

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

~~26~~

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

**Raumkurven und Anfänge der
Flächentheorie**

Von

Prof. Dr. Rudolf Rothe

Mit 32 Abbildungen



1113

Sammlung Götschen

Unser heutiges Wissen in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen

Jeder Band in Leinwand geb. RM. 1.62

Bei gleichzeitiger Abnahme gleicher oder inhaltlich zusammengehöriger
Bände treten folgende Gesamtpreise in Kraft: 10 Exemplare RM. 14.40;

25 Exemplare RM. 33.25; 50 Exemplare RM. 63.—

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Götschen'sche Verlagsbuchhandlung / J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leicht-
verständliche und übersichtliche Einführung
in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und
Technik zu geben; in engem Rahmen, auf
streng wissenschaftlicher Grundlage und unter
Berücksichtigung des neuesten Standes der
Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen
zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne
Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber
dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zu-
sammenhang. Die Sammlung ist ein Ganzes,
wobei jedes Bändchen eine wichtige, un-
verzichtbare Rolle spielt.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295770

N u
der l

i f f e
postfrei

Bibliothek zur Mathematik u. Astronomie

a u s d e r S a m m l u n g G ö s c h e n

- Geschichte der Mathematik** von Oberstudienleiter
Dr. H. Wieleitner. 2 Bände Nr. 226, 875
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben** zusammengestellt von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Haufner. Nr. 81
- Fünfstellige Logarithmen** von Direktor Prof. Aug. Adler. Nr. 423
- Mathematische Formelsammlung** v. Prof. O. Th. Bürklen. Neubearb. von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Fig. Nr. 51
- Formelsammlung zur praktischen Mathematik** von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. Nr. 1110
- Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades** von Prof. Dr. H. Schubert, neubearb. von Prof. P. B. Fischer. Nr. 47
- Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra** v. Prof. Dr. Herm. Schubert, neubearb. v. Prof. P. B. Fischer. M. 8 Fig. Nr. 48
- Höhere Algebra** von Prof. Dr. H. Hasse. 2 Bände . Nr. 931, 932
- Aufgabensammlung zur Höheren Algebra** von Prof. Dr. H. Hasse Nr. 1082
- Mengenlehre** von Prof. Dr. E. Kamke. Mit 6 Figuren . . Nr. 999
- Determinanten** von Prof. P. B. Fischer Nr. 402
- Gruppentheorie** von Dr. Ludw. Baumgartner. Mit 6 Fig. Nr. 837
- Praktisches Zahlenrechnen** v. Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Figuren Nr. 405
- Elementare Reihenlehre** von Prof. Dr. H. Falckenberg. Mit 4 Fig. im Text Nr. 943
- Komplexe Reihen** nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen von Prof. Dr. H. Falckenberg. Mit 3 Fig. . Nr. 1027
- Fouriersche Reihen** von Prof. Dr. W. Rogosinski. Mit 4 Figuren Nr. 1022
- Differentialrechnung** von Prof. Dr. A. Witting. Mit 94 Figuren und 185 Beispielen Nr. 87
- Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung** von Prof. Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren im Text und 405 Beispielen und Aufgaben Nr. 146
- Integralrechnung** von Prof. Dr. A. Witting. Mit 63 Figuren und 190 Beispielen Nr. 88
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Prof. Dr. A. Witting. Mit 32 Fig. u. 305 Beisp. Nr. 147
- Gewöhnliche Differentialgleichungen** v. Dr. G. Hoheisel Nr. 92)
- Partielle Differentialgleichungen** v. Prof. Dr. G. Hoheisel Nr. 1033
- Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen** von Prof. Dr. G. Hoheisel Nr. 1059
- Integralgleichungen** von Prof. Dr. G. Hoheisel Nr. 1099
- Variationsrechnung I.** Von Prof. Dr. L. Koschmieder. Mit 21 Fig. Nr. 1074
- Elemente der Funktionentheorie** von Prof. Dr. K. Knopp Nr. 1109
- Funktionentheorie** von Prof. Dr. Konrad Knopp.
- I. Grundlagen der allg. Theorie der analyt. Funktionen. Mit 8 Fig. Nr. 668
- II. Anwendungen u. Weiterführung d. allgem. Theorie. M. 7 Fig. Nr. 703

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie von Prof. Dr. K. Knopp. 2 Bde.	Nr. 877, 878
Einführung in die konforme Abbildung von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach. Mit 42 Zeichnungen	Nr. 768
Potentialtheorie v. Dr. W. Sternberg. 2 Bände. Mit 6 Fig.	Nr. 901, 944
Vektoranalysis von Prof. Dr. Siegf. Valentiner. Mit 13 Fig.	Nr. 354
Graphische Integration v. Dr. F. A. Willers. Mit 53 Fig.	Nr. 801
Numerische Integration von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Fig.	Nr. 864
Ebene und sphärische Trigonometrie von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren	Nr. 99
Projektive Geometrie von Prof. Dr. H. Timerding. Mit 38 Figuren	Nr. 72
Aufgabensammlung zur Projektiven Geometrie von Prof. Dr. H. Timerding. Mit 65 Figuren	Nr. 1060
Darstellende Geometrie v. Prof. Dr. Rob. Haubner u. Dr. Wolfgang Haack. 4 Bde. Mit zahlreich. Figuren. Nr. 142, 143, 144, 1063	
Nichteuclidische Geometrie von Prof. Dr. R. Baldus. Mit 71 Fig.	Nr. 970
Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs. Mit 56 Figuren	Nr. 532
Analytische Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haubner. Mit 60 Fig. im Text	Nr. 65
Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene von Prof. Dr. R. Haubner. Mit 22 Figuren	Nr. 256
Analytische Geometrie des Raumes von Prof. Dr. R. Haubner. Mit 36 Figuren	Nr. 89
Koordinatensysteme von Prof. P. B. Fischer. Mit 8 Figuren	Nr. 507
Algebraische Kurven. Neue Bearb. v. Prof. Dr. H. Wieleitner. I. Gestaltl. Verhältnisse. Mit 97 Figuren	Nr. 435
II. Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren	Nr. 436
Wahrscheinlichkeitsrechnung von Prof. Dr. O. Knopf. 2 Bände. Mit 10 Figuren	Nr. 508, 871
Politische Arithmetik von Dr. E. Förster	Nr. 879
Versicherungsmathematik von Prof. Dr. Friedr. Boehm. 2 Bände	Nr. 180, 917
Ausgleichsrechnung n. d. Methode d. kleinsten Quadrate von Prof. W. Weitbrecht. 2 Bde. Mit 16 Fig.	Nr. 302, 641
Vermessungskunde von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. 3 Bände. Mit 294 Figuren	Nr. 468, 469, 862
Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung) von Prof. Dr. G. Förster. Mit 33 Figuren	Nr. 102
Mathematische Instrumente v. Dr. Fr. A. Willers. M. 68 Fig.	Nr. 922
Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neubearb. v. Prof. Dr. Herm. Kobold. I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren	Nr. 11
II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Fig. und 2 Sternkarten	Nr. 529

Sammlung Göschen

Differentialgeometrie

I

Raumkurven und Anfänge der Flächentheorie

Von

Dr. Rudolf Rothe

o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin

Mit 32 Abbildungen



W a l t e r d e G r u y t e r & C o .

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Berlin 1937 Leipzig

KD 513,73



1-301280

~~79/26~~

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Archiv-Nr. 11 11 13

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35.
Printed in Germany.

Akc. Nr. _____

~~4/21~~ 51

3011-3-569/2016

Inhaltsverzeichnis.

I. Raumkurven.

	Seite
§ 1. Analytische Darstellung der Raumkurven	
1. Vorbemerkungen. Parameterdarstellung einer Raumkurve	6
2. Andere Darstellungen einer Raumkurve	7
3. Beispiele	9
4. Komplexe Kurven	10
5. Bemerkungen über Minimalvektoren	11
6. Einführung eines anderen Parameters	12
§ 2. Tangente, Bogenlänge, Normale, Schmiegungeebene	
7. Tangente	12
8. Linienelement, Bogenlänge	13
9. Beispiele	14
10. Tangentenvektor	15
11. Normalebene	15
12. Schmiegungeebene	16
13. Ebene Kurven	18
14. Schmiegungeebene als Ebene „benachbarter“ Tangenten	19
15. Hauptnormale	20
§ 3. Krümmung und Windung	
16. Krümmung k einer Raumkurve	21
17. Krümmungsachse	22
18. Binormale	23
19. Windung κ	23
20. Berechnung der Windung κ	24
21. Ausdrücke für k und κ bei beliebigem Parameter	25
§ 4. Hauptgleichungen und begleitendes Dreibein	
22. Die Hauptgleichungen der Kurventheorie	28
23. Anwendung: Allgemeine Schraubenlinien	29
24. Das begleitende Dreibein	31
25. Das begleitende Dreibein als Basis	32
26. Die ganze Krümmung	34
27. Radiusvektor, entwickelt nach Potenzen der Bogenlänge	35
§ 5. Die sphärischen Bilder	
28. Die sphärischen Bilder	37
29. Sphärisches Tangentenbild	38
30. Sphärisches Binormalenbild	40
31. Sphärisches Bild der Hauptnormalen	42
§ 6. Differentialinvarianten	
32. Bewegungen im Raume. Invarianten	46
33. Invarianten der Bewegung	49
34. Invarianten der Parameterdarstellung	50
35. Einführung der Bogenlänge. Eigentliche und uneigentliche Invarianten der Darstellung	51
36. Fundamentalinvarianten	52
§ 7. Natürliche Gleichungen	
37. Natürliche Gleichungen	54
38. Beispiel	54
39. Bestimmung aller Kurven mit gegebenen natürlichen Gleichungen	55

	Seite
40. Fortsetzung	56
41. Zurückführung der Aufgabe auf eine Riccatische Differentialgleichung	57
42. Beispiel: Bestimmung aller Kurven, bei denen das Verhältnis der Krümmung zur Windung einen festen Wert m hat	60
43. Invariante Bestimmung einer Kurve aus ihren natürlichen Gleichungen	62
44. Fortsetzung	64
45. Beispiel	66
46. Der Ausnahmefall $m = 0$	69
47. Sehne und zugehöriger Bogen	71
 § 8. Berührung höherer Ordnung	
48. Berührung n -ter Ordnung zwischen Kurve und Fläche.....	73
49. Fortsetzung	74
50. Schmiegungsfläche in einem Kurvenpunkte	74
51. Erstes Beispiel: Schmiegungebene	75
52. Zweites Beispiel: Schmiegungs-kugel	76
53. Sphärische Kurven	77
54. Berührung n -ter Ordnung zwischen zwei Raumkurven	79
55. Schmiegungskurve in einem Punkte einer gegebenen Raumkurve	81
56. Schmiegungs-kreis	81
 § 9. Evolventen und Evoluten	
57. Tangentenfläche einer Raumkurve	82
58. Fadenevolventen (Filarevolventen)	83
59. Fadenevoluten	84
60. Planevolventen	86
61. Bertrandsche Kurven	87
62. Formel von Schell	89
 § 10. Minimalkurven	
63. Minimalpunkte und Minimalkurven erster und zweiter Art	89
64. Gemeinsame Bedingung für Minimalkurven	90
65. Lehrsatz.....	90
66. Parameterdarstellung der Minimalkurven erster Art	92
67. Einführung eines invarianten Parameters	93
68. Parameterdarstellung einer Raumkurve mit integralloser Bestimmung der Bogenlänge	97
69. Anwendung auf Minimalkurven erster Art	98
 II. Anfänge der Flächentheorie. Kurven auf Flächen	
§ 1. Analytische Darstellung einer Fläche	
70. Parameterdarstellung einer Fläche	99
71. Wechsel der Parameter	101
72. Kugel, bezogen auf Breitenkreise und Meridiane	101
73. Kugel, bezogen auf die erzeugenden Geraden	102
74. Schraubenfläche	105
75. Ebene in schiefwinkligen cartesischen Koordinaten	105
76. Drehfläche	106
77. Tangentenfläche einer Raumkurve	107
78. Geradlinige Flächen („Regelflächen“).	108
79. Gerade Konoide	108
80. Höhenlinien, Karte einer Fläche	109

	Seite
§ 2. Berührungsebene, Linienelement, Flächennormale	
81. Berührungsebene	110
82. Linienelement	111
83. Beispiele	112
84. Flächennormale	114
85. Oberflächenelement	115
86. Begleitendes Dreiein der Fläche	115
87. Zwei Formeln für $[r_u \mathfrak{N}]$ und $[r_p \mathfrak{N}]$	116
§ 3. Kurven auf einer krummen Fläche; Schnittwinkel; Krümmungstheorie	
88. Kurven auf einer krummen Fläche. Schnittwinkel	116
89. Beispiel: Loxodromen	118
90. Schichtlinien und Falllinien	119
91. Tangentialnormale einer Flächenkurve	121
92. Normalkrümmung und Tangentialkrümmung, Normalwindung und Tangentialwindung	121
93. Satz von Meusnier (1776)	123
94. Normalschnitte und Meusnierscher Satz	124
95. Die Fälle $n = 0$, $g = 0$, $\gamma = 0$	125
§ 4. Bemerkungen über die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander	
96. Übereinstimmung der Linienelemente	126
97. Beispiel: Katenoid und Schraubenfläche	127
98. Tangentenfläche einer Raumkurve auf die Ebene abwickelbar ...	128
99. Kegelflächen und Zylinder	129
Register	131

Literaturverzeichnis.

(Nur die deutsche Literatur ist berücksichtigt.)

1. Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 2. Aufl., Berlin 1924.
2. Duschek, A., und Mayer, W., Lehrbuch der Differentialgeometrie I, Leipzig und Berlin, 1930.
3. Knoblauch, J., Grundlagen der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1913.
4. Kommerell, V. und K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I, 4. Aufl. Berlin 1931.
5. v. Lilienthal, R., Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Leipzig 1908.
6. Scheffers, G., Einführung in die Theorie der Kurven, 3. Aufl., Berlin und Leipzig, 1923.

Hinsichtlich der wenigen in diesem Bändchen verwendeten Sätze aus der Vektorrechnung sei auf das Buch

Valentiner, S., Vektoranalysis, Nr. 354 dieser Sammlung, hingewiesen.

I. Raumkurven.

§ 1. Analytische Darstellung der Raumkurven.

1. Vorbemerkungen. Parameterdarstellung einer Raumkurve. Aus der Anschauung entnehmen wir, daß die Lage eines Punktes P in unserem (Euklidischen) Raume durch drei reelle geordnete Zahlen x, y, z bestimmt wird, die man als rechtwinklige Cartesische Koordinaten in bezug auf ein dreiachsiges räumliches Koordinatenkreuz deuten kann. Ist O der Ursprung dieses Achsenkreuzes, so sind x, y, z die Komponenten des Ortsvektors (Radiusvektors) $\overline{OP} = \mathbf{r} = \{x, y, z\}$, dessen Länge $|\overline{OP}| = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, wobei der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beizulegen ist. Sie kann für reelle Komponenten nur verschwinden, wenn alle drei Komponenten Null sind, oder wie man sagt, wenn der Vektor selbst Null ist.

Nun seien die Komponenten x, y, z des Vektors \mathbf{r} eindeutige hinreichend oft differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen (Parameter) t mit gemeinsamem Definitionsbereich ($\alpha \leq t \leq \beta$). Die Menge aller Punkte P mit den Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ oder mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, die sich ergeben, wenn t den Bereich ($\alpha \dots \beta$) stetig durchläuft, heißt eine Raumkurve (genauer: ein Raumkurvenstück). Wenn jedem zulässigen Wert von t genau ein Punkt P entspricht, und wenn man sich die Werte von t in genügend dichter Folge (in runden Zahlenwerten) an die zugehörigen Punkte P herangeschrieben denkt, so entsteht eine Skala des Parameters t längs der Raumkurve.

Beispiel:

(1) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct$ ($0 \leq t < 2\pi$)
stellt eine Windung einer gewöhnlichen Schraubenlinie

dar, die auf dem Kreiszyylinder mit dem Halbmesser a und der z -Achse als Zylinderachse gelegen ist und die Ganghöhe $h = 2\pi c$ hat; t bedeutet den von der positiven x -Achse aus gerechneten Zentriwinkel im Kreise $x^2 + y^2 = a^2$ der xy -Ebene (Abb. 1). Falls die x -, y -, z -Achse in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, ist die Schraubenlinie rechtsgewunden¹⁾ für $c > 0$, links gewunden für $c < 0$, und für $c = 0$ geht sie in einen Kreis über.

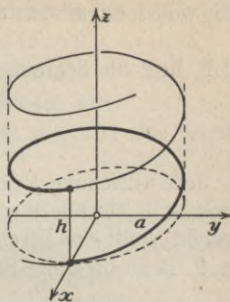


Abb. 1.

2. Andere Darstellungen einer Raumkurve. Wenn man aus der Gleichung $x = x(t)$ die Umkehrungsfunktion $t = t(x)$ bestimmt — nach dem Satz über unentwickelte Funktionen²⁾ ist dazu notwendig

$$x'(t) \neq 0$$

— und in die beiden anderen Gleichungen $y = y(t)$, $z = z(t)$ einsetzt, so entstehen zwei Gleichungen von der Form

$$y = f(x), \quad z = g(x).$$

Dies sind die Gleichungen von zwei Zylinderflächen, die auf der xy -Ebene und auf der zx -Ebene senkrecht stehen, und deren Schnittkurve die betrachtete Raumkurve ist. Entsprechend kann man, wenn $y'(t) \neq 0$ ist, zwei Zylinderflächen finden, die auf der xy -Ebene und auf der yz -Ebene senkrecht stehen. Man kann auch sagen, daß diese Zylinder die Raumkurve auf die drei Koordinatenebenen projizieren. Eine solche Projektion ist nur dann unmöglich, wenn alle drei Ableitungen verschwinden, d. h. wenn der Vektor $\mathbf{r}'(t)$ ein Nullvektor ist.

¹⁾ Rechts gewunden sind Schrauben, wie man sie gewöhnlich im Handel als Holzschrauben zu kaufen kriegt; ebenso ist der Korkenzieher eine Rechtsschraube.

²⁾ Vgl. z. B. des Verf. „Höhere Mathematik“, Bd. I, 4. Aufl. (1934) S. 113. (Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.)

Wir wollen daher stets annehmen:

$$\mathbf{r}'(t) \neq 0.$$

Z. B. liegt die Schraubenlinie (1) auf den Zylindern

$$\begin{aligned} y &= a \sin z/c, \\ x &= a \cos z/c, \\ x^2 + y^2 - a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jede Gleichung $F(x, y, z) = 0$, die zwischen x, y, z identisch, d. h. für alle Werte von t in dem betrachteten Bereiche besteht, stellt eine Fläche dar, auf der die Raumkurve gelegen ist. Z. B. ist die obige Schraubenlinie auf der Schraubenfläche

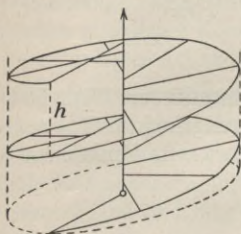


Abb. 2.

$$(2) \quad \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \frac{z}{c} = 0$$

gelegen (Abb. 2).

Wenn $G(x, y, z) = 0$ eine zweite solche Fläche darstellt, so ist die betrachtete Raumkurve das Schnittgebilde der beiden Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $G(x, y, z) = 0$. Z. B. entsteht die Schraubenlinie (1) als Schnitt des Kreiszyklinders

$x^2 + y^2 = a^2$ und der Schraubenfläche (2). Dabei ist jedoch eine Voraussetzung zu machen. Denkt man sich $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ in die Funktionen $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ eingesetzt und nimmt man die Differenzierbarkeit der so entstehenden Funktionen von t an, so folgt

$$x'(t) \frac{\partial F}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial F}{\partial y} + z'(t) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

oder

$$\mathbf{r}'(t) \operatorname{grad} F = 0$$

und ebenso

$$\mathbf{r}'(t) \operatorname{grad} G = 0.$$

Daher ist $\mathbf{r}'(t)$ dem Vektorprodukt $[\operatorname{grad} F \operatorname{grad} G]$ proportional. Aus der Voraussetzung $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ folgt daher

$$[\operatorname{grad} F \operatorname{grad} G] \neq 0,$$

d. h. von den drei Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}$$

muß wenigstens eine von Null verschieden sein.

3. Beispiele. Wenn zwischen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ eine lineare Gleichung

$$(3) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

mit festen Vorzahlen A, B, C, D besteht, so liegen sämtliche Punkte der Raumkurve in einer und derselben Ebene, deren Gleichung (3) ist. Die Raumkurve heißt dann eine ebene Kurve. Die Gleichung (3) läßt sich natürlich auch in der Form

$$\mathfrak{A}r + D = 0$$

schreiben, wo $\mathfrak{A} = \{A, B, C\}$ ein Vektor ist, der auf der Ebene (3) senkrecht steht.

Beispiel: $r = a \cos t + b \sin t + c$, wo a, b, c drei feste Vektoren sind, genügt der Gleichung

$$(4) \quad [ab]r - [ab]c = 0,$$

also liegt eine ebene Kurve vor. Wir wollen sie für den einfachen Fall näher bestimmen, daß zwischen den Vektoren a und b die Beziehungen

$$a^2 = b^2 \text{ und } ab = 0$$

bestehen, d. h. daß sie dieselbe Länge haben und aufeinander senkrecht stehen. Dann ist

$$(5) \quad (r - c)^2 = a^2.$$

Das ist die Gleichung einer Kugel vom Halbmesser $|a|$ und dem Mittelpunkte c . Die vorgelegte Raumkurve liegt daher sowohl in der Ebene (4) wie auch auf der Kugel (5) und ist daher ein im Raum gelegener Kreis.

Wenn $F(x, y, z) = 0$ und $G(x, y, z) = 0$ zwei algebraische Gleichungen zwischen x, y, z sind, d. h. wenn $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ ganze rationale Funktionen ihrer Argumente bedeuten, so heißt die dadurch dargestellte Raumkurve algebraisch. Z. B. ist die beim sogenannten Florentiner Problem (Viviani 1692) vorkommende Schnittkurve einer Kugel mit

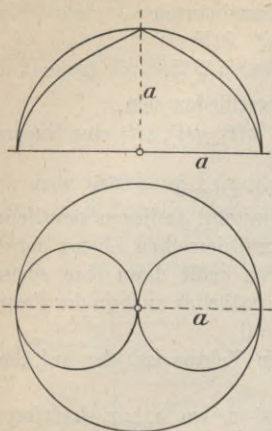


Abb. 3.

einem sie von innen berührenden geraden Kreiszyylinder vom halben Halbmesser (Abb. 3) eine algebraische Raumkurve vierten Grades; denn es gilt, wenn a der Halbmesser der Kugel ist,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2. \end{cases}$$

Aufgabe: Man stelle hierin x, y, z als Funktionen eines Parameters t dar.

4. Komplexe Kurven. Wir werden manchmal von der geometrischen Anschauung absehen und lediglich die Zusammenfassung von drei geordneten Zahlen

x, y, z , die nun auch nicht mehr reell zu sein brauchen, als einen Punkt P bezeichnen, oder auch als einen komplexen Ortsvektor $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. Ein beliebiger, aber bestimmter der beiden komplexen Werte, die die Quadratwurzel

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

annehmen kann, soll die (komplexe) Entfernung des Punktes P vom Nullpunkt oder die (komplexe) Länge $|\mathbf{r}|$ des Vektors \mathbf{r} heißen. Unter der Länge eines komplexen Vektors ist also hier eine im allgemeinen komplexe Zahl zu verstehen. Es ist bemerkenswert, daß im Komplexen die Länge eines Vektors \mathbf{v} verschwinden kann, ohne daß der Vektor selbst identisch Null ist, d. h. ohne daß jede seiner Komponenten verschwindet. Solche komplexen von Null verschiedenen Vektoren, deren Länge den Wert Null hat, heißen Minimalvektoren (isotrope Vektoren):

$$\mathbf{v}^2 = 0, \quad \mathbf{v} \neq 0.$$

Wenn r eine komplexe Funktion einer komplexen Veränderlichen t ist, d. h., wenn x, y, z komplexe Funktionen von t mit gemeinsamem Definitionsbereiche sind, so liegt eine komplexe „Raumkurve“ vor, der „geometrische Ort“ der komplexen „Punkte“ P .

Der Leser wird bemerken, daß es sich hier um eine Übertragung der Sprache der anschaulichen Geometrie auf rein analytische Gebilde handelt, und es ist daher nicht zu verwundern, wenn dabei Ergebnisse herauskommen, die sich mit der Anschauung nicht immer vereinbaren lassen.

Beispielsweise hat die komplexe Raumkurve $r = \{a \cos t, a \sin t, ai\}$ die Eigenschaft, daß alle ihre Punkte vom Nullpunkt die Entfernung 0 haben; denn es ist

$$|r| = \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t - a^2} = 0.$$

Man kann wegen $x^2 + y^2 = a^2$ diese Raumkurve als einen Kreis vom Halbmesser a betrachten, dessen Mittelpunkt auf der z -Achse liegt und dessen Ebene die Ebene $z = ai$ ist. Er liegt auch auf der Nullkugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

5. Bemerkungen über Minimalvektoren. Nach dem eben Bemerkten ist \mathfrak{M} ein Minimalvektor, wenn 1) $\mathfrak{M}^2 = 0$, 2) $\mathfrak{M} \neq 0$ ist. Man sieht leicht ein, daß \mathfrak{M} komplex sein muß, aber nicht reell und auch nicht rein imaginär sein kann. Wir begnügen uns damit, hier über Minimalvektoren einige Eigenschaften zu notieren, von denen im folgenden Gebrauch gemacht wird:

1) Es sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + i\mathfrak{B}$, wo \mathfrak{A} und \mathfrak{B} reelle Vektoren ($\neq 0$) bedeuten. Aus $\mathfrak{M}^2 = 0$ folgt

$$(6) \quad \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2 \text{ und } \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0,$$

d. h. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} müssen dieselbe Länge haben und aufeinander senkrecht stehen.

2) Es sei $\mathfrak{M} = \{M_x, M_y, M_z\}$, so läßt sich \mathfrak{M} stets in einer der folgenden Formen darstellen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= M_x \{1, i \cos \vartheta, i \sin \vartheta\}, & \text{falls } M_x \neq 0, \\ \mathfrak{M} &= M_y \{i \cos \vartheta, 1, i \sin \vartheta\}, & \text{,, } M_y \neq 0, \\ \mathfrak{M} &= M_z \{i \cos \vartheta, i \sin \vartheta, 1\}, & \text{,, } M_z \neq 0. \end{aligned}$$

3) Von den drei Eigenschaften zweier Vektoren, erstens Minimalvektoren zu sein, zweitens aufeinander senkrecht zu stehen, drittens einander parallel zu sein, ist jede eine Folge der beiden anderen.

4) Eine Ebene mit der Gleichung

$$\mathfrak{A}r + D = 0,$$

worin \mathfrak{A} einen Minimalvektor bedeutet, heißt eine Minimal-ebene.

Eine Gerade mit der Vektorgleichung

$$r = at + b,$$

worin a einen Minimalvektor bedeutet, heißt eine Minimal-gerade.

6. Einführung eines anderen Parameters. Wenn man statt t einen anderen Parameter u mittels $t = t(u)$ einführt, so gehen x, y, z und damit auch der Vektor $r(t)$ in gewisse andere Funktionen von u über. Wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit in dem Bereiche $\alpha \leq t \leq \beta$ muß nicht nur die Funktion $t(u)$ in dem entsprechenden Bereiche $\gamma \leq u \leq \delta$, wo $\alpha = t(\gamma)$, $\beta = t(\delta)$ ist, diese Eigenschaften haben, sondern auch die Umkehrungs-funktion $u(t)$ in dem ursprünglichen Bereiche.

Beispiel: $u = x$; $y = y(x)$, $z = z(x)$ stellen eine Raumkurve dar, offenbar als Schnitt zweier Zylinder, die auf der xy -Ebene und auf der zx -Ebene senkrecht stehen.

§ 2. Tangente, Bogenlänge, Normale, Schmiegun-gsebene.

7. Tangente. Es seien P und P_1 zwei verschiedene Punkte der betrachteten Raumkurve

$$r = r(t)$$

mit den zugehörigen Parameterwerten t und t_1 , also

$$\overline{OP} = \mathbf{r}(t), \quad \overline{OP_1} = \mathbf{r}(t_1).$$

Der Sehnenvektor ist (Abb. 4)

$$\overline{PP_1} = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t).$$

Er hat dieselbe Richtung wie der Vektor

$$\frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t}.$$

Wenn dieser Vektor für $t_1 \rightarrow t$ einem bestimmten Grenzvektor $\mathbf{r}'(t)$ zustrebt,

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t} = \mathbf{r}'(t),$$

d. h. wenn $\mathbf{r}(t)$ differenzierbar ist, so hat $\mathbf{r}'(t)$ die Richtung der Tangente der Raumkurve im Punkte P .

8. Linienelement, Bogenlänge. Der Differentialvektor

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt,$$

worin dt eine beliebige Zahl ($\neq 0$) bedeutet, heißt der Vektor des Linienelements. Für kleine Werte von $|dt|$ bedeutet $d\mathbf{r}$ reell-geometrisch ein kleines Stück der Tangente in P , dessen Richtungssinn zugleich den Fortschrittsinn auf der Kurve bestimmen soll. In der Integralrechnung wird gezeigt, wie damit im reellen Falle die Bogenlänge eines Kurvenstückes \widehat{AB} bestimmt werden kann. Sind t_A und t_B die zu den Kurvenpunkten A und B gehörigen Parameterwerte, so ist die Bogenlänge

$$\widehat{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_{t_A}^{t_B} |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Unter dem Parameter $s = s(t)$ der Bogenlänge selbst versteht man allgemein die Funktion

$$(8) \quad s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

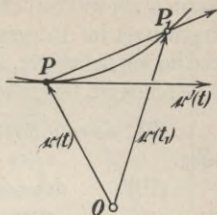


Abb. 4.

worin t_0 ein willkürlicher, aber fester Anfangswert ist, die Quadratwurzel im Integrationsbereiche nicht verschwinden darf, und ihr ein beliebiger, aber dann bestimmter ihrer beiden Werte zu erteilen ist, im reellen Falle meist der positive Wert. Es wird

$$(9) \quad ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = |r'(t)| dt$$

oder

$$(10) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2.$$

Dieses komplexe Differential ds heißt das Bogen- oder Linien-
element der Kurve. Im reellen Falle ist das Vorzeichen von ds
gleich oder entgegengesetzt zu dem von dt , je nachdem die
Quadratwurzel positiv oder negativ genommen wird. Je nach-
dem ist also $s(t)$ einsinnig zu- oder abnehmend.

Wenn t selbst schon den Parameter der Bogenlänge dar-
stellt, ist

$$(11) \quad r'(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 1,$$

wie aus (9) sofort hervorgeht, und diese Bedingung ist auch
hinreichend.

Ist $r'(t)^2 = 0$, so kann von einem Parameter der Bogen-
länge s nicht die Rede sein. Auf diesen Fall, der für reelle
Kurven wegen $r'(t) \neq 0$ nicht eintreten kann, soll später ein-
gegangen werden. Vorläufig soll stets

$$r'(t)^2 \neq 0$$

angenommen werden.

9. Beispiele. a) Schraubenlinie. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \{a \cos t, \quad a \sin t, \quad ct\}, \\ \mathbf{r}' &= \{-a \sin t, \quad a \cos t, \quad c\}. \end{aligned}$$

Die Bogenlänge wird

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + c^2} dt = \sqrt{a^2 + c^2} (t - t_0).$$

Es ist danach leicht, s als Parameter einzuführen.

b) Gerade Linie im Raume. Der Radiusvektor läßt
sich als lineare Funktion von t mit festen vektorischen Koef-

fizienten darstellen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t \quad |\mathbf{b}| \neq 0.$$

Man hat $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b}$, $s(t) = \pm |\mathbf{b}| (t - t_0)$.

Für eine reelle Gerade bestimmt der Vektor \mathbf{b} ihre Richtung, während $\mathbf{a} = \mathbf{r}(0)$ einen ihrer Punkte festlegt (Abb. 5). Die Einführung der Bogenlänge als Parameter ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}t_0 \pm \mathbf{b}^0 s \\ &= \mathbf{a}_1 \pm \mathbf{b}^0 s, \end{aligned}$$

worin $\mathbf{b}^0 = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ den zu \mathbf{b} gehörigen Einheitsvektor bedeutet.

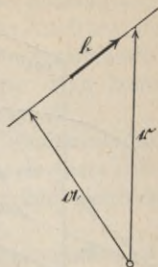


Abb. 5.

10. Tangentenvektor. Wir nehmen im folgenden an, daß

$$|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$$

sei, also $\mathbf{r}'(t)$ kein Minimalvektor. Dann existiert der Einheitsvektor

$$(12) \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

der der Tangentenvektor heißen möge. Da \mathbf{t} ein Einheitsvektor ist, so sind seine Komponenten die Richtungskosinus der Tangente:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \\ \text{mit } \mathbf{t}^2 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \end{aligned}$$

Aus $\mathbf{t}^2 = 1$ folgt

$$\mathbf{t} d\mathbf{t} = 0$$

oder

$$\sin 2\alpha d\alpha + \sin 2\beta d\beta + \sin 2\gamma d\gamma = 0.$$

11. Normalebene. Die Ebene, die die Kurve, genauer die Tangente der Kurve, im Berührungspunkte P senkrecht durchsetzt, heißt die Normalebene der Kurve in diesem Punkte P (Abb. 6). Ihr Stellungsvektor ist also der Tangentenvektor \mathbf{t} . Ist \mathfrak{R} der Radiusvektor nach einem beliebigen von P verschiedenen Punkte Q dieser Ebene, so liegt der Vektor

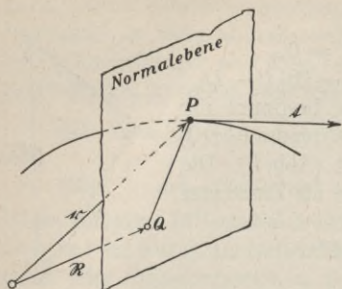


Abb. 6.

$\overline{PQ} = \mathfrak{R} - r$ ganz in dieser Ebene, steht also senkrecht auf dem Vektor t , also ist

$$(13) \quad (\mathfrak{R} - r)t = 0$$

die Gleichung der Normalenebene. Da t ein Einheitsvektor ist, so hat die Gleichung (13) die Hessesche Normalform, und mit $\mathfrak{R} = \{X, Y, Z\}$ läßt sie sich so schreiben:

$$(X - x) \cos \alpha + (Y - y) \cos \beta + (Z - z) \cos \gamma = 0.$$

Mithin ist

$$(14) \quad rt = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

der Abstand der Normalenebene vom Nullpunkt, positiv, wenn der \sphericalangle rt ein spitzer ist, und das ist der Fall, wenn der Punkt O und der von P ausgehende Tangentenvektor t durch die Ebene getrennt werden.

12. Schmiegungeebene. Im folgenden werde $r(t)$ als zweimal differenzierbar angenommen. Man betrachte außer dem Punkte P der Kurve noch zwei weitere hinreichend nahe

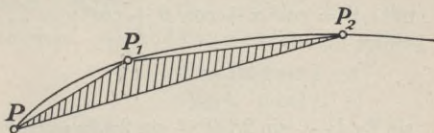


Abb. 7.

an P gelegene Kurvenpunkte P_1 und P_2 (Abb. 7). Durch drei Punkte ist genau eine Ebene bestimmt, wenn sie nicht in einer Geraden liegen, was hier ausgeschlossen sei. Es ist zu beweisen, daß sich die Ebene PP_1P_2 einer bestimmten Grenzlage nähert, wenn $P_1 \rightarrow P$ und $P_2 \rightarrow P$ konvergieren für P als festen Punkt.

Diese Grenzebene, wenn sie existiert, heißt Schmiegungeebene. Man sagt auch ungenau, aber in kurzem Ausdruck, die Schmiegungeebene sei die Ebene durch drei „benachbarte“ oder „unendlich benachbarte“ Kurvenpunkte. Man meint aber stets den vorher genau erklärten Sachverhalt.

Es seien $r_1 = r(t+h)$, $r_2 = r(t+k)$ die Radienvektoren von P_1 und P_2 , und \mathfrak{R} sei der Radiusvektor nach einem beliebigen Punkte Q der Ebene PP_1P_2 , so lautet ihre Gleichung

$$(15) \quad (\mathfrak{R} - r) (r_1 - r) (r_2 - r) = 0,$$

wobei unter der linken Seite das Spatprodukt (dreifaches skalares Produkt) der drei eingeklammerten Vektoren zu verstehen ist, nämlich das skalare Produkt aus dem Vektor $\mathfrak{R} - r$ und dem vektorischen Produkt $[(r_1 - r) (r_2 - r)]$ der beiden anderen.

In Koordinaten lautet die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \end{vmatrix} = 0.$$

Nun hat man nach dem Zerlegungssatze der Differentialrechnung

$$r_1 - r = hr'(t) + h\eta(t, h),$$

$$r_2 - r = kr'(t) + \frac{1}{2}k^2r''(t) + k^2\xi(t, k),$$

worin $\eta(t, h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$, und $\xi(t, k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0$. Führt man dies in Gleichung (15) ein und geht zur Grenze über für $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, so verschwinden einige der entstehenden Spatprodukte identisch, andere konvergieren nach Null, und es bleibt

$$(16) \quad (\mathfrak{R} - r) r'(t) r''(t) = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Schmiegungeebene. Man kann sie auch in der vom Parameter unabhängigen Form

$$(17) \quad (\mathfrak{R} - r) dr d^2r = 0$$

schreiben. Denn es ist $dr = r'(t) dt$, $d^2r = r''(t) dt^2 + r'(t) d^2t$, und das aus dem zweiten Summanden von d^2r herrührende Vektorprodukt verschwindet. In Koordinaten geschrieben

lautet die Gleichung (17)

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Schließlich kann man die Gleichung (17) der Schmiegungebene im Hinblick auf (12) auch in die Form $(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) \, dt = 0$ bringen.

13. Ebene Kurven. Wenn alle Punkte einer Raumkurve in derselben Ebene liegen, ist diese Ebene die Schmiegungeebene der Kurve. Denn ist

$$(18) \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) = 0$$

die Gleichung dieser Ebene, worin \mathfrak{A} ein fester Vektor, \mathfrak{R} der Radiusvektor nach irgendeinem festen, nicht auf der Kurve gelegenen Punkte der Ebene bedeutet, so hat man

$$\mathfrak{A}\mathfrak{r}'(t) = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r}''(t) = 0,$$

also ist \mathfrak{A} proportional zu $[\mathfrak{r}'(t) \mathfrak{r}''(t)]$, daher geht die Gleichung der Ebene der Kurve in folgende über

$$(19) \quad [\mathfrak{r}'(t) \mathfrak{r}''(t)] (\mathfrak{R} - \mathfrak{r}) = 0,$$

die mit (16) übereinstimmt, w. z. b. w.

