chen

Physikalische Formelsammlung

von

Prof. G. Mahler

Mit 65 Figuren

Sammlung Göschen.

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen.

Jede Nummer in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, dem gebildeten Laien eine klare, leichtverständliche Einführung in Gebiete zu verschaffen, die seinen besonderen Studien, seinem eigentlichen Berufe ferner liegen. Bei dem Streben nach allgemeiner Bildung einerseits, dem Mangel an Zeit, sich intensiver mit Nebenbeschäftigungen abzugeben andrerseits, wird es heutzutage jedem, der sich unterrichten und vorwärts kommen will, schwer, den rechten Weg zu finden: hier setzt nun die „Sammlung Göschen" ein und bietet in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und den neuesten Fortschritten und Forschungen beruhend, aber dabei doch in einer jedermann leicht verständlichen Form, zuverlässige Belehrung. Jedes einzelne Gebiet ist vollständig selbständig vertreten, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es erst einmal vollendet vorliegt, eine große, einheitliche, systematisch sich entwickelnde Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Dem Fachmann aber sind die Bändchen praktische Repetitorien und Nachschlagebücher, die in übersichtlicher, alle Meinungen und Richtungen zusammenfassender, völlig objektiver Weise den modernsten allgemeinen Stand der betreffenden Wissenschaft 2c. wiedergeben und somit auch ihm von Nutzen sind.

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Akustik siehe: Physik, Theoretische, I.

Algebra siehe: Arithmetik.

Alpen, Die, von Prof. Dr. Rob. Sieger. Mit vielen Abbildungen. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, von Dr. Franz Fuhse. Mit vielen Abbildungen. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch und Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Altertumskunde, Römische, von Dr. Leo Bloch. Mit 7 Vollbildern. Nr. 45.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker. Mit 63 Figuren. Nr. 87.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Frdr. Junker. Mit 87 Figuren. Nr. 88.

— **Niedere,** von Dr. Benedikt Sporer. Mit 6 Figuren. Nr. 53.

Anthropologie siehe: Menschliche Körper, Der.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. H. Schubert. Nr. 47.

— — **Beispielsammlung** von Prof. Dr. H. Schubert. Nr. 48.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. von Prof. Dr. W. F. Wislicenus. Mit 36 Abbild. und einer Sternkarte. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper. Von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufsatz-Entwürfe von Prof. Dr. L. W. Straub. Nr. 17.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Bewegungsspiele von Prof. Dr. E. Kohlrausch. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Botanik siehe: Nutzpflanzen, — Pflanze, — Pflanzenbiologie, — Pflanzenreich.

Brant siehe: Sachs.

Buchführung. Lehrgang der einfachen und doppelten Buchhaltung von Oberlehrer Robert Stern. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Burgenkunde von Hofrat Dr. O. Piper. Mit 29 Abbildungen. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi. Nr. 71.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein. Nr. 37.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein. Nr. 38.

Cid, Der, siehe: Herder.

Dichtkunst siehe: Poetik.

Dietrichepen siehe: Kudrun.

Differentialrechnung siehe: Analysis, Höhere, I.

Elektrizität siehe: Physik, Theoretische, III.

Ethik von Prof. Dr. Th. Achelis. Nr 90.

Fischart, Johann, siehe: Sachs.

Formelsammlung, Mathematische, und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathem. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

— **Physikalische,** von Prof. G. Mahler. Mit vielen Fig. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Prof. Dr. Ad. Schwappach. Nr. 106.

Wenden!

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite!

Sammlung Göschen

Physikalische Formelsammlung

von

G. Mahler
Professor der Mathematik und der Physik
am Gymnasium in Ulm

Mit 67 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1901

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt. Mechanik.

II. Abschnitt. Akustik.

III. Abschnitt. Optik.

IV. Abschnitt. Kalorik.

V. Abschnitt. Magnetik.

VI. Abschnitt. Elektrik.

I. Abschnitt.

Mechanik.

Einleitung.

§ 1. Allgemeine Sätze; Grundgesetze.

1. Alle Ursachen sind Bewegungsursachen. Keine Ursache (Kraft) bringt eine andere Wirkung als eine Bewegung hervor. Die Ursache selbst beruht in einer Bewegung.

2. Jede Bewegungsursache liegt ausserhalb des Bewegten. Eine Fernwirkung durch den leeren Raum giebt es nicht. Die Fernwirkung wird entweder durch unmittelbare Berührung der Körper oder durch einen Zwischenstoff, ein Medium (Äther) vermittelt.

3. Alle Kräfte wirken in der Geraden, welche den Ausgangspunkt mit dem Angriffspunkt verbindet.

4. Das Gesetz des Beharrungsvermögens oder der Trägheit: Jeder Körper verharrt in dem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äussere Ursachen angeregt wird, seinen Zustand zu ändern.

5. Das Gesetz der Reaktion: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets einander gleich und von entgegengesetzter Richtung.

6. Jede Wirkung ist äquivalent ihrer Ursache.

---

1. Kapitel.

Mechanik des materiellen Punktes und der starren Körper.

§ 2. Die gleichförmige, geradlinige Bewegung.

Die Grösse einer Bewegung wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit der sich der Körper bewegt, d. h. durch den in der Zeiteinheit, in der Sekunde, zurückgelegten Weg. Da bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit sich nicht ändert, so findet man den Weg, welchen der Körper innerhalb einer gewissen Zeit zurücklegt, wenn man seine Geschwindigkeit mit der Zeit multipliziert. Bedeutet c (celeritas) die Masszahl der Geschwindigkeit, t (tempus) die Masszahl der verflossenen Zeit und s (spatium) die des zurückgelegten Weges, so ist

$$s = c \cdot t;$$

hieraus folgt

$$c = \frac{s}{t}; \quad t = \frac{s}{c}.$$

In vielen Fällen ist es zweckmässig, den Weg durch den Inhalt eines Rechteckes zu versinnlichen, dessen Grundlinie und Höhe durch die Masszahlen der Zeit bezw. der Geschwindigkeit gegeben sind. Die mittlere Geschwindigkeit v_0 aus mehreren (n) Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ ist das arithmetische Mittel derselben;

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n}.$$

§ 3. Das Parallelogramm der Bewegungen.

Aus den Grundgesetzen der Mechanik folgt: Unterliegt ein Körper der Einwirkung mehrerer Kräfte, so ist das Endergebnis dasselbe, wie wenn die Kräfte nacheinander während derselben Zeit auf den Körper eingewirkt hätten. Wird also ein materieller Punkt A (Fig. 1) zu zwei Bewegungen angeregt, die einen Winkel φ mit einander bilden, so gelangt er in die vierte Ecke D desjenigen Parallelogramms, das man aus den beiden Einzelwegen s_1 und s_2 und dem von diesen eingeschlossenen Winkel φ konstruiert.

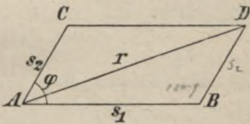

Fig. 1.

Sind die beiden Bewegungen geradlinig und gleichförmig, so ist auch die resultierende Bewegung geradlinig und gleichförmig, und der Punkt A durchläuft die Diagonale AD. Bezeichnet man den Weg AD mit r, so ist nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz

$$r^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos(180^0 - \varphi)$$

$$r^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos\varphi.$$

Wird $\varphi = 0$ bezw. 180^0, so ergeben sich die besonderen Werte

$$r = s_1 \pm s_2;$$

d. h., wird ein materieller Punkt längs einer geraden Linie zu zwei Bewegungen angeregt, so ist der zurückgelegte Weg r gleich der Summe oder Differenz der Einzelwege, je nachdem die Bewegungsrichtungen übereinstimmen oder entgegengesetzte sind.

Die Einzelwege heissen die Seitenwege, die Komponenten; der resultierende Weg der Mittelweg, die Resultante.

Bemerkung. **Um den Mittelweg zu erhalten, ist es in der Regel nicht notwendig, das Bewegungsparallelogramm vollständig zu zeichnen; es genügt, wenn man (Fig. 1) durch den Endpunkt B der einen Komponente die Strecke BD gleich und parallel der anderen Komponente AC zieht.**

Soll der Mittelweg AD (Fig. 2) in zwei Seitenwege längs L_1 und L_2 zerlegt werden, so ziehe man $DB \parallel L_2$ und $DC \parallel L_1$; nun sind AB und AC die gesuchten Komponenten. — Hat man über die beiden Einzelwege keine weiteren Bestimmungen getroffen, so ist die vorliegende Aufgabe vieldeutig.

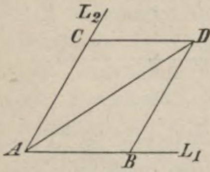

Fig. 2.

Unterliegt ein materieller Punkt gleichzeitig mehreren Bewegungen, so bestimmt man die Resultante folgendermassen.

Zunächst werden zwei Wege zusammengesetzt, hierauf der Mittelweg mit dem dritten, der sich nun ergebende Weg mit dem vierten etc. Man konstruiert daher (Fig. 3) aus den Einzel-

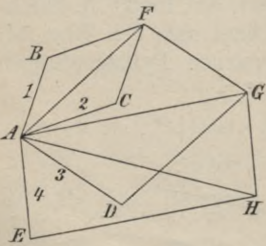

Fig. 3.

wegen einen polygonalen Zug ABFGH; alsdann ist die Schlusslinie AH die gesuchte Resultante. Schliesst sich der Zug, so bleibt der Punkt in Ruhe.

Zerlegt man die Bewegung OB eines materiellen Punktes O (Fig. 4) in die Komponenten OE und OD von beliebigen Richtungen L und L_1, die durch O gehen und projiziert die so erhaltenen Seitenbewegungen auf zwei zu einander senkrechte Achsen OX und OY, so ist die algebraische Summe der Projektionen auf jede Achse gleich den Komponenten OC und OJ, die unmittelbar aus der Zerlegung der OB längs OX und OY hervorgehen.

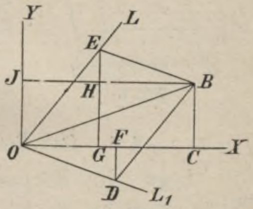

Fig. 4.

Beweis. Die Projektion der OD auf OX ist OF, die der OE auf OX ist OG. Schneidet nun BJ die Linie EG in H, so ist

$$\triangle EHB \cong OFD$$

und damit HB gleich OF; weil aber

$$HB = GC$$

ist, so ist auch

$$OF = GC$$

und daher

$$OC = OG + OF.$$

Ebenso führt man den Beweis für die Strecken auf der Y-Achse.

Im Raum ist das Parallelogramm der Bewegungen durch ein Parallelflach zu ersetzen.

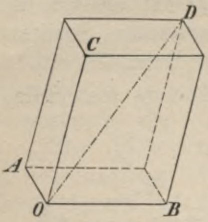

Fig. 5.

Wird nämlich der Punkt O (Fig. 5) zu den Bewegungen OA, OB und OC angeregt, deren Richtungen nicht in eine Ebene fallen, so gelangt er an die der Ecke O gegenüberliegenden Ecke D des aus OA, OB und OC als Kanten konstruierten Parallelflachs.

§ 4. Die beschleunigte Bewegung.

Legt ein Körper in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurück, so ist seine Bewegung eine ungleichförmige. Unter Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte versteht man in diesem Falle den Weg, den der Körper von jenem Zeitpunkte ab in einer Sekunde zurücklegen würde, falls er sich nun gleichförmig weiter bewegte. Je nachdem die Geschwindigkeiten in den aufeinander folgenden gleichen Zeitteilen wachsen oder abnehmen, heisst die Bewegung beschleunigt oder verzögert. Die Geschwindigkeitszunahme in der Sekunde heisst Beschleunigung. Ändert sich diese während der Dauer der Bewegung nicht, so führt der materielle Punkt eine gleichmässig beschleunigte Bewegung aus. Bezeichnet v_0 (velocitas) die Anfangsgeschwindigkeit, a die Beschleunigung (acceleratio), v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t, s den Weg, welchen der Körper während jener Zeit zurücklegt, so gelten folgende Beziehungen:

(1) $$v = v_0 + at,$$

(2) $$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen t, so erhält man

(3) $$v^2 = v_0^2 + 2as.$$

Beweis zu 1. Die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde beträgt

$$v_1 = v_0 + 1 \cdot a,$$

am Ende der zweiten

$$v_2 = v_0 + 2 \cdot a,$$

am Ende der dritten

$$v_3 = v_0 + 3 \cdot a,$$

denn die Geschwindigkeiten nehmen in jeder Sekunde um den gleichen Betrag, um die Beschleunigung a zu. Dementsprechend ergiebt sich die Geschwindigkeit v nach Verfluss von t Sekunden zu

$$v_0 + a \cdot t.$$

Beweis zu 2. Weil die Geschwindigkeit gleichmässig zunimmt, muss der Weg, den der materielle Punkt in t Sekunden beschreibt, ebenso gross sein wie derjenige Weg, den er in der gleichen Zeit mit seiner mittleren Geschwindigkeit $\frac{v_0 + v}{2}$ zurücklegte. Letzterer ist

$$t \cdot \frac{v_0 + v}{2}$$

und daher auch

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{v}{2} t + \frac{v_0}{2} t = \frac{1}{2}(v_0 + at) \cdot t + \frac{v_0}{2} t$$
$$= v_0 t + \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

Beweis zu 3. Quadriere die erste Gleichung

(4) $$v^2 = v_0^2 + a^2t^2 + 2\,v_0 a t.$$

Nun ist nach der zweiten Gleichung

$$2s = 2v_0t + at^2,$$

mithin auch

$$2as = 2av_0t + a^2t^2,$$

daher mit Hilfe der Gleichung (4)

$$2as = v^2 - v_0^2,$$

oder

$$v^2 = v_0^2 + 2as.$$

Zusatz 1. **Ist $v_0 = o$, so vereinfachen sich obige Gleichungen, und man erhält**

$$v = at; \quad s = \frac{1}{2} \cdot at^2; \quad 2as = v^2.$$

Zusatz 2. **Ist die Bewegung gleichmässig verzögert und bedeutet a die Verzögerung, so ergiebt eine der obigen entsprechende Schlussreihe**

$$v = v_0 - at; \quad s = v_0t - \frac{1}{2}at^2; \quad v^2 = v_0^2 - 2as.$$

Zusatz 3. **Beschleunigungen werden wie Bewegungen zusammengesetzt und zerlegt.**

§ 5. Der Fall.

I. Der freie Fall. Die Fallbewegung ist innerhalb unseres Beobachtungsgebietes eine gleichmässig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung g (gravitas) beträgt in der Sekunde 9,806 m unter 45° Breite. In der Breite von φ^0 ist g gleich $9{,}781\,(1 + 0{,}00512 \sin^2\varphi)$ m. Nach den in § 4 aufgestellten Gesetzen erhält man, da $v_0 = 0$ und $a = g$ zu setzen ist

$$1.\ v = g \cdot t; \qquad 2.\ s = \frac{1}{2} g \cdot t^2; \qquad 3.\ v^2 = 2g \cdot s.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich folgende Gesetze ablesen:

a) die Geschwindigkeit nach der ersten Sekunde ist g;

b) die Geschwindigkeiten sind den Fallzeiten direkt proportional;

c) nach der ersten Sekunde ist der Fallraum $\frac{1}{2}g$;

d) die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten.

Die Geschwindigkeit beim Beginn der Bewegung ist 0; am Ende der ersten, zweiten, dritten, ... $(t-1)^{\text{ten}}$, t^{ten} Sekunde beträgt sie g, $2g$, $3g$, ... $(t-1)g$, tg; daraus ergiebt sich die mittlere Geschwindigkeit in der ersten, zweiten, dritten, ... t^{ten} Sekunde zu

$$\frac{0+g}{2} = \frac{1}{2}g, \quad \frac{g+2g}{2} = \frac{3}{2}g,$$

$$\frac{2g+3g}{2} = \frac{5}{2}g, \ldots \frac{(t-1)g+tg}{2} = \frac{2t-1}{2} \cdot g.$$

Folglich sind die in der ersten, zweiten, dritten, ... t^{ten} Sekunde zurückgelegten Einzelwege gleich

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}g \cdot 1; & & \\ \frac{3}{2}g \cdot 1 & \text{oder} & \frac{1}{2}g \cdot 3; \\ \frac{5}{2}g \cdot 1 & \text{oder} & \frac{1}{2}g \cdot 5; \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{2t-1}{2} \cdot g & \text{oder} & \frac{1}{2}g \cdot (2t-1). \end{array}$$

Darin liegt das Gesetz: Die Fallräume in den einzelnen Sekunden verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

II. Der Fall auf der schiefen Ebene. Ein materieller Punkt, der frei mit der Beschleunigung g fällt, bewegt sich auf einer glatten, schiefen Ebene mit einer kleineren Beschleunigung abwärts. Bildet die schiefe Ebene AB (Fig. 6) mit der horizontalen AC den Winkel α und zerlegt man die lotrecht abwärts gerichtete Beschleunigung GD in die beiden Komponenten

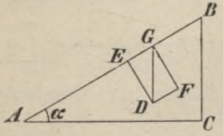

Fig. 6.

$$GE = g \cdot \sin \alpha$$

parallel und

$$GF = g \cdot \cos \alpha$$

senkrecht zur schiefen Ebene, so ist letztere auf die Bewegung ohne Einfluss, weil von der Reibung hier abgesehen wird.

Für die gleichmässig beschleunigte Bewegung längs der schiefen Ebene kommt nur die Komponente

$$GE = g \cdot \sin \alpha = \gamma$$

in Betracht, und wenn der Massenpunkt aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, so gelten folgende Gleichungen:

1. $v = g \cdot \sin \alpha \cdot t;$

2. $s = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2;$

3. $v^2 = 2g \cdot \sin \alpha \cdot s.$

Hat aber der materielle Punkt die Anfangsgeschwindigkeit v_0, welche längs der schiefen Ebene abwärts oder aufwärts gerichtet sein kann, so ergeben sich nach § 4 folgende Beziehungen:

1. $v = v_0 \pm g \cdot \sin \alpha \cdot t;$

2. $s = v_0 t \pm \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2;$

3. $v^2 = v_0^2 \pm 2g \cdot \sin \alpha \cdot s.$

§ 6. Der Wurf.

I. Der senkrechte Wurf. Ein mit der Geschwindigkeit v_0 lotrecht abwärts geworfener Massenpunkt führt eine gleichmässig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung g aus, weshalb die Gleichungen gelten

$$v = v_0 + gt;$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2;$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs.$$

Wird dagegen der materielle Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen, so ist die Bewegung eine gleichmässig verzögerte mit der Verzögerung g; daher

$$v = v_0 - gt; \tag{1}$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{2}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gs. \tag{3}$$

Im höchsten Punkt seiner Bahn ist die Geschwindigkeit $v = 0.$

Bezeichnet man die Steigdauer mit t_1, so folgt aus (1)

$$0 = v_0 - g t_1 ; \quad t_1 = \frac{v_0}{g}. \tag{4}$$

Aus (3) ergiebt sich die Steighöhe s_1

$$0 = v_0^2 - 2 g s_1 ; \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2 g}. \tag{5}$$

Lässt man den Raum s_1 von einem materiellen Punkt frei durchfallen, wobei er eine Endgeschwindigkeit c erreichen möge, so gilt

$$c^2 = 2 g s_1. \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich

$$c = v_0 ;$$

d. h. der Massenpunkt erreicht den Ausgangspunkt seiner Bahn mit der gleichen Geschwindigkeit, mit der er ihn verliess.

Um den Raum s_1 frei zu durchfallen, brauche ferner der materielle Punkt T Sekunden. Nach den Fallgesetzen besteht sodann die Beziehung

$$s_1 = \frac{1}{2} g \cdot T^2. \tag{7}$$

Setzt man in diese Gleichung (7) den Wert von s_1 aus (5) ein, so findet man

$$\frac{v_0^2}{2 g} = \frac{1}{2} g \cdot T^2 ;$$

hieraus

$$T = \frac{v_0}{g} = t_1$$

nach der Gleichung (4).

In Worten: Ein lotrecht in die Höhe geworfener Körper steigt ebensolange als er fällt.

Da man ferner jeden Punkt der Wurfbahn als Ausgangspunkt der Bewegung betrachten kann, so durchläuft der Massenpunkt irgend eine seine Bahn durchschneidende horizontale Ebene beim Hinauf- und Hinabsteigen mit der gleichen Geschwindigkeit, und die beiden Momente des Durchgangs liegen zeitlich vom Augenblick der höchsten Erhebung gleichweit ab.

II. Der schiefe Wurf aufwärts. Ein Massenpunkt A wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Erhebungswinkel α gegen die Wagrechte schräg aufwärts geworfen (Fig. 7). Um ihn auf seiner Bewegung verfolgen zu können und seine Bahn kennen zu lernen, wählt man in der Bahnebene die durch A gehende Horizontale AX zur X-Achse

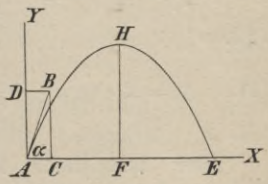

Fig. 7.

und die durch A führende Vertikale zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Hierauf zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit $AB = v_0$ längs der beiden Achsenrichtungen in die wagrechte

$$AC = v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$$

und die senkrechte

$$AD = v_y = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

Erstere ändert sich nach dem Gesetz der Trägheit während der Bewegung nicht, letztere hingegen erfährt eine sekundliche Abnahme um die Beschleunigung der Erdschwere. Nach t Sekunden beträgt sie

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t. \tag{1}$$

Die Projektionen x und y auf die Achsen des in der Zeit t zurückgelegten Wegs sind somit:

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t. \tag{2}$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \tag{3}$$

Eliminiere t: Aus (2) folgt

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha};$$

eingesetzt in (3)

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

oder

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{4}$$

Der bewegliche Punkt beschreibt somit eine Parabel, deren Achse vertikal ist und welche die Richtung AB der Anfangsgeschwindigkeit in A berührt. Schneidet die Parabel die Horizontale AX in dem Punkte E zum zweitenmal, so wird $AE = X$ die Wurfweite genannt. Um sie zu bestimmen, darf man nur $y = 0$ und $x = X$ setzen. Man erhält aus (4)

$$0 = X \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot X^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

hieraus folgt

$$X = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen grössten Wert für

$$2\alpha = 90^0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 45^0.$$

Aus trigonometrischen Gründen ist ferner

$$\sin 2\alpha = \sin(180^0 - 2\alpha),$$

mithin ist die Wurfweite für komplementäre Elevationswinkel die gleiche.

Im höchsten Punkt H der Bahn, im Scheitel der Parabel, ist die Geschwindigkeit wagrecht gerichtet, folglich die vertikale Komponente v_y derselben gleich Null. Verfliesst von A bis H die Zeit T, so ergiebt die Gleichung (1)

$$0 = v_0 \sin\alpha - g \cdot T,$$

daher

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{6}$$

Substituiert man diesen Wert für t in (3), dann erhält man die Wurfhöhe FH, welche mit Y bezeichnet werden mag,

$$\begin{aligned} Y &= v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Komponenten v_x und v_y der Geschwindigkeit v zur Zeit t sind nach obigem

$$v_x = v_0 \cos\alpha;$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Mithin ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} v^2 = v_x^2 + v_y^2 &= v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2gtv_0 \sin\alpha + g^2t^2 \\ &= v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0 \sin\alpha. \end{aligned}$$

Die Richtung dieser Geschwindigkeit v macht mit der Wagrechten AX einen Winkel φ, der sich aus der Gleichung ergiebt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0 \cos\alpha}.$$

Besondere Fälle. Wird der Massenpunkt horizontal geworfen, so ist $\alpha = 0$ und damit wird

$$v_x = v_0; \qquad x = v_0 t;$$

$$v_y = - gt; \qquad y = -\frac{1}{2} gt^2.$$

Ändert man die Zählrichtung auf der Y-Achse, so werden die Ordinaten positiv; demnach ist

$$v_y = gt \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2} gt^2.$$

§ 7. Die Zentralbewegung.

Die einfachste aller Zentralbewegungen ist diejenige, bei welcher eine Kreisbahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Der Radius des Kreises C sei r (Fig. 8), die Geschwindigkeit des materiellen Punktes A sei v und die Beschleunigung der Zentripetalkraft a. Während eines kleinen Zeitteils t, nur der Tangentialgeschwindigkeit folgend, gelangt A nach F, nur der Zentripetalkraft folgend, nach E, durch das Zusammenwirken beider Ursachen nach D. Es ist nun

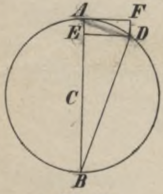

Fig. 8.

$$AD = v \cdot t \quad \text{und} \quad AE = \frac{1}{2} at^2,$$

und weil der kurze Bogen AD durch seine Sehne ersetzt werden darf, so ergiebt sich mit Hilfe des $\triangle ADB$ die Gleichung

$$AD^2 = AE \cdot AB$$

oder

$$v^2 t^2 = \frac{1}{2} a t^2 \cdot 2 r;$$

hieraus

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Unter Winkelgeschwindigkeit ω versteht man den vom Leitstrahl in der Zeiteinheit überstrichenen Winkel, oder wenn man den Winkel im Bogenmass ausdrückt, die Geschwindigkeit desjenigen Punktes auf dem Leitstrahl, der vom Zentrum die Entfernung 1 hat. Es ist also auch

$$v = r \cdot \omega$$

und damit

$$a = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{r} = r \cdot \omega^2.$$

Ist T die Umlaufszeit des Massenpunktes A, so ist zunächst

$$v = \frac{2 \pi r}{T},$$

folglich

$$a = \frac{4 \pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{4 \pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Die für die Zentripetalbeschleunigung gefundenen Ausdrücke sind daher

$$a = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 = \frac{4 \pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Da die Beschleunigungen, welche zwei Kräfte einzeln wirkend einer und derselben Masse erteilen, in geradem Verhältnis zur Stärke der Kräfte stehen, so lässt sich unter Beiziehung des freien Falles die Grösse der Zentripetalkraft bestimmen. Es sei Q das Gewicht des bewegten Punktes und P die Stärke der Zentripetalkraft, so gilt die Proportion

$$P : Q = a : g,$$

hieraus

$$P = \frac{Q}{g} \cdot a.$$

Die Gegenwirkung, die ein materieller Punkt bei der Kreisbewegung erfährt, wird als Schwungkraft, Zentrifugalkraft bezeichnet; sie ist gleich der Zentripetalkraft.

§ 8. Die harmonische Bewegung.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Kreisbahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so führt seine Projektion auf einen Durchmesser eine schwingende Bewegung aus, die harmonische Bewegung heisst. In Fig. 9 sei A der sich bewegende Punkt, O der Mittelpunkt des Kreises vom Radius r, ferner CB $\perp$ OA und derjenige Durchmesser, auf welchen der Punkt A projiziert wird, E der Ort des Punktes A, an welchen er nach der Drehung um den $\sphericalangle \alpha$ gelangt, F dessen Projektion auf CB, EG die Tangentialgeschwindigkeit v und EK die Zentripetalbeschleunigung a des Punktes E.

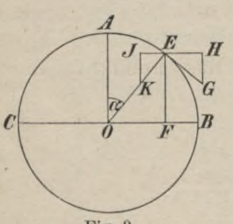

Fig. 9.

Projiziert man ferner EG und EK auf CB oder auch auf eine durch E ‖ CB gelegte Gerade mit Hilfe der Lote GH und KJ, so ist EH die Geschwindigkeit und EJ die Beschleunigung des schwingenden Punktes F. Nun ist

$$EH = v \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad EJ = a \cdot \sin\alpha$$

und weil nach dem vorigen $a = \frac{v^2}{r}$ ist, so findet man auch

$$EJ = \frac{v^2}{r} \cdot \sin\alpha.$$

Unter Benutzung des rechtwinkligen Dreiecks OEF ergiebt sich

$$\sin\alpha = \frac{OF}{r},$$

also ist

$$EJ = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{OF}{r} = \frac{v^2}{r^2} \cdot OF.$$

Wird mit a_1 die Beschleunigung des Punktes F in dem Augenblick bezeichnet, wo er sich in der Entfernung 1 von O befindet, so ist

$$a_1 = \frac{v^2}{r^2}.$$

Ein Hingang bezw. Hergang des Punktes F heisst eine Schwingung und die darauf verwandte Zeit die Schwingungsdauer, die Hälfte der bei einer Schwingung zurückgelegte Weg die Schwingungsweite, Amplitude. Zur Berechnung der Schwingungszeit führt folgende Überlegung: Während der Punkt A die ganze Peripherie des Kreises mit der Geschwindigkeit v durchläuft, macht seine Projektion einen Hin- und Hergang, mithin ist die Schwingungsdauer

$$(1) \qquad T = \frac{\pi r}{v};$$

aber es ist

$$a_1 = \frac{v^2}{r^2}.$$

hieraus

$$\frac{r}{v} = \sqrt{\frac{1}{a_1}};$$

somit

$$(2) \qquad T = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1}}.$$

Dieses Resultat zeigt sich von der Schwingungsweite unabhängig, mithin sind bei gleicher Beschleunigung in der Entfernung 1 die Schwingungen isochron.

§ 9. Das mathematische Pendel.

Jeder in der sicheren Gleichgewichtslage aufgehängte, bewegliche Körper heisst ein physisches Pendel. Denkt man sich das Gewicht des Körpers in einem einzigen Punkt vereinigt und diesen Massenpunkt mit dem Aufhängepunkt durch einen gewichtslosen Faden von unveränderlicher Länge verbunden, so entsteht das mathematische Pendel. Bei Versuchen wird dieses nicht herstellbare Pendel durch das einfache Pendel ersetzt. Letzteres besteht aus einer schweren Kugel, aufgehängt an einem Faden, dessen Gewicht gegen das des Körpers vernachlässigt werden darf. Die Bewegung des Pendels ist eine oszillatorische, jeder Hin- bezw. Hergang wird eine Schwingung genannt, die darauf verwandte Zeit heisst Schwingungsdauer und der Winkel, um welchen sich das Pendel aus seiner lotrechten Gleichgewichtslage entfernt, Schwingungsweite, Amplitude. OA (Fig. 10) sei ein mathematisches Pendel von der Länge l. In dieser Lage wirkt auf den Massenpunkt A die Erdschwere und erteilt ihm die Beschleunigung

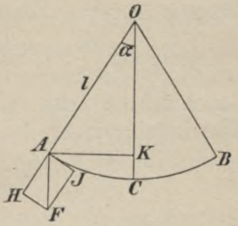

Fig. 10.

$$AF = g.$$

Diese kann in die unwirksame Komponente

$$AH = g \cdot \cos \alpha$$

nach der Fadenrichtung und in eine dazu senkrechte zweite Komponente

$$AJ = g \cdot \sin \alpha$$

zerlegt werden. Letztere giebt die Beschleunigung des Punktes A in seiner Bahn an. Fällt man auf OC das Lot AK, so ist

$$\sin \alpha = \frac{AK}{AO} = \frac{AK}{l}.$$

Lässt man nun nur kleine Amplituden zu, so darf man die Strecke AK durch den Bogen AC ersetzen und es ist

$$\sin \alpha = \frac{AC}{l},$$

mithin

$$AJ = g \cdot \sin \alpha = \frac{g}{l} \cdot AC;$$

d. h. die Beschleunigung des Massenpunktes ist seinem Abstand vom Mittelpunkt C der Bahn proportional; die Bewegung desselben ist eine harmonische. In der Entfernung 1 vom Zentrum C hat der Punkt die Beschleunigung $\frac{g}{l}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (2) des § 8 ein, so ergiebt sich für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich folgende Sätze ableiten:

a) Die Schwingungsdauer ist vom Stoff und Gewicht des schweren Körpers unabhängig.

b) Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Amplitude.

c) Die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Pendellänge direkt proportional.

d) Die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Fallbeschleunigung umgekehrt proportional.

Zusatz. **Misst man die Länge l eines Pendels und bestimmt die Schwingungsdauer T dazu, so lässt sich aus obiger Gleichung die Fallbeschleunigung g ermitteln, denn es ist**

$$g = \frac{\pi^2 \cdot l}{T^2}.$$

§ 10. Masse; Kraft.

Stoff ist alles, was Raum einnehmen kann. Die Menge des Stoffes, den ein Körper enthält, heisst seine Masse. Jede Ursache, welche eine Änderung in dem

Ruhe- oder Bewegungszustand eines Körpers hervorruft, wird Kraft genannt. Um die doppelte Masse in die gleiche Bewegung zu versetzen, wie die einfache, ist die doppelte Kraft notwendig. Es besteht somit zwischen Kraft und Masse ein bestimmtes Verhältnis der Abhängigkeit, welches bei der Wahl der Einheiten für Kraft und Masse in der Weise zum Ausdruck gebracht wird, dass man festsetzt:

Die Krafteinheit erteilt der Masseneinheit in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1.

Die Kraft p, die Masse m und die erzielte Beschleunigung a sind somit durch die Grundgleichung

$$p = m \cdot a \tag{1}$$

verbunden. Die Grösse des Druckes oder Zuges, den ein Körper infolge der Schwere in lotrechter Richtung ausübt, heisst sein absolutes Gewicht, und da für alle Körper die Beschleunigung g an einem und demselben Ort der Erde die gleiche ist, so gilt der Satz:

Das Gewicht eines Körpers ist seiner Masse proportional.

Unterliegt die Masse m der steten Einwirkung der unveränderlichen Kraft p, so bewegt sie sich gleichmässig beschleunigt, und es ist nach früherem, sofern die Masse beim Beginn der Bewegung in Ruhe war,

$$v = a \cdot t; \quad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2; \quad v^2 = 2as.$$

Setzt man in diese Gleichungen aus (1) den Wert für a, nämlich $a = \frac{p}{m}$ ein, so treten folgende Beziehungen auf:

$$mv = pt;$$

$$(2) \qquad ms = \frac{1}{2} pt^2;$$

$$ps = \frac{1}{2} mv^2.$$

Besass jedoch die Masse, als die Kraft p einsetzte, die Geschwindigkeit v_0, so findet man in analoger Weise die Gleichungen

$$m(v - v_0) = \pm pt;$$

$$(3) \qquad m(s - v_0 t) = \pm \frac{1}{2} pt^2;$$

$$ps = \pm \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

Das Produkt mv heisst die Bewegungsgrösse, das Produkt pt der Zeiteffekt der Kraft. Die erste Beziehung der Gleichungen (2) enthält sonach den Satz:

Die Bewegungsgrösse ist gleich dem Zeiteffekt der Kraft.

Darin liegt auch der Satz: Wirkt auf die Massen m und m_1 ein und dieselbe Kraft (z. B. die Expansion der Pulvergase zwischen Geschoss und Geschütz) gleich lange ein und erlangen sie dadurch die Geschwindigkeiten v und v_1, so sind die erzielten Bewegungsgrössen mv und $m_1 v_1$ einander gleich.

Das Produkt ps wird die Arbeit der Kraft unter der Voraussetzung genannt, dass der Weg in die Kraftrichtung fällt. Schliessen jedoch beide den Winkel α ein, so kann man entweder die Kraftstrecke auf die Wegrichtung oder den Weg auf die Kraftrichtung projizieren, und die geleistete Arbeit wird durch das

Produkt p. s. cos α angegeben. Die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit heisst Effekt und das Produkt $\frac{1}{2}mv^2$ nennt man die lebendige Kraft. Aus der dritten Beziehung der Gleichungen (3) leiten sich sonach die Sätze ab: Die geleistete Arbeit ist gleich der Zunahme an lebendiger Kraft, die verbrauchte Arbeit ist gleich der Abnahme an lebendiger Kraft. Die einem bewegten Körper innewohnende Fähigkeit, Arbeit zu leisten, nennt man Energie der Bewegung (kinetische Energie, lebendige Kraft); unter Energie der Lage (potentieller Energie, Spannkraft) hingegen versteht man die Fähigkeit eines Körpers, verbrauchte Arbeit in lebendige Kraft umzusetzen. Die Umwandlung von potentieller und kinetischer Energie ineinander in einem abgeschlossenen System erfolgt ohne Gewinn oder Verlust; die Energie ist somit unzerstörbar, ihre Quantität konstant.

§ 11. Das Masssystem.

I. Das irdische, konventionelle Masssystem. Die Grundgrössen dieses Systems sind Kraft, Länge und Zeit.

Als Krafteinheit bezeichnet man diejenige Kraft, die in ihrer Richtung den Druck oder Zug von 1 kg (in Paris) auszuüben vermag. Die Einheit der Länge ist das Meter, die Einheit der Zeit die Sekunde. Die Einheit der Masse wird aus der Gleichung (1) des § 10 abgeleitet. Hat ein Körper das Gewicht P kg, ist seine Masse gleich m, die Beschleunigung der Erdschwere gleich g, so besteht die Beziehung

$$P = mg; \quad \text{mithin} \quad m = \frac{P}{g}.$$

Soll nun $m = 1$ werden, so muss $P = g$ sein; daher: Unter der Einheit der Masse versteht man diejenige Masse, deren Gewicht g kg beträgt.

