

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

~~26~~

konstruktionen

Von

Prof. J. Vonderlinn

Mit 114 Figuren



Kriegseinband

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298036

Sammlung Göschen

Schattenkonstruktionen

Von

Professor J. Vonderlinn

Direktor der Kgl. Baugewerkschule in Münster i. W.

Mit 114 Figuren

Durchgesehener Neudruck



Berlin und Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.

1913

By/40.

KD 517.7:742.5

1-301309

Alle Rechte, namentlich das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

~~126~~



Druck
der Spamerischen
Buchdruckerei in Leipzig.

Akc. Nr. _____

~~344~~ 150

DDK B-569/3015

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Allgemeine Bemerkungen	5
Richtung der Lichtstrahlen	6
Selbst- und Schlagschattengrenze	7
Selbstschattengrenze	7
Schlagschattengrenze	10
Aufgaben der Schattenkonstruktion	11
Schatten von Punkten, geraden Linien und ebenen Flächen	12
Schlagschatten eines Punktes auf die Projektionsebenen . .	12
Schatten einer Geraden auf die Projektionsebenen	14
Schatten einer Geraden ab auf eine Gerade cd	16
Schatten einer ebenen Figur, z. B. eines Dreiecks, auf die Projektionsebenen	17
Schatten einer geraden Linie auf eine beliebige ebene Figur	18
Schatten einer ebenen Figur, z. B. eines Dreiecks abc , auf eine andere Ebene, z. B. die Projektionsebene E_1 und eine Ebene ST	18
Schatten einer Kreisfläche	21
Schatten von Polyedern	23
Schatten eines regelmäßigen Polyeders, z. B. eines Dodekaeders	23
Schatten eines Prismas	24
Das Prisma steht zu einer Projektionsebene, z. B. E_1 , senk- recht	24
Das Prisma ist geneigt zu den beiden Projektionsebenen	25
Schatten einer Pyramide	26
Die Grundfläche der Pyramide liegt in einer Projektions- ebene, z. B. E_1	26
Angewandte Beispiele	28

	Seite
Schatten des Kreiszyllinders	33
a) Der senkrechte Kreiszyllinder	32
b) Der schiefe Kreiszyllinder	47
Schatten des Kreiskegels	48
Schatten der Kugel	53
Schatten eines Umdrehungskörpers	59
Schlagschatten eines Umdrehungskörpers auf seine eigene Oberfläche	66
Schatten von Gesimskörpern	74
Schatten der Schraubenlinie und der Schraubenflächen	90
Schatten der Schraubenlinie	90
Schatten der Schraubenflächen	93
Schatten einer Röhrenfläche	111
a) Allgemeine Bemerkung	111
b) Beispiele	111

Allgemeine Bemerkungen.

1. Durch zwei rechtwinklige Projektionen auf zwei zueinander unter einem bestimmten, in der Regel einem rechten Winkel geneigten Projektionsebenen ist ein Körper sowohl hinsichtlich seiner Gestalt als auch seiner Lage zu den Projektionsebenen vollständig bestimmt, d. h. man ist in diesem Falle imstande, aus den vorliegenden Zeichnungen alle Maße zu entnehmen, welche zur Anfertigung des Körpers erforderlich sind. In der Regel zeichnet man einen Körper im Grund- und Aufriß; manchmal verfertigt man auch noch einen Seitenriß zur weiteren Klarstellung der Körpergestalt.

Zur Erhöhung der Bildlichkeit der Darstellung kann man auch die Beleuchtung des Körpers in den Bereich der Darstellung ziehen, indem man voraussetzt, die Beleuchtung auf dem Körper sei in bestimmter Weise fixiert und mit ihm auf die Projektionsebenen projiziert.

Hierbei ist die Lichtquelle als in unendlicher Ferne liegend, der Körper also als durch parallele Lichtstrahlen beleuchtet vorausgesetzt. Von der Berücksichtigung der physikalischen Beschaffenheit der Körperoberfläche wird abgesehen und lediglich das geometrische Bildungsgesetz der Körperoberfläche als bekannt vorausgesetzt. Man erhält auf diese Weise eine bestimmte geometrische Beleuchtung des Körpers, von der im folgenden die Rede sein wird.

Richtung der Lichtstrahlen.

2. Wenn auch die Richtung der Lichtstrahlen beliebig gewählt werden kann, so ist es doch üblich, bei technischen Zeichnungen eine bestimmte Lichtstrahlenrichtung vorauszusetzen. Man wählt sie parallel zu einer Hauptdiagonale eines Würfels, der mit seinen Seiten-

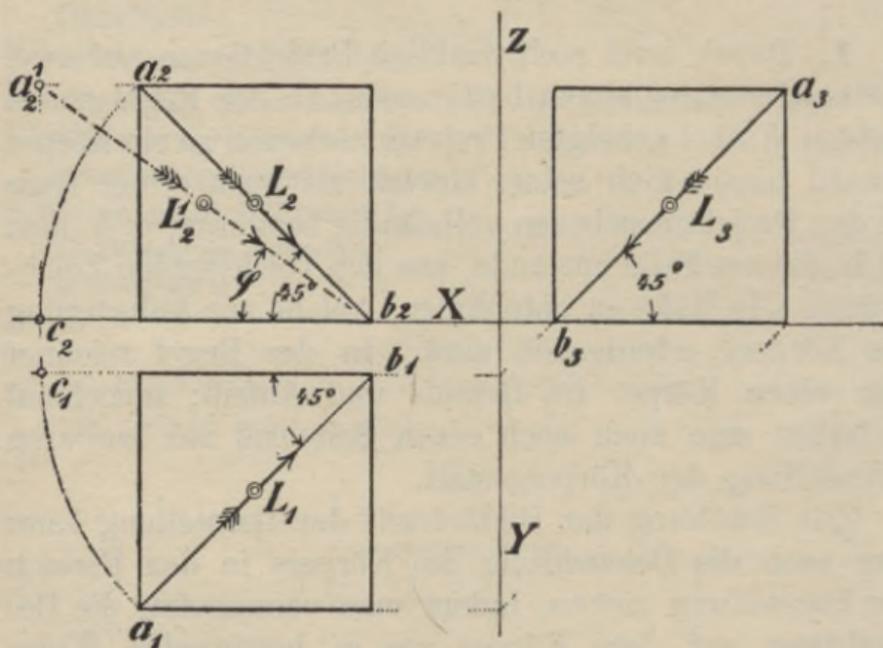


Fig. 1.

flächen parallel zu den Projektionsebenen vorausgesetzt ist. Ist in Fig. 1 dieser Würfel im Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt, so gilt als Lichtrichtung die Diagonale ab , welche die obere, vordere linke Ecke a mit der unteren, hinteren rechten Ecke b verbindet. Die Lichtstrahlen sind also parallel zur Geraden ab , deren Projektionen mit den Projektionsachsen den Winkel von 45° einschließen. In Wirklichkeit schließt die Lichtrichtung mit den Projektionsebenen einen Winkel φ ein,

dessen Größe in der Fig. 1 durch Drehung des Lichtstrahles L parallel zur Projektionsebene E_2 ermittelt

ist. Man erkennt aus der Fig. 1, daß $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2 a_2^1}{c_2 b_2}$ ist.

Setzt man die Länge der Würfelseite gleich der Einheit, so wird: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,4142} = 0,707$, woraus

folgt $\varphi = 35^\circ 15'$. Da die Würfeldiagonale gegen alle drei Projektionsebenen gleich geneigt ist, so bildet die Lichtrichtung mit jeder der Projektionsebenen E_1 , E_2 und E_3 den gleichen Winkel φ .

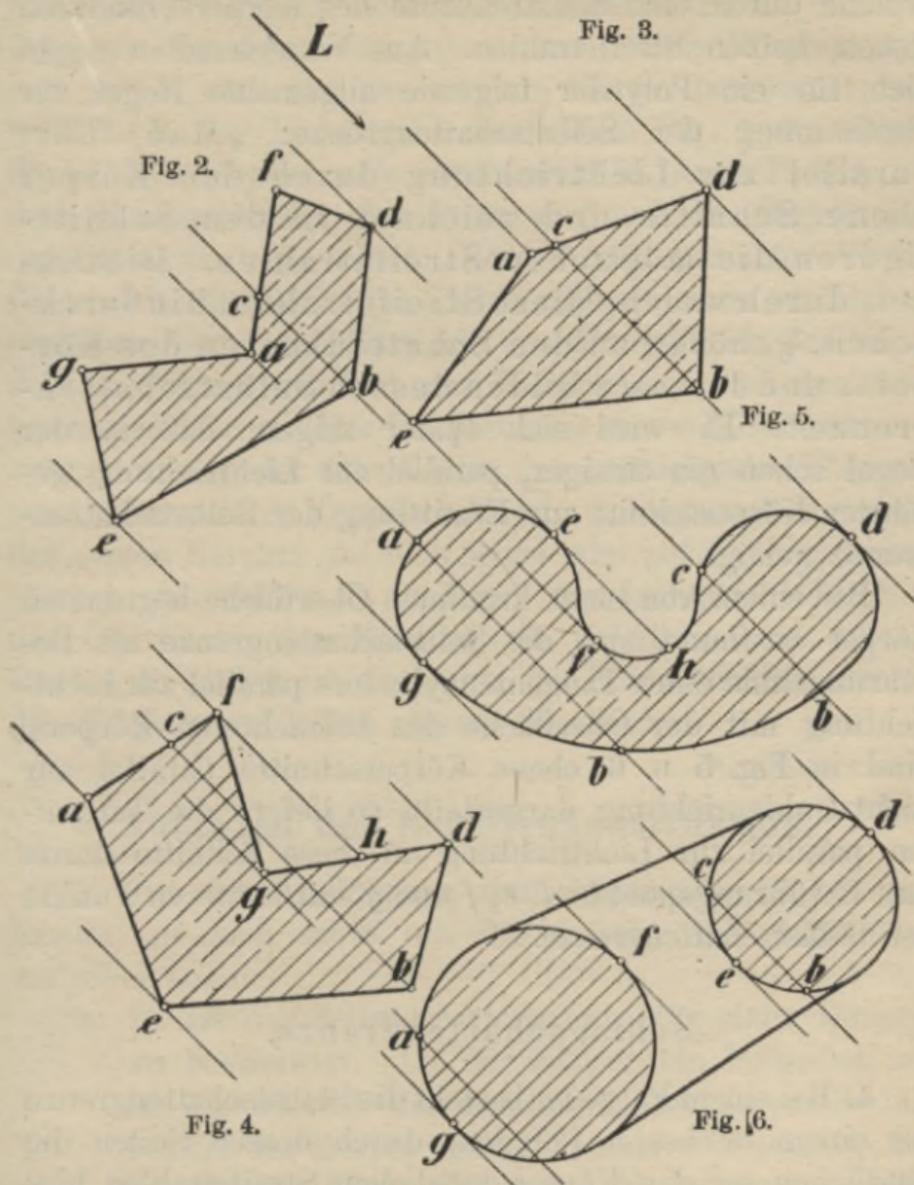
Selbst- und Schlagschattengrenze.

Selbstschattengrenze.

3. Trifft ein Lichtstrahl in einem Punkte auf die Oberfläche eines Körpers, so wird dieser Punkt beleuchtet sein, wenn der Lichtstrahl nicht zuvor an einer anderen Stelle den Körper oder einen anderen getroffen und dort sein Licht abgegeben hat. So wird z. B. in Fig. 2—6 der Punkt a ein beleuchteter Punkt sein, nicht aber der Punkt b , weil der den Punkt b enthaltende Lichtstrahl schon an anderer Stelle c sein Licht abgegeben, d. h. die Stelle c des Körpers beleuchtet hat. Es gibt somit auf der Oberfläche eines Körpers Punkte, welche beleuchtet sind, und solche, bei welchen dies nicht der Fall ist. Letztere Punkte liegen im Schatten. Die Oberfläche eines Körpers wird aus zwei Teilen, einem beleuchteten Teile und einem im Schatten liegenden Teile bestehen. Zwischen beiden Teilen liegt eine Grenzlinie, welche eine Schattengrenze heißt. Man

unterscheidet eine Selbstschattengrenze und eine Schlag-
schattengrenze.

Die Selbstschattengrenze entsteht durch Bewegung eines Lichtstrahles als Tangente längs der Oberfläche eines Körpers, sie ist also die Berührungslinie eines Tangenzylinders mit der Oberfläche des in Rede stehenden Körpers. Die Selbstschattengrenze ist durch das geometrische Bildungsgesetz der Oberfläche des beleuchteten Körpers ihrer geometrischen Beschaffenheit nach festgelegt; sie ist aber nicht von vornherein auf dem Körper verzeichnet, bzw. durch Begrenzungslinien des Körpers gebildet, sondern muß erst durch Konstruktion punktweise ermittelt werden. Bei einem Polyeder, d. h. einem nur von ebenen Flächen begrenzten Körper, kann von einer Berührungslinie eines Tangenzylinders mit dem Körper nicht die Rede sein. Hier setzt sich vielmehr die Selbstschattengrenze aus bestimmten Körperkanten zusammen, die von vornherein vorhanden sind, also nicht erst konstruiert werden müssen. Bei einem solchen Körper handelt es sich lediglich darum, zu bestimmen, welche Körperkanten der Selbstschattengrenze angehören. Dies ist aber für jede Kante der Fall, welche eine beleuchtete Fläche von einer nicht beleuchteten trennt. Eine solche Kante soll für die Folge eine Schattenkante heißen. Führt man in der Lichtstrahlenrichtung durch einen Körper einen ebenen Schnitt, so kann als Schnittfigur z. B. eine der Figuren 2 bis 6 entstehen; hierbei erkennt man z. B. in Fig. 2 die Flächen ge , ga , af und fd als beleuchtet, als nicht beleuchtet aber die Flächen eb und bd . Die Kanten, auf welchen die Punkte e und d liegen, sind Schattenkanten und gehören somit der Selbstschattengrenze des Körpers an. In Fig. 3 gehören die Kanten, auf welchen die



Punkte d und e liegen, gleichfalls der Selbstschattengrenze an, in Fig. 4 ist dies für die Kanten durch die Punkte e, f, g und d der Fall. Lichtstrahlen, wie jene durch die Punkte d, e (Fig. 2 u. 3) oder e, f, g, d (Fig. 4),

welche durch eine Schattenkante des Körpers hindurch gehen, heißen Streifstrahlen. Aus Vorstehendem ergibt sich für ein Polyeder folgende allgemeine Regel zur Bestimmung der Selbstschattengrenze: „Man führt parallel zur Lichtrichtung durch den Körper ebene Schnitte und zeichnet in den Schnittfiguren die möglichen Streifstrahlen. Die Ecken, durch welche diese Streifstrahlen hindurchgehen, gehören zu den Schattenkanten des Körpers, und letztere bilden dessen Selbstschattengrenze.“ Es wird sich später zeigen, daß in der Regel schon ein einziger, parallel zur Lichtrichtung geführter Körperschnitt zur Ermittlung der Selbstschattengrenze genügt.

Bei einem von einer krummen Oberfläche begrenzten Körper bestimmt sich die Selbstschattengrenze als Berührungslinie eines Tangentenzylinders parallel zur Lichtrichtung mit der Oberfläche des beleuchteten Körpers. Sind in Fig. 5 u. 6 ebene Körperschnitte parallel zur Lichtstrahlenrichtung dargestellt, so liefern die Tangenten parallel zur Lichtrichtung an diese Schnitte durch ihre Berührungspunkte d , e , f und g mit letzteren Punkte der Selbstschattengrenze.

Schlagschattengrenze.

4. Bei einem Polyeder besteht die Selbstschattengrenze aus einem unebenen Polygon, durch dessen Seiten die sämtlichen an den Körper möglichen Streifstrahlen hindurchgehen. Diese Streifstrahlen bilden ein Prisma, das Lichtstrahlenprisma; dessen Strahlen können nun die Oberfläche des in Rede stehenden Körpers selbst oder die eines anderen Körpers treffen. Hierdurch ent-

steht auf dieser Oberfläche eine Durchschnittslinie, welche man als Schlagschattengrenze des ersten Körpers auf sich selbst oder auf den zweiten Körper bezeichnet; so trifft z. B. der Lichtstrahl durch f in Fig. 4 die Oberfläche des Körpers zum zweitenmal in einem Punkte h , dem Schlagschatten des Punktes f auf die Oberfläche des Körpers. Bei einem Körper mit krummer Oberfläche tritt an Stelle des Lichtstrahlenprismas ein Lichtstrahlenzylinder, gebildet aus den Mantellinien des Tangenzylinders parallel zur Lichtrichtung an den betrachteten Körper. Der Durchschnitt dieses Lichtstrahlenzylinders mit der Oberfläche des beleuchteten Körpers oder eines anderen Körpers bildet die Schlagschattengrenze des ersten Körpers auf sich selbst oder auf einen anderen Körper. So trifft z. B. in Fig. 5 der Lichtstrahl durch e die Oberfläche des Körpers ein zweitesmal in einem Punkte h , und h ist ein Punkt der Schlagschattengrenze des Körpers auf seine eigene Oberfläche.

Aufgaben der Schattenkonstruktion.

5. Bei der Ausführung der Schattenkonstruktionen handelt es sich stets um die Lösung der folgenden Aufgaben:

- a) Es ist die Selbstschattengrenze für einen Körper zu bestimmen. Ist der Körper ein Polyeder, so ist das Vieleck der Schattenkanten zu ermitteln; besitzt der Körper eine gekrümmte Oberfläche, so ist die Berührungslinie des Tangenzylinders parallel zur Lichtrichtung mit der Körperoberfläche zu konstruieren.
- b) Es ist der Schlagschatten eines Körpers zu ermitteln. Hierbei kann es sich handeln:

12 Schatten von Punkten, geraden Linien u. ebenen Flächen

- α) um den Schlagschatten des Körpers auf seine eigene Oberfläche,
- β) um den Schlagschatten des Körpers auf die Oberfläche eines zweiten Körpers. Diese Oberfläche kann auch eine der Projektionsebenen sein.

Bei einem Polyeder ist der Durchschnitt des Lichtstrahlenprismas mit der Oberfläche, auf welcher der Schlagschatten entstehen soll, zu bestimmen; bei einem krummflächigen Körper ist der Durchschnitt seines Tangentenzylinders parallel zur Lichtrichtung, d. h. des Lichtstrahlenzylinders mit der bezüglichen Oberfläche zu konstruieren.

Bei allen Schattenkonstruktionen ist stets zuerst die Selbstschattengrenze zu ermitteln; erst wenn diese bestimmt ist, erfolgt die Konstruktion des Schlagschattens

Schatten von Punkten, geraden Linien und ebenen Flächen.

6. Bei diesen Gebilden kann man von einem Selbstschatten nicht sprechen, wohl aber von einem Schlagschatten, den ein Punkt, eine gerade Linie oder eine ebene Fläche auf einer anderen Oberfläche hervorruft.

Schlagschatten eines Punktes auf die Projektionsebenen.

7. Unter dem Schlagschatten eines Punktes auf eine Projektionsebene versteht man den Durchschnittspunkt des den gegebenen Punkt enthaltenden Lichtstrahles mit der betreffenden Projektionsebene. In den Fig. 7—9 ist ein Punkt durch seine Projektionen dargestellt und

die Schattenkonstruktion ausgeführt. In Fig. 7 fällt der Schatten des Punktes auf die Projektionsebene E_1 , in Fig. 8 auf die Projektionsebene E_2 ; im ersten Falle liegt der Punkt der Projektionsebene E_1 , im zweiten Falle der Projektionsebene E_2 näher. Der Schlagschatten eines Punktes fällt stets auf die dem Punkte zunächst liegende Projektionsebene.

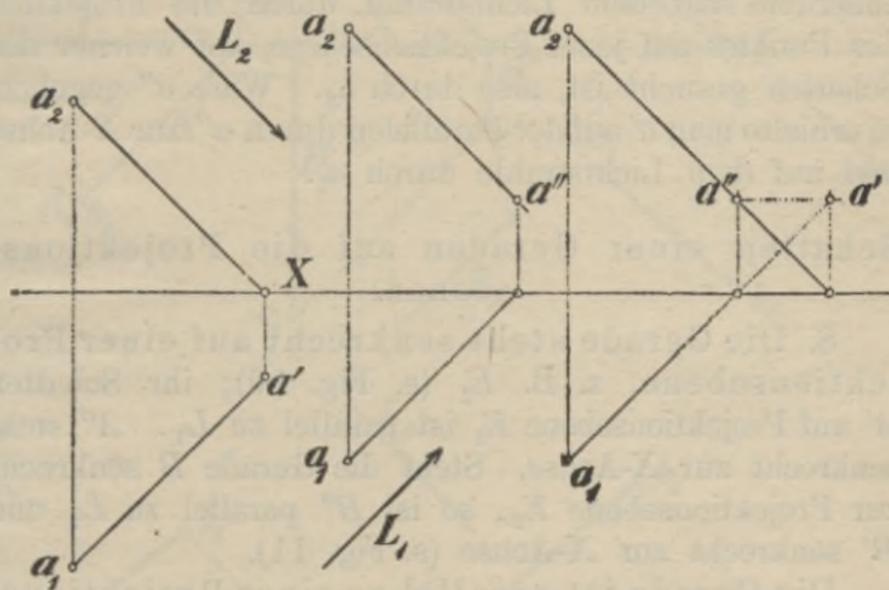


Fig. 7.

Fig. 8

Fig. 9.

Liegt ein Punkt von beiden Projektionsebenen gleich weit entfernt, so fällt sein Schlagschatten in die Projektionsachse.

In Fig. 9 sind die beiden Durchschnittpunkte a' und a'' des den Punkt a enthaltenden Lichtstrahles mit den Projektionsebenen E_1 und E_2 dargestellt. Auf Grund der gewählten Lichtrichtung erkennt man, daß die Verbindungslinie $a'a''$ parallel zur X -Achse läuft. In Fig. 9 gilt als wirklicher Schlagschatten der Punkt a'' . Der Punkt a' wäre der Schlagschatten von a auf die

14 Schatten von Punkten, geraden Linien u. ebenen Flächen.

Projektionsebene E_1 , wenn die Projektionsebene E_2 weggenommen würde. Aus Vorstehendem erkennt man, daß, wenn man von einem Punkte seinen Schlagschatten a' auf die eine Projektionsebene, z. B. E_1 , kennt, man den Schlagschattenpunkt auf die andere Projektionsebene sofort erhält, einmal auf einer Parallelen zur X -Achse durch den vorhandenen Schlagschattenpunkt a' , und außerdem auf dem Lichtstrahle durch die Projektion des Punktes auf jener Projektionsebene, auf welcher der Schatten gesucht ist, also durch a_2 . Wäre a'' gegeben, so erhielte man a' auf der Parallelen durch a'' zur X -Achse und auf dem Lichtstrahle durch a_1 .

Schatten einer Geraden auf die Projektionsebenen.

8. Die Gerade steht senkrecht auf einer Projektionsebene, z. B. E_1 (s. Fig. 10); ihr Schatten A' auf Projektionsebene E_1 ist parallel zu L_1 . A'' steht senkrecht zur X -Achse. Steht die Gerade B senkrecht zur Projektionsebene E_2 , so ist B'' parallel zu L_2 und B' senkrecht zur X -Achse (s. Fig. 11).

Die Gerade ist parallel zu einer Projektionsebene, z. B. zu E_2 . Man bestimmt die Schatten zweier ihrer Punkte z. B. a und b auf die beiden Projektionsebenen, also $a' a''$ und $b' b''$ (s. Fig. 13). Die Verbindungslinien $a' b'$ und $a'' b''$ geben die gesuchten Schatten auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 . Beide Linien schneiden sich in einem Punkte c der X -Achse und als wirkliche Schatten gelten nur diejenigen Stücke von $a' b'$ und $a'' b''$, welche in den positiven Projektionsebenen liegen, also die Stücke $a' c$ und $b' c$. In Fig. 12 ist der Schatten einer zur Projektionsebene E_1 parallelen Geraden konstruiert. Man findet in beiden Fällen, daß

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

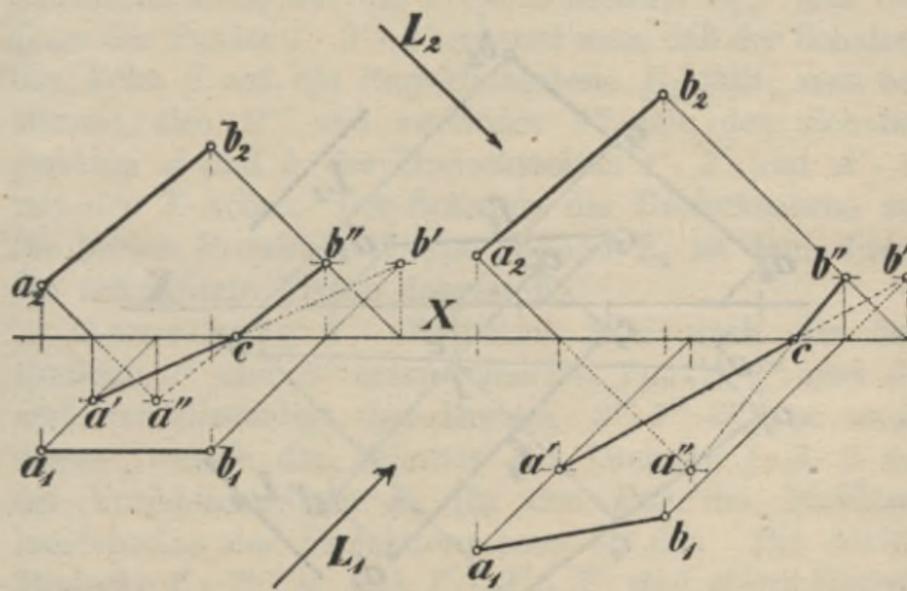
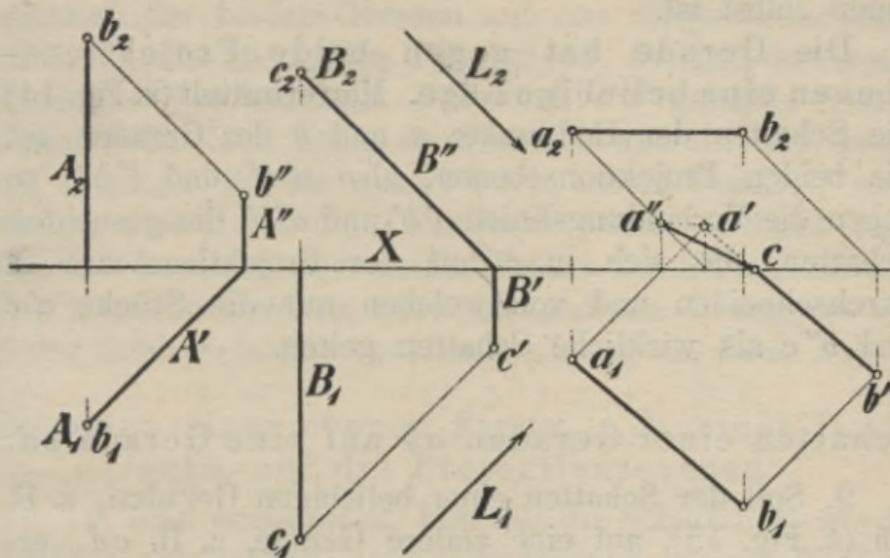


Fig. 13.

Fig. 14.

16 Schatten von Punkten, geraden Linien u. ebenen Flächen.

der Schatten einer zu einer Projektionsebene parallelen Geraden auf diese Projektionsebene parallel zur Geraden selbst ist.

Die Gerade hat gegen beide Projektionsebenen eine beliebige Lage. Man ermittelt (s. Fig. 14) die Schatten der Endpunkte a und b der Geraden auf die beiden Projektionsebenen, also $a'a''$ und $b'b''$; so geben die Verbindungslinien $a'b'$ und $a''b''$ die gesuchten Schatten, die sich in c auf der Projektionsachse X durchschneiden und von welchen nur die Stücke $a'c$ und $b''c$ als wirkliche Schatten gelten.

Schatten einer Geraden ab auf eine Gerade cd .

9. Soll der Schatten einer beliebigen Geraden, z. B. ab (s. Fig. 15), auf eine andere Gerade, z. B. cd , ermittelt werden, so handelt es sich darum, einen Licht-

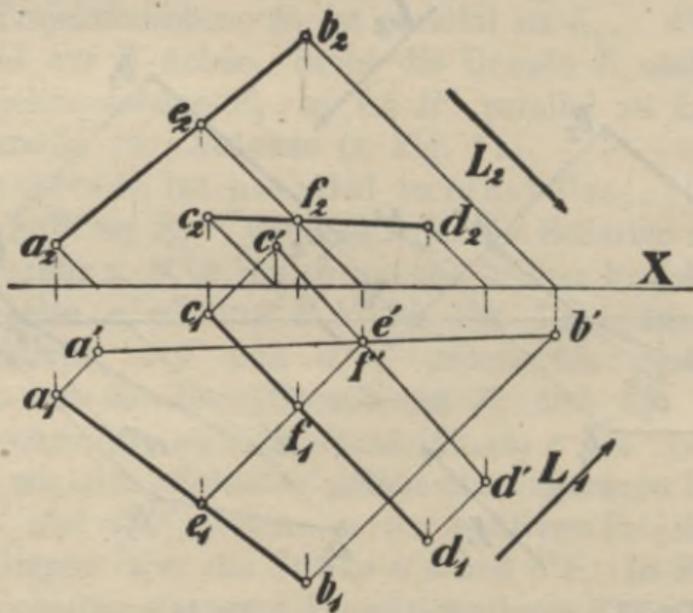


Fig. 15.

strahl zu zeichnen, der beide Geraden ab und cd schneidet. Zu diesem Zwecke bestimmt man den Schlagschatten der beiden Geraden auf eine Projektionsebene, etwa E_1 , also die Linien $a'b'$ und $c'd'$, die sich in einem Punkte $e'f'$ schneiden. Der durch $e'f'$ gehende Lichtstrahl trifft dann beide Geraden ab und cd und zwar ab in einem Punkte e und cd in einem Punkte f und es ist, weil f von der Lichtquelle weiter entfernt liegt als der Punkt e , der erstere Punkt der Schlagschatten des letzteren Punktes, oder mit anderen Worten, es ist f der Schlagschatten der Linie ab auf die Linie cd .

Schatten einer ebenen Figur, z. B. eines Dreiecks, auf die Projektionsebenen.

10. Man ermittelt (s. Fig. 16) die Schatten $1' \cdot 2' \cdot 3'$ der Dreieckspunkte $1 \cdot 2 \cdot 3$ auf die Projektionsebene E_1 ohne Rücksichtnahme auf die Projektionsebene E_2 . Aus der Lage der Punkte $1' \cdot 2' \cdot 3'$ erkennt man, daß der Schatten der Ecke 2 auf die Projektionsebene E_2 fällt; man bestimmt also $2''$ und verbindet $2''$ mit den Schnittpunkten a und b der Dreiecksseiten $1' \cdot 2'$ und $2' \cdot 3'$ mit der X -Achse. Der Schatten der Dreiecksebene auf die beiden Projektionsebenen E_1 und E_2 ist dann durch die schraffierte Fläche dargestellt.

Anmerkung 1. Bestimmt man auch die den Punkten $1'$ und $3'$ entsprechenden Punkte $1''$ und $3''$ und vervollständigt das Dreieck $2'' \cdot 1'' \cdot 3''$, so stellt dieses Dreieck den Schatten des Dreiecks $1 \cdot 2 \cdot 3$ auf die Projektionsebene E_2 für den Fall des Nichtvorhandenseins der Projektionsebene E_1 dar. Die beiden Dreiecke $1' \cdot 2' \cdot 3'$ und $1'' \cdot 2'' \cdot 3''$ sind affine Figuren hinsichtlich der X -Achse als Affinitätsachse und Richtung. Dies gilt für die Schlagschattenfiguren irgend

18 Schatten von Punkten, geraden Linien u. ebenen Flächen.

eines Körpers auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 . Diese Affinitätsbeziehung kann man in vielen Fällen konstruktiv verwerten, wenn es sich darum handelt, aus der einen Schlagschattenfigur die andere abzuleiten.

Schatten einer geraden Linie auf eine beliebige ebene Figur.

11. Soll der Schatten einer Geraden, z. B. $4 \cdot 5$ (s. Fig. 16), auf eine beliebige Ebene, z. B. die Dreiecksebene $1 \cdot 2 \cdot 3$ (s. Fig. 16), ermittelt werden, so verfährt man in gleicher Weise wie in Nr. 10, d. h. man bestimmt den Schatten des Dreiecks $1 \cdot 2 \cdot 3$ und den der Geraden $4 \cdot 5$ auf eine Projektionsebene, z. B. Projektionsebene E_1 ; die Schlagschattenbegrenzungen treffen sich dann in den Punkten $6'$ und $7'$, denen auf der Linie $4 \cdot 5$ die Punkte 6 , 7 und auf den Dreiecksseiten die Punkte 6^0 , 7^0 entsprechen. Die Verbindungslinie 6^0 , 7^0 stellt den Schlagschatten der Linie $4 \cdot 5$ auf die Dreiecksebene dar.

Schatten einer ebenen Figur, z. B. eines Dreiecks abc , auf eine andere Ebene, z. B. die Projektionsebene und eine Ebene ST .

12. Man bestimmt zunächst (s. Fig. 17) die Schlagschatten a' , b' , c' der Dreieckspunkte a , b , c auf die Projektionsebene E_1 . Aus der Lage dieser Punkte erkennt man, daß der Schatten der Ecke b auf die Ebene ST fallen muß.

