

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

L. inw.

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

n

tive

ometrie

*Körner
Poi 5722
120*



Sammlung Göschen Band 260

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298026

W
SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 260

Parallelperspektive
Rechtwinklige und schiefwinklige
Axonometrie

von

Professor J. Vonderlinn

Gewerbeschulrat und Baugewerkschuldirektor i. R.

Mit 121 Figuren

Neudruck



Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Berlin 1945

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten

KD 515.69:742.3



~~I 26~~

I-301331

Archiv-Nr. 11 02 60

Plattendruck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Printed in Germany

Akc. Nr.

~~4005~~ 51

BPK-B-563 216

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Rechtwinklige Axonometrie.	
Entstehung eines axonometrischen Bildes eines Körpers, Konstruktion des Achsenkreuzes	5
Herstellung eines axonometrischen Bildes eines Körpers	12
Die verschiedenen axonometrischen Projektionsarten	14
Isometrische Projektion	15
Dimetrische Projektion	23
Trimetrische Projektion	31
II. Schiefwinklige Axonometrie.	
Wahl des Achsenkreuzes, Projektionsarten, Aufgaben	41
III. Direkte Konstruktionen der Axonometrie.	
Allgemeines	58
Aufgaben über Lagenbeziehungen	59
Darstellung von Punkt, Gerade, Ebene, Körper in rechtwinkliger und schiefwinkliger Axonometrie	59
Aufgaben über Maßbeziehungen	68
Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie	68
Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie	86
IV. Schattenkonstruktionen in axonometrischer Darstellung.	
Wahl der Lichtrichtung, Schatten eines Punktes	97
Verschiedene Aufgaben	97

I. Rechtwinklige Axonometrie.

Entstehung eines axonometrischen Bildes eines Körpers, Konstruktion des Achsenkreuzes.

1. Ein rechtwinkliges Parallelepiped (siehe Fig. 1)

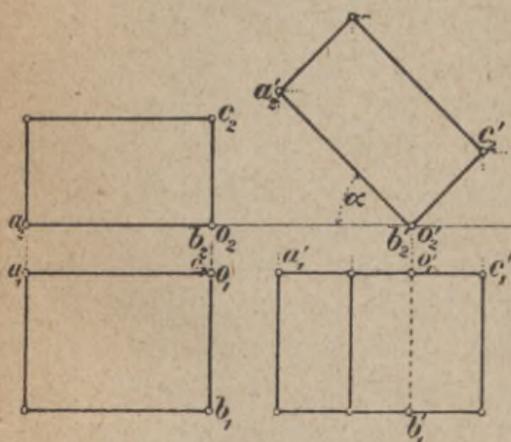


Fig. 1.

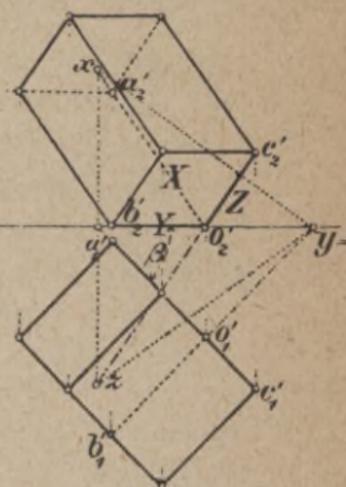


Fig. 2.

läßt sich durch zwei Drehungen, eine um eine horizontale Achse, dann eine um eine vertikale Achse, in eine

Lage bringen, wie etwa die Figur 2 zeigt. Während in der Figur 1 nur je eine Fläche in der Projektion als ein Rechteck abgebildet erscheint, erhält man in Figur 2 drei Flächen sichtbar abgebildet. Außerdem erscheinen in der Figur 2 die drei Ausdehnungen des Körpers, Länge, Breite und Höhe, als endliche Strecken, freilich nicht in wahrer Größe, sondern verkürzt. Die Figur 2 gibt ein anschaulicheres Bild von dem Gegenstande, als die Figur 1. Es ist klar, daß zwischen den Längen $o'_2 a'_2$, $o'_2 b'_2$ und $o'_2 c'_2$ der Figur 2 und den wahren Längen dieser Strecken geometrische Beziehungen bestehen, deren Zusammenhang abhängig ist von der Größe der Drehungswinkel α und β und der durch einfache geometrische Betrachtungen sich feststellen läßt.

Die Figur 2, Aufriß, nennt man eine parallelperspektivische Darstellung des Parallelepipedes der Fig. 1 oder auch ein axonometrisches Bild des Körpers. Das Bild ist eine rechtwinklige Projektion des Körpers auf die vertikale Projektionsebene oder die Bildebene. Bestimmt man die Durchschnittspunkte der drei in der Ecke o' zusammenstoßenden Körperkanten $o'a$, $o'b$ und $o'c$ mit der Bildebene, so ergibt sich ein Dreieck xyx , siehe Figur 2, in welchem die Seiten xy , xx und yx die Durchschnittslinien oder Spuren der drei Ebenen $o'ab$, $o'ac$ und $o'bc$ mit der Bildebene darstellen. Das Dreieck xyx soll für die Folge stets das Spurendreieck der Bildebene heißen. Als Spuren der Ebenen $o'ab$, $o'ac$ und $o'bc$ stehen die Seiten xy , xx und yx senkrecht zu den Bildern der Geraden $o'c$, $o'b$ und $o'a$. Letztere bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz im Raume, dessen axonometrisches Bild durch die drei Geraden $o'_2 c'_2$, $o'_2 b'_2$ und $o'_2 a'_2$ gegeben ist.

2. Das axonometrische Bild des Achsenkreuzes ist innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählbar, d. h. es läßt sich für jedes innerhalb gewisser Grenzen beliebig angenommene Achsenkreuz die zugehörige Lage des räumlichen rechtwinkligen Achsenkreuzes feststellen.

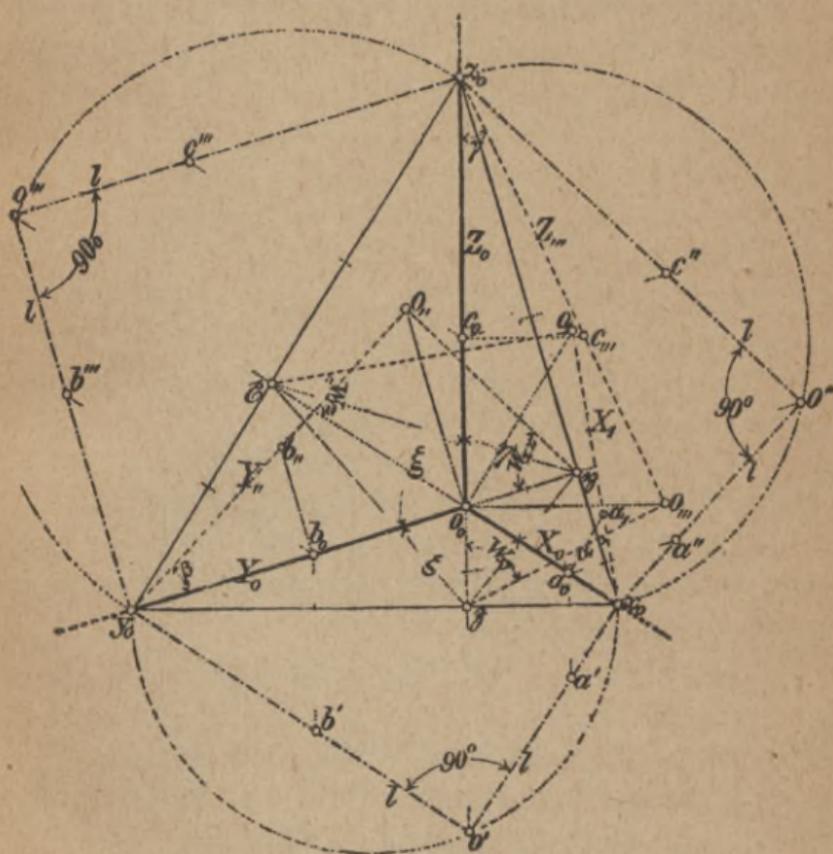


Fig. 3.

Ist in Figur 3 $X_0 Y_0 Z_0$ das axonometrische Bild eines Achsenkreuzes, so ergibt sich zunächst das Spurendreieck $x_0 y_0 z_0$ der Bildebene, indem man $x_0 y_0$ senkrecht zu Z_0 , $y_0 z_0$ senkrecht zu X_0 und $x_0 z_0$ senkrecht zu Y_0

zeichnet. Mittels der durch die Achsen X , Y und Z senkrecht zur Bildebene geführten Ebenen ergeben sich durch Umlegung dieser Ebenen in die Bildebene die Dreiecke $\xi o, x_0$, $\eta o, y_0$, $\zeta o, x_0$ und damit die Winkel α , β , γ der Achsen X , Y und Z sowie W_{yz} , W_{xz} und W_{xy} der Achsenebenen YZ , XZ und XY mit der Bildebene. Hierdurch ist aber die Lage des Achsenkreuzes gegen die Bildebene festgestellt.

Überträgt man von den Punkten ξ , η und ζ auf den Senkrechten durch o_0 zu $y_0 x_0$, $x_0 x_0$ und $y_0 x_0$ die Längen ξo , ηo , und ζo , nach $\xi o''$, $\eta o''$ und $\zeta o'$ und verbindet die Punkte o'' , o'' und o' mit den Ecken des Spurendreiecks, so erhält man die Umlegungen der Achsenebenen XY , YZ und XZ in die Bildebene.

Trägt man eine beliebige Strecke l auf den umgelegten Achsen nach $o'a' = o'b' = o''a'' = o''c'' = o'''c''' = o'''b'''$ ab und bestimmt die zugehörigen axonometrischen Bilder a_0 , b_0 , c_0 auf X_0 , Y_0 , Z_0 , so ergeben sich in den Längen $o_0 a_0$, $o_0 b_0$ und $o_0 c_0$ die der Projektionen einer vom Schnittpunkt der drei Achsen auf letzteren aufgetragenen Strecke l .

Anmerkung 1: Man kann die Länge der Projektionen einer von dem Achsenschnittpunkt auf den drei Achsen aufgetragenen Strecke l auch noch dadurch ermitteln, daß man die Strecke l von den Punkten o , o'' und o''' auf den umgelegten Achsen o, x_0 , o'', y_0 und o''', x_0 nach o, a_0 , o'', b_0 , und o''', c_0 abträgt und a_0 , b_0 , c_0 auf X_0 , Y_0 , Z_0 ermittelt.

3. Nennt man die Projektionen einer Strecke l auf die Achsen X_0 , Y_0 , Z_0 bzw. l_x , l_y , l_z , so hat man aus der Figur 3 sofort folgende Beziehungen:

$$l_x = l \cos \alpha; \quad l_y = l \cos \beta \quad \text{und} \quad l_z = l \cos \gamma;$$

oder

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{l}; \quad \cos \beta = \frac{l_y}{l}; \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{l}.$$

Ferner ist

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2. \quad (1)$$

Sind nun m, n, p drei Strecken oder drei Zahlen, die sich zueinander verhalten wie die Kosinus von α, β, γ , so daß also $m = k \cos \alpha$; $n = k \cos \beta$ und $p = k \cos \gamma$ ist, so ist $m^2 + n^2 + p^2 = 2k^2$ und

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{2m^2}{m^2 + n^2 + p^2} \\ \cos^2 \beta &= \frac{2n^2}{m^2 + n^2 + p^2} \\ \cos^2 \gamma &= \frac{2p^2}{m^2 + n^2 + p^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hieraus folgt aber offenbar auch die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} m^2 + n^2 &\leq p^2 \\ m^2 + p^2 &\leq n^2 \\ n^2 + p^2 &\leq m^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Für die Projektionen l_x, l_y und l_z einer auf den Achsen X, Y und Z liegenden Strecke l ergeben sich nun folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} l_x &= l \cos \alpha = l \sqrt{\frac{2m^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \\ l_y &= l \cos \beta = l \sqrt{\frac{2n^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \\ l_z &= l \cos \gamma = l \sqrt{\frac{2p^2}{m^2 + n^2 + p^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich zu folgenden Ergebnissen zusammenfassen:

„Eine auf einer Achse liegende Strecke l hat ein axonometrisches Bild l_x, l_y oder l_z . Die Verhältnisse $\frac{l_x}{l} = \cos \alpha$, $\frac{l_y}{l} = \cos \beta$, $\frac{l_z}{l} = \cos \gamma$

nennt man die Verkürzungsverhältnisse der axonometrischen Projektion. Zu jeder axonometrischen Projektion gehören drei Verhältniszahlen, m, n und p , die sich zueinander verhalten wie die Verkürzungsverhältnisse.“

„Zu jeder axonometrischen Projektion gehören drei Verkürzungszahlen, d. h. die in Nr. 4 angegebenen Wurzel ausdrücke.“

Man erhält die Länge des Bildes einer auf einer Achse liegenden Strecke l , wenn man l mit der zugehörigen Verkürzungszahl multipliziert.

In dem gleichen Maße, in dem sich eine auf einer Achse gelegene Strecke verkürzt, verkürzt sich auch jede zu einer Achse parallele Strecke. Zieht man also durch einen Punkt a im Raume Parallelen zu den drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen X, Y und Z , so erhält man für den Punkt a drei Koordinaten x, y und z . Den Achsen X, Y und Z entsprechen die Achsenbilder X_0, Y_0, Z_0 , den Koordinaten x, y, z entsprechen die axonometrischen Koordinaten x_0, y_0, z_0 , welche den Punkt a_0 als axonometrisches Bild von a liefern. Dabei bestehen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y und z und den axonometrischen Koordinaten x_0, y_0, z_0 die in den Gleichungen (4) aufgestellten Beziehungen.

4. Sind die Verhältniszahlen m, n und p gegeben,

so ist $ad = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$. Nimmt man ad als Hypotenuse eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks ade , so ist de gleich der Strecke k . Nunmehr bestimmen sich mittels der rechtwinkligen Dreiecke edf , edg und edh , in welchen $df = m$, $dg = n$ und $dh = p$ ist, die Winkel α , β und γ . Zeichnet man ferner in Figur 5 einen rechten Winkel ao_0b , nimmt auf o_0b den Punkt o beliebig an und zieht durch o die drei Geraden oc , od , oe bzw. unter den Winkeln α , β und γ gegen o_0a geneigt, zieht oz senkrecht zu oe und durch z die Senkrechte durch o_0a , so schneiden die um o_0 mit Halbmessern gleich o_0c und o_0d beschriebenen Kreisbögen auf dieser Senkrechten Punkte x_0 und y_0 aus, welche mit o_0 verbunden die Achsenbilder X_0 und Y_0 liefern, während das Achsenbild Z_0 mit o_0a zusammenfällt. Das Dreieck x_0y_0e ist daher das zugehörige Spurendreieck.

Zweite Konstruktion: Man zeichnet ein Dreieck, dessen Seiten gleich sind den Quadraten der Verhältniszahlen m , n und p . Die Halbierungslinien dieses Dreiecks sind die Achsenbilder X_0 , Y_0 und Z_0 und zwar halbiert X_0 den Winkel von n^2p^2 , Y_0 den von m^2p^2 und Z_0 den von m^2n^2 .

Herstellung eines axonometrischen Bildes eines Körpers.

5. Soll von einem Körper ein axonometrisches Bild hergestellt werden, so bringt man ihn in Verbindung mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem, X , Y , Z (siehe Fig. 6), wählt hierzu ein axonometrisches Achsenkreuz, entweder ganz beliebig oder bestimmten Verhältniszahlen entsprechend, und verschafft sich zu genügend vielen Punkten a des Körpers die zugehörigen

Fig. 6.

