldus, Über das Archimedische Axiom, Math. Zeitschr. 26, 1927, S. 757 — 761.

kürzer so aussprechen: Sind auf einer bestimmten Halbgeraden  $a$  mit dem Endpunkt  $A$  zwei beliebige Strecken mit dem gemeinsamen Endpunkt  $A$  gegeben, so gibt es immer ein Vielfaches der kleineren, das größer als die größere ist. Bei Euklid tritt das Archimedische Axiom versteckt in der Def. IV des 5. Buches auf „Ein Verhältnis zueinander haben Größen, welche vervielfältigt einander übertreffen können“. Dazu ist grundsätzlich dasselbe zu bemerken wie zur Euklidischen Def. XV des Kreises am Schluß unserer Nr. 27.

Ist nun eine Halbgerade  $a'$  mit dem Endpunkt  $A'$  gegeben, einem davon verschiedenen Punkte  $B'$  und einem Punkt  $A_1'$  in der Strecke  $A'B'$ , dann kann man auf der Halbgeraden  $A, a$  des Archimedischen Axioms nach Satz 22 a zwei Punkte  $A_1$  und  $B$  so bestimmen, daß  $AA_1 \equiv A'A_1'$  wird und  $AB \equiv A'B'$ . Nach Satz 22 b liegt dann auch  $A_1$  in der Strecke  $AB$ . Da nun auf  $a$  das Archimedische Axiom gilt, ist es, wie man durch kongruente Rückübertragung auf  $a'$  und wiederholte Anwendung des Satzes 22 b sofort erkennt, auch auf der Geraden  $a'$  für die Punkte  $A', B'$  und  $A_1'$  erfüllt. Das ist der Beweis des Satzes

a) Die Aussage des Archimedischen Axioms gilt nach den Axiomen I—III und IV, 1 für jede beliebige Halbgerade.

29. Das Archimedische Axiom ermöglicht durch den Satz 28 a die Messung der Strecken, und zwar in der Weise, daß man zunächst einer speziellen, willkürlichen Strecke die Länge 1 gibt; Einheitsstrecke. Nun kann man jeder Strecke eindeutig eine positive (rationale oder irrationale) Länge zuordnen, wenn man folgende Festsetzungen macht:

a) Kongruente Strecken haben dieselbe Länge;

b) Ist  $B$  ein Punkt einer Strecke  $AC$  und haben  $AB$  und  $BC$  die Längen  $a$  und  $b$ , dann hat  $AC$  die Länge  $a + b$ .

Hieraus folgt zunächst, daß der Halbierungspunkt  $H$  einer Einheitsstrecke  $AB$  die Strecken  $AH$  und  $HB$  mit den Längen  $\frac{1}{2}$  liefert, deren Halbierungspunkte Strecken mit den Längen  $\frac{1}{4}$  usf.

Wie man die Zuordnung der Längen zu den Strecken bestimmen kann, zeigt das Beispiel der Fig. 17 für die Strecke  $AP$ :  $AA_1$  habe die Länge 1. Dann hat bei Anwendung des Archimedischen Axioms die Strecke  $AA_{n-1}$  nach den Festsetzungen a) und b) die Länge  $n-1$ , die Strecke  $AA_n$  die Länge  $n$ , und für die Länge  $p$  von  $AP$  ergibt sich daraus zufolge b) der 1. Näherungswert  $n-1 < p_1 < n$ ; nun halbiert man  $A_{n-1}A_n$  in  $H_1$  und erhält den 2. Näherungswert  $n-\frac{1}{2} < p_2 < n$ , man halbiert  $H_1A_n$  in  $H_2$  und erhält als 3. Näherungswert  $n-\frac{1}{2} < p_3 < n-\frac{1}{4}$  usw. In dieser Weise wird  $p$  in immer engere Grenzen eingeschlossen, und  $p$  läßt sich, auch wenn das Verfahren nicht durch Zusammenfallen eines der Halbierungspunkte mit  $P$  abbrechen sollte, mit jeder vorgegebenen Genauigkeit angeben.

Man kann bekanntlich statt des gebräuchlichen dekadischen Systems auch andere Zahlensysteme einführen, z. B. das dyadische System. In diesem braucht man zur Darstellung jeder Zahl nur die Ziffern 1 und 0. Beispielsweise wäre die Zahl  $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$  des dekadischen Systems im dyadischen System dargestellt durch 1011. An die Stelle der Dezimalbrüche treten im dyadischen System Dualbrüche, wobei, wie im dekadischen System, jede rationale Zahl durch einen abbrechenden oder periodischen Dualbruch dargestellt wird, jede Irrationalzahl durch einen unendlichen, nicht periodischen Dualbruch. Dem Dezimalbruch 0,3 z. B. entspricht der Dualbruch 0,0 1001 1001 1001 ... Das Verfahren der Fig. 17 liefert nun, wie

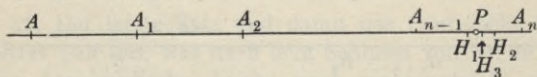


Fig. 17.

man sofort erkennt, die Länge von  $A_{n-1}P$  als Dualbruch  $0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$ , wobei  $d_i = 1$  ist, wenn  $H_i$  links von  $P$  liegt, dagegen  $d_i = 0$ , wenn  $H_i$  rechts von  $P$  liegt. Fällt  $H_i$  auf  $P$ , dann bricht der Dualbruch mit der Stelle  $d_i = 1$  ab. In unserer Figur würde daher der Dualbruch für  $A_{n-1}P$  beginnen mit 0,100 ...

Das Archimedische Axiom ordnet in der soeben behandelten Weise jeder Strecke eindeutig eine positive Länge zu; man kann daraus aber nicht schließen, daß auch



jede positive (rationale oder irrationale) Zahl als Streckenlänge auftritt\*).

### Die Axiome der Stetigkeit: Das Cantorsche Axiom IV, 2.

**30.** Stetigkeitsaxiom IV, 2 (Cantorsches Axiom). Es gibt eine Gerade  $g$  von folgender Eigenschaft: Ist auf  $g$  eine unendliche Folge von Strecken  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots A_iB_i \dots$  derart gegeben, daß  $A_2$  zwischen  $A_1$  und  $B_1$  liegt,  $A_3$  zwischen  $A_2$  und  $B_1$ ,  $A_4$  zwischen  $A_3$  und  $B_1 \dots A_i$  zwischen  $A_{i-1}$  und  $B_1 \dots$ , daß ferner  $B_2$  zwischen  $B_1$  und  $A_1$  liegt,  $B_3$  zwischen  $B_2$  und  $A_1$ ,  $B_4$  zwischen  $B_3$  und  $B_1 \dots B_j$  zwischen  $B_{j-1}$  und  $A_1 \dots$ , und läßt sich keine Strecke derart angeben, daß sie innerhalb einer dieser Strecken  $A_pB_p$  liegt\*\*) und innerhalb aller folgenden  $A_{p+1}B_{p+1}, A_{p+2}B_{p+2}, A_{p+3}B_{p+3} \dots$ , dann gibt es mindestens einen Punkt  $X$ , der innerhalb aller Strecken  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots A_iB_i \dots$  liegt.

Zunächst erkennt man sofort folgendes:

a) Aus den Voraussetzungen des Cantorschen Axioms folgt, daß kein Punkt  $B_j$  in einer der Strecken  $A_1A_i$  liegt.

Wäre nämlich etwa  $B_q$  Punkt von  $A_1A_p$  (Fig. 18) und  $q > p$ \*\*\*),

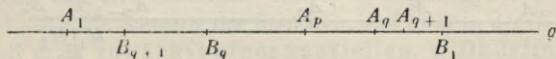


Fig. 18.

dann wäre  $A_qB_q$  in  $A_{q+1}B_{q+1}$  und allen folgenden Strecken enthalten, in Widerspruch mit der letzten Voraussetzung des Axioms.

\*) Tatsächlich gibt es Geometrien, welche alle bisherigen Axiome erfüllen, ohne daß dabei die Streckenlängen die positiven Zahlen erschöpfen („Grundlagen“, § 9).

\*\*) D. h. alle Punkte der angegebenen Strecke sind Punkte von  $A_pB_p$ , aber nicht alle Punkte von  $A_pB_p$  Punkte der angegebenen Strecke.

\*\*\*) Für  $p > q$  gilt dieselbe Betrachtung mit Vertauschung der Rollen der Punkte  $A_i$  und  $B_j$ .

Mit anderen Worten: Die Punkte  $A_i$  nähern sich von der einen Seite dem Punkt  $X$ , die Punkte  $B_j$  von der anderen (Fig. 19). Daraus folgt nun

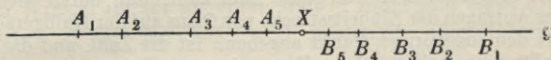


Fig. 19.

b) Es gibt zu einer auf  $g$  gegebenen Streckenfolge genau einen Punkt  $X$ , der das Cantorsche Axiom erfüllt.

Denn gäbe es zwei Punkte,  $X_1$  und  $X_2$ , dann könnte keiner der Punkte  $A_i$  oder  $B_j$  in der Strecke  $X_1X_2$  liegen, da, wie soeben bemerkt, jeder dieser beiden Punkte die Punkte  $A_i$  von den Punkten  $B_j$  trennt; dann wäre aber jede in  $X_1X_2$  enthaltene Strecke entgegen der letzten Voraussetzung des Axioms in allen Strecken  $A_iB_i$  enthalten.

Das Cantorsche Axiom ist ein reines Anordnungsaxiom. Da nach Satz 22 b bei kongruenter Übertragung die „zwischen“-Beziehungen erhalten bleiben, beweist man, genau so wie den Satz 28 a im Falle des Archimedischen Axioms, hier den Satz

c) Aus den Axiomen I—IV folgt, daß die Aussage des Cantorschen Axioms für jede beliebige Gerade gilt\*).

**31.** Der letzte Satz und damit das Cantorsche Axiom leistet nun das, was nach dem Schlusse von Nr. 29 durch das Archimedische Axiom noch nicht erreicht werden konnte: nun werden die positiven Zahlen als Längen von Strecken erschöpft. Das ist der Inhalt des Satzes

a) Fügt man zum Archimedischen noch das Cantorsche Axiom hinzu und schreibt man eine Einheitsstrecke vor, dann sind die Punkte  $P_i$  einer von einem Punkt  $O$  ausgehenden Halbgeraden den positiven Zahlen umkehr-

\* Näheres über das Cantorsche Stetigkeitsaxiom sowie über (weiter tragende) Stetigkeitsaxiome von Weierstraß und Dedekind findet man in Enriques [4], S. 35 ff.

bar eindeutig so zugeordnet, daß die betreffenden Zahlen die Längen der Strecken  $OP_i$  angeben.

Dies erkennt man in der folgenden Weise: Es sei eine beliebige Zahl vorgegeben. Für eine ganze Zahl kann man durch wiederholtes Abtragen der Einheitsstrecke von  $O$  aus auf der Halbgeraden sofort den zugehörigen Punkt angeben. Ist die Zahl, und das ist der allgemeinste Fall, in der Form eines (endlichen oder unendlichen) Dezimalbruches gegeben, etwa  $37,6875 \dots$ , dann kann man dem Teile links vom Komma in der soeben angegebenen Weise einen Punkt  $A$  zuordnen, und es bleibt noch die Bestimmung einer Zusatzstrecke  $AX$  mit der Länge  $0,6875 \dots$  übrig. Die Länge von  $AX$  denken wir uns als Dualbruch  $0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$  dargestellt, wobei wieder (Nr. 29) jedes  $d_i$  eine der Ziffern 0 oder 1 ist, und verfahren folgendermaßen (vgl. Fig. 20 für eine Länge  $0,1011 \dots$ ): Wir halbieren die Einheitsstrecke  $AE$ , wählen deren linke oder rechte Hälfte, je nachdem  $d_1 = 0$  oder  $d_1 = 1$  ist, und bezeichnen den linken Endpunkt der gewählten Teilstrecke mit  $A_1$ , den rechten mit  $B_1$ ; nun halbieren wir diese Teilstrecke und wählen deren linke oder rechte Hälfte, je nachdem  $d_2 = 0$  oder  $d_2 = 1$  ist, und bezeichnen die neugewählte Strecke mit  $A_2 B_2$  usw. In unserer Figur liegen nun alle Punkte von  $A_1 B_1$  zwischen 0,1 und 1, die Punkte von  $A_2 B_2$  zwischen 0,1 und 0,11, die Punkte von  $A_3 B_3$  zwischen 0,101 und 0,110, die Punkte von  $A_4 B_4$  zwischen 0,1011 und 0,1100. Allgemein erhält man so eine Reihe von Strecken  $A_i B_i$  so, daß  $AA_i$  die Länge  $0, d_1 d_2 d_3 \dots d_i$  hat und die Strecke  $A_i B_i$  die Länge  $(\frac{1}{2})^i$ . Bricht der Dualbruch mit der  $p$ -ten Stelle ab, dann ist der Punkt  $A_p$  der gesuchte Punkt  $X$ . Ist der Dualbruch aber unendlich, dann kann man aus der unendlichen Folge von Strecken  $A_i B_i$  eine Folge von Strecken auswählen, die alle Voraussetzungen des Cantorsche Axioms erfüllen, und der nach Satz 29 b existierende Punkt  $X$  liefert die gesuchte Strecke  $AX$  mit der vorgeschriebenen Länge.

Ein wichtiger Zusatz zur Streckenmessung wird noch in den Nrn. 116 und 117 folgen.

**32.** Überträgt man das Cantorsche Axiom gleichzeitig mit den Sätzen 30 a und 30 b auf Winkel, dann erhält man folgende Aussage:

a) Ist eine unendliche Folge von Winkeln mit gemeinsamem Scheitel  $O$  gegeben,  $\sphericalangle (a_1, b_1)$ ,  $\sphericalangle (a_2, b_2)$ ,  $\sphericalangle (a_3, b_3)$ ,  $\dots \sphericalangle (a_i, b_i) \dots$  derart, daß  $a_2$  innerhalb  $\sphericalangle (a_1, b_1)$



liegt,  $a_3$  innerhalb  $\sphericalangle(a_2, b_1) \dots, a_i$  innerhalb  $\sphericalangle(a_{i-1}, b_1) \dots$ , daß ferner  $b_2$  innerhalb  $\sphericalangle(b_1, a_1)$  liegt,  $b_3$  innerhalb  $\sphericalangle(b_2, a_1) \dots, b_j$  innerhalb  $\sphericalangle(b_{j-1}, a_1) \dots$  und läßt sich kein Winkel derart angeben, daß er innerhalb eines dieser Winkel  $\sphericalangle(a_p, b_p)$  liegt und innerhalb aller folgenden  $\sphericalangle(a_{p+1}, b_{p+1}), \sphericalangle(a_{p+2}, b_{p+2}) \dots$ , dann gibt es genau eine von  $O$  ausgehende Halbgerade  $x$ , die innerhalb aller Winkel  $\sphericalangle(a_1, b_1), \sphericalangle(a_2, b_2) \dots \sphericalangle(a_i, b_i) \dots$  liegt.  $x$  trennt alle Halbgeraden  $a_i$  von allen Halbgeraden  $b_j$ .

Ist eine solche unendliche Folge von Winkeln gegeben, dann nimmt man auf  $a_1$  einen Punkt  $A_1$  an, auf  $b_1$  einen Punkt  $B_1$  und erkennt mit Berücksichtigung des Satzes 21 a, daß damit auf  $A_1 B_1$  die Voraussetzungen des Cantorschen Axioms gegeben sind, und daß daher vermöge dieses Axioms und der Sätze 30 a und 30 b diese Aussage 32a über die Winkel als Satz gilt.

Es liegt nun nahe, für die Winkelmessung die den Forderungen 29 a und 29 b entsprechenden Festsetzungen zu treffen und eine Winkeleinheit vorzuschreiben, z. B. indem man dem rechten Winkel die Größe  $\frac{1}{2}$  beilegt. Dann kann man, wie bei den Strecken der Fig. 20, mittels der Dual-

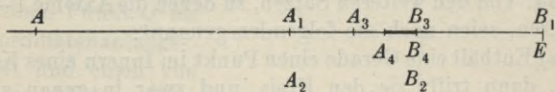


Fig. 20.

brüche zeigen, daß es zu jeder, hier zwischen 0 und 1 liegenden, Winkelgröße Winkel gibt und durch Umkehrung des Verfahrens, daß jeder Winkel eine zwischen 0 und 1 liegende Größe hat.

**33.** Nachdem man die Winkelgrößen so definiert hat, kann man den Satz beweisen

a) Die Winkelsumme im Dreiecke kann höchstens zwei Rechte betragen.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in Liebmann [7], S. 15. Erinnern wir uns nun des Vierecks, das Saccheri seinen Betrachtungen zugrunde legte (Nr. 7): Die Dreiecke  $BAD$  und  $ABC$  (Fig. 45, S. 94) sind nach dem 1. Kongruenzsatze kongruent, daher  $BD \equiv AC$ . Folglich sind nach dem 3. Kongruenzsatz auch die Dreiecke  $BCD$  und  $ADC$  kongruent und daher, wie in Nr. 7 erwähnt wurde,  $\sphericalangle \gamma \equiv \sphericalangle \delta$ . Die Summe der vier Viereckswinkel ist gleich der Summe der Winkel der beiden Dreiecke  $ABC$  und  $ACD$  und daher nach Satz 33 a höchstens 4 R.

Damit ist, in Übereinstimmung mit Saccheri, die Unzulässigkeit der Hypothese des stumpfen Winkels nachgewiesen.

Da man die Zahlen, welche die Streckenlängen darstellen, teilen kann, ist man nach 31 a in der Lage den Satz von der Teilbarkeit jeder Strecke in  $n$  gleiche Teile auszusprechen:

b) Ist  $A_0A_1$  irgend eine Strecke, dann gibt es in ihr  $n - 1$  Punkte  $A_1, A_2, A_3 \dots A_{n-1}$  derart, daß die Strecken  $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$  kongruent sind.

In entsprechender Weise ergibt sich die Teilbarkeit jedes Winkels in  $n$  gleiche Teile\*).

### Weitere Sätze über den Kreis.

**34.** Von den weiteren Sätzen, zu denen die Axiome I—IV führen, seien noch die folgenden genannt:

a) Enthält eine Gerade einen Punkt im Innern eines Kreises, dann trifft sie den Kreis, und zwar in genau zwei Punkten.

b) Von jedem Punkte  $P$  außerhalb eines Kreises ( $K$ ) gibt es genau zwei Tangenten an den Kreis.

---

\*) Damit ist nur ausgesprochen, daß man die Teilpunkte oder Teilgeraden mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit angeben kann, und zwar nach einer Anzahl von Schritten, die von dieser Genauigkeit abhängt. Es ist aber noch nicht entschieden, ob und wie man die Teilung in  $n > 2$  Teile mit endlich vielen Schritten mittels Zirkels und Lineals durchführen kann. In der Tat ist ja z. B. die Dreiteilung allgemeiner Winkel selbst nach Einführung des Parallelenaxioms in der Euklidischen Geometrie mit endlich vielen Schritten nicht möglich.

e) Enthält ein Kreis einen inneren und einen äußeren Punkt eines zweiten Kreises, dann schneiden sich die beiden Kreise, und zwar in genau zwei Punkten.

Von dem Satze 34 a sprachen wir schon in Nr. 27 bei Fig. 15. Zu seinem Beweis ist das Cantorsche Axiom nötig\*). Wir wollen hier den Beweis nicht ganz ausführen, nur kurz andeuten, daß man vom Kreismittelpunkte das Lot auf die Gerade fällt und von dessen Fußpunkt aus den Kreishalbmesser auf der Geraden abträgt. So erhält man einen Punkt außerhalb des Kreises. Durch fortgesetztes Halbieren und durch Anwendung der Sätze 26 h und 26 k gelingt dann der Beweis. In Enriques [5] S. 141/143 ist er so durchgeführt, daß er ohne weiteres auf unsere Hilfsmittel übertragen werden kann. Dasselbe gilt vom Beweis unseres Satzes 34 c, ebenda S. 143/145.

Aus 34 a folgt 34 b: In einem Punkte  $B'$  einer beliebigen Geraden  $g$  errichtet man zu  $g$  ein Lot  $B'M'$  kongruent einem Halbmesser von  $(K)$ . Auf  $g$  kann man nach 34 a einen Punkt  $P'$  so finden, daß  $P'M' \equiv PM$  ist. Macht man  $\triangle PMB$  kongruent  $\triangle P'M'B'$ , dann ist  $B$  Berührungspunkt einer Tangente aus  $P$  an  $(K)$ .

**Rechtwinkelige Koordinaten und Vollständigkeitsatz.**

35. Der Satz 31 a gibt die Möglichkeit, die Punkte der Ebene koordinatenmäßig zu erfassen, und zwar in der folgenden Weise: Man nimmt eine Gerade als  $X$ -Achse an, auf ihr einen Punkt  $O$  als

Koordinatenanfangspunkt und einen von ihm verschiedenen Einheitspunkt  $E$  (Fig. 21). Die von  $O$  ausgehende Halbachse, welche  $E$  enthält, nennt man

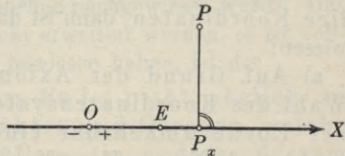


Fig. 21.

die positive Halbachse, die andere die negative Halb-

\*) Die gegenteilige Behauptung in Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. II, 2. Aufl., S. 236, daß man den Beweis führen könne, wenn man von den Stetigkeitsaxiomen nur das Archimedische voraussetzt, ist dort nicht bewiesen und unrichtig.



achse. Irgend einem Punkt  $A$  der  $X$ -Achse ordnet man als  $x$ -Koordinate die mit der Einheit  $OE$  gemessene Länge der Strecke  $OA$  zu, die man mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versieht, je nachdem  $A$  auf der positiven oder negativen Halbachse liegt. Nach den Sätzen 19 c und 31 a sind damit den Punkten der  $X$ -Achse die sämtlichen reellen (positiven und negativen, rationalen und irrationalen) Zahlen als  $x$ -Koordinaten umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die  $X$ -Achse teilt die Ebene nach Satz 19 b in zwei Halbebenen, die man als positive und negative Halbebene unterscheidet. Ist nun  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene außerhalb der  $X$ -Achse, dann sucht man den nach Satz 23 e eindeutig bestimmten Fußpunkt  $P_x$  seines Lotes auf die  $X$ -Achse. Die  $x$ -Koordinate von  $P_x$  wählt man auch als  $x$ -Koordinate für  $P$ , dazu als  $y$ -Koordinate für  $P$  die mit der Einheit  $OE$  gemessene Länge von  $PP_x$ , der man das positive oder negative Vorzeichen gibt, je nachdem  $P$  in der positiven oder negativen Halbebene liegt. Zu jedem Punkte gehören so eindeutig die Zahlen eines Paares  $(x, y)$  als dessen Koordinaten. Aus den Sätzen 31 a, 23 f und 22 a folgt, daß zu jedem Paare reeller Koordinaten  $(x, y)$  eindeutig ein Punkt gehört. Nennt man diese Koordinaten wegen des gefällten Lotes rechtwinkelige Koordinaten, dann ist damit der wichtige Satz bewiesen:

a) Auf Grund der Axiome I—IV gehört nach Wahl des Koordinatensystems zu jedem Punkte der Ebene umkehrbar eindeutig ein Paar von rechtwinkelligen Koordinaten  $(x, y)$ . Dabei erschöpfen die Punkte alle Paare reeller Zahlen  $(x, y)$ .

**36.** Wir denken uns nun zwei Menschen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , von denen sich jeder ein Bild der aus den Axiomen I—IV folgenden Geometrie macht, indem er die Axiome in irgend

einer logisch zulässigen Weise deutet. Nach Nr. 15 können diese Deutungen sehr verschieden sein. Wir fragen nun, ob es möglich ist, daß der eine von beiden, etwa  $\mathfrak{B}$ , in dem Sinne mehr als  $\mathfrak{A}$  denkt, daß er zwar alles das, was  $\mathfrak{A}$  Punkt, Gerade, zwischen, Winkel, kongruent, parallel usw. nennt, ebenso bezeichnet, kurz dessen ganze Deutung verwendet, darüber hinaus aber noch Punkte  $\bar{P}_i$  oder Gerade  $\bar{g}_i$  denkt, die im Bilde des  $\mathfrak{A}$  nicht vorkommen. Man erkennt, daß dies nicht möglich ist: Zunächst kann  $\mathfrak{B}$  zur Deutung des  $\mathfrak{A}$  kein Gedankending als Punkt  $\bar{P}_i$  hinzufügen; denn denken wir uns nach Nr. 35 ein Koordinatensystem im Bilde des  $\mathfrak{A}$  eingeführt, dann würde das auch im Bilde des  $\mathfrak{B}$  ein Koordinatensystem sein, und nach Satz 35 a brauchte  $\mathfrak{B}$  auch für jeden seiner neuen Punkte  $\bar{P}_i$  ein reelles Zahlenpaar als Koordinaten, während nach demselben Satz alle diese Zahlenpaare schon durch die alten Punkte, die auch  $\mathfrak{A}$  denkt, erschöpft sind. Aber  $\mathfrak{B}$  kann auch keine Gerade  $\bar{g}_i$  denken, die im Bilde des  $\mathfrak{A}$  nicht vorkommt. Denn  $\bar{g}_i$  dürfte höchstens einen Punkt des  $\mathfrak{A}$  enthalten, da  $\bar{g}_i$  sonst nach Axiom I, 2 eine Gerade auch für  $\mathfrak{A}$  wäre. Daher müßte nach Axiom I, 3 auf  $\bar{g}_i$  mindestens ein Punkt liegen, der nicht Punkt für  $\mathfrak{A}$  ist, das wäre aber einer der Punkte  $\bar{P}_i$ , deren Unmöglichkeit soeben nachgewiesen wurde. Das Bild des  $\mathfrak{A}$  kann daher nicht erweitert werden, es ist vollständig. Was wir soeben bewiesen haben, ist der

**Vollständigkeitssatz:** Es ist nicht möglich, zu einem System von Punkten und Geraden, welche die Axiome I—IV erfüllen, ein anderes System von Dingen so hinzuzufügen, daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System wieder die Axiome I—IV gelten und daß die Dinge und Beziehungen des ursprünglichen Systems in dem zusammengesetzten System erhalten bleiben.

Die Allgemeinheit der Aussage dieses Satzes ist überraschend. Während die sonstigen geometrischen Sätze von den bei einer Deutung gedachten Dingen Punkt und Gerade handeln, liegt hier eine Aussage über diese gedachten Dinge und alle überhaupt denkbaren Dinge vor. In den „Grundlagen“ tritt dieser Satz als „Vollständigkeitsaxiom“ auf; dadurch ergibt sich dann die Aussage des Cantorsche Axioms als Satz, und es wird eine ausdrückliche Stetigkeitsvoraussetzung vermieden.

### III. Abschnitt.

#### Die Euklidische Geometrie.

##### Das Euklidische Parallelenaxiom V.

**37.** Wir haben im vorhergehenden in den Axiomgruppen I—IV ein Axiomensystem der absoluten Geometrie kennengelernt und gewinnen nun nach Nr. 14 die Euklidische Geometrie, indem wir den bisherigen Axiomen als Schlußstein ein dem V. Postulat Euklids äquivalentes Axiom V hinzufügen.

Nach Satz 24 c folgt schon aus den Axiomen I—III die Existenz mindestens einer Parallelen zu jeder Geraden durch jeden nicht auf der Geraden liegenden Punkt. Wir wissen, daß Euklids berühmtes V. Postulat oder jede der ihm nach Nr. 6 äquivalenten Aussagen gleichbedeutend mit der Annahme ist, daß es zu jeder Geraden durch jeden Punkt genau eine Parallele gibt.

Statt zu sagen „ $g$  ist eine Gerade,  $P$  ein nicht auf ihr liegender Punkt; es gibt durch  $P$  genau eine Gerade, welche  $g$  nicht trifft“, werden wir im folgenden kurz sagen „ $P$  verhält sich zu  $g$  Euklidisch“.

Man kann ein sehr eng gefaßtes Parallelenaxiom aussprechen, wenn man sich auf folgenden wichtigen Satz stützt:

a) Sind die Axiome I—IV erfüllt und verhält sich ein einziger Punkt zu einer einzigen Geraden Euklidisch, dann verhält sich jeder Punkt zu jeder Geraden Euklidisch.



Wir gehen beim Beweise dieses Satzes schrittweise vor.  $P$  verhalte sich zu  $g$  Euklidisch mit der Parallelen  $g_1$  (Fig. 22). Man fällt das Lot  $PL$  auf  $g$  und erkennt

$\alpha$ ) daß sich jeder Punkt der Ebene zu jeder Geraden, die von ihm einen Abstand von der Länge  $PL$  hat, Euklidisch verhält.

Denn hat  $\bar{P}$  von  $\bar{g}$  den Abstand  $\bar{P}\bar{L} \equiv PL$  und macht man  $\sphericalangle \bar{\varphi} \equiv \sphericalangle \varphi$ , dann ist zunächst  $\bar{g}_1 \parallel \bar{g}$ . Hätte nämlich  $\bar{g}_1$  einen Schnittpunkt  $\bar{S}$  mit  $\bar{g}$ , dann könnte man  $\bar{L}\bar{S} \equiv \bar{L}S$  machen, und nach dem Axiom III, 5 wäre  $\sphericalangle LPS \equiv$

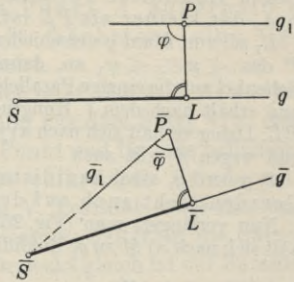


Fig. 22.

$\sphericalangle LPS \equiv \sphericalangle LPS \equiv \sphericalangle \bar{\varphi} \equiv \sphericalangle \varphi$ ,

also nach III, 4 der Punkt  $S$  ein Punkt von  $g_1$ . Ebenso erkennt man, daß eine von  $\bar{g}_1$  verschiedene Parallele zu  $\bar{g}$  durch  $\bar{P}$  mittels kongruenter Übertragung sofort auf eine von  $g_1$  verschiedene Parallele zu  $g$  durch  $P$  führen würde.

$\beta$ ) Das Lot  $PL$  steht auch auf  $g_1$  senkrecht, da die Senkrechte zu  $PL$  in  $P$  nach Satz 24 b parallel zu  $g$  ist.

$A$  sei ein Punkt der Strecke  $PL$  (Fig. 23),  $a$  sei irgend eine Gerade durch  $A$ , die zu  $PL$  nicht senkrecht steht. Dann macht man  $\sphericalangle \chi \equiv \sphericalangle \chi_1$  und erhält nach Satz 24 a die parallelen Geraden  $a' \parallel a$ .  $a'$  ist von  $g_1$  verschieden, trifft daher  $g$  in einem Punkte  $B$ , dann muß aber nach dem Axiom von Pasch II, 4 die Strecke  $BL$

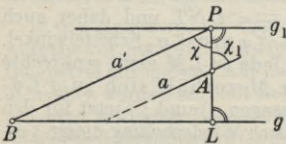


Fig. 23.

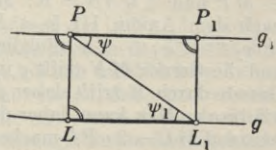


Fig. 24.

von  $a$  getroffen werden,  $a$  ist nicht parallel zu  $g$ . Nur das Lot zu  $AL$  in  $A$  ist demnach parallel zu  $g$ ,  $A$  verhält sich zu  $g$  Eukli-

disch. Dann folgt aber sofort mittels der Schlußweise, die wir beim Beweise von  $\alpha$ ) verwendeten,

$\gamma$ ) daß sich auch jeder Punkt der Ebene zu jeder Geraden Euklidisch verhält, die von ihm einen Abstand hat, der kleiner als  $PL$  ist.

$L_1$  sei von  $L$  auf  $g$  verschieden (Fig. 24). Trägt man an  $L_1P$  in  $P$  den  $\sphericalangle \psi \equiv \sphericalangle \psi_1$  an, dann fällt nach Satz 24 a der andere Schenkel auf die einzige Parallele  $g_1$ . Nun macht man  $PP_1 \equiv LL_1$  und erhält nach dem 1. Kongruenzsatze  $\sphericalangle PP_1L_1 = R$ ,  $P_1L_1 \equiv PL$ . Daher verhält sich nach  $\alpha$ ) jeder Punkt von  $g$  zu  $g_1$  Euklidisch, und wegen  $\beta$ ) gilt auch

$\delta$ )  $g$  und  $g_1$  sind äquidistant; jedes Lot auf eine dieser Geraden steht auch auf der anderen senkrecht.

Nun verlängert man (Fig. 25)  $LP$  um  $PM \equiv LP$ . Dann verhält sich nach  $\alpha$ )  $M$  zu  $g_1$  Euklidisch mit der Parallelen  $g_2$ . Irgend

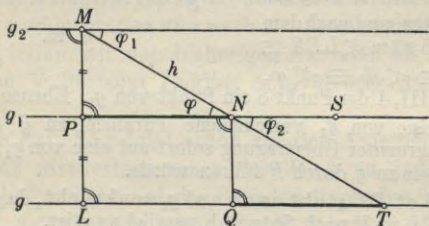


Fig. 25.

eine zu  $PM$  nicht senkrechte Gerade  $h$  durch  $M$  trifft  $g_1$  daher in einem Punkt  $N$ , und man schließt wieder aus Satz 24 a, daß  $\sphericalangle \varphi_1 \equiv \sphericalangle \varphi$  ist. Für das Lot  $NQ$  auf  $g$  gilt nach  $\delta$ )  $NQ \equiv PL \equiv MP$  und  $\sphericalangle QNS = R$ . Macht man nun  $QT \equiv PN$ , dann ist nach dem Axiom III, 5  $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle QNT$  und daher auch  $\sphericalangle \varphi_2 \equiv \sphericalangle \varphi_1 \equiv \sphericalangle \varphi$ . Folglich sind  $\sphericalangle \varphi$  und  $\sphericalangle \varphi_2$  Scheitelwinkel, und die Gerade  $MN$  trifft  $g$  in  $T$ . Jede zu  $LM$  nicht senkrechte Gerade durch  $M$  trifft daher  $g$ , d. h.  $M$  verhält sich zu  $g$  Euklidisch. Man kann daher die Aussagen  $\alpha$ ) und  $\gamma$ ) jetzt für den Abstand  $ML = 2 \cdot PL$  machen. Durch Wiederholung dieser Verdoppelung kann man daher nach dem Archimedischen Axiom den Abstand jedes vorgegebenen Punktes von jeder vorgegebenen Geraden fassen, der Satz 36 a ist bewiesen.

Das Cantorsche Axiom wurde beim Beweise nicht herangezogen.

38. Nun kann man das Parallelenaxiom in folgender Form aussprechen:

Das Euklidische Parallelenaxiom V: Es gibt eine Gerade  $a$  und einen Punkt  $A$  außerhalb  $a$  von folgender Eigenschaft: höchstens eine Gerade durch  $A$  trifft  $a$  nicht.

Aus dem Satze 24 c ergibt sich jetzt, daß es genau eine Parallele zu  $a$  durch  $A$  gibt und aus dem Satze 37 a, daß dies dann für jeden beliebigen Punkt und für jede beliebige, den betreffenden Punkt nicht enthaltende Gerade gilt.

Nunmehr kann man Euklids V. Postulat sowie die ihm äquivalenten Sätze 6 a—f beweisen; weiterhin die Sätze, daß jeder Außenwinkel eines Dreiecks gleich ist der Summe der ihm nicht benachbarten Innenwinkel, daß der Winkel im Halbkreis ein Rechter ist, daß im Kreise die Peripheriewinkel über gleichen Sehnen gleich sind, vor allem auch die Sätze über die Ähnlichkeit der Figuren, man kann die Lehre von der Verwandlung der Figuren in inhaltsgleiche ableiten und damit die Inhaltslehre gewinnen, desgleichen den Pythagoräischen Lehrsatz, überhaupt den ganzen Rest der Euklidischen Geometrie.