Wenn alle Punkte einer Raumkurve in derselben Ebene (18) gelegen sind, so folgt weiter

$$(20) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r}'' = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r}''' = 0,$$

mithin, wenn keiner der Vektoren \mathfrak{r}' , \mathfrak{r}'' , \mathfrak{r}''' verschwindet,

$$(21) \quad \mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}''' = 0.$$

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend dafür, daß eine Raumkurve eben ist. Denn aus (21) folgt, daß es einen Vektor $\mathfrak{B} \neq 0$ der Art gibt, daß die Gleichungen

$$(22) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{r}'' = 0, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{r}''' = 0$$

bestehen. Aus ihnen folgt durch Differentiation der beiden ersten

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{B}'\mathfrak{r}'' = 0$$

oder

$$\mathfrak{B}' = \lambda[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''],$$

während aus den beiden ersten Formeln (22) auch

$$\mathfrak{B} = \mu[r'r'']$$

folgt. Also ist jedenfalls

$$(23) \quad \mathfrak{B}' = \nu \mathfrak{B},$$

worin ν , ebenso wie λ, μ skalare Faktoren sind. Diese vektorische lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$(23 a) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}e^{\int \nu dt},$$

wo \mathfrak{A} ein konstanter Vektor ist. Damit geht die erste Gleichung (22) über in:

$$\mathfrak{A}r' = 0,$$

und durch Integration folgt

$$\mathfrak{A}r + D = 0,$$

wo D eine skalare Konstante ist. Das ist aber die Gleichung einer festen Ebene, womit die Behauptung bewiesen ist.

14. Schmiegungeebene als Ebene „benachbarter“ Tangenten. Diese ungenaue (aber kurze) Ausdrucksweise bedeutet genau folgende Behauptung: Man lege durch die Tangente in einem Kurvenpunkte P eine Ebene, die zu einer Tangente in einem hinreichend nahen Kurvenpunkte P_1 parallel ist. Wenn P_1 sich dem Punkte P längs der Kurve unbegrenzt nähert, so nähert sich die Ebene einer Grenzlage, und die ist die Schmiegungeebene. Denn ist $r'(t)$ zur Tangente in P , $r'(t+h)$ zur Tangente in P_1 parallel (mit $h \neq 0$), so sind $\mathfrak{R} - r$, $r'(t)$, $r'(t+h)$ komplanar, also

$$(\mathfrak{R} - r)r'(t)r'(t+h) = 0.$$

Nun ist $r'(t+h) = r'(t) + hr''(t) + h\eta(t, h)$, wo der Vektor η mit h nach Null konvergiert. Setzt man dies ein und geht zur Grenze $h \rightarrow 0$ über, so wird

$$(\mathfrak{R} - r)r'r'' = 0$$

erhalten, in Übereinstimmung mit (19).

Die Gleichung der Schmiegungeebene versagt, wenn

$$[r'r''] = 0$$

ist. Wenn das längs der ganzen Kurve zutrifft, muß

$$\mathbf{r}''(t) = \lambda(t)\mathbf{r}'(t)$$

sein, daher

$$\mathbf{r}'(t) = \mathfrak{C} e^{\int \lambda(t) dt},$$

wo \mathfrak{C} ein konstanter Vektor ist, mithin

$$\mathbf{r} = \mathfrak{C} \int e^{\int \lambda(t) dt} dt + \mathbf{r}_0 = \mathfrak{C}u + \mathbf{r}_0.$$

\mathbf{r} ist also eine lineare Funktion von u , die Kurve demnach eine Gerade. Wenn $[\mathbf{r}'\mathbf{r}''] = 0$ ist an einzelnen Punkten, so sind das solche Punkte, an denen die Tangente die Kurve von höherer Ordnung berührt (vgl. Nr. 54).

15. Hauptnormale. Alle vom Kurvenpunkt P ausgehenden Geraden der Normalebene stehen senkrecht zur Tangente und heißen daher Normalen der Kurve. Die von der Schmiegungeebene aus der Normalebene ausgeschnittene Normale heißt die Hauptnormale der Kurve im Punkte P . Ist \mathfrak{R} der Radiusvektor nach einem beliebigen Punkte der Hauptnormale, so muß \mathfrak{R} zugleich den Gleichungen

$$\begin{cases} (\mathfrak{R} - \mathbf{r})t = 0 \\ (\mathfrak{R} - \mathbf{r})[t dt] = 0 \end{cases}$$

genügen. Diese Gleichungen werden wegen $t dt = 0$ befriedigt, wenn

$$\mathfrak{R} - \mathbf{r} = \lambda dt$$

gesetzt wird, wo λ einen willkürlichen skalaren Faktor bedeutet, oder auch

$$\mathfrak{R} - \mathbf{r} = \mu \frac{dt}{ds},$$

wo μ eine entsprechende Bedeutung hat. Daraus folgt, daß der Vektor dt/ds die Richtung der Hauptnormale hat. Der zugehörige Einheitsvektor

$$(24) \quad \mathfrak{n} = \frac{dt}{ds} : \left| \frac{dt}{ds} \right|$$

heißt der Vektor der Hauptnormale. Natürlich darf dt/ds kein Minimalvektor sein.

§ 3. Krümmung und Windung.

16. Krümmung einer Raumkurve. Da t stets eine feste Länge 1 behält, kann der Vektor dt/ds nur die Änderung der Richtung von t mit der Bogenlänge bedeuten, und

$$(25) \quad k = \left| \frac{dt}{ds} \right|$$

mithin nur die Änderung eines Winkels längs der Bogenlänge. Daher nennt man k die Krümmung der Kurve im Punkte P . Im reellen Falle ist k niemals negativ. Aus (24) folgt noch

$$(26) \quad \frac{dt}{ds} = kn$$

und hieraus wegen $n^2 = 1$

$$(27) \quad n \frac{dt}{ds} = k.$$

Wegen $nt = 0$ ist aber $n dt/ds = -t dn/ds$, also auch

$$(27a) \quad t \frac{dn}{ds} = -k.$$

Für welche Kurven ist die Krümmung in jedem ihrer Punkte gleich Null? — Aus (26) folgt für $k = 0$

$$\frac{dt}{ds} = 0;$$

daher ist $t = dx/ds$ längs der Kurve konstant gleich c nach Größe und Richtung, mithin ist

$$r = cs + c_1$$

mit der vektorischen Integrationskonstanten c_1 , also die Kurve eine Gerade.

Die aus (25) definitionsmäßig folgende Tatsache, daß für reelle Kurven stets $k \geq 0$ ist, scheint im Widerspruch zu stehen mit der Festsetzung für die Krümmung ebener Kurven, wonach auch negative Werte für k zugelassen werden. Man bedenke jedoch, daß wenn man die Ebene mit der darin

gelegenen Kurve von der entgegengesetzten Seite betrachtet, ihr Drehsinn und damit auch das Vorzeichen von k umgekehrt werden.

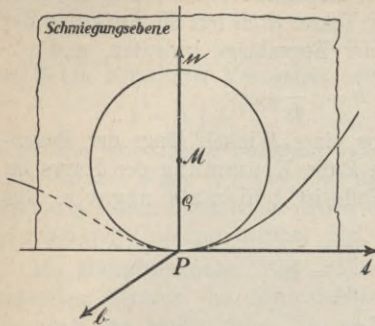


Abb. 8.

Die Größe

$$\varrho = \frac{1}{k}$$

heißt der Krümmungsradius, und der Vektor ϱn die Krümmungstrecke (Graßmann). Der Radiusvektor

$$(28) \mathfrak{R}_0 = r + \varrho n$$

bestimmt den Krümmungsmittelpunkt¹⁾ M ,

und der Kreis um M mit dem Halbmesser ϱ in der Schmiegungelebene heißt der Krümmungskreis (Abb. 8).

17. Krümmungsachse ist der Schnitt „benachbarter“ Normalebene. Dieser ungenaue aber kurze Ausdruck ist in ähnlichem Sinne zu verstehen wie der Satz bei der Schmiegungelebene in Nr. 14. Es seien $\overline{OP} = r(s)$, $\overline{OP}_1 = r(s+h)$; die Normalebene in P und P_1 haben nach (13) die Gleichungen

$$(29) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{R} - r(s)) r'(s) &= 0, \\ (\mathfrak{R} - r(s+h)) r'(s+h) &= 0. \end{aligned}$$

Längs ihrer Schnittgeraden bestehen beide Gleichungen zugleich. Nun ist

$$\begin{aligned} r(s+h) &= r(s) + hr'(s) + h\mathfrak{h}_1(s, h), \\ r'(s+h) &= r'(s) + hr''(s) + h\mathfrak{h}_2(s, h), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{h}_1 \rightarrow 0$, $\mathfrak{h}_2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Daher folgt aus (29) für $h \rightarrow 0$

$$(\mathfrak{R} - r(s)) r''(s) - 1 = 0.$$

¹⁾ Bei Raumkurven ist der Krümmungsmittelpunkt nicht der Schnittpunkt „benachbarter“ Hauptnormalen, weil diese im allgemeinen ja zueinander windschief verlaufen.

Nach (26) ist $r''(s) = t'(s) = kn$, also werden

$$(30) \quad \begin{cases} (\mathfrak{R} - r)t = 0 \\ k(\mathfrak{R} - r)n = 1 \end{cases}$$

die beiden Gleichungen, denen die Krümmungsachse (auch Polare genannt) genügt.

Setzt man für \mathfrak{R} den Vektor \mathfrak{R}_0 aus (28) in (30) ein, so werden diese Gleichungen befriedigt, also liegt der Krümmungsmittelpunkt auf der Krümmungsachse. Ist aber $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}_0$, so gilt $(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0)t = 0$, $(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0)n = 0$, also liegt der Vektor $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$, somit auch die Krümmungsachse, senkrecht zur Schmiegungeebene, die sie, wie eben gezeigt, im Krümmungsmittelpunkte durchsetzt.

18. Binormale. Das äußere (vektorische) Produkt

$$(31) \quad \mathfrak{b} = [tn]$$

ist ein Vektor, der auf t und n so senkrecht steht, daß t, n, \mathfrak{b} in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Er hat wegen $\mathfrak{b}^2 = t^2n^2 - (tn)^2 = 1$ die Länge 1 und heißt der Vektor der Binormale. Nimmt man $r(t)$ als dreimal differenzierbar an, so existiert $d\mathfrak{b}/ds$, und man hat wegen $\mathfrak{b}^2 = 1$

$$\mathfrak{b} \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = 0.$$

Wegen $t\mathfrak{b} = 0$, $n\mathfrak{b} = 0$ und im Hinblick auf (26) ist

$$t \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = -\mathfrak{b} \frac{dt}{ds} = -kn\mathfrak{b} = 0;$$

also steht $d\mathfrak{b}/ds$ senkrecht auf \mathfrak{b} und auf t , ist also proportional zu $[t\mathfrak{b}] = n$. Man setze

$$(32) \quad \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = -\varkappa n,$$

wo \varkappa einen skalaren Faktor bedeutet.

19. Windung. Die linke Seite von (32) drückt wegen $\mathfrak{b}^2 = 1$ die Änderung allein der Richtung der Binormalen beim Fortschreiten längs der Kurve aus, oder auch die Drehung der Schmiegungeebene um die Tangente als Achse, denn \mathfrak{b}

ist ja der Stellungsvektor der Schmiegungebene. Je nachdem ob diese Drehung senkrecht zu \mathfrak{b} entgegengesetzt zur Richtung

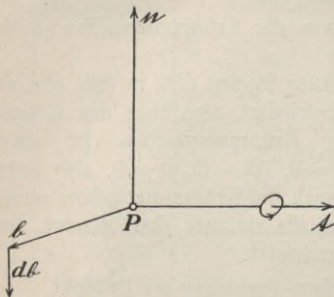


Abb. 9.

von \mathfrak{n} (Abb. 9) oder gleichgerichtet mit \mathfrak{n} erfolgt, ist $\kappa > 0$ oder $\kappa < 0$; κ selbst mißt die Größe dieser Drehung und wird die Windung (Torsion) der Kurve genannt.

Wenn die Kurve eine ebene Kurve ist, so ist nach Nr. 12 die Ebene der Kurve zugleich ihre Schmiegungebene. Also ist ihr Stellungsvektor \mathfrak{b}

konstant, also $d\mathfrak{b}/ds = 0$, somit nach (32)

$$\kappa = 0.$$

Wenn umgekehrt $\kappa = 0$ ist, so ist die Kurve eine ebene Kurve. Beweis: Aus (32) folgt, daß \mathfrak{b} ein konstanter Vektor ist, also ist wegen

$$\mathfrak{b}\mathfrak{t} = \mathfrak{b}\mathfrak{r}'(s) = 0$$

auch

$$\mathfrak{b}\mathfrak{r} = \text{const.},$$

d. h. alle Punkte der Kurve liegen in einer festen Ebene, die zu \mathfrak{b} senkrecht verläuft.

20. Berechnung der Windung κ . Aus (32) und (26) folgt zunächst, falls $k \neq 0$ ist,

$$(33) \quad \kappa = -\mathfrak{n} \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = -\frac{1}{k} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \frac{d\mathfrak{b}}{ds}.$$

Andererseits ergibt sich aus (31) und (26)

$$(34) \quad \mathfrak{b} = [\mathfrak{t}\mathfrak{n}] = \frac{1}{k} \left[\mathfrak{t} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \right]$$

und daher

$$\frac{db}{ds} = \frac{1}{k} \left[t \frac{d^2t}{ds} \right] - \frac{1}{k^2} \frac{dk}{ds} \left[t \frac{dt}{ds} \right].$$

Setzt man dies in (33) ein, so erhält man

$$\kappa = - \frac{1}{k^2} \frac{dt}{ds} t \frac{d^2t}{ds^2}$$

oder nach (25)

$$(35) \quad \kappa = \frac{t \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}.$$

Selbstverständlich müssen hierbei alle Punkte ausgeschlossen werden, für die

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)^2 = 0$$

ist, oder was dasselbe besagt, für die $\frac{dt}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2}$ ein Minimalvektor ist.

21. Ausdrücke für k und κ bei beliebigem Parameter.

Man hat

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{dt}{dt} : \frac{ds}{dt}, \\ \frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right) : \frac{ds}{dt} = \frac{ds \frac{d^2t}{ds^2} - dt \frac{d^2s}{dt^2}}{ds^2 dt} : \frac{ds}{dt} \\ &= \left(\frac{d^2t}{dt^2} \frac{ds}{dt} - \frac{dt}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right) : \left(\frac{ds}{dt} \right)^3, \end{aligned}$$

mithin nach (26)

$$(36) \quad k = \left| \frac{dt}{dt} \right| : \left| \frac{ds}{dt} \right|,$$

und nach (35)

$$\kappa = t \frac{dt}{dt} \left(\frac{d^2t}{dt^2} \frac{ds}{dt} - \frac{dt}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right) : \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Da bei der Auflösung der Klammern des Zählers der zweite Summand verschwindet, so wird

$$(37) \quad \varkappa = \frac{t \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{dt^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{ds}{dt}}.$$

Wegen $t = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt}$,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right) : \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \left\{ \left(\frac{ds}{dt} \right) \left(\frac{d^3x}{dt^3} \frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{d^3s}{dt^3} \right) - \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right)^2 \frac{d^2s}{dt^2} \right\} : \left(\frac{ds}{dt} \right)^3$$

wird das Spatprodukt im Zähler von \varkappa in (37)

$$t \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} = \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^3x}{dt^3} \right) : \left(\frac{ds}{dt} \right)^3,$$

und wenn man $dx^2 = ds^2$, $dx d^2x = ds d^2s$ benutzt, so erhält man im Nenner von (37)

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = \left\{ \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right)^2 \right\} : \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Durch Division dieser beiden Ausdrücke wird aus (37)

$$(38) \quad \varkappa = \frac{\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^3x}{ds^3}}{\left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2} \right)^2 \right\} \left(\frac{ds}{ds} \right)^2},$$

woraus sich für $t = s$

$$(39) \quad \varkappa = \frac{\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^3x}{ds^3}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2}$$

ergibt, was man auch aus (37) unmittelbar hätte folgern können.

Die Ausdrücke von k und \varkappa lassen sich noch in einer von jedem Parameter unabhängigen Form schreiben. Dazu dienen die Differentiale, die das leisten. Es ist

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{dx}{ds} \\ dt = \frac{dsd^2r - dx d^2s}{ds^2} \\ d^2t = \frac{ds^2 d^3r - 2dsd^2s d^2r + (2(d^2s)^2 - dsd^3s) dx}{ds^3} \end{array} \right.$$

Damit wird

$$(40) \quad k = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{dsd^2r - dx d^2s}{ds^3} \right|,$$

mithin

$$k^2 = \frac{ds^2(d^2r)^2 - 2dsd^2s dx d^2r + dx^2(d^2s)^2}{ds^6}.$$

Nun ist $dx^2 = ds^2$, $dx d^2r = dsd^2s$; daher ist im Zähler von k^2 das letzte Glied gleich $ds^2(d^2s)^2 = (dsd^2s)^2 = (dx d^2r)^2$, es läßt sich also mit dem mittleren vereinigen, und der Zähler wird $dx^2(d^2r)^2 - (dx d^2r)^2 = [dx d^2r]^2$. Daher wird

$$(41) \quad k^2 = \frac{[dx d^2r]^2}{(dx^2)^3}.$$

Ebenso wird mit Benutzung von (38)

$$(42) \quad \varkappa = \frac{dx d^2r d^3r}{[dx d^2r]^2}.$$

Führt man auch in (41) und (37) ausdrücklich den beliebigen Parameter t der Kurvendarstellung ein, so erhält man

$$(42 a) \quad k^2 = \frac{\left[\frac{dx}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} \right]^2}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^6},$$

$$(42 \text{ b}) \quad \varkappa = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]^2}.$$

Man beachte dabei, daß zur Bestimmung von k das Ausziehen einer Quadratwurzel notwendig ist, und daß damit stets das Auftreten einer Zweiwertigkeit verbunden ist, während sich die Windung \varkappa eindeutig berechnen läßt, falls nur der Vektor $[\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t)]$ weder ein Minimalvektor ist, noch verschwindet. In solchem Falle ist die Schmiegungebene eine Minimal-ebene oder zufolge der Bemerkung am Schluß von Nr. 14 garnicht vorhanden. In diesem Falle ist die Kurve eine Gerade, oder der betreffende Kurvenpunkt läßt für die Tangente eine Berührung höherer Ordnung zu.

Man beachte, daß in den Formeln (37), (39), (42 b) in den Zählern stets die dreifachen skalaren Produkte stehen, also, wenn man die Koordinaten statt der Vektoren einführt, die entsprechenden Determinanten. Z. B. wird (39) dann

$$(42 \text{ c}) \quad \varkappa = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}}{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}.$$

§ 4. Hauptgleichungen und begleitendes Dreibein.

22. Die Hauptgleichungen der Kurventheorie. Aus den Formeln (26) und (32), nämlich

$$(I) \quad \frac{dt}{ds} = k\mathfrak{n},$$

$$(III) \quad \frac{db}{ds} = -\varkappa\mathfrak{n}$$

wollen wir zunächst noch eine weitere für dn/ds als Folgerung herleiten. Aus $n = [bt]$ folgt durch Ableitung nach der Bogenlänge:

$$\frac{dn}{ds} = \left[\frac{db}{ds} t \right] + \left[b \frac{dt}{ds} \right],$$

und daraus ergibt sich mittels der vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{dn}{ds} = -\kappa[nt] + k[bn]$$

oder

$$(II) \quad \frac{dn}{ds} = \kappa b - kt.$$

Diese drei Formeln spielen in der Theorie der Raumkurven eine Hauptrolle. Sie sind — wenn auch nicht in dieser kurzen vektorischen Form — 1847 von Frenet aufgestellt worden. Wir werden später noch ausführlich darauf zurückkommen. Man überzeugt sich leicht, daß jede von ihnen eine Folge der beiden anderen ist, wenn man nur $t = [nb]$, $n = [bt]$, $b = [tn]$ berücksichtigt.

Da $tnb = +1 \neq 0$ ist, so bilden die drei Vektoren t, n, b eine Basis, durch die sich jeder beliebige Vektor ξ linear darstellen läßt:

$$(43) \quad \xi = \alpha t + \beta n + \gamma b,$$

mit skalaren α, β, γ . Man kann nun (II) auch so beweisen, daß man ansetzt

$$\frac{dn}{ds} = \alpha t + \beta n + \gamma b$$

und α, β, γ bestimmt, was der Leser zur Übung durchführen möge. Man multipliziere beiderseits skalar mit geeigneten vektorischen Faktoren.

23. Anwendung: Allgemeine Schraubenlinien. Kurven, deren Tangenten mit einer festen Richtung einen unveränderlichen Winkel einschließen, heißen allgemeine Schrauben-

linien¹⁾. Man denke sich nämlich durch die Punkte einer solchen Kurve Parallelen zu der festen Richtung gelegt, so sind diese die erzeugenden Geraden einer Zylinderfläche, auf

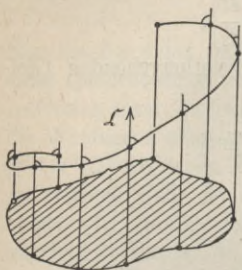


Abb. 10.

der die betrachtete Kurve gelegen ist, und diese schneidet die Mantelgeraden unter konstantem Winkel (Abb. 10). Die Basis dieses Zylinders, d. h. seine Schnittkurve mit irgendeiner, die erzeugenden Geraden senkrecht schneidenden Ebene, ist die Projektion der gegebenen Raumkurve auf diese Ebene. Es sei t der Tangentenvektor der Kurve und \mathfrak{C} der Einheitsvektor, der die gegebene Richtung bestimmt; dann ist

$$(44) \quad \mathfrak{C}t = c = \cos \mathfrak{C}t \text{ konstant, } t^2 = 1, \mathfrak{C}^2 = 1.$$

Für Schraubenlinien und nur für diese ist das Verhältniß der Windung zur Krümmung konstant (Satz von de Saint-Venant, 1844).

Um dies zu beweisen, differenziere man (44) beiderseits nach der Bogenlänge und benutze die erste Frenetsche Hauptgleichung $dt/ds = kn$, so erhält man

$$(45) \quad k\mathfrak{C}n = 0,$$

d. h. entweder $k = 0$ oder $\mathfrak{C}n = 0$. Im ersten Falle liegt eine Gerade vor (Nr. 16). Aus der zweiten Frenetschen Hauptgleichung $dn/ds = -kt + \varkappa b$ und der dritten $db/ds = -\varkappa n$ ergibt sich aber

$$(46) \quad \mathfrak{C} \frac{dn}{ds} = -k\mathfrak{C}t + \varkappa\mathfrak{C}b,$$

$$(47) \quad \mathfrak{C} \frac{db}{ds} = -\varkappa\mathfrak{C}n.$$

¹⁾ Nach G. Scheffers, oder auch Böschungslinien (nach E. Müller).

Wegen $\mathfrak{C}n = 0$ folgt aus (47) $\mathfrak{C} \frac{db}{ds} = 0$, also $\mathfrak{C}b = c_1$ konstant, in (46) verschwindet die linke Seite, und es wird

$$(48) \quad kc = \varkappa c_1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn umgekehrt $kc = \varkappa c_1$ ist mit konstanten c und c_1 , so folgt aus der ersten und dritten Hauptgleichung

$$c \frac{dt}{ds} + c_1 \frac{db}{ds} = ck n - c_1 \varkappa n = (ck - c_1 \varkappa) n = 0,$$

daher ist

$$(49) \quad ct + c_1 b = \mathfrak{C}$$

ein konstanter Vektor, und daraus folgt durch skalare Multiplikation mit t

$$\mathfrak{C}t = c,$$

d. h. die Kurve ist eine Schraubenlinie.

Aus (49) folgt übrigens durch skalare Multiplikation mit n und mit b

$$\mathfrak{C}n = 0, \quad \mathfrak{C}b = c_1,$$

d. h.: Bei den Schraubenlinien steht die Hauptnormale auf der festen Richtung senkrecht, während die Binormale mit ihr einen festen Winkel bildet, im allgemeinen natürlich einen anderen als die Tangente.

24. Das begleitende Dreibein. Die drei Einheitsvektoren

$$t = \frac{dx}{ds}, \quad n = \frac{1}{k} \frac{dt}{ds}, \quad b = [tn]$$

bilden das begleitende Dreibein der Kurve im Punkte P . Wegen

$$tnb = [tn] b = b^2 = 1$$

bilden sie in der Reihenfolge t, n, b ein Rechtssystem. Für diese Vektoren gelten folgende, schon im vorhergehenden benutzte Formeln:

$$(50) \quad t^2 = 1, \quad n^2 = 1, \quad b^2 = 1,$$

weil sie Einheitsvektoren sind;

$$(51) \quad tn = 0, \quad nb = 0, \quad bt = 0,$$

weil sie aufeinander senkrecht stehen;

$$(52) \quad tn\dot{b} = 1,$$

weil sie ein Rechtssystem bilden. Ferner ist noch zu merken

$$(53) \quad t = [n\dot{b}], \quad n = [bt], \quad b = [tn].$$

Da die Komponenten von t , n , b mit den Richtungskosinus der entsprechenden Richtungen der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale übereinstimmen, so stellen die Formeln (50) bis (53) genau sechszehn Beziehungen zwischen diesen

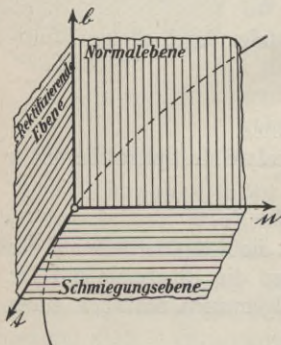


Abb. 11.

neun Richtungskosinus dar. Wir wollen sie nicht erst besonders hinschreiben, sondern dies dem Leser überlassen. Der Vektor t steht senkrecht auf der Ebene der Haupt- und Binormalen, der Normalebene; der Vektor n auf der Ebene der Binormale und der Tangente, der rektifizierenden Ebene; und der Vektor b auf der Ebene der Tangente und der Hauptnormale, der Schmiegungebene. Das liest man aus den Formeln (53) ab, vgl. Abb. 11.

25. Das begleitende Dreibein als Basis. Aus (52) folgt, daß die Vektoren t , n , b nicht zu einer und derselben Ebene parallel sind, und daß sie also als Basis jedes beliebigen Vektors χ dienen können:

$$\chi = \alpha t + \beta n + \gamma b,$$

wie schon in Nr. 22 bemerkt worden ist. Wir wollen davon eine weitere Anwendung machen, indem wir für χ die Ableitungen des Radiusvektors nach der Bogenlänge einsetzen. Man findet mit Benutzung der Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{t} \\
 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= k\mathbf{n} \\
 (54) \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= -k^2\mathbf{t} + \frac{dk}{ds}\mathbf{n} + k\kappa\mathbf{b} \\
 \frac{d^4\mathbf{r}}{ds^4} &= -3k\frac{dk}{ds}\mathbf{t} + \left(\frac{d^2k}{ds^2} - k^3 - k\kappa^2\right)\mathbf{n} + \left(k\frac{d\kappa}{ds} + 2\frac{dk}{ds}\kappa\right)\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

usw.

Wegen

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \mathbf{b} = [\mathbf{tn}] = \frac{1}{k} \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right]$$

läßt sich \mathbf{r} auch so schreiben:

$$\mathbf{r} = \alpha \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \beta_1 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} + \gamma_1 \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right]$$

mit $\beta_1 = \beta : k$, $\gamma_1 = \gamma : k$,

und wenn man diese Darstellung auf die dritte u. f. der Formeln (54) überträgt, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= -k^2 \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{1}{k} \frac{dk}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} + \kappa \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right] \\
 (55) \quad \frac{d^4\mathbf{r}}{ds^4} &= -3k \frac{dk}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \left(\frac{1}{k} \frac{d^2k}{ds^2} - k^2 - \kappa^2 \right) \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \\
 &\quad + \left(\frac{d\kappa}{ds} + \frac{2}{k} \frac{dk}{ds} \kappa \right) \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right]
 \end{aligned}$$

usw.

Hieraus ist ersichtlich, daß sich die dritte und die höheren Ableitungen des Radiusvektors nach der Bogenlänge sämtlich durch die erste und zweite ausdrücken lassen, wobei dann noch das Krümmungsquadrat und seine Ableitungen sowie die Windung und ihre Ableitungen nach der Bogenlänge auftreten.

Denn es ist

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d \log(k^2)}{ds}, \quad \frac{2}{k} \frac{d^2 k}{ds^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d^2(k)^2}{ds^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d \log(k^2)}{ds} \right)^2$$

usw.

Als Anwendung der Formeln (54) beweise man folgende Gleichung:

$$(55a) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \frac{d^4 \mathbf{r}}{ds^4} = k^5 \frac{d}{ds} \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}}{k} \right),$$

indem man zuerst

$$(55b) \quad \left[\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \frac{d^3 \mathbf{r}}{ds^3} \right] = k^2 (\boldsymbol{\kappa} t + k \mathbf{b})$$

ableitet.

Aus (55a) ergibt sich unmittelbar, daß die drei Vektoren $d\mathbf{r}/ds$, $d^2\mathbf{r}/ds^2$, $d^3\mathbf{r}/ds^3$ dann und nur dann komplanar sind, wenn die Raumkurve ein konstantes Verhältnis der Krümmung zur Windung besitzt, d. h. nach Nr. 23. eine allgemeine Schraubelinie ist. Die geraden Linien sind hierbei mitgezählt.

26. Die ganze Krümmung. Der Vektor

$$(56) \quad \mathfrak{G} = \boldsymbol{\kappa} t + k \mathbf{b}$$

ist der Ebene t, \mathbf{b} , d. h. der rektifizierenden Ebene parallel. Es ist

$$\mathfrak{G} n = 0.$$

Der Betrag

$$(57) \quad |\mathfrak{G}| = \sqrt{k^2 + \boldsymbol{\kappa}^2} = G$$

heißt die „ganze Krümmung“ (oder Lancret'sche¹⁾ Krümmung).

Mit Hilfe des Vektors \mathfrak{G} der ganzen Krümmung lassen sich die Hauptgleichungen in sehr einfacher und symmetrischer Weise darstellen. Es ist nämlich

$$[\mathfrak{G} t] = k[\mathbf{b} t] = k n$$

$$[\mathfrak{G} n] = \boldsymbol{\kappa}[t n] + k[\mathbf{b} n] = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{b} - k t$$

$$[\mathfrak{G} \mathbf{b}] = \boldsymbol{\kappa}[t \mathbf{b}] = -\boldsymbol{\kappa} n;$$

¹⁾ Lancret 1802.

damit lauten die Hauptgleichungen (I), (II), (III) in Nr. 22

$$(58) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= [\mathfrak{G}t] \\ \frac{dn}{ds} &= [\mathfrak{G}n] \\ \frac{db}{ds} &= [\mathfrak{G}b]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(59) \quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = k^2, \quad \left(\frac{dn}{ds}\right)^2 = G^2, \quad \left(\frac{db}{ds}\right)^2 = \kappa^2.$$

Wenn nun $\mathfrak{r} = \alpha t + \beta n + \gamma b$ ein beliebiger, aber mit dem begleitenden Dreibein fest verbundener Vektor ist, so daß α, β, γ von s unabhängige feste Zahlen bedeuten, so folgt aus (58) sofort

$$(60) \quad \frac{d\mathfrak{r}}{ds} = [\mathfrak{G}\mathfrak{r}].$$

Aus (55b) und (56) folgt noch

$$\left[\frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} \right] = k^2 \mathfrak{G}.$$

27. Radiusvektor, entwickelt nach Potenzen der Bogenlänge. Die Formeln (54) erlauben eine Entwicklung von $\mathfrak{r}(s)$ nach Potenzen von $s - s_0$, wenn man sich des Taylorschen Satzes bedient:

$$(61) \quad \mathfrak{r}(s) = \mathfrak{r}_0 + \left(\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\right)_0 (s - s_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right)_0 (s - s_0)^2 \\ + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3}\right)_0 (s - s_0)^3 + \dots + \mathfrak{R},$$

falls nur die Ableitungen hinreichend hoher Ordnung vorhanden sind. Darin bedeutet der Zeiger 0 die betreffenden Werte für $s = s_0$ und \mathfrak{R} das vektorische Restglied. Die Formeln (54) ergeben jetzt

$$(62) \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}_0(s - s_0) + \frac{1}{2}k_0\mathbf{n}_0(s - s_0)^2 + \frac{1}{6} \left(-k_0^2\mathbf{t}_0 + \left(\frac{dk}{ds} \right)_0 \mathbf{n}_0 + k_0\kappa_0\mathbf{b}_0 \right) (s - s_0)^3 + \dots + \mathfrak{R}.$$

Bezieht man den Sehnenvektor $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0$ auf das begleitende Dreibein als Basis und setzt

$$(63) \quad \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0 = \xi\mathbf{t}_0 + \eta\mathbf{n}_0 + \zeta\mathbf{b}_0,$$

so erhält man bis auf Größen dritter Ordnung

$$(64) \quad \begin{cases} \xi = (s - s_0) - \frac{1}{6}k_0^2(s - s_0)^3 + \dots \\ \eta = \frac{1}{2}k_0(s - s_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{dk}{ds} \right)_0 (s - s_0)^3 + \dots \\ \zeta = \frac{1}{6}k_0\kappa_0(s - s_0)^3 + \dots \end{cases}$$

oder, wenn man nur die Anfangsglieder berücksichtigt:

$$(65) \quad \begin{aligned} \xi &\approx s - s_0; & \eta &\approx \frac{1}{2}k_0(s - s_0)^2; \\ \zeta &\approx \frac{1}{6}k_0\kappa_0(s - s_0)^3. \end{aligned}$$

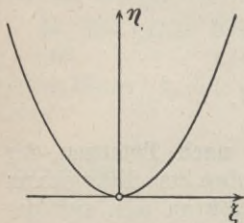


Abb. 12.

Diese Gleichungen stellen in erster Annäherung den Verlauf einer regulären Raumkurve dar, wenn als ξ -Achse die Tangente, als η -Achse die Hauptnormale, und als ζ -Achse die

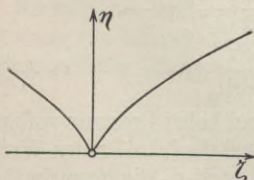


Abb. 13.

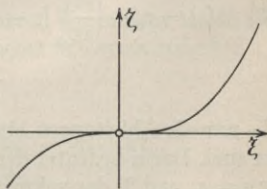


Abb. 14.

Binormale im Anfangspunkte ($s = s_0$) gewählt werden. Die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen, nämlich die $(\eta\zeta)$ -Normalebene, die $(\zeta\xi)$ rektifizierende Ebene und die $(\xi\eta)$ -Schmiegungebene sind aus den Abbildungen 12 bis 14 ersichtlich.

Man erkennt, daß, wenn die Windung \varkappa_0 das Vorzeichen wechselt, dies auf dasselbe hinauskommt, als wenn die ζ -Achse ihren Richtungssinn vertauscht. Diese Kurven haben der Reihe nach folgende Gleichungen:

$$(66) \quad \begin{cases} \eta = \frac{1}{2} k_0 \xi^2 \\ \eta^3 = \frac{9}{2} \frac{k_0}{\varkappa_0^2} \zeta^2 \\ \zeta = \frac{1}{6} k_0 \varkappa_0 \xi^3. \end{cases}$$

§ 5. Die sphärischen Bilder.

28. Die sphärischen Bilder. Man denke sich nun durch den Ursprung O die zu t, n, b gleichgerichteten Einheitsvektoren gelegt, die ebenfalls mit t, n, b bezeichnet werden. Wenn der Punkt P auf der Raumkurve wandert, dann beschreiben die Endpunkte von t, n, b auf der Einheitskugel gelegene sphärische Kurven, die die sphärischen Bilder der Tangenten, Hauptnormalen, Binormalen der Raumkurve heißen.

Wenn der Ortsvektor $r(s)$ der Raumkurve als Funktion der Bogenlänge gegeben ist, wodurch zugleich ein Fortschreitungsinn auf der Kurve festgelegt ist, so sind damit auch die Ortsvektoren t, n, b der drei sphärischen Bilder gegeben. Denn es ist:

$$t = \frac{dr}{ds},$$

$$n = \frac{1}{k} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d^2r}{ds^2},$$

mit

$$k = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|,$$

und

$$b = [tt] = \frac{1}{k} \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right].$$

Bezeichnet man mit σ die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Tangenten, so hat man unter Anwendung der Formel (8) für die Bogenlänge

$$(67) \quad \sigma = \int_{s_0}^s \left| \frac{dt}{ds} \right| ds = \int_{s_0}^s k ds,$$

daher

$$d\sigma = k ds,$$

wodurch, wenn k ein bestimmtes Vorzeichen, im reellen Falle das positive, beigelegt wird, zugleich der Fortschreitungsinn des sphärischen Tangentenbildes bestimmt ist.

29. Sphärisches Tangentenbild. Man denke sich nun das sphärische Tangentenbild, d. h. $t = t(\sigma)$ gegeben, worin σ seine Bogenlänge, von irgendeinem Anfangspunkte an gerechnet, bedeutet, und die Aufgabe gestellt: alle Kurven zu bestimmen, die dasselbe sphärische Tangentenbild haben, d. h. den Ortsvektor $\mathbf{r}(\sigma)$ zu bestimmen. Es sei $s = \varphi(\sigma)$ die Bogenlänge einer beliebigen der gesuchten Raumkurven. Dann ist

$$\frac{ds}{d\sigma} = \varphi'(\sigma) \neq 0,$$

und also

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = t\varphi'(\sigma) = t(\sigma) \varphi'(\sigma);$$

mithin

$$(68) \quad \mathbf{r} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} t(\sigma) \varphi'(\sigma) d\sigma = \mathbf{r}(\sigma).$$

Man kann nun zeigen, daß jeder Ortsvektor von der Form (68) bei willkürlicher Wahl von $\varphi'(\sigma)$ zu einer Raumkurve gehört, deren sphärisches Tangentenbild den Ortsvektor $\mathfrak{t}(\sigma)$ hat, wo σ die Bogenlänge dieses Tangentenbildes bedeutet, also $\mathfrak{t}'(\sigma)^2 = 1$ ist. Um den zu $\mathfrak{r}(\sigma)$ gehörigen Tangentenvektor zu berechnen, hat man zunächst noch die Bogenlänge der Raumkurve zu bestimmen. Man findet

$$\begin{aligned} s &= s(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} |\mathfrak{r}'(\sigma)| d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} |\mathfrak{t}(\sigma) \varphi'(\sigma)| d\sigma \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} |\varphi'(\sigma)| d\sigma = \pm \varphi(\sigma), \end{aligned}$$

wenn $\varphi(\sigma_0) = 0$ genommen wird, was man stets durch passende Wahl der unteren Integrationsgrenze erreichen kann. Nunmehr ist der Tangentenvektor

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \mathfrak{r}'(\sigma) \frac{1}{\varphi'(\sigma)} = \mathfrak{t}(\sigma) \varphi'(\sigma) \frac{1}{\varphi'(\sigma)} = \mathfrak{t}(\sigma),$$

unabhängig von $\varphi(\sigma)$, was zu beweisen war.

