en

re

Von

Prof. Dipl.-Ing. W. Hauber

Mit 56 Figuren und einer Tafel

GJG

288

Hochbautechnische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

Geologie von Dr. Edgar Dacqué.
- I. Allgemeine Geologie. Mit 75 Figuren . . . . Nr. 13
- II. Stratigraphie. Mit 56 Figuren und 7 Tafeln . . . . Nr. 846

Mineralogie von Prof. Dr. R. Brauns. Mit 132 Figuren. Nr. 29

Petrographie von Prof. Dr. W. Bruhns. Neubearb. von Prof. Dr. P. Ramdohr. Mit 10 Abbild. . . . . Nr. 173

Praktisches Zahlenrechnen von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Figuren . . . . Nr. 405

Technische Tabellen u. Formeln v. Dr.-Ing. W. Müller. Mit 106 Figuren . . . . Nr. 579

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von Dipl.-Ingenieur Prof. K. Memmler.
- I. Materialeigenschaften. Festigkeitsversuche. Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren . . . . . . Nr. 311
- II. Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. Baumaterialprüfung. Papierprüfung. Schmiermittelprüfung. Einiges für Metallographie. Mit 31 Figuren . . . . Nr. 312

Statik von Prof. W. Hauber.
- I. Die Grundlehre der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Nr. 178
- II. Angewandte Statik. Mit 61 Figuren . . . . Nr. 179

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien von Dipl.-Ing. Otto Henkel. 2 Bände. Mit 207 Figuren . . . . Nr. 603, 695

Statische Berechnung des Bautechnikers von Dipl.-Ing. Walter Selckmann.
- I. Die statische Untersuchung der Bauteile des einfachen Wohnhauses. Mit 174 Figuren . . . . Nr. 784
- II. Die zusammengesetzte Festigkeit. Die statische Untersuchung des eisernen Dachbinders. Die Standsicherheit. Mit 122 Figuren . . . . Nr. 785

Festigkeitslehre von Prof. W. Hauber. Mit 56 Figuren. Nr. 288

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen von Dipl.-Ing. R. Haren. Mit 42 Figuren . . . . Nr. 491

Hydraulik vo[...] . . . Nr. 397

Kinematik v[...] Nr. 584

Dynamik v. D[...] 2, 903

Elastizitätsle[...]
Max Enßlin. [...] 9, 957

Nomographie[...]
Max Mayer. [...] Nr. 959

Sammlung Göschen

Festigkeitslehre

Von

Professor Dipl.-Ing. W. Hauber
in Stuttgart

Mit 56 Figuren und 1 Tafel

Achter Neudruck

Berlin und Leipzig
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1923

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
840223.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel.

Physikalische Grundlagen.

II. Kapitel.

Trägheits- und Widerstandsmoment ebener Figuren.

III. Kapitel.

Biegungs-(Angriffs-)Moment und Transversalkraft.

Seite

IV. Kapitel.

Die Biegungskurve und ihre Anwendungen.

V. Kapitel.

Die Spannungen im stabförmigen Körper mit gerader Achse.

Anhang.

Literatur-Verzeichnis.

Bach, Elastizität und Festigkeit. 6. Auflage. Berlin, 1911.

Brauer, Festigkeitslehre. Leipzig, 1905.

Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Turin, 1880.

Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig, 1862.

Föppl, Technische Mechanik, III. Band: Festigkeitslehre. 5. Auflage. Leipzig, 1914.

Glinzer, Grundriß der Festigkeitslehre. Dresden, 1890.

Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit. 2. Aufl. Berlin, 1878.

Keck, Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. 2. Auflage. Hannover, 1905 und 1908.

Klimpert, Elastizität und Festigkeit. Stuttgart, 1889.

Kriemler, Aus der Festigkeitslehre. Vevey, 1893.

Kurz, Taschenbuch der Festigkeitslehre. Berlin, 1878.

Lamé, Leçons sur la théorie mathématique d'élasticité des corps solides. Paris, 1852.

Lauenstein, Die Festigkeitslehre, elementares Lehrbuch. 12. Auflage. Leipzig, 1913.

Love, Treatise on the mathem. theory of elasticity. 2 Bände. Cambridge, 1892/93.

Müller, Elementares Handbuch der Festigkeitslehre. Berlin, 1875.

Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 4. Auflage. Leipzig, 1913.

Navier, De la résistance des corps solides, éd. par de Saint-Venant. Paris, 1864.

Peter, Tragfähigkeitstabellen für Säulen und Stützen, Träger und Balken. Dresden, 1900.

Rebber, Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung auf den Maschinenbau. 5. Auflage. Mittweida, 1909.

Reuleaux, Abriß der Festigkeitslehre für den Maschinenbau. Braunschweig, 1904.

Simerka, Elemente der Festigkeitslehre. 3. Auflage. Pilsen, 1898.

Tetmajer, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 3. Aufl. Wien, 1905.

Todhunter, History of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time, ed. by Pearson. Cambridge, 1886/93.

Uhlich, Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung. Mittweida, 1885.

Weitzel, Die Schule des Maschinentechnikers, 8. Band: Die Festigkeitslehre, bearbeitet von G. Winzer. 3. Auflage. Leipzig, 1909.

Weyrauch, von, Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung von Eisen- und Stahlkonstruktionen. Leipzig, 1889.

Winkler, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag, 1867.

Wittsack, Einführung in die Festigkeitslehre. Hildburghausen, 1895.

I. Kapitel.

Physikalische Grundlagen.

§ 1. Elastizität und Festigkeit.

Steht ein fester natürlicher Körper unter Einfluß äußerer Kräfte, so bringen diese eine mehr oder weniger meßbare Verschiebung der gegenseitigen Lage der kleinsten Teile des Körpers und eine Veränderung der sichtbaren Gestalt desselben hervor. Hören jene Kräfte auf zu wirken, so nimmt der Körper in verschieden hohem Grade seine ursprüngliche Gestalt wieder an. Die neue Gestalt kann auch eine bleibende geworden sein.

Die Eigenschaft der natürlichen Körper, nach Aufhören der Wirkung dieser Kräfte bis auf einen gewissen Rest die ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, heißt Elastizität.

Körper, bei welchen dieser Rest = 0 wäre, heißen vollkommen elastisch, solche, bei welchen von einem Punkte des Körpers ausgehend die Elastizitätsverhältnisse nach allen Richtungen dieselben sind, isotrop. Vollkommen elastische Körper gibt es in der Natur nicht.

In jedem Augenblick des Deformationsvorganges steht jeder kleinste Teil des Körpers unter Einfluß innerer, von den benachbarten Teilen ausgehender Kräfte, die fortgesetzt ihre Größe ändern und schließlich von solchem

Werte werden können, daß sämtliche kleinste Teile und damit der Körper selbst zur Ruhe und zu neuer Gleichgewichtsform gelangt. Übersteigt hierbei das zur Herbeiführung des Gleichgewichts nötige Maß jener inneren Kräfte an irgend einer Stelle des Körpers eine gewisse, von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit, der Temperatur sowie der geometrischen Gestalt des Körpers abhängige Grenze, über welche hinaus der Körper jene Kräfte nicht mehr hervorzubringen vermag, so tritt eine Zerstörung des Zusammenhanges des Körperganzen, d. h. ein Bruch desselben ein.

Der Höchstwert des Widerstandes, den ein Körper dieser Zerstörung entgegenzusetzen vermag, heißt seine Festigkeit (Bruchfestigkeit, Tragfestigkeit, Bruchmodul t) (vgl. § 2, Anm. 4, Schluß).

Je nach Art der Wirkung der äußeren Kräfte unterscheidet man (unter Voraussetzung stabförmiger Körperform):

1. die Zugfestigkeit oder den Widerstand gegen Zerreißen,
2. die Druckfestigkeit oder den Widerstand gegen Zerdrücken,
3. die Biegungs- (relative) Festigkeit oder den Widerstand gegen Zerbrechen durch Biegung,
4. die Schub-(Scher-)Festigkeit oder den Widerstand gegen Abscheren,
5. die Knickfestigkeit oder den Widerstand gegen Zerknicken,
6. die Drehungs-(Torsions-)Festigkeit oder den Widerstand gegen Verdrehung (Torsion),
7. die zusammengesetzte Festigkeit oder den Widerstand gegen Beanspruchungen, die aus

mehreren der zuvorgenannten zusammengesetzt sind.

Die Ermittelung der Zahlwerte der Festigkeit ist Gegenstand von Versuchen der Ingenieurlaboratorien (Werdersche Festigkeitsmaschine).

Bei manchen Materialien, z. B. Eisen, steht die Festigkeit wesentlich in Zusammenhang mit der chemischen Zusammensetzung. Innerhalb gewisser Grenzen erhöht die Zunahme des Kohlenstoffgehalts des Eisens dessen Festigkeit gegen ruhende Last, vermindert sie aber gegen Stöße. In ähnlicher Weise wirkt ein Gehalt an Phosphor, der das Eisen bei Stößen schon bei gewöhnlicher Temperatur kristallinisch und brüchig macht.

Von wesentlichem Einfluß auf die Festigkeit von Eisen und Stahl ist (nach den grundlegenden Versuchen von Wöhler 1859—1870) die Art, Dauer und Häufigkeit der Beanspruchung und die Geschwindigkeit ihres Anwachsens auf ihren vollen Wert. Wenn die Beanspruchung eines prismatischen Stabes durch axiale Kräfte genügend oft und in rascher Aufeinanderfolge geschieht, findet ein Bruch schon bei weit geringerer Belastung statt als bei ruhender Last. Eine besonders starke Abnahme der Festigkeit findet statt, wenn, wie z. B. bei Maschinenteilen, der beanspruchte Zustand wiederholt in den unbeanspruchten übergeht oder, wie z. B. bei Brückenstäben, unter Einfluß der beweglichen Last Zug mit Druck abwechselt. Bei manchen Materialien, z. B. Gußeisen, Sandstein u. a., hängt die Festigkeit in hervorragender Weise von der geometrischen Gestalt des Versuchskörpers ab (vgl. Bach, Elastizität und Festigkeit).

Die Ermittelung der Größe jener inneren Kräfte (Spannungen), die bei gegebener Gestalt des Körpers und gegebenen äußeren Kräften den Zusammenhang des

Körperganzen vermitteln oder die Berechnung des Mindestmaßes gewisser Abmessungen desselben, die bei gegebenen äußeren Kräften und gewissen, die Festigkeit des Materiales zum Ausdruck bringenden, aus der Erfahrung geschöpften Zahlwerten zum Zusammenhang nötig und hinreichend sind, ist Aufgabe der Festigkeitslehre.

§ 2. Zug- und Druckspannung. Elastizitätsgesetz der Dehnung.

Ein zylindrischer, dünner Stab aus elastischem Material von der Länge l cm und dem Querschnitt F qcm (Fig. 1) stehe in seiner Schwerpunktsachse unter Wirkung von 2 gleichen, entgegengesetzten Zugkräften P, die so gewählt seien, daß sie weder bleibende Deformation noch Bruch des Stabes herbeizuführen vermögen. Die Wirkung der P verteile sich gleichförmig über die Endquerschnitte, so daß an jeder Stelle derselben die Belastung pro Flächeneinheit

$$\frac{P}{F} = \sigma \text{ kg/qcm}$$

von gleichem Werte sei.

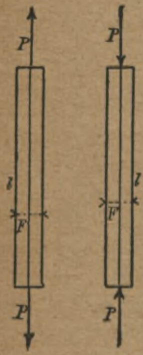


Fig. 1. Fig. 1a.

Der Quotient σ wird (Zug-)Spannung genannt.

Nimmt man auf Grund von Beobachtungen die innerhalb gewisser Grenzwerte von σ eintretende Längenänderung λ des Stabes proportional den Werten von l und σ an und bezeichnet die auf die Einheit der ursprünglichen Länge unter Wirkung einer Spannung $\sigma = 1$ kg/qcm entfallende Längenänderung mit α (Dehnungskoeffizient), so ergibt sich auf Grund obiger Proportionalität bei der ursprünglichen Stablänge l und der Spannung σ die Längenänderung

$$\lambda = \alpha \cdot l \cdot \sigma$$

oder

$$\frac{\lambda}{l} = \alpha \cdot \sigma .$$

Der Quotient $\frac{\lambda}{l}$ oder die auf die Längeneinheit des Stabes entfallende Dehnung heißt relative (verhältnismäßige) Dehnung ε, daher

$$\underline{\varepsilon = \alpha \cdot \sigma} ,$$

d. h.: Die relative Dehnung ist gleich dem Produkt aus Dehnungskoeffizient und Spannung. (Hookesches Gesetz; Gesetz der elastischen Dehnung.)

Anmerkung 1. Sind, wie in Fig. 1a, die Kräfte P axiale Druckkräfte, so liefert dieselbe Betrachtung für die eintretende Verkürzung λ der Stablänge unter Annahme derselben Proportionalität von λ, l und σ dasselbe Gesetz. σ heißt dann Druckspannung, ε auch relative negative Dehnung.

Anmerkung 2. Der Dehnungskoeffizient α wird für ein und dasselbe Material unter Voraussetzung der in der Praxis üblichen Werte von σ als unabhängig von σ, d. h. als konstant und bei den meisten technisch wichtigen Materialien für Zug und Druck von gleichem Werte angenommen. Bei Gußeisen, Beton, Sandstein u. a. findet eine genaue Proportionalität zwischen ε und σ überhaupt nicht statt, und man pflegt dann an Stelle des Hookeschen Gesetzes die allgemeinere Relation

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$$

zu setzen, wo m einen von der Natur des Materiales und anderen Umständen abhängigen Exponenten bedeutet (vgl. Bach, Elastizität und Festigkeit).

Anmerkung 3. Elastizitätsmodul für Zug und Druck. Das Gesetz der Dehnung liefert

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot l}{\lambda},$$

wo $\frac{1}{\alpha}$ als Elastizitätsmodul E (für Zug und Druck) bezeichnet wird, so daß

$$E = \frac{\sigma \cdot l}{\lambda}.$$

Wäre σ diejenige Spannung, welche unter Voraussetzung physikalischer Möglichkeit eine Längenänderung λ gleich der ursprünglichen Stablänge l herbeiführen würde, so würde aus vorstehender Gleichung sich ergeben:

$$E = \sigma,$$

d. h.: Der Elastizitätsmodul (reziproker Wert des Dehnungskoeffizienten) ist gleich derjenigen Spannung σ, welche eine Längenänderung des Stabes gleich seiner ursprünglichen Länge hervorrufen würde.

Mittlere Zahlwerte für E:

	kg/qcm
Walzeisen (Schmiedeeisen)	2 000 000
Gußeisen	1 000 000
Holz (Faserrichtung)	100 000
Stahl (gehärtet)	2 200 000

Anmerkung 4. Proportionalitätsgrenze. Die Erfahrung lehrt die Gültigkeit einer Proportionalität von λ, l und σ bei den technisch wichtigen Materialien nur

bis zu einem gewissen oberen Grenzwert von σ (Proportionalitätsgrenze).

Überschreitet σ, z. B. bei Flußeisen, diese Grenze, so tritt zunächst zwischen ε und σ eine andere Relation ein bis zu einem neuen Grenzwerte von σ, von welchem an ein Wachsen von ε bei einem fast gleichbleibenden σ eintritt (Streckgrenze bei Zug, Quetschgrenze bei Druck). Schließlich führt ein immer mehr zunehmendes σ zur Querschnittsänderung an irgend einer Stelle und zum Bruche (vgl. Bach, Elastizität und Festigkeit).

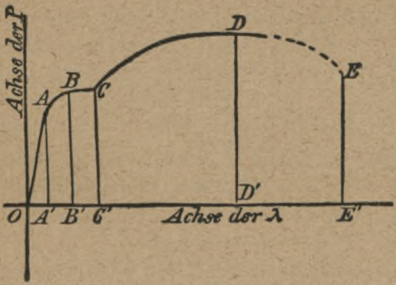


Fig. 2.

Ein Bild dieses Vorganges für einen Stab aus zähem Schmiedeeisen (Flußeisen) ist in Fig. 2 (Spannungsdiagramm) dargestellt:

Trägt man nämlich (Fig. 2) auf einer Geraden von einem festen Punkte O derselben aus die Werte von λ und im Endpunkt jedes λ senkrecht hiezu den zugehörigen Wert von P als Ordinate ab, so bezeichnet man die Kurve der Endpunkte der Ordinaten als Spannungskurve. Wegen der Proportionalität von λ und ε, bzw. von P und σ gibt sie auch ein Bild des Zusammenhanges von ε und σ. In Fig. 2 ist durch die von O

ausgehende Gerade OA die Proportionalität von λ und P dargestellt. Der dem Endpunkt A entsprechende Wert von $\sigma = \frac{P}{F}$ bezeichnet also die Proportionalitätsgrenze. Die Kurve schließt sich dann in A tangentiell an OA an und verläuft nach anderem Gesetze weiter bis B, von welchem Punkte an sie im Teile BC nahezu parallel der Achse der λ bleibt. Das dem Punkte B entsprechende $\sigma = \frac{P}{F}$ gibt also die Streck- bzw. Quetschgrenze an (das Material streckt sich bzw. quetscht zusammen vom Werte $P = BB'$ an bei nahezu gleichbleibendem P bis C). Von C an steigt bei weiterer Zunahme von P die Kurve langsam an bis zu einem höchsten Punkte D. Nach Eintritt des entsprechenden Wertes von $\lambda (= OD')$ beginnt der Stab an irgend einer Stelle bei Zug sich einzuschnüren (kontrahieren) bzw. bei Druck zu quetschen. Das zu weiterer Dehnung λ erforderliche P nimmt wieder ab, so daß das im Augenblick des Zerreißens tätige $P (= EE')$ kleiner sich erweist als dasjenige, das die Kontraktion bzw. Quetschung herbeigeführt hat.

Die Bruchfestigkeit t des Stabes gegen Zug bzw. Druck ist also durch $\sigma = \frac{DD'}{F}$ dargestellt, falls auf die Querschnittsänderung keine Rücksicht genommen wird.

Anmerkung 5. Bleibt σ innerhalb der Proportionalitätsgrenze, so nimmt bei Aufhören der Wirkung von σ der Stab eine neue Länge an, die nicht genau mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Die Differenz beider Stablängen heißt **bleibende Dehnung**.

Anmerkung 6. Diejenige Grenze von σ, unterhalb welcher die bleibende Dehnung von solch geringem Werte ist, daß sie vernachlässigt werden kann, heißt Elastizitätsgrenze. In vielen Fällen läßt sie sich als mit der Proportionalitätsgrenze zusammenfallend betrachten.

§ 3. Schubspannung. Elastizitätsgesetz der Schiebung.

Der elastische stabförmige Körper (Fig. 3) stehe unter Einfluß äußerer Kräfte und befinde sich im Gleichgewicht. Ein Durchschneiden des Stabes längs der Querschnittsebene AB stört dasselbe. Das Gleichgewicht kann jedoch z. B. für den linksseitigen Körperteil wiederhergestellt werden, wenn an ihm in jedem Flächenteil $\triangle F$ der Schnittfläche eine geeignete Kraft S angebracht wird, als deren Quelle der rechtsseitige Körperteil betrachtet werden kann.

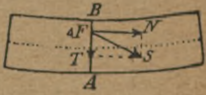


Fig. 3.

Von den beiden Komponenten N und T dieser Kraft normal und längs AB sucht die Normalkraft N den Flächenteil $\triangle F$ gegen den entsprechenden der rechtsseitigen Schnittfläche anzudrücken oder von ihm zu entfernen. N ist also Druck- oder Zugkraft. Die Kraft T sucht den Flächenteil $\triangle F$ in seiner Ebene zu verschieben, also vom entsprechenden Flächenteil der rechtsseitigen Schnittfläche zu trennen (abzuscheren) und heißt daher Schub- oder Scherkraft.

Unter Voraussetzung, daß bei kleinem $\triangle F$ sich die Wirkung von N und T gleichmäßig über diese Fläche $\triangle F$ verteile, nennt man den auf die Flächeneinheit von $\triangle F$ entfallenden Teil von N bzw. T

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{N}{\triangle F} \text{ die Normalspannung } \sigma \\[2ex] \dfrac{T}{\triangle F} \text{ die Schubspannung } \tau\end{array}\right\} \text{ an jener Stelle.}$$

Nimmt man $\triangle F$ von der Form eines sehr kleinen Quadrates, dessen eine Seite senkrecht zur Richtung von T steht, und schneidet man aus dem Stab ein kleines senkrechtes Prisma $OPNM$ (Fig. 3a) aus, dessen Grundfläche $MN = \triangle F$ sei (in Fig. 3a projiziere sich $\triangle F$ in MN und das Prisma in dem Rechteck $OPNM$), nimmt man ferner die andere Grundfläche OP als fest an, so tritt infolge der elastischen Wirkung von T eine Verschiebung von MN in seiner Ebene nach $M'N'$ und eine Änderung der rechten Winkel bei O und P um den Winkel γ ein, indem das senkrechte Prisma $OPNM$ sich in das schiefe $OPN'M'$ verwandelt.

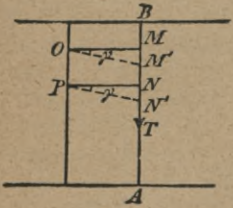


Fig. 3a.

Die gegenseitige Verschiebung $MM' = NN'$ der beiden Grundflächen MN und OP ist dann ausgedrückt durch

$$MM' = NN' = OM \cdot \operatorname{tg} \gamma = PN \cdot \operatorname{tg} \gamma .$$

Wählt man die Länge der Seitenkante $OM = PN = 1$ cm, so wird diese Verschiebung

$$MM' = NN' = \operatorname{tg} \gamma$$

oder bei kleinem Winkel γ nahezu

$$MM' = NN' = \gamma .$$

Bezeichnet man nun die gegenseitige Verschiebung $MM' = NN'$ der beiden um die Entfernung 1 cm (Längeneinheit) voneinander abstehenden Elemente MN und OP als relative Verschiebung oder kurz als Schiebung, so besagt obige Gleichung:

Die Schiebung ist gleich der (in analytischem Maß ausgedrückten) Änderung γ des rechten Winkels zweier ursprünglich senkrecht zueinander stehender Flächenelemente (OP und OM).

Bezeichnet man ferner als Schubkoeffizient β denjenigen Wert von γ, um welchen der rechte Winkel der beiden senkrecht aufeinander stehenden Flächenelemente OP und OM unter Einfluß einer Schubspannung $\tau = 1$ kg/qcm sich ändert (bzw. die Strecke, um welche zwei um die Längeneinheit voneinander abstehende Flächenelemente OP und MN unter Wirkung einer Schubspannung $\tau = 1$ kg sich gegenseitig verschieben), so ergibt sich als Wert der Schiebung für die Schubspannung τ, falls auf Grund von Versuchen γ proportional τ genommen wird:

$$\underline{\gamma = \beta\tau} \quad \text{(Elastizitätsgesetz der Schiebung),}$$

d. h. die Schiebung ist gleich dem Produkt aus Schubkoeffizient und Schubspannung.

Anmerkung 1. Der reziproke Wert von β $\left(\frac{1}{\beta}\right)$ heißt Elastizitätsmodul für Schub (vgl. § 2, Anmerk. 3).

Anmerkung 2. Hinsichtlich des Zusammenhanges von β und α ergibt sich nach Bach, Elastizität und Festigkeit für isotropes (vgl. § 1) Material

$$\beta = \tfrac{5}{2}\alpha \text{ bis } \tfrac{8}{3}\alpha .$$

Weiteres s. Bach, Elastizität und Festigkeit.

§ 4. Zulässige Beanspruchung für Zug, Druck und Schub bei ruhender und veränderlicher Belastung.