Man kann jetzt auch zeigen, daß alle Punkte einer Geraden in den rechtwinkligen  $(x, y)$ -Koordinaten von Nr. 35 eine lineare Gleichung in  $x$  und  $y$  erfüllen; damit erhält man die Cartesische analytische Geometrie für rechtwinkelige Koordinaten.

In den Axiomen I—V liegt eine Lösung der in Nr. 13 gestellten Aufgabe vor, ein vollständiges Axiomensystem der Euklidischen Geometrie anzugeben. Auf die Frage, ob nun wirklich kein Axiom übersehen worden sei, läßt sich nur antworten, daß man trotz eingehender kritischer Beschäftigung die mit diesen Axiomen in der (modernen) Euklidischen Geometrie durchgeführten Beweise bisher nicht angreifen konnte. Daß noch weitere Ergänzungen des Euklidischen Axiomensystems nötig werden könnten, ist sehr unwahrscheinlich aber nicht grundsätzlich unmöglich. Eine derartige Unsicherheit steckt aber letzten Endes in jedem mathematischen Beweise.



## IV. Abschnitt.

## Axiomatik der hyperbolischen Geometrie im Einheitskreise.

## Die Axiome I, 1—3 und II, 1—4.

39. Der kurze geschichtliche Rückblick in den Nrn. 4—12 hat uns gezeigt, daß die Frage „Wie kann man das Parallelenaxiom beweisen?“ sich allmählich in die Frage verwandelt hat „Kann man das Parallelenaxiom beweisen?“ und daß diese letzte Frage von den Entdeckern der Nichteuklidischen Geometrie verneint worden ist.

Im folgenden werden wir zu derselben Antwort kommen, indem wir, gestützt auf die Euklidische Geometrie, zeigen, daß man die Axiome I—IV in einer ganz anderen Weise, als wir es bisher taten, deuten kann (vgl. Nr. 15), in einer Weise, die dann das Axiomensystem der absoluten Geometrie nicht im Euklidischen Parallelenaxiom V, sondern in einem ihm widersprechenden Axiom fortsetzt. Die aus dieser Deutung entstehende Nichteuklidische Geometrie wird aus einem später (Nr. 71) zu erörternden Grunde „hyperbolische Geometrie“ genannt. Dabei bezeichnen wir weiterhin abkürzend Euklidisch mit e., hyperbolisch mit h.

40. Nach Nr. 38 führen die Axiome der e. Geometrie zur gewöhnlichen analytischen Geometrie mit rechtwinkligen Koordinaten. Deren Elemente setzen wir im folgenden als bekannt voraus, desgleichen die Elemente der projektiven Geometrie. Dabei arbeiten wir, solange wir nicht ausdrücklich auf das Gegenteil aufmerksam machen, nur mit reellen Größen.

Man kennt heute sehr verschiedene Wege in das Gebiet der Nichteuklidischen Geometrie. So anregend und nützlich der Vergleich dieser verschiedenen Zugänge und die Erforschung ihrer Zusammenhänge auch wäre, wir müssen uns im folgenden auf einen von ihnen beschränken und wählen einen Weg, der, von der Eu-

klidischen Geometrie ausgehend, über die Elemente der analytischen und der projektiven Geometrie zur Nichteuklidischen Geometrie führt.

Wir nehmen einen Kreis ( $K$ ) an, dessen Halbmesser wir, um die späteren Rechnungen zu vereinfachen, die Länge 1 geben, und fassen als Punkte unserer h. Geometrie die e. Punkte im Innern von ( $K$ ) auf, als h. Gerade die e. Sehnen von ( $K$ ). Die Punkte des Kreisumfangs werden nicht zu den h. Punkten gezählt. Diesen Kreis ( $K$ ) bezeichnen wir in naheliegender Weise als „Randkreis“.

Nun erfüllen, wie man sofort erkennt, die h. Punkte und Geraden die Axiome der Verknüpfung I, 1—3 (Nr. 17). Die Beziehung „zwischen“ deuten wir in unserer h. Geometrie genau so, als ob die betreffenden h. Punkte e. Punkte wären. Damit sind dann, wie man ohne weiteres sieht, auch die Axiome der Anordnung II, 1—4 (Nr. 18) erfüllt. Eine h. Strecke ist dann nichts anderes, als die zwischen denselben Endpunkten liegende e. Strecke. Aber, und das ist das wesentliche Neue, wir fassen nicht die e. kongruenten Strecken als h. kongruente Strecken auf, sondern wir werden die h. Kongruenz auf dem aus der analytischen und vor allem aus der projektiven Geometrie bekannten Begriffe des Doppelverhältnisses aufbauen.

### Hyperbolische Streckenkongruenz. Die Axiome III, 1—3.

41\*). Sind  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$  die e. rechtwinkligen Koordinaten von vier verschiedenen Punkten  $A_1, A_2, A_3, A_4$  einer Geraden, dann bezeichnet man in bekannter Weise als das Doppelverhältnis  $(A_1 A_2 A_3 A_4)$  der vier Punkte die Größe

$$(41, 1) \quad (A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} = \delta,$$

\*) Der Inhalt dieser Nummer gehört zu den Elementen der projektiven Geometrie, ebenso der kleingedruckte Teil der Nrn. 43, 44, 46, 47, 50.

wobei einer dieser beiden Ausdrücke unbestimmt werden kann, wenn nämlich die Gerade zu einer Koordinatenachse parallel ist, während der andere dann bestimmt bleibt. Man bestätigt durch Gl. (41, 1) die Richtigkeit der folgenden bekannten Sätze:

a) Das Doppelverhältnis kann die Werte  $0, +1, \pm \infty$  nicht annehmen.

b)  $\delta$  ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

c) Schreibt man drei Punkte einer Geraden und eine endliche, von 0 und  $+1$  verschiedene Zahl vor, dann gibt es genau einen Punkt der Geraden, der mit den drei vorgeschriebenen Punkten in gegebener Reihenfolge ein Doppelverhältnis vom Betrage dieser Zahl bildet.

d)  $\delta$  geht in den reziproken Wert  $\frac{1}{\delta}$  über, wenn man die beiden Punkte des Paares  $A_1, A_2$  oder des Paares  $A_3, A_4$  miteinander vertauscht.

e)  $\delta$  bleibt ungeändert, wenn man gleichzeitig  $A_1$  mit  $A_3$  und  $A_2$  mit  $A_4$  vertauscht.

42. Sind nun  $A, B$  zwei h. Punkte (Fig. 26)\*) und  $U, V$  die Endpunkte ihrer Verbindungssehne, dann ist nach 41 d

$$(42, 1) (BAUV) = \frac{1}{(ABUV)} \text{ und } (ABVU) = \frac{1}{(ABUV)}.$$

Nach der Mitte von Nr. 22 folgt aus den Kongruenzaxiomen  $AB \equiv AB$ . Andererseits fordert das Axiom III, 1  $AB \equiv BA$ . Daher muß man, wenn man die h. Streckenkongruenz durch das Doppelverhältnis fassen will, wegen der Gln. (42, 1) folgendermaßen definieren:

Zweih. Strecken bezeichnet man dann als h. kongruent, wenn die Doppelverhältnisse, die sie mit ihren Sehnenendpunkten bestimmen, gleich oder reziprok sind.

Nun ist es wegen der Gln. (42, 1) für die h. Streckenkongruenz auch gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die beiden Sehnenendpunkte wählt.

\*) Hier und in der Folge sind in den Figuren h. kongruente Strecken und Winkel nicht nur als solche durch gleiche Bezeichnungweise charakterisiert, sondern tatsächlich h. kongruent konstruiert. Damit geben die Figuren gleichzeitig eine Vorstellung davon, wie stark in dieser Deutung die h. Kongruenz von der e. abweichen kann.



Vermöge der Definition der h. Streckenkongruenz ist auch das Axiom III, 2 erfüllt.

**43.**  $A, B$  seien wieder zwei h. Punkte,  $U, V$  die zugehörigen Sehnenendpunkte. Das Doppelverhältnis  $(ABUV)$  ist nach Satz 41 b unabhängig vom Koordinatensystem. Legt man für einen Augenblick den Koordinatenanfangspunkt auf  $U$ , die positive  $X$ -Achse auf  $UV$ , dann findet man aus Gl. (41, 1) folgende Sätze:

a) Es ist immer  $\delta = (ABUV) > 0$ , und zwar  $\delta > 1$  oder  $\delta < 1$ , je nachdem die Richtungen  $U \rightarrow V$  und  $A \rightarrow B$  gegeneinander laufen oder übereinstimmen.

b) Ist  $A$  ein Punkt der Sehne  $UV$  und  $S$  ein e. Punkt auf der Verlängerung der Sehne, dann ist  $(ASUV) < 0$ .

Eine h. Strecke  $AB$  auf der Sehne  $U \rightarrow V$  nennen wir weiterhin „positiv gerichtet“ ( $BA$  negativ gerichtet), wenn  $B$  zwischen  $A$  und  $U$  liegt. Dann folgt aus 43 a und 41 d ohne weiteres

c) Zu positiv gerichteten h. Strecken gehören Werte  $\delta > 1$ , zu negativ gerichteten Werte  $\delta < 1$ . Bei der Umkehrung der Richtung einer Strecke geht  $\delta$  in  $\frac{1}{\delta}$  über.

Hieraus und aus der Definition der h. Streckenkongruenz ergibt sich nun

d) Sind  $AB$  und  $A'B'$  zwei h. kongruente Strecken und sind  $U, V$  die Sehnenendpunkte der ersten Strecke, dann kann man die Sehnenendpunkte der zweiten Strecke immer so mit  $U'$  und  $V'$  bezeichnen, daß  $(ABUV) = (A'B'U'V')$  ist. Die beiden Strecken sind dann gleich gerichtet.

**44.** Gibt man (Fig. 26) die Strecke  $AB$  vor, zu der das Doppelverhältnis  $\delta$  gehören möge, dazu auf der Sehne  $U'V'$  den Punkt  $A'$ , dann gibt es

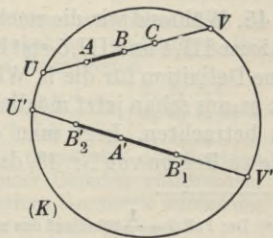


Fig. 26.

nach 41c auf der Geraden  $U'V'$  je einen Punkt  $B_1'$  und  $B_2'$  derart, daß  $(A'B_1'U'V') = \delta$  ist und  $(A'B_2'U'V') = \frac{1}{\delta}$ . Nach den Sätzen 43 a und b liegen  $B_1'$  und  $B_2'$  zwischen  $U'$  und  $V'$ , dahersind  $A'B_1'$  und  $A'B_2'$  h. Strecken und zu  $AB$  h. kongruent. Einer der Werte  $\delta, \frac{1}{\delta}$  ist  $> 1$ , der andere  $< 1^*$ , demnach liegen nach 43 a die Punkte  $B_1'$  und  $B_2'$  auf verschiedenen Seiten von  $A'$ . Damit ist der Satz 22 a und das Axiom III, 1 erfüllt.

$AB$  und  $BC$  seien gleich gerichtete h. Strecken auf der Sehne  $UV$  (Fig. 26), zu  $AB$  gehöre das Doppelverhältnis  $\delta_1$ , zu  $BC$  der Wert  $\delta_2$ , zu  $AC$  der Wert  $\delta_3$ . Dann liefert das Erweitern des  $\delta_3$  darstellenden Bruches folgende Beziehung:

$$(ACUV) = \frac{AU \cdot CV}{CU \cdot AV} = \frac{AU \cdot BV}{BU \cdot AV} \cdot \frac{BU \cdot CV}{CU \cdot BV} = (ABUV) \cdot (BCUV)$$

d. h.

$$(44, 1) \quad \delta_3 = \delta_1 \cdot \delta_2.$$

Sind nun die h. kongruenten Strecken des Axioms III, 3  $AB \equiv A'B'$  und  $BC \equiv B'C'$  gegeben, dann kann man nach Satz 43 d diese vier Strecken gleichrichten, und es ist dann  $(ABUV) = (A'B'U'V')$  sowie  $(BCUV) = (B'C'U'V')$  und folglich wegen Gl. (44, 1) auch  $(ACUV) = (A'C'U'V')$ . Mithin erfüllen die h. Strecken auch das Axiom III, 3.

### Das Archimedische und das Cantorsche Axiom.

45. Während wir die noch fehlenden beiden Kongruenzaxiome III, 4 und III, 5 erst behandeln können, nachdem wir eine Definition für die h. Winkelkongruenz gegeben haben, ist es uns schon jetzt möglich, die beiden Stetigkeitsaxiome zu betrachten. Legt man das Koordinatensystem wieder wie zu Beginn von Nr. 43, dann beweist man leicht den Satz

\*) Der Fall  $\delta = \frac{1}{\delta}$  führt auf den nach 41 a ausgeschlossenen Wert  $\delta = +1$ , weiterhin auf den Wert  $\delta = -1$ , d. h. auf die harmonische Lage von vier Punkten, die für uns wegen 43 a keine Bedeutung hat.

a) Ist  $A_1$  ein Punkt einer positiv gerichteten h. Strecke  $AB$ , dann ist  $(ABUV) > (AA_1UV) > 1$ .

Wählt man nun eine Reihe h. kongruenter Strecken  $AA_1, A_1A_2 \dots$  so, wie sie das Archimedische Axiom IV, 1 (Nr. 28) voraussetzt, dann kann man sie alle positiv orientieren; daher ist, wenn wieder  $U, V$  die Endpunkte der zugehörigen Sehne sind,  $(AA_1UV) = (A_1A_2UV) = (A_2A_3UV) = \dots = \delta > 1$  und weiterhin nach Gl. (44, 1)  $(AA_nUV) = \delta^n$ . Nach Satz 45 a ist  $(ABUV) = \mathcal{A} > \delta$ , und das Archimedische Axiom verlangt jetzt nur, daß man  $n$  so groß macht, daß  $\delta^n > \mathcal{A}$  ist. Da dies immer möglich ist, erfüllen die h. Strecken auch dieses Axiom IV, 1.

Das Cantorsche Axiom enthält nur Anordnungsaussagen. Da nach Nr. 40 das h. „zwischen“ gleichzeitig das e. „zwischen“ ist, folgt aus der e. Erfüllung des Cantorschen Axioms, daß auch die h. Geometrie diesem Axiom IV, 2 genügt.

Eine unmittelbare Folgerung aus Nr. 40 sowie den Sätzen 22 b und 45 a ist der Satz

b) Zur h. größeren von zwei positiv gerichteten Strecken gehört das größere Doppelverhältnis.

Im folgenden ist nun noch die Übereinstimmung der h. Geometrie mit den Axiomen III 4, 5 und V zu untersuchen.

### Automorphe Kollineationen des Randkreises.

46. Führt man in der Ebene zwei rechtwinkelige Koordinatensysteme  $X, Y$  und  $\bar{X}, \bar{Y}$  ein, dann bezeichnet man bekanntlich als Kollineationen die punktweise umkehrbar eindeutigen Beziehungen zwischen den beiderseitigen Koordinaten

$$(46,1) \bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Der Name Kollineation erinnert dabei daran, daß den Punkten einer Geraden wieder die Punkte einer Geraden entsprechen. Nach einem der Hauptsätze der projektiven Geometrie werden die Doppelverhältnisse durch Kollineationen nicht geändert.

47. Aus der e. Geometrie sind folgende Tatsachen bekannt: Ist  $g$  irgend eine Gerade der Ebene und trifft das Lot  $l$  aus  $M$  auf  $g$



den Kreis ( $K$ ) in  $A$  und  $B$  sowie  $g$  in  $L$ , dann bezeichnet man den mit  $L$  zu  $A$  und  $B$  harmonisch liegenden Punkt  $G$  von  $l$  als Pol von  $g$  in bezug auf ( $K$ ). Schneidet irgend eine Gerade durch  $G$  den Kreis ( $K$ ) in  $A_1$  und  $B_1$  sowie  $g$  in  $L_1$ , dann ist  $(A_1 B_1 L_1 G) = -1$ ; auch diese Punkte liegen daher zueinander harmonisch. Trifft  $g$  den Kreis nicht, dann liegt  $G$  in dessen Innerem; ist  $g$  Kreistangente, dann ist  $G$  deren Berührungspunkt; enthält  $g$  eine Kreissehne, dann ist  $G$  der Schnittpunkt der Kreistangenten in den Sehnenendpunkten.

Führt man in der analytischen Geometrie in bekannter Weise „unendlich ferne“ oder „uneigentliche“ Elemente ein, indem man parallelen Geraden einen gemeinsamen uneigentlichen Punkt beilegt, der Ebene eine uneigentliche Gerade, auf der alle uneigentlichen Punkte liegen\*), dann ist der Pol eines Kreisdurchmessers der uneigentliche Punkt der zu ihm senkrechten Geraden, die Polare des Kreismittelpunktes ist die uneigentliche Gerade.

Ist  $P$  ein Punkt von  $g$ , dann geht dessen Polare  $p$  durch  $G$ . Daraus ergibt sich sofort, daß die Polare  $s$  des Schnittpunktes  $S$  zweier Geraden  $g$  und  $h$  die Verbindungslinie der Pole  $G$  und  $H$  der beiden Geraden ist.

48. Um zu einer brauchbaren Definition der h. Winkelkongruenz zu gelangen, wollen wir Kollineationen suchen, welche jeden Punkt des Randkreises ( $K$ ) wieder in einen Punkt von ( $K$ ) überführen, oder, was dasselbe bedeutet, „automorphe Kollineationen des Randkreises ( $K$ )“. Es gilt nun der folgende wichtige Satz:

a) Sind  $A$  und  $\bar{A}$  zwei gegebene Punkte innerhalb des Randkreises ( $K$ ),  $U$  und  $\bar{U}$  zwei gegebene Punkte auf dessen Umfang, dann gibt es genau zwei automorphe Kollineationen von ( $K$ ), welche  $A$  in  $\bar{A}$  und  $U$  in  $\bar{U}$  überführen\*\*).

Hier ein einfacher Beweis des Satzes (Fig. 27): In den zu suchenden automorphen Kollineationen von ( $K$ ) sind einander

\*) Die uneigentlichen Elemente erfüllen nicht mehr alle Axiome I—IV, wie es ja nach dem Vollständigkeitssatze von Nr. 36 zu erwarten ist. Die Nenner der Gl. (46, 1) liefern, gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Geraden des  $X, Y$ -Systems, welche in der betreffenden Kollineation der uneigentlichen Geraden des  $\bar{X}, \bar{Y}$ -Systems entspricht.

\*\*\*) Dabei kann man auch  $A$  und  $\bar{A}$  zusammenfallend annehmen, ebenso  $U$  und  $\bar{U}$ . Tritt beides ein, dann ist eine der beiden Kollineationen die Identität.

zugeordnete Punkte  $A \sim \bar{A}$ ,  $U \sim \bar{U}$ ,  $V \sim \bar{V}$ ; daher entsprechen einander auch die Pole von  $UV$  und  $\bar{U}\bar{V}$ ,  $S \sim \bar{S}$  und weiterhin gilt entweder  $P \sim \bar{P}$  oder  $P \sim \bar{P}'$ . Durch die Annahme  $U \sim \bar{U}$ ,  $V \sim \bar{V}$ ,  $S \sim \bar{S}$ ,  $P \sim \bar{P}$  ist bekanntlich genau eine Kollineation bestimmt, und diese führt auch  $A$  in  $\bar{A}$  sowie  $(K)$  in sich über, das letztere, weil es genau einen Kegelschnitt gibt, der zwei gegebene Gerade ( $\bar{S}\bar{U}$  und  $\bar{S}\bar{V}$ ) in gegebenen Punkten berührt und durch einen weiteren Punkt  $\bar{P}$  hindurchgeht. Da man statt  $\bar{P}$  auch  $\bar{P}'$  wählen kann, ist damit der Satz bewiesen.

Durch die erste Kollineation sind die Strahlenbüschel  $U(SPA)$  und  $\bar{U}(\bar{S}\bar{P}\bar{A})$  projektiv aufeinander bezogen; dreht man im ersten Büschel einen Strahl im Uhrzeigersinne, dann dreht sich sein projektiv entsprechender im entgegengesetzten Sinne. Bei der zweiten Kollineation sind die Drehsinne gleich. Daher gilt der Satz

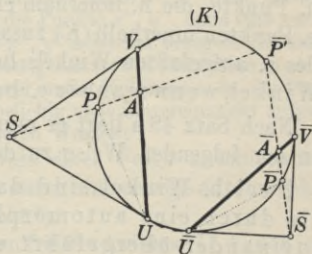


Fig. 27.

b) Sind  $A$  und  $\bar{A}$  zwei Punkte im Innern von  $(K)$ ,

$U$  und  $\bar{U}$  zwei Punkte auf dessen Umfang und bezeichnet man die durch die Sehne  $U \rightarrow A$  gebildeten Kreissegmente mit I und II, die durch die Sehne  $\bar{U} \rightarrow \bar{A}$  gebildeten mit I' und II', dann führt eine der beiden Kollineationen des Satzes 48 a punktweise I in I' über und II in II', die andere I in II' und II in I'.

Man erkennt ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes

c) Zu den automorphen Kollineationen des Randkreises  $(K)$  gehören die e. Drehungen der Ebene um den Kreismittelpunkt  $M$ , speziell die e. Spiegelungen an  $M$  (Drehungen um den Betrag  $\pi$ ), weiterhin die e. Spiegelungen an den Kreisdurchmessern.

Die Polareigenschaften bezüglich  $(K)$  bleiben, da sie auf Doppelverhältnissen beruhen, bei den automorphen Kollineationen von  $(K)$  erhalten.

### Hyperbolische Winkelkongruenz. Die Axiome III,4 und III,5.

49. Wir führen nun durch die Erklärung 5, Nr. 21, auch die  $h$ . Winkel ein, wobei wir naturgemäß  $h$ . Punkte und  $h$ . Halbgerade meinen. Da nach Nr. 40 die  $h$ . „zwischen“-Beziehungen auch gelten, wenn man die betreffenden Gebilde  $e$ . auffaßt, folgt aus der Erklärung 6, Nr. 21, daß die  $h$ . Punkte, die  $h$ . innerhalb eines Winkels liegen, mit den  $e$ . Punkten innerhalb  $(K)$  zusammenfallen, die im  $e$ . Innern des  $e$ . aufgefaßten Winkels liegen. Daher sind die  $h$ . Winkel, wenn man sie  $e$ . betrachtet, hohle Winkel.

Nach Satz 48 a liegt es nun nahe, die Winkelkongruenz in der folgenden Weise zu definieren:

Zwei  $h$ . Winkel sind dann  $h$ . kongruent, wenn sie durch eine automorphe Kollineation von  $(K)$  ineinander übergeführt werden können.

Nun betrachten wir das Axiom III, 4 (Nr. 21): Gegeben

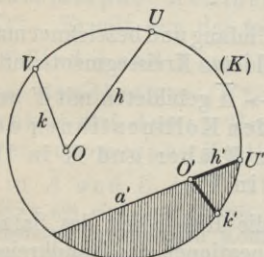


Fig. 28.

sind (Fig. 28)  $h$ ,  $k$ ,  $a'$ ,  $O'$ ,  $h'$  und die eine Seite von  $a'$ . Nach Satz 48 a gibt es genau zwei automorphe Kollineationen von  $(K)$ , welche  $O$  in  $O'$  und  $U$  in  $U'$  überführen, nach Satz 48 b legt genau eine davon  $k'$  auf die verlangte Seite von  $a'$ . Somit ist der erste Teil des Axioms erfüllt.

Fraglich ist noch  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h)$ , mit anderen

Worten: gibt es eine automorphe Kollineation von  $(K)$ , welche (Fig. 28)  $O$  fest läßt und dabei  $h$  und  $k$  vertauscht?



In einem einfachen Falle kann man eine solche Transformation ohne weiteres angeben, wenn nämlich  $O$  der Kreismittelpunkt ist. Legt man dann den Koordinatenanfangspunkt in  $O$  und die  $X$ -Achse parallel zur Sehne  $UV$ , dann leistet nach 48 c die Spiegelung  $\{\mathfrak{S}\}$  an der  $Y$ -Achse ( $x' = -x, y' = y$ ) das Gewünschte. Eine einfache Bemerkung wird uns von hier aus zum allgemeinen Fall übergehen lassen.

**50.** Aus der Bilinearität der durch die Gln. (46, 1) vermittelten Kollineationen erkennt man unschwer folgendes: transformiert man die Punkte  $x, y$  kollinear in die Punkte  $x', y'$ , diese wieder durch eine neue Kollineation in die Punkte  $x'', y''$ , dann sind auch die Punkte  $x, y$  auf die Punkte  $x'', y''$  kollinear bezogen. Weiterhin ist klar, daß  $(K)$  in der zuletzt genannten Kollineation in sich übergeht, wenn dies bei den zwei ersten Kollineationen der Fall ist. Das gilt nun offenbar für beliebig viele hintereinander ausgeführte Kollineationen, mit anderen Worten:

a) Man kann das Ergebnis einer Folge automorpher Kollineationen von  $(K)$  auch durch eine einzige automorphe Kollineation von  $(K)$  erreichen\*).

Jetzt können wir den letzten Teil des Axioms III, 4 auch im allgemeinen Falle behandeln (Fig. 29): Wir wählen eine der beiden automorphen Kollineationen des Satzes 48 a als Transformation  $\{\mathfrak{R}\}$ , um  $O$  und  $h$  in  $O'$  und  $h'$  zu transformieren, wobei wir als Punkt  $O'$  den Kreismittelpunkt wählen; dabei geht  $k$  in eine Halbgerade  $k'$  über. Wie am Schlusse der Nr. 49 können wir durch eine Spiegelung  $\{\mathfrak{S}\}$  die Radien  $h'$  und  $k'$  vertauschen, d. h.  $O', h', k'$  in  $O'', h'', k''$  verwandeln. Nun transformieren wir wieder ver-

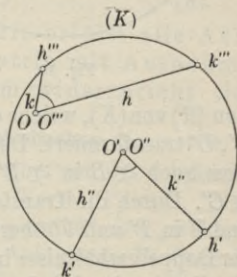


Fig. 29.

\*) Vielfach sagt man dafür kürzer: die automorphen Kollineationen von  $(K)$  haben die Gruppeneigenschaft.

möge der Umkehrung von  $\{\mathfrak{R}\}$  zurück, dann geht  $O'', h'', k''$  in  $O, k, h$  über (weil ja  $h''$  und  $k''$  nichts anderes sind als  $k'$  und  $h'$ ). Durch eine Folge automorpher Kollineationen von  $(K)$  haben wir somit  $O, h, k$  in  $O, k, h$  transformiert, dann gibt es aber nach Satz 50 a eine einzige automorphe Kollineation von  $(K)$ , welche dasselbe leistet. Die in Nr. 49 für den letzten Teil des Axioms III, 4 gestellte Frage ist demnach zu bejahen, das Axiom III, 4 erfüllt.

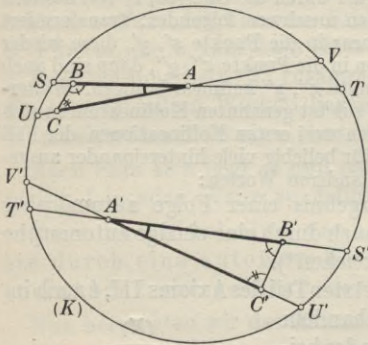


Fig. 30.

tion  $\{\mathfrak{R}\}$  von  $(K)$ , welche die Punkte  $S, A, U$  in die Punkte  $S', A', U'$  transformiert. Der Nachsatz des Axioms fordert, daß man auch  $\sphericalangle B$  in  $\sphericalangle B'$  transformieren kann und  $\sphericalangle C$  in  $\sphericalangle C'$ . Durch die Transformation  $\{\mathfrak{R}\}$  von  $\gamma)$  gehen auch  $T$  und  $V$  in  $T'$  und  $V'$  über\*) und daher wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse in  $\alpha)$  und  $\beta)$  auch  $B$  und  $C$  in  $B'$  und  $C'$ . Demnach wird durch  $\{\mathfrak{R}\}$  auch  $\sphericalangle ABC$  in  $\sphericalangle A'B'C'$  übergeführt und  $\sphericalangle BCA$  in  $\sphericalangle B'C'A'$  und die Forderung des Axioms III, 5 ist erfüllt\*\*).

51. Nun gehen wir zum Axiom III, 5 über. Wenn wir uns des Satzes 43 d erinnern, dann sagt in der h. Geometrie der Vordersatz des Axioms e. folgendes aus (Fig. 30):

$\alpha)$  es ist  $(ABST) = (A'B'S'T')$ ,

$\beta)$  es ist  $(ACUV) = (A'C'U'V')$ ,

$\gamma)$  es gibt eine automorphe Kollineation

\*) Erster Absatz des Beweises in Nr. 48.

\*\*\*) Da  $\{\mathfrak{R}\}$  die Strecke  $BC$  in die Strecke  $B'C'$  transformiert, sind auch diese

**Der Widerspruch mit dem Euklidischen Parallelenaxiom.**

52. Die *h.* Geometrie erfüllt die Axiome I—IV, das ist unser bisheriges Ergebnis. Wir haben noch das Verhalten zum Euklidischen Parallelenaxiom V (Nr. 38) zu prüfen. Würde dieses in der *h.* Geometrie gelten, dann würde, *e.* gesprochen, daraus folgen:

a) Es gäbe eine Sehne  $g$  des Kreises ( $K$ ) und einen nicht auf  $g$  liegenden Punkt innerhalb ( $K$ ) derart, daß es höchstens eine Sehne durch  $P$  gibt, welche mit  $g$  keinen inneren Punkt gemeinsam hat.

Dieser Satz ist aber nicht richtig, da man sofort eine unendliche Menge von Sehnen durch  $P$  angeben kann, welche  $g$  nicht schneiden, und zwar in folgender Weise: man greift einen beliebigen Punkt  $A$  auf der Verlängerung von  $g$  heraus, dann trifft die Gerade  $AP$  den Kreis nach Satz 34 a in zwei Punkten und liefert damit eine Sehne, welche  $g$  zufolge Axiom I,1 nicht schneiden kann, da sich die beiden die Sehnen tragenden Geraden schon außerhalb ( $K$ ) in  $A$  schneiden. Daraus folgt:

Die hyperbolische Geometrie erfüllt alle Axiome der Euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxioms; diesem widerspricht sie.

**Widerspruchslosigkeit der hyperbolischen Geometrie.**

53. Die *h.* Geometrie beruht auf einer von der gebräuchlichen abweichenden Deutung der Worte „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“, „kongruent“, „parallel“ usw., welche, wie wir nachgewiesen haben, die Axiome I—IV formalistisch erfüllt. Diese Deutung läßt sich, was wir immer wieder benützt haben, in die Sprache der *e.* Geometrie übersetzen. Wäre nun das Euklidische Parallelenaxiom mittels der Axiome I—IV beweisbar, dann würde seine

---

Strecken *h.* kongruent, so daß hier der 1. Kongruenzsatz ohne besonderen Beweis als unmittelbare Folgerung aus der Figur 30 des Axioms III, 5 auftritt.



Aussage als Satz in jeder Geometrie gelten, welche diese Axiome erfüllt, demnach auch in der h. Geometrie; daher müßte in der e. Geometrie die oben gegebene Übersetzung 52 a dieser Aussage gelten. Da dies nicht der Fall ist, kann das Euklidische Parallelenaxiom nicht beweisbar sein. Zusammengefaßt:

Man kann aus der Euklidischen Geometrie heraus beweisen, daß es nicht möglich ist, die Aussage des Euklidischen Parallelenaxioms aus den übrigen Axiomen der Euklidischen Geometrie als Satz abzuleiten.

Damit ist, in gedanklichem Anschluß an Nr. 12, die Lösung des uralten Rätsels des Euklidischen Parallelenaxioms gegeben. Sie rechtfertigt Euklid, der in genialer Weise die Notwendigkeit seines V. Postulates gefühlt hat.

**54.** Der entscheidende Schluß in der vorigen Nr. war der, daß die Aussage 52 a in der e. Geometrie nicht bewiesen werden kann, weil eine ihr widersprechende Aussage beweisbar ist. Wesentlich war dabei die stillschweigende Annahme, daß die e. Geometrie nicht zwei einander widersprechende Sätze liefern kann, daß sie widerspruchsfrei ist. Welche Gewähr hat man dafür?

Man kann nicht etwa so schließen: „die e. Geometrie ist durch einen Abstraktionsprozeß, durch eine Verfeinerung aus der physischen Wirklichkeit bis zu idealen Grenzen entstanden (was sich noch deutlich in den in Nr. 2 erwähnten Euklidischen Defn. I, II, IV ausspricht), und da die Wirklichkeit widerspruchsfrei ist, gilt dasselbe auch für die e. Geometrie.“ Denn in diesem Abstraktionsprozeß steckt so viel Willkürliches darin, er ist in seinen Einzelheiten so verwickelt\*), daß es unmöglich ist, darauf eine derartige Aussage zu stützen, selbst wenn es klar wäre, was die logische Widerspruchsfreiheit der Wirklichkeit bedeuten soll.

Einen Weg für die Behandlung der Frage nach der Widerspruchsfreiheit der e. Geometrie zeigt die analytische Geometrie, die uns ein Mittel in die Hand gibt, jeden

\*) Vgl. hierzu die in der Anm. zu Nr. 16 genannte Arbeit des Verfassers.

e. Beweis, jede e. Aussage rechnerisch zu verfolgen, so daß ein Widerspruch in der e. Geometrie einen Widerspruch in der Rechnung nach sich ziehen müßte. Das Rechnen in der analytischen Geometrie kann man nun seinerseits wieder auf die Arithmetik (das ist das Rechnen mit den positiven ganzen Zahlen) zurückführen, so daß man aus der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik auf die Widerspruchslosigkeit der e. Geometrie schließen kann. Und damit müssen wir uns vorläufig begnügen. Die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik ist bisher noch nicht bewiesen worden. Ob es gelingen wird, ist fraglich; es wird sogar bestritten, daß es überhaupt einen Sinn hat, dies zu versuchen\*).

Die naheliegende Frage nach der Widerspruchslosigkeit der h. Geometrie läßt sich nun sofort beantworten. Da sich die Aussagen der h. Geometrie in e. Form kleiden lassen, wie wir es zuletzt beim Euklidischen Parallelenaxiom in Nr. 52 taten, sind alle Sätze der h. Geometrie nichts anderes als Sätze der e. Geometrie\*\*). Daher wäre ein Widerspruch in der h. Geometrie gleichbedeutend mit einem solchen in der e. Geometrie. Nimmt man die soeben aufgewiesene Beziehung der letzteren zur Arithmetik hinzu, dann folgt daraus:

Ist die Arithmetik widerspruchslos, dann ist es auch die Euklidische und die hyperbolische Geometrie.

Der Beweis dafür, daß man das Parallelenaxiom nicht entbehren kann, wurde durch die Deutung der übrigen Axiome in einer Geometrie geliefert, die dem Parallelenaxiom widerspricht. Mittels desselben grundsätzlichen Gedankenganges kann man nun auch die Notwendigkeit anderer Axiome nachweisen. Beispiele hierfür findet man in den „Grundlagen“ §§ 10—12, außerdem in

\*) Näheres hierüber enthält die in der Anm. am Schlusse von Nr. 15 erwähnte Schrift des Verfassers.

\*\*) Daß sich die Sätze der h. Geometrie in e. Form vielfach nur sehr umständlich aussprechen lassen, ist hier gleichgültig.

Enriques [4] und Schur [8]. Ein näheres Eingehen hierauf kommt für uns nicht in Frage.