Aufgabe: Man bestimme für die Kurven des Ortsvektors (68) die Krümmung, die Windung, die Vektoren der Hauptnormale und der Binormale.

Lösung: $k = 1 : |\varphi'(\sigma)|$, $\varkappa = (\mathfrak{t}(\sigma) \mathfrak{t}'(\sigma) \mathfrak{t}''(\sigma)) : \varphi'(\sigma)$,

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{k} \mathfrak{t}'(\sigma) : \varphi'(\sigma),$$

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{k} [\mathfrak{t}(\sigma) \mathfrak{t}'(\sigma)] : \varphi'(\sigma).$$

Bemerkung: Für festes k hat auch $\varphi'(\sigma)$ einen konstanten Wert $\pm 1 : k$. Jede Raumkurve konstanter Krümmung läßt sich daher nach (68) in der Form

$$(69) \quad \mathfrak{r}(\sigma) = \pm \frac{1}{k} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{t}(\sigma) d\sigma, \quad \text{mit } \mathfrak{t}(\sigma)^2 = 1, \quad \mathfrak{t}'(\sigma)^2 = 1$$

darstellen.

30. Das sphärische Binormalenbild. Es sei nun das sphärische Binormalenbild gegeben, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\sigma)$, wo σ die Bogenlänge des Binormalenbildes bedeutet¹⁾. Zu bestimmen ist der Ortsvektor $\mathfrak{r}(\sigma)$ der allgemeinsten zugehörigen Raumkurve. Es sei s deren Bogenlänge, und

$$(70) \quad \frac{ds}{d\sigma} \neq 0.$$

Nun ist nach (32)

$$\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} = [\mathfrak{n}\mathfrak{b}] = \frac{1}{\varkappa} \left[\mathfrak{b} \frac{d\mathfrak{b}}{ds} \right],$$

wo \varkappa die Windung der Raumkurve bedeutet. Daraus folgt

$$\text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\varkappa} \frac{d\sigma}{ds} \left[\mathfrak{b} \frac{d\mathfrak{b}}{d\sigma} \right]$$

$$(71) \quad \frac{d\mathfrak{r}}{d\sigma} = \frac{1}{\varkappa} [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)].$$

Es ist aber \varkappa als Funktion von σ darstellbar. Man setze

$$(72) \quad \frac{1}{\varkappa} = \psi(\sigma) \neq 0.$$

Dann folgt aus (71) durch Integration von einem willkürlichen Anfangswert σ_0 aus:

$$(73) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \psi(\sigma) [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)] d\sigma.$$

Man kann nun zeigen, daß alle Kurven mit dem Ortsvektor (73) bei willkürlicher Wahl von $\psi(\sigma)$ dasselbe sphärische Binormalenbild mit dem Ortsvektor $\mathfrak{b}(\sigma)$ besitzen, wo σ die zugehörige Bogenlänge bedeutet, also $\mathfrak{b}'(\sigma)^2 = 1$ ist. Aus (73) folgt zunächst für die Bogenlänge der Raumkurve

$$s(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} |\mathfrak{r}'(\sigma)| d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma} |\psi(\sigma)| \cdot |[\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)]| d\sigma$$

$$= \pm \int_{\sigma_0}^{\sigma} |\psi(\sigma)| d\sigma.$$

¹⁾ Man beachte, daß σ hier eine andere Bedeutung als vorher hat.

Der Vektor $[\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)]$ ist nämlich ein Einheitsvektor, weil $\mathfrak{b}(\sigma)^2 = 1$, $\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma) = 0$ und auch $\mathfrak{b}'(\sigma)^2 = 1$ ist.

Daher wird

$$ds = \pm |\psi(\sigma)| d\sigma.$$

Infolgedessen ist der Tangentenvektor der Raumkurve

$$(74) \quad \mathfrak{t}(s) = \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \frac{\psi(\sigma)[\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)] d\sigma}{\pm |\psi(\sigma)| d\sigma} = \pm [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)].$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} d\mathfrak{t} &= \pm [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)] d\sigma, \\ \frac{d\mathfrak{t}}{ds} &= \frac{1}{|\psi(\sigma)|} [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)] = k\mathfrak{n}, \end{aligned}$$

also ist

$$(75) \quad k = \left| \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \right| = \frac{\mu}{|\psi(\sigma)|}, \quad \mathfrak{n} = \frac{1}{\mu} [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)]$$

mit

$$\mu = |[\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)]| = \sqrt{\mathfrak{b}''(\sigma)^2 - 1}.$$

Den Binormalenvektor berechnet man jetzt am einfachsten nach Formel (34) und erhält

$$\mathfrak{b} = \frac{1}{k} \left[\mathfrak{t} \frac{d\mathfrak{t}}{ds} \right] = \frac{1}{\mu} [\pm [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma)] [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)]]$$

oder ¹⁾

$$(76) \quad \mathfrak{b} = \pm \frac{1}{\mu} (\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)) \mathfrak{b}(\sigma).$$

Aus $\mathfrak{b}(\sigma)^2 = 1$, $\mathfrak{b}'(\sigma)^2 = 1$ folgt aber $\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma) = 0$, $\mathfrak{b}'(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma) = 0$. Daher ist

$$(76a) \quad \mathfrak{b}'(\sigma) = \lambda [\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma)],$$

wenn unter λ ein skalarer Faktor verstanden wird. Mithin wird

$$\mathfrak{b}(\sigma) \mathfrak{b}'(\sigma) \mathfrak{b}''(\sigma) = -\frac{1}{\lambda} \mathfrak{b}'(\sigma)^2 = -\frac{1}{\lambda}.$$

Setzt man dies in (76) ein und quadriert sodann, so kommt

¹⁾ Man erinnert sich der bekannten Identität $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\mathfrak{B} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$.

wegen $b^2 = 1$:

$$\lambda^2 \mu^2 = 1.$$

Aus (76) erhält man jedoch nur dann das gewünschte Ergebnis $b = b(\sigma)$, wenn $\pm \lambda \mu$ den Wert -1 hat. Das ist aber dadurch zu erreichen, daß man den Fortschreitungsinn der Bogenlänge auf der Raumkurve passend wählt. Denn aus (76 a) folgt

$$[b(\sigma) b'(\sigma)] = -\lambda(b(\sigma) + b''(\sigma)),$$

und wenn man dies in (74) einsetzt, erhält man

$$t = \mp \lambda(b(\sigma) + b''(\sigma)).$$

Wählt man also den Fortschreitungsinn der Bogenlänge auf der Raumkurve so, daß $t = \frac{1}{\mu} (b(\sigma) + b''(\sigma))$ wird, dann

wird $\pm \lambda = -\frac{1}{\mu}$ und also $b = b(\sigma)$. Damit ist der Beweis völlig erbracht.

Bemerkung. Aus (71) ergibt sich sogleich folgender Satz: Jede Raumkurve mit fester Windung \varkappa läßt sich durch folgende Formel darstellen:

$$(77) \quad r(\sigma) = \frac{1}{\varkappa} \int_{\sigma_0}^{\sigma} [b(\sigma) b'(\sigma)] d\sigma,$$

wobei $b(\sigma)^2 = b'(\sigma)^2 = 1$ ist.

31. Sphärisches Bild der Hauptnormalen. Drittens soll der Ortsvektor r aller Kurven bestimmt werden, deren sphärisches Bild der Hauptnormalen $n = n(\sigma)$ gegeben ist, mit $n'(\sigma)^2 = 1$. Es sei wieder $s = \varphi(\sigma)$ die Bogenlänge der gesuchten Raumkurve, so ist

$$\frac{ds}{d\sigma} = \varphi'(\sigma) \neq 0.$$

Nun folgt aus (II), nämlich $\frac{dn}{ds} = \varkappa b - kt$,

$$\left[\frac{dn}{ds} n \right] = \varkappa [bn] - k[tn]$$

oder

$$(78) \quad \left[\frac{dn}{ds} n \right] = -\varkappa t - kb.$$

Man multipliziere nun (II) mit k und (78) mit \varkappa beiderseits und addiere, so schafft man b heraus und erhält

$$k \frac{dn}{ds} + \varkappa \left[\frac{dn}{ds} n \right] = -[k^2 + \varkappa^2] t = -G^2 t.$$

Ist $G \neq 0$, so gibt es zwei Funktionen $\tau(s)$ und $\mu(s)$ der Art, daß man

$$k = \frac{1}{\mu} \cos \tau, \quad \mu^2 = \frac{1}{G^2}$$

$$\varkappa = \frac{1}{\mu} \sin \tau$$

setzen kann; dadurch wird

$$(79) \quad t = \frac{dx}{ds} = \left(-\cos \tau(s) \frac{dn}{ds} - \sin \tau(s) \left[\frac{dn}{ds} n \right] \right) \cdot \mu(s).$$

Man führe jetzt die Bogenlänge σ der sphärischen Bildkurve ein und setze

$$\tau(s) = \vartheta(\sigma), \quad \mu(s) = \nu(\sigma),$$

dann wird

$$(80) \quad \frac{dx}{d\sigma} = \left(-\cos \vartheta(\sigma) \frac{dn}{d\sigma} - \sin \vartheta(\sigma) \left[\frac{dn}{d\sigma} n \right] \right) \nu(\sigma).$$

Angenommen, die Funktion $\vartheta(\sigma)$ sei bereits bekannt, so ergibt sich daraus $r = r(\sigma)$ durch eine einfache Quadratur:

$$(81) \quad r(\sigma) = - \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\cos \vartheta(\sigma) n'(\sigma) + \sin \vartheta(\sigma) [n'(\sigma) n(\sigma)]) \nu(\sigma) d\sigma,$$

wobei σ_0 eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet. Um $\vartheta(\sigma)$ zu bestimmen, setze man zunächst

$$(82) \quad k = \frac{1}{\nu(\sigma)} \cos \vartheta(\sigma), \quad \varkappa = \frac{1}{\nu(\sigma)} \sin \vartheta(\sigma)$$

in (II) ein, so erhält man

$$(83) \quad \nu(\sigma) \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -t \cos \vartheta(\sigma) + b \sin \vartheta(\sigma).$$

Andererseits ist das Bogendifferential ds der Raumkurve (81) durch die Formel

$$(84) \quad ds = \pm |\mathfrak{r}'(\sigma)| d\sigma = \pm |\nu(\sigma)| d\sigma$$

gegeben. Danach läßt sich (83) in der Form

$$(85) \quad \pm \mathfrak{n}'(\sigma) = -t \cos \vartheta(\sigma) + b \sin \vartheta(\sigma)$$

schreiben. Die Ableitung nach σ ergibt

$$\begin{aligned} \pm \mathfrak{n}''(\sigma) &= (t \sin \vartheta(\sigma) + b \cos \vartheta(\sigma)) \frac{d\vartheta}{d\sigma} \\ &\quad + \left(-\cos \vartheta(\sigma) \frac{dt}{ds} + \sin \vartheta(\sigma) \frac{db}{ds} \right) \frac{ds}{d\sigma}. \end{aligned}$$

Nach den Frenetschen Formeln wird der zweite Klammerausdruck zum Vektor \mathfrak{n} proportional. Wenn man daher beiderseits mit

$$\pm [\mathfrak{n}\mathfrak{n}'(\sigma)] = t \sin \vartheta(\sigma) + b \cos \vartheta(\sigma)$$

— wegen (85) — skalar multipliziert, so fällt das zweite Glied auf der rechten Seite weg, und es bleibt

$$(86) \quad \mathfrak{n}\mathfrak{n}'(\sigma) \mathfrak{n}''(\sigma) = \frac{d\vartheta}{d\sigma},$$

woraus sich $\vartheta(\sigma)$ durch eine Quadratur bestimmen läßt:

$$(87) \quad \vartheta(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\mathfrak{n}(\sigma) \mathfrak{n}'(\sigma) \mathfrak{n}''(\sigma)) d\sigma,$$

unter σ_0 eine willkürliche Integrationskonstante verstanden.

Man muß noch umgekehrt beweisen, daß die durch (81) und (87) bestimmte Raumkurve, wobei $\nu(\sigma)$ eine willkürliche Funktion bedeutet, wirklich die Eigenschaft hat, den gegebenen Vektor $\mathfrak{n}(\sigma)$ als Hauptnormale zu besitzen. Aus (81) folgt (84) und demnach

$$(88) \quad \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = t = \pm (-\cos \vartheta(\sigma) \mathfrak{n}'(\sigma) - \sin \vartheta(\sigma) [\mathfrak{n}'(\sigma) \mathfrak{n}(\sigma)]).$$

Zur Ermittlung des Hauptnormalenvektors bediene man sich der Formel (1) oder wegen (84)

$$(89) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} : \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = \pm \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} : \left| \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} \right|.$$

Es ist aber

$$(89a) \quad \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \pm \{ -\cos \vartheta(\sigma) \cdot \mathbf{n}''(\sigma) - \sin \vartheta(\sigma) [\mathbf{n}'(\sigma) \mathbf{n}(\sigma)] \\ + \vartheta'(\sigma) (\sin \vartheta(\sigma) \mathbf{n}'(\sigma) - \cos \vartheta(\sigma) [\mathbf{n}'(\sigma) \mathbf{n}(\sigma)]) \}.$$

Wegen $\mathbf{n}^2 = 1$, $\mathbf{n}'(\sigma)^2 = 1$ ist $\mathbf{n}\mathbf{n}'(\sigma) = 0$, $\mathbf{n}'\mathbf{n}''(\sigma) = 0$, also $\mathbf{n}'(\sigma) = \lambda[\mathbf{n}\mathbf{n}''(\sigma)]$ mit skalarem λ , das man durch skalare Multiplikation mit \mathbf{n}' bestimmt: $1 = -\lambda(\mathbf{n}\mathbf{n}'(\sigma) \mathbf{n}''(\sigma)) = -\lambda \vartheta'(\sigma)$ nach (86). Also ist $\vartheta'(\sigma) \mathbf{n}'(\sigma) = [\mathbf{n}'(\sigma) \mathbf{n}(\sigma)]$, woraus folgt, daß in (89a) das Glied mit $\sin \vartheta(\sigma)$ wegfällt; es wird also

$$(89b) \quad \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \mp \cos \vartheta(\sigma) \{ \mathbf{n}''(\sigma) + [\mathbf{n}'(\sigma) \mathbf{n}(\sigma)] \vartheta'(\sigma) \}.$$

Nun ist aber

$$[\mathbf{n}'(\sigma) \mathbf{n}(\sigma)] = -\lambda[\mathbf{n}(\sigma) [\mathbf{n}(\sigma) \mathbf{n}''(\sigma)]] \\ = -\lambda(\mathbf{n}(\sigma) (\mathbf{n}(\sigma) \mathbf{n}''(\sigma)) - \mathbf{n}''(\sigma)) \\ = \lambda(\mathbf{n}(\sigma) + \mathbf{n}''(\sigma));$$

denn aus $\mathbf{n}(\sigma) \mathbf{n}'(\sigma) = 0$ folgt $\mathbf{n}\mathbf{n}''(\sigma) + \mathbf{n}'(\sigma)^2 = 0$ oder $\mathbf{n}(\sigma) \mathbf{n}''(\sigma) = -1$. Setzt man dies in (89b) ein und berücksichtigt $\lambda \vartheta'(\sigma) = -1$, so kommt

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \pm \cos \vartheta \cdot \mathbf{n}(\sigma),$$

mithin nach (89)

$$\mathbf{n} = \pm \mathbf{n}(\sigma).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen, wofern nur, wie (88) zeigt, der Durchlaufungssinn der Kurve passend gewählt wird.

Bemerkung: Aus (82) folgt

$$v(\sigma)^2 = \frac{1}{k^2 + \kappa^2} = \frac{1}{G^2},$$

wo G die ganze Krümmung (57) bedeutet. Wenn daher die ganze Krümmung einen festen Wert hat, so hat auch $\nu(\sigma)$ einen festen Wert, und die Raumkurven dieser Eigenschaft lassen sich nach (81) in der Form

$$r(\sigma) = \frac{\pm 1}{G} \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\cos \vartheta(\sigma) n'(\sigma) + \sin \vartheta(\sigma) [n'(\sigma) n(\sigma)]) d\sigma$$

darstellen, wobei $n(\sigma)^2 = n'(\sigma)^2 = 1$ ist, und $\vartheta(\sigma)$ durch die Gleichung (87) bestimmt wird.

§ 6. Differentialinvarianten.

32. Bewegungen im Raume. Invarianten. Ist $OP = r$, $\overline{OP'} = r'$, so ist

$$r' = r + r_0,$$

wenn $r_0 = \overline{PP'}$ die Verschiebung von P nach P' bedeutet (Abb. 15). Wenn $r(t)$ eine Raumkurve (C) darstellt, so bedeutet $r'(t) = r(t) + r_0$, wo r_0 von t unabhängig ist, die

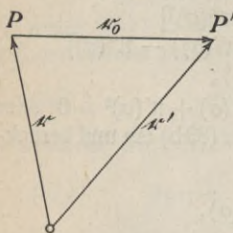


Abb. 15.

Kurve (C') die aus (C) durch parallele Verschiebung ihrer sämtlichen Punkte um den Vektor r_0 entstanden ist. Aus der analytischen Geometrie des Raumes ist ferner bekannt, wie man die räumliche Drehung zu behandeln hat. Wir wollen das hier unter Benutzung der vektorischen Darstellung kurz ins Gedächtnis zurückrufen. Es seien x, y, z

die Koordinaten von P in bezug auf ein Rechtssystem mit den Grundvektoren i, j, k ; dann ist

$$r = xi + yj + zk$$

mit

$$\begin{aligned} i^2 = 1, & \quad j^2 = 1, & \quad k^2 = 1, \\ jk = 0, & \quad ki = 0, & \quad ij = 0, \end{aligned}$$

$$(90) \quad ij\mathfrak{f} = +1,$$

woraus bekanntlich folgt:

$$(91) \quad [j\mathfrak{f}] = i, \quad [\mathfrak{f}i] = j, \quad [ij] = \mathfrak{f}.$$

Es seien ξ, η, ζ die Koordinaten desselben Punktes P in bezug auf ein anderes Rechtssystem mit demselben Ursprung O , aber den Grundvektoren a, b, c . Die skalaren Komponenten von a, b, c in bezug auf das System x, y, z sind die Richtungskosinus der drei Achsen ξ, η, ζ gegen jene Achsen x, y, z . Man setze

$$(92) \quad \begin{aligned} a &= ai + a'j + a''\mathfrak{f}, \\ b &= bi + b'j + b''\mathfrak{f}, \\ c &= ci + c'j + c''\mathfrak{f}, \end{aligned}$$

so sind $a, a', a'', b, \dots, c''$ eben diese neun Richtungskosinus. Da a, b, c Einheitsvektoren sind, aufeinander senkrecht stehen und ein Rechtssystem bilden, so gelten folgende Formeln:

$$(93) \quad \begin{aligned} a^2 &= 1, & b^2 &= 1, & c^2 &= 1, \\ bc &= 0, & ca &= 0, & ab &= 0, \\ abc &= +1, \end{aligned}$$

woraus

$$(94) \quad [bc] = a, \quad [ca] = b, \quad [ab] = c$$

folgt. Durch Auflösung von (92) nach i, j, \mathfrak{f} erhält man

$$(95) \quad \begin{aligned} i &= a a + b b + c c \\ j &= a' a + b' b + c' c \\ \mathfrak{f} &= a'' a + b'' b + c'' c. \end{aligned}$$

Aus

$$(96) \quad r = xi + yj + z\mathfrak{f} = \xi a + \eta b + \zeta c$$

ergibt sich durch Quadrieren

$$(97) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

was ja anschaulich geometrisch einleuchtet. Setzt man die Werte (92) in (96) ein und vergleicht die Komponenten beiderseits, so erhält man

$$(98) \quad \begin{aligned} x &= a \xi + b \eta + c \zeta = i r \\ y &= a' \xi + b' \eta + c' \zeta = j r \\ z &= a'' \xi + b'' \eta + c'' \zeta = \mathfrak{f} r \end{aligned}$$

und daraus durch Auflösung nach ξ, η, ζ mit Rücksicht auf (94)

$$(99) \quad \begin{aligned} \xi &= ax + a'y + a''z = \alpha r \\ \eta &= bx + b'y + b''z = \beta r \\ \zeta &= cx + c'y + c''z = \gamma r. \end{aligned}$$

Man nennt bekanntlich (98) oder (99) eine orthogonale Substitution. Das wichtigste Ergebnis ist die Gleichung (97), nach der die Norm des Vektors r , nämlich $x^2 + y^2 + z^2$, eine Invariante der orthogonalen Substitution ist, d. h. in den formal gleichgebildeten Ausdruck $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ übergeht. Ist J eine solche Invariante, so ist natürlich $F(J)$ ebenfalls eine, unter F eine willkürliche Funktion verstanden. Diese braucht man also nicht besonders zu zählen. Man kann nun beweisen, daß $J = x^2 + y^2 + z^2$ die einzige Invariante der orthogonalen Substitution ist. Das geschieht am einfachsten durch folgende Überlegung: Wenn $\Phi(x, y, z)$ eine Invariante sein soll, und man mittels (98) oder (99) ξ, η, ζ einführt, so muß das Ergebnis $\Phi(x, y, z) = \Phi(\xi, \eta, \zeta)$ sein. Das stellt eine von $a, b, c, a' \dots c''$ unabhängige Relation dar. Diese muß sich unter den Beziehungen befinden, die man erhält, wenn man diese neun Größen aus den neun Gleichungen (93) und (99) zu eliminieren sucht. Das gelingt, und man erhält durch eine elementare Eliminationsrechnung eindeutig das Resultat (97) als einzige Beziehung. Diese Rechnung sei hier der Kürze wegen übergangen. Man findet sie ausgeführt in J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, § 170, S. 549, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913.

Wenn zugleich mit der Drehung von (x, y, z) in (ξ, η, ζ) auch die Drehung von (x_1, y_1, z_1) in (ξ_1, η_1, ζ_1) erfolgt, d. h. wenn außer (99) noch die Gleichungen

$$(100) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= ax_1 + a'y_1 + a''z_1 = \alpha r_1 \\ \eta_1 &= bx_1 + b'y_1 + b''z_1 = \beta r_1 \\ \zeta_1 &= cx_1 + c'y_1 + c''z_1 = \gamma r_1 \end{aligned}$$

vorliegen, so bestehen außer (97) noch die Beziehungen

$$(101) \quad r r_1 = x x_1 + y y_1 + z z_1 = \xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \zeta \zeta_1$$

und

$$(102) \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2;$$

zu den Normen tritt dann noch das skalare Produkt, was ebenfalls geometrisch einleuchtet. In diesem Fall gibt es also drei, und wie man durch eine elementare Eliminationsrechnung nachweisen kann (J. Knoblauch, a. a. O. S. 551) genau drei Invarianten

$$(103) \quad \begin{aligned} I &= x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ J &= xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1, \\ I_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2. \end{aligned}$$

Wird noch ein drittes System derselben Drehung unterworfen, so kommt zu den Normen und den Skalarprodukten noch das Spatprodukt

$$(104) \quad rr_1r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

hinzu, das ja dem Volumen des Spates gleich ist.

Wegen des Zusammenhanges der orthogonalen Substitution mit der Drehung spricht man auch von den Invarianten der Drehung.

Eine Invariante der Verschiebung, die nur von den Koordinaten x, y, z selbst abhängt, gibt es nicht; denn $\Phi(x, y, z) = \Phi(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ kann bei willkürlichen x_0, y_0, z_0 nur bestehen, wenn Φ eine Konstante ist.

Anders ist es, wenn noch Ableitungen von x, y, z nach einem Parameter (t) auftreten, denn diese sind unabhängig davon, ob x, y, z um additive Konstanten verändert werden. Offenbar gilt auch das Umgekehrte. Eine Invariante der Verschiebung darf also nur Ableitungen der Koordinaten enthalten, ist also eine Differentialinvariante.

33. Eine Invariante der Bewegung ist eine Invariante sowohl der Verschiebung wie auch der Drehung. Daher darf sie nur Ableitungen von x, y, z nach dem Parameter enthalten, und wenn diese nur von erster Ordnung auftreten, so muß die In-

variante nach (97) eine Funktion des Ausdrucks

$$(105) \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

sein. Wenn Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auftreten, ist sie zufolge (103) eine Funktion der drei Ausdrücke

$$(106) \quad r'^2, \quad r'r'', \quad r''^2,$$

und wenn schließlich Ableitungen bis zur dritten Ordnung auftreten, nach (104) eine Funktion folgender Argumente

$$(107) \quad r'^2, r''^2, r'''^2; \quad r'r'', r'r''', r''r'''; \quad r'r''r''''.$$

34. Invarianten der Parameterdarstellung. Wenn $r = r(t)$ eine Raumkurve in der Darstellung durch den Parameter t ist, und man führt einen neuen Parameter $u = u(t)$ ein, so gibt es Größen, die einen davon unabhängigen Wert behalten. Dazu gehören z. B. die Koordinaten x, y, z eines beliebigen, aber bestimmten Kurvenpunktes selbst, ferner der Winkel des Tangentenvektors t mit der positiven x -Achse usw. Solche Größen heißen Invarianten der Parameterdarstellung. Um sie alle zu bestimmen, bemerke man, daß $\varphi(x, y, z)$ von selbst eine solche Invariante ist, weil ja x, y, z schon diese Eigenschaft haben, daß es also auf das Vorkommen von x, y, z überhaupt nicht ankommt. Enthält aber die Funktion φ noch Ableitungen erster Ordnung nach dem Parameter t , $\varphi = \varphi(x, y, z, x', y', z')$, so muß φ eine homogene Funktion der Dimension 0 von x', y', z' sein. Das beweist man leicht, indem man in φ den neuen Parameter u mittels $t = t(u)$ einführt. Dann wird

$$(108) \quad \varphi(x, y, z, x', y', z') = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}' \cdot t', \bar{y}' \cdot t', \bar{z}' \cdot t'),$$

wo $x(t) = \bar{x}(u)$ usw. ist und die Striche auf der rechten Seite die Ableitungen nach u bedeuten. Wenn nun φ eine Invariante der Parameterdarstellung sein soll, so muß die rechte Seite in (108) der linken Seite formal gleichgebildet sein, d. h. sie darf sich von ihr nur in den Buchstaben (u statt t) unterscheiden, also darf t' nicht vorkommen, mithin muß $\partial\varphi/\partial t' = 0$ sein. Das liefert die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} z' = 0,$$

und diese bedeutet, daß φ hinsichtlich der Argumente x', y', z' homogen von der Dimension Null ist. Man kann z. B. eine Invariante erster Ordnung der Parameterdarstellung so schreiben

$$(109) \quad \varphi\left(x, y, z; \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}\right) = \varphi\left(x, y, z; \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right).$$

Von den Invarianten höherer Ordnung der Parameterdarstellung wollen wir der Kürze wegen nur das Ergebnis mitteilen: jede solche Invariante läßt sich durch wiederholte Bildung der invarianten Operation d/dx darstellen, also

$$(110) \quad \varphi(x, y, z; x', y', z' \dots x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}) \\ = \varphi\left(x, y, z; \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^nz}{dx^n}\right).$$

35. Einführung der Bogenlänge. Eigentliche und un-eigentliche Invarianten der Darstellung. Es ist fast selbstverständlich, aber für das folgende wichtig zu bemerken, daß man in (110) statt d/dx auch die Operation d/ds schreiben kann, wo s den Parameter der Bogenlänge bedeutet. Denn diese läßt sich ja auf d/dx zurückführen:

$$d/ds = d/dx : ds/dx,$$

und $ds/dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ ist eine Invariante der Parameterdarstellung, weil von der Dimension Null in bezug auf x', y', z' .

Jede Invariante der Parameterdarstellung läßt sich also in die Form

$$(111) \quad \chi(x, y, z; x', y', z'; \dots x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$$

bringen, wo jetzt aber die Striche die Ableitungen nach der Bogenlänge bedeuten. Nun sind x', y', z' die Komponenten des Tangentenvektors $dx/ds = t$, und für die höheren

Ableitungen nach der Bogenlänge gelten der Reihe nach die Formeln

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = k\mathfrak{n}$$

$$\frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\mathfrak{n} + k\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = \frac{dk}{ds}\mathfrak{n} + k\kappa\mathfrak{b} - k^2\mathfrak{t}$$

$$\frac{d^4\mathfrak{r}}{ds^4} = (k'' - k\kappa^2 - k^3)\mathfrak{n} + (k\kappa' + 2k'\kappa)\mathfrak{b} - 3kk'\mathfrak{t}$$

usw., Formeln, die man leicht durch fortgesetzte Differentiation nach der Bogenlänge unter Benutzung der Frenetschen Formeln erhält. Diese Gleichungen sind schon in Nr. 25 aufgetreten, und es wurde auch dort schon darauf hingewiesen, daß darin nur die Krümmung und Windung, sowie deren Ableitungen nach der Bogenlänge auftreten. Man kann daher jede Invariante der Parameterdarstellung auch so schreiben:

$$(112) \quad \Phi\left(\mathfrak{r}, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}, k, \frac{dk}{ds}, \frac{d^2k}{ds^2}, \dots, \kappa, \frac{d\kappa}{ds}, \frac{d^2\kappa}{ds^2}, \dots\right).$$

Hierzu ist aber eine wichtige Bemerkung zu machen. Da die Einführung der Bogenlänge als Parameter wegen der auftretenden Quadratwurzel mit einer Zweiwertigkeit verbunden ist, kann es sein, daß dabei das Vorzeichen der Invariante verändert wird. Wir unterscheiden daher zwischen eigentlichen Invarianten der Darstellung, die ungeändert bleiben, wenn s mit $-s$ vertauscht wird, und uneigentlichen, die dabei das Vorzeichen wechseln.

36. Fundamentalinvarianten. Eine Funktion der Argumente $x, y, z; x', y', z'; \dots x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$, die eine Invariante sowohl der Bewegung (im Euklidischen Raume) wie auch der Parameterdarstellung ist, heißt eine Fundamentalinvariante n -ter Ordnung. Nach (107) kann sie nur folgende Argumente enthalten:

$$\begin{aligned} & r'^2, r''^2, r'''^2, \dots \\ & r'r'', r'r''', r''r''', \dots \\ & r'r''r''', \dots \end{aligned}$$

Nach (111) bedeuten jetzt die Striche die Ableitungen nach der Bogenlänge, daher ist

$$(113) \quad r'^2 = 1, \quad r'r'' = 0, \quad r''^2 = (k\pi)^2 = k^2 = -r'r''',$$

$$r'r'''' = k \frac{dk}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(k^2)}{ds},$$

ferner nach (39)

$$r'r''r'''' = \varkappa r''^2 = \varkappa k^2$$

usw. Ein Vergleich mit (112) zeigt demnach, daß eine Fundamentalinvariante nur die Argumente $k, \varkappa, \frac{dk}{ds}, \frac{d\varkappa}{ds}, \dots$ enthalten darf.

Dabei bleibt es noch dahingestellt, ob eine eigentliche oder eine uneigentliche Fundamentalinvariante vorliegt. Um das zu unterscheiden, werde folgende Überlegung angestellt: Aus den vorstehenden Formeln (113) folgt, daß k^2 eine Fundamentalinvariante ist, und zwar gewiß eine eigentliche. Dagegen kann k durch eine Bewegung in $-k$ übergehen. Auch können $dk/ds, d^3k/ds^3, \dots$ das Vorzeichen wechseln, wenn s mit $-s$ vertauscht wird. Aber

$$(114) \quad k^2, \left(\frac{dk}{ds}\right)^2, k \frac{d^2k}{ds^2}, \left(\frac{d^2k}{ds^2}\right)^2, \frac{dk}{ds} \frac{d^3k}{ds^3}, k \frac{d^4k}{ds^4}, \dots$$

bleiben sowohl bei der Bewegung als auch bei der Parameterveränderung ungeändert, selbst wenn s mit $-s$ vertauscht wird, sind daher eigentliche Fundamentalinvarianten. Auch

$$(115) \quad \varkappa = r'r''r'''' : k^2$$

hat diese Eigenschaft, ebenso

$$(116) \quad \varkappa, \left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2, \frac{d^2\varkappa}{ds^2}, \left(\frac{d^3\varkappa}{ds^3}\right)^2, \frac{d\varkappa}{ds} \frac{d^3\varkappa}{ds^3}, \frac{d^4\varkappa}{ds^4}, \dots$$

Eine jede eigentliche Fundamentalinvariante ist daher eine Funktion der Argumente (114) und (116).

Die einfachsten eigentlichen Fundamentalinvarianten sind das Krümmungsquadrat k^2 und die Windung \varkappa .

§ 7. Natürliche Gleichungen.

37. Natürliche Gleichungen. Zwei Raumkurven heißen kongruent, wenn sie durch Bewegung im Raume mit einander zur Deckung gebracht werden können. Aus der Invarianzeigenschaft von k^2 und \varkappa folgt, daß zwei kongruente Raumkurven in zwei „entsprechenden“ Punkten dasselbe Krümmungsquadrat und dieselbe Windung besitzen. Dabei sind unter „entsprechenden“ Punkten solche zu verstehen, die nach der Bewegung zusammenfallen. Wenn man ferner die Bogenlängen beider Kurven von zwei „entsprechenden“ Punkten aus zählt, so sind k^2 und \varkappa jeweils für beide Raumkurven die gleichen Funktionen von s :

$$(117) \quad k^2 = \varphi(s); \quad \varkappa = \psi(s).$$

Da diese beiden Gleichungen für eine Kurve sowohl von der Parameterdarstellung der Kurve wie auch von ihrer Lage im Raume unabhängig sind, so heißen sie die natürlichen Gleichungen der Raumkurve.

Wenn weder k noch \varkappa einen festen Wert haben, so kann man sich s eliminiert denken und erhält eine Gleichung der Form

$$(118) \quad \Phi(k^2, \varkappa) = 0,$$

die oftmals auch die natürliche Gleichung genannt wird.

38. Beispiel. Wir wollen von der in Nr. 27 betrachteten Kurve

$$(119) \quad x = s, \quad y = \frac{1}{2} k_0 s^2, \quad z = \frac{1}{6} k_0 \varkappa_0 s^3,$$

die den Verlauf einer allgemeinen regulären Raumkurve, die im Nullpunkt die Krümmung k_0 und die Windung \varkappa_0 hat, in der Umgebung des Nullpunktes angenähert darstellt, die natürlichen Gleichungen näherungsweise bestimmen. Dazu hat man nichts weiter zu machen, als das Krümmungsquadrat

$k^2 = (dt/ds)^2$ und die Windung $\varkappa = \left(t \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} \right) : k^2$ zu be-

rechnen. Hierbei ist allerdings nicht zu vergessen, daß s nur näherungsweise die Bogenlänge der Kurve (119) darstellt; denn ist S ihre wahre Bogenlänge, so hat man

$$dS = \sqrt{1 + k_0^2 s^2 + \frac{1}{4} k_0^2 \kappa_0^2 s^4} ds \approx ds$$

für hinreichend kleine Werte von s . Eine einfache Rechnung liefert weiter

$$(120) \quad k^2 = k_0^2(1 + \kappa_0^2 s^2) = \varphi(s).$$

und

$$(121) \quad \kappa = \frac{\kappa_0}{1 + \kappa_0^2 s^2} = \psi(s).$$

Da weder k noch κ feste Werte haben, läßt sich s wegschaffen:

$$(122) \quad k^2 \kappa = k_0^2 \kappa_0 = \text{const.}$$

Die Gleichungen (120) bis (122) gelten also näherungsweise für alle Kurven, die mit der durch die Formeln (119) bestimmten Kurve kongruent sind.

39. Bestimmung aller Kurven mit gegebenen natürlichen Gleichungen. Es seien nun

$$(123) \quad k^2 = \varphi(s) \text{ und } \kappa = \psi(s)$$

zwei gegebene Funktionen von s . Wenn sie in einer gewissen Umgebung der Stelle $s = s_0$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzen, so läßt sich sehr leicht zeigen, daß, falls es überhaupt eine Kurve gibt, deren Krümmungsquadrat und deren Windung den Formeln (123) genügen, diese Kurve genau eine analytische Darstellung durch eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von $s - s_0$ besitzt, woraus dann folgt, daß alle anderen Kurven mit den natürlichen Gleichungen (123) zu dieser Kurve kongruent sind. Das ergibt sich ohne weiteres aus den Formeln (64) u. f. in Nr. 27: Wenn man die Tangente, Hauptnormale und Binormale im Punkte $s = s_0$ als Koordinatenachsen x, y, z wählt, so gilt für diese Kurve die Entwicklung

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= s - s_0 - \frac{1}{6} \varphi(0) (s - s_0)^3 + \dots + R_x \\
 y - y_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{\varphi(0)} (s - s_0)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{12} \frac{\varphi'(0)}{\sqrt{\varphi(0)}} (s - s_0)^3 + \dots + R_y \\
 z - z_0 &= \frac{1}{6} \sqrt{\varphi(0)} \psi(0) (s - s_0)^3 + \dots + R_z.
 \end{aligned}
 \tag{124}$$

Man sieht, daß, wenn der $\sqrt{\varphi(s_0)}$ das entgegengesetzte Vorzeichen beigelegt wird, dann einfach $y - y_0$ und $z - z_0$ die Vorzeichen wechseln. Man hat es also durch passende Wahl der Achsenrichtungen in der Hand, immer eindeutige Entwicklungen der Form (124) herzustellen, die zu den Kurven mit den natürlichen Gleichungen (123) gehören, vorausgesetzt, daß diese überhaupt eine Kurve zulassen. Denn daß in (124) die Restglieder mit wachsender Gliederzahl gleichmäßig nach Null konvergieren und somit konvergente Potenzreihen entstehen, ist nicht bewiesen.