Soll ein Bauwerk oder eine Maschine hinreichende Sicherheit gegen Bruch bieten, so darf vor allem an keiner Stelle irgend eines Konstruktionsteiles der Wert von σ und τ die entsprechende Bruchfestigkeit überschreiten. Hierzu tritt aber noch die Forderung, daß auch bleibende bzw. zu große Deformation des Materiales vermieden werden soll, d. h., daß die Werte von σ und τ die bezügliche Elastizitätsgrenze nicht überschreiten. Außerdem ist weiteren die Festigkeit beeinträchtigenden, der genauen Rechnung unzugänglichen Einflüssen wie Stößen, Rost, Mängeln des Materiales und der Berechnungsmethoden usw. Rechnung zu tragen. Man sucht all diesen Forderungen dadurch gerecht zu werden, daß man als praktische Bruchfestigkeit (zulässige Beanspruchung) des Materials nur einen Bruchteil der tatsächlich dem Material zukommenden Bruchfestigkeit annimmt. Das Verhältnis

$$\frac{\text{zulässige Beanspruchung}}{\text{tatsächliche Bruchfestigkeit}} = \frac{1}{m} \quad (m > 1)$$

heißt Sicherheitskoeffizient.

Der Sicherheitskoeffizient ist im allgemeinen eine dem Ermessen des Konstrukteurs anheimgegebene Größe, der damit einem bestimmten Material gegenüber jeden beliebigen Sicherheitsgrad zum Ausdruck bringen kann. Bei Walzeisen und Stahl ist es üblich $m = 3$, bei Holz $m = 10$, bei Gußeisen $m = 6$ zu nehmen; man redet dann von 3facher, 10facher usw. Sicherheit.

Im folgenden sei die zulässige Beanspruchung stets mit k (bzw. k_z auf Zug, k auf Druck, k_s auf

Schub, k_b auf Biegung, k_d auf Drehung) bezeichnet, so daß allgemein $k = \frac{1}{m} t$ ist (t vgl. § 1).

Die Werte von t und k sind nur dann von einem von der Wirkungsweise der äußeren Kräfte unabhängigen Werte, wenn diese eine langsam auf ihren Höchstwert anwachsende und dann eine bleibende ist.

Durch Erfahrung und Versuche ist aber bei axial beanspruchten prismatischen Stäben aus Walzeisen, Flußeisen, Stahl und anderen Materialien festgestellt, daß ein rascher und häufiger Übergang vom spannungslosen in den beanspruchten Zustand oder von Zug in Druck und umgekehrt die Festigkeit des Materials herabsetzt auf Werte, die von den Grenzwerten der äußeren Kräfte abhängig sind.

Die Festigkeit bei veränderlicher Belastung heißt *Arbeitsfestigkeit*.

Besondere Fälle der Arbeitsfestigkeit sind:

die *Ursprungsfestigkeit* u, d. h. die Festigkeit eines Stabes, der nach dem beanspruchten Zustand wieder in den unbeanspruchten übergeht;

die *Schwingungsfestigkeit* s, d. h. die Festigkeit eines Stabes, der eine aufeinander folgende Beanspruchung von wechselndem Sinne und gleicher Größe erleidet.

(Bei Fluß- und Walzeisen z. B. ist $t : u : s = 3 : 2 : 1$.)

Mittlere Zahlwerte der zulässigen Beanspruchung k bei ruhender Belastung (kg/qcm):

Material	Zug (k_z)	Druck (k)	Schub (k_s)
Schmiede- (Walz-) Eisen	750—1000	750—1000	600—750
Eisendraht	1200	—	—
Flußeisen	900—1200	900—1200	720—960

Material	Zug (k_z)	Druck (k)	Schub (k_s)
Gußeisen	300	900	300
Gußstahl	1500	1500	1200
Flußstahl	1200—1500	1200—1500	960—1200
Eichen-, Buchen- Holz	100	80	20
Kiefern-, Tannen- Holz	100	60	10
Granit	—	45	—
Kalkstein	—	25	—
Sandstein	—	15—30	—
Kalkstein-, Sandstein- Gemäuer	—	8—10	—
Steine aus Zement	—	12	—
Guter Baugrund aus festem Sand-, Lehm- oder Tonboden	—	2,5—5	—

Weitere Zahlwerte s. Bach, Die Maschinenelemente, Taschenbuch der Hütte, die Normen der Berliner Baupolizei vom 21. Febr. 1887 und des preuß. Ministeriums der öffentl. Arbeiten vom 16. Mai 1890.

Anmerkung. Die zulässige Beanspruchung des Betons ist sehr schwankend und hängt vom Mengenverhältnis und den Eigenschaften der zur Mischung verwendeten Materialien sowie vom Wasserzusatz ab. Zunehmendes Alter erhöht die Druckfestigkeit, ebenso der Einbau von Eisenstäben die Zug- und Druckfestigkeit. Mit der Abnahme des Prozentsatzes des Zementgehaltes nimmt die Druckfestigkeit ab; sie nimmt zu, wenn an Stelle runden Kieses scharfkantiger Steinschlag tritt.

Mittlere Werte der zulässigen Beanspruchung bei veränderl. Belastung für Eisen und Stahl (in kg/qcm).

Für Maschinenkonstruktionen möge auf die in Bach, Die Maschinenelemente, enthaltenen, mit *b* und *c* bezeichneten Spalten der Tafel der zulässigen Beanspruchungen verwiesen sein.

Für Brückenkonstruktionen und Hochbauten aus Eisen und Stahl mit veränderlicher Belastung pflegt man häufig für Fachwerkstäbe folgende Werte zugrunde zu legen (bei dreifacher Sicherheit):

1. Bei veränderlicher Belastung in gleichbleibendem Sinne: ($B_{\min}$ der untere, $B_{\max}$ der obere Grenzwert der axialen Kraft P).

Nach Launhardt:

Für Schmiedeisen (Walzeisen) $\qquad$ Flußeisen

$$k_s = k = 700\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{B_{\min}}{B_{\max}}\right) \qquad 800\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{B_{\min}}{B_{\max}}\right)$$

Flußstahl

$$900\left(1 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{B_{\min}}{B_{\max}}\right)\ \text{kg/qcm}.$$

Bei Übergang vom beanspruchten in den spannungslosen Zustand ist $B_{\min} = 0$, bei ruhender Belastung $B_{\min} = B_{\max}$ zu setzen.

2. Bei veränderlicher Belastung in wechselndem Sinne (Wechsel von Zug und Druck): ($B'_{\max}$ der absolut kleinere der beiden entgegengesetzt gerichteten Höchstwerte der axialen Kraft P).

Nach Weyrauch:

$$k_s = k = 700\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{B'_{\max}}{B_{\max}}\right) \qquad 800\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{B'_{\max}}{B_{\max}}\right)$$

$$900\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{B'_{\max}}{B_{\max}}\right)\ \text{kg/qcm}.$$

(Vgl. Weyrauch, Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung.)

II. Kapitel.

Trägheits- und Widerstandsmoment ebener Figuren.

§ 5. Definitionen.

In der Festigkeitslehre bezeichnet man das Produkt eines Flächenelementes $\triangle F$ in das Quadrat seines senkrechten Abstandes y (Fig. 4) von einer festen Geraden (Achse) L

$$\triangle F \cdot y^2$$

als das axiale Trägheitsmoment des Elementes in Beziehung auf diese Achse, und das Produkt des

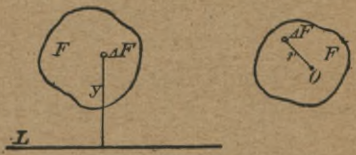


Fig. 4.

Elementes in das Quadrat seiner Entfernung r von einem festen Punkt O (Pol) der Ebene der Figur (Fig. 4)

$$\triangle F \cdot r^2$$

als das polare Trägheitsmoment des Elementes in Beziehung auf diesen Pol.

Dementsprechend bezeichnet die Summe dieser Produkte für alle Elemente einer ebenen Figur

$$\Sigma \triangle F \cdot y^2 = J_F^L$$

bzw.

$$\Sigma \triangle F \cdot r^2 = J_F^O$$

das axiale bzw. polare Trägheitsmoment der Figur F in Beziehung auf Achse L bzw. Pol O.

Die Quotienten

$$\frac{J_F^L}{y_{\max}} = \frac{\Sigma \triangle F \cdot y^2}{y_{\max}} = W_F^L \quad .$$

bzw.
$$\frac{J_F^O}{r_{\max}} = \frac{\Sigma \triangle F \cdot r^2}{r_{\max}} = W_F^O\,,$$

wo $y_{\max}$ das absolut größte y, $r_{\max}$ das größte r aller Elemente der Figur bedeutet, bezeichnet man als axiales bzw. polares Widerstandsmoment W der Figur in Beziehung auf Achse L bzw. Pol O. (Gewöhnlich ist L eine durch den Schwerpunkt gehende Achse und O mit dem Schwerpunkt S der Figur zusammenfallend.)

§ 6. Sätze über das Trägheitsmoment.

1. Ist eine Figur vom Inhalte F gleich der Summe bzw. Differenz zweier Figuren von den Inhalten F_1 und F_2 (Fig. 5):

$$F = F_1 \pm F_2\,,$$

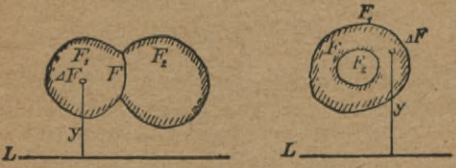


Fig. 5.

so liefert die Definition § 5 unmittelbar:

$$J_F^L = J_{F_1}^L \pm J_{F_2}^L\,;$$

d. h.:

I. Das axiale Trägheitsmoment einer Figur, deren Inhalt gleich der Summe bzw. Differenz der Inhalte zweier Figuren ist, ist gleich der Summe bzw. Differenz der Trägheitsmomente beider Figuren in Beziehung auf dieselbe Achse.

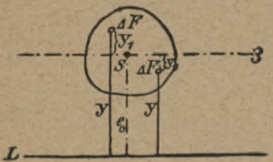


Fig. 6.

2. Ist S der Schwerpunkt der Figur, e_0 dessen senkrechter Abstand von Achse L (Fig. 6), so läßt sich mit Beziehung auf die Fig. 6, in der s durch S parallel L gezogen ist, setzen:

$$y = e_0 \pm y_1,$$

und mit diesem Wert wird

$$\begin{aligned} J_F^L &= \Sigma \triangle F \cdot y^2 = \Sigma \triangle F \cdot (e_0 \pm y_1)^2 \\ &= \Sigma \triangle F \cdot e_0^2 \pm 2 \Sigma \triangle F \cdot e_0 y_1 + \Sigma F \cdot y_1^2 \\ &= e_0^2 \Sigma \triangle F \pm 2 e_0 \Sigma \triangle F \cdot y_1 + J_F^s. \end{aligned}$$

Da aber $\Sigma \triangle F \cdot y_1$ das Moment der Fläche F in Beziehung auf Schwerpunktsachse s bedeutet und somit gleich 0 ist (vgl. Bdchen. Statik I), so kommt:

$$J_F^L = e_0^2 F + J_F^s;$$

d. h.:

II. Das axiale Trägheitsmoment einer Figur ist gleich dem axialen Trägheitsmoment derselben in Beziehung auf die zur gegebenen Achse L parallele Schwerpunktsachse s vermehrt um das Produkt des Inhaltes F der Figur in das Quadrat ihres Schwerpunktsabstandes e_0 von jener Achse.

3. Sind (xy) die Koordinaten des als Punkt gedachten Flächenelementes $\triangle F$ in Beziehung auf ein rechtwinkliges

Koordinatensystem, dessen Ursprung der Pol O ist (Fig. 7), so kommt

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

daher

$$J_F^O = \Sigma \triangle F \cdot r^2 = \Sigma \triangle F \cdot (x^2 + y^2)$$
$$= \Sigma \triangle F x^2 + \Sigma \triangle F \cdot y^2 = J_F^{y\text{-Achse}} + J_F^{x\text{-Achse}},$$

somit:

III. Das polare Trägheitsmoment einer Figur ist gleich der Summe der beiden axialen Trägheitsmomente derselben, die in Beziehung auf zwei beliebige im Pole senkrecht aufeinander stehende Achsen gebildet werden können.

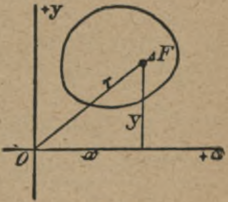


Fig. 7.

§ 7. Werte von J u. W für wichtige Querschnittsformen.

I. Dreieck.

In Beziehung auf Seite a (Fig. 8) ist das axiale Trägheitsmoment eines unendlich schmalen Flächenstreifens von der Breite b, der Höhe dy und dem Abstand y von jener Seite

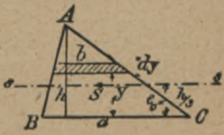


Fig. 8.

$$\triangle F \cdot y^2 = (b\,dy)\,y^2,$$

aber da

$$b : a = h - y : h \quad (h \text{ Höhe senkr. zu } a),$$

also

$$b = \frac{a(h-y)}{h},$$

so kommt für das Trägheitsmoment des ganzen Dreiecks in Beziehung auf Seite a

$$\underline{J_F^a} = \Sigma \triangle F \cdot y^2 = \int_{y=0}^{y=h} \frac{a(h-y)}{h} \cdot dy \cdot y^2 = \underline{\frac{a h^3}{12}},$$

und da nach Satz II, § 6

$$J_F^a = J_F^s + F \cdot e_0^2 = J_F^s + \left(\frac{a h}{2}\right) \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2,$$

so kommt hieraus unter Benutzung des gefundenen Wertes von J_F^a:

$$\underline{J_F^s = \frac{a h^3}{36}} \text{ und demnach } \underline{W_F^s} = \frac{\frac{a h^3}{36}}{\frac{2}{3} h} = \underline{\frac{a h^2}{24}} \text{ (vgl. § 5).}$$

II. Rechteck.

In Beziehung auf Seite BC (Fig. 9) ist das axiale Trägheitsmoment des Flächenelementes von der Breite $= BC = b$, der Höhe dy und dem Abstand y von BC:

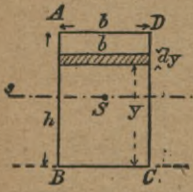


Fig. 9.

$$\triangle F \cdot y^2 = (b\, dy)\, y^2$$

und somit für das ganze Rechteck:

$$\underline{J_F^{BC}} = \int_{y=0}^{y=h} (b\, dy)\, y^2 = \underline{\frac{b h^3}{3}},$$

und da nach Satz II, § 6:

$$J_F^{BC} = J_F^s + F e_0^2 = J_F^s + (b h) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

so kommt hieraus unter Benutzung des gefundenen Wertes von J_F^{BC}

$$\underline{J_F^s = \frac{b\,h^3}{12}}$$

und nach § 5 das Widerstandsmoment des Rechtecks in Beziehung auf Achse s:

$$\underline{W_F^s} = \frac{\frac{b\,h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \underline{\frac{b\,h^2}{6}}\,.$$

Spezieller Fall: Quadrat ($b = h$)

$$\underline{J_F^s = \frac{h^4}{12}}\,; \quad \underline{W_F^s = \frac{h^3}{6}}\,.$$

III. Kreis.

Das polare Trägheitsmoment eines unendlich schmalen ringförmigen Elementes vom Radius ϱ, der Breite $d\varrho$

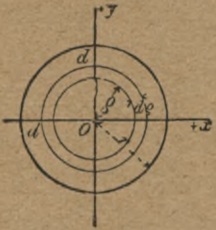


Fig. 10.

in Beziehung auf seinen Mittelpunkt O (Fig. 10) ist:

$$\triangle F \cdot \varrho^2 = (2\,\pi\,\varrho)\,d\varrho \cdot \varrho^2 = 2\,\pi\,\varrho^3\,d\varrho\,,$$

somit für den ganzen Kreis vom Radius r das polare Trägheitsmoment in Beziehung auf den Mittelpunkt:

$$\underline{J_F^0} = \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} 2\pi\varrho^3 d\varrho = \underline{\frac{\pi r^4}{2}} = \underline{\frac{\pi d^4}{32}} = \underline{ca\frac{d^4}{10}}$$

$$\underline{W_F^0} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \underline{\frac{\pi d^3}{16}} = \underline{ca\frac{d^3}{5}}.$$

In bezug auf zwei senkrecht zueinander stehende senkrechte Durchmesser ist nach Satz III des § 6:

$$J_F^0 = J_F^d + J_F^d = 2\,J_F^d,$$

daher $$\underline{J_F^d} = \tfrac{1}{2}J_F^0 = \underline{\frac{\pi r^4}{4}} = \underline{\frac{\pi d^4}{64}} = \underline{ca\frac{d^4}{20}}$$

und $$\underline{W_F^d} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \underline{\frac{\pi d^3}{32}} = \underline{ca\frac{d^3}{10}}.$$

IV. Halbkreis.

J_F^d ist die Hälfte des Wertes von J_F^d für den Vollkreis, daher

$$\underline{J_F^d} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} = \underline{ca\frac{d^4}{40}}.$$

V. Kreisring.

(Äußerer Durchmesser D, innerer Durchmesser d, Breite $\frac{D-d}{2} = \delta$, mittlerer Durchmesser $\frac{D+d}{2} = d_1$.)

Nach Satz I, § 6 ist in Beziehung auf einen Durchmesser d

$$J_F^d = J_{F_2}^d - J_{F_1}^d = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\underline{J_F^d} = \underline{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} = \underline{\text{ca}\,0{,}393\,\delta \cdot d_1^3}\,.$$

Unter Benutzung dieser Resultate und der Sätze des § 6 bzw. der Definitionen des § 5 lassen sich die in Tafel I enthaltenen Werte von J und W leicht ableiten.

Numerische Beispiele.

1. Gesucht axiales J_F^s und W_F^s für die in Figur 11 dargestellte schraffierte Figur ($F = 29{,}5$ qcm; Abstand des Schwerpunktes S vom unteren Ende des Steges 8,52 cm).

Auflösung:

$$F = AA'B'B - 2\,CA'D'D\,,$$

somit nach Satz I, § 6 in Beziehung auf Achse I:

$$J_F^I = J_{AA'B'B}^I - 2\,J_{CA'D'D}^I$$

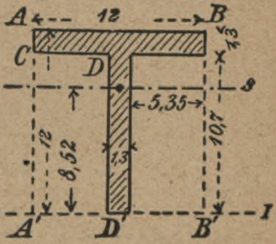


Fig. 11.

und gemäß den Formeln der Tafel I

$$J_F^I = \frac{12 \cdot 12^3}{3} - 2 \cdot \frac{5{,}35 \cdot 10{,}7^3}{3} = 2543 \text{ cm}^3.$$

Nach Satz II, § 6 ist aber:

$$J_F^I = J_F^s + F e_0^2 = J_F^s + 29{,}5 \cdot 8{,}52^2\,,$$

daher

$$J_F^s = 2543 - 29{,}5 \cdot 8{,}52^2 = \underline{402 \text{ cm}^4}$$

und

$$\underline{W_F^{s}} = \frac{402}{8,52} = \underline{47,2 \text{ cm}^3}\,.$$

2. Gesucht polares J_F^S und W_F^S der in Figur 12 dargestellten Fläche F.

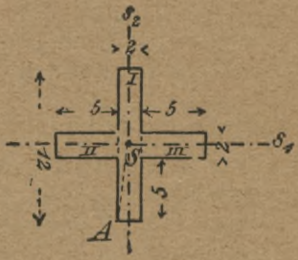


Fig. 12.

Auflösung:

$$F = I + II + III\,,$$

daher

$$J_F^{s_1} = J_I^{s_1} + J_{II}^{s_1} + J_{III}^{s_1}$$
$$= \frac{2 \cdot 12^3}{12} + \frac{5 \cdot 2^3}{12} + \frac{5 \cdot 2^3}{12} = 295 \text{ cm}^4.$$

Nach Satz III, § 6 ist aber:

$$\underline{J_F^S} = J_F^{s_1} + J_F^{s_2} = 2\,J_F^{s_1} = \underline{590 \text{ cm}^4}$$

und

$$\underline{W_F^S} = \frac{J_F^S}{SA} = \frac{590}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = 97 \text{ cm}^3\,.$$

§ 8. Graphische Bestimmung von J_F^L für beliebig umgrenzte Figuren. (Nach Mohr.)

a) In Beziehung auf eine Schwerpunktsachse s. (Fig. 13a und b.)

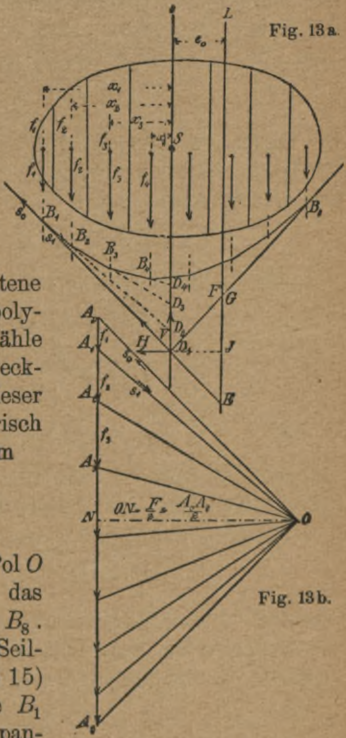


Fig. 13a.

Fig. 13b.

Man zerlege die gegebene Figur vom Inhalte F (Fig. 13a) durch Parallelen zu s in schmale Streifen, bringe im Schwerpunkt jedes Streifens eine zu s parallele, dem Inhalt des Streifens gleiche Kraft f an und konstruiere für das erhaltene Kräftesystem ein Kräftepolygon $A_0 A_1 A_2 \ldots A_8$. Wähle einen beliebigen, am zweckmäßigsten einen zu dieser Strecke $A_0 A_8$ symmetrisch gelegenen, von $A_0 A_8$ um

$$ON = \frac{F}{2} = \frac{A_0 A_8}{2}$$

senkrecht abstehenden Pol O und konstruiere hierzu das Seilpolygon $B_1 B_2 B_3 \ldots B_8$.

Nach der Lehre vom Seilpolygon (Statik Bd. I, § 15) sind die in der Ecke B_1 sich schneidenden Seilspannungen s_0 und s_1, deren Größe und Sinn durch die

Polstrahlen OA_0 und A_1O angegeben wird, mit f_1 im Gleichgewicht. Verschiebt man nun s_0 in ihrer Wirkungslinie mit ihrem Angriffspunkt bis zum Punkt D_1 der Achse s, zerlegt sie dort in Komponenten V und H parallel und senkrecht zu der Richtung der f, so ist, wie aus Figur 13b ersichtlich, H gleich dem Abstand des Pols O von A_0A_8, also

$$H = \frac{F}{2}.$$

Der Gleichgewichtszustand der drei Kräfte f_1, s_0 und s_1 liefert die Momentengleichung um den Schnittpunkt D_2 von s_1 mit Achse s:

$$-f_1 x_1 + H \cdot D_2 D_1 = 0$$

und durch Multiplikation mit x_1

$$-f_1 x_1^2 + H \cdot (x_1 \cdot D_2 D_1) = 0\,,$$

also

$$-f_1 x_1^2 + \frac{F}{2}(x_1 \cdot D_2 D_1) = 0\,,$$

woraus

$$f_1 x_1^2 = F \cdot \triangle D_1 D_2 B_1\,.$$

Bei geringer Breite des Streifens f_1 stellt $f_1 x_1^2$ mit ziemlicher Annäherung das Trägheitsmoment des Streifens f_1 in Beziehung auf Achse s vor, also

$$J_{f_1}^s = F \cdot \triangle D_1 D_2 B_1\,.$$

Dieselbe Betrachtungsweise für jede folgende Ecke B des Seilpolygons angestellt liefert für die Trägheitsmomente der entsprechenden Streifen in Beziehung auf s

$$J_{f_2}^s = F \cdot \triangle D_2 D_3 B_2\,,$$

$$J_{f_2}^s = F \cdot \triangle D_3 D_4 B_3 \text{ usw.},$$

daher durch Addition

$$J_F^s = \Sigma J_f^s$$

$$= F(\triangle D_1 D_2 B_1 + \triangle D_2 D_3 B_2 + \triangle D_3 D_4 B_3 + \ldots).$$

Da die durch B_8 gehende letzte Seilpolygonseite die Schwerpunktsachse s in demselben Punkte D_1 trifft wie die erste, so stellt der Klammerausdruck den Inhalt F' der polygonal umgrenzten Fläche $D_1 B_1 B_2 \ldots B_8$ vor, daher ist angenähert

$$\underline{J_F^s = F \cdot F'.}$$

Fig. 13c.