### Das Nichteuklidische Parallelenaxiom V'.

55. Aus den Axiomen I—III folgt vermöge Satz 24 c die Existenz mindestens einer Parallelen zu irgend einer Geraden durch irgend einen Punkt außerhalb der Geraden. Gibt es weiterhin in einer die Axiome I—IV erfüllenden Geometrie durch einen einzigen Punkt zu einer einzigen ihn nicht enthaltenden Geraden mehr als eine Parallele, dann gilt dies nach Satz 37 a für alle Punkte und Geraden. Will man die Axiome I—IV der absoluten Geometrie durch Hinzufügung eines Nichteuklidischen Parallelenaxioms zu einem Nichteuklidischen Axiomensystem ergänzen, dann erreicht man dies daher durch

Das Nichteuklidische Parallelenaxiom V': Es gibt eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $P$  außerhalb  $g$  von der Eigenschaft, daß (mindestens) zwei Gerade durch  $P$  die Gerade  $g$  nicht treffen.

Die Aussage dieses Axioms gilt dann für alle Punkte und Geraden.

56. In der  $h$ . Geometrie haben wir ein Beispiel einer Geometrie kennengelernt, welche die Axiome I—IV, aber nicht das Axiom V erfüllt. An dessen Stelle tritt in der  $h$ . Geometrie folgende Aussage, die scheinbar enger ist als das Nichteuklidische Parallelenaxiom V' (Fig. 31):

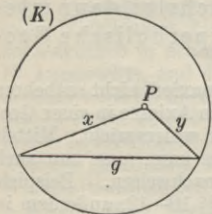


Fig. 31.

a) Ist  $g$  irgend eine Gerade und  $P$  irgend ein Punkt außerhalb  $g$ , dann gibt es zwei von  $P$  ausgehende, nicht auf einer Geraden liegende Halbgerade  $x, y$  derart, daß von den Geraden durch  $P$  jede, welche durch das Innere des  $\sphericalangle(x, y)$



läuft  $g$  trifft und jede, welche nicht durch das Innere dieses Winkels läuft,  $g$  nicht trifft.  $x$  und  $y$  treffen  $g$  nicht\*).

Sagen wir dafür kurz „ $P$  verhält sich zu  $g$  hyperbolisch“, dann können wir den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

b) Aus den Axiomen I—IV und V' folgt, daß sich jeder Punkt zu jeder ihn nicht enthaltenden Geraden hyperbolisch verhält.

Dies beweist man in folgender Weise:  $P$  sei irgend ein Punkt,  $g$  eine ihn nicht enthaltende Gerade,  $p$  und  $q$  seien die beiden Parallelen durch  $P$  zu  $g$ , die nach dem Schlusse von Nr. 55 existieren (Fig. 32). Da sich  $p$  und  $g$  nicht schneiden, liegen alle Punkte von  $g$  auf derselben Seite von  $p$  (Satz 19 b). Das Entsprechende gilt für  $q$  und  $g$ . Wir zerlegen  $p$  in die Halbgeraden  $p_1, p_2^{**}$ ) und  $q$  in  $q_1, q_2$  so, daß  $g$  und  $p_1$  auf derselben Seite von  $q$  sowie  $g$  und  $q_1$  auf derselben Seite von  $p$  liegen.  $g$  liegt dann im Innern des  $\sphericalangle (p_1, q_1)$  (Erklärung 6, Nr. 21).

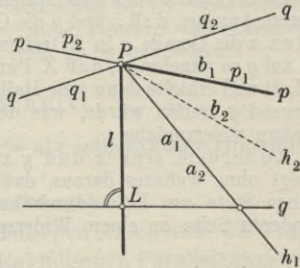


Fig. 32.

Das Lot  $l$  aus  $P$  auf  $g$  trifft  $g$  in einem Punkt  $L$  (23 e) und verläuft deshalb im  $\sphericalangle (p_1, q_1)$ . Jede von  $l$  verschiedene Halbgerade, welche  $g$  trifft, liegt im  $\sphericalangle (p_1, l)$  oder im  $\sphericalangle (q_1, l)$ .

Wir betrachten zunächst nur die Halbgeraden im  $\sphericalangle (p_1, l)$ . Trifft die Halbierungslinie  $h_1$  dieses Winkels  $g$ , dann tut dies nach 21 a jede Halbgerade im  $\sphericalangle (h_1, l)$ . In diesem Falle bezeichnen wir  $h_1$  mit  $a_1$  und  $p_1$  mit  $b_1$ . Schneidet dagegen  $h_1$  die Gerade  $g$  nicht, dann gilt dies für alle Halbgeraden im  $\sphericalangle (p_1, h_1)$  und wir bezeichnen dann  $l$  mit  $a_1$  und  $h_1$  mit  $b_1$ . Nun halbiert man den  $\sphericalangle (a_1, b_1)$  durch  $h_2$  und bezeichnet den  $\sphericalangle (h_2, b_1)$  oder  $\sphericalangle (a_1, h_2)$  als  $\sphericalangle (a_2, b_2)$ , je nachdem  $h_2$  die Gerade  $g$  trifft oder nicht. So

\*) Schon Saccheri hatte in seinem Lehrsatz XXXII diesen Sachverhalt klargestellt.

\*\*) In diesem Beweise meinen wir hier und weiterhin mit einer Halbgeraden immer eine von  $P$  ausgehende Halbgerade.

fährt man nun fort und erhält eine Folge von ineinander liegenden Winkeln  $\sphericalangle(a_i, b_i)$  mit dem gemeinsamen Scheitel  $P$  von der Eigenschaft, daß unter den (von  $P$  ausgehenden) Halbgeraden die innerhalb  $\sphericalangle(p_1, b_i)$  liegenden  $g$  nicht treffen, die innerhalb  $\sphericalangle(l, a_i)$  liegenden  $g$  treffen.

Das Verfahren bricht ab, wenn eine Halbierende  $h_{i+1}$  die  $g$  treffenden Halbgeraden von den nicht treffenden im  $\sphericalangle(a_i, b_i)$  trennt; dann bezeichnen wir  $h_{i+1}$  mit  $x$ .

Tritt dies nicht ein, dann sind die Voraussetzungen von Satz 32 a erfüllt, und die nach diesem existierende Halbgerade  $x$  trennt im  $\sphericalangle(p_1, l)$  die  $g$  schneidenden Halbgeraden von den nicht schneidenden. Ebenso findet man im  $\sphericalangle(q_1, l)$  eine Halbgerade  $y$ .  $x$  und  $y$  können nicht auf derselben Geraden liegen, weil sie beide im  $\sphericalangle(p_1, q_1)$  verlaufen oder auf dessen Schenkel fallen.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen, bis auf seine letzte Aussage, daß  $x$  und  $y$  die Gerade  $g$  nicht schneiden. Würde etwa  $x$  die Gerade  $g$  in  $X$  treffen, dann könnte man einen Punkt  $S$  auf  $g$  so annehmen, daß  $X$  Punkt der Strecke  $LS$  wäre (Axiom II, 2) und erhielte dann eine Halbgerade  $PS$ , welche im  $\sphericalangle(p_1, x)$  liegend  $g$  treffen würde, was dem soeben bewiesenen Teile des Satzes widerspräche.

Außerdem sind  $x$  und  $y$  zum Lot  $l$  symmetrisch, das folgt ohne weiteres daraus, daß andernfalls die Spiegelung der einen Seite am Lote (durch kongruente Übertragung) auf der anderen Seite zu einem Widerspruche führen würde.

### Einzigartigkeit der hyperbolischen Geometrie.

57. Setzt man die Axiome I—IV voraus, dann gibt es zu irgend einer Geraden durch irgend einen, nicht auf ihr liegenden Punkt mindestens eine Parallele, und zwar, je nachdem man das Axiom V oder V' hinzufügt, genau eine oder mehr als eine. Wegen der vollständigen Disjunktion in dieser Aussage über die Parallelen gibt es daher keine anderen Fortsetzungen des Systems der Axiome I—IV der absoluten Geometrie als in den beiden genannten Parallelenaxiomen.

Das Axiom V liefert die Euklidische Geometrie; aus dem Axiom V' folgt der Satz 56 b. Bezeichnet man — nunmehr unabhängig von der Deutung innerhalb  $(K)$  — als h. Geome-

trie diejenige Geometrie, welche die Axiome I—IV erfüllt und in der sich jeder Punkt zu jeder ihn nicht enthaltenden Geraden  $h$ . verhält, dann kann man daher den Satz aussprechen:

Das System der Axiome I—IV kann nur im Euklidischen Parallelenaxiom V oder im Nicht-euklidischen Parallelenaxiom V' fortgesetzt werden; im ersten Fall erhält man die Euklidische Geometrie, im zweiten die hyperbolische.

Daß sich das System der Axiome I—V' innerhalb eines Randkreises deuten läßt, haben wir im vorliegenden Abschnitte gezeigt. Daß diese Deutung nicht etwa als zu eng erweitert werden kann, das folgt aus dem Vollständigkeitssatz von Nr. 36. Eine wichtige grundsätzliche Bemerkung über diese Deutung des Axiomensystems der  $h$ . Geometrie wird noch in Nr. 118 folgen.

## V. Abschnitt.

### Die hyperbolische Geometrie als selbständige Disziplin.

#### Vorbemerkungen.

58. Ein Problem der Euklidischen Axiomatik, die Frage nach der Beweisbarkeit des Euklidischen Parallelenaxioms, hat zur Entdeckung der hyperbolischen Geometrie geführt. In den Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes haben wir die  $h$ . Geometrie nur so weit entwickelt, als es zur Beantwortung dieser Frage nötig war. Dabei wurde die Erkenntnis gewonnen, daß nach Nr. 57 die  $h$ . Geometrie die einzige Nichteuklidische Geometrie ist, d. h. die einzige Geometrie, welche neben einem, dem Euklidischen Parallelenaxiom widersprechenden Axiom V' alle übrigen Axiome I—IV der Euklidischen Geometrie erfüllt. Diese Tatsache legt den Gedanken nahe, die der  $h$ . Geometrie eigentümlichen Sätze näher zu untersuchen, das sind diejenigen Sätze, welche wesentlich vom Nichteuklidischen Parallelenaxiom V' abhängen. Wir wollen dies im folgenden tun.



Dabei behalten wir fernerhin die bisherige Deutung der h. Geometrie im Randkreise ( $K$ ) mit dem Mittelpunkt  $M$  bei und bezeichnen diese Deutung mit  $\{\mathfrak{D}\}$ .

Da die absolute Geometrie der gemeinsame Unterbau der e. und der h. Geometrie ist, können die Sätze des II. Abschnittes als Sätze der h. Geometrie bei der Ableitung weiterer h. Sätze vorausgesetzt werden.

Die in Nr. 48 behandelten automorphen Kollineationen von ( $K$ ) lassen die h. Größen der Strecken und Winkel unverändert; es liegt demnach nahe, sie in Übereinstimmung mit dem drittletzten Absatze von Nr. 22 kürzer als „h. Bewegungen“ zu bezeichnen und z. B. davon zu sprechen, daß man durch eine h. Bewegung einen Winkel mit seinem Scheitel auf  $M$  legt. Letzten Endes greift man dabei immer wieder auf die durch die Axiome III gewährleisteten kongruenten Übertragungen von Strecken und Winkeln zurück.

59. Im folgenden werden wir viele Tatsachen der h. Geometrie mittels eines einheitlichen, einfachen Gedankens ableiten, den man als „Prinzip der speziellen Lage“ bezeichnen könnte: Man denkt sich die zu untersuchende h. Figur  $\{\mathfrak{F}\}$  durch eine h. Bewegung so zu  $M$  gelegt, daß sie in der neuen Lage  $\{\mathfrak{F}'\}$  eine einfache e. Bedeutung hat und die Übersetzung vom Hyperbolischen ins Euklidische und umgekehrt besonders leicht wird. Gelingt es nun, aus bekannten e. Sätzen einen h. Satz für  $\{\mathfrak{F}'\}$  abzuleiten, der nur h. Beziehungen enthält, die durch h. Bewegungen nicht zerstört werden, dann gilt der so bewiesene h. Satz auch für die ursprüngliche Figur  $\{\mathfrak{F}\}$ . Der Anwendung dieses Prinzips wollen wir zunächst durch Ableitung einiger Hilfsätze vorarbeiten.

#### Hyperbolische Gebilde in spezieller Lage zum Randkreise.

60.  $d$  sei ein Durchmesser von ( $K$ ),  $c_1$  und  $c_2$  seien die beiden Hälften einer zu  $d$  e. senkrechten Sehne, Fig. 33\*) S. 77. Die

\*) Doppelbogen in den Figuren bezeichnen auch weiterhin e. rechte Winkel.

Spiegelung der Ebene an  $d$  zeigt vermöge Satz 48 c, daß  $\sphericalangle(c_1, d)$  und  $\sphericalangle(c_2, d)$  auch h. kongruent und folglich nach Erklärung 8 (Nr. 23) rechte Winkel sind. D. h.

a) Geht der eine Schenkel eines h. (e.) rechten Winkels durch  $M$ , dann ist der Winkel auch e. (h.) ein rechter\*).

Wir bezeichnen weiterhin solche rechte Winkel als „absolut rechte Winkel“, in naheliegender Analogie zur Bezeichnung des den beiden Geometrien gemeinsamen Teiles als absoluter Geometrie.

Trägt man auf den beiden Halbsehnen  $e_1$  und  $e_2$  vom Sehnenmittelpunkt aus zwei e. gleiche Strecken ab, dann sind diese, wie man wieder durch die e. Spiegelung an  $d$  erkennt, auch h. kongruent, daher ist die e. Spiegelung an  $d$  gleichzeitig auch eine h. Spiegelung an  $d$ ; wir können daher von einer „absoluten Spiegelung“ sprechen. Und weiterhin ergibt sich ohne weiteres der Satz

b) Zwei Strecken oder Winkel, die (absolut) spiegelbildlich zu einem Durchmesser von  $(K)$  liegen, sind absolut (d. h. e. und h.) kongruent.

Satz a) war ein Spezialfall hiervon. Weitere Spezialfälle sind die Sätze

c) h. (e.) kongruente Strecken mit dem gemeinsamen Endpunkt  $M$  sind auch e. (h.) kongruent.

d) h. (e.) kongruente Winkel mit dem gemeinsamen Scheitel  $M$  sind auch e. (h.) kongruent.

e) Geht die h. (e.) Halbierungslinie eines Winkels durch  $M$ , dann ist sie auch dessen e. (h.) Halbierungslinie.

Ebenso erkennt man aus den e. Spiegelungen an  $M$  zufolge Satz 48 c den Satz

f) Liegen zwei Strecken oder Winkel (absolut) symmetrisch zu  $M$ , dann sind sie (absolut) kongruent.

61. Nach Nr. 32 ist in der Winkelmetrik die Einheit beliebig. Als einfaches Beispiel wurde dort für den rechten

\*) In den Sätzen dieser und der folgenden Nummer heißt e. immer soviel wie „e. und innerhalb  $(K)$  liegend“.

Winkel die Größe  $\frac{1}{2}$  gewählt. Da es in der e. Geometrie aus bekannten Gründen rechnerisch vorteilhaft ist, dem rechten Winkel die Größe  $\frac{\pi}{2}$  beizulegen, wollen wir dies weiterhin auch in der h. Geometrie tun (so daß alle Winkelgrößen zwischen 0 und  $\pi$  liegen). Dann folgt aus Satz 60 d sofort der Satz

a) Winkel mit dem Scheitel  $M$  haben e. und h. dieselbe Größe.

Aus Satz 60 c ergibt sich die Aussage

b) Legt man durch eine h. Bewegung einen h. Kreis mit seinem Mittelpunkt auf  $M$ , dann wird er ein e. Kreis mit dem Mittelpunkt  $M$ .

Und aus Satz 60 f folgt

c) Legt man durch eine h. Bewegung ein h. reguläres  $n$ -Eck mit dem Mittelpunkte seines Inkreises auf  $M$ , dann wird es ein e. reguläres  $n$ -Eck mit dem Mittelpunkt  $M$ .

Damit haben wir die Hilfsmittel für das Prinzip der speziellen Lage bereitgestellt, das uns nicht nur in die Lage versetzen wird, die Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  genau kennenzulernen, sondern darüber hinaus die Haupttatsachen der h. Geometrie in einfacher, auch dem Euklidisch Eingestellten leicht verständlicher Weise abzuleiten.

### Orthogonalität.

62. Die beiden h. senkrechten Geraden  $e_1$  und  $d$  der Fig. 33 haben die Eigenschaft, daß jede von ihnen verlängert durch den zu  $(K)$  gehörenden e. Pol (Nr. 47) der anderen hindurchgeht. Hat man irgend zwei andere h. zueinander senkrechte Gerade  $a$  und  $b$ , dann kann man durch eine h. Bewegung nach Axiom III, 4 den rechten  $\sphericalangle$   $(e_1, d)$  auf einen der vier von den Geraden  $a, b$  gebildeten h. rechten Winkel legen, wobei die Polareigenschaften erhalten bleiben, d. h.



a) Zwei h. Gerade  $a, b$  stehen in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  dann aufeinander h. senkrecht, wenn, e. gesprochen, jede von ihnen verlängert durch den zu  $(K)$  gehörenden Pol der anderen hindurchgeht. Dies tritt ein, wenn eine der beiden Geraden den Pol der anderen enthält.

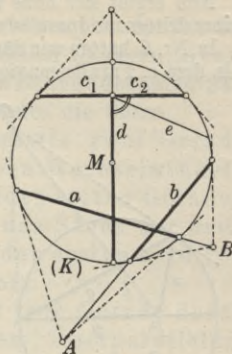


Fig. 33.

Auf den e. durch  $A$  laufenden Sekanten der Fig. 33 liegen daher die Sehnen, welche h. die zu  $a$  senkrechten Geraden darstellen. Die Richtigkeit der Sätze 23 e und f für die h. Geometrie erkennt man so neuerdings, hier durch unmittelbares Ablesen aus der Figur.

### Parallele Gerade.

63. In unserer Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  der h. Geometrie schneiden sich zwei h. Gerade nicht, sie sind h. parallel, wenn die sie darstellenden e. Kreissehnen einen Punkt von  $(K)$  oder keinen Punkt gemeinsam haben. Wir wollen die beiden h. Geraden im ersten Falle „randparallel“ nennen, im zweiten Fall „überparallel“<sup>\*)</sup>. Auch zwei h. Halbgerade, die sich auf  $(K)$  treffen, nennen wir randparallel<sup>\*\*)</sup>.

Ist nun eine h. Gerade  $g$  und ein nicht auf ihr liegender h. Punkt  $P$  gegeben (Fig. 34), dann gibt es durch  $P$  die zwei zu  $g$  randparallelen Halbgeraden  $x$  und  $y$ , welche nach Satz 56 a im Geradenbüschel mit dem Scheitel  $P$  die  $g$  schneidenden von den  $g$  nicht schneidenden Geraden trennen.

\*) Die Bezeichnungen liegen nahe, da man die e. Punkte des Randkreises  $(K)$  auch als „Randpunkte“ der h. Ebene bezeichnet, die e. Punkte außerhalb  $(K)$  nach Liebmann [7] als „Überpunkte“. Die e. Geraden, auf denen die betreffenden h. Geraden liegen, haben im ersten Fall einen Randpunkt, im zweiten einen Überpunkt gemeinsam, der auch ein e. uneigentlicher (unendlich ferner) Punkt sein kann.

\*\*) Nach Hilbert sagt man in diesem Fall auch: die beiden Halbgeraden haben ein „Ende“ gemeinsam.

Nun ergibt sich ohne weiteres, daß zwei Halbgerade, welche zu einer dritten randparallel sind, auch untereinander randparallel sind.

In Nr. 6 hatten wir Sätze der e. Geometrie kennen gelernt, die, als dem e. Parallelenaxiom äquivalent, in der h. Geometrie nicht erfüllt sein können. Für 6 a ist das ohne weiteres klar: die Gerade  $a$  der Fig. 34 z. B. trifft  $h$ , aber nicht die zu  $h$  parallele Gerade  $g$ .

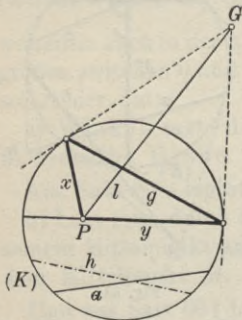


Fig. 34.

Vielfach, so von Gauß und Lobatschewskij, wird die Bezeichnung „parallel“ den randparallelen Geraden vorbehalten. Dies setzt voraus, daß in der absoluten Geometrie an die Stelle der Erklärung 9, Nr. 24, eine andere tritt. Die Überparallelen werden dann z. B. als „divergierende Gerade“ eingeführt. J. Bolyai nennt randparallele Gerade „asymptotisch“.

In Fig. 33 (S. 77) gibt es, h. gesprochen, durch keinen Punkt von  $b$  eine Gerade, welche beide Schenkel des spitzen  $\sphericalangle$  ( $d, e$ ) trifft, in erwartetem Widerspruch mit dem e. Satze 6 b.

**64.** Aus Nr. 47 und dem Satze 62 a folgen nun ohne weiteres die beiden Sätze

a) In der h. Geometrie gibt es zu zwei Geraden, die sich schneiden oder die zueinander randparallel sind, kein gemeinsames Lot.

b) In der h. Geometrie haben zwei Überparallele genau ein gemeinsames Lot.

Das gemeinsame Lot dieses Satzes b) ist in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  die e. Polare des außerhalb  $(K)$  liegenden eigentlichen oder uneigentlichen e. Schnittpunktes der verlängerten Geraden. In der Fig. 33 (S. 77) steht  $e_1$  auf  $d$  h. senkrecht,  $a$  nicht, und doch haben  $a$  und  $e_1$  beliebig verlängert keinen h. Schnittpunkt (vgl. Nr. 7, letzter Absatz).

Eine unmittelbare Folge aus den Sätzen a) und b) ist der Satz

c) In der h. Geometrie sind die Lote in zwei Punkten einer Geraden zueinander überparallel.





auf  $M$  legen. Sie möge dabei die Lage  $d$  annehmen, Fig. 35. Nun suchen wir die h. Punkte, welche von  $d$  h. konstanten senkrechten Abstand haben. Die h. Lote zu  $d$  stehen nach Satz 60 a auch e. auf  $d$  senkrecht. Nach Satz 60 b liefert jeder Punkt des vorgeschriebenen h. Abstandes von  $d$  einen bezüglich  $d$  absolut symmetrischen Punkt der gleichen Eigenschaft.  $P_1, P_2$  seien diese beiden Punkte auf dem zu  $d$  senkrechten Kreisdurchmesser. Sollen nun die h. Strecken  $MP_1$  und  $NQ_1$  kongruent sein, dann müssen die zugehörigen Doppelverhältnisse gleich sein. Deren Werte berechnet man, wenn  $a, s, l$  die e. Längen von  $MS, NU, NQ_1$  sind, leicht nach Gl. (41, 1) und erhält, da  $(K)$  den Radius 1 hat

$$(65, 1) (MP_1ST) = \frac{1+a}{1-a} = (NQ_1UV) = \frac{s+l}{s-l}.$$

Zwischen den e. Koordinaten von  $Q_1$  besteht demnach die Gleichung

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y} = \frac{1+a}{1-a} \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Das ist eine e. Ellipse mit der großen Achse  $d$  und der kleinen Achse  $P_1P_2$ . Die Punkte, welche von  $d$  denselben h. Abstand wie  $P_1$  haben und auf der Seite dieses Punktes liegen, bilden die obere Halbellipse, die Punkte auf der anderen Seite von  $d$  die untere Halbellipse\*). In der h. Geometrie liegen demnach die auf einer Seite einer Geraden von dieser gleich weit entfernten Punkte nicht selbst wieder auf einer Geraden, im Gegensatze zu der Aussage 6 c in der e. Geometrie\*\*).

Jede der beiden durch  $d$  getrennten Hälften von  $(C)$  bezeichnet man in der h. Geometrie, da alle ihre Punkte

\*) Die Endpunkte der großen Ellipsenachse treten unter diesen Punkten nicht auf.

\*\*) Ist  $UV$  eine beliebige Sehne von  $(K)$ , dann liegen die zu dieser Geraden h. äquidistanten Punkte auf einer e. Ellipse, welche  $(K)$  in den Punkten  $U$  und  $V$  berührt. Das kann man daraus erkennen, daß die automorphen Kollineationen von  $(K)$  Ellipsen wieder in Ellipsen verwandeln.

gleiche senkrechte Abstände von  $d$  haben, als eine zu  $d$  gehörende „Abstandslinie“.

66. Ist  $g$  eine h. Gerade,  $(E)$  die Kurve der Punkte, welche von  $g$  einen gegebenen senkrechten Abstand haben, dann denken wir uns zunächst wieder  $g$  samt  $(E)$  so bewegt, daß in Fig. 35  $g$  auf  $d$  fällt,  $(E)$  auf  $(C)$ . Legt man nun nach Satz 48 a durch eine neue h. Bewegung  $M$  auf  $N$ , während  $R$  fest bleibt, dann fällt dabei jeder Punkt von  $d$  wieder auf einen Punkt von  $d$  und jeder Punkt von  $(C)$  nach der Definition dieser Kurve wieder auf einen Punkt von  $(C)$ , z. B.  $P_1$  oder  $P_2$  auf  $Q_1$ , folglich auch die Tangente in einem der beiden ersten Punkte auf die Tangente in  $Q_1^*$ ). Da nun die Tangenten in  $P_1$  und  $P_2$  auf  $P_1MP_2$  (absolut) senkrecht stehen, folgt daraus

a) Ist in der h. Geometrie  $(E)$  eine zu einer Geraden  $g$  gehörende Abstandslinie, dann steht die Tangente in irgend einem Punkte  $P$  von  $(E)$  auf dem Lote senkrecht, das man aus  $P$  auf  $g$  fallen kann.

Da  $(C)$  durch (absolute) Spiegelung an  $P_1M$  in sich übergeht, folgt daraus weiterhin

b) In der h. Geometrie geht eine zu einer Geraden gehörende Abstandslinie durch Spiegelung an irgend einem Lote dieser Geraden in sich über.

Auf die Abstandslinien waren schon Saccheri und Lambert gestoßen, auch J. Bolyai ging bereits bei seinen ersten Versuchen von ihnen aus. Gauß schlug für sie die Bezeichnung „Hypercykel“ vor.

### Kreise.

67. Aus Satz 61 b folgt, daß man die Gleichung eines beliebigen h. Kreises  $(\bar{C})$  in e. Koordinaten erhält, wenn man auf einen e. Kreis  $(C)$  mit dem Mittelpunkt  $M$  eine

\*) Als einzige Gerade durch  $Q_1$ , welche zu  $d$  nicht randparallel ist und  $(C)$  in keinem zweiten Punkte trifft.

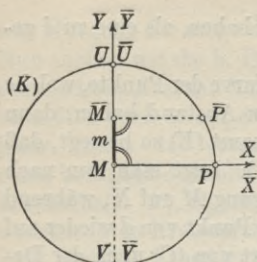


Fig. 36.

automorphe Kollineation von  $(K)$  anwendet, wobei  $M$  in den h. Mittelpunkt  $\bar{M}$  von  $(\bar{C})$  übergeht (Fig. 36). Durch die Forderungen  $\bar{M} \sim M$ ,  $\bar{U} \sim U$ ,  $\text{segm}(\bar{U}\bar{P}\bar{V}) \sim \text{segm}(UPV)$  ist nach den Sätzen 48 a und b genau eine solche Kollineation bestimmt; ihre Gleichungen sind, wovon man sich leicht durch rechnerische Nachprüfung überzeugt,

$$(67, 1) \quad x = \bar{x} \frac{+ \sqrt{1 - m^2}}{1 - m \bar{y}}, \quad y = \frac{\bar{y} - m}{1 - m \bar{y}} *).$$

Nun transformieren wir, wie gesagt, einen Kreis

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad r < 1$$

durch die Gln. (67, 1) und erhalten als e. Gleichung eines allgemeinen h. Kreises die Ellipsengleichung

$$(67, 2) \quad \bar{x}^2(1 - m^2) + \bar{y}^2(1 - m^2 r^2) - 2\bar{y}m(1 - r^2) = r^2 - m^2.$$

Das heißt

a) In der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  ist ein h. Kreis mit dem Mittelpunkt  $\bar{M}$  eine e. Ellipse, deren große Achse auf dem Durchmesser von  $(K)$  liegt, der  $\bar{M}$  enthält.

Die Ellipse hat dabei die Halbachsen  $r \frac{1 - m^2}{1 - m^2 r^2}$  und  $r \sqrt{\frac{1 - m^2}{1 - m^2 r^2}}$  sowie den (von  $\bar{M}$  verschiedenen) e. Mittelpunkt  $\left(0; m \frac{1 - r^2}{1 - m^2 r^2}\right)$ .

Wie man eine solche Ellipse  $(E)$  bestimmt, wenn der Mittelpunkt  $\bar{M}$  und ein Punkt  $P$  des durch sie dargestellten h. Kreises gegeben ist, das zeigt Fig. 37:  $U, V$  seien die Endpunkte der Sehne  $\bar{M}P$

\*) Ersetzt man hierin  $y$  durch  $-y$ , dann hat man die Kollineation, welche  $\bar{U} \sim V, \bar{V} \sim U$  entsprechen läßt und die im übrigen dasselbe wie (67,1) bewirkt.





positive  $Y$ -Achse (innerhalb oder außerhalb ( $K$ )) in  $B$ ; dann sind nach den Sätzen 60 a und 61 a die beiden Winkel h. spitz. Die h. Bewegung, welche  $\sphericalangle \alpha$  in  $\sphericalangle \bar{\alpha}$  überführt — d. h.  $A, U$  und die obere Kreishälfte in  $\bar{A}, \bar{U}$  und die obere Kreishälfte (Satz 48 b) — hat, wie man wieder leicht nachprüft, die Gleichungen

$$(68, 1) \quad \bar{x} = \frac{x - a}{1 - ax}, \quad \bar{y} = y \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax}.$$

Den Punkten  $M(0; 0)$  und  $B(0; b)$  entsprechen vermöge Gl. (68, 1) die Punkte  $\bar{M}(-a; 0)$  und  $\bar{B}(-a; b\sqrt{1 - a^2})$ . Bezeichnet man mit  $\alpha_e$  das e. Maß von  $\sphericalangle \alpha$ , mit  $\alpha_h$  dessen h. Maß usw., dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha_e = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \bar{\alpha}_e = \frac{b}{a} \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - a^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_e.$$

Daraus folgt  $\bar{\alpha}_e < \alpha_e$ , während  $\bar{\alpha}_h = \alpha_h$  ist. D. h.

a) Legt man einen h. spitzen Winkel, dessen einer Schenkel  $M$  enthält, durch eine h. Bewegung mit dem Scheitel auf  $M$ , dann wird der Winkel dabei e. kleiner.

Nimmt man noch den Satz 61 a hinzu, d. h.  $\bar{\alpha}_e = \bar{\alpha}_h = \alpha_h$ , dann ist damit folgender Satz bewiesen:

b) Ist  $\sphericalangle \alpha$  ein h. spitzer Winkel, dessen einer Schenkel durch  $M$  läuft, während sein Scheitel von  $M$  die e. Entfernung  $a$  hat, dann besteht zwischen der h. und der e. Größe des Winkels die Beziehung

$$(68, 2) \quad \operatorname{tg} \alpha_h = \sqrt{1 - a^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_e.$$

Daraus ergibt sich speziell

c) Läuft genau ein Schenkel eines h. spitzen Winkels durch  $M$ , dann ist der Winkel h. gemessen kleiner als bei e. Messung.

Liegen zwei h. kongruente spitze Winkel so, daß je einer ihrer Schenkel durch  $M$  geht, dann ist nach dem Satze b) derjenige von

ihnen e. größer, dessen Scheitel weiter von  $M$  entfernt ist. Liegt  $M$  im Innern eines h. spitzen Winkels, dann verbindet man seinen Scheitel mit  $M$  und erkennt, daß auch dieser Winkel h. gemessen kleiner ist als in e. Maß. Fig. 39 zeigt eine aus Gl. (68, 2) folgende einfache Konstruktion des  $\sphericalangle \beta$ , dessen e. Größe gleich der h. Größe des spitzen  $\sphericalangle \alpha$  ist.

Aus Satz b) folgert man ohne weiteres

d) Läßt man einen unveränderlichen e. spitzen Winkel innerhalb  $(K)$ , dessen einer Schenkel beständig durch  $M$  läuft, mit dem Scheitel an  $(K)$  heran-

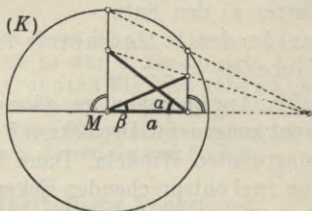


Fig. 39.

rücken, dann konvergiert die h. Größe des Winkels gegen 0.

### Winkelsumme im Dreieck.

69.  $ABC$  sei irgend ein h. Dreieck. Dann gilt dafür der Satz 26 f und man kann durch eine h. Bewegung das Dreieck mit dem Schnittpunkte seiner Winkelhalbierenden auf  $M$  legen. In der neuen Lage ist  $M$  nach Satz 60 e auch Schnittpunkt der e. Winkelhalbierenden und zufolge Satz 60 a sind die 6 Teilwinkel h. spitz\*). Wendet man auf sie den Satz 68 e an, dann folgt daraus

a) In der h. Geometrie ist die Winkelsumme im Dreiecke  $< \pi$ .

Ist  $Q$  ein Punkt auf dem h. Halbkreis über einer Strecke  $PR$  und ist  $O$  der Mittelpunkt des Kreises, dann sind die Dreiecke  $POQ$  und  $QOR$  h. gleichschenkelig und daher nach Satz 23 d  $\sphericalangle OPQ$  und  $\sphericalangle PQO$  h. kongruent, ebenso  $\sphericalangle OQR$  und  $\sphericalangle QRO$ . Daher ergibt sich aus a) sofort der Satz

b) In der h. Geometrie ist der Winkel im Halbkreise  $< \frac{\pi}{2}$ .

\*) Das könnte man auch aus dem Satze 33 a schließen.



Diese beiden letzten Sätze waren nach dem letzten Absatze von Nr. 7 zu erwarten.

Indem man ein Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, erkennt man ohne weiteres als Folge des Satzes a) den Satz

c) In der h. Geometrie ist die Winkelsumme im Vierecke  $< 2\pi$ .

70. Angenommen, es gäbe in der h. Geometrie zwei nicht kongruente Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  mit paarweise kongruenten Winkeln. Dann könnte man nach Satz 26 c von zwei entsprechenden Ecken aus, etwa  $B$  und  $B'$ , in den Dreiecken verlaufende Höhen  $BH$  und  $B'H'$  angeben. Dabei könnte nicht  $AH$  kongruent  $A'H'$  sein, da sonst nach dem 2. Kongruenzsatze die betreffenden beiden Teildreiecke und anschließend auch die beiden anderen Teildreiecke kongruent wären und damit auch die ursprünglichen Dreiecke.

Würde man nun durch h. Bewegungen die beiden Dreiecke mit den Höhenfußpunkten  $H$  und  $H'$  auf  $M$  legen und mit den beiden Höhen auf den gleichen Halbmesser von

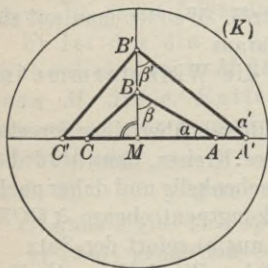


Fig. 40.