40. Fortsetzung. Daß es aber wirklich eine solche Kurve gibt, folgt aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen, wenn man sie auf die Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned}
 (125) \quad \frac{dt}{ds} &= \sqrt{\varphi(s)} \mathfrak{n}, & \frac{d\mathfrak{n}}{ds} &= -\sqrt{\varphi(s)} \mathfrak{t} + \psi(s) \mathfrak{b}, \\
 & & \frac{d\mathfrak{b}}{ds} &= -\psi(s) \mathfrak{n}
 \end{aligned}$$

angewendet. Denn diese stellen einen Satz von neun gekoppelten homogenen linearen Differentialgleichungen für die neun Komponenten der drei Vektoren \mathfrak{t} , \mathfrak{n} , \mathfrak{b} dar. Dieses System besitzt aber genau drei vektorische Lösungen, die für einen Anfangswert $s = s_0$ mit drei gegebenen Anfangsvektoren \mathfrak{t}_0 , \mathfrak{n}_0 , \mathfrak{b}_0 übereinstimmen, wenn nur $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ stetige Funktionen sind. Nun ist aber weiter

$$\begin{aligned}
 \frac{d(t^2)}{ds} &= 2t \frac{dt}{ds} = 2\sqrt{\varphi(s)} \, tn, \\
 \frac{d(nb)}{ds} &= -\psi(s) \, n^2 - \sqrt{\varphi(s)} \, tb + \psi(s) \, b^2, \\
 (126) \quad \frac{d(n^2)}{ds} &= -2\sqrt{\varphi(s)} \, tn + 2\psi(s) \, bn, \\
 \frac{d(bt)}{ds} &= \sqrt{\varphi(s)} \, bn - \psi(s) \, tn, & \frac{d(b^2)}{ds} &= -2\psi(s) \, nb, \\
 \frac{d(tn)}{ds} &= \sqrt{\varphi(s)} \, (n^2 - t^2) + \psi(s) \, tb;
 \end{aligned}$$

und dieses System homogener linearer Differentialgleichungen für die Quadrate und die skalaren Produkte von t, n, b wird befriedigt, wenn man $t^2 = n^2 = b^2 = 1, nb = nt = tn = 0$ setzt. Das ist aber das einzige Lösungssystem, das für $s = s_0$ mit einem gegebenen orthogonalen und normierten Dreibein t_0, n_0, b_0 übereinstimmt. Da ferner tnb eine stetige Funktion von s ist, und da für $s = s_0$ ja $t_0 n_0 b_0 = +1$ sein soll, so muß für jedes s $tnb = +1$ sein. Aus dem so eindeutig gefundenen t läßt sich aber r durch eine Quadratur bestimmen:

$$(127) \quad r - r_0 = \int_{s_0}^s t \, ds,$$

womit die Existenz der gesuchten Kurve und zugleich die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt ist.

41. Zurückführung der Aufgabe auf eine Riccatische Differentialgleichung. In der vorigen Nummer ist lediglich die Frage nach der Existenz einer Kurve mit gegebenen natürlichen Gleichungen bejaht worden. Ein Weg zur Bestimmung des Radiusvektors einer Kurve, wenn ihr Krümmungsquadrat $\varphi(s)$ und ihre Windung $\psi(s)$ als Funktionen der Bogenlänge gegeben sind, ist jedoch dadurch noch nicht bekannt. Lie und Darboux haben unabhängig voneinander die Integration des Systems (125) der Frenetschen Differentialgleichungen auf die Integration einer Riccatischen Differential-

gleichung zurückgeführt. Dazu braucht man allerdings die Komponentenzerlegung der drei Vektoren t , n , b . Es sei

$$(128) \quad \begin{aligned} t &= t_1 i + t_2 j + t_3 k \\ n &= n_1 i + n_2 j + n_3 k \\ b &= b_1 i + b_2 j + b_3 k, \end{aligned}$$

so genügen natürlich auch die Komponenten $t_\lambda, n_\lambda, b_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3$) den Hauptgleichungen

$$(129) \quad \begin{aligned} \frac{dt_\lambda}{ds} &= \sqrt{\varphi(s)} n_\lambda, \\ \frac{dn_\lambda}{ds} &= -\sqrt{\varphi(s)} t_\lambda + \psi(s) b_\lambda, \\ \frac{db_\lambda}{ds} &= -\psi(s) n_\lambda. \end{aligned}$$

Aus (128) folgt

$$(130) \quad t_1 t + n_1 n + b_1 b = i.$$

Daher ist

$$(131) \quad t_1^2 + n_1^2 + b_1^2 = 1.$$

Man kann diese Gleichung dadurch befriedigen, daß man

$$(132) \quad \frac{t_1 + i n_1}{1 - b_1} = \frac{1 + b_1}{t_1 - i n_1} = \sigma$$

setzt. Führt man nun in

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= \frac{1}{1 - b_1} \left(\frac{dt_1}{ds} + i \frac{dn_1}{ds} \right) + \frac{t_1 + i n_1}{(1 - b_1)^2} \frac{db_1}{ds} \\ &= \frac{1}{t_1 - i n_1} \frac{db_1}{ds} - \frac{1 + b_1}{(t_1 - i n_1)^2} \left(\frac{dt_1}{ds} - i \frac{dn_1}{ds} \right) \end{aligned}$$

auf den rechten Seiten die Hauptgleichungen (129) für $\lambda = 1$ ein, so erhält man

$$(133) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= -i\sqrt{\varphi(s)} \frac{t_1 + i n_1}{1 - b_1} + \psi(s) \frac{i b_1 - \sigma n_1}{1 - b_1} \\ &= -i\sqrt{\varphi(s)} \frac{1 + b_1}{t_1 - i n_1} + \psi(s) \frac{i b_1 \sigma - n_1}{t_1 - i n_1}. \end{aligned}$$

Zur Umformung der beiden rechten Seiten benutzt man wieder (132) und die sich daraus ergebenden Beziehungen

$$\sigma^2 - 1 = 2 \cdot \frac{b_1 + i\sigma n_1}{1 - b_1} = 2 \frac{b_1\sigma + in_1}{t_1 - in_1};$$

dann findet man, daß sie beide in denselben Ausdruck übergehen, und es ergibt sich die eine Gleichung

$$(134) \quad \frac{d\sigma}{ds} = -i\sqrt{\varphi(s)}\sigma + \frac{1}{2}i\psi(s)(\sigma^2 - 1).$$

Andererseits kann man die Gleichung (131) auch dadurch befriedigen, daß man

$$(135) \quad -\frac{t_1 + in_1}{1 + b_1} = -\frac{1 - b_1}{t_1 - in_1} = \tau$$

setzt. Eine genau entsprechende Rechnung führt zu dem Ergebnis, daß τ derselben Differentialgleichung (134) wie σ genügt. Das ist aber eine Riccatische Differentialgleichung.

Hat man nun zwei verschiedene Lösungen σ und τ dieser Riccatischen Differentialgleichungen (134), so ergibt sich aus (132) und (135)

$$(136) \quad t_1 = \frac{1 - \sigma\tau}{\sigma - \tau}, \quad n_1 = i \frac{1 + \sigma\tau}{\sigma - \tau}, \quad b_1 = \frac{\sigma + \tau}{\sigma - \tau},$$

und diese Funktionen von s befriedigen wirklich die drei Hauptgleichungen (129), wie der Leser durch eine leichte Rechnung bestätigen möge.

Wenn man drei partikuläre Lösungen der Riccatischen Differentialgleichungen kennt, so hat man damit auch ihre allgemeine Lösung. Denn das Doppelverhältnis von vier ihrer Lösungen ist konstant¹⁾. Man denke sich also drei Paare von Lösungen ermittelt (auf elementarem Wege ist das bekanntlich nicht immer möglich): $\sigma_1, \tau_1; \sigma_2, \tau_2; \sigma_3, \tau_3$, so kann man daraus auf Grund der obigen Formeln (136) die neun Komponenten $t_\lambda, n_\lambda, b_\lambda$ und damit die Vektoren t, n, b bestimmen.

¹⁾ Vgl. z. B. des Verf. Höhere Mathematik III, S. 153 (Leipzig 1934).

Der Radiusvektor der gesuchten Kurve ergibt sich nach (127) aus t durch eine Quadratur.

42. Beispiel: Bestimmung aller Kurven, bei denen das Verhältnis der Krümmung zur Windung einen festen Wert m hat. Es sei

$$\kappa = \psi(s), \quad k = m\psi(s);$$

die Riccatische Differentialgleichung (134) lautet jetzt

$$(137) \quad \frac{d\sigma}{ds} = \left(-im\sigma + \frac{1}{2}i(\sigma^2 - 1) \right) \psi(s).$$

Man führe statt s die Veränderliche

$$(138) \quad S = \int_{s_0}^s \psi(s) ds$$

ein; da $\psi(s)$ als stetig vorauszusetzen ist, existiert diese Veränderliche S . Damit geht (137) über in

$$(139) \quad \frac{d\sigma}{dS} = -im\sigma + \frac{1}{2}i(\sigma^2 - 1),$$

und man kann sofort zwei Partikularlösungen dieser Differentialgleichung angeben, nämlich die beiden festen Werte von σ , für die die rechte Seite verschwindet. Sie mögen a und b heißen.

Man findet

$$(140) \quad a = m + \sqrt{m^2 + 1}, \quad b = m - \sqrt{m^2 + 1}.$$

Wenn $m^2 + 1 \neq 0$ ist, so ist $a \neq b$. Nun kann man aber die allgemeine Lösung der Differentialgleichung leicht ermitteln. Denn wegen

$$-ima + \frac{1}{2}i(a^2 - 1) = 0$$

und weil dieselbe Gleichung auch für b gilt, ist

$$\frac{d(\sigma - a)}{dS} = -im(\sigma - a) + \frac{1}{2}i(\sigma^2 - a^2)$$

und

$$\frac{d(\sigma - b)}{dS} = -im(\sigma - b) + \frac{1}{2}i(\sigma^2 - b^2).$$

Man dividiere beiderseits durch $\sigma - a$ und $\sigma - b$ und sub-

trahiere die entstehenden Ausdrücke, so erhält man

$$\frac{d}{dS} \log \frac{\sigma - a}{\sigma - b} = \frac{1}{2} i(a - b),$$

und daraus

$$\frac{\sigma - a}{\sigma - b} = C \exp \left(\frac{1}{2} i(a - b)S \right),$$

wo C eine Integrationskonstante bedeutet. Daraus findet man

$$(141) \quad \sigma = \frac{ae^{\frac{1}{2}ibS} - bCe^{\frac{1}{2}iaS}}{e^{\frac{1}{2}ibS} - Ce^{\frac{1}{2}iaS}},$$

und dies ist die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung (139). Für $C = 0$ und $C = \infty$ erhält man wieder die Partikularlösungen a und b . Diese genügen, um nach (136) die Richtungskosinus t_1, n_1, b_1 zu bestimmen. Man findet, indem man $\sigma = a, \tau = b$ setzt,

$$(142) \quad t_1 = \frac{1 - ab}{a - b}, \quad n_1 = i \frac{1 + ab}{a - b}, \quad b_1 = \frac{a + b}{a - b}.$$

Um t_2, t_3 zu bestimmen, muß man in (141) für C andere Werte $C_2, C_3; C_2', C_3'$ einsetzen, die aber $\neq 0$ und $\neq \infty$ seien und übrigens noch der Bedingung $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$ gehorchen müssen, was natürlich stets möglich ist. Jedenfalls sind t_2 und t_3 von s abhängig, während t_1 einen festen Wert hat. Das bedeutet, daß alle Tangenten an die Kurve mit der Richtung der x -Achse einen festen Winkel bilden. Die Parallelen zur x -Achse, die durch die Punkte der Kurve gehen, bilden die Mantellinien eines Zylinders, auf dem die Kurve gelegen ist, und sie schneidet diese Mantellinien unter demselben Winkel. Die Kurve ist also eine allgemeine Schraubenlinie¹⁾. Bei der Abwicklung des Zylinders auf eine Ebene entsteht aus der Schraubenlinie eine Gerade, die die parallelen Geraden, in die die Mantellinien übergehen, alle

¹⁾ Dieses Ergebnis ist schon in Nr. 23 gefunden worden, und zwar dort auf einem invarianten, d. h. vom Koordinatensystem oder, was dasselbe besagt, von einer Komponentenzerlegung unabhängigen Wege.

unter demselben Winkel schneidet. Das geht auch aus der Formel

$$(143) \quad x - x_0 = \frac{1 - ab}{a - b} (s - s_0)$$

hervor, die aus der ersten Gleichung (142) durch Integration folgt.

Die Formeln (142) gelten nicht, wenn $m^2 + 1 = 0$ ist, weil dann $a = b$ wird. In diesem Ausnahmefall, wo also $m = k : \varkappa = \pm i$ ist, geht die Riccatische Differentialgleichung (139) in folgende über:

$$(144) \quad \frac{d\sigma}{dS} = -\frac{1}{2}i(1 + i\sigma)^2,$$

wenn man sich auf den Fall $m = +i$ beschränkt. Diese Differentialgleichung läßt sich aber leicht durch Trennung der Veränderlichen integrieren. Ihre allgemeine Lösung ist

$$\sigma = -i \frac{1 - C + \frac{1}{2}S}{C - \frac{1}{2}S}.$$

Für $C = \infty$ ergibt sich die Partikularlösung $-i$, wie man auch unmittelbar aus (144) folgern kann.

43. Invariante Bestimmung einer Kurve aus ihren natürlichen Gleichungen. Bei dem in den vorhergehenden Nummern behandelten Verfahren der betrachteten Aufgabe konnte man ohne Zerlegung der drei Vektoren des begleitenden Dreibeins in Komponenten eines festen Koordinatensystems nicht zum Ziele kommen. Es liegt das an der Einführung der komplexen Funktion $\sigma(z)$, bei der den Formeln (132) zufolge diese Komponenten unumgänglich gebraucht werden. Das folgende Verfahren verschmäht dieses, der „natürlichen“ Geometrie fremde Hilfsmittel, und bedient sich bei der Integration der Frenetschen Hauptgleichungen lediglich invarianter Schritte. Allerdings muß man dabei voraussetzen, daß die Funktion $\varkappa = \psi(s)$ differenzierbar, und die Funktion $k^2 = \varphi(s)$ sogar zweimal differenzierbar sei, da

diese Ableitungen bei Aufstellung einer linearen Differentialgleichung für den Tangentenvektor t gebraucht werden. Es wird nämlich eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für t hergeleitet werden, deren Koeffizienten Fundamentalinvarianten der Kurve sind, da sie sich nur aus $k^2 = \varphi(s)$ und $\varkappa = \psi(s)$ und deren Ableitungen nach der Bogenlänge zusammensetzen. Zu dem Zwecke gehe man von der ersten Formel (55) in Nr. 25 aus, die sich im Hinblick auf die angeführte Bemerkung folgendermaßen schreiben läßt:

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = -k^2 \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \frac{1}{2} \frac{d \log(k^2)}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} + \varkappa \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right],$$

oder wenn man darin $k^2 = \varphi(s)$, $\varkappa = \psi(s)$, $d\mathbf{r}/ds = t$ einführt und die Ableitungen nach der Bogenlänge durch Striche bezeichnet:

$$(145) \quad t'' = -\varphi(s) t + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} t' + \psi(s) [tt']. \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right).$$

Zwar ist dies schon eine Differentialgleichung mit der unbekanntem Funktion t und mit invarianten Koeffizienten, aber wegen des auftretenden Vektorproduktes scheint sie der Behandlung nicht einfach zugänglich zu sein.

Die zweite der Formeln (55) liefert aber

$$(146) \quad t''' = -\frac{3}{2} \varphi'(s) t + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right)' + \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right)^2 - \varphi(s) - \psi(s)^2 \right) t' + \left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} + \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} \right) \psi(s) [tt'].$$

Die beiden Formeln (145) und (146) setzen außer der Existenz der Ableitungen noch $\varphi(s) \neq 0$, $\psi(s) \neq 0$ voraus. Diese Ausnahmefälle sind aber schon besprochen worden. Schafft man nun $\psi(s)[tt']$ aus beiden Gleichungen weg, so erhält man die lineare homogene vektorische Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(147) \quad t''' + \alpha(s)t'' + \beta(s)t' + \gamma(s)t = 0$$

mit

$$(148) \quad \begin{aligned} \alpha(s) &= -\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi} \\ \beta(s) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{\psi'}{\psi} + \varphi + \psi^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' \\ \gamma(s) &= \frac{3}{2} \varphi' - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi}\right) \varphi = \left(\frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right) \varphi. \end{aligned}$$

44. Fortsetzung. Um die Differentialgleichung (147) allgemein zu integrieren, betrachte man die entsprechende skalare Differentialgleichung

(149) $y''' + \alpha(s)y'' + \beta(s)y' + \gamma(s)y = 0$;
 es seien $y_1(s), y_2(s), y_3(s)$ drei linear unabhängige Partikularlösungen dieser Differentialgleichung, so ist die allgemeine Lösung von (147)

(150) $t = \mathfrak{C}_1 y_1(s) + \mathfrak{C}_2 y_2(s) + \mathfrak{C}_3 y_3(s)$,
 worin $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ drei vektorische Integrationskonstanten bedeuten.

Man muß nun zeigen, daß sie sich so bestimmen lassen, daß die Lösung der Differentialgleichung (147) den Bedingungen

$$\begin{aligned} (a) \quad & t^2 = 1 \\ (b) \quad & t'^2 = k^2 = \varphi(s) \\ (c) \quad & \frac{tt't''}{t'^2} = \varkappa = \psi(s) \end{aligned}$$

genügen, die aussagen, daß t ein Einheitsvektor ist, der als Tangentenvektor einer Raumkurve als Funktion ihrer Bogenlänge genommen, bewirkt, daß ihr Krümmungsquadrat gleich der gegebenen Funktion $\varphi(s)$ und ihre Windung (nach (35)) gleich $\psi(s)$ wird. Nun folgt aus (a)

$$(a') \quad \begin{aligned} & tt' = 0 \\ & tt'' = -t'^2 \\ & tt''' = -3t't'', \end{aligned}$$

aus (b)

$$(b') \quad 2tt'' = \varphi'(s)$$

und aus (c)

$$(c') \quad tt'' = \varphi(s)\psi(s).$$

Bezeichnet man die linke Seite der Differentialgleichung (147) mit $\mathfrak{L}(t)$, so hat man

$$t \mathfrak{L}(t) = tt''' + \alpha(s)tt'' + \beta(s)tt' + \gamma(s)t^2,$$

und das wird zufolge (a), (a') und (b') in

$$t \mathfrak{L}(t) = -\frac{3}{2} \varphi'(s) - \alpha(s)\varphi(s) + \gamma(s)$$

übergehen. Aus den Gleichungen (148) folgt aber, daß die rechte Seite identisch verschwindet. Es ist also

$$(151) \quad t\mathfrak{L}(t) = 0.$$

Sodann ist

$$tt'\mathfrak{L}(t) = tt't''' + \alpha(s)tt't''.$$

Benutzt man (c') und die daraus durch Differentiation folgende Gleichung

$$(c'') \quad tt't''' = \varphi'(s)\psi(s) + \varphi(s)\psi'(s),$$

so wird

$$tt'\mathfrak{L}(t) = \varphi'(s)\psi(s) + \varphi(s)\psi'(s) + \alpha(s)\varphi(s)\psi(s).$$

Aus (148) folgt aber, daß identisch

$$(152) \quad tt'\mathfrak{L}(t) = 0$$

ist.

Schließlich hat man

$$t'\mathfrak{L}(t) = t't''' + \alpha(s)t't'' + \beta(s)t'^2$$

oder nach (b) und (b')

$$t'\mathfrak{L}(t) = t't''' + \frac{1}{2}\alpha(s)\varphi'(s) + \beta(s)\varphi(s).$$

Um $t't'''$ zu bestimmen, greife man auf die zweite Formel (55) zurück und schreibe sie in der Form

$$t''' = -\frac{3}{2}\varphi'(s)t + \left(\frac{1}{2}\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)} - \frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\right)^2 - \varphi(s) - \psi(s)^2\right)t' + \left(\psi'(s) + \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\psi(s)\right)[tt'].$$

Durch skalare Multiplikation mit t' erhält man wegen (b) und (a')

$$t't''' = \left(\frac{1}{2} \frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \right)^2 - \varphi(s) - \psi(s)^2 \right) \varphi(s).$$

Setzt man dies in den obigen Ausdruck für $t'\mathfrak{T}(t)$ ein, so erhält man mit Rücksicht auf die Formeln (148) durch eine einfache Zwischenrechnung

$$(153) \quad t'\mathfrak{T}(t) = 0.$$

Aus der Gleichung (152) folgt nun, daß $t, t', \mathfrak{T}(t)$ komplanar sind, oder

$$\mathfrak{T}(t) = \lambda t + \mu t'.$$

Aus (151) ergibt sich aber $\lambda = 0$ und aus (153) $\mu = 0$, so daß

$$\mathfrak{T}(t) = 0$$

sein muß. Ein den Bedingungen (a), (b), (c) genügender Vektor t ist also eine Lösung der Differentialgleichung (147), und da diese lineare Differentialgleichung keine singuläre Lösung besitzt, so muß der betrachtete Vektor t in der Form (150) enthalten sein.

Im praktischen Falle ermittelt man natürlich die vektorischen Konstanten $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ dadurch, daß man in die Gleichung $t^2 = 1$ für s passende besondere Werte einsetzt. Nach der Bestimmung von t ergibt sich r durch eine Quadratur nach (127). Wir wollen das an einem Beispiel verfolgen.

45. Beispiel. $k = a/s, \kappa = b/s$, wo a, b reelle feste Werte $\neq 0$ bedeuten mögen. Man hat

$$(154) \quad \varphi(s) = \frac{a^2}{s^2}, \quad \psi(s) = \frac{b}{s};$$

damit wird nach (148)

$$\alpha(s) = +\frac{3}{s}, \quad \beta(s) = \frac{a^2 + b^2 + 1}{s^2}, \quad \gamma(s) = 0,$$

und die Differentialgleichung (149) wird

$$(155) \quad y''' + \frac{3}{s} y'' + \frac{c^2}{s^2} y' = 0,$$

wenn zur Abkürzung $c^2 = a^2 + b^2 + 1$ gesetzt wird. Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $z = y'$:

$$(156) \quad z'' + \frac{3}{s}z' + \frac{c^2}{s^2}z = 0.$$

Zu ihrer Integration mache man in bekannter Weise¹⁾ den Ansatz $z = s^r$ und bestimme die Konstante r aus der Hauptgleichung

$$(157) \quad r^2 + 2r + c^2 = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung seien $r_1 = -1 + im$, $r_2 = -1 - im$, wo

$$(158) \quad m = \sqrt{c^2 - 1} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

reell ist und positiv sein soll. Damit wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung (156), da $m \neq 0$ ist,

$$(159) \quad z = c_1 s^{r_1} + c_2 s^{r_2},$$

unter c_1, c_2 zwei willkürliche Konstanten verstanden. Der Ausnahmefall $m = 0$ wird später behandelt werden. Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung von (155) durch eine Quadratur:

$$y = C_1 s^{r_1+1} + C_2 s^{r_2+1} + C_3 = C_1 s^{im} + C_2 s^{-im} + C_3,$$

und wegen

$$s^{im} = \cos(m \log s) + i \sin(m \log s) = \cos S + i \sin S$$

mit $S = m \log s$:

$$y = A \cos S + B \sin S + C.$$

Mithin wird

$$t = \mathfrak{C}_1 \cos S + \mathfrak{C}_2 \sin S + \mathfrak{C}_3.$$

Um nun $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ der Gleichung $t^2 = 1$ entsprechend zu bestimmen, erteile man dem Parameter der Bogenlänge s der Reihe nach Werte, die $\cos S = 0$ und $\sin S = \pm 1$ machen, sodann $\sin S = 0$, $\cos S = \pm 1$, so erhält man folgende Gleichungen:

¹⁾ Eulersche Differentialgleichung; vgl. u. a. Höhere Mathematik III, S. 198 (Leipzig 1935).

$$(\pm \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)^2 = 1,$$

$$(\pm \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_3)^2 = 1,$$

woraus sich sofort

$$(160) \quad \begin{array}{l} \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 = 0 \\ \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2 = 1 \\ \mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_3^2 = 1 \end{array}$$

ergibt. Damit wird

$$t^2 = \mathfrak{C}_1^2 \cos^2 S + 2\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \cos S \sin S + \mathfrak{C}_2^2 \sin^2 S + \mathfrak{C}_3^2 = 1,$$

woraus — man vertauscht S mit $-S$ — folgt

$$(161) \quad \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 = 0.$$

Aus (160) und (161) ersieht man, daß $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ drei aufeinander senkrechte Vektoren sind. Es bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man

$$\mathfrak{C}_1 = C_1 \mathbf{i}, \quad \mathfrak{C}_2 = C_2 \mathbf{j}, \quad \mathfrak{C}_3 = C_3 \mathbf{k}$$

setzt, wobei nach (160) zwischen den skalaren Größen C_1, C_2, C_3 die Beziehungen

$$C_2^2 + C_3^2 = C_1^2 + C_3^2 = 1$$

bestehen, und $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ein willkürlich zu wählendes orthogonales Dreibein aus drei Einheitsvektoren bedeutet. Man setze daher

$$C_1 = A \sin \gamma = \pm C_2, \quad C_3 = A \cos \gamma,$$

wodurch diese Beziehungen identisch erfüllt sind, so hat man

$$t = A \sin \gamma \cos S \mathbf{i} \pm A \sin \gamma \sin S \mathbf{j} + A \cos \gamma \mathbf{k}.$$

Die Integration nach s ergibt

$$(162) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= \frac{As \sin \gamma}{1 + m^2} (\cos S + m \sin S) \mathbf{i} \\ &\pm \frac{As \sin \gamma}{1 + m^2} (\sin S - m \cos S) \mathbf{j} + As \cos \gamma \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Die in dem Ergebnis (162) noch vorkommenden Integrationskonstanten A und γ lassen sich aus den Gleichungen (b) und (c) bestimmen. Eine leichte Rechnung, die dem Leser überlassen sei, führt auf

$$A = \pm 1, \quad \sin \gamma = a/m, \quad \cos \gamma = b/m.$$

Diese Raumkurve liegt auf einem Zylinder, dessen Mantelgeraden zur z -Achse, d. h. zum Vektor \mathbf{k} , parallel laufen

und dessen Leitlinie in der xy -Ebene, d. h. der ij -Ebene, die logarithmische Spirale

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{A^2 s^2 \sin^2 \gamma}{1 + m^2} = \frac{A^2 \sin^2 \gamma}{1 + m^2} \exp \left(\frac{2}{m} \left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} + \alpha \right) \right)$$

ist, wo $\alpha = \operatorname{arctg} m$. Sie wird aus dem Zylinder ausgeschnitten durch einen geraden Kreiskegel, dessen Achse der z -Achse parallel läuft, dessen Scheitel im Punkte (r_0) liegt. Denn man hat

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + m^2} (z - z_0)^2.$$

Man nennt diese Kurve daher eine konische Schraubenlinie. Daß sie zu den schon in Nr. 23 untersuchten allgemeinen Schraubenlinien gehört, folgt aus

$$k : \kappa = a : b.$$

46. Der Ausnahmefall $m = 0$. Die bisherigen Betrachtungen galten für den Fall, daß die quadratische Hauptgleichung (157) der Differentialgleichung (156) zwei verschiedene Wurzeln $r_1 = -1 + im$, $r_2 = -1 - im$ mit $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ hatte. In dem Ausnahmefall $m = 0$ oder

$$b = \pm ia$$

oder auch

$$(163) \quad k = \frac{a}{s}, \quad \kappa = \pm \frac{ia}{s}, \quad k : \kappa = \pm i$$

hat die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (156) nicht die Form (159), sondern sie lautet

$$(164) \quad z = c_1 s^{-1} + c_2 s^{-1} \log s$$

mit den Integrationskonstanten c_1, c_2 . Hieraus findet man durch Integration mit Übergang zum vektorischen Ausdruck

$$t = \mathfrak{C}_1 \log s + \mathfrak{C}_2 (\log s)^2 + \mathfrak{C}_3,$$

und man hat nun die konstanten Vektoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ der Bedingung $t^2 = 1$ gemäß zu bestimmen. Das ergibt das Verschwinden einer biquadratischen Funktion von $\log s$. Indem man deren Vorzahlen einzeln gleich Null setzt, erhält

man die Gleichungen

$$(165) \quad \mathfrak{C}_3^2 = 1, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 = 0, \quad \mathfrak{C}_1^2 + 2\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 = 0, \\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 = 0, \quad \mathfrak{C}_2^2 = 0;$$

wegen $\mathfrak{C}_2^2 = 0$, $\mathfrak{C}_2 \neq 0$ ist \mathfrak{C}_2 ein Minimalvektor. Wir nehmen $\mathfrak{C}_3 = i$, $\mathfrak{C}_1 = \lambda\mathfrak{k}$ ($\lambda \neq 0$) und $\mathfrak{C}_2 = \alpha i + \beta j + \gamma\mathfrak{k}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$, so ist die erste, zweite und letzte der Gleichungen (165) erfüllt, und aus der vierten folgt $\gamma = 0$, aus der dritten danach $\alpha = -\frac{1}{2}\lambda^2$, somit $\beta = \pm \frac{1}{2}\lambda^2 i$, und

$$\mathfrak{C}_2 = -\frac{1}{2}\lambda^2 (i \mp ij), \text{ also}$$

$$(166) \quad t = \lambda\mathfrak{k} \log s - \frac{1}{2}\lambda^2 (i \mp ij) (\log s)^2 + i,$$

wo λ eine skalare Konstante bedeutet. Natürlich läßt sich λ durch die gegebene Konstante a bestimmen entweder mittels der Gleichungen (b) und (c) oder auch so: man hat aus (166)

$$(167) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{\lambda}{s} (\mathfrak{k} - \lambda \log s (i \mp ij)),$$

und da der Vektor in der Klammer die Norm 1 hat, ist er auf Grund der ersten Hauptgleichung $dt/ds = kn$ gleich dem Vektor der Hauptnormale

$$(168) \quad n = \mathfrak{k} - \lambda \log s (i \mp ij),$$

und ferner ist

$$\frac{\lambda}{s} = k$$

die Krümmung, also ist wegen (163)

$$\lambda = a.$$

Integration von (166) nach s ergibt

$$(168 a) \quad r - r_0 = a\mathfrak{k} (s \log s - s) - \frac{1}{2}a^2 (i \mp ij) \int (\log s)^2 ds + is \\ = (s - \frac{1}{2}a^2 \int (\log s)^2 ds) i \mp \frac{1}{2}a^2 i \int (\log s)^2 ds j \\ + a(s \log s - s)\mathfrak{k}.$$

Aus (163) ergibt sich noch eine Eigenschaft der gefundenen komplexen Kurven (168 a). Ein jeder zur xy -Ebene paralleler (d. h. mit ihr komplanarer) Minimalvektor läßt sich in der

Form

$$\mathfrak{M}_1 = \mu_1(i + ij) \text{ oder } \mathfrak{M}_2 = \mu_2(i - ij)$$

darstellen. Wählt man in (168) das obere Vorzeichen, so hat man

$$n\mathfrak{M}_2 = 0 \text{ für jeden Wert von } s.$$

Also sind alle Hauptnormalen der Kurve zu \mathfrak{M}_2 senkrecht, also zu einer festen Minimalebene

$$\mathfrak{M}_2x + \mu = 0$$

parallel, wo μ ebenso wie μ_1, μ_2 feste Zahlen sind.

47. Sehne und zugehöriger Bogen. Es sei $\widehat{OP} = s$ ein Bogen einer Raumkurve von der Länge s , und $\overline{OP} = r$ der zugehörige Sehnenvektor (Abb. 16). Es werde angenommen, $r = r(s)$ lasse sich nach Potenzen von s entwickeln. Wir wollen die Koeffizienten der Anfangsglieder dieser Entwicklung aus der Krümmung k_0 und der Windung \varkappa_0 der Kurve im Punkte O bestimmen. Man hat

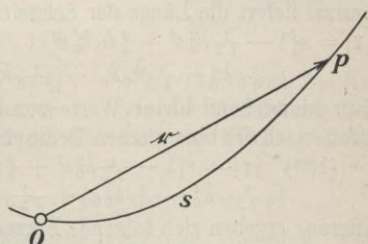


Abb. 16.

$$r = r_0 + r_0' s + \frac{r_0''}{2!} s^2 + \dots,$$

worin der Zeiger 0 sich auf den Punkt O bezieht, und die Striche die Ableitungen nach der Bogenlänge bedeuten. Nun ist $r_0 = 0$ und nach den Formeln (54) in Nr. 25 ist

$$\begin{aligned} r_0' &= t_0 \\ r_0'' &= k_0 n_0 \\ r_0''' &= -k_0^2 t_0 + k_0' n_0 + k_0 \varkappa_0 b_0 \\ r_0'''' &= -3k_0 k_0' t_0 + (k_0'' - k_0^3 - k_0 \varkappa_0^2) n_0 + (k_0 \varkappa_0' + 2k_0' \varkappa_0) b_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} r = t_0 s + \frac{1}{2} k_0 n_0 s^2 + \frac{1}{6} (-k_0^2 t_0 + k'_0 n_0 + k_0 \varkappa_0 b_0) s^3 \\ + \frac{1}{24} (-3k_0 k'_0 t_0 + (k''_0 - k_0^3 - k_0 \varkappa_0^2) n_0 \\ + (k_0 \varkappa'_0 + 2k'_0 \varkappa_0) b_0) s^4 \\ + \frac{1}{120} ((k_0^4 - 4k_0 k''_0 - 3k_0^2 + k_0^2 \varkappa_0^2) t_0 \\ + (-6k_0^2 k'_0 - 3k_0^2 \varkappa_0^2 - 3k_0 \varkappa_0 \varkappa'_0 + k_0''') n_0 \\ + (3k'_0 \varkappa'_0 + k_0 \varkappa''_0 + 3k''_0 \varkappa_0 - k_0^3 \varkappa_0 - k_0 \varkappa_0^3) b_0) s^5 + \dots \end{aligned}$$

Die Norm dieses Vektors ist

$$r^2 = s^2 - \frac{1}{2} k_0^2 s^4 + \frac{3}{4} k_0 k'_0 s^5 \\ + (\frac{1}{360} k_0^4 - \frac{1}{40} k_0 k'_0 + \frac{1}{360} k_0^2 \varkappa_0^2 - \frac{1}{45} k_0'^2) s^6 + \dots$$

Man sieht, daß die Windung \varkappa_0 erst in dem Gliede mit s^6 auftritt. Die im reellen Falle positiv zu nehmende Quadratwurzel liefert die Länge der Sehne \overline{OP} :

$$|r| = s \left\{ 1 - \frac{1}{2} k_0^2 s^2 + \frac{3}{4} k_0 k'_0 s^3 \right. \\ \left. + (\frac{1}{360} k_0^4 - \frac{1}{40} k_0 k'_0 + \frac{1}{360} k_0^2 \varkappa_0^2 - \frac{1}{45} k_0'^2) s^4 + \dots \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Für hinreichend kleine Werte von s läßt sich die Klammergröße nach der binomischen Reihe entwickeln, und man erhält:

$$(169) \quad |r| = s \left(1 - \frac{1}{24} k_0^2 s^2 + \frac{3}{8} k_0 k'_0 s^3 + \right. \\ \left. (\frac{1}{1920} k_0^4 - \frac{1}{80} k_0 k'_0 + \frac{1}{720} k_0^2 \varkappa_0^2 - \frac{1}{90} k_0'^2) s^4 + \dots \right).$$

Hieraus ergeben sich folgende Formeln:

$$(170) \quad \frac{1}{24} k_0^2 = \lim_{P \rightarrow O} \frac{s - c}{s^3},$$

wo $c = |r|$ die Sehne des Kurvenbogens \widehat{OP} der Länge s bedeutet,

$$(171) \quad \frac{1}{720} \varkappa_0^2 = \lim_{P \rightarrow O} \frac{1}{k_0^2 s^5} \left(c - s + \frac{1}{24} k_0^2 s^3 - \frac{3}{8} k_0 k'_0 s^4 \right) \\ - \frac{1}{1920} k_0^2 + \frac{1}{80} k'_0 + \frac{1}{90} k_0'^2.$$

Für die Raumkurve konstanter Krümmung ($\neq 0$) vereinfacht sich die Formel (171) etwas:

$$(172) \quad \frac{1}{720} \varkappa_0^2 = \lim_{P \rightarrow O} \frac{1}{k_0^2 s^5} \left(c - s + \frac{1}{24} k_0^2 s^3 \right) - \frac{1}{1920} k_0^2.$$

§ 8. Berührung höherer Ordnung.

48. Berührung n -ter Ordnung zwischen Kurve und Fläche. Wenn eine Kurve (C) und eine Fläche (F) einen regulären Punkt A gemeinsam haben, so sagt man, sie berühren sich im Punkte A von n -ter Ordnung, wenn sich jedem Punkte P der Kurve, der hinreichend nahe bei A liegt, ein Punkt P_1 der Fläche so zuordnen läßt, daß für $P \rightarrow A$ der Quotient

$$(173) \quad PP_1 : (AP)^{n+1}$$

einem von Null verschiedenen Grenzwert zustrebt (Abb. 17).

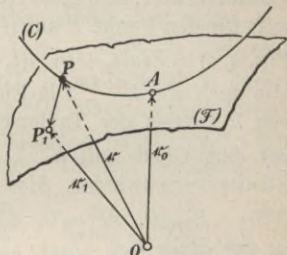


Abb. 17.

Es sei $\overline{OP} = \mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\overline{OP}_1 = \mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{OA} = \mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, ferner $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ die Darstellung der Kurve (C), $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche (F). Ist $\overline{PP}_1 = l$, so hat man

$$(174) \quad \overline{PP}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = l\mathbf{e},$$

wo $\mathbf{e} = \{u, v, w\}$ der Einheitsvektor der Richtung \overline{PP}_1 sein soll. Da P_1 auf (F) liegt, so gilt wegen (174)

$$F(x_1, y_1, z_1) = F(x + lu, y + lv, z + lw) = 0.$$

Wenn die partiellen Ableitungen $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$, die Komponenten des Vektors $\text{grad } F$, im Punkte A , stetig sind, und $\text{grad } F \neq 0$, so hat man nach dem Taylorschen Satze

$$(175) \quad F(x, y, z) + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_A u + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_A v + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_A w + \varepsilon \right) l = 0,$$

worin $\varepsilon \rightarrow 0$ mit $P \rightarrow A$. Nun ist $\mathbf{e}(\text{grad } F)_A$ nur Null, wenn \mathbf{e} parallel zur Berührungsebene der Fläche in A ist. Wenn also für $l \rightarrow 0$ die Richtung \mathbf{e} des Vektors \overline{PP}_1 nicht parallel zu dieser Berührungsebene wird, was man ja immer durch passende Zuordnung des Punktes P_1 zu P erreichen kann, wird

$F(x, y, z) \rightarrow 0$ von derselben Ordnung wie PP_1 , also wie $(AP)^{n+1}$ wegen (173).