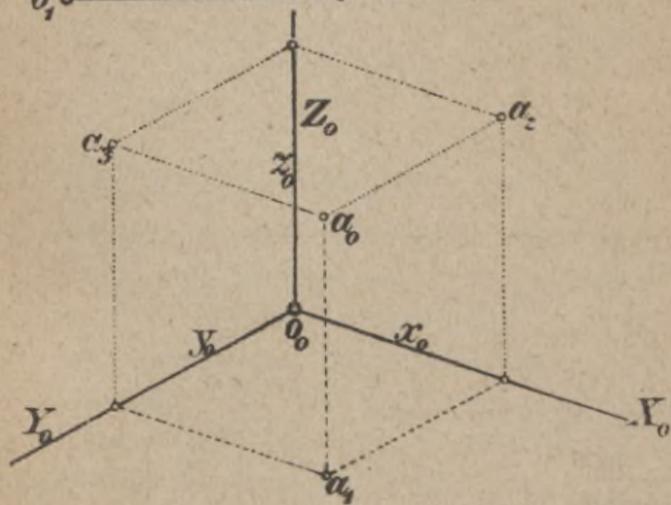
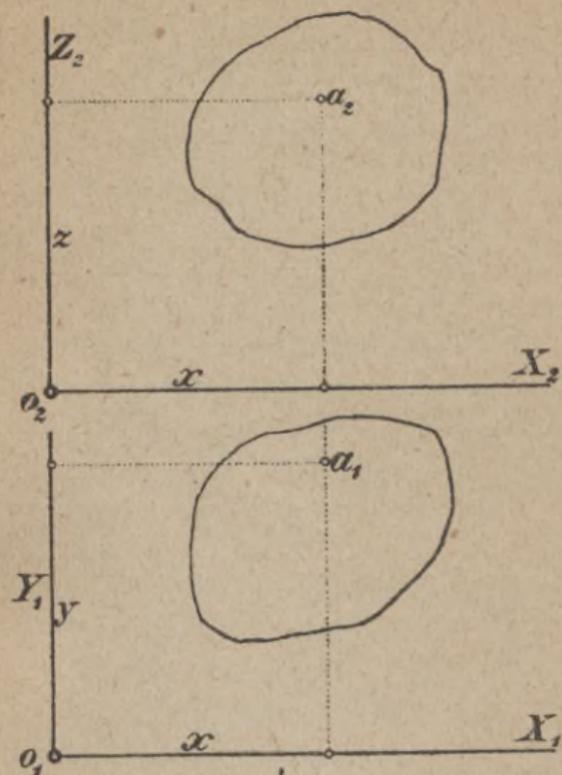


Fig. 7.

rechtwinkligen Koordinaten x , y und z . Die entsprechenden axonometrischen Koordinaten lassen sich dann bestimmen und auf die Achsenbilder X_0 , Y_0 und Z_0 übertragen, wodurch sich das axonometrische Bild des Punktes a als Ecke eines Parallelepipedes ergibt, von welchem eine Ecke mit dem Achsenschnittpunkt o_0 zusammenfällt, während die übrigen Ecken, mit Ausnahme des Bildes des in Rede stehenden Punktes, in den Achsenebenen liegen (siehe Fig. 7).

Um sich die axonometrischen Koordinaten eines Punktes zu verschaffen, kann man entweder die rechtwinkligen Koordinaten mittels eines Maßstabes durch Maßzahlen ausdrücken und diese Maßzahlen durch besondere, den Verkürzungsverhältnissen entsprechende Maßstäbe wieder in Strecken umsetzen: diese Strecken sind dann die axonometrischen Koordinaten; oder man ermittelt die Verkürzungszahlen, multipliziert diese mit den Maßzahlen der rechtwinkligen Koordinaten und verwandelt die Produkte mittels eines Maßstabes wieder in Strecken, welche letztere als axonometrische Koordinaten zu verwenden sind.

Die verschiedenen axonometrischen Projektionsarten.

6. Wenn drei Zahlen als Maßzahlen dreier Strecken den Bedingungen unter (3) entsprechen, so können sie stets als die Verhältniszahlen einer axonometrischen Projektion angesehen werden, zu welcher ein ganz bestimmtes Achsenkreuz gehört. Es gibt also unzählige viele axonometrische Projektionsarten, die sich in drei besondere Gruppen teilen lassen. Vergleicht man die Verhältniszahlen ihrem Werte nach miteinander, so können:

1. alle drei einander gleich,
2. zwei einander gleich,
3. alle drei verschieden groß sein.

Im ersten Falle spricht man von einer isometrischen, im zweiten Falle von einer dimetrischen, im dritten Falle endlich von einer trimetrischen Projektionsart.

Isometrische Projektion.

7. Bei dieser Projektion ist $m = n = p$. Die Verkürzungszahlen sind daher $\sqrt{\frac{2m^2}{3m^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165$;

d. h. die axonometrischen Koordinaten eines Punktes sind alle drei gleichmäßig zu verkürzen und haben eine Länge gleich dem 0,8165fachen der wirklichen Koordinaten. Gewöhnlich verkürzt man diese Koordinaten bei der isometrischen Projektion aber nicht, sondern trägt sie unverkürzt als axonometrische Koordinaten auf. Hierdurch ergibt sich von einem Gegenstande ein gegenüber dem wirklichen Bilde etwas vergrößertes, diesem aber ähnliches axonometrisches Bild, das den gleichen Zweck wie das wirkliche Bild, nämlich den der Anschaulichkeit erfüllt, vor diesem aber noch den Vorzug besitzt, daß man aus dem Bilde parallel zu den drei Achsenrichtungen die wirklichen Abmessungen des Körpers unmittelbar abgreifen kann.

Bei der isometrischen Projektion haben die Achsen X , Y und Z gegen die Bildebene gleiche Neigung und erscheinen darum auch die Achsenbilder unter gleichen Winkeln von je 120° zueinander geneigt. Die durch das unverkürzte Abtragen der wirklichen Koordinaten im

axonometrischen Bilde erzielte Vergrößerung beträgt das $\frac{1}{0,816}$ oder 1,22fache des wirklichen axonometrischen

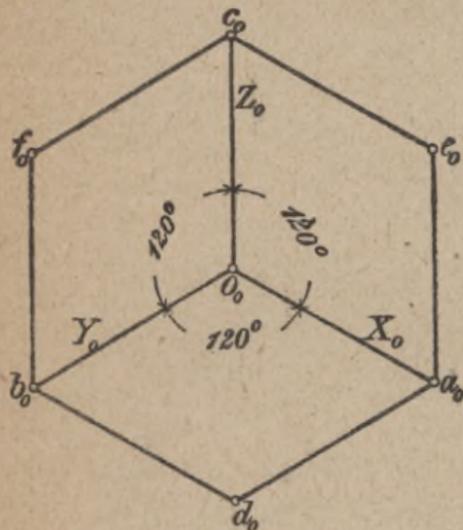


Fig. 8.

Würfels nach $o_0 a_0$, $o_0 b_0$ und $o_0 c_0$ ab. Durch a_0 , b_0

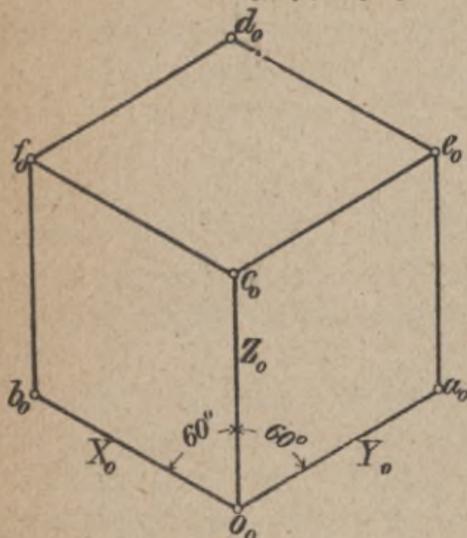


Fig. 9.

Bildes.

Im folgenden sollen einige isometrische Darstellungen gegeben werden.

8. Aufgabe 1. Es ist ein Würfel von gegebener Kantenlänge isometrisch darzustellen.

Auflösung: Man trägt vom Anfangspunkte o_0 (siehe Fig. 8) auf den Achsenbildern X_0 , Y_0 und Z_0 die Kantenlänge des

Würfels nach $o_0 a_0$, $o_0 b_0$ und $o_0 c_0$ ab. Durch a_0 , b_0 und c_0 sind weiter d_0 , e_0 und f_0 bestimmt. Das isometrische Bild des Würfels ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen Mittelpunkt mit o_0 zusammenfällt. Das in Figur 8 gezeichnete Würfelbild gibt eine Ansicht von unten oder eine Untersicht. Nimmt man statt der Linien X_0 , Y_0 (Fig. 8) ihre Verlängerungen über o_0 hinaus als Würfel-

kanten (siehe Fig. 9) und konstruiert das Würfelbild, so erhält man eine Ansicht von oben oder eine Obersicht.

9. Aufgabe 2. Ein in der XY liegender Kreis ist isometrisch darzustellen.

Auflösung: Man legt durch den Mittelpunkt (siehe Fig. 10) zwei aufeinander senkrechte Durchmesser als Achsen X und Y , denen isometrisch die Achsenbilder

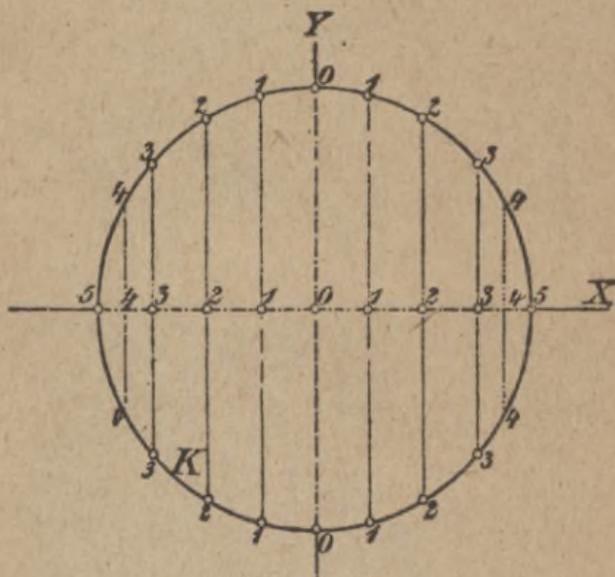


Fig. 10.

X_0 und Y_0 entsprechen (siehe Fig. 11). Teilt man nun den mit X zusammenfallenden Durchmesser ein, etwa in 8 gleiche Teile, überträgt die Teilstrecken unverkürzt von o_0 aus auf X_0 (siehe Fig. 11), zieht durch die so auf X_0 sich ergebenden Punkte 1, 2 usw. Parallelen zu Y_0 , macht diese gleich den zu Y (Fig. 10) parallelen Kreissehnen 1 · 1, 2 · 2 usw., so ergibt sich hierdurch das axonometrische Bild der Kreislinie.

Anmerkung 2: Die beiden Durchmesser 5 5 und 0 0 des elliptischen Bildes vom Kreise bilden zwei gleich

große konjugierte Ellipsendurchmesser, ihre Halbierungslinien liefern somit die Lage der Hauptachsen von K_0 ; ihre Längen ergeben sich in einfachster Weise: Man

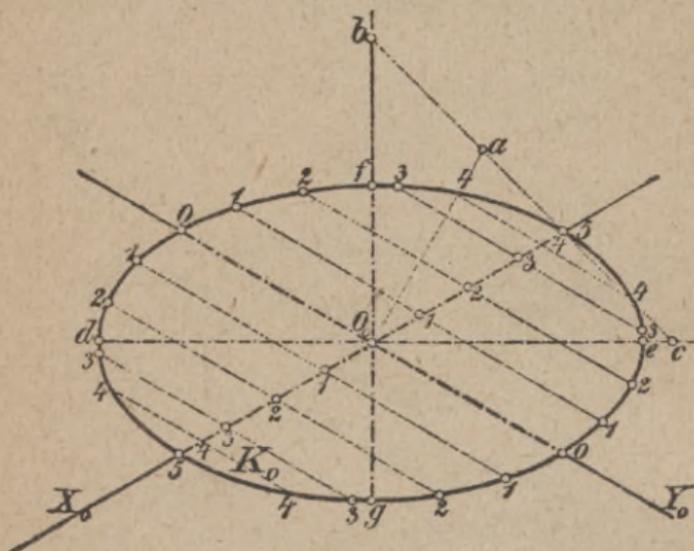


Fig. 11.

zieht durch 5 die Linie bc unter 45° gegen die Horizontale, so wie in der Figur 11 angegeben, dann sind die Strecken $5b$ und $5c$ bzw. gleich der großen und kleinen Halbachse der Ellipse K_0 .

10. Aufgabe 3. Ein hohler kreisförmiger Halbzylinder ist isometrisch darzustellen, wenn die Zylinderachse mit der Z -Achse zusammenfallen soll.

Auflösung: Ist X_0 , Y_0 und Z_0 (siehe Fig. 13) das Bild des Achsenkreuzes, so trägt man den inneren und äußeren Zylinderhalbmesser von o_0 aus auf den Achsenbildern X_0 und Y_0 nach $o_0 a_0$, $o_0 b_0$, $o_0 c_0$, $o_0 d_0$, $o_0 e_0$ und $o_0 f_0$ ab und konstruiert die beiden Ellipsen K_0 und N_0 ganz in gleicher Weise wie in Nr. 9. Ist $o_0 o'_0$ die Länge

Fig. 13.

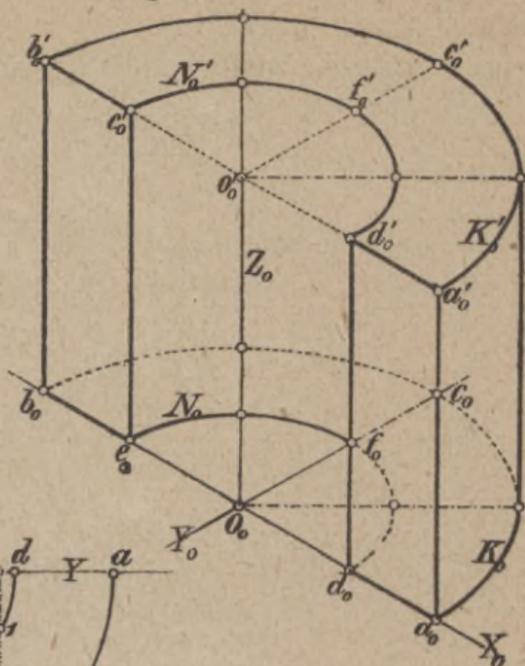


Fig. 12.