Die Einheit der Arbeit wird verrichtet, wenn ein Widerstand von 1 kg auf einem Weg von 1 m überwunden wird. Man nennt sie Meterkilogramm (mkg).

Die technische Einheit des Effekts ist die Pferdestärke (HP), d. i. die Leistung von 75 mkg in 1 Sekunde.

II. Das absolute Masssystem. Die Grundgrössen sind Masse, Länge und Zeit. Die Einheit der Masse ist die eines Gramms (unabhängig von Raum und Zeit); die Einheit der Länge ist das Centimeter und die Einheit der Zeit ist die Sekunde. Aus der Gleichung $p = ma$ ergiebt sich, wenn $m = 1$, $a = 1$ ist, für p der Wert 1, also die Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masseneinheit in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 erteilt; sie heisst Dyne. Da die Beschleunigung des freien Falls etwa 981 cm beträgt, so ist

$$1 \text{ Dyne} = \frac{1}{981} \text{ Grammgewicht.}$$

Die Einheit der Arbeit heisst Erg, sie wird von 1 Dyne auf dem Weg von 1 cm geleistet. 1 Joule $= 10^7$ Erg.

Die Einheit des Effekts, das Sekundenerg, ist vorhanden, wenn die Leistung in jeder Sekunde gleich der Arbeitseinheit ist. 1 Watt ist die Arbeitsleistung von 1 Joule in der Sekunde.

$$1 \text{ mkg ist gleich } 981 \cdot 100 \cdot 1000 \text{ Erg}$$
$$= 98\,100\,000 \text{ Erg} = 9{,}81 \text{ Joule;}$$

$$1 \text{ HP ist gleich } 75 \cdot 9{,}81 \text{ Watt}$$
$$= 736 \text{ Watt in runder Zahl.}$$

§ 12. Die Dimension.

Jeder Ausdruck, der die Abhängigkeit eines abgeleiteten Begriffs aus den Grundbegriffen der Masse M, der Länge L, der Zeit T deutlich erkennen lässt, heisst die Dimension des abgeleiteten Begriffs. Sie hat in der Regel die Form eines Produkts aus den Potenzen von M, L und T.

Die Dimension eines *Weges* ist L, die einer *Fläche* L^2, die eines allseitig begrenzten *Raumes* L^3.

Die Dimension einer *Geschwindigkeit* ist LT^{-1}, weil sie erhalten wird, wenn man den Weg mit der Zahl der Sekunden dividiert.

Nach der Bezeichnung des § 4 ist $v = at$, mithin die *Beschleunigung* $a = v : t$ und daher ihre Dimension gleich LT^{-2}.

Die Dimension einer *Kraft* ist MLT^{-2}, denn sie ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung.

Die Dimension der *Bewegungsgrösse* ist gleich dem Produkt aus der Dimension einer Masse und einer Geschwindigkeit, also MLT^{-1}.

Die Dimension des *Zeiteffekts* pt ist

$$MLT^{-2} \cdot T = MLT^{-1}.$$

***Bemerkung*. Sind zwei physikalische Grössen einander gleich, so haben sie auch gleiche Dimensionen.**

Die Dimension einer *Arbeit* ps ist

$$MLT^{-2} \cdot L = ML^2T^{-2}.$$

Die Dimension der *lebendigen Kraft* $\frac{1}{2} mv^2$ ist

$$M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}.$$

Die Dimension eines *Effekts* ist gleich derjenigen der Arbeit, dividiert durch die Zeit, somit gleich

$$ML^2T^{-2} : T = ML^2T^{-3}.$$

§ 13. Die Grundgesetze des Gleichgewichtes starrer Körper.

1. Zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, sind gleich gross und entgegengesetzt.

2. Halten zwei Kraftsysteme einem dritten einzeln das Gleichgewicht, so sind sie gleichwertig und können einander ersetzen.

3. Die Wirkung eines Systems von Kräften, die an einem Körper angreifen, ändert sich nicht, wenn man noch weitere Kräfte hinzufügt oder wegnimmt, die einander das Gleichgewicht halten.

§ 14. Das Parallelogramm der Kräfte.

Eine Kraft ist durch ihren Angriffspunkt, ihre Richtung und ihre Stärke bestimmt. Strecken, welche in einer graphischen Darstellung Richtung und Grösse einer Kraft versinnlichen, eventuell auch deren Angriffspunkt angeben, werden Kraftstrecken genannt. Verlegt man den Angriffspunkt einer Kraft nach einem anderen Punkt ihrer eigenen Richtung, so wird an ihrer Wirkung nichts geändert (§ 1; 3). Eine Kraft, welche die gleiche Wirkung erzeugt wie zwei oder mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte, heisst Resultierende, Mittelkraft, Resultante, und die Einzelkräfte führen den Namen Seitenkräfte, Komponenten.

Wenn zwei Kräfte unter einem Winkel gleichzeitig auf einen materiellen Punkt einwirken, so wird die Richtung und die Grösse der Mittelkraft durch die Diagonale desjenigen Parallelogramms bestimmt, das sich aus den Seitenkräften konstruieren lässt.

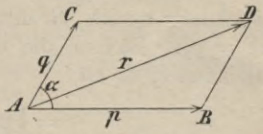

Fig. 11.

Sind in der Figur 11 AB = p, AC = q die Komponenten und der von ihnen gebildete Winkel BAC = α, so ist aus trigonometrischen Gründen die Resultante AB = r

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos\alpha}.$$

Ist $\alpha = 90^0$, so ist

$$r = \sqrt{p^2 + q^2};$$

ist $\alpha = 0^0$, so erhält man

$$r = p + q;$$

ist $\alpha = 180^0$, so findet man

$$r = \pm(p - q).$$

Ist die Resultante gleich 0, so verharrt der Massenpunkt in Ruhe.

Greifen die beiden Kräfte nicht unmittelbar an dem Massenpunkt an, sondern gehen nur ihre Richtungen durch denselben, so verlege man ihre Angriffspunkte dorthin und verfahre bei der Zusammensetzung wie oben.

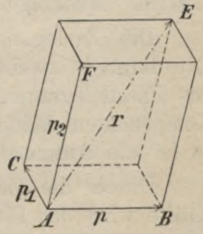

Fig. 12.

Wirken auf einen materiellen Punkt drei Kräfte im Raum, so stellt nach Grösse und Richtung die Diagonale des aus den Seitenkräften konstruierten Parallelflachs die Resultante dar. In der Fig. 12 ist $AE = r$ die Resultante zu $AB = p$, $AC = p_1$, $AF = p_2$. Stehen die drei Kraftrichtungen senkrecht aufeinander, so ist

$$r = \sqrt{p^2 + p_1^2 + p_2^2}.$$

Für mehrere Seitenkräfte, die an einem materiellen Punkt angreifen, findet man die Resultante, wenn man zunächst zwei Kräfte (Fig. 13) $AB = p_1$ und $AC = p_2$ zusammensetzt, hierauf die erhaltene resultierende Kraft $AD = r_1$ mit der dritten Kraft $AF = p_3$ zu $AE = r_2$ vereinigt, etc.

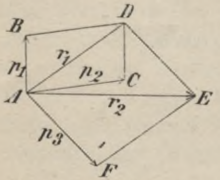

Fig. 13.

Um die Zeichnung möglichst einfach zu gestalten, zieht man $BD \# AC$, $DE \# AF$ etc.; die Schlusslinie des aus den einzelnen Kraftstrecken konstruierten polygonalen Zuges ist somit die Resultante derselben.

Ist die Resultante gleich 0, oder schaltet man in das System als letzte Seitenkraft eine solche ein, die der Resultante gleich und entgegengesetzt ist, so halten sich die sämtlichen Einzelkräfte das Gleichgewicht.

Die Zerlegung einer als Resultante betrachteten Mittelkraft in zwei Seitenkräfte geschieht ebenfalls durch das Parallelogramm der Kräfte. Sind dabei über die Komponenten keine weiteren Bestimmungen getroffen, so ist die Aufgabe vieldeutig (vergl. den § 3).

Durch die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte wird der Einblick in viele mechanische Vorgänge wesentlich erleichtert.

§ 15. Die Zusammensetzung zweier Kräfte in der Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten.

I. Die Kraftrichtungen schneiden sich. (Fig. 14.) Gesetzt, die Kräfte AE = p und BF = q greifen in A und B an dem starren Körper AB an und es sei ihre Resultante r zu bestimmen. An der Wirkung der Kräfte wird nichts geändert, wenn man die Angriffspunkte in den Schnittpunkt C der Kraftstrecken verlegt, wobei p durch CG und q durch CH zu ersetzen ist. Das Parallelogramm CGJH liefert die Mittelkraft CJ = r. Giebt man ihr den Angriffspunkt K und macht KL = CJ, so ist KL die gesuchte Resultante. Fällt man des weiteren von J und K die Lote auf CA und CB, so gelten folgende Proportionen:

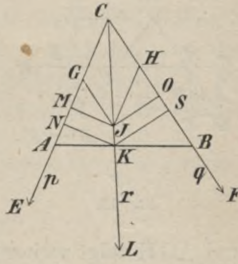

Fig. 14.

$$\begin{aligned} KS : KN &= JO : JM, \\ &= JH : JG \,(\triangle JOH \sim JGM), \\ &= CG : CH, \\ &= p : q; \end{aligned}$$

hieraus

$$KS \cdot q = KN \cdot p.$$

II. Beide Kräfte sind gleichgerichtet. (Fig. 15.) Die beiden Kräfte AC = p und BD = q sind gleichgerichtet und greifen in A und B an. In der Wirkung der Kräfte tritt keine Änderung ein, wenn man die gleichen und entgegengesetzten Kräfte AG und BE hinzufügt. Nun liefern die Kräfte AC und AG die Resultante AH und auf der anderen Seite die Komponenten BD und BE die Mittelkraft BF. Die Angriffspunkte beider Resultanten verlegt man jetzt nach J, indem man gleichzeitig JK = AH und JL = BF macht. Nach dieser Anordnung zerlegt man JK und JL wieder in je zwei Komponenten nach den Richtungen AB und AC; also JK in JO und JN und ebenso JL in JS und JM. Aus der Kongruenz der Dreiecke JNK und AGH folgt weiter JN = AG; ebenso ist JM = BE, und da AG = BE ist, so halten sich JN und JM das Gleichgewicht, während sich JO und JS addieren. Macht man demnach

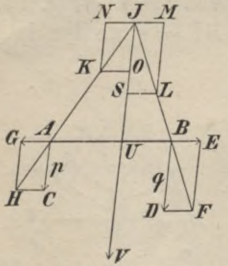

Fig. 15.

$$UV = JO + JS = p + q,$$

so hat man damit die gesuchte Resultante. Ferner ist

$$JO : OK = JU : UA$$

und

$$JS : SL = JU : UB.$$

Da OK = SL, JO = AC = p, JS = BD = q ist, so ergiebt sich

$$p : q = UB : UA.$$

In Worten: Die Resultante zweier gleichgerichteten Kräfte ist gleich der Summe derselben, und sie teilt die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnis beider Kräfte.

Um die Mittelkraft für mehrere parallele und gleichgerichtete Kräfte zu bestimmen, setzt man zunächst zwei derselben zusammen, die erhaltene Resultante mit der dritten etc. Das Verfahren lässt sich auch anwenden, wenn die Kräfte an beliebigen im Raume gelegenen Massenpunkten angreifen.

Die Resultante ist gleich der Summe der Einzelkräfte und ihr Angriffspunkt ist unabhängig von der Richtung der Kräfte, wenn sich die Angriffspunkte der letzteren nicht ändern. Der Angriffspunkt der Resultante heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

III. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet und einander nicht gleich. (Fig. 16.) Ist AC = p die grössere, BD = q die kleinere gegebene Kraft, EF = r die Resultante, so ergiebt eine der vorigen analoge Betrachtung die Thatsachen

$$r = p - q$$

und

$$p : q = EB : EA,$$

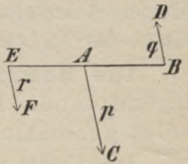

Fig. 16.

d. h. die Resultante zweier ungleichen, entgegengesetzt gerichteten Kräfte ist gleich dem Unterschied beider, und sie teilt die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.

Bemerkung. Zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte liefern keine Resultante. Man nennt sie ein Kräftepaar.

§ 16. Drehkräfte; das Moment.

1. Drehung um einen Punkt. (Fig. 17.) Fällt man von dem Punkte O der einen Diagonale des Kräfteparallelogramms ABCD die Lote OE = a und OF = a_1

auf die Komponenten $AB = p$ und $AC = p_1$, so hat man sofort

$$ap = a_1 p_1 .$$

Denn diese Produkte sind gleich den doppelten Inhalten der Dreiecke ABO und ACO, welche auf derselben Grundseite AO stehen und gleiche Höhe haben, nämlich die von B und C auf AO zu fällenden Lote, die mithin auch flächengleich sind. Die Strecken a und a_1 heissen die **Arme** der Kräfte p und p_1, die Produkte ap und $a_1 p_1$ die **Momente** (Drehungs-, statische Momente) derselben. Mit Benutzung dieser Bezeichnung lautet der soeben gefundene Satz:

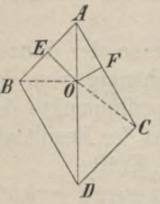

Fig. 17.

Die Momente der beiden Komponenten für irgend einen Punkt der Resultante sind, absolut genommen, einander gleich.

Die Kräfte p und p_1 suchen den Massenpunkt A in ungleichem Sinne um den Punkt O zu drehen. Weil aber O auf der Resultante liegt, so kann keine Bewegung eintreten, mithin:

Zwei Drehkräfte halten einander das Gleichgewicht, wenn ihre Momente den gleichen Wert, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Fügt man in diesem Fall noch die Kraft p_2 hinzu, die der p gleich und entgegengesetzt ist, so hält p sowohl der p_2 als auch der p_1 das Gleichgewicht, weshalb p_1 und p_2 als gleichwertig anzusehen sind; d. h.

Zwei Kräfte sind für eine Drehung um einen Punkt gleichwertig, erzeugen die gleiche

Winkelbeschleunigung, wenn ihre Momente absolut und den Vorzeichen nach gleich sind.

Jede Drehkraft lässt sich somit durch eine andere von der Grösse ihres Moments in der Entfernung 1 vom Drehpunkt ersetzen.

Liegt der Punkt O beliebig in der Ebene, so verfährt man folgendermassen: Auf die Strecken $AB = p_1$, $AC = p_2$ und $AD = p$ des Kräfteparallelogramms ABCD werden von dem Punkte O die Lote $OF = a_1$, $OG = a_2$ und $OH = a$ gefällt (Fig. 18). Nun ist

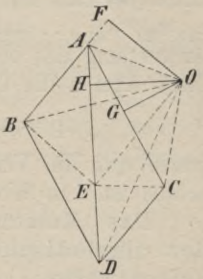

Fig. 18.

$$\triangle ABO + ACO = ADO;$$

denn zieht man $OE \parallel AB$, so ergiebt sich

$$\triangle ABO = ABE$$

und

$$\triangle ABE = ACE,$$

folglich

$$\triangle ABO = ACE;$$

ferner

$$\triangle AOC = AOC,$$

addiert:

$$\triangle ABO + AOC = AECO.$$

Weiterhin ist Viereck

$$\begin{aligned} AECO &= AEO + OEC, \\ &= AEO + OED, \\ &= ADO; \end{aligned}$$

daher

$$\triangle ABO + AOC = ADO;$$

hieraus folgt

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = a \cdot p.$$

Unterliegt der materielle Punkt A mehreren Kräften $p_1, p_2, p_3, \ldots$ in der gleichen Ebene und bezieht man ihre Momente auf einen beliebigen Punkt O derselben Ebene, welcher von den Kraftrichtungen die Entfernungen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hat, so findet man durch mehrmalige Anwendung des obigen Satzes für die Mittelkraft p und ihren Arm a die Gleichung

$$ap = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \cdots,$$

wobei auf die Vorzeichen der einzelnen Produkte zu achten ist. In Worten lautet dieses Ergebnis:

Das Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller Seitenkräfte.

2. Drehung um eine Achse. Legt man durch O eine Gerade L senkrecht zur Ebene der vorhandenen Kräfte, so kann die Drehung um O als eine Drehung um die Achse L aufgefasst werden. Deshalb versteht man unter dem Moment einer Kraft für die Achse L ihr Moment für den Punkt O, und die oben ausgesprochenen Sätze behalten auch in diesem Falle ihre Gültigkeit. Insbesondere merke man: „Schneidet die Resultante die Drehungsachse oder ist die algebraische Summe der Momente aller Seitenkräfte gleich Null, so befindet sich das System im Gleichgewicht.“

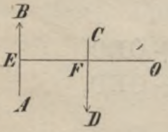

Fig. 19.

3. Das Moment eines Kräftepaares. (Fig. 19.) AB = + p und CD = — p seien die Kräfte eines Paares, O der Drehpunkt in der Ebene der Kräfte, ferner OE und OF die Arme der Einzelkräfte. Als Momente der letzteren ergeben sich die Produkte $+ p \cdot OE$ und $- p \cdot OF$; mithin ist das Moment des Paares

$$= p \cdot OE - p \cdot OF,$$
$$= p(a + OF) - p \cdot OF,$$
$$= p \cdot a, \quad \text{wenn } EF = a \text{ gesetzt wird.}$$

Das Produkt ap wird negativ, wenn der Arm der negativen Kraft grösser als der der positiven ist. Die Strecke a heisst der Arm des Paares, $\pm$ ap das Moment desselben. Da in dem Ausdruck für das Moment die Entfernung des Drehpunktes von dem Kräftepaar fehlt, so besteht die Thatsache:

Die Wirkung eines Kräftepaares ist unabhängig von der Lage des Drehpunktes. Nur bei gegebener Lage desselben lässt sich das Paar durch eine Drehkraft von der Grösse des Moments in der Entfernung 1 vom Drehpunkt ersetzen. Zwei Kräftepaare von gleichem Moment sind gleichwertig.

Mehrere Kräftepaare einer Ebene lassen sich zu einem Paar zusammensetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Paare ist.

Bemerkung: **Die beiden auf die Pole einer Magnetnadel wirkenden erdmagnetischen Kräfte bilden ein Kräftepaar, das sich durch eine Drehkraft nicht ersetzen lässt.**

4. Moment eines Systems paralleler Kräfte in bezug auf eine Ebene. (Fig. 20.) $A_1B_1 = p_1$ und $A_2B_2 = p_2$ seien zwei parallele Kräfte mit den Angriffspunkten A_1 und A_2; α sei eine beliebige Ebene, auf welche man die Lote (Arme genannt) $A_1C_1 = a_1$, $A_2C_2 = a_2$ gefällt hat. Die Produkte a_1p_1, a_2p_2 heissen die Momente der beiden Kräfte in bezug auf die Ebene α. Konstruiert man zu p_1 und p_2 die Resultante $AB = p$, so ist nach früherem $p = p_1 + p_2$ und $A_1A : A_2A = p_2 : p_1$. Ferner werde das Lot AC auf α mit a bezeichnet und $EAF \parallel C_1C_2$ gezogen. Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AA_1E und AA_2F die Proportion

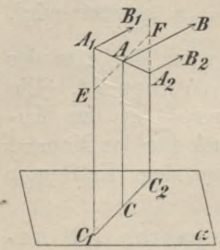

Fig. 20.

$$A_1A : A_2A = A_1E : A_2F;$$

aber

$$A_1A : A_2A = p_2 : p_1,$$

ferner

$$A_1E = a_1 - a, \quad A_2F = a - a_2,$$

mithin

$$p_2 : p_1 = (a_1 - a) : (a - a_2);$$

hieraus $$p_1a_1 + p_2a_2 = p_1a + p_2a = pa.$$

Durch successive Zusammensetzung beliebig vieler Parallelkräfte zu einer Mittelkraft und durch Wiederholung des obigen Verfahrens erhält man die Gleichung

$$p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + \dots + p_na_n = pa,$$

wo sich das Zeichen irgend eines Moments nach dem Vorzeichen der Kraft und des Armes bestimmt. Der allgemein gültige Momentensatz lautet daher:

Das Moment der Resultante beliebig vieler paralleler Kräfte in bezug auf eine Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller Einzelkräfte.

§ 17. Schwerpunkt.

Infolge der Erdschwere wirken auf die Massenteilchen $m_1, m_2, m_3 \dots$ eines starren Körpers die unter sich parallelen Kräfte m_1g, m_2g, $m_3g \dots$ Solche Kräfte haben immer eine Resultante, die stets durch den Mittelpunkt der Einzelkräfte geht, welche Lage der Körper auch einnehmen mag. Man nennt diesen Mittelpunkt den **Massenmittelpunkt**, den **Schwerpunkt** des Körpers; die in ihm angreifende Resultante ist gleich $m_1 g + m_2 g + m_3 g + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) g = mg$, wo m die ganze Masse des Körpers bezeichnet. Demnach wirkt die Schwerkraft der Erde auf jeden starren Körper so, als ob seine ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre.

Ein starrer Körper befindet sich nur dann im Gleichgewicht, wenn die Resultante der einzelnen Schwerkräfte durch den Unterstützungspunkt geht.

Ist der Körper an einer Achse drehbar unterstützt, so besteht Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt in der durch die Achse gelegten Vertikalebene sich befindet.

§ 18. Bestimmung des Schwerpunktes.

Die Koordinaten des Schwerpunktes. Bezeichnet man mit $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die Massenpunkte eines starren Körpers, mit $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ihre Abstände von einer festen Ebene α, mit a die Entfernung des Schwerpunktes von dieser Ebene, mit m die Masse des ganzen Körpers, so besteht nach Nr. 4 des § 16 die Gleichung

$$mg\,a = m_1 g a_1 + m_2 g a_2 + m_3 g a_3 + \ldots,$$

oder

$$ma = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \ldots;$$

hieraus

$$a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \ldots}{m}.$$

Ermittelt man auf diesem Wege die Abstände, die **Koordinaten**, des Schwerpunktes von drei Ebenen, den Koordinatenebenen, so ist seine Lage vollkommen bestimmt.

Bei einem homogenen, symmetrischen Körper liegt der Schwerpunkt in den Symmetrieebenen.

§ 19. Die einfachen Maschinen.

Eine Vorrichtung, durch welche die Wirkung einer Kraft übertragen wird, heisst Maschine. Zu den einfachen Maschinen rechnet man den Hebel, die Rolle, das Wellrad, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube.

I. Der Hebel. Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Drehungsmomente sämtlicher am Hebel wirkenden Kräfte gleich Null ist. Der Druck auf den Drehpunkt ist gleich der Resultante der Kräfte.

II. Die gleicharmige Wage. Eine gute Wage muss stabil, richtig und empfindlich sein. — An der je mit P belasteten um C drehbaren Wage AB (Fig. 21) bringe das Übergewicht p den Ausschlag α hervor. Ferner sei S der Schwerpunkt des unbelasteten Balkens, e dessen Entfernung von der Drehachse, Q das Gewicht und 2a die Länge des Balkens. Kommt der Wagbalken durch das Übergewicht p in der Lage $A_1 S_1 B_1$ zur Ruhe, so besteht nach den Hebelgesetzen die Gleichung

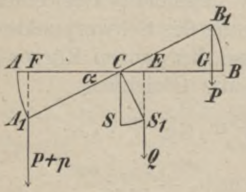

Fig. 21.

$$(P + p) \cdot CF = P \cdot CG + Q \cdot CE$$

oder

$$(P + p) \cdot a \cdot \cos \alpha = P \cdot a \cdot \cos \alpha + Q \cdot e \cdot \sin \alpha,$$

hieraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \cdot p}{Q \cdot e}.$$

Also a) Der Winkel α ist für das gleiche Übergewicht um so grösser, je grösser die Armlänge a, je kleiner das Gewicht Q des Balkens und je geringer die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse ist. b) Die Grösse des Ausschlags ist (theoretisch) unabhängig von der Belastung und seine Tangente ist dem Übergewicht proportional.

Die Empfindlichkeit einer Wage wird durch einen Bruch ausgedrückt, der das kleinste noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht zum Zähler und das Gewicht der grössten zulässigen Belastung zum Nenner hat.

III. Die Brückenwage ist eine zusammengesetzte Hebelwage. (Fig. 22.) Die Last Q ruht auf der Brücke EG, einem einarmigen Hebel, der von einem zweiten einarmigen Hebel FH gestützt wird. Beide Hebel sind durch die Zugstangen EC und FD mit dem um O drehbaren Wagbalken, der die Wagschale AB trägt, verbunden. Ausserdem wird die Wage so konstruiert, dass OC : OD sich verhält wie GH : FH. — Das Gewicht Q der Last zerlegt sich in zwei parallele Komponenten Q_1 und Q_2, von denen Q_1 in C am Hebel AD wirkt, während Q_2 in G auf FH drückt. Letzterem Druck hält ein in F bezw. D angreifender Zug

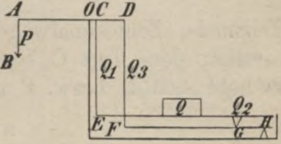

Fig 22.

$$Q_3 = \frac{Q_2 \cdot GH}{FH}$$

das Gleichgewicht. Denkt man sich diesen Zug nach C verlegt, so greift er hier an mit der Stärke

$$\frac{Q_2 \cdot GH}{FH} \cdot \frac{OD}{OC},$$

d. i. mit Q_2, weil nach der Bauart der Wage

$$OC : OD = GH : FH$$

ist. In C wirkt somit $Q_1 + Q_2$ oder die Gesamtlast Q. Demnach ist es gleichgiltig, wo die Last Q auf die Brücke gelegt wird. Macht man nun

$$OA = 10 \cdot OC$$

oder gleich

$$100 \cdot OC,$$

so beträgt das auf die Wagschale AB zu legende Gewicht

$$P = \frac{1}{10} Q \text{ oder } \frac{1}{100} Q$$

(Dezimal-, Zentesimalwage). — Die Brücke hebt sich parallel; denn legt C bezw. E einen Weg = a zurück, so hebt sich D bezw. F um

$$\frac{a \cdot OD}{OC}$$

und daher G um

$$a \cdot \frac{OD}{OC} \cdot \frac{GH}{FH}.$$

Weil auch dieser Ausdruck gleich a ist, so legen G und E gleiche Wege zurück.

IV. Rollen. Die Wirkung der festen Rolle kann man auf die eines gleicharmigen Hebels zurückführen, dessen Drehpunkt mit dem Mittelpunkt der Rolle zusammenfällt. Im Falle des Gleichgewichts ist daher die Kraft gleich der Last, und bei einer Drehung der Rolle legen beide, Kraft und Last, gleiche Wegstrecken zurück. — Sind bei der losen Rolle C die Seile parallel der Lastrichtung (Fig. 23), so wirkt sie wie der einarmige Hebel AB, bei welchem der Drehpunkt in B, der Angriffspunkt der Last Q in C und der der Kraft P in A liegt. Weil nun $AB = 2 \cdot CB$ ist, so besteht folgende Beziehung des Gleichgewichts

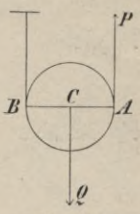

Fig. 23.

$$2P = Q;$$

hieraus

$$P = \frac{1}{2} \cdot Q.$$

Dreht sich die Rolle, so legt die Kraft einen doppelt so grossen Weg als die Last zurück. — Wenn beide Seilteile AC und BC (Fig. 24) mit der Lastrichtung OC den gleichen Winkel α bilden, so herrscht Gleichgewicht, wenn die um A genommenen Momente einander gleich sind. Demnach ist

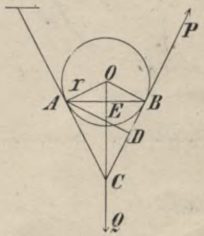

Fig. 24.

$$(1) \qquad P \cdot AD = Q \cdot AE.$$

Das $\triangle$ OAE ist ähnlich dem $\triangle$ ABD, daher

$$(2) \qquad AB : AD = AO : AE.$$

Bezeichnen wir den Rollenradius mit r und setzen wir in die erste Gleichung den aus der zweiten für AE gefundenen Wert ein, so erhält man

$$P \cdot AD = Q \cdot \frac{r \cdot AD}{AB},$$

folglich

$$P = Q \cdot \frac{r}{AB}.$$

Es ist aber

$$\cos \alpha = \frac{AE}{r} = \frac{AB}{2r};$$

mithin

$$P = \frac{Q}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

V. Das Wellrad. (Fig. 25.) Der Radius der Welle ist $AC = r$, derjenige des Rades $CB = R$. Am Umfang des Rades wirkt die Kraft P, an dem der Welle die Last Q. Sind die Richtungen beider Kräfte parallel, so kann man die Wirkung des Wellrades auf die des zweiarmigen um C drehbaren Hebels ACB zurückführen, und es besteht im Fall des Gleichgewichts die Beziehung

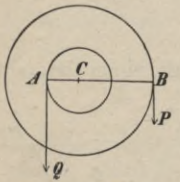

Fig. 25.

$$r \cdot Q = P \cdot R;$$

daher

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q.$$

VI. Die schiefe Ebene. Fig. 26. Die Kraft $DE = P$ wirkt in D auf die Last vom Gewicht $DG = Q$ unter dem $\sphericalangle \beta$ gegen die schiefe Ebene, welche selbst den $\sphericalangle \alpha$ mit der Horizontalen bildet. Um die Relation für das Gleichgewicht abzuleiten, zerlegt man DG in zwei Komponenten, wovon die eine DF in die Richtung ED, die andere DH in die zu AC senkrechte Richtung fällt. Aus planimetrischen Gründen ist

$$\sphericalangle\, \mathrm{DGF} = \alpha$$

und

$$\sphericalangle\, \mathrm{DFG} = 90^0 + \beta;$$

mithin besteht nach dem Sinussatz die Gleichung:

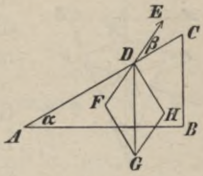

Fig. 26.

$$\mathrm{DF} : \mathrm{DG} = \sin\alpha : \cos\beta.$$

Weil nun DG = Q ist und DF = DE = P, ohne Rücksicht auf das Zeichen, sein muss (die Komponente DH wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben), so erhält man die Proportion:

$$\mathrm{P} : \mathrm{Q} = \sin\alpha : \cos\beta,$$

also

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Besondere Fälle. a) Die Kraft wirke parallel der schiefen Ebene. Es ist

$$\sphericalangle\, \beta = 0$$

und damit

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \sin\alpha.$$

b) Die Kraft P wirke parallel der Basis der schiefen Ebene. Es ist

$$\beta = -\alpha$$

und daher

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

VII. Der Keil. Fig. 27. Sein Querschnitt ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck von der Basis, dem Rücken, $AB = r$, und dem Schenkel, der Seite, $AC = s$. Wirkt die Kraft P senkrecht auf den Rücken und beiderseits die Pressung Q senkrecht gegen die Seiten, so besteht Gleichgewicht, wenn die aus den Lasten Q konstruierte Resultante EH an Grösse, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, gleich P ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und GEH folgt nun

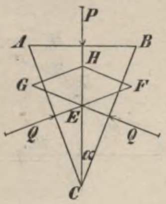

Fig. 27.

$$AB : AC = EH : EG,$$

oder

$$r : s = P : Q;$$

daraus

$$P = \frac{r}{s} \cdot Q.$$

Bezeichnet man den Keilwinkel ACB mit α, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2s},$$

daher

$$P = 2Q \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

VIII. Die Schraube. Die Last Q wird mit der Schraubenspindel durch eine Kraft P gehoben, die tangential am Umfang der Spindel senkrecht zu deren Achse wirkt. Somit lässt sich die Wirkung der Schraube aus der einer schiefen Ebene erklären, von welcher die Höhe gleich der Höhe eines Schraubenganges und die Basis gleich dem Umfang der Spindel ist und an welcher die Kraft P parallel zur Basis wirkt. Im Falle des Gleichgewichts ergiebt sich aus der für die schiefe Ebene aufgestellten Beziehung folgende Gleichung:

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha = Q \cdot \frac{h}{2\pi r},$$

wo h die Höhe eines Schraubenganges und r den Radius der Spindel bedeutet. — Wirkt die Kraft P nicht am Umfang der Spindel, sondern greift sie an einem durch den Schraubenkopf gesteckten Hebel an, wodurch sie einen Kreisweg vom Radius R beschreibt, so gilt

$$P = Q \cdot \frac{h}{2 R \pi}.$$

§ 20. **Das Trägheitsmoment.**

I. Auf dem zur Drehachse AB senkrechten Leitstrahl CG (Fig. 28) befinde sich in F in der Entfernung $FC = r_1$ das Massenteilchen m_1. Eine Kraft p, die in F angreift und stets senkrecht zu CF wirkt, erteilt der Masse m_1 eine gleichmässig beschleunigte Bewegung, deren Beschleunigung ω sein möge. Diese Beschleunigung ändert sich nicht, wenn man nach § 16 die Kraft p durch eine andere im Betrag $p r_1$ ersetzt, welche in einem Punkt E auf CF in der Entfernung 1 von C angreift. Verlegt man nun die Masse m_1 von F nach G in die Entfernung r_2 von C, so ist klar, dass sich dadurch auch die Beschleunigung ω der Bewegung ändert. Soll jedoch diese Änderung nicht eintreten, so muss nach G eine von m_1 verschiedene

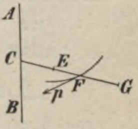

Fig. 28.

Masse, etwa m_2, gebracht werden. Letztere Masse nennen wir der ersten gleichwertig. Durch dieselbe Kraft pr_1 erlangen also die beiden Massen m_1 und m_2 die gleiche Winkelbeschleunigung; mithin haben sie auch nach gleich langer Einwirkung jener Kraft auf sie die gleiche lebendige Kraft. Nach der Zeit t sind die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 gleich $\omega r_1 t$ und $\omega r_2 t$ und deren lebendige Kräfte gleich $\frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 t^2$ und $\frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 t^2$. Die Gleichsetzung der letzteren Werte führt zur Beziehung

$$m_1 r_1^2 = m_2 \cdot r_2^2.$$

Nennt man das Produkt mr^2 das Trägheitsmoment der Masse m, so sagt obige Gleichung aus:

Zwei Massenteile sind gleichwertig in bezug auf eine drehende Bewegung, wenn ihre Trägheitsmomente gleich gross sind.

Ist $r_2 = 1$, so ist

$$m_2 = m_1 \cdot r_1^2.$$

Besteht ein Körper aus den Massenteilen m_1, m_2 ..., die von der Drehachse die Entfernungen r_1, r_2, ... haben, so heisst der Ausdruck

$$\Sigma mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$$

das Trägheitsmoment des Körpers. Dasselbe ändert sich nicht, wenn man irgend ein Massenteilchen so verschiebt, dass seine Entfernung von der Drehachse die gleiche bleibt. Bestimmt man zur ganzen Masse M eines Körpers eine Strecke ϱ so, dass

$$M\varrho^2 = \Sigma mr^2$$

wird, so nennt man ϱ den Trägheitsradius des

Körpers in bezug auf die Drehachse. Denkt man sich nämlich einen materiellen Punkt von der Masse M in der Entfernung ϱ von der Drehachse, so hat dieser das gleiche Trägheitsmoment wie der Körper selbst. Die Trägheitsmomente homogener ähnlicher Gebilde, bei welchen entsprechende Strecken das Verhältnis $1 : n$ haben, verhalten sich bezüglich ähnlich liegender Achsen wie $1 : n^3$, $1 : n^4$, $1 : n^5$, je nachdem die Gebilde aus Linien, Flächen oder Körpern bestehen.