Man braucht daher nur den Schnittpunkt b_0 des Lichtstrahles durch b mit der Ebene ST mittels einer den Lichtstrahl durch b enthaltenden projizierenden Ebene

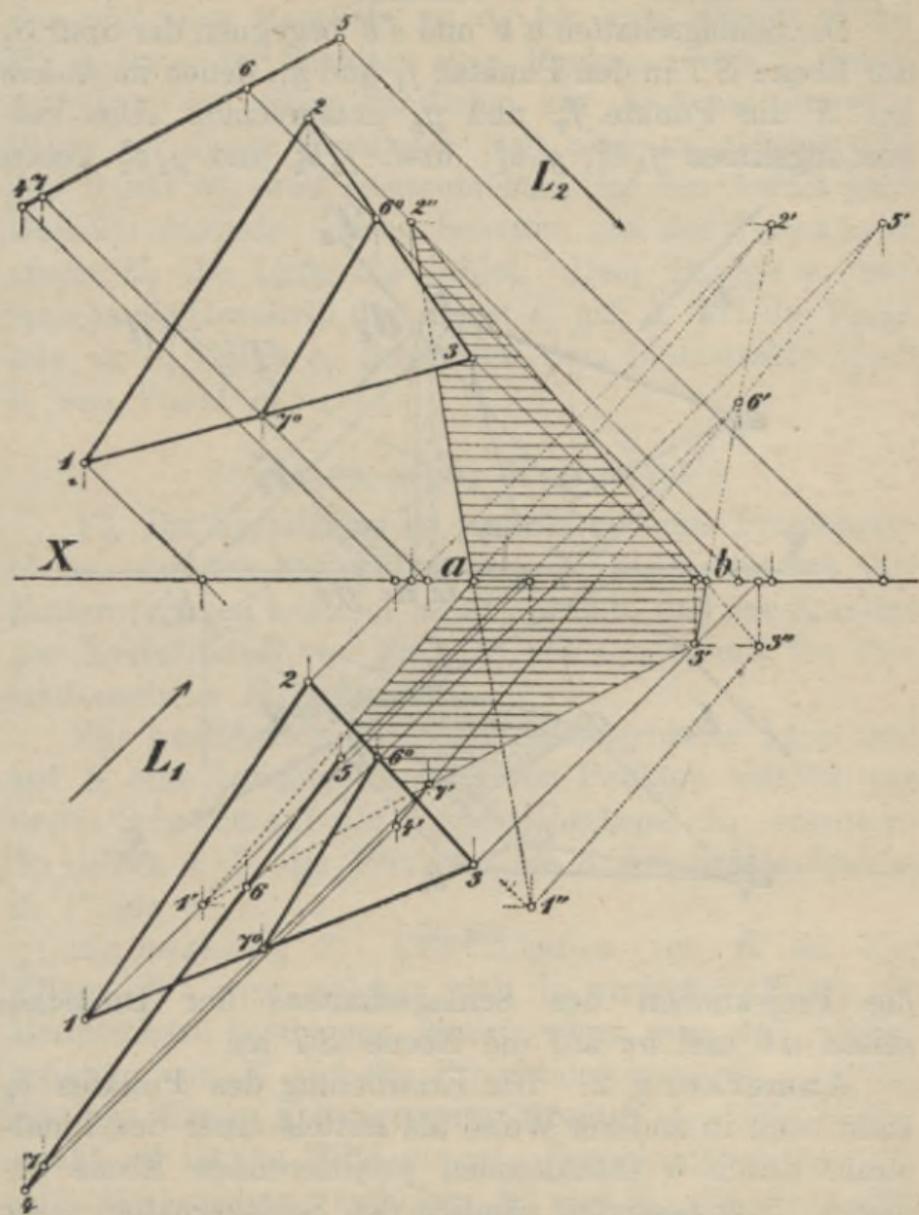


Fig. 16.

20 Schatten von Punkten, geraden Linien u. ebenen Flächen

zu bestimmen, um in b_0 den Schlagschatten des Punktes b auf die Ebene ST zu erhalten.

Die Schlagschatten $a'b'$ und $c'b'$ begegnen der Spur S_1 der Ebene ST in den Punkten f_1 und g_1 , denen im Aufriß auf X die Punkte f_2 und g_2 entsprechen. Die Verbindungslinien $f_1 b_1^0$, $g_1 b_1^0$, bzw. $f_2 b_2^0$ und $g_2 b_2^0$ geben

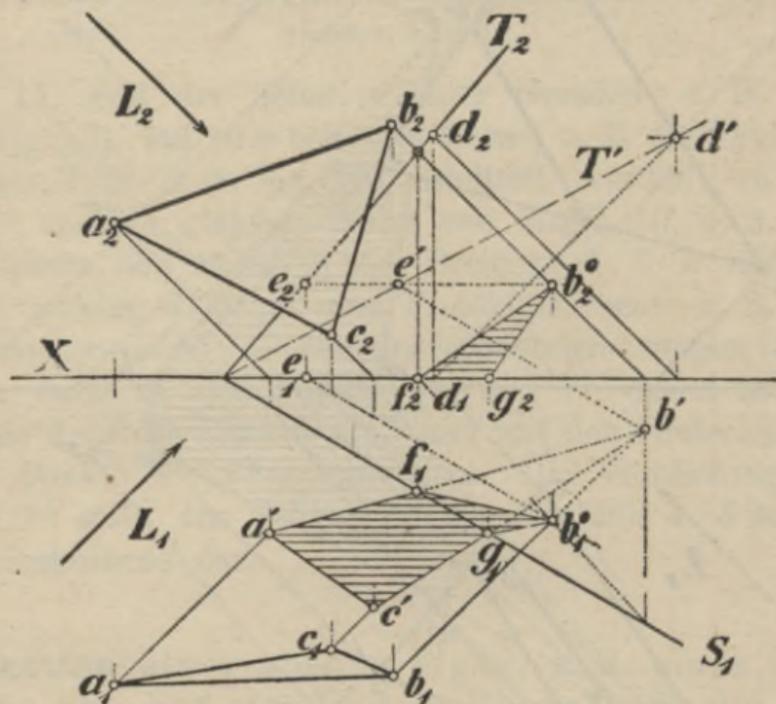


Fig. 17.

die Projektionen des Schlagschattens der Dreiecksseiten ab und bc auf die Ebene ST an.

Anmerkung 2. Die Ermittlung des Punktes b_0 kann noch in anderer Weise als mittels einer den Lichtstrahl durch b enthaltenden projizierenden Ebene erfolgen. Man bestimmt nämlich den Schlagschatten einer Geraden der Ebene ST etwa gleich den Schatten von T auf die Projektionsebene E_1 und erhält hierfür

die Gerade T' . Es ist auf T der Punkt d gewählt und dessen Schatten d' ermittelt. Zieht man nun durch b' eine Parallele zu S_1 bis zum Schnitt e' mit T' , so ist e' der Schatten eines Punktes e von T , dessen Aufriß e_2 auf einer Parallelen zur X -Achse durch e' liegt; auf dieser Parallelen liegt aber zu gleicher Zeit der Punkt b_2^0 , weil genannte Parallele den Aufriß jener Geraden darstellt, deren Schatten auf der Projektionsebene E_1 die Linie $b'e'$ bildet. Dem Punkte e_2 entspricht als Grundriß der Punkt e_1 auf X und die Parallele zu S_1 durch e_1 liefert auf dem Lichtstrahle durch b_1 den Punkt b_1^0 .

Schatten einer Kreisfläche.

13. Die Kreisfläche ist parallel zu einer Projektionsebene, etwa zu Projektionsebene E_1 , vorausgesetzt, ihre Entfernung von letzterer ist so gewählt, daß der Schatten der Kreislinie K_1 (s. Fig. 18) vollständig auf die Projektionsebene E_2 gelangt.

Zur Ausführung der Schattenkonstruktion kann man auf K eine beliebige Anzahl von Punkten wählen und deren Schatten auf die Projektionsebene E_2 ermitteln. So liefern z. B. die Punkte 1 bis 8 ihre Schlagschatten in $1''$ bis $8''$.

Anmerkung 3. Der Schatten von K ist eine Ellipse K'' , von welcher sich in einfacher Weise die Hauptachsen bestimmen lassen, wenn man den Schlagschatten von K auf die Projektionsebene E_1 , welcher ein dem Kreise K kongruenter Kreis K' aus dem Mittelpunkt m' ist, zu Hilfe nimmt. Berücksichtigt man die Affinitätsbeziehung zwischen K' und K'' , so lassen sich in K' sofort zwei aufeinander senkrechte Durchmesser bestimmen, denen die Hauptachsen in K'' entsprechen.

Man braucht zu diesem Zwecke ja nur den Kreis \mathfrak{R} durch die Mittelpunkte m' und m'' zu zeichnen, dessen Mittelpunkt a auf der X -Achse liegt; so trifft \mathfrak{R} die X -Achse in zwei Punkten b und c , welche mit m' verbunden in K' zwei aufeinander senkrechte Kreisdurch-

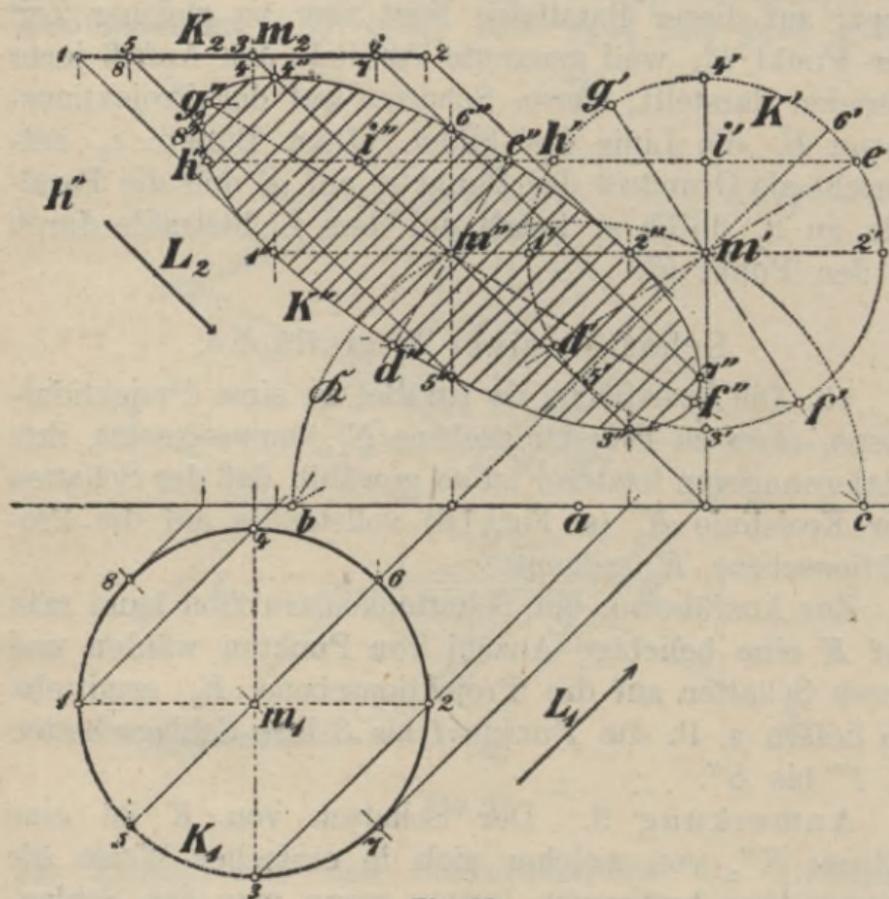


Fig. 18.

messer $\overline{d'e'}$ und $\overline{f'a'}$ liefern, denen in K'' die Hauptachsen $d''e''$ und $f''g''$ entsprechen. Sind die Hauptachsen von K'' ermittelt, so können die einzelnen Ellipsenpunkte unabhängig von dem Grund und Aufriß von K gezeichnet werden.

Schatten von Polyedern.

Schatten eines regelmäßigen Polyeders, z. B. eines Dodekaeders.

14. In Fig. 19 ist ein regelmäßiges Dodekaeder durch Grund- und Aufriß dargestellt. Es ist der Selbstschatten sowie der Schlagschatten auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 zu konstruieren. Man führt parallel zur Lichtrichtung und außerdem z. B. senkrecht zur Projektionsebene E_1 einen ebenen Schnitt A_1 durch den Körper und ermittelt das Schnittviereck. Im Grundriß erhält

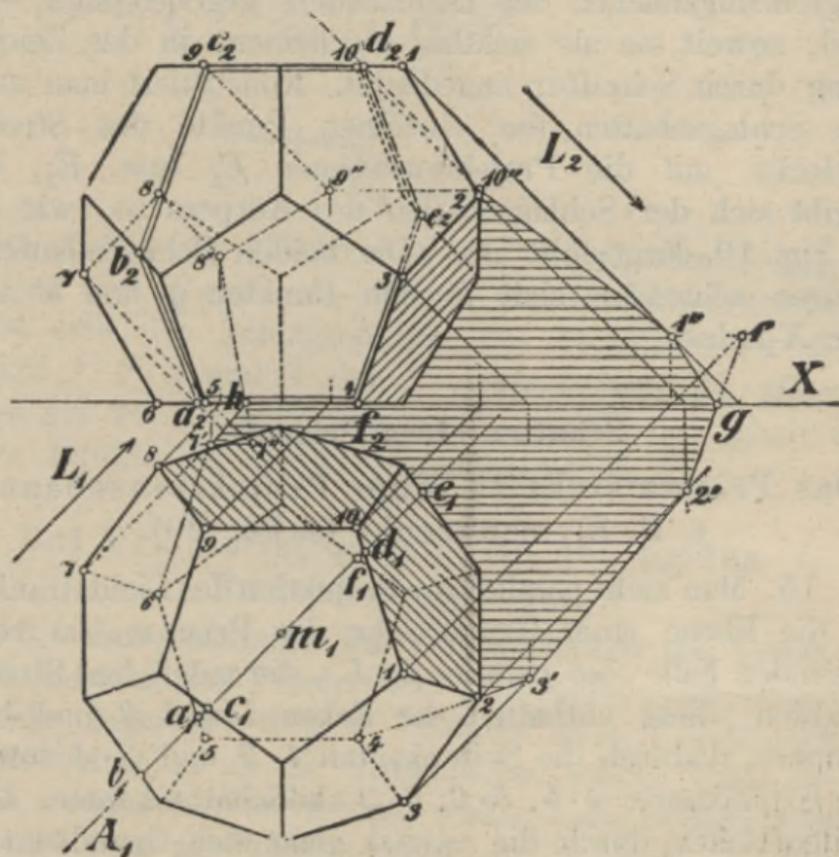


Fig. 19.

man die Schnittpunkte von A_1 mit den Körperkanten unmittelbar und kann sie in den Aufriß hinaufprojizieren; es ergibt sich im Aufriß das Vieleck $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 a_2$. Die parallel zu L_2 an dasselbe gezogenen Streifstrahlen gehen durch die Punkte d_2 und a_2 und bestimmen hierdurch die Körperkanten $1 \cdot 10$ und $5 \cdot 6$. Damit ist aber das Streifvieleck vollständig bestimmt, denn an die Kante $1 \cdot 10$ schließen sich an $10 \cdot 9$ und $1 \cdot 2$, hieran reihen sich $9 \cdot 8$ und $2 \cdot 3$, ferner $8 \cdot 7$ und $3 \cdot 4$, endlich $4 \cdot 5$ und $7 \cdot 6$. Das Streifvieleck ist also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, womit die im Selbstschatten befindlichen Begrenzungsflächen des Dodekaeders gegeben sind; sie sind, soweit sie als sichtbar erscheinen, in der Zeichnung durch Schraffur angedeutet. Konstruiert man nun die Schlagschatten der einzelnen Punkte des Streifvielecks auf die Projektionsebenen E_1 bzw. E_2 , so ergibt sich der Schlagschatten des Körpers so, wie er in Fig. 19 dargestellt ist. Die beiden Schlagschattenfiguren schneiden sich in den Punkten g und h auf der X -Achse.

Schatten eines Prismas.

Das Prisma steht zu einer Projektionsebene, z. B. E_1 , senkrecht (s. Fig. 20).

15. Man zieht parallel zur Projektion des Lichtstrahles in die Ebene einer Grundfläche des Prismas, im vorliegenden Falle also parallel zu L_1 , die möglichen Streifstrahlen; diese enthalten die Ecken 1 und 3 und bestimmen dadurch die Seitenkanten $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ sowie die Grundkanten $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 2$ als Schattenkanten. Die Seitenflächen durch die zuletzt genannten Grundkanten sind im Selbstschatten des Prismas; sichtbar hiervon

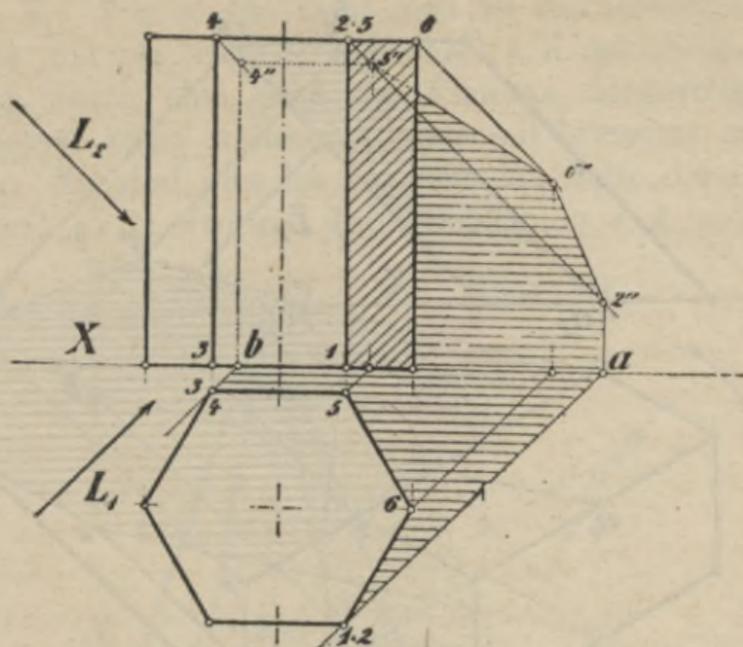


Fig. 20.

ist im Aufriß die Fläche $1 \cdot 2 \cdot 6$. Durch den Schlag-
 schatten der Punkte 1—6 auf die Projektionsebenen
 ergibt sich der Schlagschatten des Prismas. Da die
 Punkte $1 \cdot 6 \cdot 5$ und 4 der Projektionsebene E_2 näher
 liegen als der Projektionsebene E_1 , so fällt der Schatten
 dieser Punkte auf die Projektionsebene E_2 .

Das Prisma ist geneigt zu den beiden
 Projektionsebenen.

16. Man bestimmt den Schlagschatten der Seiten-
 kantenrichtung des Prismas auf die Projektionsebene E_1 ,
 z. B. der Achse ab in $a_1 b'$. Parallel zu $a_1 b'$ zieht man
 die Streifstrahlen an die Grundfläche, welche durch die
 Ecken 1 und 3 hindurchgehen, wodurch die Seitenkanten
 $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ als Schattenkanten sich ergeben. Weitere
 Schattenkanten erhält man in den Grundkanten $2 \cdot 6$,

ebene E_1 . Von s' aus zieht man an das Grundflächen-
vieleck die möglichen Streifstrahlen, d. h. solche Strahlen,
welche durch eine Ecke des Vielecks hindurchgehen,
aber sonst keine weiteren Punkte mit letzterem gemein
haben. Es sind dies im vorliegenden Falle die Linien
 $s' \cdot 1$ und $s' \cdot 2$, wodurch die Seitenkanten $s \cdot 1$ und $s \cdot 2$

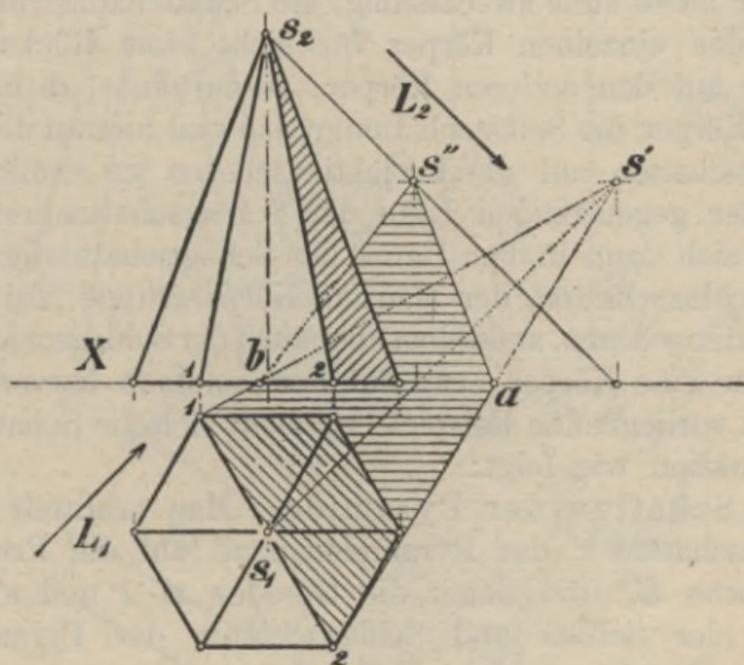


Fig. 22.

als Schattenkanten festgelegt sind. Die Linien $s' \cdot 1$ und $s' \cdot 2$ sind zugleich die Schlagschatten der genannten Seitenkanten auf die Projektionsebene E_1 . Dem Punkte s' entspricht in der Projektionsebene E_2 der Punkt s'' auf dem Lichtstrahle durch s_2 als Schatten der Pyramiden-
spitze auf Projektionsebene E_2 . Die Verbindungslinien $s'' a$ und $s'' b$ begrenzen den Schlagschatten der Pyramide auf die Projektionsebene E_2 .

Angewandte Beispiele.

18. Aufgabe. Für die in Fig. 23 gezeichnete Körperzusammenstellung „Pyramide und Prisma“ ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Bei einer Zusammenstellung mehrerer Körper ist es stets zweckmäßig, die Schattenkonstruktion für jeden einzelnen Körper für sich, ohne Rücksichtnahme auf den anderen Körper, auszuführen, d. h. für jeden Körper die Selbstschattengrenze und hierauf dessen Schlagschatten auf die Projektionsebenen zu ermitteln. Aus der gegenseitigen Lage der Schlagschattengrenzen ergibt sich dann in dem Umriß der Schlagschattenfiguren der Schlagschatten der ganzen Körpergruppe auf die Projektionsebenen, außerdem aber auch der Schlagschatten, den der eine Körper etwa auf dem anderen hervorruft.

Im vorliegenden Beispiele vollzieht sich die Schattenkonstruktion wie folgt:

a) Schatten der Pyramide. Man ermittelt den Schlagschatten s' der Pyramidenspitze auf die Projektionsebene E_1 und damit die Geraden $s' \cdot 1$ und $s' \cdot 2$, womit der Selbst- und Schlagschatten der Pyramide auf die Projektionsebene E_1 bestimmt ist.

b) Schatten des Prismas. Man verschafft sich die Projektion der Lichtrichtung in die Ebene C_1 der Prismengrundfläche. Zu diesem Zwecke projiziert man den Punkt s nach t und einen weiteren auf dem Lichtstrahle durch s gelegenen Punkt a nach b und erhält in tb die Projektion der Lichtrichtung in die Ebene C_1 . Parallel zu $t_2 b_2$ zieht man an den Aufriß der in der Ebene C_1 liegenden Prismengrundfläche die möglichen Streifstrahlen, welche die Ecken 3 und 4 enthalten. Hierdurch ist die Selbstschattengrenze des Prismas fest-

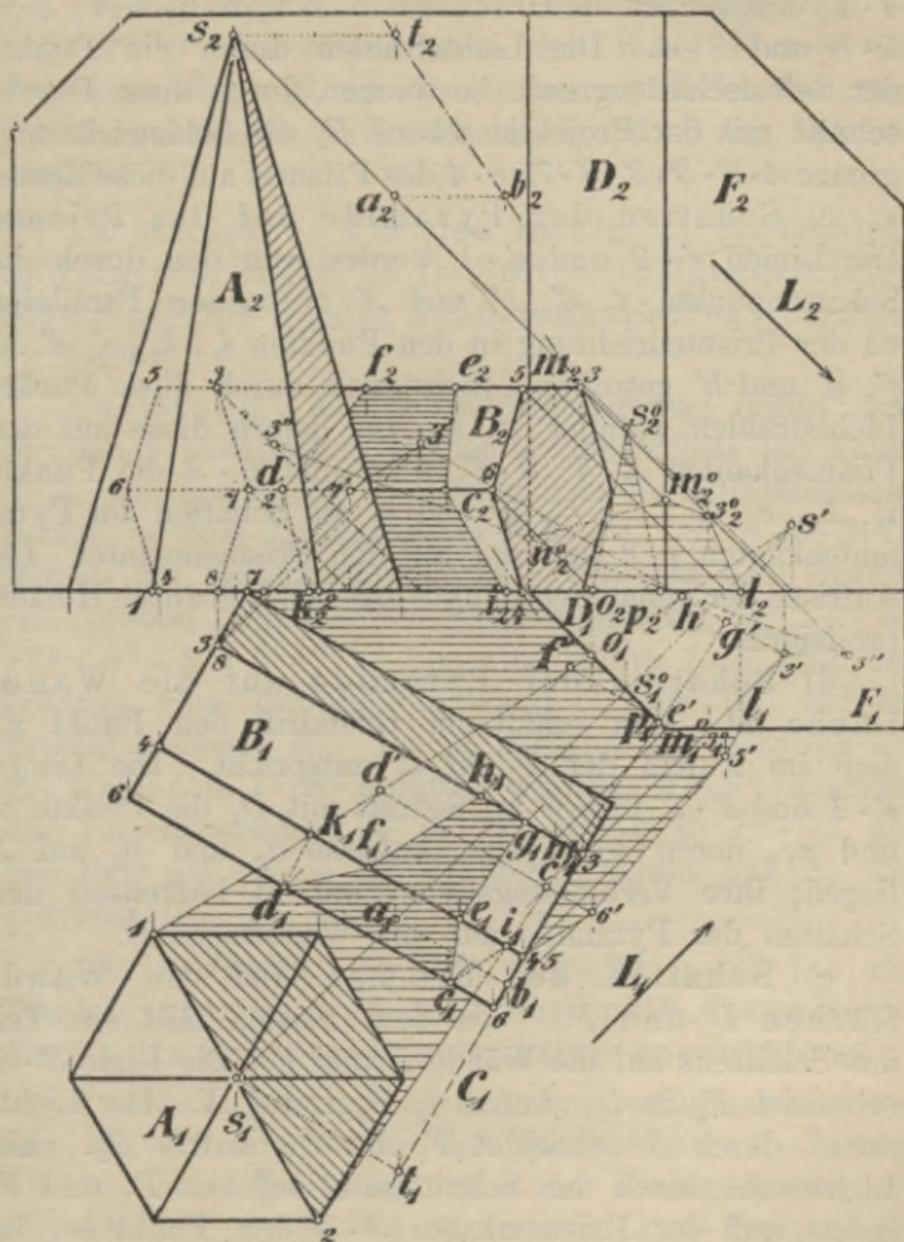


Fig. 23.

gestellt. Man erhält die beiden Seitenkanten $3 \cdot 3$ und $4 \cdot 4$, desgleichen die Grundkanten $3 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 4$, $3 \cdot 7$, $7 \cdot 8$ und $8 \cdot 4$. Die Lichtstrahlen durch die Punkte der Selbstschattengrenze bestimmen durch ihren Durchschnitt mit der Projektionsebene E_1 die Schlagschattengrenze $4 \cdot 6' \cdot 5' \cdot 3' \cdot 3' \cdot 7' \cdot 8 \cdot 4$ des Prismas auf diese Ebene.

c) Schatten der Pyramide auf das Prisma. Die Linien $s' \cdot 2$ und $s' \cdot 1$ werden von den durch die Schattenpunkte 4 , $6'$, $5'$ und $3'$ gezogenen Parallelen zu der Prismenrichtung in den Punkten i_1 , k_1 , c' , d' , e' , f' , g' und h' getroffen. Zieht man durch diese Punkte Lichtstrahlen parallel zu L_1 , so liefern diese auf den Prismenkanten $4 \cdot 4$, $6 \cdot 6$, $5 \cdot 5$ und $3 \cdot 3$ die Punkte i_1 , k_1 , c_1 , d_1 , e_1 , f_1 , g_1 und h_1 als Schatten der Pyramidenkanten $s \cdot 2$ und $s \cdot 1$ auf den Prismenmantel. Die Aufrisse der genannten Punkte ergeben sich durch Hinaufprojizieren.

d) Schatten der Pyramide auf die Wandfläche D . Man erhält im Grundriß den Punkt $s_{1,1}^0$, dem im Aufriß der Punkt s_2^0 entspricht. Die Linien $s' \cdot 1$ und $s' \cdot 2$ liefern im Schnitt mit D_1 die Punkte o_1 und p_1 , deren zugehörige Aufrisse o_2 und p_2 auf X liegen; ihre Verbindungslinien mit s_2^0 begrenzen den Schatten der Pyramide auf der Wandfläche D .

e) Schatten des Prismas auf die Wandflächen D und F . Von dem Prisma fällt ein Teil des Schattens auf die Wände D und F . Die Linie $3' \cdot 5'$ schneidet F_1 in l_1 , Aufriß l_2 liegt auf X . Der Lichtstrahl durch 3 schneidet F_1 in 3_1^0 , Aufriß 3_2^0 . Ein Lichtstrahl durch den Schnittpunkt m_1^0 von D_1 und F_1 liefert auf der Prismenkante $3 \cdot 3$ den Punkt m_1 im Grundriß und m_2 im Aufriß. Der Lichtstrahl durch m_2 bestimmt auf der Schnittkante von D und F den Schatten-

punkt m_2^0 . Ermittelt man endlich noch den Schatten $3'' 3''$ der Prismenkante $3 \cdot 3$ auf die Projektionsebene E_2 , so trifft $3'' \cdot 3''$ die Schnittkante der Wand D mit der Projektionsebene E_2 in n_2^0 , so daß $m_2^0 n_2^0$ den Schatten der Prismenkante $3 \cdot 3$ auf die Wand D im Aufrisse darstellt.

19. Aufgabe. Für den in Fig. 24 im Grund- und Aufriß, in Fig. 25 im Seitenriß dargestellten Strebepfeiler ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Als Selbstschattengrenze ergibt sich für den prismatischen Pfeiler A unmittelbar die Kante $1 \cdot 2$. Für den Körper B erkennt man die Selbstschattengrenze in dem Linienzug $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 11$. Mittels der Seitenprojektion (Fig. 25) und dem Grundriß ergeben sich die Schlagschattenpunkte $3^0 \cdot 4^0 \cdot 6^0 \cdot 7^0 \cdot 8^0 \cdot 8' \cdot 9' \cdot 11$. Von der Kante $7 \cdot 8$ fällt der Schatten zum Teil auf die Wand C , zum Teil auf die Projektionsebene E_1 . Es ist zunächst der Schatten auf die Wand C in $7^0 \cdot 8^0$ ermittelt worden. $7^0 \cdot 8^0$ schneidet die Projektionsachse X in 12 , womit in $7^0 \cdot 12$ der Schatten auf C , in $12 \cdot 8'$ der Schatten auf E_1 abgegrenzt ist.

20. Aufgabe. In den Fig. 26 u. 27 ist ein Dachfenster im Auf- und Seitenriß dargestellt. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Als Schattengrenze entnimmt man aus der Fig. 26 unmittelbar den Linienzug $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$; hiernach bestimmt sich der Schlagschatten auf die Flächen A , B und C , wie in den Figuren angegeben. Von der Linie $6 \cdot 7$ ist nur die Strecke $7 \cdot 5^{01}$ Schattengrenze.

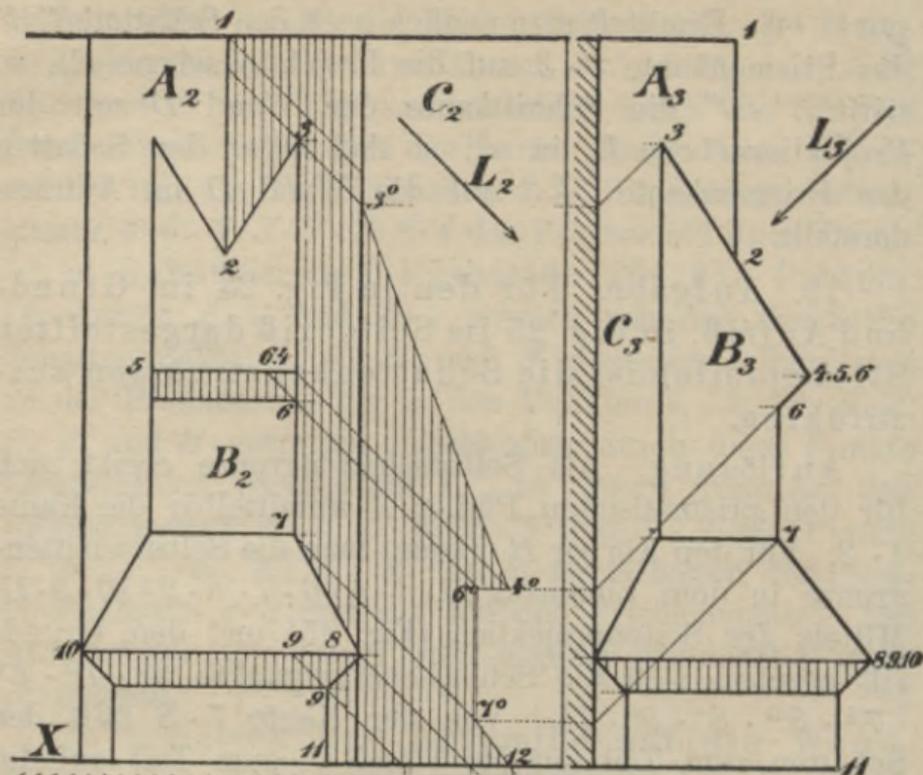


Fig. 25.