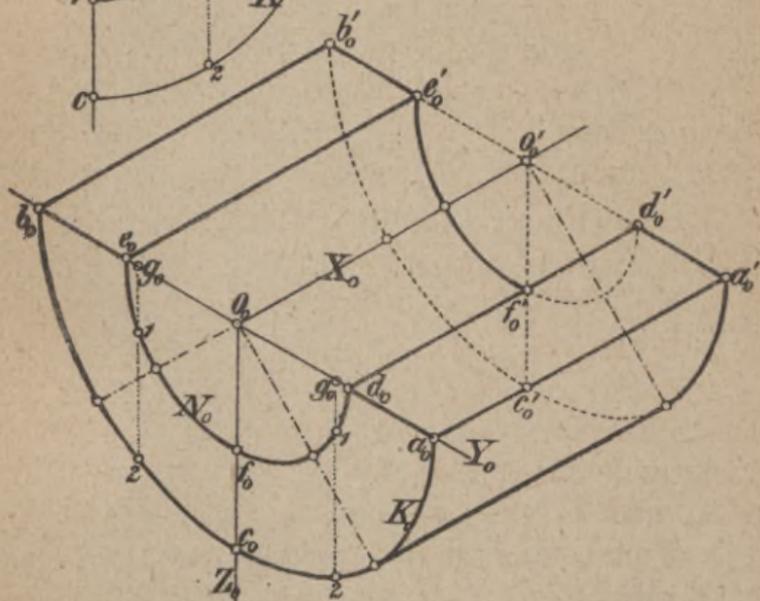
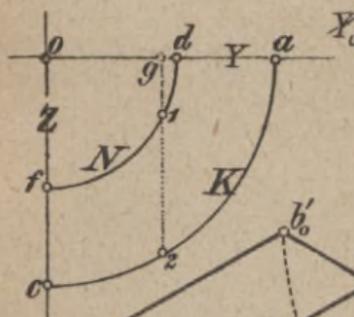


Fig. 14.

der Zylinderachse, so zieht man durch o'_0 Parallelen zu X_0 und Y_0 und trägt auf diesen Linien wieder die Zylinderhalbmesser ab. Die Ellipsen K'_0 und N'_0 sind kongruent den Ellipsen K_0 und N_0 . In gleicher Weise

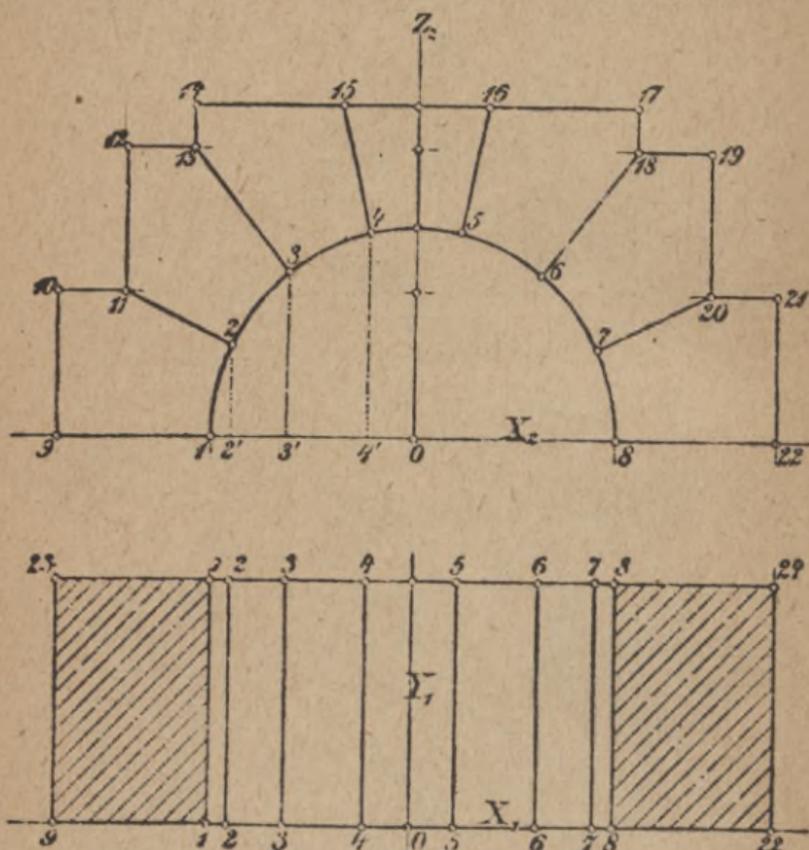


Fig. 15.

konstruiert man, wenn der Zylindergrundkreis in der YZ -Ebene (siehe Fig. 14) liegt und die Zylinderachse mit der X -Achse zusammenfällt. Man konstruiert dann wieder die konjugierten Halbmesser $o_0 a_0$ bzw. $o_0 b_0$ und $o_0 c_0$, ebenso $o_0 d_0$, $o_0 e_0$ und $o_0 f_0$, hieraus die Achsen

oder man verwendet die y - und x -Koordinaten der Punkte der Kreise K und N (siehe Fig. 12).

11. Aufgabe 4. Der in Figur 15 durch Grund- und Aufriß dargestellte Mauerbogen soll in isometrischer Projektion, Untersicht dargestellt werden.

Auflösung: Wählt man das Achsenkreuz, so wie die Figur 15 zeigt, so ergeben sich für jeden Punkt im Aufriß

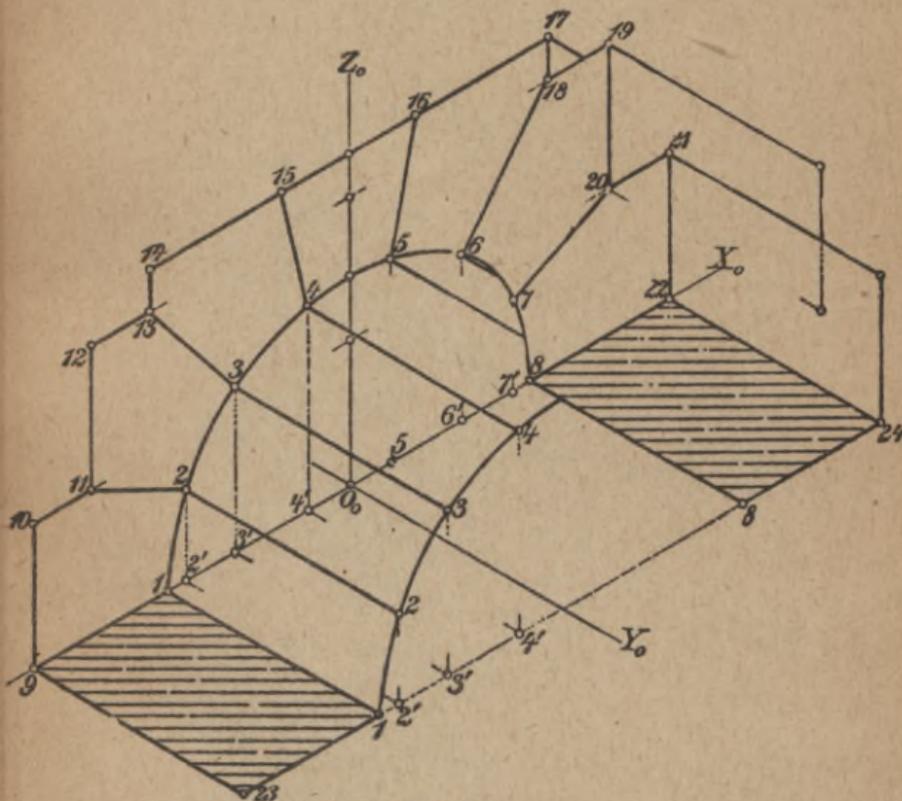


Fig. 16.

(siehe Fig. 15) die x - und z -Koordinaten, im Grundriß die y -Koordinaten, welche dann unverkürzt nach Figur 16 parallel zu den Achsenbildern X_0 , Z_0 und Y_0 aufzutragen sind.

Z. B. Punkt 1: $0 \cdot 1 = 0 \cdot 8$ Figur 15 = $0_0 \cdot 1 = 0_0 \cdot 8$ Fig. 16 $1 \cdot 1 = 8 \cdot 8$ Fig. 15 = $1 \cdot 1 = 8 \cdot 8$ Fig. 16 oder Punkt 4: $0 \cdot 4'$ Fig. 15 = $0_0 \cdot 4'$ Fig. 16 $4' \cdot 4$ Fig. 15 = $4' \cdot 4$ Fig. 16 usw.

12. Aufgabe 5. Es ist das isometrische Bild einer Kugel darzustellen.

Auflösung: Das isometrische Bild einer Kugel ist eine Kreislinie K'_0 (siehe Fig. 17) mit einem Halbmesser

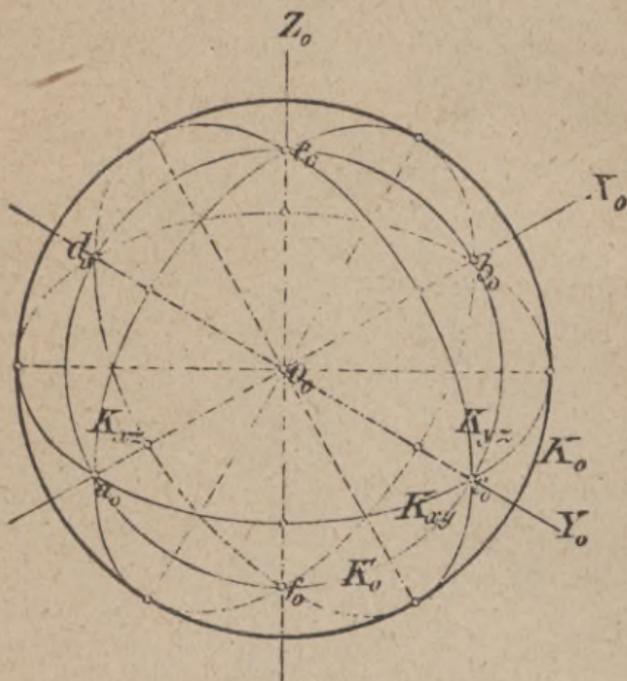


Fig. 17.

gleich jenem der Kugel. Bestimmt man aber das Bild der Kugel als Umriss der in den Koordinatenebenen liegenden Kugelschnitte, so erhält man gleichfalls einen Kreis K_0 , aber mit einem größeren Halbmesser als jener von K'_0 . Zu diesem Zwecke trägt man auf den Achsenbildern X_0 , Y_0 und Z_0 den gegebenen Kugel-

halbmesser nach $o_0 a_0 = o_0 b_0 = o_0 c_0 = o_0 d_0 = o_0 e_0 = o_0 f_0$ ab und konstruiert die Ellipsen K_{xy} , K_{yz} und K_{zx} , deren Achsen die Winkel des Achsenkreuzes halbieren und deren Längen nach Nr. 9 zu ermitteln sind. Ein Kreis K_0 , der diese Ellipsen sämtlich berührt, bildet den Umriß des isometrischen Kugelbildes in der der isometrischen Projektionsart entsprechenden Vergrößerung (siehe Nr. 7).

Dimetrische Projektion.

13. Sobald zwei der Verhältniszahlen einander gleich werden, entsteht die dimetrische Projektion. Es sind hierbei zwei Achsen, in der Regel die X - und Z -Achse,

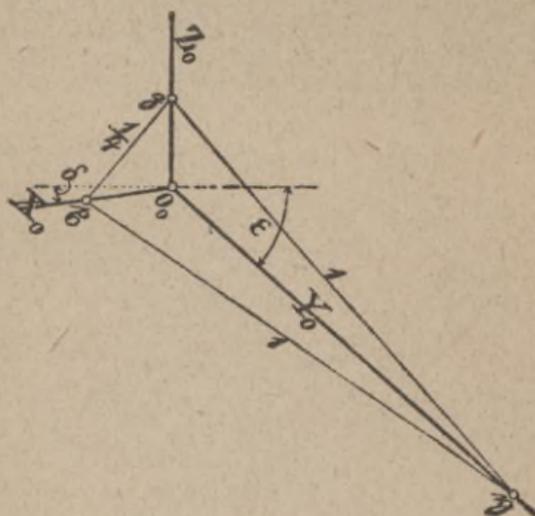


Fig. 18.

gegen die Bildebene gleichgeneigt; das Spurendreieck ist gleichschenkelig. Unter den unzähligen Möglichkeiten für das Bild des Achsenkreuzes soll nur die eine herausgegriffen werden, für welche $m = p = 1$

und $n = \frac{1}{2}$ ist. Diese Projektionsart liefert schöne Bilder und wird aus diesem Grunde vielfach zur Darstellung von Gegenständen aus dem Gebiete der Technik benützt.

Erste Konstruktion des Achsenkreuzes: Man zeichnet ein Dreieck $x\eta\zeta$ mit den Seitenlängen $\eta\zeta = \eta x = 1$ und $x\zeta = \frac{1}{2}$ und verschafft sich darin die Winkelhalbierenden X_0, Y_0, Z_0 (s. Fig. 18).

Es ist nicht schwer, die Winkel δ und ε der Größe nach zu ermitteln, welche eine zu Z_0 Senkrechte mit den Achsenbildern X_0 und Y_0 einschließt. Im vorliegenden Falle findet man genau genug $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{8}$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{7}{8}$, woraus eine zweite zweckmäßige Konstruktion des Achsenkreuzes folgt.

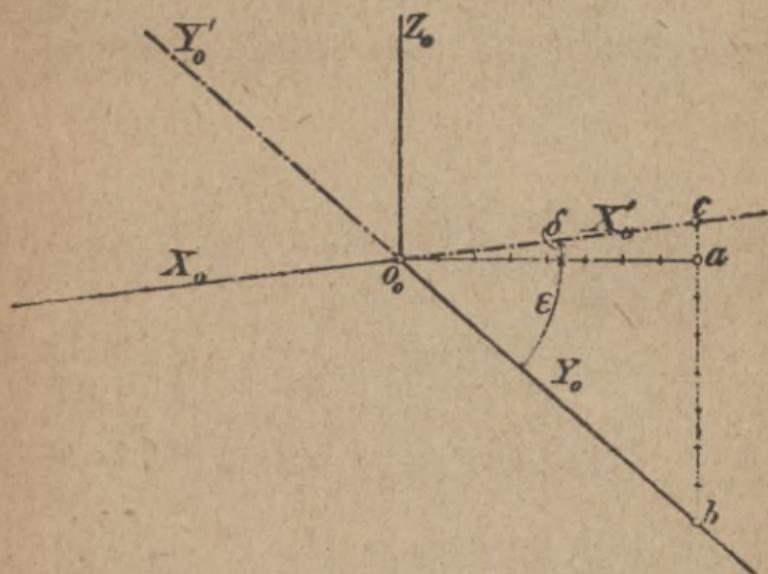


Fig. 19.

Zweite Konstruktion: Man nimmt die Lage von Z_0 an, wählt darauf o_0 und zieht durch o_0 eine Senkrechte zu Z_0 . Macht man nun $o_0 a = 8$, $a b = 7$ Ein-

heiten und $ac = 1$ Einheit, so liefern die Verbindungslinien o_0c und o_0b die Achsenbilder X_0 und Y_0 (s. Fig. 19).

14. Bei der dimetrischen Projektion wird man, wenn es sich nur um die Herstellung eines axonometrischen Bildes eines Körpers handelt, für die beiden Achsen X_0 und Z_0 , zu welchen die gleichen Verkürzungsverhältnisse gehören, die zugehörigen axonometrischen Koordinaten unverkürzt abtragen, für die dritte Achse Y_0 aber die halben rechtwinkligen Koordinaten als axonometrische Koordinaten wählen.

Man erhält dann wieder ein vergrößertes, aber dem wirklichen axonometrischen Bild ähnliches Bild und kann aus letzterem nach zwei Achsenrichtungen die Ausmaße des Körpers in wirklicher Größe abgreifen, während die in der dritten Richtung abgegriffenen Maße zu verdoppeln sind, um die wirklichen Größen zu erhalten.

Anmerkung 3: Für die vorstehend besprochene dimetrische Projektion betragen die Verkürzungszahlen für die X_0 - und Z_0 -Achse:

$$\sqrt{\frac{2}{2,25}} = \sqrt{0,8888} = 0,9428,$$

für die Y_0 -Achse: $\sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{2,25}}$
 $= 0,4714.$

Die Vergrößerung des axonometrischen Bildes bei unverkürzter Benutzung der x - und z - und Halbierung der y -Koordinaten beträgt bei der in Rede stehenden dimetrischen Projektion das $\frac{1}{0,9428} = 1,06$ fache des wirklichen axonometrischen Bildes.

15. Aufgabe 6. Der in Figur 20 durch Grundriß und Vertikalschnitt dargestellte Hohlkörper ist dimetrisch $1:1/2:1$ darzustellen, und zwar in Übersicht.

Auflösung: Man zeichnet das Achsenkreuz, wie in Figur 21 angegeben, dem in Figur 20 das rechtwinklige Achsenkreuz X, Y, Z entspricht. Trägt man nun auf Y_0 von o_0 aus die Hälften der aus Figur 20 zu entnehmenden Strecken $o_1 a_1 = o_1 c_1$, $o_1 b_1 = o_1 d_1$ nach $o_0 a_0$, $o_0 c_0$, $o_0 b_0$ und $o_0 d_0$ ab, zieht durch a_0 bis d_0 Parallelen zu X_0 und trägt auf diesen Linien die zu den Punkten 1 bis 8 gehörigen x -Koordinaten ab, so ergeben sich in Figur 21 die Punkte 1 bis 8. Durch diese Punkte sind Parallelen zu Z_0 zu ziehen und darauf die zu den Punkten 1 bis 8 gehörigen x -Koordinaten of und oe abzutragen, wodurch sich die Punkte $1'$ bis $4'$ und $5''$ bis $8''$ bzw. $5'$ bis $8'$ ergeben.

16. Aufgabe 7. Der in Figur 22 durch Grund- und Aufriß dargestellte Körper ist dimetrisch $1:1/2:1$ darzustellen.

Auflösung: Dem Achsenkreuz X, Y, Z (Fig. 22) entspricht axonometrisch das Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0 in Figur 23, die x - und z -Koordinaten eines Punktes werden unverkürzt, die y -Koordinaten zur Hälfte als dimetrische Koordinaten übertragen. Für den Punkt a z. B. hat man $x = o_1 b_1$, $y = b_1 a_1$, $z = o_2 c$. Es ist nun $x_0 = o_0 c_0 = o_2 c$ Figur 22, $x_0 = c_0 b_0 = o_1 b_1$ Figur 22, $y_0 = b_0 a_0 = \frac{1}{2} b_1 a_1$ Figur 22.