(K), dann entstünde, wenn etwa h.  $A'H' > AH$  wäre, die Fig. 40, wobei  $\alpha_h = \alpha'_h$  wäre. Nach Satz 68 b wäre demnach  $\alpha'_e > \alpha_e$  und folglich  $\beta'_e < \beta_e$  sowie e.  $MB' > MB$ , demnach, wieder nach Satz 68 b,  $\beta'_h < \beta_h$ . Weiterhin müßte e. auch  $MC' > MC$  sein, da sich sonst nicht aus den linken Teildreiecken ebenfalls e.  $MB' > MB$  ergeben

würde und im Dreieck  $A'B'C'$  wären daher die beiden Teilwinkel h. kleiner als die entsprechenden Teilwinkel in

$ABC$ , folglich wäre h.  $\sphericalangle A'B'C' < \sphericalangle ABC$ , im Widerspruche mit der ursprünglichen Voraussetzung. D. h.

a) In der h. Geometrie sind zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen.

Dies ist ein 5. Kongruenzsatz, er ist für die h. Geometrie charakteristisch. Da es demnach in der h. Geometrie keine zwei ähnlichen, nicht kongruenten Figuren geben kann, fällt damit die ganze, in der e. Geometrie so bedeutungsvolle Lehre von der Ähnlichkeit weg. Die Sätze 69 a und 70 a stellen den erwarteten Widerspruch mit den e. Sätzen 6 e und 6 f fest.

### Streckenmessung; hyperbolische Funktionen.

**71.** Die Streckenmessung der absoluten und folglich auch der h. Geometrie wurde in den Nrn. 29 und 31 behandelt. Damit ist jeder h. Strecke eine positive Zahl als Länge zugeordnet und es drängt sich naturgemäß die Frage auf, ob und wie sich in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  die h. Länge einer Strecke e. ausdrücken läßt.

Bei der Beantwortung dieser Frage wollen wir uns zunächst auf h. Strecken beschränken, die nach Nr. 43 positiv orientiert sind. Dann gehören zu h. kongruenten Strecken gleiche e. endliche Doppelverhältnisse  $\delta > 1$ ; man wird daher zufolge der Forderung 29 a für die e. Deutung der h. Streckenmessung eine Funktion  $f(\delta)$  suchen. Sind  $\xi$  und  $\eta$  zwei solche Doppelverhältnisse, dann folgt aus 29 b und Gl. (44, 1)

$$(71, 1) \quad f(\xi \cdot \eta) = f(\xi) + f(\eta).$$

Man versucht nun, ob man  $f$  unter den differenzierbaren Funktionen findet\*), differenziert Gl. (71, 1) auf beiden Seiten nach  $\xi$  und erhält

$$(71, 2) \quad \frac{df(\xi \cdot \eta)}{d(\xi \cdot \eta)} \cdot \eta = \frac{df(\xi)}{d\xi} = D(\xi),$$

wobei  $D$  eine neue Funktion bezeichnet, die man leicht in der folgenden Weise bestimmen kann: es ist nach Gl. (71, 2)

\*) Leser, die hier nicht mehr folgen können, mögen sich mit der Hinnahme des den logarithmus naturalis enthaltenden Ergebnisses  $f(\delta) = c_1 \cdot \ln \delta$  begnügen. Sie können ohne weiteres nachprüfen, daß diese Funktion die Bedingung (71, 1) erfüllt und bei Umkehrung des Streckensinnes ihr Vorzeichen ändert.

$$D(\xi \cdot \eta) = \frac{D(\xi)}{\eta}, \quad \text{d. h. für } \xi = 1 \text{ ist } D(\eta) = \frac{D(1)}{\eta}.$$

Nun ist

$$f(\xi) = \int D(\xi) d\xi = \int \frac{D(1)}{\xi} d\xi = c_1 \cdot \ln \xi + c_2, \quad c_1 = D(1).$$

Man kann im Anschluß an Nr. 35 in bekannter Weise von der Länge einer orientierten Strecke  $AB$  auf der  $X$ -Achse sprechen, diese ergibt sich als die Differenz  $x_B - x_A$  der Koordinaten der Streckenendpunkte. Sie ist positiv oder negativ, je nachdem  $AB$  den gleichen oder entgegengesetzten Sinn hat wie  $OE$ . Die Umkehrung des Streckensinnes verwandelt nach Satz 43 c das Doppel-

verhältnis  $\xi$  in  $\frac{1}{\xi}$  und damit  $f(\xi)$  in  $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ . Da nun  $f(\xi) = -f\left(\frac{1}{\xi}\right)$

sein soll, so folgt daraus

$$c_1 \cdot \ln \xi + c_2 = -\left(c_1 \cdot \ln \frac{1}{\xi} + c_2\right) = c_1 \cdot \ln \xi - c_2, \quad \text{d. h. } c_2 = 0.$$

Damit ist in  $c_1 \cdot \ln \delta$  die gesuchte e. Deutung der h. Länge orientierter Strecken gefunden. Die Verfügung über die Konstante  $c_1$  entspricht der nach Nr. 29 willkürlichen Annahme der Streckeneinheit in der h. Geometrie. Wir wollen aus einem Grunde, den wir in Nr. 74 angeben werden,  $c_1 = \frac{1}{2}$  annehmen und haben damit den Satz gefunden:

a) Die h. Länge  $\alpha$  einer orientierten Strecke  $AB$  auf der Sehne  $UV$  hat in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  den Wert  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \ln(ABUV)$ . Bei Umkehrung des Streckensinnes geht  $\alpha$  in  $-\alpha$  über\*).

Aus diesem Satz und dem Satze 45 a ergibt sich nun sofort die Tatsache

b) Liegt eine h. positive Strecke  $AB$  auf einer Geraden  $g$  und rückt  $B$  auf  $g$  von  $A$  weg auf  $(K)$  zu, dann wächst die h. Länge der Strecke über alle Grenzen.

Die Punkte von  $(K)$  haben demnach für die h. Geometrie dieselbe Bedeutung wie die Punkte der in Nr. 47 erwähnten uneigent-

\*) Wir bezeichnen weiterhin die e. Längen von Strecken in der üblichen Weise durch Buchstaben in Antiqua  $a, b, c \dots$ , die h. Längen von Strecken durch Buchstaben in Fraktur  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \dots$ .



lichen Geraden für die e. Geometrie. In der e. Geometrie hat die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte; im Hinblick darauf ist die Bezeichnung „hyperbolische Geometrie“ gewählt worden, weil in dieser Geometrie jede Gerade zwei unendlich ferne Punkte hat.

72. Aus dem Satz 71 a und der zweiten der Gln. (65, 1) folgt

a) Liegt in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  die positiv orientierte h. Strecke  $AB$  mit dem einen Endpunkt auf dem Halbierungspunkt ihrer Sehne und sind  $b$  und  $s$  die e. (positiven) Längen der Strecke und der Halbsehne, dann bestehen zwischen diesen und der h. Länge  $b$  der Strecke die Beziehungen

$$(72, 1) \quad b = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{s+b}{s-b}, \quad b = s \cdot \frac{e^{2b} - 1}{e^{2b} + 1} = s \cdot \text{th } b.$$

Hieraus folgt speziell für eine von  $M$  ausgehende positive h. Strecke von der h. Länge  $a$  und der e. Länge  $a$

$$(72, 2) \quad a = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+a}{1-a}, \quad a = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} = \text{th } a.$$

Wir stoßen hier auf die bekannten hyperbolischen Funktionen

$$\text{sinus hyperbolicus von } \alpha \quad \text{sh } \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

$$\text{cosinus hyperbolicus von } \alpha \quad \text{ch } \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2},$$

$$\text{tangens hyperbolicus von } \alpha \quad \text{th } \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}},$$

$$\text{cotangens hyperbolicus von } \alpha \quad \text{cth } \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}.$$

Für positive Werte  $\alpha$  sind alle hyperbolischen Funktionen positiv. Aus den bekannten Zusammenhängen der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion ergibt sich ohne weiteres, indem man in der üblichen Weise  $i^2 = -1$  einführt,

$$(72, 3) \quad \text{sh } \alpha = \frac{1}{i} \cdot \sin(i\alpha), \quad \text{ch } \alpha = \cos(i\alpha),$$

$$(72, 4) \quad \text{th } \alpha = \frac{1}{i} \cdot \text{tg}(i\alpha), \quad \text{eth } \alpha = i \cdot \text{cotg}(i\alpha).$$

Hieraus oder aus den vorhergehenden Exponentialgleichungen findet man leicht

$$(72, 5) \quad \text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = 1, \quad 1 - \text{th}^2 \alpha = \frac{1}{\text{ch}^2 \alpha},$$

$$(72, 6) \quad \text{sh}^2 \alpha \cdot \text{ch}^2 \beta - \text{ch}^2 \alpha \cdot \text{sh}^2 \beta = \text{sh}^2 \alpha - \text{sh}^2 \beta,$$

$$(72, 7) \quad \text{ch } \alpha \cdot \text{ch } \beta (\pm) \text{sh } \alpha \cdot \text{sh } \beta = \text{ch } (\alpha (\pm) \beta),$$

$$(72, 8) \quad \text{sh } \alpha \cdot \text{ch } \beta (\pm) \text{ch } \alpha \cdot \text{sh } \beta = \text{sh } (\alpha (\pm) \beta),$$

$$(72, 9) \quad 2 \text{sh } \alpha \cdot \text{ch } \alpha = \text{sh } (2\alpha).$$

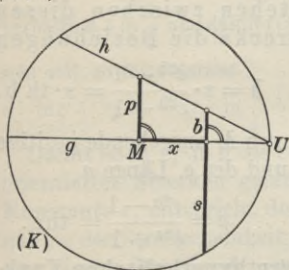


Fig. 41.

$$b = p(1 - x), \quad s = \sqrt{1 - x^2}$$

und aus Gl. (72, 1)

$$b = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + p \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - p \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man ohne weiteres in Übereinstimmung mit dem letzten Absatze von Nr. 7 den Satz

a) Sind in der h. Geometrie zwei Randparallele gegeben und fällt man von den Punkten  $A_v$  der ersten die Lote auf die zweite, dann konvergieren die Längen dieser Lote beständig abnehmend ge-

Die Ableitung der hyperbolischen Funktionen aus der gleichseitigen Hyperbel ist z. B. in Liebmann [7] S. 56/57 angegeben.

73. Es seien zwei Randparallele gegeben. Mittels einer h. Bewegung bringt man sie in die Lagen  $g$  und  $h$  derart, daß  $g$  durch  $M$  geht. Aus Fig. 41 folgt

gen 0 oder wachsen beständig und über alle Grenzen, je nachdem die  $A$ , auf den gemeinsamen Endpunkt der Parallelen zu- oder von ihm weglaufen.

Es seien zwei Überparallele  $q, r$  gegeben. Mittels einer h. Bewegung bringen wir sie in die Lage  $q_1, r_1$  derart, daß der eine Endpunkt ihres gemeinsamen Lotes (Satz 64 b) auf  $M$  fällt. Dann werden sie nach Satz 60 a e. parallel, Fig. 42,  $a$  ist ihr gemeinsames Lot. Nun ist nach den Gln. (72,1) und (72,2)

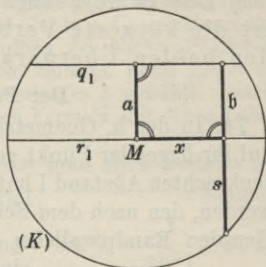


Fig. 42.

$$b = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}} > \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+a}{1-a} = a,$$

und aus dieser letzten Gleichung liest man folgenden Satz ab:

b) Es seien in der h. Geometrie  $q, r$  zwei Überparallele und  $Q$  der auf  $q$  liegende Endpunkt ihres gemeinsamen Lotes. Unter allen Loten, die man von den Punkten von  $q$  aus auf  $r$  fallen kann, ist das gemeinsame Lot das kürzeste und die Längen dieser Lote wachsen beständig und über alle Grenzen, wenn sich ihre Fußpunkte von  $Q$  nach der einen oder anderen Seite entfernen.

Ist  $AB$  eine  $q$  mit  $r$  verbindende, vom gemeinsamen Lote verschiedene Strecke, dann fällt man das Lot  $AB_1$  auf  $r$ . Dieses ist nach dem soeben ausgesprochenen Satze mindestens so groß wie das gemeinsame Lot, und aus dem recht-



winkligen Dreieck  $AB_1B$  ergibt sich wegen des Satzes 26 g der Satz

c) Das gemeinsame Lot zweier Überparallelen ist die kürzeste Verbindungslinie, die zwischen den beiden Überparallelen möglich ist.

### Der Parallelwinkel.

74. In der h. Geometrie sei eine Gerade und ein nicht auf ihr liegender Punkt gegeben, der von der Geraden den senkrechten Abstand  $l$  hat. Es soll der Winkel  $\lambda$  bestimmt werden, den nach dem Schlusse von Nr. 56 jede der zu der Geraden Randparallelen durch den Punkt mit dem Lot

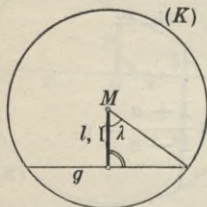


Fig. 43.

einschließt, das man aus dem Punkt auf die Gerade fallen kann. Wir denken uns zu diesem Zwecke die Gerade und den Punkt durch eine h. Bewegung so gelegt, daß der Punkt auf  $M$  fällt.  $g$  sei dann die Lage der Geraden, Fig. 43. Dann hat das (nach Satz 60 a absolute) Lot aus  $M$  auf  $g$  die e. Länge  $\cos \lambda$  und daher nach Gl. (72, 2) die h. Länge

$$l = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + \cos \lambda}{1 - \cos \lambda} = \ln \left( \cotg \frac{\lambda}{2} \right),$$

während  $\lambda$  nach Satz 61 a auch die h. Größe des zu bestimmenden Winkels ist.  $\lambda$  nennt man seit Lobatschewskij den zu dem Abstand  $l$  gehörenden „Parallelwinkel“ und bezeichnet ihn mit  $\Pi(l)$ . Im vorstehenden ist folgender Satz bewiesen:

a) In der h. Geometrie besteht zwischen der Lotlänge  $l$  und dem zugehörigen Parallelwinkel  $\Pi(l) = \lambda$  die Gleichung

$$(74, 1) \quad e^{-l} = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}.$$

Der Parallelwinkel konvergiert nach Gl. (74, 1) gegen  $\frac{\pi}{2}$ , wenn  $l$  gegen 0 konvergiert und er konvergiert gegen 0, wenn  $l$  über alle Grenzen wächst. Um der Formel (74, 1) in Übereinstimmung mit Lobatschewskij, für dessen Aufbau der Nichteuklidischen Geometrie sie grundlegend ist, diese einfache Form geben zu können, haben wir in Nr. 71 den Wert  $c_1 = \frac{1}{2}$  gewählt. Damit decken sich dann auch unsere übrigen Formeln mit denen Lobatschewskijs.

Aus Fig. 43 und Gl. (72, 2) liest man ohne weiteres ab

$$\cos \lambda = l = \text{th } l, \quad \text{folglich}$$

$$1 - \cos^2 \lambda = 1 - \text{th}^2 l \quad \text{und} \quad \sin^2 \lambda = \frac{1}{\text{ch}^2 l}. \quad \text{D. h.}$$

b) Zwischen einer h. Strecke  $l$  und dem zugehörigen Parallelwinkel  $\Pi(l)$  bestehen die Beziehungen

$$(74, 2) \quad \sin \Pi(l) = \frac{1}{\text{ch } l}, \quad \cos \Pi(l) = \text{th } l, \quad \text{tg } \Pi(l) = \frac{1}{\text{sh } l}.*$$

### Parallelogramme und Trapeze.

75. Es liegt nah in der h. Geometrie, in Anlehnung an die e. Geometrie, ein nicht überschlagenes Viereck  $ABCD$ , in dem je zwei Gegenseiten einander gleich sind, als „Parallelogramm“ zu bezeichnen. Ist  $ABCD$ , Fig. 44, ein solches Parallelogramm, dann sind nach dem 3. Kongruenzsatze die Dreiecke  $ABC$  und  $CDA$  kongruent und es ist daher  $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle CAD$ . Legt man den h. Mittelpunkt von  $AC$  durch eine h. Bewegung auf  $M$ , dann erkennt man sofort aus den Sätzen 60 c und 60 f,

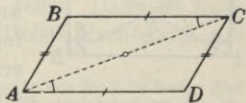


Fig. 44.

\*) Man hätte, wenn auch nicht so rasch, die Gln. (74,2) auch aus der Gl. (74,1) und den bekannten trigonometrischen Darstellungen von  $\sin \lambda$ ,  $\cos \lambda$ ,  $\text{tg } \lambda$  durch  $\text{tg } \frac{\lambda}{2}$  gewinnen können.

daß in der neuen Lage das *h.* Parallelogramm zugleich ein *e.* Parallelogramm ist. Damit ergeben sich aus bekannten Eigenschaften der *e.* Parallelogramme unmittelbar folgende Sätze für *h.* Parallelogramme\*):

a) In der *h.* Geometrie sind je zwei Gegenseiten eines Parallelogramms überparallel. Diese beiden Paare von Überparallelen haben den gleichen Symmetriepunkt. In ihm halbieren die beiden Diagonalen des Parallelogramms einander. Je zwei Gegenwinkel im Parallelogramm sind gleich.

b) Stehen in der *h.* Geometrie die beiden Diagonalen eines Parallelogramms aufeinander senkrecht, dann sind die vier Seiten des Parallelogramms gleich. Diese vier Seiten haben vom Diagonalschnittpunkte gleiche senkrechte Abstände (*h.* Raute; sie besitzt einen Inkreis).

c) Sind die Diagonalen eines Parallelogramms gleich, dann sind dessen vier Winkel gleich (*h.* Analogon z. Rechteck).

d) Sind die Diagonalen eines Parallelogramms gleich und zueinander senkrecht, dann hat das Parallelogramm vier gleiche Seiten und vier gleiche Winkel (*h.* Analogon des Quadrats).

**76.** Ein *h.* rechtwinkelig-gleichschenkeliges Trapez  $ABCD$  erhält man, indem man, wie in Fig. 45,

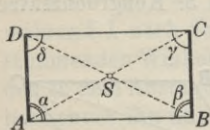


Fig. 45.

$\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA = \frac{\pi}{2}$  macht und  $AD \equiv BC$ . Man erkennt sofort aus der Kongruenz der Dreiecke  $ABC$  und  $BAD$  die Kongruenzen  $AC \equiv BD$  sowie  $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$  und hieraus weiterhin  $SA \equiv SB$  sowie  $SC \equiv SD$ . Daher ist nach Satz 23 d

\*) Man könnte die hier folgenden Sätze a)—d) auch mit weiterer Benutzung der Kongruenzsätze unabhängig von der hier verwendeten Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  der *h.* Geometrie einfach beweisen.



die gemeinsame Halbierende der beiden Scheitelwinkel  $\sphericalangle ASB$  und  $\sphericalangle CSD$  Mittelsenkrechte zu  $AB$  und  $CD$ . Weiterhin sind die Dreiecke  $DCA$  und  $CDB$  kongruent. Da in dieser Überlegung das Nichteuklidische Parallelenaxiom nicht verwendet wurde, gilt damit für die absolute Geometrie der Satz

\* a) Im rechtwinkelig-gleichschenkeligen Trapez  $ABCD$  mit den rechten Winkeln bei  $A$  und  $B$  steht die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Seiten  $AB$  und  $CD$  auf diesen Seiten senkrecht. Die Trapezwinkel bei  $C$  und  $D$  sind gleich\*).

### Die Hjlemslevsche Mittellinie.

77.  $P$  und  $Q$  seien die Mittelpunkte der Seiten  $AB$  und  $AC$  eines Dreiecks, Fig. 65, S. 127\*\*),  $D, E, F$  die Fußpunkte der Lote aus  $A, B, C$  auf die Gerade  $PQ$ . Dann sind die Dreiecke  $ADQ$  und  $CFQ$  nach dem 2. Kongruenzsatze kongruent, ebenso die Dreiecke  $ADP$  und  $BEP$ , folglich ist  $BE \equiv AD \equiv CF$  und das Trapez  $BCFE$  ist rechtwinkelig-gleichschenkelig. Daher folgt aus dem Satze 76 a) der wichtige Satz der absoluten Geometrie:

a) Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite steht auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden anderen Dreiecksseiten senkrecht.

Wir beschränken uns nun wieder auf die h. Geometrie und betrachten die Fig. 46, in der  $P, Q, R$  die h. Mittelpunkte der Strecken  $SA, SB, SC$  seien. Dann ist nach dem soeben bewiesenen Satze die Mittelsenkrechte von  $AB$

\*) Von der letzten Tatsache war schon zu Beginn von Nr. 7 die Rede. Hier und im folgenden leiten wir gelegentlich Sätze der absoluten Geometrie ab, die demnach eigentlich im II. Abschnitte hätten gebracht werden sollen. Da sie aber entweder nicht zum allgemein bekannten Bestande der Euklidischen Geometrie gehören und bei der Behandlung der h. Geometrie entdeckt wurden, oder da die dafür üblichen Beweise (axiomatisch überflüssiger Weise) das Euklidische Parallelenaxiom verwenden, haben wir sie dem V. Abschnitt eingereiht.

\*\*) Es kommen hier noch nicht alle in der Figur eingetragenen Linien in Frage.

das gemeinsame Lot der Geraden  $g$  und  $PQ$ , die Mittelsenkrechte von  $BC$  das gemeinsame Lot von  $g$  und  $QR$ . Da nach den Sätzen 64 a und 64 b zwei Geraden höchstens ein gemeinsames Lot haben

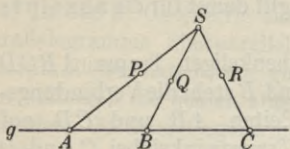


Fig. 46.

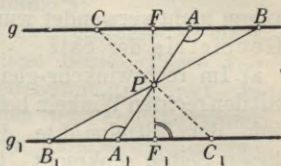


Fig. 47.

können, liegen demnach  $P, Q, R$  sicher nicht in einer Geraden. D. h.

b) Sind in der h. Geometrie  $A, B, C$  drei Punkte einer Geraden und ist  $S$  ein Punkt außerhalb der Geraden, dann liegen die Mittelpunkte der drei Strecken  $SA, SB, SC$  nicht in einer Geraden.

Daraus ergibt sich das folgende dem e. Parallelenaxiom äquivalente einfache Axiom: es gibt drei Punkte  $A, B, C$  auf einer Geraden und einen Punkt  $S$  außerhalb der Geraden derart, daß die Mittelpunkte der drei Strecken  $AS, BS, CS$  auf einer Geraden liegen.

78. Es sei in der h. Geometrie eine Gerade  $g$  mit den Punkten  $A, B, C, D \dots$  und eine Gerade  $g_1$  mit dem Punkt  $A_1$  gegeben. Dann kann man auf  $g_1$  nach Satz 22a zwei Punkte  $B_1$  so bestimmen, daß  $A_1B_1 \equiv AB$  wird; nach Wahl eines dieser Punkte  $B_1$  ist dann ein Punkt  $C_1$  so bestimmt, daß  $A_1C_1 \equiv AC$  und  $B_1C_1 \equiv BC$  wird, ein Punkt  $D_1$  so, daß  $A_1D_1 \equiv AD$  und  $C_1D_1 \equiv CD$  wird usw. Man erhält so auf  $g_1$  zwei zu der Punktreihe auf  $g$  kongruente Punktfolgen; sie sind dadurch charakterisiert, daß irgend einer Strecke der einen Geraden eine kongruente Strecke in der anderen Geraden entspricht. Man kann nun zu jedem Punkte von  $g$ , indem man ihn in die Punktfolge

von  $g$  eingebettet denkt, in jeder der kongruenten Punktreihen auf  $g_1$  genau einen entsprechenden Punkt bestimmen\*).

Wir betrachten jetzt die Mittelpunkte der Strecken  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1 \dots$  der kongruenten Punktreihen  $g(A, B, C \dots)$  und  $g_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$  und wollen annehmen, daß die Mittelpunkte von  $AA_1$  und  $BB_1$  in einem Punkte  $P$  zusammenfallen, Fig. 47. Dann müssen die Punkte  $B$  und  $B_1$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $AA_1$  liegen. Nach dem 1. Kongruenzsatze sind die Dreiecke  $APB$  und  $A_1PB_1$  kongruent und daher  $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle B_1A_1P$ . Folglich sind nach dem Satze 64 d die Geraden überparallel mit dem Symmetriepunkte  $P$ . Aus der nun leicht zu erkennenden Kongruenz der Dreiecke  $CPB$  und  $C_1PB_1$  folgt, daß  $P$  auch Mittelpunkt der Strecke  $CC_1$  ist und überhaupt Mittelpunkt jeder Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte der Punktreihen.

Sind  $F$  und  $F_1$  die Fußpunkte des ( $P$  enthaltenden) gemeinsamen Lotes von  $g$  und  $g_1$ , dann folgt aus dem 2. Kongruenzsatze die Kongruenz der Dreiecke  $A_1PF_1$  und  $APF$  und demnach  $A_1F_1 \equiv AF$ , d. h. die Punkte  $F$  und  $F_1$  sind einander entsprechende Punkte der beiden kongruenten Punktreihen.

Bezeichnet man nun zwei kongruente Punktreihen auf Überparallelen als „gleichsinnig“, wenn je zwei entsprechende Punkte  $B$  und  $B_1$ ,  $C$  und  $C_1 \dots$  immer auf derselben Seite der Geraden  $AA_1$  liegen, im anderen Fall als „gegensinnig“ (z. B. in Fig. 47), dann ist damit der Satz bewiesen:

a) Sind in der h. Geometrie  $g(A, B, C \dots)$  und  $g_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$  kongruente Punktreihen, so haben

\*) Projektiv gesprochen erhält man die kongruenten Punktreihen auf  $g$  und  $g_1$  dadurch, daß man die Geraden so projektiv aufeinander bezieht, daß die Punkte  $A$  und  $A_1$  einander zugeordnet sind und den Schnittpunkten von  $g$  mit  $(K)$  die Schnittpunkte von  $g_1$  mit  $(K)$  entsprechen, was in zweierlei Weise möglich ist.





bierende des  $\sphericalangle B_2 A_1 B_1$  die Mittelsenkrechte zu  $B_1 B_2$ . Auf dieser muß nach Satz 77a die Gerade  $PQ$  senkrecht stehen. Verföhrt man nun mit  $C$  wie soeben mit  $B$ , dann erhält man  $C_2$  auf der Halbgeraden  $A_1 \rightarrow B_2$  und demnach die gleiche Winkelhalbierende, auf der die Gerade  $PR$  senkrecht steht, daher fallen die Geraden  $PQ$  und  $PR$  zusammen. Das gilt nun für jeden weiteren Streckenmittelpunkt und damit ist der Satz bewiesen\*). Den Ort der Streckenmittelpunkte  $P, Q, R, \dots$  bezeichnen wir weiterhin als die „Hjlemslevsche Mittellinie“.

80. Auf zwei Überparallelen seien zwei gleichsinnig kongruente Punktreihen gegeben. Man legt sie durch eine h. Bewegung mit dem Symmetriepunkte der Trägergeraden

auf  $M$  und erhält dabei nach Satz 64 f die e. parallelen Lagen  $g$  und  $g_1$ , Fig. 49. Den Endpunkten  $S$  und  $T_1$  ihres gemeinsamen Lotes entsprechen die Punkte  $S_1$  und  $T$ . Da die Strecken  $SS_1$  und  $TT_1$  und damit auch ihre h. Mittelpunkte  $P$  und  $Q$  (absolut) spiegelbildlich zu  $M$  liegen,

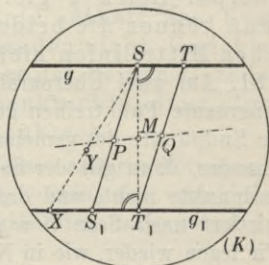


Fig. 49.

läuft die Hjlemslevsche Mittellinie  $PQ$  durch  $M$ . Das ist der Beweis des Satzes

a) Sind in der h. Geometrie auf zwei Überparallelen die kongruenten gleichsinnigen Punktreihen  $g(A, B, C, \dots)$  und  $g_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$  gegeben, dann läuft deren Hjlemslevsche Mittellinie durch den Symmetriepunkt von  $g$  und  $g_1$ .

\*) Der Beweis gilt, wie man sich leicht überzeugt, unverändert auch dann, wenn die Geraden  $g$  und  $g_1$  sich schneiden und die Punkte  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  irgendwie zum Schnittpunkte liegen.

Man erkennt sofort, daß in den kongruenten Punktreihen die h. Mittelpunkte  $H$  und  $H_1$  der Strecken  $ST$  und  $S_1T_1$  einander entsprechen und daß  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $HH_1$  ist. Auf den soeben abgeleiteten Satz hätte man auch aus dieser Tatsache schließen können.

$X$  sei ein von  $S_1$  und  $T_1$  verschiedener Punkt von  $g_1$  (Fig. 49) und  $Y$  der h. Mittelpunkt der Strecke  $SX$ . Da  $P$  und  $M$  die h. Mittelpunkte von  $ST_1$  und  $SS_1$  sind, folgt aus Satz 77 b, daß  $MP$  und  $MY$  auf verschiedenen Geraden liegen. D. h.

b) Hat man auf  $g_1$  zwei verschiedene Punktreihen  $g_1(A_1, B_1, C_1\dots)$  und  $g_1(A_2, B_2, C_2\dots)$ , die beide der Punktreihe  $g(A, B, C\dots)$  auf der zu  $g_1$  Überparallelen  $g$  gleichsinnig kongruent sind, dann können die beiden zugehörigen Hjelsmlevschen Mittellinien nicht zusammenfallen.

81. Auf zwei Überparallelen seien zwei gegensinnig kongruente Punktreihen gegeben. Entsprechen in diesen die Endpunkte des gemeinsamen Lotes der Trägergeraden einander, dann gilt der Satz 78 a; entsprechen sich diese Endpunkte nicht, und das sei jetzt vorausgesetzt, dann existiert nach Satz 79 a eine Hjelsmlevsche Mittellinie. Wir legen wieder, wie in Nr. 80, die Trägergeraden durch

eine h. Bewegung so, daß ihr Symmetriepunkt auf  $M$  fällt (Fig. 50). Die h. Mittelpunkte  $P$  und  $Q$  der Strecken  $SS_1$  und  $TT_1$  können nicht im Schnittpunkte der beiden Strahlen zusammenfallen, da sonst Satz 78 a gelten würde.  $SS_1$  und  $TT_1$ , damit auch  $P$  und  $Q$  liegen (absolut) symmetrisch zur e. Mittelparallelen von  $g$  und  $g_1$ , demnach ist die

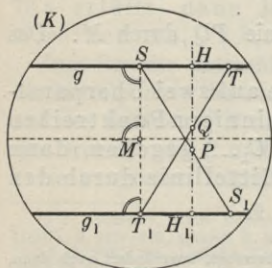


Fig. 50



Hjelmslevsche Mittellinie  $PQ$  e. parallel zu  $ST_1$ . Dem h. Mittelpunkte  $H$  von  $ST$  entspricht der h. Mittelpunkt  $H_1$  von  $S_1T_1$ , und da die Strecke  $HH_1$  ebenfalls e. parallel zu  $ST_1$  ist, kann deren h. Mittelpunkt nur dann auf der Geraden  $PQ$  liegen, wenn diese Gerade die Punkte  $H$  und  $H_1$  enthält. D. h.

a) Sind in der h. Geometrie zwei gegensinnig kongruente Punktreihen  $g(A, B, C \dots)$  und  $g_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$  auf zwei Überparallelen gegeben und entsprechen einander nicht die Endpunkte  $S$  und  $T_1$  des gemeinsamen Lotes der beiden Geraden, dann trifft die Hjelmslevsche Mittellinie die beiden Geraden in den Mittelpunkten der Strecken  $ST$  und  $S_1T_1$ . Diese Mittellinie enthält den Symmetriepunkt der beiden Geraden nicht. Errichtet man zum gemeinsamen Lote der beiden Geraden im Symmetriepunkte die Senkrechte, dann steht auf dieser die Mittellinie senkrecht.

Da eine Strecke  $T_1S_2$  auf  $g_1$  einen anderen Mittelpunkt wie  $T_1S_1$  hat (wenn  $S_1$  und  $S_2$  voneinander verschieden sind), folgt aus dem soeben abgeleiteten Satze sofort der Satz

b) Hat man auf  $g_1$  zwei verschiedene Punktreihen  $g_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$  und  $g_2(A_2, B_2, C_2 \dots)$ , die beide der Punktreihe  $g(A, B, C \dots)$  kongruent sind, und sind in beiden Fällen die Voraussetzungen des Satzes 79 a erfüllt, dann können die beiden Hjelmslevschen Mittellinien nicht zusammenfallen.

### Fundamentalkonstruktionen.

82. Zahlreiche bekannte Konstruktionen der e. Geometrie gelten auch in der h. Geometrie, da sie nur Sätze der absoluten Geometrie verwenden, z. B. die Sätze von Nr. 34. Im folgenden sollen drei fundamentale, für die h. Geometrie

charakteristische Konstruktionen behandelt werden, nämlich die Konstruktion des gemeinsamen Lotes zweier Überparallelen, die Konstruktion von  $II(a)$  bei gegebenem  $a$  und die von  $b$  bei gegebenem  $II(b)$ .

Aus den Sätzen 80 a und 80 b ergibt sich ohne weiteres folgende Konstruktion des gemeinsamen Lotes zweier Überparallelen:

a) Man findet in der h. Geometrie den Symmetriepunkt zu zwei gegebenen Überparallelen  $g$  und  $g_1$  dadurch, daß man zunächst eine Strecke  $AB$  auf  $g$  und eine ihr gleichsinnig kongruente Strecke  $A_1B_1$  auf  $g_1$  annimmt und die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Strecken  $AA_1$  und  $BB_1$  zeichnet, dasselbe wiederholt man mit der Strecke  $AB$  und einer zweiten ihr gleichsinnig kongruenten Strecke auf  $g_1$ ; der Schnittpunkt dieser beiden Verbindungsgeraden ist der Symmetriepunkt von  $g$  und  $g_1$ . Das aus dem Symmetriepunkt auf  $g$  (oder  $g_1$ ) gefällte Lot ist das gemeinsame Lot von  $g$  und  $g_1$ .

83. Zur Konstruktion des Parallelwinkels bei gegebenem Abstände gelangt man auf folgende Weise:

Ist in der h. Geometrie ein Punkt außerhalb einer Geraden gegeben und sucht man durch den Punkt die Randparallelen zur Geraden, dann denkt man sich, wieder das

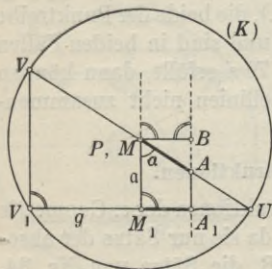


Fig. 51.

Prinzip der speziellen Lage anwendend, Punkt und Gerade durch eine h. Bewegung so gelegt, daß der Punkt auf  $M$  fällt.  $g$  sei dann in Fig. 51 die Lage der Geraden. Aus der unmittelbar ersichtlichen Gleichheit der Doppelverhältnisse  $(MAUV) = (M_1A_1UV_1)$  folgt die h. Kongruenz der Strecken  $MA$  und  $M_1A_1$ .

Die in der Figur angegebenen (absolut) rechten Winkel liefern nun folgende Konstruktion von  $II(\alpha)$  bei gegebenem  $\alpha$ :

a) Sind in der h. Geometrie ein Punkt  $P$  und eine Gerade  $g$  gegeben, dann fällt man aus  $P$  auf  $g$  das Lot  $PM_1$  und findet, wenn  $a$  dessen Länge bezeichnet, den Parallelwinkel  $\alpha = II(\alpha)$  und damit die zu  $g$  randparallelen Geraden durch  $P$  in folgender Weise: man fällt von einem von  $M_1$  verschiedenen Punkt  $A_1$  von  $g$  aus das Lot  $A_1B$  auf die Gerade, die in  $P$  zu  $PM_1$  senkrecht steht; nun beschreibt man um  $P$  als Mittelpunkt den Kreis, dessen Radius gleich  $M_1A_1$  ist; dieser Kreis trifft die Gerade  $A_1B$  in zwei Punkten, einer davon,  $A$ , liefert einen spitzen  $\sphericalangle M_1PA$ , und dieser ist der Parallelwinkel  $II(\alpha)$ .