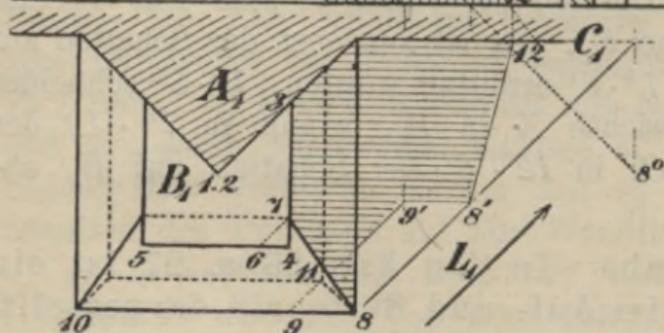


Fig. 24.

Schatten des Kreiszyinders.

a) Der senkrechte Kreiszyinder.

21. Die Schattengrenze besteht aus den Berührungslinien der parallel zur Lichtrichtung an den Kreiszyinder möglichen Tangentialebenen; solcher Tangential-

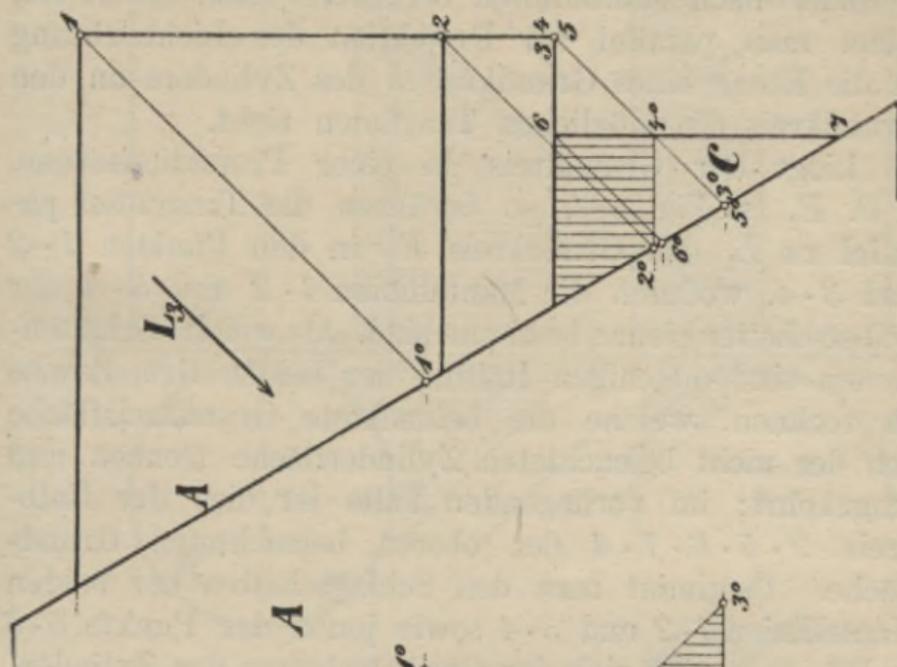


Fig. 27.

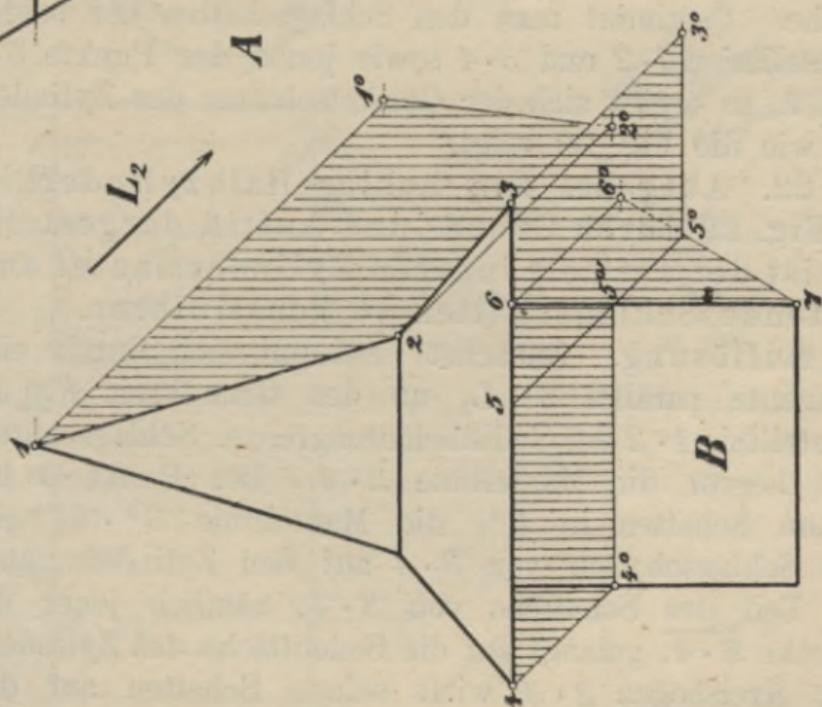


Fig. 26.

ebenen sind in der Regel zwei vorhanden, die den Zylinder nach Mantellinien berühren. Man erhält sie, wenn man parallel zur Projektion der Lichtrichtung in die Ebene eines Grundkreises des Zylinders an den Grundkreis die möglichen Tangenten zieht.

Liegt der Grundkreis in einer Projektionsebene, z. B. E_1 (s. Fig. 28), so berühren die Tangenten parallel zu L_1 den Grundkreis K_1 in den Punkten $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$, wodurch die Mantellinien $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ der Selbstschattengrenze bestimmt sind. Als weitere Schattenkanten sind diejenigen Hälften der beiden Grundkreise zu rechnen, welche die beleuchtete Grundkreisfläche von der nicht beleuchteten Zylinderfläche trennen und umgekehrt; im vorliegenden Falle ist dies der Halbkreis $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4$ der oberen beleuchteten Grundfläche. Bestimmt man den Schlagschatten der beiden Mantellinien $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ sowie jenen der Punkte $5 \cdot 6$ und 7 , so ergibt sich der Gesamtschatten des Zylinders so, wie die Fig. 28 zeigt.

22. Aufgabe. Ein hohler Halbzyylinder ist in Fig. 29 durch Grund- und Aufriß dargestellt. Es ist der auf dem inneren Zylindermantel auftretende Schlagschatten zu konstruieren.

Auflösung. Zunächst bestimmt sich durch eine Tangente parallel zu L_1 an den Grundkreis K_1 die Mantellinie $1 \cdot 2$ der Selbstschattengrenze. Schlagschatten ruft hervor die Mantellinie $3 \cdot 4$. Der Punkt 3 hat seinen Schatten in 3^0 , die Mantellinie $3^0 \cdot 6^0$ gibt den Schlagschatten von $3 \cdot 4$ auf den Zylindermantel; ein Teil des Schattens von $3 \cdot 4$, nämlich jener der Strecke $6 \cdot 4$, gelangt auf die Bodenfläche des Zylinders. Der Kreisbogen $2 \cdot 3$ wirft seinen Schatten auf den Zylindermantel nach $3^0 \cdot 5^0 \cdot 2$.

Fig. 28.

Fig. 29.

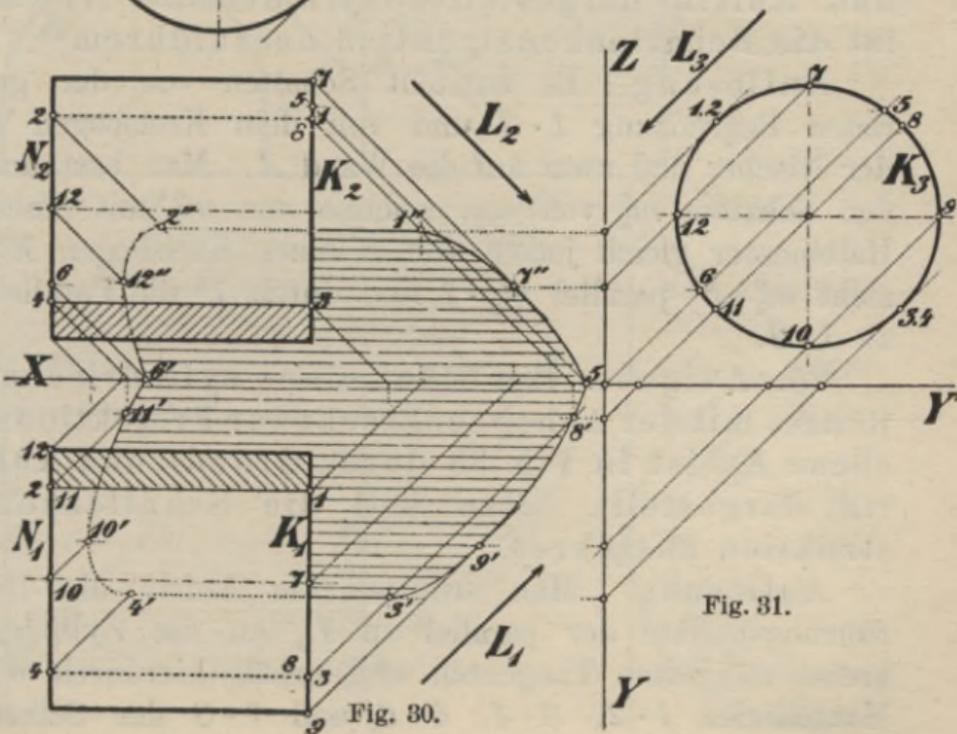
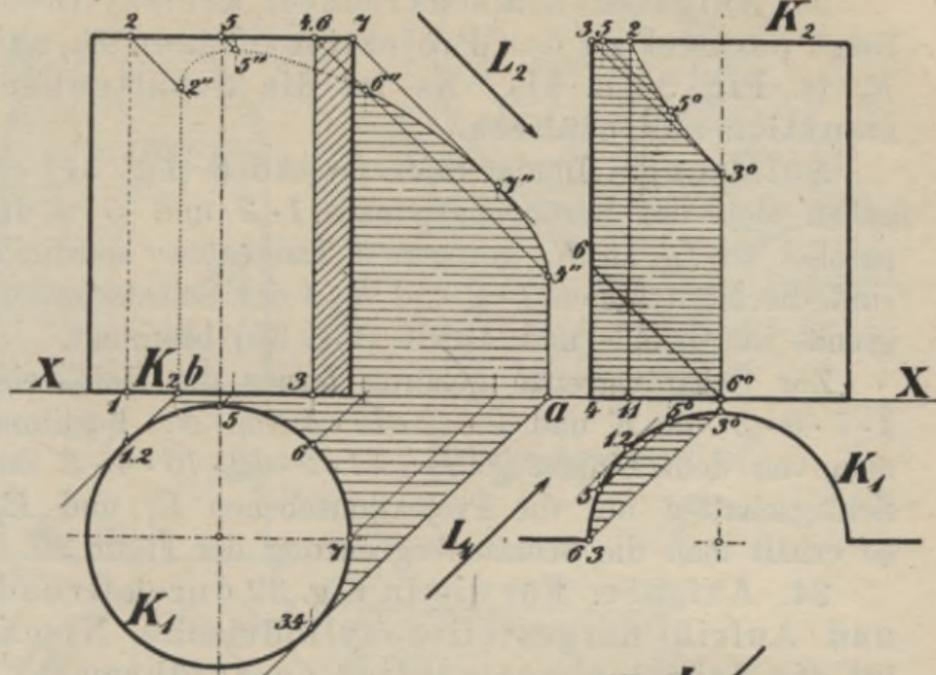


Fig. 31.

Fig. 30.

23. Aufgabe. Ein senkrechter Kreiszyllinder liegt parallel zu den Projektionsebenen E_1 und E_2 (s. Fig. 30 u. 31). Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. In der Seitenprojektion (Fig. 31) ergeben sich die Berührungspunkte $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ der parallel zu L_3 an K_3 gezogenen Tangenten; hierdurch sind die Mantellinien $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ der Selbstschattengrenze im Grund- und Aufriß (Fig. 30) bestimmt.

Zur Schattengrenze gehören ferner die Halbkreise $1 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3$ von K und $2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 4$ von N . Bestimmt man von dem Linienzug $3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3$ den Schlagschatten auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 , so erhält man die Schattenbegrenzung der Figur 30.

24. Aufgabe. Für die in Fig. 32 durch Grund- und Aufriß dargestellte zylindrische Nische ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Es entsteht Schatten von der geraden Begrenzung $1 \cdot 2$ und von dem Kreisbogen K der Nische, und zwar auf die Wand A . Man bestimmt den Schatten m_2^0 von m_2 , zeichnet um m_2^0 mit einem Halbmesser gleich jenem von K einen Kreisbogen K_2^0 , zieht $m_2^0 \cdot 1^0$ parallel $m_2 \cdot 1$ und durch 1^0 die Parallele zu $1 \cdot 2$.

25. Aufgabe. Ein Stück einer zylindrischen Röhre, mit der Achse senkrecht zur Projektionsebene E_2 , ist in Fig. 33 durch Grund- und Aufriß dargestellt. Man soll die Schattenkonstruktion ausführen.

Auflösung. Man ermittelt im Aufriß die Berührungspunkte der parallel zu L_2 an die Zylinderkreise möglichen Tangenten und erhält hierdurch die Mantellinien $1 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $5 \cdot 6$ und $7 \cdot 8$ der Selbst-

schattengrenze beider Zylindermäntel. Bestimmt man nun für die Mittelpunkte m und n die Schlagschattenpunkte m'' und n'' , so geben die Halbkreise I , II , III , IV die Schlagschatten der Begrenzungskreise der zylindrischen Röhre auf die Projektionsebene E_2 an. Durch die Verbindungen $1''2''$, $3''4''$, $5''6''$ und $7''8''$ ist der Gesamtschatten auf die Projektionsebene E_2 dargestellt. Aus den Schattenpunkten auf E_2 ermittelt man jene auf E_1 nach Nr. 7.

26. Aufgabe. In Fig. 34 u. 35 ist ein Vertikalschnitt durch die Achse eines senkrechten Kreiszyinders — Tonnengewölbe — geführt. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Schatten wird hervorgerufen durch die Schnittkante $1 \cdot 2$, ferner durch einen Teil des Begrenzungskreises K . Man zieht parallel zu L_2 an K_2 eine Tangente, wodurch die Mantellinie $3 \cdot 4$ der Selbstschattengrenze bestimmt ist. Der Schatten des Bogens $1 \cdot 3$ ergibt sich in $1^0 \cdot 3$; die Parallele durch 1^0 zu $1 \cdot 2$ liefert in $1^0 \cdot 6$ den Schatten von $1 \cdot 2$.

27. Aufgabe. In Fig. 36 u. 37 ist ein hohler Halbzylinder durch Grund- und Seitenriß dargestellt. Es sind die auftretenden Schattengrenzen zu ermitteln.

Auflösung. Schatten entsteht auf den Oberflächen der beiden Zylinder, und zwar Selbstschatten auf dem äußeren Zylinder von $1 \cdot 2$ bis $11 \cdot 12$, dann Schlagschatten auf dem inneren Zylinder, herrührend von der Kante $6 \cdot 7$ und dem Kreisbogen $7 \cdot 3$, endlich Schlagschatten auf die Projektionsebene E_1 , herrührend von dem Linienzug $5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5$. Für die genannten Punkte ist die Konstruktion des Schattens angegeben.

28. Aufgabe. Ein senkrechter hohler Kreiszyylinder, dessen Achse parallel zur Projektionsebene E_1 und geneigt zur Projektionsebene E_2 liegt, ist im Grund- und Aufriß (Fig. 38) sowie durch eine Projektion senkrecht zur Zylinderachse (s. Fig. 39) dargestellt. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Man ermittelt zunächst die Projektion L_3 der Lichtrichtung in die Ebene K_1 (s. Anmerkung), in dem man durch den Punkt a der Zylinderachse einen Lichtstrahl L zieht und den Punkt a sowie einen zweiten auf L gewählten Punkt c auf die Ebene K_1 projiziert. Parallel zu L_3 zieht man Tangenten an die Zylinderkreise und erhält hierdurch die Berührungspunkte $1 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $5 \cdot 6$ und $7 \cdot 8$, denen die gleichbezeichneten Mantellinien der Selbstschattengrenze auf dem Hohlzylinder im Grund- und Aufriß entsprechen. (Im Grundriß sind die Punkte $5 \cdot 6$ und $7 \cdot 8$ weggelassen.)

Schlagschatten entsteht durch den äußeren Zylinder und zwar durch den Linienzug $1 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 1$ sowie von dem Begrenzungskreis $7 \cdot 9 \cdot 5$ des inneren Zylinders auf dem Mantel des letzteren. Dieser Schatten kann gleichfalls mittels der dritten Projektion (Fig. 39) bestimmt werden. In Fig. 39 liefert der Lichtstrahl durch den beliebig auf dem Zylinderkreise gewählten Punkt 9 den Schlagschatten 9^0 . Die Mantellinie durch 9^0 enthält in Fig. 38 den Schlagschatten 9^0 vom Punkte 9 .

Anmerkung 4. Als dritte Projektionsebene ist die Ebene K_1 des Zylinderkreises K gewählt; sie ist parallel zu sich selbst nach $S_1 T_2$ verschoben und dann in die Projektionsebene E_2 umgelegt worden.

29. Aufgabe. Ein senkrechter Kreiszyylinder, dessen Achse zu den beiden Projektionsebenen E_1 und E_2 geneigt liegt, ist in Fig. 40 durch

Grund- und Aufriß dargestellt. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Man ermittelt wieder die Projektion der Lichtrichtung in die Ebene eines Grundkreises K . Zu diesem Zwecke zieht man durch den Mittelpunkt a von K einen Lichtstrahl L , bestimmt den Schnitt S_1 der Ebene abL mit der Projektionsebene E_1 , ebenso den Schnitt T_1 der Kreisebene K mit der Projektionsebene E_1 . S_1 und T_1 schneiden sich in e_1 , und die Verbindungslinie $a_1 e_1$ oder U_1 ist der Grundriß der Projektion der Lichtrichtung L in die Ebene K . Parallel zu U_1 zieht man an K_1 die möglichen Tangenten, so bestimmen diese durch ihre Berührungspunkte 1 und 3 die Mantellinien $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ der Selbstschattengrenze. Hierdurch ist die Gesamtschattengrenze $1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1$ und damit auch der Schlagschatten auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 festgelegt.

Anmerkung 5. Man kann entweder die Berührungspunkte 1 und 3 hinaufprojizieren oder parallel zu U_2 an K_2 die möglichen Tangenten ziehen.

30. Aufgabe. Für die in Fig. 41 u. 42 dargestellte Körperzusammenstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Durch die Tangenten parallel zu L_1 an die Grundrisse beider Zylinder ergeben sich die Berührungspunkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ und damit die gleichbezeichneten Mantellinien der Selbstschattengrenze im Aufriß. Schlagschatten entsteht nur von dem Linienzug $1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3$ auf die Fläche A , desgleichen von dem Linienzug $5 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 7$ auf die gleiche Fläche, endlich von $7 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 5$ auf den Zylindermantel B . Die Konstruktion des Schlagschattens ist mittels einer Seitenprojektion (s. Fig. 42) durchgeführt.

Fig. 38.

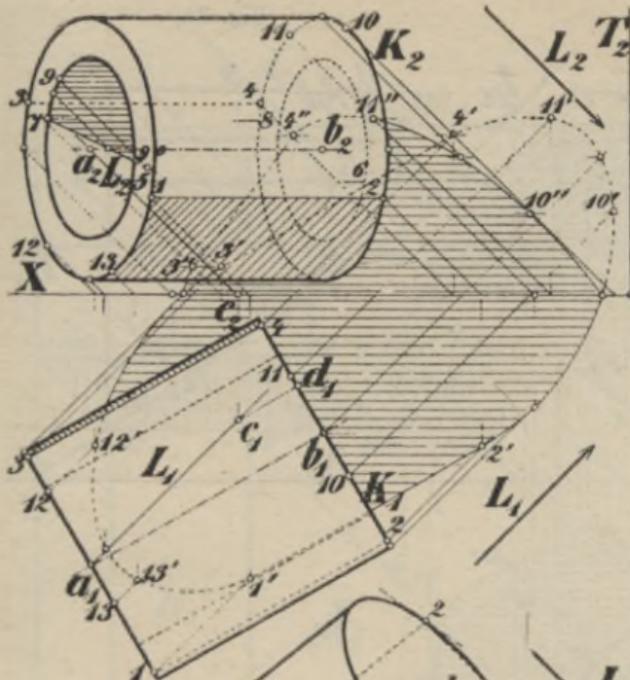


Fig. 39.

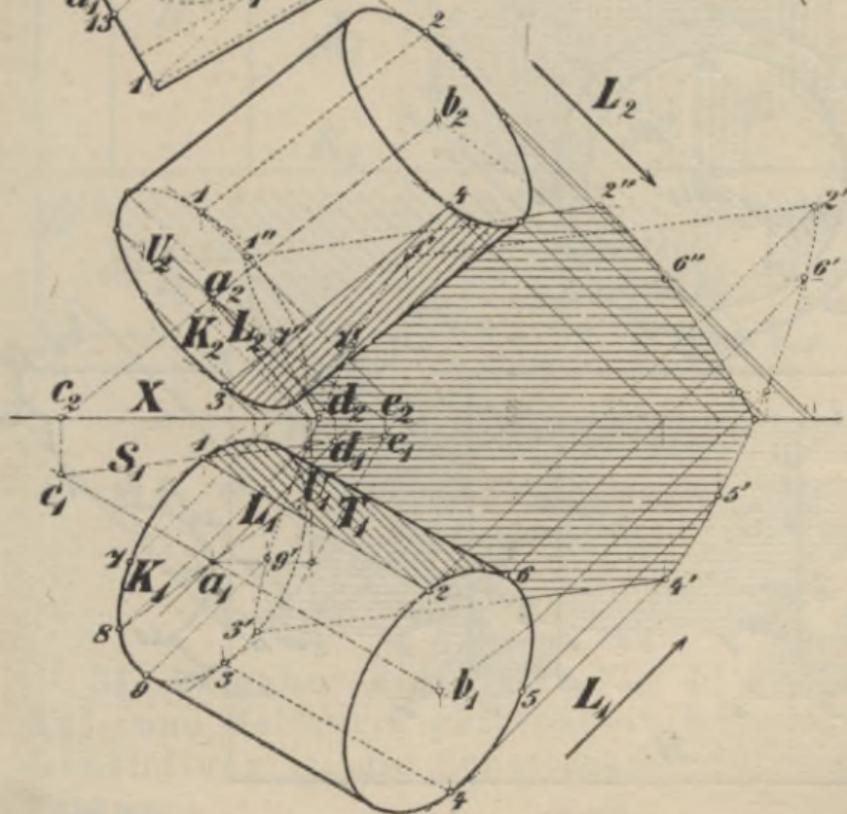
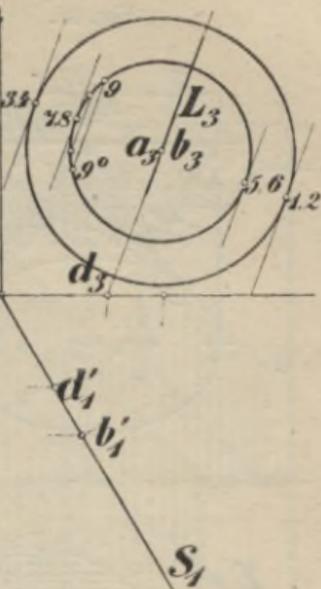


Fig. 40.

Fig. 41.

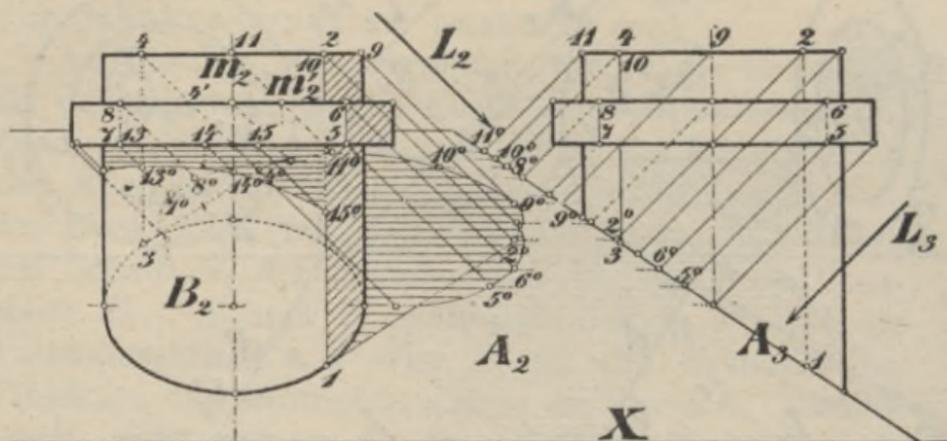


Fig. 42.

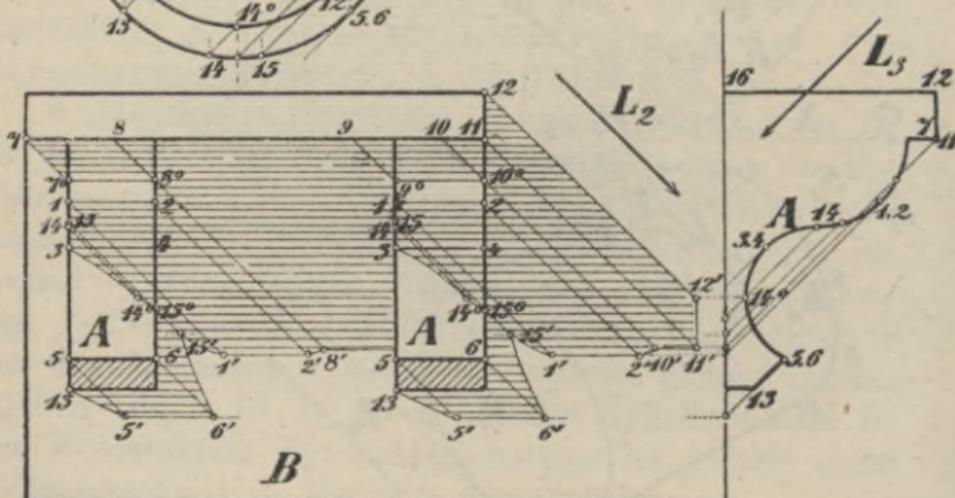
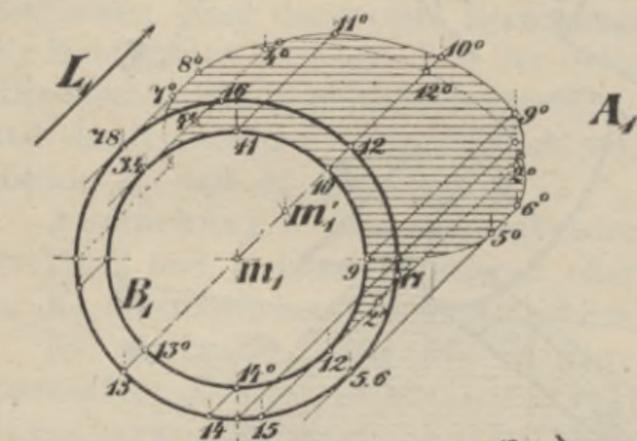
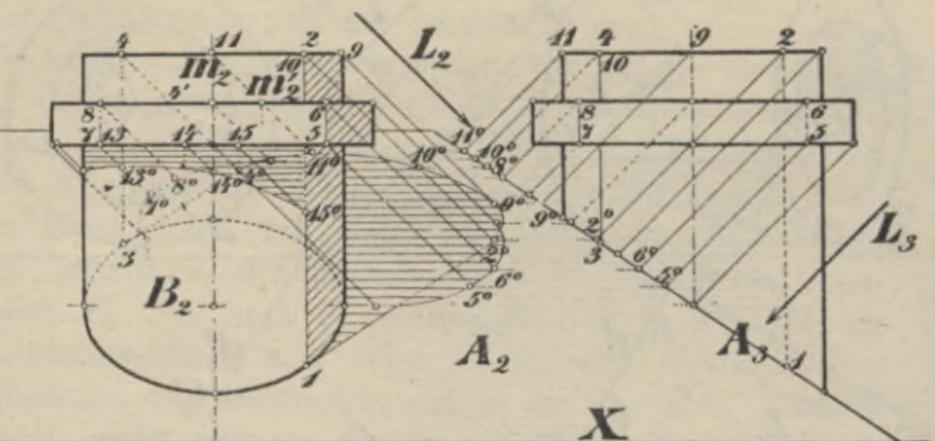


Fig. 43.

Fig. 44.

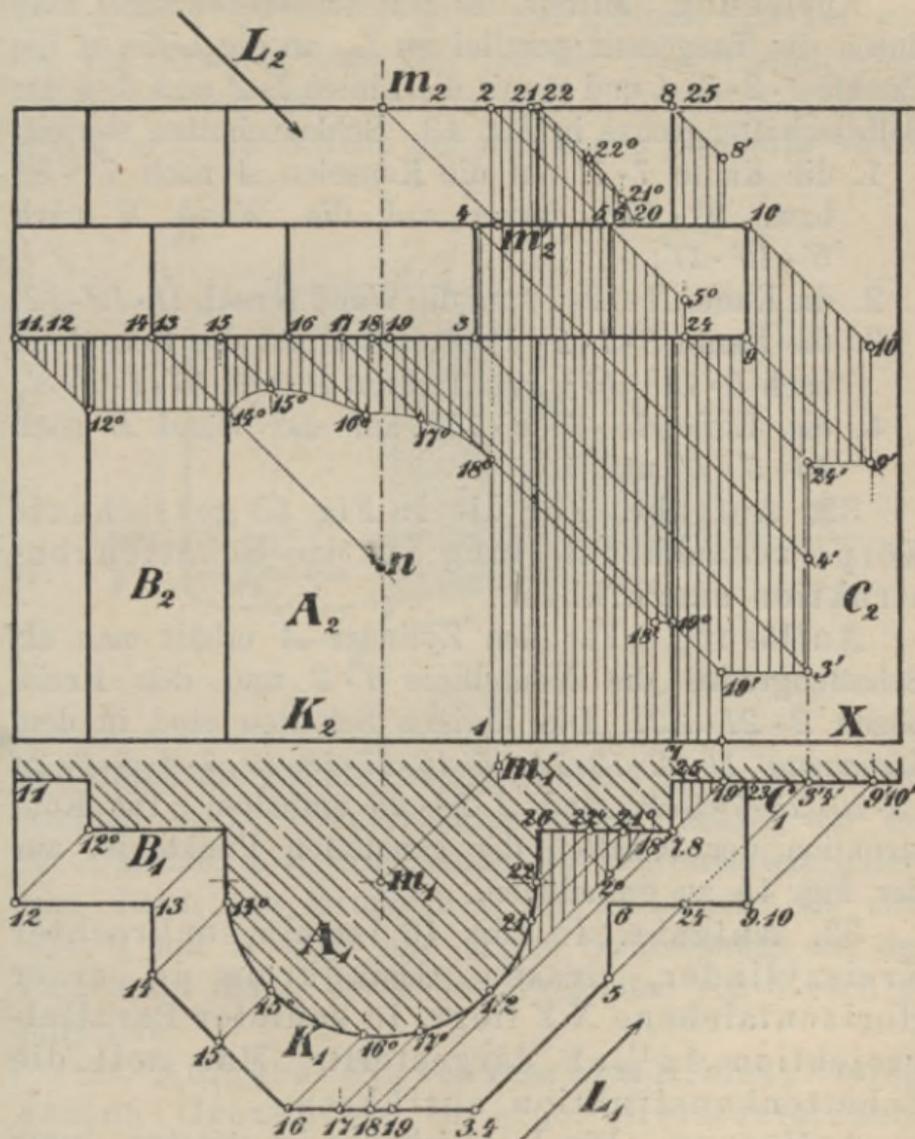


Fig. 45.

31. Aufgabe. Für die in Fig. 43 und 44 im Auf- und Seitenriß gezeichnete Körperzusammenstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Mittels des Seitenrisses bestimmt man durch die Tangenten parallel zu L_3 an die Linie A die Punkte $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ und damit die Linien $1 \cdot 2$ und $3 \cdot 4$ der Selbstschattengrenze in Fig. 43. Schlagschatten werfen:

1. die Kante $7 \cdot 11$ auf die Konsolen A nach $7^0 \cdot 8^0$ bzw. $9^0 \cdot 10^0$, ferner auf die Wand B nach $8' \cdot 10' \cdot 11'$;
2. die Kante $11 \cdot 12 \cdot 16$ auf die Wand B nach $11' \cdot 12' \cdot 12$;
3. die Kante $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8^0$ zum Teil auf die Konsole A nach $3 \cdot 14^0 \cdot 15^0$, zum Teil auf B nach $15' \cdot 1' \cdot 2' \cdot 8'$;
4. die Linie $13 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 15^0$ auf die Wand B nach $13 \cdot 5' \cdot 6'$ und $15'$.

32. Aufgabe. Für die in Fig. 45 gezeichnete Körperzusammenstellung ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Für den Zylinder A erhält man als Schattengrenze die Mantellinie $1 \cdot 2$ und den Kreisbogen $2 \cdot 21 \cdot 22$. Die übrigen Schatten sind in dem Linienzug $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 23 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 25$ und $2 \cdot 22 \cdot 26$ enthalten. Die Konstruktion der Schatten der genannten Punkte ist aus der Fig. 45 zu entnehmen.

33. Aufgabe. In Fig. 46 ist ein senkrechter Kreiszyllinder, dessen Grundkreis in einer Horizontalebene XY liegt, in schiefer Parallelprojektion $1:1/2:1$ dargestellt. Man soll die Schattenkonstruktion ausführen.