17. Aufgabe 8. Es ist eine Kreislinie der XY -Ebene dimetrisch $1:1/2:1$ darzustellen.

Auflösung: Man legt durch den Kreismittelpunkt das Achsenkreuz X, Y (siehe Fig. 10) und trägt nun die x -Koordinaten unverkürzt auf X_0 ab nach $o_0 \cdot 1$, $o_0 \cdot 2$ usw.

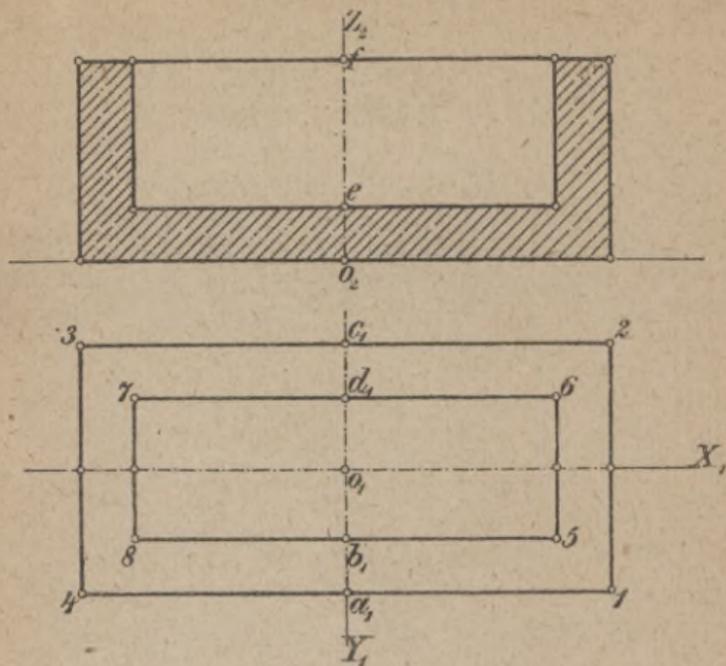


Fig. 20.

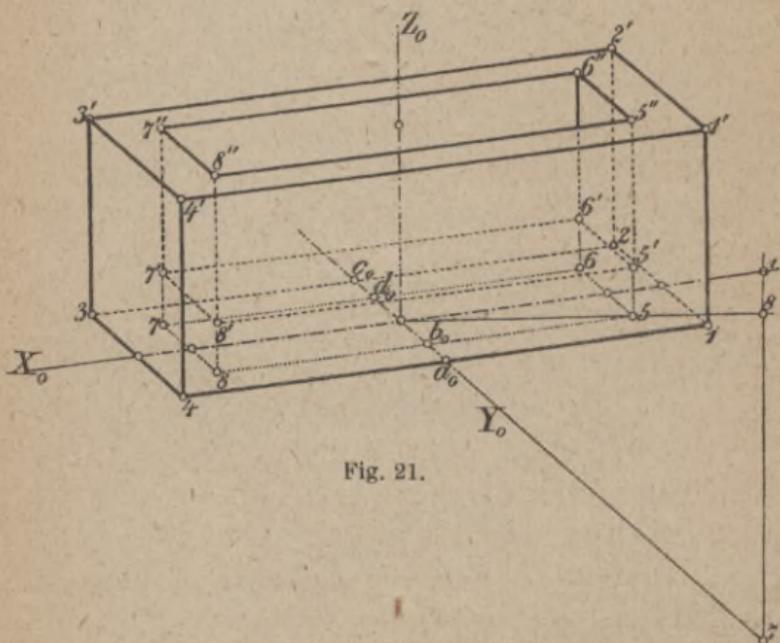


Fig. 21.

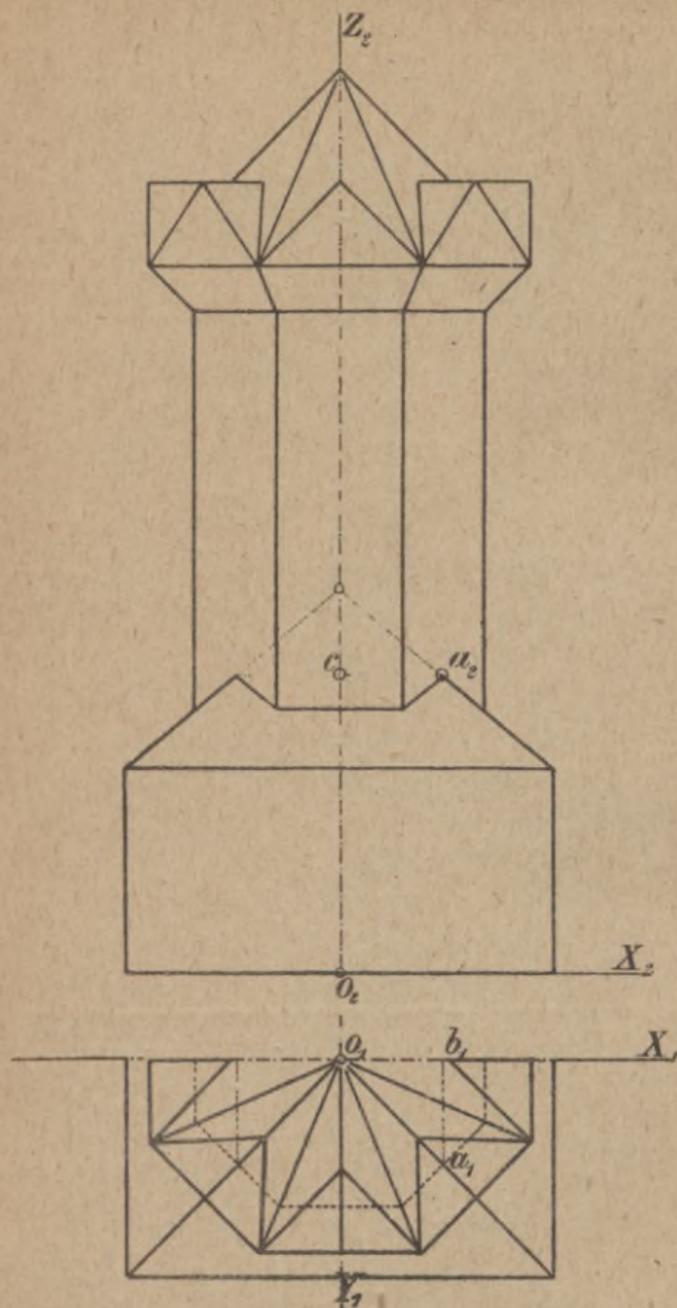


Fig. 22.

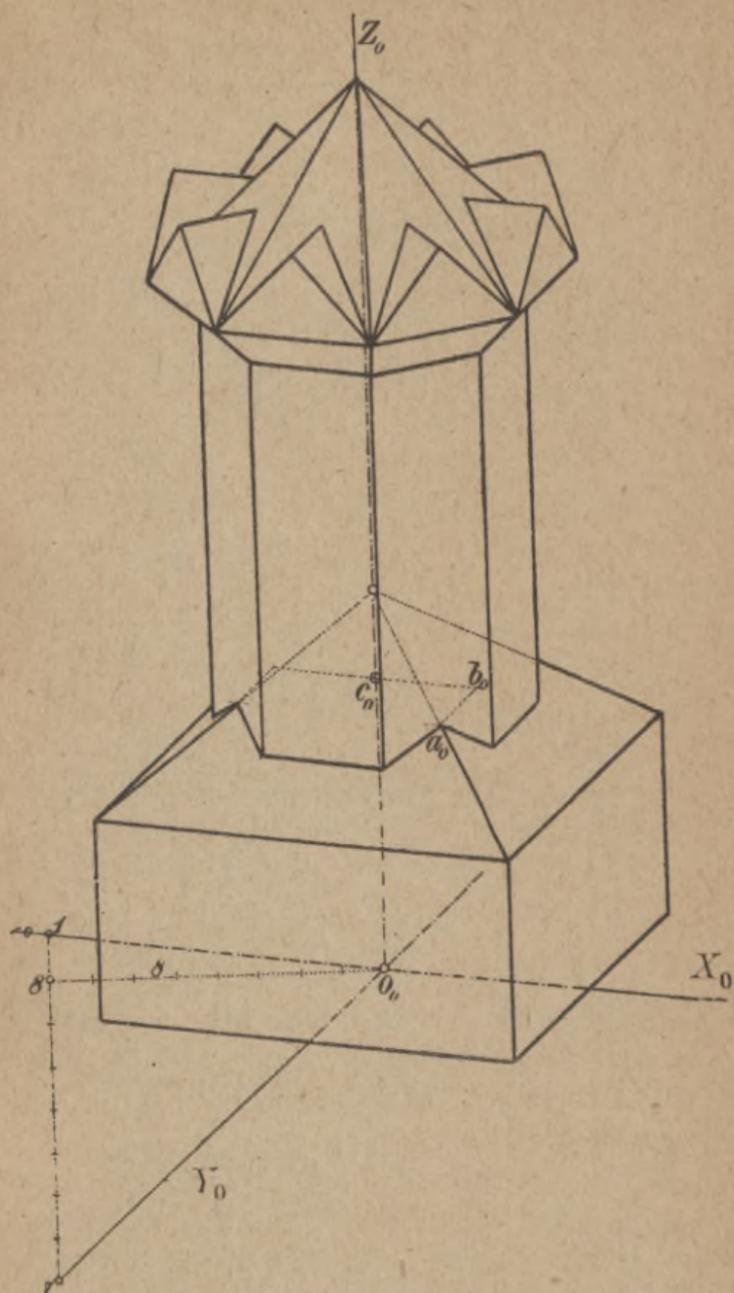


Fig. 23.

Die y -Koordinaten $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$ (siehe Fig. 10) sind zur Hälfte nach $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$ (siehe Fig. 24) parallel zu Y_0 abzutragen.

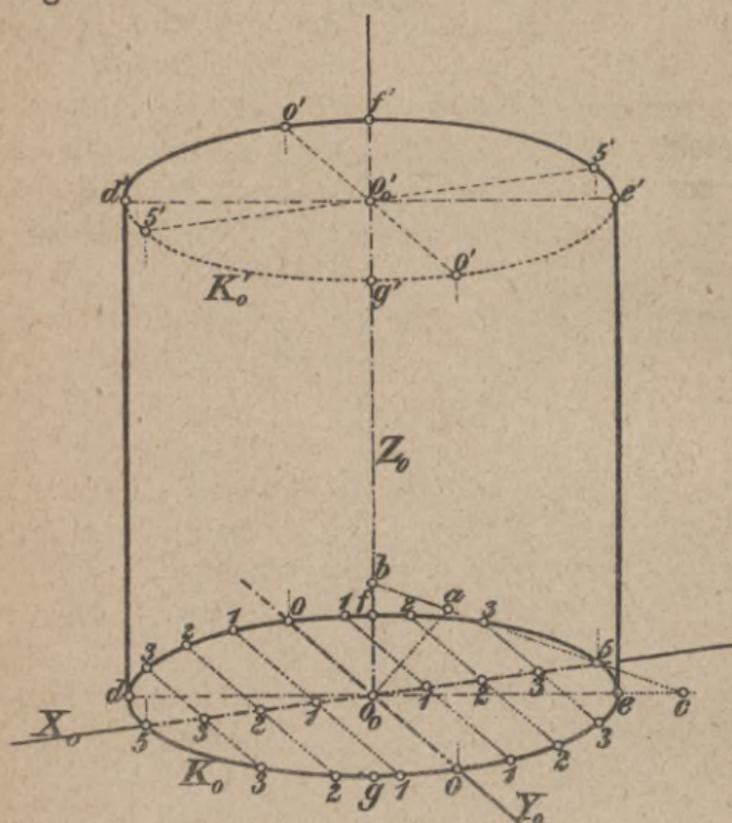


Fig. 24.

18. Aufgabe 9. Es ist ein senkrechter Kreiszyylinder, dessen Grundkreis in der XY -Ebene liegt, dimetrisch $1:1\frac{1}{2}:1$ darzustellen.

Auflösung: Die Z -Achse soll mit der Zylinderachse zusammenfallen (siehe Fig. 24), dann bestimmt sich das dimetrische Bild des Grundkreises in derselben Weise wie in der vorigen Aufgabe. Trägt man dann

von o_0 aus auf Z_0 die Zylinderhöhe ab, so ist o'_0 der Mittelpunkt der oberen Begrenzungsellipse K'_0 , welche letztere kongruent der unteren Ellipse K_0 zu zeichnen ist.

Anmerkung 4: Mittels der beiden konjugierten Durchmesser $0 \cdot 0$ und $5 \cdot 5$ bestimmen sich wieder die Hauptachsen der elliptischen Kreisbilder. Die große Achse steht senkrecht zu Z_0 , die kleine Achse fällt mit Z_0 zusammen. Die Senkrechte $o_0 a$ zu $o_0 0$ und gleich $o_0 \cdot 0$ liefert den Punkt a . Die Verbindungslinie $a \cdot 5$ schneidet die Ellipsenachsen in b und c so, daß $5 \cdot c$ gleich der Länge der halben kleinen, $5 \cdot b$ gleich der Länge der halben großen Achse ist.

19. Im folgenden sollen einige Aufgaben aufgeführt werden, die der Leser selbst lösen wolle:

Aufgabe. Man zeichne eine isometrische Projektion bzw. dimetrische Projektion eines senkrechten Kreiskügels, dessen Grundfläche mit einer der Achsenebenen zusammenfallen soll.

Aufgabe. Man zeichne den in Aufgabe 4 isometrisch dargestellten Mauerbogen in dimetrischer Projektion $1:1/2:1$.

Aufgabe. Man zeichne den in Aufgabe 3 isometrisch dargestellten Hohlzylinder dimetrisch $1:1/2:1$.

Trimetrische Projektion.

20. Auch bei dieser Projektionsart sind unzählige viele Möglichkeiten für das Achsenkreuz vorhanden. Eine sehr gebräuchliche und schöne Bilder liefernde Projektionsart ist die mit den Verhältniszahlen $m = 9$, $n = 5$, $p = 10$.

Erste Konstruktion des Achsenkreuzes: Man zeichnet ein Dreieck $x\eta z$ mit den Seiten $x\eta = 100$, $\eta z = 81$ und $zx = 25$ Einheiten, so liefern die Halbierungslinien der Dreieckswinkel die Achsenbilder X_0 , Y_0 und Z_0 (s. Fig. 25).

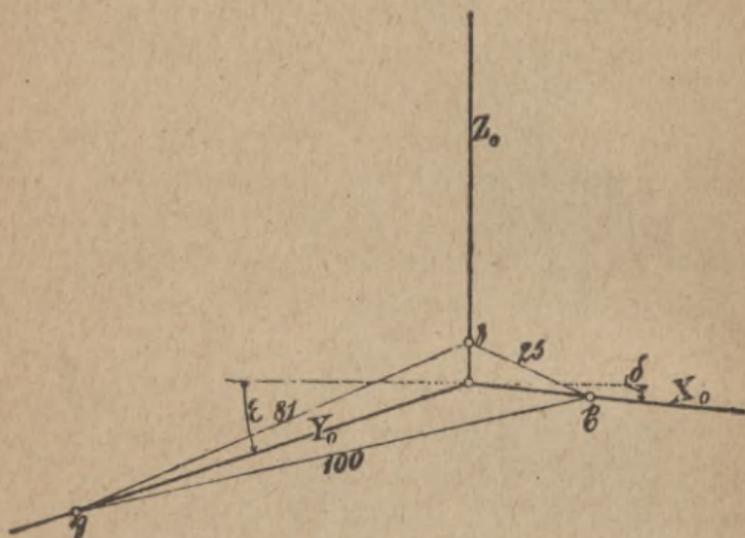


Fig. 25.