84. Der dritten der gesuchten Konstruktionen, welche in Umkehrung der soeben gelösten Aufgabe die Angabe von  $b$  zu gegebenem  $II(b)$  verlangt, müssen wir den Beweis eines Hilfssatzes vorausschicken.  $ABC$  sei ein h., bei  $C$  rechtwinkeliges Dreieck, Fig. 52, und  $\beta = II(b)$  der zur Strecke  $b = AC$  gehörende Parallelwinkel.

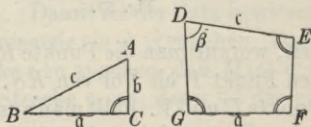


Fig. 52.

Man kann nun sofort ein Viereck  $DEFG$  mit der Seite  $DE = AB$  konstruieren, in welchem  $\sphericalangle D = \beta$  ist, während die übrigen drei Winkel rechte Winkel sind\*), indem man in  $D$  und  $E$  die Winkel anträgt und zu deren freien Schenkeln nach 82 a das gemeinsame Lot  $GF$  konstruiert\*\*). Für dieses Viereck gilt der Satz

\*) Ein h. Viereck mit drei rechten Winkeln heißt nach Liebmann [7] „Spitz-eck“. Schon Lambert ging bei seinen Untersuchungen (vgl. unsere Nr. 8) von solchen Vierecken aus.

\*\*\*) Die freien Schenkel sind überparallel, weil nach Satz 26 g  $c > b$  und daher zufolge Gl. (74,1)  $II(c) < II(b)$  ist.





Büschel mit der Geraden  $UV$  schneidet, das zweite mit der Geraden  $RS$ , erkennt man die Gleichheit der Doppelverhältnisse  $(BB'UV) = (RSFF')$  und daher (Satz 41 e) auch  $(BB'UV) = (FF'RS)$ . Daher sind die Strecken  $BB'$  und  $FF'$  h. kongruent und folglich auch ihre Hälften (Satz 60 b)  $BC$  und  $GF$ .

Aus der e. Ähnlichkeit  $\triangle PMR \sim \triangle BMC$  erhält man  $PM:1 = BM:MC$  und aus  $\triangle EMP \sim \triangle CMU$  folgt nun  $EM:PM = CM:UM$  oder  $EM = BM$ . Daher sind nach Satz 60 c diese Strecken auch h. kongruent.

Ist nun das Dreieck  $ABC$  der Fig. 52 (S. 103) gegeben, dann bringt man es durch eine h. Bewegung in die Lage  $MBC$  der Fig. 53 und leitet aus dem letzteren das Viereck  $MEFG$  ab, wobei, wie soeben bewiesen wurde, die h. Gleichheiten  $GF = BC$  und  $ME = MB$  auftreten. Wegen der zweiten Gleichheit kann man durch eine h. Bewegung dieses Viereck auf das Viereck  $DEFG$  der Fig. 52 legen, demnach ist in diesem  $GF = BC = a$ . Damit ist der Satz bewiesen.

**85.** Es sei nun in der h. Geometrie ein  $\sphericalangle \beta$  gegeben. Dann kann man immer eine Strecke  $c$  so angeben, daß  $\Pi(c) < \beta$  ist, denn nimmt man eine Strecke  $c_1$  an, dann ist der zugehörige Parallelwinkel  $\gamma_1$ , Gl. (74, 1), durch  $\cotg \frac{\gamma_1}{2} = e^{c_1}$  bestimmt, zu  $c_2 = 2c_1$  gehört der Parallelwinkel  $\gamma_2$ , für den  $\cotg \frac{\gamma_2}{2} = \left(\cotg \frac{\gamma_1}{2}\right)^2$  ist, zur Strecke  $c_n = n \cdot c_1$  der Parallelwinkel  $\gamma_n$ , für den  $\cotg \frac{\gamma_n}{2} = \left(\cotg \frac{\gamma_1}{2}\right)^n$  ist, dabei ist  $\frac{\gamma_1}{2} < \frac{\pi}{4}$ ; da es nun nach dem Archimedischen Axiom immer ein  $n$  derart gibt, daß  $n \cdot \ln \left(\cotg \frac{\gamma_1}{2}\right) > \ln \left(\cotg \frac{\beta}{2}\right)$  ist und daher  $\cotg \frac{\gamma_n}{2} = \left(\cotg \frac{\gamma_1}{2}\right)^n > \cotg \frac{\beta}{2}$ ,  $\frac{\gamma_n}{2} < \frac{\beta}{2}$ , so ist  $c = c_n = n \cdot c_1$  eine Strecke der gesuchten Art.

Sind nun in der h. Geometrie zwei Halbgerade  $g_1, g_2$  mit gemeinsamem Endpunkt  $P$  gegeben und kennt man den Wert  $b$ , für welchen  $\beta = II(b)$  die Hälfte des  $\sphericalangle (g_1, g_2)$  ist, dann findet man die zu  $g_1$  und  $g_2$  randparallelen Geraden, indem man zur Halbierenden des  $\sphericalangle (g_1, g_2)$  im Abstände  $b$  von  $P$  das Lot errichtet. Daher brauchen wir zur Ausführung der dritten der geforderten Fundamentalkonstruktionen nur noch zu  $\beta$  die Strecke  $b$  zu konstruieren. Daraus folgt nun nach dem Satze 84 a und dem 1. Absatze der vorliegenden Nr. folgende Konstruktion des Abstandes  $b$  bei gegebenem Parallelwinkel  $\beta = II(b)$ :

a) Man konstruiert zu einem gegebenen Winkel  $\beta$  mit dem Scheitel  $D$  die vermöge  $\beta = II(b)$  zugehörige Strecke  $b$ , indem man zunächst auf dem einen Schenkel von  $\sphericalangle \beta$  eine Strecke  $DE = c$  so annimmt, daß die Senkrechte zu diesem Schenkel in  $E$  und der andere Schenkel überparallel sind. Das gemeinsame Lot dieser Überparallelen (Konstruktion 82 a) habe die Länge  $a$ . Nun konstruiert man ein rechtwinkeliges Dreieck mit der einen Kathete  $BC = a$  und der Hypotenuse  $AB = c^*$ ; die zweite Kathete  $AC$  dieses Dreiecks ist die gesuchte Strecke  $b$ .

Der bemerkenswerte Satz 84 a stammt von Lobatschefskij, während 83 a im Anschluß an Lobatschefskij von H. Liebmann gefunden wurde. Von 83 a und 85 a verschiedene Lösungen derselben Aufgaben stammen von J. Bolyai. In Liebmann [7] findet man S. 36/37 auch die, nicht ganz einfache, Konstruktion eines h. Dreiecks aus seinen drei Winkeln, nach der man im Anschluß an den 5. Kongruenzsatz (70 a) naturgemäß fragen wird.

### Merkwürdige Punkte des Dreiecks.

86. Der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks existiert nach Satz 27 f in der h. wie in der e. Geometrie, er ist nach Satz 27 e der Schnittpunkt der Halbierenden der

---

\*) Indem man das in  $C$  zu  $BC$  errichtete Lot in  $A$  mit dem Kreise schneidet, der den Mittelpunkt  $B$  und den Halbmesser  $c$  hat (Satz 34 a).



Dreieckswinkel. Legt man durch eine h. Bewegung ein Dreieck mit dem Mittelpunkt seines Inkreises auf  $M$ , Fig. 54, dann werden nach Satz 60 e die h. Winkelhalbierenden gleichzeitig die e. Winkelhalbierenden. Aus den Sätzen 60 a und 23 k folgt, daß dann auch die h. Halbierenden der Außenwinkel des so gelegten Dreiecks gleichzeitig deren e. Halbierende sind. Schneiden sich zwei solche e. Halbierende innerhalb ( $K$ ), dann ist deren Schnittpunkt der Mittelpunkt eines dem Dreieck anbeschriebenen h. Kreises. Es gilt nun der Satz

a) In der h. Geometrie hat jedes Dreieck einen Inkreis; die Zahl der Ankreise eines Dreiecks kann 0, 1, 2 oder 3 betragen.

Der noch fehlende Beweis des zweiten Teiles dieses Satzes ergibt sich ohne weiteres aus Fig. 54: wählt man zu dem gezeichneten Dreiecke der Reihe nach die vier konzentrischen Kreise als Randkreise, dann treten die vier Fälle des Satzes ein.

87. Es ist nach Nr. 6 d zu erwarten, daß es in der h. Geometrie nicht zu jedem Dreieck einen Umkreis gibt. Nimmt man z. B. zwei überparallele Gerade  $m_a$  und  $m_b$  an, Fig. 55, fällt man außerdem die Lote  $MP$  und  $MQ$  auf sie und macht man  $PA$  und  $MP$  sowie  $QB$  und  $MQ$  h. gleich, dann sind  $m_a$  und  $m_b$  zwei Mittelsenkrechte des Dreiecks  $AMB$  und nach Satz 23 g kann es zu diesem Dreiecke keinen Umkreis geben. Dagegen gilt, wie man aus dem soeben herangezogenen Satz ohne weiteres erkennt, der Satz

a) Schneiden sich in der h. Geometrie zwei Mittelsenkrechte der Seiten eines Dreiecks, dann

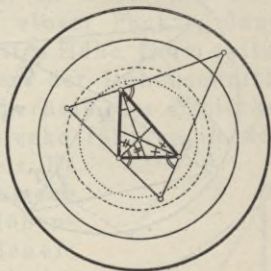


Fig. 54.

geht auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt hindurch.

In Fig. 55 schneiden sich die h. Mittelsenkrechten der

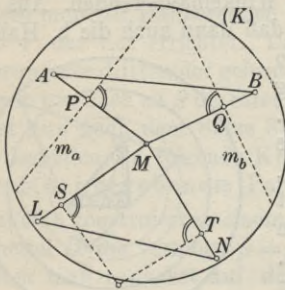


Fig. 55.

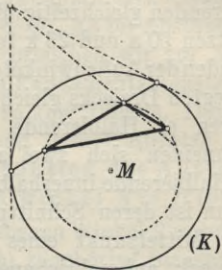


Fig. 56.

Strecken  $LM$  und  $MN$  h. nicht, dabei hat  $\triangle LMN$  nach den Sätzen 61a und 60 a lauter h. spitze Winkel. Andererseits zeigt Fig. 56 ein h. stumpfwinkeliges Dreieck mit (e. und h.) Umkreis. D. h.

b) Es gibt in der h. Geometrie spitzwinkelige Dreiecke ohne Umkreis und stumpfwinkelige mit Umkreis.

J. Bolyais Vater W. Bolyai, der jahrzehntelang vergebens um einen Beweis des Euklidischen Parallelenaxioms kämpfte, hat unter verschiedenen anderen dem Axiom äquivalenten Aussagen auch die Aussage 6 d gefunden.

88.  $ABC$  sei ein h. Dreieck und  $H$  der Schnittpunkt von zwei seiner Höhen. Legt man durch eine h. Bewegung das Dreieck so, daß  $H$  auf  $M$  fällt, dann sind nach Satz 60 a in der neuen Lage die h. Höhen gleichzeitig die e. Höhen des Dreiecks, und wie diese schneiden sich auch die drei h. Höhen in einem Punkte.

$ABC$  sei ein h. Dreieck, dessen von  $B$  ausgehende Höhe außerhalb des Dreiecks verläuft, Fig. 57. Dann folgt aus

Satz 26 a, daß  $\sphericalangle ACB$  stumpf ist. Daraus und aus dem Axiom von Pasch II, 4 ergibt sich dann sofort, daß sich auch in der h. Geometrie im spitzwinkligen Dreieck irgend zwei Höhen innerhalb des Dreiecks schneiden. Dies gibt zusammengefaßt folgenden Satz:

a) Schneiden sich in der h. Geometrie zwei Höhen eines Dreiecks in einem Punkte, dann läuft durch ihn auch die dritte Höhe. Beim spitzwinkligen Dreieck existiert der Höhenschnittpunkt immer, und zwar innerhalb des Dreiecks, beim rechtwinkligen Dreiecke fällt er in den Scheitel des rechten Winkels. Es gibt stumpfwinklige Dreiecke mit und solche ohne Höhenschnittpunkt; er liegt bei den ersteren außerhalb des Dreiecks.

Beispiele für stumpfwinklige Dreiecke mit und ohne Höhenschnittpunkt kann man sich nach dem Bisherigen ohne weiteres bilden.

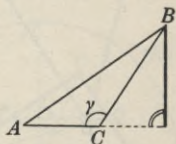


Fig. 57.

89. In der e. Geometrie gilt der bekannte Satz, daß die Höhen im spitzwinkligen Dreiecke die Winkel des Höhenfußpunktdreiecks halbieren. Legt man ein h. spitzwinkliges Dreieck durch eine h. Bewegung mit seinem h. Höhenschnittpunkt auf  $M$ , dann sind (Nr. 88) in der neuen Lage die h. Höhen auch die e. Höhen des Dreiecks und die von diesen nach dem erwähnten Satze halbierten Winkel werden nach Satz 60 e auch h. halbiert. Damit ist der Satz bewiesen

a) In der h. Geometrie sind die Höhen im spitzwinkligen Dreiecke gleichzeitig die Winkelhalbierenden des Höhenfußpunktdreiecks.

Liegt ein h. stumpfwinkliges Dreieck vor und legt man es mit dem Scheitel des stumpfen Winkels auf  $M$ , dann liest man ebenso folgenden h. Satz aus dem gleichen Satze der e. Geometrie ab:



b) In der h. Geometrie ist die vom stumpfen Winkel eines stumpfwinkligen Dreiecks ausgehende Höhe Winkelhalbierende des Höhenfußpunktdreiecks, während die beiden anderen Höhen Außenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks halbieren.

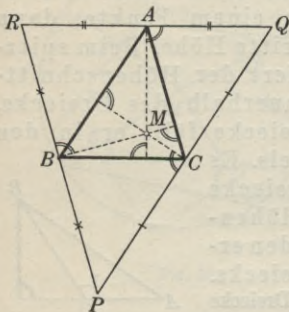


Fig. 58.

90. Legt man ein h. spitzwinkliges Dreieck mit seinem Höhenschnittpunkt auf  $M$ , dann erkennt man aus der Fig. 58, daß die mit Doppelbogen bezeichneten Winkel absolut rechte Winkel sind (Satz 60 a) und daß die gleich bezeichneten Strecken absolut gleich sind (Satz 60 b). Dies ist der Beweis des Satzes

a) Zeichnet man in der h. Geometrie in den

Ecken eines spitzwinkligen  $\triangle ABC$  die Senkrechten zu den Höhen des Dreiecks und bilden diese drei Geraden ein  $\triangle PQR^*$ , dann sind die Höhen des  $\triangle ABC$  die Mittelsenkrechten der Seiten des  $\triangle PQR$  und daher ist der Höhenschnittpunkt von  $\triangle ABC$  der Mittelpunkt des Umkreises von  $\triangle PQR$ .

Fig. 58 ist die Figur des bekannten, sehr einfachen Gauß'schen Beweises für den e. Höhenschnittpunktsatz, der diesen auf den Satz vom Schnittpunkte der Mittelsenkrechten zurückführt. Dabei wird das Euklidische Parallelenaxiom verwendet. Es gibt aber einen schönen Beweis von Ch. Gudermann für den Höhenschnittpunktsatz\*\*), der sich unschwer so fassen läßt, daß er unabhängig vom Parallelenaxiom den ersten Satz von 88 a liefert, der in der

\*) Dies braucht nicht der Fall zu sein, da die Punkte  $P, Q, R$  nicht alle innerhalb ( $K$ ) zu liegen brauchen.

\*\*) Vgl. R. Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Bd., 6. Aufl., 1883, S. 41.

absoluten Geometrie gilt. Der Satz vom Höhenschnittpunkte findet sich bei Euklid noch nicht, er stammt jedenfalls von Archimedes\*).

91. Aus der projektiven Geometrie ist die Figur des vollständigen Vierseits bekannt, Fig. 59, mit der harmonischen Haupteigenschaft  $(ABDE) = -1$ . Hält man darin die Punkte  $A, B, C, P$  fest, während  $E$  ins Unendliche rückt, dann wird, e. gesprochen,  $D$  Mittelpunkt der Strecke  $AB$ , und  $PQ$  parallel zu  $AB$ . Daraus folgt der in der e. Geometrie geltende Satz

a) Fällt man von einem Punkte  $P$  der Seite  $AC$  eines  $\triangle ABC$  das Lot auf die Mittelsenkrechte der

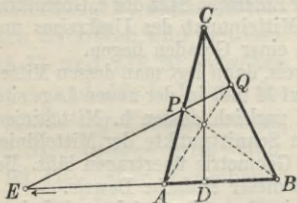


Fig. 59.

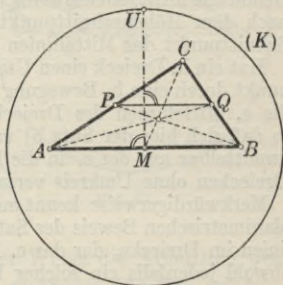


Fig. 60.

Seite  $AB$ , dann schneidet dieses Lot die Seite  $BC$  in einem Punkte  $Q$ , und die Strecken  $AQ$  und  $BP$  schneiden sich in einem Punkte der Strecke, welche  $C$  mit dem Mittelpunkte von  $AB$  verbindet.

Legt man nun ein h. Dreieck durch eine h. Bewegung so, daß der h. Mittelpunkt der Seite  $AB$  auf  $M$  fällt, dann ist, Fig. 60,  $M$  absoluter Mittelpunkt von  $AB$  (Satz 60 c),  $CM$  absolute Mittellinie des Dreiecks,  $MU$  absolute Mittelsenkrechte und  $PQ$  absolutes Lot zu  $MU$ . Daher folgt

\*) Näheres hierüber bei Tropfke [10], S. 164—165.

aus der e. Gültigkeit des Satzes a) dessen Gültigkeit in der h. und folglich auch in der absoluten Geometrie.

Ist nun  $P$  der h. Mittelpunkt von  $AC$ , dann ist nach Satz 77 a auch  $Q$  der Mittelpunkt von  $BC$ , und es ergibt sich aus dem soeben bewiesenen h. Satz a) als Spezialfall der, wieder in der absoluten Geometrie geltende Satz

b) In jedem Dreiecke schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten in einem Punkte.

Der Satz der e. Geometrie, daß der Schnittpunkt der Mittellinien eines Dreiecks diese im Verhältnis 1:2 teilt, gilt in der h. Geometrie nicht, ebensowenig der Eulersche Satz der e. Geometrie, nach dem Höhenschnittpunkt, Mittelpunkt des Umkreises und Schnittpunkt der Mittellinien in einer Geraden liegen.

Hat ein h. Dreieck einen Umkreis, dann legt man dessen Mittelpunkt durch eine h. Bewegung auf  $M$  und in der neuen Lage sind die e. Mittellinien des Dreiecks zugleich dessen h. Mittellinien, so daß sich hier der Satz b) vom Schnittpunkte der Mittellinien unmittelbar aus der e. in die h. Geometrie übertragen läßt. Bei Dreiecken ohne Umkreis versagt dieser einfache Beweis.

Merkwürdigerweise kennt man in der e. Geometrie noch keinen planimetrischen Beweis des Satzes vom Schnittpunkte der Mittellinien im Dreiecke, der das e. Parallelenaxiom nicht voraussetzt, obwohl jedenfalls ein solcher Beweis möglich ist, da Satz b) in der absoluten Geometrie gilt. Auch der Satz vom Schnittpunkte der Mittellinien findet sich bei Euklid noch nicht und geht wohl gleichfalls auf Archimedes zurück\*).

### Trigonometrie.

92. Für die nun folgenden Betrachtungen vergegenwärtigen wir uns drei Tatsachen:

a) Zwischen der e. und der h. Länge einer von  $M$  ausgehenden Strecke besteht nach Gl. (72, 2) die Beziehung

$$(92, 1) \quad a = \text{th } a.$$

\*) Vgl. hierzu Tropicke [10], S. 163—164.



b) Liegt, Fig. 61, auf einer Sehne  $s$  von  $(K)$  eine Strecke  $\bar{a}$  so, daß ihr einer Endpunkt im Mittelpunkte von  $s$  liegt, und ist  $\bar{b}$  die e. senkrechte Entfernung zwischen  $M$  und  $s$ , dann ist nach Satz 72a  $\bar{a} = \sqrt{1 - \bar{b}^2} \cdot \text{th } \bar{a}$  und nach den Gln. (92, 1) und (72, 5) gilt

$$(92, 2) \quad \bar{a} = \frac{\text{th } \bar{a}}{\text{ch } \bar{b}}$$

c) Läuft der eine Schenkel eines (absolut) spitzen Winkels  $\alpha$  durch  $M$ , Fig. 61, und hat der Scheitel von  $M$  die h. Entfernung  $\bar{b}$ , dann besteht nach Satz 68 b und den Gln. (92, 1) und (72, 5) zwischen der e. und der h. Größe des Winkels der Zusammenhang (92, 3)  $\text{tg } \alpha_e = \text{tg } \alpha_h \cdot \text{ch } \bar{b}$ .

93. Die soeben angegebenen drei Beziehungen gestatten nun vermittels des Prinzips der speziellen Lage in einfachster Weise die Ableitung der h. trigonometrischen Formeln, zunächst für das rechtwinkelige Dreieck.

Ein h. rechtwinkeliges Dreieck denken wir uns durch eine h. Bewegung mit dem Scheitel seines rechten Winkels auf  $M$  gelegt, Fig. 61. Dann folgt wegen  $\text{tg } \alpha_e = \frac{a}{b}$  aus

Gl. (92, 3) bei zweimaliger Anwendung der Beziehung 92 a als erste Gleichung für das rechtwinkelige Dreieck, wenn man  $\alpha$  statt  $\alpha_h$  schreibt

$$(93, 1) \quad \text{tg } \alpha \cdot \text{sh } \bar{b} = \text{th } a \quad (\text{Kath., Kath., Wink.}).$$

Legt man das h. rechtwinkelige Dreieck durch eine h. Bewegung mit dem Scheitel eines der spitzen Winkel auf  $M$ ,

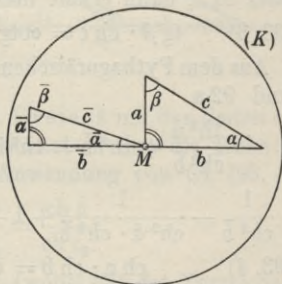


Fig. 61.

Fig. 61, dann liefert die Gleichung  $\cos \bar{\alpha}_e = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}$ , wenn man

$\alpha, b, c$  für  $\bar{\alpha}_h, \bar{b}, \bar{c}$  schreibt wegen  $\bar{\alpha}_h = \bar{\alpha}_e$  (Satz 61 a) aus der Beziehung 92 a unmittelbar die zweite Gleichung (93, 2)  $\cos \alpha \cdot \text{th } c = \text{th } b$  (Hyp., Kath., Anl. Wink.).

Berücksichtigt man bei der linken Seite der Gleichung  $\text{tg } \bar{\beta}_e = \text{cotg } \bar{\alpha}_e$  die Beziehung 92 c, bei der rechten Seite Satz 61 a, dann erhält man als dritte Gleichung

(93, 3)  $\text{tg } \beta \cdot \text{ch } c = \text{cotg } \alpha$  (Hyp., Wink., Wink.).

Aus dem Pythagoräischen Lehrsatz folgt vermöge (92, 2) und 92 a

$$\frac{\text{th}^2 \bar{a}}{\text{ch}^2 \bar{b}} + \text{th}^2 \bar{b} = \text{th}^2 \bar{c} \quad \text{oder wegen Gl. (72, 5)}$$

(93, 4)  $\frac{1}{\text{ch}^2 \bar{b}} - \frac{1}{\text{ch}^2 \bar{a} \cdot \text{ch}^2 \bar{b}} + 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \bar{b}} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \bar{c}}$ , d. h. \*)  
 $\text{ch } \alpha \cdot \text{ch } b = \text{ch } c$  (Hyp., Kath., Kath.).

Aus den Gln. (93, 4), (93, 2) und (72, 5) findet man unmittelbar

$$\frac{\text{ch}^2 a}{\text{ch}^2 c} = 1 - \cos^2 \alpha \cdot \text{th}^2 c \quad \text{oder}$$

$\text{ch}^2 a = \text{ch}^2 c - \cos^2 \alpha \cdot \text{sh}^2 c = \text{ch}^2 c - \text{sh}^2 c + \sin^2 \alpha \cdot \text{sh}^2 c$ ,  
 d. h. wegen (72, 5)

(93, 5)  $\text{sh } a = \sin \alpha \cdot \text{sh } c$  (Hyp., Kath., Geg. Wink.).

Aus Gl. (93, 1) erhält man bei zweimaliger Anwendung von Gl. (93, 5) die Beziehung

(93, 6)  $\text{ch } a = \frac{\text{sh } a}{\text{tg } \alpha} \cdot \frac{1}{\text{sh } b} = \frac{\sin \alpha \cdot \text{sh } c}{\text{tg } \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \beta \cdot \text{sh } c}$ , d. h.  
 $\text{ch } a \cdot \sin \beta = \cos \alpha$  (Kath., Wink., Wink.).

\*) Nach Nr. 72 haben alle hier auftretenden hyperbolischen Funktionen positive Werte.

94. Sind von den 5 Stücken eines h. rechtwinkligen Dreiecks Hypotenuse, 2 Katheten, 2 spitze Winkel, irgend zwei gegeben, dann kann man mittels der soeben abgeleiteten 6 Gleichungen jedes weitere Stück berechnen\*).

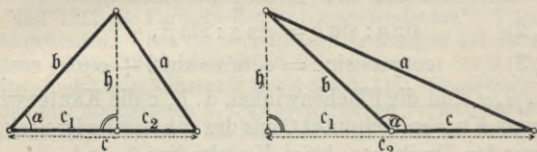


Fig. 62.

Es sei nun ein beliebiges h. Dreieck mit den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gegeben, Fig. 62. Man zeichnet in ihm die Höhe  $h$  und findet durch zweimalige Anwendung von Gl. (93, 4)

$$\operatorname{ch} h = \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} c_1} = \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} c_2}$$

und folglich wegen  $c_2 = c \overline{(+)} c_1$  (wobei sich das Vorzeichen — auf die linke Teilfigur bezieht, (+) auf die rechte) mit Verwendung von Gl. (72, 7)

$$\operatorname{ch} a = \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} c_1} \cdot \operatorname{ch} (c \overline{(+)} c_1) = \operatorname{ch} b (\operatorname{ch} c \overline{(+)} \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{th} c_1).$$

Die Beziehung (93, 2) liefert  $\operatorname{th} c_1 = \frac{+}{(-)} \cos \alpha \cdot \operatorname{th} b$  und damit  $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{th} b$ , d. h.

$$(94, 1) \quad \operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \cos \alpha.$$

95. Aus der e. sphärischen Trigonometrie ist folgendes bekannt: Sind  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  die Seiten und Winkel eines Eulerschen\*\*) sphärischen Dreiecks, dann gilt die Gleichung

$$(95, 1) \quad \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha,$$

\*) Beim Vergleiche mit Liebmann [7], S. 60—61 beachte man unsere Gl. (74, 2).

\*\*) D. h. die Seiten und Winkel liegen zwischen 0 und  $\pi$ .



und aus dieser Gleichung und den ihr für die beiden anderen Seiten des Dreiecks nachgebildeten Gleichungen kann man durch rechnerische Umformungen sämtliche Formeln der elementaren sphärischen Trigonometrie ableiten, z. B. auch den Sinussatz und den Kotangentensatz

$$(95, 2) \quad \sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

$$(95, 3) \quad \cotg a \cdot \sin c = \cotg \alpha \cdot \sin \beta + \cos c \cdot \cos \beta.$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sind die Flächenwinkel,  $a, b, c$  die Kantenwinkel des vom Kugelmittelpunkt  $O$  aus das sphärische Dreieck projizierenden Dreikants; beim Kugelradius 1 sind  $a, b, c$  zugleich die Längen der auf der Kugel ausgeschnittenen Großkreisbogen. Beschreibt man um  $O$  eine imaginäre Kugel mit dem Halbmesser  $i = \sqrt{-1}$ , dann führt dasselbe projizierende Dreikant auf ein imaginäres sphärisches Dreieck mit den gleichen Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ , während man für dessen Seiten rein formal  $ia, ib, ic$  setzen wird. Dann tritt an Stelle von (95, 1) die Gleichung

$\cos (ia) = \cos (ib) \cdot \cos (ic) + \sin (ib) \cdot \sin (ic) \cdot \cos \alpha$ , das ist aber nach den Gln. (72, 3) nichts anderes als die Gl. (94, 1), wenn man  $a, b, c$  durch  $\alpha, \beta, \gamma$  ersetzt. Da nun aus (95, 1) die ganze sphärische Trigonometrie folgt, ergibt sich aus (94, 1) durch dieselben rechnerischen Prozesse die ganze h. Trigonometrie. D. h.

a) Die h. Trigonometrie ist formal nichts anderes als die elementare sphärische Trigonometrie auf einer Kugel vom Radius  $i = \sqrt{-1}$ .

Beispielsweise folgen aus (95, 2) und (95, 3), indem man  $a, b, c$  durch  $ia, ib, ic$  ersetzt, bei Berücksichtigung von (72, 3) und (72, 4) für die h. Trigonometrie die Gleichungen

$$(95, 4) \quad \operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

$$(95, 5) \quad \operatorname{eth} a \cdot \operatorname{sh} c = \cotg \alpha \cdot \sin \beta + \operatorname{ch} c \cdot \cos \beta.$$

Der hier aufgedeckte Zusammenhang zwischen der sphärischen und der h. Trigonometrie durch das Imaginäre veranlaßte Loba-

tschefsckij zur Wahl der Bezeichnung „Imaginäre Geometrie“. Auch J. Bolyai war dieser Zusammenhang bekannt. Nach Nr. 8 hatte schon Lambert den soeben bewiesenen Satz a) vermutet, die merkwürdige Stelle in § 82 seiner Abhandlung lautet: „Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor.“ Gauß hat zwischen 1805 und 1817 die Formeln der h. („transzendenten“) Trigonometrie gefunden. Über die bedeutenden Leistungen des Juristen Taurinus (1794—1874), des Neffen Schweikarts, in der h. Trigonometrie findet man Näheres in Engel-Stäckel [3]. Vom Übergange von den hier abgeleiteten h. trigonometrischen Formeln zu denen Lobatschfsckijs wird noch am Schlusse von Nr. 104 die Rede sein.

### Reguläre $n$ -Ecke.

96. Auch bei den h. regulären  $n$ -Ecken ist wegen des Satzes 61c das Prinzip der speziellen Lage anwendbar. Damit kann man aus bekannten Eigenschaften der e. regulären  $n$ -Ecke auf die h. regulären  $n$ -Ecke schließen.

Ist  $AB$  in Fig. 63 die halbe Seite eines dem Kreise ( $C$ ) umschriebenen regulären  $n$ -

Ecks, dann muß wegen  $\alpha = \frac{\pi}{n}$  die e. Länge  $AM = \frac{r}{\cos \frac{\pi}{n}} < 1$

sein. Hat nun  $BM$  die h. Länge  $r$ , dann folgt daraus vermöge Gl. (72, 2) nach einfacher trigonometrischer Umformung die Bedingung

$r < \ln \left( \cotg \frac{\pi}{2n} \right)$ . Das ist der Beweis des Satzes

a) In der h. Geometrie kann man einem Kreise vom Halbmesser  $r$  immer und nur dann ein reguläres  $n$ -Eck umschreiben, wenn  $r < \ln \left( \cotg \frac{\pi}{2n} \right)$  ist.

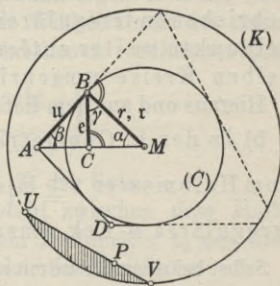


Fig. 63.

97. Nun sei dem Kreise ( $C$ ) mit dem Mittelpunkt  $M$ , Fig. 63, ein irreguläres  $n$ -Eck  $[E]$  mit der Ecke  $A$  und dem zugehörigen Zentriwinkel  $2\alpha$  umschrieben. Dann ist

$AM = \frac{r}{\cos \alpha}$ . Da  $[E]$  irregulär sein soll, sind nicht alle seine Zentriwinkel gleich  $\frac{2\pi}{n}$  und mindestens einer, etwa  $2\alpha > \frac{2\pi}{n}$ , weil sonst ihre Summe  $< 2\pi$  wäre. Nun ist  $AM > \frac{r}{\cos \frac{\pi}{n}}$ , und die Ecke  $A$  ist e. und folglich wegen

Gl. (72, 2) auch h. weiter von  $M$  entfernt als die Ecken des ( $C$ ) umschriebenen regulären  $n$ -Ecks. Daher gilt auch in der h. Geometrie der Satz der e. Geometrie:

a) Mindestens eine Ecke eines einem Kreis umschriebenen irregulären  $n$ -Ecks ist vom Kreismittelpunkte weiter entfernt als die Ecken des demselben Kreise umschriebenen regulären  $n$ -Ecks.

Hieraus und aus dem Satze 96 a ergibt sich ohne weiteres

b) In der h. Geometrie kann man einem Kreise vom Halbmesser  $r \geq \ln \left( \cotg \frac{\pi}{2n} \right)$  kein reguläres oder irreguläres  $n$ -Eck umschreiben.

Selbst bei einem Kreise mit einem Halbmesser  $r < \ln \left( \cotg \frac{\pi}{2n} \right)$  ist man wesentlich eingeschränkter in der Wahl der Stücke wie in der e. Geometrie. Man kann ihm zwar immer reguläre  $n$ -Ecke umschreiben, aber z. B. dem Kreise ( $C$ ) der Fig. 63 kein Viereck mit den beiden Ecken  $A$  und  $D$ , während er andere umschriebene Vierecke zuläßt.

98. Ist in Fig. 63  $A$  wieder die Ecke eines ( $C$ ) umschriebenen regulären  $n$ -Ecks, dann hat  $\sphericalangle AMB$  die (e. und h.)

Größe  $\frac{\pi}{n}$ , ist ferner  $u$  die h. Länge von  $AB$ , dann kann



man die erste der Gln. (72, 1) in der folgenden Weise anwenden: statt  $b$  ist  $u$  zu setzen, an die Stelle von  $s$  tritt der aus Satz 92 a und Gl. (72, 5) folgende Wert  $\sqrt{1-r^2}$   
 $= \sqrt{1-\text{th}^2 r} = \frac{1}{\text{ch } r}$ ,  $b$  ist hier  $r \cdot \text{tg } \frac{\pi}{n} = \text{th } r \cdot \text{tg } \frac{\pi}{n}$ .

Dies führt unmittelbar auf den Satz

a) In der h. Geometrie ist die Seitenlänge des einem Kreise vom Halbmesser  $r$  umschriebenen regulären  $n$ -Ecks

$$\ln \frac{1 + \text{sh } r \cdot \text{tg } \frac{\pi}{n}}{1 - \text{sh } r \cdot \text{tg } \frac{\pi}{n}}.$$

Weiterhin hat  $\sphericalangle \beta$  die e. Größe  $\beta_e = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ . Wendet man hierauf den Satz 92 c an, dann ergibt sich der Satz  
 b) In der h. Geometrie ist die Winkelsumme des einem Kreise vom Halbmesser  $r$  umschriebenen regulären  $n$ -Ecks

$$2n \cdot \text{arctg} \left( \frac{\text{cotg } \frac{\pi}{n}}{\text{ch } r} \right).$$

Weiterhin folgt aus Gl. (93, 2) der Satz

c) In der h. Geometrie besteht zwischen dem Halbmesser  $r_i$  des Inkreises und dem Halbmesser  $r_u$  des Umkreises\*) eines regulären  $n$ -Ecks die Beziehung

$$\text{th } r_i = \text{th } r_u \cdot \cos \frac{\pi}{n}.$$

### Umfang des Kreises.

**99.** Um den Umfang eines h. Kreises einfach berechnen zu können, legen wir ihn wieder mit seinem Mittelpunkt auf  $M$  und machen ihn dadurch zu einem e. Kreise (Satz 61 b).