Auflösung. Die Lichtrichtung ist gegeben durch den Grundriß L_1 und die schiefe Projektion L' . Man zeichnet parallel zu L_1 an K_1 die Tangenten, erhält hierdurch die Berührungspunkte 1 und 2 und damit die Mantellinien $1 \cdot 3$ und $2 \cdot 4$ der Selbstschattengrenze. Der Schlagschatten wird hervorgerufen durch den

Linienzug $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$ und gelangt zum Teil auf die $X \cdot Y$ -Ebene, zum Teil auf die $X \cdot Z$ -Ebene. Der Schlagschatten eines Punktes, z. B. 7, auf die $X \cdot Y$ -Ebene ergibt sich im Schnitt der durch den Grundriß von 7

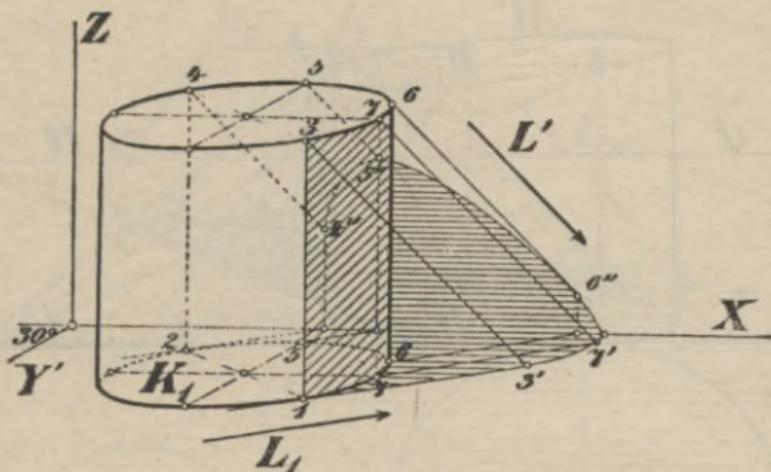


Fig. 46.

und durch die schiefe Projektion von 7 gezogenen Lichtstrahlen in $7'$. Der Schatten eines Punktes auf die $X \cdot Z$ -Ebene, z. B. des Punktes 6, wird erhalten, indem man durch den Grundriß 6 den Lichtstrahl bis zum Schnitt mit X zieht und diesen Schnittpunkt auf den Lichtstrahl durch die schiefe Projektion von 6 nach $6''$ projiziert.

34. Aufgabe. Ein senkrechter Kreiszyinder, dessen Grundkreis in einer Horizontalebene liegt, ist in zentral-perspektivischer Darstellung (s. Fig. 47) gegeben. Es ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Die Lichtrichtung ist gegeben durch die Fluchpunkte e und e' der Grundrißrichtung und der Lichtstrahlenrichtung selbst. e und e' liegen in einer

b) Der schiefe Kreiszyinder.

35. Aufgabe. Es ist die Schattenkonstruktion für einen schiefen Kreiszyinder (s. Fig. 48) auszuführen.

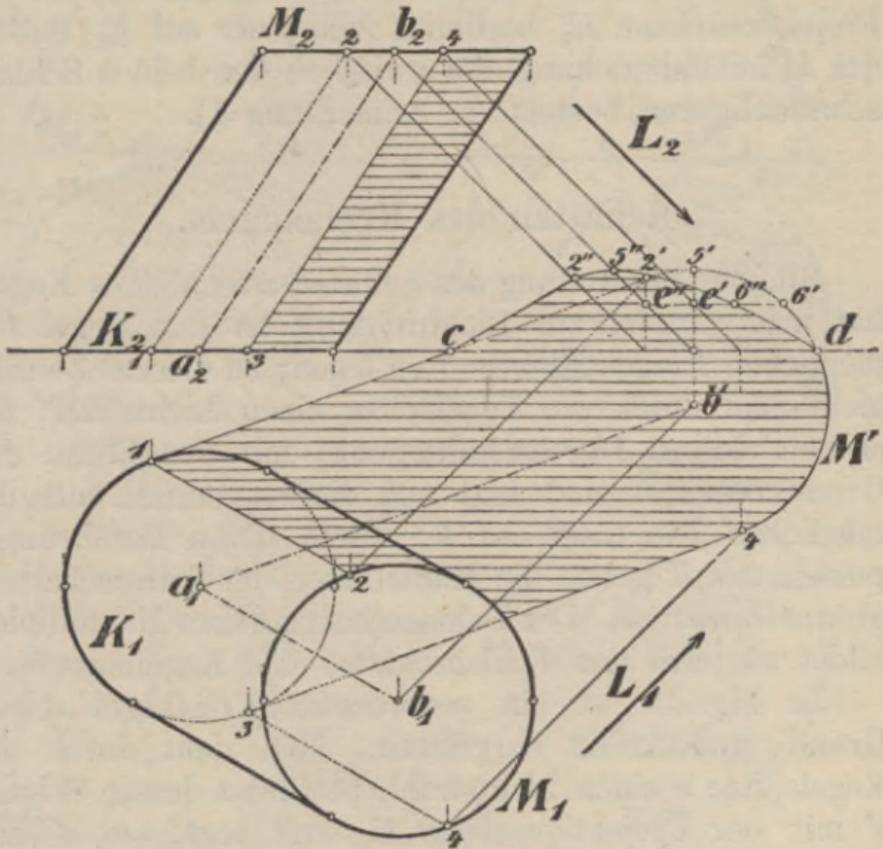


Fig. 48.

Auflösung. Man legt parallel zur Lichtrichtung an den Zylinder die möglichen Tangentialebenen. Zu diesem Zwecke zieht man etwa durch den auf der Achse des Zylinders gewählten Punkt b einen Lichtstrahl, bestimmt dessen erste Spur b' und verbindet b' mit a_1 . Die Tangenten an K_1 parallel zu $a_1 b'$ begrenzen

den Schlagschatten des Zylinders auf die Projektionsebene E_1 . Durch die Berührungspunkte 1 und 3 dieser Tangenten mit K_1 gehen die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurch. Der Schlagschatten des Kreises M ist ein Kreis M' . Aus dem Schlagschatten auf der Projektionsebene E_1 bestimmt sich jener auf E_2 mittels der Affinitätsbeziehung, die zwischen den beiden Schlagschattenfiguren besteht (s. Anmerkung 1).

Schatten des Kreiskegels.

36. Zur Ermittlung des Selbstschattens eines Kegels hat man parallel zur Lichtrichtung an den Kegel die möglichen Tangentialebenen zu legen; zu diesem Zwecke zieht man durch die Kegelspitze einen Lichtstrahl, bestimmt dessen Durchschnittspunkt mit der Ebene des Grundkreises K und legt von diesem Punkte aus die möglichen Tangenten an K ; durch deren Berührungspunkte mit K gehen die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurch. Der Schlagschatten dieser Mantellinien bildet zugleich den Schlagschatten des Kegelmantels.

In Fig. 49 ist ein senkrechter Kreiskegel durch Grund- und Aufriß dargestellt. Man zieht durch die Kegelspitze s einen Lichtstrahl, bestimmt dessen Schnitt s' mit der Projektionsebene E_1 und legt von s' aus die Tangenten an K_1 , welche in 1 und 2 berühren. Die Mantellinien durch 1 und 2 bestimmen die Selbstschattengrenze. Die Verbindungslinien $s'1$ und $s'2$ stellen den Schlagschatten des Kegels auf die Projektionsebene E_1 dar und treffen die Projektionsachse X in den Punkten a und b . Die Verbindungslinien $a s''$ und $b s''$ begrenzen den Schlagschatten des Kegels auf die Projektionsebene E_2 .

Fig. 49.

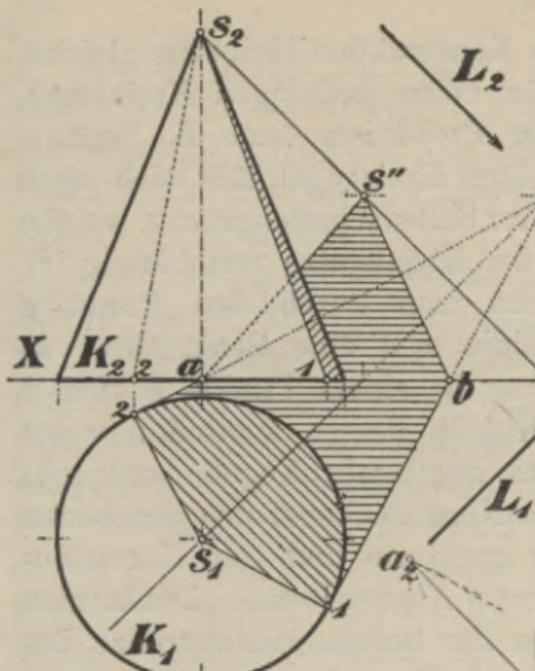


Fig. 50.

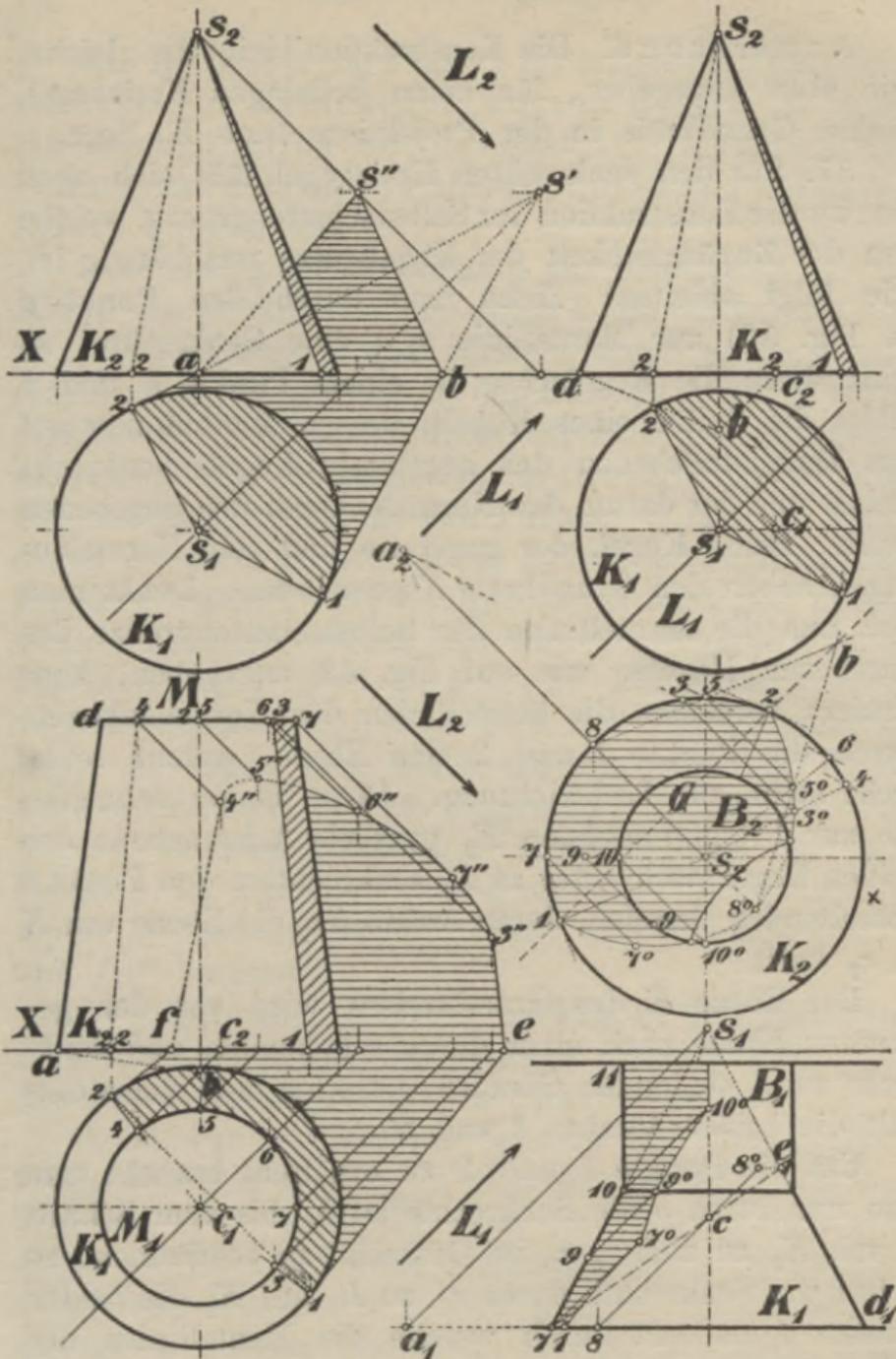


Fig. 51.

Fig. 52.

Anmerkung 6. Die Konstruktion bleibt die gleiche, wie eben angegeben, für einen beliebigen Kreiskegel, dessen Grundkreis in der Projektionsebene E_1 liegt.

37. Für den senkrechten Kreiskegel läßt sich noch eine zweite Konstruktion der Selbstschattengrenze, welche von der Zugänglichkeit der Kegelspitze unabhängig ist, wie folgt ableiten: Zieht man durch den Punkt a (s. Fig. 50) zur Mantellinie $s_2 a$ eine Senkrechte, so trifft diese die Kegelahse in einem Punkte b und b bildet die Spitze eines Kegels, dessen Mantellinien auf den Tangentialebenen des gegebenen Kegels senkrecht stehen und der darum der Normalenkegel des gegebenen heißt. Beide Kegel, der gegebene und sein Normalenkegel, haben den Grundkreis K gemeinsam. Denkt man sich nun die Mantellinien der Selbstschattengrenze des gegebenen Kegels, wie auf Fig. 49 angegeben, konstruiert, so bilden die Mantellinien des Normalenkegels durch die Punkte 1 und 2 eine Ebene, welche senkrecht steht zur Lichtrichtung. Diese Ebene schneidet die zur Projektionsebene E_2 parallele Achsenebene der beiden Kegel nach einer zu L_2 senkrechten, den Punkt b enthaltenden Geraden, deren Aufriß $b c_2$ die Ebene von K in c_2 trifft.

Die Ebene K des Grundkreises wird von der genannten Ebene nach einer durch c gehenden und senkrecht zu L stehenden Geraden getroffen und diese enthält die beiden Punkte 1 und 2.

Um die Punkte 1 und 2 zu erhalten, braucht man also nur durch b die Senkrechte zu L_2 bis zum Schnitt c_2 mit K_2 zu ziehen, c_1 im Grundriß zu bestimmen, so liefert die Senkrechte durch c_1 zu L_1 auf K_1 die beiden Punkte 1 und 2, durch welche die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurchgehen.

38. Aufgabe. In Fig. 51 ist ein abgestumpfter senkrechter Kreiskegel, dessen Spitze im Aufriß unzugänglich ist, dargestellt. Man soll die Schattenkonstruktion ohne Benutzung der Kegelspitze ausführen.

Auflösung. Man zeichnet zur Mantellinie ad im Aufriß die Senkrechte ab , durch b die Senkrechte bc_2 zu L_2 , bestimmt c_1 und zeichnet durch c_1 die Senkrechte zu L_1 , welche K_1 in den Punkten 1 und 2 trifft, durch welche die Mantellinien der Selbstschattengrenze hindurchgehen; sie schneiden im Grundriß den zweiten Begrenzungskreis M_1 in den Punkten 3 und 4. Hierdurch ist auch der Aufriß der Selbstschattengrenze des Kegels festgelegt. Der Schlagschatten kann nun punktweise konstruiert werden und wird hervorgerufen durch den Linienzug $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$. Der Schlagschatten der Mantellinien $1 \cdot 3$ und $2 \cdot 4$ auf die Projektionsebene E_1 ergibt sich durch die Tangenten an K_1 in den Punkten 1 und 2, diese Tangenten treffen die X -Achse in den Punkten e und f . Bestimmt man nun die Schatten der Punkte 3 und 4 auf die Projektionsebene E_2 in $3''$ und $4''$, so sind damit auch die Linien $e3''$ und $f4''$ bestimmt.

39. Aufgabe. Für die in Fig. 52 gezeichnete Zusammenstellung von Kegel und Zylinder ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Schatten entsteht von dem kreisförmigen Rande K des Kegels. Um den schattenwerfenden Teil von K zu ermitteln, zieht man durch die Kegelspitze s einen Lichtstrahl, bestimmt dessen Schnittpunkt a mit der Ebene von K und zeichnet von a_2 aus an K_2 die möglichen Tangenten, welche in 1 und 2 berühren. Der schattenwerfende Teil von K ist nun der

Bogen $1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$. Der Schatten dieses Bogens fällt zunächst auf den Kegelmantel und wird dadurch erhalten, daß man durch die Gerade as Ebenen parallel zur Lichtrichtung durch den Kegel führt; eine solche Ebene schneidet z. B. die Ebene von K nach einer Geraden $a_2 \cdot 3 \cdot 4$ und den Kegel nach den beiden Mantellinien $s_2 3$ und $s_2 4$. Der Lichtstrahl durch 3 bestimmt auf $s_2 4$ den Schlagschatten 3^0 von 3 auf den Kegelmantel im Aufriß.

Eine zweite solche Hilfsebene liefert eine Gerade $s_2 5_1 6$, die beiden Mantellinien $s_2 5$ und $s_2 6$ und auf letzterer den Schlagschatten 5^0 des Punktes 5 . Der Aufriß der Schlagschattenkurve ist eine Ellipse, welche die Gerade $s_2 a_2$ als Symmetrieachse besitzt. Dem Punkte 5^0 entspricht z. B. als Symmetriepunkt der Punkt 7^0 . Die oben angegebene Konstruktion versagt für die Schnittebene $a_2 8 s_2$. In diesem Falle bestimmt man den Grundriß 8 von 8 , zieht hierdurch einen Lichtstrahl parallel zu L_1 und bestimmt dessen Schnitt c mit der Kegelachse. Dreht man nun den Lichtstrahl $8c$ um die Kegelachse, bis er parallel zur Projektionsebene E_1 wird, so erhält er im Grundriß die Lage $7c$ und schneidet die in derselben Horizontalebene liegende Kegelmantellinie sd in einem Punkte e , dessen Grundriß e_1 ist. Die Parallele durch e_1 zur X -Achse liefert auf dem Lichtstrahle $8c$ den Schattenpunkt 8^0 im Grundriß, dem im Aufriß der Schattenpunkt 8^0 entspricht.

Anmerkung 7. Die Schlagschattenkurve $2 \cdot 5^0 \cdot 8^0 \cdot 7^0$ ist affin zum Kreise K_2 hinsichtlich der Geraden $1 \cdot 2$ und G als Affinitätsachse und L_2 als Affinitätsrichtung. Zieht man daher $8 \cdot 5$ bis zum Schnitt b mit G , so liefert die Verbindungslinie $b 5^0$ auf $8 s_2$ den Punkt 8^0 .

Im Aufriß ist nur ein Teil der Bodenfläche B des Zylinders im Schlagschatten.

Im Grundriß ist ein Horizontalschnitt durch die Kegelachse dargestellt und der Schlagschatten des Schnitttrandes auf den Körper gezeichnet. Schatten wird geworfen durch den Bogen $1 \cdot 7$ nach $1 \cdot 7^0$, durch die Gerade $7 \cdot 10$ zum Teil auf den Kegel nach der Mantellinie $7^0 9^0$; zum Teil auf den Zylinder nach $9^0 10^0$; endlich durch die Mantellinie $10 \cdot 11$ auf den Zylinder nach der Zylindermantellinie durch 10^0 .

Schatten der Kugel.

40. Die Berührungslinie eines Tangenzylinders an eine Kugel ist ein größter Kugelkreis, dessen Ebene senkrecht steht zur Zylinderrichtung. Die Selbstschattengrenze der Kugel ist somit der zur Lichtrichtung senkrechte größte Kugelkreis. Dieser wird sich, da die Lichtrichtung mit den beiden Projektionsebenen den gleichen Winkel φ einschließt, im Grund- und Aufriß als eine Ellipse projizieren, deren große Achse senkrecht zu L_1 bzw. L_2 gerichtet und gleich dem Kugeldurchmesser d sein wird, während die kleine Achse zur Lichtrichtung parallel und gleich $d \sin \varphi$ sich darstellt.

Zur Ausführung der Schattenkonstruktion (s. Fig. 53) benützt man zweckmäßig eine dritte Projektionsebene parallel zur Lichtrichtung und senkrecht zu einer Projektionsebene, etwa zu E_1 . Wählt man also Y als neue Projektionsachse parallel zu L_1 und ermittelt die dritte Projektion der Kugel und der Lichtrichtung, so erscheint die dritte Projektion der Selbstschattengrenze als der zu L_3 senkrechte Kreisdurchmesser D_3 .

Aus D_3 bestimmen sich unmittelbar die Punkte 1 und 2 von D_1 auf L_1 , ebenso 3 und 4 auf B_1 . Für den Grundriß D_1 sind die Punkte 1·2 und 3·4 die Achsenendpunkte der Ellipse, diese kann somit nach irgend einer Ellipsenkonstruktion punktweise bestimmt werden. Für den Aufriß ergeben sich die Achsenendpunkte 5 und 6 als Endpunkte des zu L_2 senkrechten Kreisdurchmessers, die Endpunkte 7 und 8 der kleinen Achse liegen auf L_2 und zwar ist $\overline{m_2 7} = \overline{m_2 8} = \overline{m_1 1} = \overline{m_1 2}$.

Durch Hinaufprojizieren erhält man außerdem von D_2 die Punkte 1·2 und 3·4, desgleichen durch Herabprojizieren die Punkte 5·6·7·8 von D_1 . Der Grundriß D_1 liegt symmetrisch zu L_1 , daher erhält man zu den Punkten 6 und 5 die Symmetriepunkte 9 und 10; ebenso ist D_2 symmetrisch zu L_2 , es entsprechen somit den Punkten 3 und 4 die Symmetriepunkte 9 und 10. Außerdem liegen im Aufriß die Punkte 5 und 10 sowie 9 und 6 je auf einer Horizontalen.

Bestimmt man die Schlagschatten m' und m'' des Kugelmittelpunktes m auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 , so sind diese Punkte die Mittelpunkte für die Schlagschattenellipsen D' und D'' , deren große Achsen bzw. mit L_1 und L_2 zusammenfallen; ihre Längen sind gleich ab . Die kleinen Achsen stehen senkrecht zu L_1 bzw. L_2 und haben eine Länge gleich dem Kugeldurchmesser.

Anmerkung 8. Handelt es sich lediglich darum, im Aufriß oder Grundriß den Selbstschatten der Kugel darzustellen, so kann dies auch ohne Benützung einer weiteren Projektion der Kugel geschehen. Soll z. B. der Selbstschatten im Aufriß konstruiert werden, so

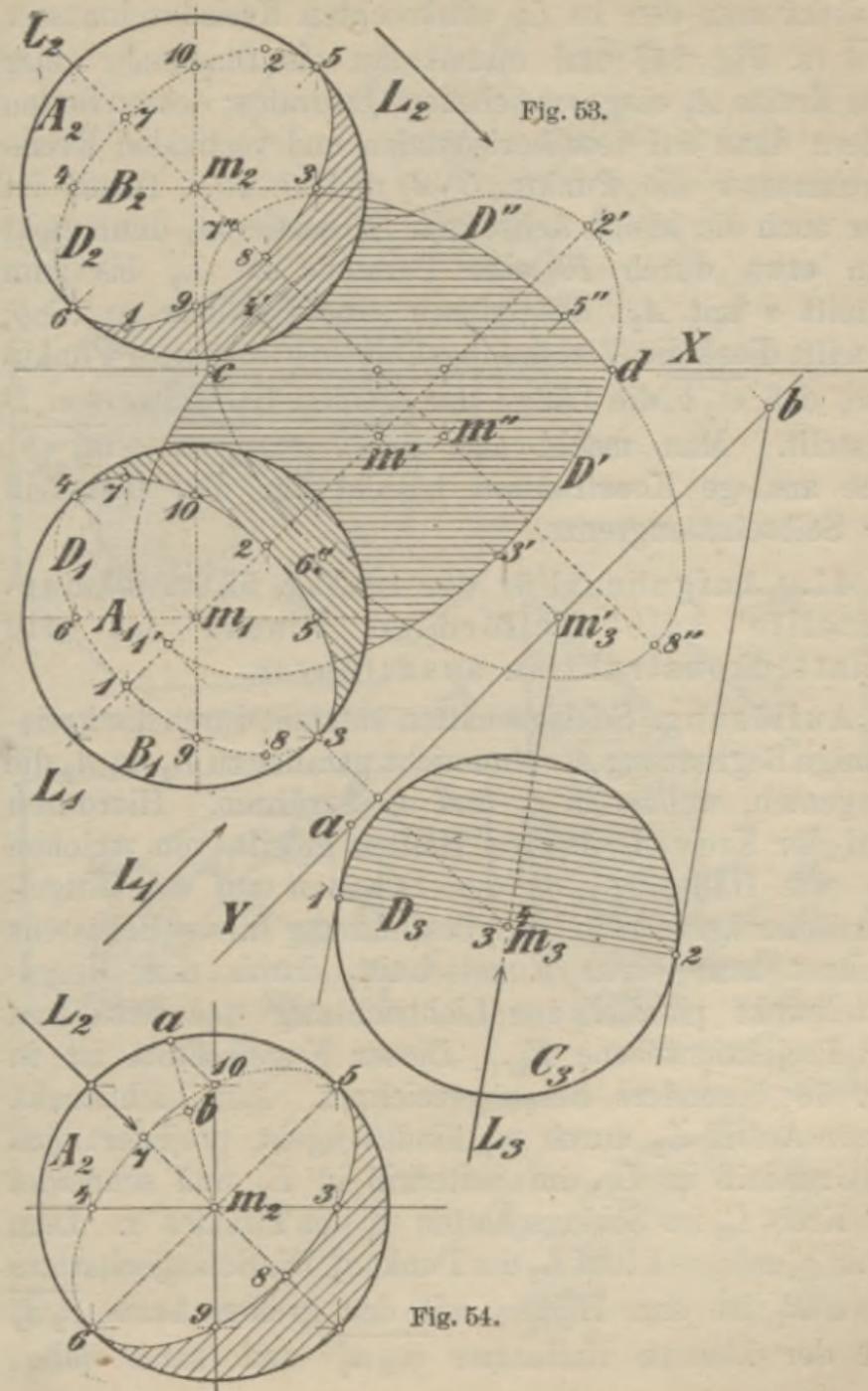


Fig. 53.

Fig. 54.

zeichnet man den zu L_2 senkrechten Kreisdurchmesser $\overline{5 \cdot 6}$ (s. Fig. 54) und nimmt ihn als Diagonale eines dem Kreise A_2 eingeschriebenen Quadrates; dessen Seiten liefern dann auf dem horizontalen und vertikalen Kreisdurchmesser die Punkte $3 \cdot 4$ und $9 \cdot 10$. Damit ist aber auch die kleine Achse von D_2 bestimmt, denn zieht man etwa durch 10 eine Parallele zu L_2 bis zum Schnitt a mit A_2 , desgleichen eine Parallele zu $5 \cdot 6$, so trifft diese die Verbindungslinie ma in einem Punkte b so, daß $\overline{m_2 b}$ die Länge der kleinen Halbachse von D darstellt. Man macht also $\overline{m_2 \cdot 7} = \overline{m_2 \cdot 8} = \overline{m_2 \cdot b}$. Eine analoge Konstruktion besteht für den Grundriß der Selbschattengrenze.

41. Aufgabe. Für die in Fig. 55 u. 56 dargestellte halbkugelförmige Nische ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Schlagschatten entsteht durch die kreisförmige Begrenzung A . Man zieht parallel zu L_2 an A_2 die Tangenten, welche in c_2 und d_2 berühren. Hierdurch wird der Kreis A_2 in zwei Hälften geteilt, von welchen die eine Hälfte $c_2 a_2 d_2$ den Schatten auf der Kugeloberfläche hervorruft. Zur Bestimmung dieses Schattens zeichnet man einen Kugelschnitt durch den Kugelmittelpunkt parallel zur Lichtrichtung und senkrecht zur Projektionsebene E_2 . Dieser Kugelschnitt ist in Fig. 56 besonders herausgezeichnet. Ein Lichtstrahl, dessen Aufriß L_2 durch m_2 hindurchgeht, projiziert sich im Grundriß in L_1 , im Seitenriß in L_3 und schneidet den Kreis C_3 im Schlagschatten a_3^0 des Punktes a . Dem Punkt a_3^0 entspricht auf L_2 der Punkt a_2^0 . Die Schlagschattenkurve F_2 ist eine Ellipse mit der großen Achse $\overline{c_2 d_2}$ und der kleinen Halbachse $\overline{m_2 a_2^0}$ und kann daher

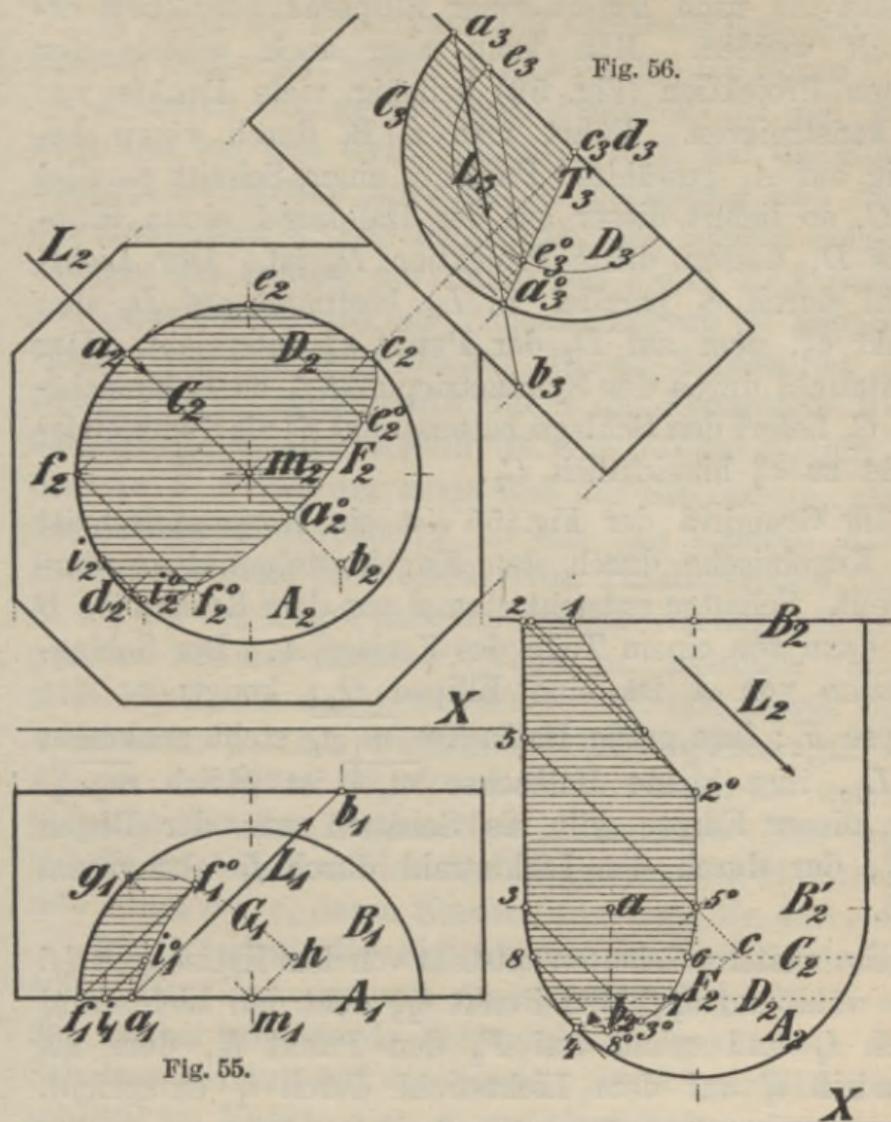


Fig. 55.

Fig. 57.

punktweise nach irgend einer Ellipsenkonstruktion ermittelt werden. Man kann aber auch mittels der dritten Projektion (Fig. 56) beliebig viele Punkte von F_2 konstruieren. Führt man z. B. durch einen beliebig auf A_2 gewählten Punkt e_2 einen Schnitt parallel zu C , so liefert dieser auf der Halbkugel einen Halbkreis D , dessen dritte Projektion D_3 ist. Der Lichtstrahl durch e_3 parallel zu L_3 bestimmt auf D_3 den Punkt e_3^0 , dem auf D_2 der Punkt e_2^0 entspricht. Der Lichtstrahl durch den Symmetriepunkt f_2 zu e_2 hinsichtlich C_2 liefert den Schlagschattenpunkt f_2^0 als Symmetriepunkt zu e_2^0 hinsichtlich C_2 .

Im Grundriß der Fig. 55 ist ein Horizontalschnitt der Kugelnische durch den Kugelmittelpunkt m dargestellt. Schatten entsteht einmal von dem Kreisrande B und dann von einem Teile des Kreises A . Der Schlagschatten von A ist eine Ellipse G_1 , kongruent der Ellipse F_2 ; ihre große Halbachse $\overline{m_1 g_1}$ steht senkrecht zu L_1 , ihre kleine Halbachse $\overline{m_1 h}$ ist gleich $\overline{m_2 a_2^0}$. Von dieser Ellipse gilt als Schatten nur der Bogen $g_1 f_1^0$, der durch den Lichtstrahl durch f_1 abgegrenzt wird.

Ein weiterer Schatten entsteht von dem Kreisbogen $d f$. Man wählt auf $d_2 f_2$ den Punkt i_2 , zieht den Lichtstrahl durch i_2 und erhält auf F_2 den Punkt i_2^0 , dem als Grundriß i_1^0 auf dem Lichtstrahl durch i_1 entspricht.