Zweite Konstruktion: Mit der Benutzung der Winkel δ und ϵ , die sich aus den Verhältniszahlen berechnen lassen, und zwar $\text{tg } \delta = \frac{1}{11}$, $\text{tg } \epsilon = \frac{1}{3}$, ergibt sich eine zweite Konstruktion des Achsenkreuzes (siehe Fig. 26). Man trägt an die gewählte Linie Z_0 in a_0 die Senkrechte zu Z_0 an, macht $o_0 a = 11$ Einheiten, $ab = 1$ Einheit, ebenso $o_0 c = 3$, $cd = 1$, dann sind die Verbindungslinien $o_0 b$ und $o_0 d$ die Achsenbilder X_0 und Y_0 , und zwar für Untersicht. Würde man die so bestimmten Achsenbilder über o_0 hinaus verlängern und die Verlängerungen als Achsen X'_0 und Y'_0 nehmen, so erhielte man die Figur $Z_0 X'_0 Y'_0$ als Achsenkreuz für

Obersicht. Es ist hierbei wieder $o_0 a = 3$, $a b' = 1$, $o_0 c = 11$, $c d' = 1$. Der Unterschied in den Konstruktionen (Fig. 26) besteht darin, daß im ersten Falle die Strecken ab und cd nach unten, im zweiten Falle nach oben von a bzw. c aus abzutragen sind.

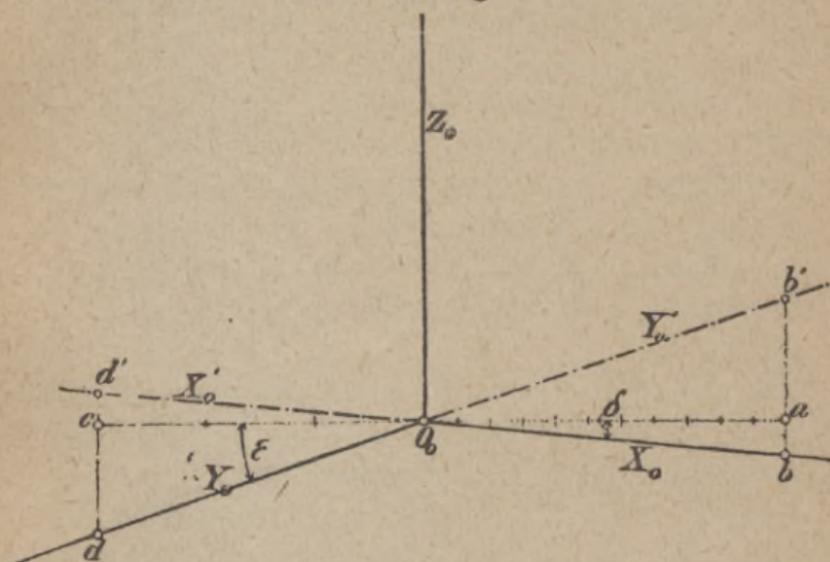


Fig. 26.

21. Bei der trimetrischen Projektion haben die Verkürzungszahlen die Werte:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 81}{81 + 25 + 100}} = \sqrt{\frac{162}{206}} = 0,88 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 25}{206}} = 0,49 \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{206}} = 0,98.$$

Diesen Werten entsprechend müßten die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes verkürzt werden, um aus ihnen die axonometrischen Koordinaten zu erhalten.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen zeichnet man aber auch hier, wenn es sich nur um Herstellung eines

axonometrischen Bildes handelt, eine vergrößerte Abbildung eines Körpers, indem man die z -Koordinaten unverkürzt abträgt, die x -Koordinaten um $\frac{1}{10}$, die y -Koordinaten aber um $\frac{5}{10}$ verkürzt und die so verkürzten Strecken als axonometrische Koordinaten verwendet. Das auf diese Weise entstandene Bild ist dem wirklichen axonometrischen Bilde ähnlich und um das $1:0,98 = 1,02$ fache desselben vergrößert. Man kann aus einem solchen Bilde parallel zu den Achsenrichtungen die wirklichen Abmessungen des Körpers entnehmen, wenn man die z -Koordinaten in wirklicher Größe abgreift, während die y -Koordinaten zu verdoppeln, die x -Koordinaten aber um $\frac{1}{9}$ der abgegriffenen Länge zu vergrößern sind.

22. Aufgabe 10. Der in Figur 27 durch Grund- und Aufriß dargestellte Körper ist trimetrisch 9:5:10 zu zeichnen.

Auflösung: Man wählt das Achsenkreuz so, wie in Figur 27 geschehen, und konstruiert das axonometrische Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0 (siehe Fig. 28) nach Nr. 20. Nunmehr bestimmt man mittels Koordinaten die axonometrischen Bilder der einzelnen Körperecken, z. B. der Punkte 2, 5 und 1, 6; für diese ist $o_0 a_0 = o_0 b_0$ Figur 28 = $\frac{9}{10} o_1 a_1$ Figur 27 = x -Koordinate, ferner $a_0 \cdot 2 = a_0 \cdot 5 = b_0 \cdot 1 = b_0 \cdot 6$ Figur 28 = $\frac{5}{10} a_1$ 2 Figur 27 = y -Koordinate; Punkt 9: in Figur 28 ist noch die z -Koordinate $2 \cdot 9 = 2 \cdot 9$ Figur 27 anzutragen usw.

Anmerkung 5: Das Verkleinern der x - und y -Koordinaten wird zweckmäßig mittels Hilfswinkel vorgenommen.

Macht man (siehe Fig. 29) $cd = 10$ Einheiten, beschreibt um c mit cd einen Kreisbogen und trägt die Sehne

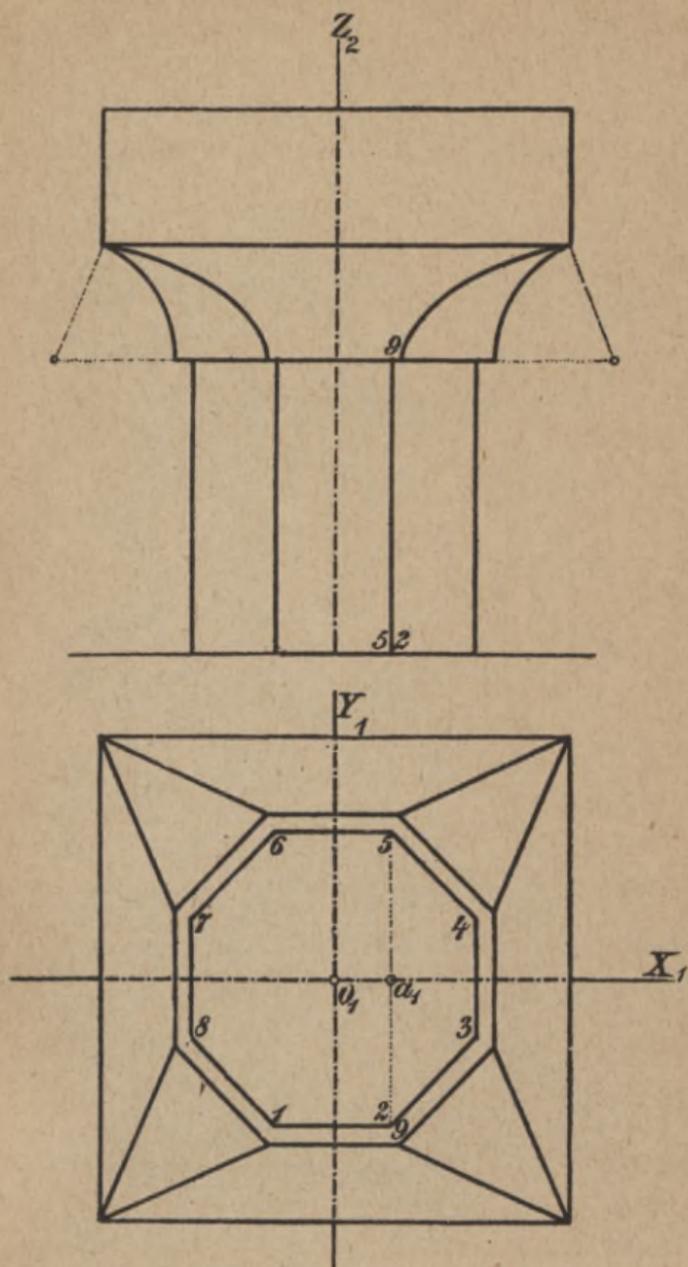


Fig. 27.

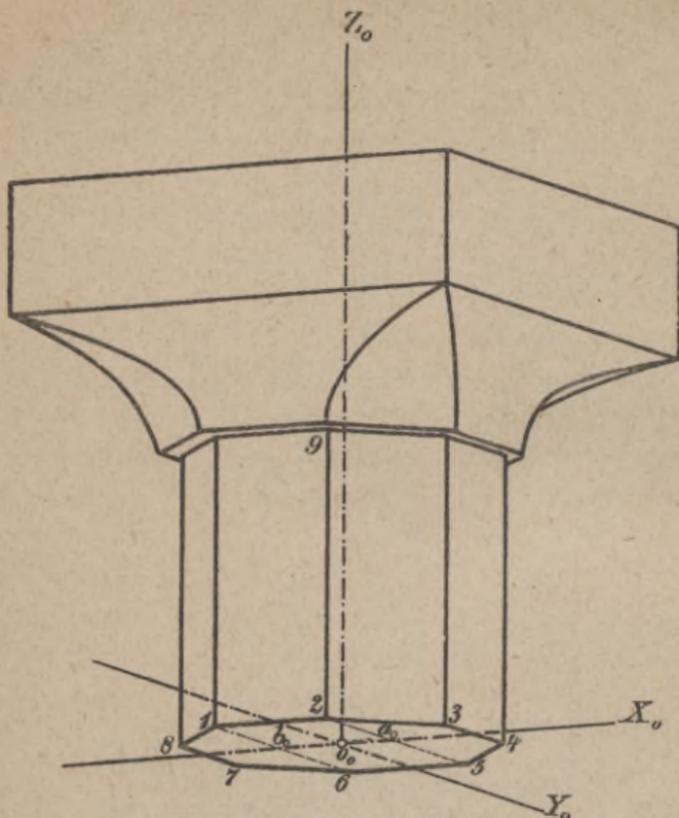


Fig. 28.

$de = 9$ Einheiten in diesen Kreis, so ergibt sich der Winkel φ ; beschreibt man nunmehr mit der Strecke $o_1 a_1$ (Fig. 27) den Kreisbogen fg in Figur 29, so ist

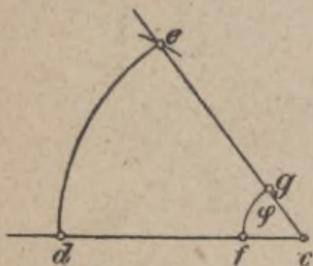


Fig. 29.



Fig. 30.

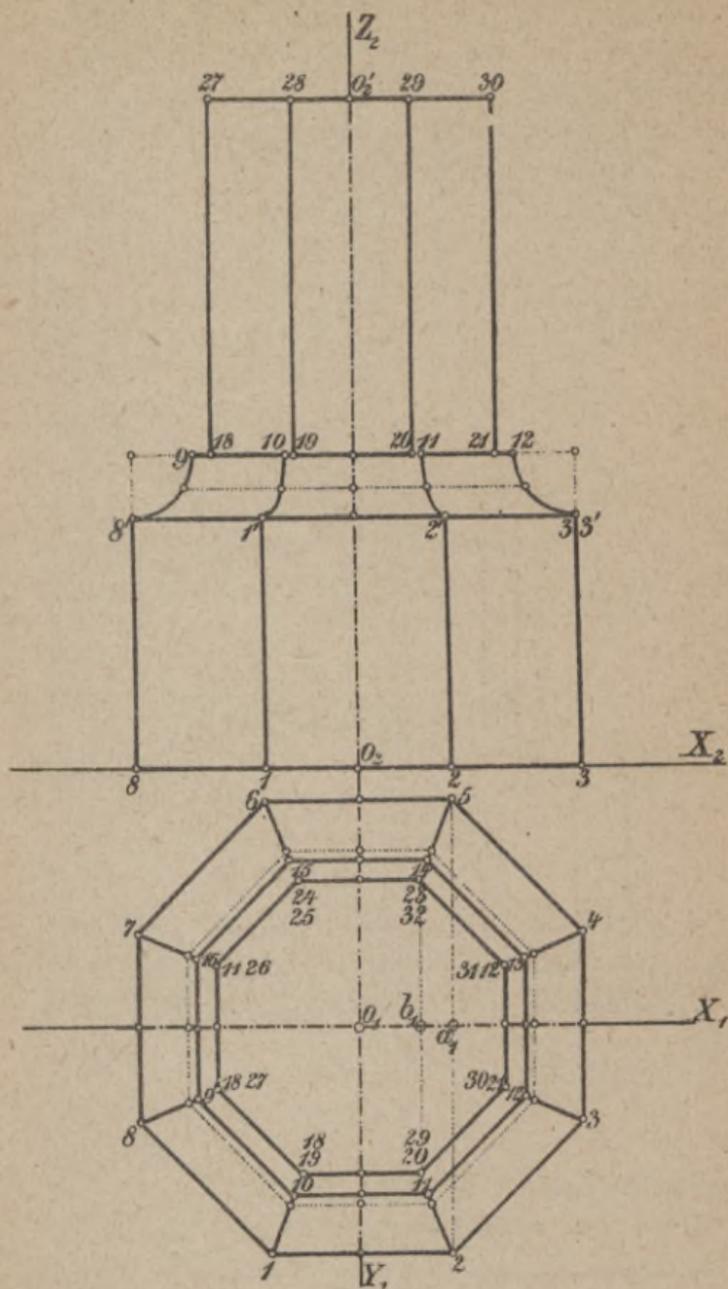


Fig. 31.

$fg = \frac{1}{10} o_1 a_1 = o_0 a_0$ Figur 28, gleich der axonometrischen x -Koordinate für die Punkte 2 und 5 bzw. 1 und 6.

Ebenso kann man für die Y_0 -Achse einen Hilfswinkel ψ ermitteln, wenn man um h (siehe Fig. 30)

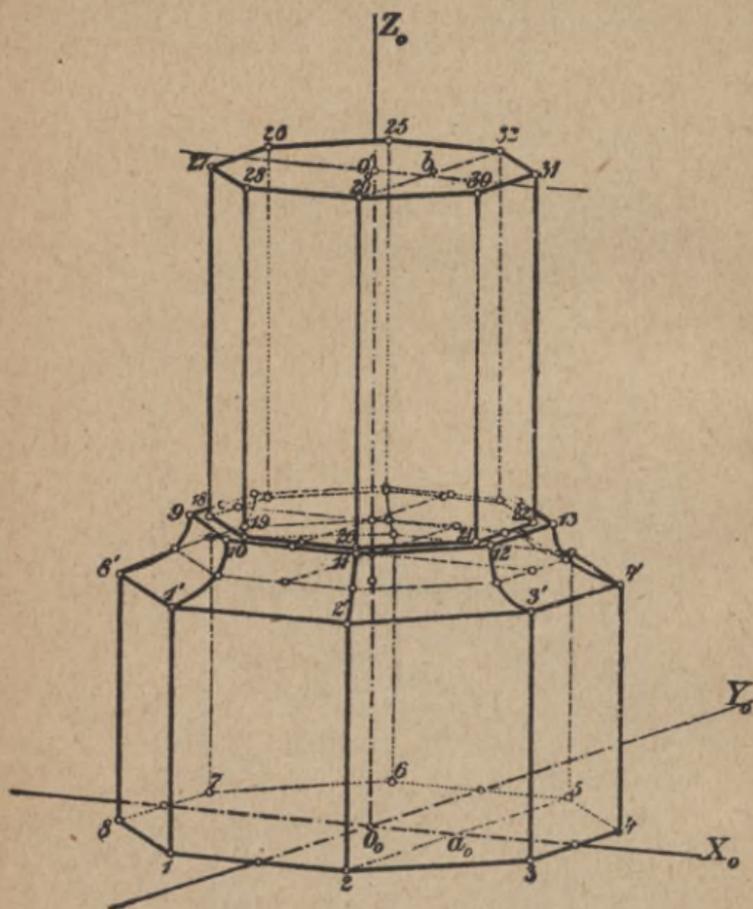


Fig. 32.

den Kreisbogen ik mit dem Halbmesser 10 beschreibt und darauf die Sehne $ik = 5$ Einheiten abträgt. Beschreibt man nun mit der Strecke $a_1 \cdot 2$ (Fig. 27) den Kreisbogen lm (Fig. 30), so ist $lm = \frac{1}{10} a_1 \cdot 2 = o_0 \cdot 2$

(Fig. 28) gleich der axonometrischen y -Koordinate der Punkte 2 und 5 bzw. 1 und 6.