Dieser Wert nähert sich der genauen Größe von J_F^s um so mehr, je schmäler die Streifen sind. Bei ∞ schmalen Streifen wird das Seilpolygon zur Seilkurve (Fig. 13c) und F' demnach von zwei Geraden und der Seilkurve begrenzt.

b) L sei eine beliebige Achse.

Man ziehe zu L die parallele Schwerpunktsachse s und bestimme nach Obigem J_F^s. J_F^L ergibt sich dann nach Satz II, § 6:

$$J_F^L = J_F^s + F \cdot e_0^2 \text{ (Fig. 13a und b).}$$

Nun ist $\triangle G D_1 E \sim \triangle O A_0 A_8$, also, wenn $D_1 J$ senkrecht zu den Kräften f gezogen wird:

$$EG : D_1 J = A_0 A_8 : ON$$

$$= F : \frac{F}{2} = 2 : 1,$$

oder $$EG = 2\,D_1 J = 2\,e_0\,,$$

somit $$\triangle\, G D_1 E = \frac{EG \cdot D_1 J}{2} = e_0^2\,,$$

daher auch

$$\underline{J_F^L} = J_F^s + F \cdot \triangle\, G D_1 E = \underline{F(F' + \triangle\, G D_1 E)}\,.$$

III. Kapitel.

Biegungs- (Angriffs-) Moment und Transversalkraft.

§ 9. Definitionen.

Ein prismatischer oder zylindrischer, als Träger dienender und an beliebigen Punkten abgestützter Stab

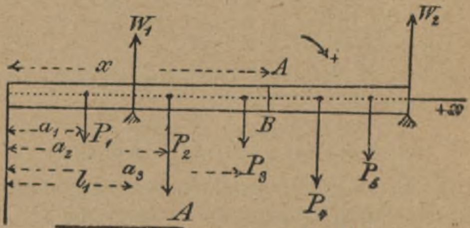


Fig. 14.

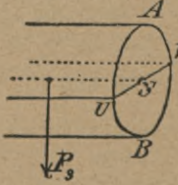


Fig. 15.

(Fig. 14) werde in Punkten seiner Schwerpunktsachse von beliebigen vertikalen Lasten angegriffen, die sämtlich in einer Ebene (Kraftebene) liegen und Auflagerreaktionen in derselben Ebene und normal zur Stabachse hervorrufen. Das linke Balkenende sei Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Stabachse als x-Achse. Ein Querschnitt AB im Abstande x vom Ursprung schneidet die durch die Stabachse gehende, zur Richtung der Lasten senkrechte Ebene längs UV (Fig. 15). Dann nennt man:

a) die algebraische Summe der statischen Momente der sämtlichen an dem links von AB gelegenen Stabteil angreifenden Lasten und Auflagerwiderstände in Beziehung auf UV (oder in Beziehung auf Punkt S) das Biegungsmoment (Angriffsmoment) M_x in Beziehung auf Querschnitt x:

$$M_x = W_1(x - l_1) - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3)$$

(Kräfte in kg, Längen in cm, M_x in kgcm, Uhrzeigersinn positiv);

b) die Resultante der am links von AB gelegenen Stabteil angreifenden Lasten und Auflagerwiderstände (gleich deren algebraischer Summe) die Transversal- (Vertikal-) Kraft V_x in Beziehung auf Querschnitt x:

$$V_x = W_1 - P_1 - P_2 - P_3 .$$

Die Kenntnis von M_x und V_x setzt also diejenige der Auflagerwiderstände voraus. Wir beschränken uns daher zunächst auf Träger, für welche dieselben statisch bestimmbar sind oder für welche diese bei Berechnung von M_x und V_x nicht in Betracht kommen; ferner beschränken wir uns auf den Fall ruhender Belastung und den Stab mit geradliniger Achse.

§ 10. Biegungsmomentenlinien für den Träger mit zwei Stützen.

a). Bei konzentrierter Belastung.

Für einen beliebigen Querschnitt (Fig. 16) des konzentriert belasteten Trägers erhält man nach vorigem Paragraphen:

wenn x zwischen P_1 und P_2: $M_x = - P_1 x$,

wenn x zwischen P_2 und W_1: $M_x = - P_1 x - P_2(x - a_2)$

$$= x(-P_1 - P_2) + P_2 a_2,$$

wenn x zwischen W_1 und P_3: $M_x = - P_1 x - P_2(x - a_2)$

$$+ W_1(x - l_1) = x(-P_1 - P_2 + W_1) + P_2 a_2 - W_1 l_1,$$

wenn x zwischen P_3 und P_4: $M_x = - P_1 x - P_2(x - a_2)$

$$+ W_1 (x - l_1) - P_3 (x - a_3) = x(-P_1 - P_2 + W_1 - P_3)$$

$$+ P_2 a_2 - W_1 l_1 + P_3 a_3 \text{ usw.},$$

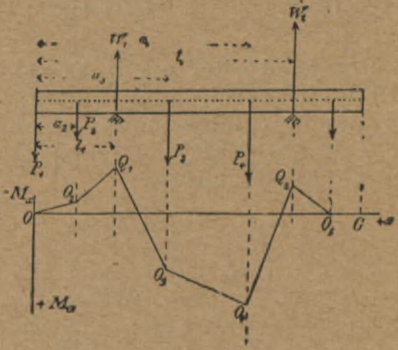


Fig. 16.

wobei die a die Abstände der Angriffspunkte der P vom linken Balkenende bezeichnen.

Diese Werte von M_x sind gültig, solange x je innerhalb der angegebenen Grenzlagen bleibt. Trägt man nun für irgend einen Querschnitt x das zugehörige M_x als Ordinate senkrecht zur x-Achse ab, und zwar ein positives M_x nach unten, ein negatives M_x nach oben, so liegen, wie aus obigen Gleichungen ersichtlich, die Endpunkte dieser Ordinaten, solange x innerhalb zweier aufeinander folgender Kräfte bleibt, auf einer Geraden. Diese ändert sich, wenn x in das benachbarte Intervall tritt. Der auf diese Weise entstehende polygonale Geradenzug $O\,O_2\,Q_1\,O_3\,O_4\,Q_2\,O_5\,G$ heißt **Biegungsmomentenlinie**.

Für die Endpunkte des Trägers ist $M_x = 0$, daher geht die Biegungsmomentenlinie durch die Trägerenden.

Für konzentrierte Belastung ist die Biegungsmomentenlinie ein polygonaler, aus Geradenstücken bestehender Zug, dessen Ecken auf den Wirkungslinien der Lasten und der Auflagerwiderstände liegen.

b) Bei stetig gleichförmiger Belastung von q kg/cm.

Für einen Querschnitt zwischen C_1 und A_1 (Fig. 17) wird, da die Resultante der links vom Querschnitt angreifenden Belastungen gleich $q\,x$ ist und in der Mitte von x angreift,

$$M_x = -q\,x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{q\,x^2}{2},$$

für x zwischen A_1 und A_2 wird analog

$$M_x = -\frac{q\,x^2}{2} + W_1(x - l_1),$$

für x zwischen A_2 und C_2 wird analog

$$M_x = -\frac{q x^2}{2} + W_1 (x - l_1) + W_2 (x - l_2) .$$

Diese Gleichungen enthalten x im zweiten, M_x im ersten Grad, daher liegen die Endpunkte der Ordinaten M_x auf Parabelzweigen, die für jeden der drei

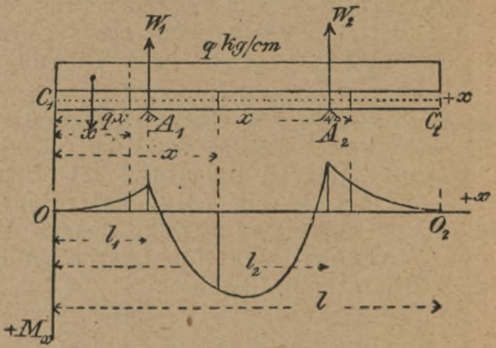


Fig. 17.

Zwischenräume verschiedenen Parabeln angehören. Die beiden äußeren Zweige haben die x-Achse als Scheiteltangente. Daher:

Für stetig gleichförmige Belastung ist die Biegungsmomentenlinie ein aus Parabelbögen bestehender polygonaler Zug, dessen Ecken auf den Wirkungslinien von W_1 und W_2 liegen.

Spezieller Fall:

Stützen am Trägerende (Fig. 18).

Für irgend einen Querschnitt x wird

$$M_x = -\frac{q\,x^2}{2} + W_1\,x = -\frac{q\,x^2}{2} + \frac{q\,l}{2}\cdot x = \frac{q\,x}{2}(l - x),$$

und für $x = 0$ oder $x = l$

$$M_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad M_l = 0\,.$$

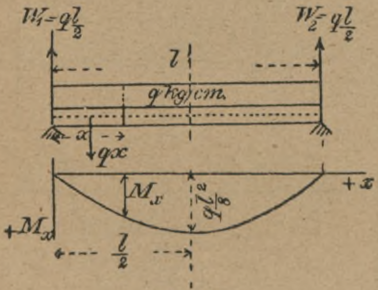


Fig. 18.

Ferner für den tiefsten Punkt

$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = -q\,x + \frac{q\,l}{2} = 0\,,$$

daher
$$x = \frac{l}{2}\,,$$

also Scheitel der Parabel in Trägermitte und Biegungsmoment für $x = \frac{l}{2}$

$$\underline{M_{\frac{l}{2}} = \frac{q\,l^2}{8}}\,.$$

c) Bei kombinierter, konzentrierter und stetig gleichförmiger Belastung.

Bei Biegungsmomentenlinie ergibt sich dadurch, daß für irgend einen Querschnitt M_x gleich der algebraischen Summe der diesem Querschnitt entsprechenden Biegungsmomente der beiden Belastungssysteme ist (Fig. 19).

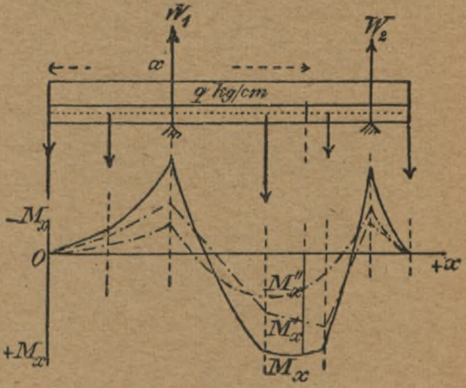


Fig. 19.

Ist M_x' das Biegungsmoment des Querschnittes x für konzentrierte, M_x'' dasjenige für gleichförmige stetige Last, so ist das kombinierte Biegungsmoment

$$M_x = M_x' + M_x'' \text{ (alg. Summe)},$$

d. h. M_x wird wieder vom zweiten Grade in x. Daher:

Für kombinierte, konzentrierte und stetig gleichförmige Last ist die Biegungsmomentenlinie ein aus Parabelbogen bestehender polygonaler Zug, dessen Ecken auf den Wirkungslinien der konzentrierten Lasten und der Auflagerdrücke liegen.

§ 11. Biegungsmomentenlinien für den einseitig eingespannten Träger.

a) Bei konzentrierter Belastung.

Der Ausdruck M_x ergibt sich (Fig. 20) für

x zwischen C_0 und P_1: $M_x = 0$,

x zwischen P_1 und P_2: $M_x = -P_1(x - a_1) = x(-P_1) + P_1 a_1$,

x zwischen P_2 und P_3: $M_x = -P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) = x(-P_1 - P_2) + (P_1 a_1 + P_2 a_2)$,

x zwischen P_3 und P_4: $M_x = -P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3) = x(-P_1 - P_2 - P_3) + (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3)$ usw.

Da diese Ausdrücke vom ersten Grade sind, so folgt:

Bei konzentrierter Belastung ist die Biegungsmomentenlinie (bis zur Einspannstelle) ein aus Geradenstükken bestehender polygonaler Zug, der ganz auf der negativen Seite der M_x verläuft und dessen Ecken auf den Wirkungslinien der Lasten liegen.

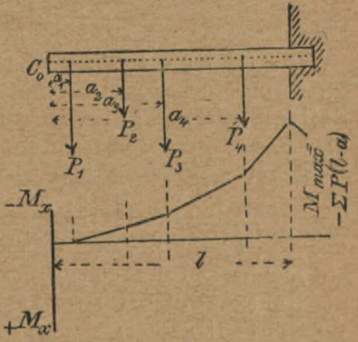


Fig. 20.

b) Bei stetig gleichförmiger Belastung. (q kg/cm.)

Für irgend einen Querschnitt wird (Fig. 21)

$$M_x = -q\,x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{q\,x^2}{2}.$$

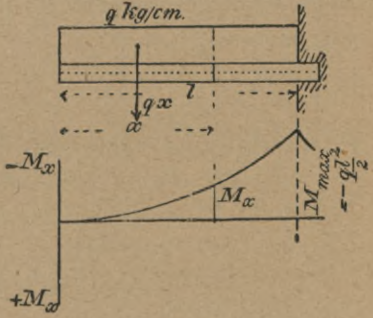


Fig. 21.

Daher:

Bei stetig gleichförmiger Last ist die Biegungsmomentenlinie eine ganz auf der negativen Seite der M_x verlaufende Parabel mit der x-Achse als Scheiteltangente und dem Ursprung als Scheitel.

c) Bei kombinierter, konzentrierter und stetig gleichförmiger Belastung (Fig. 22).

Für diesen Fall ergibt dieselbe Betrachtung wie § 10, c:

Bei kombinierter Belastung ist die Biegungsmomentenlinie ein ganz auf der negativen Seite der M_x verlaufender polygonaler, aus Parabelbogen bestehender Zug, dessen Ecken auf den Wirkungslinien der konzentrierten Lasten liegen.

§ 12. Maximalbiegungsmoment M_{max}.

Im allgemeinen wird M_{max} durch die absolut größte Ordinate der Biegungsmomentenlinie dargestellt.

Für den Träger mit zwei Stützen lehren die Figuren des § 10:

a) Bei konzentrierter Belastung tritt M_{max} an einer Ecke der Biegungsmomentenlinie auf, kann also

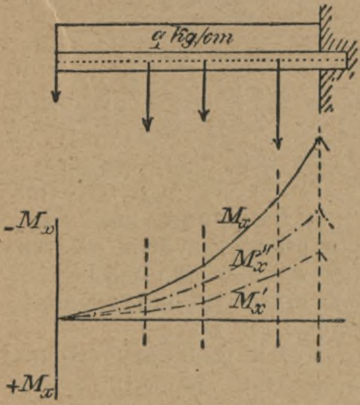


Fig. 22.

nur über einer Stütze oder in der Wirkungslinie einer der Lasten liegen.

b) Bei stetig gleichförmiger Belastung kann M_{max} über einer Stütze oder dort liegen, wo die Biegungsmomentenlinie ihr Maximum (Tangente parallel x-Achse) hat. Im letzteren Fall ergibt sich das zugehörige x nach den Regeln der Analysis aus der Gleichung

$$\frac{d M_x}{d x} = 0 .$$

Spezieller Fall:

Stützen am Trägerende (Fig. 18):

$$M_x = -\frac{q x^2}{2} + \frac{q l}{2} \cdot x \text{ (vgl. § 10)},$$

$$\frac{d M_x}{d x} = -q x + \frac{q l}{2} = 0,$$

also
$$x = \frac{l}{2},$$

daher

$$\underline{M_{max}} = M_{\frac{l}{2}} = -\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = \underline{\frac{q l^2}{8}} = \underline{\frac{Q l}{8}},$$

wenn $Q = q l$ die Gesamtlast bezeichnet.

c) Bei kombinierter, konzentrierter und stetig gleichförmiger Belastung. M_{max} liegt entweder an einer Ecke des polygonalen Zugs oder dort, wo einer der Bogen eine zur x-Achse parallele Tangente hat.

Für den einseitig eingespannten Träger lehren die Figuren des § 11:

Für alle drei Belastungsarten liegt M_{max} an der Einspannstelle. Für stetig gleichförmige Belastung also

$$M_{max} = -q l \cdot \frac{l}{2} = -\underline{\frac{q l^2}{2}} = -\underline{\frac{Q l}{2}}.$$

Beispiele:

1. Gesucht M_{max} für den in Fig. 23 dargestellten Träger.

Aufl.: Die Auflagerdrücke W_1 und W_2 ergeben sich nach Statik Bd. I, § 47:

$$W_1 = 1600 \text{ kg}$$
$$W_2 = 900 \text{ kg}$$

und demnach für die Querschnitte an Stützen und Lasten

$M_{100} = -800 \cdot 100 = -80\,000$ kgcm (über der linken Stütze),

$M_{300} = -800 \cdot 300 + 1600 \cdot 200 = +80\,000$ kgcm,

$M_{500} = -800 \cdot 500 + 1600 \cdot 400 - 300 \cdot 200$
$= \underline{180\,000}$ kgcm,

$M_{800} = -800 \cdot 800 + 1600 \cdot 700 - 300 \cdot 500$
$-800 \cdot 300 = 90\,000$ kgcm,

$M_{900} = -800 \cdot 900 + 1600 \cdot 800 - 300 \cdot 600$
$-800 \cdot 400 - 600 \cdot 100 = 0$ kgcm,

$M_{\max}$ also $= 180\,000$ kgcm am Querschnitt $x = 500$ cm.

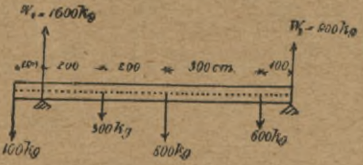


Fig. 23.

2. Desgleichen für den in Fig. 24 dargestellten Träger.

$l_1 = 1$ m; $l_2 = 6$ m; $l = 8$ m; $q = 2$ kg/cm;
$W_1 = 640$ kg; $W_2 = 960$ kg.

Aufl.: $M_{\max}$ liegt entweder über einer Stütze oder dort, wo das zwischen den Stützen liegende Stück der Biegungsmomentenlinie (Parabel) eine Tangente parallel x-Achse hat. Demnach:

$M_{100} = -(2 \cdot 100) \cdot \frac{100}{2} = -10\,000$ kgcm (Stütze A_1)

$$M_{600} = -(2 \cdot 600) \cdot \tfrac{600}{2} + 640 \cdot 500 = -40\,000 \text{ kgcm}$$
(Stütze A_2).

Für einen zwischen den Stützen gelegenen Querschnitt x ist

$$M_x = -(2 \cdot x)\frac{x}{2} + 640\,(x - 100),$$

daher
$$\frac{d\,M_x}{d\,x} = -2x + 640 = 0,$$

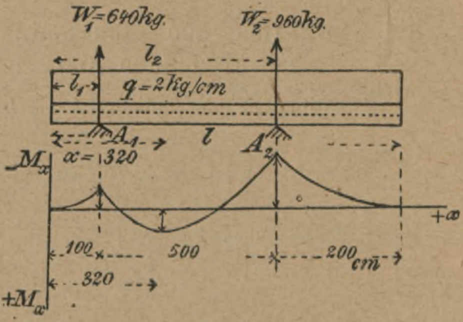


Fig. 24.

also
$$x = 320$$

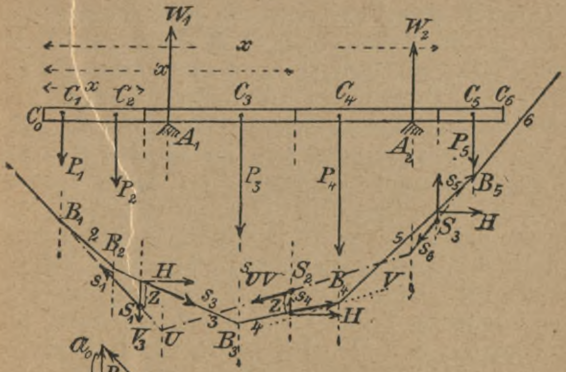
und
$$M_{320} = -(2 \cdot 320) \cdot \tfrac{320}{2} + 640\,(320 - 100)$$
$$= +\,38\,400 \text{ kgcm} \quad \text{(relatives Maximum)},$$

also Absolutwert des größten $M_{max} = 40\,000$ kgcm über Stütze A_2.

§ 13. Graphische Ermittlung von M_{max}.

Man konstruiere zu den gegebenen Lasten P (Fig. 25a und b) das Kräftepolygon $\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_5$ und mit beliebigem

Fig. 25a.



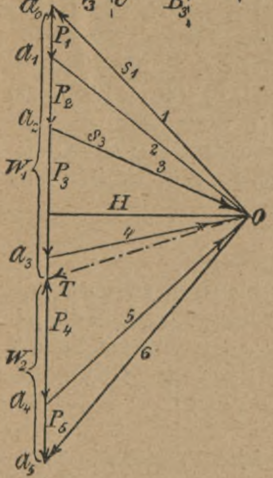


Fig. 25b.

Poi O das zugehörige Seilpolygon $B_1 B_2 B_3 \ldots B_5$, dessen erste Seite 1 und letzte Seite 6 die Auflagervertikalen in U und V schneiden, ziehe die Schlußlinie UV, so stellen die im Kräftepolygon $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_5$ durch den zu UV parallel gezogenen Polstrahl OT erzeugten Abschnitte $T\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_5 T$ nach Größe und Sinn die Auflagerdrücke W_1 in A_1 und W_2 in A_2 vor. Das geschlossene Polygon $UB_1 B_2 \ldots B_5 V$ ist ein Seilpolygon, das dem im Gleichgewicht sich befindlichen Gesamtkräftesystem der P und W zugehört.

Es sei x ein Querschnitt zwischen C_0 und A_1. Man schneide dieses Seilpolygon in denjenigen Stellen durch, in denen die durch diesen Querschnitt gezogene Vertikale dasselbe trifft, bringe in den Schnittstellen die den beiden durchschnittenen Seiten 1 und 3 entsprechenden Seilspannungen $s_3 = \mathfrak{A}_2 O$ und $s_1 = O\mathfrak{A}_0$ an, so bilden diese mit den zwischenliegenden Vertikalkräften P_1 und P_2 Gleichgewicht. Zerlegt man s_3 in die Horizontal- und Vertikalkomponente H und V_3 (H = Horizontaldistanz des Punktes O von $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_5$), dann liefert die Momentenbedingung des Gleichgewichts der fünf Kräfte s_1, H, V_3, P_1 und P_2 in Beziehung auf S_1 als Momentenpunkt:

$$M_x + H \cdot z = 0 \quad (H \text{ und } z \text{ absolut genommen}),$$

$$M_x = -Hz$$

Dieselbe Betrachtung für einen zwischen A_1 und A_2 gelegenen Querschnitt x führt z. B., falls die Seiten UV und 4 von dem durch den Querschnitt geführten Vertikalschnitt getroffen werden, auf das Gleichgewicht der Kräfte s_4, s_{UV}, P_1, P_2, P_3 und W_1. S_2 als Momentenpunkt liefert

$$M_x \mp H \cdot z = 0 \begin{pmatrix} - \text{ falls } S_2 \text{ oberhalb Seite } 4 \\ + \quad \text{„} \quad S_2 \text{ unterhalb} \quad \text{„} \quad 4 \end{pmatrix},$$

$$M_x = \pm H \cdot z \,.$$

Liegt Querschnitt x in der dritten Teilstrecke $A_2 C_6$, so ergibt sich analog für die im Gleichgewicht befindlichen Kräfte s_5, s_6, P_1, P_2, P_3, P_4, W_1 und W_2 und für den Punkt S_3 als Momentenpunkt:

$$M_x + H \cdot z = 0 ,$$

$$M_x = -Hz .$$

Daher:

Der absolute Wert des Biegungsmomentes M_x für irgend einen Querschnitt ist gleich dem Produkt des Horizontalzugs H des Seilpolygons in die Länge des in das geschlossene Polygon $B_1 B_2 B_3 \ldots B_4 B_5 VU$ fallenden Stückes z der Querschnittsvertikalen.