42. Aufgabe. Für den in Fig. 57 dargestellten Halbzylinder mit kugelförmigem Abschluß ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Eine Tangente parallel zu L_1 berührt B_1 in 1, eine Tangente parallel zu L_2 berührt A_2 in 4. Schatten wird hervorgerufen:

1. durch den Kreisbogen $1 \cdot 2$ von B auf dem Zylindermantel; man erhält hierfür (s. auch Nr. 22) den Bogen $1 \cdot 2^0$;
 2. durch die gerade Begrenzung $2 \cdot 3$, und zwar zum Teil auf den Zylindermantel, z. T. auf die Kugelfläche; der erstere Schatten ist geradlinig und durch die Mantellinie $2^0 \cdot 5^0$ dargestellt, der letztere Schatten entsteht als Schnitt der durch die Kante $2 \cdot 3$ parallel zu L_1 und senkrecht zur Projektionsebene E_1 geführten Ebene mit der Kugelfläche. Dieser Schnitt ist eine Kreislinie, deren Grundriß durch die Kreissehne $2 \cdot 2^0$ dargestellt ist. Der Aufriß ist eine Ellipse F_2 mit der Strecke $\overline{3 \cdot 5^0}$ als der einen und der Strecke $\overline{a b_2}$ gleich der halben Kreissehne $\overline{2 \cdot 2^0}$ als der anderen Achse. Durch Annahme einer Reihe von Parallelkreisen, z. B. C, D , auf der Kugel und Ermittlung von deren Schnittpunkten mit der Ebene F_1 erhält man ebenfalls Punkte, z. B. $6, 8, 7$, der Schnittkurve F_1 und damit ihres Aufrisses F_2 . Als wirkliche Schattengrenze gilt von F_2 nur das Stück $5^0 3^0$; außerdem kommt als weiterer Schatten der des Bogens $3 \cdot 4$ in Betracht. Man erhält hierfür im Aufriß wieder eine Ellipse mit den Halbachsen $5^0 \cdot 4$ und $5^0 \cdot e$, deren Konstruktion nach Nr. 41 erfolgt.
- Im Grundriß der Fig. 57 ist ein Horizontalschnitt durch den Zylinder mit Ansicht der Kugelfläche und der hierbei auftretende Schlagschatten gezeichnet. Der Schatten verläuft auf der Strecke $2^0 \cdot 3^0$ geradlinig und schließt im Punkte 4 an A_1 an, als Schatten des Bogens $3 \cdot 4$ auf die Kugelfläche.

Schatten eines Umdrehungskörpers.

43. Um den Tangentenzylinder parallel zur Licht- richtung an einen Umdrehungskörper zu konstruieren.

braucht man nur zu berücksichtigen, daß es längst eines Parallelkreises des Umdrehungskörpers stets einen dessen Oberfläche berührenden senkrechten Kreiskegel bzw. eine berührende Kugel gibt. Die Berührungslinie des Tangentenzylinders an diesen Hilfskegel bzw. die Hilfskugel schneidet den angenommenen Parallelkreis in Punkten, in welchen die Tangenten an den Hilfskegel bzw. die Hilfskugel auch Tangenten an die Oberfläche des Umdrehungskörpers sind, ihre Berührungspunkte mit letzterer also der Selbstschattengrenze angehören.

Ist in Fig. 58 durch A der Hauptmeridian eines Umdrehungskörpers, dessen Achse senkrecht zur Projektionsebene E_1 gewählt ist, dargestellt und bezeichnet B einen beliebigen Parallelkreis auf der Oberfläche des Umdrehungskörpers, so zeichnet man in a_2 eine Tangente T und eine Normale N zu A_2 ; N trifft die Achse C_2 in einem Punkte b , dem Mittelpunkte eines Kreises K , der den Punkt a_2 enthält. Bei der Drehung des Meridians A um die Achse C beschreibt T einen senkrechten Kreiskegel, der Kreis K eine Kugel. Kegel und Kugel berühren den Umdrehungskörper nach dem Parallelkreise B . Für den Kegel, wie für die Kugel erhält man aber die Punkte der Selbstschattengrenze auf B , wenn man durch b die Senkrechte zu L_2 bis zum Schnitt c_2 mit B_2 zieht und c_1 auf A_1 projiziert. Die Senkrechte durch c_1 zu L_1 liefert auf B_1 die beiden Punkte 1 und 2 der Selbstschattengrenze, welche auf B_2 nach 1 und 2 zu projizieren sind. Durch Annahme beliebig vieler Parallelkreise lassen sich beliebig viele Punkte der Selbstschattengrenze ermitteln. Aus der vorstehend beschriebenen Konstruktion folgen einige Eigenschaften für die Projektionen der Selbstschattengrenze, die für die zeichnerische Darstellung der letzteren von Wichtigkeit sind.

Dieser Meridian, der Lichtmeridian, ist somit eine Symmetrieebene für die Selbstschattengrenze. Für eine Projektion der Selbstschattengrenze in eine Ebene senkrecht zur Achse des Umdrehungskörpers ist die Projektion des Lichtmeridians in diese Ebene eine Symmetrieachse. Steht die Achse C des Umdrehungskörpers senkrecht zur Projektionsebene E_1 , so ist der durch C_1 gehende Lichtstrahl L_1 eine Symmetrieachse für den Grundriß der Selbstschattengrenze.

Im Lichtmeridian selbst liegen Punkte der Selbstschattengrenze, die man erhält, wenn man den Lichtmeridian um die Körperachse mit der Lichtrichtung parallel zur Projektionsebene E_2 dreht. Nach der Drehung fällt der Lichtmeridian im Aufriß mit dem Hauptmeridian A_2 zusammen, der Aufriß der Lichtrichtung wird parallel zu L'_2 . Zieht man also parallel zu L'_2 an A_2 die möglichen Tangenten, so gehen durch deren Berührungspunkte mit A_2 jene Parallelkreise, welche den Lichtmeridian in Punkten der Selbstschattengrenze treffen; ihre Grundrisse liegen auf L_1 . Die im Lichtmeridian liegenden Punkte der Selbstschattengrenze bilden im Aufriß deren höchste bzw. tiefste Punkte, d. h. die Aufrisse der sie enthaltenden Parallelkreise sind Tangenten an die Selbstschattengrenze.

Unter den Tangentialebenen parallel zur Lichtrichtung an den Umdrehungskörper befinden sich auch solche, welche zur Projektionsebene E_2 senkrecht stehen; ihre Vertikalspuren sind Tangenten parallel zu L_2 an den Hauptmeridian A_2 , und ihre Berührungspunkte mit A_2 gehören ebenfalls der Selbstschattengrenze an. Dergleichen befinden sich unter den Tangentialebenen parallel zur Lichtrichtung an den Umdrehungskörper auch solche senkrecht zur Projektionsebene E_1 ; ihre Horizontal-

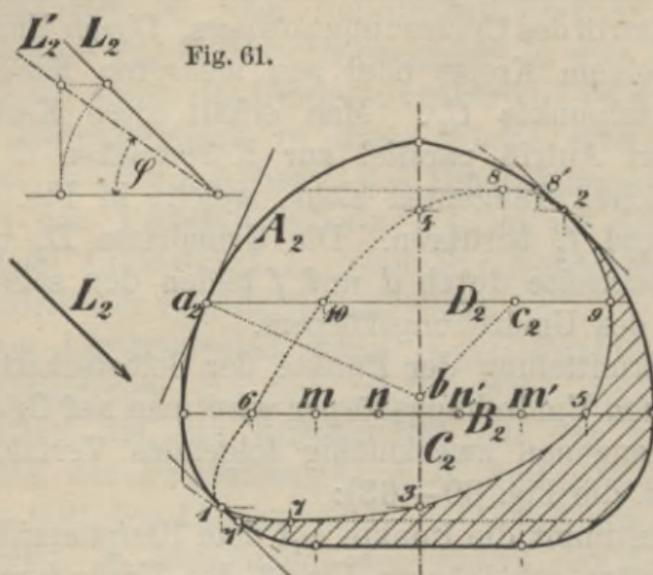
spuren sind Tangenten parallel zu L_1 an den ersten scheinbaren Umriß des Umdrehungskörpers. Dieser Umriß besteht aus einem Kreise oder aus mehreren Kreisen mit dem Mittelpunkte C_1 . Man erhält diese Kreise, wenn man im Aufriß parallel zur Körperachse C an A_2 die möglichen Tangenten zieht, welche in Fig. 56 z. B. in d_2 und f_2 berühren. Die Grundrisse D_1 und F_1 der Parallelkreise durch d und f bilden den scheinbaren Umriß des Umdrehungskörpers.

Bei der Ermittlung der Punkte der Selbstschattengrenze für einen Umdrehungskörper wird man auf Grund des Vorangegangenen zweckmäßig folgendes Verfahren einschlagen (s. die Fig. 60—63):

1. Man bestimmt die Punkte auf dem Hauptmeridian A_2 , dem zweiten scheinbaren Umriß des Umdrehungskörpers, in dem man parallel zu L_2 an A_2 die möglichen Tangenten zieht; sie berühren in den Punkten 1 und 2, deren Grundrisse auf A_1 liegen; hierauf bestimmt man die Symmetriepunkte 3 und 4 zu 1 und 2 hinsichtlich des Grundrisses des Lichtmeridians L_1 . Die zugehörigen Aufrisse von 3 und 4 liegen auf den Horizontalen durch 1 und 2 und auf C_2 .

2. Man konstruiert die Punkte auf dem ersten scheinbaren Umriß B_1 , indem man parallel zu L_1 an diesen Umriß die möglichen Tangenten zieht; sie berühren in den Punkten 5 und 6 und liegen auf der Senkrechten zu L_1 durch C_1 . Die Aufrisse ergeben sich auf B_2 durch Hinaufprojizieren.

3. Man ermittelt die Punkte auf dem Lichtmeridian, indem man parallel zu L'_2 an A_2 die Tangenten zieht; durch deren Berührungspunkte 7' und 8' gehen diejenigen Parallelkreise hindurch, auf welchen die im Lichtmeridian befindlichen Punkte der Selbstschatten-



X

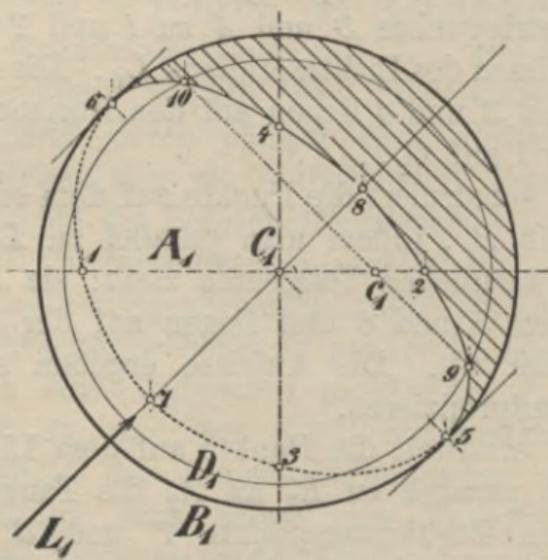
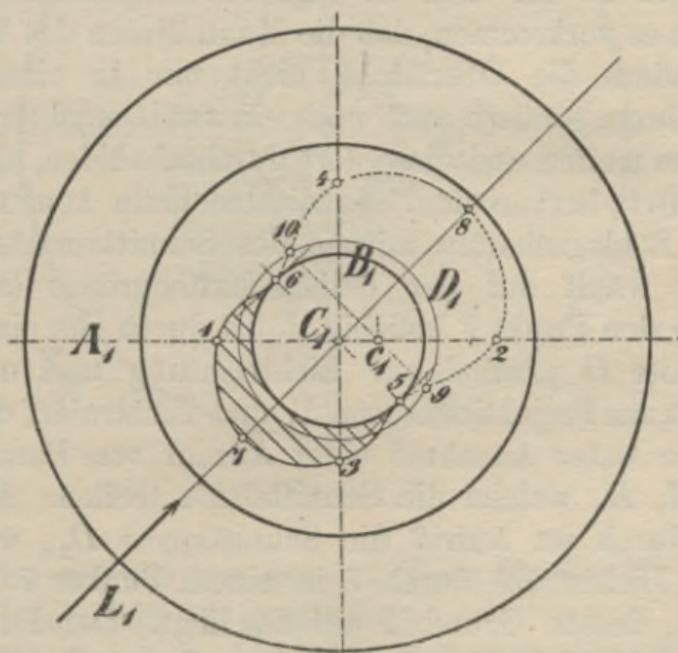
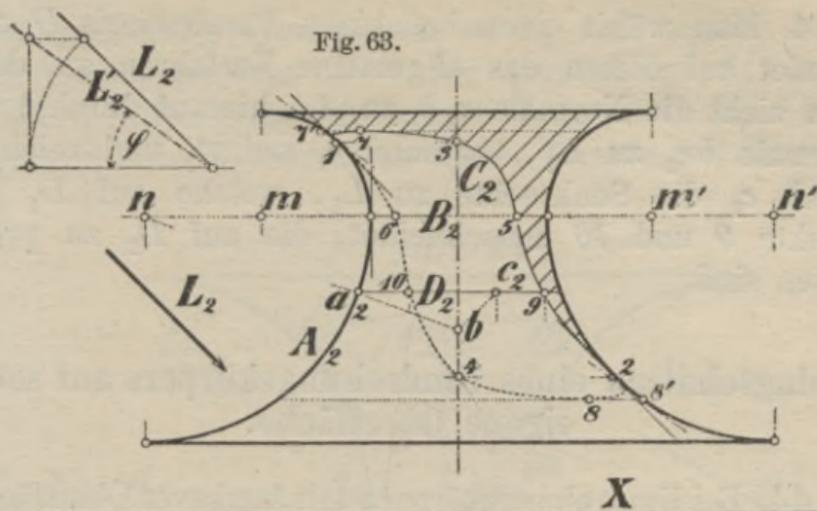


Fig. 60,



grenze liegen; die Grundrisse dieser Parallelkreise schneiden auf L_1 die Punkte 7 und 8 aus, welche in den Aufriß nach 7 und 8 zu projizieren sind.

4. Man wählt einen beliebigen Parallelkreis D und wendet auf diesen das allgemeine Verfahren an, d. h. man zieht die Normale $a_2 b$ zu A_2 , hierauf durch b die Normale $b c_2$ zu L_2 , bestimmt c_1 auf A_1 und zeichnet durch c_1 die Senkrechte zu L_1 , welche auf D_1 die Punkte 9 und 10 ausschneidet, die auf D_2 zu projizieren sind.

Schlagschatten eines Umdrehungskörpers auf seine eigene Oberfläche.

44. Bei Umdrehungskörpern mit konkaver Oberfläche, wie z. B. bei dem in Fig. 64 dargestellten Beispiel, kann es vorkommen, daß die Mantellinien des Tangentenzylinders die Oberfläche nicht nur in einem Punkte berühren, sondern auch noch ein zweitesmal auf die Oberfläche treffen und diese dort durchschneiden, also Schlagschatten hervorrufen. In diesem Falle konstruiert man den Schlagschatten mittels des Schnittverfahrens, d. h. man wählt auf der Selbstschattengrenze (s. Fig. 64) etwa den Punkt 7 beliebig, führt durch ihn einen ebenen Schnitt D parallel zur Lichtrichtung und etwa senkrecht zur Projektionsebene E_1 und konstruiert die Schnittkurve unter Annahme einer Anzahl von Parallelkreisen I, II, B , welche die Schnittebene treffen. Man erhält hierdurch im Aufriß die Schnittkurve D_2 , welche von dem Lichtstrahl durch 7 in einem Punkte 7^0 getroffen wird, dessen Grundriß auf D_1 liegt. Der Punkt 7^0 ist der Schlagschatten des Punktes 7 auf die Körperoberfläche. In der Fig. 64 ist noch ein zweiter Schnitt F_1 geführt, dessen Aufriß F_2 von dem Lichtstrahl durch 9 in 9^0 getroffen wird; der zugehörige Grundriß 9^0 liegt auf F_1 . Die Schlagschattengrenze ist im Grund-

riß gleichfalls symmetrisch zu L_1 und beginnt in den Berührungspunkten 3·4 der parallel zu L_1 an die Selbstschattengrenze gezogenen Tangenten. Eine streng geometrische Konstruktion dieser Punkte soll hier nicht

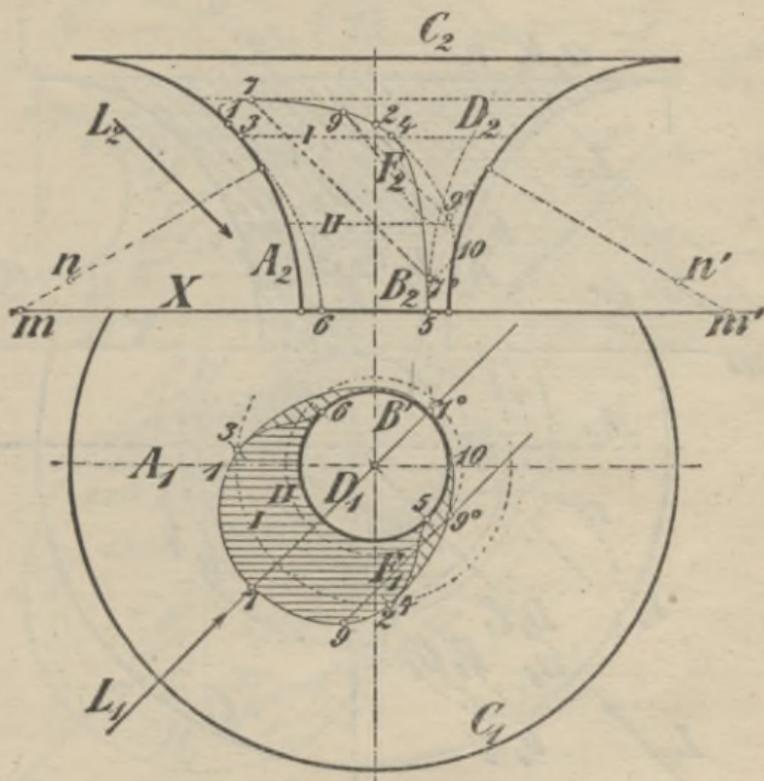


Fig. 64.

angegeben werden; es genügt, diese Punkte 3·4 nach dem Augenschein zu ermitteln.

45. Außer dem durch die Selbstschattengrenze auf der Körperoberfläche hervorgerufenen Schlagschatten entsteht noch ein weiterer Schlagschatten durch den obersten Begrenzungskreis C des Umdrehungskörpers (s. Fig. 65). Dieser Schlagschatten läßt sich ebenfalls mittels des

Schnittverfahrens konstruieren, indem man auf C eine Anzahl Punkte a, b, c wählt, hierdurch ebene Schnitte parallel zu L_1 und senkrecht zu E_1 führt und deren Schnittlinien D, F und G mit dem Umdrehungskörper ermittelt mit Zuhilfenahme einer Anzahl von Parallelkreisen

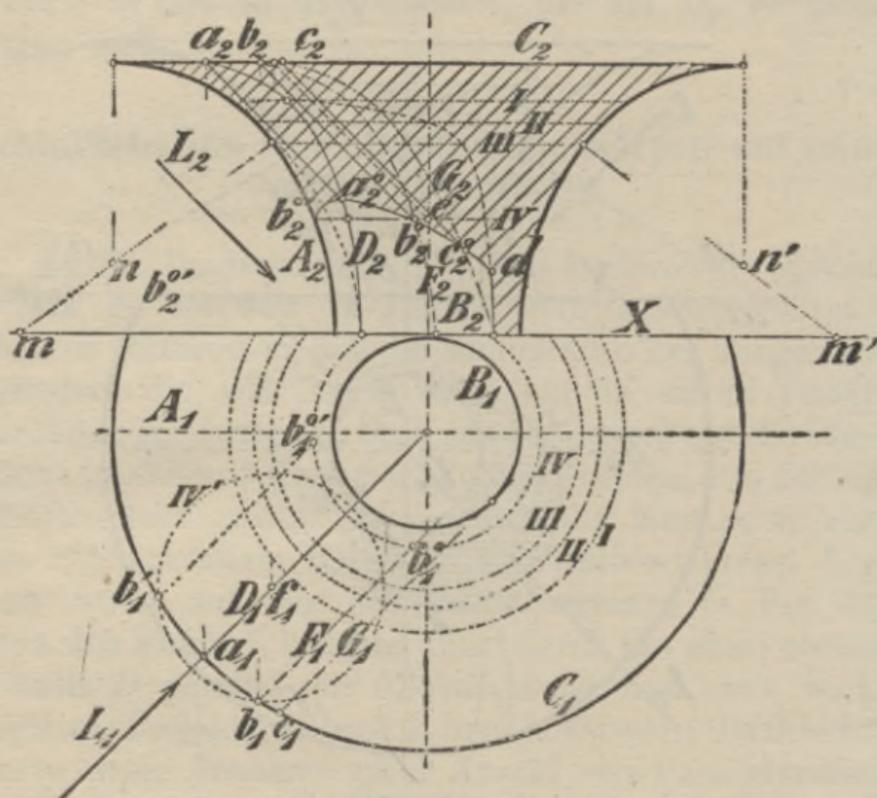
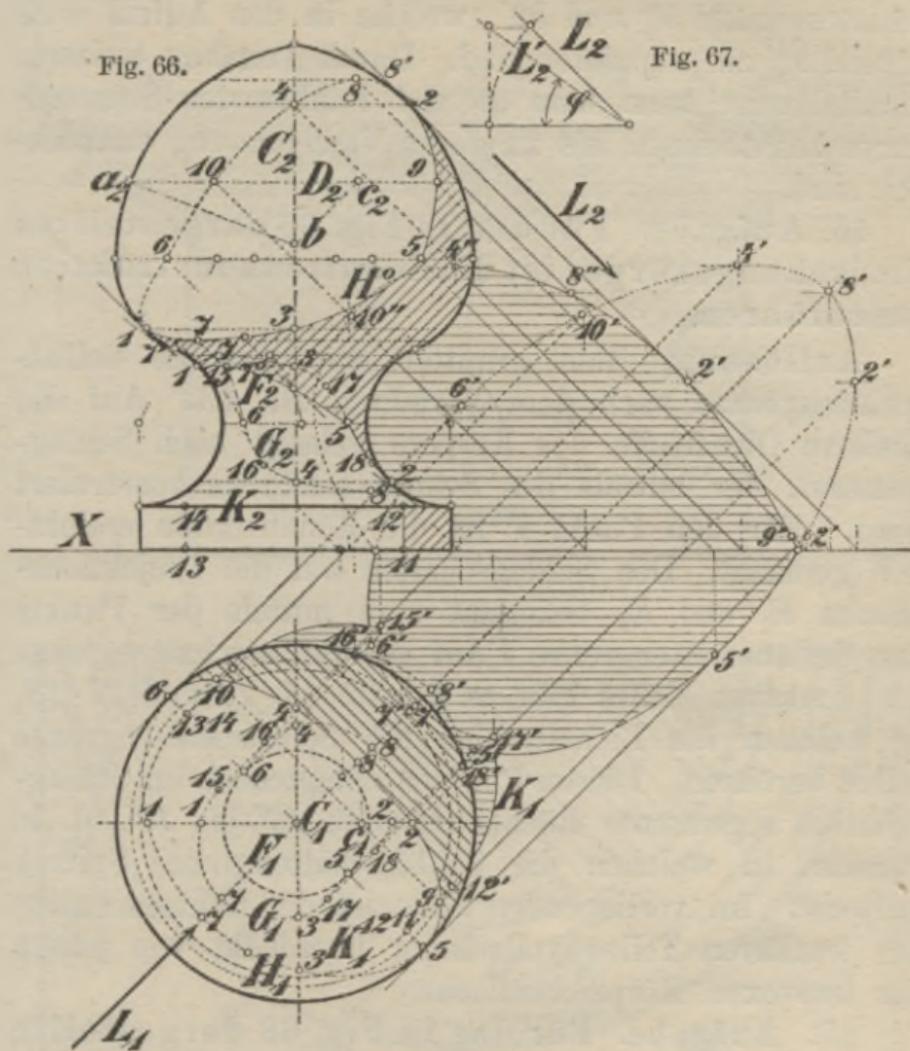


Fig. 65.

I, II, III und IV . Die Aufrisse D_2, F_2 und G_2 werden von den Aufrissen der Lichtstrahlen durch a_2, b_2, c_2 in den Schlagschattenpunkten a_2^0, b_2^0, c_2^0 getroffen. In der Regel reichen drei nebeneinander geführte Schnitte zur Verzeichnung der Kurve vollständig aus. Man verlängert diese dann nach rechts bis zur Selbstschattengrenze, nach links bis zum Umriß A_2 des Körpers.



Anmerkung 9. Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man auf dem Umdrehungskörper einen beliebigen Parallelkreis, z. B. IV , wählt, durch diesen einen Zylinder parallel zur Lichtrichtung legt und dessen Schnitt IV' mit der Ebene des Kreises C bestimmt. Der Kreis IV' schneidet C_1 eventuell in zwei Punkten b_1 und b'_1 . Die Lichtstrahlen durch b_1 und b'_1 liefern auf IV die Schlag-

schattenpunkte b_1^0 und $b_1^{0'}$, welche in den Aufriß nach b_2^0 und $b_2^{0'}$ zu projizieren sind. Durch Annahme weiterer Parallelkreise kann man so viel Punkte der Schattenkurve konstruieren, als zu deren Verzeichnung erforderlich sind.

46. Aufgabe. Für den in Fig. 66 dargestellten Umdrehungskörper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Man ermittelt zunächst die Selbstschattengrenze nach dem Verfahren Nr. 43. Auf die konkave Oberfläche des Körpers gelangt noch Schlag Schatten, der mittels des Schnittverfahrens konstruiert wird. Für den Punkt 7 ist die Konstruktion ersichtlich gemacht. Den Schlagschatten auf die Projektionsebenen E_1 und E_2 bekommt man mittels der Punkte der Selbstschattengrenze. Auf der Selbstschattengrenze des konkaven Teiles gibt es Punkte $15 \cdot 16$ und $17 \cdot 18$, in welchen die Lichtstrahlen die Selbstschattengrenze selbst berühren. Diesen Punkten entsprechen im Schlag Schatten sogenannte Rückkehrpunkte $16'$ bis $18'$, d. h. Punkte, in welchen die Schlagschattengrenze Spitzen aufweist. Im vorliegenden Falle ist der Schlagschatten des konkaven Teiles vollständig überdeckt von jenem der konvexen Körperoberfläche.

47. Aufgabe. Für das in Fig. 68 dargestellte Säulenkapitäl ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Bei derartigen zusammengesetzten Umdrehungskörpern wendet man zur Herstellung der Schattengrenzen zweckmäßig das Schnittverfahren an. Es sind die Schnitte A_1 bis F_1 parallel zu L_1 und senkrecht zur Projektionsebene E_1 geführt und mittels derselben sowohl Selbstschatten, als auch die auf der

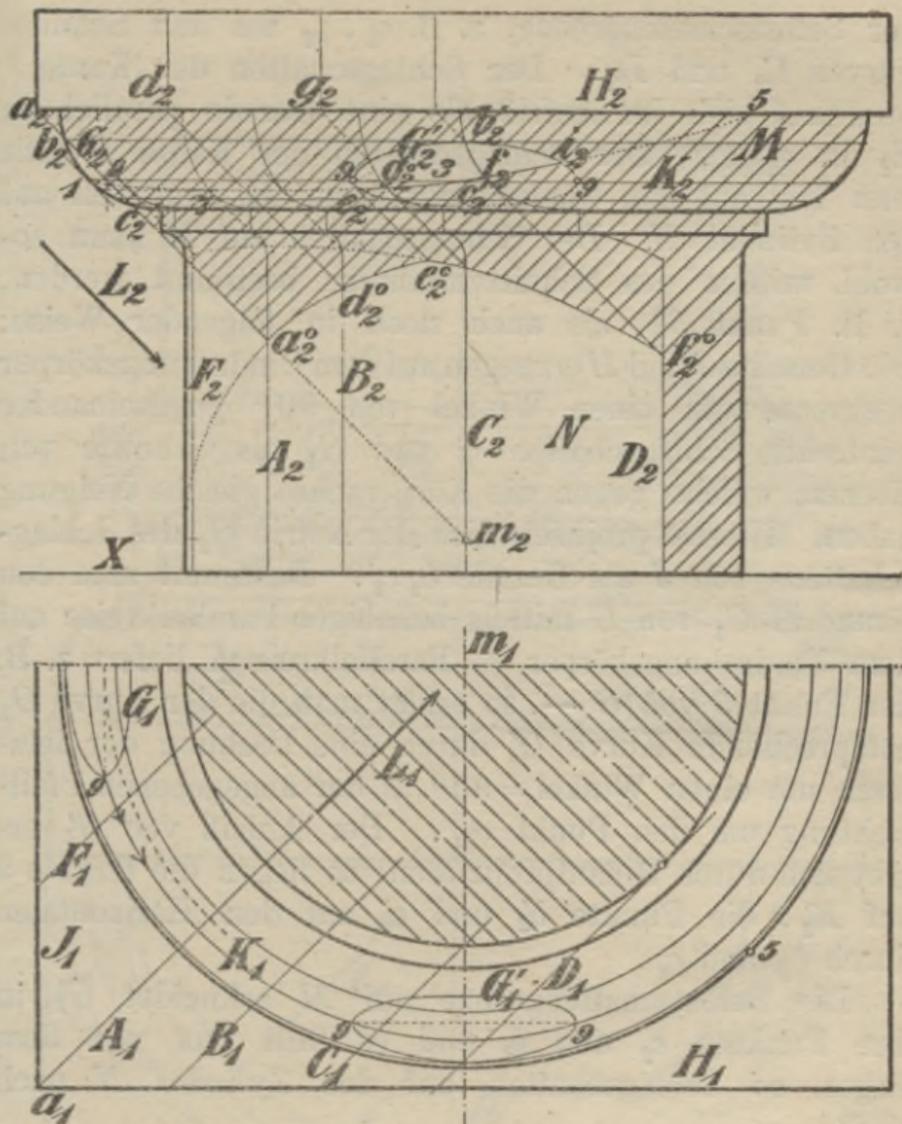


Fig. 68.

Körperoberfläche auftretenden Schlagschattengrenzen bestimmt worden. So liefern z. B. die Lichtstrahlen durch a_2 und d_2 auf A_2 bzw. B_2 die Schlagschattenpunkte a_2^0 und d_2^0 . Die Lichtstrahlen, die berührend an die Schnittkurven A_2 , B_2 usw. gezogen werden, bestimmen Punkte

der Selbstschattengrenze, z. B. e_2, f_2 auf den Schnittkurven C_2 und D_2 . Der Schlagschatten der Kante J projiziert sich im Aufriß als eine Gerade parallel zu L_2 in $a_2 a_2^0$. Der Schlagschatten der Kante H fällt zum Teil auf den Umdrehungskörper M , zum Teil auf den Zylinder N . Der Schlagschatten auf M kann sowohl mittels des Schnittverfahrens bestimmt werden, z. B. Punkt g_2^0 , als auch noch in folgender Weise: Die Geraden J und H erzeugen auf dem Umdrehungskörper kongruente um einen Winkel von 90° gegeneinander verdrehte Schlagschatten G und G_1 als Schnitte von Ebenen, welche gegen die Körperachse gleiche Neigung haben. Hierbei projiziert sich der Aufriß G_2 des Schlagschattens von J als Gerade $b_2 c_2$. Bestimmt man den Grundriß G_1 von G mittels beliebiger Parallelkreise auf dem Umdrehungskörper — Parallelkreis K liefert z. B. den Punkt g von G —, so erhält man die der Kurve G_1 entsprechende Kurve G_1' durch eine Drehung der letzteren um einen Winkel $= 90^\circ$ in der angegebenen Pfeilrichtung um den Punkt m_1 . Der Aufriß von G_1' ergibt sich durch Hinaufprojizieren; so liegen die Punkte g auf K_2 , die Punkte b_2' und c_2' auf den Horizontalen durch b_2 und c_2 .

Die Selbstschattengrenze auf M schneidet G_2' in den Punkten e_2 und i_2 und es fällt nun von dem Bogen ei Schlagschatten auf den Zylinder N nach $e_2^0 f_2^0$.

Anmerkung 10. Die Punkte $a_2^0 \cdot d_2^0 \cdot e_2^0$ liegen auf einem Kreise aus dem Mittelpunkte m_2 mit einem Halbmesser gleich jenem des Zylinders N .

48. Aufgabe. Für den in Fig. 69 dargestellten Säulenfuß ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

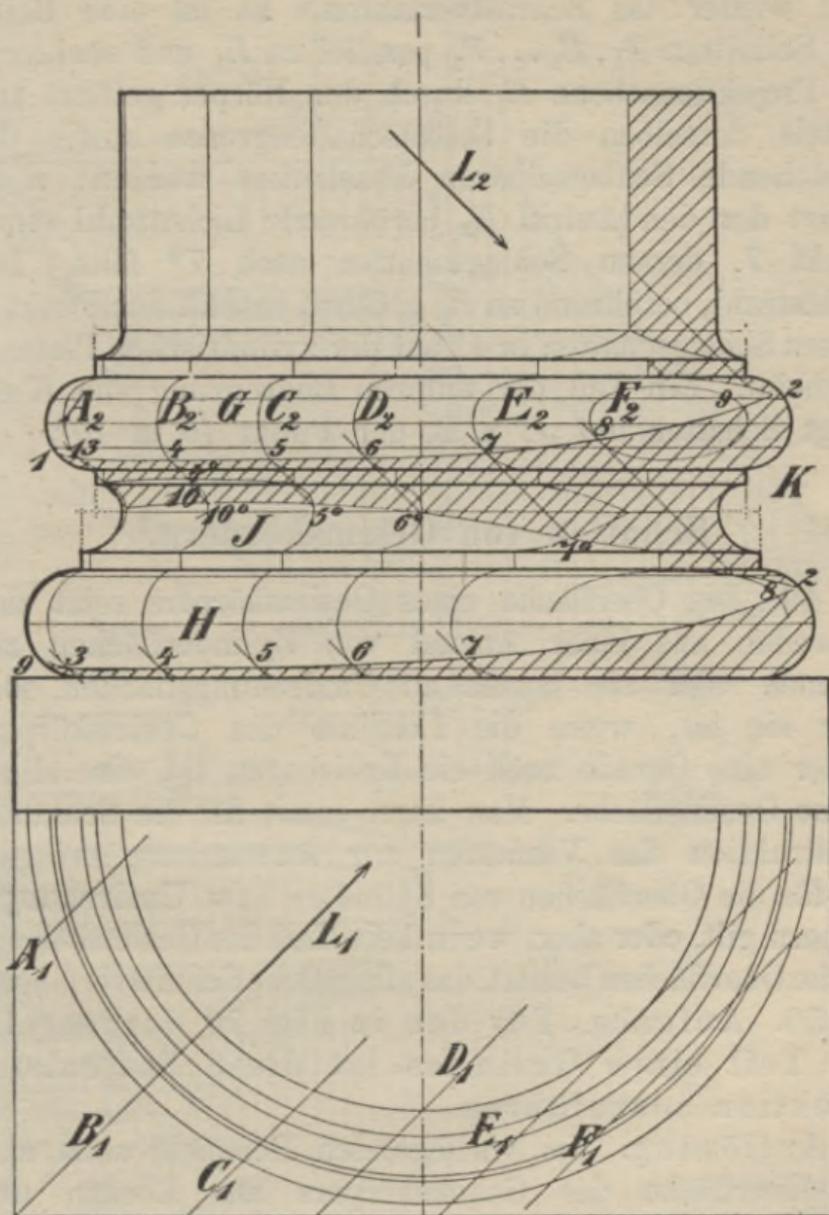


Fig. 69.