23. Aufgabe 11. Der in Figur 31 durch Grund- und Aufriß dargestellte Körper ist trimetrisch 9:5:10 in Übersicht zu zeichnen.

Auflösung: Das Achsenkreuz ist so gewählt, wie die Figur 31 zeigt; ihm entspricht das axonometrische Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0 (Fig. 32), dessen Konstruktion nach Nr. 20 erfolgt. In der Figur 32 ist die Konstruktion mehrerer Punkte angedeutet, z. B. 2 und 5. $o_0 a_0$ Figur 32 = $\frac{9}{10} o_1 a_1$ Figur 31, $a_0 \cdot 2 = a_0 \cdot 5$ Figur 32 = $\frac{5}{10} a_1 \cdot 2$ Figur 31 oder Punkt 29 und 32 $o_0 o'_0$ Figur 32 = $o_2 o'_2$ Figur 31 $o'_0 b_0$ Figur 32, = $\frac{9}{10} o_1 b_1$, Figur 31, $b_0 \cdot 29 = b_0 \cdot 32$ Figur 32 = $\frac{5}{10} b_1 \cdot 29$ Figur 31.

Anmerkung 6: Die Verkürzung der x - und y -Koordinaten kann in gleicher Weise wie in der vorigen Aufgabe mittels der Hilfswinkel φ und ψ (siehe Fig. 33 und 34) vorgenommen werden.

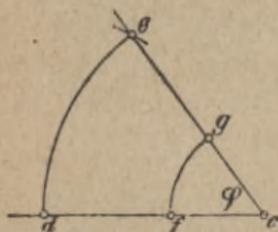


Fig. 33.

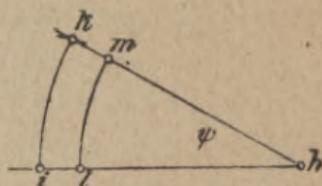


Fig. 34.

24. Aufgabe 12. Eine in der XY -Ebene liegende Kreislinie K ist trimetrisch 9:5:10 zu zeichnen.

Auflösung: Mittels Koordinaten erledigt sich die Aufgabe wie bisher, indem man auf X_0 (siehe Fig. 35) die aus Figur 10 zu entnehmenden x -Koordinaten um $\frac{1}{10}$ verkürzt abträgt, auf Y_0 aber die halben y -Koordinaten.

Die Hauptachsen des elliptischen Bildes sind der Lage nach von vornherein gegeben; die große Achse steht senkrecht zu Z_0 , die kleine fällt mit Z_0 zusammen; ihre Längen ergeben sich zu $o_0 e = o_0 d = ob$; $o_0 f = o_0 g = oc$; hierbei ist $o_0 a$ senkrecht zu X_0 und gleich $o_0 s$.

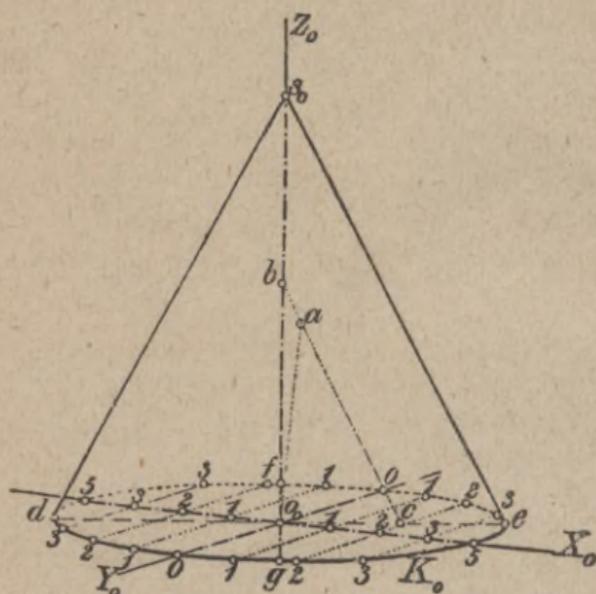


Fig. 35.

25. Aufgabe 13. Ein senkrechter Kreis-kegel, dessen Grundkreis in der XY -Ebene liegt, ist trimetrisch 9:5:10 darzustellen.

Auflösung: Nimmt man K_0 (Fig. 35) als axonometrisches Bild des Grundkreises des darzustellenden Kegels, so braucht man nur von o_0 aus auf Z_0 die gegebene Kegelhöhe unverkürzt nach $o_0 s_0$ abzutragen und von s_0 aus Tangenten an K_0 zu ziehen, so ist damit das axonometrische Bild des Kegels gezeichnet.

II. Schiefwinklige Axonometrie.

Wahl des Achsenkreuzes, Projektions- Arten, Aufgaben.

26. Wählt man das axonometrische Bild eines rechtwinkligen Achsenkreuzes ganz beliebig, außerdem aber auch noch die Verhältniszahlen, so läßt sich in gleicher Weise, wie im vorausgegangenen gezeigt wurde, ein axonometrisches Bild eines Körpers herstellen und eine Bildebene festlegen, auf welche der Körper sich in Gestalt des eben genannten Bildes projiziert. Die Projektionsrichtung steht jedoch jetzt nicht mehr senkrecht zur Bildebene, sondern bildet mit letzterer einen von 90° verschiedenen Winkel, und es ist nicht schwierig, aus dem beliebig gewählten Achsenkreuze und den willkürlich angenommenen Verhältniszahlen die Lage der Bildebene und die Projektionsrichtung geometrisch zu bestimmen*).

Das axonometrische Bild, das auf Grund eines beliebig gewählten axonometrischen Achsenkreuzes und beliebiger Verhältniszahlen gezeichnet wird, heißt ein schiefwinkliges axonometrisches Bild des Körpers, und das Verfahren hierbei die schiefwinklige Axonometrie.

Letztere bietet die größte Freiheit in der Herstellung eines axonometrischen Bildes, indem man sowohl die Winkel des axonometrischen Achsenkreuzes als auch die zugehörigen Verhältniszahlen beliebig wählen kann. Als für die zeichnerische Praxis wichtigste Projektionsart erscheint die isometrische Projektion, bei

*) Siehe Vonderlinn, Lehrbuch des Projektionszeichnens, III. Teil, 2. Hälfte, S. 199.

welcher die Verhältniszahlen einander gleich und gleich 1 sind, für welche also die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes zugleich als axonometrische Koordinaten zu verwenden sind. Zur Herstellung eines isometrischen Bildes eines Körpers in schiefwinkliger Axonometrie wählt man also das Achsenkreuz ganz beliebig und trägt für jeden Punkt des Körpers die zugehörigen rechtwinkligen Koordinaten als axonometrische Koordinaten auf.

So zeigt z. B. Figur 36 das isometrische Bild eines Würfels von der Kantenlänge l in Untersicht, Figur 37 in Obersicht.

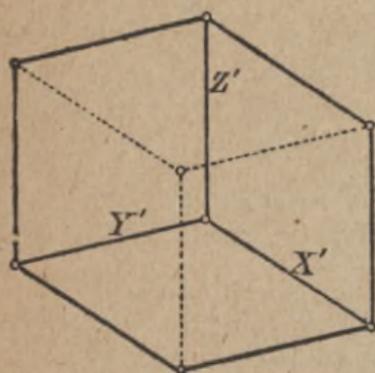


Fig. 36.

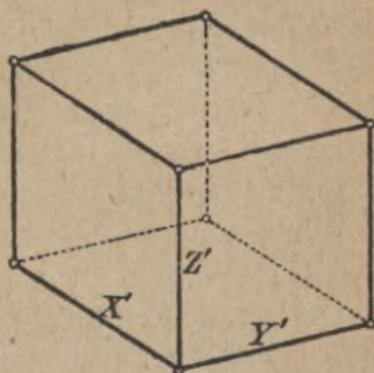


Fig. 37.

27. Wählt man insbesondere einen der Achsenwinkel $= 90^\circ$, z. B. den Winkel von X' und Z' , so erhält man in Figur 38 und 39 ebenfalls eine isometrische Projektion des Würfels. Diese Projektionsart wird vielfach zur Darstellung von Gegenständen aus dem Gebiete der Bautechnik, z. B. für Mauerverbände, für die Zeichnung einzelner besonderer Steine eines Bauwerkes für Holzverbindungen usw., verwendet; sie hat den Vorteil, daß für jene Achsenebene, für welche der Achsenwinkel 90° beträgt, die darin liegenden Gebilde in wahrer Gestalt erscheinen.

Dabei kann der Winkel der Y' -Achse beliebig groß gewählt werden. Aus praktischen Gründen, um die Zeichendreiecke bequem benützen zu können, wählt

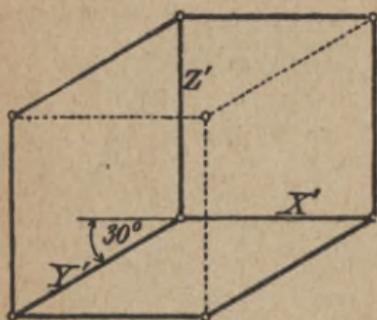


Fig. 38.

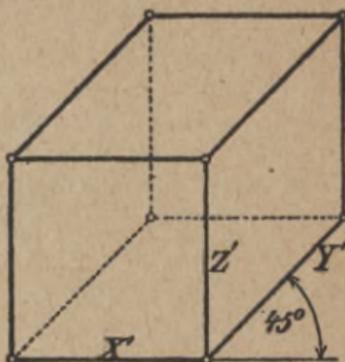


Fig. 39.

man diesen Winkel vielfach gleich 45° (siehe Fig. 39) oder auch gleich 30° (siehe Fig. 38) und bezeichnet erstere Projektionsart als eine Kavalierperspektive, letztere aber als eine schiefe Parallelprojektion.

Zur Erzielung besserer Bilder verkürzt man die y -Koordinaten um die Hälfte, zeichnet also eine schief-

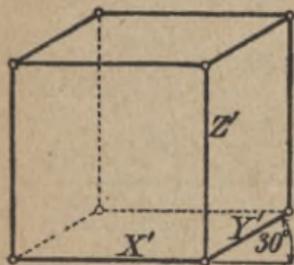


Fig. 40.

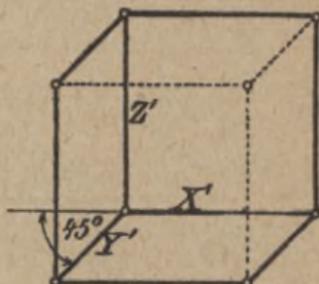


Fig. 41.

winklige dimetrische Projektion; die Figuren 40 und 41 zeigen je eine schiefwinklige dimetrische Würfeldarstellung, wobei die Darstellung in Figur 40 speziell als schiefe Projektion kurzweg bezeichnet wird.

Fig. 42.

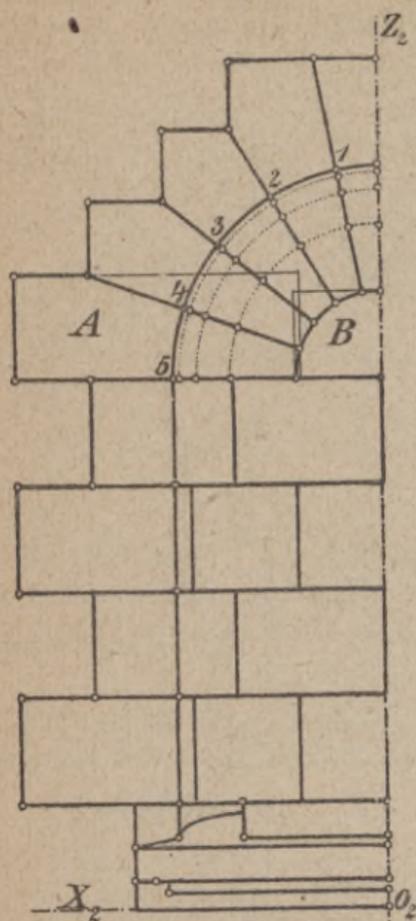


Fig. 44.

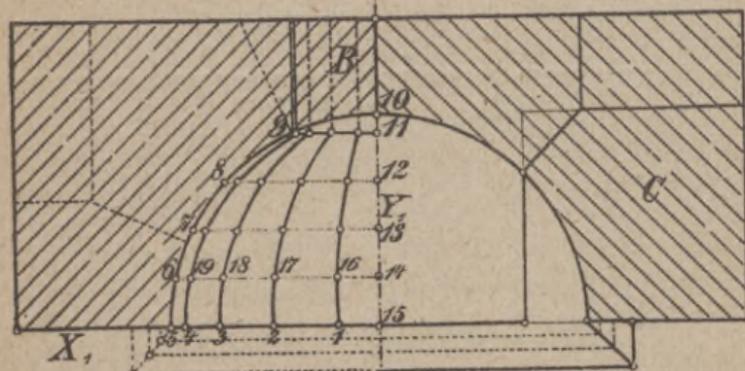
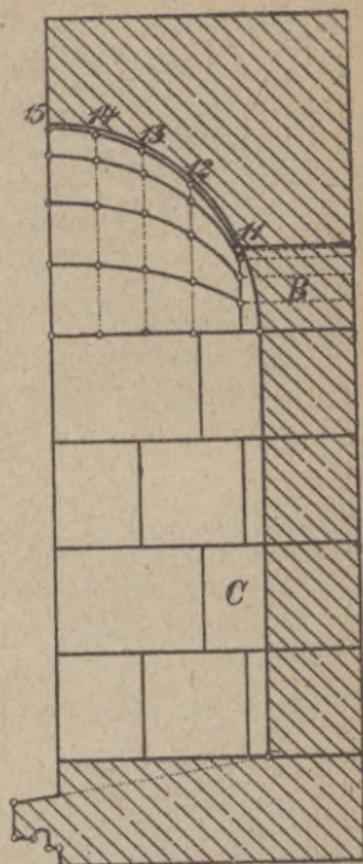


Fig. 43.

28. Aufgabe 14. Die in den Figuren 42 bis 44 dargestellte Mauernische soll in all-

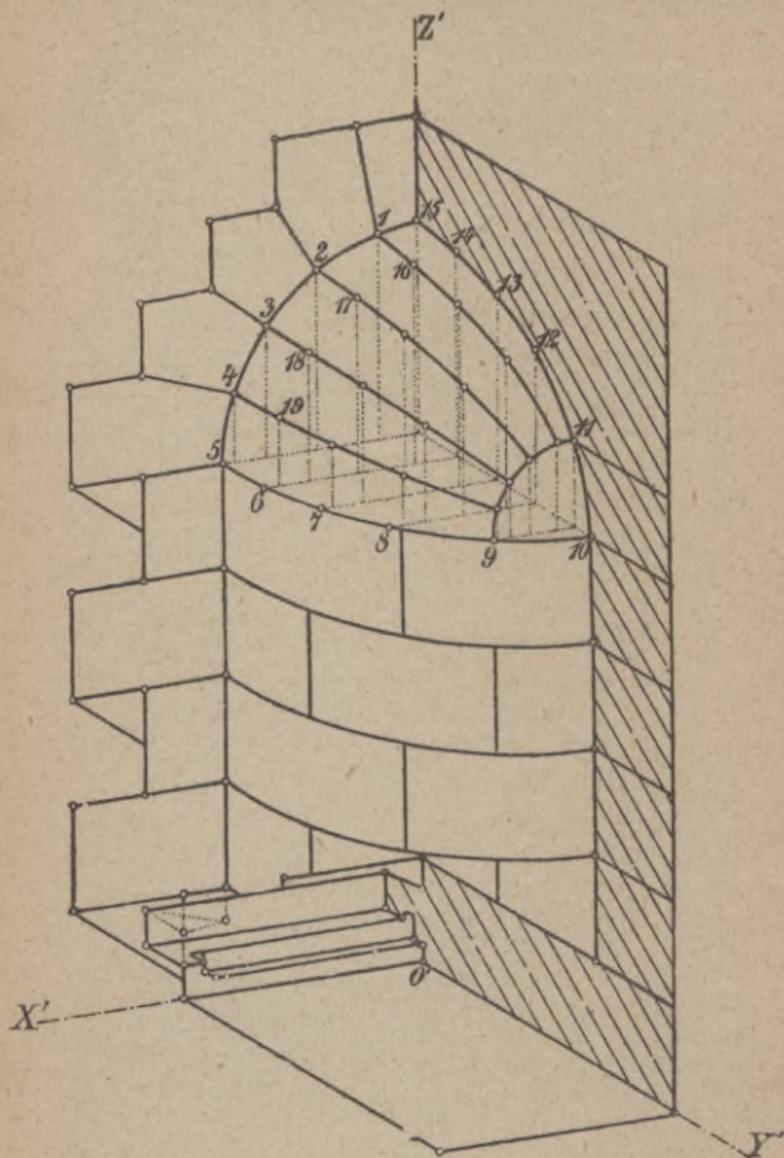


Fig. 45.

gemeiner schiefer isometrischer Projektion gezeichnet werden.