\*) Falls ein solcher existiert, vgl. Satz 96 a.

In der e. Geometrie berechnet man den Kreisumfang bekanntlich in der Weise, daß man ihn als gemeinsamen Grenzwert der Umfänge der dem Kreis einbeschriebenen und der ihm umschriebenen regulären  $n$ -Ecke für  $n \rightarrow \infty$  definiert. Wir gehen hier genau so vor und setzen dabei die einfachsten Regeln über das Rechnen mit Grenzwerten voraus, daß nämlich der Grenzwert einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten mit nicht verschwindendem Nenner gleich ist der Summe, dem Produkt, dem Quotienten der Grenzwerte, weiterhin setzen wir die Kenntnis der folgenden bekannten Grenzwerte voraus:

$$(99, 1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1. \quad (99, 2)$$

Aus der Definition der hyperbolischen Funktionen durch Exponentialfunktionen, Nr. 72, findet man mittels der bekannten Exponentialreihe die ebenfalls im folgenden vorausgesetzten Grenzwerte

$$(99, 3) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} \alpha}{\alpha} = 1. \quad (99, 4)$$

**100.** Ist in Fig. 63 S. 117  $BC$  die halbe Seite eines ( $C$ ) einbeschriebenen regulären  $n$ -Ecks, dann ist  $\alpha = \frac{\pi}{n}$  und nach Gl. (93,5)

$$\operatorname{sh} e = \sin \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sh} r \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{sh} e}{e} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{2\pi \cdot \operatorname{sh} r}{2ne},$$

wobei  $2ne$  der h. Umfang des einbeschriebenen  $n$ -Ecks ist. Berechnet man aus der letzten Gleichung  $2ne$ , dann liefert der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  wegen der Gln. (99,3) und (99,1) unmittelbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2ne = 2\pi \cdot \operatorname{sh} r.$$

Ist in Fig. 63  $AB$  die halbe Seite eines ( $C$ ) umschriebenen regulären  $n$ -Ecks, dann ist nach Gl. (93, 1)

$$\text{th } u = \text{sh } r \cdot \text{tg } \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad \frac{\text{th } u}{u} = \frac{\text{tg } \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{2\pi \cdot \text{sh } r}{2n u}.$$

Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert hieraus wegen der Gl. (99,4) und (99,2) für die h. Umfänge  $2n u$  der umschriebenen regulären  $n$ -Ecke denselben Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n u = 2\pi \cdot \text{sh } r.$$

Daher kann man auch in der h. Geometrie den Kreisumfang aus den regulären um- und einbeschriebenen  $n$ -Ecken definieren, und es gilt dann der Satz

a) In der h. Geometrie hat ein Kreis vom Halbmesser  $r$  den Umfang  $2\pi \cdot \text{sh } r = \pi (e^r - e^{-r})^*$ .

Da in Fig. 63 die Zentriwinkel von ( $C$ ) e. und h. dasselbe Maß haben (Satz 61 a), folgt nun ohne weiteres

b) In der h. Geometrie hat der zum Zentriwinkel  $\alpha$  gehörende Bogen des Kreises vom Halbmesser  $r$  die Länge  $\alpha \cdot \text{sh } r$ .

Aus Gl. (95, 4) und dem Satze 100 a folgert man unmittelbar einen schönen Satz, der, wie schon J. Bolyai betonte, der e. und der h. Geometrie gemeinsam ist:

c) Die Umfänge der Kreise, deren Halbmesser den Seiten eines Dreiecks gleich sind, verhalten sich wie die sin der den Seiten gegenüberliegenden Winkel.

### Analytische Geometrie mit rechtwinkligen Koordinaten.

101. In Nr. 35 haben wir ein System rechtwinkliger Koordinaten für die absolute Geometrie kennengelernt,

\*) Nach Nr. 72 ist  $2 \cdot \text{sh } a = e^a - e^{-a}$ .



das wir auch den nun folgenden h. Betrachtungen zugrunde legen. Dabei soll wieder das Prinzip der speziellen Lage in der Weise verwendet werden, daß wir uns das Koordinatensystem samt

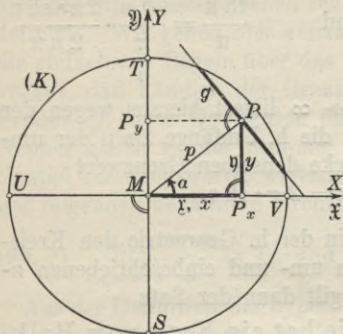


Fig. 64.

den darauf bezogenen h. Gebilden mit dem Koordinatenanfangspunkt auf  $M$  gelegt denken. Das so gelegte Koordinatensystem ist dann (Satz 60 a) auch e. rechtwinkelig, und irgend ein h. Lot  $PP_x$  auf die  $X$ -Achse, Fig. 64, steht dann auch e. zu ihr senkrecht.

Für die Beziehungen zwischen den h. Koordinaten  $\xi, \eta$  eines Punktes  $P$  und dessen e. Koordinaten  $x, y$  erhält man im Anschluß an die Sätze 92 a und 92 b sofort die Gleichungen

$$(101, 1) \quad x = \operatorname{th} \xi, \quad y = \frac{\operatorname{th} \eta}{\operatorname{ch} \xi}.$$

Die Kurven  $\xi = \text{const}$  sind die zur  $\mathfrak{X}$ -Achse senkrechten Geraden, die Kurven  $\eta = \text{const}$  nach Nr. 65 keine Geraden, sondern in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  e. Halbellipsen mit der gemeinsamen großen Achse  $UV$ . Schon daraus folgt, daß hier, im Gegensatze zur e. analytischen Geometrie, die beiden Koordinaten nicht gleichartig sind\*). Dies wird sich auch in den weiter unten abzuleitenden Gleichungen der Geraden und des Kreises äußern. An der Hand der Gln. (72,1)

\*) Dies vermeidet man, wenn man als  $\mathfrak{X}$ -Koordinate von  $P$  statt der h. Länge von  $MP_x$  die h. Länge von  $PP_y$  einführt. Dann werden auch die Kurven  $\mathfrak{X} = \text{const}$  e. Halbellipsen, und zwar mit der gemeinsamen großen Achse  $ST$ . Die Werte  $\operatorname{sh} \mathfrak{X}$  und  $\operatorname{sh} \eta$  führen zu den Weierstraß'schen h. Koordinaten. Vgl. hierüber Liebmann [7], S. 77—82.

und (72, 2) erkennt man ohne weiteres, daß, wieder im Gegensatz zur e. analytischen Geometrie, hier immer, h. gesprochen,  $MP_y < PP_x$  ist und  $MP_x < PP_y$ .

102. Da eine beliebige h. Gerade in e. Koordinaten die Gleichung

$$(102, 1) \quad ax + by + c = 0$$

hat, erhält man nach den Gln. (101, 1) als die Gleichung einer Geraden in h. Koordinaten

$$(102, 2) \quad a \cdot \text{sh } \xi + b \cdot \text{th } \eta + c \cdot \text{ch } \eta = 0.$$

Dabei sind  $a, b, c$  Konstante, die jedoch nicht vollständig willkürlich gewählt werden dürfen, da die e. Gerade (102, 1) den Kreis ( $K$ ) schneiden muß. Es empfiehlt sich daher nicht, die allgemeine Gleichungsform (102, 1) zugrunde zu legen, sondern die bekannte Hessesche Normalform der e. Geraden

$$(102, 3) \quad a \cdot x + \varepsilon \cdot \sqrt{1-a^2} \cdot y - p = 0, \\ -1 \leq a \leq +1, \quad p \geq 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Hierin bedeutet, Fig. 64, S. 122,  $p$  die Länge des Lotes aus  $M$  auf  $g$ , weiterhin ist der — im angegebenen Sinne positiv gemessene —  $\sphericalangle \alpha$  der  $X$ -Achse und dieses Lotes bestimmt durch

$$(102, 4) \quad \cos \alpha = a, \quad \sin \alpha = \varepsilon \sqrt{1-a^2}.$$

Als h. Gerade kommen nur Stücke von e. Geraden in Betracht, für welche  $p < 1$  ist, dabei ist  $MP$  auch das h. Lot aus  $M$  auf die Gerade  $g$  (Satz 60 a) und  $\alpha$  auch die h. Größe des  $\sphericalangle VMP$  (Satz 61 a). Durch Einsetzen der Werte aus den Gln. (101, 1) in Gl. (102, 3) und Anwendung von Gl. (72, 2) erhält man den Satz

a) In der h. analytischen Geometrie\*) hat die Gleichung einer beliebigen Geraden die Form

\*) Wir meinen hier und im folgenden mit der h. analytischen Geometrie immer die h. analytische Geometrie mit den rechtwinkligen Koordinaten von Nr. 35 (und 101).

$$(102, 5) \quad \cos \alpha \cdot \operatorname{sh} \mathfrak{x} + \sin \alpha \cdot \operatorname{th} \mathfrak{y} - \operatorname{th} \mathfrak{p} \cdot \operatorname{ch} \mathfrak{x} = 0,$$

dabei ist  $\mathfrak{p}$  die Länge des Lotes aus dem Koordinatenanfangspunkt auf die Gerade und  $\alpha$  die Größe des Winkels, den dieses Lot mit der positiven  $\mathfrak{X}$ -Achse einschließt; der Winkel ist im Sinne von der positiven  $\mathfrak{X}$ - zur positiven  $\mathfrak{Y}$ -Achse positiv gemessen.

Es liegt nahe (102, 5) als die „Hessesche Normalform der h. Geraden“ zu bezeichnen.  $\mathfrak{p} = 0$  liefert die Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt,  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pi$  die zur  $\mathfrak{X}$ -Achse senkrechten Geraden,  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  die zur  $\mathfrak{Y}$ -Achse senkrechten Geraden.

In der h. analytischen Geometrie kann man zwar, wie in der e., zu jedem Paare (reeller) endlicher Werte  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{y}$  genau einen zugehörigen Punkt angeben, aber abweichend von der e. analytischen Geometrie findet man aus der Gl. (102, 5) der h. Geraden nicht zu jedem Wert  $\mathfrak{x}$  einen zugehörigen Wert  $\mathfrak{y}$ . Das ist sowohl aus der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  anschaulich unmittelbar klar als auch analytisch aus der Tatsache, daß die hyperbolischen Funktionen nach ihrer Definition durch Exponentialfunktionen (Nr. 72) innerhalb folgender Schranken liegen:  $-\infty < \operatorname{sh} < +\infty$ ;  $+1 \leq \operatorname{ch} < +\infty$ ;  $-1 < \operatorname{th} < +1$ . Die hyperbolischen Funktionen haben keine (reelle) Periode.

**103.** Sind zwei h. Gerade in der Hesseschen Normalform (102, 5) mit den Konstanten  $\alpha$ ,  $\mathfrak{p}$  und  $\alpha_1$ ,  $\mathfrak{p}_1$  gegeben und legt man sie und ihr Koordinatensystem wieder mit dem Koordinatenanfangspunkt auf  $M$ , dann ist  $\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - \mathfrak{p} = 0$  die e. Normalform der ersten, wobei  $\mathfrak{p} = \operatorname{th} \mathfrak{p}$  ist; setzt man hierin  $\alpha_1$ ,  $\mathfrak{p}_1$ ,  $\mathfrak{p}_1$  an die Stelle von  $\alpha$ ,  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}$ , dann erhält man die e. Normalform der zweiten Geraden. Für das Quadrat des e. Abstandes ihres e. Schnittpunktes von  $M$  erhält man nun leicht den Wert

$$x^2 + y^2 = \frac{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{p}_1^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha)}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha)} \quad \text{und hieraus}$$

den Satz



a) Sind in der h. analytischen Geometrie zwei Gerade in der Hesseschen Normalform mit den Konstanten  $\alpha$ ,  $\rho$  und  $\alpha_1$ ,  $\rho_1$  gegeben, dann schneiden sich die beiden Geraden, sind sie randparallel oder überparallel, je nachdem in

$\text{th}^2 \rho + \text{th}^2 \rho_1 - 2 \cdot \text{th} \rho \cdot \text{th} \rho_1 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \sin^2(\alpha_1 - \alpha)$   
 das Zeichen  $<$ ,  $=$  oder  $>$  gilt.

**104.** (67, 2) ist die e. Gleichung eines beliebigen h. Kreises, der auf ein rechtwinkliges e. Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt  $M$  bezogen ist, dessen  $Y$ -Achse durch den h. Kreismittelpunkt geht. Dreht man dieses Koordinatensystem um den Anfangspunkt um den Winkel  $\varphi$ , dann erhält man die bekannten Gleichungen zwischen den alten e. Koordinaten  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  und den neuen  $x$ ,  $y$

$$\bar{x} = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \bar{y} = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

und damit als Gleichung des h. Kreises in den neuen e. Koordinaten

$$(104, 1) \quad \begin{aligned} &x^2 + y^2 - x^2(b^2 + r^2 a^2) - y^2(a^2 + r^2 b^2) + \\ &+ 2xyab(1 - r^2) - 2(xa + yb)(1 - r^2) = \\ &= r^2 - (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Dies ist demnach die e. Gleichung eines h. Kreises in einem rechtwinkligen e. Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt  $M$ , das zum h. Kreis ganz beliebig liegt, wobei  $a$ ,  $b$  die e. Koordinaten des h. Kreismittelpunktes sind und der h. Kreishalbmesser  $r$  durch  $r = \text{th } r$  bestimmt ist.

Will man nun in der h. analytischen Geometrie die Gleichung eines zum Koordinatensystem beliebig liegenden Kreises erhalten, dann braucht man nur die Gln. (101,1) auf Gl. (104, 1) anzuwenden: berücksichtigt man dabei die Gln. (72, 5), (72, 7), (72, 8), (72, 9), dann liefern einige einfache Umformungen die Gleichung

$$(104, 2) \quad \begin{aligned} & \operatorname{sh}^2 \xi \cdot \operatorname{ch} 2\alpha + \frac{\operatorname{th}^2 \eta}{\operatorname{ch}^2 b} \cdot \operatorname{ch}(b+r) \cdot \operatorname{ch}(b-r) - \\ & - 2 \operatorname{th} \eta \cdot \operatorname{ch}(\alpha - \xi) \cdot \operatorname{th} b - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi \cdot \operatorname{sh} 2\alpha + \\ & + \operatorname{sh}(\alpha+r) \cdot \operatorname{sh}(\alpha-r) + \operatorname{th}^2 b \cdot \operatorname{ch}^2 r = 0 \end{aligned}$$

und damit den Satz

a) In der h. analytischen Geometrie hat ein h. Kreis mit dem Halbmesser  $r$  und dem Mittelpunkt  $(\alpha, b)$  die Gleichung (104, 2).

Setzt man in Gl. (104, 2)  $\alpha = b = 0$ , dann erhält man nach Anwendung von Formel (72, 6) auf  $\operatorname{sh}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 r$  als Gleichung eines h. Kreises, der auf ein rechtwinkeliges h. Koordinatensystem mit seinem Mittelpunkt als Anfangspunkt bezogen ist,

$$\operatorname{th}^2 \xi + \frac{\operatorname{th}^2 \eta}{\operatorname{ch}^2 \xi} - \operatorname{th}^2 r = 0,$$

eine Gleichung, die man auch einfach durch Anwendung der Gln. (101, 1) und (72, 2) auf den e. Kreis  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  hätte erhalten können.

Die h. analytische Geometrie mit den hier benützten Koordinaten ist von Lobatschefskij ausgebildet worden, doch benützt Lobatschefskij nicht die Funktionen  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{th}$ , sondern die trigonometrischen Funktionen des Parallelwinkels. Der Zusammenhang zwischen den von ihm hergeleiteten Formeln der h. analytischen Geometrie (und h. Trigonometrie) und den von uns gefundenen wird durch die Gln. (74, 2) hergestellt.

### Der Dreiecksinhalt.

105. Bei der Streckenmessung in der absoluten Geometrie waren wir in Nr. 29 von zwei Forderungen ausgegangen, die in naheliegender Analogie zu folgenden Festsetzungen für die — positiven — Maßzahlen der Dreiecksinhalte in der h. Geometrie führen:

a) Kongruente Dreiecke haben den gleichen Inhalt;

b) ist  $BD$  eine Transversale des  $\triangle ABC$ , dann ist der Inhalt des  $\triangle ABC$  gleich der Summe der Inhalte der Dreiecke  $ABD$  und  $BCD$ .

Ist  $W$  die h. Winkelsumme eines Dreiecks, dann ist nach

Satz 69 a immer  $\pi - W = \delta > 0$ , und diese positive Größe  $\delta$  bezeichnet man als den „Defekt“ des betreffenden Dreiecks. Kongruente Dreiecke haben paarweise kongruente Winkel und daher auch denselben Defekt. Weiterhin erkennt man sofort, daß der Defekt des Dreiecks  $ABC$  gleich ist der Summe der Defekte der Dreiecke  $ABD$  und  $BDC$ , wenn  $D$  ein Punkt der Strecke  $AC$  ist. Demnach erfüllt der Defekt eines Dreiecks die an die Maßzahl des Dreiecksinhaltes gestellten Forderungen a) und b) und man kann daher den wichtigen Satz aussprechen

c) In der h. Geometrie ist der Inhalt eines Dreiecks dem Defekt des Dreiecks gleich.

Man hätte den Flächeninhalt auch mit Lambert (Nr. 8) dem Defekt proportional setzen können; durch die Gleichsetzung wurde über die h. Flächeneinheit verfügt. Die Winkel und damit der Dreiecksinhalt bleiben bei h. Bewegungen unverändert.

Wie groß man in der h. Geometrie auch die Seiten eines Dreiecks annimmt, dessen Inhalt ist nach Satz c) immer kleiner als  $\pi$ . Gauß hatte erkannt, daß die Annahme, es gäbe Dreiecke beliebig großen Inhaltes dem Euklidischen Parallelenaxiom äquivalent ist.

106. Während bei der Streckenmessung gleich lange Strecken kongruent sind, brauchen flächengleiche Dreiecke

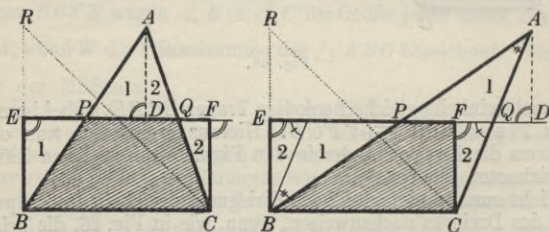


Fig. 65.

nicht kongruent zu sein. Trotzdem besteht auch hier eine Kongruenzbeziehung zwischen flächengleichen Dreiecken: bezeichnet man nämlich zwei Figuren als „zerlegungs-



gleich“, wenn man jede von ihnen derart in endlich viele Dreiecke zerlegen kann, daß die beiderseitigen Teildreiecke paarweise kongruent sind, dann gilt der Satz

a) In der h. Geometrie sind inhaltsgleiche Dreiecke zerlegungsgleich.

Zum Beweise greifen wir zunächst mit Fig. 65 auf Nr. 77 zurück. Die Mittelpunkte  $P$  und  $Q$  der Dreiecksseiten lieferten dort

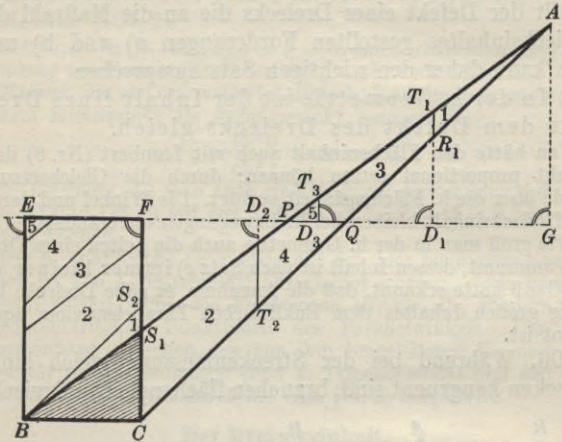


Fig. 66.

das rechtwinkelig-gleichschenkelige Trapez  $BCFE$ , dabei ist nach Satz 76 a  $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle FCB$ . Hieraus ergibt sich nun ohne weiteres die Kongruenz der in den Fig. 65 mit gleichen Ziffern bezeichneten Dreiecke\*).

Nicht ganz so einfach ist die Zerlegungsgleichheit des Trapezes und des Dreiecks nachzuweisen, wenn, wie in Fig. 66, die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  außerhalb der Strecke  $EF$  liegen. Hier erhält man die Zerlegung immer in folgender Weise: Es ist wegen der Kongruenz der Dreiecke  $BPE$  und  $APG$  (2. Kongruenzsatz)  $PG \equiv$

\*) Die weiter unten benötigten punktierten Linien der Fig. 65 kommen hier nicht in Betracht.

$EP$ , d. h. spiegelt man  $E$  an  $P$ , dann erhält man  $G$ . Ebenso leicht erkennt man, daß die Spiegelung von  $G$  an  $Q$  den Punkt  $F$  liefert, und nun spiegelt man weiter,  $F$  an  $P$  und erhält  $D_1$ ,  $D_1$  an  $Q$  und erhält  $D_2$ ,  $D_2$  an  $P$  und erhält  $D_3$  usw. Diese abwechselnden Spiegelungen an  $P$  und  $Q$  setzt man so lange fort, bis eines der Spiegelbilder in die Strecke  $PQ$  oder auf einen ihrer Endpunkte fällt. Das tritt, wie man ohne weiteres aus dem Archimedischen Axiom erkennt, nach endlich vielen Spiegelungen ein\*). Nun zieht man von den Punkten  $D_\nu$  mit ungeradem  $\nu$  Teilungslinien nach oben, von den übrigen Punkten  $D_\nu$  nach unten. Damit hat man den nicht zu  $BCFE$  gehörenden Teil des  $\triangle ABC$  in Teile zerlegt, die man in der Reihenfolge, in der sie durch die Teilungslinien  $D_\nu T_\nu$  abgeschnitten werden, mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Nun ist, wie man sofort erkennt, das Viereck  $GD_1T_1A \equiv EFS_1B$ , so daß man von dem letzteren das Dreieck 1 abteilen kann, das dem entsprechenden Dreieck im erstgenannten Viereck kongruent ist. Jetzt ist  $FD_2T_2C \equiv GD_1R_1A \equiv EFS_2B$ , daher kann man das Gebiet 2 davon abtrennen usw. So erkennt man in jedem Falle die Zerlegungsgleichheit des Trapezes  $BCFE$  und des  $\triangle ABC$ . Daher gilt der Hilfssatz

$\alpha$ ) Ein Dreieck  $ABC$  mit den Seitenmitten  $P$  und  $Q$  auf  $AB$  und  $AC$  ist zerlegungsgleich dem gleichschenkelig-rechtwinkligen Trapez  $BCFE$ , das bei  $E$  und  $F$  rechtwinklig ist und dessen Seite  $EF$  auf der Geraden  $PQ$  liegt.

Aus den Fig. 65 und 66 ergibt sich ohne weiteres, daß im Trapez  $BCFE$  wegen  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$  die Größe jedes dieser Winkel  $\frac{W}{2}$  ist, wenn  $W$  die Winkelsumme des  $\triangle ABC$  bezeichnet. Daraus folgt der Hilfssatz

$\beta$ ) Haben zwei Dreiecke gleiche Defekte und stimmen sie in einer Seite überein, dann haben sie kongruente zu dieser Seite gehörende Trapeze.

Nach  $\alpha$ ) ist jedes dieser Dreiecke seinem Trapez zerlegungsgleich. Sind die Trapeze mit ihren Zerlegungslinien gezeichnet und fügt

\*) Hat nämlich  $FP$  die Länge  $f$  und  $PQ$  die Länge  $q$ , dann gibt die Division von  $f$  durch  $q$  (neben einem Rest  $0 \leq r < q$ ) einen Quotienten, der entweder ungerade oder gerade ist,  $f = 2aq + r$  oder  $f = (2b-1)q + r$ . Im ersten Fall ist der Punkt  $D_{2a+1}$  der letzte, im zweiten Falle der Punkt  $D_{2b}$ . Das hier angegebene Verfahren zum Nachweise der Zerlegungsgleichheit des Trapezes und des Dreiecks stammt inhaltlich von A. Finzel, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie, Math. Ann. 72, 1912, S. 262—284, insbesondere S. 279—280. Es gilt für die absolute Geometrie.

man nun noch in jedem Trapez die Zerlegungslinien des anderen Trapezes hinzu, dann sind die beiden Trapeze durch das gesamte so gewonnene Liniensystem offenbar in paarweise kongruente Teile zerlegt. Indem man nun alle hinzugekommenen Linien jedes Trapezes in die entsprechenden Gebiete der Dreieckszerlegung einträgt, ist damit eine Zerlegung der beiden Dreiecke gewonnen, die aus paarweise kongruenten Gebieten besteht\*). Daher gilt der weitere Hilfssatz

$\gamma$ ) Haben zwei Dreiecke gleiche Defekte und stimmen sie in einer Seite überein, dann sind sie zerlegungsgleich.

Der Schluß, den wir unmittelbar vor  $\gamma$ ) verwendeten, liefert den Hilfssatz

$\delta$ ) Sind zwei Figuren einer dritten zerlegungsgleich, dann sind sie untereinander zerlegungsgleich.

Wenn man in Fig. 65  $BE$  über  $E$  hinaus um sich selbst bis  $R$  verlängert, dann liegt die Mitte der Seite  $RC$  des  $\triangle BRC$  auf  $EF$ , wie man durch Anwendung des Satzes 77 a auf die Dreiecke  $ABC$  und  $RBC$  erkennt. Folglich gehört das Trapez  $BCFE$  zu beiden Dreiecken; nach  $\alpha$ ) sind sie beide dem Trapez zerlegungsgleich und daher nach  $\delta$ ) untereinander zerlegungsgleich. Da außerdem, wie vor  $\beta$ ) erwähnt wurde,  $\sphericalangle EBC = \frac{W}{2}$  ist, so folgt daraus der Hilfssatz

$\varepsilon$ ) Hat ein  $\triangle ABC$  die Winkelsumme  $W$ , dann kann man es in ein ihm zerlegungsgleiches Dreieck verwandeln, dessen einer Winkel die Größe  $\frac{W}{2}$  hat.

Haben nun zwei Dreiecke denselben Inhalt, d. h. denselben Defekt und folglich dieselbe Winkelsumme  $W$ , dann verwandelt man beide nach  $\varepsilon$ ) und erhält somit zwei ihnen zerlegungsgleiche Dreiecke mit dem gemeinsamen Winkel  $\frac{W}{2}$ . Legt man diese letzten beiden Dreiecke mit ihren Winkeln  $\frac{W}{2}$  aufeinander, dann folgt daraus der Fall der Fig. 67. Fällt dabei  $C$  auf  $C_1$ , dann muß auch  $A$  auf  $A_1$  fallen, da sonst eines der Dreiecke Teil des anderen und daher nach 105 b kleiner als dieses wäre. Tritt dies nicht ein, dann kann aus dem gleichen Grunde nicht eines der beiden Dreiecke, etwa

\*) Es ist lehrreich, sich dies an einem Beispiele klarzumachen, etwa an der Fig. 65.



$ABC$ , innerhalb des anderen,  $A_1BC_1$ , liegen. Daher zerlegt die Linie  $AC_1$  jedes der beiden Dreiecke, und da, wie man leicht erkennt, die Dreiecke  $AC_1A_1$  und  $AC_1C$  defektgleich und folglich nach  $\gamma$ ) zerlegungsgleich sind, ist damit der Satz 106 a bewiesen.

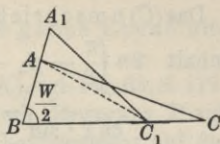


Fig. 67.

**Flächeninhalt des Kreises.**

107. Um den Flächeninhalt des Kreises in der h. Geometrie zu berechnen, legen wir den Kreis, wie in den Nrn. 99 und 100, an die wir uns auch sonst anschließen, mit dem Mittelpunkt auf  $M$ , Fig. 63, S. 117. Das Teildreieck  $BCM$  des  $(C)$  einbeschriebenen regulären  $n$ -Ecks hat den

Flächeninhalt  $\frac{\pi}{2} - \gamma_h - \frac{\pi}{n}$ , dabei ist nach Gl. (93, 3)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ch} r = \cot \gamma_h = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h \right) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h - \frac{\pi}{n} \right) &= \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \gamma_h - \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ch} r - 1}{1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{2\pi}{2n \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h - \frac{\pi}{n} \right)} \end{aligned}$$

Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  im ersten und dritten dieser Ausdrücke liefert wegen Gl. (99, 2) für die Inhalte  $2n \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h - \frac{\pi}{n} \right)$  der eingeschriebenen regulären  $n$ -Ecke den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_h - \frac{\pi}{n} \right) = 2\pi (\operatorname{ch} r - 1).$$

Das (C) umschriebene reguläre  $n$ -Eck hat den Flächeninhalt  $2n \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h - \frac{\pi}{n} \right)$ , dabei gilt nach Gl. (93, 6)

$$\begin{aligned} \text{ch } r \cdot \sin \frac{\pi}{n} &= \cos \beta_h = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h \right) \quad \text{und} \\ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h - \frac{\pi}{n} \right) &= \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h \right) \cdot \cos \frac{\pi}{n} - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h \right) \cdot \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{2} - \beta_h - \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cdot \text{ch } r \cdot \cos \frac{\pi}{n} - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h \right)}{\frac{\pi}{2} - \beta_h - \frac{\pi}{n}} \cdot 2\pi, \\ &= \frac{\frac{\pi}{n}}{2n \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h - \frac{\pi}{n} \right)} \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left( \frac{\pi}{2} - \beta_h - \frac{\pi}{n} \right) = 2\pi (\text{ch } r - 1).$

Daher haben auch in der h. Geometrie die Inhalte der einem Kreis einbeschriebenen regulären  $n$ -Ecke denselben Grenzwert wie die der umschriebenen regulären  $n$ -Ecke, und indem man als Inhalt des Kreises wieder diesen gemeinsamen Grenzwert bezeichnet, erhält man den Satz

a) In der h. Geometrie hat ein Kreis vom Halbmesser  $r$  den Inhalt

$$2\pi (\text{ch } r - 1) = \pi \left( e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right) = 4\pi \text{sh}^2 \left( \frac{r}{2} \right).$$

**108.** Wächst der Halbmesser eines h. Kreises über alle Grenzen, dann wächst, wie man aus Satz 107a sofort erkennt, auch der h. Kreisinhalt über alle Grenzen. Wendet man dies auf die konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkt  $M$  an, dann ergibt sich, daß der h. Inhalt von  $(K)$  unendlich ist. Daraus folgt, analog dem e. Fall,

a) In der h. Geometrie hat die ganze Ebene unendlichen Inhalt.

$UV$  sei nun irgend eine Sehne von  $(K)$ , vgl. Fig. 63, S. 117. Nach Satz 48 a kann man durch eine h. Bewegung  $P$  auf  $M$  legen und damit das schraffierte Kreissegment auf die halbe Fläche von  $(K)$ . D. h.

b) In der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  der h. Geometrie hat jedes Kreissegment unendlichen h. Inhalt.

Sucht man in der h. Geometrie eine Konstruktion, welche aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite eines dem Kreis inhaltsgleichen Quadrates liefert, dann erkennt man sofort, daß man dieses Ziel nicht bei jedem Kreis erreichen kann, da, wie erwähnt, der Inhalt eines Kreises mit seinem Radius über alle Grenzen wächst, während aus der Zerlegung eines Quadrates durch eine Diagonale in zwei Dreiecke folgt, daß dessen Inhalt immer unter  $2\pi$  liegt. J. Bolyai hat aber die Möglichkeit der Quadratur eines Kreises in der h. Geometrie nachgewiesen, indem er gezeigt hat, daß es hier, im Gegensatze zur e. Geometrie, einen Kreis gibt, nämlich den mit dem Inhalte  $\pi$ , den man mit Zirkel und Lineal in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln kann; vgl. hierzu Bonola-Liebmann [1], S. 102.

### Flächen zwischen parallelen Geraden.

109. Hat man zwei h. überparallele Gerade, dann schneiden sie in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  auf jeder Seite ein Stück des Kreises  $(K)$  aus. Man kann demnach in dem von ihnen begrenzten Bereiche Segmente von  $(K)$  angeben, daher folgt aus dem Satze 108 b der Satz

a) Sind in der h. Geometrie  $A \rightarrow A_1$ ,  $B \rightarrow B_1$  zwei überparallele Halbgerade. Fig. 68, dann hat die von diesen Halbgeraden und der Strecke  $AB$  begrenzte Fläche unendlichen Inhalt.

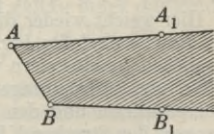


Fig. 68.

110. Liegen zwei randparallele Halbgerade vor, dann kann man durch eine h. Bewegung den Endpunkt der



einen auf  $M$  legen. Sie mögen dann in Fig. 69 die Lagen  $p$  und  $q$  annehmen. Wir betrachten nun das e.  $\triangle MUQ$  und bezeichnen als seinen h. Inhalt den Grenzwert der h. Inhalte (d. h. der Defekte) der e. ähnlichen Dreiecke  $MU_1Q_1, MU_2Q_2, \dots MU_vQ_v, \dots$ . Nach Satz 68 b konvergieren die h. Größen der  $\sphericalangle MQ, U_v$  gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert  $\chi_h$ , während nach Satz 68 d die Folge der  $\sphericalangle MU, Q_v$  den Grenzwert 0 hat. D. h.

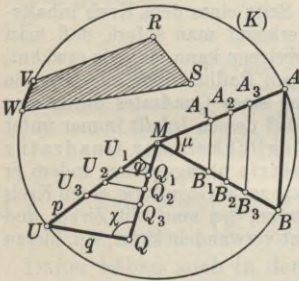


Fig. 69.

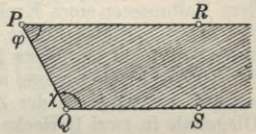


Fig. 70.

a) Sind in der h. Geometrie  $P \rightarrow R$  und  $Q \rightarrow S$  zwei randparallele Halbgerade, Fig. 70, dann hat die

von ihnen und der Strecke  $PQ$  begrenzte Fläche den Inhalt  $\pi - \varphi - \chi$ , wobei  $\varphi$  und  $\chi$  die Winkel  $RPQ$  und  $PQS$  sind.

Hier weicht wieder die h. Geometrie wesentlich von der e. ab, da die e. aufgefaßte Fig. 70 für das betreffende Flächenstück unendlichen Inhalt liefern würde. Zu beachten ist die in den Sätzen 109 a und 110 a zutage tretende Verschiedenheit zwischen den überparallelen und den randparallelen Geraden. In Fig. 69 hat das von den Strecken  $VR, RS, SW$  und dem Bogen  $VW$  begrenzte Ebenenstück unendlichen h. Inhalt. Dabei wird der Inhalt des Flächenstückes dadurch unendlich, daß zu dem endlichen h. Inhalt des Vierecks  $VRSW$  der unendliche Inhalt des von der Sehne  $VW$  abgeschnittenen Segments hinzukommt. Aus den Sätzen 108 b und 110 a leitet man sofort den Satz ab, daß der h. Inhalt eines Teilgebietes von  $(K)$  endlich oder unendlich ist, je nachdem die Berandung dieses Teilgebietes nur

endlich viele Punkte von  $(K)$  oder mindestens einen Bogen von  $(K)$  enthält. Die Sätze 109 a und 110 a sind Beispiele dafür.