II. Nimmt man das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf zwei parallele Achsen, wovon die eine durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so stehen beide Momente in einfacher Beziehung zu einander, die nun aufgefunden werden soll (Fig. 29). Von den beiden parallelen Achsen g und g_1 enthalte die erstere den Schwerpunkt S und A sei ein materieller Punkt von der Masse m. Man lege durch A eine Ebene senkrecht zu g, welche die Achsen in B und C schneidet und fälle von A das Lot auf BC, das Lot AE. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist nun

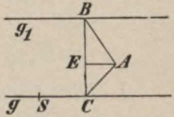

Fig 29.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \pm 2\,BC \cdot CE,$$

daher auch

$$(1) \qquad mAB^2 = mBC^2 + mAC^2 \pm 2\,mBC \cdot CE.$$

Das gleiche Verfahren liefert für jeden Massenpunkt des Körpers eine der ersten analoge Gleichung. Die Addition sämtlicher Gleichungen führt zu dem Ergebnis

$$(2) \quad \Sigma mAB^2 = \Sigma mBC^2 + \Sigma mAC^2 \pm 2\,\Sigma mBC \cdot CE.$$

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}$ die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf g_1 und g, mit M die Masse des Körpers und mit e die Entfernung beider Achsen, so geht die Relation (2) in folgende über

$$\mathfrak{M}_1 = Me^2 + \mathfrak{M} \pm 2e\Sigma m \cdot CE. \tag{3}$$

Nun ist $\Sigma m \cdot CE$ das statische Moment des Körpers hinsichtlich einer durch g senkrecht zu BC gelegten Ebene, und weil diese den Schwerpunkt enthält, so ist jenes Moment gleich Null. Als die gesuchte Beziehung zwischen den beiden Trägheitsmomenten findet man daher

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} + Me^2. \tag{4}$$

§ 21. Anwendungen.

I. Die Atwoodsche Fallmaschine. Das Übergewicht bewegt die Gewichte (2 P + p) und die Masse der Rolle. Letztere lässt sich in bezug auf die Drehung durch eine ihr gleichwertige Masse x in einem Punkt des Umfangs ersetzen. Nennt man r den Radius der Rolle, $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment derselben, so ist

$$x \cdot r^2 = \mathfrak{M};$$

hieraus

$$x = \frac{\mathfrak{M}}{r^2}.$$

Nun ist die Beschleunigung a, die das Übergewicht der ganzen zu bewegenden Masse $2P + p + \frac{\mathfrak{M}}{r^2}$ erteilt, gleich

$$a = \frac{p}{2P + p + \frac{\mathfrak{M}}{r^2}} \cdot g.$$

II. Das physische Pendel. Ein beliebig gestalteter Körper, der über seinem Schwerpunkt drehbar befestigt ist, kann als physisches Pendel gelten.

Aufgabe. Es soll die Länge desjenigen mathematischen Pendels bestimmt werden, das die gleiche Schwingungsdauer wie das physische Pendel hat.

Lösung. Wir bezeichnen die Masse des Pendels mit M, seinen Schwerpunkt mit S, die Entfernung des letzteren von der Drehachse O mit k (Fig. 30) und den Ausschlagswinkel mit α. An jedem Massenteil m des Pendels wirkt in lotrechter Richtung mg; die Resultante aller dieser Kräfte ist die im Schwerpunkt S_1 angreifende Kraft Mg. Die tangentiale Komponente derselben, welche das Pendel in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, beträgt

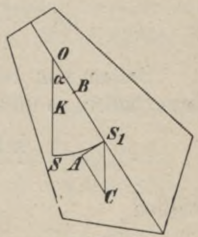

Fig. 30.

$$AS_1 = Mg \sin \alpha,$$

und ihr Drehungsmoment in bezug auf O hat den Wert

$$k \cdot Mg \sin \alpha.$$

Von eben diesem Betrag muss eine Kraft sein, die an einem Punkt B der Geraden OS_1 in der Entfernung 1 von O angreift und jener Komponenten gleichwertig sein soll. Die Masse x aber, welche nach B zu verlegen ist und welche hinsichtlich der Drehung der ganzen Pendelmasse gleichwertig ist, berechnet sich aus der Beziehung

$$x \cdot 1^2 = \Sigma m r^2,$$

ist also das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Pendels. Es ist demnach die Beschleunigung ω der Drehung

$$\omega = \frac{k \cdot Mg \cdot \sin\alpha}{\mathfrak{M}}.$$

Für ein mathematisches Pendel von der Länge l, dessen materieller Punkt die Masse μ hat, findet man in gleicher Weise die Winkelbeschleunigung ω_1

$$\omega_1 = \frac{l \cdot \mu \cdot g \cdot \sin\alpha}{\mu \cdot l^2} = \frac{g \cdot \sin\alpha}{l}.$$

Sollen nun beide Pendel die gleiche Schwingungsdauer haben, so muss $\omega = \omega_1$ sein, also gilt die Beziehung

$$\frac{k\,Mg \sin\alpha}{\mathfrak{M}} = \frac{g \cdot \sin\alpha}{l},$$

folglich

$$l = \frac{\mathfrak{M}}{k \cdot M},$$

und damit die Dauer T der einfachen Schwingung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{gkM}}.$$

Die Strecke l nennt man die reduzierte Pendellänge und den Punkt auf OS, welcher von O den Abstand l hat, den Schwingungsmittelpunkt. Der Schwingungsmittelpunkt liegt tiefer als der Schwerpunkt und die Schwingungsdauer des Pendels ändert sich nicht, wenn man es im Schwingungsmittelpunkt aufhängt.

§ 22. Hindernisse der Bewegung.

Je nachdem sich ein bewegter Körper auf der Oberfläche oder im Inneren eines anderen Körpers bewegt, wird das zu überwindende Hindernis der Bewegung Reibung oder Widerstand des Mittels genannt. Man behandelt diese Hindernisse wie Kräfte, weil sie die bewegenden Wirkungen von solchen aufzuheben vermögen. Ihre Dimension ist somit MLT^{-2}.

I. Gleitende Reibung. Aus Versuchen ergiebt sich:

a) Die gleitende Reibung ist proportional dem Druck auf die Unterlage. Der Widerstand, den die Reibung beim Druck 1 leistet, heisst Reibungskoeffizient; er wird mit ϱ bezeichnet. Sonach besteht zwischen dem Gewicht P und der Reibung R die Beziehung $R = \varrho \cdot P$.

Hieraus folgt $\varrho = \frac{R}{P}$; folglich ist auch die Dimension des Koeffizienten für gleitende Reibung gleich 1.

b) Die Reibung ist bei gleichem Druck unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche.

c) Die Reibung hängt ab von der materiellen Beschaffenheit der reibenden Körper.

d) Die Reibung ist beim Übergang aus der Ruhe in die Bewegung erheblich grösser als während derselben.

e) Innerhalb gewisser Grenzen ist die Reibung von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig.

Fig. 31. Liegt der Körper $Q = Mg$ in E auf der schiefen Ebene ABC vom Neigungswinkel α, so ist sein Druck auf die Ebene gleich $Q \cdot \cos \alpha$, mithin die Reibung $\varrho \cdot Q \cdot \cos \alpha$. Die Kraft, welche den Körper die schiefe Ebene abwärts bewegt ohne Rücksichtnahme auf die Reibung, ist $Q \sin \alpha$, mit Berücksichtigung derselben

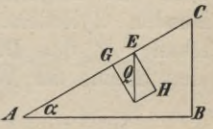

Fig. 31.

$$P = Q \sin \alpha - \varrho \cdot Q \cos \alpha.$$

Setzt man nun $\varrho = \operatorname{tg} \varepsilon$ und nennt ε den Reibungswinkel, so ergiebt sich

$$P = Q \sin \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon \cdot Q \cos \alpha$$

$$= Q \left(\sin \alpha - \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \cdot \cos \alpha\right)$$

$$= Q \cdot \frac{\sin (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} = Mg \cdot \frac{\sin (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}.$$

Die Beschleunigung a der abwärts gerichteten Bewegung ist

$$a = \frac{\sin (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \cdot g.$$

Ist $a = 0$, so wird $\varepsilon = \alpha$.

Entsprechend dem Obigen findet man für die zur Aufwärtsbewegung erforderliche Kraft den Betrag

$$P = Q \sin \alpha + \varrho \cdot Q \cos \alpha$$

$$= Q \cdot \frac{\sin (\alpha + \varepsilon)}{\cos \varepsilon}.$$

II. Rollende Reibung. Sie ist proportional dem Druck und umgekehrt proportional dem Radius des rollenden Zylinders. Bezeichnet wie vorhin R die Reibung, P den Druck, ϱ den Reibungskoeffizienten, r den Radius der Walze, so gilt

$$R = \frac{\varrho \cdot P}{r};$$

hieraus

$$\varrho = \frac{r \cdot R}{P};$$

folglich ist die Dimension von ϱ gleich L. — Die rollende Reibung ist erfahrungsgemäss geringer als die gleitende.

§ 23. Die allgemeine Gravitation.

Die Keplerschen Gesetze.

a) Alle Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

b) Der Leitstrahl eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

c) Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernung von der Sonne.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz. Zwei Massenteilchen m_1 und m_2 im Weltall ziehen einander mit einer Kraft k an, deren Richtung in die Verbindungslinie beider Massen fällt und deren Betrag direkt proportional dem Produkt der Massen und indirekt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung r ist. Bezeichnet man mit f die Kraft, mit der zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 einander anziehen, so ist

$$k = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

1. Satz. Eine gleichmässig mit Masse belegte Kugelfläche übt auf einen materiellen Punkt P, der innerhalb der Kugel liegt, keine Wirkung aus.

2. Satz. Eine gleichmässig mit Masse belegte Kugelfläche wirkt auf einen ausserhalb der Kugel gelegenen Massenpunkt so, als ob ihre ganze Masse im Zentrum vereinigt wäre.

Zusatz. **Eine homogene Kugel oder eine aus homogenen konzentrischen Schichten zusammengesetzte Vollkugel wirkt nach aussen so, als sei ihre Gesamtmasse im Mittelpunkt konzentriert.**

§ 24. Elastizität und Festigkeit.

I. Elastizität. Die Gesetze der Elastizität werden durch Versuche gefunden.

Hat ein Stab die Länge l, den Querschnitt q, und erleidet er eine Verlängerung bezw. Verkürzung λ durch ein angehängtes bezw. drückendes Gewicht P, so ist, sofern ε eine von der materiellen Beschaffenheit des Stabes abhängige Konstante bedeutet,

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{l \cdot P}{q}.$$

Setzt man in dieser Relation $\lambda = 1$, $q = 1$, so findet man $P = \varepsilon$. Es ist also ε die Belastung, welche notwendig ist, einen Stab vom Querschnitt 1 auf das Doppelte seiner Länge zu strecken, vorausgesetzt, dass er eine solche Dehnung innerhalb der Elastizitätsgrenze ertragen könnte. Die Zahl ε führt den Namen Elastizitätsmodul oder Elastizitätskoeffizient.

Der Elastizitätsmodul vermindert sich durch Erwärmung der Körper.

Als Elastizitätsgrenze bezeichnet man dasjenige Gewicht, das eine bleibende Verlängerung von $\frac{5}{100\,000}$ der Stablänge hervorruft.

Torsions- (Drehungs-) Elastizität. Das Moment der Torsionskraft ist dem Drehungswinkel direkt proportional, der Länge des Drahtes umgekehrt proportional und von der Spannung des Drahtes unabhängig.

II. Festigkeit. Die Zug- oder absolute Festigkeit ist dem Querschnitt direkt proportional und von der Länge unabhängig. Als Modul der Zugfestigkeit bezeichnet man die kleinste Kraft, durch welche ein Stab vom Querschnitt 1 zerrissen wird. Unter Sicherheitsmodul versteht man die grösste Kraft, die an einem Stab vom Querschnitt 1 noch wirken kann, ohne dessen Gestalt merklich zu verändern. Die technischen Einheiten sind kg und qmm.

Die Druck- oder rückwirkende Festigkeit ist dem Querschnitt des Körpers gerade proportioniert, nimmt jedoch mit der Höhe ab. Der Modul der Druckfestigkeit giebt das grösste Gewicht an, welchem ein Prisma vom Querschnitt 1 eben noch widerstehen kann. Der Sicherheitsmodul beträgt $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{20}$ des Moduls der Druckfestigkeit. Die technischen Einheiten sind kg und qcm.

Die relative oder Bruch- oder Biegungsfestigkeit. Bezeichnet man mit b die Breite, mit h die Höhe, mit l die Länge eines horizontalen einseitig befestigten prismatischen Balkens, so beträgt das kleinste am anderen Ende anzubringende Gewicht P, das den Balken eben abbricht,

$$P = k \cdot \frac{b \cdot h^2}{l}. \tag{1}$$

Die von dem Material des Balkens abhängige Zahl k heisst der Modul der relativen Festigkeit. Ist $b = h = l = 1$, so hat der Balken die Form eines Würfels von der Kante 1, und P ist gleich k. Als Sicherheitsmodul nimmt man Werte von $\frac{k}{4}$ bis $\frac{k}{10}$. Die technischen Einheiten sind kg und cm. — Ist die

Last P gleichmässig über den Balken verteilt, so kann man sich dieselbe im Schwerpunkt des Balkens vereinigt denken, und ihre Wirkung beträgt nur die Hälfte von der am Ende, woraus dann für den Balken die doppelte Tragkraft folgt.

Befestigt man den Balken an beiden Enden und hängt die Last in seiner Mitte auf, so hat man in der Formel (1) die Zahl P durch $\frac{P}{2}$ und l durch $\frac{l}{2}$ zu ersetzen, so dass sich für den Balken eine viermal so grosse Tragkraft ergiebt.

§ 25. Der Stoss.

Geht die Stossrichtung durch den Schwerpunkt der beiden starren Körper, so heisst der Stoss zentral. Der Stoss zweier Kugeln ist immer zentral. Fallen die Bewegungsrichtungen der beiden Körper in die Stosslinie, so haben wir es mit dem geraden, anderenfalls mit dem schiefen Stoss zu thun. Die beiden Körper wirken während des Stosses gleich lange und in jedem Augenblick mit gleichen Kräften aufeinander ein, mithin sind die Änderungen der Bewegungsgrössen gleich und entgegengesetzt; daher der Satz: Die Bewegungsgrösse des ganzen Systems erfährt durch den Stoss keine Änderung.

I. Gerader, zentraler Stoss unelastischer Körper. Wenn zwei unelastische Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem zentralem Stoss zusammentreffen, so tritt eine Formänderung beider ein, welche solange andauert, bis die Geschwindigkeit beider Körper den gleichen Betrag v erreicht hat, dann aber setzen sie die Bewegung als eine einzige Masse fort.

Es ist nun die Aufgabe, diese gemeinschaftliche Endgeschwindigkeit v zu bestimmen. Nimmt man an, dass sich die beiden Massen in derselben Richtung bewegen und dass $c_1 > c_2$ sei, so ist der Verlust an Bewegungsgrösse, den m_1 beim Stoss erleidet, gleich $m_1 (c_1 - v)$, während für m_2 der Zuwachs an Bewegungsgrösse $m_2 (v - c_2)$ beträgt. Nach dem oben angeführten Satze besteht demnach die Gleichung

$$m_1 (c_1 - v) = m_2 (v - c_2),$$

hieraus folgt

$$v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} m_1 c_1 + m_2 c_2 &= m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_2 c_1 - m_2 c_1 \\ &= c_1 (m_1 + m_2) - m_2 (c_1 - c_2), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} m_1 c_1 + m_2 c_2 &= m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_1 c_2 - m_1 c_2 \\ &= c_2 (m_1 + m_2) + m_1 (c_1 - c_2); \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} v &= c_1 - \frac{m_2 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}, \\ &= c_2 + \frac{m_1 (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Bewegen sich die Körper vor dem Stosse in entgegengesetzter Richtung, so wird man c_1 oder c_2 negativ setzen; v erhält das Zeichen der überwiegenden Bewegungsgrösse.

II. Gerader, zentraler Stoss vollkommen elastischer Körper. Wenn zwei vollkommen elastische Körper m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem, zentralem Stoss aufeinander treffen, so tritt, wie bei unelastischen Körpern eine gegenseitige Zusammenpressung ein, die solange andauert, bis die Geschwindigkeit im Augenblick der grössten Annäherung die gleiche, etwa v, geworden ist. Wird dabei die Elastizitätsgrenze nicht überschritten, so suchen nun die Körper ihre frühere Form wieder anzunehmen, wodurch sie gleichsam einen zweiten Stoss erfahren. Da bei beiden Vorgängen die gleichen Kräfte thätig sind, so wird auch für jeden Körper die Geschwindigkeitsänderung in der zweiten Phase die gleiche sein wie in der ersten. Beim Stoss vollkommen elastischer Massen ist daher die Änderung der Geschwindigkeit doppelt so gross, als beim Stoss unelastischer Massen. — Bei der Aufstellung der Formeln machen wir die Annahme, dass sich die Massen in der gleichen Richtung bewegen und dass $c_1 > c_2$ sei. In der ersten Phase beträgt für den ersten Körper die Abnahme der Geschwindigkeit $c_1 - v$, für den zweiten die Zunahme der Geschwindigkeit $(v - c_2)$. Während des zweiten Vorganges verliert der eine Körper abermals $(c_1 - v)$ an Geschwindigkeit, während der andere $(v - c_2)$ daran gewinnt. Bezeichnen wir nun mit v_1 und v_2 die Endgeschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2, so gelten die Beziehungen

$$v_1 = c_1 - 2\,(c_1 - v),$$

$$v_2 = c_2 + 2\,(v - c_2).$$

Setzt man hier den oben gefundenen Wert für v ein, so ist

$$v_1 = c_1 - 2 \cdot \frac{m_2\,(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2},$$

$$v_2 = c_2 + 2 \cdot \frac{m_1\,(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}.$$

Die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 erhalten verschiedene Zeichen, wenn sich die Massen gegeneinander bewegen.

Zusatz. a) Ist $m_1 = m_2$, so ergeben sich die Folgerungen

$$v_1 = c_2, \quad v_2 = c_1;$$

d. h. die Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten aus.

b) Ist $m_1 = m_2$ und gleichzeitig $c_2 = 0$, so kommt

$$v_1 = 0, \quad v_2 = c_1;$$

d. h. der stossende Körper bleibt in Ruhe und der gestossene bewegt sich mit der Geschwindigkeit des stossenden weiter.

c) Ferner sei m_2 im Vergleich zu m_1 sehr gross und $c_2 = 0$, so folgt

$$v_2 = 0,$$

und aus

$$v_1 = c_1 - 2(c_1 - v)$$

finden wir

$$v_1 = -c_1;$$

d. h. wird ein elastischer Körper senkrecht gegen eine feste elastische Wand gestossen, so prallt er senkrecht mit der gleichen Geschwindigkeit zurück.

Beim geraden, zentralen Stoss zweier vollkommen elastischer Körper bleibt die lebendige Kraft erhalten.

---

2. Kapitel.

Mechanik der flüssigen Körper.

§ 26. Eigenschaften der Flüssigkeiten; Oberfläche.

Die Flüssigkeiten unterliegen der Schwerkraft der Erde; sie setzen einer Verschiebung ihrer Teilchen nur einen sehr geringen Widerstand entgegen; hingegen sind zu einer merklichen Verringerung ihres Volumens so grosse Kräfte notwendig, dass man sie lange für nicht zusammendrückbar hielt.

Die Oberfläche einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit von grösserer Ausdehnung, die nur der Erdschwere unterliegt, ist eine Kugelhaube; kleinere Stücke derselben dürfen als eben und horizontal liegend angesehen werden. Es sei in Fig. 32 A ein Massenteilchen auf der gekrümmten Oberfläche FAG und AB die an ihm wirkende Schwerkraft. Zerlegt man letztere senkrecht und tangential zur Flüssigkeitsoberfläche in die Komponenten EA und AC, so wird erstere durch den Widerstand der unter A liegenden Massenteilchen aufgehoben, während letztere A veranlasst, auf einer schiefen Ebene so tief als möglich herabzugleiten.

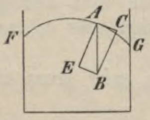

Fig. 32.

Die Flüssigkeit im Gefäss befindet sich also nicht im Gleichgewicht und die Verschiebung der Massenteilchen wird solange andauern, bis die Oberfläche der Flüssigkeit an allen Stellen senkrecht zur Richtung der Erdschwere geworden ist. Wirken auf die Flüssigkeit neben der Schwerkraft noch andere Kräfte ein, so stellt sich die Oberfläche derselben senkrecht zur Resultante aller Kräfte. — Denkt man sich nach Stevin in Fig. 33 den Teil BEFC der in Ruhe befindlichen Flüssigkeit AGHD zu einer Scheidewand erstarrt, welche die beiden Räume nicht vollständig trennt, der Kanal EJKF sei noch offen, so wird dadurch an dem bestehenden Gleichgewichtszustand nichts geändert; aber die bewegliche

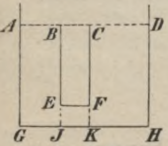

Fig. 33.

Flüssigkeit ist auf zwei leitend verbundene Gefässe verteilt. In kommunizierenden Gefässen wird sonach eine Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, wenn die freien Oberflächen in einer Horizontalebene liegen.

Zusammendrückbarkeit. Ist v_1 das Volumen einer Flüssigkeit bei dem Druck p_1, v_2 das unter dem Druck p_2 bei der gleichen Temperatur, ist ferner $p_2 > p_1$, so entspricht der Druckvermehrung $(p_2 - p_1)$ eine Verringerung des Volumens um $(v_1 - v_2)$. Die Einheit des Volumens wird daher um $\frac{(v_1 - v_2)}{v_1}$ verringert. Unter dem Koeffizienten der Zusammendrückbarkeit versteht man das Verhältnis der Verminderung des Volumens von 1 ccm zu der Vermehrung des Druckes auf ein qcm.

Den Flüssigkeiten kommt keine Formelastizität zu, dagegen eine vollkommene Volumenelastizität.

§ 27. Fortpflanzung des Drucks. Hydraulische Presse.

Infolge der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen und der vollkommenen Volumenelastizität pflanzen Flüssigkeiten einen äusseren Druck nach allen Richtungen gleichmässig fort, d. h. eine Fläche, die n mal so gross ist als die gedrückte, erleidet den n fachen Druck.

Hydraulische Presse. Wir bezeichnen den Radius des grossen Kolbens mit R, den des kleinen mit r, mit Q den Druck auf den grossen, mit q den Druck auf den kleinen Kolben; ferner sei l der Hebelarm, an dem der kleine Kolben befestigt ist, L der Hebelarm, an welchem der Arbeiter mit der Kraft P wirkt; so gelten die beiden Beziehungen

(1) $$q \cdot l = P \cdot L,$$

(2) $$Q : q = R^2 : r^2.$$

Hieraus folgt

$$Q = q \cdot \frac{R^2}{r^2} = P \cdot \frac{L}{l} \cdot \frac{R^2}{r^2}.$$

§ 28. Der Boden- und Seitendruck.

Über diese Druckverhältnisse im Inneren einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit gelten folgende Sätze:

1. In irgend einer horizontalen Schichte ist der Druck überall der gleiche.

2. Irgend eine horizontale Schichte erfährt von beiden Seiten, d. h. von oben und unten, den gleichen Druck.

3. Der Druck P auf eine wagrechte Schichte oder auf den Boden des Gefässes ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, welche die gedrückte Fläche F zur Grundfläche und ihren Abstand h vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat. Ist demnach s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so gilt die Gleichung

$$P = F \cdot h \cdot s.$$

Die Form der seitlichen Gefässwände übt keinen Einfluss auf die Zunahme des Drucks mit der Tiefe aus, denn man kann sich die ursprüngliche Seitenwand infolge Erstarrens der randlichen Flüssigkeit durch Seitenwände von beliebiger Form, also auch durch vertikale Wände ersetzt denken.

4. Der Druck P auf einen Teil F der Seitenwand eines Gefässes ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, welche zur Grundfläche die gedrückte Fläche und zur Höhe den Abstand h des Schwerpunkts dieses Flächenstücks vom Flüssigkeitsspiegel hat. Dem-

nach ist, wenn s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet,

$$P = F \cdot h \cdot s.$$

§ 29. Das Archimedische Prinzip.

Jeder in eine Flüssigkeit vollständig eingetauchte Körper verliert scheinbar soviel von seinem Gewicht, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt. Bezeichnet P das Gewicht des Körpers, Q den Gewichtsverlust, so können folgende drei Fälle eintreten:

a) $P > Q$, der Körper sinkt unter;

b) $P = Q$, der Körper schwebt in der Flüssigkeit;

c) $P < Q$, der Körper schwimmt.

Infolge des Auftriebs ist beim schwimmenden Körper das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich seinem eigenen Gewicht. Bedeutet v das Volumen des Körpers, s sein spezifisches Gewicht, v_1 das Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge und s_1 deren spezifisches Gewicht, so gilt die Gleichung

$$v \cdot s = v_1 \cdot s_1.$$

Der Auftrieb auf einen schwimmenden Körper hat zum Angriffspunkt den Schwerpunkt S_1 der verdrängten Wassermasse, der im allgemeinen mit dem Schwerpunkt S des Körpers nicht zusammenfällt. Befindet der Körper sich im Gleichgewicht, so heisst die Verbindungslinie SS_1 die Schwimmachse des Körpers. Erfährt dasselbe eine Störung, so neigt sich die Schwimmachse und der Punkt S_1 tritt nun im allgemeinen aus der Schwimmachse heraus. Es wird nun die durch S_1

gehende Vertikale die Schwimmachse schneiden und diesen Schnittpunkt nennt man das Metazentrum; dorthin kann man den Angriffspunkt des Auftriebs verlegen. Nun bilden das Gewicht des Körpers und der Auftrieb ein Kräftepaar, das die Schwimmachse aufrichtet, wenn S unter M (Metazentrum) liegt: stabiles Gleichgewicht; hingegen umzuwerfen sucht, wenn S über M sich befindet: unsicheres Gleichgewicht.

§ 30. Das spezifische Gewicht. Die Dichte.

Das Gewicht einer Volumeneinheit ist das spezifische Gewicht des Körpers. Wählt man, wie im terrestrischen System, 1 ccm als Raumeinheit und das Gewicht von 1 ccm Wasser bei 4^0 C. als Gewichtseinheit, so ist das spezifische Gewicht das in Grammen ausgedrückte Gewicht des Kubikcentimeters eines Körpers. Im absoluten Masssystem hingegen beträgt das Gewicht von 1 Gramm Masse $g = 981$ Dyne, mithin hat man die Zahlen der spezifischen Gewichte im terrestrischen System mit 981 zu multiplizieren, um die spezifischen Gewichte im absoluten Masssystem zu erhalten.

Unter der absoluten Dichte eines Körpers versteht man die Menge des Stoffs einer Volumeneinheit.

Die relative Dichte giebt an, wievielmal soviel Masse ein Körper enthält als das gleiche Volumen eines anderen, in der Regel Wasser von 4^0 C. An einem und demselben Orte der Erde ist das Verhältnis der Massen zweier Körper gleich dem ihrer Gewichte; denn $p = m \cdot g$, $p_1 = m_1 \cdot g$, mithin $p : p_1 = m : m_1$; folglich zeigt die relative Dichte auch an, wievielmal so gross das absolute Gewicht eines Körpers ist als das Gewicht einer gleich grossen Wassermenge.

Bemerkung. Im terrestrischen System mit den Einheiten g und cm fallen die Zahlen für das spezifische Gewicht mit den Zahlen der relativen Dichten zusammen.

Dimensionen:

$$\text{Spez. Gewicht gleich } \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^3} = M L^{-2} T^{-2}.$$

$$\text{Absolute Dichte gleich } \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{M}{L^3} = M \cdot L^{-3}.$$

$$\text{Relative Dichte gleich } \frac{\text{Masse}}{\text{Masse}} = \frac{M}{M} = 1.$$

§ 31. Bestimmung der relativen Dichte.

I. Starre Körper.

a) Mittels der hydrostatischen Wage. Man ermittelt das absolute Gewicht P des Körpers, hierauf sein Gewicht P_1 im Wasser. Der Gewichtsverlust ist nun $P - P_1$, somit die relative Dichte

$$s = \frac{P}{P - P_1}.$$

Ist der Körper P leichter als Wasser, so verbindet man ihn, um ihn vollständig unterzutauchen, mit einem anderen hinreichend schweren Körper vom Gewicht Q, dessen Gewicht im Wasser Q_1 beträgt. Wiegt jetzt die Verbindung beider Körper im Wasser $P_1 + Q_1$, so ergiebt sich als gemeinsamer Gewichtsverlust $P + Q - P_1 - Q_1$, und weil $Q - Q_1$ der Gewichtsverlust des schweren Körpers ist, so findet man durch Subtraktion beider Zahlen als Gewicht für die vom leichten Körper verdrängte Wassermenge den Betrag $P - P_1$. Nach dem Obigen ist alsdann die relative Dichte

$$s = \frac{P}{P - P_1}.$$

Für einen Körper, der sich im Wasser auflöst, wählt man eine andere Flüssigkeit, z. B. Terpentinöl, und bestimmt seine relative Dichte s_1 in bezug auf diese. Hat letztere selbst die relative Dichte s_2 bezogen auf Wasser, so beträgt die relative Dichte des vorliegenden Körpers $s = s_1 \cdot s_2$.

b) Vermittelst des Pyknometers. Das Gewicht des leeren Fläschchens sei a Gramm; das Gewicht des Fläschchens mit Wasser von 4° C. gefüllt b Gramm; das Gewicht desselben, wenn es nur den Körper eingelegt enthält, dessen relative Dichte gefunden werden soll, c Gramm; wenn es ausserdem noch mit Wasser angefüllt wird, d Gramm. Aus diesen Messungen berechnet sich das Gewicht des Wassers zu $(b - a)$ Gramm, das Gewicht des Körpers zu $(c - a)$ Gramm, das Gewicht des Körpers nebst dem mit ihm vorhandenen Wasser $(d - a)$ Gramm. Mithin wiegt das vom Körper verdrängte Wasser $b - a + c - a - (d - a)$ Gramm oder $b + c - (a + d)$ Gramm. Und die relative Dichte ist

$$s = \frac{c - a}{b + c - (a + d)}.$$

c) Vermittelst des Nicholsonschen Gewichtsaräometers. Man legt den Körper, dessen relative Dichte bestimmt werden soll, auf den oberen Teller und fügt soviele Tariergewichte hinzu, dass das Aräometer bis zu einer gewissen Marke einsinkt. Darauf entfernt man den Körper und legt statt seiner soviele Gewichte P auf, bis die Marke den Wasserspiegel wieder berührt. P ist das absolute Gewicht des Körpers. Nun werden die P Gramm wieder abgenommen, der Körper in das untere Sieb gelegt und auf das obere Teller P_1 Gramm gebracht, so dass das Instrument abermals zur Marke eintaucht. P_1 ist das Gewicht des verdrängten Wassers und die relative Dichte ist

$$s = \frac{P}{P_1}.$$

II. Flüssigkeiten.

a) Mittels der hydraulischen Wage. Man bestimmt die Gewichtsverluste q und q_1 eines Senkkörpers, den man nacheinander in Wasser und in die zu untersuchende Flüssigkeit untertaucht. Die relative Dichte der letzteren ist dann

$$s = \frac{q_1}{q}.$$

b) Vermittelst des Pyknometers. Wir bestimmen das Gewicht a des leeren, das Gewicht b des mit Wasser und das Gewicht c des mit der fraglichen Flüssigkeit gefüllten Fläschchens. Nun wiegen gleiche Raumteile Wasser und Flüssigkeit $(b - a)$ bez. $(c - a)$ Gramm, woraus als relative Dichte der Flüssigkeit folgt:

$$s = \frac{c - a}{b - a}.$$

c) Vermittelst des Nicholsonschen Aräometers. Es seien a das Gewicht des Instruments, b und c die Zulagegewichte, die das Instrument erst im Wasser, dann in der Flüssigkeit bis zur Marke einsinken machen. Hieraus berechnet sich das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit zu $(a + c)$ und das Gewicht des gleich grossen Volumens Wasser zu $(a + b)$; demnach ist

$$s = \frac{a + c}{a + b}.$$

d) Mittels des Volumeters. Die Skala giebt die Grösse des eingetauchten Volumens an. Die Marke, bis zu welcher das Instrument im Wasser einsinkt, wird mit 100 bezeichnet. Taucht dasselbe in eine Flüssigkeit bis zum Teilstrich n ein, so ist die relative Dichte s der letzteren

$$s = \frac{100}{n}.$$

§ 32. Ausströmen einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwere.

In diesem Paragraphen soll die Geschwindigkeit ermittelt werden, mit der eine Flüssigkeit durch eine kleine Bodenöffnung AB (Fig. 34) eines Gefässes, die um $AC = h$ unter dem Spiegel liegt, ausfliesst. Die über der Öffnung AB liegende Schicht von der unbeschränkt kleinen Höhe δ und der Masse m unterliegt dem Druck der Flüssigkeitssäule ABDC. Die Arbeit, welche diese Druckkraft längs des kurzen Weges δ leistet (also bis die Masse m frei fallen kann), muss gleich der von der Schichte erlangten lebendigen Kraft sein. Nun ist die Masse der Säule $ABDC = \frac{m \cdot h}{\delta}$, der von ihr ausgeübte Druck $\frac{m \cdot h \cdot g}{\delta}$, wo g die Beschleunigung der Erdschwere bedeutet, und die auf dem Weg δ geleistete Arbeit beträgt $\frac{m \cdot h \cdot g}{\delta} \cdot \delta = mgh$.

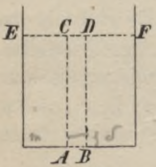

Fig. 34.

Andererseits ist die lebendige Kraft der Bodenschicht m, sofern diese mit der Geschwindigkeit v ausströmt, gleich $\frac{1}{2} mv^2$. Die Gleichsetzung beider Werte ergiebt

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2;$$

hieraus

$$v^2 = 2gh; \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Die Ausflussgeschwindigkeit ist unabhängig von der Natur der Flüssigkeit und ebensogross wie die beim freien Fall vom Spiegel bis zur Bodenöffnung erlangte Endgeschwindigkeit.

Wird die Druckhöhe konstant erhalten und beträgt der Querschnitt der Öffnung q, so strömt in der Zeiteinheit die Menge

$$qv = q \cdot \sqrt{2gh}$$

aus. Wegen der Kontraktion des Strahles ist die wirkliche Ausflussmenge geringer als die theoretisch abgeleitete. Der Erfahrungskoeffizient beträgt für Wasser etwa 0,6.

Strömt die Flüssigkeit unter der Einwirkung der Schwere durch eine seitliche Wandöffnung aus, so führt eine der obigen analoge Überlegung zu folgendem Satz:

Die Ausflussgeschwindigkeit ist unabhängig von der Natur der Flüssigkeit und ebensogross wie die beim freien Fall vom Spiegel bis zur Seitenöffnung erlangte Endgeschwindigkeit. Die ausströmende Flüssigkeit beschreibt eine Parabel.

3. Kapitel.

Mechanik der gasigen Körper.

§ 33. Einführung.

Alle Gase sind schwer; ihre Dichte ist jedoch bei gewöhnlichem Druck sehr gering. Mit den Flüssigkeiten haben sie die Volumenelastizität gemeinsam, doch innerhalb sehr weiter Grenzen; denn die Gase lassen sich im allgemeinen leicht zusammendrücken. Das Bestreben, sich auszudehnen, jeden ihnen dargebotenen Raum auszufüllen, unterscheidet sie jedoch wesentlich von den Flüssigkeiten: Die Gase haben kein bestimmtes Volumen und keine freie Oberfläche. Der Druck, den ein Gas infolge seines Ausdehnungsbestrebens nach aussen zu ausübt, heisst Spannkraft; diese ist von dem Volumen des Gases abhängig.

§ 34. Gesetz von Mariotte.

Das Volumen einer gegebenen Gasmenge verhält sich bei unveränderter Temperatur umgekehrt wie der Druck, der auf sie ausgeübt wird.

Bezeichnen wir mit v und v_1 die Volumina derselben Gasmenge unter den Drucken p und p_1, so gilt die Beziehung

$$v : v_1 = p_1 : p;$$

hieraus folgt

(1) $$pv = p_1 \cdot v_1,$$

d. h. das Produkt aus Druck und Volumen derselben Gasmenge ist konstant. Nach dem Gesetz von der

Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist die Spannkraft eines Gases gleich dem äusseren Druck; mithin kann der obige Satz auch so ausgesprochen werden:

Bei unveränderter Temperatur ist das Produkt aus dem Volumen und der Spannkraft derselben Gasmenge konstant.

Hat eine Gasmasse m beim Druck p das Volumen v, beim Druck p_1 das Volumen v_1, so sind die bezüglichen Dichten

$$d = \frac{m}{v} \quad \text{und} \quad d_1 = \frac{m}{v_1}.$$

Daraus folgt

$$v = \frac{m}{d}, \quad v_1 = \frac{m}{d_1}.$$

Setzt man beide Werte in die obige Proportion ein, so erhält man

$$\frac{m}{d} : \frac{m}{d_1} = p_1 : p,$$

folglich

$$d : d_1 = p : p_1,$$

d. h. die Dichte eines Gases ist dem darauf wirkenden äusseren Druck oder seiner Spannkraft direkt proportional.