Das Vorzeichen von M_x ist $\{\pm\}$, je nachdem der auf $B_1 UVB_5$ liegende Momentenpunkt $\begin{Bmatrix}\text{oberhalb} \\ \text{unterhalb}\end{Bmatrix}$ des anderen Schnittpunktes der Querschnittsvertikalen mit dem geschlossenen Seilpolygon liegt.

Das absolut größte M_{max} wird an demjenigen Querschnitt eintreten, für welchen der Wert von z ein Maximum ist, also entweder über einer der beiden Stützen oder zwischen denselben:

$$M_{max} = H \cdot z_{max} \text{ (} H \text{ und } z_{max} \text{ absolut genommen)},$$

wobei das größte zwischen A_1 und A_2 liegende z sich leicht durch eine zu UV gezogene Parallele ergibt, die durch eine Ecke des Polygons (B_4) so gezogen wird, daß sie dasselbe nirgends schneidet.

Spezielle Fälle:

I. Träger an beiden Enden abgestützt (Fig. 26).

A_1 fällt mit C_0, A_2 mit C_6 zusammen. Die Punkte U und V fallen außerhalb B_1 und B_5, somit UV und die

Momentenpunkte S oberhalb des Zuges $B_1 B_2 \ldots B_5 \cdot M_x$, also stets positiv. $M_{\max}$ zwischen A_1 und A_2:

$$\underline{M_{\max} = H \cdot z_{\max}.}$$

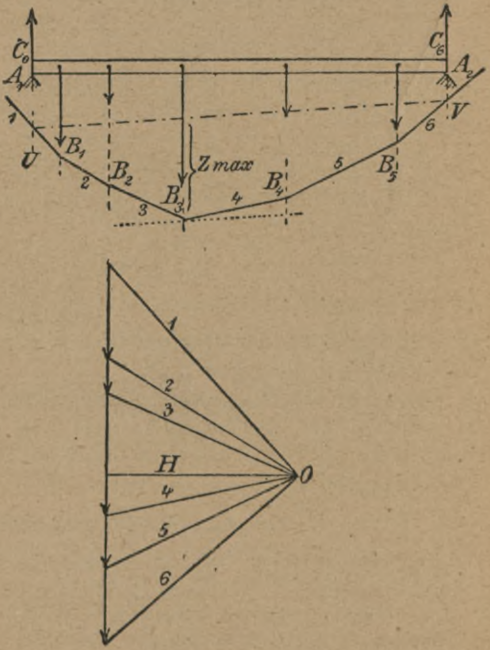


Fig. 26.

II. Einseitig eingespannter Träger (Fig. 27). A_2 fällt in unmittelbare Nähe von A_1. Punkt V unbestimmt, also auch UV unbestimmt. M_x stets negativ, da die Momentenpunkte sämtlich unterhalb des Zuges $B_1 \ldots B_5$ liegen. Absolutwert des größten M_x an der Einspannstelle:

$$\underline{M_{max} = H \cdot z_{max}}\,.$$

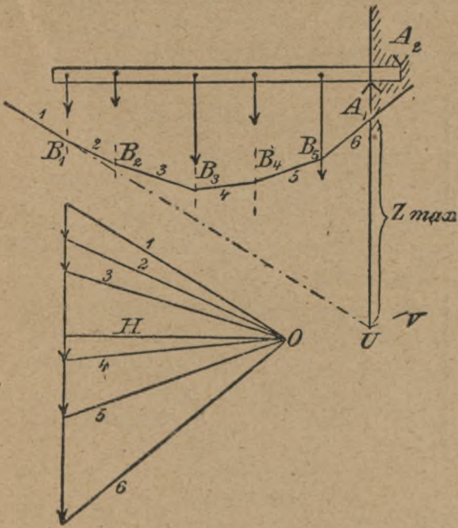


Fig. 27.

§ 14. M_{max} und die Transversalkraft.

Die Figuren des § 10 lehren für den Träger mit zwei Stützen:

Bei konzentrierter Belastung kann M_{max} nur an einem Querschnitt auftreten, der einer Ecke der Biegungsmomentenlinie entspricht, also an einem Querschnitt, in welchem eine P oder W angreift.

Bei stetig gleichförmiger Belastung befindet sich $M_{\max}$ an einem Querschnitt, für welchen die Biegungsmomentenlinie eine Tangente parallel der x-Achse hat, oder über einer Stütze.

Bei kombinierter Belastung kann $M_{\max}$ an einer P oder W oder dort liegen, wo die Biegungsmomentenlinie eine horizontale Tangente hat.

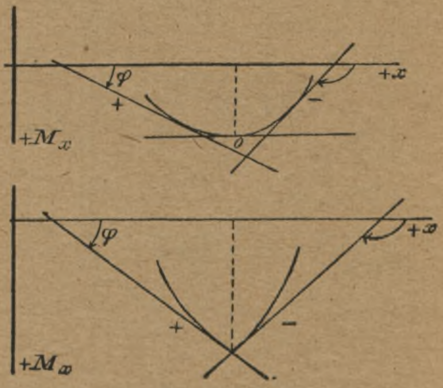


Fig. 28a u. b.

In allen Fällen liegt jedoch $M_{\max}$ so, daß die Tangens des Richtungswinkels der Tangente der Biegungsmomentenlinie gegen die positive x-Achse in dem dem Werte $M_{\max}$ entsprechenden Punkte derselben einen Übergang von einem Vorzeichen in das entgegengesetzte aufweist. Dieser Übergang findet entweder sprungweise statt (Fig. 28a), oder er geht stetig vor sich, d. h. die Tangens dieses Richtungswinkels ist für den dem Werte $M_{\max}$ entsprechenden Punkte vom Werte $= 0$ (Fig. 28b).

Nun ist die Tangens dieses Richtungswinkels ausgedrückt durch $\frac{dM_x}{dx}$, und da für jede Belastung des Trägers mit zwei Stützen (wobei eine stetig gleichförmige Last durch eine konzentrierte ersetzt gedacht werden kann) nach § 10:

$$M_x = x(-P_1 - P_2 \ldots + W_1 - \ldots) + \text{Konst.},$$

also $$\frac{dM_x}{dx} = -P_1 - P_2 - \ldots + W_1 - \ldots = V_x,$$

so stimmt das Vorzeichen von $\frac{dM_x}{dx}$ mit denjenigen von V_x überein. Daher:

Das Maximalbiegungsmoment eines beliebig (konzentriert oder stetig gleichförmig oder kombiniert) belasteten Trägers mit zwei Stützen liegt an demjenigen Querschnitt oder an einem derjenigen Querschnitte, für welchen die Transversalkraft V_x ihr Vorzeichen sprungweise oder stetig ändert, d. h. im letzteren Falle $= 0$ ist.

Beispiel.

Gesucht M_{max} für den in Fig. 29 dargestellten Träger ($W_1 = 1925$ kg; $W_2 = 1375$ kg).

Auflösung: Es sei mit $\begin{Bmatrix} V_x^l \\ V_x^r \end{Bmatrix}$ die Transversalkraft für einen dem Querschnitt x unendlich nahe gelegenen, $\begin{Bmatrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{Bmatrix}$ von ihm sich befindlichen Querschnitt bezeichnet, dann ergibt die Aufstellung des Wertes der Transversalkraft für die Querschnitte $x = 0$ bzw. 200, 300, 400, 600 cm:

$$V_0^r = -600\ \text{kg}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} V_{200}^l &= -600\ \text{kg}\,;\\ V_{200}^r &= -600 + 1925 = +1325\ \text{kg}\end{aligned}\right\}\ \text{Zeichenwechsel}\,,$$

$$V_{300}^l = +1325\ \text{kg}\,,$$

$$V_{300}^r = +1325\ \text{kg}\,,$$

$$V_{400}^l = -600 + 1925 - 3\cdot 100 = 1025\ \text{kg}\,,$$

$$V_{400}^r = -600 + 1925 - 3\cdot 100 - 300 = 725\ \text{kg}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} V_{600}^l &= -600 + 1925 - 3\cdot 300 - 300\\ &= 125\ \text{kg}\,,\\ V_{600}^r &= -600 + 1925 - 3\cdot 300 - 300 - 900\\ &= -775\ \text{kg}\end{aligned}\right\}\ \text{Zeichen-wechsel.}$$

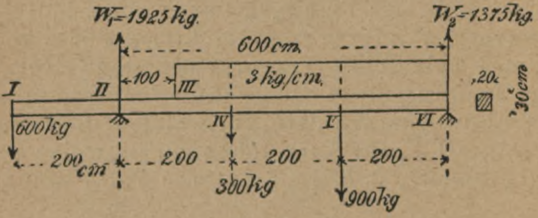


Fig. 29.

M_{max} kann also stattfinden für $x = 200$ oder $x = 600$. Nun ist

$$M_{200} = -600\cdot 200 = -120\,000\ \text{kgcm}\,,$$

$$M_{600} = -600\cdot 600 + 1925\cdot 400 - 300\cdot 200 - (300\cdot 3)\,150 = +215\,000\ \text{kgcm}\,,$$

also Absolutwert des größten $M_{max} = 215\,000$ kgcm (an der Last 900 kg).

IV. Kapitel.

Die Biegungskurve und ihre Anwendungen.

§ 15. Gleichung der Biegungskurve (elastischen Linie).

In Fig. 30 seien (xy) und $(x + dx,\ y + dy)$ die Koordinaten zweier in unendlich kleiner Entfernung voneinander befindlicher Punkte S_0 und S_1 der nach

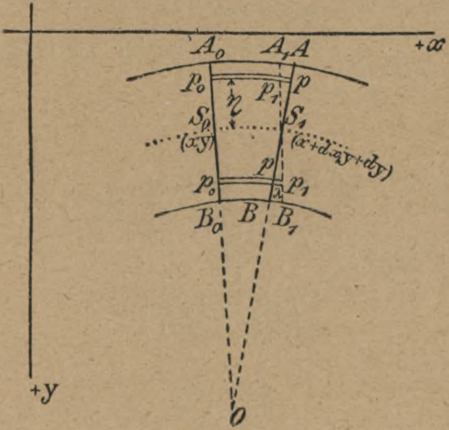


Fig. 30.

Eintritt der Biegung gekrümmten Stabachse in Beziehung auf ein beliebiges Koordinatensystem. Hinsichtlich der biegenden äußeren Kräfte mögen die Voraussetzungen des § 9 gelten. Die beiden Querschnittsebenen $A_0 B_0$ und AB, die in beiden Punkten normal zur Achse stehen, sind gegeneinander geneigt, und es schneiden sich diese beiden Linien, wenn die Biegungskurve als eine in der Kraftebene liegende ebene Kurve angenommen wird, im Krümmungsmittelpunkt O der Stabachse für den Punkt S_0. Die ursprüngliche Lage $A_1 B_1$ des Querschnitts AB vor der Biegung ist parallel zu $A_0 B_0$, so daß eine zur Achse parallele, zwischen $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ gelegene Faserschicht $p_0 p_1 = dx$ eine Verlängerung oder Verkürzung $\lambda = p_1 p$ erfährt. Nach dem Gesetz der elastischen Dehnung ist die relative Dehnung (oder Verkürzung) dieser Schicht

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{p_0 p_1} = \alpha \cdot \sigma \quad (\sigma\text{-Spannung in der Schicht})$$

oder
$$\frac{\lambda}{dx} = \alpha \cdot \sigma .$$

Die Ähnlichkeit der Dreiecke $p_1 p S_1$ und $S_0 S_1 O$ liefert aber, wenn η den senkrechten Abstand der Faserschicht von der durch $S_0 S_1$ senkrecht zur Kraftebene gelegten Ebene bedeutet,

$$\frac{p_1 p}{S_0 S_1} = \frac{p_1 S_1}{S_0 O},$$

oder
$$\frac{\lambda}{dx} = \frac{\eta}{\varrho},$$

wenn ϱ den Krümmungsradius im Punkte S_0 in absoluter Größe bezeichnet. Daher kommt

$$\alpha \sigma = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{\eta}{\alpha \cdot \varrho}.$$

Somit wird die an der Schicht wirkende gesamte Zug- oder Druckkraft, wenn b die Breite derselben (senkrecht zur Kraftebene) und $d\eta$ die Höhe, also $b\,d\eta$ den Querschnitt der Schicht bezeichnet,

$$(b\,d\eta)\,\sigma = (b\,d\eta)\frac{\eta}{\alpha\cdot\varrho}.$$

Schneidet man nun den Stab längs A_0B_0 durch, so bleibt der von äußeren, in einer Ebene durch die Stabachse liegenden Kräften angegriffene linksseitige Stabteil im Gleichgewicht, wenn in sämtlichen Elementen $(b\,d\eta)$ von A_0B_0 die von den anstoßenden Faserschichten ausgeübten Zug- bzw. Druckkräfte desgl. Schubkräfte an ihm angebracht werden, und die Momentengleichung um die in S_0 zur Kraftebene senkrecht stehende Achse liefert für dieses Gleichgewicht, da die Momente der Schubkräfte je $= 0$ sind,

$$M_x - \Sigma(b\,d\eta)\,\sigma\cdot\eta = 0$$

(Summenzeichen erstreckt sich über alle Elemente von A_0B_0)

oder mit obigem Wert:

$$M_x - \sum\frac{b\,d\eta\cdot\eta^2}{\alpha\,\varrho} = 0,$$

$$M_x - \frac{1}{\alpha\,\varrho}\cdot\Sigma(b\,d\eta)\,\eta^2 = 0,$$

$$M_x - \frac{J}{\alpha\,\varrho} = 0$$

(J axiales Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf die Momentenachse bzw. Neutralachse, vgl. §§ 5 und 23).

Führt man nun für ϱ den Wert der analytischen Geometrie:

$$\varrho = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ein, jedoch mit der Modifikation, daß bei der flachen Gestalt der Biegungskurve näherungsweise $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt werden kann, so kommt

$$\frac{M_x \cdot \alpha}{J} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2},$$

oder wenn $\frac{1}{\alpha} = E$ (El-Modul vgl. § 2), so kommt:

$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M_x$ (Gleichung der Biegungskurve)

$$\left(\frac{J}{\alpha} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M_x\right).$$

Anmerkung 1. Ist bei positivem y die Kurve konvex gegen die x-Achse, also $\frac{d^2 y}{dx^2}$ positiv, so muß, da die linke Seite der Gleichung positiv wird, die rechte Seite ebenfalls positiv sein. Daher kann ohne Rücksicht auf das Doppelzeichen der rechten Seite für Punkte mit positivem y der Absolutwert von M_x als positiv in die Gleichung eingeführt werden, wenn M_x in jenen Punkten den Stab konvex gegen die x-Achse biegt. Ist bei negativem y die Kurve konkav gegen die x-Achse, so ist $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ebenfalls positiv, somit muß auch in diesem Fall die rechte Seite positiv sein. Es müßte somit für Punkte mit negativem y der Absolutwert von M_x ebenfalls als positiv einzuführen sein, wenn in jenen Punkten das Moment M_x den Stab konkav gegen die x-Achse biegt. Unter Voraussetzung der Definition von M_x (vgl. § 9) sind also die Momente derjenigen biegenden Kräfte desselben (in Beziehung auf Querschnitt x) als positiv einzuführen, die den Stab in der Richtung der positiven y-Achse konkav biegen (ohne jede Rücksichtnahme auf das Doppelzeichen der rechten Seite).

Sind die biegenden Kräfte von M_x vertikale nach unten gerichtete Lasten P und der linksseitige Auflagerdruck gleich W, und ist bei der Bildung von M_x der Uhrzeigersinn als positiv gewählt, sowie die positive y-Achse nach unten gerichtet angenommen, so wäre demnach die Gleichung der Biegungskurve: $EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ = Summe der Momente der P — Moment von W in Beziehung auf Querschnitt $x = -M_x$ (vgl. § 9).

Anmerkung 2. Die Biegungskurve hat ihre Wendepunkte in denjenigen Punkten, für welche $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und daher auch gemäß der Gleichung der Biegungskurve

$M_x = 0$ ist.

§ 16. Die Wellenlinie als Gleichgewichtsform bei exzentrischer Belastung.

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems (Fig. 31) liefert die Gleichung der Biegungskurve für einen einerseits festgespannten Stab, der am freien Ende die exzentrische (außerhalb der Achse angreifende Belastung) P trägt (vgl. § 15, Anm. 1):

$$EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Py' = P(f + \delta - y),$$

und falls
$$f + \delta - y = z,$$

also
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2z}{dx^2} \quad \text{gesetzt wird,}$$

so kommt
$$EJ \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = -Pz\,.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist von der Form:

$$z = C_1 \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right),$$

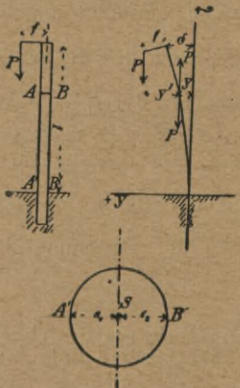


Fig. 31.

deren Konstante C_1 sich daraus bestimmt, daß für $x = 0$, $y = 0$, also $z = f + \delta$ ist:

$$f + \delta = C_1\,,$$

und daher wird dieses Integral:

$$z = f + \delta - y$$

$$= (f + \delta)\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right).$$

Da ferner wegen der vertikalen Tangente an der Einspannstelle für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, so folgt aus der Ableitung vorstehender Gleichung:

$$-\frac{dy}{dx} = -(f+\delta)\sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)\cdot\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

$$+ C_2\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)\cdot\sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

daß

$$C_2 = 0\,,$$

und daher wird die Gleichung der Biegungskurve:

$$f + \delta - y = (f+\delta)\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)$$

oder

$$y = (f+\delta)\left[1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)\right].$$

Berücksichtigt man, daß für $x = l$ $y = \delta$ (Ausbiegung) ist, so kommt aus vorstehender Gleichung:

$$f = (f+\delta)\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right),$$

woraus die Ausbiegung

1)
$$\delta = \frac{f\left[1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)\right]}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

sich ergibt. Aus der vorletzten Relation folgt ferner:

$$f+\delta=\frac{f}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

und damit ergibt sich:

$$2)\quad y=\frac{f\left[1-\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)\right]}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}=\frac{f\left[1-\cos\left(x\sqrt{\frac{P\alpha}{J}}\right)\right]}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\alpha}{J}}\right)}$$

als Gleichung der Stabkurve.

Da durch Zunahme des Winkels $x\sqrt{\frac{P}{EJ}}$ um 2π der Wert des cos, also des Zählers und somit auch der Wert von y derselbe bleibt, so stellt die Gleichung eine Wellenlinie vor, mit der Wellenlänge

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{P\alpha}{J}}}.$$

§ 17. Knickbelastung. Formel von Euler.
($f=0$ oder nahezu $=0$.)

1. Stab an einem Ende eingespannt, am anderen freischwebend (Fig. 32).

Aus Gleichung 1) des vorigen Paragraphen folgt:

$$f=\frac{\delta\cdot\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}{1-\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}.$$

Ist nun $f = 0$, so wirkt P zunächst als reine axiale Druckkraft. Hat aber der Stab relativ große Länge und geringen Querschnitt, so bewirkt die geringste Abweichung der Kraftrichtung aus der Achse, seitlicher Stoß, Unvollkommenheit des Materials usw. eine seitliche Durchbiegung, die so groß sein kann, daß der Stab den Charakter eines tragenden Konstruktionsteils verliert oder ein stabiles Gleichgewicht zwischen P und den Elastizitätskräften des Stabes nicht mehr besteht und, falls die Wirkung von P nicht aufgehoben wird, ein Bruch eintreten kann (Knickung).

Fig. 32

Fig. 33.

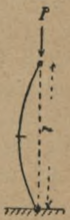


Fig. 34.

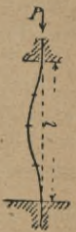


Fig. 35.

Für $f = 0$ müßte nun

$$\delta \cdot \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = 0$$

sein. Da aber δ im Falle einer seitlichen Ausbiegung von 0 verschieden ist, so muß, um der vorstehenden Gleichung zu genügen,

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right) = 0,$$

d. h. da l nicht größer als die halbe Wellenlänge

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}}, \quad \text{also} \quad l\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

nicht größer als π sein kann, so muß

$$l \cdot \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2}$$

sein. Der aus dieser Relation sich ergebende Wert von P:

$$\text{I)} \qquad \underline{P} = \underline{\frac{\pi^2 E J}{4 l^2}} = \underline{\frac{\pi^2 \cdot J}{4 \alpha l^2}} = \text{ca.} \underline{\frac{2{,}5 E J}{l^2}}$$

bezeichnet also diejenige Grenze von P, bei welcher die geringste Abweichung f dieser Kraft aus der Stabachse gemäß Gleichung 1) des vorigen Paragraphen ein unendlich großes δ liefert, wobei das Gleichgewicht von P mit den elastischen Kräften des Stabes schon vor Eintritt der unendlich großen Durchbiegung zerstört werden kann (aber nicht muß).

Man nennt diesen Wert von P die theoretische Knickbelastung oder die theoretische Tragkraft des Stabes.

2. Stab an beiden Enden drehbar (Fig. 33).

Die Biegungskurve hat in ihrer Mitte eine vertikale Tangente. Es kann daher die obere Hälfte als ein Stab betrachtet werden von halber Länge, der am unteren Ende vertikal eingespannt ist. Die Formel I) gilt daher auch für diesen Fall, wofern statt l der Wert $\frac{l}{2}$ eingeführt wird, und sie liefert als theoretische Tragkraft

$$\text{II)} \qquad \underline{P} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \frac{\pi^2 J}{\alpha l^2} = \text{ca.} \underline{\frac{10 E J}{l^2}}.$$

(Eulersche Gleichung.)

3. Stab am einen Ende eingespannt, am anderen drehbar (Fig. 34).

Eine vertikale Tangente hat der Stab in ca. $^2/_3$ der Höhe und es verhält sich das obere Stabdrittel wie der

Stab unter 1). Daher erhält man aus Gleichung I), wofern statt l der Wert $\frac{l}{3}$ eingeführt wird, als theoretische Tragkraft angenähert

$$\text{III)} \qquad \underline{P} = \underline{\frac{9\pi^2 E J}{4 l^2}} = \underline{\frac{9\pi^2 J}{4 \alpha l^2}} = \text{ca.}\, \underline{\frac{22 E J}{l^2}}$$

$$\left(\text{genauer } \frac{20 E J}{l^2}\right).$$

4. Stab an beiden Enden festgespannt (Fig. 35). Die elastische Linie hat zwei Wendepunkte, die mit dem Scheitelpunkt die Stablänge in vier gleiche Teile teilen. Es läßt sich daher, wegen der vertikalen Tangente am Ende, jedes der vier Viertel als ein am einen Ende eingeklemmter, am anderen freier Stab betrachten. Daher ergibt sich die theoretische Tragkraft aus I) unter Einführung von $\frac{l}{4}$ statt l:

$$\text{IV)} \qquad \underline{P} = \underline{\frac{4\pi^2 E J}{l^2}} = \frac{4\pi^2 J}{\alpha l^2} = \text{ca.}\, \underline{\frac{40 E J}{l^2}}.$$

Anmerkung 1. Ist die Belastung P kleiner als diese Werte, so tritt bei geringer Exzentrizität von P eine Durchbiegung δ von endlichem Werte ein; ist P gleich diesen Werten, so wird die Durchbiegung δ unendlich groß. In den meisten praktischen Fällen wird jedoch vor Erreichung dieses Wertes von δ ein Aufhören des Gleichgewichtszustandes der inneren Kräfte mit den äußeren stattfinden, d. h. Bruch eintreten. Für die Knicksicherheit des Stabes ist es deshalb nötig, daß P kleiner als der aus obigen Formeln folgende Wert der Knickbelastung ist.

Anmerkung 2. Da die Durchbiegung nach der Seite hin erfolgt, nach der die Abmessungen des Querschnittes am geringsten sind, so ist die Ebene der Durchbiegung senkrecht zu derjenigen Schwerpunktsachse des Querschnittes, in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment J des Querschnittes seinen kleinsten Wert hat, d. h. man nimmt in obigen Formeln:

für J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes, das in Beziehung auf eine Schwerpunktsachse desselben zu bilden möglich ist.