Nun liegt A auf der Kurve (C) und $t = t_0$ sei der zugehörige Parameterwert, also $r_0 = r(t_0)$; $t = t_0 + h$ sei der Parameterwert für den Punkt P auf (C) . Dann ist

$F(x, y, z) = F(x(t_0 + h), y(t_0 + h), z(t_0 + h)) \rightarrow 0$ wie $(AP)^{n+1}$, also auch wie h^{n+1} . Die Entwicklung von F nach Potenzen von h mittels der Taylorschen Formel muß also beginnen mit dem Gliede mit h^{n+1} , also müssen die vorhergehenden Glieder verschwinden. Also ist in Richtung der Kurve

(176) $F = 0, dF = 0, d^2F = 0, \dots, d^n F = 0, d^{n+1}F \neq 0$
an der Stelle t_0 .

49. Fortsetzung. Die Kurve (C) durchsetzt die sie von n -ter Ordnung berührende Fläche im Berührungspunkte A , wenn n gerade ist; andernfalls bleibt sie auf derselben Seite der Fläche. Das folgt unmittelbar aus der Darstellung

$$F(x, y, z) = \frac{d^{n+1}F}{dt^{n+1}} h^{n+1} + \dots,$$

denn wenn ein stetig und einsinnig wandernder Punkt auf der Kurve (C) den Punkt A passiert, verändert der Parameter t seinen Wert stetig von $t_0 - h$ bis $t_0 + h$, d. h. h geht mit Zeichenwechsel durch Null. Also geht auch $F(x, y, z)$ durch Null, und zwar mit oder ohne Zeichenwechsel, je nachdem $n + 1$ ungerade oder gerade, d. h. je nachdem n gerade oder ungerade ist.

50. Schmiegungsfläche in einem Kurvenpunkte. Die Formeln (176) enthalten $n + 1$ Bestimmungsgleichungen dafür, daß die Fläche $F(x, y, z) = 0$ im Punkte $A = (x_0, y_0, z_0)$ mit der Kurve $r = r(t)$ eine Berührung n -ter Ordnung besitzt.

Es sei $F(x, y, z; p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$ eine Flächenschar mit $n + 1$ Parametern p_1, p_2, \dots, p_{n+1} . Wenn es möglich ist,

die Werte dieser $n + 1$ Parameter aus den eben genannten $n + 1$ Bedingungen für die Berührung n -ter Ordnung zwischen Fläche und Kurve zu bestimmen, so ergibt sich die Schmiegungsfläche der Kurve aus der Flächenschar.

Dieselbe Fläche aus dieser Schaar erhält man, wenn man die Parameterwerte von $p_1, p_2 \cdots p_{n+1}$ dadurch bestimmt, daß man die Fläche außer durch A noch durch n andere Punkte A_1, A_2, \dots, A_n der Kurve (C) gehen und dann diese sämtlich unbegrenzt sich dem Punkte A nähern läßt. Denn wenn $t_0, t_1, t_2 \cdots t_n$ die Werte von t für die Punkte A, A_1, A_2, \dots, A_n sind, und wenn man

$$F(x(t), y(t), z(t); p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) = \Phi(t)$$

setzt, so lauten die Bedingungen dafür, daß diese Punkte auf einer Fläche dieser Schaar liegen:

$$\Phi(t_0) = 0, \quad \Phi(t_1) = 0, \quad \Phi(t_2) = 0, \dots, \quad \Phi(t_n) = 0.$$

Nach dem Satz von Rolle müssen auch die Gleichungen gelten:

$$\Phi'(\tau) = 0, \quad \Phi'(\tau_1) = 0, \quad \Phi'(\tau_2) = 0, \dots, \quad \Phi'(\tau_{n-1}) = 0,$$

wo $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ geeignete Zwischenwerte zwischen $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ sind. Durch wiederholte Anwendung dieser Überlegungen ergeben sich die Gleichungen

$$\Phi''(\vartheta) = 0, \quad \Phi''(\vartheta_1) = 0, \dots, \quad \Phi''(\vartheta_{n-2}) = 0,$$

.....

$$\Phi^{(n)}(\xi) = 0,$$

wo $\vartheta, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}, \dots, \xi$ ebenfalls solche Zwischenwerte bedeuten. Für $t_1 \rightarrow t_0, t_2 \rightarrow t_0, \dots, t_n \rightarrow t_0$ konvergieren aber sämtliche Zwischenwerte ebenfalls nach t_0 , also bleiben die Gleichungen

$$(177) \quad \Phi(t_0) = 0, \quad \Phi'(t_0) = 0, \dots, \quad \Phi^{(n)}(t_0) = 0,$$

die mit (176) übereinstimmen, womit die Behauptung bewiesen ist.

51. Erstes Beispiel: Schmiegungebene. Die Ebene

$$\mathfrak{A}x + D = Ax + By + Cz + D = 0$$

enthält drei wesentliche Parameter, da man ja durch eine der vier Konstanten dividieren kann. Es ist $\Phi(t) = \mathfrak{A}r(t) + D$. Die Bedingungen dafür, daß die Ebene mit der Kurve $r = r(t)$ eine Berührung zweiter Ordnung hat, sind nach (177)

$$\mathfrak{A}r_0 + D = 0, \quad \mathfrak{A}r'_0 = 0, \quad \mathfrak{A}r''_0 = 0.$$

Wenn

$$(178) \quad [r'_0 r''_0] \neq 0$$

ist, wird

$$\mathfrak{A} = \lambda [r'_0 r''_0] \quad (\lambda \neq 0),$$

daher

$$D = -\lambda (r_0 r'_0 r''_0),$$

und die Gleichung der gefundenen Schmiegungeebene lautet

$$r r'_0 r''_0 - r_0 r'_0 r''_0 = 0,$$

in Übereinstimmung mit (16).

52. Zweites Beispiel: Schmiegungekuugel. Eine Kugel hängt von vier Parametern ab. Die Schmiegungekuugel einer

Raumkurve besitzt mit dieser also eine Berührung dritter Ordnung. Ihre Gleichung sei

$$(r - \alpha)^2 - R^2 = 0,$$

worin α der Ortsvektor ihres Mittelpunktes M , R ihr Halbmesser ist (Abb. 18). Man nehme als Unabhängige die Bogenlänge s der Kurve und setze

$$(r(s) - \alpha)^2 - R^2 = \Phi(s),$$

so bestehen nach (177) folgende Formeln

$$(179) \quad \begin{aligned} \Phi(s) &= (r - \alpha)^2 - R^2 = 0 \\ \frac{1}{2} \Phi'(s) &= (r - \alpha) r' = 0 \\ \frac{1}{2} \Phi''(s) &= (r - \alpha) k n + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \Phi'''(s) = (r - \alpha) \left(\frac{dk}{ds} n - k^2 t + k \kappa b \right) = 0.$$

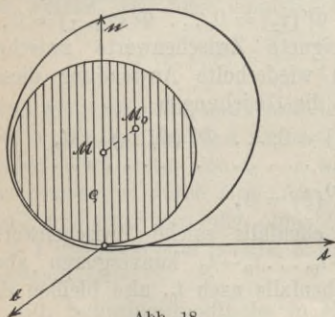


Abb. 18.

Aus den drei letzten Gleichungen läßt sich der Vektor $r - a$, somit auch a bestimmen, und danach aus der ersten R^2 . Man benutze das begleitende Dreibein der Kurve als Basis und setze

$$r - a = \alpha t + \beta n + \gamma b,$$

so ergibt sich aus den drei Gleichungen (179) der Reihe nach

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta k + 1 &= 0, \\ -\alpha k^2 + \beta \frac{dk}{ds} + \gamma k \varkappa &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta &= -1 : k, \\ \gamma &= \frac{1}{k^2 \varkappa} \frac{dk}{ds}, \end{aligned}$$

denn es muß $k \neq 0$ und $\varkappa \neq 0$ sein. Daraus folgt

$$(180) \quad r - a = -\frac{1}{k} n + \frac{1}{k^2 \varkappa} \frac{dk}{ds} b,$$

und weiter

$$(181) \quad R^2 = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4 \varkappa^2} \left(\frac{dk}{ds} \right)^2.$$

Aus (180) ersieht man unmittelbar, daß $r - a$ und also auch der Mittelpunkt der Schmiegunskugel in der Normalebene der Kurve gelegen ist (Abb. 18). Formel (181) wird noch etwas einfacher, wenn der Krümmungsradius $\varrho = 1 : k$ eingeführt wird:

$$(182) \quad R^2 = \varrho^2 + \frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{d\varrho}{ds} \right)^2.$$

53. Sphärische Kurven. Im allgemeinen sind der Mittelpunkt und der Halbmesser der Schmiegunskugel längs der Kurve veränderlich, d. h. a und R sind Funktionen von s . Wenn alle Schmiegunskugeln denselben Mittelpunkt haben, ist $da/ds = 0$. Aus (180) folgt

$$a = r + \varrho n + \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varrho}{ds} b,$$

daher

$$\frac{d\alpha}{ds} = t + \rho \frac{dn}{ds} + \frac{d\rho}{ds} n + \frac{1}{\kappa} \frac{d\rho}{ds} \frac{db}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d\rho}{ds} \right) b,$$

und wenn man die Frenetschen Formeln benutzt,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\rho\kappa + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d\rho}{ds} \right) \right) b.$$

Andererseits folgt aus (182)

$$\frac{d(R^2)}{ds} = \frac{2}{\kappa} \frac{d\rho}{ds} \left(\rho\kappa + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d\rho}{ds} \right) \right).$$

Daraus ergibt sich: Wenn $da/ds = 0$ ist, d. h. wenn

$$(183) \quad \rho\kappa + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d\rho}{ds} \right) = 0$$

ist, so verschwindet auch $d(R^2)/ds$, d. h. wenn alle Schmiegunskugeln konzentrisch sind, so haben sie denselben Halbmesser, sie fallen also zusammen; die Kurve liegt mit allen ihren Punkten auf einer Kugel (sphärische Kurven). Die Gleichung (183) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür.

Der Radius der Schmiegunskugel kann aber auch konstant sein, ohne daß da/ds verschwindet, nämlich wenn $d\rho/ds = 0$ ist, d. h. wenn die Kurve konstante Krümmung hat. In diesem Falle ist

$$(184) \quad \alpha = r + \rho n,$$

d. h. der Mittelpunkt der Schmiegunskugel liegt auf der Hauptnormalen im festen Abstand $\rho = \frac{1}{k}$. Ein Beispiel dafür

ist die gewöhnliche Schraubenlinie, was der Leser prüfen möge. Ein Vergleich zwischen (184) und (28) zeigt, daß für die Kurven unveränderlicher Krümmung $\alpha = \mathfrak{R}_0$ ist, d. h. Mittelpunkt der Schmiegunskugel und Krümmungsmittelpunkt zusammenfallen, oder daß der Krümmungskreis ein Großkreis der Schmiegunskugel ist.

54. Berührung n -ter Ordnung zwischen zwei Raumkurven. Zwei Kurven (C) und (C_1) haben in einem gemeinsamen Punkte A eine Berührung n -ter Ordnung, wenn sich zu jedem Punkte P auf (C) , der hinreichend nahe an A liegt, ein Punkt P_1 auf (C_1) so zuordnen läßt, daß für $P \rightarrow A$ der Quotient

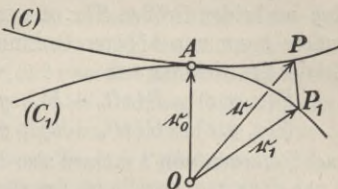


Abb. 19.

$$(185) \quad PP_1 : (AP)^{n+1}$$

einem von Null verschiedenen Grenzwert zustrebt (Abb. 19).

Es sei $\overline{OA} = r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\overline{OP} = r = \{x, y, z\}$, $OP_1 = r_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, ferner $r = r(t)$ die Darstellung der Kurve (C) , während die Kurve (C_1) als Schnitt zweier Flächen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

gegeben sei. Ist $PP_1 = l$, so hat man

$$\overline{PP_1} = r_1 - r = le,$$

wo $e = \{u, v, w\}$ der Einheitsvektor der Richtung von $\overline{PP_1}$ ist. Da P_1 auf (C_1) liegt, hat man

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad \text{und} \quad G(x_1, y_1, z_1) = 0$$

oder

$F(x + ul, y + vl, z + wl) = 0, G(x + ul, y + vl, z + wl) = 0$, oder nach dem Taylorschen Satze, falls $\text{grad } F$ und $\text{grad } G$ im Punkte A stetig und $\neq 0$ sind,

$$F(x, y, z) + (e(\text{grad } F)_A + \varepsilon)l = 0$$

$$G(x, y, z) + (e(\text{grad } G)_A + \zeta)l = 0,$$

wo $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\zeta \rightarrow 0$ für $P \rightarrow A$. Man kann es immer einrichten, daß e nicht parallel zur Tangente der Kurve (C_1) in A ist, so daß nicht beide Größen $e \text{ grad } F$ und $e \text{ grad } G$ in A verschwinden. In diesem Falle verschwindet wenigstens eine der Größen $F(x, y, z)$ oder $G(x, y, z)$ von derselben Ordnung wie $l = PP_1$, also wegen (185) von derselben Ordnung wie AP^{n+1} , während

die andere von höherer Ordnung verschwinden kann. Ist $r_0 = r(t_0)$, $r = r(t) = r(t_0 + h)$, so verschwindet mindestens eine der beiden Größen $F(x, y, z)$ und $G(x, y, z)$ wie h^{n+1} , die andere kann von höherer Ordnung unendlich klein werden. Bei der Entwicklung von

$$F(x, y, z) = F(x(t_0 + h), y(t_0 + h), z(t_0 + h))$$

$$G(x, y, z) = G(x(t_0 + h), y(t_0 + h), z(t_0 + h))$$

nach Potenzen von h müssen also die Faktoren von h, h^2, \dots, h^n verschwinden, während der Faktor von h^{n+1} wenigstens in einer der beiden Entwicklungen von Null verschieden sein muß. Also ist in Richtung der Kurven für $t = t_0$

$$(186) \quad \begin{aligned} F = 0, \quad dF = 0, \quad d^2F = 0, \dots \quad d^n F = 0, \\ G = 0, \quad dG = 0, \quad d^2G = 0, \dots \quad d^n G = 0, \end{aligned}$$

während wenigstens eines der beiden Differentiale $d^{n+1}F$ oder $d^{n+1}G$ von Null verschieden ist.

Die Kurve (C_1) sei beispielsweise eine Gerade, der Schnitt zweier nicht paralleler Ebenen

$$F(x, y, z) = \mathfrak{A}x + D = 0,$$

$$G(x, y, z) = \mathfrak{B}x + E = 0,$$

wo $\mathfrak{A} \nparallel \mathfrak{B}$ sein soll. Wenn sich die Kurve (C) und die Gerade (C_1) von n -ter Ordnung berühren sollen, muß nach (186)

$$\mathfrak{A}dx = 0, \quad \mathfrak{A}d^2r = 0, \dots \quad \mathfrak{A}d^n r = 0,$$

$$\mathfrak{B}dx = 0, \quad \mathfrak{B}d^2r = 0, \dots \quad d\mathfrak{B}^n r = 0$$

sein, während $\mathfrak{A}d^{n+1}r$ oder $\mathfrak{B}d^{n+1}r$ von Null verschieden ist. Da nun \mathfrak{A} nicht proportional zu \mathfrak{B} ist, so folgt daraus

$$[dx d^2r] = [d^2r d^3r] = \dots = [d^{n-1}r d^n r] = 0.$$

Das sind die Bedingungen dafür, daß eine Gerade die Kurve von n -ter Ordnung ($n \geq 2$) berührt. Ist die Berührung von erster Ordnung, so bestehen nur die Gleichungen

$$\mathfrak{A}dx = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}dx = 0,$$

woraus folgt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \lambda dx.$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$] hat aber die Richtung der Schnittgeraden beider Ebenen. Diese ist also parallel zum Vektor dx , wie es sein muß.

55. Schmiegunskurve in einem Punkte einer gegebenen Raumkurve. Die Formeln (186) enthalten $2n + 2$ Bedingungsgleichungen dafür, daß zwei Raumkurven sich in einem gemeinsamen Punkte A von n -ter Ordnung berühren. Es sei nun eine Raumkurve (C) gegeben, während die andere (C_1) einer Schar angehört, die von $2n + 2$ Parametern $p_1, p_2, \dots, p_{2n+2}$ abhängt. Diese lassen sich im allgemeinen nach den Bedingungen (186) bestimmen. Die so ermittelte bestimmte Kurve heißt die Schmiegunskurve (aus der gegebenen Schar) der gegebenen Raumkurve (C) im Punkte A . Man kann wie in Nr. 50 zeigen, daß sie die Grenzlage ist, der sich eine Kurve nähert, die mit (C) außer dem Punkte A noch n andere gemeinsam hat, wenn diese sich A unbeschränkt nähern. Wir wollen uns damit begnügen, dies an zwei Beispielen durchzuführen.

56. Schmiegunskreis. Ein Kreis im Raum hängt von sechs Parametern ab, nämlich von den drei Koordinaten des Mittelpunktes, dem Halbmesser und den zwei Konstanten, die noch die Stellung seiner Ebene bestimmen. Ist r der Radiusvektor eines beliebigen seiner Punkte, a seines Mittelpunktes, R sein Halbmesser, \mathfrak{A} der Stellungsvektor seiner Ebene, so hat man

$$(187) \quad F = \mathfrak{A}(r - a) = 0$$

$$(188) \quad G = (r - a)^2 - R^2 = 0.$$

Der Schmiegunskreis an die Kurve $r = r(t)$ wird also wegen $2n + 2 = 6$ eine Berührung zweiter Ordnung haben. Um ihn zu bestimmen, hat man nach (186)

$$(189) \quad dF = \mathfrak{A}dr = 0, \quad d^2F = \mathfrak{A}d^2r = 0$$

$$(190) \quad \frac{1}{2}dG = (r - a) dr = 0, \quad \frac{1}{2}d^2G = (r - a) d^2r + dr^2 = 0.$$

Aus (189) folgt $\mathfrak{A} = \lambda [drd^2r]$, also ist die Ebene des Schmiegunskreises die Schmiegungeebene (17). Die Formeln (190) lassen sich mit $dx/ds = t$, $d^2r/ds^2 = kt$ auch so schreiben

$$(191) \quad (r - a)t = 0, \quad (r - a)kn + 1 = 0.$$

Setzt man $r - a = \alpha t + \beta n + \gamma b$, so folgt aus (191) sofort $\alpha = 0$, und $\beta k = -1$, und aus (187) oder

$$\left[\frac{dx}{ds} \frac{d^2r}{ds^2} \right] (r - a) = k[tn] (r - a) = kb(r - a) = 0$$

auch $\gamma = 0$, also $r - a = -\frac{1}{k}n = -\varrho n$,

schließlich aus (188)

$$R^2 = \varrho^2.$$

Der Schmiegunskreis hat also den Krümmungsradius als Halbmesser und sein Mittelpunkt liegt auf der Hauptnormalen. Er heißt daher auch der Krümmungskreis und stimmt mit dem in Nr. 16 erwähnten überein.

§ 9. Evolventen und Evoluten.

57. Tangentenfläche einer Raumkurve. Das ist die Fläche, die von der Menge der Tangenten einer Raumkurve eingehüllt wird (Abb. 20).

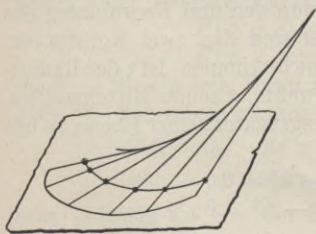


Abb. 20.

Es sei u der Parameter längs der Raumkurve (K) mit $r = r(u)$; dagegen sei \bar{r} der Ortsvektor nach einem Punkte der Tangente der Kurve, so daß

$$\bar{r} - r = v \frac{dx}{du}$$

der Vektor vom Berührungspunkte der Kurventangente nach einem Punkte dieser Tangente selbst ist. Für $dx/du = r'(u)$ hat man also

$$(192) \quad \bar{r} = r(u) + vr'(u).$$

Wenn u festgehalten wird, dagegen v sich ändert, so erhält man die Punkte auf einer bestimmten Tangente. Wenn dagegen v festgehalten wird und u sich ändert, erhält man eine be-

stimmte, die Tangenten von (K) querende Kurve. Für die verschiedenen Werte von u ergeben sich die verschiedenen Tangenten, für die verschiedenen Werte von v eine Schar von Kurven, die sämtlich diese Tangenten queren.

58. Fadenevolventen (Filarevolventen). Wir suchen nun die Kurven auf der Tangentenfläche einer Raumkurve (K) , die deren Tangenten senkrecht durchschneiden. Zur Vereinfachung nehme man in (192) statt u den Parameter s der Bogenlänge der Raumkurve (K) und suche für v eine solche Funktion von s , daß der dann entstehende Ortsvektor \bar{r} , der nun nur noch von s abhängt, eine Kurve auf der Tangentenfläche darstellt, die die Tangenten von (K) sämtlich senkrecht durchschneidet. Der Tangentenvektor der gesuchten Kurve ist parallel zu

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = r'(s) + vr''(s) + \frac{dv}{ds} r'(s)$$

und steht dann senkrecht auf den Tangenten von (K) , wenn

$$\frac{d\bar{r}}{ds} r'(s) = 0$$

ist, d. h. wenn

$$r'^2 + vr'r'' + v'r'^2 = 0$$

ist. Wegen $r'^2 = 1$, $r'r'' = 0$ entsteht daraus

$$1 + v' = 0$$

oder integriert

$$v = s_0 - s,$$

mit s_0 als Integrationskonstante. Das ergibt als Schar der senkrechten Schnittkurven der Tangente

$$(193) \quad \bar{r} = r(s) + (s_0 - s) r'(s).$$

Sie werden Fadenevolventen (Monge) der gegebenen Kurve (K) mit $r = r(s)$ genannt. Offensichtlich entstehen sie auch, wenn eine starre Gerade (g) auf (K) ohne zu gleiten, so abrollt, daß sie dabei stets Tangente von (K) bleibt; jeder Punkt von (g) beschreibt dabei eine Fadenevolvente von (K) .

Aus (193) folgt

$$(194) \quad d\bar{\mathbf{r}} = (s_0 - s) \mathbf{r}''(s) ds,$$

also, wenn man das positive Zeichen bevorzugt,

$$(195) \quad d\bar{s} = |s_0 - s| \cdot |\mathbf{r}''(s)| ds,$$

daher

$$(196) \quad \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{d\bar{s}} = \bar{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|} = \mathbf{n}.$$

Die Tangenten der Fadenevolventen sind also den entsprechenden Hauptnormalen der ursprünglichen Kurve parallel. Es macht keine Schwierigkeit, aus (193) die übrigen Vektoren des begleitenden Dreibeins sowie Krümmung und Windung der Fadenevolvente zu berechnen. Die Ergebnisse sind

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} &= \frac{kt + \varkappa b}{G}, & \bar{\mathbf{b}} &= \frac{k b - \varkappa t}{G}, \\ \bar{k} &= \frac{G}{k(s - s_0)}, & \bar{\varkappa} &= -\frac{k}{G^2(s - s_0)} \frac{d}{ds} \left(\frac{\varkappa}{k} \right), \end{aligned}$$

mit G als ganzer Krümmung, was der Leser beweisen möge.

59. Fadenevoluten. Die Formel (193) gibt die Lösung der Aufgabe, zu einer gegebenen Kurve die Fadenevolventen zu bestimmen. Nun sei die umgekehrte Aufgabe vorgelegt, zu einer gegebenen Kurve die zugehörigen Fadenevoluten zu bestimmen, d. h. Kurven, die die gegebene als eine ihrer Fadenevolventen haben. In der Formel (193) ist also jetzt $\bar{\mathbf{r}}$ der gegebene, \mathbf{r} der gesuchte Ortsvektor, und \bar{s} sei ein solcher Parameter, daß $\bar{\mathbf{r}}'(\bar{s})^2 = 1$ wird. Um \mathbf{r} zu bestimmen, benutze man $\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}$ als Basis, was immer möglich ist, außer wenn $\bar{\mathbf{r}}^2 = \text{const}$, d. h. wenn die Kurve auf einer Kugel um O als Mittelpunkt gelegen ist. Man braucht aber dann diesen Ursprung nur etwas zu verschieben. Man setze also

$$(197) \quad \mathbf{r} = \alpha \bar{\mathbf{r}} + \beta \bar{\mathbf{n}} + \gamma \bar{\mathbf{b}},$$

wobei sich aus (193) sofort $\alpha = 1$ ergibt. Daraus folgt, mit \bar{s} als unabhängiger Veränderlichen,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d\bar{x}}{ds} + \beta \frac{d\bar{n}}{ds} + \frac{d\beta}{ds} \bar{n} + \gamma \frac{d\bar{b}}{ds} + \frac{d\gamma}{ds} \bar{b},$$

oder wenn man die Frenetschen Formeln auf der rechten Seite anwendet:

$$(198) \quad \frac{dx}{ds} = (1 - \beta\bar{k}) \bar{t} + \left(\frac{d\beta}{ds} - \gamma\bar{\kappa} \right) \bar{n} + \left(\frac{d\gamma}{ds} + \beta\bar{\kappa} \right) \bar{b}.$$

Nun ist aber wegen (195) dx/ds proportional zu $dx/ds = r'(s)$, und dieses nach (193) proportional zu $\bar{r} - r$, also zu $\beta\bar{n} + \gamma\bar{b}$. In (198) muß also sein:

$$1 - \beta\bar{k} = 0, \quad \frac{d\beta}{ds} - \gamma\bar{\kappa} = \lambda\beta, \quad \frac{d\gamma}{ds} + \beta\bar{\kappa} = \lambda\gamma.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$(199) \quad \beta = 1 : \bar{k},$$

und aus den beiden letzten

$$\gamma \frac{d\beta}{ds} - \beta \frac{d\gamma}{ds} = \bar{\kappa} (\beta^2 + \gamma^2)$$

oder

$$\left(\frac{d}{ds} \frac{\beta}{\gamma} \right) : \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \right) = \bar{\kappa}.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\gamma} = \int \bar{\kappa} ds + \text{const},$$

und daraus weiter wegen (199)

$$(200) \quad \gamma = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \left(\int \bar{\kappa} ds + \text{const} \right).$$

Aus (197) erhält man als Ergebnis

$$(201) \quad r = \bar{r} + \frac{1}{k} \bar{n} + \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \left(\int \bar{\kappa} ds + \text{const} \right) \bar{b},$$

wodurch die gesuchte Fadenevolute, durch den Parameter \bar{s} der Bogenlänge der Evolvente dargestellt, gegeben ist. Wegen der Integrationskonstanten handelt es sich um eine Schar von ∞^1 Kurven.

Aus (201) kann man insbesondere schließen, daß für eine ebene Fadenevolvente die zugehörige Evolvenschar, wo ja $\bar{x} = 0$ ist,

$$(202) \quad \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \frac{1}{k} \bar{\mathbf{n}} + \frac{C}{k} \bar{\mathbf{b}}$$

lautet und für $C = 0$, und nur dann selbst eine ebene Kurve ergibt, die Evolute der gegebenen Evolvente.

60. Planevolventen. Die Kurven, die die Schmiegungebenen einer Kurve (K) senkrecht durchsetzen, heißen Planevolventen der gegebenen Planevolvente (K). Es sei $\bar{\mathbf{r}}$ der Ortsvektor nach einem Punkte der Planevolvente, so liegt der Vektor $\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}$ in der Schmiegungeebene, und der tangential gerichtete Vektor $d\bar{\mathbf{x}}/ds$, wo aber s die Bogenlänge von (K) bedeuten soll, steht senkrecht auf ihr, also ist

$$(203) \quad \bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n},$$

$$(204) \quad \mathbf{t} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{ds} = 0, \quad \mathbf{n} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{ds} = 0.$$

Aus (203) folgt aber unter Benutzung der Frenetschen Formeln

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{ds} = \left(1 + \frac{d\alpha}{ds} - \beta k\right) \mathbf{t} + \left(\frac{d\beta}{ds} + \alpha k\right) \mathbf{n} + \beta \kappa \mathbf{b},$$

und daraus ergeben sich mittels (204) zwei gekoppelte Differentialgleichungen zur Bestimmung der skalaren Faktoren α und β :

$$\frac{d\alpha}{ds} - \beta k = -1,$$

$$\frac{d\beta}{ds} + \alpha k = 0.$$

Man kann sie weiter in eine Gleichung verknüpfen:

$$\frac{d}{ds} (\alpha + i\beta) + ik(\alpha + i\beta) + 1 = 0,$$

deren Lösung sich leicht ergibt:

$$(205) \quad \alpha + i\beta = -e^{-is} \left(\int e^{is} ds + c \right),$$

wo $c = a + ib$ eine komplexe Integrationskonstante bedeutet und zur Abkürzung

$$(206) \quad \int_0^s k ds = S$$

gesetzt worden ist. Trennt man in (205) Reelles und Imaginäres und setzt die gefundenen Werte in (203) ein, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$(207) \quad \bar{r} - r = -(\cos S(\int \cos S ds + a) + \sin S(\int \sin S ds + b))t \\ + (\sin S(\int \cos S ds + a) - \cos S(\int \sin S ds + b))n.$$

Hierin kommen zwei Integrationskonstanten vor, also gibt es zu jeder Kurve (K) ∞^2 -Planevolventen.

Man kann beweisen, daß alle diese Planevolventen mit- samt der Kurve (K) denselben geometrischen Ort der Mittelpunkte ihrer Schmiegun- gskugeln haben, was der Leser zur Übung zeigen möge. Daraus folgt übrigens, daß alle diese Kurven abstandsgleich zueinander verlaufen.

61. Bertrandsche Kurven. Es gibt Paare von Kurven mit gemeinsamen Hauptnormalen. Um das zu zeigen, sei $r(s)$ die Darstellung der einen Kurve (K) mit s als Parameter der Bogenlänge von (K) und $\bar{r}(s)$ die der anderen Kurve (\bar{K}). Da sie dieselbe Hauptnormale haben sollen, muß

$$(208) \quad \bar{r} - r = \lambda n$$

sein, wo $\lambda = \lambda(s)$ einen skalaren Faktor bedeutet. Aus (208) folgt

$$\frac{d\bar{r}}{ds} - t = \lambda \frac{dn}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} n$$

oder mit Benutzung der Hauptgleichung (II) $\frac{dn}{ds} = \kappa b - kt$:

$$(209) \quad \frac{d\bar{r}}{ds} = (1 - \lambda k)t + \frac{d\lambda}{ds} n + \lambda \kappa b.$$

Die linke Seite ist parallel zur Tangente der Kurve (\bar{K}), und da diese ebenfalls n als Hauptnormalenvektor hat, so muß das

skalare Produkt mit n verschwinden, also folgt

$$(210) \quad \frac{d\lambda}{ds} = 0, \text{ d. h. } \lambda = \text{const.}$$

Ist nun \bar{s} die Bogenlänge der Kurve (\bar{K}), so ist $d\bar{x}/ds = \bar{t} d\bar{s}/ds$. Wegen $\bar{t}n = 0$ und $\bar{t}^2 = 1$ ist aber

$$(211) \quad \bar{t} = \cos \varphi t + \sin \varphi b$$

zu setzen. Leitet man nach der Bogenlänge ab und benutzt die Hauptgleichungen, und zwar für beide Kurven (K) und (\bar{K}), so erhält man weiter

$$\bar{k} \frac{d\bar{s}}{ds} n = (k \cos \varphi - \varkappa \sin \varphi) n - (\sin \varphi t - \cos \varphi b) \frac{d\varphi}{ds}.$$

Weil aber t, n, b nicht komplanar sind, müssen die Faktoren von t, n, b einzeln verschwinden.

Das ergibt

$$\bar{k} \frac{d\bar{s}}{ds} = k \cos \varphi - \varkappa \sin \varphi$$

und

$$(212) \quad \frac{d\varphi}{ds} = 0;$$

der Winkel φ ist also konstant. Aus (209) folgt aber wegen (210) und (211)

$$(\cos \varphi t + \sin \varphi b) \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \lambda k) t + \lambda \varkappa b,$$

mithin

$$(213) \quad \begin{cases} \cos \varphi \frac{d\bar{s}}{ds} = 1 - \lambda k, \\ \sin \varphi \frac{d\bar{s}}{ds} = \lambda \varkappa, \end{cases}$$

und daraus unter Wegschaffen von $d\bar{s}/ds$

$$(214) \quad \lambda k + \lambda \cotg \varphi \varkappa = 1.$$

In Hinblick auf (210) und (212) kann man das Ergebnis in der Form

$$(215) \quad \lambda k + \mu \kappa = 1$$

schreiben, wo λ und $\mu = \lambda \cotg \varphi$ zwei willkürliche Konstanten bedeuten. Kurven, bei denen zwischen Krümmung und Windung eine lineare natürliche Gleichung (vgl. Nr. 37) besteht, werden Bertrandsche Kurven genannt.

Kennt man umgekehrt eine Bertrandsche Kurve (K), so kann man dazu nach (208) eine zweite Kurve (\bar{K}) bestimmen, die dieselben Hauptnormalen hat. Natürlich ist auch (\bar{K}) eine Bertrandsche Kurve.

62. Formel von Schell. Wir wollen noch eine von Schell gefundene Formel zwischen den Windungen von (K) und (\bar{K}) herleiten. Aus (211) folgt durch vektorische Multiplikation mit $\bar{n} = n$

$$(216) \quad \bar{b} = -\sin \varphi t + \cos \varphi b,$$

und daraus durch Ableiten nach s und Benutzung der Hauptgleichungen

$$(217) \quad \begin{aligned} \bar{\kappa} n \frac{d\bar{s}}{ds} &= (\kappa \cos \varphi + k \sin \varphi) n, \\ \bar{\kappa} \frac{d\bar{s}}{ds} &= \kappa \cos \varphi + k \sin \varphi. \end{aligned} \quad \text{also}$$

Entnimmt man nun aus der zweiten Gleichung (213) den Wert von $d\bar{s}/ds$ und aus (214) den Wert von k , so heben sich auf der rechten Seite von (217) die Glieder mit κ heraus, und man erhält

$$(218) \quad \kappa \bar{\kappa} = \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Das Produkt der Windungen zweier Kurven eines Bertrandschen Paares ist also konstant. Das ist die Formel von Schell.

§ 10. Minimalkurven.

63. Minimalpunkte und Minimalkurven erster und zweiter Art. Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf

solche Kurvenstücke, die ausnahmslos aus regulären Punkten bestehen. Insbesondere waren die Punkte, für die
 (219) $dx^2 = 0$, $dx \neq 0$ oder für die $(d^2r)^2 = 0$, $d^2r \neq 0$
 war, von der Betrachtung auszuschließen. Solche Kurvenpunkte heißen Minimalpunkte erster oder zweiter Art, weil dx oder d^2r an ihnen Minimalvektoren sind.

Minimalkurven (isotrope Kurven) erster oder zweiter Art sind solche Kurven, deren sämtliche Punkte Minimalpunkte sind. Längs der Minimalkurven erster Art verliert der Parameter der Bogenlänge und damit der Begriff des Tangenteneinheitsvektors seine Bedeutung, und für die Minimalkurven zweiter Art ist dies der Fall für die Windung (vgl. die Formeln Nr. 21). Die Minimalkurven erster Art heißen wegen $dx^2 = ds^2 = 0$ auch „Linien der Länge Null“, auch „ametrische Kurven“.

64. Gemeinsame Bedingung für Minimalkurven. Aus (219) folgt, daß die Bedingung

$$(220) \quad [dx d^2r]^2 = 0, \quad [dx d^2r] \neq 0$$

sowohl für Minimalkurven erster, als auch zweiter Art erfüllt ist. Denn es ist

$$(221) \quad [dx d^2r]^2 = dx^2 (d^2r)^2 - (dx d^2r)^2 = 0$$

und aus $(dx)^2 = 0$ folgt ja $dx d^2r = 0$. Andererseits folgt aus (220) entweder $dx^2 = 0$, $dx \neq 0$, oder $(d^2r)^2 = 0$, $d^2r \neq 0$. Denn aus (221) folgt wegen $dx d^2r = 0$ auch $dx^2 (d^2r)^2 = 0$, wonach die Behauptung richtig ist.

Die Bedingung (220) ist also für Minimalkurven erster Art und für solche zweiter Art und nur für Minimalkurven erfüllt.

65. Lehrsatz. Die Minimalkurven zweiter Art sind übereinstimmend mit den gekrümmten ($k \neq 0$) Kurven in Minmalebenen.

Beweis: Zunächst können die Minimalkurven zweiter Art keine Geraden sein. Denn es ist ja $d^2r \neq 0$, während für eine Gerade $d^2r = 0$ sein müßte. Setzt man nun

$$(222) \quad \mathfrak{M} = [r' r''],$$

so ist \mathfrak{M} wegen (220) ein Minimalvektor, $\mathfrak{M}^2 = 0$. Mithin ist

$$\mathfrak{M}^2 = 0, \quad \mathfrak{M}\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{M}\mathfrak{r}'' = 0.$$

Durch Differentiation folgt weiter

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}' = 0 \quad \mathfrak{M}'\mathfrak{r}' = 0;$$

Daher kann man

$$\mathfrak{M}' = [\mathfrak{r}'\mathfrak{r}'''] = \lambda[\mathfrak{M}\mathfrak{r}']$$

setzen, und es wird

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{r}'' = -\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}''' = \lambda\mathfrak{M}[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}'''] = \lambda\mathfrak{M}^2 = 0,$$

also $\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}''' = 0$. Nach Nr. 13 ist also die betrachtete Minimal-
kurve eben. Um zu beweisen, daß die jeweilige Ebene, in der
sie liegt, eine Minimalebene ist, braucht man nur wie in Nr. 13
zu verfahren. Aus $\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}''' = 0$ folgt, daß es einen den Gleichun-
gen

$$(223) \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{r}'' = 0, \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{r}''' = 0$$

genügenden Vektor gibt ($\mathfrak{Z} \neq 0$), so daß

$$(224) \quad \mathfrak{Z} = \mu[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''']$$

ist, und überdies wegen $\mathfrak{Z}'\mathfrak{r}' = 0$, $\mathfrak{Z}'\mathfrak{r}'' = 0$, also
 $\mathfrak{Z}' = \mu[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''']$ die Differentialgleichung

$$\mathfrak{Z}' = \nu\mathfrak{Z}$$

besteht, wo μ, μ_1, ν Skalare bedeuten. Die Integration liefert

$$(225) \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{A}e^{\int \nu dt}.$$

Wegen (222) und (224) ist aber \mathfrak{Z} , also auch \mathfrak{A} ein Minimal-
vektor, und zwar dieser ein konstanter. Durch Integration der
ersten Gleichung (223) oder $\mathfrak{A}\mathfrak{r}' = 0$ erfolgt

$$(226) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r} + D = 0,$$

wo D eine skalare Konstante ist. Das ist aber eine Minimal-
ebene, in der die Minimalkurve zweiter Art gelegen ist.