Zusatz 1. Für ein und dieselbe Gasmasse nimmt der Wert des Produktes pv mit wachsender Temperatur zu. Ist nämlich $p_0 v_0$ der Wert dieses Produktes bei 0° C., pv der bei t° C. und $\alpha = \frac{1}{273}$ der Ausdehnungskoeffizient des Gases, so besteht, wie später nachgewiesen wird, die Gleichung

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t).$$

Zusatz 2. Die Gleichung $pv = \text{konst.}$ ist die einer gleichseitigen Hyperbel, welche man in der Zeichnung erhält, wenn man unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems das Volumen v als Abscisse und den Druck p als Ordinate aufträgt.

Zusatz 3. Mit Hilfe des Mariotteschen Gesetzes lässt sich bei unveränderter Temperatur das Volumen einer abgeschlossenen Gasmasse für jeden Druck berechnen.

§ 35. Relative Dichte.

Durch Versuche fand Regnault, dass 1 l Luft bei 0^0 C. und 760 mm Druck 1,293 g wiegt; die relative Dichte der Luft in bezug auf Wasser ist demnach

$$d = 0{,}001293.$$

Bei einer Temperatur von t^0 C. und einem Barometerstand von b mm wächst das Volumen auf das $\frac{760 \cdot (1 + \alpha t)}{b}$-fache an, wo der Ausdehnungskoeffizient der Gase für 1^0 C. mit $\alpha = \frac{1}{273}$ bezeichnet worden ist; folglich ist die Dichte d_1 der Luft unter den soeben genannten Bedingungen

$$d_1 = d \cdot \frac{b}{760\,(1 + \alpha t)}.$$

Weil die Gase dem Gesetz von Mariotte (mit ganz geringen Abweichungen) gehorchen und weil sie den gleichen Koeffizienten der Ausdehnung durch die Wärme besitzen, so ist das Verhältnis der Dichten zweier Gase, d. h. ihre relative Dichte bei gleicher Temperatur und bei gleichem Druck, immer dasselbe, welches auch Temperatur und Druck sein mögen. In der Regel bezieht man die relative Dichte eines Gases auf Luft oder

Wasserstoff. Die Dichte des Wasserstoffs bezogen auf Luft ist 0,069255, somit auf Wasser bezogen

$$0{,}069255 \cdot 0{,}001293 = 0{,}00008955.$$

Daraus ergiebt sich das Gewicht von 1 l Wasserstoff zu 0,08955 Gramm (1 Krith).

§ 36. Prinzip des Archimedes. Wägung.

Ein Körper verliert in der Luft, wenn sie ihn von allen Seiten umgiebt, von seinem Eigengewicht scheinbar so viel, als die von ihm verdrängte Luftmasse wiegt. Dieser Gewichtsverlust ist gleich dem Auftrieb, und er beträgt, wenn wir mit v das Volumen des Körpers in ccm, mit b den Barometerstand in mm, mit t die Temperatur in C.-Graden und mit α den Ausdehnungskoeffizienten $\frac{1}{273}$ für Gase bezeichnen

$$0{,}001293 \cdot \frac{v \cdot b}{760 \cdot (1 + \alpha t)} \text{ Gramm.}$$

Bei wissenschaftlichen Untersuchungen müssen die Wägungen auf den leeren Raum reduziert werden. Nennen wir bezüglich das Gewicht des Körpers und das der Gewichtsstücke im luftleeren Raum x bezw. p, die Volumina derselben v bezw. v_1 und die relative Dichte der Luft d, so ist das Gewicht des Körpers in der Luft $x - vd$, das der Gewichtsstücke in der Luft $p - v_1 \cdot d$, und weil hier Gleichgewicht besteht, so ergiebt sich

$$x - vd = p - v_1 d;$$

hieraus

$$x = p + d(v - v_1).$$

§ 37. Luftdruck.

Der *Luftdruck* ist an den verschiedenen Orten der Erde verschieden und unterliegt sowohl periodischen als auch unregelmässigen Schwankungen. Am Meeresspiegel in unseren Breiten hält der mittlere Luftdruck einer Quecksilbersäule von 760 mm das Gleichgewicht. Da nun 1 ccm Quecksilber bei 0° C. 13,598 g wiegt, so beträgt der Druck der Luft auf ein Quadratzentimeter 1,0334 kg, rund 1 kg.

Alle Barometerstände sind auf 0° C. zu reduzieren. Die den Luftdruck anzeigenden Barometerstände nehmen in geometrischer Reihe ab, während die Höhen in arithmetischer Reihe wachsen.

§ 38. Verdünnungs- und Verdichtungspumpen.

Grad der Verdünnung. Wir führen folgende Bezeichnung ein: v bedeute den Inhalt des Rezipienten, v_1 den Raum des Stiefels, der bei jedem Kolbenhub frei wird, d die Dichte und m die Masse der Luft vor Beginn des Versuches; d_1, m_1; d_2, m_2; d_3, m_3; ... d_n, m_n die Dichte und die Masse der verdünnten Luft im Rezipienten nach dem ersten, zweiten, dritten, ... n^{ten} Hub. Die ursprünglich im Rezipienten vorhandene Luftmasse $m = dv$ dehnt sich nach dem ersten Kolbenaufgang auf das Volumen $(v + v_1)$ aus, sie besitzt demnach in dem ganzen Raum eine Dichte

$$d_1 = \frac{dv}{v + v_1}.$$

Weil ferner der Rezipient den Inhalt v hat, so beträgt die Masse m_1 der Luft nach dem ersten Kolbenzug

$$m_1 = \frac{d \cdot v^2}{v + v_1}.$$

Sperrt man nun den Stiefel vom Rezipienten ab, führt den Kolben zurück, wodurch die Luft zum Entweichen gezwungen wird, stellt alsdann die Verbindung zwischen Stiefel und Rezipienten wieder her und hebt den Kolben zum zweitenmal, so kann sich die Luftmasse m_1 wieder auf den Raum $(v + v_1)$ ausdehnen; sie hat sonach eine Dichte

$$d_2 = \frac{d v^2}{(v + v_1)^2}$$

und die im Rezipienten übrige Masse macht aus

$$m_3 = \frac{d \cdot v^3}{(v + v_1)^2}.$$

Nach dem dritten Hub erfährt diese letztere Masse wiederholt eine Ausdehnung auf den Raum $(v + v_1)$, so dass jetzt die Dichte der Luftmenge im Rezipienten beträgt

$$d_3 = \frac{d \cdot v^3}{(v + v_1)^3}.$$

Diese Überlegungen leiten schliesslich auf das Ergebnis, dass die Dichte d_n in dem Rezipienten nach dem n^{ten} Kolbenzug durch den Quotienten angegeben wird:

$$d_n = \frac{d \cdot v^n}{(v + v_1)^n} = d \cdot \left(\frac{v}{v + v_1}\right)^n.$$

Grad der Verdichtung. Es sei v der Inhalt des Gefässes, in dem das Gas zusammengepresst werden soll und v_1 das Volumen des Stiefels. Mit jedem Kolbenstoss wird dem Rezipienten ein und dieselbe Menge Gas von konstanter Dichte zugeführt; mithin enthält er nach n Kolbenhüben eine Gasmenge, die vorher den Raum $(v + n \cdot v_1)$ einnahm; daher beträgt die Dichtigkeit des Gases nach Beendigung des Versuches

$$d_n = \frac{v + n \cdot v_1}{v}.$$

§ 39. Ausfluss.

1. Für die Geschwindigkeit des Ausflusses von Gasen gelten die gleichen Gesetze wie bei den Flüssigkeiten. Es ist demnach auch hier

$$v = \sqrt{2gH}, \tag{1}$$

wo H die Druckhöhe bezeichnet. Bei den Gasen ist diese Druckhöhe durch die Beobachtung nicht unmittelbar gegeben, denn der auf einer gewissen Gasschicht lastende Druck kann nur durch eine Wasser- oder Quecksilbersäule von der Höhe h gemessen werden. Ist nun d die relative Dichte des Gases bezogen auf Wasser, so ist die Höhe H jenes Gases, welche der Wassersäule h entspricht

$$H = \frac{h}{d}.$$

Sonach beträgt die Geschwindigkeit eines Gases, mit welchem es in den leeren Raum ausströmt

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{h}{d}}. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung gehen die beiden folgenden Sätze hervor:

Die Ausflussgeschwindigkeit eines und desselben Gases ist von seiner Dichte unabhängig, denn die Dichte ist dem Druck gerade proportional.

Für verschiedene Gase verhalten sich bei gleichem Druck die Ausflussgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten dieser Gase.

Zusatz. Die Ausflussgeschwindigkeit der Luft, deren Dichte bei 0,76 m Druck 0,001293 beträgt, in den leeren Raum ist

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}6}{0{,}001293}} = 396 \text{ m.}$$

Wird demnach ein Körper mit einer Geschwindigkeit geworfen, die grösser als 396 m in der Sekunde ist, so lässt er hinter sich einen leeren Raum zurück.

2. Wenn das in ein Gefäss eingeschlossene Gas bei einem Barometerstand von b cm ausser dem Druck der Atmosphäre auch noch einen Überdruck erleidet, welcher durch eine Quecksilbersäule von der Höhe h cm gemessen wird, so ergiebt sich für die Ausflussgeschwindigkeit desselben in die Luft ein Wert, den man durch folgende Rechnung findet. Wir bezeichnen die relative Dichte des Gases bei 0^0 und 76 cm Druck, bezogen auf Wasser mit d_0, bei einem Druck von $(b + h)$ cm mit d; nun ist

$$d = d_0 \cdot \frac{b + h}{76}. \tag{3}$$

Die Höhe H einer Gassäule von der Dichtigkeit d, die einer Quecksilbersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält, ist, sofern s die relative Dichte des Quecksilbers bezogen auf Wasser bedeutet,

$$\begin{aligned} H &= \frac{h \cdot s}{d} \\ &= \frac{h \cdot s \cdot 76}{d_0 (b + h)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Gleichung (1) liefert so für v den Wert

$$(5)\qquad v = \sqrt{\frac{2g \cdot h \cdot s \cdot 76}{d_0(b + h)}}\ \text{cm}; \quad (g = 981\ \text{cm}).$$

Wäre z. B. das ausströmende Gas die atmosphärische Luft, so ist $d_0 = 0{,}001293$, ausserdem $s = 13{,}6$; folglich ist

$$(6)\qquad \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2 \cdot 981 \cdot 13{,}6 \cdot 76}{0{,}001293} \cdot \frac{h}{b + h}}\ \text{cm} \\ &= 396 \cdot \sqrt{\frac{h}{b + h}}\ \text{m.} \end{aligned}$$

3. Die *Ausflussmenge* in der Sekunde wird erhalten, wenn man den Querschnitt a der Öffnung mit dem Wert von v multipliziert. In t Sekunden beträgt daher die Ausflussmenge

$$(7)\qquad M = a \cdot v \cdot t.$$

In Wirklichkeit ist, wie die Erfahrung lehrt, die Ausflussmenge geringer als die theoretisch berechnete, und um jene zu erhalten, hat man M mit einem Erfahrungskoeffizienten zu multiplizieren, der jedoch ziemlich veränderlich ist.

§ 40. Daltons Gesetz.

Befinden sich mehrere Gase oder Dämpfe in ein und demselben Raum und findet dabei keine chemische Wechselwirkung statt, so verhält sich jeder Gemengteil so, als ob der andere nicht vorhanden wäre; demnach ist der Gesamtdruck des Gemenges gleich der Summe der Einzeldrucke der Gemengteile.

II. Abschnitt.

Akustik.

§ 41. Schwingungszahl, Tonleiter, Stimmung.

Die stehenden Schwingungen eines elastischen Körpers erzeugen den Schall, durch fortschreitende Wellenbewegungen elastischer Mittel wird er fortgepflanzt. Der absolut leere Raum leitet den Schall nicht. Die verschiedenen Schalle, Töne, unterscheiden sich von einander durch ihre Höhe, Stärke und Klangfarbe. Die Höhe des Tones wächst mit der Zahl der Schwingungen. Zur Bestimmung der Schwingungszahl dient die Sirene von Cagniard de Latour, wie sie insbesondere von Helmholtz verbessert worden ist. Das Verhältnis der Schwingungszahlen zweier Töne heisst ihr Intervall. Bezeichnet man die Schwingungszahl des Grundtones mit n und ordnet man die Töne nach den Schwingungszahlen, so erhält man die diatonische Dur-Tonleiter:

Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Octave
c	d	e	f	g	a	h	$\bar{c}$
n	$\frac{9}{8}n$	$\frac{5}{4}n$	$\frac{4}{3}n$	$\frac{3}{2}n$	$\frac{5}{3}n$	$\frac{15}{8}n$	2n

Intervalle $\frac{9}{8}$ $\frac{10}{9}$ $\frac{16}{15}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{10}{9}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{16}{15}$.

24 27 30 32 36 40 45 48

Der aus Grundton, grosser Terz und Quinte zusammengesetzte Klang heisst Dreiklang (Durakkord). Aus den einfachen Schwingungszahlen der Oktav, der Terz, der Quarte und der Quinte lassen sich die der Sekunde, der Sexte und der Septime folgendermassen ermitteln. Sucht man z. B. die Quinte zu dem Grundton g, so erhält man einen Ton von der Schwingungszahl

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} n = \frac{9}{4} n;$$

die nächst niedere Oktave desselben wird die Sekunde von c genannt; sie hat die Schwingungszahl $\frac{9}{8}$ n. Ferner ist die grosse Terz von g ein Ton von der Schwingungszahl

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} n = \frac{15}{8} n;$$

er heisst h, die Septime von c. Bildet man weiter zu der Quarte als Grundton die grosse Terz, so ergiebt sich a, die Sexte von c, mit der Schwingungszahl

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} n = \frac{5}{3} n.$$

In allen Oktaven haben die Töne die gleichen Namen; zur Unterscheidung der Oktaven dienen Zusätze und Striche. Die mit c beginnende Oktave heisst die kleine (klein geschriebene) Oktave, die nächsthöheren Oktaven werden die eingestrichene, c′ oder $\bar{c}$, die zweigestrichene, c″ oder $\bar{\bar{c}}$, etc. genannt. Unter der kleinen Oktave folgen der Tiefe zu die grosse (gross geschriebene) Oktave C, die Kontra-Oktave $\underline{C}$, gross geschrieben und einmal unterstrichen, die Subkontra-Oktave $\underline{\underline{C}}$, gross geschrieben und zweimal unterstrichen etc.

In der diatonischen Dur-Tonleiter treten dreierlei Intervalle auf, die grösseren $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$, welche ganze Töne heissen, und das kleine $\frac{16}{15}$, halber Ton, genannt. Das grosse Intervall von c bis e, die grosse Terz, umfasst zwei ganze Töne; das Intervall von e bis g,

$$\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{6}{5},$$

die kleine Terz, besteht aus einem ganzen und halben Ton. Die kleine Terz von c liegt nahe bei e, denn das Intervall zwischen ihr und e ist

$$\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$$

und heisst kleiner halber Ton. Töne, welche um einen kleinen halben Ton höher bezw. tiefer als ein bestimmter Ton liegen, werden mit Worten benannt, welche man durch Anhängen der Silbe is bezw. es an den Buchstaben des Httones bildet (es = ees, as = aes, b = hes). Die Quarte von es besitzt die Schwingungszahl

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} n = \frac{8}{5} n,$$

und sie bildet mit a das Intervall

$$\frac{5}{3} : \frac{8}{5} = \frac{25}{24},$$

also einen kleinen Ton und ist deswegen as. Ersetzt man in der Dur-Tonleiter die Töne e und a durch es und as, so erhält man die Moll-Tonleiter. Die Schwingungszahlen der Zwischentöne sind nun

$$\text{cis} = 1 \cdot \frac{25}{24} n = \frac{25}{24} n;$$

$$\text{dis} = \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} n = \frac{75}{64} n;$$

$$\text{fis} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} n = \frac{25}{18} n;$$

$$\text{gis} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} n = \frac{25}{16} n;$$

$$\text{ais} = \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} n = \frac{125}{72} n;$$

$$\text{des} = \frac{9}{8} n : \frac{25}{24} = \frac{27}{25} n;$$

$$\text{es} = \frac{6}{5} n;$$

$$\text{ges} = \frac{3}{2} n : \frac{25}{24} = \frac{36}{25} n;$$

$$\text{as} = \frac{8}{5} n;$$

$$\text{b} = \frac{18}{8} n : \frac{25}{24} = \frac{9}{5} n.$$

Chromatische Tonleiter:

1)

c	cis	d	dis	e	f	fis
$n,$	$\frac{25}{24}n,$	$\frac{9}{8}n,$	$\frac{75}{64}n,$	$\frac{5}{4}n,$	$\frac{4}{3}n,$	$\frac{25}{18}n,$

g	gis	a	ais	h	$\bar{c}$.
$\frac{3}{2}n,$	$\frac{25}{16}n,$	$\frac{5}{3}n,$	$\frac{125}{72}n,$	$\frac{15}{8}n,$	$2n.$

2)

c	des	d	es	e	f	ges
$n,$	$\frac{27}{25}n,$	$\frac{9}{8}n,$	$\frac{6}{5}n,$	$\frac{5}{4}n,$	$\frac{4}{3}n,$	$\frac{36}{25}n,$

g	as	a	b	h	c
$\frac{3}{2}n,$	$\frac{8}{5}n,$	$\frac{5}{3}n,$	$\frac{9}{5}n,$	$\frac{15}{8}n,$	$2n.$

Aber auch nach Einführung der Halbtöne sind die Intervalle je zweier aufeinander folgender Töne ungleich, und es ist daher nicht möglich, von einem beliebigen Ton der obigen Reihe als Grundton in den angegebenen Intervallen fortzuschreiten oder ein Intervall beliebig oft nacheinander zu nehmen. Um diesem Übelstand abzuhelfen, hat man die reine Stimmung durch die gleichmässig temperierte Stimmung ersetzt, bei welcher die Oktaven rein und alle Intervalle gleich sind. Nennen wir eines der Intervalle x, so ist

$$x^{12} = 2; \quad x = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946.$$

Schwingungszahlen der gleichschwebenden Temperatur:

c = n	g = 1,498 n
cis = 1,059 n	gis = 1,587 n
d = 1,122 n	a = 1,682 n
dis = 1,189 n	ais = b = 1,782 n
e = 1,260 n	h = 1,888 n
f = 1,335 n	$\bar{c}$ = 2 n.
fis = 1,414 n	

Für das eingestrichene a, den Kammerton, den Stimmgabelton, beträgt die Schwingungszahl nach der Pariser Stimmung, welche seit 1886 international ist, 435. Es ist somit bei reiner Stimmung

$$\frac{5}{3} n = 435,$$

somit

$$n = 261.$$

Bei gleichmässig temperierter Stimmung ist

$$1,682\, n = 435, \quad \text{also} \quad n = 258,65.$$

Zusatz. **Aus der Schwingungszahl eines Tones und der Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles, $c = 340$ m, lässt sich mit Hilfe der Gleichung $c = n \cdot \lambda$ die Wellenlänge des Tones bestimmen; z. B. ist die Wellenlänge für den Kammerton**

$$\lambda = \frac{340}{435} = 0,7816 \text{ m.}$$ 0,8 m

§ 42. Tonquellen.

1. *Transversalschwingungen von Saiten.* Wenn eine Saite als Ganzes schwingt, so erscheint ihr tiefster Ton, der Grundton. Sie kann aber auch so schwingen, dass sie sich in 2, 3, 4, ... n gleiche Teile zerlegt;

alsdann giebt sie ihre harmonischen Obertöne an. Dabei geht die Wellenlänge des Tones und mit ihr die Schwingungsdauer auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}$ des anfänglichen Betrages zurück; hingegen steigt die Schwingungszahl auf das 2, 3, 4, ... n fache. Die Punkte einer Saite, welche während der schwingenden Bewegung in Ruhe bleiben, heissen Knotenpunkte, und die Punkte der grössten Amplitude Schwingungsbäuche. Bezeichnen wir mit h die Länge einer Saite, mit q ihren Querschnitt, mit s das spezifische Gewicht des Stoffes bezogen auf Wasser, mit p die sie spannende Kraft, mit g die Beschleunigung der Erdschwere und mit n die Schwingungszahl des erzeugten Tones, so lässt sich folgende Beziehung ableiten

$$n = \frac{1}{2\,h} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}},$$

worin die Längen in Zentimetern und die Gewichte in Grammen auszudrücken sind. Das in der soeben angegebenen Formel niedergelegte Gesetz lässt sich in Worten wie folgt fassen:

Die Schwingungszahl einer Saite ist der Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte direkt proportional, hingegen steht sie im umgekehrten Verhältnis zur Länge, zur Quadratwurzel aus dem Querschnitt und zur Quadratwurzel aus der relativen Dichte des Materials.

Dieses Gesetz gilt nur für durchaus homogene Saiten, nicht aber für Darmsaiten, die mit Metalldrähten übersponnen sind. Eine solche Behandlungsweise vermindert die Zahl der Schwingungen wesentlich.

2. Längsschwingungen von Luftsäulen. (Pfeifen.) Die Lippenpfeifen sind zum Anblasen mit einem Fuss versehen, über dem sich eine Querspalte, der Mund, befindet. Die den Mund begrenzenden Platten heissen Lippen. Die Pfeife kann am oberen Ende offen oder geschlossen (gedeckt) sein. Der tiefste Ton, den eine Pfeife giebt, ist ihr Grundton. Bei der offenen Pfeife findet an beiden Enden die grösste Hin- und Herbewegung der Luft statt, hier sind Schwingungsbäuche. In der Mitte liegt der Schwingungsknoten, wo die stärkste Verdünnung und Verdichtung auftritt. Am geschlossenen Ende der gedeckten Pfeife liegt ein Schwingungsknoten. Bei Angabe des Grundtones schwingt somit die Luftsäule in der offenen Pfeife in zwei gleichen Teilen, in der gedeckten als Ganzes (Fig. 35). Bedeutet nun l die Länge der Pfeife und λ die Wellenlänge des Grundtones, so ist für die

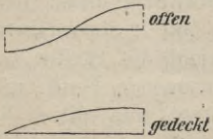

Fig. 35.

$$\text{offene} \quad l = \frac{1}{2}\lambda, \qquad \text{gedeckte} \quad l = \frac{1}{4}\lambda.$$

$\lambda = 2l$ $\lambda = 4l$

Hieraus ergiebt sich, dass die offene Pfeife die Oktave der gleichlangen gedeckten giebt. — Durch stärkeres Anblasen erhält man die Obertöne. Die offene Pfeife kann 1, 2, 3, ... n halbe Wellenlängen enthalten, die gedeckte hingegen 1, 3, 5, ... (2 n — 1) viertel Wellenlängen; also ist die Wellenlänge λ des Tones einer Pfeife von der Länge l, wenn sie

$$\text{offen ist} \quad \lambda = \frac{2}{1}l, \ \frac{2}{2}l, \ \frac{2}{3}l, \ \ldots \frac{2}{n}l,$$

$$\text{gedeckt ist} \quad \lambda = \frac{4}{1}l, \ \frac{4}{3}l, \ \frac{4}{5}l, \ \ldots \frac{4}{2n-1}l.$$

$c = n\lambda$ $n = \frac{c}{\lambda}$

Bezeichnen wir ferner wie früher mit c die Geschwindigkeit des Schalles, mit n die Schwingungszahl eines Tones, so kann n folgende Werte haben bei der

$n = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}$ offenen Pfeife $n = \frac{c}{2\,l}, \frac{2\,c}{2\,l}, \frac{3\,c}{2\,l}, \dots \frac{n\,c}{2\,l},$

$n = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l}$ gedeckten Pfeife $n = \frac{c}{4\,l}, \frac{3\,c}{4\,l}, \frac{5\,c}{4\,l}, \dots \frac{(2\,n-1)\,c}{4\,l};$

es giebt sonach die offene Pfeife die ganze harmonische Tonreihe, die gedeckte nur die ungeraden Obertöne.

§ 43. Ausbreitung und Stärke des Schalles; Zurückwerfung.

In einem homogenen Medium pflanzt sich der Schall nach allen Seiten hin gleichmässig fort; dabei liegen die Teilchen, welche gleichzeitig in die Bewegung eintreten, auf einer Kugelfläche. Die Radien derselben nennt man Schallstrahlen. Die Stärke des Schalles in einem gewissen Punkt des Raumes ist der Schwingungsweite direkt und dem Quadrat der Entfernung vom Erregungsmittelpunkt umgekehrt proportional. Gehen die Schallwellen von einem Mittel in ein anderes über, so erfahren sie eine teilweise Reflexion; treffen sie aber auf ein starres Hindernis, so werden sie fast vollständig zurückgeworfen. Die Senkrechte im Treffpunkt auf der Grenzfläche der beiden Medien heisst Einfallslot, der Winkel des einfallenden Schallstrahles mit dem Einfallslot Einfallswinkel und der Winkel zwischen Einfallslot und dem zurückgeworfenen Strahl Reflexionswinkel.

Reflexionsgesetz: Das Einfallslot, der einfallende und der ausfallende Strahl liegen in einer Ebene; der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel.

§ 44. Geschwindigkeit des Schalles.

1. Nach La Place lässt sich die Geschwindigkeit des Schalles in *Gasen* durch folgende Gleichung ermitteln:

$$c = \sqrt{k \cdot \frac{b \cdot g}{d}},$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Metern, g die Beschleunigung der Erdschwere, b die auf 0^0 reduzierte Höhe derjenigen Quecksilbersäule, welche die Spannung des Gases misst, d die relative Dichte des Gases bezogen auf Quecksilber bei 0^0 und k den Quotienten der beiden spezifischen Wärmen des Gases bezeichnet. Will man diese Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit des Schalles in der Luft benutzen, so beobachte man, dass bei 0^0 C unter einem Druck von 0,76 m die Luft etwa 10470 mal so leicht als Quecksilber ist, und dass demnach ihre relative Dichte d bei dem Druck b und der Temperatur t beträgt

$$d = \frac{b}{0{,}76 \cdot 10470 \cdot (1 + \alpha t)}; \quad \left(\alpha = \frac{1}{273}\right).$$

Da nun k für Luft den Wert 1,41 hat, so ist

$$c = \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}76 \cdot 10470\,(1 + \alpha t) \cdot 1{,}41}$$
$$= 331{,}7\,\sqrt{(1 + \alpha t)}.$$

Genaue Versuche haben als Mittelwert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in trockener Luft bei 0^0 die Zahl 332,3 m ergeben.

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in *flüssigen Körpern* lässt sich nach La Place durch die Formel bestimmen

$$c = \sqrt{\frac{g}{e}},$$

worin e die Verkürzung bezeichnet, welche eine Flüssigkeitssäule von derjenigen Längeneinheit, in der g angegeben ist, durch einen dem Gewicht dieser Säule gleichen Druck erleidet. — Wasser wird durch den Druck von einer Atmosphäre um das 0,000 047 85 fache seines Volumens zusammengedrückt; der Druck einer Atmosphäre ist gleich dem Druck einer Wassersäule von $0{,}76 \cdot 13{,}6\,\text{m} = 10{,}336\,\text{m}$, folglich wird eine Wassersäule von 1 m Länge durch das Gewicht einer ihr gleichen Wassersäule um

$$\frac{0{,}000\,047\,85}{10{,}336}\,\text{m}$$

verkürzt. Die Geschwindigkeit c des Schalles im Wasser ist daher

$$c = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 10{,}336}{0{,}000\,047\,85}}\,\text{m} = 1456\,\text{m}.$$

Die Versuche, die Colladon und Sturm 1827 im Genfer See anstellten, haben für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles im Wasser von 8^0 den Wert 1435 m ergeben.

3. Die von La Place aufgestellte Formel

$$c = \sqrt{\frac{g}{e}}$$

lässt sich auch zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Stäben aus *starren Körpern* verwenden, wenn man unter e die Verlängerung versteht, welche die Längeneinheit eines Stabes durch einen ihr gleichen Druck oder Zug erfährt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Zahl e veränderlich ist, je nachdem man den Druck auf die ganze Oberfläche des Stabes verteilt oder den Zug nur an dem einen Ende wirken lässt.

Versetzt man den Stab in Längsschwingungen derart, dass sich in seiner Mitte ein Knoten bildet, so kann man experimentell und mit Hilfe der Gesetze über offene Pfeifen die Geschwindigkeit des Schalles ausfindig machen. Nach jenen ist nämlich, sofern l die Länge des Stabes, n die Schwingungszahl seines Grundtones bezeichnet

$$c = 2nl.$$

In festen Körpern ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei weitem grösser als in der Luft. In Eisen ist sie etwa 15 mal, in Silber 8 mal, in Gläsern 17 mal so gross, als in der Luft.

§ 45. Das Prinzip von Doppler.

Doppler hat zuerst (1842) darauf hingewiesen, dass sich bei der Annäherung einer Schallquelle ihr Ton erhöht, bei der Entfernung erniedrigt. In der Fig. 36 stelle A den Ort des Beobachters, S den der Schallquelle vor, und in dem Augenblick, wo sich der Hörer in A befindet, treffe eine Verdichtung sein Ohr. Die Zeit t_1, welche bis zur Wahrnehmung der nächsten Verdichtung verfliesst, ist nun abhängig von der Bewegung der

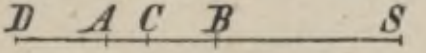

Fig. 36.

Tonquelle sowohl als auch von der des Beobachters. Nehmen wir zunächst an, der Beobachter bewege sich gegen die Richtung des Schalles mit der Geschwindigkeit c_1, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles c und die Entfernung zweier auf einander folgender Verdichtungen AB sein soll. Nach der Zeit t_1 trifft der Hörer mit der zweiten Verdichtung in C zusammen, und es ist

$$AC = c_1 t_1, \quad BC = c t_1,$$

mithin

(1) $$AB = (c + c_1) t_1.$$

Bewegt sich der Beobachter mit dem Schalle, so ist entsprechend

(2) $$AB = (c - c_1) t_1.$$

Für den Fall, dass sich die Tonquelle bewegt, führt folgende Schlussreihe zur Gleichung. Es sei t die Schwingungszeit des Tones und AB wie vorhin der Abstand der einen Verdichtung von der nächsten. Entfernt sich die Quelle von dem Beobachter mit der Geschwindigkeit c_2, so legt sie in der Zeit t den Weg $c_2 t$ zurück; um diese Strecke wächst die Wellenlänge, es ist daher

(3) $$AB = ct + c_2 t = (c + c_2) t.$$

Bewegt sich die Schallquelle in der Richtung des Schalles auf den Beobachter zu, so findet man

(4) $$AB = ct - c_2 t = (c - c_2) t.$$

Durch Vergleichung lassen sich aus den Gleichungen (1) bis (4) vier Beziehungen ableiten, aus denen sich die Änderung in der Tonhöhe bestimmt.

Nehmen wir z. B. an, Beobachter und Tonquelle bewegen sich gegen die Schallrichtung, so folgt aus (1) und (3) die Beziehung

$$(c + c_1)\, t_1 = (c + c_2)\, t,$$

daher

$$t_1 = \frac{c + c_2}{c + c_1} \cdot t.$$

III. Abschnitt.

Optik.

§ 46. Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes.

Die scheinbare Grösse einer Strecke hängt von der Grösse ihres Bildes auf unserer Netzhaut ab. Verbinden wir in unserer Vorstellung die Endpunkte des Bildes mit den zugehörigen Punkten der Strecke durch Geraden, so bilden diese Linien im Schnittpunkt den sogenannten Sehwinkel und der Betrag dieses Winkels ist bestimmend für die scheinbare Grösse des Objektes. Für ein normales Auge ist ein Gegenstand bei mässiger Beleuchtung und reiner Luft unter einem Sehwinkel von 40 Sekunden noch sichtbar.

§ 47. Stärke der Beleuchtung.

Die Intensität der Beleuchtung ist von der Lichtmenge abhängig, welche in der Zeiteinheit auf die Einheit der Fläche fällt. Sieht man von der Absorption des Lichtes in dem durchstrahlten Mittel ab, so lassen sich folgende Sätze aufstellen:

1. Unter sonst gleichen Umständen ist die Stärke der Beleuchtung der Intensität der Lichtquelle direkt proportional.

2. Unter sonst gleichen Umständen ist die Stärke der Beleuchtung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

Beweis. Da die von der Lichtquelle gleichmässig nach allen Seiten sich verbreitenden Strahlen zu einer bestimmten Zeit die Oberfläche einer Kugel erreichen, so beschreiben wir um die punktförmig angenommene Lichtquelle zwei Kugeln mit den Radien 1 und r. Ferner bezeichnen wir mit i die Lichtmenge, welche auf die Flächeneinheit der Kugel von Radius 1 fällt. Alsdann trifft auf die ganze Oberfläche der Kugel die Lichtmenge $4\pi i$. Diese Menge erhält auch die andere Kugel, deren Oberfläche jedoch $4\pi r^2$ ist; daher fällt auf die Einheit ihrer Fläche die Lichtmenge

$$4\pi i : 4\pi r^2 = \frac{i}{r^2}.$$

3. Unter sonst gleichen Umständen steht die Stärke der Beleuchtung zu dem Cosinus des Einfallswinkels in geradem Verhältnis.

Um diese Abhängigkeit als richtig darzuthun, müssen wir die Annahme machen, dass die auf die Fläche fallenden Lichtstrahlen unter sich parallel verlaufen. Ausserdem sei aus Gründen der Einfachheit als die von den Lichtstrahlen unter einem rechten Winkel getroffene Fläche ein Rechteck gewählt, dessen Höhenseite senkrecht zur Zeichnungsebene stehe. In dieser Lage soll AB die orthogonale Projektion des Rechtecks bedeuten (Fig. 37). Dreht man nun dieses um die Höhenseite um den $\sphericalangle \alpha$, so ist AC das Bild des Rechtecks in der

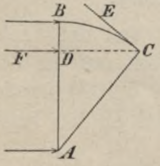

Fig. 37.

neuen Stellung, wenn $AC = AB$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ gemacht wird.

Errichtet man ferner auf der Ebene des Rechtecks AC in C das Lot EC, so ist $\sphericalangle FCE = \alpha$ und zugleich der Einfallswinkel der Lichtstrahlen. Offenbar verhalten sich nun die Beleuchtungsstärken i und i_1 der beiden Rechtecke AB und AC wie die Strecken AB und AD; also gilt die Beziehung

$$i : i_1 = AB : AD,$$

hieraus

$$i_1 = i \cdot \frac{AD}{AB} = i \cdot \cos\alpha.$$

Lichtstärke. Werden zwei Lichtquellen, die bei senkrecht auffallendem Lichte in der Einheit der Entfernung die Beleuchtungsstärke i_1 bezw. i_2 hervorrufen, in solche Entfernungen r_1 und r_2 von der beleuchteten Fläche gebracht, dass sie die gleiche Stärke i der Beleuchtung bewirken, so ist nach obigem

$$i = \frac{i_1}{r_1^2} = \frac{i_2}{r_2^2};$$

daher auch

$$i_1 : i_2 = r_1^2 : r_2^2,$$

d. h. die Stärken zweier Lichtquellen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen, in denen sie dieselbe Fläche gleich stark beleuchten (Versuche mit dem Photometer von Bunsen). In Deutschland dient als Einheit der Lichtstärke die Normalkerze aus Paraffin, welche bei 20 mm Durchmesser eine Flammenhöhe von 50 mm hat.

§ 48. Geschwindigkeit des Lichtes.

Die Geschwindigkeit des Lichtes wurde durch astronomische und terrestrische Beobachtungen zu etwa 300 000 km in der Sekunde bestimmt.