Anmerkung 3. Für die Praxis ist für P noch ein Sicherheitskoeffizient $\frac{1}{m}$ in Rechnung zu nehmen, so daß die

praktische Tragkraft $= \frac{1}{m}$ der theoretischen Tragkraft ist,

und man pflegt für

	Schmiedeeisen	Gußeisen	Holz	
$m =$	5	6	10	zu wählen.

Anmerkung 4. Werte von E vgl. § 2.

§ 18. Kontinuierlicher Träger. Auflagerdrücke und Maximalbiegungsmoment.

Die Biegungskurve stellt nur so lange eine stetige Kurve dar, als M_x eine stetige Funktion von x bleibt. Bei Trägern mit zwei endseitigen Stützen oder dem einseitig eingespannten Träger erhält die Biegungskurve demnach an jeder konzentrierten Last insofern eine Unstetigkeit, als in jenen Stellen M_x sich plötzlich ändert, bei Trägern mit zwei oder mehr als zwei Stützen (kontinuierlicher Träger) außerdem noch an jeder

Stütze. Die Biegungskurve besteht demnach bei konzentrierter Belastung aus einzelnen Zweigen, deren jeder eine andere Gleichung besitzt, die aber in den gemeinsamen Punkten, also an den Lasten bzw. Stützen dieselbe Tangente haben. Die analytische Aufgabe der Gestaltsbestimmung des durchgebogenen Stabes und die sich anschließenden Aufgaben sind daher auf Grund der Gleichung der elastischen Linie und ihrer Integration wegen der oftmaligen Konstantenbestimmung häufig sehr kompliziert.

Ist z. B. ein endseitig abgestützter Träger von der Länge l im beliebigen Punkte $x = a$ von der Last P ergriffen, so entspricht jedem der beiden Trägerteile eine andere Gleichung der elastischen Linie. Die zweimalige Integration jeder derselben erfordert die Bestimmung von $2 \cdot 2 = 4$ Konstanten, die sich aus den Bedingungen ergeben, daß im linksseitigen Teil für

$$x = 0 \quad y = 0,$$

im rechtsseitigen Teil für

$$x = l \quad y = 0$$

wird, sowie daß für $x = a$ die Werte $\frac{dy}{dx}$ und y in beiden Gleichungen von gleicher Größe sind.

Wir beschränken uns daher auf die Durchführung weniger, praktisch wichtiger Fälle:

Träger mit zwei gleichen Öffnungen (Weite l) und stetig gleichförmiger Belastung q kg/cm. (Fig. 36.)

a) Gleichung der Biegungskurve der linksseitigen Öffnung.

Die Biegungskurve besteht aus zwei stetigen Zweigen, die über der Mittelstütze eine gemeinsame horizontale

Tangente besitzen. Für den Zweig der linksseitigen Öffnung erhält man nach § 15:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = -M_x = -W_1 x + q x \cdot \frac{x}{2}$$

und durch Integration:

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{W_1 x^2}{2} + \frac{q x^3}{6} + C_1,$$

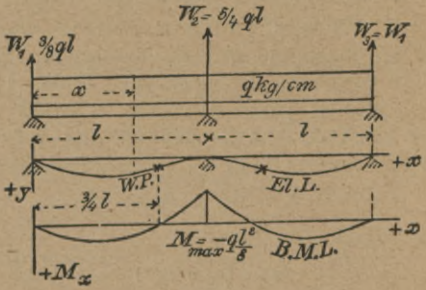


Fig. 36.

deren Konstante C_1 aus der Erwägung, daß für $x = l$ $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, sich zu

$$C_1 = \frac{W_1 l^2}{2} - \frac{q l^3}{6}$$

ergibt. Durch nochmalige Integration folgt unter Benutzung dieses Wertes von C_1:

$$EJ \cdot y = -\frac{W_1 x^3}{6} + \frac{q x^4}{24} + \left(\frac{W_1 l^2}{2} - \frac{q l^3}{6}\right) x + C_2,$$

deren Konstante C_2, da für $x = 0$ $y = 0$ ist, sich zu

$$C_2 = 0$$

ergibt. Die Gleichung der Biegungskurve (el. Linie) für die linksseitige Öffnung ist demnach:

$$\underline{EJ \cdot y = -\frac{W_1 x^3}{6} + \frac{q x^4}{24} + \left(\frac{W_1 l^2}{2} - \frac{q l^3}{6}\right) x .}$$

b) Auflagerdrücke.

Da für $x = l$ $y = 0$ ist, so kommt aus voriger Gleichung:

$$0 = -\frac{W_1 l^3}{6} + \frac{q l^4}{24} + \frac{W_1 l^3}{2} - \frac{q l^4}{6}$$

und hieraus

$$\underline{W_1 = \tfrac{3}{8} q l = W_3} ,$$

und da

$$W_1 + W_2 + W_3 = 2 l \cdot q ,$$

somit

$$\underline{W_2 = \tfrac{5}{4} q l .}$$

c) Absolut größtes Biegungsmoment.

Für die linke Öffnung ist

$$M_x = W_1 x - \frac{q x^2}{2} ,$$

daher

$$\frac{d M_x}{d x} = W_1 - q x = 0 ,$$

woraus

$$x = \frac{W_1}{q} = \tfrac{3}{8} l$$

und das zugehörige Biegungsmoment

$$\underline{M_{\frac{3}{8} l}} = (\tfrac{3}{8} q l) \tfrac{3}{8} l - \frac{q}{2} (\tfrac{3}{8} l)^2 = \underline{\tfrac{9}{128} q l^2} \text{ (relatives } M_{max}) .$$

Dagegen das Biegungsmoment für den Querschnitt über der Mittelstütze:

$$\underline{M_l} = W_1 l - q l \cdot \frac{l}{2} = (\tfrac{3}{8} q l) l - \frac{q l^2}{2} = \underline{-\frac{q l^2}{8}}.$$

Das absolut größte Biegungsmoment liegt also über der Mittelstütze und hat den Wert $-\dfrac{q l^2}{8}$.

d) Wendepunkte der Biegungskurve.

Sie ergeben sich für $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 0$ oder vermöge der Gleichung

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = -M_x,$$

auch für

$$\underline{M_x = 0},$$

d. h. für

$$M_x = W_1 x - \frac{q x^2}{2} = 0,$$

woraus

$$\underline{x} = \frac{2 W_1}{q} = \underline{\tfrac{3}{4} l}.$$

Weitere Beispiele

bilden die in den Fig. 37 u. 38 dargestellten Träger. Sie liefern:

a) Für den Träger Fig. 37:

Gleichung der Biegungskurve wie oben:

$$EJy = -\frac{W_1 x^3}{6} + \frac{q x^4}{24} + \left(\frac{W_1 l^2}{2} - \frac{q l^3}{6}\right) x,$$

$$W_1 = \tfrac{3}{8} q l; \quad W_2 = \tfrac{5}{8} q l;$$

relatives $\quad M_{max} = \tfrac{9}{128} q l^2 \quad (\text{bei } x = \tfrac{3}{8} l);$

absolut größtes $M_{\max} = -\frac{q\,l^2}{8}$ (an der Einspannstelle).

Wendepunkt: $x = \frac{3}{4}\,l$.

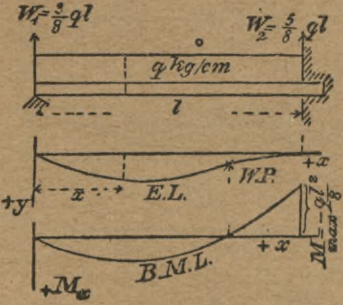


Fig. 37.

b) Für den Träger Fig. 38:

Die Wirkung der Einspannung kann man sich bei jeder Einspannstelle ersetzt denken durch vertikale nach unten gerichtete Kräfte, die bewirken, daß die Stabachse an den Einspannstellen horizontal gerichtet ist. Es sei für die linksseitige Einspannstelle die Resultierende dieser Kräfte gleich R, und es greife dieselbe im Abstande c links von A_1 an, so ruft die Belastung durch die beiderseitigen R einen Auflagerdruck in A_1 und A_2 je gleich R hervor, und für einen beliebigen Querschnitt x ergibt sich das aus dieser Belastung hervorgehende Biegungsmoment

$$M_x' = -R(x+c) + Rx = -Rc\,,$$

das also unabhängig von x und demnach konstant ist. Sein absoluter Wert sei mit M bezeichnet. Dann wird die Gleichung der elastischen Linie, da M dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt gerichtet ist,

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = -W_1 x + \frac{q x^2}{2} + M$$

(vgl. § 15, Anmerkung 1),

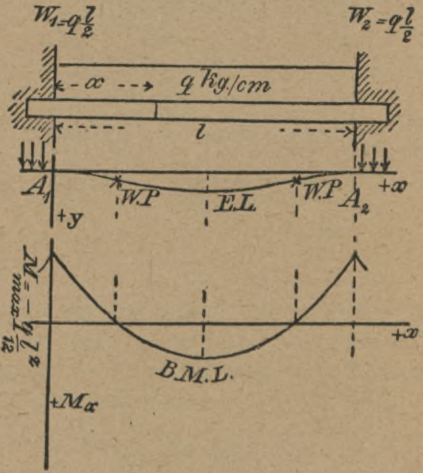


Fig. 38.

wo W_1 den der Belastung $q\,l$ entsprechenden Auflagerdruck

$$\underline{W_1 = W_2 = \frac{q\,l}{2}}$$

bezeichnet. Die Integration liefert:

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{W_1 x^2}{2} + \frac{q x^3}{6} + M \cdot x + C_1,$$

und da für $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$, so kommt $C_1 = 0$, und da ferner für die Stabmitte $x = \frac{l}{2}$ $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt aus

$$0 = -\frac{W_1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + M\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$\underline{M} = \frac{W_1 l}{4} - \frac{q l^2}{24} = \underline{\frac{q l^2}{12}},$$

also

$$M'_x = -\frac{q l^2}{12}.$$

Das gesamte Biegungsmoment im beliebigen Querschnitt x ist somit

$$M_x = W_1 x - \frac{q x^2}{2} - \frac{q l^2}{12},$$

also

$$M_0 = -\frac{q l^2}{12}$$

und

$$\frac{d M_x}{dx} = W_1 - q x = 0,$$

woraus

$$x = \frac{W_1}{q} = \frac{l}{2},$$

daher größtes Biegungsmoment in der Stabmitte:

$$\underline{M_{\frac{l}{2}}} = W_1 \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{q l^2}{12} = \frac{q l^2}{4} - \frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{12} = \underline{\frac{q l^2}{24}}$$

(relatives M_{max}).

Daher absolut größtes M_{max} an der Einspannstelle vom Werte $-\frac{q l^2}{12}$.

Die Gleichung der Biegungskurve erhält man durch weitere Integration:

$$EJ \cdot y = -\frac{W_1 x^3}{6} + \frac{q x^4}{24} + \frac{M x^2}{2} + C_2 ,$$

und da für $x = 0$ auch $y = 0$, so kommt $C_2 = 0$ und unter Benutzung des Wertes von M

$$\underline{EJy} = \underline{-\frac{W_1 x^3}{6} + \frac{q x^4}{24} + \frac{q l^2 x^2}{24}}$$

als Gleichung der Biegungskurve.

Die Wendepunkte folgen aus $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ oder aus

$$M_x = W_1 x - \frac{q x^2}{2} - \frac{q l^2}{12} = 0 :$$

$$\underline{x_1 = 0{,}2113\, l} \quad \text{und} \quad \underline{x_2 = 0{,}7887\, l}.$$

§ 19. Der Satz von Mohr.

In Fig. 39 sei die Kurve MN ein stetig verlaufender Zweig der Biegungsmomentenlinie für das Intervall $x = a$ bis $x = b$. Die von ihr und der x-Achse gebildete Fläche (Biegungsmomentenfläche) sei in unendlich viele unendlich schmale Streifen von der Breite dx zerlegt, in deren Schwerpunkten vertikale Lasten je gleich dem Flächeninhalt des betreffenden Elementes, also $= M_x dx$ angreifen. Für positive M_x sei der Sinn dieser Kräfte nach unten, für negative M_x nach oben gerichtet. Für dieses Lastensystem werde ein Seilpolygon konstruiert, über dessen Pol wir zunächst keine Voraussetzung treffen, und das bei unendlich vielen Lasten in eine Seilkurve $M'N'$ übergeht.

Schneiden wir diese Seilkurve in ihrem Anfangspunkt M' und in einem beliebigen Punkte U (xy; Koordinatenursprung im linksseitigen Balkenende) durch, bringen in den Schnittstellen an dem zwischenliegenden Teil $M'U$ der Seilkurve die tangentiell gerichteten Seilspannungen S_0 und S an, so bilden diese mit den zwischenliegenden Lasten Gleichgewicht. Bezeichnen

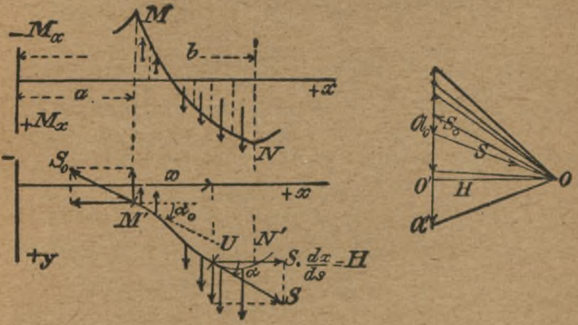


Fig. 39.

α_0 und α die Richtungswinkel der Tangenten in M' und U mit dem positiven Zweig der x-Achse, so folgt aus diesem Gleichgewicht:

$\Sigma y = 0$:

$$S_0 \sin(180 + \alpha_0) + S \sin\alpha + \sum_{x=a}^{x=x} M_x\, dx = 0\,,$$

woraus, da

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}\,,$$

$$1)\qquad S\frac{dy}{ds} = -\int_{x=a}^{x=x} M_x\, dx - S_0 \sin(180 + \alpha_0)\,.$$

Ist nun H der zum Kräftepolygon der Lasten $M_x\,dx$ senkrechte Abstand OO' des Pols O, so ist die Horizontalkomponente von $S = H$, daher

$$S\cos\alpha = H$$

oder

2) $$S\frac{dx}{ds} = H.$$

Durch Division der Gleichungen 1) und 2) folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\int\limits_{x=a}^{x=x} M_x\,dx - S_0\sin(180 + \alpha_0)}{H},$$

woraus durch nochmalige Ableitung nach x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{H}$$

oder

$$H\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x.$$

Dies ist die Gleichung der Seilkurve. Wählt man nun den Pol O so, daß

$$H = E\cdot J,$$

so geht die Gleichung über in die Gleichung der Biegungskurve (elastische Linie):

$$EJ\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x$$

(vgl. § 15, Anm. 1, Schluß).

Daher:

Die Biegungskurve ist ein Seilpolygon (Seilkurve), dessen Belastungsfläche die Biegungsmomentenfläche und dessen Horizontalzug $H = E\cdot J$ ist.

Auf der positiven Seite der M_x liegende Biegungsmomentenflächen sind hiebei als im Sinne der positiven y-Achse wirkende Lasten einzuführen.

§ 20.

Anwendung auf die Biegungspfeile einfacher Träger.

Unter dem Biegungspfeil f versteht man die Ordinate y des tiefsten Punktes der Biegungskurve.

a) **Der in den Endpunkten abgestützte Träger bei stetig gleichförmiger Belastung q kg/cm (Fig. 40).**

Die Biegungsmomentenlinie ist eine Parabel auf der positiven Seite der M_x. Ihre Gleichung ist:

$$M_x = W_1 x - q x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q l}{2} x - \frac{q x^2}{2}.$$

Schneiden wir nun die Biegungskurve (elastische Linie) in A_1 und ihrem tiefsten Punkte N durch, bringen in den Schnittstellen gemäß dem Satze von Mohr die tangentiellen Seilspannungen an, von welchen diejenige in N horizontal und gleich $H = EJ$ ist, dann liefert das Gleichgewicht dieser Spannungen mit den zwischenliegenden, unendlich vielen, unendlich kleinen Lasten $M_x dx$ die Momentengleichung um A_1:

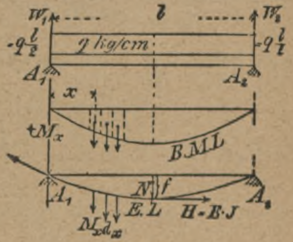


Fig. 40.

$$-EJ \cdot f + \sum_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} (M_x dx) x = 0$$

oder $$-EJ\cdot f+\int\limits_{x=0}^{x=\frac{l}{2}}\left(\frac{q\,l}{2}x-\frac{q\,x^2}{2}\right)dx\cdot x=0,$$

$$-EJ\cdot f+\left|\frac{q\,l\,x^3}{6}-\frac{q\,x^4}{8}\right|_{x=0}^{x=\frac{l}{2}}=0,$$

$$-EJ\cdot f+\frac{5\,q\,l^4}{384}=0,$$

woraus $$\underline{f}=\underline{\frac{5\,q\,l^4}{384\,E\cdot J}}=\underline{\frac{5\,q\,l^4\cdot\alpha}{384\,J}}=\frac{5\,Q\,l^3\alpha}{384\,J}$$

$$\left(\alpha=\frac{1}{E},\quad Q=q\,l \text{ gleich Gesamtlast}\right).$$

Anmerkung. Für den Fall einer in Stabmitte angreifenden konzentrierten Last P ergibt sich für einen Querschnitt der linken Trägerhälfte

$$M_x=W_1 x=\frac{P}{2}x$$

und somit bei gleichem Verfahren wie oben:

$$-E\cdot J\cdot f+\int\limits_{x=0}^{x=\frac{l}{2}}\left(\frac{P}{2}x\right)dx\cdot x=0$$

(tiefste Einsenkung in der Stabmitte),

woraus $$\underline{f}=\underline{\frac{P\,l^3}{48\,E\,J}}=\underline{\frac{P\,l^3\cdot\alpha}{48\,J}}.$$

b) Der einseitig eingespannte Träger für eine konzentrierte Last P am freien Ende (Fig. 41).

Die Biegungsmomentenlinie ist eine auf der negativen Seite der M_x verlaufende Gerade. Die Belastungen $M_x dx$

sind demnach nach oben wirkend angebracht zu denken. Zweckmäßig ist es in diesem Fall, die unendlich vielen unendlich kleinen Belastungen durch ihre Resultante R zu ersetzen, deren absolute Größe durch den Inhalt des $\triangle s\, DAA'$:

$$R = \tfrac{1}{2} l \cdot AA' = \tfrac{1}{2} l \cdot (Pl) = \frac{Pl^2}{2}$$

angegeben wird und deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt dieses Dreiecks geht.

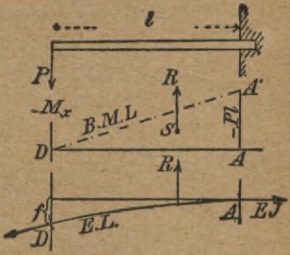


Fig. 41.

Schneiden wir die Biegungskurve an der Einspannstelle A durch, bringen in D und A die tangentiellen Seilspannungen an (in A horizontal und gleich EJ), so bilden diese mit R Gleichgewicht. Die Momentengleichung um D liefert:

$$EJ \cdot f - R \cdot (\tfrac{2}{3} l) = 0$$

und mit Benutzung obigen Wertes von R

$$EJ \cdot f - \left(\frac{Pl^2}{2}\right) \cdot (\tfrac{2}{3} l) = 0,$$

woraus
$$\underline{f} = \underline{\frac{Pl^3}{3EJ}} = \underline{\frac{Pl^3 \cdot \alpha}{3J}}.$$

Anmerkung. Ist der Träger gleichförmig und stetig mit q kg/cm belastet, so wird dem absoluten Werte nach für beliebigen Querschnitt x

$$M_x = qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qx^2}{2},$$

und somit liefert die Momentengleichung um D, da das Moment einer unendlich kleinen Last $M_x\,dx$ sich zu $\left(\frac{q x^2}{2} \cdot dx\right) x$ ergibt:

$$EJ \cdot f - \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{q x^2}{2} dx\right) \cdot x = 0,$$

woraus

$$\underline{f} = \underline{\frac{q l^4}{8EJ}} = \underline{\frac{q l^4 \alpha}{8J}} = \underline{\frac{Q l^3 \alpha}{8J}} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{E}\right).$$

$(Q = q\,l = \text{Gesamtlast.})$

§ 21. Numerisches Beispiel für die Bestimmung von Auflagerdrücken usw. bei kontinuierlichem Träger nach Mohr.

Aufgabe:

Gesucht Auflagerdrücke, $M_{\max}$, Wendepunkte der Biegungskurve für den in Fig. 42 dargestellten Träger.

Auflösung:

1. Wir zerlegen die gegebene Belastung in die Belastungssysteme I, II und III (siehe Figur), außerdem ersetzen wir die Wirkung der Einspannstelle durch vertikale Kräfte Q, die dort die horizontale Tangente an die Stabachse herbeiführen. Diesen Systemen entsprechen die Biegungsmomentenlinien I, II, III und IV, von denen nur die letztere unbekannt ist und die wir durch Auffinden der Ordinate $A_2 A_2'$ zu bestimmen suchen. Ihr absoluter Wert sei M.

Schneiden wir die Biegungskurve (elastische Linie) in A_1 und A_2 durch, bringen nach dem Verfahren von Mohr in A_2 die horizontale Spannung EJ und in A_1

die schiefe Spannung S_1 an, bestimmen zunächst für jedes Belastungssystem das zwischen den Schnittstellen gelegene Stück der Biegungsmomentenfläche und bringen in den Schwerpunkten derselben Kräfte gleich den bezüglichen Inhalten dieser Flächen an. Diese sind:

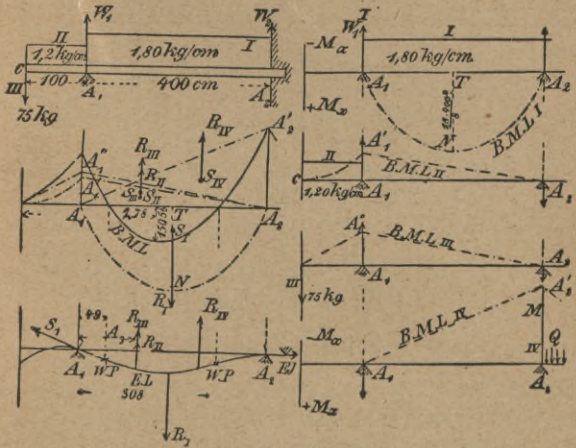


Fig. 42.

$$R_I = \text{Parabel } A_1 N A_2 = \tfrac{2}{3} \cdot 400 \cdot \frac{1{,}80 \cdot 400^2}{8} = 9600000,$$

$$R_{II} = \triangle\, A_1 A_1' A_2 = \tfrac{400}{2} \cdot A_1 A_1' = \tfrac{400}{2}(1{,}2 \cdot 100 \cdot 50) = 1200000,$$

$$R_{III} = \triangle\, A_1 A_1'' A_2 = \tfrac{400}{2}\, A_1 A_1'' = \tfrac{400}{2}(75 \cdot 100) = 1500000,$$

$$R_{IV} = \triangle\, A_1 A_2 A_2' = \tfrac{400}{2} \cdot M = 200\, M.$$

Dann liefert das Gleichgewicht dieser Kräfte R mit den Spannungen in A_1 und A_2 die Momentengleichung um A_1:

$$R_I \cdot \frac{l}{2} - R_{II} \cdot \frac{l}{3} - R_{III} \cdot \frac{l}{3} - R_{IV} \cdot \frac{2}{3} l = 0 ,$$

$$\frac{R_I}{2} - \frac{R_{II}}{3} - \frac{R_{III}}{3} - \frac{2}{3} R_{IV} = 0 ,$$

$$4800000 - 400000 - 500000 + \frac{400}{3} M = 0 ,$$

woraus $\underline{M = 29250 \text{ kgcm}}$.