Man muß noch zeigen, daß umgekehrt alle krummen
Linien in Minimalebenen Minimalkurven zweiter Art sind.
In der Tat: Stellt (226) eine Minimalebene dar, so ist $\mathfrak{A}^2 = 0$,
aber $\mathfrak{A} \neq 0$. Wegen der Konstanz von \mathfrak{A} folgt aber weiter

$$(227) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r}' = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{r}'' = 0,$$

also

$$\mathfrak{A} = \lambda[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''],$$

mithin wegen $\lambda \neq 0$:

$$[r'r'']^2 = 0.$$

Also ist nach (220) die Kurve eine Minimalkurve. Erster Art kann sie aber nicht sein, dann wäre $r'r'' = 0$, also wegen $\mathfrak{A}' = 0$ gewiß $r' = \mu \mathfrak{A}$ (nach Satz 3 in Nr. 5), so wäre

$$r - r_0 = \mathfrak{A} \int \mu dt,$$

also die Kurve eine Minimalgerade, also nicht krumm.

66. Parameterdarstellung der Minimalkurven erster Art. Da für diese Kurven dx ein Minimalvektor ist, kann man ihn nach Nr. 5, Satz 2, in der Form

$$dx = dz \{i \cos \vartheta, i \sin \vartheta, 1\}$$

darstellen, worin ϑ eine komplexe Funktion von z bedeutet. Durch Integration erhält man

$$(228) \quad r - r_0 = \left\{ i \int \cos \vartheta dz, i \int \sin \vartheta dz, z - z_0 \right\}.$$

Hierin ist z der Parameter. Führt man einen anderen λ ein, indem man setzt

$$z - z_0 = \int \lambda F(\lambda) d\lambda,$$

also $dz = \lambda F(\lambda) d\lambda$ und nimmt ferner

$$i\lambda = e^{i\vartheta},$$

so wird

$$\cos \vartheta = \frac{1 - \lambda^2}{2i\lambda}, \quad \sin \vartheta = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda},$$

und (228) geht damit in

$$(229) \quad r - r_0 = \left\{ \frac{1}{2} \int (1 - \lambda^2) F(\lambda) d\lambda, \right. \\ \left. \frac{i}{2} \int (1 + \lambda^2) F(\lambda) d\lambda, \int \lambda F(\lambda) d\lambda \right\}$$

über. Das sind die von Enneper und von Weierstraß entdeckten Formeln; hierin bedeutet $F(\lambda)$ eine integrable, sonst aber willkürliche Funktion ($\neq 0$) ihres Argumentes. Die Integration ist in allen drei Integralen auf einem beliebigen, wenn auch demselben Wege der komplexen λ -Ebene zu erstrecken.

Führt man eine analytische Funktion

$$f(\lambda) = \iiint F(\lambda) d\lambda^3$$

ein, für die $f'''(\lambda) = F(\lambda) \neq 0$ ist, so geht die Formel (229) in die ebenfalls auf Weierstraß zurückzuführende integrallose Form über:

$$(230) \quad \begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) f''(\lambda) + \lambda f'(\lambda) - f(\lambda) \\ y - y_0 = \frac{i}{2} (1 + \lambda^2) f''(\lambda) - i\lambda f'(\lambda) + if(\lambda) \\ z - z_0 = \lambda f''(\lambda) - f'(\lambda). \end{cases}$$

Beispiel: $f(\lambda) = \lambda^3$; $f'''(\lambda) = 6 \neq 0$. Man erhält aus (230)

$$(231) \quad \begin{cases} x - x_0 = 3\lambda - \lambda^3 \\ y - y_0 = i(3\lambda + \lambda^3) \\ z - z_0 = 3\lambda^2. \end{cases}$$

Die Elimination von λ liefert

$$\begin{cases} 27(x - x_0)^2 = (z - z_0)(9 - (z - z_0))^2 \\ -27(y - y_0)^2 = (z - z_0)(9 + (z - z_0))^2. \end{cases}$$

Von den beiden Flächen, auf denen diese Minimalkurve liegt, ist stets eine imaginär. Aus (231) überzeugt man sich sehr leicht, daß tatsächlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

ist.

67. Einführung eines invarianten Parameters. Wir leiten zunächst einige Identitäten für Minimalkurven erster Art her. Es sei t irgendein Parameter. Aus

$$r'(t)^2 = 0$$

folgt

$$(232) \quad r'r'' = 0, \quad r'r''' + r''^2 = 0.$$

Ist $v \neq 0$ ein beliebiger Vektor, so gilt also

$$(233) \quad (r'r''v)^2 = \begin{vmatrix} r'^2 & r'r'' & r'v \\ r'r'' & r''^2 & r''v \\ vr' & vr'' & v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & r'v \\ 0 & r''^2 & r''v \\ vr' & vr'' & v^2 \end{vmatrix} = - (r'v)^2 r''^2,$$

und im besonderen für $v = r'''$

$$(234) \quad (r' r'' r''')^2 = - (r' r''')^2 r''^2 = - r''^6 = - (r''^2)^3.$$

Wenn man in (233) beiderseits einen bestimmten Wert der Quadratwurzel wählt, so erhält man

$$[r' r''] v = (r' v) \sqrt{-r''^2}$$

oder

$$([r' r''] - r' \sqrt{-r''^2}) v = 0.$$

Da nun diese Gleichung für jeden beliebigen Vektor v gilt, so muß notwendigerweise

$$(235) \quad [r' r''] = r' \sqrt{-r''^2}$$

sein.

Da aber r' und nach (220) auch $[r' r'']$ ein Minimalvektor, also $\neq 0$ ist, so kann r''^2 nicht verschwinden, also ist jedenfalls r'' kein Minimalvektor.

Nun führe man nach Study einen neuen Parameter p ein, indem man $t = \varphi(p)$ setzt, wo φ eine analytische Funktion ihres komplexen Argumentes sein soll. Dann wird

$$r' = \frac{dx}{dp} p', \quad r'' = \frac{dx}{dp} p'' + \frac{d^2x}{dp^2} p'^2,$$

mithin

$$(236) \quad \left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2 p'^4 = \left(r'' - \frac{dx}{dp} p''\right)^2 \\ = r''^2 - 2r'' \frac{r'}{p'} p'' + \left(\frac{r'}{p'}\right)^2 p''^2 = r''^2,$$

weil ja $r'^2 = 0$ ist. Man wähle jetzt den neuen Parameter p so, daß

$$(237) \quad \left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2 = -1$$

wird. Dann muß $p'^4 = -r''^2$ oder

$$(238) \quad p = \int \sqrt[4]{-r''^2} dt$$

genommen werden, wobei es auf die Integrationskonstante nicht ankommt. Übrigens läßt sich p wirklich als Parameter benutzen, weil wegen (235) $r''^2 \neq 0$ sein muß.

Jetzt gelten folgende Formeln:

$$(239) \quad \begin{cases} \left(\frac{dx}{dp}\right)^2 = 0, & \frac{dx}{dp} \frac{d^2r}{dp^2} = 0, & \left(\frac{d^2r}{dp^2}\right)^2 = -1, \\ \frac{dx}{dp} \frac{d^3r}{dp^3} = +1, & \frac{d^2r}{dp^2} \frac{d^3r}{dp^3} = 0, \\ \frac{d^2r}{dp^2} \frac{d^4r}{dp^4} = -\left(\frac{d^3r}{dp^3}\right)^2, & \frac{dx}{dp} \frac{d^4r}{dp^4} = 0, \dots \end{cases}$$

Ferner ergibt sich aus (233) wegen (237)

$$\frac{dx}{dp} \frac{d^2r}{dp^2} \mathfrak{v} = \pm \frac{dx}{dp} \mathfrak{v},$$

woraus wie oben wegen der Willkürlichkeit von \mathfrak{v}

$$(240) \quad \left[\frac{dx}{dp} \frac{d^2r}{dp^2} \right] = \pm \frac{dx}{dp}$$

und daher weiter wegen (239)

$$(241) \quad \frac{dx}{dp} \frac{d^2r}{dp^2} \frac{d^3r}{dp^3} = \pm 1$$

folgt.

Nach den Betrachtungen in Nr. 32 u. f. ist es einleuchtend, daß nach (238) p eine Integralinvariante der Parameterdarstellung und der Bewegung, also eine Fundamentalinvariante ist. Dasselbe gilt von der Differentialinvariante

$$(242) \quad I = -\frac{d^2r}{dp^2} \frac{d^4r}{dp^4} = \left(\frac{d^3r}{dp^3}\right)^2,$$

die von dritter Ordnung ist. Es werde $I \neq 0$ angenommen.

Wie die Gleichung (241) zeigt, bilden die darin vorkommenden drei Vektoren eine Basis. Aber sie sind weder normiert, noch orthogonal. Das wird man auch nicht verlangen können,

denn der erste, $\frac{dx}{dp}$, ist ein Minimalvektor. Um eine Normierung möglichst zu erwirken, setze man

$$(243) \quad \mathfrak{T} = \frac{dx}{dp}, \quad \mathfrak{R} = i \frac{d^2r}{dp^2}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{d^3r}{dp^3}.$$

Dann ist wegen (239)

$$(244) \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}^2 &= 0, & \mathfrak{N}^2 &= 1, & \mathfrak{B}^2 &= 1, \\ \mathfrak{T}\mathfrak{N} &= 0, & \mathfrak{N}\mathfrak{B} &= 0, & \mathfrak{B}\mathfrak{T} &= \frac{1}{\sqrt{I}}, \\ & & \mathfrak{T}\mathfrak{N}\mathfrak{B} &= \pm \frac{i}{\sqrt{I}}. \end{aligned}$$

Aus (243) ergibt sich sofort

$$(245) \quad \frac{d\mathfrak{T}}{dp} = -i\mathfrak{N},$$

$$(246) \quad \frac{d\mathfrak{N}}{dp} = i\sqrt{I}\mathfrak{B}.$$

Um noch $d\mathfrak{B}/dp$ zu berechnen, setze man $d\mathfrak{B}/dp = \alpha\mathfrak{T} + \beta\mathfrak{N} + \gamma\mathfrak{B}$. Nun ist

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dp} = -\frac{1}{2\sqrt{I}^3} \frac{dI}{dp} \frac{d^3\mathfrak{r}}{dp^3} + \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{d^4\mathfrak{r}}{dp^4},$$

andererseits nach (239)

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dp} \frac{d^4\mathfrak{r}}{dp^4} = 0, \quad \frac{d^3\mathfrak{r}}{dp^3} \frac{d^4\mathfrak{r}}{dp^4} = \frac{1}{2} \frac{dI}{dp},$$

damit erhält man schließlich

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{I}} \frac{dI}{dp}, \quad \beta = -i\sqrt{I}, \quad \gamma = -\frac{1}{2I} \frac{dI}{dp},$$

so daß die gesuchte Formel lautet:

$$(247) \quad \frac{d\mathfrak{B}}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{I}} \frac{dI}{dp} \mathfrak{T} - i\sqrt{I}\mathfrak{N} - \frac{1}{2I} \frac{dI}{dp} \mathfrak{B}.$$

Bei Minimalkurven erster Art entsprechen die Formeln (245), (246), (247) den Frenetschen Formeln. Die einzige darin auftretende skalare Fundamentalinvariante ist I . Man zeigt durch dieselben Schlüsse wie in Nr. 39, daß wenn

$$I = \Phi(p)$$

gegeben ist, hierdurch die Kurve bis auf eine Bewegung im Raume bestimmt ist.

68. Parameterdarstellung einer Raumkurve mit integralloser Bestimmung der Bogenlänge. Die Gleichung (10)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

läßt sich in folgender Form schreiben:

$$(dx + idy)(dx - idy) = (ds + dz)(ds - dz).$$

Mithin gibt es zwei komplexe Veränderliche u, v der Art, daß man zugleich

$$(248) \quad \begin{aligned} u(dx + idy) &= ds + dz \\ dx - idy &= u(ds - dz), \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(249) \quad \begin{aligned} v(dx + idy) &= ds - dz \\ dx - idy &= v(ds + dz) \end{aligned}$$

setzen kann.

Man betrachte nun, dem Ansätze (248) folgend, x, y, z, s als Funktionen des Parameters u und setze demnach

$$\begin{aligned} dx + idy &= 2\varphi(u)du \\ ds - dz &= 2\psi(u)du, \end{aligned}$$

so folgt aus (248)

$$\begin{aligned} dx - idy &= 2u\varphi(u)du, \\ ds + dz &= 2u\psi(u)du, \end{aligned}$$

Durch Integration ergibt sich aus den vier vorstehenden Gleichungen leicht

$$\begin{aligned} x &= \int (\varphi(u) + u\psi(u))du \\ iy &= \int (\varphi(u) - u\psi(u))du \\ z &= \int (u\varphi(u) - \psi(u))du \\ s &= \int (u\varphi(u) + \psi(u))du, \end{aligned}$$

wobei vier additiv auftretende Integrationskonstanten weggelassen worden sind. Man kann daraus eine integrallose Darstellung gewinnen, indem man

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \Phi''(u) \\ \psi(u) &= \Psi''(u) \end{aligned}$$

setzt und die Regel der unvollständigen Integration benutzt.

Das ergibt

$$(250) \quad \begin{cases} x = \Phi'(u) + u\Psi'(u) - \Psi(u) \\ iy = \Phi'(u) - u\Psi'(u) + \Psi(u) \\ z = u\Phi'(u) - \Phi(u) - \Psi'(u) \\ s = u\Phi'(u) - \Phi(u) + \Psi'(u). \end{cases}$$

(Formeln von de Montcheuil, 1905).

In entsprechender Weise kann man aus (249) folgende integrallose Darstellungen ableiten:

$$(251) \quad \begin{cases} x = \Phi_1'(v) + v\Psi_1'(v) - \Psi_1(v) \\ iy = \Phi_1'(v) - v\Psi_1'(v) + \Psi_1(v) \\ z = \Psi_1'(v) - v\Phi_1'(v) + \Phi_1(v) \\ s = \Psi_1'(v) + v\Phi_1'(v) - \Phi_1(v). \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von (250) nur durch das Vorzeichen in z .

69. Anwendung auf Minimalkurven erster Art. Aus (250) folgt

$$ds = (u\Phi''(u) + \Psi''(u))du,$$

und das verschwindet, wenn

$$(252) \quad u\Phi''(u) + \Psi''(u) = 0$$

ist. Dies ist also die notwendige und, wie man sofort sieht, auch hinreichende Bedingung dafür, daß die durch die Gleichungen (250) bestimmte Kurve eine Minimalkurve erster Art ist. Wir wollen nun zeigen, daß diese Gleichungen mit der Weierstraßschen Darstellung (230) übereinstimmen. Aus (252) folgt zunächst durch Integration, wobei die additive Integrationskonstante unterdrückt ist,

$$u\Phi'(u) - \Phi(u) = -\Psi'(u).$$

Nun setze man

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}f'(u),$$

so wird

$$\Psi'(u) = -\frac{1}{2}uf''(u) + \frac{1}{2}f'(u),$$

daher, wieder mit Weglassung der additiven Integrationskonstanten,

$$\Psi(u) = -\frac{1}{2}uf'(u) + f(u).$$

Setzt man diese Werte für $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ in (250) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \frac{1}{2} (1 - u^2) f''(u) + u f'(u) - f(u) \\i(y - y_0) &= \frac{1}{2} (1 + u^2) f''(u) - u f'(u) + f(u) \\z - z_0 &= u f''(u) - f'(u),\end{aligned}$$

und das sind die Formeln (230).

II. Anfänge der Flächentheorie. Kurven auf Flächen.

§ 1. Analytische Darstellung einer Fläche.

70. Parameterdarstellung einer Fläche. Wenn die drei rechtwinkligen cartesischen Koordinaten x, y, z oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Ortsvektor $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ eines Punktes P im Raume Funktionen zweier voneinander unabhängiger Parameter u und v in einem gemeinsamen Definitionsbereiche ($\alpha \leq u \leq \beta$; $\gamma \leq v \leq \delta$) sind, so heißt die Menge aller Punkte P mit den Koordinaten $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ oder mit dem Ortsvektor

$$(253) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

die sich ergeben, wenn u den Bereich $(\alpha \dots \beta)$ und v den Bereich $(\gamma \dots \delta)$ stetig durchläuft, eine (krumme) Fläche (genauer: ein Flächenstück).

Wenn v einen festen Wert beibehält und nur u sich stetig ändert, so durchläuft P eine auf der Fläche gelegene Raumkurve, eine u -Linie. Wenn für verschiedene feste Werte von v auch verschiedene u -Linien herauskommen, so gibt es eine Schar von ∞^1 u -Linien. Entsprechend gibt es für jeden festen Wert von u bei veränderlichem v eine Schar von ∞^1 v -Linien. Wenn beide Scharen

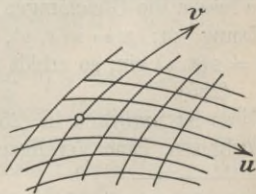


Abb. 21.

getrennt verlaufen, bilden sie ein auf der Fläche gelegenes Kurvennetz (Abb. 21). Die analytische Bedingung für die soeben gemachten Voraussetzungen ist, daß für alle u, v in den Bereichen $(\alpha \cdots \beta$ und $(\gamma \cdots \delta)$ die Matrix¹⁾

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

oder was dasselbe besagt, daß der Vektor

$$(254) \quad [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] \neq 0$$

ist. Denn andernfalls wären entweder $\mathbf{r}_u = 0$ oder $\mathbf{r}_v = 0$ oder drittens würden die drei Determinanten der Matrix, d. h. die Komponenten des Vektorproduktes, nämlich die Funktionaldeterminanten $\partial(y, z)/\partial(u, v)$, $\partial(z, x)/\partial(u, v)$, $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ zugleich verschwinden. Das würde aber bedeuten, daß die v -Linien in eine einzige Raumkurve zusammenfallen, oder die u -Linien, oder drittens, daß es eine Funktion $t(u, v)$ der Art gibt, daß $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(t)$ gesetzt werden kann. In allen diesen Fällen würde sich also die Fläche auf eine Raumkurve zusammenziehen.

Wenn x, y, z eindeutige Funktionen von u, v , sind, so entspricht jedem Wertepaare u, v genau ein Punkt P der Fläche; u und v heißen die krummlinigen Koordinaten von P . Wenn für das Netz u, v die Bedingung (254) in P erfüllt ist, heißt P ein regulärer, andernfalls ein singulärer Punkt dieses Netzes. Singuläre Punkte sollen nur vereinzelt oder längs einzelner Kurven auftreten.

Wenn (254) erfüllt ist, also etwa $\partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$ ist, so lassen die Gleichungen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ eine Auflösung zu: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Setzt man dies in $z = z(u, v)$ ein, so erhält man die Flächendarstellung

$$(255) \quad z = f(x, y).$$

Diese ist natürlich in (253) als Sonderfall für $u = x$, $v = y$ enthalten. Eine Verallgemeinerung von (255) ist die unent-

¹⁾ Unter x_u soll die partielle Ableitung $\partial x/\partial u$ verstanden werden.

wickelte Darstellung

$$(256) \quad F(x, y, z) = 0.$$

71. Wechsel der Parameter. An Stelle der Parameter u, v mögen andere ξ, η durch die Gleichungen

$$(257) \quad \xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v)$$

eingeführt werden. Dann ist

$$\begin{aligned} r_u &= r_\xi \xi_u + r_\eta \eta_u \\ r_v &= r_\xi \xi_v + r_\eta \eta_v, \end{aligned}$$

mithin

$$(258) \quad [r_u r_v] = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} [r_\xi r_\eta].$$

Aus (254) folgt aber, daß sowohl $[r_\xi r_\eta] \neq 0$, als auch

$$(259) \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

sein muß. Dies ist aber die Bedingung dafür, daß sich die Gleichungen (257) umkehren lassen:

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta),$$

und daß auch (ξ, η) ein Kurvennetz auf der Fläche bilden.

Wenn insbesondere

$$\xi = \xi(u), \quad \eta = \eta(v)$$

ist, so stimmt das Netz (ξ, η) als Ganzes mit dem Netze (u, v) als Ganzem überein, nur die Bezifferung der einzelnen Kurven innerhalb der beiden Scharen ist geändert worden. In den folgenden Nummern **72** bis **79** werden einige Beispiele von Flächen besprochen.

72. Kugel, bezogen auf Breitenkreise und Meridiane:

$$(260) \quad r = a\{\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u\}, \quad a > 0.$$

Wegen

$$r^2 = a^2(\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u) = a^2,$$

also $|r| = a$, ist die Fläche eine Kugel vom Halbmesser a , deren Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt. Für jeden festen Wert von u hat auch $z = a \sin u$ einen festen Wert. Daher sind die Kurven $u = \text{const}$, oder die v -Linien, die

Schnittkurven der Kugel mit den Ebenen $z = \text{const}$, also die Breitenkreise der Kugel. u selbst ist der Winkel, den der Kugelradius nach einem Punkte des betreffenden Breitenkreises mit der Ebene des Äquators ($u = 0$) einschließt. Aus $x = a \cos u \cos v$, $y = a \cos u \sin v$ folgt $y = \text{tg } v \cdot x$. Daher sind die Kurven $v = \text{const}$, oder die u -Linien, die Schnittkurven der Kugel mit den Ebenen des Büschels, das die z -Achse zur Büschelachse hat, also die Meridiane der Kugel, v selbst ist der Winkel, den die betreffende Meridianebene mit der Ebene $y = 0$ einschließt. u ist die geographische Breite, v die geographische Länge. Das Netz (u, v) ist das der Breitenkreise und Meridiane, wie es auf dem Globus sichtbar ist. Nun ist

$$\begin{aligned} r_u &= a \left\{ -\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u \right\}, \\ r_v &= a \left\{ -\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0 \right\}. \end{aligned}$$

Danach wird

$$[r_u r_v] = a^2 \{ -\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u \} \cos u,$$

und das verschwindet dann und nur dann, wenn $\cos u = 0$, also $u = \pm \frac{1}{2}\pi$ ist. Das ergibt die beiden Pole. Diese sind also singuläre Punkte des Netzes (u, v) der Breitenkreise und Meridiane. Man bemerke, daß sich die Fläche selbst auch an diesen Stellen geometrisch durchaus regulär verhält.

73. Kugel, bezogen auf die erzeugenden Geraden.

Es sei

$$(261) \quad \begin{aligned} x &= \frac{\xi + \eta}{\xi\eta + 1} \\ iy &= \frac{\xi - \eta}{\xi\eta + 1} \\ z &= \frac{\xi\eta - 1}{\xi\eta + 1}. \end{aligned}$$

Schafft man daraus ξ und η weg, so ergibt eine leichte Rechnung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Die Fläche ist also die Einheitskugel um den Ursprung. Um die geometrische Bedeutung des Netzes (ξ, η) zu bestimmen, berechne man

$$x + iy = \frac{2\xi}{\xi\eta + 1},$$

$$x - iy = \frac{2\eta}{\xi\eta + 1},$$

$$1 + z = \frac{2\xi\eta}{\xi\eta + 1},$$

$$1 - z = \frac{2}{\xi\eta + 1},$$

woraus folgt

$$1 + z = \xi(x - iy), \quad 1 - z = \frac{1}{\xi}(x + iy),$$

$$x - iy = \eta(1 - z), \quad x + iy = \frac{1}{\eta}(1 + z).$$

Für $\xi = \text{const}$ liefert die erste Zeile zwei komplexe Ebenen, die sich längs einer komplexen Geraden schneiden. Dasselbe gilt für $\eta = \text{const}$ für die zweite Zeile. Das Netz besteht also aus zwei ∞^1 Scharen komplexer Geraden. Diese Geraden sind aber Minimalgeraden. Um das zu zeigen, berechne man die Stellungsvektoren \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 der beiden komplexen Ebenen der ersten Zeile; man findet

$$\mathfrak{A}_1 = \{\xi, -i\xi, -1\},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \left\{ \frac{1}{\xi}, \frac{i}{\xi}, +1 \right\}.$$

Übrigens ist $\mathfrak{A}_1^2 = 1$, $\mathfrak{A}_2^2 = 1$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = 1$. Die Schnittgerade der beiden Ebenen ist eine Gerade der Schar $\xi = \text{const}$ und steht auf \mathfrak{A}_1 und auf \mathfrak{A}_2 senkrecht, ist also parallel zum Vektor $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2]$. Es ist aber

$$[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2] = \left\{ i \left(\frac{1}{\xi} - \xi \right), -\frac{1}{\xi} - \xi, 2i \right\},$$

daher

$$[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2]^2 = 0,$$

also ist $[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2]$ ein Minimalvektor, also die Schnittgerade eine Minimalgerade. Ebenso zeigt man, daß die Geraden $\eta = \text{const}$ Minimalgeraden sind. Auf der Kugel sind also zwei Scharen von Minimalgeraden gelegen. Sie heißen die geradlinigen Erzeugenden der Kugel.

Aus (261) ergibt sich

$$r_\xi = \frac{1}{(\xi\eta + 1)^2} \{1 - \eta^2, -i(1 + \eta^2), 2\eta\},$$

$$r_\eta = \frac{1}{(\xi\eta + 1)^2} \{1 - \xi^2, i(1 + \xi^2), 2\xi\};$$

das sind die Tangentenvektoren der ξ -Linien und der η -Linien. Man überzeugt sich leicht, daß es Minimalvektoren sind, wie es nach den vorhergehenden Überlegungen auch sein muß. Der Vektor

$$[r_\xi r_\eta] = \frac{2i}{(\xi\eta + 1)^3} \{- (\xi + \eta), i(\xi - \eta), 1 - \xi\eta\}$$

kann für kein Wertepaar ξ, η verschwinden. Daher hat das Netz (ξ, η) keinen singulären Punkt.

In welcher Beziehung steht das Netz (ξ, η) der Minimalgeraden zu dem in Nr. 72 betrachteten Netze (u, v) der Breitenkreise und Meridiane? Man setze den Kugelhalbmesser $a = 1$ und betrachte auf der Kugel den Punkt mit den geographischen Koordinaten u, v . Er habe im Netz (ξ, η) die krummlinigen Koordinaten ξ, η . Dann ist nach (260) und (261)

$$\begin{aligned} x + iy &= \cos u e^{iv} = \frac{2\xi}{\xi\eta + 1} \\ x - iy &= \cos u e^{-iv} = \frac{2\eta}{\xi\eta + 1} \\ 1 + z &= 1 + \sin u = \frac{2\xi\eta}{\xi\eta + 1} \\ 1 - z &= 1 - \sin u = \frac{2}{\xi\eta + 1}, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$(262) \quad \begin{aligned} \xi &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) e^{iv} \\ \eta &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) e^{-iv}. \end{aligned}$$

Da u, v reelle Winkel darstellen, so ersieht man, daß ξ und η konjugiert komplexe Veränderliche sind.

74. Schraubenfläche. Es sei

$$(263) \quad \mathbf{r} = \{u \cos v, u \sin v, cv\}.$$

Für jeden festen Wert von u ergibt sich nach Nr. 1 eine Schraubenlinie von der Ganghöhe $h = 2\pi c$. Für jeden festen Wert von v ist \mathbf{r} eine lineare Funktion von u , also die Kurve eine Gerade, die, weil $z = cv$ konstant ist, parallel zur xy -Ebene verläuft und für $u = 0$ die z -Achse schneidet. Die betrachtete Fläche enthält also ein Kurvennetz, das aus einer Schar von Geraden (u -Linien) und einer Schar von Schraubenlinien mit der z -Achse als gemeinsamer Achse und derselben Ganghöhe (v -Linien) besteht. Es ist

$[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = \{c \sin v, -c \cos v, u\}$
stets von Null verschieden.

Durch Wegschaffen von u und v erhält man leicht

$$z = c \operatorname{arctg} y/x$$

als Gleichung der Schraubenfläche (Abb. 22).

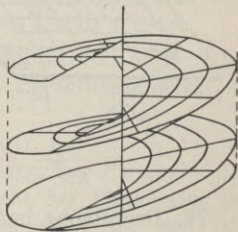


Abb. 22.

75. Ebene in schiefwinkligen cartesischen Koordinaten.

$$(264) \quad \mathbf{r} = \mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C},$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ konstante Vektoren bedeuten, von denen $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$ sein soll, stellt eine Ebene dar. Denn es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

und das ist die Gleichung einer Ebene mit dem Stellungs-

vektor $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \neq 0$. Da \mathbf{r} in bezug auf u und v linear ist, bilden die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ ein Netz von zwei Scharen gerader Linien, die je untereinander parallel sind, nämlich die u -Linien parallel zum Vektor \mathfrak{A} , die v -Linien parallel zu \mathfrak{B} . Wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{B} keine Minimalvektoren sind, so wird der Winkel ω ($0 < \omega < \pi$), unter dem sich die beiden Geradenscharen schneiden, durch

$$\cos \omega = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|}$$

bestimmt. Wegen

$$[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \neq 0$$

enthält das Netz keine singulären Punkte (Abb. 23).

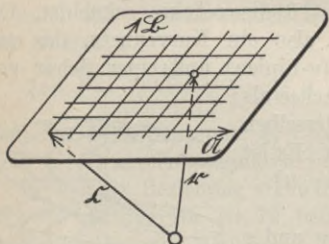


Abb. 23.



Abb. 24.

76. Drehfläche, bezogen auf Breitenkreise und Meridiane. Die z -Achse sei die Drehachse, u der Abstand eines Flächenpunktes von der Drehachse. Der durch diesen Punkt gehende Meridian, durch dessen Umdrehung die Fläche erzeugt wird, sei durch $z = f(u)$ bestimmt. (Abb. 24.) Bezeichnet man mit v den von einer bestimmten Meridianebene, der xz -Ebene, aus gerechneten Drehwinkel — der Drehungssinn ist so gewählt, daß zusammen mit der positiven Richtung der z -Achse eine Rechtsschraubung entsteht —, so hat man

$$(265) \quad \mathbf{r} = \{u \cos v, u \sin v, f(u)\}.$$

Die u -Linien ($v = \text{const}$) sind die Meridiane, die v -Linien ($u = \text{const}$) die Breitenkreise. Es ist

$$\begin{aligned} r_u &= \{ \cos v, \sin v, f'(u) \}, \\ r_v &= \{ -u \sin v, u \cos v, 0 \}, \end{aligned}$$

also

$$[r_u r_v] = u \{ -\cos v f'(u), -\sin v f'(u), 1 \}.$$

Ein singulärer Punkt des Netzes (u, v) liegt also bei $u = 0$, wo $x = y = 0$, $z = f(0)$ ist, d. h. wo die Meridiane sämtlich die Drehachse schneiden.

Für $f(u) = \sqrt{1 - u^2}$ liefert r den Ortsvektor einer Kugel vom Halbmesser 1, auf der $u = \text{const}$ die Breitenkreise, $v = \text{const}$ die Meridiane sind. Aber im Vergleich mit (260) bedeutet jetzt, wo

$$(266) \quad r = \{ u \cos v, u \sin v, \sqrt{1 - u^2} \}$$

die Kugeldarstellung durch Meridiane und Breitenkreise ist, u nicht wie dort die geographische Breite, sondern den Halbmesser des betreffenden Breitenkreises, und man geht von (266) nach (260) über, indem man $\cos u$ statt u setzt.

77. Tangentenfläche einer Raumkurve. Es sei $r = \mathfrak{R}(u)$ eine Raumkurve. Ihre Tangente im Berührungspunkte (u) hat die Vektorgleichung

$$(267) \quad r = \mathfrak{R}(u) + v \mathfrak{R}'(u),$$

wo v ein längs dieser Tangente veränderlicher Parameter ist. Die hierdurch erklärte Tangentenfläche der Raumkurve ist bereits in Nr. 57 betrachtet worden. (Vgl. Abb. 20.) Die v -Linien sind die Tangenten der Raumkurve, die u -Linien entstehen, indem man auf den Tangenten die Stücke $|v \mathfrak{R}'(u)|$ abträgt. Man hat

$$\begin{aligned} r_u &= \mathfrak{R}'(u) + v \mathfrak{R}''(u), \\ r_v &= \mathfrak{R}'(u), \end{aligned}$$

mithin

$$[r_u r_v] = v [\mathfrak{R}''(u) \mathfrak{R}'(u)].$$

Also hat das betrachtete Netz (u, v) singuläre Punkte erstens, wenn $v = 0$ ist, d. h. längs der gegebenen Raumkurve,

und zweitens längs jeder Kurventangente, für deren Berührungspunkt $[\mathfrak{R}''(u) \mathfrak{R}'(u)] = 0$ ist. Das bedeutet aber (Nr. 54), daß die Tangente dort die Kurve von höherer als erster Ordnung berührt.

78. Geradlinige Flächen („Regelflächen“¹⁾).

$$(268) \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{R}(u) + v\mathfrak{S}(u).$$

Die Kurven $u = \text{const}$ sind gerade Linien, die „Erzeugenden“ der Fläche, da \mathfrak{r} von v linear abhängt. Die Kurven $v = \text{const}$, zu denen für $v = 0$ auch die Leitkurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(u)$ gehört, queren diese Geraden. Ist $\mathfrak{S}(u)$ ein Minimalvektor, so sind die erzeugenden Geraden Minimalgeraden. Beispiele von geradlinigen Flächen sind:

$$(269) \quad \text{Zylinder: } \mathfrak{r} = \mathfrak{R}(u) + v\mathfrak{C} \quad (\mathfrak{C} = \text{const}).$$

$$(270) \quad \text{Kegel: } \mathfrak{r} = \mathfrak{R}(u) + v(\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R}(u)) \quad (\mathfrak{R}_0 = \text{const}),$$

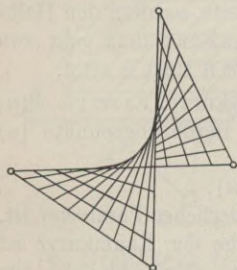


Abb. 25.

ferner die vorher betrachtete Tangentenfläche (267) einer Raumkurve (mit $\mathfrak{S}(u) = \mathfrak{R}'(u)$), die Flächen zweiten Grades, z. B. das in Abb. 25 dargestellte hyperbolische Paraboloid und die Kugel, auch die

79. Geraden Konoide.

$$(271) \quad \mathfrak{r} = \{u \cos v, u \sin v, \varphi(v)\}.$$

Auf diesen sind die Kurven $v = \text{const}$ die geradlinigen Erzeugenden, die hier die z -Achse sämtlich senkrecht schneiden. Die Kurven $u = \text{const}$ liegen auf einem Kreis-Zylinder vom Halbmesser u , dessen Achse die z -Achse ist; $z = \varphi(v)$ gibt die Kurve an, in der die erzeugenden Geraden den Zylinder durchstoßen. Ein sehr einfacher Fall ist das Plücker'sche Konoid (Abb. 26, Karte der Fläche, vgl. Nr. 80), bei dem $\varphi(v) = \sin 2v$ ist.

¹⁾ „Regelflächen“ ist eine schlechte Übersetzung von *surfaces réglées*.

Noch einfacher ist der in Nr. 74 betrachtete Fall der gewöhnlichen Schraubenfläche mit $\varphi(v) = cv$. In der Flächendarstellung (255) lautet die Gleichung des geraden Konoids

$$(272) \quad z = \varphi(\operatorname{arctg} y/x) = \psi(y/x).$$

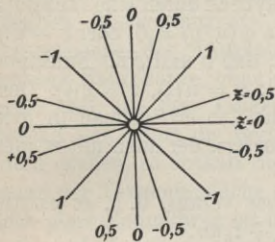


Abb. 26.

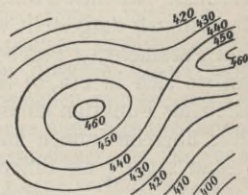


Abb. 27.

80. Höhenlinien, Karte einer Fläche. Für jeden festen Wert von z ergibt die Gleichung

$$(255) \quad z = f(x, y)$$

eine Kurve, die durch Schnitt der Fläche mit einer zur xy -Ebene parallelen Ebene in der Höhe z entsteht, wobei man diese Ebene als waagrecht betrachtet. Diese Schnittkurven heißen Höhenlinien (Isohypsen) oder Schichtlinien der Fläche. Projiziert man die Fläche mitsamt den Höhenlinien lotrecht auf die Grundebene $z = 0$, so entsteht die Karte der Fläche. Sie gibt eine vollständige und genaue Beschreibung der Fläche, wenn man sie „kotiert“, d. h. die projizierten Höhenlinien mit den zugehörigen Werten von z beziffert (Abb. 27).

Die Karte eines geraden Konoids in der in Nr. 79 gegebenen Darstellung besteht aus Geraden, die sämtlich durch den Ursprung gehen, die Karte einer Umdrehungsfläche besteht aus konzentrischen Kreisen um den Ursprung.

Selbstverständlich hängt die Karte einer Fläche von deren Lage bezüglich der Grundebene ab.

§ 2. Berührungsebene, Linienelement, Flächennormale.

81. Berührungsebene. Es sei $r = r(u, v)$ die Darstellung einer Fläche mittels der Parameter u, v . Irgendeine auf der Fläche gelegene Kurve kann analytisch durch eine funktionale Beziehung zwischen u und v , etwa $\varphi(u, v) = 0$, oder $v = v(u)$, oder dadurch dargestellt werden, daß u und v als Funktionen eines Parameters t gegeben sind: $u = u(t)$, $v = v(t)$. Denkt man sie sich in $r(u, v)$ eingeführt, so erhält man in jedem Falle r als Funktion eines Parameters, der auch mit u oder v selbst übereinstimmen kann.

Man setze r als differenzierbar voraus, d. h. es existiere

$$(273) \quad dr = r_u du + r_v dv.$$

Die beiden Vektoren auf der rechten Seite bestimmen die Richtungen der Tangenten an die u -Linie und an die v -Linie, die sich im Punkte (u, v) , der als regulär vorausgesetzt sei, kreuzen; dr dagegen ist zu einer beliebigen, durch denselben Punkt gehenden Flächenkurve tangential. Wenn sich das Verhältnis $dv : du$ ändert, so ändert sich auch die Richtung

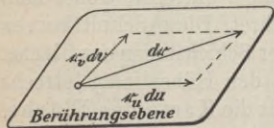


Abb. 28.

von dr . Aber in jedem Falle besagt die Gleichung (273), daß dr mit $r_u du$ und $r_v dv$ komplanar ist. Sämtliche durch einen Flächenpunkt hindurchgehende, differenzierbare Kurven der Fläche haben also Tangenten, die in einer

Ebene, der Berührungsebene der Fläche liegen (Abb. 28).

Ist \bar{r} der Ortsvektor eines beliebigen ihrer Punkte, r der Radiusvektor nach dem Berührungspunkte, so ist die Gleichung der Berührungsebene

$$(274) \quad (\bar{r} - r) [r_u r_v] = 0,$$

denn $[r_u r_v]$ steht senkrecht auf ihr.