1. *Methode des Olaf Römer 1675/76.* Sie beruht auf der Beobachtung der Verfinsterungen des dem Planeten Jupiter zunächst liegenden Mondes, der bei jedem Umlauf in den Kernschatten des Jupiters tritt. Die Fig. 38 giebt ein ungefähres Bild von der Konstellation der betreffenden Gestirne. Es bedeute S den Ort der Sonne, A, B, C, D vier Stellungen der Erde auf ihrer Bahn, J den Ort des Jupiter und M denjenigen seines innersten Mondes. Solange sich die Erde in der Nähe von A bewegt, ändert sich ihr Abstand vom Jupitermond nur sehr wenig und es vergehen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eintritten des Mondes in den Schattenkegel des Jupiters nahezu $42\frac{1}{2}$ Stunden. Wenn sich aber die Erde auf ihrer Bahn von A über B nach C immer weiter von M entfernt, so verlängert sich scheinbar die Umlaufszeit des Mondes immer mehr, und in C beträgt von A aus gerechnet der Unterschied 986 Sekunden. Bei der Annäherung der Erde von C über D nach A wird diese Verspätung wieder ausgeglichen. Zur Erklärung dieser auffälligen Erscheinung machte Römer die Annahme, dass das Licht 986 Sekunden brauche, um den Durchmesser der Erdbahn, das sind 299 Millionen

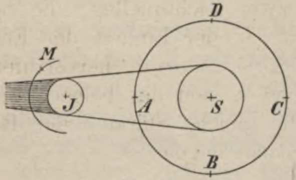

Fig. 38.

Kilometer, zu durcheilen, woraus sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zu 303 000 km berechnet.

2. Aus der *Aberration der Fixsterne* hat Bradley 1727 für die Geschwindigkeit des Lichtes nahezu den gleichen Wert gefunden.

3. Das von *Fizeau 1849 angegebene Verfahren* gestattet die Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Quellen zu messen. Seine Versuchsanordnung war folgende. Die von L (Fig. 39) ausgehenden Strahlen wurden von der nur unten belegten Glasplatte B zurückgeworfen, gingen durch die Zahnlücken eines Rades R mit 720 Zähnen, legten dann den 8633 m langen Weg RC zurück, erfuhren an dem Spiegel C eine totale Reflexion

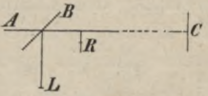

Fig. 39.

und gelangten, sofern sich das Rad nicht drehte, durch die gleiche Lücke und durch die oben unbelegte Hälfte der Glasplatte B hindurch zu dem bei A befindlichen Auge. Wird aber das Rad R rasch umgedreht, so konnte der von C zurückkehrende Strahl je nach der Rotationsgeschwindigkeit des Rades entweder auf eine Lücke oder einen Zahn treffen und das Gesichtsfeld bei A blieb hell oder dunkel. Zum erstenmal trat eine Verdunkelung des Gesichtsfeldes auf, wenn das Rad in der Sekunde 12,6 Umläufe machte. Nun betrug die Breite eines Zahnes oder einer Lücke $\frac{1}{1440}$ vom Umfang des Rades; bei 12,6 Umdrehungen dauerte es demnach $\frac{1}{1440 \cdot 12{,}6}$ Sekunden bis an Stelle der Lücke der nächstfolgende Zahn trat. In der nämlichen Zeit legte aber das Licht den Weg $2 \cdot 8{,}633$ km zurück; mithin ist seine Geschwindigkeit

$$1440 \cdot 12{,}6 \cdot 2 \cdot 8{,}633 \text{ km} = 313\,000 \text{ km}.$$

§ 49. Reflexion des Lichtes an ebenen Flächen.

Treffen Lichtstrahlen auf die glatte Grenzfläche zweier Medien, so findet in der Regel eine Teilung des Lichtes statt, indem ein Teil zurückgeworfen, ein anderer gebrochen oder auch absorbiert wird. Eine Fläche, welche das Licht regelmässig reflektiert, heisst Spiegel. Um den Gesetzen der regulären Zurückwerfung des Lichtes einen kurzen Ausdruck verleihen zu können, erklären wir: Unter dem Einfallslot versteht man die im Treffpunkt des Lichtstrahles mit der Grenzfläche auf dieser errichtete Senkrechte, unter Einfallswinkel bezw. Ausfallswinkel den vom Einfallslot einerseits und dem einfallenden bezw. ausfallenden Strahle andererseits gebildeten Winkel. Die Richtung des reflektierten Strahles wird alsdann durch folgende zwei Beziehungen festgelegt:

a) der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel;

b) das Einfallslot, der einfallende und der ausfallende Strahl liegen in einer Ebene.

Hieraus folgt noch: Wird bei unveränderlicher Richtung des einfallenden Strahles die Spiegelfläche um den $\sphericalangle\, \alpha$ gedreht, so erfährt der reflektierte Strahl in demselben Sinn eine Drehung um den $\sphericalangle\, 2\alpha$.

Bilder ebener Spiegel. Es sei in der Figur 40 SS_1 ein ebener Spiegel, A ein leuchtender Punkt vor demselben, der den Strahl AB auf letzteren sendet. Nach dem oben angeführten Gesetzen liegt nun der reflektierte Strahl BC symmetrisch zu dem einfallenden hinsichtlich des Einfallslotes und der Spiegelebene; mithin schneidet seine planimetrische Verlängerung die von A auf den Spiegel SS_1 gefällte Senkrechte in einem Punkt A_1, der zu A in bezug auf den Spiegel symmetrisch liegt. (Es ist $AA_1 \perp SS_1$, $AF = FA_1$.) Das Gleiche gilt von allen Strahlen, die von A herkommen und den Spiegel treffen. Die zurückgeworfenen Strahlen verhalten sich demnach so, als ob sie von A_1 herkämen. Ihre Wirkung auf ein in O befindliches Auge wird jedoch nur durch die Strahlenstücke bedingt, welche in das Auge gelangen, nicht aber durch ihren früheren Verlauf, deshalb ist die Gesichtsempfindung in O so, als ob A_1 ein leuchtender Punkt wäre. Aus diesem Grund heisst A_1 das Bild von A.

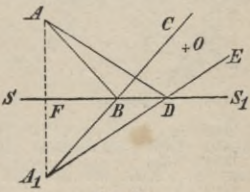

Fig. 40.

Nach diesen Erörterungen lässt sich in einfacher Weise das Bild eines Körpers konstruieren, der sich vor einem Planspiegel befindet und auf diesen Licht ausstrahlt. Man bestimmt nämlich zu jedem Punkt desselben das Bild und verbindet die Bildpunkte durch Linien gerade so miteinander, wie sie am Objekte unter sich vereinigt sind. Gegenstand und Bild sind demnach in bezug auf die Spiegelebene symmetrisch, und die von einem Planspiegel erzeugten Bilder sind ausserhalb des Auges nicht vorhanden, sie sind scheinbar, subjektiv.

Winkelspiegel. Stellt man zwei Planspiegel unter einem Winkel zusammen, so entstehen von einem zwischen ihnen liegenden Lichtpunkte mehrere Bilder, die im Kreise um die gemeinsame Kante der Spiegel angeordnet sind und deren Zahl von der Grösse des Neigungswinkels abhängt. Ist nämlich dieser Winkel in 360^0 n mal enthalten, so beträgt die Zahl der Bilder $(n - 1)$.

Der Spiegelsextant. In der Fig. 41 bedeuten S_1 den festen, S den beweglichen Spiegel und $BEA = \varphi$ den zu messenden Winkel, wenn das Bild des Gegenstandes B nach zweimaliger Reflexion auf das des direkt beobachteten Gegenstandes A in dem bei O angebrachten Fernrohr fällt. Ferner bezeichnen wir den Winkel zwischen den Spiegeln, also auch den zwischen ihren Einfallsloten CF und DF mit ε. Nun ist in den beiden Dreiecken DGE und CGF

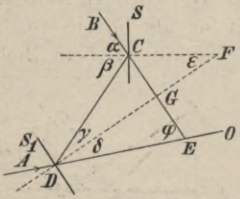

Fig. 41.

$$\sphericalangle\, \delta + \varphi = \alpha + \varepsilon,$$

somit

$$\sphericalangle\, \varphi = \alpha + \varepsilon - \delta$$

$$= \alpha + \varepsilon - \gamma,$$

weil $\gamma = \delta$ ist

$$= \beta + \varepsilon - \gamma,$$

weil $\alpha = \beta$ ist

$$= \gamma + \varepsilon + \varepsilon - \gamma,$$

weil β Aussenwinkel ist

$$= 2\varepsilon;$$

d. h. der scheinbare Abstand der Objekte A und B ist gleich dem doppelten Winkel, welchen die beiden Spiegel miteinander bilden.

§ 50. Kugel- oder sphärische Spiegel.

Hohlspiegel. Alle von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Zentralstrahlen werden so reflektiert, dass sie entweder durch einen Punkt gehen oder von einem Punkt herzukommen scheinen. Die Bilder der Hohlspiegel sind daher sowohl wirkliche als auch scheinbare. Der Vereinigungspunkt der parallel mit der Hauptachse auffallenden Zentralstrahlen wird Brennpunkt oder Focus genannt und dessen Entfernung vom Spiegel heisst Brennweite. Der Abstand eines Gegenstandes und seines Bildes von dem Spiegel bezeichnet man als Gegenstands- bezw. Bildweite. — Bei der Ableitung der Relationen zwischen Brenn-, Bild- und Gegenstandsweite setzen wir parallele oder auch divergente Lichtstrahlen voraus. Es sei in der Fig. 42 M der optische Mittelpunkt des Spiegels CD, A ein leuchtender Punkt auf der Hauptachse AC, AD irgend ein von ihm ausgehender Strahl, der längs DB reflektiert wird,

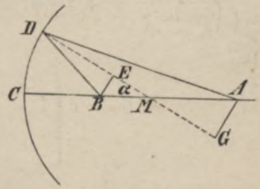

Fig. 42.

$$AC = a, \quad BC = b, \quad MC = r \quad \text{und} \quad \sphericalangle DMC = \alpha.$$

Zieht man von B und A die Lote BE und AG zu der Geraden DM, so ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DBE und DAG die Proportion

$$BE : DE = AG : DG;$$

in kleinen Zeichen

$$(r - b) \sin \alpha : [r - (r - b) \cos \alpha]$$
$$= (a - r) \sin \alpha : [r + (a - r) \cos \alpha];$$

hieraus folgt

$$\frac{r - b}{r - (r - b)\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{r}{a - r} + \cos\alpha},$$

oder

$$r\left(\frac{r}{a - r} + \cos\alpha\right) - b\left(\frac{r}{a - r} + \cos\alpha\right)$$
$$= r(1 - \cos\alpha) + b \cdot \cos\alpha,$$

oder

$$r\left(\frac{r}{a - r} + 2\cos\alpha - 1\right) = b\left(\frac{r}{a - r} + 2\cos\alpha\right);$$

also

$$\text{(1)} \qquad b = r\left[1 - \frac{1}{\frac{r}{a - r} + 2\cos\alpha}\right].$$

Ist demnach bei konstantem a auch α konstant, so ändert sich b ebenfalls nicht; wird jedoch α grösser, so nimmt b ab; woraus folgt, dass Randstrahlen die Achse näher am Spiegel treffen als Zentralstrahlen. Sind ferner die auf den Spiegel fallenden Strahlen parallel, so hat man in der Beziehung (1) für a den Wert ∞ zu setzen und dieselbe geht über in

$$\text{(2)} \qquad b = r\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right).$$

Wählt man nun aus diesen Strahlen nur die Zentralstrahlen aus, so vereinfacht sich die Gleichung (2) noch weiter, weil wir $\alpha = 0$ und damit auch $\cos\alpha = 1$ setzen dürfen. Das Ergebnis ist

$$b = \frac{r}{2},$$

d. h. der Brennpunkt halbiert den auf der Hauptachse liegenden zum Spiegel führenden Radius, oder auch die Brennweite ist gleich dem halben Krümmungsradius des Spiegels.

Die Gleichung (1) lässt sich auch dadurch spezialisieren, dass man von den aus A kommenden Strahlen nur die Zentralstrahlen auf den Spiegel gelangen lässt. In diesem Fall haben wir $\alpha = 0$ zu setzen und erhalten

$$b = r\left(1 - \frac{1}{\frac{r}{a-r} + 2}\right) = r\left(1 - \frac{a-r}{2a-r}\right) = \frac{ar}{2a-r}.$$

Hieraus folgt sofort

$$2ab = ar + br,$$

oder

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

oder

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \tag{3}$$

weil $r = 2f$ ist.

Diese besondere und sehr wichtige Beziehung für Zentralstrahlen lässt sich direkt wie folgt ableiten (Fig. 43). Weil in dem $\triangle ADB$ die Linie DM den Winkel BDA halbiert, so verhält sich nach einem planimetrischen Satz

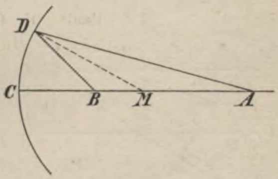

Fig. 43.

$$BM : MA = BD : AD.$$

Nun ist

$$CM = r, \quad CB = b, \quad AC = a, \quad BM = r - b,$$
$$AM = a - r;$$

daher geht obige Proportion in folgende über

$$(r - b) : (a - r) = b : a,$$

oder

$$2ab = ar + br,$$

und damit wie oben

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{3}$$

Setzt man die Entfernung des Gegenstandes von dem Brennpunkt gleich x, seines Bildes Entfernung von dem gleichen Punkt gleich y, so ist zunächst

$$x = a - f, \quad y = b - f;$$

die Gleichung (3) geht in folgende über

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x+f} + \frac{1}{y+f},$$

daraus folgt

$$xy = f^2. \tag{4}$$

Konstruktion der Bilder. (Fig. 44.) Unter den vielen Strahlen, die von dem Endpunkte A des Gegenstandes AB ausgehen, giebt es zwei, AD und AM, deren Richtungen nach der Reflexion am Spiegel S bekannt sind. Der eine zur Hauptachse parallele Zentralstrahl AD geht nach der Zurückwerfung durch den Brennpunkt F; der andere Strahl AM ist ein Hauptstrahl, er trifft die Spiegelfläche rechtwinklig und wird in sich selbst reflektiert. In dem Schnittpunkt A_1 der beiden zurückgeworfenen

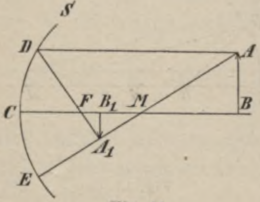

Fig. 44.

Strahlen treffen sich alle übrigen von A ausgehenden und vom Spiegel reflektierten Strahlen; es ist also A_1 das Bild von A. Hat der Spiegel eine kleine Öffnung, so ist das Bild einer zur Achse senkrechten Strecke AB wieder eine Strecke, die man als das von A_1 auf CM gefällte Lot A_1B_1 erhält. Die Art und Grösse des Bildes von einem Gegenstand hängt von dessen Entfernung vom Spiegel ab. Die Resultate der Konstruktionen oder der Rechnungen nach der Gleichung (3) sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Gegenstandsweite	Bildweite	Art und Stellung des Bildes	Grösse des Bildes verglichen mit der des Gegenstandes
∞	f	—	sehr klein
$< \infty$ > 2 f	$>$ f < 2 f	wirklich, umgekehrt	kleiner
2 f	2 f	wirklich, umgekehrt	gleichgross
< 2 f $>$ f	> 2 f $< \infty$	wirklich, umgekehrt	grösser
f	∞	—	sehr gross
$<$ f	negativ	scheinbar, aufrecht	grösser

Die relative Grösse des Bildes leiten wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MAB und MA_1B_1 (Fig. 44) ab. Dieselbe liefert die Proportion

$$AB : A_1B_1 = MB : MB_1 = (a - r) : (r - b).$$

Weil nun $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ und $f = \frac{r}{2}$ ist, so hat man zunächst

$$r = \frac{2ab}{a+b}.$$

Setzt man diesen Wert von r in die obige Proportion ein, so verwandelt sie sich in folgende

$$AB : A_1B_1 = \left(a - \frac{2ab}{a+b}\right) : \left(\frac{2ab}{a+b} - b\right)$$
$$= (a^2 - ab) : (ab - b^2),$$

hieraus

(5) $$AB : A_1B_1 = a : b,$$

d. h. die Grösse des Gegenstandes verhält sich zu der des Bildes wie die Weite des Gegenstandes zur Weite des Bildes.

Die für den Hohlspiegel aufgestellten Relationen gelten auch für konvergente Lichtstrahlen, wenn man deren geometrischen Schnittpunkt als Gegenstand mit negativer Weite einführt. Wir haben demnach $+a$ durch $-a$ zu ersetzen; z. B. ist hier

(6) $$\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Konvexspiegel. Die parallel zur Hauptachse einfallenden Zentralstrahlen divergieren nach der Reflexion in der Art, dass ihre Verlängerungen einen bestimmten Punkt der Hauptachse — hinter dem Spiegel — treffen. Dieser Vereinigungspunkt heisst geometrischer oder negativer Brennpunkt oder auch Zerstreuungspunkt, seine Entfernung vom Spiegel Zerstreuungsweite. Durch erhabene Kugelspiegel entstehen nur scheinbare, aufrechte, verkleinerte Bilder zwischen Zerstreuungspunkt und Spiegel.

Unter Anwendung von divergentem oder auch parallelem Licht erhalten wir folgende Beziehungen. In Figur 45 liege der leuchtende Punkt A auf der Hauptachse und ein von ihm kommender Strahl treffe den Spiegel, dessen optischer Mittelpunkt M sei, in D; die Rückverlängerung seines reflektierten Strahles H D treffe die Achse in B. Ergänzt man nun die Figur durch die Lote AG und BE auf MD, so sind die Dreiecke DBE und DAG ähnlich, weshalb die Proportion besteht

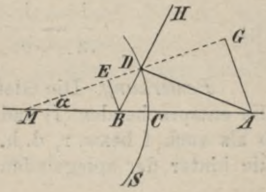

Fig. 45.

$$\mathrm{BE} : \mathrm{ED} = \mathrm{AG} : \mathrm{DG}.$$

Nach den früheren Bezeichnungen ist $\mathrm{MC} = \mathrm{r}$, $\mathrm{BC} = \mathrm{b}$, $\mathrm{CA} = \mathrm{a}$, $\sphericalangle \mathrm{CMD} = \alpha$, also $\mathrm{BE} = (\mathrm{r} - \mathrm{b}) \sin \alpha$, $\mathrm{DE} = \mathrm{r} - (\mathrm{r} - \mathrm{b}) \cos \alpha$, $\mathrm{AG} = (\mathrm{r} + \mathrm{a}) \sin \alpha$, $\mathrm{DG} = (\mathrm{r} + \mathrm{a}) \cos \alpha - \mathrm{r}$. Setzt man diese Werte in die Proportion ein, so erhält man

$$\frac{(\mathrm{r} - \mathrm{b}) \sin \alpha}{\mathrm{r} - (\mathrm{r} - \mathrm{b}) \cos \alpha} = \frac{(\mathrm{r} + \mathrm{a}) \sin \alpha}{(\mathrm{r} + \mathrm{a}) \cos \alpha - \mathrm{r}}.$$

Nach einigen Umformungen ergiebt sich

$$(7) \qquad \mathrm{b} = \mathrm{r} \left[1 - \frac{1}{2 \cos \alpha - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a} + \mathrm{r}}} \right].$$

Setzt man $\mathrm{a} = \infty$ und $\alpha = 0$, so liefert die Gleichung (7) die Beziehung $\mathrm{b} = \frac{\mathrm{r}}{2}$; d. h. der negative

Brennpunkt halbiert die Strecke zwischen Spiegel und optischem Zentrum.

Für Zentralstrahlen bei endlichem a kann $\alpha = 0$ gesetzt werden, und die Gleichung (7) liefert die Relation

$$(8) \qquad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{r} = -\frac{1}{f}.$$

Bemerkung. **Die Gleichungen (7) und (8) lassen sich in die entsprechenden (1) und (3) überführen, wenn man sowohl b als auch f bezw. r, d. h. diejenigen Strecken negativ setzt, die hinter der spiegelnden Fläche liegen.**

Bei konvergenten Strahlen vertauschen sich a und b; demnach ist

$$(9) \qquad -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Die Konstruktion der Bilder erfolgt wie beim Hohlspiegel.

§ 51. Brechung des Lichtes.

Die Ablenkung, welche Lichtstrahlen beim Übergang aus einem Mittel in ein anderes erfahren, heisst Brechung. Die im Treffpunkt auf der Trennungsfläche errichtete Senkrechte wird Einfallslot genannt, und die spitzen Winkel zwischen diesem Lot und dem einfallenden bezw. gebrochenen Strahl führen die Namen Einfallswinkel bezw. Brechungswinkel. Genauere Versuche bestätigen das von Snell aufgefundene und von Deskartes 1637 veröffentlichte Gesetz:

a) Der einfallende und der gebrochene Strahl liegen mit dem Einfallslot in einer Ebene;

b) Der Sinus des Einfallswinkels steht zu dem Sinus des Brechungswinkels für jedes Paar von Medien in einem konstanten Verhältnis, das nur von der Natur der Medien abhängt und Brechungsexponent heisst.

Bezeichnet man den Einfallswinkel mit α, den Brechungswinkel mit β, den Brechungsexponenten mit n und die Geschwindigkeit des Lichtes in den beiden Medien mit v und v_1, so ist

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{v}{v_1}. \tag{1}$$

Für den Übergang des Lichtes von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$, von Luft in Glas $\frac{3}{2}$.

Fallen die Strahlen senkrecht zur Grenzfläche auf, dann ist $\alpha = 0$ und damit auch $\beta = 0$; d. h. die Strahlen erfahren keine Ablenkung. Beim Übertritt vom optisch dünneren in das optisch dichtere Mittel werden die Strahlen zum Einfallslot hin, im anderen Falle davon weggebrochen.

Im dichteren Mittel ist die Geschwindigkeit des Lichtes kleiner als im optisch dünneren.

Ist n der Brechungsexponent von dem Mittel A in B, so ist $\frac{1}{n}$ derjenige für den Übertritt aus dem Mittel B in A; der Lichtstrahl macht sonach den Weg umgekehrt.

Konstruktion des gebrochenen Strahles. Geht der Lichtstrahl AO (Fig. 46) aus dem dünneren in das dichtere Mittel über, so beschreibe man um O in dem dichteren Mittel in der Brechungsebene zwei Halbkreise mit den Radien r und rn, nämlich EJ und FK. Verlängere AO bis zum Schnitt C mit dem kleineren Halbkreis und ziehe durch C die Parallele zum Einfallslot, welche den äusseren Halbkreis in D schneidet. Die Verbindungsgerade OD giebt den Weg des gebrochenen Strahles an.

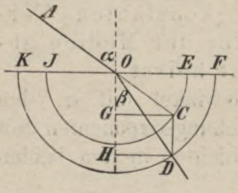

Fig. 46.

Beweis. Ergänze die Figur durch die Senkrechten CG und DH auf das Einfallslot. Nun ist

$$CG = OC \cdot \sin \alpha$$

$$DH = OD \cdot \sin \beta.$$

Da nun CG = DH ist, so ergiebt sich

$$OC \cdot \sin \alpha = OD \cdot \sin \beta;$$

mithin

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{OD}{OC} = \frac{nr}{r} = n.$$

Bemerkung. Die Konstruktion für den Fall des Überganges aus dem dichteren Mittel in das dünnere ist der eben angegebenen analog.

Wird die geradlinige Bahn BF (Fig. 47) eines Lichtstrahles in dem Mittel M dadurch unterbrochen, dass man ihn durch ein von zwei parallelen Ebenen L und L_1 einseitig begrenztes zweites Medium M_1 gehen lässt, so tritt eine zweimalige Brechung ein; der von dem Strahl zurückgelegte Weg ist BACD.

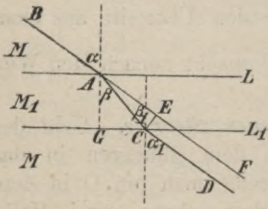

Fig. 47.

Da nun

$$\sphericalangle \beta = \beta_1$$

als Wechselwinkel ist, so ist

$$\sphericalangle \alpha = \alpha_1.$$

Der austretende Strahl CD geht daher dem auffallenden parallel. Demnach gilt der Satz:

Durch planparallele durchsichtige Platten wird ein Lichtstrahl von seiner Richtung nicht abgelenkt, sondern nur verschoben.

Ist $AG = d$ die Dicke des Mediums, n der Brechungsexponent von M in M_1, so lässt sich die Verschiebung berechnen. Diese wird durch das Lot CE auf BF angegeben. Aus

$$AC = \frac{d}{\cos \beta}$$

und

$$\sphericalangle CAE = \alpha - \beta$$

folgt

$$CE = AC \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{d}{\cos \beta} \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

Der Brechungsexponent für den Übertritt aus dem leeren Raum in ein Mittel heisst der absolute Brechungsexponent. Er beträgt für Luft 1,000294.

Bei dem Übergang des Lichtes aus einem dünneren in ein dichteres Mittel kann der Einfallswinkel α jeden Wert zwischen 0^0 und 90^0 annehmen. Zu

$$\alpha = 0^0$$

ergiebt sich für den Brechungswinkel

$$\beta = 0^0.$$

Ist dagegen

$$\alpha = 90^0,$$

so findet man den zugehörigen Winkel β aus der Beziehung

$$\sin \beta = \frac{1}{n}.$$

Dieser Wert für β heisst Grenzwinkel; er ist der erzeugende Winkel einer Kegelfläche, innerhalb welcher die gebrochenen aller derjenigen Strahlen liegen, welche die Grenzfläche in ein und demselben Punkte treffen. Daher werden alle Lichtstrahlen, die von einem dichteren Mittel ausgehen und ein dünneres unter einem grösseren Einfallswinkel als den Grenzwinkel treffen, in das erstere, dichtere Mittel ohne grösseren Verlust zurückgeworfen: totale Reflexion.

§ 52. Das Prisma.

Unter einem optischen Prisma verstehen wir ein keilförmiges Stück eines durchsichtigen Körpers. Grenzen sind zwei sich schneidende Ebenen. Der Keilwinkel der beiden Ebenen heisst der brechende Winkel, die Keilkante die brechende Kante. Jede

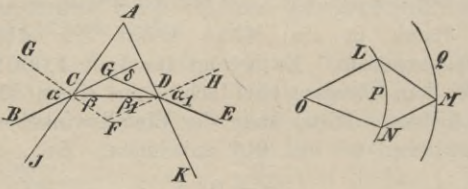

Fig. 48.

Ebene senkrecht zur Keilkante schneidet das Prisma nach einem Hauptschnitt. — Der Gang eines homogenen Lichtstrahles im Hauptschnitt eines Prisma lässt sich mit der Snellschen Konstruktion leicht verfolgen. In der Fig. 48 sei JAK derjenige Hauptschnitt des Prisma, in welchem der Lichtstrahl BCDE sich bewegt. Wir zeichnen nun um den beliebigen Punkt O zwei Kreise P und Q mit den Radien r und r · n (n ist der Brechungsexponent) und legen in den ersten den Radius OL parallel dem auffallenden Strahl BC, dann zeichnen wir durch L die Parallele mit dem ersten Einfallslot GC, welche den Kreis Q in M schneidet. Nun ist OM die Richtung des sich im Prisma bewegenden Strahles CD. Hierauf legen wir durch M die Parallele zu dem zweiten Einfallslot HD und verbinden ihren Schnittpunkt N auf dem Kreise P mit dem Zentrum O. Die Gerade ON bezeichnet die Richtung des austretenden Strahles DE.

Ablenkung. Der spitze Winkel δ, welchen die verlängerten Strahlen BC und ED bei ihrem Treffpunkte G bilden, heisst die Ablenkung des Prisma. Um letztere zu ermitteln, soll $\sphericalangle$ BCG mit α, $\sphericalangle$ FCD mit β, $\sphericalangle$ FDC mit β_1, $\sphericalangle$ EDH mit α_1, $\sphericalangle$ JAK mit γ und der Brechungsexponent mit n bezeichnet sein. In dem $\triangle$ CGD ist

$$\sphericalangle\,\delta = \alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1$$

(nach dem Lehrsatz vom Aussenwinkel),

$$= \alpha + \alpha_1 - (\beta + \beta_1),$$
$$= \alpha + \alpha_1 - (2\,\mathrm{R} - \mathrm{CFD}),$$
$$= \alpha + \alpha_1 - \gamma$$

(ACFD ist ein Kreisviereck).

(1) $$\sphericalangle\,\delta = \alpha + \alpha_1 - \gamma.$$

Diese Gleichung ist allgemein giltig, wenn man daran festhält, dass α_1 und β_1 negativ zu nehmen sind, wenn sie mit α und β verglichen nicht auf derselben Seite des Strahles liegen.

Kleinste Ablenkung. Das Minimum der Ablenkung, δ_0, tritt ein, wie sich aus der Beobachtung der Gestaltsveränderung des Vierecks LMNO ergiebt, wenn der Lichtstrahl symmetrisch durch den Hauptschnitt hindurchgeht, wenn

$$\sphericalangle \alpha = \alpha_1, \ \sphericalangle \beta = \beta_1$$

ist. In diesem Falle haben wir

$$\sphericalangle \beta + \beta_1 = 2\beta = \gamma$$

und

$$\sphericalangle \delta_0 = \alpha + \alpha_1 - \gamma = 2\alpha - \gamma;$$

also

$$\sphericalangle \alpha = \frac{\delta_0 + \gamma}{2}. \tag{2}$$

Ausserdem ist immer

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n;$$

daher

$$\frac{\sin \dfrac{\delta_0 + \gamma}{2}}{\sin \dfrac{\gamma}{2}} = n. \tag{3}$$

Letztere Gleichung lässt sich zur Bestimmung des Brechungsexponenten n benutzen.

§ 53. Brechung an sphärischen Begrenzungsflächen.

Es soll der Gang eines Strahlenbündels ermittelt werden, das von einem dünneren in ein dichteres Mittel übergeht, wenn die Grenzfläche beider Medien kugelförmig ist und die Entfernungen eines Konvergenzpunktes von allen Punkten der Trennungsfläche als gleich gross angesehen werden dürfen.

I. Die konvexe Seite der Kugelfläche ist dem schwächer brechenden Mittel zugewandt. Es sei in der Figur 49 M der Mittelpunkt der Kugelfläche PQ vom Radius r, A ein leuchtender Punkt auf der Achse OM, AE irgend ein von ihm ausgehender Strahl, EB der dazugehörige gebrochene, α der Einfalls- und β der Brechungswinkel, n der Brechungsexponent, a und b die Entfernungen des Objektes A und seines Bildes B von O. Nach dem Snellschen Gesetze ist

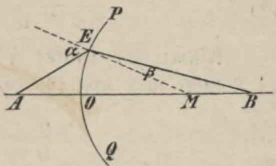

Fig. 49.

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \quad \text{oder} \quad \sin AEM = n\cdot\sin BEM. \tag{1}$$

Im $\triangle AEM$ liefert der Sinussatz der Trigonometrie die Proportion

$$\begin{aligned} \sin AEM : \sin EMA &= AM : AE \\ &= AM : AO, \quad \text{oder} \\ \sin AEM : \sin EMA &= (a + r) : a. \end{aligned} \tag{2}$$

Ebenso ist im $\triangle MBE$

$$\begin{aligned} \sin MEB : \sin EMB &= BM : EB \\ &= BM : BO, \quad \text{oder} \\ \sin MEB : \sin EMB &= (b - r) : b. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\sin AEM = \sin EMA \cdot \frac{a + r}{a},$$

$$\sin MEB = \sin EMB \cdot \frac{b - r}{b}.$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so ergiebt sich, da $\sin EMA = \sin EMB$ ist

$$\frac{a+r}{a} = n \cdot \frac{b-r}{b},$$

$1 + \frac{r}{a} = n - \frac{nr}{b}$

hieraus

$$(4) \qquad \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1).$$

$\frac{1}{a} + \frac{nr}{b} = n - 1$

Rückt der Punkt A ins Unendliche, so ist $a = \infty$ zu setzen und aus (4) erhält man

$$(5) \qquad \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1).$$

$\frac{1}{a} + \frac{n}{b}$

Sind aber die auf PQ fallenden Strahlen konvergent, dann haben wir a negativ zu nehmen, weil der Punkt A innerhalb des dichteren Mediums liegt; daher

$$(6) \qquad -\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1).$$

II. Die konkave Seite der Kugelfläche ist dem dünneren Mittel zugekehrt. Wenn an der gleichen Be-

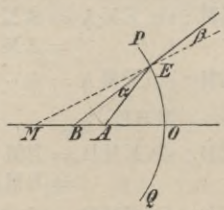

Fig. 50.

zeichnung wie unter *I.* festgehalten wird, so gestaltet sich die Entwickelung folgendermassen (Figur 50). Zunächst ist

$$(7) \qquad \sin\alpha = n \cdot \sin\beta, \quad \text{oder} \quad \sin AEM = n \cdot \sin BEM.$$

Ferner ergiebt sich aus den Dreiecken AEM und BEM

$$(8)\quad \begin{aligned} \sin AEM : \sin AME &= AM : AE = AM : AO \\ &= (r - a) : a, \quad \text{und} \\ \sin BEM : \sin BME &= BM : BE = BM : BO \\ &= (r - b) : b. \end{aligned}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$\frac{r - a}{a} = n \cdot \frac{r - b}{b};$$

hieraus

$$(9)\qquad \frac{1}{a} - \frac{n}{b} = -\frac{1}{r}(n - 1).$$

Für paralleles Licht ist $a = \infty$, daher

$$(10)\qquad -\frac{n}{b} = -\frac{1}{r}(n - 1)$$

und für konvergente Strahlen, die nach der Brechung wieder konvergent sind, erhalten wir

$$(11)\qquad -\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = -\frac{1}{r}(n - 1).$$

III. Die beide Medien trennende Fläche sei eben. Sind beide Strahlenbündel, das auffallende und das gebrochene, zugleich konvergent oder auch zugleich divergent, so ergiebt eine kurze Rechnung, da $r = \infty$ ist, für den Fall

$$(12)\quad \begin{aligned} &\text{der Konvergenz} \quad -\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = 0, \\ &\text{der Divergenz} \quad \frac{1}{a} - \frac{n}{b} = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Beziehung $\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n - 1)$ gilt sonach allgemein, wenn man festsetzt, dass bei geometrischen (scheinbaren) Schnitten die betreffenden Strecken negativ zu nehmen sind und dass r als eine positive oder negative Zahl zu behandeln ist, je nachdem die konvexe bezw. konkave Seite der Kugelfläche dem dünneren Mittel zugekehrt ist.

§ 54. Brechung durch Linsen.

Eine Linse ist ein von zwei sphärischen Flächen begrenzter durchsichtiger Körper. Man unterscheidet a) Sammel- oder Konvexlinsen, d. h. Linsen, welche in der Mitte dicker als am Rande sind, und b) Zerstreuungs- oder Konkavlinsen, d. h. Linsen, welche in der Mitte dünner als am Rande sind. Erstere zerfallen in bi-, plan- und konkavkonvexe Linsen, letztere in bi-, plan- und konvexkonkave. Die Zentren der beiden Kugelflächen führen den Namen Krümmungsmittelpunkte und ihre Verbindungslinie wird Hauptachse der Linse genannt. Eine durch diese Gerade gelegte Ebene schneidet die Linse nach einem Hauptschnitt. — Bei der Ableitung der Gesetze für die Linsen machen wir die Annahme, dass die Dicke derselben in der Regel vernachlässigt werden darf, dass der leuchtende Punkt auf der Hauptachse liegt und dass die Entfernungen eines Vereinigungspunktes (Gegenstands- oder Bildpunktes) von allen Punkten der betreffenden Linsenfläche als gleich gross genommen werden dürfen. Ferner bezeichnen wir mit a die Gegenstandsweite, mit b die Bildweite, mit f die Brennweite, mit r_1 und r_2 die Radien der beiden sphärischen Flächen und mit n den Brechungsexponenten.

I. Sammellinsen. Die Figur 51 stelle den Gang ADEB eines Lichtstrahls in einem Hauptschnitt einer bikonvexen Linse PQ vor, der durch die Achse $O_1 O_2$ gelegt worden ist; O_1 und O_2 seien die Krümmungszentren, $O_1 D = r_1$, $O_2 E = r_2$ die Radien der Kugeln und zugleich die Einfallslote; a und b die Entfernungen der Punkte A und B (Gegenstands- und Bildpunkt) von der Linse. Trifft nun der verlängerte Strahl DE die Achse in C, der von der Linse den Abstand c haben soll, so lässt sich C nicht nur als reeller Bildpunkt von A für die eine Grenzfläche PDQ, sondern auch als geometrischer (scheinbarer) Bildpunkt in bezug auf die Grenzfläche PEQ ansehen. Demnach erhält man nach der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen die beiden Gleichungen

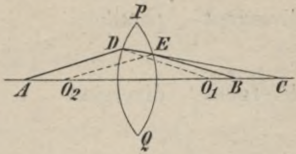

Fig. 51.