### Asymptotische Dreiecke.

**111.** In der Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie sind zwei Arten von Grenzgebilden zu Bedeutung gelangt, die wir bisher noch nicht behandelt haben, es sind das die „asymptotischen Dreiecke“ und die „Grenzkreise“. Während wir uns mit den zweiten in Nr. 113—116 beschäftigen werden, wollen wir jetzt die asymptotischen Dreiecke betrachten. Indem man einen, zwei oder alle drei Eckpunkte eines Dreiecks je auf einer Geraden ins Unendliche rücken läßt, erhält man drei Typen von Figuren:

a) Zwei Punkte, ihre Verbindungsstrecke und zwei von ihnen ausgehende randparallele Halbgerade (Fig. 70 oder  $\triangle MQU$  in Fig. 69). Ein solches „Dreieck“ heißt „einfach asymptotisches Dreieck“.

b) Zwei nicht auf einer Geraden liegende Halbgerade mit gemeinsamem Endpunkt und die zu beiden randparallele Gerade,  $\triangle MAB$  in Fig. 69, „zweifach asymptotisches Dreieck“.

c) Drei Gerade von folgender Eigenschaft: zerlegt man irgend eine von ihnen durch einen Punkt in zwei Halbgerade, dann ist jede dieser Halbgeraden zu genau einer der beiden anderen Geraden randparallel,  $\triangle ABU$  in Fig. 69, „dreifach asymptotisches Dreieck“.

Da die Randpunkte nach dem Vollständigkeitsatz, Nr. 36, nicht alle Axiome der h. Geometrie erfüllen können, gehören die asymptotischen Dreiecke nicht zu den eigentlichen Dreiecken. Ihr Name erinnert an eine Erweiterung der h. Ebene durch unendlich ferne Randpunkte, die der in Nr. 47 erwähnten Erweiterung der e. Ebene durch die Punkte der unendlich fernen Geraden entspricht.

**112.** Indem man einen Punkt der jeweils zu untersuchenden Seite eines asymptotischen Dreiecks durch eine

h. Bewegung auf  $M$  legt und Satz 71 b berücksichtigt, erkennt man sofort die Tatsache

a) Im einfach (zweifach, dreifach) asymptotischen Dreieck sind zwei (drei) Seiten h. unendlich groß.

Das einfach asymptotische Dreieck  $MQU$  haben wir schon in Nr. 110 behandelt, im zweifach asymptotischen Dreieck  $MAB$  der Fig 69 kann man ganz entsprechend die Folge der Dreiecke  $MA, B$ , betrachten, das dreifach asymptotische Dreieck kann man offenbar von irgend einem Punkt in seinem Innern aus in drei zweifach asymptotische Dreiecke zerlegen. Das führt unmittelbar zu dem Satze

b) In der h. Geometrie hat ein einfach asymptotisches Dreieck mit den Winkeln  $\alpha, \beta$  den Inhalt  $\pi - (\alpha + \beta)$ , der Inhalt eines zweifach asymptotischen Dreiecks mit dem Winkel  $\alpha$  ist  $\pi - \alpha$ , jedes dreifach asymptotische Dreieck hat den Inhalt  $\pi^*$ .

Gauß leitete aus dem von ihm als konstant erkannten Inhalte der dreifach asymptotischen Dreiecke die Inhaltsformel für das zweifach asymptotische Dreieck ab und fand daraus dann die Inhaltsformel für das h. eigentliche Dreieck, indem er von dem dreifach asymptotischen Dreiecke drei zweifach asymptotische Dreiecke abzog. Vgl. Gauß, Werke VIII, S. 221—223.

### Grenzkreise.

113. In der h. Geometrie sei  $C$  der Mittelpunkt eines Kreises,  $P$  ein Punkt des Kreises. Man läßt nun  $C$  in der Richtung  $P \rightarrow C$  ins Unendliche rücken und betrachtet die unendliche Folge der Kreise, welche alle durch den festen Punkt  $P$  gehen und die Lagen des bewegten Punktes  $C$  zu Mittelpunkten haben. Diese Kreise streben, wie wir sogleich erkennen werden, einer Grenzkurve zu und diese bezeichnet man als einen „Grenzkreis“. Man kann einen

\*) Man beweist leicht die Kongruenz aller dreifach asymptotischen Dreiecke, ebenso die aller inhaltsgleichen zweifach asymptotischen Dreiecke.



Grenzkreis nach dieser Definition kurz als „h. Kreis mit unendlich großem Halbmesser“ ansprechen.

Um den soeben angegebenen Grenzübergang analytisch verfolgen zu können, denken wir uns, wieder in Anwendung des Prinzips der speziellen Lage, in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  den Ausgangskreis durch eine h. Bewegung so gelegt, daß sein Punkt  $P$  auf  $M$  fällt.  $M$  wählen wir als Anfangspunkt eines rechtwinkligen e.  $X, Y$ -Koordinatensystems, dessen  $Y$ -Achse wir durch den Punkt  $\bar{M}$  legen, auf den der Mittelpunkt  $C$  des Kreises fällt, Fig. 36, S. 82. Schreiben wir in Gl. (67, 2)  $x$  und  $y$  statt  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$ , dann haben wir die Gleichung dieses Kreises, wenn wir außerdem noch berücksichtigen, daß sie für  $x = y = 0$  erfüllt sein muß. Die letzte Bedingung liefert  $r^2 - m^2 = 0$  und daher als e. Gleichung des h. Kreises

$$x^2(1 - m^2) + y^2(1 - m^4) - 2ym(1 - m^2) = 0 \quad \text{oder} \\ (113, 1) \quad x^2 + y^2(1 + m^2) - 2ym = 0.$$

Nun erhalten wir die in der Definition des Grenzkreises auftretende Schar von Kreisen, wenn wir  $\bar{M}$  gegen  $U$  laufen lassen oder, was dasselbe ist,  $m$  in den Wert  $+1$  übergehen lassen. Dann tritt an Stelle von (113, 1) die Gleichung (113, 2)

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

Dies ist demnach die e. Gleichung eines Grenzkreises. Sie stellt, e. gesprochen, eine Ellipse mit der kleinen Achse  $MU$  dar, deren Halbachsen  $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$  und  $b = \frac{1}{2}$  sind. Der Krümmungskreis dieser Ellipse im Endpunkt  $U$  ihrer kleinen Achse hat den Halbmesser  $\frac{a^2}{b} = 1$ , fällt daher mit  $(K)$  zusammen, vgl.  $(G)$  in Fig. 71, S. 138. Aus bekannten Eigenschaften der Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse oder durch unmittelbare Berechnung der Schnittpunkte der Ellipse (113, 2) mit  $(K)$  erkennt man, daß diese vier Schnittpunkte in  $U$  zusammenfallen.

Führt man, um aus der speziellen wieder in die allgemeine Lage zurückzukommen, eine automorphe Kollineation von  $(K)$  durch, dann bleibt die Ellipse als Kegelschnitt, der ganz innerhalb  $(K)$  liegt und  $(K)$  in einem Punkte vierpunktig trifft, eine Ellipse, die  $(K)$  zum Scheitelkrümmungskreis hat\*). Das gibt den Satz, für den Fig. 71 drei Beispiele zeigt:

a) In der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  sind die Grenzkreise e. Ellipsen, welche den Randkreis  $(K)$  zum Scheitelkrümmungskreis haben\*\*).

114. Liegt ein beliebiger Grenzkreis vor und legt man ihn durch eine h. Bewegung mit irgend einem seiner Punkte

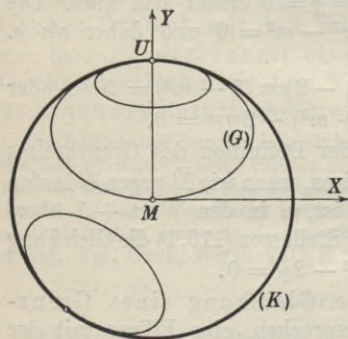


Fig. 71.

auf  $M$  und die  $Y$ -Achse durch seinen Randpunkt, dann tritt wieder der Fall der Gl. (113, 2) und damit der Ellipse  $(G)$  ein. Daraus folgen unmittelbar drei Sätze. Zunächst die Tatsache

a) Alle Grenzkreise sind h. kongruent.

Da die  $X$ -Achse Tangente an  $(G)$  in  $M$  ist und auf  $MU$  absolut senkrecht steht, ergibt sich weiterhin

b) In der h. Geometrie steht die Tangente in einem beliebigen Punkt eines Grenzkreises senk-

\*) Dabei geht der Mittelpunkt der alten Ellipse im allgemeinen nicht in den Mittelpunkt der neuen Ellipse über.

\*\*\*) Zeichnet man zu einer Ellipse die Scheitelkrümmungskreise, dann verlaufen die zu den Endpunkten der großen Achse gehörenden innerhalb der Ellipse, die zu den Endpunkten der kleinen Achse gehörenden außerhalb der Ellipse. Daher haben alle diese Ellipsen auf  $(K)$  einen Endpunkt ihrer kleinen Achse. Jede solche Ellipse stellt einen Grenzkreis dar.

recht auf der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Randpunkte des Grenzkreises.

(G) geht durch (absolute) Spiegelung an  $MU$  in sich über. Daraus schließt man

c) In der h. Geometrie geht ein Grenzkreis in sich über, wenn man ihn an irgend einer nach seinem Randpunkte laufenden Geraden spiegelt.

Zu den Grenzkreisen war J. Bolyai schon 1820 gelangt, sie waren der Ausgangspunkt seiner Entdeckungen. Gauß schlug für sie den Namen „Paracykel“ vor, benutzte gelegentlich auch die Bezeichnung „Trope“. Bei Lobatschewskij treten die Grenzkreise als „Oricyklen“ (Horocyklen) auf und führen bei ihm wie auch bei J. Bolyai zur Aufstellung der h. trigonometrischen Formeln. Vgl. hierzu auch Liebmann [7], S. 59 ff.

Vertauscht man in Gl. (113, 2) die Buchstaben  $x$  und  $y$  und berücksichtigt man die Gl. (101, 1), dann erhält man nach einfacher Umrechnung als Gleichung eines Grenzkreises in der h. analytischen Geometrie den von Lobatschewskij angegebenen Ausdruck  $2 = (e^y + e^{-y}) e^{-x}$ , wobei ein Punkt des Grenzkreises Koordinatenanfangspunkt ist und die Tangente in diesem Punkt  $\mathfrak{Y}$ -Achse.

**115.** Geht man in der Einführung uneigentlicher Punkte in der h. Geometrie noch über die in Nr. 111 herangezogenen Randpunkte hinaus, indem man „Überpunkte“ einführt, das sind in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  die eigentlichen und uneigentlichen e. Punkte der Ebene außerhalb  $(K)^*$ , dann kann man Dinge unter einheitlichen Gesichtspunkten zusammenfassen, die nach unserer bisherigen Darstellung scheinbar weit auseinanderliegen. Als Beispiel für diese Auffassung, die für die weitere Entwicklung der Nichteuklidischen Geometrie bedeutungsvoll geworden ist, seien die h. Kreise, Grenzkreise und Abstandslinien betrachtet. Aus Nr. 27 c, 66 a und 114 b folgt

\*) Ist  $A$  ein eigentlicher Punkt,  $B$  ein Überpunkt, dann hat die Entfernung der beiden Punkte voneinander einen imaginären Wert, wie sich aus Satz 71 a ergibt, da dann  $(ABUV)$  negativ wird. Auch die Überpunkte können nach dem Vollständigkeitssatze nicht mehr alle Axiome der h. Geometrie erfüllen



a) In der h. Geometrie durchsetzt ein (eigentlicher) Kreis, ein Grenzkreis, eine Abstandslinie die Geraden eines „Büschels“ senkrecht und der Büschelmittelpunkt ist im ersten Fall ein eigentlicher Punkt, im zweiten ein Randpunkt, im dritten ein Überpunkt\*).

In Fig. 35, S. 79 ist der zugehörige Büschelmittelpunkt, e. gesprochen, der uneigentliche Punkt der zu  $d$  senkrechten Richtung. Dieser Punkt hat von den Punkten von  $(C)$ , wie man sofort berechnet, h. konstanten (imaginären) Abstand. Da weiterhin die Punkte eines Grenzkreises nach Nr. 71 b von seinem Randpunkte h. unendliche Entfernungen haben, folgt

b) In der h. Geometrie kann man die Grenzkreise als Kreise mit unendlich großem Halbmesser auffassen, die Abstandslinien als Kreise mit imaginärem Halbmesser. Der Mittelpunkt eines Grenzkreises ist sein Randpunkt, der einer Abstandslinie ein Überpunkt.

Nennt man jede Gerade durch den Mittelpunkt „Durchmesser“ der betreffenden Kurve und berücksichtigt man die Sätze 61 b, 66 b und 114 c, dann ergibt sich sofort folgender weiterer Satz:

c) In der h. Geometrie geht ein (eigentlicher) Kreis, ein Grenzkreis, eine Abstandslinie durch Spiegelung an irgend einem Durchmesser in sich über.

Den letzten Satz kann man auch noch in einer etwas anderen, für manche Betrachtungen nutzbringenden Weise fassen: Spiegelt man in der h. Geometrie einen (eigentlichen) Punkt, an allen Geraden eines „Büschels“, dann bildet die Gesamtheit der so gewonnenen Punkte einen (eigentlichen) Kreis, einen Grenzkreis oder eine Abstandslinie, je

\*) Im letzten Fall ist der Büschelmittelpunkt in der Deutung  $\{D\}$  der zu  $(K)$  gehörende e. Pol der definierenden Geraden.

nachdem der Büschelmittelpunkt ein eigentlicher Punkt, ein Randpunkt oder ein Überpunkt ist.

Im folgenden wollen wir mit einer axiomatischen Bemerkung zu der ausschließlichen Betrachtung der eigentlichen Punkte zurückkehren.

### Absoluter Charakter der Strecken- und Inhaltsmessung.

**116.** In den Nrn. 29, 31 und 32 wurde die Strecken- und Winkelmessung in der absoluten Geometrie behandelt. Diese beiden Messungen zerfallen in zwei Schritte: zunächst die Festlegung einer Einheit und anschließend die Bestimmung der Maßzahl, die dann ausschließlich mit Hilfe der Axiome, vor allem der Stetigkeitsaxiome gewonnen wird.

Dabei besteht zwischen der Festlegung der Winkeleinheit und der Streckeneinheit ein grundsätzlicher Unterschied. Man kann nämlich die Winkeleinheit nach Nr. 32 festlegen, indem man dem rechten Winkel einen bestimmten Wert beilegt, etwa wie dort den Wert  $\frac{1}{2}$  oder, wie wir es in Nr. 61 in der üblichen Weise getan haben, den Wert  $\frac{\pi}{2}$ .

Da die rechten Winkel aus den Axiomen heraus als die Winkel definiert werden, die einem ihrer Nebenwinkel gleich sind, kann die Winkeleinheit durch eine Vorschrift erfaßt werden, welche nur durch die Axiome bereitgestellte Begriffe verwendet, d. h. rein axiomatisch. Anders bei der Wahl der Streckeneinheit nach Nr. 29: Man kann sie nicht rein axiomatisch definieren, sondern nur dadurch angeben, daß man sie zeigt, eine sinnliche Wahrnehmung zu Hilfe nimmt.

Daraus, daß bei der Winkelmessung auch der obenerwähnte zweite Schritt rein axiomatisch ist, folgt, daß ein Geometer einem anderen die Winkelmessung mit Worten so beschreiben kann, daß der zweite Geometer, wenn er die gleiche Deutung des Axiomensystems wie der erste

denkt, jedem Winkel dieselbe Größe beilegt wie der erste, und daß der zweite auch dann eindeutig die Größe jedes Winkels erhält, wenn die beiden nach Nr. 15 mit verschiedenen Deutungen des Axiomensystems arbeiten. Bei der Festlegung der Einheitsstrecke aber müssen beide zunächst dieselbe Deutung denken und der erste muß überdies dem zweiten eine bestimmte, durch die Axiome allein in keiner Weise logisch faßbare Strecke als Einheitsstrecke zeigen.

Dieser Sachverhalt wird durch den mit der Einführung des e. Parallelenaxioms V gewonnenen Übergang zur e. Geometrie nicht verändert und gilt auch für die auf der Streckenmessung aufgebaute e. Inhaltsmessung, d. h.

a) Im axiomatischen Aufbau der e. Geometrie kann die Winkelmessung rein logisch definiert, aus den Axiomen mit Worten beschrieben werden, sie ist dann in jeder beliebigen Deutung des Axiomensystems bestimmt; die Strecken- und die Inhaltsmessung dagegen ist nicht rein logisch definierbar, sie kann nur in jeder einzelnen Deutung des Axiomensystems und durch Aufzeigen einer Einheit festgelegt werden.

Man charakterisiert den durch diesen Satz klargestellten Unterschied zwischen den beiden Messungen in der e. Geometrie dadurch, daß man sagt, es gibt in der e. Geometrie zwar eine „absolute“ Winkelmessung, aber keine absolute, sondern nur eine „relative“ Strecken- und Inhaltsmessung\*).

117. Setzt man die absolute Geometrie nicht in der e., sondern durch Einführung des Nichteuklidischen Parallelenaxioms V' in der h. Geometrie fort, dann ändert sich

---

\*) Eine Verwechslung mit der in Nr. 60 in ganz anderem Sinn eingeführten Bezeichnung „absolut“ ist wohl ausgeschlossen, dort wurde sprachliche Anlehnung an den Ausdruck „absolute Geometrie“ erstrebt, der ebenfalls mit der hier eingeführten Bedeutung von „absolut“ nichts zu tun hat.



an dem absoluten Charakter der Winkelmessung dadurch nichts, aber hier wird auch die Streckenmessung absolut: Ist z. B. eine  $h$ . Strecke gegeben, dann trägt man vom einen Endpunkte der Strecke aus eine zu ihr senkrechte kongruente Strecke an und erhält damit ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck. Ist  $\alpha$  die Größe von dessen spitzen Winkeln, dann ist wegen Gl. (93, 6) die Länge  $a$  der gegebenen Strecke durch  $cha = \cotg \alpha$  aus den  $h$ . Axiomen heraus bestimmt, ohne daß eine Einheitsstrecke in sinnlich wahrnehmbarer Weise aufgezeigt werden müßte. Der absolute Charakter der  $h$ . Inhaltsmessung endlich folgt unmittelbar daraus, daß sie nach Satz 105 c allein auf der Winkelmessung beruht. D. h.

a) In der  $h$ . Geometrie gibt es eine absolute Winkelmessung und eine absolute Strecken- und Inhaltsmessung.

Der Vergleich der Sätze 116 a und 117 a liefert die Erkenntnis

b) Die  $h$ . ist der  $e$ . Geometrie axiomatisch darin überlegen, daß man in ihr die Größen der Winkel, Strecken, Flächen rein logisch-axiomatisch definieren kann, während dies in der  $e$ . Geometrie nur bei den Winkeln und bei den Streckenverhältnissen und Flächenverhältnissen möglich ist.

Mehr als dieser Satz ausspricht, kann man im axiomatischen Aufbaue der  $e$ . Geometrie und damit auch in dem der absoluten Geometrie nicht erreichen. Letzten Endes handelt es sich bei diesem Unterschiede zwischen der  $h$ . und der  $e$ . Geometrie um eine Folge des Satzes 70 a, nach dem es in der  $h$ . Geometrie, im Gegensatze zur  $e$ ., keine ähnlichen Figuren gibt.

Schon Lambert hatte erkannt, daß die Hypothese des spitzen Winkels wegen des Wegfallens ähnlicher Figuren zu einer absoluten Längeneinheit führt, und auch Gauß hat sich spätestens 1808 mit dieser Tatsache eingehend beschäftigt.

## VI. Abschnitt.

## Schlußbetrachtungen.

**Beweiskraft der Deutung {D}.**

118. Im vorstehenden haben wir die h. Sätze mittels der Deutung {D} gefunden. Dieser Weg ist für den mit der e. Geometrie Vertrauten bequem, und die Ergebnisse, zu denen er führt, prägen sich dem Gedächtnisse leicht ein, vor allem wegen der anschaulichen Einfachheit der Deutung {D}. Zudem wird dabei der unmittelbare Zusammenhang zwischen der Widerspruchslosigkeit der h. und der e. Geometrie klar beleuchtet.

Und doch kann man einen sehr ernst zu nehmenden Einwand gegen dieses Verfahren machen, der sich allerdings entkräften läßt. Der Einwand ist der folgende: Wenn man h. Sätze in der Weise ableitet, daß man e. Aussagen vermittels der Deutung {D} in h. verwandelt, dann ist es denkbar, daß dabei Sätze als h. gefunden werden, die gar nicht zur h. Geometrie gehören, da sie nicht in jeder Deutung des h. Axiomensystems gelten.

Es würde uns hier zu weit führen, im einzelnen auf dieses Bedenken einzugehen, wir wollen nur den Weg der Widerlegung andeuten: Allein auf den Axiomen der h. Geometrie aufbauend kann man, wie es z. B. Lobatschewskij getan hat, in eindeutiger Weise die h. Trigonometrie und analytische Geometrie entwickeln, überhaupt alle in den Axiomen vorkommenden geometrischen Begriffe analytisch fixieren. Das kann man nun in jeder Deutung des h. Axiomensystems durchführen, daher sind die verschiedenen Deutungen analytisch identisch, und alle Sätze, die man auf dem Weg über die Deutung {D} findet, gehören in dem Sinne zum Bestande der h. Geometrie, daß sie in jeder Deutung des h. Axiomensystems gelten.

**Die elliptische Geometrie.**

**119.** Die in Nr. 9 zuerst genannte Hypothese des stumpfen Winkels hatte G. Saccheri als mit anderen e. Axiomen unverträglich ablehnen können. Auf dem Wege analytischer differentialgeometrischer Betrachtungen gelangte B. Riemann (1826—66) in seiner berühmt gewordenen Probevorlesung „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ im Jahre 1854 zu zwei von der h. Geometrie verschiedenen, dem Parallelenaxiom widersprechenden Geometrien, in welchen es zu einer beliebigen Geraden durch einen beliebigen Punkt keine Parallele gibt. Es ist das die aus der sphärischen Trigonometrie bekannte sphärische Geometrie, die schon dem I. Postulat Euklids widerspricht\*), weiterhin eine Geometrie, in der die Hypothese des stumpfen Winkels erfüllt ist. In der Folge wurden diese vielfach als „Riemannsche Geometrien“ bezeichnet.

Auf Ergebnissen von A. Cayley (1821—95) fußend, hat der weitbekannte Göttinger Mathematiker F. Klein (1849—1925) die unseren Betrachtungen zugrunde liegende Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  für das Axiomensystem der h. Geometrie gefunden und darüber hinaus durch projektive Betrachtungen einen überraschend einfachen Zusammenhang zwischen der h. Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai und der Riemannschen nicht-sphärischen Geometrie aufgedeckt\*\*). Für die letztgenannte prägte er den Namen „elliptische Geometrie“.

**120.** Das für uns Wesentlichste der Kleinschen Überlegungen ist folgendes:

Wie man in der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  der h. Geometrie nach

\*) Die „Geraden“ sind hier größte Kreise, und es gibt Paare von Punkten, z. B. Nord- und Südpol, die nicht nur eine Gerade, sondern eine unendliche Menge von Geraden bestimmen.

\*\*\*) Vgl. hierzu die autographierten Vorlesungshefte von F. Klein über Nicht-euklidische Geometrie aus W. S. 1889/1890 und S. S. 1890.



Satz 71 a die h. Streckenlänge durch den projektiven Begriff des Doppelverhältnisses fassen kann, so ist es auf dem Weg über das Imaginäre auch möglich die h. Winkelgröße durch ein Doppelverhältnis auszudrücken, indem man den Wert des (komplexen) Doppelverhältnisses  $\delta$  bestimmt, das die Schenkel des Winkels mit den (konjugiert komplexen) vom Scheitel ausgehenden Tangenten an den Randkreis bilden; einer der Werte von  $\frac{i}{2} \cdot \ln \delta$  ist dann die h. Größe des betreffenden Winkels\*). Damit sind, wenn man von der unwesentlichen Verschiedenheit der Konstanten in beiden Messungen absieht, die h. Strecken- und die Winkelgrößen projektiv erfaßt, und zwar in zueinander dualer Weise unter Verwendung der Punkte und Tangenten des Randkreises. Daher lassen sich nun, wenn man noch die Randpunkte und die Überpunkte der Nr. 115 einführt, die Sätze der h. Geometrie als Sätze der projektiven Geometrie mit Auszeichnung des Randkreises aussprechen.

Es liegt nun nahe die h. Geometrie projektiv zu verallgemeinern, zunächst, indem man an Stelle des Randkreises einen beliebigen reellen, nicht zerfallenden Kegelschnitt wählt. Das liefert nichts Neues. Setzt man dagegen an die Stelle des reellen Randkegelschnittes einen imaginären Kegelschnitt mit reellen Koeffizienten, etwa den imaginären Kreis ( $I$ )  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , und macht man projektiv dieselben Aussagen wie vorher in bezug auf ( $K$ ) jetzt in bezug auf ( $I$ ), dann erhält man eine neue Geometrie, eben die elliptische. Die h. und die elliptische Geometrie unterscheiden sich in dieser projektiven Auffassung nur dadurch, daß im einen Fall ein reeller Kegelschnitt

---

\*) Die Ableitung dieses Satzes ist nicht schwer, würde uns aber hier zu weit führen.

zugrunde gelegt wird, im anderen Fall ein nicht reeller Kegelschnitt\*).

In der elliptischen Geometrie deutet man alle Punkte der e. Ebene, in der ( $I$ ) liegt, als elliptische Punkte, dazu noch die Punkte der uneigentlichen Geraden der e. Ebene. Als Abstand zweier Punkte  $A$ ,  $B$  definiert man den mit einer rein imaginären Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses  $(ABU\bar{U})$ , wobei  $U$  und  $\bar{U}$  die konjugiert komplexen Punkte sind, in denen die Gerade  $AB$  den Kreis ( $I$ ) trifft. Die elliptische Größe des Winkels zweier Halbgeraden wird projektiv dual dazu gefaßt, genau wie oben die h. Winkelgröße. Da der Kreis ( $I$ ) keinen reellen Punkt hat, gibt es hier auch keine parallelen Geraden. Die Gerade hat hier keinen unendlich fernen Punkt, und diese Analogie zur Ellipse veranlaßte Klein zur Bezeichnung „elliptische Geometrie“. Nun kann man in vollständiger projektiver Analogie zur h. die elliptische Geometrie aufbauen. Als Grenzfall zwischen beiden ergibt sich die Euklidische Geometrie, von Klein in diesem Zusammenhange „parabolische Geometrie“ genannt.

Man zählt vielfach die elliptische Geometrie neben der h. zu den Nichteuklidischen Geometrien, und zwar deshalb, weil auch in ihr das Euklidische Parallelenaxiom nicht erfüllt ist. Sie unterscheidet sich aber von der h. dadurch, daß sie nicht alle übrigen Axiome der e. Geometrie erfüllt, was aus unserer Nr. 57 folgt. Daß schon ein Widerspruch der elliptischen Geometrie zu einem der Axiome I—III vorliegen muß, zeigt Satz 24c. Hier wird daher die Bezeichnung „Nichteuklidische Geometrie“ in erweitertem Sinne gebraucht, in einem Sinne, der axiomatisch noch andere Nichteuklidische Geometrien zuläßt als die h. und die elliptische.

\*) Dessen Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten lauter reelle Konstante enthält.

### Geometrie und Wirklichkeit.

**121.** Die Frage, welche der beiden Geometrien die „wirkliche“ ist, die Euklidische oder die hyperbolische, ist so alt wie die h. Geometrie. Gauß, Lobatschewskij, J. Bolyai stellten fest, daß weder Beobachtungen an terrestrischen noch solche an astronomischen Dreiecken eine meßbare Abweichung der Winkelsumme von  $\pi$  ergeben hätten.

Man kann auch ein „geometrisches Experiment“ anstellen, indem man etwa drei Punkte  $P, Q, R$  einer Geraden mit einem Punkt  $S$  außerhalb der Geraden verbindet und dann die Strecken  $SP, SQ, SR$  über den von  $S$  verschiedenen Endpunkt hinaus mit dem Zirkel um sich selbst verlängert. Dann erhält man drei Punkte  $A, B, C$ , und je nachdem diese in einer Geraden liegen oder nicht, ist die e. oder nach Satz 77 b die h. Geometrie die „wirkliche“. Bisher wurden diese drei Punkte immer in einer Geraden liegend gefunden.

**122.** Was kann man auf diesen Wegen entscheiden? Daß man noch keine meßbare Abweichung von der e. Geometrie gefunden hat, kann zunächst daran liegen, daß sich die Messungen in einem zu kleinen Bereich abspielten, da in einem gegen einen Punkt hin konvergierenden Bereich, wie man auch an der Deutung  $\{\mathfrak{D}\}$  erkennt (indem man diesen Punkt auf  $M$  legt), die h. Geometrie gegen die e. konvergiert.

Angenommen aber, man fände im Beispiele des geometrischen Experiments drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann könnte man nur schließen, daß die beiden gleichzeitigen Annahmen der Geradlinigkeit des benützten Lineals und der Konstanz der Zirkelöffnung bei der Verdoppelung der Strecken sich mit den Axiomen der e. Geometrie nicht vertragen, daß man mit anderen Worten die e. Geometrie nicht in dieser Weise physisch deuten kann. Ebenso würde man im zuerst genannten Beispiele



der Dreieckssumme aus einer meßbaren Abweichung von  $\pi$  nur schließen können, daß von den dabei gemachten Annahmen mindestens eine für die physische Deutung der e. Axiome unbrauchbar ist, z. B. die Annahme, daß sich die Lichtstrahlen geradlinig fortpflanzen.

Man kann so grundsätzlich nicht darüber entscheiden, ob eine Geometrie oder die andere „wirklich“ ist, nur darüber, ob sie sich mit gewissen physikalischen Annahmen über die Deutung der geometrischen Begriffe verträgt. Sind diese Annahmen besonders einfach und naheliegend, dann folgt aus der Zulässigkeit dieser Annahmen für die physische Deutung der Geometrie nur, daß diese Geometrie gut anwendbar, daß sie bequem ist.

**123.** Beide Geometrien, die e. und die h., sind nach Nr. 54 gleich wahr im Sinne von gleich widerspruchslos. Ob man darüber hinaus der Frage nach Wahrheit einer Geometrie überhaupt einen Sinn zuerkennt und wie man sie, wenn das der Fall sein sollte, beantwortet, das ist keine mathematische Angelegenheit mehr, sondern eine erkenntnistheoretische, deren Erledigung wesentlich von dem philosophischen Axiomensystem abhängt, von dem man dabei ausgeht. Daher läuft die Frage nach der über die Widerspruchslosigkeit hinaus wahren Geometrie auf die Frage hinaus, welches philosophische System das absolut wahre ist. Die Geschichte der Philosophie spricht nicht dafür, daß diese Frage je in objektiv zwingendem Sinne beantwortet werden wird.