Nach Nr. 77 ist zum Beispiel die Berührungsebene in einem regulären Punkte der Tangentenfläche einer Raum-

kurve $r = \Re(u) + v\Re'(u)$ gegeben durch
 $(\bar{r} - r) [\Re'(u)\Re''(u)] = 0$

oder

$$\bar{r}\Re'(u)\Re''(u) = \Re(u)\Re'(u)\Re''(u).$$

Da diese Gleichung von v unabhängig ist, so haben alle Punkte derselben Kurventangente $u = \text{const}$ auch dieselbe Berührungsebene der Tangentenfläche. Denkt man sich die gegebene Raumkurve, ohne sie zu dehnen, irgendwie so verbogen, daß alle ihre Tangenten in dieselbe Ebene fallen, während sich dabei die Berührungsebenen nur um die Tangenten drehen, so enthält diese Ebene auch alle Berührungsebenen der Tangentenfläche. Man sagt daher, die Tangentenfläche einer Raumkurve ist in eine Ebene verbiegbare, oder sie ist eine auf eine Ebene abwickelbare Fläche¹⁾. Man überzeugt sich leicht, daß diese Eigenschaft den in Nr. 78 besprochenen Flächen im allgemeinen nicht zukommt, wohl aber den Zylindern und Kegeln. Vgl. Nr. 98.

82. Linienelement. Nach Nr. 8 ist dr der Vektor des Linienelementes und $ds = \sqrt{dr^2}$ das Linienelement der betrachteten Flächenkurve, woraus man ihre Bogenlänge durch eine Quadratur ermitteln kann. Aus (273) ergibt sich

$$dr^2 = ds^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Nach Gauß setzt man

$$(275) \quad r_u^2 = E, \quad r_u r_v = F, \quad r_v^2 = G.$$

Damit wird

$$(276) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Diese quadratische Differentialform heißt die erste Grundform der Fläche, ihre Beiwerte E, F, G , die Gaußschen Fundamentalgrößen erster Ordnung. Wegen

$$(277) \quad [r_u r_v]^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = EG - F^2 = T^2$$

ist die erste Grundform für reelle Flächen positiv definit, wenn unter T die positive Quadratwurzel $\sqrt{EG - F^2}$ verstanden wird. Im Komplexen soll unter T ein beliebiger, aber

¹⁾ Von manchen heute „Torse“ genannt.

bestimmter der beiden Werte von $\sqrt{EG - F^2}$ verstanden werden. Außer an singulären Punkten des Netzes, wo $[r_u r_v] = 0$ ist, kann T nur verschwinden, wenn $[r_u r_v]$ ein Minimalvektor, also die Berührungsebene eine Minimalebene ist. Solche Punkte, für die $[r_u r_v]^2 = 0$ oder $rT = 0$ ist, aber $[r_u r_v] \neq 0$, heißen Minimalpunkte der Fläche. Da $r_u \neq 0$, $r_v \neq 0$ ist, wenn anders die Fläche sich auf eine Kurve oder einen Punkt zusammenzieht, so bedeutet $E = 0$, daß die u -Linien, und $G = 0$, daß die v -Linien eine Schar von Minimalkurven bilden.

Damit das Netz (u, v) aus zwei Scharen von Minimalkurven bestehe, ist also notwendig und hinreichend, daß zugleich

$$E = 0 \quad \text{und} \quad G = 0$$

ist.

Es sei nun $E \neq 0$, $G \neq 0$ und $\omega = \sphericalangle(r_u, r_v)$, so hat man

$$(278) \quad \cos \omega = F : \sqrt{EG}, \quad \sin \omega = T : \sqrt{EG};$$

ω heißt der Maschenwinkel des Netzes ($0 < \omega < \pi$). Ist

$$F = 0,$$

so schneiden sich die Netzlinien senkrecht (orthogonales Netz). Ein Netz aus zwei Scharen von Minimalkurven kann nicht orthogonal sein. Denn außer $E = 0$, $G = 0$ kann nicht noch $F = 0$ sein.

83. Beispiele. Ebene im schiefwinkligen cartesischen Koordinaten (vgl. Nr. 75):

$$r = \mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}$$

mit festen Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , $\mathfrak{A} \nparallel \mathfrak{B}$. Man findet

$$(279) \quad dr^2 = ds^2 = \mathfrak{A}^2 du^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} du dv + \mathfrak{B}^2 dv^2.$$

Das Netz ist rechtwinklig für $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$. Setzt man $|\mathfrak{A}| = A$, $|\mathfrak{B}| = B$, und $\omega = \sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, so wird

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AB \cos \omega du dv + B^2 dv^2.$$

Drehfläche (vgl. Nr. 76): Man findet aus (265)

$$E = r_u^2 = 1 + f'(u)^2,$$

$$F = r_u r_v = 0,$$

$$G = r_v^2 = u^2,$$

also

$$(280) \quad ds^2 = (1 + f'(u)^2) du^2 + u^2 dv^2,$$

woraus zu entnehmen ist, daß die u -Linien und die v -Linien, d. h. die Meridiane und die Breitenkreise sich überall senkrecht schneiden.

Gerade Konoide (vgl. Nr. 79). Es ist nach (271)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \{\cos v, \sin v, 0\} \\ \mathbf{r}_v &= \{-u \sin v, u \cos v, \varphi'(v)\}, \end{aligned}$$

daher

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + \varphi'(v)^2,$$

also

$$(281) \quad ds^2 = du^2 + (u^2 + \varphi'(v)^2) dv^2.$$

Die Netzlinsen schneiden sich senkrecht. Bei der Schraubenfläche ist $\varphi(v) = cv$, $\varphi'(v) = c$, also

$$(282) \quad ds^2 = du^2 + (u^2 + c^2) dv^2.$$

Es sei $z = f(x, y)$ die Darstellung der Fläche, oder $\mathbf{r} = \{x, y, f(x, y)\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \{1, 0, p\} \\ \mathbf{r}_y &= \{0, 1, q\}, \end{aligned}$$

wenn $p = \partial f / \partial x$, $q = \partial f / \partial y$ gesetzt wird. Daher wird

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_x^2 = 1 + p^2 \\ F &= \mathbf{r}_x \mathbf{r}_y = pq \\ G &= \mathbf{r}_y^2 = 1 + q^2 \end{aligned}$$

und

$$(283) \quad ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2.$$

Kugel, bezogen auf ihre erzeugenden Geraden (vgl. Nr. 73). Aus den dort berechneten Werten von \mathbf{r}_ξ und \mathbf{r}_η findet man

$$E = 0, \quad F = \frac{2}{(\xi\eta + 1)^2}, \quad G = 0,$$

also

$$(284) \quad ds^2 = \frac{4d\xi d\eta}{(\xi\eta + 1)^2},$$

woraus ersichtlich ist, daß (ξ, η) ein Netz von Minimalkurven darstellt.

84. Flächennormale. Das Lot auf der Berührungsebene in ihrem Berührungspunkte heißt die Normale der Fläche. Man verbindet damit einen bestimmten Richtungssinn, der durch den Vektor $[\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]$, den Stellungsvektor der Berührungsebene (274) bestimmt wird. Der zugehörige Einheitsvektor

$$(285) \quad \mathfrak{N} = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]^0 = \frac{1}{T} [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v],$$

wegen (277), heißt der Normalenvektor der Fläche, seine Komponenten sind die Richtungskosinus der Flächennormale. An Minimalpunkten der Fläche (Nr. 82) gibt es keinen Vektor \mathfrak{N} .

Wenn man u mit v vertauscht, oder u mit $-u$ und v mit $-v$, wodurch der Drehungssinn des Winkels von der positiven Richtung der u -Linien nach der der v -Linien verändert wird, so verändert der Vektor \mathfrak{N} seinen Richtungssinn. In hinreichend naher Umgebung eines regulären Flächenpunktes hat also jedes Flächenstück zwei Seiten, die durch die Vektoren \mathfrak{N} und $-\mathfrak{N}$ unterschieden werden, und bei jedem berandeten hinreichend kleinen Flächenstück kann man von der einen auf die andere Seite nicht anders gelangen, als daß man den

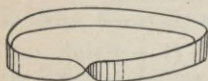


Abb. 29.

Rand überschreitet. Es gibt aber Flächen, bei denen es möglich ist, bei hinreichend weiter Erstreckung auf der Fläche von der einen auf die andere Seite zu gelangen, ohne den Rand zu überschreiten. Ein Beispiel ist das Möbiussche Band (Abb. 29).

Wegen $\mathfrak{N}^2 = 1$ sind die Komponenten von \mathfrak{N} die Richtungskosinusse der Flächennormalen:

$$(286) \quad \mathfrak{N} = \{X, Y, Z\} = \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{1}{T} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{1}{T} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\}.$$

Beispiel: Bei der Schraubenfläche (Nr. 74) ist

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + c^2, \quad T = \sqrt{u^2 + c^2},$$

$$(287) \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}} \{c \sin v, -c \cos v, u\}.$$

85. Oberflächenelement. Die beiden Vektoren $r_u du$ und $r_v dv$, die die u -Linien und die v -Linien in ihren Schnittpunkten berühren, bestimmen den Vektor

$$(288) \quad \overline{do} = [r_u r_v] du dv = \mathfrak{N} T du dv,$$

der der Vektor des Oberflächenelements genannt wird, weil sein Betrag

$$(289) \quad |\overline{do}| = do = T du dv = \sqrt{EG} \sin \omega du dv$$

zur Bestimmung des Flächeninhalts

$$O = \iint T du dv$$

eines berandeten Flächenstückes dient, wobei wie in Nr. 82 unter ω der Maschenwinkel $\sphericalangle (r_u, r_v)$ des Netzes verstanden ist.

86. Begleitendes Dreibein der Fläche. Die drei normierten Vektoren

$$(290) \quad t_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \quad t_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}, \quad \mathfrak{N}$$

bilden ein Dreibein, dessen eine Seitenebene die Fläche berührt, während die dritte Kante die Flächennormale bestimmt. Da

$$(291) \quad t_1 t_2 \mathfrak{N} = \frac{r_u r_v \mathfrak{N}}{\sqrt{EG}} = \frac{\mathfrak{N}^2 T}{\sqrt{EG}} = \sin \omega$$

von Null verschieden ist, bilden t_1, t_2, \mathfrak{N} eine Basis, und jeder Vektor \mathfrak{x} läßt sich in der Form

$$(292) \quad \mathfrak{x} = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma \mathfrak{N}$$

oder auch

$$(293) \quad \mathfrak{x} = \lambda r_u + \mu r_v + \nu \mathfrak{N}$$

darstellen, vorausgesetzt natürlich, daß weder die u -Linien

noch die v -Linien Minimalkurven sind, denn es muß $E \neq 0$, $G \neq 0$ sein.

87. **Zwei Formeln für $[r_u \mathfrak{N}]$ und $[r_v \mathfrak{N}]$.** Wir wollen als Beispiel zwei in der Flächentheorie oft benutzte Formeln ableiten. Nach dem eben Bemerkten hat man

$$[r_u \mathfrak{N}] = \lambda r_u + \mu r_v + \nu \mathfrak{N},$$

daher wird

$$\begin{aligned} r_u r_u \mathfrak{N} &= 0 = \lambda E + \mu F \\ r_v r_u \mathfrak{N} &= -\mathfrak{N}^2 T = -T = \lambda F + \mu G \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{N} r_u \mathfrak{N} = 0 = \nu,$$

mithin

$$\lambda = \frac{F}{T}, \quad \mu = -\frac{E}{T}, \quad \nu = 0,$$

also

$$(294) \quad [r_u \mathfrak{N}] = \frac{F r_u - E r_v}{T}$$

und entsprechend

$$(295) \quad [r_v \mathfrak{N}] = \frac{G r_u - F r_v}{T}.$$

Man bemerke, daß die beiden Formeln auseinander durch Vertauschung von u mit v hervorgehen, denn dabei gehen

$$(296) \quad \begin{array}{l} E, F, G, T, \mathfrak{N} \\ \text{in } G, F, E, T, -\mathfrak{N} \end{array}$$

über, was zu merken auch sonst ganz nützlich ist.

§ 3. Kurven auf einer krummen Fläche; Schnittwinkel; Krümmungstheorie.

88. **Kurven auf einer krummen Fläche. Schnittwinkel.** Sind die krummlinigen Koordinaten u, v auf einer Fläche (F) Funktionen eines Parameters t , oder besteht zwischen ihnen eine funktionale Beziehung $\varphi(u, v) = 0$, so wird dadurch eine Kurve (C) auf der Fläche (F) bestimmt. (Vgl. Nr. 81.) Ist

$$d\mathbf{x} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

eine diese Kurve berührender Vektor, so hat man

$$d\mathbf{x} = \left(\mathbf{r}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dt} \right) dt,$$

oder wegen

$$\varphi_u du + \varphi_v dv = 0$$

und also

$$(297) \quad du = \lambda \varphi_v, \quad dv = -\lambda \varphi_u$$

auch

$$(298) \quad d\mathbf{x} = \lambda (\mathbf{r}_u \varphi_v - \mathbf{r}_v \varphi_u) = \lambda \frac{\partial (\mathbf{r}, \varphi)}{\partial (u, v)}.$$

Für eine zweite Kurve (Γ) auf (F) ergebe sich entsprechend

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v.$$

Zur Bestimmung des Schnittwinkels σ der Kurven (C) und (Γ) hat man zunächst

$$(299) \quad d\mathbf{x} \delta \mathbf{x} = \cos \sigma \cdot |d\mathbf{x}| \cdot |\delta \mathbf{x}| = \cos \sigma \cdot ds \delta s.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \delta \mathbf{x} &= (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) (\mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v) \\ &= E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^2 &= ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ \delta \mathbf{x}^2 &= \delta s^2 = E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2; \end{aligned}$$

daher wird

$$\begin{aligned} (300) \quad \cos \sigma &= \frac{d\mathbf{x} \delta \mathbf{x}}{ds \delta s} \\ &= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \end{aligned}$$

Ebenso kann man aus dem Vektorprodukt $[d\mathbf{x} \delta \mathbf{x}]$ den $\sin \sigma$ entnehmen und erhält

$$\begin{aligned} (301) \quad \sin \sigma &= \frac{|[d\mathbf{x} \delta \mathbf{x}]|}{ds \delta s} \\ &= \frac{T (du \delta v - dv \delta u)}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}, \end{aligned}$$

wobei der Winkel σ in demselben Sinne zu messen ist wie $\omega = \sphericalangle(u, v)$. Sind $\varphi(u, v) = 0$ und $\psi(u, v) = 0$ die Gleichungen der beiden Kurven (C) und (I') in bezug auf die krummlinigen Koordinaten des Netzes (u, v) , so setzt man wie in (297)

$$(302) \quad \begin{aligned} du &= \lambda \varphi_v, & dv &= -\lambda \varphi_u \\ \delta u &= \mu \psi_v, & \delta v &= -\mu \psi_u, \end{aligned}$$

und erhält aus (300) und (301)

$$(303) \quad \cos \sigma = \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2} \sqrt{E\psi_v^2 - 2F\psi_u\psi_v + G\psi_u^2}},$$

$$(304) \quad \sin \sigma = \frac{T(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2} \sqrt{E\psi_v^2 - 2F\psi_u\psi_v + G\psi_u^2}}.$$

Da in (303) und (304) nur die Ableitungen von φ und ψ vorkommen, gelten diese Formeln auch für die Kurvenscharen $\varphi(u, v) = \text{const}$, $\psi(u, v) = \text{const}$. Insbesondere ist die Bedingung dafür, daß die beiden Kurvenscharen

$$\varphi(u, v) = \text{const}, \quad \psi(u, v) = \text{const}$$

sich senkrecht schneiden:

$$(305) \quad E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_u = 0.$$

89. Beispiel: Loxodromen. Eine Loxodrome auf einer Drehfläche ist eine Kurve, die die Meridiane unter einem konstanten Winkel schneidet. Längs der Meridiane $v = \text{const}$ hat man $\delta r = r_u \delta u$, $\delta v = 0$, somit nach (300) und (280)

$$\cos \sigma = \frac{E du \delta u}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2}} = \frac{\sqrt{1 + f'(u)^2} du}{\sqrt{(1 + f'(u)^2) du^2 + u^2 dv^2}}$$

oder

$$\text{tg}^2 \sigma \frac{1 + f'(u)^2}{u^2} du^2 = dv^2$$

oder wegen der Konstanz von σ

$$(306) \quad v - v_0 = \pm \text{tg} \sigma \int \frac{\sqrt{1 + f'(u)^2}}{u} du,$$

wo v_0 eine Integrationskonstante bedeutet. Es gibt also zweimal ∞^1 Loxodromen, die sich durch eine Quadratur bestimmen lassen. Für die Kugel hat man (vgl. Nr. 76)

$$f(u) = \sqrt{1 - u^2}.$$

Damit wird

$$v - v_0 = \pm \operatorname{tg} \sigma \int \frac{du}{u \sqrt{1 - u^2}} = \pm \operatorname{tg} \sigma \cdot \log \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - u^2}}{1 + \sqrt{1 - u^2}}}$$

d. h.

$$(307) \quad v - v_0 = \pm \operatorname{tg} \sigma \cdot \log \{(1 - \sqrt{1 - u^2}) : u\}.$$

Das Ergebnis wird noch einfacher, wenn man statt u , des Halbmessers des Breitenkreises, den Winkel der geographischen Breite selbst benutzt. Wie in Nr. 76 bemerkt, braucht man nur $\cos u$ statt u zu setzen. Dann werden die Loxodromen

$$(308) \quad v - v_0 = \pm \operatorname{tg} \sigma \cdot \log \frac{1 - \sin u}{\cos u} = \mp \operatorname{tg} \sigma \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right).$$

90. Schichtlinien und Fallinien. Indem man die xy -Ebene $z = 0$ als Grundebene auffaßt, kann man eine Fläche $z = f(x, y)$, falls nur $f(x, y)$ eine eindeutige Funktion ist, als eine Darstellung eines Geländes betrachten. Die Kurven $z = \text{const}$ sind darauf die Schichtlinien oder Höhenlinien, ihre Differentialgleichung ist — mit den Bezeichnungen in Nr. 83 —

$$(309) \quad dz = p dx + q dy = 0.$$

Die Kurven, die die Schichtlinien $z = \text{const}$ senkrecht queren, heißen Fallinien der Geländefläche. Um ihre Gleichung $w(x, y) = \text{const}$ zu bestimmen, benutze man die Formel (305) mit $u = x$, $v = y$, $E = 1 + p^2$, $F = pq$, $G = 1 + q^2$, $\varphi(u, v) = z(x, y)$, $\psi(u, v) = w(x, y)$, so wird daraus einfach

$$qw_y + pw_x = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist erfüllt, wenn man

$$\partial w_x = q, \quad \partial w_y = -p$$

setzt, wo $\vartheta = \vartheta(x, y)$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Damit wird

$$(310) \quad \vartheta dw = q dx - p dy = 0$$

die gesuchte Differentialgleichung.

Betrachtet man die Projektionen der Schicht- und Falllinien auf die Grundebene, wodurch die „Karte“ der Fläche entsteht, so zeigt ein Vergleich der beiden Differentialgleichungen (309) und (310), daß auch diese Projektionen sich senkrecht schneiden.

Man nehme noch die Schichtlinien und die Falllinien als Netzkurven eines krummlinigen Koordinatennetzes auf der Fläche. Durch Quadrieren und Addieren folgt aus (309) und (310)

$$dz^2 + \vartheta^2 dw^2 = (p^2 + q^2) (dx^2 + dy^2)$$

oder für

$$p^2 + q^2 = \mu^2:$$

$$(311) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = \frac{1 + \mu^2}{\mu^2} dz^2 + \frac{\vartheta^2}{\mu^2} dw^2.$$

Um noch die geometrische Bedeutung von μ zu ermitteln, bezeichne man mit ε den Winkel, den die Falllinie durch einen

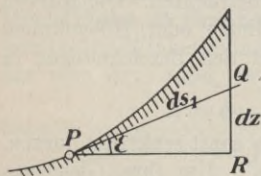


Abb. 30.

$PR = dz/\mu$; mithin ist

$$\operatorname{tg} \varepsilon = QR : PR = \mu.$$

Man nennt daher μ das Gefälle der Fläche oder ihr Einfallen (aus der Bergmannssprache).

Punkt P mit der durch P gehenden Schichtebene $z = \text{const}$ bildet. Das Linienelement PQ (Abb. 30) dieser Falllinie ist nach (311):

$$ds_1 = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu} dz,$$

seine Projektion auf die Schichtebene, weil ja $RQ = dz$ ist, daher

91. Tangentialnormale einer Flächenkurve. Es sei (C) eine auf der Fläche (F) gelegene Raumkurve (keine Minimalkurve), t, n, b das begleitende Dreibein von (C) , und \mathfrak{N} der Vektor der Flächennormale von (F) . Der Vektor

$$(312) \quad \mathfrak{T} = [t\mathfrak{N}]$$

liegt sowohl in der Normalebene der Kurve, da er auf t senkrecht steht, als auch in der Berührungsebene der Fläche, da er auf \mathfrak{N} senkrecht steht. Die durch \mathfrak{T} bestimmte gerichtete Gerade heißt daher die Tangentialnormale der Flächenkurve¹⁾. Aus (312) folgt

$$\mathfrak{T}^2 = t^2\mathfrak{N}^2 - (t\mathfrak{N})^2 = 1.$$

Die drei Einheitsvektoren $t, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}$ bilden also ein orthogonales und normiertes Dreibein, wobei

$$t\mathfrak{N}\mathfrak{T} = +1$$

ist. Dasselbe ist der Fall mit dem Dreibein $t, \mathfrak{T}, -\mathfrak{N}$.

In der Normalebene von (C) liegen die Vektoren n, b, \mathfrak{N} und \mathfrak{T} ; sie sind also komplanar, und wenn $\varphi = \sphericalangle(n, \mathfrak{N})$ ist, so hat man

$$(313) \quad \begin{aligned} n &= \mathfrak{N} \cos \varphi + \mathfrak{T} \sin \varphi, \\ b &= \mathfrak{T} \cos \varphi - \mathfrak{N} \sin \varphi, \end{aligned}$$

woraus

$$(314) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N} &= n \cos \varphi - b \sin \varphi, \\ \mathfrak{T} &= n \sin \varphi + b \cos \varphi \end{aligned}$$

folgt.

92. Normalkrümmung und Tangentialkrümmung, Normalwindung und Tangentialwindung. Wir betrachten nun unter allen durch denselben Flächenpunkt P gehenden Flächenkurven mit derselben Tangente t , also auch derselben Tangentialnormale \mathfrak{T} , diejenige einfach unendliche Schar, deren Hauptnormalen und Binormalen durch die Formeln (313) gegeben sind. Es sei s der Parameter der Bogenlänge dieser Kurven. Für $\varphi = 0$ wird n in \mathfrak{N} , b in \mathfrak{T} übergehen, und für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ebenso n in \mathfrak{T} und b in $-\mathfrak{N}$.

¹⁾ Diese treffende Bezeichnung stammt von J. Knoblauch her.

Nun sind Krümmung und Windung durch die Formeln

$$k = n \frac{dt}{ds}$$

$$\varkappa = -n \frac{db}{ds}$$

gegeben, oder nach (313) durch

$$(315) \quad k = \mathfrak{N} \frac{dt}{ds} \cos \varphi + \mathfrak{T} \frac{dt}{ds} \sin \varphi$$

und

$$\varkappa = -(\mathfrak{N} \cos \varphi + \mathfrak{T} \sin \varphi) \left(\frac{d\mathfrak{T}}{ds} \cos \varphi - \frac{d\mathfrak{N}}{ds} \sin \varphi - (\mathfrak{T} \sin \varphi + \mathfrak{N} \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \right).$$

Bei der Ausmultiplizierung der rechten Seite von \varkappa beachte man, daß

$$\mathfrak{N}^2 = 1, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{N} = 0, \quad \mathfrak{T}^2 = 1,$$

also

$$\mathfrak{N} \frac{d\mathfrak{N}}{ds} = 0, \quad \mathfrak{T} \frac{d\mathfrak{N}}{ds} = -\mathfrak{N} \frac{d\mathfrak{T}}{ds}, \quad \mathfrak{T} \frac{d\mathfrak{T}}{ds} = 0$$

ist, so erhält man

$$(316) \quad \varkappa = \mathfrak{T} \frac{d\mathfrak{N}}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

In den Sonderfällen $\varphi = 0$, wo $t, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, wo $t, \mathfrak{T}, -\mathfrak{N}$ die begleitenden Dreibeine der beiden Kurven sind, entstehen aus k und \varkappa

$$(317) \quad k' = \mathfrak{N} \frac{dt}{ds}, \quad \varkappa' = -\mathfrak{N} \frac{d\mathfrak{T}}{ds}$$

und

$$(318) \quad k'' = \mathfrak{T} \frac{dt}{ds}, \quad \varkappa'' = +\mathfrak{T} \frac{d\mathfrak{N}}{ds}.$$

k' heiße die Normalkrümmung von (C) , \varkappa' ihre Normalwindung; k'' heiße ihre Tangentialkrümmung, \varkappa'' ihre Tangentialwindung. Damit wird aus (315) und (316)

$$(319) \quad k = k' \cos \varphi + k'' \sin \varphi,$$

$$(320) \quad \kappa = \kappa' + \frac{d\varphi}{ds} = \kappa'' + \frac{d\varphi}{ds},$$

woraus

$$(321) \quad \kappa' = \kappa''$$

folgt, d. h. die Normalwindung und Tangentialwindung stimmen überein. Der gemeinsame Wert werde mit γ bezeichnet und aus einem später einzusehenden Grunde geodätische Windung genannt.

Aus (317) und (318) folgt wegen $dt/ds = k\eta$

$$(322) \quad k' = k \cos \varphi = n$$

$$(323) \quad k'' = k \sin \varphi = g.$$

$n = k'$ heißt die Normalkrümmung von (C) , $g = k''$ statt Tangentialkrümmung auch geodätische Krümmung. Man hat also schließlich

$$(324) \quad k = n \cos \varphi + g \sin \varphi$$

$$(325) \quad k^2 = n^2 + g^2$$

$$(326) \quad \gamma = \kappa - \frac{d\varphi}{ds}.$$

93. Satz von Meusnier (1776). Die Formel

$$(327) \quad n = k \cos \varphi$$

bildet den Inhalt des Meusnierschen Satzes. Man kann ihn in verschiedener Art geometrisch deuten, zum Beispiel so:

Man betrachte alle Flächenkurven mit derselben Tangente t und demselben Berührungspunkte P und trage von P aus auf der jeweiligen Hauptnormalen η die Strecke

$$k = PQ_\varphi$$

ab, wobei der Zeiger φ den Winkel andeuten soll, den die Hauptnormale η mit der festen Flächennormalen \mathfrak{N} bildet. Dann ist der geometrische Ort der Punkte Q_φ eine zur Tangentialnormalen $\mathfrak{T} = [t\mathfrak{N}]$ parallele Gerade; denn die Projektionen aller Punkte Q_φ auf die die Flächennormale ent-

haltende Normalebene fallen alle in den einen Punkt Q_0 zusammen, für den $PQ_0 = n$ ist (Abb. 31).

Eine andere Deutung des Meusnierschen Satzes ist folgende: Man trage von P aus auf der jeweiligen Hauptnormalen n den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{1}{k} = PM_\varphi$$

ab und errichte im Krümmungsmittelpunkte M_φ in der Normalebene auf n das Lot. Dann gehen alle diese Lote durch

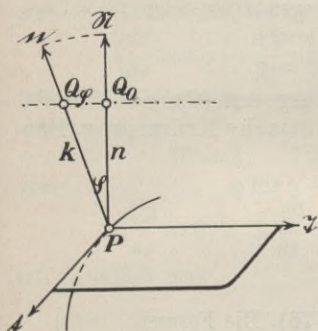


Abb. 31.

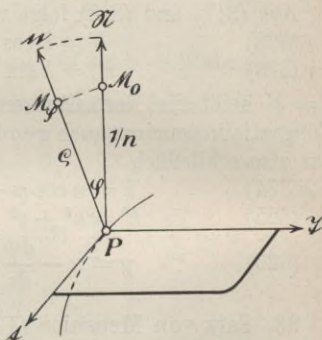


Abb. 32.

denselben Punkt M_0 der Flächennormalen, für den $PM_0 = 1/n$ ist. Das ist unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreieck $PM_\varphi M_0$ ersichtlich (Abb. 32).

94. Normalschnitte und Meusnierscher Satz. Eine dritte, und zwar die ursprüngliche Fassung des Meusnierschen Satzes erhält man durch die Bemerkung, daß die Krümmung k denselben Wert behält für alle auf der Fläche gelegenen Kurven mit derselben Tangente t und derselben Schmiegungeebene in P . Diese Kurven haben ja auch dieselbe Hauptnormale n , also ist auch der Winkel $\varphi = \sphericalangle(n, \mathfrak{N})$ für sie derselbe. Aber

nach der ersten Formel (317), oder wegen $t\mathfrak{N} = 0$,

$$n = \mathfrak{N} \frac{dt}{ds} = -t \frac{d\mathfrak{N}}{ds},$$

hängt der Wert von n nur von der Kurventangente und von der Änderung der Flächennormale längs dieser ab, ist also ebenfalls für alle betrachteten Kurven derselbe. Aus (322) folgt also für $k = n : \cos \varphi$ die gleiche Eigenschaft, wie behauptet.

Daher hat auch die ebene Kurve, die durch die Schmiegungeebene einer beliebigen doppelt gekrümmten Flächenkurve (C) aus der Fläche ausgeschnitten wird, dieselbe Krümmung wie die Kurve (C).

Eine durch eine Ebene aus einer Fläche ausgeschnittene Kurve heißt im allgemeinen ein „schiefer Schnitt“, und wenn die Ebene die Flächennormale \mathfrak{N} enthält, ein Normalschnitt der Fläche. Danach heißt der Meusniersche Satz auch so:

Der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes in einem Punkte P der Fläche längs der Tangente t hat zur Projektion den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes längs derselben Tangente t durch denselben Punkt P .

95. Die Fälle $n = 0$, $g = 0$, $\gamma = 0$. Eine Flächenkurve, für die in jedem ihrer Punkte die Normalkrümmung $n = 0$ ist, heißt eine Asymptotenlinie der Fläche. Nach (322) muß dann $k = 0$ oder $\cos \varphi = 0$ sein, d. h. die Kurve ist eine Gerade, oder ihre Hauptnormale steht auf der Flächennormale stets senkrecht, ihre Binormale fällt stets mit der Flächennormale zusammen, ihre Schmiegungeebene berührt stets die Fläche.

Wenn die geodätische Krümmung längs einer Flächenkurve verschwindet, $g = 0$, so heißt sie eine geodätische Linie der Fläche. Nach (323) muß dann $k = 0$ oder $\sin \varphi = 0$ sein, d. h. die Kurve ist eine gerade Linie, oder ihre Hauptnormale fällt stets mit der Flächennormale zusammen, ihre

Schmiegungebene enthält stets die Flächennormale. Wenn daher ein ebener Schnitt überall ein Normalschnitt der Fläche ist, so ist seine Schnittkurve eine geodätische Linie der Fläche. Beispiele: Die Meridianschnitte einer Drehfläche, die Großkreise einer Kugel.

Wenn längs der Flächenkurve die geodätische Windung $\varkappa = 0$ ist, heißt die Kurve eine Krümmungslinie. Längs einer Krümmungslinie ist wegen (326)

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Zum Beispiel sind die Breitenkreise einer Drehfläche Krümmungslinien. Denn nach Nr. 76 ist

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(u)^2}} \{ -\cos v f'(u), -\sin v f'(u), 1 \}.$$

Längs eines jeden Breitenkreises $u = \text{const}$ bildet also die Flächennormale mit der Ebene des Breitenkreises einen konstanten Winkel φ , für den

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

ist. Also ist $d\varphi/ds = 0$. Andererseits ist, weil die Breitenkreise ebene Kurven sind, auch $\varkappa = 0$. Die obige Bedingung ist also erfüllt. Man zeigt leicht, daß auch die Meridiane Krümmungslinien sind.

Die flächentheoretische Bedeutung der in dieser Nummer genannten Kurven wird erst später hervortreten.

§ 4. Bemerkungen über die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander.

96. Übereinstimmung der Linienelemente. Zwei Flächen heißen aufeinander abwickelbar, wenn sich zwischen ihren Punkten eine solche Beziehung aufstellen läßt, daß die Längen entsprechender Kurven auf beiden Flächen gleich groß sind.

Sind $r_1 = r_1(u, v)$ und $r_2 = r_2(\alpha, \beta)$ die beiden Flächen, bezogen auf die Parameternetze (u, v) und (α, β) , so soll es also möglich sein, eine solche Beziehung

$$\alpha = \alpha(u, v), \quad \beta = \beta(u, v)$$

punktweise herzustellen, daß je zwei entsprechende Kurvenstücke auf beiden Flächen dieselbe Länge haben. Diese Übereinstimmung muß daher auch für die Linienelemente gelten.

Ist also

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2, \\ ds_2^2 &= E_2 d\alpha^2 + 2F_2 d\alpha d\beta + G_2 d\beta^2, \end{aligned}$$

wo E_1, F_1, G_1 Funktionen von u, v dagegen E_2, F_2, G_2 solche von α, β sind, so muß es möglich sein, $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ so anzugeben, daß

$$ds_1^2 = ds_2^2$$

wird.

97. Beispiel: Katenoid und Schraubenfläche. Unter dem Katenoid versteht man die Umdrehungsfläche einer Kettenlinie

$$y = c \operatorname{Co}f \frac{x}{c}$$

um ihre Achse $y = 0$. In Abänderung der Bezeichnung werde die Drehachse als z -Achse genommen, mit α der Abstand eines Punktes der Kettenlinie von der Achse, und mit β der Drehwinkel bezeichnet. Dann hat man

$$\alpha = c \operatorname{Co}f \frac{z}{c},$$

also

$$z = c \operatorname{Ar} \operatorname{Co}f \frac{\alpha}{c} = c \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - c^2}}{c} = f(\alpha),$$

und das Quadrat des Linienelementes ergibt sich nach (280) zu

$$ds_2^2 = (1 + f'(\alpha)^2) d\alpha^2 + \alpha^2 d\beta^2$$

oder

$$ds_2^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - c^2} d\alpha^2 + \alpha^2 d\beta^2.$$

Nun setze man

$$\alpha = \sqrt{u^2 + c^2}, \quad \beta = v,$$

so wird $\alpha d\alpha = u du$, mithin

$$ds_2^2 = du^2 + (u^2 + c^2) dv^2.$$

Nach (282) ist aber

$$ds_1^2 = du^2 + (u^2 + c^2) dv^2$$

das Linienelementquadrat der Schraubenfläche mit der Ganghöhe $2\pi c$, bezogen auf das Netz der Schraubenlinien und der geradlinigen Erzeugenden.

Katenoid und Schraubenfläche sind also in der Weise aufeinander abwickelbar, daß dabei die Breitenkreise des Katenoids in die Schraubenlinien der Schraubenfläche und die Kettenlinien in die erzeugenden Geraden übergehen.

Wenn man sich ein Katenoid aus dünnem, biegsamem, unausdehnbarem Blech herstellt und es längs eines Meridians aufschneidet, so kann man es so verbiegen, daß daraus ein Gang einer Schraubenfläche entsteht. Zwei aufeinander abwickelbare Flächen nennt man daher auch ineinander verbiegbar.

98. Tangentenfläche einer Raumkurve auf die Ebene abwickelbar. Nach Nr. 77 ist

$$\mathbf{r} = \mathfrak{R}(u) + v\mathfrak{R}'(u)$$

die Tangentenfläche der Raumkurve $\mathbf{r} = \mathfrak{R}(u)$, wo u ein beliebiger längs dieser Raumkurve veränderlicher Parameter ist. Wenn die Raumkurve keine Minimalkurve erster Art ist, kann man u als Parameter ihrer Bogenlänge nehmen, also

$$\mathfrak{R}'(u)^2 = 1, \quad \mathfrak{R}'(u)\mathfrak{R}''(u) = 0$$

setzen. Dann wird

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \mathfrak{R}'(u) + v\mathfrak{R}''(u), \\ \mathbf{r}_v &= \mathfrak{R}'(u), \end{aligned}$$

mithin

$$E = 1 + v^2 \mathfrak{R}''(u)^2, \quad F = 1, \quad G = 1,$$

$$ds^2 = (1 + v^2 \mathfrak{R}''(u)^2) du^2 + 2 du dv + dv^2.$$

Übrigens ist, da u die Bogenlänge bedeutet,

$$\mathfrak{R}''(u)^2 = k^2$$

das Krümmungsquadrat der Raumkurve. Damit wird

$$ds^2 = d(u + v)^2 + v^2 k^2 du^2.$$

Um nun zu zeigen, daß dieses Linienelementquadrat auf eine solche Form gebracht werden kann, die einer Ebene zukommt, setze man

$$\int_0^u k(u) du = l(u)$$

und führe sodann zwei neue reelle Parameter α, β mittels der Gleichung

$$ve^{il(u)} + \int e^{il(u)} du = \alpha + i\beta$$

ein. Daraus folgt durch Differentiation

$$e^{il(u)}(du + dv + ikvdu) = d\alpha + id\beta,$$

und wenn man beiderseits die absoluten Beträge nimmt,

$$(du + dv)^2 + k^2 v^2 du^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Links steht aber ds^2 , rechts das Linienelementquadrat der Ebene, bezogen auf gewöhnliche rechtwinklige cartesische Koordinaten. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

99. Kegelflächen und Zylinder. Wenn der Ursprung mit der Spitze des Kegels zusammengelegt wird, und wenn $r = \mathfrak{R}(v)$ eine Leitkurve des Kegels ist, d. h. eine Raumkurve, die sämtliche Erzeugenden des Kegels schneidet, so ist (vgl. (270)) die Gleichung des Kegels

$$r = u\mathfrak{R}(v).$$

Nun ist

$$dx = \mathfrak{R}(v) du + u\mathfrak{R}'(v) dv,$$

daher

$$ds^2 = \mathfrak{R}(v)^2 du^2 + 2u \mathfrak{R}(v)\mathfrak{R}'(v) du dv + u^2 \mathfrak{R}'(v)^2 dv^2.$$

Um zu zeigen, daß der Kegel auf die Ebene abwickelbar ist, nehme man als Leitkurve die Schnittkurve des Kegels und der

Kugel um 0 mit dem Halbmesser 1; d. h. man nehme $\mathfrak{R}(v)^2 = 1$, mithin $\mathfrak{R}(v) \mathfrak{R}'(v) = 0$. Überdies wähle man, Minimalkurven ausschließend, v als Parameter der Bogenlänge der Leitkurve, d. h. $\mathfrak{R}'(v)^2 = 1$. Dann wird

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2.$$

Die rechte Seite stellt bekanntlich das Quadrat des Linien-elementes der Ebene in Polarkoordinaten dar.