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{c} = \frac{1}{r_1}(n - 1),$$

$$\frac{1}{b} - \frac{n}{c} = \frac{1}{r_2}(n - 1).$$

Addiert man beide, so ergiebt sich

(1) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Die Beziehung wurde unter der Annahme abgeleitet, dass die auffallenden Strahlen divergent und die austretenden konvergent seien. Andere Fälle enthält nachfolgende Zusammenstellung:

Die auffallenden Strahlen sind	Die austretenden Strahlen sind	Gleichung
divergent	parallel	$\frac{1}{a} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
divergent	divergent	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
konvergent	konvergent	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
parallel	konvergent	$\frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$.

Sind die Linsen plankonvex oder konkavkonvex, so bietet die Ableitung der Relationen zwischen a, b, n, r_1, r_2 keinerlei Schwierigkeiten und man erhält wie oben folgende Gleichungen.

Plankonvexe Linsen:

Die auffallenden Strahlen sind	Die austretenden Strahlen sind	Gleichung
divergent	konvergent	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r_1}(n-1)$
divergent	divergent	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{r_1}(n-1)$
divergent	parallel	$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_1}(n-1)$
konvergent	konvergent	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r_1}(n-1)$
parallel	konvergent	$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_1}(n-1)$.

Konkavkonvexe Linsen:

Die auffallenden Strahlen sind	Die austretenden Strahlen sind	Gleichung
divergent	konvergent	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
divergent	divergent	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
divergent	parallel	$\frac{1}{a} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
konvergent	konvergent	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
parallel	konvergent	$\frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

Setzt man in der Gleichung (1) den Ausdruck

$$(n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f},$$

so gilt die Beziehung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Wird hierin $a = \infty$, so wird $f = b$; d. h. die der Hauptachse parallelen Strahlen vereinigen sich hinter der Linse in einem Punkt, der Brennpunkt heisst.

Zusammenfassung. Strahlen, die von einem Punkte auf der Hauptachse ausgehen oder nach einem Punkt dieser Achse hinzielen, werden von den Sammellinsen so gebrochen, dass sie wieder durch einen Punkt der

Achse gehen, bezw. von einem Punkt derselben herzukommen scheinen. Alle Beziehungen zwischen Bild- und Gegenstandsweite werden für sämtliche mögliche Fälle von der Gleichung umfasst

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wenn man bestimmt, dass a, b negativ bezw. ∞ zu nehmen sind, sowie ein scheinbarer bezw. unendlich ferner Schnittpunkt auftritt, und dass dasjenige r negativ oder ∞ zu setzen ist, dessen Fläche hohl bezw. eben wird.

Konstruktion der Bilder. (Fig. 52.) Hat der Punkt A keine achsiale Lage, aber doch nur einen so geringen Abstand von der Hauptachse, dass die Nebenachse AC einen kleinen Winkel mit jener bildet, so darf man die oben abgeleiteten Resultate, ohne einen bedeutenden Fehler zu machen, zur Konstruktion von Bildern benutzen, welche eine Sammellinse von einem Gegenstand liefert. Zur Bestimmung der Lage und Grösse des Bildes A_1B_1 von dem Objekte AB verfolgen wir den Verlauf von zwei von A ausgehenden Strahlen, wovon der eine AD parallel zur Hauptachse einfällt, der andere AC durch den optischen Mittelpunkt geht. Ersterer nimmt nach der Brechung seinen Weg durch den Brennpunkt, während letzterer in seiner eigenen Richtung weiter geht. Der Schnittpunkt A_1 ist das Bild von A und A_1B_1 dasjenige von AB. Ausserdem verhält sich

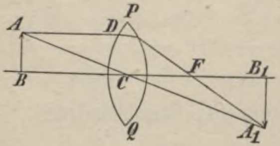

Fig. 52.

$$A_1B_1 : AB = B_1C : BC = b : a;$$

d. h. Bild und Gegenstand verhalten sich hinsichtlich ihrer Grösse wie Bild- und Gegenstandsweite.

Je nach der Lage des Objektes AB zur Linse PQ erzeugt diese verschiedene Bilder. Die vorkommenden Fälle sind in folgender Tabelle (S. 132) zusammengestellt und ihre Resultate können durch Konstruktionen oder aus den Formeln abgeleitet werden.

II. Zerstreuungslinsen. Entsprechend den Gleichungen für Sammellinsen erhält man bei Zerstreuungslinsen folgende Relationen für

bikonkave Linsen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{3}$$

plankonkave Linsen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n-1) \cdot \frac{1}{r_1}. \tag{4}$$

konvexkonkave Linsen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{5}$$

wo a und b negativ bezw. gleich ∞ zu setzen sind, wenn ein scheinbarer bezw. ein unendlich ferner Schnitt auftritt.

Bei positivem a ist b stets negativ, auch in dem Falle einer konvexkonkaven Linse; denn hier muss $r_2 > r_1$ sein, soll die Linse ihren Charakter als Zerstreuungslinse nicht verlieren. Setzt man in den Gleichungen (3) bis (5) die Ausdrücke rechts gleich $-\frac{1}{f}$,

Die auffallenden Strahlen sind	a	b	Des Bildes		
			Art	Stellung	relative Grösse
divergent	$<\infty$ $>2f$	$>f$ $<2f$	wirklich	verkehrt	kleiner
	$=2f$	$=2f$	wirklich	verkehrt	gleich gross
	$<2f$ $>f$	$>2f$ $<\infty$	wirklich	verkehrt	grösser
	$=f$	$=\infty$	kein Bild	—	—
	$<f$	negativ	scheinbar	aufrecht	grösser
konvergent	negativ	positiv $<f$	wirklich	aufrecht	kleiner
parallel	$=\infty$	$=f$	wirklich	—	punktförmig

so lassen sich alle drei Beziehungen in der einen zusammenfassen

$$(6) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Wird nun $a = \infty$, so ergiebt sich

$$b = -f;$$

folglich:

Parallele Strahlen werden von der Zerstreuungslinse so gebrochen, dass sie von einem Punkt in der Entfernung f vor der Linse herzukommen scheinen. Dieser Punkt wird Zerstreuungspunkt und f die Zerstreuungsweite genannt.

Konstruktion der Bilder. (Fig. 53.) Der von A parallel zur Hauptachse einfallende Strahl AD nimmt den Verlauf DEG, so dass die Rückverlängerung der GE durch F, den Zerstreuungspunkt geht; während der durch den optischen Mittelpunkt C hindurchfallende Strahl seine geradlinige Bahn nicht verlässt. Der Schnittpunkt A_1 der beiden Geraden AC und FG ist das scheinbare Bild von A, und A_1B_1 das scheinbare, aufrechte, kleinere Bild von AB.

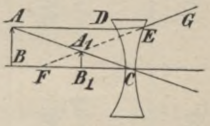

Fig. 53.

Die Grösse des Bildes verhält sich zu der des Gegenstandes wie die Bildweite zur Weite des Gegenstandes.

Weitere Fälle sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Die auffallenden Strahlen sind	a	b	Des Bildes Art	Stellung	relative Grösse
divergent	positiv	negativ $< f$	scheinbar	aufrecht	kleiner
parallel	∞	$= f$	scheinbar	—	punktförmig
konvergent	$< \infty$ $> 2f$	$> f$ $< 2f$	scheinbar	umgekehrt	kleiner
	$= 2f$	$= 2f$	scheinbar	umgekehrt	gleich gross
	$< 2f$ $> f$	$> 2f$ $< \infty$	scheinbar	umgekehrt	grösser
	$= f$	$= \infty$	—	—	—
	$< f$	positiv	wirklich	aufrecht	grösser

§ 55. Die Lupe.

Die Bikonvexlinse L (Fig. 54) liefert von dem Gegenstand AB ein scheinbares, aufrechtes, vergrössertes Bild $A_1 B_1$ in der deutlichen Sehweite $B_1 O = s$. Bezeichnen wir mit φ den $\sphericalangle\, COB_1$, unter dem der Gegenstand in der deutlichen Sehweite erscheint, mit ψ den $\sphericalangle\, A_1 O B_1$, unter welchem das Bild $A_1 B_1$ gesehen wird, so drückt das Verhältnis $\operatorname{tg}\psi : \operatorname{tg}\varphi$ die Vergrösserung v der Lupe aus. Nun ist

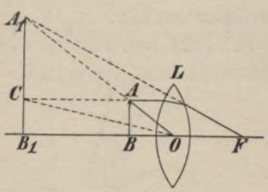

Fig. 54.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_1 C}{B_1 O}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{A_1 B_1}{B_1 O},$$

mithin

$$v = \frac{A_1 B_1}{B_1 C} = \frac{B_1 O}{BO} = \frac{s}{a}.$$

Zwischen Bild- und Gegenstandsweite besteht aber die Beziehung

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f},$$

mithin

$$a = \frac{fs}{s + f},$$

folglich

$$v = \frac{s + f}{f} = 1 + \frac{s}{f}.$$

§ 56. Das zusammengesetzte Mikroskop.

Der Gegenstand AB befindet sich nahe bei einer Sammellinse L (Objektiv) von kleiner Brennweite, etwas jenseits des Brennpunktes. Sein reelles, vergrössertes Bild $A_1 B_1$ wird durch eine Konvexlinse L_1 (Okular) betrachtet, welche als Lupe wirkt. Dadurch entsteht ein virtuelles, umgekehrtes Bild $A_2 B_2$ in der

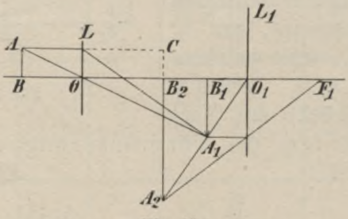

Fig. 55.

deutlichen Sehweite s. Unter der Vergrösserung v verstehen wir das Verhältnis der Tangenten der Sehwinkel in der deutlichen Sehweite. Mithin ist unter Zugrundelegung der Fig. 55

$$v = \frac{\operatorname{tg} A_2 O_1 B_2}{\operatorname{tg} B_2 O_1 C} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C} = \frac{A_2 B_2}{AB}.$$

Ferner sei $OB = a$, $OB_1 = b$, $O_1 B_1 = a_1$, $O_1 B_2 = b_1 = s$, $OO_1 = h$, f die Brennweite der Linse L und f_1 die der L_1. Alsdann ergiebt sich

$$A_2 B_2 = \frac{A_1 B_1 \cdot s}{a_1}$$

und damit

(1) $$v = \frac{A_1 B_1 \cdot s}{AB \cdot a_1} = \frac{b \cdot s}{a \cdot a_1}.$$

Die Relationen für Konvexlinsen liefern uns die folgenden Gleichungen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f_1}; \tag{3}$$

ausserdem ist

$$b + a_1 = h. \tag{4}$$

Aus (3) ergiebt sich

$$a_1 = \frac{sf_1}{s + f_1}$$

und damit aus (4)

$$b = \frac{hs + hf_1 - sf_1}{f_1 + s};$$

daher mit Hilfe von (2)

$$a = \frac{bf}{b - f} = \frac{f(hs + hf_1 - sf_1)}{hf_1 + hs - sf_1 - ff_1 - fs},$$

folglich

$$v = \frac{bs}{aa_1} = \frac{h(s + f_1) - s(f + f_1)}{ff_1} - 1.$$

Da nun in der Regel h nahezu gleich s ist, so ergiebt sich

$$v = \frac{h(h - f)}{f \cdot f_1} - 1.$$

Bei starker Vergrösserung darf 1 fortgelassen werden und man erhält

$$v = \frac{h(h - f)}{f \cdot f_1}. \tag{5}$$

§ 57. Das Fernrohr.

1. Das astronomische Fernrohr. Von dem entfernten Gegenstand AB wird durch die Objektivlinse L (Fig. 56; die Linsen sind schematisch gezeichnet) ein verkehrtes kleines, wirkliches Bild in der Nähe des Brennpunktes F der Sammellinse L entworfen. Dieses erscheint durch die als Lupe wirkende Okularlinse L_1 betrachtet in $A_2 B_2$ vergrössert. Unter normalen Verhältnissen ist der Brennpunkt F des Objektives auch der des Okulars, womit das Fernrohr die Länge $(f + f_1)$ erhält. Ein kurzsichtiges Auge hingegen schiebt den Brennpunkt des Okulars über den des Objektives hinaus. In beiden Fällen muss jedoch, soll die Vergrösserung hinreichend gross ausfallen, die Objektivlinse eine grosse und die Okularlinse eine geringe Brennweite besitzen. — Bezeichnen wir nun die Vergrösserung mit v, so ist für ein normales Auge $v = f : f_1$.

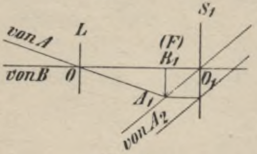

Fig. 56.
Normales Auge

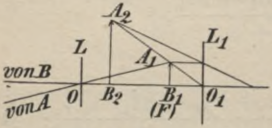

Fig. 56.
Kurzsichtiges Auge

Es ist nämlich

$$v = \frac{\operatorname{tg} A_2 O_1 B_2}{\operatorname{tg} A O_1 B} = \frac{\operatorname{tg} A_2 O_1 B_2}{\operatorname{tg} A O B}$$ (weil die Länge des Fernrohres gegen die Entfernung des Gegenstandes vom Instrumente als verschwindend klein angesehen werden darf)

$$= \frac{\operatorname{tg} A_2 O_1 B_2}{\operatorname{tg} A_1 O B_1} = \frac{O B_1}{O_1 B_1} = \frac{f}{f_1}.$$

Dem kurzsichtigen Auge erscheine das Bild A_2B_2 in der Entfernung s von O_1. Dann ist

$$v = \frac{\operatorname{tg} A_2O_1B_2}{\operatorname{tg} AOB} = \frac{\operatorname{tg} A_2O_1B_2}{\operatorname{tg} A_1OB_1} = \frac{OB_1}{O_1B_1} = \frac{f}{a_1},$$

wenn wir O_1B_1 mit a_1 bezeichnen. Aber nach der Reziprokengleichung ist

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f_1};$$

hieraus

$$a_1 = \frac{s f_1}{s + f_1};$$

mithin

$$v = \frac{f(s + f_1)}{s f_1} = \frac{f}{f_1} + \frac{f}{s}.$$

2. *Das Galileische Fernrohr.* (Fig. 57.) Zwischen das konvexe Objektiv L mit der Brennweite f und die Stelle A_1B_1, wohin das wirkliche Bild des Gegenstandes AB fallen würde, schiebt man als Okular L_1

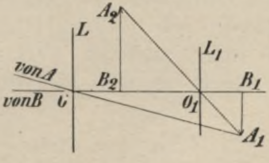

Fig. 57.

eine Konkavlinse ein. Letztere wird so angeordnet, dass ihre Entfernung von jenem Bilde etwas grösser als die Zerstreuungsweite f_1 ist, wodurch alle nach einem Punkte A_1 des Bildes A_1B_1 konvergierenden

Strahlen durch das Okular so gebrochen werden, als ob sie von einem Punkte A_2 vor der Linse herkämen (§ 54). Durch Verschiebung des Okulars kann man das virtuelle Bild $A_2 B_2$ in die deutliche Sehweite bringen. Die Länge des Fernrohres ist nahezu gleich $(f - f_1)$ und die Vergrösserung ist

$$v = \frac{\operatorname{tg} A_1 O_1 B_1}{\operatorname{tg} A_1 O B_1} = \frac{f}{f_1}.$$

IV. Abschnitt.

Kalorik.

§ 58. Das Thermometer.

Die Fundamentalpunkte des Thermometers sind der Eispunkt und der Siedepunkt. Der Abstand beider wird in eine Anzahl gleicher Teile, Grade, zerlegt und zwar von Celsius (C.) in 100, von Réaumur (R.) in 80 und von Fahrenheit (F.) in 180. An den Eispunkt schreiben Celsius und Réaumur 0^0, Fahrenheit dagegen 32^0, so dass letzterer den Siedepunkt mit 212^0 bezeichnen muss. Die Teilung wird, soweit es die Röhre gestattet, unterhalb des Eispunktes und oberhalb des Siedepunktes fortgeführt. Die Grade unter Null erhalten das negative, die über Null das positive Zeichen. Aus diesen Angaben leiten sich unmittelbar folgende Beziehungen ab

$$n^0\,\mathrm{C.} = \frac{4}{5}\,n^0\,\mathrm{R.} = \left(\frac{9}{5}\,n^0 + 32^0\right)\mathrm{F.},$$

$$n^0\,\mathrm{R.} = \frac{5}{4}\,n^0\,\mathrm{C.} = \left(\frac{9}{4}\,n^0 + 32^0\right)\mathrm{F.},$$

$$n^0\,\mathrm{F.} = \frac{5}{9}\,(n^0 - 32)\,\mathrm{C.} = \frac{4}{9}\,(n^0 - 32^0)\,\mathrm{R.}$$

§ 59. Ausdehnung der Körper.

A. Starre Körper. Die Zahl, welche angiebt, um den wievielsten Teil seiner bei 0^0 gemessenen Länge ein stabförmiger Körper bei der Erwärmung um 1^0 C. sich ausdehnt, heisst der Längen-Ausdehnungs-Koeffizient. Aus Versuchen schliessen wir, dass die Längenausdehnung von Stäben im allgemeinen ihrer Länge bei 0^0 und der von 0^0 C. an gemessenen Temperatur proportional ist. Bezeichnet man daher mit l_0 die Länge des Stabes bei 0^0, mit l diejenige bei t^0, mit α den Ausdehnungskoeffizienten, so beträgt die Ausdehnung

$$l_0 \cdot \alpha \cdot t,$$

woraus folgt

$$l = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t = l_0 (1 + \alpha t).$$

Durch Division erhalten wir

$$l_0 = l \cdot \frac{1}{1 + \alpha t} = l (1 - \alpha t)$$

annähernd.

Ist weiterhin l_1 die Länge eines Stabes bei t_1^0, l_2 diejenige bei t_2^0 und ist $t_1 > t_2$, so bestehen folgende Beziehungen

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1)$$
$$l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2).$$

Daraus ergiebt sich

$$l_1 = l_2 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$

annähernd, $$= l_2 (1 + \alpha t_1)(1 - \alpha t_2)$$

$$= l_2 [1 + \alpha (t_1 - t_2)],$$

wenn α^2 unberücksichtigt bleibt.

Ebenso erhalten wir

$$l_2 = l_1 [1 - \alpha (t_1 - t_2)].$$

Unter dem kubischen Ausdehnungskoeffizienten versteht man die Zahl, welche angiebt, um den wievielsten Teil seines bei 0^0 gemessenen Volumens sich ein Körper ausdehnt, wenn man ihn um 1^0 C. erwärmt. Die meisten starren Körper dehnen sich nach allen Richtungen hin gleich stark aus; für diesen Fall sei l_0 die Kantenlänge eines Würfels bei 0^0, l bei t^0 und α der lineare Ausdehnungskoeffizient. Alsdann ist sein Volumen v_0 bei 0^0 gleich l_0^3; bei t^0 ist es

$$v = l^3;$$

da nun

$$l = l_0 (1 + \alpha t)$$

ist, so wird man für l^3 den Wert $l_0^3 (1 + \alpha t)^3$ setzen; mithin ist

$$\begin{aligned} v &= l_0^3 (1 + \alpha t)^3 \\ &= l_0^3 (1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3). \end{aligned}$$

Solange αt eine sehr kleine Zahl ist, dürfen ihre zweiten und dritten Potenzen vernachlässigt werden, daher

$$v = l_0^3 (1 + 3\alpha t).$$

Aus dieser Beziehung lässt sich der Satz ablesen: Der kubische Ausdehnungskoeffizient ist das dreifache des linearen.

Bemerkung. Bei flüssigen und gasförmigen Körpern kann nur der kubische Ausdehnungskoeffizient in Betracht kommen.

B. Flüssigkeiten. Bei gleicher Temperaturerhöhung dehnen sich im allgemeinen die Flüssigkeiten stärker als die festen Körper aus. Dem Quecksilber kommt von 0^0 bis 100^0 eine ziemlich regelmässige Ausdehnung zu; sein Ausdehnungskoeffizient ist gleich

$$\frac{1}{5509} = 0{,}00\,018\,153.$$

Ein eigentümliches Verhalten zeigt das Wasser. Es zieht sich bei einer Erwärmung von 0^0 an zusammen, erreicht bei $4{,}1^0$ C. seine grösste Dichtigkeit und dehnt sich von da ab bei weiterer Erwärmung wieder aus. Nimmt man ein gewisses Volumen des Wassers bei $4{,}1^0$ C. als Einheit an, so hat diese Wassermenge bei 0^0 bezw. 100^0 das Volumen 1,000127 bezw. 1,04315.

Die Ausdehnungen der Flüssigkeiten bedingen eine Korrektur des spezifischen Gewichtes und der Barometerbeobachtungen. Ist in letzterem Falle die Skala bei t_1^0 richtig, ist β ihr Ausdehnungskoeffizient und wird ferner bei t^0 $(t > t_1)$ der Barometerstand b abgelesen, so ist die richtige Länge der Quecksilbersäule

$$b_1 = b\,[1 - \beta(t - t_1)].$$

Diese Länge ist nun auf 0^0 zu reduzieren. Bezeichnen wir zu dem Ende mit α den Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers, mit b_0 den reduzierten Stand, so gilt

$$b_1 = b_0\,(1 + \alpha t),$$

folglich

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1\,(1 - \alpha t) \\ &= b\,[1 - \beta(t - t_1)] \cdot (1 - \alpha t). \end{aligned}$$

Lässt man jedoch die Ausdehnung der Skala ausser Betracht, so hat man

$$b_1 = b$$

zu setzen und findet für den auf 0^0 reduzierten Barometerstand

$$b_0 = b(1 - \alpha t).$$

C. Gase. Bei gleicher Temperaturzunahme dehnen sich die Gase stärker als die Flüssigkeiten aus.

Gesetz von Gay-Lussac. Die Ausdehnung der Gase ist der Temperaturzunahme proportional; der Ausdehnungskoeffizient ist für alle Gase der gleiche, nämlich

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}003\,665$$

(vorausgesetzt, dass sich der äussere Druck nicht ändert).

Bedeutet unter dem Druck p_0 v_0 das Volumen einer Gasmenge bei 0^0, v das Volumen bei t^0, so gilt die Beziehung

$$(1) \qquad v = v_0(1 + \alpha t).$$

Vermehrt man nun bei gleichbleibender Temperatur den Druck p_0 auf p_1, so bestimmt sich das neue Volumen v_1 nach dem Gesetz von Mariotte aus der Gleichung

$$(2) \qquad p_0 v = p_1 v_1.$$

Eliminieren wir aus beiden Gleichungen die Zahl v, so erhalten wir

$$(3) \qquad p_0 v_0(1 + \alpha t) = p_1 v_1.$$

Diese Gleichung heisst die Zustandsgleichung der Gase. Da $\alpha = \frac{1}{273}$ ist, so kann obige Gleichung auch die Form annehmen

$$p_1 v_1 = \frac{p_0 v_0}{273}(273 + t).$$

Nun ist $\frac{p_0 v_0}{273}$ für jedes Gas eine Konstante; setzen wir diese gleich R und führen wir gleichzeitig die vom absoluten Nullpunkt -273^0 an gezählte absolute Temperatur $T = 273 + t^0$ ein, so lautet die Zustandsgleichung

$$(4) \qquad p_1 v_1 = R \cdot T.$$

Erniedrigt man die Temperatur einer gewissen Gasmenge bei gleichbleibendem äusseren Druck p_1 bis zu $t = -273^0$ und behält für diesen Grenzfall das Gesetz von Gay-Lussac seine Gültigkeit, so folgt aus der Gleichung (4) für v_1 der Wert Null.

Gesetz von Mariotte-Gay-Lussac: Die Volumina einer Gasmenge verhalten sich bei konstantem Druck wie ihre absoluten Temperaturen und bei gleicher Temperatur umgekehrt wie ihre Drucke.

Zusatz. Wird ein Gas bei der Erwärmung von 0^0 auf 100^0 in einen Raum von unveränderlicher Grösse eingeschlossen, so wächst seine Spannung und die Zunahme beträgt das 0,3665 der Spannung bei 0^0. Daraus folgt, dass der Spannungskoeffizient gleich 0,003665, also gleich dem Ausdehnungskoeffizienten ist.

Luftthermometer. Mit dem von Gay-Lussac konstruierten Apparate bestimmt man das Volumen v, das ein bei 0^0 gemessenes Luftvolumen v_0 einnimmt, wenn letzteres auf die Temperatur t gebracht wird. Alsdann ist

$$v = v_0(1 + \alpha t);$$

hieraus

$$t = \frac{v - v_0}{\alpha \cdot v_0}.$$

Bei neueren Instrumenten wird die Spannung der Luft benutzt, um einen Schluss auf die Temperatur zu ziehen. Sind nämlich p und p_0 die Spannungen der Luft bei konstantem Volumen, die den Temperaturen t^0 und 0^0 entsprechen, so findet man aus der Gleichung

$$p = p_0(1 + \alpha t)$$

die Temperatur

$$t = \frac{p - p_0}{\alpha \cdot p_0}.$$

§ 60. Änderung des Aggregatszustandes.

I. Schmelzen und Erstarren. Für jeden schmelzbaren Körper giebt es eine bestimmte Temperatur, den Schmelzpunkt, bei der er schmilzt. Bei der gleichen Temperatur, dem Erstarrungspunkt, wird in der Regel der flüssige Körper wieder fest. Beim Schmelzen dehnen sich die meisten Körper aus, beim Erstarren ziehen sie sich zusammen. Die Zunahme des äusseren Druckes erhöht den Schmelzpunkt derjenigen Körper, welche sich während des Schmelzens ausdehnen und vermindert ihn bei solchen, die sich dabei zusammenziehen. Wasser vergrössert beim Gefrieren sein Volumen wesentlich; aus 10 ccm Wasser entstehen etwa 11 ccm Eis. Der Schmelzpunkt von Legierungen (aus Metallen) liegt tiefer als das Mittel aus den Schmelzpunkten der einzelnen Bestandteile, bei manchen sogar unter dem Schmelzpunkt des am leichtesten schmelzbaren Metalles. Das Gemisch von Wood aus 4 Gewichtsteilen Blei, 2 Teilen Zinn und 1 Teil Kadmium schmilzt zwischen 60^0 und 70^0 C. Alle starren Körper verbrauchen beim Schmelzen Wärme, Schmelzwärme, und diese zum Schmelzen notwendig gewesene Wärmemenge wird beim Erstarren wieder frei, Erstarrungswärme. Die Schmelzwärme ist gleich der Erstarrungswärme. Man nennt diejenige Wärmemenge, welche 1 g bezw. 1 kg Wasser verbraucht, soll es sich von 0^0 auf 1^0 C. erwärmen, eine kleine bezw. grosse Kalorie. Die Schmelzwärme des Eises beträgt 80 Kalorien. Legt man z. B. a Gramm Eis von 0^0 in b Gramm Wasser von t^0, so stehen dem Eis b t Kalorien über 0^0 zur Verfügung, wovon es 80 a Kalorien zum Schmelzen notwendig hat. Ist nun $bt > 80a$, so wird alles Eis geschmolzen und es bleiben noch $(bt - 80a)$ Kalorien übrig, welche die vorhandenen $(a + b)$ Gramm Wasser auf t_1^0 erwärmen können; alsdann ist

$$(a + b)t_1 = bt - 80a,$$

mithin

$$t_1 = \frac{bt - 80a}{a + b} \text{ Grad.}$$

Löst man einen starren Körper in einer Flüssigkeit auf, so wird ebenfalls Wärme verbraucht, die Lösungswärme heisst.

II. Verdampfen und Verdichten. Ein bestimmter Raum von einer gewissen Temperatur ist mit Dampf gesättigt, wenn er soviel Dampf enthält, als er bei jener Temperatur aufnehmen kann. Der Dampf selbst heisst gesättigter Dampf. Wenn man jenes Volumen verringert oder vergrössert, so nimmt die Spannung des gesättigten Dampfes weder ab noch zu, sofern der Dampf mit seiner Flüssigkeit in Berührung bleibt und wenn sich die Temperatur nicht ändert. Jeder Temperatur entspricht demnach eine bestimmte Spannkraft der gesättigten Dämpfe und diese ist zugleich die grösste, welche der Dampf bei jener Temperatur äussern kann.

Wird ferner ein in Berührung mit seiner Flüssigkeit bleibender gesättigter Dampf erhitzt oder abgekühlt, so nimmt seine Spannung zu bezw. ab; jedoch ist die Zu- bezw. Abnahme grösser als bei Gasen. Gesättigte Dämpfe werden in den ungesättigten Zustand übergeführt, wenn man sie von ihren Flüssigkeiten getrennt erhitzt; sie heissen ungesättigte oder auch überhitzte Dämpfe. Solche Dämpfe gehorchen dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz.

Ist p das Gewicht eines überhitzten Dampfes und p_1 das eines gleichen Volumens Luft bei der gleichen Temperatur und unter dem gleichen Druck, so heisst der Quotient $p : p_1$ die Dichte des Dampfes. Auch wenn sich Druck und Temperatur ändern, behält dieser Quotient seinen Wert bei, weil beide luftförmige Körper dem Gesetz von Mariotte-Gay-Lussac folgen. Das spezifische Gewicht der Luft bei 760 mm Druck und 0^0 C. ist bezogen auf Wasser gleich 0,001 293 und das Gewicht p_1 eines Volumens v bei t^0 und b mm Spannung beträgt

$$p_1 = v \cdot \frac{0{,}001\,293 \cdot b}{(1 + 0{,}003\,665\, t) \cdot 760}.$$

Hat nun das gleiche Volumen v eines überhitzten Dampfes bei der gleichen Temperatur t und dem gleichen Druck b das Gewicht p, so ist die Dichte d des Dampfes

$$d = \frac{760 \cdot (1 + 0{,}003\,665\, t) \cdot p}{0{,}001\,293 \cdot v \cdot b}.$$

Die Dichte des Wasserdampfes verhält sich zu der der Luft bei 100^0 C. und 760 mm Druck wie 0,622 : 1 oder annäherungsweise wie 5 : 8.

Die Dampfdichte eines Gases, bezogen auf Wasserstoff, ist gleich seinem halben Molekulargewicht.

Satz des Avogadro: Gleiche Raumteile verschiedener Gase enthalten bei gleicher Temperatur und gleichem Druck die gleiche Anzahl von Molekulen.

Alle Flüssigkeiten verbrauchen Wärme, Verdampfungswärme, beim Verdampfen, und alle Dämpfe erzeugen beim Verdichten Wärme, Kondensationswärme. Für einen und denselben Körper ist die Verdampfungswärme gleich der Kondensationswärme. Die Kondensationswärme des Wassers kann durch folgenden Versuch ermittelt werden. Man leitet p Gramm Wasserdampf von 100^0 in p_1 Gramm Wasser von der Temperatur t^0, wobei er sich verdichtet und die Temperatur des Kühlwassers auf t_1^0 steigt. Bezeichnen wir nun mit x die gesuchte Verdampfungswärme, so werden, indem sich der Dampf zu Wasser von 100^0 verdichtet, $p \cdot x$ Kalorien Wärme frei. Ausserdem entstehen $p\,(100 - t_1)$ Kalorien Wärme durch Abkühlung des Kondensationswassers von 100^0 auf t_1^0. Andererseits braucht das Kühlwasser zu seiner Erwärmung auf t_1^0 im ganzen $p_1(t_1 - t)$ Kalorien. Es ist also

$$px + p(100 - t_1) = p_1(t_1 - t);$$

hieraus folgt für x nach angestellten Versuchen die Zahl 537. — Zur Verdunstung bei gewöhnlicher Temperatur braucht Wasser gegen 600 Kalorien.

§ 61. Kalorimetrie; spezifische Wärme.

Bei gleichen Massen desselben Stoffes sind die Wärmemengen mit grosser Annäherung den Temperaturen proportional. Um p kg Wasser von t^0 auf t_1^0 $(t_1 > t)$ zu bringen, sind $p\,(t_1 - t)$ Kalorien erforderlich.

1 kg Kalorie ist gleich 430 mkg.

1 Gramm Kalorie ist annähernd gleich $4{,}2 \cdot 10^7$ Erg.

Die Dimension der Wärmemenge ist ML^2T^{-2}.

Die Dimension der Temperatur ist L^2T^{-2}.

Unter Wärmekapazität einer Substanz versteht man die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche notwendig sind, um die Temperatur von 1 kg der Substanz um 1^0 zu erhöhen.

Die spezifische Wärme einer Substanz ist das Verhältnis der Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg der Substanz um 1^0 zu erhöhen zu derjenigen, welche die Temperatur von 1 kg Wasser um 1^0 erhöht.

Bezeichnen wir die spezifische Wärme eines starren Körpers mit c, ferner mit Q die Wärmemenge, welche die Temperatur von p kg jenes Körpers von t^0 auf t_1^0 bringt, so ist

$$Q = p \cdot c \cdot (t_1 - t).$$

Bestimmung der spezifischen Wärme starrer und flüssiger Körper.

a) Nach der Schmelzmethode. Ein Körper von p kg Gewicht, von der Temperatur t^0 $(t > 0)$ und der spezifischen Wärme x wird in die sorgfältig ausgetrocknete Höhlung eines Eisblocks von 0^0 gebracht, wodurch p_1 kg Schmelzwasser entstehen. Die von dem Körper abgegebene Wärme im Betrag von $p \cdot x \cdot t$ Kalorien wird zum Schmelzen von p_1 kg Eis verwendet. Da nun die spezifische Wärme des Eises gleich 80 ist, so besteht die Gleichung

$$p \cdot x \cdot t = 80 \cdot p_1,$$

also

$$x = \frac{80 \cdot p_1}{p \cdot t}.$$

b) Nach der Mischungsmethode. Man erhitzt p kg derjenigen Substanz, deren spezifische Wärme bestimmt werden soll, auf t^0 und bringt sie alsdann in p_1 kg Wasser von t_1^0 ($t_1 < t$). Nach dem Wärmeaustausch haben beide Substanzen die gleiche Endtemperatur t_2. Machen wir nun die Annahme, dass sämtliche abgegebene Wärme nur von dem Wasser aufgenommen worden ist, so lässt sich die Gleichung aufstellen

$$px(t - t_2) = p_1(t_2 - t_1);$$

hieraus

$$x = \frac{p_1(t_2 - t_1)}{p(t - t_2)}.$$

Ist die spezifische Wärme des Stoffes bekannt, so kann die soeben aufgestellte Gleichung zur Ermittelung der Anfangstemperatur dienen (kalorimetrische Ermittelung hoher Temperaturen). Sorgfältig angestellte Versuche überzeugen uns, dass die spezifische Wärme starrer und flüssiger Körper nicht genau konstant ist, sondern mit der Zunahme der Temperatur mehr oder weniger sich erhöht.

Das Produkt aus spezifischer Wärme und dem Atomgewicht ist bei vielen einfachen starren Körpern annähernd gleich 6,4.

Spezifische Wärme der Gase. Durch Versuche lässt sich die spezifische Wärme der Gase bei konstantem Druck ermitteln. Die spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen kann experimentell nicht bestimmt werden. Vergrössert ein Gas sein Volumen, so wird Wärme verbraucht, beim Zusammendrücken des Gases wird Wärme frei; daher ist die spezifische Wärme c der Gase bei konstantem Druck grösser als ihre spezifische Wärme c_1 bei konstantem Volumen. Das Verhältnis $\frac{c}{c_1}$ ist bei den verschiedenen Gasen nahezu gleich 1,4. Die beiden Zahlen c und c_1 sind von Druck und Temperatur unabhängig.

§ 62. Mechanische Wärmetheorie.

Das mechanische Äquivalent A der Wärmeeinheit, der Kilogrammkalorie, ist

$$A = 430 \text{ mkg}.$$

Im absoluten Mass ausgedrückt ist eine Kilogrammkalorie gleich

$$430 \cdot 981 \cdot 10^5 \text{ Erg} = 4{,}2 \cdot 10^{10} \text{ Erg};$$

folglich ist eine Grammkalorie gleich

$$4{,}2 \cdot 10^7 \text{ Erg}.$$

Bezeichnet man ganz allgemein jede Wirkungsfähigkeit eines Körpers als Energie, so sind chemische Verwandtschaft, mechanische Leistungen, Schall, Wärme, Licht, Magnetismus und Elektrizität verschiedene Formen der Energie. Wie die Erfahrung zeigt, ist die Energie unvergänglich gleich wie der Stoff; sie kann aber von einem Körper auf einen anderen übertragen und von einer Form in eine andere übergeführt werden.