Auflösung: Wählt man das Achsenkreuz so, wie die Figuren 42 u. 43 zeigen, und läßt diesem axonometrisch das ganz beliebig angenommene Achsenkreuz X', Y', Z' (siehe Fig. 45) entsprechen, wobei nur Z' vertikal, d. h. parallel zum rechten oder linken Papierrand gewählt ist, so braucht man nur für jeden einzelnen Punkt des

Fig. 46.

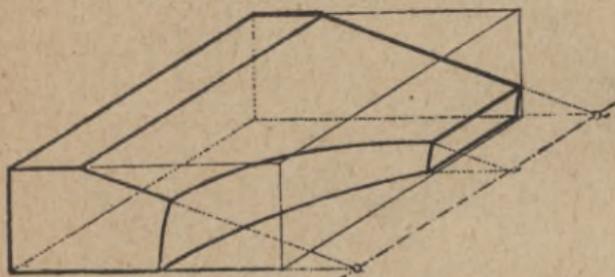
Stein A.*Stein B.*

Fig. 47.

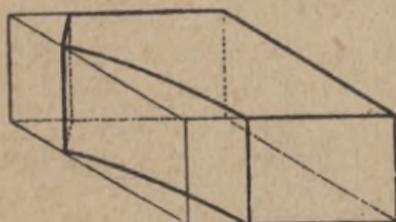
Stein C.

Fig. 48.

Körpers die zugehörigen Koordinaten x, y und z zu ermitteln und diese als axonometrische Koordinaten parallel zu X', Y', Z' anzutragen. In der Figur 45 ist für eine Anzahl Punkte, 1—19, die Konstruktion ersichtlich gemacht. In den Figuren 46, 47 und 48 sind die Steine A, B, C besonders herausgetragen.

29. Die Figur 49 zeigt eine Mauerecke im Blockverbande, hergestellt in schiefer isometrischer Projektion,

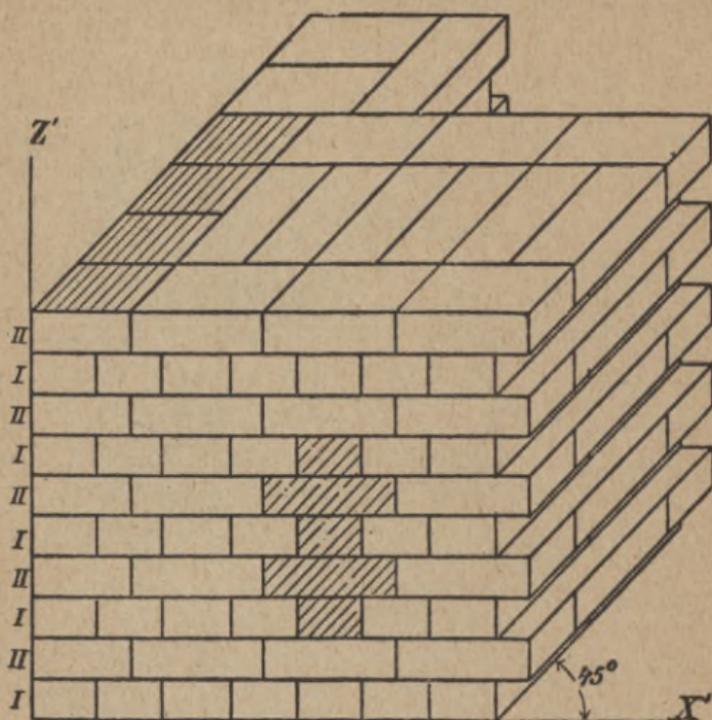


Fig. 49.

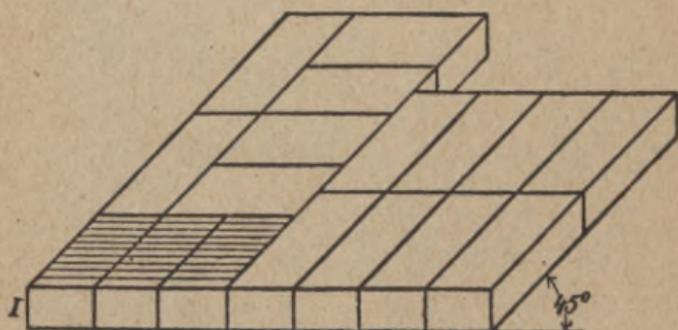


Fig. 50.

speziell in Kavalierperspektive; in Figur 50 ist die Schichte I besonders herausgezeichnet. Figur 52

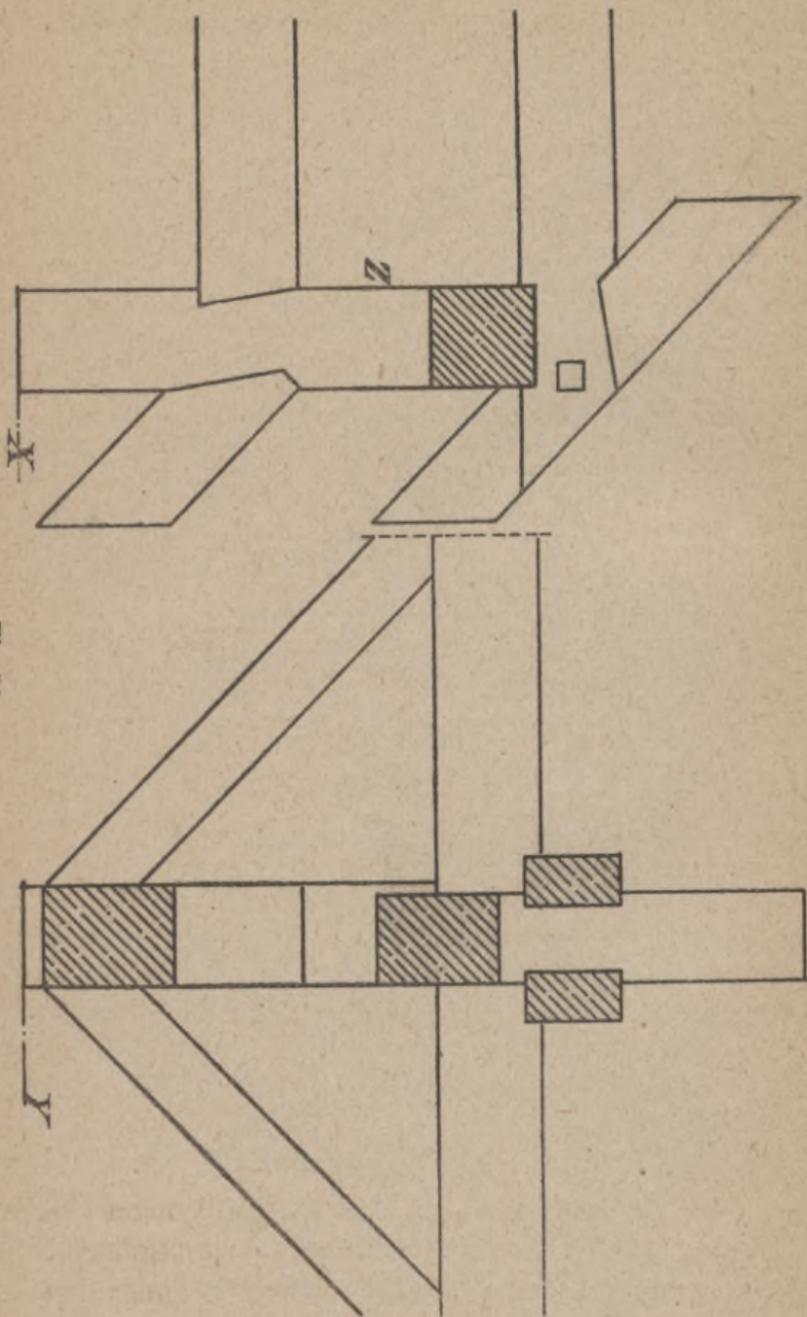
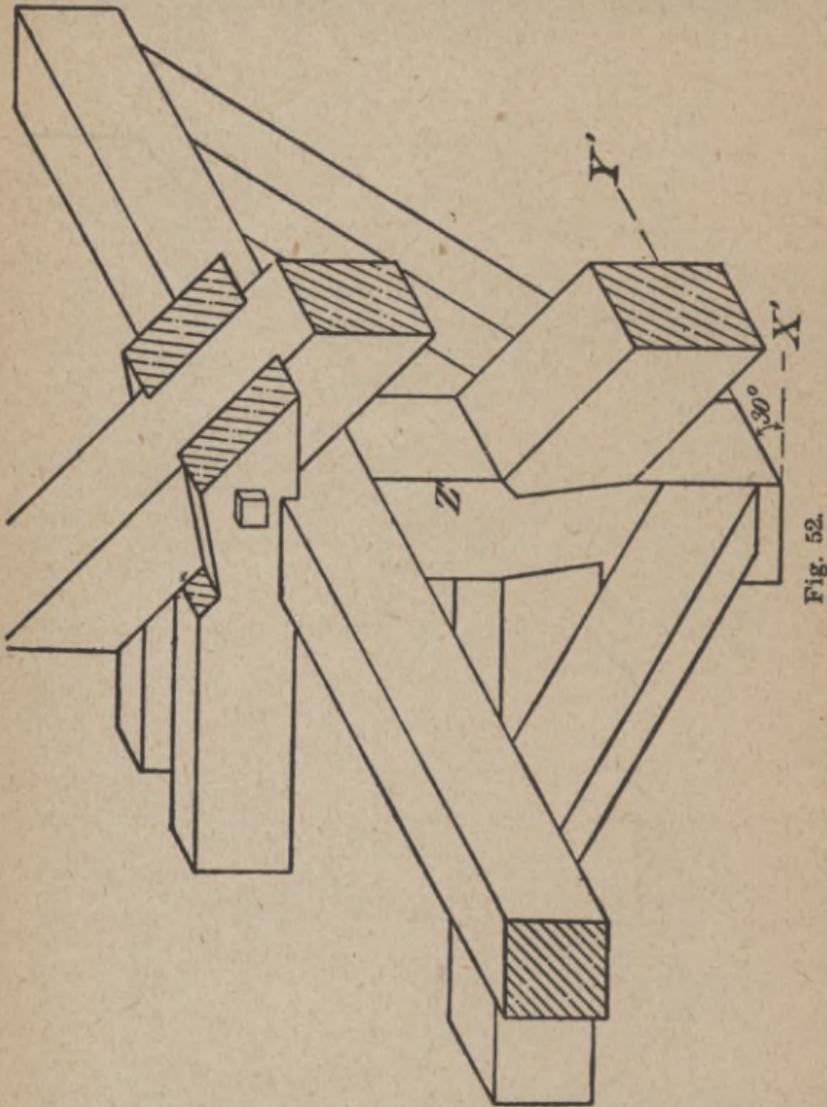


Fig. 51.

N.B. In der Figur 51 Anriß ist das Kopfband absichtlich nicht eingezeichnet. Der Leser ergänze diese Figur.

stellt die in Figur 51 im Aufriß und Seitenriß dargestellte Holzverbindung in schiefer Parallelprojektion dar.



In Figur 53 ist ein spitzbogenförmiges Kreuzgewölbe schief isometrisch gezeichnet, der hierzu gehörige isometrische Grundriß mit den auf

den Zylindern gezogen gedachten Mantellinien ist in Figur 54 besonders gezeichnet. Dieser Grundriß ist so zu verschieben, daß sein Mittelpunkt in den Punkt o'

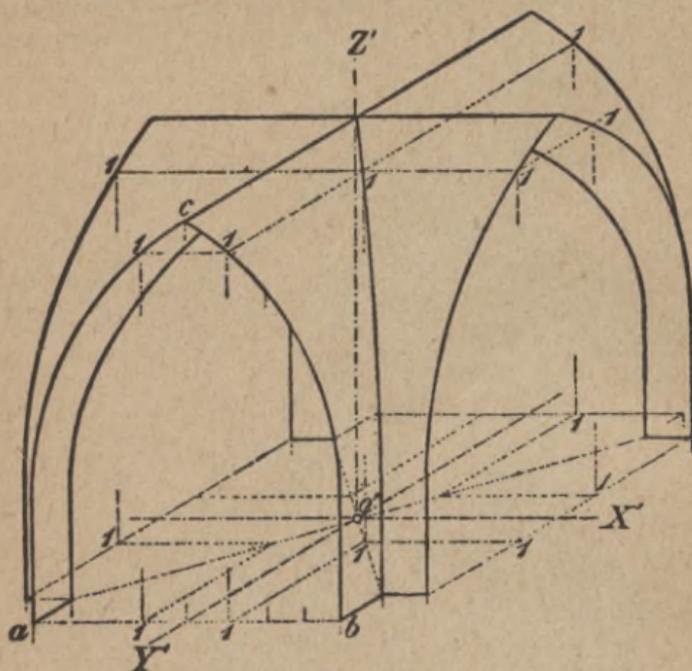


Fig. 53.

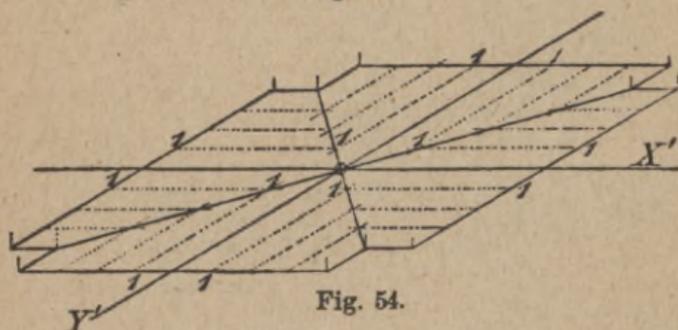


Fig. 54.

fällt, dann braucht man nur in den Grundrißpunkten die aus abc zu entnehmenden x -Koordinaten aufzutragen; für die Punkte 1 ist dies in den Figuren 53 und 54 ausgeführt.

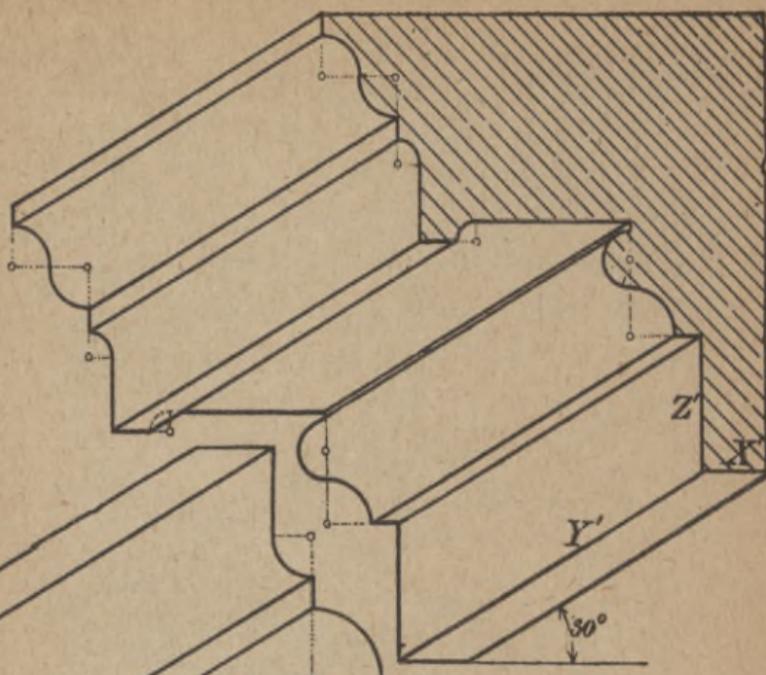


Fig 55.