## Register.

Die Zahlen geben nicht die Seiten sondern die Nummern des Buches an; e. bedeutet Euklidisch, h. hyperbolisch.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <p><b>Absolut(e) Geometrie</b> 14.<br/>         — Kongruenz 60.<br/>         — Längeneinheit 8.<br/>         — rechte Winkel 60.<br/>         — Spiegelung 60.<br/>         — Streckenmessung 117.<br/>         — Symmetrie 60.<br/>         — Winkelmessung 113, 117.<br/>         Abstandslinien 65, 66, 115.<br/>         Ähnlichkeit 6, 38, 70, 117.<br/>         Äquivalenz von Axiomen 6.<br/>         Äußeres des Kreises 27.<br/>         — des Winkels 21.<br/>         Analytische Geometrie e.<br/>         38.<br/>         — h. 101—104, 114.<br/>         Ankreise eines h. Dreiecks 86.<br/>         Archimedes, Archimedisches Axiom 28—31, 34, 37, 45, 90, 91, 106.<br/>         Astralgeometrie 10.<br/>         Asymptotische Gerade 63.<br/>         — Dreiecke 111, 112.<br/>         Automorphe Kollineationen 48—50.<br/>         Axiome der Anordnung 18, 19, 39, 40.<br/>         — der Kongruenz 20—22, 41—44, 49—51.<br/>         — der Parallelen 37, 38, 52, 55, 56.<br/>         — der Stetigkeit 28—33, 45.<br/>         — der Verknüpfung 17, 39, 40.<br/>         — Euklids 3.<br/>         — Hilberts 17.</p> <p><b>Baldus, R.</b> 15, 16, 28, 54.<br/> <b>Baltzer, R.</b> 90.</p> | <p><b>Bartels I. M. C.</b> 11.<br/>         Bewegung e. 22.<br/>         — h. 58, 105.<br/> <b>Boehm, K.</b> 15.<br/> <b>Bolyai, J.</b> 11, 12, 14, 20, 63, 66, 85, 87, 95, 100, 108, 114, 119.<br/>         — W. 11, 87.<br/> <b>Bonola, R.</b> 4, 8, 108.</p> <p><b>Cantor, G., Cantorsches Axiom</b> 28, 30—32, 34, 36, 37, 45.<br/> <b>Cayley, A.</b> 119.</p> <p><b>Dedekind, R.</b> 30.<br/>         Defekt eines h. Dreiecks 105.<br/>         Definitionen Euklids 2, 15, 54.<br/> <b>Dehn, M.</b> 6.<br/>         Deutung 15, 17, 36, 53, 57.<br/>         — <math>\{D\}</math> 58, 65, 67, 71, 72, 113, 115, 118—120.<br/>         Divergierende Gerade 63.<br/>         Doppelverhältnis 40, 41, 46, 120.<br/>         Dreiecksinhalt h. 105, 106.<br/>         Dreiteilung des Winkels 33.<br/>         Dualbrüche 29, 31.<br/>         Dyadisches System 29.</p> <p><b>Einfachheit eines Axiomensystems</b> 5.<br/>         Einheitsstrecke 29, 31, 71.<br/>         Elemente Euklids 1.<br/>         Elliptische Geometrie 119, 120.<br/>         Enden einer Geraden 63.</p> | <p><b>Engel, F.</b> 4, 7—11, 95.<br/> <b>Enriques, F.</b> 13, 27, 30, 34, 54.<br/> <b>Eudoxus</b> 28.<br/> <b>Euklid</b> 1—6, 12—17, 19, 20, 22, 23, 25—28, 33, 37—40, 52—54, 57, 61, 90, 91.<br/>         Euklidische Geometrie 1, 37, 57.<br/>         Euklidisches Parallelenaxiom 2, 3, 12, 14, 28, 37—39, 52, 53, 57, 77, 87, 90, 91, 105.<br/>         Euklidisches Verhalten zw. Punkt u. Gerader 37.<br/> <b>Euler, L.</b> 91, 95.</p> <p><b>Feigl, G.</b> 19.<br/> <b>Finzel, A.</b> 106.<br/>         Flächeninhalt des h. Dreiecks 8, 105, 106, 111.<br/>         — des h. Kreises 107, 108.<br/>         Formalisierung 16.<br/>         Fundamentalkonstruktionen h. 82—85.</p> <p><b>Gauß, C. F.</b> 10—13, 19, 20, 63, 66, 90, 95, 105, 112, 114, 116, 117.<br/>         Gegensinnige Punktreihen 78.<br/>         Gemeinsames Lot zweier Überparalleler 64, 73, 82.<br/>         Gerade 2, 17.<br/>         — h. 40, 102, 103.<br/>         Gleichheit der rechten Winkel 23.<br/>         Gleichsinnige Punktreihen 78.</p> |
|--|---|--|

- Gleichung h. einer Geraden 102.  
 — eines h. Grenzkreises 114.  
 — eines h. Kreises 104.  
 Grenzkreise 113—116.  
 Größer 25.  
 Gruppeneigenschaft 50.  
 Gudermann, Ch. 90.
- Halbgerade 19.  
 Heiberg, I. L. 1.  
 Hessesche Normalform der h. Geraden 102, 103.  
 Hilbert, D. 13—15, 17, 18, 20—23, 27, 28, 63.  
 Hjelmstev, J. 79.  
 Hjelmstevsche Mittellinie 79—81.  
 Höhenfußpunktdreieck h. 89.  
 Höhenschnittpunkt eines h. Dreiecks 88, 90, 91.  
 Horocycel 114.  
 Hyperbolische Funktionen 72, 99, 102.  
 — Geometrie 39, 52—54, 57, 58, 71.  
 Hyperbolisches Verhalten zwischen Punkt und gerader Linie 54, 56.  
 Hypercycel 66.  
 Hypothese des rechten Winkels 7.  
 — des spitzen Winkels 7, 8, 10, 11, 117.  
 — des stumpfen Winkels 7, 33, 119.
- Imaginäre Geometrie 11, 95.  
 Inhalt des h. Dreiecks 105, 106.  
 — des h. Kreises 107.  
 Inhaltmessung 38, 116, 117.  
 Inkreis 27, 86.  
 Inneres des Kreises 27.  
 — des Winkels 21, 49.
- Klein, F. 119, 120.  
 Kleiner 25.  
 Kollineationen 46, 48, 50.  
 Kongruenzpunktreihen 78.  
 Kongruenz 20—22, 42.  
 — von h. Winkeln 49.  
 Kongruenzsatz 1. 23, 51; 2. 26; 3. 23; 4. 26; 5. 70, 85.
- Koordinaten, rechtwinklige 35, 101.  
 Kreise 2, 27.  
 — h. 67, 104, 115.  
 Kreisinhalt h. 107.  
 Kreisumfang h. 99, 100.
- Lambert, J. H. 8, 11, 66, 84, 95, 105, 117.  
 Länge 29.  
 Längeneinheit, absolute 8, 117.
- Legendre, A. M. 8.  
 Liebmann, H. 4, 8, 11, 19, 33, 63, 72, 84, 85, 94, 101, 108, 114.  
 Lobatschewskij, N. I. 11, 12, 63, 74, 85, 95, 104, 114, 118, 119.  
 Lotlänge h. 73, 74, 82—85.
- Mittellinien im h. Dreieck 91.  
 Mittelsenkrechte im Dreieck 77, 87, 90, 91.
- N-Ecke h. reguläre 61, 96—98, 100, 107.  
 Nichteuclidische Geometrie 10, 14, 39, 58, 120.  
 Nichteuclidisches Parallelenaxiom 55—58, 117.
- Oricycel 114.  
 Orthogonalität h. 62.
- Pangeometrie 11.  
 Parabolische Geometrie 120.  
 Paracycel 114.  
 Parallele Gerade 2, 24, 37, 63, 64, 109, 110, 120.  
 Parallelenaxiom e. 2, 3, 12, 14, 28, 37—39, 52, 53, 57, 77, 87, 90, 91, 105.  
 — Nichteuclidisches 55—58, 117.  
 Parallelogramme h. 75.  
 Parallelwinkel 74, 82—85, 104.
- Pasch, M. 6, 18, 19, 21, 37.  
 Pol und Polare 47, 48, 62.  
 Positiv gerichtete h. Strecken 43.  
 Postulate Euklids 3, 53.  
 Prinzip der speziellen Lage 59, 61.
- Punkte 2, 17.  
 — h. 40.  
 Pythagoräischer Lehrsatz 38, 93.
- Quadrat h. 75.  
 Quadratur des Kreises 11, 108.
- Räumliche Anschauung 15, 16.  
 Randparallele Gerade 63, 64, 73, 103, 110.  
 Randkreis 40.  
 Randpunkte 63, 111, 115, 120.  
 Raute h. 75.  
 Rechteck, h. Analogon 75.  
 Rechte Winkel 23, 32, 61.  
 Rechtwinkeliges Dreieck h. 93.  
 Rechtwinkelige Koordinaten 35, 101.  
 Reguläre  $n$ -Ecke h. 61, 96—98, 100, 107.  
 Relative Messung 116.  
 Riemann, B. 119.  
 Rosenthal, A. 21, 22.
- Saccheri, G. 7, 8, 33, 56, 66, 119.  
 Schur, F. 13, 16, 54.  
 Schweikart, F. K. 10, 95.  
 Seiten einer Geraden 19.  
 Sphärische Geometrie 119, 120.  
 — Trigonometrie 95.  
 Spitzeck 84.  
 Stäckel, P. 4, 7—11, 95.  
 Stetigkeitsaxiome 29—34, 45.  
 Strecken 18.  
 — h. 40, 42.  
 Streckenmessung 29.  
 — h. 71, 72, 116.  
 Symmetriepunkt zweier Überparalleler 64, 78, 80—82.
- Tangente 27, 34, 66.  
 Taurinus, Fr. A. 95.  
 Transzendente Trigonometrie 95.  
 Trapeze h. 76.  
 Trigonometrie h. 92—95, 114, 118.



- |   |  |  |
|---|--|--|
| <p>Trope 114.<br/>Tropfke, J. 26, 90, 91.</p> <p>Überparallele 63, 64, 73,<br/>103, 109.</p> <p>Überpunkte 63, 115, 120.</p> <p>Umfang des h. Kreises 99,<br/>100.</p> <p>Umkreis eines h. Dreiecks<br/>87 90, 91.</p> <p>Uneigentliche Elemente e.<br/>47.<br/>— h. 71, 115.</p> <p>Unendlich ferne Punkte e.<br/>47.<br/>— h. 71.</p> | <p>Vollständigkeit eines<br/>Axiomensystems 5, 6,<br/>13, 17, 38.</p> <p>Vollständigkeitsaxiom 28,<br/>36.</p> <p>Vollständigkeitssatz 36, 47,<br/>57, 111, 115.</p> <p>Weber, H. 34.</p> <p>Weierstraß, K. 30.</p> <p>Weierstraß'sche Koordina-<br/>ten 101.</p> <p>Wellstein, J. 34.</p> <p>Widerspruchslosigkeit 53,<br/>54, 118.</p> | <p>Winkel 21.</p> <p>Winkel im Halbkreis h.<br/>7, 69.</p> <p>Winkeleinheit 32, 61, 116.</p> <p>Winkelkongruenz 21.<br/>— h. 49.</p> <p>Winkelmessung 32.<br/>— h. 67, 68, 116, 120.</p> <p>Winkelsumme im Dreieck<br/>6—8, 33, 69.<br/>— im h. Viereck 69.</p> <p>Wirklichkeit 15, 54, 121.</p> <p>Zacharias, M. 13, 28.</p> <p>Zerlegungsgleichheit 106.</p> <p>Zwischen 18, 22, 40.</p> |
|---|--|--|



# Mathematische Literatur in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 10

**Journal für die reine und angewandte Mathematik.** Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger. Wissenschaftlicher Beirat: H. Brandt, M. Dehn, G. Doetsch, A. Fraenkel, O. Haupt, F. Hausdorff, E. Hellinger, G. Kowalewski, H. Rademacher, K. Reidemeister, A. Rosenthal, C. Schaefer, W. Schmeidler, F. Schottky, O. Toeplitz. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155 u. 156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II). Band 159—166 je RM. 36.—, Band 167 RM. 56.—, Band 168 RM. 36.—

*Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.*

**Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.** Gegründet von Carl Ohrtmann und Felix Müller, fortgeführt von Emil Lampe, Arthur Korn, Leon Lichtenstein. Herausgegeben ab Band 51 von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter: Georg Feigl. Band 1—57: Jahrgang 1868—1931. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 RM. 75.—, Band 46 RM. 92.—, Band 47 RM. 74.—, Band 48 RM. 121.—, Band 49 RM. 77.—, Band 50 RM. 78.—, Band 53 (1927) RM. 117.—, Band 54 (1928) RM. 135.—, Band 55, 1. Halbband (1929 I) RM. 65.—. In Bearbeitung: Band 52 (1926), Band 55, 2. Halbband (1929 II), Band 56 (1930), Band 57 (1931).

Das Jahrbuch kann ab Band 51 (1925) nicht nur als Ganzes, sondern auch in einzelnen Sonderheften bezogen werden. Jedes Sonderheft umfaßt einen oder zwei der Hauptabschnitte des Jahrbuchs. Es erscheinen folgende Sonderhefte: I. Geschichte, Philosophie, Pädagogik; Mengenlehre. II. Arithmetik und Algebra. III. Analysis. IV. Geometrie. V. Angewandte Mathematik.— Preise auf Anfrage.

**Revue semestrielle des publications mathématiques** vereinigt mit Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik uitgegeven door de Preußische Akademie der Wissenschaften met bijzondere medewerking van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. Redactie: Georg Feigl, Hendrik de Vries. Band 37 (Jahrgang 1932) . . . . . RM. 12.— Band 1—36 Preise auf Anfrage.

*Mit Beginn des Jahres 1932 wurden das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ und die „Revue semestrielle des publications mathématiques“ zu einer deutsch-niederländischen Publikation vereinigt. Die Ausgabe erfolgt in zwei Teilen, die auch einzeln bezogen werden können, und zwar unter den Titeln:*

*Revue semestrielle des publications mathématiques vereinigt mit Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik uitgegeven door de Preußische Akademie der Wissenschaften met bijzondere medewerking van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. Redactie Georg Feigl, Hendrik de Vries. Revue semestrielle des publications mathématiques.*

*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik vereinigt mit Revue semestrielle des publications mathématiques herausgegeben von der Preußischen Akademie*

der Wissenschaften unter besonderer Mitwirkung der Wisskundig Genootschap te Amsterdam. Schriftleiter Georg Feigl, Hendrik de Vries. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

Die „Revue semestrielle“ hat die Aufgabe, schnellstens einen Überblick über die in Betracht kommenden Veröffentlichungen zu geben, und erscheint dementsprechend, statt wie bisher halbjährlich, in Zweimonatsheften. Sie enthält ein nach Zeitschriften geordnetes Verzeichnis der in den einschlägigen Zeitschriften erschienenen Arbeiten, falls nötig mit verdeutlichenden Untertiteln sowie ein Titelverzeichnis der erschienenen Bücher und ein Titelverzeichnis der erschienenen Buchbesprechungen; bei jedem Titel wird die Gebietsmarke des „Jahrbuchs“ und der „Revue semestrielle“ angegeben. Der Preis dieses Teils ist so niedrig bemessen, daß auch Privatpersonen sich die Anschaffung nicht zu versagen brauchen. Er beträgt jährlich RM. 12.—. Das „Jahrbuch“ enthält in der bisher üblichen Form die Referate.

- G. W. Borchardts gesammelte Werke.** Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften herausg. von G. Hettner. Mit dem Bildnis Borchardts. Quart. IX, 511 Seiten. 1888. . . . . RM. 17.—
- G. Lejeune Dirichlets Werke.** Herausg. auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker. 2 Bände. Quart.  
1. Band. Mit Dirichlets Bildnis. X, 644 Seiten. 1889. . . . RM. 21.—  
2. Band. Fortgesetzt von L. Fuchs. X, 422 Seiten. 1897. . . RM. 18.—
- Carl Gustav Jakob Jacobi, Gesammelte Werke.** Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Quart.  
1. Band. Herausg. von C. W. Borchardt. Mit dem Bildnis Jacobis. X, 546 Seiten. 1881.  
2.—7. Band. Herausg. von K. Weierstraß. 1882—1891. Preise auf Anfrage.
- J. L. Lagrange, Mathematische Werke.** Deutsch herausg. von A. L. Crelle. 3 Bände. Oktav.  
1. Band. Die Theorie der analytischen Funktionen. CXXVIII, 694 S. 1823.  
2. Band. Vorlesungen über die Functionen-Rechnung. XXII, 1023 S. 1823.  
3. Band. Theorie der Gleichungen. XVI, 552 Seiten. 1824.  
Preise auf Anfrage. Band 3 ist vergriffen.
- Jacob Steiner, Gesammelte Werke.** Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften herausg. von K. Weierstraß. 2 Bände. Okt.  
1. Band. Mit 44 Figurentafeln und Steiners Bildnis. VIII, 527 S. 1881. RM. 16.—  
2. Band. Mit 23 Figurentafeln. X, 743 Seiten. 1882. . . . RM. 18.—
- Festschrift zur Feier des 20jährigen Bestehens der Calcutta Mathematical Society.** Groß-Oktav. VIII, 310 Seiten. 1930 . . . . Geb. RM. 20.—  
*Dieser stattliche Festband enthält 27 wertvolle Beiträge hervorragender Mathematiker aus Amerika, Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Japan, Indien, Italien, Österreich, Polen, Rußland, der Schweiz und Ungarn.*
- Geschichte der Mathematik.** Von Oberstudien-Dir. Prof. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. 1922. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Nr. 226, 875) . . Geb. je RM. 1.62
- Geschichte der Mathematik. I. Teil:** Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18) . Geb. RM. 17.40  
II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudien-Dir. Prof. Dr. H. Wieleitner in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 222 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64.) Geb. RM. 3.50
- Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.** Von Professor Dr. Johannes Tropicke, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Lexikon-Oktav.



- Band 1: Rechnen. VII, 222 Seiten. 3. Aufl., 1930. R.M. 12.—, geb. R.M. 13.20  
 Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 2. Aufl., 1921. R.M. 8.50, geb. R.M. 9.50  
 Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 2. Aufl., 1922. R.M. 6.—, geb. R.M. 7.—  
 Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 2. Aufl., 1922. R.M. 9.—, geb. R.M. 10.—  
 Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 2. Aufl., 1923. R.M. 7.50, geb. R.M. 8.50  
 Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 2. Aufl., 1924. R.M. 7.—, geb. R.M. 8.—  
 Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 2. Aufl., 1924. R.M. 6.50, geb. R.M. 7.50

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“  
*Naturwissenschaften.*

**Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren.** Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923 . . . . . R.M. 0.80  
 Dasselbe in englischer Sprache. 1923 . . . . . R.M. 0.80

**Neue Rechentafeln.** Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 . . . . . Geb. R.M. 20.—  
 Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . . Geb. je R.M. 20.—

**Dr. A. L. Crelles Rechentafeln,** welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 . . . . . Geb. R.M. 26.—  
 Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor . . . . . Geb. je R.M. 26.—

**Fünfstellige Logarithmen.** Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Reg.-Rat Prof. A. Adler. Zweite Aufl. 117 S. u. 1 Taf. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. R.M. 1.62

*Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.*

**Fünfstellige Logarithmentafeln** der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 . . . . . Geb. R.M. 7.—

*In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benutzung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der achsstelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.*

**Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln.** Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Kölnischen Realgymnasiums, Berlin. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931 . . . . . Geb. R.M. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“

*Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.*

**Vierstellige Tafeln und Gegentafeln** für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neudruck 1926. (Samml. Götschen Bd. 81) . . . . . Geb. RM. 1.62

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“

*Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.*

**Vierstellige Logarithmentafeln.** Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 . . . . . Geb. RM. 1.50

„Diese Logarithmentafel zeichnet sich durch übersichtliche Anordnung und Reichtum des Gebotenen aus.“ *Deutsche Schulzeitung in Polen.*

**Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker.** Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Fünfunddreißigste bis vierzigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 188 Seiten und eine Tafel. 1929 . . . . . Geb. RM. 6.75

**Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen  $e^x$  und  $e^{-x}$**  mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1931. RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschiedenen großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“

*Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.*

**Mathematische Formelsammlung.** Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuauflage von Dr. F. Ringleb. Mit 38 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 256 Seiten. 1931. (Sammlung Götschen Bd. 51) . . . . . Geb. RM. 1.62

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgezielt ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“ *Fortschritte der Mathematik.*

**Mathematische Mußstunden.** Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert. Vierte Auflage, neu bearbeitet von Professor Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav, 245 Seiten. 1924. Geb. RM. 6.—

„Das kleine, auch äußerlich hübsch ausgestattete Buch wird allen Lesern Freude machen, und insbesondere der Lehrer wird in ihm eine Fülle von Anregungen für den Unterricht vorfinden. Wir empfehlen die ‚Mußstunden‘ allgemeiner Beachtung.“ *Zeitschrift für das Realschulwesen.*

**Arithmetik** nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Dritte Auflage, neubearbeitet von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 5 Figuren. 132 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 47) . . . . . Geb. RM. 1.62

Die neue Bearbeitung des vorliegenden Bandes ist durch einen Abschnitt über Kombinatorik bereichert.

- Mengenlehre.** Von Professor Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren. 160 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 999) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Der Band behandelt die grundlegenden Tatsachen der Mengenlehre, die für alle Zweige der Mathematik so große Bedeutung gewonnen hat. Die Definition der Menge erfolgt im Anschluß an Cantor. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt.*
- Mengenlehre.** Von Dr. F. Hausdorff, o. Professor an der Universität Bonn. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 285 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 7) . . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.50  
*Das Lehrbuch setzt beim Lesen keine höheren mathematischen Kenntnisse als die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, allerdings aber eine gewisse Schärfe des abstrakten Denkens voraus und wird von Studierenden in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden können.*
- Einführung in die Axiomatik der Algebra.** Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. X, 198 Seiten. 1926. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6) . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50  
*Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.*
- Lehrbuch der Algebra.** Von Dr. Alfred Loewy, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915 . . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.20
- Elementare Algebra.** Von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. 1926. (Sammlung Göschen Bd. 930) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*„Der erste Teil des Bandes behandelt die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, der zweite besondere Gleichungen und Lösungsverfahren. Dem Text sind gut gewählte Zahlenbeispiele beigegeben.“ Allg. Vermessungs-Nachrichten.*
- Höhere Algebra.** Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Marburg.  
 I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 931) Geb. RM. 1.62  
 II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 932) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der „allgemeinen“ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht.*
- Algebraische Theorie der Körper.** Von Prof. Dr. Ernst Steinitz. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Dr. Reinhold Baer und Prof. Dr. Helmut Hasse. Oktav. 134 Seiten und 27 Seiten Erläuterungsheft. 1930. RM. 9.—, geb. RM. 10.20
- Algebra I: Die Grundlagen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8.) Geb. RM. 11.50
- Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9) . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.50  
*Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.*
- Praxis der Gleichungen.** Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.—



*Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.*

**Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra.** Von Professor Dr. Hermann Schubert, Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. Neudruck. 1931. (Samml. Göschen Bd. 48) Geb. RM. 1.62

**Gruppentheorie.** Von Dr. Ludwig Baumgartner in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Determinanten.** Von Studienrat Professor Paul B. Fischer, Dritte, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1932. (Samml. Göschen Bd. 402) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Einführung in die Determinantentheorie** einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden, Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50  
*„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“* Schulwart.

**Zahlentheorie.** Von Dr. Kurt Hensel, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. RM. 10.—, geb. RM. 12.—

**Grundlehren der neueren Zahlentheorie.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Dritte, neu durchgesehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haußner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. XVI, 252 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3) RM. 9.50, geb. RM. 10.50

*Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.*

**Synthetische Zahlentheorie.** Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 277 Seiten. 1925. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4) . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 12.—

*Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.*

**Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung.** Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 . . . . . RM. 2.50

*In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.*

**Irrationalzahlen.** Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. VIII, 186 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1)

RM. 6.—, geb. RM. 7.—

*Inhalt: Die Grundlagen — Der Begriff der Grenze — Potenzen und Logarithmen — Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale — Algebraische und transzendente Zahlen.*

**Punkt- und Vektor-Rechnung.** Von Dr. Alfred Lotze, Privatdoz. für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13) . . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.—

*Das Buch gibt eine Einführung in die Punktrechnung, einschließlich der Vektorrechnung, welche dabei als Teilgebiet der umfassenden Punktrechnung erscheint. Neben der ursprünglichen Großmannschen Darstellung, die sich auf den Fall der Euklidischen Geometrie beschränkte, wird auch eine rein projektive Begründung der Punktrechnung durchgeführt. Der zweite Teil enthält zahlreiche Anwendungen auf Algebra, projektive und Differentialgeometrie sowie auf Mechanik und zeigt daran die Vorsüge und die Tragweite der entwickelten Methoden.*

- Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik.** Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Fig. Sechste, verb. Aufl. Neue Ausg. Lex.-Okt. VIII, 743 S. 1932. Geb. RM. 15.—  
*Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.*
- Das Kontinuum.** Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Von Dr. Hermann Weyl, o. Professor an der Universität Göttingen. Unveränderter Neudruck. V, 84 Seiten. 1932. RM. 3.—
- Niedere Analysis.** Von Professor Dr. Benedikt Sporer. Mit 5 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Sechster Abdruck. 179 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 53) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Mit 94 Figuren und 185 Beispielen. 191 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Integralrechnung.** Von Dr. Fr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 132 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 88) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen.“ Magazin für Pädagogik.*
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Von Rektor Dr. Fr. Junker. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfährt bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.*
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.** Von Rektor Dr. Fr. Junker. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 135 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 147) Geb. RM. 1.62  
*„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden.“ Schweizer Pädagogische Zeitschrift.*
- Elementare Reihenlehre.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.*
- Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) . Geb. RM. 1.62
- Fouriersche Reihen.** Von Dr. W. Rogosinski, a. o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen.** Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 16.—  
*„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann.“ Allgemeine Österr. Chemiker- u. Techniker-Zeitung.*
- Lehrbuch der Differentialgleichungen.** Von Dr. Heinrich Liebmann, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901 . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20

**Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage.** Von Dr. Ludw. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922 . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.—

*Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.*

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920)

Geb. RM. 1.62

*Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.*

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 197 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10)

RM. 9.—, geb. RM. 10.50

*Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.*

**Partielle Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt.*

**Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14)

RM. 11.—, geb. RM. 12.—

*In diesem einführenden Lehrbuch, das seine Eigenart ganz aus dem bewährten Programm von „Göschens Lehrbücherei“ herleitet, werden sowohl lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie sie in der mathematischen Physik vorkommen, als auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung behandelt, sowohl Randwert- als auch Anfangswertprobleme, durchweg unter Beschränkung auf zwei unabhängige Veränderliche; es wird auch eine Einführung in die häufig benutzte Theorie der Integralgleichungen gegeben.*

**Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. G. Hoheisel. 1932. (Sammlung Göschen Bd. 1059) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Integralgleichungen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 18) . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

**Funktionentheoretische Vorlesungen.** Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

*Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.*

**Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.



Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 140 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 668) . . . . . Geb. RM. 1.62  
 Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 138 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 703) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“*  
*Monatsschrift für Mathematik und Physik.*

**Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 877) Geb. RM. 1.62  
 Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie“ (Samml. Göschen Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.*

**Einführung in die konforme Abbildung.** Von Dr. Ludwig Bieberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. 131 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 768) Geb. RM. 1.62

*„Der Autor faßt seine Aufgabe, eine Einführung in die konforme Abbildung zu geben, in doppeltem Sinne auf. Er vermittelt dem Leser die eigentlich elementaren Teile der Theorie der konformen Abbildung; andererseits eröffnet er durch Eingehen auf einzelne neue Entwicklungen den Zugang zu den modernsten und tiefsten Untersuchungen der gesamten Funktionentheorie.“*

*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*

**Automorphe Funktionen.** Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. X, 205 Seiten. 1924. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5) RM. 8.—, geb. RM. 9.20

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

**Elliptische Funktionen.** Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten, Neudruck 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . Geb. RM. 20.—

II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80

**Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.** Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923 . . . . . RM. 3.50, geb. RM. 4.—

**Potentialtheorie.** Von Dr. W. Sternberg, a. o. Professor in Breslau.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) . . . . . Geb. RM. 1.62

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944) . . . . . Geb. RM. 1.62

*„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen.“*

*Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht.*

**Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.** Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

- I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) . . . . . Geb. RM. 4.—
- II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) Geb. RM. 4.—
- Numerische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschel Bd. 864) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.*
- Graphische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschel Bd. 801) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Methoden der praktischen Analysis.** Von Dr. Fr. A. Willers, o. Professor a. d. Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschels Lehrbücherei Bd. 12) . . . . . RM. 20.—, geb. RM. 21.50  
*Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.*
- Praktisches Zahlenrechnen.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschel Bd. 405) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.*
- Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschel Bd. 922) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.*
- Geodäsie** (Landesvermessung u. Erdmessung). Von Prof. Dr. Gustav Förster. Mit 33 Figuren. 122 Seiten. 1927. (Samml. Göschel Bd. 102) Geb. RM. 1.62
- Vermessungskunde.** Von Dr.-Ing. P. Werkmeister, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.
- I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 146 Figuren. Fünfte Auflage. 163 Seiten. 1932. (Samml. Göschel Bd. 468) . . . . . Geb. RM. 1.62
  - II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Dritte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschel Bd. 469) . . . . . Geb. RM. 1.62
  - III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Topographie. Mit 61 Figuren. Zweite Auflage. 136 Seiten. 1923. (Samml. Göschel Bd. 862) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Grundlagen der Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschels Lehrbücherei Bd. 17) . . . . . RM. 6.50, geb. RM. 7.80  
*Inhalt: I. Gleichheit, Ordnung und Stetigkeit. II. Die Messung durch Zahlen. (Streckenmessung, Winkelmessung, Flächenmessung.) III. Die projektive Geometrie in der Ebene. (Der Fundamentalsatz. Analyse des Fundamentalsatzes. Beweis des Fundamentalsatzes.) IV. Die projektive Geometrie im Raume. (Der Fundamentalsatz. Der Desarguessche Satz. Die Koordinatengeometrie.) V. Künstliche Geometrien.*
- Ebene Geometrie.** Von G. Mahler, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 166 Seiten. 1922. (Samml. Göschel Bd. 41) Geb. RM. 1.62
- Grundzüge der ebenen Geometrie.** Von Professor Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Figuren. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2) Geb. RM. 3.90
- Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3) . . . . . Geb. RM. 4.40

Das Buch enthält die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die beigegebenen Beispiele sollen den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit und Bedeutsamkeit der Trigonometrie gewähren. Das letzte Kapitel bietet die wichtigsten Anwendungen der Sphärik auf die mathematische Geographie.

**Ebene und sphärische Trigonometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 99) Geb. RM. 1.62

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“

*Archiv der Mathematik und Physik.*

**Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie.** Von Dr. Fritz Heiland, Studienrat am Gymnasium in Jena. Mit 26 Fig. 152 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 848) . . . . . Geb. RM. 1.62

Die Sammlung schließt sich nach Anordnung und Bezeichnung dem Lehrbuch Hessenbergs (Samml. Göschen Bd. 99) an. Wichtigere Formeln sind vorangestellt, zum Teil mit Ableitung. Zu sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen angegeben.

**Stereometrie.** Von Professor Dr. Robert Glaser. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. Mit 81 Figuren. 139 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 97) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie.** Von Professor Dr. Robert Glaser. Mit 54 Figuren, 168 Seiten. 1917. (Samml. Göschen Bd. 779) Geb. RM. 1.62

*Aufgaben über Prisma und Zylinder — Projektionszeichnen — Pyramiden und Kegel — Kugel und Kugelteile — konoidartige Körper — Prismatoide — schiefe abgeschnittene Prismen und Zylinder — Guldinische Regel.*

**Einführung in die analytische Geometrie.** Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929 . . . . . Geb. RM. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

**Lehrbuch der analytischen Geometrie.** Von Dr. Friedrich Schur, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912.

RM. 6.50, geb. RM. 7.70

**Analytische Geometrie der Ebene.** Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 65) . . . . . Geb. RM. 1.62

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnisse voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen, vornehmlich über die Kegelschnitte.

**Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene** mit den vollständigen Lösungen. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 22 Figuren im Text. 139 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 256) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Analytische Geometrie des Raumes.** Von Professor Dr. Max Simon, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 208 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 89) . . . . . Geb. RM. 1.62

Das Werk besitzt den Charakter eines ausführlichen Lehrbuches; es gibt eine übersichtliche und abgeschlossene Darstellung der analytischen Geometrie des Raumes nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung und bietet zuverlässige Belehrung über die analytisch-geometrischen Theorien.

**Aufgaben zur analytischen Geometrie des Raumes.** Von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. 109 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 309) . . . . . Geb. RM. 1.62



Die vorliegende Sammlung ist für die erste Einführung bestimmt. Sie soll dem Schüler oder Studierenden Gelegenheit geben, die analytischen Methoden anzuwenden, die Gebilde in ihren verschiedenen Lagen und ihren besonderen Füllensowie ihre Beziehungen zueinander zu erfassen und zugleich seine Raumanschauung zu bilden.

**Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Die Elementargeometrie wird nicht vom Standpunkte des Schulunterrichts, sondern von dem der Wissenschaft aus behandelt. Ausgangspunkt ist das (etwas modifizierte) Hilbertsche Axiomensystem. In der Darstellung treten zwei Momente in den Vordergrund: die geschichtliche Entwicklung und die prinzipielle Begründung der einzelnen Gebiete.

**Koordinatensysteme.** Von Professor Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 507) . . . Geb. RM. 1.62

Der Verfasser versucht den Koordinatenbegriff von einem allgemeinen Standpunkt aus darzustellen. Durch sorgfältig ausgewählte, zahlreiche Literaturangaben wird der Wert des Bandes erhöht.

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschens Bd. 970) . . Geb. RM. 1.62

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

**Nichteuklidische Geometrie.** Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuclidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

**Kreis und Kugel.** Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

**Algebraische Kurven.** Neue Bearbeitung von Prof. Dr. H. Wieleitner, Oberstudiendirektor in München.

Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 435) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 123 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 436) . . . Geb. RM. 1.62

**Liniengeometrie mit Anwendungen.** Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) . . . Geb. RM. 18.—

II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51) Geb. RM. 9.50

**Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung.** Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Fünfte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Göschens Bd. 72)

Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Göschens Bd. 876) Geb. je RM. 1.62

**Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie.** Von Prof. Dr. H. Timerding. 1932. (Sammlung Göschens Bd. 1060) . . . Geb. RM. 1.62

**Geometrische Transformationen.** Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50

**Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 19)

RM. 15.50, geb. RM. 17.—

**Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.** Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50  
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922  
RM. 15.—, geb. RM. 16.50

*Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Register erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.*

**Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.** Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. V. Kummerell in Tübingen und Prof. Dr. K. Kummerell in Tübingen. I: Krümmung der Raumkurven und Flächen. Vierte Auflage. Mit 38 Figuren. 205 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 20)  
Geb. RM. 10.—

II: Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. Vierte Auflage. Mit 22 Figuren. 1931 . . . Geb. RM. 10.—

**Vektoranalysis** in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929 . . . . . RM. 5.—, geb. RM. 6.—

**Vektoranalysis.** Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschens Bd. 354) . . . Geb. RM. 1.62

**Darstellende Geometrie.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.

Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 142) . . . . . Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 143) . . . . . Geb. RM. 1.62

Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 65 Figuren im Text. 141 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 144) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. Neudruck 1932. . . . . Geb. RM 18.90

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten. Mit 118 Figuren. Neudruck. 1932. Geb. RM. 8.55

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . . . . RM. 10.80, geb. RM. 12.—

**Darstellende Geometrie.** Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—  
II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) Geb. RM. 7.50

*„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen.“ Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.*

- Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1.62  
*Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.*
- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Von Wilhelm Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.  
 I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 302) Geb. RM. 1.62  
 II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitungen zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.*
- Versicherungsmathematik.** Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München.  
 I. Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 180) . . . . . Geb. RM. 1.62  
 II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917) . . . . . Geb. RM. 1.62  
*Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.*
- Politische Arithmetik.** (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. Emil Foerster, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879) Geb. RM. 1.62  
*In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.*
- Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik.** Von Professor Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. J. Runge. Mit 71 Abbildungen. 149 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 728) Geb. RM. 1.62  
*Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.*
- Graphische Statik** mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bauwerksschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695) Geb. je RM. 1.62
- Statik.** I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Privatdozent Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Karlsruhe. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) . . . . . Geb. RM. 1.62  
 II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 61 Abbildungen. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179) . . . . . Geb. RM. 1.62
- Kinematik.** Von Dr.-Ing. Hans Polster, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 584) Geb. RM. 1.62



*Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und Wälzhebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.*

**Dynamik.** Von Prof. Dr. Wilhelm Müller. I: Dynamik des Einzelkörpers. Mit 70 Figuren. 160 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 902) Geb. RM. 1.80  
II: Dynamik von Körpersystemen. Mit 51 Figuren. 137 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 903) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Aerodynamik des Fluges.** Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Von Professor Dr. Harry Schmidt. Mit 81 Figuren. VII, 258 Seiten. 1929 . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

*Der Verfasser gibt mit diesem Werk ein exakt einführendes Lehrbuch für Studierende und bereits in der Praxis stehende Ingenieure, das auf einem Minimum an hydrodynamischen und mathematischen Kenntnissen aufbaut.*

*Es entwickelt dementsprechend ausführlich die erforderlichen hydrodynamischen und funktionentheoretischen Hilfsmittel und insbesondere die Methoden der konformen Abbildungen. Im Zusammenhang mit diesen wurden die Kutta-Joukowski-Misessche Theorie der unendlich breiten Tragfläche wie auch die Prandtl'sche Tragflügeltheorie besonders ausführlich entwickelt.*

**Festigkeitslehre.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten und 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) . . . . . Geb. RM. 1.62

*In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.*

**Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen.** Von R. Haren. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage von Josef Furtmayr, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 491) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.*

**Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . . Geb. je RM. 1.62

*Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger, Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.*

**Einführung in die geometrische Optik.** Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Nach der Einleitung über die Grundgesetze der geometrischen Optik folgen die Abschnitte über die Reflexion an ebenen Flächen und sphärischen Flächen. Dann wird die Berechnung an ebenen Flächen, an einer Kugelfläche und durch ein zentriertes System von Kugelflächen behandelt. In Kapitel VI finden die Linsen und Linsensysteme Beachtung.*

**Technische Tabellen und Formeln.** Von Reg.-Baurat a. D. Prof. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 105 Figuren. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 579) . . . . . Geb. RM. 1.62

**Theoretische Physik.** Von Dr. Gustav Jäger, Professor der Physik an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Band: Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 76) . . . . . Geb. RM. 1.62

II. Band: Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. RM. 1.62

III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 78) Geb. RM. 1.62

IV. Band: Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 374) Geb. RM. 1.62

V. Band: Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 128 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1017) . . . . . Geb. RM. 1.62

*Allen, welche sich ein Kompendium der theoretischen Physik anschaffen wollen, seien diese Bändchen empfohlen. Der Verfasser hat den Stoff aus dem Gesamtgebiet sorgfältig ausgewählt und dabei die neuesten Resultate der Forschung berücksichtigt.*

**Einführung in die theoretische Physik** mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. RM. 13.50, geb. RM. 15.—  
II. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930. RM. 15.50, geb. RM. 17.—

*Die vorliegende neue (5. und 6.) Auflage bringt die Kapitel „Atomtheorie“ und „Statistische Physik“ in fast völlig neuer Behandlung, der Teil „Relativitätstheorie“ ist vermehrt und zum Teil umgearbeitet.*

**Einführung in die theoretische Physik.** Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929.

RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band: Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. X, 660 Seiten. 1929 . . . . RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band: 1932. In Bearbeitung.

*„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“*  
*Annalen der Physik.*

**Das Naturbild der neuen Physik.** Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. Mit 8 Figuren im Text. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Groß-Oktav. V, 129 Seiten. 1932.

RM. 5.—, geb. RM. 6.—

**Atomphysik.** Von Dr. Hans Leßheim in Breslau. I. Band: Mit 36 Abbildungen. 134 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 1009) Geb. RM. 1.62

**Vorlesungen über Thermodynamik.** Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. XI, 288 Seiten. 1930. Geb. RM. 11.50

---

---

**VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.  
IN BERLIN W 10 UND LEIPZIG**

Buchdruckerei Otto Regel, G. m. b. H., Leipzig





2100

S-06



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301280



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298005