Die Gesamtenergie Q, die ein System von Körpern besitzt, besteht aus der Wärmemenge W und dem mechanischen Arbeitsinhalt L. Es ist also

$$Q = W + C \cdot L,$$

wo C das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bedeutet. Die in Wärmemass ausgedrückte Arbeit wird Werk und jeder aus einer beliebiger Zahl von Verwandlungen zusammengesetzter Vorgang Prozess genannt. Führt man in die Rechnung den Verbrauch an Wärme negativ ein, so gilt der Satz:

Bei einem Prozess ist die algebraische Summe aus Wärme und Werk gleich Null.

V. Abschnitt.

Magnetik.

§ 63. Das Gesetz von Coulomb; die magnetische Menge.

Die Kraft, mit der zwei Magnetpole auf einander wirken, ist den magnetischen Mengen direkt und dem Quadrat der Entfernung indirekt proportional (Gesetz von Coulomb).

Bezeichnen wir sonach mit K den Betrag jener Kraft, mit m_1 und m_2 die magnetischen Mengen, mit r ihre Entfernung und mit α einen konstanten Faktor, so ist der mathematische Ausdruck für das Gesetz von Coulomb

$$K = \alpha \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Durch eine passende Wahl der Mengeneinheit kann $\alpha = 1$ gemacht werden, alsdann ist

$$K = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Die Mengen m_1 und m_2 bekommen das positive bezw. negative Zeichen, wenn sie nordmagnetische bezw. südmagnetische Mengen sind. Sonach erhalten anziehende Kräfte in der Rechnung ein negatives, abstossende Kräfte ein positives Zeichen.

Der erste Teil des Coulombschen Gesetzes folgt unmittelbar aus den Prinzipien der Mechanik. Zur Ableitung des zweiten Teiles bedient man sich zweier verschiedener Mittel: 1) der Schwingungen einer kleinen freihängenden Magnetnadel, die unter den Einfluss eines Magnetstabs gestellt werden kann; 2) der Torsion eines Silber- oder Kupferfadens in der Drehwage.

ad 1) Die Magnetnadel lässt man zunächst bloss unter dem Einfluss des Erdmagnetismus Schwingungen ausführen, alsdann in den Entfernungen r_1 und r_2 vor dem einen Pole eines ziemlich langen Magnetstabes, der in dem magnetischen Meridian so befestigt ist, dass sein Nordpol nach Norden weist. Sind nun n, n_1, n_2 die durch die drei Versuche ermittelten Schwingungszahlen in der Minute, ist ferner F die Stärke des erdmagnetischen Feldes, F_1 bezw. F_2 die Stärke des Polfeldes in den Entfernungen r_1 und r_2, so bestehen nach dem Satze „die Quadrate der Schwingungszahlen sind den Feldstärken proportional (§ 65)“ folgende Gleichungen

$$n^2 : n_1^2 = F : (F + F_1),$$
$$n^2 : n_2^2 = F : (F + F_2).$$

Durch korrespondierende Subtraktion leiten wir daraus ab

$$n^2 : (n_1^2 - n^2) = F : F_1$$

und

$$n^2 : (n_2^2 - n^2) = F : F_2;$$

daher auch

$$(n_1^2 - n^2) : (n_2^2 - n^2) = F_1 : F_2.$$

Genau angestellte Versuche zeigen aber

$$(n_1^2 - n^2) : (n_2^2 - n^2) = r_2^2 : r_1^2,$$

also

$$F_1 : F_2 = r_2^2 : r_1^2.$$

Da $m_1 \cdot m_2 = K \cdot r^2$, die Dimension von K gleich $M \cdot L \cdot T^{-2}$ und die von r gleich L ist, so ergiebt sich die Dimension von $m_1 \cdot m_2$ zu ML^3T^{-2}. Nun sind die Grössen m_1 und m_2 gleichartig, mithin ist die Dimension von m_1 oder m_2, allgemein die Dimension einer magnetischen Menge, gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$.

Im G. C. S.-System versteht man unter der Einheit der magnetischen Menge oder Polstärke diejenige Menge, die auf die gleiche Menge in der Entfernung von 1 cm die Kraft von 1 Dyne ausübt.

§ 64. Potential; Kraftlinien.

Der Raum um einen Magnetpol, innerhalb dessen eine magnetische Wirkung sich erkennen lässt, heisst sein magnetisches Feld. Unter dem Potential einer magnetischen Menge an einer beliebigen Stelle ihres Feldes versteht man die Arbeit, welche verrichtet werden muss, um die positive magnetische Einheit aus dem Unendlichen bis zu jenem Punkt zu bewegen. Das Potential einer nordmagnetischen Menge ist positiv, das einer südmagnetischen negativ. — Die positive Menge m mit ihrem Sitz in O (Fig. 58) wirkt auf die positive Einheit, welche sich in P in der Entfernung r von O befindet mit der Kraft $\frac{m}{r^2}$.

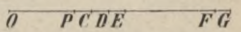

Fig. 58.

Entfernt sich nun die positive Einheit in P von O um die unbeschränkt kleine Strecke $PC = (r_1 - r)$, so wird hierbei die Arbeit $\frac{m}{r^2}(r_1 - r)$ geleistet. Da nun

PC unendlich klein ist, so darf man ohne merklichen Fehler r^2 durch rr_1 ersetzen, und die geleistete Arbeit wird durch den Ausdruck

$$\frac{m}{r \cdot r_1}(r_1 - r) = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

gemessen. Um die Arbeit zu bestimmen, welche für eine endliche Verschiebung längs der Strecke $PG = (r_n - r)$ notwendig ist, denken wir uns dieselbe in die unbeschränkt kleinen Teile PC, CD, DE, ..., FG zerlegt, deren Endpunkte C, D, E, ..., F, G von O die Entfernungen $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n$ haben. Alsdann ist die gesamte geleistete Arbeit

$$m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) + m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \ldots$$
$$+ m\left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right) = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right).$$

Wird nun die Strecke PG unendlich gross, rückt G ins Unendliche, so ist

$$r_n = \infty, \quad \frac{1}{r_n} = 0,$$

mithin ist jene Arbeit gleich $\frac{m}{r}$. Die gleiche Arbeit muss auch geleistet werden, um die positive Einheit aus dem Unendlichen wieder bis zu dem Punkte P zu bringen, daher ist das Potential V von m in der Entfernung r

$$V = \frac{m}{r}.$$

Besitzt der Punkt O eine negative Menge Magnetismus, so leistet diese eine Arbeit, die sich nur im Vorzeichen von der vorigen unterscheidet; sonach ist in diesem Falle

$$V = -\frac{m}{r}.$$

Wenn sich der Punkt P von der Ladung 1 einem System von magnetischen Punkten O mit den Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ in den Entfernungen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ gegenüber befindet, so ist das Potential V des Systems in dem Punkte P

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \ldots = \Sigma \frac{m}{r},$$

wo m das positive oder negative Zeichen erhält, je nachdem die Mengen nord- bezw. südmagnetisch sind. Ist der Punkt P nicht mit der magnetischen Einheitsmenge sondern mit der Menge μ geladen und herrscht an seiner Stelle das Potential V, so beträgt die Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um jene Menge aus dem Unendlichen in diesen Punkt zu bringen $\mu \cdot V$.

Um die Dimension des Potentials zu ermitteln, hat man nur die Dimension der Menge durch die von r zu dividieren. Somit ist die Dimension von V gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Eine Fläche, welche alle Punkte gleichen Potentials verbindet, heisst Niveaufläche und das Verhältnis des Unterschiedes dV zwischen den Potentialen zweier unbeschränkt nahen Punkte zu ihrem Abstand ds das Potentialgefälle. Durch dasselbe wird die längs ds vorhandene Kraftkomponente der auf die magnetische

Einheit wirkenden Kraft gemessen. Linien, welche an jeder Stelle des Feldes durch ihre Tangenten die Richtungen der Kraft angeben, werden Kraftlinien genannt; sie stehen auf den Niveauflächen senkrecht. Die Kraftlinien eines Magnets sind geschlossene Kurven, die einander weder schneiden noch kreuzen. Das Potentialgefälle ist in der Richtung der Kraftlinien am grössten, längs einer Niveaufläche ist es gleich Null. Unter Feldstärke in einem beliebigen Punkt des Feldes versteht man die Kraft, welche auf die dort befindliche magnetische Einheit in der Richtung der bez. Kraftlinie wirkt; sonach ist die Kraft, welche eine magnetische Menge μ in einem Punkt von der Feldstärke φ angreift, gleich $\mu \cdot \varphi$. Ein Feld heisst homogen, wenn seine Stärke überall die gleiche ist, wie z. B. das des Erdmagnetismus. Die Kraftlinien eines homogenen Feldes gehen einander parallel. Durch jeden Punkt eines magnetischen Feldes geht eine Kraftlinie; daher wird streng genommen 1 qcm einer Niveaufläche von unendlich vielen Kraftlinien durchsetzt. Will man jedoch durch diese Kurven auch die Feldstärke veranschaulichen, so trifft man folgende Festsetzung: Herrscht in einem Punkt des magnetischen Feldes die Stärke φ, so sollen das den Punkt umgebende Flächenelement nur soviele Kraftlinien durchsetzen, dass auf 1 qcm der Niveaufläche φ Kraftlinien kommen. Die Gesamtzahl der Kraftlinien eines homogenen Feldes von dem Querschnitt q und der Stärke φ ist $q \cdot \varphi$.

Legt man durch sämtliche Peripheriepunkte einer geschlossenen Kurve in einem magnetischen Felde die Kraftlinien, so umschliessen dieselben eine Kraftröhre. Die Zahl der einen Querschnitt der Röhre durchsetzenden Kraftlinien nennt man den Kraftfluss der Röhre. Kraftröhren, welche den Kraftfluss 1 führen, heissen Einheitsröhren. Ist q der Querschnitt der Einheitsröhre an einer Stelle, so ist die daselbst herrschende Feldstärke 1 : q.

§ 65. Erdmagnetismus.

Der Winkel zwischen dem magnetischen und dem geographischen Meridian eines Ortes heisst magnetische Deklination und der Winkel, welchen die magnetische Achse einer im magnetischen Meridian aufgehängten Inklinationsnadel in der Ruhelage mit der Horizontalebene bildet, wird magnetische Inklination genannt. Die Deklination, die Inklination wie auch die Intensität des Erdmagnetismus sind von Ort zu Ort veränderlich. Die Isogonen verbinden Erdorte gleicher Deklination, die Isoklinen die Orte gleicher Inklination und die Isodynamen die Orte gleicher Intensität. Der magnetische Zustand der Erde unterliegt sowohl periodischen Änderungen wie auch unregelmässigen Störungen.

Das vom Erdmagnetismus erzeugte magnetische Feld darf als ein gleichförmiges angesehen werden, dessen Kraftlinien parallel der magnetischen Achse der Inklinationsnadel sind. Um seine Äusserungen auf eine bewegte Deklinationsnadel kennen zu lernen, zerlegen wir es in ein wagrechtes und ein lotrechtes. Ist dabei H die Feldstärke des ersteren, so wirkt auf jede nordmagnetische Menge m des nadelförmigen Magnets die Kraft mH. Da nun alle diese Einzelkräfte unter sich parallel sind, so lassen sie sich zu einer Resultante von der Grösse $\Sigma mH = H\Sigma m = HM$ zusammensetzen. Ebenso gross ist die auf die südmagnetische Mengen ausgeübte Gesamtkraft, jedoch von entgegengesetzter Richtung. Demnach bilden die beiden Resultierenden ein Kräftepaar, dessen Angriffspunkte die Pole der Magnetnadel und deren Verbindungslinie die magnetische Achse der Nadel heissen. Die in einem Pole vereinigt gedachte Menge Nord- bezw. Südmagnetismus, also Σm oder M, heisst die Polstärke des Magnets. Schneidet die magnetische Achse AB (Fig. 59) einer Deklinationsnadel den magnetischen Meridian NS unter dem Winkel α, ist M die Polstärke und a die Länge der Achse AB, so ist das Drehungsmoment des Kräftepaars gleich H · M · a sin α. Bezeichnen wir das Produkt aM = $\mathfrak{M}$ als magnetisches Moment des Stabmagnets, so wird das Moment des Kräftepaars durch H$\mathfrak{M}$ sin α ausgedrückt. Dieses erreicht seinen grössten Wert H$\mathfrak{M}$, wenn $\alpha = 90^0$, d. h. wenn der Magnet senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht.

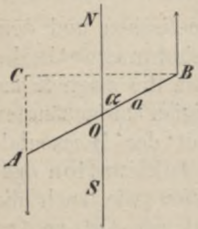

Fig. 59.

Unter Anwendung der Pendelgesetze des § 21 finden wir ferner für die Dauer T in Sekunden einer einfachen Schwingung (eines Hin- oder Herganges) von geringer Ausschlagsweite

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{H\mathfrak{M}}},$$

wo $\mathfrak{S}$ das Trägheitsmoment des Magnetstabes bedeutet. Macht nun die Nadel in einer Minute n einfache Schwingungen, so ist $n = \frac{60}{T}$, mithin

$$n = \frac{60}{\pi}\sqrt{\frac{H \cdot \mathfrak{M}}{\mathfrak{S}}} = \frac{60}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}}} \cdot \sqrt{H}.$$

Ändert sich der Magnetismus der Nadel nicht, so ist der Faktor $\frac{60}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}}}$ konstant und kann etwa gleich $\sqrt{\gamma}$ gesetzt werden; dann ist

$$n^2 = \gamma \cdot H.$$

Zur Bestimmung der Inklination i benutzt man das sogenannte Inklinatorium, wobei man die Neigungen der Nadel gegen die Horizontalebene in zwei beliebigen, zu einander senkrechten Lagen des geteilten Kreises beobachtet. Sind diese Neigungen α_1 und α_2, so bestimmt sich i aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg}^2 i = \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2.$$

Begründung. Macht die vertikale Ebene der Inklinationsnadel mit dem magnetischen Meridian den Winkel φ und verstehen wir unter V und H die Vertikal- bezw. Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft, so wirken auf die Nadel nur diejenigen Seitenkräfte drehend ein, welche in die Ebene des geteilten Kreises fallen. Das sind V und H cos φ; folglich bestimmt sich die Neigung α_1 der Nadel aus der Beziehung

$$(1) \qquad \operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{H \cos \varphi}{V} = \operatorname{ctg} i \cdot \cos \varphi.$$

Wird jetzt der Kreis um 90^0 gedreht, so haben wir α_1 durch α_2 und φ durch $(90 + \varphi)$ zu ersetzen und finden entsprechend

$$(2) \qquad \operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} i \cdot \cos(90 + \varphi).$$

Wir quadrieren und addieren die Gleichungen (1) und (2), wodurch sich die oben ausgesprochene Relation ergiebt, nämlich

$$\mathrm{ctg}^2\, \mathrm{i} = \mathrm{ctg}^2\, \alpha_1 + \mathrm{ctg}^2\, \alpha_2.$$

Die Horizontalkomponente H des Erdmagnetismus beträgt für Mitteleuropa 0,198 $\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Ist nun i die Inklination, so beträgt die Gesamtintensität J des Erdmagnetismus

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{H}}{\cos \mathrm{i}}.$$

VI. Abschnitt.

Elektrik.

§ 66. Einleitung; Gesetz von Coulomb.

I. Einleitendes. Es giebt zwei Arten von Elektrizität: positive (Glaselektrizität) und negative (Harzelektrizität).

Gleichartige Elektrizitäten stossen sich ab, ungleichartige ziehen sich an. Beide Elektrizitäten erscheinen immer gleichzeitig und in gleicher Menge. Ferner unterscheidet man gute und schlechte Leiter und Halbleiter der Elektrizität. Soll ein guter Leiter die Elektrizität bewahren, so muss er isoliert sein. Die einem guten Leiter mitgeteilte Elektrizität verbreitet sich nur auf seiner Oberfläche. Bei der Vergrösserung derselben nimmt die Ladung eines einzelnen Teiles merklich ab. Auf der Oberfläche eines kugelförmigen Leiters hat die elektrische Ladung überall die gleiche Dichte. Bei Leitern von anderer Gestalt ist dies nicht mehr der Fall; insbesondere herrscht in Spitzen eines elektrisch geladenen Leiters eine besonders grosse Ladungsdichte.

II. Das Gesetz von Coulomb. Die Kraft, welche zwei kleine elektrische Körper aufeinander ausüben, ist den elektrischen Mengen direkt und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional. Bezeichnen wir demnach jene Kraft mit K, mit e_1 und e_2 die elektrischen Mengen, mit r den Abstand und mit α einen gewissen Faktor, so ist der mathematische Ausdruck für das Coulombsche Gesetz

$$K = \alpha \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}.$$

Die Grössen e_1 und e_2 sind positiv bezw. negativ in die Rechnung einzuführen, je nachdem sie positive bezw. negative elektrische Mengen bedeuten. Da ausserdem die Wahl der Mengeeinheit freisteht, so wählt man diese so, dass $\alpha = 1$ wird. In diesem Fall hat man

$$K = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}.$$

Die Dimension von K ist gleich $\frac{\text{Dimension von } e^2}{\text{Dimension von } r^2}$, oder

$$M \cdot L \cdot T^{-2} = \frac{\text{Dimension von } e^2}{\text{Dimension von } r^2},$$

hieraus

$$\text{Dimension von e gleich } M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

Im C. G. S.-System verstehen wir unter der elektrostatischen Einheit der Elektrizitätsmenge diejenige Ladung, welche auf eine gleich grosse Menge in der Entfernung von 1 cm die Kraft von 1 Dyne ausübt. Jedoch ist die in der Praxis benutzte, auf anderer Grundlage gewonnene Einheit, 1 Coulomb, $3 \cdot 10^9$ mal so gross.

§ 67. Potential; Kraftlinien.

Da für magnetische und elektrische Mengen das gleiche Gesetz der Anziehung und Abstossung gilt, so lassen sich die in § 64 entwickelten Begriffe unmittelbar auf das Gebiet der Elektrizität übertragen.

Der Raum um eine elektrische Menge, innerhalb dessen elektrische Wirkungen wahrnehmbar sind, heisst das elektrische Feld. Es erstreckt sich dem Coulombschen Gesetz gemäss eigentlich bis ins Unendliche, kann aber, weil die elektrischen Wirkungen bei zu grossen Abständen nicht bemerkbar sind, allseitig als begrenzt angesehen werden. Unter dem elektrischen Potential in einem bestimmten Punkt eines elektrischen Feldes wird die Arbeit verstanden, die aufgewendet werden muss, um die positive Elektrizitätsmenge 1 aus dem Unendlichen an diesen Punkt zu bringen. (Praktisch: von einem wirkungslosen Punkt ausserhalb des Feldes an den betreffenden Punkt innerhalb desselben.) Man erhält das Potential V einer elektrischen Menge in einem gegebenem Punkt, wenn man die mit ihren Vorzeichen versehene Menge m durch den Abstand r dividiert, der zwischen dem Punkt und dem Sitz der Menge besteht. Demnach ist

$$V = \pm \frac{m}{r}.$$

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Entfernungen des gegebenen Punktes von den elektrischen Ladungen m_1, $m_2, \ldots, m_n$, so ist der mathematische Ausdruck für das Potential V in dem fraglichen Punkt

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots \frac{m_n}{r_n} = \Sigma \frac{m}{r},$$

wo m das positive oder negative Zeichen je nach der Art der elektrischen Menge zu erhalten hat.

Die Dimension des Potentials ist $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Im C. G. S.-System herrscht zwischen zwei Punkten die Einheit des Potentialunterschiedes, wenn die Verschiebung der elektrischen Mengeneinheit von dem einen Punkt zum anderen die Arbeit von 1 Erg erfordert oder leistet.

1 Volt ist der $3 \cdot 10^2$te Teil dieser Einheit.

Das Potential der Erde pflegt man gleich Null zu setzen. — Die Fläche, welche in einem elektrischen Feld die Punkte gleichen Potentials verbindet, heisst eine Niveaufläche; das Verhältnis des Unterschieds dV zwischen den Potentialen zweier unbeschränkt nahen Punkte zu ihrem Abstand ds wird das Potentialgefälle genannt. Linien, welche an jeder Stelle des elektrischen Feldes durch ihre Tangenten dortselbst die Richtung der Kraft angeben, nennt man Kraftlinien; sie stehen auf den Niveauflächen senkrecht. Wir setzen die Kraftlinien in der Richtung positiv, in der die frei bewegliche positive Elektrizität fliessen würde. Unter der Feldstärke (elektromotorischen Kraft) in einem beliebigen Punkt des Feldes versteht man die Kraft, welche auf die dort befindliche elektrische Einheit (in der Richtung der betreffenden Kraftlinie) wirkt. Herrscht in einem Punkte des elektrischen Feldes die Stärke φ, so denkt man sich das den Punkt umgebende Element von sovielen Kraftlinien durchsetzt, dass auf 1 qcm der durch den Punkt gehenden Niveaufläche φ Kraftlinien kommen.

§ 68. Leiter. Kapazität. Elektrische Energie.

Befindet sich die einem Leiter mitgeteilte Elektrizität im Zustand des Gleichgewichts, so lagert sie nur auf seiner Oberfläche und alle Punkte derselben haben das gleiche Potential, woraus folgt, dass die Oberfläche eine Niveaufläche ist.

Das Potential eines Leiters ist der Ladung proportional.

Diejenige Elektrizitätsmenge C (ausgedrückt in Coulomb), die der Leiter erfordert, um auf das Potential 1 gebracht zu werden (oder um sein Potential um 1 zu erhöhen) nennt man die Kapazität des Leiters; folglich ist die Elektrizitätsmenge Q, die den Leiter auf das Potential V bringt

$$Q = C \cdot V,$$

daher

$$C = \frac{Q}{V}. \tag{1}$$

Die Dimension der Kapazität ist

$$\frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = L.$$

Ist $Q = 1$ Coulomb, $V = 1$ Volt, so ist $C = 1$ Farad; 1 Mikrofarad ist gleich $\frac{1}{10^6}$ Farad.

$$1 \text{ Farad} = \frac{3 \cdot 10^9 \, g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{3}{2}} \, sec^{-1}}{3^{-1} \, 10^{-2} \, g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{1}{2}} \cdot sec^{-1}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$$

absolute Einheiten der Kapazität.

Die Kapazität eines kugelförmigen Leiters wird durch den Radius der Kugel gemessen. Auf der Oberfläche eines kugelförmigen Leiters ist die elektrische Ladung gleichmässig verteilt, sie hat überall die gleiche Dichte. Unter der Dichtigkeit der Elektrizität bei gleichmässiger Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche versteht man die auf der Flächeneinheit vorhandene Ladung, bei ungleichmässiger Verteilung hingegen diejenige Elektrizitätsmenge, welche der Flächeneinheit zukäme, wenn die Elektrizität auf ihr ebenso wie an der zu untersuchenden Stelle verteilt wäre.

Energie. Wird ein isolierter Leiter nach und nach mit Elektrizität geladen, indem man die elektrischen Einheiten nacheinander auf den Leiter sich gebracht denkt, so ist die zu leistende Einzelarbeit für jede folgende Einheit grösser als für die vorhergehende. Das Potential des Leiters wächst somit von dem Anfangswert 0 der zugeführten Ladung Q entsprechend bis auf den Endwert V an. Demnach ist die geleistete Gesamtarbeit A gerade so gross als ob man die Gesamtladung Q auf einmal dem Leiter von dem Potential $\frac{1}{2}V$ zugeführt hätte; daher

$$A = \frac{1}{2} V \cdot Q. \tag{2}$$

Eliminieren wir aus den Gleichungen (1) und (2) die Grösse Q oder V, so erhalten wir

$$A = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

Die Arbeit A heisst die potentielle elektrische Energie des geladenen Leiters.

§ 69. Kondensator.

Ein Kondensator besteht aus der isolierten Kollektorplatte; der mit der Erde leitend verbundenen Kondensatorplatte und einem zwischen beiden Platten befindlichen isolierenden Mittel. Bei einer solchen Anordnung besitzt die Kollektorplatte eine grössere Kapazität C_1 als wenn sie allein vorhanden wäre, für welchen Fall ihre Kapazität C sein möge. Das Verhältnis $\frac{C_1}{C}$ der beiden Kapazitäten nennt man die Verstärkungszahl k des Apparates. Es ist also

$$k = \frac{C_1}{C}.$$

Die Kapazität eines Kondensators hängt von der Form und Grösse der beiden Leiter, ihrer gegenseitigen Entfernung und von der Art des Mediums, dem Dielektrikum, ab. Verwendet man als Dielektrikum das eine Mal Glas ein anderes Mal Luft, so ist im ersteren Falle die Kapazität des Kondensators grösser als im zweiten. Demnach: Unter der Dielektrizitätskonstanten i eines Dielektrikums versteht man die Zahl, welche angiebt, wievielmal so gross die Kapazität des Apparates ist, wenn das betreffende Dielektrikum als Zwischenschicht benutzt wird, als seine Kapazität, falls Luft als isolierendes Mittel dient.

Ist O die Oberfläche der gebräuchlichen Kondensatoren, d die Wandstärke, i die Dielektrizitätskonstante, C die Kapazität, Q die Ladung, V das Potential und A die Energie der Ladung, so bestehen die Beziehungen

$$C = \frac{i \cdot O}{4\pi d}; \quad Q = C \cdot V; \quad A = \frac{1}{2} Q \cdot V.$$

§ 70. Der galvanische Strom; das Gesetz von Ohm.

Die an den Polen eines galvanischen Elementes auftretende Elektrizität besitzt einen gewissen durch chemische Kräfte erzeugten Potentialunterschied, welcher erhalten bleibt, auch wenn man das Potential an einem der beiden Pole willkürlich ändert. Die elektromotorische Kraft des Elementes wird durch diesen Unterschied gemessen; sie erweist sich als abhängig von der materiellen Beschaffenheit des Elektrizitätserregers und wächst mit der Zahl der hintereinander geschalteten Elemente, hingegen ist sie von der Grösse der Erregerflächen unabhängig. Als Einheit der elektromotorischen Kraft nimmt man die Einheit des Potentials. Die technische Einheit derselben ist jedoch das Volt. Die Elektrizitätsmenge, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt einer geschlossenen Leitung geht, heisst Stromstärke; ihre technische Einheit ist das Ampère, d. h. jene Intensität, bei der in einer Sekunde durch jeden Querschnitt 1 Coulomb fliesst. In einer geschlossenen Leitung ist die Stromstärke überall die gleiche.

Das Gesetz von Ohm. Der Widerstand, welchen die strömende Elektrizität an einer bestimmten Stelle der Leitung erfährt, ist einmal proportional der Geschwindigkeit der Bewegung, d. h. proportional der Elektrizitätsmenge, welche in einer Sekunde durch die Einheit des Querschnittes an jener Stelle hindurchgeht; dann aber auch abhängig von der materiellen Beschaffenheit des Leiters. Bezeichnen wir mit l die Länge, mit q den Querschnitt, mit k die spezifische Leitungsfähigkeit eines Leiterstückes, ferner mit $(V_1 - V_2)$

den Potentialunterschied an beiden Enden und mit J die Stromstärke, so ist zunächst

$$J = kq \cdot \frac{V_1 - V_2}{l}.$$

Geben wir dieser Gleichung die Gestalt

$$J = \frac{V_1 - V_2}{l : kq},$$

und setzen wir

$$V_1 - V_2 = e$$

(elektromotorische Kraft) und

$$\frac{l}{kq} = r,$$

so ist

$$J = \frac{e}{r}.$$

Die Arbeit $\frac{l}{kq}$ heisst der Widerstand und $\frac{1}{k}$ der spezifische Widerstand des Leiters. Aus der Beziehung $r = \frac{l}{kq}$ folgt der Satz:

Der Widerstand eines Leiterstückes ist seiner Länge l direkt und seinem Querschnitt q indirekt proportional.

Trägt man die Widerstände als Abscissen, die Potentiale als Ordinaten auf, so wird durch die Tangente des Winkels, den die Potentialgerade mit der x-Achse bildet, die Stromstärke angegeben.

Haben die verschiedenen Teile einer geschlossenen Leitung die Widerstände $r_1, r_2, \ldots, r_n$, so besteht die Beziehung

$$J = \frac{V_0 - V_1}{r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_2} = \ldots = \frac{V_{n-1} - V_n}{r_n},$$

woraus folgt

$$J = \frac{V_0 - V_n}{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}.$$

Es ist aber $V_0 - V_n$ die elektromotorische Kraft E und $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$ der Gesamtwiderstand R des Stromkreises, also

$$J = \frac{E}{R}.$$

In Worten: Die Stromstärke ist der elektromotorischen Kraft direkt und dem Gesamtwiderstand indirekt proportional (Gesetz von Ohm).

Die technische Einheit des Widerstandes ist das Ohm ($1\ \Omega$); es ist derjenige Widerstand, bei welchem die Potentialdifferenz von 1 Volt einen Strom von 1 Ampère hervorbringt; denn

$$1\,A = \frac{1\,V}{1\,\Omega}.$$

Eine Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 106 cm Länge bei 0° C. leistet dem Durchgang des Stromes den Widerztand eines legalen Ohms.

Die Dimension der elektromotorischen Kraft ist gleich der der Potentialdifferenz gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Die Dimension der Stromstärke ist gleich der Dimension der Menge durch die Dimension der Zeit gleich

$$\frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{T} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Die Dimension des Widerstandes ist gleich der Dimension des Potentials durch die Dimension der Stärke gleich

$$\frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}} = L^{-1} T.$$

Im elektrostatischen System ist ferner

$$1\,\Omega = \frac{1\,V}{1\,A} = \frac{\frac{1}{300}\, g^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{1}{2}}\, sec^{-1}}{3 \cdot 10^{9} \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot cm^{\frac{3}{2}} \cdot sec^{-2}}$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \cdot cm^{-1} \cdot sec.$$

§ 71. Stromstärke; Bussole.

Chemisches Mass. Die Stromstärke steht in geradem Verhältnis zu der Menge des in der Zeiteinheit entwickelten Knallgases. 1 Ampère liefert in jeder Minute 10,44 ccm Knallgas bei 0^{0} C. und 760 mm Druck.

Magnetisches Mass. Gesetz von Biot-Savart. Die Einwirkung eines kleinen Stromteiles auf einen Magnetpol erfolgt senkrecht zu der durch den Stromteil und den Magnetpol gelegten Ebene und ist proportional der Pol- und Stromstärke, der Länge des Stromteiles, dem Sinus desjenigen Winkels, welchen die Verbindungslinie des Poles zum Stromteil mit letzterem bildet und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Stromteiles vom Pol. In der Fig. 60 ist AB = 1 die

Länge des Stromelementes, i die in ihm vorhandene Stromstärke, P der Magnetpol von der Stärke m, $AP = BP = r$, $\sphericalangle ABP = \alpha$ und c ein konstanter Faktor. Die ablenkende Kraft d ist nun nach dem obigen Gesetz

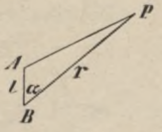

Fig. 60.

$$d = \frac{c \cdot l \cdot i \cdot m \cdot \sin \alpha}{r^2}.$$

Um den Ausdruck umzuformen, führen wir den Inhalt f des $\triangle$ ABP ein; derselbe ist

$$f = \frac{1}{2} l \cdot r \cdot \sin \alpha,$$

mithin

$$d = \frac{2 c i m f}{r^3}.$$

Liegt P im Zentrum eines Kreisstromes, so übt jedes seiner Elemente auf den Magnetpol einen Druck gleich d aus; folglich ist die ablenkende Kraft D des ganzen Kreises

$$D = \Sigma \frac{2 c i m f}{r^3} = \frac{2 c i m}{r^3} \Sigma f = \frac{2 c i m}{r^3} \cdot r^2 \pi = \frac{2 \pi c i m}{r}.$$

Fliesst der Strom in n Windungen um den Pol, so ist die Gesamtwirkung n-mal so gross, gleich

$$2\pi \cdot n \cdot c \cdot \frac{i \cdot m}{r}.$$

Tangentenbussole. (Fig. 61.) Die Magnetnadel PP_1 befindet sich im Zentrum des in den magnetischen Meridian NS gestellten Stromkreises. Bei Beginn der

Messung weist der Zeiger der Deklinationsnadel auf 0^0, nach Schliessung des Stromes ergiebt sich eine Ablenkung um α^0. Ist m die Polstärke des Magnetes, ist ferner der Abstand $PP' = l$ der Pole im Vergleich zum Radius r der Strombahn gering, so wirkt der Strom auf den Pol P mit der Kraft

$$PA = \frac{2 c \pi i m}{r}$$

und zwar senkrecht zum magnetischen Meridian. Ebenso

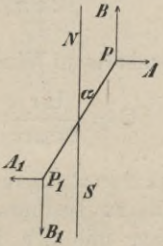

Fig. 61.

gross ist der Druck $P_1 A_1$ des Stromes auf den Pol P_1. Beide Kräfte bilden ein Paar vom Drehungsmoment

$$\frac{2 c \pi i m}{r} l \cos \alpha.$$

Der Erdmagnetismus sucht die Nadel wieder in den magnetischen Meridian zurückzuführen. Ist H die Stärke des horizontalen magnetischen Feldes, so haben die an den Polen P und P_1 parallel zum Meridian wirkenden Kräfte den Wert

$$PB = P_1 B_1 = mH,$$

und das Moment dieses Paares beträgt $m H l \sin\alpha$. Für den Zustand des Gleichgewichts besteht sonach die Beziehung

$$m H l \sin\alpha = \frac{2 c \pi i m}{r} \cdot l \cos\alpha;$$

hieraus

$$i = \frac{H r}{2 c \pi} \cdot \operatorname{tg}\alpha = C \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

wofern

$$C = \frac{H r}{2 c \pi}$$

gesetzt wird.

Führt der Stromkreis n Windungen, so ist

$$C = \frac{H r}{2 c n \pi}.$$

Um den Reduktionsfaktor der Tangentenbussole auf technisches Mass zu bestimmen, schaltet man ein Voltameter zusammen mit der Bussole in denselben Stromkreis ein. Aus der entwickelten Knallgasmenge schliesst man (chemisches Mass) auf die Stärke des Stromes in Ampères. Dividiert man nun diese Zahl mit der Tangente des Ablenkungswinkels, so erhält man den Reduktionsfaktor der Tangentenbussole auf Ampères.

Die Sinusbussole. Sie unterscheidet sich von der Tangentenbussole dadurch, dass die Ebene des Stromkreises nach Schliessen des Stromes nicht in dem magnetischen Meridian festgestellt bleibt, sondern der abgelenkten Magnetnadel nachgedreht wird, bis die Deklinationsnadel wieder in die Ebene des Stromkreises fällt. Es sei nun (Fig. 62) NS der magnetische Meridian, PP_1 die um α^0 abgelenkte Magnetnadel, l der Abstand PP_1 der Pole, m die Polstärke, H die Stärke des horizontalen Feldes des Erdmagnetismus, i die Stromstärke und r der Radius des Stromkreises. Weil nach der Ablenkung die Nadel wieder in der Ebene des

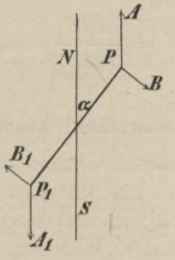

Fig. 62.

Stromkreises liegt, so stehen die vom Strom in P und P_1 erzeugten Drucke senkrecht zu PP_1 und sind gleich

$$\frac{2 c \pi i m}{r}.$$

Das Moment des Kräftepaares ist demnach

$$\frac{2 c \pi i m}{r} \cdot l.$$

Das horizontale Feld des Erdmagnetismus wirkt durch das Kräftepaar PA, P_1A_1 auf die Nadel ein, und das Drehungsmoment dieses Paares ist $H m l \sin \alpha$. Für den Zustand des Gleichgewichts besteht sonach die Beziehung

$$\frac{2 c \pi i m l}{r} = H m l \sin \alpha,$$

folglich

$$i = \frac{H r}{2 c \pi} \cdot \sin \alpha.$$

Liegen auf dem Ring der Sinusbussole n Windungen, so ist

$$i = \frac{H r}{2 c n \pi} \cdot \sin \alpha.$$

§ 72. Stromstärke einer Batterie.

Der Gesamtwiderstand eines galvanischen Elementes von der Stromstärke i und der elektromotorischen Kraft e zerfällt in zwei Teile: in den Widerstand innerhalb des Elementes und in den Widerstand des Schliessungsbogens. Letzteren bezeichnen wir mit a, ersteren mit w und nennen diesen den wesentlichen Widerstand. Nach dem Satz von Ohm ist alsdann

$$i = \frac{e}{a + w}.$$

I. Sind n gleiche Elemente hintereinander geschaltet (ungleichnamig verbunden, in Serienschaltung), so hat sich die elektromotorische Kraft wie auch der innere Widerstand ver-n-facht. Die Stromstärke der Batterie ist daher

$$(1) \qquad i = \frac{n e}{a + n \cdot w} = \frac{e}{\frac{a}{n} + w},$$

d. h. ebenso gross wie die eines einzigen Elementes, bei dem der äussere Widerstand auf den n^{ten} Teil reduziert ist.