2. Bezeichnet nun W_1 den resultierenden Auflagerdruck aller Belastungssysteme in A_1, so ist das wahre Biegungsmoment für den Querschnitt A_2:

$$\begin{aligned} M_{500} &= -75 \cdot 500 - (1{,}2 \cdot 100) \cdot 450 \\ &\quad + W_1 \cdot 400 - (1{,}8 \cdot 400)\, 200 , \\ &= -235500 + 400\, W_1 . \end{aligned}$$

Andererseits ist aber M_{500} gleich der algebraischen Summe der Biegungsmomente der einzelnen Systeme für A_2, und da die Biegungsmomente der Systeme I, II und III für A_2 je gleich 0 sind, so ist

$$M_{500} = -M$$

und somit

$$-235500 + 400\, W_1 = -29250 ,$$

woraus $\underline{W_1 = 515{,}625 \text{ kg}}$,

und demnach

$$W_2 = 75 + 120 + 720 - 515{,}625 ,$$

$$\underline{W_2 = 399{,}375 \text{ kg}} .$$

3. Für einen Querschnitt x zwischen A_1 und A_2 findet sich:

$$M_x = -75x - 1{,}2 \cdot 100(x - 50) + W_1 \cdot (x - 100) - \frac{1{,}80(x-100)^2}{2},$$

$$= -0{,}9x^2 + 500{,}625x - 54562{,}5$$

und somit

$$\frac{dM_x}{dx} = -1{,}8x + 500{,}625 = 0,$$

woraus

$$\underline{x = 278 \text{ cm}},$$

daher relatives

$$\underline{M_{\max}} = M_{278} = -0{,}9 \cdot 278^2 + 500{,}625 \cdot 278 - 54562{,}5$$
$$= +\underline{15056 \text{ kgcm.}}$$

Nun lehrt der Verlauf der wahren Biegungsmomentenlinie, deren Ordinaten für irgend ein x gleich der algebraischen Summe der diesem x zugehörigen Ordinaten der Biegungsmomentenlinien der einzelnen Systeme sind, daß ein größtes Biegungsmoment auch über A_1 oder A_2 vorhanden sein kann, und wir berechnen daher für A_1 das Biegungsmoment

$$M_{100} = -75 \cdot 100 - (1{,}2 \cdot 100) \cdot \tfrac{100}{2} = -13500 \text{ kgcm.}$$

Für A_2 ist das Biegungsmoment, wie bereits berechnet,

$$M_{500} = -M = -29250 \text{ kgcm},$$

daher absolut größtes

$$\underline{M_{\max} = -29250 \text{ kgcm} \quad \text{(an der Einspannstelle).}}$$

4. Die Wendepunkte der Biegungskurve ergeben sich aus

$$M_x = 0,$$

d. h. $$-0{,}9x^2 + 500{,}625x - 54562{,}5 = 0,$$

woraus

$$\underline{x = 408\text{ cm}} \qquad \underline{x = 149\text{ cm}}$$

(vom linken Balkenende an gerechnet).

V. Kapitel.

Die Spannungen im stabförmigen Körper mit gerader Achse.

---

§ 22. Die Normalspannung bei axialem Zug oder Druck.

Durchschneidet man den unter Einfluß der Axialkraft P, die der Voraussetzung des § 2 genüge, stehenden prismatischen oder zylindrischen Stab (Fig. 43) nach Eintritt des der Deformation folgenden neuen Gleichgewichtszustandes längs der Querschnittsebene AB, so bleibt z. B. der obere Teil im Gleichgewicht, wenn wir in sämtlichen Elementen seiner unteren Grenzfläche Normalkräfte anbringen, von einem der P entgegengesetzten Sinn. Treffen wir die Annahme, daß sämtliche Elemente dieser Grenzfläche vor der Wirkung der P ebenfalls in einer Querschnittsebene lagen, die relative (positive oder negative) Dehnung für alle Teilprismen vom Querschnitt $= 1$ qcm demnach dieselbe sei, so muß die diese Dehnung bewirkende Spannnung σ (vgl. § 2) für alle Teilprismen dieselbe, also über den ganzen Querschnitt konstant sein.

Die aus dem Gleichgewicht des oberen Stabteiles sich daher ergebende Gleichung:

$$F \cdot \sigma = P$$

liefert

I) $$\sigma = \frac{P^{kg}}{F^{qcm}}$$

(σ = kg/qcm Zug- bzw. Druckspannung).

Trägt man in jedem Flächenelemente des Querschnittes AB die zugehörige Normalspannung σ als Ordinate senkrecht zur Querschnittsfläche ab, so liegen die Endpunkte dieser Ordinaten in einer zum Querschnitt parallelen Ebene, die im Aufriß als eine zu AB parallele Linie erscheint (Linie der σ).

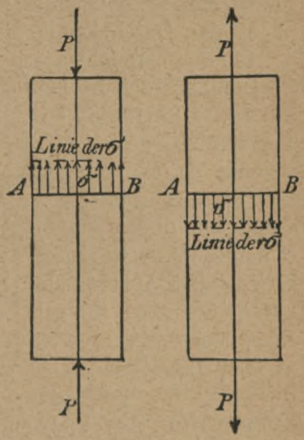


Fig. 43.

Anmerkung. Ist F auf die ganze Länge des Stabes konstant, so ist auch σ an jeder Stelle des Stabes von gleichem Werte.

Ist der Stab an einer Stelle z. B. durch Nietlöcher geschwächt, so tritt am Querschnitt mit kleinster wirksamer (nutzbarer) Fläche das größte σ ein:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F_{min}}.$$

§ 23. Die Spannungen bei Biegung.

A) Neutral-(Null-)Achse des Querschnittes.

Ein von vertikalen Lasten ergriffener, zweiseitig abgestützter oder einseitig eingespannter horizontaler Stab unterliegt der Biegung.

Die Angriffspunkte der Lasten und Auflagerdrücke seien als in der Schwerpunktsachse des Stabes liegend vorausgesetzt, so daß die vertikale Kraftebene auch die Ebene der Durchbiegung darstellt.

Die Schwerpunktsachse der Gleichgewichtsform nach der Durchbiegung ist dann eine ebene Kurve (Biegungskurve, elastische Linie, vgl. § 15). Die oberhalb dieser Achse gelegenen Fasern werden bei einer Durchbiegung nach unten zusammengedrückt, die unterhalb derselben gelegenen gezogen. Bei einer Durchbiegung nach oben findet das umgekehrte statt. Die Größe der Dehnung bzw. Kürzung dieser Fasern nimmt von den horizontalen Außenrändern des Stabes gegen die Mitte hin stetig ab. Es gibt daher eine ursprünglich in einer horizontalen Ebene gelegene Faserschicht, bei welcher die Zug- in Druckkräfte übergehen und in welcher weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung der Fasern eintritt (neutrale Faserschicht).

Für die in der Praxis gebräuchlichen geringen Werte der Durchbiegung pflegt man ferner die Annahme zu treffen, daß die vor der Durchbiegung in einer Querschnittsebene liegenden Flächenelemente auch nach derselben wieder in einer Querschnittsebene liegen (Naviersche Hypothese).

Der Stab (Fig. 44) sei nach Eintritt des neuen Gleichgewichtszustandes längs des Querschnittes AB durchgeschnitten, dann bleibt der linksseitige Stabteil nach Anbringung einer geeigneten Kraft S' in jedem Element der linksseitigen Schnittfläche im Gleichgewicht. Zugrunde lege man ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung im linken Ende der Stabachse und vertikaler nach unten gerichteter z-Achse, dessen xz-Ebene in die Kraftebene falle, zerlege S' in Komponenten normal und längs AB, ebenso die Komponenten, die in der Querschnittsebene AB liegen, je

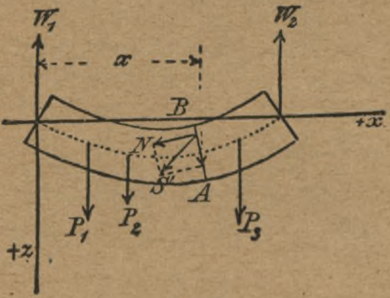


Fig. 44.

in Horizontal- und Vertikalkomponente H und V, so ist, da die H, N und V mit den linksseitigen P und W im Gleichgewicht sich befinden:

$\Sigma x = 0: \quad \Sigma N = 0$ (da die N nahezu parallel der x-Achse),

$\Sigma y = 0: \quad \Sigma H = 0,$

$\Sigma z = 0: \quad \Sigma V + (P_1 + P_2 + \ldots - W_1 - \ldots) = 0$ (da die V nahezu parallel der z-Achse)

oder $\Sigma V = -P_1 - P_2 \ldots + W_1 + \ldots = V_x$ (vgl. § 9),

d. h. die Resultante der V (vertikale Schubkraft S) gleich Transversalkraft V_x, ferner liefert das Gleichgewicht: Summe der Momente dieser Kräfte um jede beliebige Achse $= 0$.

Es sei nun (Fig. 45) $A_0 B_0$ die Lage des Querschnitts $AB(x)$ vor der Biegung, ebenso $A_1 B_1$ die Lage eines unendlich nahe gelegenen Querschnittes vor der Biegung, dann läßt sich der zwischen beiden gelegene Stabteil von der unendlich kleinen Länge dx auch nach der Biegung als geradlinig betrachten. Nach der Biegung

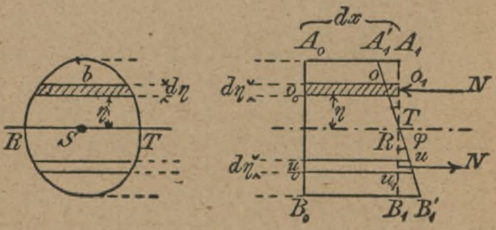


Fig. 45.

habe $A_1 B_1$ die neue Lage $A_1' B_1'$, die $A_1 B_1$ längs der Geraden RT schneidet, die senkrecht zur Kraftebene steht. Eine zwischen $A_0 B_0$ und $A_1 B_1$ liegende, der Achse parallele Faserschicht $o_0 o_1$ (in Fig. 45 schraffiert) von der Breite b des Querschnittes an jener Stelle und im senkrechten Abstand η von RT erleidet die Verkürzung $o_1 o$, eine analoge Faserschicht $u_0 u_1$ unterhalb der Achse die Verlängerung $u_1 u$. Die Verkürzung bzw. Verlängerung wird bewirkt durch eine Normalkraft N (in der Richtung der Faser), von der wir annehmen, daß sie bei der unendlich kleinen Höhe $d\eta$ der Schicht sich gleichförmig über deren Querschnitt ($b\, d\eta$)

verbreite. Nach § 22 erleidet die Faserschicht die Normal- (Druck- bzw. Zug-) Spannung:

$$\sigma = \frac{N}{b\,d\eta},$$

woraus
$$N = \sigma \cdot b\,d\eta\,.$$

Da nun $\Sigma N = 0$, so muß

$$\sum \sigma \cdot b\,d\eta = \sum \frac{\sigma}{\eta} \cdot (b\eta\,d\eta) = 0$$

sein, wobei das Summenzeichen sich über alle Elemente der Querschnittsfläche erstreckt. Nun ist die relative Kürzung der Faserschicht $o_0 o_1$:

$$\varepsilon = \frac{o_1 o}{o_0 o_1} = \frac{o_1 o}{dx},$$

daher nach dem Hookeschen Gesetz (§ 2)

$$\frac{o_1 o}{dx} = \alpha \cdot \sigma\,, \quad \text{woraus} \quad \sigma = \frac{o_1 o}{\alpha \cdot dx}$$

und
$$\frac{\sigma}{\eta} = \frac{o_1 o}{\eta} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot dx} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{1}{\alpha \cdot dx},$$

wo φ den Winkel der Ebenen $A_1 B_1$ und $A_1' B_1'$ bezeichnet. $\frac{\sigma}{\eta}$ ist also unabhängig von η, daher

$$\sum \frac{\sigma}{\eta} (b\,d\eta \cdot \eta) = \frac{\sigma}{\eta} \sum (b\,d\eta)\,\eta = 0\,,$$

also
$$\Sigma(b\,d\eta)\,\eta = 0\,.$$

Letzterer Ausdruck ist aber (Statik, Bd. I, § 38) das Moment der ganzen Querschnittsfläche $A_1 B_1$ in Beziehung auf RT, somit muß RT durch den Schwerpunkt derselben gehen. Da nun RT den Schnitt der neutralen Faserschicht mit $A_1 B_1$ darstellt, so heißt RT die Neutralachse (Nullachse) dieses Querschnittes. Somit:

Die Neutralachse eines Querschnittes geht durch den Schwerpunkt desselben.

B) Normalspannung. Gefährlicher Querschnitt.

Aus dem Gleichgewicht des links vom Querschnitt AB gelegenen Stabteils folgt die Momentensumme aller an diesem Stabteil angreifenden Kräfte P, W, N, H und V in Beziehung auf die Neutralachse $= 0$, d. h., da die H und V die Neutralachse schneiden, also ein Moment je $= 0$ liefern:

$$M_x - \Sigma N\eta = 0\,,$$

wo das Summenzeichen sich über alle Elemente des Querschnittes erstreckt. Mit Benutzung des Wertes aus A:

$$N = \sigma \cdot (b\,d\eta)$$

kommt:
$$M_x - \Sigma\,\sigma \cdot (b\,d\eta)\eta = 0\,,$$

$$M_x - \sum \frac{\sigma}{\eta} \cdot (b\,d\eta)\,\eta^2 = 0$$

und wegen der Konstanz von $\dfrac{\sigma}{\eta}$:

$$M_x - \frac{\sigma}{\eta} \sum (b\,d\eta) \cdot \eta^2 = 0\,.$$

Da aber $\Sigma(b\,d\eta) \cdot \eta^2$ das Trägheitsmoment J der ganzen Querschnittsfläche AB in Beziehung auf die Neutralachse darstellt (vgl. § 5), so folgt

$$\frac{\sigma}{\eta} \cdot J = M_x\,,$$

woraus

I)
$$\underline{\sigma = \frac{\eta \cdot M_x}{J}}$$

(Formel der Normalspannung),

wobei σ für die Fasern oberhalb der Neutralachse von entgegengesetztem Sinne ist, wie bei denjenigen, die unterhalb derselben liegen; σ bedeutet also auf der einen Seite der Neutralachse Druckspannung, auf der andern Zugspannung. Trägt man den Wert von σ (Fig. 45a) für jedes zugehörige Flächenelement in demselben senkrecht zur Querschnittsebene als Ordinate ab, so liegen die Endpunkte dieser Ordinaten, da $\frac{M_x}{J}$ für denselben Querschnitt konstant und somit σ proportional η ist, in einer Ebene, die die Querschnittsebene längs der Neutralachse schneidet. Im Aufriß erscheint diese Ebene als eine Gerade (Linie der σ), die den Aufriß der Querschnittsebene in der Projektion des Querschnittsschwerpunktes schneidet.

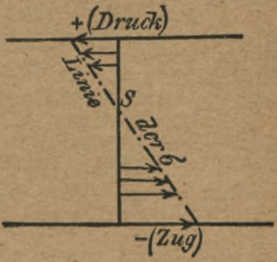


Fig. 45 a.

Bei einem Querschnitt, der symmetrisch zur Neutralachse ist, sind die beiden größten σ für Druck und Zug einander gleich:

$$\sigma = \frac{\eta_{\max} M_x}{J} = \frac{M_x}{\frac{J}{\eta_{\max}}} = \frac{M_x}{W}.$$

Folgerung.

Da beim Stabe mit konstantem Querschnitt auch J für alle Querschnitte von gleichem Werte ist, so treten in demjenigen Querschnitt die größten Normalspannungen auf, für welchen der absolute Wert von M_x ein Maximum ist (gefährlicher Querschnitt). In einem beliebigen Querschnitt wird σ für dasjenige Flächenelement von größtem Werte, für welches η ein Maximum ist, d. h. für ein Element in dem am weitesten von der Neutralachse entfernten Balkenrande. Daher:

Das absolut größte σ des ganzen Trägers findet sich an der von der Neutralachse am weitesten entfernten Stelle des gefährlichen Querschnittes und zwar ist für diese Stelle

II) $$\sigma_{max} = \frac{\eta_{max} \cdot M_{max}}{J} = \frac{M_{max}}{\frac{J}{\eta_{max}}}$$

oder nach § 5

III) $$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

(W Widerstandsmoment der Querschnittsfläche in Beziehung auf die Neutralachse oder kurz Widerstandsmoment der Biegung, vgl. Tafel I).

Folgerungen: Mit wachsendem W nimmt σ_{max} ab; in einem zur Neutralachse symmetrischen Querschnitt ist σ für beide Balkenränder von absolut gleichem Werte.

Anmerkung 1. In vorstehenden Formeln ist für M_{max} dessen Absolutwert einzuführen, falls nur der Absolutwert von σ erhalten werden will.

Anmerkung 2. Stabförmige Körper mit derart veränderlichem Querschnitt, daß in allen Querschnitten die größte Normalspannung gleich der zulässigen k_b ist, heißen **Träger von gleicher Biegungsfestigkeit.**

Unter Voraussetzung z. B. eines rechteckigen Querschnittes von gleichbleibender Breite b, aber veränderlicher Höhe h wäre demnach die größte Normalspannung in den äußersten Stellen eines Querschnittes

$$\frac{M_x}{W} = k_b\,,$$

oder

$$M_x = \frac{b\,h^2}{6} \cdot k_b\,,$$

woraus

$$h^2 = \frac{6}{b\,k_b} \cdot M_x\,.$$

Ist z. B. der Träger einseitig eingespannt und am freien Ende mit P belastet (Fig. 41), so ist $M_x = Px$ (absolut) und demnach $h^2 = \frac{6}{b\,k_b} \cdot Px$ oder, falls $\frac{h}{2} = y$ gesetzt wird, $y^2 = \frac{3}{2\,b\,k_b} \cdot Px$, also die **Begrenzungskurve des Trägers** (im Aufriß) eine **Parabel.**

Ist die Belastung gleichförmig und stetig, also

$$M_x = \frac{q\,x^2}{2} \text{ (absolut)}\,,$$

so wird

$$h^2 = \frac{6}{b\,k_b} \cdot \frac{q\,x^2}{2}\,, \quad \text{also} \quad \frac{h}{x} = \sqrt{\frac{3\,q}{b\,k_b}} = \text{konstant}\,,$$

oder

$$\frac{y}{x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3\,q}{b\,k_b}} = \text{konstant}\,;$$

d. h. der Aufriß des Trägers ist **geradlinig begrenzt** (nach dem freien Ende hin **zugeschärfter Keil**).

Beispiele:

a) Gesucht $\sigma_{\max}$ für den in Fig. 29 dargestellten Träger von rechteckigem Querschnitt 20/30 cm.

Auflösung: Nach § 14, Beispiel ist für diesen Träger

$$M_{\max} = 215\,000 \text{ kgcm}$$

(im Querschnitt $x = 600$ cm)

und nach § 7, II

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{20 \cdot 30^2}{6} = 3000 \text{ cm}^3,$$

demnach $$\underline{\sigma_{\max}} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{215\,000}{3000} = \underline{72 \text{ kg/qcm}}$$

(im Querschnitt $x = 600$ cm)

(am oberen Rand Druck-, am unteren Zugspannung).

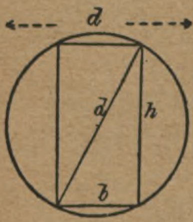


Fig. 46.

b) Gesucht die Gestalt des aus einem runden Baumstamm vom Durchmesser d sich ergebenden rechteckigen Querschnittes, für welchen bei gegebener Belastung des Trägers das zugehörige $\sigma_{\max}$ von kleinstem Werte, d. h. dessen W bei gegebenem $M_{\max}$ von größtem Werte werde.

Auflösung (Fig. 46):
Nach § 7, II ist

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{b(d^2 - b^2)}{6},$$

also für $W =$ Maximum:

$$\frac{dW}{db} = \frac{d^2}{6} - \frac{b^2}{2} = 0\,, \quad \text{woraus} \quad b^2 = \frac{d^2}{3}\,,$$

also $\quad h^2 = \frac{2}{3}\, d^2 \quad$ und somit $\quad \frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ca.}\ \frac{5}{7}$

sich ergibt.

C) **Horizontale und vertikale Schubspannung.**

Aus dem zwischen den Querschnitten $AB(x)$ und $A_1 B_1$ $(x + dx)$ liegenden Stabteil von der Länge dx (Fig. 47) werde im Abstand η von der Neutralachse

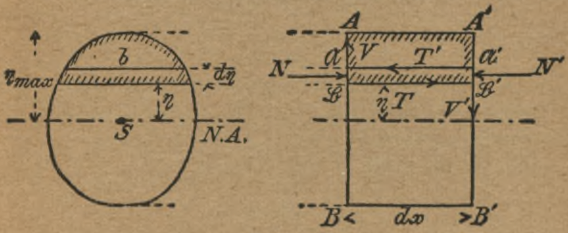


Fig. 47.

parallel zu dieser und durch die ganze Breite b des Stabes hindurch senkrecht zur Kraftebene eine Faserschicht $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ von der ∞ kleinen Höhe $d\eta$ ausgeschnitten. Diese Schicht bleibt im Gleichgewicht, wenn an den Flächen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ die Normalkräfte N und N' und in ihnen selbst wirkend vertikale Schubkräfte V und V', ferner in den horizontalen Schnittflächen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ horizontale Schubkräfte T' und T angebracht werden. Dann liefert die Momentengleichung um die durch $\mathfrak{A}'$ gehende zur Kraftebene senkrechte Kante:

$$V \cdot dx - T\, d\eta + (N' - N)\frac{d\eta}{2} = 0\,,$$

oder wenn mit τ die vertikale, τ_0 die horizontale Schubspannung in den Flächenelementen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ bezeichnet wird:

$$(b\,d\eta)\tau \cdot dx - (b\,dx)\tau_0 \cdot d\eta + (b\,d\eta \cdot \sigma' - b\,d\eta \cdot \sigma)\frac{d\eta}{2} = 0,$$

oder da $\sigma' = \sigma + d\sigma$,

$$(b\,d\eta)\tau\,dx - (b\,dx)\tau_0\,d\eta + (b\,d\eta \cdot d\sigma) \cdot \frac{\delta\eta}{2} = 0$$

und wenn das letzte Glied gegenüber den ersten als unendlich kleines höherer Ordnung vernachlässigt wird:

$$(b\,d\eta)\tau\,dx - (b\,dx)\tau_0\,d\eta = 0,$$

woraus $\underline{\tau = \tau_0}$,

d. h.: Die der Stabachse parallele und die vertikale Schubspannung sind für irgend eine Stelle des Stabes gleich.

Die Normalkraft N auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist

$$N = (b\,d\eta)\,\sigma,$$

daher die Normalkraft auf die ganze oberhalb $\mathfrak{B}$ gelegene Querschnittsfläche $\mathfrak{B}A$ (in der linksseitigen Figur schraffiert)

$$N = \sum (b\,d\eta)\sigma = \sum (b\,d\eta) \cdot \frac{\eta M_x}{J} = \frac{M_x}{J} \sum (b\,d\eta)\eta,$$

wo das Summenzeichen sich über alle Querschnittselemente oberhalb $\mathfrak{B}$ erstreckt, oder

$$N = \frac{M_x}{J} \cdot M_\eta,$$

wo M_η das Moment des oberhalb $\mathfrak{B}$ befindlichen Teiles der Querschnittsfläche in Beziehung auf die Neutralachse ist.

Aus dem Gleichgewicht des ganzen Teilkörpers $A\mathfrak{B}\mathfrak{B}'A'$ (für welchen $T' = 0$) folgt aber

$$N + T - N' = 0\,,$$

$$N + T - (N + d\,N) = 0\,,$$

$$T - d\,N = 0\,,$$

$$(b\,d\,x)\,\tau_0 - \frac{d\,M_x}{J} \cdot M_\eta = 0$$

oder da nach § 14

$$d\,M_x = V_x \cdot d\,x\,,$$

so folgt:

$$\underline{\tau_0} = \underline{\frac{V_x \cdot M_\eta}{b \cdot J}} = \underline{\tau}\,.$$

Anmerkung. Die Transversalkraft $V_x = -P_1 - P_2 \ldots + W_1 - \ldots$ ist gleich der vertikalen Schubkraft S im Querschnitt x (§ 23, A), daher läßt sich vorstehende Formel auch schreiben:

$$\underline{\tau_0} = \underline{\frac{S \cdot M_\eta}{b \cdot J}} = \underline{\tau}\,.$$

Folgerungen:

Für $\eta = \eta_{\max}$ fällt $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ in den Trägerrand, die über $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ sich befindliche Querschnittsfläche wird gleich 0 und daher auch $M_\eta = 0$. Daher auch:

In den äußersten Fasern des Querschnittes ist $\tau_0 = \tau = 0$.