Es sei $r = \mathfrak{R}(v)$ eine Leitkurve des Zylinders, und der Einheitsvektor $c(c^2 = 1)$ bestimme die Richtung der erzeugenden Geraden des Zylinders. Dann ist (vgl. (269))

$$r = uc + \mathfrak{R}(v)$$

seine Parameterdarstellung. Aus

$$dr = c du + \mathfrak{R}'(v) dv$$

folgt

$$ds^2 = du^2 + 2c \mathfrak{R}'(v) du dv + \mathfrak{R}'(v)^2 dv^2.$$

Nun nehme man als Leitkurve eine Schnittlinie des Zylinders mit einer seine Mantelgeraden senkrecht schneidenden Ebene, so ist $c\mathfrak{R}'(v) = 0$; ist schließlich noch v der Parameter der Bogenlänge dieser Kurve, also $\mathfrak{R}'(v)^2 = 1$, so folgt

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Der Zylinder ist also auf die Ebene abwickelbar.

Man kann zeigen, daß die Zylinder, die Kegel und die Tangentenflächen der Raumkurven die einzigen auf die Ebene abwickelbaren Flächen sind. Aber dieser Nachweis erfordert tieferliegende Hilfsmittel der Flächentheorie und kann erst im zweiten Bande erbracht werden.



Register.

- Abwickelbarkeit** auf die Ebene 111
— zweier Flächen aufeinander 126 ff.
algebraische Raumkurven 9
Asymptotenlinien 125
- benachbarte Kurvenpunkte** 17
— Tangenten 19
Bertrandsche Kurven 87
Berührung höherer Ordnung 73 ff.
— n-ter Ordnung zweier Raumkurven 79
Berührungsebene 110
Bewegungen im Raume 46
Binormale 23
Binormalenbild, sphärisches 40 ff.
Bogen und Sehne 71
Bogenlänge 13
—, integrallose Bestimmung 97
Böschungslinien 30
- Darboux** 57
Differentialinvarianten 46 ff.
Drehfläche 106, 112
Dreibein, begleitendes, als Basis 32
—, —, einer Fläche 115
—, —, einer Raumkurve 31
- Ebene** in schiefwinkligen cartesischen Koordinaten 105, 112
ebene Kurven 9, 18
Enneper 92
Evoluten 82
Evolventen 82
- Fadenevoluten** 84
Fadenevolventen 83
Fallinien 119
- Filarevolventen siehe Fadenevolventen
Florentiner Problem 9
Frénet 29
Fundamentalgrößen erster Ordnung 111
Fundamentalinvarianten 52
- ganze Krümmung 34
Gauß 111
Gefälle der Fläche 121
geodätische Linien 125
gerade Linie im Raume 14
geradlinige Flächen 108
Graßmann 22
Grundform, erste, einer Fläche 111
- Hauptgleichungen** 28 ff.
Hauptnormale 20
Hauptnormalenbild, sphärisches 42 ff.
Höhenlinien 109
- integrallose Bestimmung** der Bogenlänge 97
Invarianten 46 f.
—, eigentliche 51
—, Integral- 95
invarianter Parameter bei Minimalkurven 93
Isohypsen siehe Höhenlinien
isotrop siehe Minimal-
- Karte einer Fläche 109
Katenoid 127
Kegelflächen 108, 129
Knoblauch 121
komplexe Kurven 10
kongruent 54
Konoïd, gerades 108, 113
- Krümmung** 21 ff.
—, ganze 34
—, geodätische 123
—, Normal- 121
- Krümmung, Tangential- 121
Krümmungsachse 22
— linien 125
— radius 22
— strecke 22
Kugel, bezogen auf Breitenkreise und Meridiane 101
—, — — die erzeugenden Geraden 102, 113
Kurven auf einer Fläche 116 ff.
Kurvennetz 100
- Lancret** 34
Lie 57
Linielement einer Fläche 111
— einer Raumkurve 13
Loxodromen 118
- Maschenwinkel** 112
Meusnier 123
Minimalebene 12
Minimalgerade 12
— auf der Kugel 103 ff.
Minimalkurven 89 ff.
Minimalpunkte einer Fläche 112
Minimalvektoren 10, 11
Möbius 114
Monge 83
Montcheuil 98
Müller, E. 30
- Natürliche Gleichungen** e. Kurve 54 ff.
Normalebene 15, 32
Normalen einer Fläche 114
— einer Kurve 20
Normalschnitte 124
Nullkugel 11
- orthogonales Netz** 112
- Parameter** der Bogenlänge 13, 14
—, Wechsel der — 101

- Parameterdarstellung
 einer Fläche 99
 — — einer Raumkurve 6
 Planevolventen 86
 Plücker 108
 Polare 23
- R**adiusvektor, entwickelt
 nach Potenzen der
 Bogenlänge 35
- Regelflächen siehe gerad-
 linige Flächen
 rektifizierende Ebene 32
 Riccati 57
- de Saint-Venant 30
 Scheffers 30
 Schell 89
 Schichtlinien 109, 119
 Schmiegungeebene 16, 19,
 32, 75
- Schmiegungsfläche in
 einem Kurvenpunkte
 74
 Schmiegungskreis 81
 Schmiegungs-kugel 76
 Schmiegungs-kurve 81
 Schnittwinkel von Kurven
 auf einer Fläche 116 ff.
 Schraubenfläche 8, 105,
 115, 127
 Schraubenlinie 6 ff., 14
 — —, allgemeine 29, 61
 — —, konische 69
 Sehne und zugehöriger
 Bogen 71
 sphärische Bilder 37 ff.
 — Kurven 77
 Study 94
- T**angente 12
 Tangentenbild, sphäri-
 sches 38
- Tangentenfläche einer
 Raumkurve 82, 107,
 108, 128
 — — —, auf eine Ebene
 abwickelbar 111, 128
 Tangentenvektor 15
 Tangentialnormale 121
 Torsion siehe Windung
- U**nendlich benachbarte
 Kurvenpunkte 17
- V**iviani 9
- W**eierstraß 92, 98
 Windung 23 ff.
 —, geodätische 123
 —, Normal- 121
 —, Tangential- 121
- Z**ylinderflächen 108, 130



Mathematische und verwandte Literatur in Auswahl

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 35

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von Helmut Hasse. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je RM. 16.—, Band 145—147 je RM. 12.—, Band 148—151 je RM. 10.—, Band 152 RM. 12.—, Band 153 RM. 17.50, Band 154 RM. 30.—, Band 155 u. 156 je RM. 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II), Band 159—166 je RM. 36.—, Band 167 RM. 56.—, Band 168 RM. 36.—, Band 169 RM. 35.—, Band 170 RM. 35.— Band 171—177 je RM. 30.—.

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von Carl Ohrtmann und Felix Müller, fortgeführt von Emil Lampe, Arthur Korn, Leon Lichtenstein, Georg Feigl. Herausgegeben ab Band 51 von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleitung: Helmut Grunsky. Band 1—63: Jahrgang 1868—1937. Band 1—44 Preise auf Anfrage. Band 45 RM. 75.—, Band 46 RM. 92.—, Band 47 RM. 74.—, Band 48 RM. 121.—, Band 49 RM. 77.—, Band 50 RM. 78.—, Band 51 RM. 100.—, Band 52 (1926) RM. 133.—, Band 53 (1927) RM. 117.—, Band 54 (1928) RM. 135.—, Band 55, 1. Halbband (1929 I) RM. 65.—, Band 55, 2. Halbband (1929 II) RM. 90.—, Band 56, 1. Halbband (1930) RM. 90.—, Band 56, 2. Halbband (1930 II) RM. 84.—, Band 59, 1. Halbband (1933 I) RM. 93.—, Band 60, 1. Halbband (1934 I) RM. 91.—. Im Erscheinen bzw. in Bearbeitung: Band 57 (1931), Band 58 (1932), Band 59, 2. Halbband (1933 II), Band 60, 2. Halbband (1934 II), Band 61 (1935), Band 62 (1936), Band 63 (1937).

Das Jahrbuch kann ab Band 51 (1925) nicht nur als Ganzes, sondern auch in einzelnen Sonderheften bezogen werden. Jedes Sonderheft umfaßt einen oder zwei der Hauptabschnitte des Jahrbuchs. Es erscheinen folgende Sonderhefte: I. Geschichte, Philosophie, Pädagogik; Mengenlehre. II. Arithmetik und Algebra. III. Analysis. IV. Geometrie. V. Angewandte Mathematik.— Preise auf Anfrage.

C. W. Borchardts gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften herausg. von G. Hettner. Mit dem Bildnis Borchardts. Quart. IX, 511 Seiten. 1888. RM. 17.—

G. Lejeune Dirichlets Werke. Herausg. auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker, 2 Bände. Quart. 1. Band. Mit Dirichlets Bildnis. X, 644 Seiten. 1889. . . . RM. 21.—
2. Band. Fortgesetzt von L. Fuchs. X, 422 Seiten. 1897. . . RM. 18.—

Carl Gustav Jakob Jacobi, Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Quart. 1. Band. Herausg. von C. W. Borchardt. Mit dem Bildnis Jacobis. X, 546 Seiten. 1881. 2.—7. Band. Herausg. von K. Weierstraß. 1882 bis 1891. Supplementband. Herausgegeben von E. Loettner. 1884.

Komplett RM. 180.—

- J. L. Lagrange, Mathematische Werke.** Deutsch herausg. von A. L. Crelle.
3 Bände. Oktav.
1. Band. Die Theorie der analytischen Functionen. CXXVIII, 694 S. 1823.
RM. 6.—
 2. Band. Vorlesungen über die Functionen-Rechnung. XXII, 1023 S. 1823.
RM. 6.—
 3. Band. Theorie der Gleichungen. XVI, 552 Seiten. 1824. Vergriffen.
- Jacob Steiner, Gesammelte Werke.** Auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften herausg. von K. Weierstraß. 2 Bände. Okt.
1. Band. Mit 44 Figurentafeln und Steiners Bildnis. VIII, 527 S. 1881.
RM. 16.—
 2. Band. Mit 23 Figurentafeln. X, 743 Seiten. 1882. . . . RM. 18.—
- Festschrift zur Feier des 20jährigen Bestehens der Calcutta Mathematical Society.** Groß-Oktav. VIII, 310 Seiten. 1930 Geb. RM. 20.—
Dieser stattliche Festband enthält 27 wertvolle Beiträge hervorragender Mathematiker aus Amerika, Deutschland, Frankreich, Großbritannien, Japan, Indien, Italien, Österreich, Polen, Rußland, der Schweiz und Ungarn.
- Geschichte der Mathematik.** Von Oberstudien-Dir. Prof. Dr. H. Wieleitner.
2 Bde. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. 1922. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. 1923. (Samml. Göschens Nr. 226, 875) . . . Geb. je RM. 1.62
- Geschichte der Mathematik.** I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. Günther in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Samml. Schubert Bd. 18) . Geb. RM. 17.40
II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudien-Dir. Prof. Dr. H. Wieleitner in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 63.) Geb. RM. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Figuren. VI, 222 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 64.) Geb. RM. 3.50
- Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.** Von Professor Dr. Johannes Tropicke, Oberstudiendirektor i. R., Berlin. Lexikon-Oktav.
- Band 1: Rechnen. VII, 222 Seiten. 3. Aufl., 1930.
RM. 12.—, geb. RM. 13.20
 - Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 266 Seiten. 3. Aufl., 1933.
RM. 12.—, geb. RM. 13.20
 - Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 239 Seiten. 3., verbesserte u. vermehrte Aufl., 1937 RM. 10.—, geb. RM. 11.—
 - Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 2. Aufl., 1922.
RM. 9.—, geb. RM. 10.—
 - Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 2. Aufl., 1923. RM. 7.50, geb. RM. 8.50
 - Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 2. Aufl., 1924.
RM. 7.—, geb. RM. 8.—
 - Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 2. Aufl., 1924.
RM. 6.50, geb. RM. 7.50
- „Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“*
Naturwissenschaften.
- Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren.** Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem Ganesh Prasad. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Friedrich Lange. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923 RM. 0.80
Dasselbe in englischer Sprache. 1923 RM. 0.80

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 Geb. RM 20.—
Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930 Geb. RM. 26.—
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in englischer und französischer Ausgabe vor Geb. je RM. 26.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Reg.-Rat Prof. A. Adler. Zweite Aufl. 117 S. u. 1 Taf. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423) Geb. RM. 1.62
Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 Geb. RM. 7.—

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Neunundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1931 Geb. RM. 2.—
„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neue Auflage. 1934. (Samml. Göschen Bd. 81) Geb. RM. 1.62
„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“
Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 Geb. RM. 1.50

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichts-Laboratorium und in der Praxis berechnet und mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Einundvierzigste bis fünfundvierzigste Auflage. Oktav. 216 Seiten. 1935 Geb. RM. 6.80

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1931. RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. Mit 37 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 272 Seiten. 1936. (Sammlung Göschen Bd. 51) Geb. RM. 1.62

Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Von Dr. Günther Schulz. Mit 10 Abbild. 147 S. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 1110.) Geb. RM. 1.62

Mathematische Mußbestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Prof. Dr. Hermann Schubert. Fünfte Auflage, neu bearbeitet von Professor Dr. F. Fitting, München-Gladbach. Oktav. 260 Seiten. 1935. Geb. RM. 4.80

Dieses bekannte hier in der 5. Auflage erscheinende Buch wendet sich in erster Linie an den mathematischen Laien, den es in leichtfaßlicher und spannender Form in das Wesen der verbreiteten mathematischen Spiele einführen will. Doch sind auch einzelne Abschnitte aufgenommen, welche sich, oft durch kleineren Druck gekennzeichnet, hauptsächlich an den mathematisch interessierten Leser wenden und diesem Anregungen zu eigenen Untersuchungen auf dem Gebiete der Unterhaltungsmathematik geben wollen.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Fig. Sechste, verb. Aufl. Neue Ausg. Lex.-Okt. VIII, 743 S. 1932. Geb. RM. 15.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen, bearbeitet nach den Vorlesungen von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden, o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 3 Bände. 1933. Jeder Band ist einzeln käuflich. Geb. je RM. 3.80

I. Vektorrechnung und analytische Geometrie.

II. Hauptpunkte der analytischen Geometrie des Raumes. — Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung.

III. Fortsetzung der Differential- und Integralrechnung. — Differentialgleichungen. Differentialgeometrie. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. — Probleme der Variationsrechnung.

„. . . Klare und anschauliche Darstellung, mathematische Strenge, pädagogisches Geschick in der Verwertung der jeweils geeigneten Methoden (ich weise auf die durchgängige Verwendung der Vektorrechnung hin), Geschlossenheit in

dem Sinn, daß alle Hilfsmittel, die für die Darstellung nötig sind, in dem Werk selbst bereitgestellt werden, Allgemeinheit der leitenden Gesichtspunkte und Weite des Blicks sowie Veranschaulichung der vorgetragenen Theorien durch geeignete Anwendungen zeichnen es aus.“

Unterrichtsblätter für Mathematik, Nr. 5, 1935.

Mengenlehre. Von Dr. E. Kamke, Professor an der Universität Tübingen. Mit 6 Figuren. 160 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 999)

Geb. RM. 1.62

Mengenlehre. Von Dr. F. Hausdorff, em. o. Professor an der Universität Bonn. Dritte Auflage. Mit 12 Figuren. 303 Seiten. 1935. (Göschens Lehrbücherei Bd. 7)

Geb. RM. 13.50

Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. Beck, o. Professor an der Universität Bonn. X, 198 Seiten. 1926. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6)

RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

I: Lineare Gleichungen. Zweite, verbesserte Auflage. 152 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 931)

Geb. RM. 1.62

II: Gleichungen höheren Grades. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. 158 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 932)

Geb. RM. 1.62

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“

Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht.

Aufgabensammlung zur höheren Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. 160 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1082)

Geb. RM 1.62

Algebraische Theorie der Körper. Von Prof. Dr. Ernst Steinitz. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Dr. Reinhold Baer und Prof. Dr. Helmut Hasse. Oktav. 134 Seiten und 27 Seiten Erläuterungsheft. 1930.

RM. 9.—, geb. RM. 10.20

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 301 Seiten. 1932. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8)

Geb. RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Figuren. VIII, 261 S. 1933. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9)

Geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. Fischer, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. Neudruck. 1931. (Samml. Göschen Bd. 48) Geb. RM. 1.62

Gruppentheorie. Von Dr. Ludwig Baumgartner in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837) Geb. RM. 1.62

Determinanten. Von Studienrat Professor Paul B. Fischer. Dritte, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1932. (Samml. Göschen Bd. 402) Geb. RM. 1.62

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Groß-Oktav. IV, 304 Seiten. 1925 RM. 14.—, geb. RM. 15.50
„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart.

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Dritte, neu durchgesehene Auflage. Herausgegeben von Dr. Robert Haußner, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. XVI, 252 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3) RM. 9.50, geb. RM. 10.50
Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.

Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. Rudolf Fueter, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 277 Seiten. 1925. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4) RM. 10.—, geb. RM. 12.—
Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Von Professor Dr. Paul Bachmann. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919 RM. 2.50
In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.

Irrationalzahlen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. VIII, 186 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1) RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Punkt- und Vektor-Rechnung. Von Dr. Alfred Lotze, Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 192 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 13) RM. 12.—, geb. RM. 13.—

Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Von Professor Dr. Hermann Weyl. Unveränderter Neudruck. V, 84 Seiten. 1932. RM. 3.—

- Differentialrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 94 Figuren und 189 Beispielen. 191 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . Geb. RM. 1.62
- Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Oberstudienrat i. R. in Dresden. Mit 63 Figuren und 190 Beispielen. 176 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 88) Geb. RM. 1.62
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.** Von Professor Dr. A. Witting. Mit 58 Figuren und 405 Beispielen und Aufgaben. 136 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . Geb. RM. 1.62
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.** Von Prof. Dr. A. Witting, Mit 32 Figuren und 305 Beispielen. 118 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 147) Geb. RM. 1.62
- Elementare Reihenlehre.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) Geb. RM. 1.62
- Komplexe Reihen nebst Aufgaben über reelle und komplexe Reihen.** Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 3 Figuren im Text. 140 Seiten. 1931. (Samml. Göschen Bd. 1027) . . . Geb. RM. 1.62
- Fouriersche Reihen.** Von Dr. W. Rogosinski, a. o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit 4 Figuren. 135 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1022) Geb. RM. 1.62
- Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen.** Von Professor Dr. L. Schlesinger und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926. RM. 14.—, geb. RM. 16.—
- Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik.** Von Dr. Josef Lense, o. ö. Professor der Technischen Hochschule München. Mit 30 Abbildungen. 178 Seiten. 1933. Geb. RM. 9.50
- Lehrbuch der Differentialgleichungen.** Von Dr. Heinrich Liebmann, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901 RM. 6.—, geb. RM. 8.—
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. Zweite, verbesserte Auflage. 159 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 920) Geb. RM. 1.62
- Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. VIII, 197 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10) RM. 9.—, geb. RM. 10.50
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 1003) Geb. RM. 1.62
- Partielle Differentialgleichungen.** Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14) RM. 11.—, geb. RM. 12.—
- Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. G. Hoheisel. 148 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1059) Geb. RM. 1.62
- Integralgleichungen.** Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 136 Seiten. 1936. (Samml. Göschen Bd. 1099) Geb. RM. 1.62

Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten. Von Dr. H. Dölp. Neu bearbeitet von Dr. Eugen Netto, 18. Auflage. Oktav. 214 Seiten. 1935. (Verlag von Alfred Töpelmann. Berlin W 35.) RM. 1.95

Das Bändchen stellt eine elementare Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung mit eingefügten Erläuterungen dar. Der erste Abschnitt, Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, bringt die Differentiation der elementaren Funktionen, einschließlich implizite Funktionen, die Ermittlung der Werte unbestimmter Formen, Maxima und Minima, Taylor'sche Reihe. Der zweite Abschnitt, Integralrechnung, führt das Integral als unbestimmtes ein, entwickelt die Integrationsformeln in Bereiche der elementaren Funktionen und geht dann kurz auf das bestimmte Integral ein. Schließlich werden noch verhältnismäßig ausführlich geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung gebracht: Tangentenbestimmung, singuläre Punkte, Krümmung; Quadratur, Rektifikation, Kubatur.

Integralgleichungen. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 11 Figuren. Groß-Oktav. 302 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 18) . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Variationsrechnung I. Von Dr. Lothar Koschmieder, o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 21 Fig. 128 Seiten. 1933. (Samml. Göschens Bd. 1074) Geb. RM. 1.62

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 RM. 6.—, geb. RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 RM. 9.—, geb. RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 RM. 14.—, geb. RM. 15.50

Elemente der Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Prof. an der Universität Tübingen. Mit 23 Fig. 144 Seiten. 1937. (Samml. Göschens Bd. 1109.) Geb. RM. 1.62

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschens Bd. 668) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. 138 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 703) Geb. RM. 1.62

*„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“
Monatsschrift für Mathematik und Physik.*

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 877) Geb. RM. 1.62

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 878) Geb. RM. 1.62

- Einführung in die konforme Abbildung.** Von Dr. Ludwig Bieberbach, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Dritte Auflage. Mit 42 Zeichnungen. 136 Seiten. 1937. (Samml. Göschen Bd. 768). Geb. RM. 1.62
- Automorphe Funktionen.** Von Professor Dr. L. Schlesinger. X, 205 Seiten. 1924. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5) RM. 8.—, geb. RM. 9.20
- Elliptische Funktionen.** Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) RM. 13.—, geb. RM. 14.50
- Elliptische Funktionen.** Von Dr. Karl Boehm, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe.
- I. Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. Mit 11 Figuren. Oktav. XII, 356 Seiten, Neudruck 1930. (Samml. Schubert Bd. 30) . . Geb. RM. 20.—
- II. Teil: Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem. Mit 28 Figuren. Oktav. VII, 180 Seiten. 1910. (Samml. Schubert Bd. 61) Geb. RM. 7.80
- Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.** Von Heinrich W. E. Jung, o. ö. Professor an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 246 Seiten. 1923 RM. 3.50, geb. RM. 4.—
- Potentialtheorie.** Von Dr. W. Sternberg.
- I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) Geb. RM. 1.62
- II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944) Geb. RM. 1.62
- Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.** Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.
- I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) Geb. RM. 4.—
- II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59) Geb. RM. 4.—
- Numerische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) Geb. RM. 1.62
- Graphische Integration.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) Geb. RM. 1.62
- Methoden der praktischen Analysis.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers a. d. Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12) RM. 20.—, geb. RM. 21.50
- Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.*
- Praktisches Zahlenrechnen.** Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) Geb. RM. 1.62
- Mathematische Instrumente.** Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922) . . Geb. RM. 1.62
- Geodäsie (Landesvermessung u. Erdmessung).** Von Prof. Dr. Gustav Förster. Mit 33 Figuren. 122 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 102) Geb. RM. 1.62

Vermessungskunde. Von Dr.-Ing. P. Werkmeister, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

- I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 146 Figuren. Fünfte Auflage. 163 Seiten. 1932. (Samml. Göschen Bd. 468) . . . Geb. RM. 1.62
II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Dritte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 469) . . . Geb. RM. 1.62
III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Topographie. Mit 63 Figuren. Dritte Auflage. 144 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 862) . . . Geb. RM. 1.62

Grundlagen der Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. 143 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 17) . . . RM. 6.50, geb. RM. 7.80

Inhalt: I. Gleichheit, Ordnung und Stetigkeit. II. Die Messung durch Zahlen. (Streckenmessung, Winkelmessung, Flächenmessung.) III. Die projektive Geometrie in der Ebene. (Der Fundamentalsatz. Analyse des Fundamentalsatzes. Beweis des Fundamentalsatzes.) IV. Die projektive Geometrie im Raume. (Der Fundamentalsatz. Der Desarguessche Satz. Die Koordinatengeometrie.) V. Künstliche Geometrien.

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mit 220 Figuren. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2) Geb. RM. 3.90

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. F. Bohnert in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten. 1919. (Samml. Schubert Bd. 3) . . . Geb. RM. 4.40

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Professor Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren. Vierte Auflage. 171 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 99) . . . Geb. RM. 1.62

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“

Archiv der Mathematik und Physik.

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929 . . . Geb. RM. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Professor Dr. Friedrich Schur. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. . . . Geb. RM. 7.70

Analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Zweite, verb. Auflage. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1934. (Samml. Göschen Bd. 65) . . . Geb. RM. 1.62

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnis voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen vornehmlich über die Kegelschnitte.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen zur analytischen Geometrie der Ebene mit den vollständigen Lösungen. Von Dr. R. Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 22 Figuren im Text. 139 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 256) . . . Geb. RM. 1.62

- Analytische Geometrie des Raumes.** Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 36 Figuren im Text. 132 Seiten. 1935. (Samml. Göschen Bd. 89) Geb. RM. 1.62
- Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.** Von Professor Dr. Max Zacharias, Studienrat in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16) . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50
Die Elementargeometrie wird nicht vom Standpunkte des Schulunterrichts, sondern von dem der Wissenschaft aus behandelt. Ausgangspunkt ist das (etwas modifizierte) Hilbertsche Axiomensystem. In der Darstellung treten zwei Momente in den Vordergrund: die geschichtliche Entwicklung und die prinzipielle Begründung der einzelnen Gebiete.
- Koordinatensysteme.** Von Professor Paul B. Fischer, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 507) . . . Geb. RM. 1.62
- Nichteuklidische Geometrie.** Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970) . . Geb. RM. 1.62
- Nichteuklidische Geometrie.** Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—
- Kreis und Kugel.** Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 S. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50
- Algebraische Kurven.** Neue Bearbeitung von Prof. Dr. H. Wieleitner, Oberstudiendirektor in München.
 Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 435) Geb. RM. 1.62
 Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 123 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 436) Geb. RM. 1.62
- Liniengeometrie mit Anwendungen.** Von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34) Geb. RM. 18.—
 II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51) Geb. RM. 9.50
- Projektive Liniengeometrie.** Von Dr. Robert Sauer, Prof. an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 36 Abbild. Groß-Oktav. 194 Seiten. 1937. (Göschens Lehrbücherei Bd. 23.) Geb. RM. 9.—
- Projektive Geometrie.** Von Dr. H. Timerding, Prof. an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit zahlreichen Figuren. 1937. (Samml. Göschen Bd. 72.) Geb. RM. 1.62
- Aufgabensammlung zur projektiven Geometrie.** Von Dr. H. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 65 Figuren. 140 Seiten. 1933. (Sammlung Göschen Bd. 1060). Geb. RM. 1.62
- Geometrische Transformationen.** Von Dr. Karl Doehlemann, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. 254 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15) RM. 13.—, geb. RM. 14.50
- Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen.** Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 16 Figuren. Groß-Oktav. 280 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 19) RM. 15.50 geb. RM. 17.—

Affine Differentialgeometrie. Von Dr. Erich Salkowski, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Groß-Oktav. Mit 23 Figuren. 200 Seiten. 1934. (Göschens Lehrbücherei Bd. 22) Geb. RM. 10.—

Die vorliegende Darstellung ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser an den Technischen Hochschulen Hannover und Berlin gehalten hat. Das Ziel dieses neuen Bandes von Göschens Lehrbücherei ist, den Anfänger, dem nur die Grundtatsachen der Vektorrechnung und der Differentialgeometrie geläufig sein müssen, mit den Begriffsbildungen der Tensorrechnung vertraut zu machen, die für das Verständnis der neueren differential-geometrischen und mathematisch-physikalischen Forschung unentbehrlich sind. Dabei wurde darauf Bedacht genommen, von den einfachsten, allgemein bekannten Tatsachen ausgehend und in dauernder Verbindung mit der geometrischen Anschauung den Formelapparat der Ricci-Rechnung allmählich so zu entwickeln, daß er dem Lernenden nicht als ein analytisches Kunststück entgegentritt, sondern sich als ein naturgemäßes Hilfsmittel der geometrischen Forschung aufbaut. Aus diesem Grunde wurde die Untersuchung auf die einfachsten Gegenstände beschränkt und grundsätzlich nur zweidimensionale analytische Gebilde betrachtet.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 RM. 13.—, geb. RM. 14.50
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Von Oberstudiendirektor Prof. Dr. V. Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. K. Kommerell in Tübingen. I: Krümmung der Raumkurven und Flächen. Vierte Auflage. Mit 38 Figuren. 205 Seiten. 1931. (Göschens Lehrbücherei Bd. 20) Geb. RM. 10.—
II: Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. Vierte Auflage. Mit 22 Figuren. 1931 . . . Geb. RM. 10.—

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929 RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Vektoranalysis. Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschens Bd. 354) . . . Geb. RM. 1.62

Darstellende Geometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena.
Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 142) Geb. RM. 1.62
Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1930. (Samml. Göschens Bd. 143) Geb. RM. 1.62
Dritter Teil: Zylinder, Kegel, Kugel, Rotations- und Schraubenflächen, Schattenkonstruktionen, Axonometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 65 Figuren im Text. 141 Seiten. 1931. (Samml. Göschens Bd. 144) Geb. RM. 1.62
Vierter Teil: Freie und gebundene Perspektive, Photogrammetrie, kotierte Projektion. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Univ. Jena, und Dr. Wolfgang Haack, Privatdozent für Mathematik an der Techn. Hochschule Danzig-Langfuhr. Mit 76 Figuren im Text. 144 Seiten. 1933. (Samml. Göschens Bd. 1063). Geb. RM. 1.62

- Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubensflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. Neudruck 1932. Geb. RM 18.90
- II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten. Mit 118 Figuren. Neudruck. 1932. Geb. RM. 8.55
- III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 Geb. RM. 12.—
- Darstellende Geometrie.** Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65) Geb. RM. 6.—
- II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66) Geb. RM. 7.50
- Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871) Geb. je RM. 1.62
- Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.*
- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Von Wilhelm Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.
- I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 302) Geb. RM. 1.62
- II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 641) Geb. RM. 1.62
- Versicherungsmathematik.** Von Dr. Friedrich Boehm, Professor an der Universität München.
- I. Elemente der Versicherungsrechnung. 2., vermehrte u. verbesserte Auflage. 144 Seiten. 1937. (Sammlung Göschen Bd. 180) Geb RM. 1.62
- II. Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 917) Geb. RM. 1.62
- Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.*
- Politische Arithmetik.** (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. Emil Foerster, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 879) Geb. RM. 1.62
- Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik.** Von Professor Dr. M. Pirani. Zweite, verbesserte Auflage, besorgt durch Dr. J. Runge. Mit 71 Abbildungen. 149 Seit. 1931. (Samml. Göschen Bd. 728) Geb. RM. 1.62
- Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.*

- Graphische Statik** mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Bauwerksschule in Erfurt. 2 Teile. 1929. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695). Geb. RM. 1.62
- Statik.** I. Teil: Die Grundlagen der Statik starrer Körper. Von Professor Dr.-Ing. Ferd. Schleicher in Hannover. Mit 47 Abbildungen. 143 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 178) Geb. RM. 1.62
- Ballistik.** Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik in Berlin. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922 RM. 9.—, geb. RM. 10.—
- Getriebelehre I: Geometrische Grundlagen.** Von Dipl.-Ing. P. Grodzinski u. Dr.-Ing. H. Polster. Mit 127 Figuren. 138 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1061) Geb. RM. 1.62
- Getriebelehre II: Angewandte Getriebelehre.** Von Dipl.-Ing. P. Grodzinski. Mit 196 Figuren. 142 Seiten. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1062). Geb. RM. 1.62
- Dynamik.** Von Prof. Dr. Wilhelm Müller. I: Dynamik des Einzelkörpers. Mit 70 Figuren. 160 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 902) Geb. RM. 1.62
II: Dynamik von Körpersystemen. Mit 51 Figuren. 137 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 903) Geb. RM. 1.62
- Flugtechnisches Handbuch.** Unter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von Roland Eisenlohr.
4 Bände. I: Aerodynamik und Flugzeugbau. II: Flugzeugführung, Luftverkehr und Segelflug. III: Triebwerk und Sondergebiete des Flugwesens. IV: Flugwetterkunde, Ballone, Luftschiffe.
Jeder Band kart. RM. 7.50
- Deutschlands Luftfahrt und Luftwaffe.** Entwicklung — Leistung — Gliederung — Aufgaben — Berufe. Von Ministerialrat H. Geyer (Samml. Göschen Bd. 1107).
- Das Kriegsflugzeug.** Flugzeugarten, militärische und technische Anforderungen. Von Oberleutnant a. D. Georg W. Feuchter und Ingenieur Richard Schulz. Mit 33 Abbildungen (Samml. Göschen Bd. 1108).
- Mechanik des Motor- und Segelfluges.** Von Prof. Dr. Emil Everling und Dr.-Ing. Horst Müller. Mit 42 Abbildungen (Samml. Göschen Bd. 841).
- Konstruktion der Motorflugzeuge.** Von Dipl.-Ing. Hermann Landmann. Mit 100 Abbildungen. (Samml. Göschen Bd. 1105).
- Konstruktion der Segelflugzeuge.** Von Dipl.-Ing. Waldemar Beyer. Mit 50 Bildern. (Samml. Göschen Bd. 1106).
- Aerodynamik des Fluges.** Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Von Professor Dr. Harry Schmidt. Mit 81 Figuren. VII, 258 Seiten. 1929 RM. 15.—, geb. RM. 16.50
- Hydraulik.** Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) Geb. RM. 1.62
Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.
- Elastizitätslehre für Ingenieure.** Von Professor Dr.-Ing. Max Enßlin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen, 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) Geb. je RM. 1.62

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. Hinrichs, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 532) Geb. RM. 1.62

Technische Tabellen und Formeln. Von Reg.-Baurat a. D. Prof. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 105 Figuren. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 579) Geb. RM. 1.62

Einführung in die Differentialgleichungen der Physik. Von Professor Ludwig Hopf. Mit 49 Abbildungen. 1933. (Samml. Göschen Bd. 1070) Geb. RM. 1.62

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor der Physik an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Band: Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 76) Geb. RM. 1.62

II. Band: Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 77) Geb. RM. 1.62

III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 78) Geb. RM. 1.62

IV. Band: Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 374) Geb. RM. 1.62

V. Band: Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 128 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 1017) Geb. RM. 1.62

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau. I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929.

RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band: Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. X, 660 Seiten. 1929 RM. 28.—, geb. RM. 30.—

III. Band. Erster Teil: Elektrodynamik und Optik. Mit 235 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 918 Seiten. 1932. RM. 37.50, geb. RM. 40.—
Der zweite Teil des III. Bandes erscheint im Herbst 1937.

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“ *Annalen der Physik.*

Die Prinzipie der Dynamik. Von Dr. Clemens Schäfer, Prof. an der Universität Breslau. Mit 6 Fig. Oktav. 76 Seiten. 1919. . RM. 2.50

Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Dr. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 67 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 396 Seiten. 1930. RM. 8.50, geb. RM. 10.—
II. Band. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 448 Seiten. 1930. RM. 8.50, geb. RM. 10.—

Das Naturbild der neuen Physik. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor a. d. Universität Wien. Mit 8 Figuren im Text. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Groß-Oktav. V, 129 Seiten. 1932. RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Kleiner Grundriß der theoretischen Physik. Kleine, besonders bearbeitete Ausgabe der Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Arthur Haas, Professor für Physik a. d. Univ. Wien. Mit 22 Figuren. Oktav. VII, 183 Seiten. 1934. Geb. RM. 5.30

Dieser „Kleine Grundriß“ ist für die Leser bestimmt, die die Physik nicht als Hauptstudium, sondern nur als Ergänzung eines anderen Faches betreiben und deshalb auf die umfangreiche, zweibändige, schon in 6. Auflage vorliegende „Einführung in die theoretische Physik“ desselben Verfassers verzichten können. Für Studierende der Physik selbst soll der „Kleine Grundriß“ als erste Einleitung oder als Repetitorium dienen. Selbstverständlich ist der „Kleine Grundriß“ ein in sich abgeschlossenes, einheitliches und selbständiges Buch.

Die Umwandlungen der chemischen Elemente. Von Dr. Arthur Haas, Professor für Physik an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen, Oktav, VIII, 118 Seiten. 1935 RM. 4.30, geb. RM. 5.—

Unter den wissenschaftlichen Leistungen der letzten drei Jahre (1932 bis 1934) haben vielleicht wenige so viel Interesse in weitesten Kreisen erweckt wie die umwälzenden Entdeckungen, die in dieser Zeit der physikalischen Forschung glückten: die Auffindung neuer Urbausteine der Materie (Neutron und Positron), der experimentelle Nachweis der Entstehung von Materie aus Licht, die Feststellung und Isolierung des schweren Wassers, die ungeahnten und durch neue Methoden ermöglichten Erfolge der Atomzertrümmerung und die künstliche Erzeugung von Radioaktivität.

Von diesen neuen Entdeckungen berichtet zusammenfassend, kurz und möglichst leicht verständlich das Büchlein von Haas in der Form von fünf Vorträgen: I. Die Materialisation des Lichtes — II. Die Grundstoffarten — III. Die Mittel der Atomzertrümmerung — IV. Die Ergebnisse der Atomzertrümmerung — V. Die künstliche Radioaktivität. 31 Abbildungen, fast durchweg Wiedergaben nach Photographien, gewähren einen anschaulichen Einblick in die Welt der Atome.

Atomtheorie. Von Dr. Arthur Haas, Professor für Physik an der Universität Wien. Mit 81 Figuren im Text und auf 5 Tafeln. Dritte, völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Oktav, VIII, 292 Seiten. 1936 RM. 8.50, geb. RM. 10.—

In dieser neuen Auflage haben auch die neuesten wissenschaftlichen Fortschritte, vor allem der Kernphysik, der Teilchenstrahlung, der Spektroskopie, der Struktur der Atomhüllen, sowie der neuen Anwendungen der Wellenmechanik Berücksichtigung gefunden.

Radioaktivität. Von Dr. Karl Przibram, Professor an der Universität Wien. Mit 31 Abbildungen. 142 Seiten. 1932. (Sammlung Göschen Bd. 317). Geb. RM. 1.62

Teilchenstrahlen (Korpuskularstrahlen). Von Dr. H. Mark, Professor an der Universität Wien. Mit 59 Abbildungen. 152 Seiten. 1934. (Sammlung Göschen Bd. 1083) Geb. RM. 1.62

Spektroskopie. Von Dr. Karl Wilh. Meißner, o. Professor d. Experimentalphysik an der Universität Frankfurt a. M. Mit 102 Figuren. 1935. (Sammlung Göschen Bd. 1091) Geb. RM. 1.62

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. XI, 288 Seiten. 1930. Geb. RM. 11.50

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO.
IN BERLIN W 35 UND LEIPZIG C 1

2100

S-96

477.37.1.02

30.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301290



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000295770