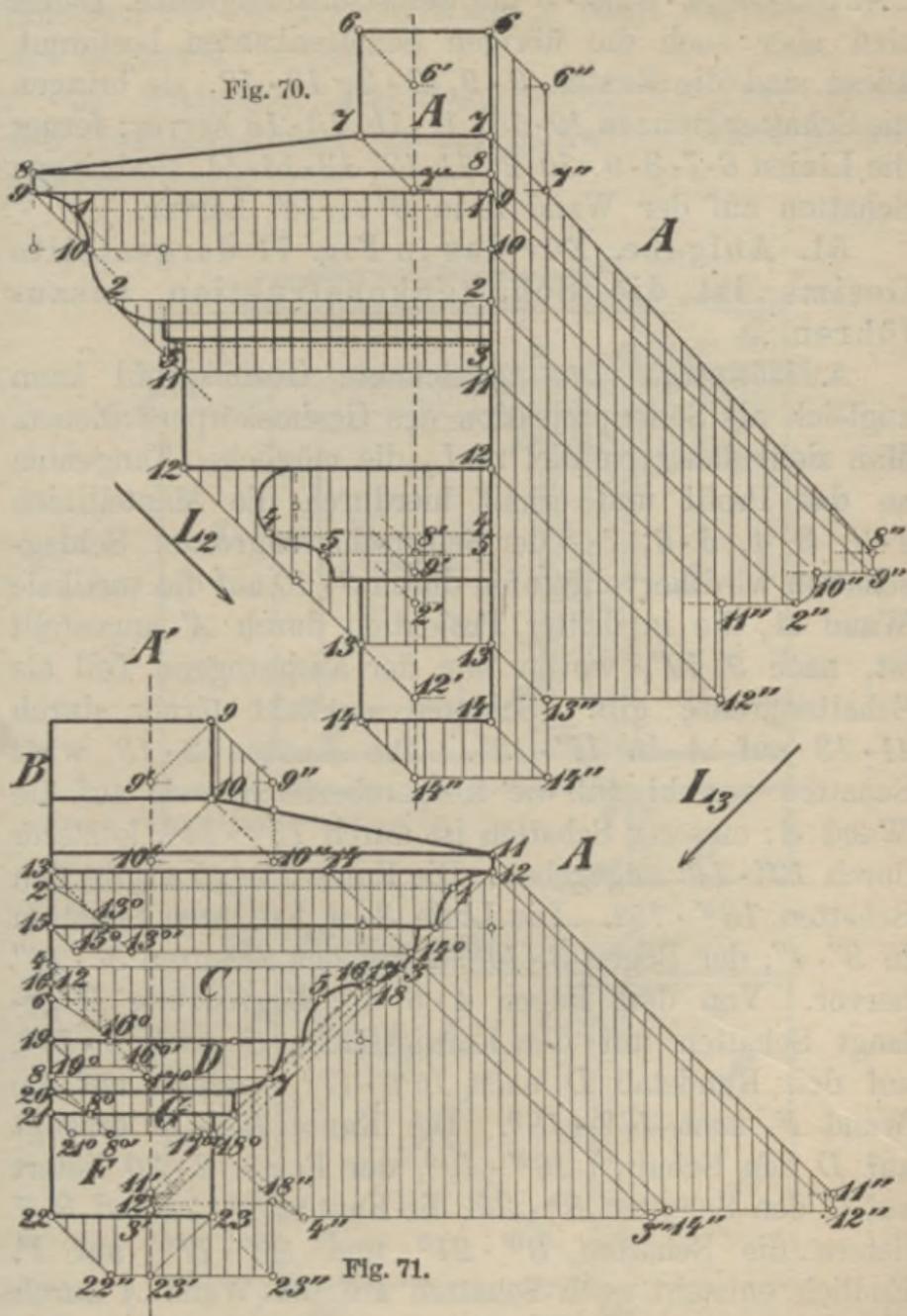
Auflösung. Zur Schattenbestimmung verwendet man wieder das Schnittverfahren. Es ist eine Reihe von Schnitten $A_1, B_1 \dots F_1$ parallel zu L_1 und senkrecht zur Projektionsebene E_1 durch den Körper geführt und mittels derselben die Selbstschattengrenze sowie der entstehende Schlagschatten konstruiert worden; z. B. liefert der den Aufriß E_2 berührende Lichtstrahl einen Punkt 7, dessen Schlagschatten nach 7° fällt. Der Lichtstrahl, berührend an B_2 geführt, enthält den Punkt 4, dessen Schlagschatten in 4° auf der zylindrischen Platte K erscheint. Ein Teil der unteren Begrenzung von K erzeugt Schatten auf J , z. B. der Punkt 10 in 10° .

Schatten von Gesimskörpern.

49. Die Oberfläche eines Gesimskörpers setzt sich entweder aus einer Anzahl von Zylinderflächen zusammen oder sie besteht aus Umdrehungsflächen, oder aber sie ist, wenn die Leitlinie des Gesimskörpers weder eine Gerade noch ein Kreisbogen ist, eine allgemeine Gesimsfläche. Man kann somit für die Schattenkonstruktion das Verfahren zur Anwendung bringen, das für die Oberflächen von Zylindern bzw. Umdrehungskörpern gilt, oder aber, wenn kein Teil des Gesimskörpers solche Oberflächen besitzt, das allgemeine Schnittverfahren.

50. Aufgabe. Für den in Fig. 70 dargestellten Teil eines Gesimses ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Im vorliegenden Beispiele setzt sich die Oberfläche des Gesimskörpers aus Ebenen und Zylinderflächen zusammen. Man zieht daher parallel zu L_2 die berührenden Lichtstrahlen an das Profil des Gesimskörpers und erhält hierdurch die Linien 1·1,



2.2, 3.3, 4.4, 5.5 der Selbstschattengrenze. Damit sind aber auch die übrigen Schattenkanten bestimmt. Diese sind die Kanten 9.9, 2.2, 12.12, sie bringen die Schattengrenzen 10.10, 11.11, 13.13 hervor; ferner die Linien 6.7.8.9, 10.2, 11.12, 13.14.14, sie bringen Schatten auf der Wand *A* in 6''...14'' hervor.

51. Aufgabe. Für das in Fig. 71 dargestellte Gesims ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Das gezeichnete Gesimsprofil kann zugleich als Seitenprojektion des Gesimskörpers dienen. Man zieht daher parallel zu L_3 die möglichen Tangenten an das Profil und erhält hierdurch die Mantellinien 1.2, 3.4, 5.6, 7.8 der Selbstschattengrenze. Schlag Schatten wird hervorgerufen durch 9.10 auf die vertikale Wand *A*, die in dritter Projektion durch *A'* angestellt ist, nach 9''10'', wovon nur der ausgezogene Teil als Schattengrenze gilt. Schatten entsteht ferner durch 11.12 auf *A* in 11''·12''. Die Kante 12.13 wirft Schatten sowohl auf die Körperoberfläche wie auf die Wand *A*; ersterer Schatten ist durch 13⁰·14⁰, letzterer durch 12''·14'' angegeben. Die Kante 13.15 ergibt den Schatten 13⁰·15⁰. Die Linie 3.4 hat ihren Schatten in 3''·4'', der Bogen 3.14⁰ bringt den Schatten 3''·14'' hervor. Von dem Bogen 4.6 der Begrenzung *B* gelangt Schatten auf die Karniesfläche *C* nach 6·16⁰, auf den Rundstab *D* nach 16⁰·17⁰, endlich auf die Wand *F* nach 17⁰·18⁰. Die Kante 16⁰·19 erzeugt auf *D* den Schatten 16⁰·19⁰, der Bogen 8.20 liefert auf *G* den Schatten 8⁰·20, die Kanten 8⁰·21 und 8.7 liefern die Schatten 8⁰·21⁰ und 8⁰·17⁰ auf *F*. Endlich entsteht noch Schatten auf der Wand *A* durch den Linienzug 22.23·18⁰ in 22''·23''·18''.

Schatten $18'' \cdot 4''$ auf die Wand A rührt von einem Teil des Bogens $4 \cdot 16$ her.

52. Aufgabe. Für den in Fig. 72 dargestellten Gesimskörper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

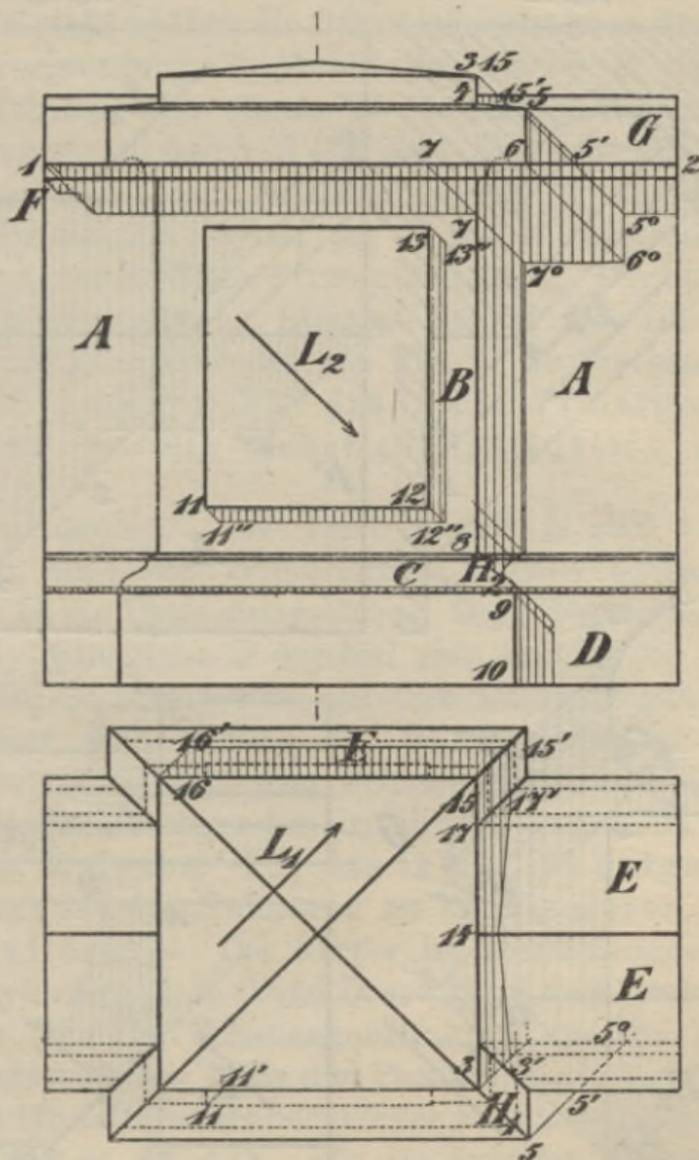


Fig. 72.

Auflösung. Schatten wird hervorgerufen von dem mit den Ziffern 1—16 bezeichneten Linienzug sowie von dem Profile F , und zwar entsteht Schatten auf den Oberflächen A , B , C , D , E und G . In den Figuren 73

Fig. 73.

Fig. 74.

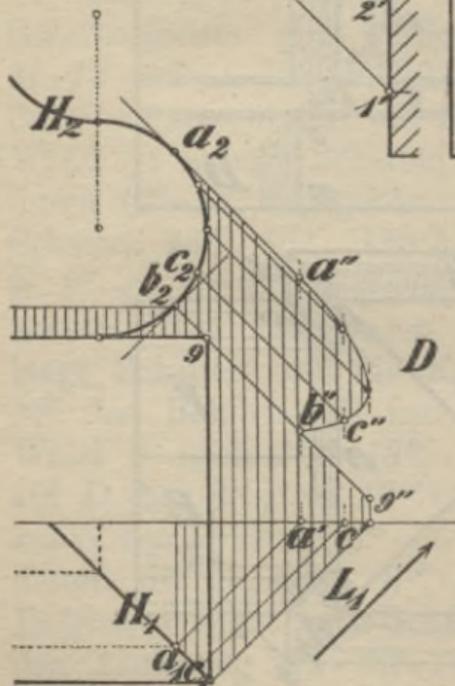
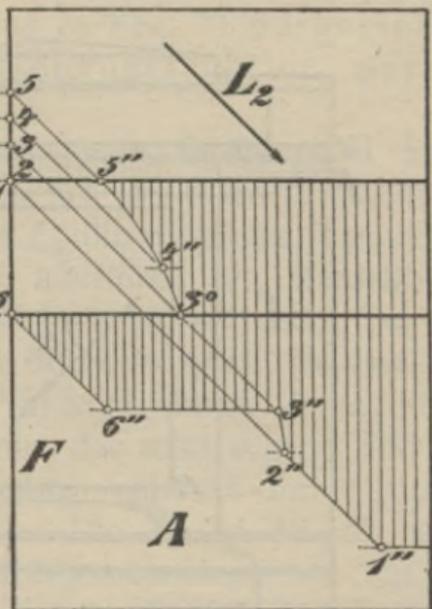
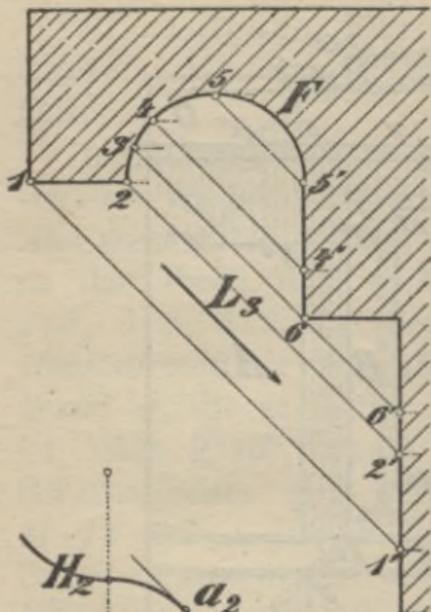


Fig. 75.

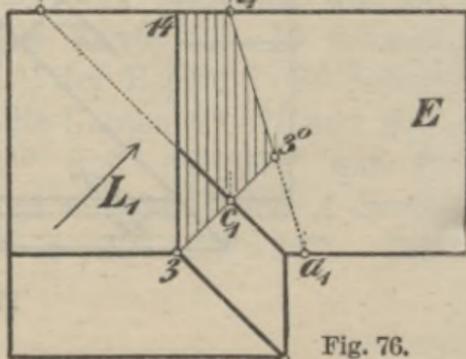
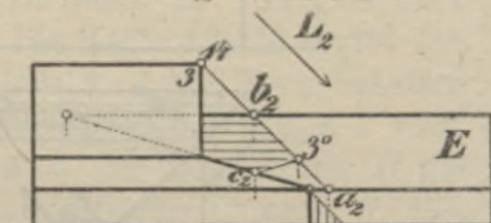


Fig. 76.

bis 76 sind für die einzelnen Teile die Schatten in größerem Maßstabe konstruiert.

Fig. 73 u. 74 zeigt die Konstruktion des Schattens des Profils F auf die Wand A . Fig. 75 zeigt die Schattenkonstruktion der Bogenlinie H auf die Wand D . Fig. 76 stellt endlich die Schattenkonstruktion der oberen Pfeilerbegrenzung $3 \cdot 14$ auf die Fläche E dar. Um den Schatten der Kante $3 \cdot 14$ auf die Ebene E zu bestimmen, ist durch $3 \cdot 14$ eine Ebene parallel zu L_2 und senkrecht zur Projektionsebene E_2 angenommen und ihr Schnitt ab mit der Ebene E aufgesucht; auf ab liegt der Schatten 3^0 vom Punkte 3 . Die Linie 3^0b ist der Schatten der Linie $3 \cdot 14$ auf E . Die übrige Schattenkonstruktion ist aus Fig. 72 zu ersehen.

53. Aufgabe. Für das in Fig. 77 dargestellte Gesims ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Die Teile A und B sind teils von ebenen, teils von zylindrischen Flächen begrenzt, der Teil C ist ein Umdrehungskörper. Die Schattengrenzen auf der Zylinderfläche B ergeben sich mittels des Profiles N_2 , die Schattengrenze auf dem Umdrehungskörper C bestimmt man mittels des Schnittverfahrens (s. die Schnitte D bis K). Der Schlagschatten auf die Wand ist mit Zuhilfenahme des Grundrisses ausgeführt worden.

54. Aufgabe. Für das in Fig. 78 dargestellte Gesims ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Der Körper ist zusammengesetzt aus den Zylindern A, B, C und D , sowie aus dem Umdrehungskörper F . Die Schattenkonstruktion für die Zylinder vollzieht sich mit Hilfe der Profillinien A_2 und C_2 , diejenige für den Umdrehungskörper F nach dem allgemeinen Verfahren (s. Nr. 43). Für die Zylinder A, B, C und D

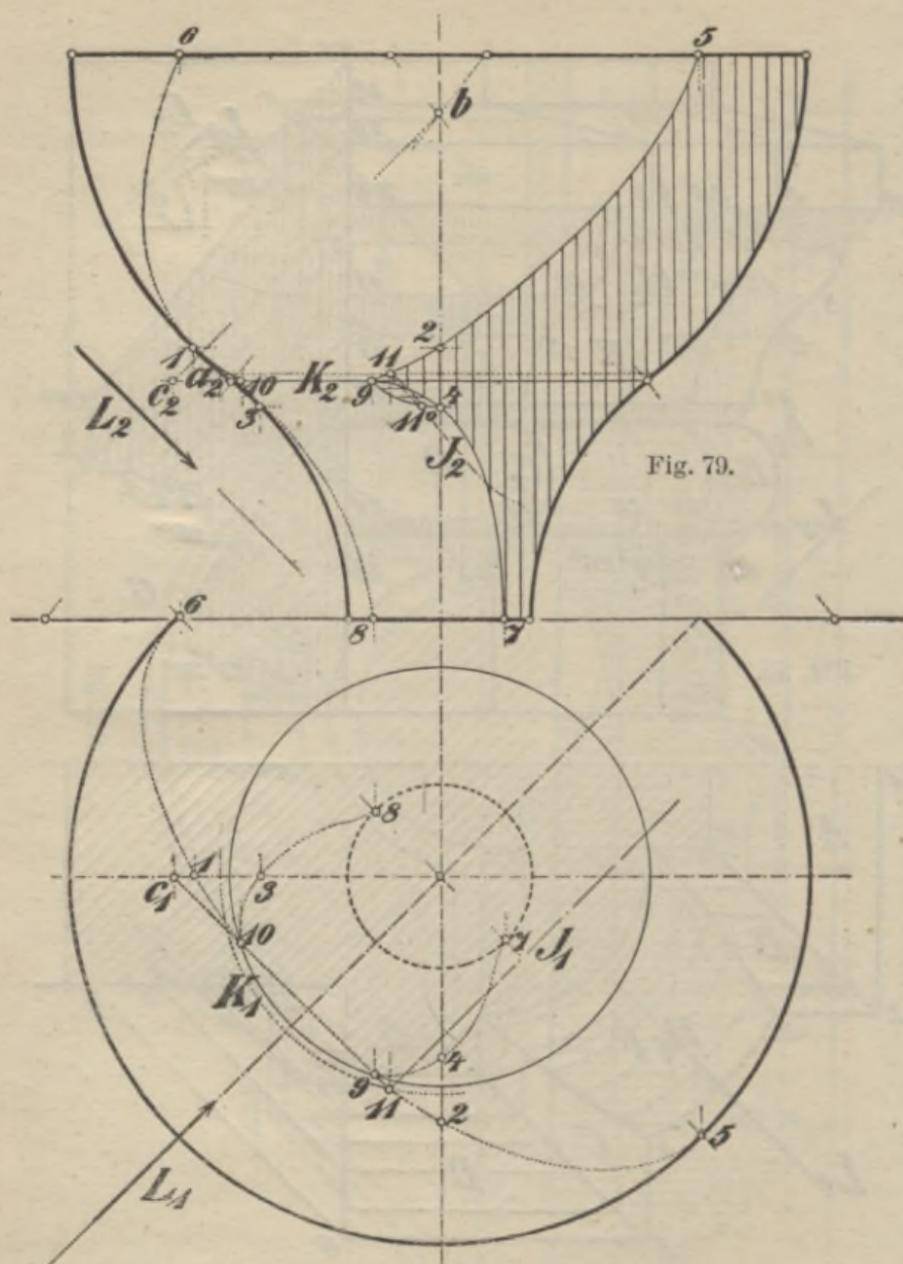


Fig. 79.

dies für einen ähnlich gestalteten Körper in Fig. 79 gezeigt ist. Es ist hier in gleicher Weise wie in Nr. 43 die Konstruktion ausgeführt worden. Dies ist

für den Parallelkreis K , längs welchem der konkave und konvexe Teil der Körperoberfläche zusammenhängen, gezeigt.

Infolge der Einziehung unterhalb des Parallelkreises K entsteht auf diesem Teile der Oberfläche noch Schlagschatten, der mittels eines Schnittes J parallel zu L_1 und senkrecht zu E_1 zu bestimmen ist. Die Konstruktion ist für den Punkt II ausgeführt.

Ganz entsprechend ist der Schatten auf dem Umdrehungskörper F (s. Fig. 78) zu ermitteln; der sonst noch auf F treffende Schlagschatten ist mittels des allgemeinen Schnittverfahrens zu erhalten, ein solcher Schnitt ist in H dargestellt.

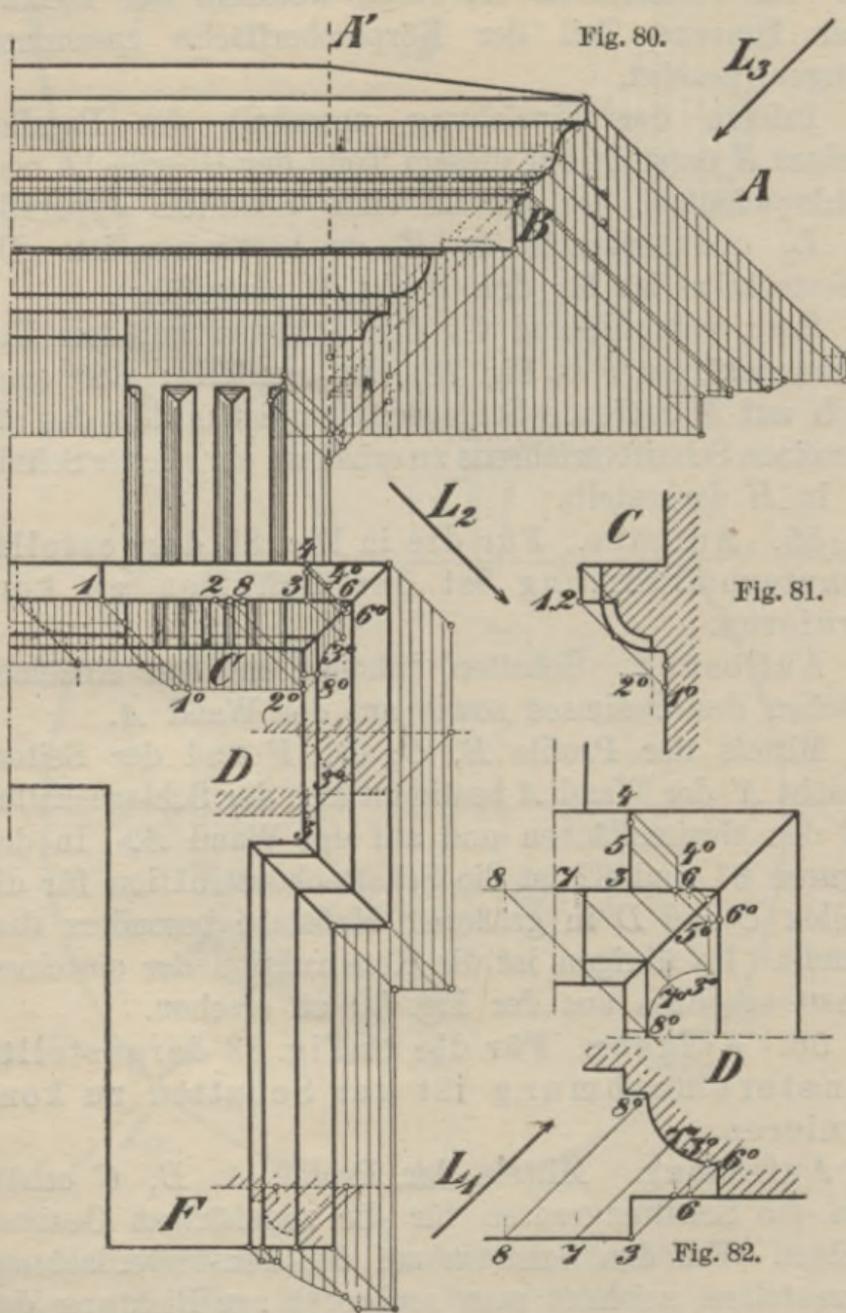
55. Aufgabe. Für die in Fig. 80 dargestellte Fensterumrahmung ist der Schatten zu konstruieren.

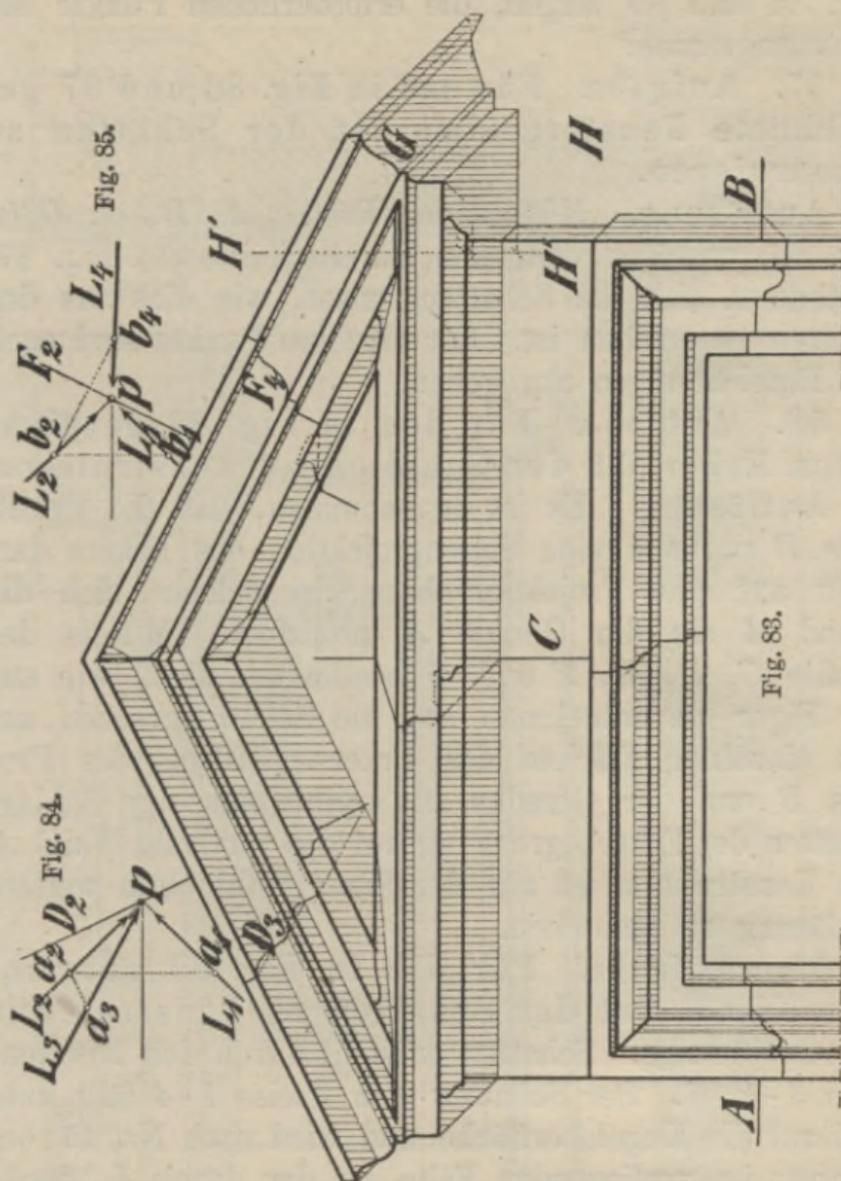
Auflösung. Schatten entsteht auf den einzelnen Flächen des Gesimses sowie auf der Wand A .

Mittels der Profile B, C, D, F und der Seitenansicht A' der Wand A bestimmt sich der Schlagschatten auf den Gesimsflächen und auf der Wand A . In den Figuren 81 und 82 ist die Schattenkonstruktion für die Stellen C und D in größerem Maßstabe besonders dargestellt. Im übrigen ist die Konstruktion der einzelnen Schattengrenzen aus der Fig. 80 zu ersehen.

56. Aufgabe. Für die in Fig. 83 dargestellte Fensterumrahmung ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Mittels der Profile A, B, C erhält man die Schattengrenzen für die zugehörigen Gesimsflächen. Um den Schatten auf der Fensterverdachung darzustellen, zeichnet man senkrecht zur Richtung der Verdachung und senkrecht zur Wand J die Schnitte





D_2 und F_2 bzw. ihre Umlegungen in die Wand J . Projiziert man in diese Ebenen D_2 und F_2 auch die Lichtrichtung L nach L_3 und L_4 (Fig. 84 und 85), so erhält man mittels der Profile D_3 und F_4 , wie die

Fig. 84 und 85 zeigen, die erforderlichen Punkte der Schattengrenzen.

57. Aufgabe. Für das in Fig. 86 und 87 gezeichnete Fenstergesims ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Mittels der Profile A, B, C, D (s. Fig. 86) und des vertikalen Durchschnittes (s. Fig. 87) bestimmen sich die Schattengrenzen, wie dies aus den Figuren zu ersehen ist. Für einzelne Punkte sind auch die Bezeichnungen angegeben.

58. Aufgabe. Für den in Fig. 88 gezeichneten Erker ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Es ist angenommen, daß die Profillinie B zugleich eine Seitenprojektion des Erkers darstellt auf eine Projektionsebene, in welcher sich die Wand A als die Gerade A' projiziert. Mittels der Profile C, D, E, F und G bestimmen sich, wie aus der Figur zu entnehmen ist, die Schattengrenzen auf den einzelnen Flächen des Erkers. Mittels des Profils B und der Geraden A' ergibt sich der Schlag Schatten der Erkerbegrenzung auf die vertikale Wand A . Die Konstruktion ist aus der Figur wohl ohne weitere Erklärung zu verstehen.

59. Aufgabe. Für die in Fig. 89 gezeichnete Nische ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Schatten entsteht durch den Nischenrand $1 \cdot 2 \cdot 6$. Der Schatten vom Kreise $1 \cdot 4$ fällt zum Teil auf die Kugeloberfläche und wird nach Nr. 41 bestimmt; im vorliegenden Falle ist der durch L_2 senkrecht zur Projektionsebene E_2 gelegte Kugelschnitt gleich um L_2 umgelegt, so daß der umgelegte Schnittkreis mit der Kugel mit K_2 zusammenfällt. Der umgelegte Lichtstrahl L_3 ($\overline{m_1 a_1} = \overline{a_2 a_3}$) trifft K_2 in b_3 , dem auf

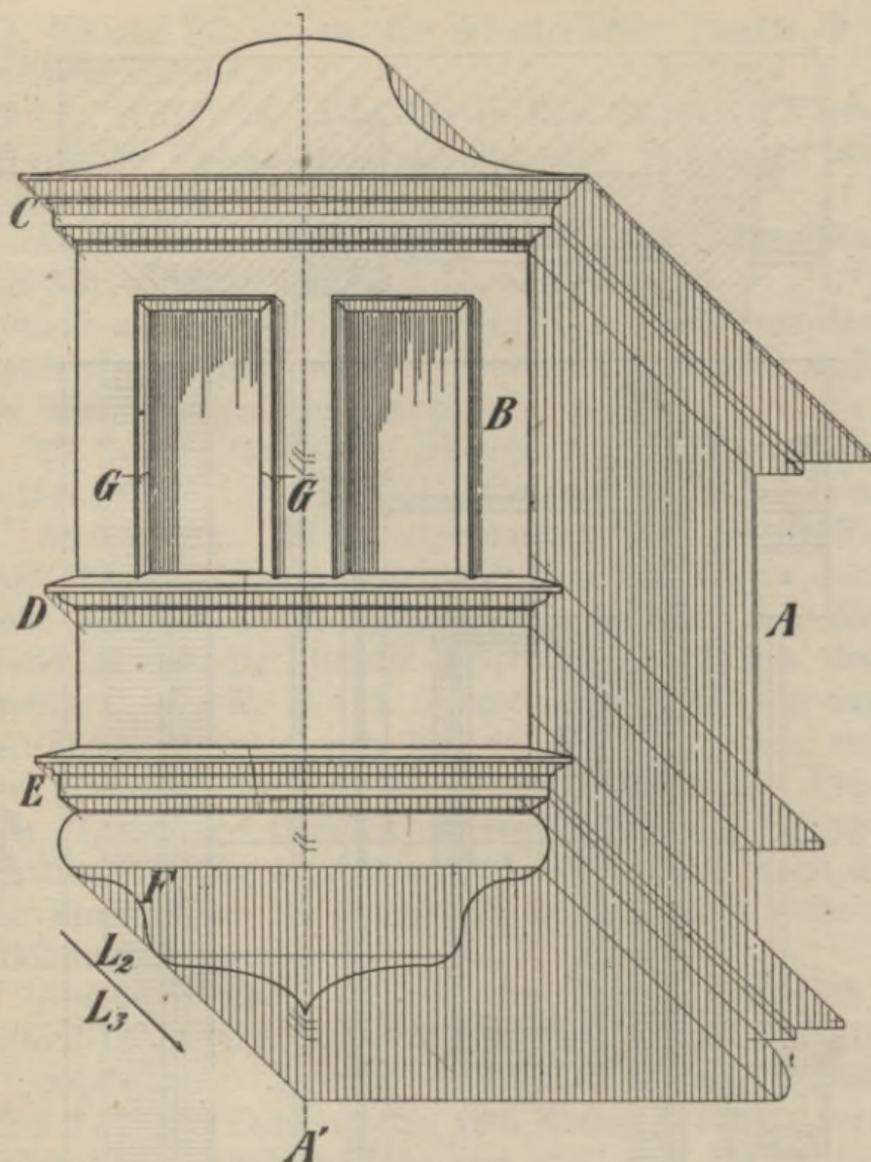


Fig. 88.