Für $\eta = 0$, d. h. $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ in der Neutralachse, wird die über $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ befindliche Querschnittsfläche und daher auch M_η von größtem Wert. Daher auch:

In der neutralen Schicht ist $\tau_0 = \tau$ ein Maximum.

Spezielle Fälle:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rechteckiger Querschnitt: } \tau_{\max} = \dfrac{3\,S}{2\,F} \\ \text{Kreisförmiger Querschnitt: } \tau_{\max} = \dfrac{4\,S}{3\,F}\end{array}\right\}\text{ in der neutralen Schicht,}$$

wo F den Inhalt der Querschnittsfläche bedeutet.

D) Schiefe Spannung.

Bei der gleichzeitigen Wirkung der Normal- und Schubkräfte entsteht außer der Dehnung bzw. Kürzung des Elements $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ (Fig. 47) in seiner Längs- und Querrichtung eine gegenseitige Verschiebung der Endflächen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ gegeneinander in ihren vertikalen Ebenen. Die Folge ist eine Dehnung bzw. Kürzung der Diagonalebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, deren neue Länge von den verschiebenden Kräften und der ursprünglichen Neigung dieser Ebene gegen die neutrale Schicht abhängt. Fingiert man eine in dieser Ebene wirkende (schiefe) Spannung Σ, welche eine Maximaldehnung der schrägen Länge der Diagonalebene nach dem Gesetz der elastischen Dehnung herbeizuführen imstande wäre, so ergibt sich für diese auf Grund der Elastizitätslehre nach Bach der Absolutwert:

$$\Sigma = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}\,,$$

wo
$$\alpha_0 = \frac{k_z}{1{,}3 \cdot k_s}$$

(= ca. 1 bei Flußeisen und Stahl; bei isotropem Material = 1)

und $\begin{matrix} k_s \\ k_z \end{matrix}\Big\rangle$ die zulässige Beanspruchung auf $\Big\langle\begin{matrix}\text{Schub} \\ \text{Zug,}\end{matrix}$

sowie σ die Normalspannung $\frac{\eta M_x}{J}$ und τ die Schubspannung $\frac{S \cdot M_\eta}{b \cdot J}$ an der Stelle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bezeichnet (vgl. Bach, Elastizität und Festigkeit).

§ 24. Die Schubspannung der Drehung (Torsion).

In der Ebene der unteren Endfläche $A'B'$ des zylindrischen, mit einem Ende eingespannten Stabes (Fig. 48) wirke ein drehendes Kräftepaar vom Momente M_d. Wir nehmen an, daß sämtliche Elemente einer Querschnittsebene nach der eingetretenen Verdrehung (Torsion) wieder in einer Querschnittsebene liegen, durchschneiden den Stab längs des Querschnittes AB, bringen in sämtlichen Elementen der Schnittfläche am unteren Stabteil die zur Erhaltung des Gleichgewichts desselben nötigen inneren Kräfte an, so können wir unter Vernachlässigung der zur Querschnittsebene normalen Komponenten derselben die Verdrehung im Querschnitt AB als eine Schubwirkung der Komponenten nach dieser Ebene betrachten. Da hiebei der Schub, den ein Flächenelement von AB bei kleinem Drehungswinkel erleidet, proportional zu dessen Entfernung ϱ von der Drehachse, aber ebenso proportional der Schubspannung τ an jener Stelle angenommen werden kann, so ist auch τ proportional ϱ, so daß

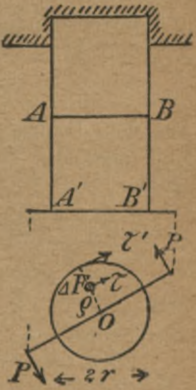


Fig. 48.

$$\tau = C \cdot \varrho \quad (C \text{ Konstante})$$

gesetzt werden kann. Für die Schubspannung τ an der Peripherie ist daher

$$\tau' = C \cdot r \quad (r \text{ Radius des Zylinders}),$$

woraus
$$\tau = \frac{\varrho}{r} \cdot \tau',$$

daher die Schubkraft am Element $\triangle F$ des Querschnitts AB:

$$\triangle F \cdot \tau = \frac{\triangle F \cdot \tau' \varrho}{r}$$

und deren Moment in bezug auf die Achse des Zylinders

$$\frac{\triangle F \cdot \tau' \cdot \varrho^2}{r}.$$

Aus dem Gleichgewichtszustand des unteren Stabteiles folgt aber die Momentengleichung um die Drehungsachse:

$$M_d - \sum \frac{\triangle F \cdot \tau' \cdot \varrho^2}{r} = 0$$

oder
$$M_d = \frac{\tau'}{r} \sum \triangle F \cdot \varrho^2,$$

$$= \frac{\tau'}{r} \cdot J^0$$

(J^0 polares Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf seinen Mittelpunkt),

also
$$\underline{\tau'} = \underline{\frac{r \cdot M_d}{J^0}}$$

und demnach
$$\underline{\tau} = \frac{\varrho}{r} \tau' = \underline{\frac{\varrho M_d}{J^0}}.$$

τ' ist demnach die größte im Querschnitt auftretende

Schubspannung. Sie sei mit τ_{max} bezeichnet. Dann ist also

$$\underline{\tau_{max}} = \frac{r M_d}{\underline{J^0}} = \frac{M_d}{\frac{J^0}{r}} = \frac{M_d}{W^0}$$

(W^0 polares Widerstandsmoment des Querschnitts in Beziehung auf dessen Mittelpunkt $= \frac{\pi d^3}{16}$ vgl. § 7)

oder
$$\underline{\tau_{max}} = \frac{M_d}{\frac{\pi d^3}{16}} = \underline{\frac{16 M_d}{\pi d^3}}$$

(am Umfang des Zylinders)

$$= \text{ca.}\ \frac{5 M_d}{d^3}\,.$$

§ 25. Die Normalspannung bei exzentrischer Belastung. Knickungsformel von Navier.

Ein einerseits festgespannter vertikaler Stab heißt exzentrisch belastet, wenn die Last P in der Entfernung f von der Schwerpunktsachse am oberen Ende angreift (Fig. 31). f heißt Exzentrizität der Last.

Durchschneiden wir den Stab nach der Durchbiegung in einem beliebigen Querschnitt AB, so bleibt der obere Trägerteil im Gleichgewicht, wenn wir in den Elementen seiner Schnittfläche die geeigneten Normal- und Schubkräfte anbringen. Dieses Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn wir ferner an ihm im Schwerpunkt der Schnittfläche zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte P anbringen. Eine derselben bildet mit der gegebenen Last P ein Kräftepaar (Fig. 31) vom Momente Py', die andere wirkt als axiale Druckkraft, die den oberen Stabteil auf den unteren drückt. Die Normalspannungen im betrachteten Querschnitt sind also zusammengesetzt aus denjenigen, die durch die Biegung durch das Kräftepaar, und denjenigen, die durch die axiale Druckkraft erzeugt werden, so daß

und gemäß Gleichung I, § 22 und I, § 23, B:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_P \pm \sigma_B \\ \sigma &= \frac{P}{F} \pm \frac{\eta\,(P y')}{J} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ \text{Druckspannung} \\ &- \text{Zugspannung.} \end{aligned}$$

In einem zur Neutral-Achse der Biegung symmetrischen Querschnitt ist das größte von der Biegung herrührende Glied $\frac{\eta\,(P y')}{J}$ für Zug und Druck von gleichem Werte, daher ist für einen solchen Querschnitt die absolut größte Normalspannung eine Druckspannung vom Werte

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{\eta_{\max}\,(P y')}{J}.$$

Die am ganzen Stabe vorkommende größte Druckspannung $\sigma_{\max\cdot\text{Druck}}$ tritt an der von der Neutralachse am weitesten entfernten, gedrückten Stelle desjenigen Querschnitts ein, für welchen y' seinen größten Wert $\delta + f$ erreicht, also im Punkte A' der Einspannstelle. Ist für diesen Punkt $\eta = e_1$, so wird

$$\underline{\sigma_{\max\cdot\text{Druck}} = \frac{P}{F} + \frac{e_1\,[P(\delta + f)]}{J}}.$$

Dieser Wert gibt überhaupt die absolut größte Normalspannung bei symmetrischem Querschnitt für den ganzen Stab an.

Aus der Gleichung der Biegungskurve des Stabes:

$$\delta + f - y = (\delta + f) \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)$$

(vgl. § 16) ergibt sich, da für $x = l$ (Stablänge) $y = \delta$ wird,

$$f = (\delta + f) \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right),$$

woraus
$$\delta + f = \frac{f}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

und mittels dieses Wertes die größte Druckspannung des Stabes (in A')

$$\text{I)} \qquad \underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{P}{F} + \frac{e_1 P f}{J \cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}}.$$

(Bei symmetrischem Querschnitt absolut größte Normalspannung des Stabes.)

Anmerkung 1. Bei dicken Stäben (Mauerpfeilern usw., vgl. § 26), die keine oder nur eine sehr geringe seitliche Ausbiegung δ erleiden, kann ohne großen Fehler $\delta = 0$ und somit

$$\text{I')} \qquad \underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{P}{F} + \frac{e_1 (P f)}{J}}$$

genommen werden.

Anmerkung 2. Bei unsymmetrischem Querschnitt ist für den ganzen Stab die absolut größte Normalspannung der absolut größere der beiden Werte

$$\frac{P}{F}+\frac{e_1 P f}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{P}{F}-\frac{e_2 P f}{J\cos\left(l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right)}$$

vom Charakter des überwiegenden Vorzeichens und im Querschnitt der Einspannstelle.

Spezieller Fall.

f klein; $y'=f$.

Knickungsformel von Navier.

Für diesen Fall läßt sich das Biegungsmoment $Py'=Pf$ (konstant) annehmen und daher wird

$$\sigma_{\text{max-Druck}}=\frac{P}{F}+\frac{e_1(Pf)}{J}.$$

Setzt man diesen Wert gleich der zulässigen Beanspruchung k auf Druck, so folgt

$$P=\frac{kJ\cdot F}{J+e_1 f F}=F\cdot\frac{k}{1+e_1 f\cdot\frac{F}{J}}.$$

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{J}{F}$ mit r^2 (und r als Trägheitsradius), so kommt

$$P=F\cdot\frac{k}{1+\frac{e_1 f}{r^2}}.$$

Aus den Gleichungen für die größte Druckspannung der Biegung

$$\sigma=\frac{e_1(Pf)}{J}$$

und dem Gesetze der elastischen Dehnung

$$\alpha \sigma = \varepsilon$$

folgt durch Elimination von σ:

$$P = \frac{\varepsilon J}{\alpha \cdot e_1 f}.$$

Da nach der Gleichung von Euler (vgl. § 17)

$$P = \frac{c \cdot J}{\alpha \cdot l^2}$$

(c eine von der Befestigungsart der Stabenden herrührende Konstante),

so folgt durch Gleichsetzung beider Werte für P:

$$\frac{\varepsilon}{e_1 f} = \frac{c}{l^2}, \quad \text{also} \quad e_1 f = \frac{\varepsilon l^2}{c}$$

und damit

$$\underline{P} = F \cdot \frac{k}{1 + \frac{\varepsilon}{c} \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^2} = F \cdot \underline{\frac{k}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2}}.$$

Diese Formel gibt die praktische Tragkraft P des Stabes an und wird als Knickungsformel benutzt. $\varkappa$ heißt Knickungskoeffizient. Gebräuchliche Werte von $\varkappa$

für Schmiedeeisen u. weichen Stahl	0,00005	bis 0,0001
für Gußeisen	0,0002	bis 0,0003
für Holz	0,0002	

Da mit abnehmendem r auch P abnimmt, wählt man zur Berechnung von P den kleinsten Trägheitsradius, den in Beziehung auf eine Schwerpunktsachse zu bilden möglich ist.

Die Tragkraft ist um so kleiner, je größer das Verhältnis der Stablänge zum kleinsten Trägheitsradius des Querschnittes ist.

§ 26. Die Normalspannung bei Mauern und Gewölben.

A) Mauern mit konstantem Profil (vgl. Statik, Bd. II, §§ 17 und 18).

An dem über der Lagerfuge AB (Fig. 49) stehenden Stück einer Mauer von konstantem Profil und der Länge l cm greifen die in einer vertikalen Symmetrieebene, in der auch der Schwerpunkt des Mauerstücks liegt, gelegenen Kräfte P an. Dieselben seien mit dem Eigengewicht Q desselben zu einer Resultante R vereinigt. Diese sei mit ihrem Angriffspunkt in den Stützpunkt C dieser Fuge (Statik, Bd. II, §§ 17 und 18) verschoben und dort in Horizontal- und Vertikalkomponente H_x und N_x zerlegt. Nimmt man an, die Wirkung der H_x werde durch die Reibung in der Fuge aufgehoben, und bringt man an dem über AB stehenden Mauerstück im Schwerpunkt S der Fugenfläche zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gleich N_x an, so erhält man ein biegendes Kräftepaar vom Momente $N_x \cdot f$, wo $CS = f$ und eine axiale Druckkraft N_x, die das über AB stehende Mauerstück auf seine Unterlage drückt. Es lassen sich demnach für die in der Fuge entstehenden Normalspannungen die Formeln des vorigen Paragraphen (exzentrische Belastung) in Anwendung bringen und man erhält demnach für irgend eine Stelle der Lagerfuge im Abstand η von der N-Achse der Biegung:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} \pm \frac{\eta (N_x \cdot f)}{J} \qquad \begin{pmatrix} + \text{Druckspannung} \\ - \text{Zugspannung} \end{pmatrix}$$

(J Trägheitsmoment der Fuge in Beziehung auf die Neutralachse der Biegung),

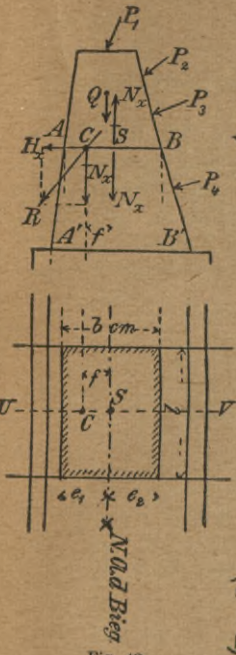


Fig. 48.

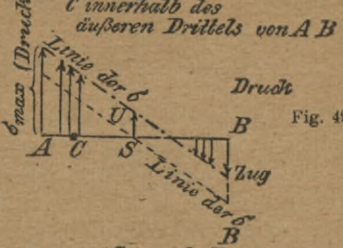


Fig. 49a

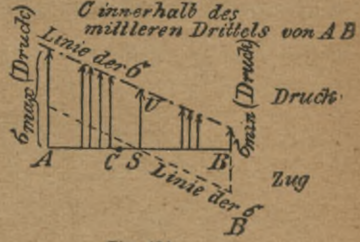


Fig. 49b.

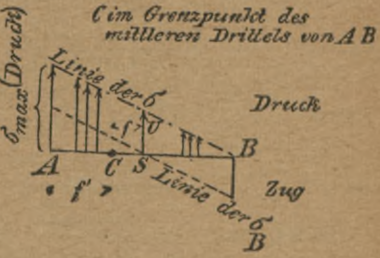


Fig. 49c.

und die Linie der σ hat im allgemeinen den in den Fig. 49a, b, c angegebenen Verlauf

$$\left(SU = \frac{N_x}{F}; \quad \sigma = \sigma_{N_x} \pm \sigma_B\right).$$

Stellt man die Forderung auf, daß die Normalspannung an keiner Stelle des Querschnitts Zugspannung sein dürfe (da dem Mörtel keine Zugfestigkeit zugeschrieben werden kann), also σ selbst an den Stellen größter, durch die Biegung erzeugter Zugspannung (in B) nicht negativ werden soll, so ergibt sich, da für diese Stellen $\eta = \frac{b}{2}$, dafür die Bedingung:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} - \frac{\frac{b}{2}(N_x f)}{J} \geqq 0$$

oder

$$\frac{N_x}{l \cdot b} - \frac{\frac{b}{2}(N_x \cdot f)}{\frac{1}{12} l \cdot b^3} \geqq 0$$

(b, l und f in cm; $F = l \cdot b$ qcm; N_x in kg)

oder

$$\frac{6 N_x f}{l b^2} \leqq \frac{N_x}{l b},$$

woraus

$$f \leqq \frac{b}{6}$$

oder

$$\underline{AC \geqq \frac{b}{3}}.$$

Daher:

Liegt der Stützpunkt C innerhalb des mittleren Drittels der Fugenbreite oder in dessen Grenzpunkten, so erleiden sämtliche Elemente der Fuge nur Druckspannung. Im letzteren Fall ist die kleinste Druckspannung gleich 0 (in dem dem Stützpunkt abgewandten Fugenende B, da für dieses in diesem Falle $\sigma_{N_x} - \sigma_B = 0$ wird).

Die Linien der σ für die drei Fälle, die hinsichtlich der Lage des Punktes C innerhalb der Fugenbreite AB möglich sind, zeigen die Fig. 49a, b, c.

Größte Druckspannung der Fuge.

a) C liegt innerhalb des mittleren Drittels der Fugenbreite.

$e_1 = \frac{b}{2}$ (für die Stelle A). Daher gemäß der Gleichung zu Anfang dieses Paragraphen

$$\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{N_x}{F} + \frac{\frac{b}{2} \cdot (N_x \cdot f)}{J}$$

(in A wenn C links von S, in B wenn C rechts von S liegt), und falls das Mauerstück eine Tiefe $l = 100$ cm hat, also $F = 100 \cdot b$ qcm ist:

$$\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{N_x}{100b} + \frac{\frac{b}{2}(N_x \cdot f)}{\frac{1}{12} \cdot 100 b^3}.$$

I) $$\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{N_x}{100b}\left(1 + \frac{6f}{b}\right)$$

(vgl. Anmerkung 1).

b) C liegt im Grenzpunkt des mittleren Drittels der Fugenbreite

$$f = \frac{b}{6}.$$

Aus I):

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{2N_x}{100b} = \frac{2N_x}{100 \cdot 3f'}}$$

$$\left(f' = \frac{b}{3} = AC\right)$$

(vgl. Anmerkung 1).

c) C liegt im äußeren Drittel der Fugenbreite, aber nahe am Grenzpunkt des mittleren Drittels.

Man pflegt in diesem Falle die Strecke AC zu verdreifachen bis D (Fig. 50) und die Annahme zutreffen, daß nur AD die wirksame Fugenfläche darstelle. Man rechnet dann σ_{max} aus obiger Formel II)

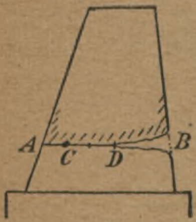


Fig. 50.

$$\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{2N_x}{100 \cdot 3f'},$$

indem man $\underline{f' = AC}$ nimmt.

Anmerkung 1. In den vorstehenden Formeln I und II sind f und b in cm zu nehmen, σ_{max} bedeutet kg/qcm. Die Formeln I und II sind gültig bei einer Tiefe des Mauerstückes $l = 100$ cm.

Anmerkung 2. Der Wert von N_x nimmt mit zunehmendem Mauergewichte, also mit der Veränderung der Lage von AB nach der Tiefe hin zu, daher auch $\sigma_{\text{max-Druck}}$, somit ist bei Stabilitätsuntersuchungen von Mauern $\sigma_{\text{max-Druck}}$ besonders für die Fundamentfuge $A'B'$ zu berechnen.

Anmerkung 3. Da der Baugrund nur Druckspannungen bis zu einer gewissen Größe aufzunehmen vermag, so ist bei Stabilitätsuntersuchungen von Mauern $\sigma_{\text{max-Druck}}$ auch für die Fundamentsohle zu berechnen.

Anmerkung 4. Für dieselbe Fuge nimmt (vgl. Gleichung I) $\sigma_{\text{max-Druck}}$ mit wachsendem f ebenfalls zu, daher ist die Berechnung von $\sigma_{\text{max-Druck}}$ auch für die Fugen der größten Annäherung der Stützlinie an das Mauerprofil (Bruchfugen) vorzunehmen.

Anmerkung 5. Da das Moment $N_x \cdot f$ gleich dem Moment von R, d. h. gleich der algebraischen Summe der Momente von Q und aller P (Fig. 49) in Beziehung auf die Neutralachse der Biegung für den Querschnitt AB, also gleich dem Biegungsmoment M_x ist, so folgt für die größte Druckspannung der Fuge:

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{N_x}{F} + \frac{e_1 M_x}{J}},$$

und da $e_1 = \frac{b}{2}$, und falls die Tiefe $l = 100$ cm,

$$J = \tfrac{1}{12} \cdot 100 \cdot b^3$$

ist, so kommt

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}}} = \frac{N_x}{100b} + \frac{6M_x}{100b^2} = \underline{\frac{1}{100b}\left(N_x + \frac{6M_x}{b}\right)}$$

(b in cm; M_x in kgcm; $\sigma_{\text{max-Druck}}$ in kgqcm),

wobei N_x sich am einfachsten als algebraische Summe der Vertikalkomponenten der Q und aller P berechnen läßt.

B) Mauern mit Strebepfeilern.

Zu beiden Seiten des Pfeilers schneiden wir je in der Mitte das anstoßende Mauerfeld mittels der vertikalen Ebenen AB und HD (Fig. 51) durch und wenden auf eine beliebige Lagerfuge EG dasselbe Verfahren wie vorhin an. Dann ergibt sich für ein beliebiges Element dieser Fuge im Abstand η von der Neutralachse der Biegung, falls $CS = f$:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} \pm \frac{\eta(N_x \cdot f)}{J}\,.$$

$$\begin{pmatrix} + \text{Druckspannung} \\ - \text{Zugspannung.} \end{pmatrix}$$

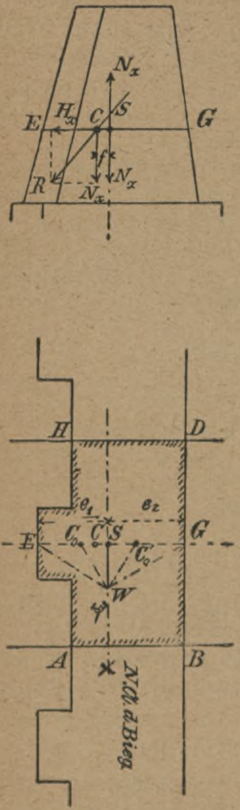


Fig. 51.

Stellt man wieder die Bedingung auf, daß σ an keiner Stelle des Querschnittes Zugspannung werden dürfe, d. h. daß an der Stelle größter Zugspannung der Biegung, also an der Stelle G, wo $\eta = e_2$, σ noch Druckspannung bleibe, so ist der Ausdruck dieser Bedingung

$$\sigma = \frac{N_x}{F} - \frac{e_2(N_x f)}{J} \geqq 0\,,$$

hieraus folgt:

$$e_2 f \leqq \frac{J}{F} \leqq r^2$$

(r Trägheitsradius von F in Beziehung auf die $N \cdot A = \sqrt{\frac{J}{F}}$),

also
$$f \leqq \frac{r^2}{e_2}\,.$$

Macht man daher auf der Neutralachse $SW = r = \sqrt{\frac{J}{F}}$, zieht GW, und in W senkrecht hierzu WC_0, so bestimmt C_0

diejenige Grenzlage für C, außerhalb welcher auf der Strecke EC_0 der Punkt C nicht liegen darf, wenn Zugspannungen in der Fuge vermieden werden sollen. In analoger Weise ist C_0'' konstruiert, so daß, wenn C innerhalb C_0C_0'' liegt, an keiner Stelle der Fuge Zugspannung auftritt.