α) Wenn a klein gegen w ist, so geht die Gleichung (1) angenähert in die

$$i = \frac{e}{w}$$

über, welche aussagt, dass die Stromstärke der Batterie gleich der eines einzigen Elementes sei.

β) Wenn jedoch n · w gegen a vernachlässigt werden darf, so ergiebt sich

$$i = \frac{n e}{a} = n \cdot \frac{e}{a},$$

mit Worten: Bei grossem äusseren Widerstand ist die Stromstärke der Anzahl der Elemente proportional.

II. Werden n gleiche Elemente von der elektromotorischen Kraft e und dem inneren Widerstand w nebeneinander geschaltet (gleichnamig verbunden, parallel geschaltet), so ist bei einem äusseren Widerstand a die Stromstärke der Batterie

$$(2) \qquad i = \frac{e}{a + \frac{w}{n}}.$$

Begründung. Alle die positiven Platten bilden zusammen eine grosse positive und alle die negativen Platten zusammen eine grosse negative Platte, welche der positiven gegenüber steht. Die elektromotorische Kraft hängt jedoch nicht von der Grösse der Erregerplatten ab, sie ist also ebenso gross wie die eines einzigen Elementes. Aber bei dieser Anordnung wird der Querschnitt der Flüssigkeit, durch welche der Strom fliesst, n-mal so gross wie der eines Elementes, mithin reduziert sich der innere Widerstand der Kette auf den n^{ten} Teil von dem eines Elementes.

α) Ist a sehr klein gegen w, so geht die Gleichung (2) über in

$$i = \frac{ne}{w},$$

d. h. die Stromstärke wächst mit der Zahl der Elemente.

β) Wenn w gegen a verschwindet, so ergiebt sich aus (2) die Beziehung

$$i = \frac{e}{a},$$

d. h. die Stromstärke ist so gross wie die eines Elementes.

III. Hat man eine grössere Zahl von gleichen Elementen zur Verfügung, so erzielt man die grösste Stromstärke, wenn immer gleichviel Elemente nebeneinander zu Gruppen verbunden und diese hintereinander geschaltet werden, so dass der innere Widerstand gleich dem äusseren wird.

Begründung. Es sei e die elektromotorische Kraft und w der innere Widerstand eines Elementes, ferner a der gegebene äussere Widerstand, n die Zahl der Elemente in p Gruppen zu je q Elementen angeordnet. Bei dieser Verbindung ist die Stromstärke der Kette

$$i = \frac{e}{\frac{a}{p} + \frac{w}{q}}.$$

Ausserdem ist

$$p \cdot q = n.$$

Soll nun die Stromstärke ein Maximum werden, so muss der Nenner $\frac{a}{p} + \frac{w}{q}$ ein Kleinstes sein; d. h. die

Summe zweier Zahlen $\frac{a}{p}$ und $\frac{w}{q}$, deren Produkt $\frac{a\,w}{n}$ gegeben ist, soll den kleinsten Wert erreichen. Planimetrisch gefasst lautet diese Forderung: Welches Rechteck von gegebenem Inhalt hat den kleinsten Umfang? Bekanntlich erfüllt das Quadrat diese Bedingung. Man hat also

$$\frac{a}{p} = \frac{w}{q} = \sqrt{\frac{a \cdot w}{n}},$$

daher

$$p = \sqrt{\frac{n\,a}{w}}$$

und

$$q = \sqrt{\frac{n \cdot w}{a}}.$$

§ 73. Stromverzweigung; Sätze von Kirchhoff.

1) In einer einfachen, geschlossenen Leitung ist die Stromstärke überall die gleiche; wenn aber an irgend einer Stelle die Leitung sich gabelt, dann sind die Stromstärken in den beiden Zweigen unter sich und von der der Hauptleitung verschieden, und ihre Intensitäten lassen sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes ermitteln. Zu dem Ende treffen wir folgende Festsetzungen. Der Strom von der Stärke i teile sich in B in die beiden Zweige BCE und BDE, die sich in E wieder vereinigen. Die Potentiale in B und E seien V und V_1, die Widerstände bezw. Stromstärken auf den Wegen BCE und BDE seien r_1 und r_2 bezw. i_1 und i_2. Alsdann ist zunächst

(1) $$i = i_1 + i_2.$$

Ferner bestehen die beiden Beziehungen

$$(2) \qquad i_1 = \frac{V - V_1}{r_1} \quad \text{und} \quad i_2 = \frac{V - V_1}{r_2}.$$

Hieraus folgt

$$i_1 : i_2 = r_2 : r_1.$$

In Worten: „Bei einer Zweiteilung des Stromes verhalten sich die Stromstärken in den Zweigen umgekehrt wie die Widerstände in denselben.“ — Denken wir uns weiter die beiden Wege BCE und BDE durch eine Leitung von solchem Widerstand r_0 ersetzt, dass sich die Verhältnisse ausserhalb der Verzweigung nicht ändern, so haben wir die Gleichung

$$(3) \qquad i = \frac{V - V_1}{r_0}.$$

Addiert man nun die Gleichungen (2) und berücksichtigt dabei die Gleichung (1), so findet man

$$i = (V - V_1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

folglich

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

oder

$$(4) \qquad r_0 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt weiter

$$V - V_1 = i \cdot r_0 = i_1 \cdot r_1 = i_2 \cdot r_2,$$

daher

$$(5) \qquad i_1 = \frac{i \cdot r_0}{r_1}; \quad i_2 = \frac{i \cdot r_0}{r_2}.$$

Ist e die elektromotorische Kraft im ganzen Stromkreis, a der Widerstand mit Ausschluss des Widerstandes r_0 im Zweigsystem, so ist nach der Ohmschen Relation

$$i = \frac{e}{a + r_0} = \frac{e}{a + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{e(r_1 + r_2)}{a(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$

und damit auch

$$i_1 = \frac{e \cdot r_2}{a(r_1 + r_2) + r_1 r_2}; \quad i_2 = \frac{e \cdot r_1}{a(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2}.$$

Sätze von Kirchhoff. Alle auf Stromverzweigungen bezüglichen Probleme, auch wenn mehrere Stromquellen in den verschiedenen Zweigen vorhanden sind, lassen sich mit Hilfe zweier von Kirchhoff aufgestellten Sätze lösen. Diese lauten:

a) An jedem Knotenpunkt ist die algebraische Summe der Stromstärken gleich Null, wenn man die gegen den Kreuzungspunkt gerichteten Ströme mit dem positiven, die von demselben abgehenden mit dem negativen Zeichen versieht; denn der Beharrungszustand, wie er beim elektrischen Strom vorausgesetzt wird, lässt weder eine Zunahme noch eine Abnahme der Elektrizitätsmenge am Knotenpunkt zu. Es ist also

$$\Sigma i = 0.$$

b) Der zweite Satz bezieht sich auf die elektrischen Verhältnisse in einem geschlossenen Stromkreis. Er sagt aus: In jedem geschlossenen Stromkreis, der durch Verzweigungen gebildet wird, ist die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken und den Widerständen der einzelnen Teile. Dabei erhalten die nach der gleichen Richtung thätigen Kräfte und Ströme das gleiche Zeichen. Es ist

$$\Sigma e = \Sigma (i \cdot w).$$

Beispiel. Verzweigung mit Brücke. Wheatstonesche Brücke. Die Stromquelle F von der elektromorischen Kraft E (Fig. 63) liefert einen Strom von der Stärke J, der sich bei A verzweigt; der eine

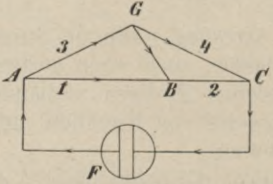

Fig. 63.

Teil fliesst über G nach C, der andere ebenfalls nach C über B; ausserdem sind die Punkte G und B durch eine Querleitung, die Brücke GB verbunden. Es soll untersucht werden, unter welcher Bedingung die Brücke stromlos ist. Zu dem Ende führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sei im

Leitungsstück	AFC	AB	BC	AG	GC	GB
die Stromstärke	J	i_1	i_2	i_3	i_4	i_0,
der Widerstand	R	r_1	r_2	r_3	r_4	r_0.

Nach dem ersten Satz von Kirchhoff ergeben sich die Gleichungen für den Kreuzungspunkt in

$$(1)\qquad A\quad J - i_1 - i_3 = 0,$$

$$(2)\qquad C\quad J - i_2 - i_4 = 0,$$

$$(3)\qquad G\quad i_3 - i_0 - i_4 = 0,$$ $i_3 - i_0 - J + i_2$

$$(4)\qquad B\quad i_1 - i_0 - i_2 = 0.$$

Der zweite Satz von Kirchhoff liefert die Gleichungen für den Kreis

$$(5)\qquad AGB\quad i_0 r_0 + i_3 r_3 - i_1 r_1 = 0,$$ $i_0 r_0 + i_2 r_2$

$$(6)\qquad GBC\quad i_0 r_0 + i_2 r_2 - i_4 r_4 = 0,$$

$$(7)\qquad FABCF\quad JR + i_1 r_1 + i_2 r_2 = E,$$

$$(8)\qquad FAGCF\quad JR + i_3 r_3 + i_4 r_4 = E.$$

Diese 8 Gleichungen sind von einander abhängig; es lässt sich z. B. die erste Gleichung aus den Gleichungen (2), (3) und (4) und die achte aus den Gleichungen (5), (6) und (7) ableiten. Zur Bestimmung der 6 Unbekannten i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, J verbleiben daher noch die Gleichungen (2), (3), (4), (5), (6) und (7). Um die oben gestellte Frage zu beantworten, ist es jedoch nicht notwendig, das vorliegende System linearer Gleichungen aufzulösen, wir können die Antwort schon geben, sowie wir i_0 durch J und die Widerstände ausgedrückt haben.

Aus (2) folgt

$$i_4 = J - i_2;$$

eingesetzt in (3) und (6)

$$(9)\qquad i_2 + i_3 - i_0 - J = 0;$$

$$(10)\qquad i_0 r_0 + i_2(r_2 + r_4) - J r_4 = 0.$$

Aus (9) ergiebt sich

$$i_3 = J + i_0 - i_2;$$

substituiert in (5)

$$(11) \qquad i_0(r_0 + r_3) - i_1 r_1 - i_2 r_3 + J r_3 = 0.$$

Aus (4) bestimmt sich

$$i_2 = i_0 + i_1;$$

eingesetzt in (10) und (11)

$$(12) \quad i_0(r_0 + r_2 + r_4) + i_1(r_2 + r_4) - J r_4 = 0;$$

$$(13) \qquad i_0 r_0 - i_1(r_1 + r_3) + J r_3 = 0.$$

Eliminiert man aus (12) und (13) die Zahl i_1, so erhält man

$$i_0 = \frac{(r_1 r_4 - r_2 r_3) J}{r_0(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_2 + r_4)(r_1 + r_3)}.$$

Die Brücke ist stromlos, wenn $i_0 = 0$ ist, also wenn

$$r_1 r_4 = r_2 r_3$$

ist, oder wenn

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4$$

sich verhält.

§ 74. Widerstand.

I. Messung des Widerstands von Drähten. Zur Bestimmung des Widerstands starrer Körper wendet man die Stromverzweigung mit Brücke an. Die Figur 64 giebt die Anordnung in schematischer Darstellung. In F befindet sich die Stromquelle, zwischen A und G der Rheostat R, zwischen G und C der Draht W, dessen Widerstand w bestimmt werden soll, und zwischen G und B ein Galvanometer M. Längs der geteilten

Schiene AC ist ein homogener, überall gleich starker Draht ausgespannt, auf dem sich ein beweglicher und mit M verbundener Kontakt B verschieben lässt. Nachdem nun vermittelst R ein bekannter Widerstand r ein-

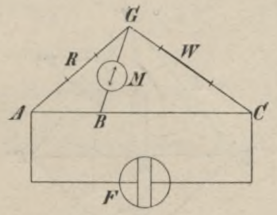

Fig. 64.

geschaltet worden ist, verschiebt man den Kontaktschlitten B auf AC soweit, bis das Galvanometer keinen Ausschlag mehr anzeigt. Dann geht durch GB kein Strom; auch ist das Verhältnis der Widerstände der Leitungsstücke AB und AC gleich dem ihrer Längen, folglich besteht die Proportion

$$r : w = AB : BC,$$

hieraus

$$w = r \cdot \frac{BC}{AB}.$$

II. Messung des inneren Widerstands eines Elements nach dem Verfahren von Mance. Die Anordnung der Teile erfolgt nach Art einer Wheatstoneschen Brücke (Figur 65). In den Leitungsdraht AC wird das Element F, dessen Widerstand x bestimmt werden soll, in die Leitung AB der Rheostat R und in den Bogen BGC das Galvanometer G eingeschaltet. Die Ecke A und der Kontakt E des Messdrahts BC sind mit dem Taster D verbunden, durch welchen die Leitung ADE geöffnet und geschlossen werden kann. Hat man nun in R einen gewissen Widerstand w eingeschaltet, so lässt sich der Kontakt E auf BC so stellen, dass der Aus-

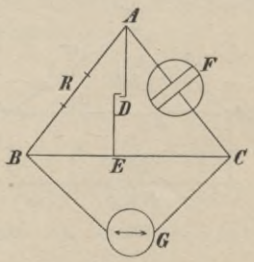

Fig. 65.

schlag des Galvanometers unverändert bleibt, gleichgültig ob man durch den Taster D die Leitung schliesst oder öffnet. In diesem Falle ist der Draht ADE stromlos und es besteht die Proportion

$$w : x = BE : EC;$$

hieraus

$$x = w \cdot \frac{EC}{BE}.$$

§ 75. Elektromotorische Kraft.

Zur Messung der elektromotorischen Kraft eines Elements benutzt man die Kompensationsmethode (Figur 66). Man verbindet hierbei ein kräftiges Hilfselement A mit den Endpunkten C und E eines Rheochords von bekanntem Widerstand w; ferner den einen Pol des Elements B mit C, den anderen mit dem auf CE verschiebbaren Schleifkontakt D und zwar so, dass die gleichnamigen Pole beider Elemente nach E hinweisen. In den Zweig CB fügt man noch ein Galvanometer F ein. Bezeichnen wir nun

in der Leitung	CAE	CFBD	CD
den Widerstand mit	r_1	r_2	r_3,
die Stromstärke mit	i_1	i_2	i_3,

ausserdem die elektromotorischen Kräfte von A und B

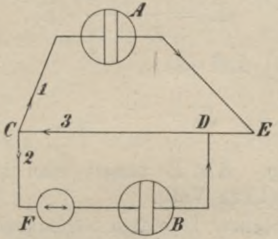

Fig. 66.

mit E_1 und E_2, so gelten nach den Kirchhoffschen Sätzen die Gleichungen

(1) $$i_1 + i_2 - i_3 = 0,$$

(2) $$i_1 r_1 + i_1 (w - r_3) + i_3 r_3 = E_1,$$

(3) $$i_3 r_3 + i_2 r_2 = E_2.$$

Verschiebt man hierauf den Kontakt D soweit, bis die Nadel des Galvanometers auf Null zeigt, dann geht durch den Zweig CBD kein Strom, es ist $i_2 = 0$, wodurch die Gleichungen (1) bis (3) in die folgenden übergehen:

$$(4) \qquad i_1 = i_3,$$

$$(5) \qquad i_1 (r_1 + w) = E_1,$$

$$(6) \qquad i_3 r_3 = E_2.$$

Aus diesem folgt

$$(7) \qquad E_2 = \frac{r_3}{r_1 + w} \cdot E_1.$$

Ersetzt man jetzt das Element B durch das zu untersuchende B_1, so liefert das gleiche Verfahren das Ergebnis

$$(8) \qquad E_2' = \frac{r_3'}{r_1 + w} \cdot E_1,$$

folglich aus (7) und (8)

$$E_2' = \frac{r_3'}{r_3} \cdot E_2.$$

Bemerkung. Als B nimmt man in der Regel ein Daniellelement (1,124 Volt).

Zusatz. Stehen in einem Stromkreise mehrere elektrische Quellen, so ist die elektromotorische Kraft des Kreises gleich der algebraischen Summe aus den Einzelkräften.

§ 76. Stromenergie; Gesetz von Joule.

Fliesst durch einen Leitungsdraht vom Widerstand R, an dessen Enden die Potentiale V und V_1 herrschen, ein Strom von der Stärke J, so ist die von dem Strom in 1 Sekunde geleistete Arbeit (der Effekt) gleich

$$(V - V_1) \cdot J = EJ = J^2 \cdot R.$$

In Worten: D e r E f f e k t e i n e s S t r o m e s i s t g l e i c h d e m P r o d u k t a u s e l e k t r o m o t o r i s c h e r

Kraft und Stromstärke oder aus Widerstand und Quadrat der Stromstärke.

Drückt man die elektromotorische Kraft in V, die Stromstärke in A aus, so ist die Einheit des Effektes 1 VA. Nun ist

$$1\,\mathrm{V} = \frac{1}{300}\,\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1},$$

$$1\,\mathrm{A} = 3 \cdot 10^9\,\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sec}^{-2},$$

daher

$$1\,\mathrm{VA} = 10^7\,\mathrm{g\,cm^2\,sec^{-3}} = 10^7 \text{ Sekunden Erg.}$$

Nach § 11 bezeichnen wir 10^7 Erg mit 1 Joule und die Arbeit von 1 Joule in der Sekunde mit 1 Watt, folglich

$$1\,\mathrm{VA} = 1 \text{ Watt} = \frac{1}{736}\,\mathrm{PS}.$$

Gesetz von Joule. Ist die Stromstärke gleich J, ferner R der Gesamtwiderstand, t die Zahl der Sekunden, A das mechanische Äquivalent der Wärme, so ist die in der Zeit t von dem Strom entwickelte Wärmemenge W, sofern die ganze elektrische Energie auf die Erwärmung des Stromkreises verwendet wird

$$W = \frac{1}{A} \cdot J^2 \cdot R \cdot t,$$

d. h. Die Erwärmung eines Stromkreises ist dem Widerstand und dem Quadrat der Stromstärke direkt proportional.

Nach § 61 ist

$$1 \text{ Grammkalorie} = 4{,}2 \cdot 10^7 \text{ Erg},$$

mithin

$$1 \text{ Erg} = 0{,}24 \cdot 10^{-7} \text{ Grammkalorien},$$

folglich

$$1 \text{ Watt} = 0{,}24 \text{ Grammkalorien} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Wenn man also die Stromstärke in A, den Widerstand in Ohm, die elektromotorische Kraft in V misst, so entwickelt der Strom in t Sekunden

$$0{,}24 \cdot J^2 \cdot R \cdot t \text{ Grammkalorien}.$$

§ 77. Elektrolytisches Gesetz von Faraday.

1. Die von einem Strom in der Sekunde zersetzte Menge eines Stoffes ist der Stärke des Stromes proportional.

2. Geht der Strom durch verschiedene Elektrolyte, so verhalten sich die in der Sekunde ausgeschiedenen Gewichtsmengen wie deren chemische Äquivalentzahlen. (Atomgewichte durch Wertigkeit.)

Beispiele. Die Atomgewichte für H, Zn, Cu sind 1 bezw. 65,2 bezw. 63,2, mithin scheidet derselbe Strom in der gleichen Zeit 2 Gewichtsteile H, 65,2 Zn und 63,2 Cu aus. So oft ein Strom 2 g H im Voltameter entwickelt, löst er im Element 65,2 g Zink auf. 1 A liefert in einer Minute 10,44 ccm Knallgas oder

$$\frac{2}{3} \cdot 10{,}44 \text{ ccm} = 6{,}96 \cdot 0{,}000\,0895 \text{ g H} = 0{,}000\,623 \text{ g H}.$$

Da nun Ag das Atomgewicht 107,7 hat und 1 wertig ist, so liefert 1 A in einer Minute

$$0{,}000\,623 \cdot 107{,}7 \text{ g} = 0{,}0671 \text{ g Silber}.$$

(In 1 Sekunde 0,0011183 g.)

§ 78. Das magnetische Feld eines Stromes.

Rechtehandregel für die Bewegung eines Magnets: Hält man die rechte Hand so an den stromführenden Draht, dass die innere Handfläche der Magnetnadel zugekehrt ist und der Strom gegen die Fingerspitzen fliesst, so giebt der ausgestreckte Daumen die Richtung an, nach welcher der Nordpol abgelenkt wird.

Linkehandregel für die Bewegung des Stromes. Legt man die linke Hand so an den stromführenden Draht, dass die innere Handfläche dem Magnet zugekehrt ist und der Strom gegen die Fingerspitzen fliesst, so giebt der ausgestreckte Daumen die Richtung an, in der sich der stromdurchflossene Leiter bewegt.

Das Feld eines geraden Stromes. Die Thatsache, dass ein Sfrom magnetische Wirkungen hervorruft, zwingt notwendig zu der Annahme, dass auch ein elektrischer Strom sich mit einem magnetischen Feld umgiebt. Die Kraftlinien eines geraden Stromes sind Kreise, deren Ebenen senkrecht zu dem Leiter stehen und deren Zentren auf dem Leiter liegen. Das Feld eines gerade geführten Stromes ist somit ebenso beschaffen, wie das eines einseitig geradlinig begrenzten, unendlichen, magnetischen Blattes. Da nun die Feldstärke des letzteren gleich $\frac{1}{r} \cdot 2\Phi$ ist, (Φ Stärke des Blattes) andererseits aber die Feldstärke des Stromes von der Stärke i in einem Punkte, der von ihm die Entfernung r hat, $\frac{ci}{r}$ beträgt, wo c eine Konstante ist, so übt das magnetische Blatt die gleiche Wirkung aus wie der Strom, wenn $\Phi = \frac{c}{2} \cdot i$ ist. Die Ermittelung der mit

N Magnetismus belegten Seite des Blattes erfolgt nach der Regel: Hält man die rechte Hand an den stromführenden Draht, so dass die innere Handfläche der Richtung zugekehrt ist, in welcher sich das ebene Blatt ins Unendliche erstreckt und der Strom den Fingerspitzen zuströmt, so zeigt der ausgestreckte Daumen auf die mit N Magnetismus belegte Seite des Blattes.

Das Feld eines Kreisstromes. Es soll die Intensität des von einem Kreisstrom hervorgerufenen magnetischen Feldes in einem Punkte bestimmt werden, der auf dem Lote liegt, das man im Mittelpunkt des Kreises auf dessen Ebene errichtet. Zu dem Ende bezeichnen wir die Entfernung des Punktes P von dem

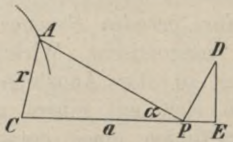

Fig. 67.

Zentrum C mit a (Fig. 67), den Radius mit r und die Stromstärke mit i. Jedes Element δ des Stromes wie z. B. A, übt auf die magnetische Einheit in P eine Wirkung aus, die durch den Ausdruck $\frac{\delta \cdot i}{a^2 + r^2}$ gemessen wird. Diese Kraft steht nach dem Gesetz von Biot-Savart senkrecht zu der durch P und das Element gelegten Ebene, also senkrecht auf AP. Sie werde durch die Strecke PD angegeben. Zerlegen wir nun diese in zwei Komponenten, wovon die eine DE senkrecht zur Achse CP, die andere PE längs der Achse fällt und verfahren wir in gleicher Weise für alle

Stromelemente des Kreises, so heben sich die senkrechten Komponenten auf, während sich die auf der Achse liegenden addieren. Ist nun $\sphericalangle APC = \alpha$, so beträgt die Summe der letzteren Seitenkräfte

$$\Sigma \frac{\delta \cdot i \cdot \sin\alpha}{r^2 + a^2} = \frac{i \cdot \sin\alpha}{r^2 + a^2} \cdot \Sigma\delta = \frac{i \cdot \sin\alpha \cdot 2r\pi}{r^2 + a^2}$$

$$= \frac{2i \cdot r^2 \cdot \pi}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist nun r gegen a klein genug, so geht $(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$ über in a^3 und die Feldstärke des Stromes ist

$$\frac{2i \cdot \pi \cdot r^2}{a^3}.$$

Setzen wir nun an die Stelle des Kreisstromes einen Magnet in C, dessen Achse mit CP zusammenfällt, so ist die von dem Magnet in P erzeugte Feldstärke

$$\frac{4M \cdot l}{a^3},$$

wo unter M die Polstärke und 2l die Länge des Magnets verstanden ist. Das magnetische Moment eines solchen Magnets ist

$$\mathfrak{M} = 2Ml,$$

mithin wird seine Feldstärke durch den Ausdruck

$$\frac{2\mathfrak{M}}{a^3}$$

gemessen. Aus der Vergleichung beider Resultate folgt: Ein Strom von der Stärke i, der die Kreis-fläche πr^2 umfliesst, erzeugt die gleiche Feldstärke wie ein senkrecht zur Stromebene durch das Zentrum des Kreises hindurchgesteckter Magnet von dem Moment $i \cdot \pi r^2$.

§ 79. Elektromagnetisches Masssystem.

Stromstärke. Die Einheit der Stromstärke i hat derjenige Strom, der die Flächeneinheit umfliessend, ebenso in die Ferne wirkt wie ein durch die Mitte des Kreises senkrecht zur Stromebene angebrachter Elementarmagnet vom Moment 1

$$\text{Dimension (i)} = \frac{\text{Dimension des magnetischen Moments}}{\text{Dimension der Fläche}}$$

$$= \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-1}}{L^2} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Aus dem Gesetz von Biot-Savart ergiebt sich auch: Befindet sich die magnetische Menge m im Mittelpunkt des Kreisstromes, so hat die von einem Stromelement ausgeübte Kraft den Wert $\frac{2\,i\,m\,f}{r^3}$, wo unter f die Fläche desjenigen Sektors zu verstehen ist, dessen Bogen b gleich dem Stromelement ist. Dieser Sektor hat den Inhalt $\frac{b\,r}{2}$. Durchfliesst also der Strom einen Bogen gleich dem Radius r, so ist die von ihm ausgeübte Kraft k

$$k = \frac{2\,i\,m}{r^3} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{i \cdot m}{r};$$

hieraus

$$i = \frac{k \cdot r}{m}$$

und

$$\text{Dimension (i)} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

wie oben.

Im G. C. S.-System hat ein Strom die Intensität 1, wenn er durch einen Bogen von 1 cm Länge vom Radius 1 cm fliessend auf die im Zentrum des Kreises befindliche G. C. S. magnetische Einheit mit der Kraft von 1 Dyne wirkt.

Elektrizitätsmenge. Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist diejenige Menge, welche von dem Strom 1 in der Sekunde durch den Querschnitt der Leitung befördert wird.

Dimension der Menge = Dimension der Stromstärke mal Dimension der Zeit $= M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \cdot T = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$.

Elektromotorische Kraft. Als Einheit der elektromotorischen Kraft nimmt man diejenige, welche vorhanden sein muss, wenn der Strom 1 den Effekt 1 hervorbringen soll; daher

Dimension der elektromotorischen Kraft

$$= \frac{\text{Dimension des Effektes}}{\text{Dimension der Stromstärke}}$$

$$= \frac{M L^2 T^{-3}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Widerstand. Die Einheit des Widerstandes ist derjenige Widerstand, bei welchem die Einheit der elektromotorischen Kraft die Einheit der Stromstärke hervorbringt.

$$\text{Dimension des Widerstandes}$$
$$= \frac{\text{Dimension der elektromotorischen Kraft}}{\text{Dimension der Stromstärke}}$$
$$= \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}}$$
$$= L T^{-1} \; (= \text{Dimension der Geschwindigkeit}).$$

Kapazität. Da die Kapazität gleich dem Quotienten aus Menge und Potential ist, so erhält man

$$\text{Dimension der Kapazität} = \frac{\text{Dimension der Menge}}{\text{Dimension des Potentials}}$$
$$= \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}} = L^{-1} T^{2}.$$

Ein Leiter hat die Kapazität 1, wenn die Menge 1 sein Potential um 1 erhöht.

Zusatz. Die elektromagnetische Mengeneinheit ist gleich $3 \cdot 10^{10}$ elektrostatischen Mengeneinheiten

$$\frac{1 \text{ elektromagnetische Einheit}}{1 \text{ elektrostatische Einheit}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}.$$

Praktische Einheiten.

Der Kongress der Elektriker zu Paris hat 1881 beschlossen, dass das elektromagnetische Massystem allgemein eingeführt werden soll. Damit jedoch die praktischen Einheiten nicht zu klein oder zu gross ausfallen und den bis dato gebrauchten möglichst nahe kommen, soll die Masseneinheit 10^{-11} Gramm und die Längeneinheit gleich dem Erdquadranten gleich 10^9 cm betragen. Die Einheit der Stromstärke heisst Ampère, die der elektromagnetischen Kraft Volt, die des Widerstandes Ohm, die der elektrischen Menge Coulomb, die der Kapazität Farad, die der Arbeit Joule und die des Stromeffektes Watt. Wir haben nun

$$1 \text{ Ampère} = 10^{-\frac{11}{2}} \cdot 10^{\frac{9}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{1}{2}} \, sec^{-1}$$

$$= 10^{-1} \cdot g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{1}{2}} \, sec^{-1}.$$

$$1 \text{ Volt} = 10^{-\frac{11}{2}} \cdot 10^{\frac{27}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{3}{2}} \cdot sec^{-2}$$

$$= 10^{8} \, g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{3}{2}} \, sec^{-2}.$$

$$1 \text{ Ohm} = 10^9 \, cm \cdot sec^{-1}.$$

Volt . Kulomb/sec

$$1 \text{ Coulomb} = 10^{-\frac{11}{2}} \cdot 10^{\frac{9}{2}} \, g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{1}{2}}$$

$$= 10^{-1} \cdot g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{1}{2}}.$$

$$1 \text{ Farad} = 10^{-9} \, cm^{-1} \, sec^2.$$

$$1 \text{ Joule} = 10^{-11} \, 10^{18} \, g \, cm^2 \, sec^{-2}$$

$$= 10^7 \, g \, cm^2 \, sec^{-2} = 10^7 \text{ Erg}.$$

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ Volt-Ampère} = 10^7 \, g \, cm^2 \, sec^{-3}$$

$$= 10^7 \text{ Sekundenerg}.$$

$$1 \text{ mkg} = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2}$$
$$= 9{,}81 \text{ Joule.}$$
$$1 \text{ PS} = 75 \text{ mkg} = 736 \cdot 10^7 \text{ Sekundenerg}$$
$$= 736 \text{ Watt.}$$

Zusatz. Die Vorsilben Meg, Mikro, Milli bedeuten das millionenfache, den millionsten Teil, den tausendsten Teil der Einheit, z. B.

1 Megohm = 1 Million Ohm

1 Mikrofarad = 1 milliontel Farad

1 Milliampère = 1 tausendstel Ampère.

Dieser Umstand bewog uns, die „Sammlung Schubert“ ins Leben zu rufen, eine

Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die erstens auf wissenschaftlicher Grundlage beruhen,

zweitens den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen, und

drittens durch eine leicht fassliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

So hoffen wir, dass diese Bücher in doppelter Weise sich brauchbar und nützlich erweisen werden: einerseits für den Mathematiker, der in Fächern, die nicht zu seiner Spezialität gehören, sich unterrichten oder auch nur nachschlagen will, anderseits für den Techniker und Naturwissenschaftler, dem in leicht fasslicher Sprache alles geboten wird, was er von der Mathematik für seine besonderen Zwecke wissen muss. Die Form der Darstellung ist so gewählt, dass die einzelnen Bände in gleicher Weise für den Unterricht, wie für den Selbstunterricht oder zur Repetition geeignet sind.

Die Redaktion des Ganzen liegt in den bewährten Händen des Herrn Professors Dr. Hermann Schubert in Hamburg, mit dessen Hülfe es uns gelungen ist, zur Ausführung des weitangelegten Unternehmens eine stattliche Reihe namhafter Mathematiker zu gewinnen, die teils den Universitätskreisen, teils den Kreisen der höheren Schulen, teils der Praxis angehören.

Jeder Band wird zwischen 8 und 24 Druckbogen in Oktav umfassen. Auf **klare typographische Darstellung**, insbesondere auf **tadellose Figuren**, die, wo nötig, in zwei Farben hergestellt werden, ist besondere Sorgfalt verwendet worden.

Verzeichnis der erschienenen und projektierten Bände der „Sammlung Schubert".

Erschienen sind bis Herbst 1900:

Band
- I: **Elementare Arithmetik und Algebra** v. Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.
- II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.
- III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.
- VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.
- VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.
- VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** v. Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. M. 6.—.
- IX: **Analytische Geometrie des Raumes** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. M. 4.—.
- XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.
- XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. M. 8.—.
- XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. M. 5.20.
- XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz, Wien. M. 8.—.
- XXV: **Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. M. 4.40.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Band
- IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg.
- V: **Niedere Analysis** von Prof. Dr. Herm. Schubert, Hamburg.
- X: **Differentialrechnung** v. Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
- XI: **Integralrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
- XV: **Elemente der Astronomie** v. Dr. Ernst Hartwig, Bamberg.
- XVI: **Mathematische Geographie** v. Dr. Ernst Hartwig, Bamberg.

Band
- XVII: **Anwendungen der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg.
- XVIII: **Geschichte der Mathematik** v. Prof. Dr. A. v. Braunmühl und S. Günther, München.
- XX: **Versicherungsmathematik** von Ferd. Paul in Budapest.
- XXI: **Dynamik** von Dr. Karl Heun in Berlin.
- XXII: **Technische Mechanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.
- XXIII: **Geodäsie** von Prof. Dr. C. Reinhertz in Hannover.
- XXIV: **Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.
- XXVI: **Räumliche projektive Geometrie.**
- XXVII: **Geometrische Transformationen** von Dr. Karl Doehlemann in München.
- XXVIII: **Theorie der höheren algebraischen Kurven.**
- XXIX: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.
- XXX: **Elliptische Funktionen** v. Dr. Paul Epstein, Strassburg.
- XXXI: **Hyperelliptische und Abelsche Funktionen** von E. Landfried in Strassburg.
- XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen.**
- XXXIII: **Invariantentheorie** v. Dr. Jos. Wellstein, Strassburg.
- XXXIV: **Liniengeometrie** von Dr. Konrad Zindler in Wien.
- XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie.**
- XXXVI: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.
- XXXVII: **Kinematik** von Dr. Karl Heun in Berlin.
- XXXVIII: **Potentialtheorie** von Oberlehr. Grimsehl, Hamburg.
- XXXIX: **Wärmelehre** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.
- XL: **Theoretische Optik** von Dr. J. Classen in Hamburg.

Wenden!

2.80

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Luther, Martin, Thomas Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit. Nr. 7.

Magnetismus siehe: Physik, Theoretische, III.

Malerei, Geschichte der, von Prof. Dr. Rich. Muther. I. II. III. IV. V. Nr. 107, 108, 109, 110, 111.

Mechanik siehe: Physik, Theoretische, I.

Menschliche Körper, Der, sein Bau und seine Thätigkeiten von Oberrealschuldirektor E. Rebmann, und Gesundheitslehre von Dr. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Meteorologie von Dr. W. Trabert. Mit 49 Abbild. und 7 Tafeln. Nr. 54.

Mineralogie von Prof. Dr. R. Brauns. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Minnesang siehe: Walther von der Vogelweide.

Murner, Thomas, siehe: Luther.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. Nr. 121.

Mythologie, Deutsche, von Prof. Dr. Friedr. Kauffmann. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Prof. Dr. Herm. Steuding. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nautik von Direktor Dr. Franz Schulze. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Prof. Dr. W. Golther. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Dr. J. Behrens. Mit 53 Abbildungen. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein. Nr. 12.

— siehe auch: Schulpraxis, — Unterrichtsw.

Paläontologie. Von Prof. Dr. Rud. Hoernes. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Perspektive nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Hans Freyberger. Mit 88 Figuren. Nr. 57.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Prof. Dr. W. Migula. Nr. 127.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke und Prof. Dr. W. Migula. Mit 50 Figuren. Nr. 122.

Philosophie, Einführung in die, siehe: Psychologie und Logik.

Photographie. Von H. Keßler. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Physikalische Formelsammlung. Von Prof. G. Mahler. Mit vielen Fig. No. 136.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Poesie des 7jährigen Krieges siehe Lessings Philotas.

Poetik, Deutsche, von Dr. Karl Borinski. Nr. 40.

Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.