L_2 der Punkt b_2 entspricht. $\overline{a_2 \cdot 1}$ und $\overline{a_2 b_2}$ sind die Halbachsen der Schlagschattenellipse, welche die Horizontale durch a_2 in einem Punkte 7^0 , dem Schlagschatten des Punktes 7, trifft. Der Schatten des

Bogens $7 \cdot 4$ gelangt auf die Zylinderoberfläche B und wird mittels des Grundrisses konstruiert. Der Schatten von $4 \cdot 6$ ist durch $4^0 \cdot 5^0$ und $5^0 \cdot 6$ im Aufriß, durch $4 \cdot 4^0$ im Grundriß dargestellt. Der Schatten der auftretenden Gesimsflächen kann nach dem Vorangegangenen ohne weiteres bestimmt werden.

Mittels des Profiles C und der Seitenprojektion $A'A'$ der Wand A ergibt sich der Schatten auf dem Gesims D und auf der Wand A . Für die Stelle F ist die Konstruktion des Schattens in den Fig. 90 u. 91 in größerem Maßstabe durchgeführt. Für die Stelle G ist der Schatten mit Zuhilfenahme des Grundrisses konstruiert worden.

Schatten der Schraubenlinie und der Schraubenflächen.

Schatten der Schraubenlinie.

60. Der Schlagschatten einer Schraubenlinie in eine Ebene senkrecht zur Schraubenachse ist eine gewöhnliche, verkürzte oder verlängerte Zykloide, je nachdem der Winkel φ der Lichtrichtung mit der zur Schraubenachse senkrechten Ebene gleich, größer oder kleiner angenommen ist als der Neigungswinkel α der Schraubenlinie.

In Fig. 92 ist $\varphi = \alpha$ gewählt und außerdem die Lichtrichtung parallel zur Projektionsebene E_2 vorausgesetzt. Zur Konstruktion der Schattengrenze A' auf die Projektionsebene E_1 verzeichnet man etwa im Punkt X an die Schraubenlinie A die Tangente T , indem man in X die Tangente T_1 , an den Grundriß A_1 zieht und die Länge $\overline{X \cdot X'}$ gleich der Länge des Kreisbogens $I \cdot IV \cdot X$ abträgt. Die Projektionen der Lichtstrahlen

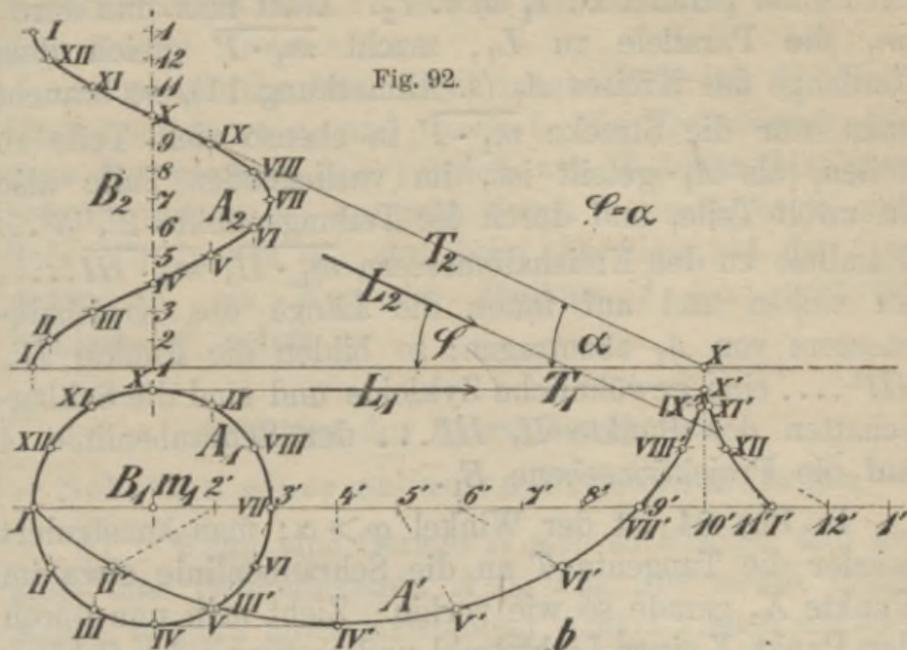


Fig. 92.

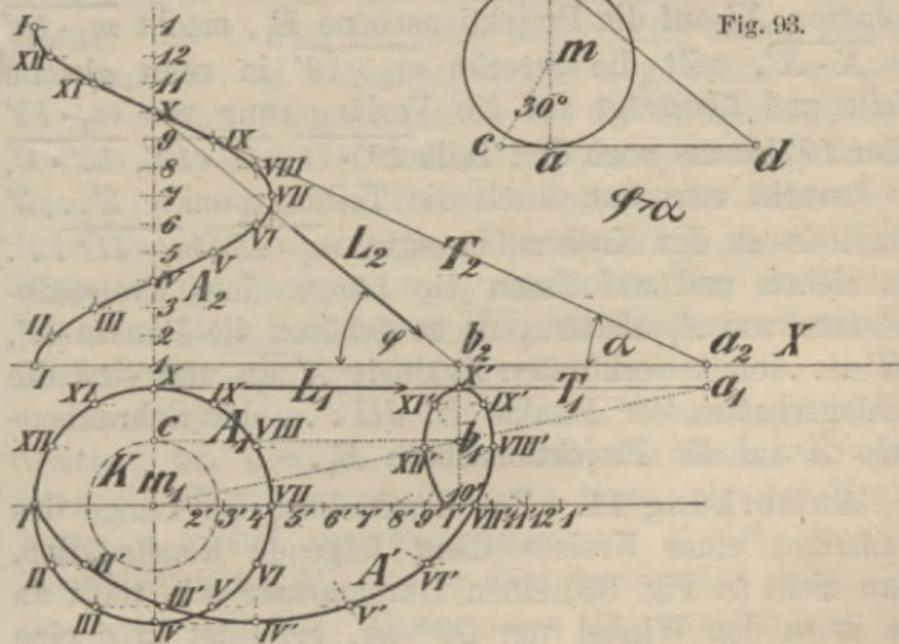


Fig. 93.

Fig. 94.

sind dann parallel zu T_1 bzw. T_2 . Zieht man nun durch m_1 die Parallele zu L_1 , macht $\overline{m_1 \cdot I'}$ gleich dem Umfange des Kreises A_1 (s. Anmerkung 11), so braucht man nur die Strecke $\overline{m_1 \cdot I'}$ in ebenso viele Teile zu teilen, als A_1 geteilt ist, im vorliegenden Falle also in zwölf Teile, und durch die Teilungspunkte $2', 3' \dots$ Parallele zu den Kreishalbmessern $\overline{m_1 \cdot II}, \overline{m_1 \cdot III} \dots$ zu ziehen und auf ihnen die Länge des Kreishalbmessers von A_1 abzutragen; so bilden die Punkte $II', III' \dots$ eine gewöhnliche Zykloide und sind die Schlag Schatten der Punkte $II, III \dots$ der Schraubenlinie A auf die Projektionsebene E_1 .

In Fig. 94 ist der Winkel $\varphi > \alpha$; man konstruiert wieder die Tangente T an die Schraubenlinie etwa im Punkte X , gerade so wie vorhin. Zieht man nun durch den Punkt X einen Lichtstrahl und bestimmt den Schlag Schatten X' auf die Projektionsebene E_1 , macht $\overline{m_1 \cdot 10'} = \overline{X \cdot X'}$, teilt die Strecke $\overline{m_1 \cdot 10'}$ in zehn gleiche Teile und überträgt auf die Verlängerung von $\overline{m_1 \cdot 10'}$ über $10'$ hinaus noch drei Teile $\overline{10' \cdot 11'}, \overline{11' \cdot 12'}, \overline{12' \cdot 1'}$, so braucht man nur durch die Teilungspunkte $2' \dots 3'$ Parallele zu den Kreishalbmessern $\overline{m_1 \cdot II}, \overline{m_1 \cdot III} \dots$ zu ziehen und auf ihnen die Länge eines Kreishalbmessers von A_1 abzutragen; so gehören die Punkte $II', III' \dots$ einer verkürzten Zykloide A' an und sind die Schlag Schatten der Punkte $II, III \dots$ der Schraubenlinie A auf die Projektionsebene E_1 .

Anmerkung 11. Zur Ermittlung der Länge des Umfanges eines Kreises dient folgende Konstruktion. Man zieht (s. Fig. 93) einen Durchmesser ab , trägt an ab in m den Winkel von 30° an, errichtet in a eine Kreistangente und trägt auf ihr von c aus den Kreishalb-

messer dreimal nach \overline{cd} ab; so ist die Länge \overline{db} gleich dem halben Kreisumfange.

Anmerkung 12. Zieht man in Fig. 94 die Verbindungslinie $m_1 a_1$ und durch b_2 die Projizierende bis nach b_1 , zeichnet $b_1 c$ parallel zur X -Achse bis zum Schnitt mit $m_1 X$, so geht durch c ein Kreis K mit dem Mittelpunkt m_1 , der beim Abrollen auf der Geraden cb_1 als Weg des Punktes I die verkürzte Zykloide A' liefert.

Schatten der Schraubenflächen.

Schatten einer scharfen Schraubenfläche.

61. Wenn eine Gerade B sich so bewegt, daß sie stets eine Schraubenlinie A (s. Fig. 95) sowie deren Achse, letztere unter konstantem Winkel kleiner als 90° , schneidet, so entsteht eine windschiefe scharfe Schraubenfläche. Ist C eine beliebige Mantellinie dieser Fläche und auf ihr ein beliebiger Punkt a gewählt, so gibt es in a eine Tangentialebene an die Schraubenfläche, welche einmal die Mantellinie C , dann aber auch die Tangente an die den Punkt a enthaltende Schraubenlinie der Fläche enthält. Der Grundriß dieser Tangente ist die Tangente $a_1 c_1$ an den um m_1 als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $\overline{am_1}$ beschriebenen Kreis K_1 . Macht man $\overline{a_1 c_1}$ gleich dem Kreisbogen $a_1 b$, so ist c_1 ein Punkt der Tangente an die Schraubenlinie K , welcher um den so vielen Teil der Ganghöhe der Schraubenfläche unterhalb von a liegt, als der Kreisbogen $a_1 b$ Teil der Peripherie von K_1 ist, im vorliegenden Falle $\frac{2}{12}$ dieser Peripherie; der Aufriß c_2 liegt also auf einer Horizontalen D_2 , welche um $\frac{2}{12}$ der Ganghöhe H tiefer liegt als a_2 . Bestimmt man

fläche mit der Horizontalebene D_2 . Zieht man durch a_1 die Senkrechte zu $c_1 d_1$ und durch m_1 die Senkrechte $m_1 e_1$ zu C_1 , so ergibt sich hierdurch auf der genannten Senkrechten der Punkt e_1 , so daß die Länge $\overline{m_1 e_1}$ von der Lage der Mantellinie C unabhängig ist. Infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke $a_1 c_1 d_1$ und $m_1 a_1 e_1$ hat man die Beziehung

$$\frac{\overline{a_1 c_1}}{\overline{a_1 d_1}} = \frac{\overline{m_1 a_1}}{\overline{m_1 e_1}}$$

oder

$$\overline{m_1 e_1} = \frac{\overline{m_1 a_1} \cdot \overline{a_1 d_1}}{\overline{a_1 c_1}} = \frac{{}^{2/12}H \cdot \cotg \alpha \cdot r}{{}^{2/12}2r\pi} = \frac{H}{2\pi} \cdot \cotg \alpha$$

Hierbei ist mit r der Halbmesser von K_1 bezeichnet.

Die Länge $\frac{H}{2\pi}$ ist für ein und dieselbe Schraubenfläche von unveränderlicher Größe und wird als die reduzierte Ganghöhe H_0 der Schraubenfläche bezeichnet. Man hat also $\overline{m_1 e_1} = H_0 \cdot \cotg \alpha$.

Der Punkt e_1 ist somit für sämtliche Tangentialebenen, die längs einer Mantellinie an die Fläche möglich sind, ein fester Punkt. Zu jeder anderen Mantellinie gehört gleichfalls ein fester Punkt e_1 und alle diese Punkte e_1 liegen auf einem Kreise K_0 mit dem Halbmesser gleich $H_0 \cdot \cotg \alpha$. Will man nun durch eine Mantellinie C der Fläche eine Tangentialebene parallel zur Lichtrichtung legen, so wird deren Berührungspunkt auf C liegen und ein Punkt der Selbstschattengrenze sein. Zu diesem Zwecke braucht man nur etwa durch den Schnittpunkt f der Mantellinie C mit der Flächenachse einen Lichtstrahl zu ziehen und dessen Schnitt g mit der Ebene D_2 aufzusuchen. Die Verbindungslinie

$d_1 g_1$ ist dann der Schnitt der genannten Tangentialebene mit der Ebene D_2 . Fällt man durch e_1 eine Senkrechte zu $d_1 g_1$, so trifft diese die Mantellinie C_1 im Grundrisse h_1 des Berührungspunktes h der zur Lichtrichtung parallelen Tangentialebene längs der Mantellinie C . Die Senkrechte durch e_1 zu $d_1 g_1$ schneidet auf der Senkrechten durch m_1 zu L_1 einen Punkt k aus, der für sämtliche Tangentialebenen parallel zur Lichtrichtung an die Schraubenfläche ein fester Punkt ist; denn man erkennt aus der Fig. 95 unmittelbar die Ähnlichkeit der Dreiecke $m_1 d_1 g_1$ und $m_1 e_1 k$, aus welcher die Gleichung folgt:

$$\frac{\overline{m_1 d_1}}{\overline{m_1 g_1}} = \frac{\overline{m_1 e_1}}{\overline{m_1 k}}$$

oder

$$\overline{m_1 k} = \frac{\overline{m_1 e_1} \cdot \overline{m_1 g_1}}{\overline{m_1 d_1}} = \frac{H_0 \cdot \cotg \alpha \cdot h \cdot \cotg \varphi}{h \cdot \cotg \alpha} = H_0 \cotg \varphi$$

Bezüglich der Lage des Punktes k ist zu bemerken, daß k stets auf der Senkrechten durch m_1 zu L_1 liegt und zwar bei in Fig. 95 angenommener Lichtrichtung auf der linken Seite von L_1 für die rechtsgehende Schraubenfläche, dagegen rechts von L_1 bei links ansteigender Schraubenfläche. Würde L_1 der Pfeilrichtung entgegengesetzt gerichtet sein, so läge k rechts von L_1 bei rechtssteigender und links von L_1 bei linkssteigender Schraubenfläche.

Anmerkung 13. Mittels des Kreises K_0 und des festen Punktes k lassen sich in einfacher Weise Punkte des Grundrisses der Selbstschattengrenze konstruieren. Man braucht ja nur durch k eine beliebige Gerade zu ziehen, z. B. die Gerade $k e_1$; sie schneidet

K_0 in e_1 und e'_1 , die Senkrechten durch m_1 zu $m_1 e_1$ und $m_1 e'_1$ liefern auf $k e_1$ zwei Punkte h_1 und h'_1 des Grundrisses der Selbstschattengrenze. Aus dieser Konstruktion folgt zunächst, daß der Punkt k selbst der Schattengrenze angehört und die Gerade $m_1 k$ eine Symmetrieachse für die Kurve ist. Die Kurve besteht aus zwei Zweigen, F_1 und F'_1 , die zu den beiden Mänteln der Fläche gehören. Zu dem dargestellten Flächenmantel gehört der ausgezogene Zweig F_1 . Die Tangenten durch k an K_0 bilden für die beiden Zweige F_1 und F'_1 zwei Asymptoten.

Anmerkung 14. Aus der Symmetrie der Kurve $F_1 F'_1$ hinsichtlich der Achse $m_1 k$ ergibt sich noch eine weitere, sehr einfache Konstruktion der Kurve für den Fall, daß die Grundrißpunkte auf gegebenen Kreisen mit dem Mittelpunkte m_1 , die Punkte selbst also auf Schraubenlinien der Fläche liegen sollen. Dem Punkte l (s. Fig. 95) entspricht als Symmetriepunkt der Punkt l' . Zieht man die Linie $k \cdot l$, welche K_0 in l schneidet, so ist $m_1 l$ senkrecht zu $m_1 \cdot l$. Wird nun die ganze Figur $m_1 \cdot l \cdot l \cdot k$ um m_1 gedreht, bis l nach l'' gelangt, so kommt der Punkt l'' nach l' und die Linie $m_1 l''$ fällt zusammen mit $m_1 \cdot l'$. Der Punkt k kommt also nach k' auf die Linie $m_1 l'$. Der Punkt l gelangt nach n auf $m b$. Die Linie $k \cdot l$ geht über in die Linie $l'' \cdot n$. Will man also die Punkte der Selbstschattengrenze konstruieren, welche auf einem Kreise, etwa A_1 , liegen, so bestimmt man den Schnittpunkt l'' von A_1 mit der Linie $m_1 k$ und zwar jenen Schnittpunkt l'' , welcher mit $m_1 k$ auf der gleichen Seite von L_1 liegt, und zieht $l'' \cdot n$, welche Linie den um m_1 als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich $\overline{m_1 k}$ beschriebenen Kreis K' in den Punkten k' und k'' schneidet. Die Ver-

2. Es ist $\varphi > \alpha$. Die Kurve erhält die Gestalt der Fig. 97. Beide Zweige F_1 und F'_1 sind im Endlichen geschlossen. Es ist eine Grenzlinie A_1 vorhanden, auf welcher gerade noch Punkte der Kurve

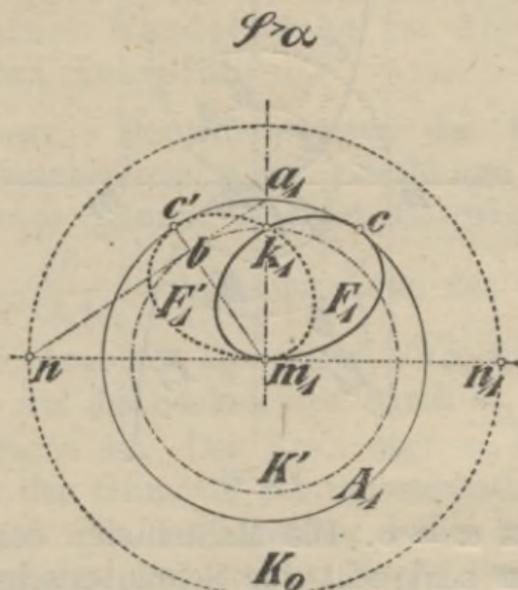


Fig. 97.

liegen. Die Tangente von n an K' liefert auf $m_1 k$ den Punkt a_1 , durch welchen die Kreislinie A_1 hindurchgeht, welche von der Kurve $F_1 F'_1$ in den Punkten c und c' berührt wird.

3. Es ist $\varphi = 0$. Die Kurve erhält die Gestalt der Fig. 98. Die Tangenten in n und n_1 an K_0 sind Asymptoten der Kurve. Für die Kreislinie A_1 ist die Konstruktion der auf ihr liegenden Punkte angegeben. Man zieht an und durch m_1 eine Parallele hierzu, welche auf A_1 den Punkt 1 der Kurve ergibt. Man kann auch bc parallel zu $m_1 k$ ziehen. Die Senkrechten durch m_1 zu $m_1 b$ bzw. $m_1 c$ enthalten die Kurvenpunkte 2 und 1 .

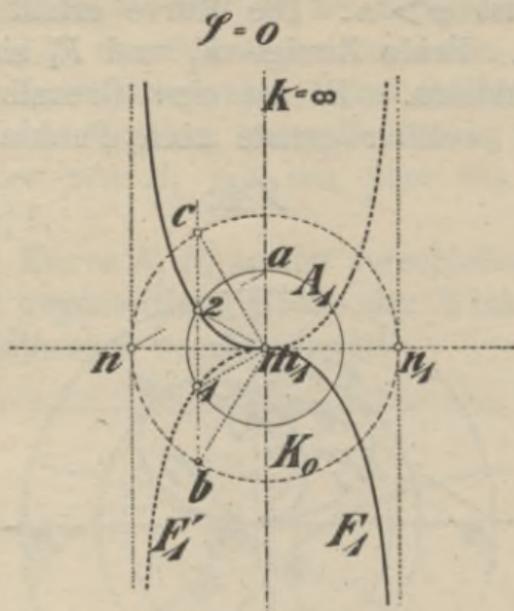


Fig. 98.

4. Es ist $\alpha = 0$. Die Mantellinien der Schraubenfläche stehen senkrecht zur Schraubenachse. Man erhält die flache Schraubenfläche, auch Wendel-

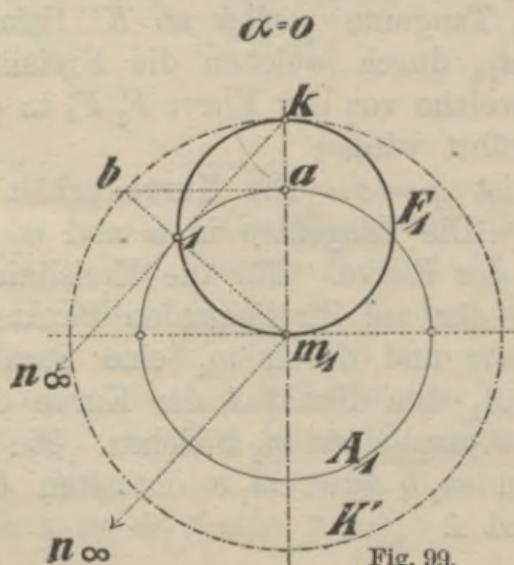


Fig. 99.

fläche genannt. Die Kurve F_1 geht in eine Kreislinie über (s. Fig. 99), welche die Punkte m_1 und k als Endpunkte eines Durchmessers enthält.

63. Aufgabe. Für den in Fig. 100 dargestellten Teil einer Wendelfläche ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Der Halbmesser der äußeren Begrenzungsschraubenlinie A sei $r = 20$ mm, die Ganghöhe H betrage 36 mm; dann ist die reduzierte Ganghöhe

$H_0 = \frac{36}{2 \cdot 3,14} = 5,73$ mm. Aus der Fig. 101 ergibt sich die Länge von $H_0 \cdot \cotg \varphi = \overline{bc}$, welche Strecke in Fig. 100 auf der Senkrechten durch m_1 zu L_1 nach $m_1 k$ anzutragen ist. Der Kreis über $\overline{m_1 k}$ als Durchmesser gibt den Grundriß der Selbstschattengrenze der Wendelfläche. Im vorliegenden Falle trifft nur ein Teil ckd auf den dargestellten Mantel der Fläche. Im Aufriß ist von diesem Teile nichts zu sehen. Die Wendelfläche ist von zwei senkrechten Kreiszyklindern abgeschlossen, deren Grundrisse die Kreise A_1 und B_1 sind. Für den äußeren Zylinder ist die Selbstschattengrenze durch die Mantellinien ef und gh angedeutet.

Schlagschatten entsteht:

1. auf den Projektionsebenen durch die Begrenzungsschraubenlinien A bis D . Man erhält hierfür die Zykloiden A', B', C', D' . Ferner durch die Mantellinien ef und gh in $e'f'$ und $g'h'$, endlich durch die Begrenzung qip in $q'v'p'$. Hieraus ergibt sich der auf die Projektionsebene E_2 treffende Teil des Schattens. Als Schattengrenze gilt A nur der vollausgezogene Umriß der Schattenfigur;

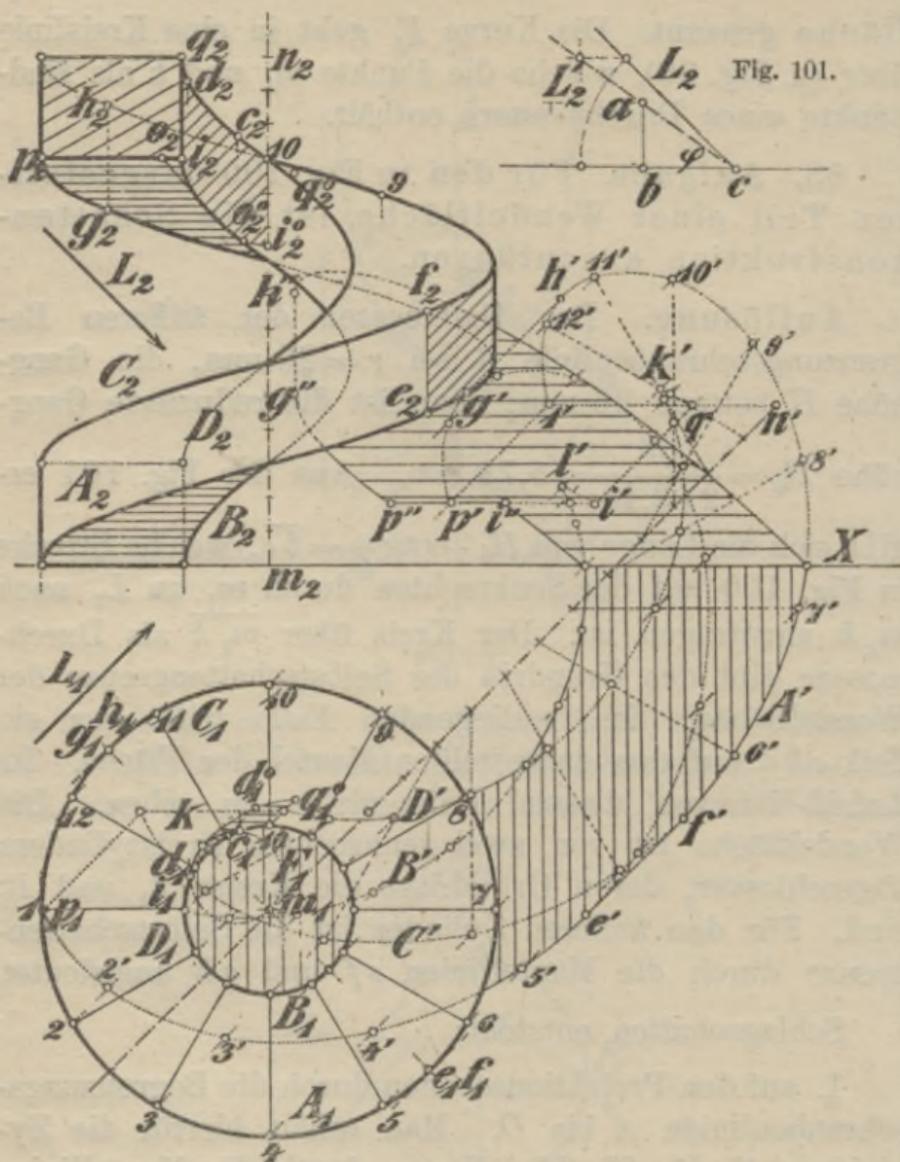


Fig. 100.

2. auf der Schraubenfläche CD , herrührend von einem Teil der Linie iq , dann von dem Teil qd der Schraubenlinie D , endlich von dem Bogen dk der Selbstschattengrenze. Der Schatten des Punktes q ergibt

sich mittels eines ebenen Schnittes parallel zu L_1 und senkrecht zur Projektionsebene E_1 . Dieser Schnitt liefert auf der Schraubenfläche CD die Linie $9 \cdot 10$, welche von dem Lichtstrahl durch q im Schlagschatten q^0 getroffen wird. In gleicher Weise erhält man einen weiteren Punkt d^0 , Grundriß d_1^0 , mittels eines durch d geführten Schnittes parallel zu L_1 und senkrecht zur Projektionsebene E_1 . Der Bogen $d_1^0 k$ ist der gesuchte Schatten von dk auf die Schraubenfläche;

3. auf dem Zylinder DB und zwar von den Linien qi und ip . Dieser Schatten ist im Aufriß durch $10 \cdot i_2^0 \cdot o_2^0$ dargestellt und ergibt sich unmittelbar aus dem Grundriß.

64. Aufgabe. Für die in Fig. 102 u. 103 dargestellte flache Schraubenspindel ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Die Selbstschattengrenze für die Wendelfläche fällt im vorliegenden Falle nicht mehr auf den dargestellten Teil der Fläche, weil die Strecke $\overline{ab} = H_0 \cdot \cotg \varphi$ kleiner ist als der Halbmesser des Kreises B_1 . Selbstschatten entsteht im vorliegenden Falle auf dem Zylinder AC ; er ist begrenzt von der Mantellinie $1 \cdot 2$.

Schlagschatten entsteht durch die Schraubenlinie A und zwar sowohl auf der Zylinderfläche BD als auch auf der Wendelfläche CD . Ersterer Schatten ist durch $3^0 \cdot 4^0 \cdot 6^0$, letzterer durch $6^0 \cdot 7^0 \cdot 9^0$ begrenzt. Die Konstruktion des Schattens auf die Zylinderfläche ist unmittelbar aus der Figur zu ersehen, der Schatten auf die Wendelfläche bestimmt sich mittels des allgemeinen Schnittverfahrens; z. B. ist durch 7 parallel zu L_1 und senkrecht zur Projektionsebene E_1 ein Schnitt geführt und dessen Aufriß $a_2 b_2$ eingezeichnet. Der Lichtstrahl durch 7 im Aufriß liefert auf $a_2 b_2$ einen Punkt 7^0 des Schlagschattens.

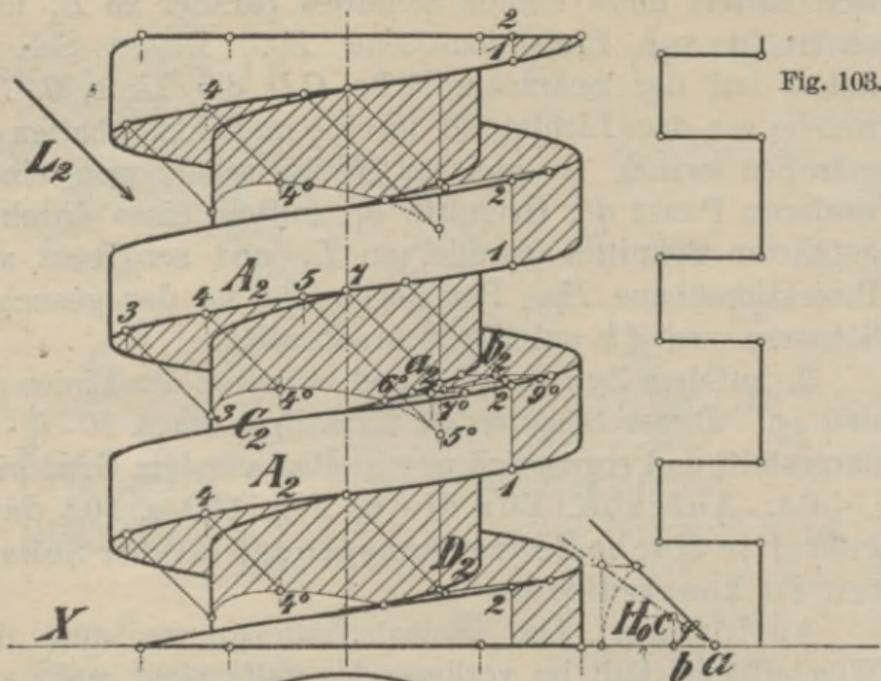


Fig. 102.

65. Aufgabe. Für das in Fig. 105 dargestellte Muttergewinde der Wendelfläche ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Schatten entsteht durch den Schnitt-
rand des Muttergewindes, sowie von einzelnen Teilen
der begrenzenden Schraubenlinien sowohl auf die Zylinder-
flächen wie auch auf die Wendelfläche.

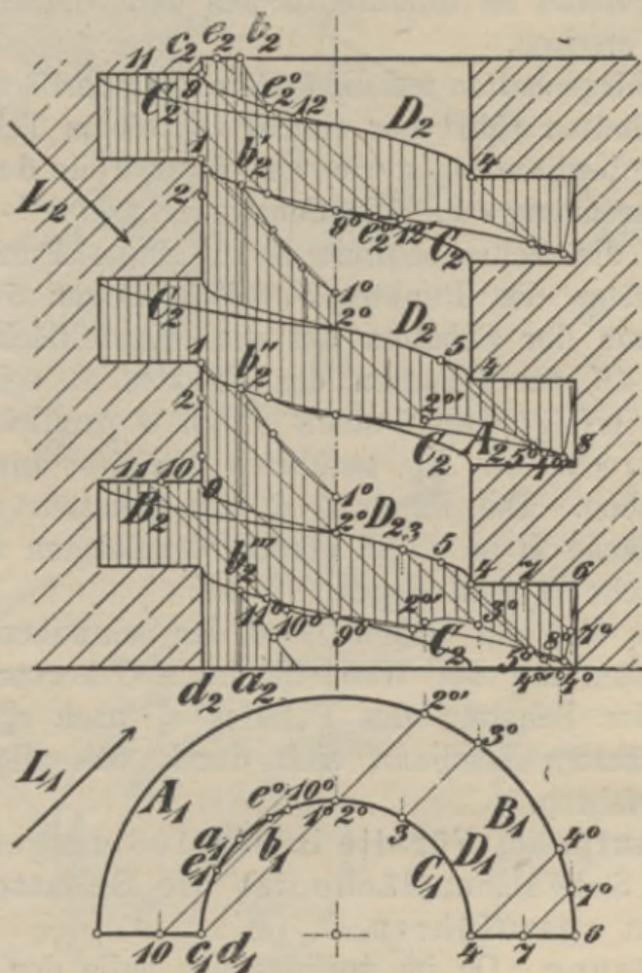


Fig. 105.