Liegt C innerhalb C_0C_0'', so folgt für die größte Druckspannung der Fuge (in E, falls C links von S liegt)

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{N_x}{F} + \frac{e_1 (N_x f)}{J}}$$

(J Trägheitsmoment der schraffierten Querschnittsfläche F in Beziehung auf die $N \cdot A \cdot$ der Biegung).

Liegt C rechts von S und innerhalb C_0C_0'', so findet die größte Druckspannung in G statt und sie ergibt sich aus obiger Gleichung mit e_2 statt e_1.

C) Tonnengewölbe.

Ist aus einem zylindrischen Tonnengewölbe durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen ein Stück von der Länge (Tiefe) $l = 1$ m $= 100$ cm ausgeschnitten (Fig. 52) und für dieses Stück die Stützlinie konstruiert (vgl. Statik, Bd. II, § 18), so wird der auf eine Radialfuge wirkende Fugendruck s annähernd durch denjenigen Polstrahl s nach Größe und Richtung dargestellt, welcher zu der von der Fuge geschnittenen Seite des Seilpolygons parallel geht. Verschiebt man diesen Fugendruck s mit seinem Angriffspunkt in den Stützpunkt C der Fuge, zerlegt dort s

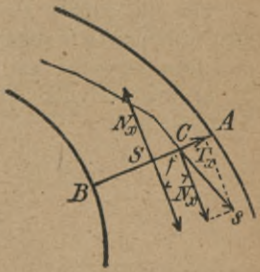


Fig. 52.

in die zwei Komponenten N_x und T'_x normal und längs der Fugenebene, so lassen sich hinsichtlich beider Komponenten dieselben Betrachtungen anstellen, wie in A) hinsichtlich der analogen Kräfte bei der Lagerfuge, wofern man nur statt des über der Lagerfuge stehenden Mauerstückes den links von der Fugenebene befindlichen Gewölbeteil in Betracht zieht.

Daraus ergibt sich die resultierende Normalspannung wieder als eine kombinierte des axialen Druckes N_x und des biegenden Kräftepaares vom Moment $N_x \cdot f$ $(f = CS)$ und somit, wenn auch beim Gewölbe Zugspannungen vermieden werden sollen, analog wie bei A):

Liegt der Stützpunkt C innerhalb des mittleren Drittels der Fugenbreite AB oder in dessen Grenzpunkten, so erleiden sämtliche Elemente der Fuge nur Druckspannung. Im letzteren Fall ist die kleinste Druckspannung $= 0$ (in dem dem Stützpunkt abgewandten Fugenende B, da für dieses in diesem Falle $\sigma_{N_x} - \sigma_B = 0$ wird).

Für die größte Druckspannung der Fuge (in dem dem Stützpunkt C zugekehrten Ende A der Fuge) gelten dieselben Formeln wie bei A) (für $l = 100$ cm):

a) wenn C innerhalb des mittleren Drittels der Fugenbreite liegt:

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}}} = \underline{\frac{N_x}{100\,b}\left(1 + \frac{6f}{b}\right)}$$

$$= \underline{\frac{1}{100\,b}\left(N_x + \frac{6\,M_x}{b}\right)},$$

wo M_x die algebraische Summe der Momente aller am linksseitigen Gewölbeteil angreifenden Kräfte in Beziehung auf S bedeutet;

b) wenn C im Grenzpunkt des mittleren Drittels der Fugenbreite liegt:

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{2\,N_x}{100\,b} = \frac{2\,N_x}{100 \cdot 3\,f'}}, \quad (\text{wo } f' = AC)\,;$$

c) wenn C wenig ins äußere Drittel tritt:

$$\underline{\sigma_{\text{max-Druck}} = \frac{2\,N_x}{100 \cdot 3\,f'}}, \quad (\text{wo } f' = AC)\,.$$

§ 27. Die schiefe Spannung bei gleichzeitiger Biegung und Drehung (Torsion) am zylindrischen Stab.

Wird für einen Querschnitt x eines zylindrischen Stabes das Biegungsmoment mit M_b, das Moment der Drehung mit M_d bezeichnet, so erhält man für ein Element dieses Querschnittes im Abstand η von der Neutralachse und Entfernung ϱ vom Mittelpunkt:

die Normalspannung der Biegung: $\sigma = \dfrac{\eta\,M_b}{J}$ (§ 23, B)

und die Schubspannung der Drehung: $\tau = \dfrac{\varrho\,M_d}{J^o}$ (§ 24).

Diese Spannungen liefern analog § 23, D am Element eine schiefe Spannung vom Höchstwert

$$\Sigma = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\,\tau)^2}\,,$$

wo
$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_d}$$

(k_b zulässige Beanspruchung auf Biegung, k_d auf Drehung, vgl. Bach, Maschinenelemente, Tafel der zulässigen Beanspruchungen).

Führt man die Werte von σ und τ in die Gleichung für Σ ein, so ergibt letztere:

$$\Sigma = \frac{0{,}35\,\eta\, M_b}{J} + 0{,}65 \sqrt{\left(\frac{\eta\, M_b}{J}\right)^2 + 4\left(\alpha_0\, \frac{\varrho\, M_d}{J^0}\right)^2}.$$

Σ wird demnach für diejenige Stelle des Querschnittes ein Maximum, für welche η und ϱ ihren größten Wert erreichen, also am Umfang, für welchen $\eta = \varrho = \frac{d}{2}$ (d Durchmesser des Stabes) ist. Berücksichtigt man ferner die Werte

$$J = \frac{\pi\, d^4}{64}; \quad J^0 = \frac{\pi\, d^4}{32} \quad (\S\ 7),$$

so kommt für das größte Σ des Querschnittes

$$\sum = \frac{32}{\pi\, d^3}\left[0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{(M_b)^2 + (\alpha_0\, M_d)^2}\right].$$

Das absolut größte Σ des ganzen Stabes ist demnach am Umfang desjenigen Querschnittes, für welchen der Wert der Klammer ein Maximum ist, und hat den Charakter von Zug- oder Druckspannung.

Anmerkung: Bezeichnet man den Wert der Klammer mit M, so wird das größte Σ des Querschnittes:

$$\sum = \frac{32}{\pi\, d^3} \cdot M = \frac{M}{\frac{\pi\, d^3}{32}} = \frac{M}{W}$$

(W axiales Widerstandsmoment des Querschnittes in Beziehung auf den Durchmesser),

und der Vergleich dieser Relation mit den Formeln der Normalspannung der Biegung lehrt den Charakter von M als den eines ideellen Biegungsmomentes, das die Normalspannung Σ der Biegung am Umfang des Querschnittes erzeugen würde.

Anhang.

§ 28. Über die Aufgabe der Dimensionierung stabförmiger Körper mit Beispielen.

Der Gegenstand dieser Aufgabe ist meist die Ermittlung der Mindestdimensionen des Querschnittes solcher Körper, die bei gegebenen äußeren Kräften nötig sind, damit der Höchstwert gewisser innerer Spannungen die zulässige Beanspruchung k derselben Art nicht überschreite, d. h. es muß

$$\text{Maximalspannung} \quad \overline{\gtrless} \, k \quad \text{sein.}$$

Um die Tragfestigkeit des Materials voll auszunützen, wählt man möglichst das obere Zeichen. In den wenigsten Fällen läßt jedoch die entstandene Gleichung die direkte Bestimmung einer Querschnittsabmessung zu, da es in den meisten Fällen unmöglich oder zu kompliziert ist, die Gleichung auf eine solche mit nur einer Unbekannten zurückzuführen. Man verfährt dann auf indirektem Wege, indem man eine aus der Erfahrung geschöpfte Form und Größe des Querschnittes zugrunde legt, für diesen angenommenen Querschnitt nach den Formeln des vorhergehenden Abschnittes die größten am Stab auftretenden Spannungen zu ermitteln sucht, und falls diese einen Wert ergeben, der größer ist als die entsprechenden zulässigen Beanspruchungen, den gewählten Querschnitt vergrößert, für den neuen Querschnitt diese Rechnung aufs neue anstellt usw. und so lange fortfährt, bis die größte Spannung den entsprechenden Wert von k nicht mehr überschreitet.

Über die Werte von k vgl. § 4. Die dort enthaltenen Werte sind nur Mittelwerte. Bei wichtigen Konstruktionen ist es nötig, für das in Aussicht genommene Material die Werte von k durch Versuche am Material selbst oder auf Grund von Berechnungen an ausgeführten und bewährten Konstruktionen zu ermitteln. Namentlich ist dies bei Stahl und Beton der Fall, bei welchen der Wert von k großen Schwankungen unterliegt.

Es kann nicht Aufgabe dieses Bändchens sein, die zahlreichen besonderen Aufgaben zu lösen, welche der Maschinenbau, die Hochbau- und Ingenieurtechnik in Hinsicht auf die Dimensionierung stellen, und wir beschränken uns deshalb auf wenige allgemeine Beispiele:

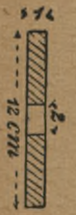


Fig. 53.

Beispiel 1. Ein schmiedeeiserner Stab aus Flacheisen erleidet eine ruhende axiale Zugkraft von 10000 kg. Welcher nutzbare und welcher wirkliche Querschnitt ist nötig, wenn eine Schwächung durch ein Nietloch von einer Breite gleich der doppelten Stabdicke in Rechnung zu nehmen ist ($k_z = 1000$ kg/qcm)? (Fig. 53.)

Auflösung: Der nötige nutzbare Querschnitt ergibt sich aus

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} = k_z, \quad \text{(vgl. § 22)}$$

$$\frac{10000}{F} = 1000,$$

$$F = 10 \text{ qcm} = 10/1 \text{ cm}.$$

Diese Fläche ist aber zu vergrößern wegen der Schwächung durch das Nietloch. Durch Probieren ergibt sich als tatsächlich nötiger Querschnitt 12/1 cm.

Beispiel 2. Welchen Querschnitt muß eine runde eiserne Zugstange erhalten, die einen axialen Zug von 10000 kg auszuhalten hat ($k_s = 1000$ kg/qcm)?

Auflösung:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} = k_s\,,$$

$$\frac{10000}{\frac{\pi d^2}{4}} = 1000\,,$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\pi}} = 3{,}6 \text{ cm.}$$

Beispiel 3. Der Mittelpfeiler einer Brücke (Fig. 54) von gegebenen Dimensionen erhält bei Vollbelastung der beiden anstoßenden Gewölbe von beiden Seiten einen gleich großen und gleich geneigten Gewölbeschub. Die Resultante beider Schübe, die in die vertikale Pfeilerachse fällt, beträgt 150000 kg. Welche Pressung erleidet die Fundamentsohle (Gewicht von 1 cbm Mauerwerk des Pfeilers = 2200 kg)?

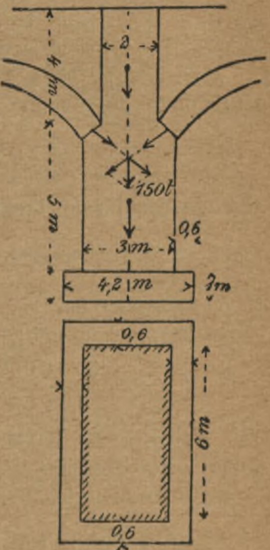


Fig. 54.

Auflösung: Die Fundamentsohle erleidet einen axialen Druck von

$$P = 150\,000 + \text{Gew. d. Pfeilers} + \text{Gew. d. Fundamentes},$$
$$= 150\,000 + (2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 6) \cdot 2200 + (4{,}2 \cdot 7{,}2 \cdot 1) \cdot 2200 \text{ kg},$$
$$= 520\,128 \text{ kg}.$$

Die Fläche der Fundamentsohle $F = 420 \cdot 720$ qcm, daher Pressung in der Fundamentsohle

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{520\,128}{420 \cdot 720} = 1{,}7 \text{ kg/qcm}.$$

Beispiel 4. Eine hohle gußeiserne Säule von 4 m Länge hat eine ruhende Belastung von 10000 kg aufzunehmen. Welcher Querschnitt, wenn beide Enden als drehbar angenommen werden ($k = 500$ kg/qcm; $E = 1\,000\,000$ kg/qcm, Sicherheitskoeffizient $= \frac{1}{6}$)?

Auflösung: Nach § 17 ist die theoretische Tragkraft der Säule für die genannte Befestigungsart der Säulenenden

$$P = \frac{10\,EJ}{l^2}$$

und die praktische Tragkraft

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{10\,EJ}{l^2}.$$

Nach Einsetzen der gegebenen Werte folgt hieraus das gegen Zerknicken nötige (kleinste) J:

$$J = \frac{6 \cdot 10\,000 \cdot 400^2}{10 \cdot 1\,000\,000} = 960 \text{ cm}^4.$$

Wir wählen nun versuchsweise einen Querschnitt vom äußeren Durchmesser $D = 13$ cm und der Wandstärke $\delta = 1{,}5$ cm und berechnen nach Tafel I

$$J = 0{,}393 \cdot 1{,}5 \cdot \left(\frac{13 + 10}{2}\right)^3 = 896 \text{ cm}^4,$$

finden also J zu klein. Wir vergrößern den Querschnitt auf $D = 14$, $\delta = 1{,}5$ cm, berechnen aufs neue

$$J = 0{,}393 \cdot 1{,}5 \cdot \left(\frac{14 + 11}{2}\right)^3 = 1151 \text{ cm}^3$$

und finden nun den Querschnitt genügend stark gegen Zerknicken.

Wir haben jetzt nur noch die Sicherheit der Säule gegen axialen Druck zu untersuchen. Wir berechnen

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} = \frac{10000}{\frac{\pi}{4}(14^2 - 11^2)} = 170 \text{ kg/qcm}$$

und finden diesen Wert $< k$ $(k = 500)$. Daher ist auch Sicherheit gegen Zerdrücken vorhanden.

Anmerkung: Säulenenden, die mit Verstärkungsrippen oder Fußstreben versehene Fußplatten besitzen oder verschraubt sind, lassen sich als eingespannt betrachten und es kommen dann statt der benutzten Formel für P die diesbezüglichen übrigen Formeln von § 17 zur Anwendung.

Beispiel 5. Gesucht das Profil des in Fig. 23 dargestellten Trägers aus Walzeisen mit I Querschnitt

$$(k_b = k_s = k = 1000 \text{ kg/qcm}; \text{ vgl. § 4}).$$

Auflösung:

Die größte Normalspannung (Zug = Druck) ist

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad \text{(vgl. § 23, B)},$$

daher, wenn $\sigma_{\max} = k_b = k_s = k = 1000$ kg/qcm und $M_{\max} = 180000$ kgcm (vgl. § 12, Beispiel 1), so folgt für das nötige Widerstandsmoment des Querschnittes

$$W = \frac{180\,000}{1000} = 180 \text{ cm}^3 .$$

Diesem Widerstandsmoment entspricht in den Tafeln deutscher Normalprofile das Profil Nr. 19 ($W = 187$ cm^3).

Beispiel 6. Gesucht der Querschnitt eines an beiden Enden abgestützten rechteckigen Holzbalkens von 5 m Länge, der mit der gleichförmig stetigen Last von 1,2 kg/cm beansprucht ist.

$$(k_b = k_s = k = 60 \text{ kg/qcm.})$$

Auflösung:

$$M_{\max} = \frac{q\,l^2}{8} \quad (\text{vgl. § 12}),$$

$$= \frac{1{,}2 \cdot 500^2}{8} = 37\,500 \text{ kgcm},$$

daher das nötige Widerstandsmoment des Querschnittes

$$W = \frac{M_{\max}}{k_b} = \frac{37\,500}{60} = 625 \text{ cm}^3 .$$

Zur Bestimmung der Dimensionen b und h des Querschnittes hat man also die zwei Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{b\,h^2}{6} = 625 \quad (\text{§ 7}), \\[2ex] \dfrac{b}{h} = \dfrac{5}{7} \quad (\text{§ 23, B, Beispiel b}), \end{cases}$$

aus welchen $h = 18$ cm, $b = 13$ cm sich ergibt.

Beispiel 7. Welchen Querschnitt muß die in Fig. 55 dargestellte Welle aus Flußeisen erhalten, deren Belastung durch das Gewicht Q des endseitig angebrachten Zahnrades und den nach unten gerichteten Zahndruck P gegeben sei? (Zulässige Beanspruchung auf Torsion $k_d = 500$ kg/qcm, auf Biegung $k_b = k_s = 400$ kg/qcm, siehe Bach, Masch.-El., Tabelle der zulässigen Beanspruchung, Spalte b u. c, vgl. Anmerkung.)

Fig. 55.

Auflösung: Da das Moment M_d der Drehung für alle Querschnitte zwischen Lagermitte und Radmitte konstant ist vom Werte

$$M_d = P \cdot R \quad (R \text{ Halbmesser des Zahnrades}),$$

so wird die bei gleichzeitiger Beanspruchung durch Biegung und Drehung in jedem Querschnitt (am Umfang) entstehende größte Spannung

$$\sum = \frac{32}{\pi d^3}\left[0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{(M_b)^2 + (\alpha_0\, M_d)^2}\right] \quad \left(\begin{matrix}\text{vgl.}\\ \text{§ 27}\end{matrix}\right)$$

in demjenigen Querschnitt von größtem Werte sein, für welchen M_b ein Maximum ist. Dies ist der Querschnitt in der Lagermitte (eingespannter Träger). Wir berechnen daher für diesen Querschnitt

1) $$M_d = P \cdot R\,,$$

2) $$M_b = (P + Q)\,l\,,$$

führen die berechneten Werte in den Klammerausdruck, der in § 27 mit M bezeichnet wurde, ein und berechnen also

3) $$M = 0{,}35\,M_b + 0{,}65\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0\,M_d)^2}\,,$$

wobei
$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1{,}3\,k_d} = \frac{400}{1{,}3 \cdot 500} = 0{,}7$$

zu nehmen ist. Da nun das größte Σ an der Einspannstelle $\doteq k_b$ sein muß, so kommt aus

$$k_b = \frac{32}{\pi\,d^3} \cdot M\,,$$

unter Benutzung des eben berechneten Wertes von M und des gegebenen Wertes von k_b, der gesuchte Wert d.

Anmerkung: Da durch die Drehung der Welle die der Biegung unterworfenen Fasern in raschem Wechsel bald oberhalb bald unterhalb der Neutralachse zu liegen kommen, so findet in jeder derselben ein fortgesetzter Wechsel von Druck und Zug statt und der entsprechende Wert von k_b ist daher der Spalte c der Bachschen Tabelle der zulässigen Beanspruchungen zu entnehmen. Hinsichtlich der Beanspruchung auf Drehung findet nur ein Wechsel von beanspruchtem und unbeanspruchtem Zustande statt, also ist k_d der Spalte b der genannten Tabelle zu entnehmen.

Beispiel 8. Gesucht die größte Druckspannung in der Fundamentfuge des in Fig. 56 dargestellten Mauerpfeilers von 4 m Tiefe (Länge) und konstantem Profil, dessen vertikale Symmetrieebene Kraftebene ist. (Gewicht von 1 cbm Mauerwerk = 2000 kg.)

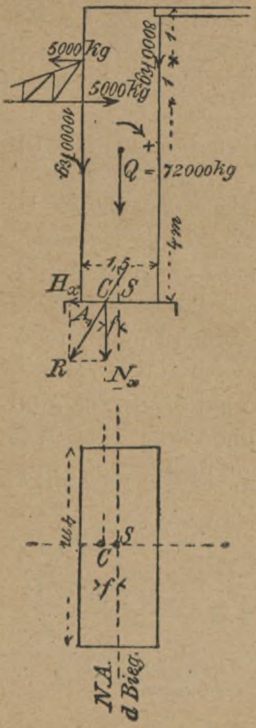


Fig. 56.

Auflösung: Außer den in Fig. 56 eingezeichneten äußeren Kräften greift im Schwerpunkt des Profils das

Eigengewicht des Pfeilers

$$Q = (4 \cdot 6 \cdot 1{,}5)\,2000 = 72\,000 \text{ kg}$$

an. Nun ist das Biegungsmoment $N_x \cdot f = M_x$ in Beziehung auf die Neutralachse der Fundamentfuge (vgl. § 26, A, Anmerkung 5) gleich der algebraischen Summe der Momente aller P und Q in Beziehung auf diese Achse bzw. auf S:

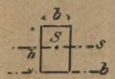
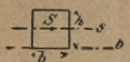
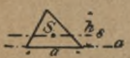
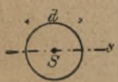
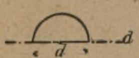
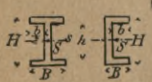
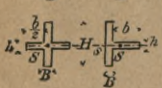
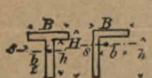
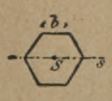
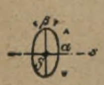
$$\begin{aligned} M_x &= -5000 \cdot 5 + 5000 \cdot 4 - 10\,000 \cdot 0{,}75 \\ &\qquad + 8000 \cdot 0{,}75 \\ &= -6500 \text{ kgm} = -650\,000 \text{ kgcm} \end{aligned}$$

und $N_x = 72\,000 + 8000 + 10\,000 = 90\,000$ kg (vgl. § 26, A, Anmerkung 5), daher folgt nach § 26, A, Anmerkung 5 für die Fundamentfuge

$$\begin{pmatrix} F = 400 \cdot 150 = 60\,000 \text{ qcm} \\ J = \tfrac{1}{12} \cdot 400 \cdot 150^3 \text{ cm}^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma_{\text{max-Druck}}} &= \frac{90\,000}{60\,000} + \frac{75 \cdot 650\,000}{\tfrac{1}{12} \cdot 400 \cdot 150^3} = 1{,}5 + 0{,}43 \\ &= \underline{1{,}93 \text{ kg/qcm}} \quad (\text{in } A_1)\,. \end{aligned}$$

Werte von J und W für zusammengesetzte Figuren
in Beziehung auf eine Schwerpunktsachse s bzw. auf den Schwerpunkt S.

F	Axiales J_F^s	Axiales W_F^s	Polares J_F^S	Polares W_F^S	Auf andere Achsen bezogenes axiales J_F^L
	$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{b\,h^2}{6}$	$\frac{b\,h(b^2+h^2)}{12}$	$\frac{b\,h\sqrt{b^2+h^2}}{6}$	$J_F^b=\frac{b\,h^3}{3}$
	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6}$	$\frac{h^4}{6}$	$\frac{h^3}{3\sqrt{2}}$	$J_F^b=\frac{h^4}{3}$
	$\frac{a\,h^3}{36}$	$\frac{a\,h^2}{24}$	—	—	$J_F^a=\frac{a\,h^3}{12}$
	$\frac{\pi\,d^4}{64}=ca\frac{d^4}{20}$	$\frac{\pi\,d^3}{32}=ca\frac{d^3}{10}$	$\frac{\pi\,d^4}{32}=ca\frac{d^4}{10}$	$\frac{\pi\,d^3}{16}=ca\frac{d^3}{5}$	—
	—	—	—	—	$J_F^d=\frac{\pi\,d^4}{128}=ca\frac{d^4}{40}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$ $=ca\,0{,}393$ $\delta\cdot d_1^3$	$\frac{\pi}{32}\cdot\frac{D^4-d^4}{D}$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{16}\cdot\frac{D^4-d^4}{D}$	—
	$\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$\frac{BH^3-b\,h^3}{6\,H}$	—	—	—
	$\frac{BH^3+b\,h^3}{12}$	$\frac{BH^3+b\,h^3}{6\,H}$	—	—	—
	$\left\{\frac{(BH^2-b\,h^2)^2-4\,BHb\,h(H-h)^2}{6\,(BH-b\,h)}\right.$	$\frac{(BH^2-b\,h^2)^2-4\,BHb\,h(H-h)^2}{6\,(BH^2-b\,h^2)}$	—	—	—
	$\frac{5\,b^4}{16}\sqrt{3}$	$\frac{5\,b^3}{8}$	—	—	—
	$\frac{\pi\,\alpha^3\beta}{64}$ $=ca\frac{\alpha^3\beta}{20}$	$\frac{\pi\,\alpha^2\beta}{32}$ $=ca\frac{\alpha^2\beta}{10}$	—	—	—

Register.

2,00