1. Selbstschatten der inneren Zylinderfläche D , be-
grenzt durch die Mantellinie ab , Aufriß $a_2 b_2$.

2. Schlagschatten auf die innere Zylinderfläche D ent-
steht durch den Kreisbogen bc in $b_2 e_2^0$, ferner durch die

Begrenzungslinie cd ; im Aufriß ist hiervon sichtbar die Gerade $1^0 \cdot 2^0$, ferner von dem Bogen $1 \cdot b$ der Schraubenlinie C in $b_2^1 1^0$; endlich gelangt noch Schatten von der Geraden $9 \cdot 10 \cdot 11$ auf die Zylinderfläche CD , die Konstruktion hierzu ist unmittelbar aus dem Grundriß der Figur zu ersehen.

3. Schlagschatten auf die äußere Zylinderfläche AB . Dieser Schatten rührt her einmal von einem Teile $2^0 4$ der Schraubenlinie D , sowie von einem Teile der vertikalen Begrenzung cd . Die Schattengrenze $2^0 \cdot 3^0 \cdot 4^0$ schneidet die Schraubenlinie A in einem Punkte 5^0 , dem Schatten des Punktes 5 . Vom Bogen $5 \cdot 4$ gelangt somit der Schatten auf die Wendelfläche AC , z. B. ist 4^0 der Schatten des Punktes 4 ; seine Ermittlung erfolgt durch einen durch 4 parallel zu L_1 und senkrecht zu E_1^1 geführten Schnitt durch die Wendelfläche. Die Kante $4 \cdot 6$ ruft Schatten auf der Zylinderfläche B in $6 \cdot 8^0$ hervor, desgleichen auf der Wendelfläche in dem Bogen $8^0 \cdot 4^0$.

4. Ein Teil des Bogens $9 \cdot 4$ der Schraubenlinie D ruft Schatten auf der Wendelfläche AC hervor; z. B. gelangt der Schatten des Punktes e_2^0 nach $e_2^{0'}$, auch dieser Schatten bestimmt sich durch das allgemeine Schnittverfahren.

66. Aufgabe. Für die in Fig. 106 dargestellte scharfe Schraubenfläche ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung. Da im vorliegenden Falle der Winkel $\varphi > \alpha$ ist, so erhält der Grundriß der Selbstschattengrenze die Gestalt der Fig. 97. Auf dem zur Darstellung gebrachten Mantel der Schraubenfläche liegt die Selbstschattengrenze nicht mehr, weil jene Schraubenlinie, auf welcher es gerade noch Punkte der Selbst-

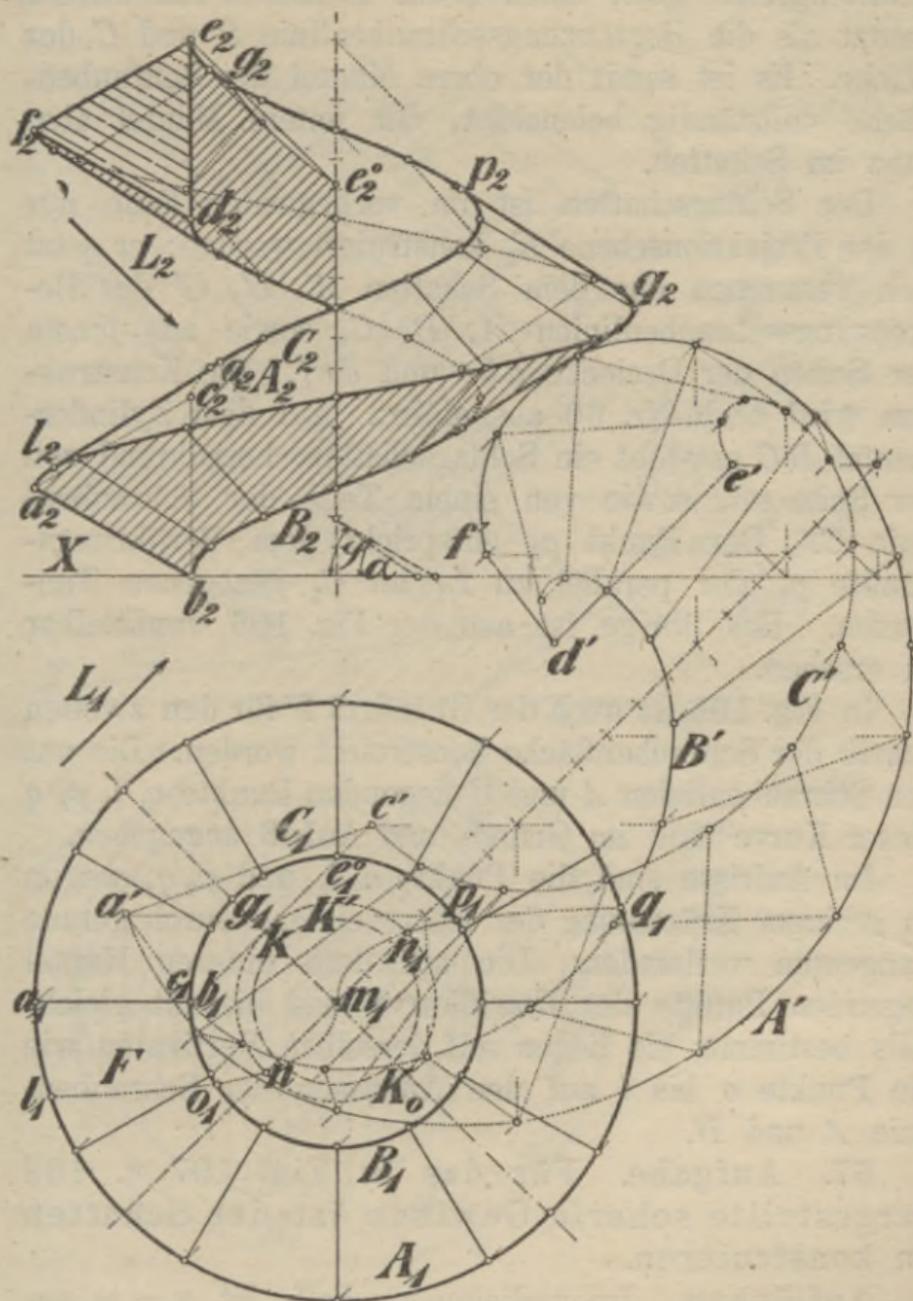


Fig. 106.

schattengrenze gibt, einen etwas kleineren Halbmesser besitzt als die Begrenzungsschraubenlinie B und C der Fläche. Es ist somit der obere Mantel der Schraubenfläche vollständig beleuchtet, der untere Mantel aber ganz im Schatten.

Der Schlagschatten ist im vorliegenden Falle nur in der Projektionsebene E_1 konstruiert worden; er setzt sich zusammen aus dem Schatten A', B', C' der Begrenzungsschraubenlinien A, B, C , sowie aus jenem der Seiten der Dreiecke abc und def . Die Konstruktion wird nach Nr. 60 ausgeführt. Auf dem Zylindermantel BC entsteht ein Schlagschatten, herrührend von der Seite ed , sowie von einem Teile der Schraubenlinie C . Der Punkt g_2 entspricht dem Berührungspunkte g_1 der parallel zu L_1 an C_1 gezogenen Tangenten. Das übrige ist aus der Fig. 106 unmittelbar zu ersehen.

In Fig. 106 ist auch der Grundriß F' für den zweiten Umriß der Schraubenfläche konstruiert worden. Die auf den Schraubenlinien A und C liegenden Punkte o, l, p, q dieser Kurve sind im Grund- und Aufriß angegeben.

Im Aufrisse sind die Punkte $o_2 l_2$ und $p_2 q_2$ wegen zu geringer Krümmung der Kurve einfach durch gerade Tangenten verbunden. Die auf dem unteren Mantel liegenden Punkte der Umrißkurve sind hiermit gleichfalls bestimmt; sie liegen auf derselben Vertikalen wie die Punkte o bis l auf den Aufrissen der Schraubenlinie A und B .

67. Aufgabe. Für das in Fig. 107 u. 108 dargestellte scharfe Gewinde ist der Schatten zu konstruieren.

Auflösung. Im vorliegenden Falle ist $\alpha = \varphi$ angenommen; der Grundriß der Selbstschattengrenze erhält

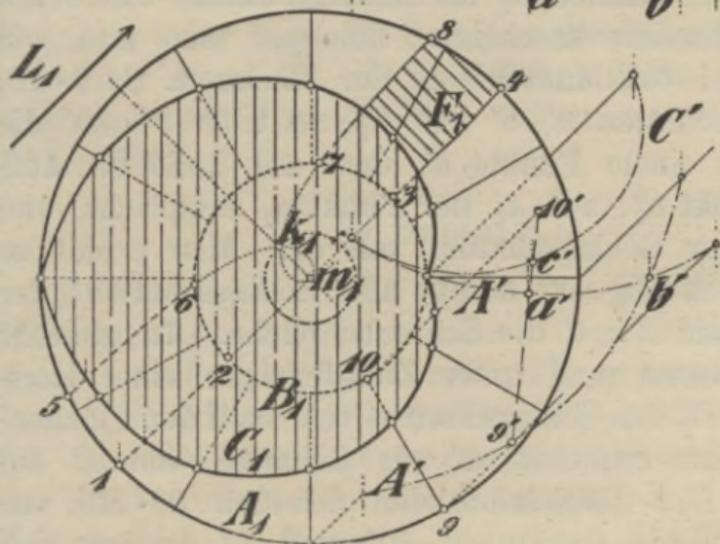
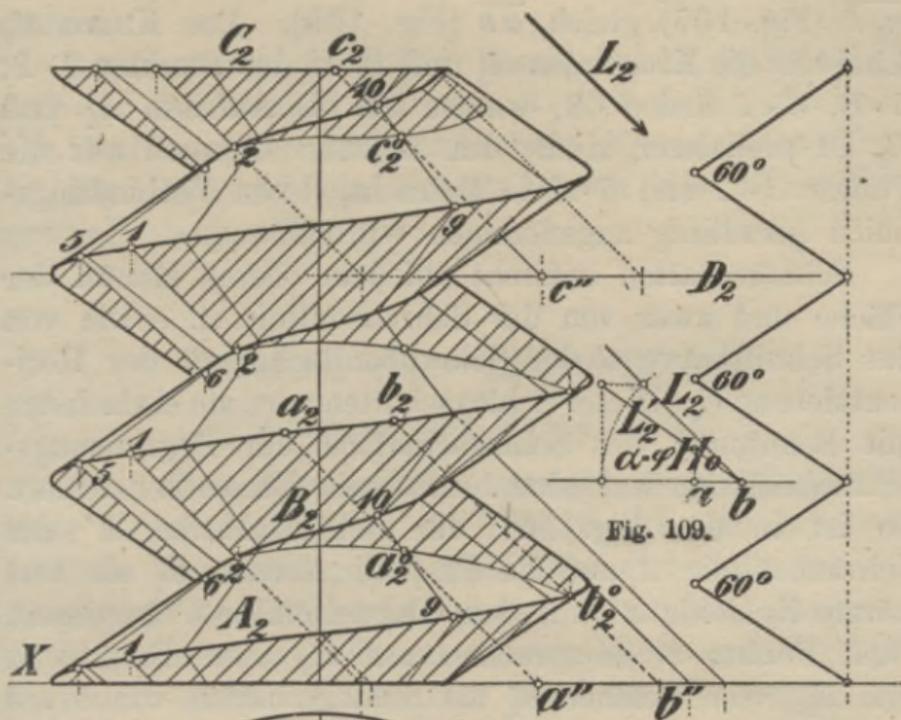


Fig. 108.

sonach die Gestalt der Kurve (s. Fig. 96). Es ist $\overline{m_1 k}$ (Fig. 107) gleich \overline{ab} (Fig. 109). Die Kurve F_1 schneidet die Kreislinien A_1 und B_1 in den Punkten $1 \cdot 2$, $5 \cdot 6$, $3 \cdot 4$ und $7 \cdot 8$, welche auf die Aufrisse A_2 und B_2 zu projizieren sind. Im Aufrisse kommen nur die Punkte $1 \cdot 2$ und $5 \cdot 6$ in Betracht, deren Verbindungslinien geradlinig angenommen wurden.

Schlagschatten entsteht auf dem oberen Mantel der Fläche und zwar von der Schraubenlinie A , sowie von der Schnittkurve C der Schraubenfläche mit der Horizontalebene C_2 . Dieser Schlagschatten wird am einfachsten mit Benutzung des Schlagschattens der Begrenzungsschraubenlinien auf eine horizontale Ebene konstruiert. So ist in der Fig. 107 der Schlagschatten A' der Schraubenlinie A auf die Projektionsebene E_1 als verkürzte Zykloide A' mit dem Doppelpunkte b' bestimmt. Dem Punkte b' entsprechen auf A_2 zwei Punkte b_2 und b_2^0 , von welchen b_2^0 als Schlagschatten von b auf die Schraubenlinie erscheint. Zeichnet man nun von einer Anzahl von Mantellinien der Fläche, z. B. $9 \cdot 10$, den Schlagschatten $9'10'$ auf E_1 , so trifft $9' \cdot 10'$ die Linie A' in einem Punkte a' , dem auf $9 \cdot 10$ im Aufriß der Punkt a_2^0 , auf A_2 der Punkt a_2 entspricht, und es ist a_2^0 der Schlagschatten von a_2 . Man erhält so den Kurvenzweig $2 \cdot a_2^0 b_2^0$ als Schlagschatten der Schraubenlinie A auf die Schraubenfläche. In gleicher Weise bestimmt man unter Zuhilfenahme einer Horizontalebene D_2 den Schlagschatten von C auf den Flächenmantel. Man ermittelt C' als Schatten von C auf die Ebene D_2 , desgleichen den Schatten $9' \cdot 10'$ von einer Mantellinie $9 \cdot 10$; $9' \cdot 10'$ und C' treffen sich in c' , welchem Punkte auf $9 \cdot 10$ der Punkt c_2^0 , bzw. auf C_2 der Punkt c_2 entspricht. c_2^0 ist der Aufriß

des Schlagschattens vom Punkte c auf den Flächenmantel.

Anmerkung 15. Die Ebene D_2 ist so gewählt, daß der Schatten $9' \cdot 10'$ von $9 \cdot 10$ auf D_2 und jener von $9 \cdot 10$ auf die Projektionsebene E_1 zusammenfallen. In Fig. 108 ist ein Schnitt durch das Schraubengewinde dargestellt.

Schatten einer Röhrenfläche.

a) Allgemeine Bemerkung.

68. Eine Röhrenfläche entsteht durch Bewegung einer Kugel derart, daß ihr Mittelpunkt eine gegebene Leitlinie durchläuft. In jeder Bewegungsklage hat die Kugel mit der Röhrenfläche eine Kreislinie, Charakteristik genannt, gemeinsam, deren Ebene zur Leitlinie senkrecht steht. Konstruiert man für die bewegliche Kugel in jeder Lage die Selbstschattengrenze, so durchschneidet diese die mit der Röhrenfläche gemeinsame Kreislinie in Punkten der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche.

b) Beispiele.

69. Aufgabe. Für die in Fig. 110 dargestellte Röhrenfläche, für welche die Leitlinie A aus zwei zur Projektionsebene E_1 parallelen Kreisbögen mit den Mittelpunkten n_1 und n_2 besteht, ist die Selbstschattengrenze zu konstruieren.

Auflösung. Die Charakteristiken der Fläche projizieren sich im Grundrisse als nach den Mittelpunkten n_1 und n_2 gehende gerade Linien. Die Aufrisse sind Ellipsen C_2 , D_2 usw.

Fig. 110.

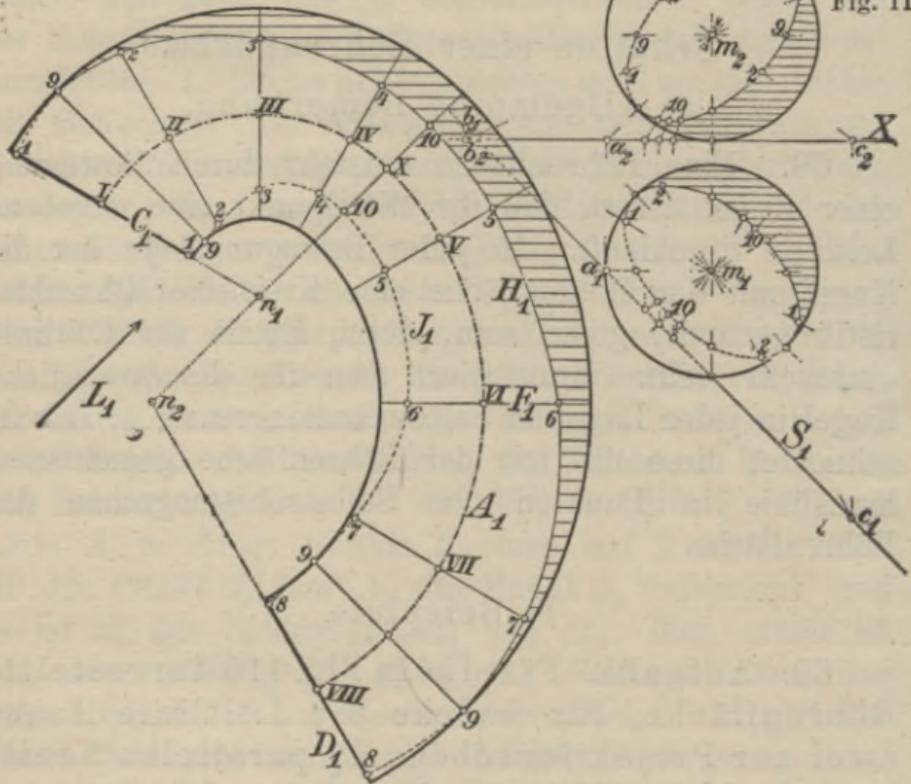
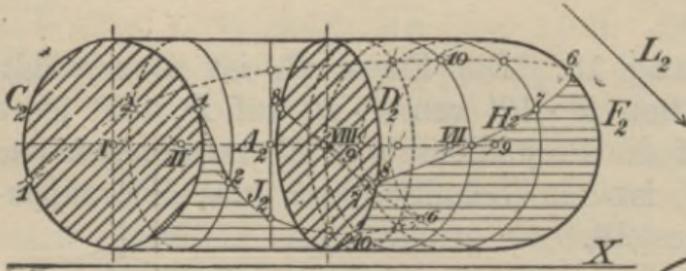


Fig. 111

Zeichnet man in Fig. 111 eine der beweglichen Kugel kongruente Kugel im Grund- und Aufriß und für diese die Selbstschattengrenze, so vollzieht sich die Konstruktion der Schattengrenze für die Röhrenfläche wie folgt:

Man zieht durch den Mittelpunkt m der Hilfskugel eine zur betreffenden Charakteristikebene parallele Ebene und bestimmt ihren Schnitt mit der Ebene der Selbstschattengrenze der Hilfskugel. Ein Parallele zu dieser Schnittlinie durch den Mittelpunkt der zugehörigen Charakteristik liefert auf letzterer Punkte der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche.

Für die Charakteristik C ergibt sich z. B. mittels der Parallelen zu C_1 durch m_1 (Fig. 111) auf S_1 der Punkt b_1 , dem auf X der Punkt b_2 entspricht. Die Schnittlinie mb mit der durch m gehenden Ebene der Kugelselbstschattengrenze liefert auf letzterer den Punkt I . Zeichnet man nun durch den Aufriß I des Mittelpunktes von C (Fig. 110) die Parallele zu $m_2 b_2$ und macht im Grund- und Aufriß bzw. die Strecken $\overline{I \cdot I} = \overline{m_1 \cdot I}$ bzw. $= \overline{m_2 I}$, so erhält man hierdurch die Punkte I der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche auf der Charakteristik C . In gleicher Weise verfährt man für die übrigen Charakteristiken der Röhrenfläche.

Anmerkung 16. Der Grundriß der Röhrenfläche ist begrenzt durch konzentrische Kreise aus den Mittelpunkten n_1 und n_2 im Abstände gleich dem Halbmesser der beweglichen Kugel von der Leitlinie A . Der Aufriß ist hierdurch bestimmt. Im vorliegenden Falle besteht der Umriß des Aufrisses aus zwei zur X -Achse parallelen Geraden und einem Halbkreise F_2 als Aufriß der zur Projektionsebene E_2 parallelen Charakteristik F und außerdem aus einem Teile von C_2 .

Die Selbstschattengrenze besteht aus zwei Zweigen H und J ; ihre Grundrisse berühren den Grundrißumriß der Röhrenfläche in den Punkten 9 ; der Aufrißumriß wird von dem Aufriß der Selbstschattengrenze in den Punkten 6 berührt.

70. Aufgabe. Für die in Fig. 112 dargestellte Röhrenfläche, für welche die Leitlinie eine Schraubenlinie sein soll, ist die Selbstschattengrenze zu konstruieren.

Auflösung. Die Charakteristikkreise besitzen die gleiche Neigung zu einer zur Achse der Schraubenlinie A , d. i. die Projektionsebene E_1 , senkrechten Ebene; ihre Grundrisse sind daher kongruente Ellipsen B , deren große Achsen gleich dem Durchmesser \bar{d} der beweglichen Kugel und normal zu A_1 gerichtet sind. Die kleinen Achsen besitzen eine Länge gleich $\bar{d} \cos \beta$, unter β den Steigungswinkel der Schraubenlinie A verstanden.

Der Umriß der Röhrenfläche besteht im Grundriß aus zwei konzentrischen Kreisen C_1 und D_1 , im Aufriß aus zwei Parallelkurven F_2 und G_2 zu A_2 (s. Anmerkung 17).

Zur Konstruktion der Selbstschattengrenze zeichnet man in Fig. 113 Grund- und Aufriß einer der beweglichen Kugel kongruenten Kugel und ermittelt deren Selbstschattengrenze. Legt man nun durch den Mittelpunkt m der Hilfskugel Ebenen parallel zu den Charakteristiken der Röhrenfläche, so schneiden diese die Ebene der Selbstschattengrenze der Kugel nach Geraden. Zieht man zu letzteren durch die Mittelpunkte der zugehörigen Charakteristiken Parallelen, so treffen diese die Grund- bzw. Aufrisse der ersteren in Punkten der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche. Für die einzelnen Charakteristiken vollzieht sich die Konstruktion wie folgt:

Ist in Fig. 113 Grund- und Aufriß der Hilfskugel mit der zugehörigen Selbstschattengrenze dargestellt, so bestimmt man zunächst in Fig. 112 etwa für den Punkt a der Leitschraubenlinie die Tangente, indem man $\overline{a_1 c_1}$

Fig. 112.

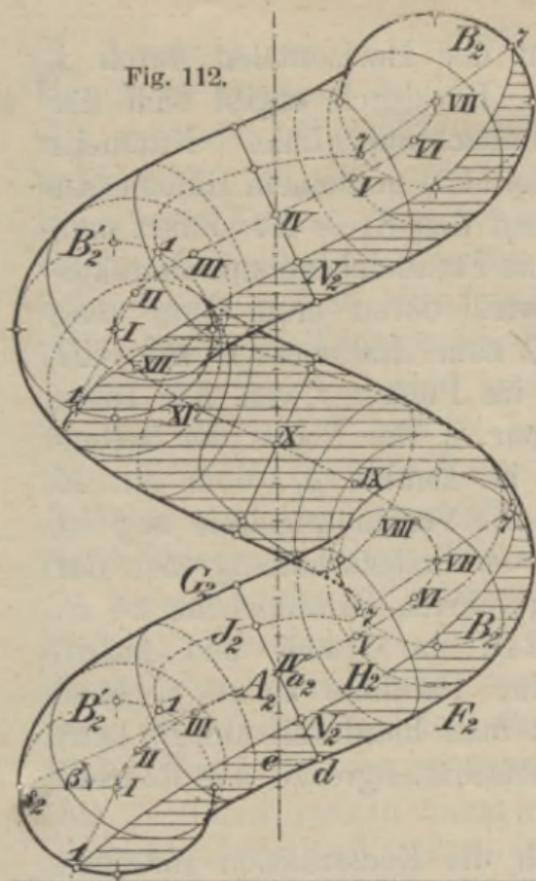


Fig. 114.

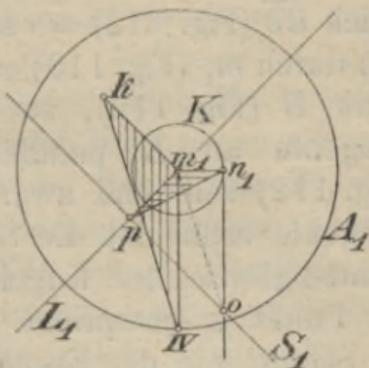
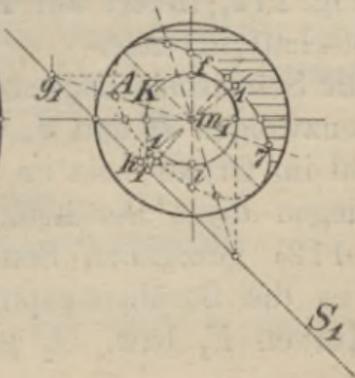
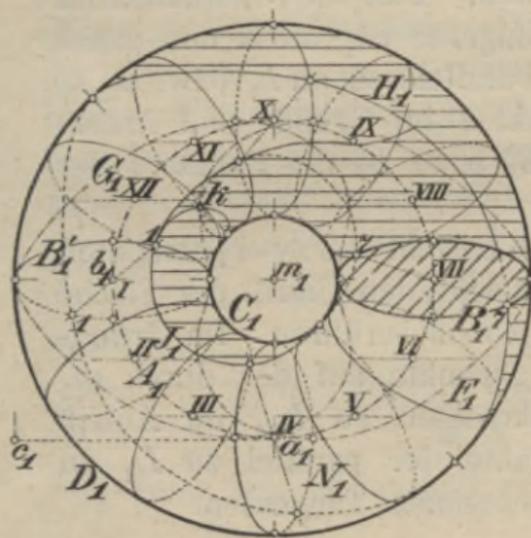
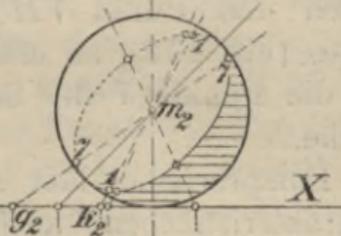


Fig. 113.



= $\text{arc } a_1 b_1$ abträgt, c_2 auf der Horizontalen durch I ermittelt und $a_2 c_2$ zieht. Hierdurch ergibt sich der Steigungswinkel β der Leitschraubenlinie. Nunmehr beschreibt man um m_1 (Fig. 113) mit einem Halbmesser gleich \overline{de} (Fig. 112) = $r \sin \beta$ den Kreis K . Führt man nun durch m_1 (Fig. 113) eine Parallelebene zur Charakteristik B (Fig. 112), so wird deren erste Spur eine Tangente an K parallel zum Halbmesser $m_1 VII$ (Fig. 112) sein und zwar im Punkte f von K . Diese Tangente schneidet die Spur S_1 der Ebene der Selbstschattengrenze der Kugel im Punkte g_1 , dem auf X der Punkt g_2 entspricht. Die Verbindungslinie mg ist die Schnittlinie der Ebene der Selbstschattengrenze der Kugel mit der durch m geführten Parallelebene zu B . Zieht man also in Fig. 112 im Grund- und Aufriß durch den Punkt VII eine Parallele zu $m_1 g_1$ bzw. $m_2 g_2$ (Fig. 112), so erhält man hierdurch auf B_1 bzw. B_2 die Punkte 7 der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche.

Entsprechend läßt sich die Konstruktion für jede Charakteristikebene ausführen. Für die Charakteristik B' z. B. ergibt sich die Tangente ik_1 an K und damit die Schnittlinie mk . Die Parallele zu $m_1 k_1$ bzw. $m_2 k_2$ (Fig. 113) durch den Punkt I im Grund- und Aufriß der Fig. 112, liefert auf B'_1 bzw. B'_2 die Punkte 1 der Selbstschattengrenze.

Die Selbstschattengrenze besteht aus zwei getrennten Kurvenzweigen H und J , welche den Umriß der Fläche sowohl im Grund- wie im Aufriß berühren. Im Grundriß liegen diese Berührungspunkte auf der durch m_1 (Fig. 112) gezogenen Senkrechten zu L_1 , im Aufriß sind es die Berührungspunkte der parallel zu L_2 an die Kurven F_2 bzw. G_2 gezogenen Tangenten.

Anmerkung 17. Die Linien F_2 und G_2 , welche den Umriß des Aufrisses der Röhrenfläche darstellen, ergeben sich entweder als Berührungslinien aller Charakteristikaufrisse B_2, B'_2, B''_2 usw. oder auch als Berührungslinien von Kreisen, welche aus recht vielen und nahe beieinanderliegenden Punkten des Aufrisses A_2 der Schraubenlinie A als Mittelpunkte mit einem Halbmesser, gleich jenem der beweglichen Kugel, beschrieben werden.

In der Fig. 112 sind auch die Grundrisse F_1 und G_1 der Kurven F und G konstruiert worden, indem man durch die Punkte I bis XII von A_1 Parallele zur X -Achse zog und deren Schnittpunkte mit den Grundrissen der zugehörigen Charakteristiken bestimmte.

Anmerkung 18. Die in Nr. 70 angegebene allgemeine Konstruktion der Punkte der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche vereinfacht sich noch etwas, weil die Grundrisse der zu den Schnittlinien $m_1 g_1, m_1 k_1$ (Fig. 113) usw. gezogenen Parallelen $VII 7, I 1$ (Fig. 112) usw. sich in einem festen Punkte k (s. Fig. 112), gelegen auf der Senkrechten durch m_1 zu L_1 , schneiden; denn ist z. B. (s. Fig. 114) $n_1 o$ die Spur einer Parallelebene zu einer Charakteristikebene der Fläche, z. B. zu der Ebene N , so ist $m_1 o$ der Grundriß der hierzu gehörigen Schnittlinie von Charakteristikebene und Ebene des Kugelselbstschattens. Zieht man nun durch IV die Parallele zu $m_1 o$, so erkennt man sofort die Ähnlichkeit der Dreiecke $m_1 n_1 p$ (Fig. 114) und $m_1 k IV$ (Fig. 112), woraus folgt:

$$\overline{m_1 n_1} : \overline{m_1 p} = \overline{m_1 k} : \overline{m_1 IV}$$

oder

$$\overline{m_1 k} = \frac{\overline{m_1 n_1} \cdot \overline{m_1 IV}}{\overline{m_1 p}} = \text{konstant},$$

und zwar ist, wenn mit R der Halbmesser von A ,

bezeichnet wird,

$$\overline{m_1 k} = \frac{R \sin \beta}{\operatorname{tg} \varphi},$$

unter φ den Winkel der Lichtrichtung mit der Projektionsebene E_1 verstanden.

Man braucht also nur den Punkt k (Fig. 112) auf der Senkrechten durch m_1 zu L_1 zu ermitteln und die Punkte von A_1 mit k zu verbinden, so liefern diese Verbindungslinien auf den Grundrissen der zugehörigen Charakteristiken Punkte der Selbstschattengrenze der Röhrenfläche. Die Aufrisse ergeben sich durch Hinaufprojizieren auf die Aufrisse der zugehörigen Charakteristiken.

Auf der Röhrenfläche entsteht noch Schlagschatten, hervorgerufen durch die Selbstschattengrenze. Er wird nach dem allgemeinen Schnittverfahren ermittelt.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S-96

S. 61

In der „Sammlung Göschen“ sind ferner erschienen:

Darstellende Geometrie von Dr. Robert Haubner, Professor an der Universität Jena. **I:** Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— — **II:** Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Fig. Nr. 260.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Figuren. Nr. 57.

Statik von Prof. W. Hauber, Diplom-Ingenieur. **I:** Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— — **II:** Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien von Diplom-Ingenieur Otto Henkel, Bauingenieur und Oberlehrer an der Königl. Tiefbauschule in Rendsburg. I. Teil. Mit 121 Figuren. Nr. 603.

— — **II:** Teil. Mit 86 Figuren. Nr. 695.

Festigkeitslehre von Prof. W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Figuren. Nr. 491.

Hydraulik von Prof. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 397.

Kinematik von Diplom-Ingenieur Hans Polster, Assistent an der Kgl. Technischen Hochschule Dresden. Mit 76 Abbildungen. Nr. 584.

Elastizitätslehre für Ingenieure-I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Ingenieur Max Enßlin, Professor an der Königlichen Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbildungen. Nr. 519.

210
Verlag der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung G. m. b. H.
in Berlin W 10 und Leipzig

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.

- I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
- — II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.
- — III. Teil: Deutsch-Französisch. Nr. 453.
- — IV. Teil: Französisch-Deutsch. Nr. 454.

Vermessungskunde von Diplom-Ingenieur P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kaiserl. Techn. Schule in Straßburg i. E.
I: Feldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abbildungen. Nr. 468.
— — **II:** Der Theodolit, Trigonometr. und barometr. Höhenmessung- Tachymetrie. Mit 100 Abbildungen. Nr. 469.

Das Rechnen in der Technik und seine Hilfsmittel (Rechen-schieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbildungen. Nr. 405.

Technische Tabellen und Formeln von Dr.-Ing. W. Müller Diplom-Ingenieur am Königl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Dipl.-Ingenieur, ständige Mitarbeiter am Königl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. **I:** Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.
— — **II:** Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen, unter besonderer Berücksichtigung der Metallmikroskopie von Prof. E. Heyn und Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Groß-Lichterfelde) der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. **I:** Allgemeiner Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.
— — **II:** Spezieller Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Jeder Band in Leinwand gebunden 90 Pfennig



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301309



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298036