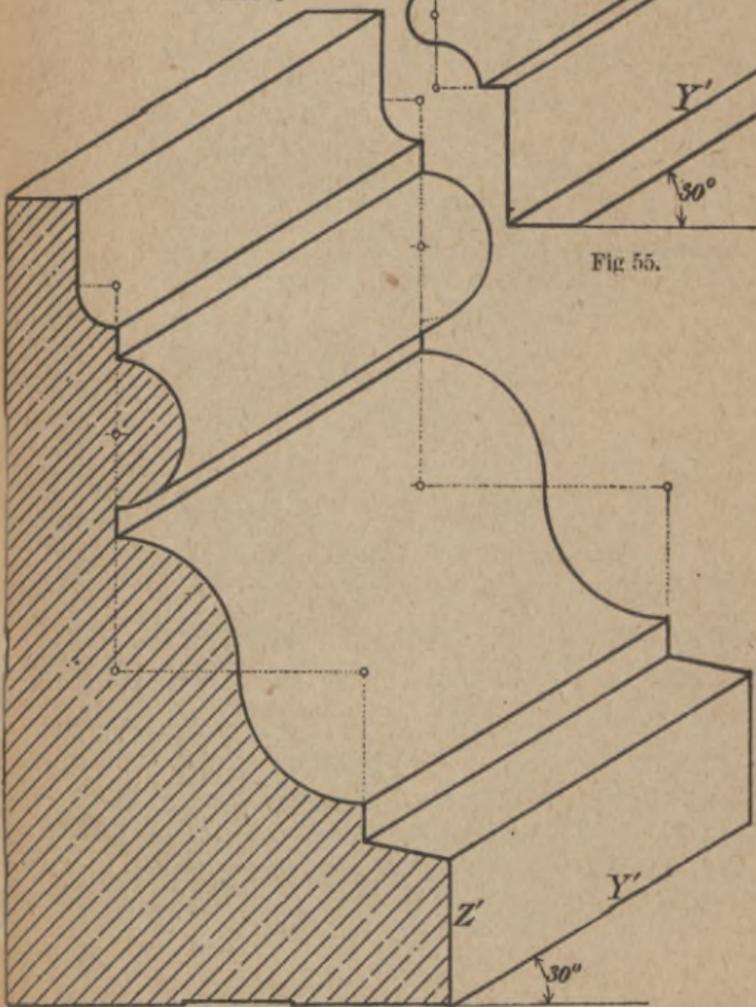


Fig. 56.

X'

gehen; ihre Längen sind $o'd = o'e = ob$ und $o'f = o'g = oc$.

31. Aufgabe 16. Eine Kugel ist in allgemeiner schiefer isometrischer Projektion darzustellen.

Auflösung: Ist X', Y', Z' das Bild des Achsenkreuzes, so bleibt die Konstruktion im wesentlichen die gleiche wie in Aufgabe 5; nur wird jetzt der isometrische Umriß kein Kreis, sondern eine Ellipse K' sein. Um

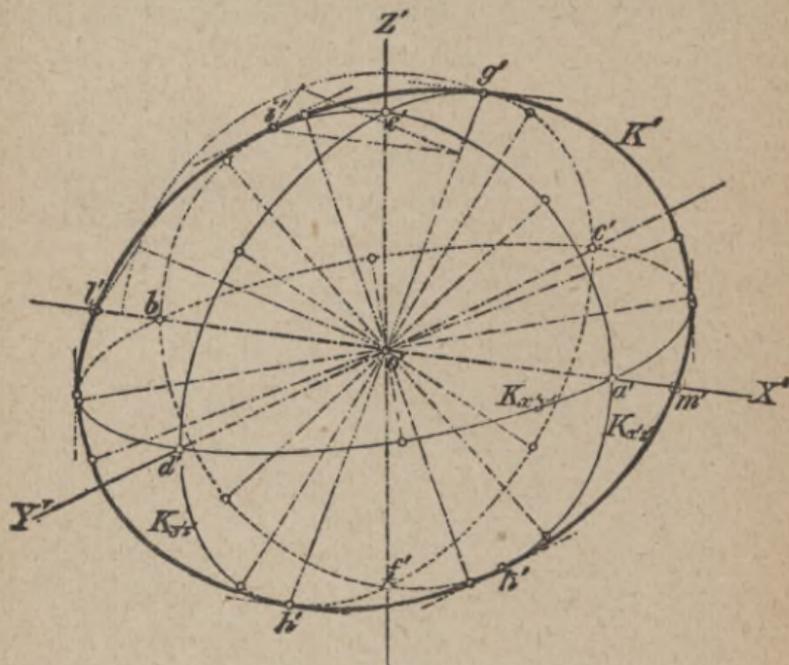


Fig. 59.

diese zu erhalten, zeichnet man die isometrischen Bilder $K_{x'y'}$, $K_{y'z'}$ und $K_{x'z'}$ der in den Achsenebenen liegenden Kugelkreise (siehe Fig. 59) und hierauf eine diese Ellipsen umhüllende d. h. berührende Ellipse K' . Zu diesem Zweck zieht man parallel zu X' an $K_{y'z'}$ Tan-

genten, die in g' und h' berühren, ebenso an $K_{x'z'}$ Tangenten parallel Y' , die in i' und k' berühren. Nunmehr kennt man von der Umrißellipse K' einen Durchmesser $g'h'$, die Richtung des konjugierten sowie zwei weitere Punkte i' und k' , woraus sich zunächst die Länge $l'm'$ des zu gh konjugierten Durchmessers und hieraus die Lage und Größe der Hauptachsen der Ellipse K' ergeben.

32. Aufgabe 17. Eine Kugel ist in schiefer Parallelprojektion darzustellen.

Auflösung: Bei dieser Projektion ist der Winkel der Achsenbilder X' und Z' gleich 90° (siehe Fig. 60).

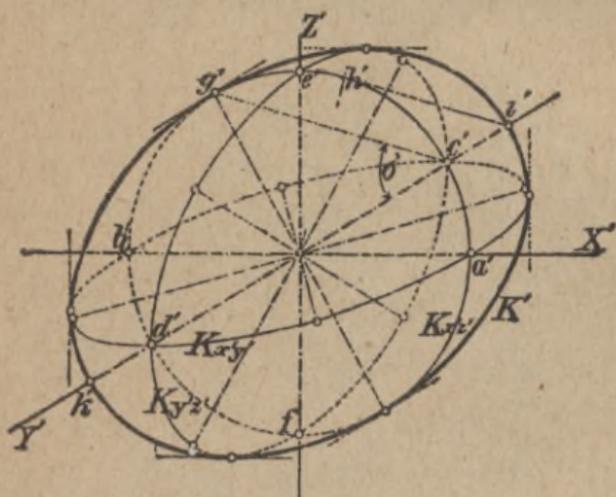
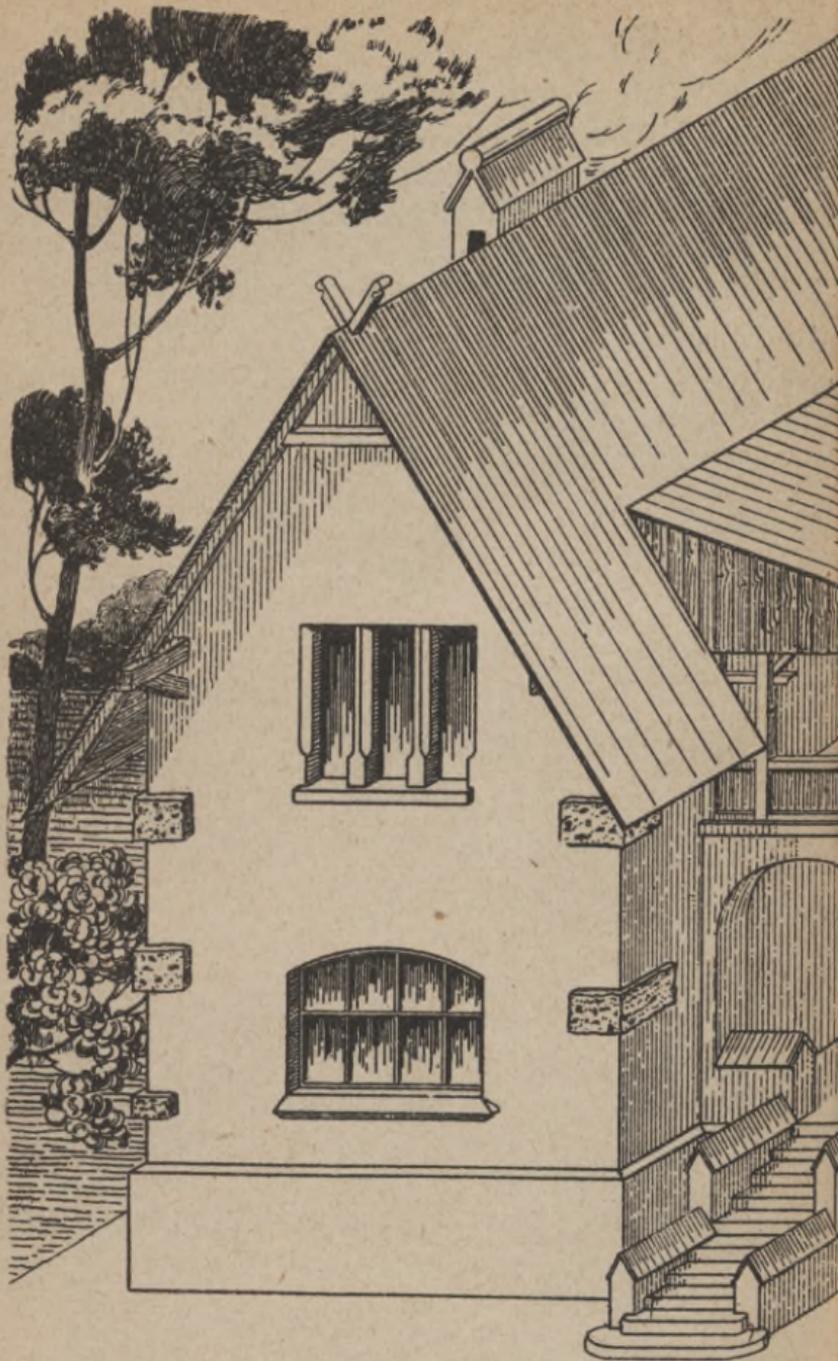
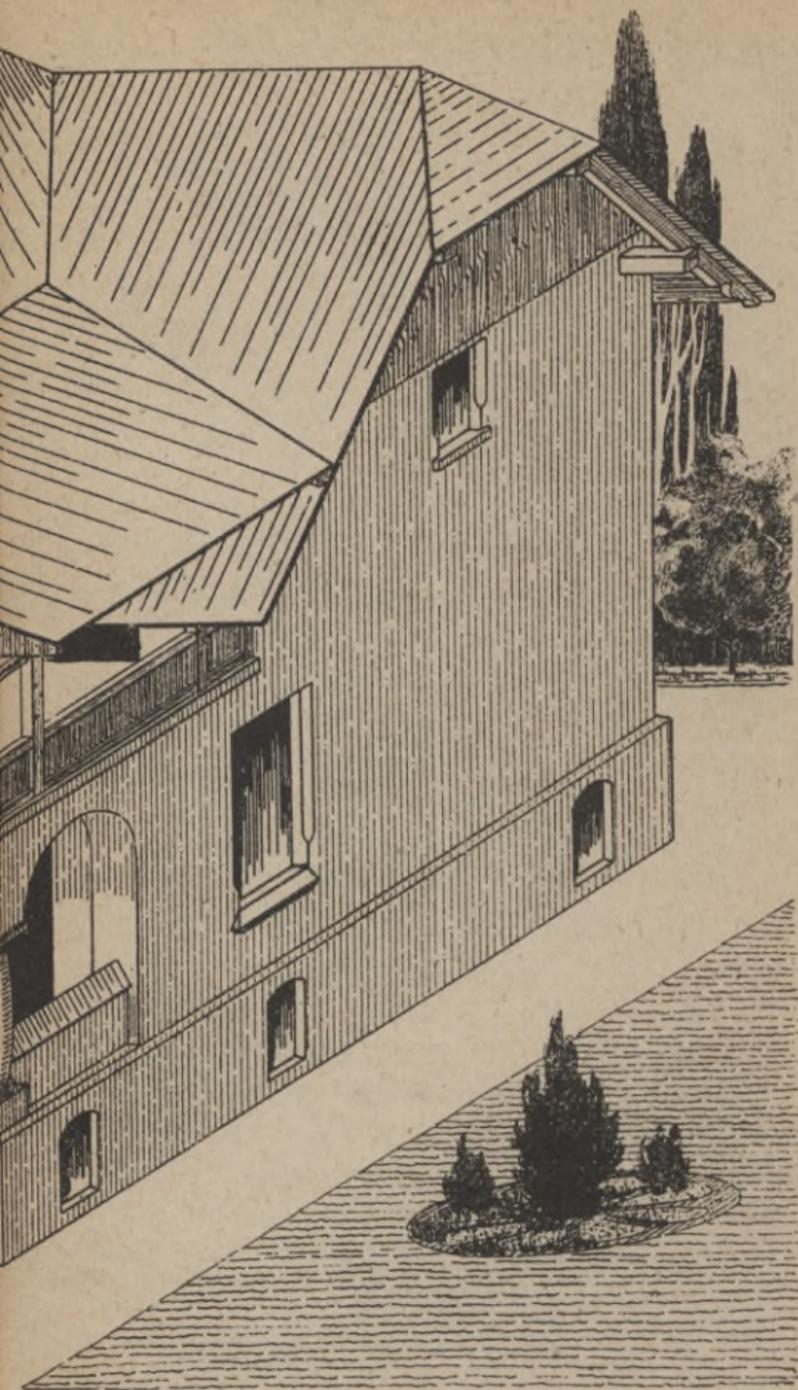


Fig. 60.

Die Bildebene ist demnach die Ebene von X' und Z' bzw. eine Parallelebene hierzu. Der in der XZ -Ebene liegende Kugelkreis bildet sich als Kreis $K_{x'z'}$ ab, mit einem Halbmesser gleich dem der Kugel. Die Ellipsen $K_{x'y'}$ und $K_{y'z'}$ ergeben sich wie in der vorigen Aufgabe. Das Bild des Kugelumrisses ist wieder eine Ellipse K' , von der man aber die Lage der Hauptachsen sofort

kennt. Die große Achse fällt nämlich mit dem Bilde von Y' zusammen, die kleine steht senkrecht hierzu und ist der Länge nach gleich dem Kugeldurchmesser. Verbindet man den Endpunkt g' der kleinen Achse mit dem auf Y' liegenden Punkte c' , so kann $c'g'$ als der in die Bildebene umgelegte durch den Raumpunkt c gezogene Projektionsstrahl angesehen werden. Eine zu $g'c'$ parallele Tangente an $K_{x'z'}$ berührt in h' und schneidet Y' in dem einen Endpunkt i' der großen Achse von K' .





III. Direkte Konstruktionen der Axonometrie.

Allgemeines.

33. Die Herstellung eines axonometrischen Bildes eines durch rechtwinkligen Grund- und Aufriß gegebenen Körpers sowohl in rechtwinkliger wie auch in schiefwinkliger Axonometrie mittels der Koordinaten einzelner Punkte des Körpers ist nur ein Teil der Aufgabe der Axonometrie. Eine weitere Aufgabe der letzteren besteht darin, alle die Aufgaben der darstellenden Geometrie direkt in axonometrischer Projektion ohne Zuhilfenahme eines rechtwinkligen Grund- und Aufrisses zu lösen, lediglich unter Voraussetzung eines gegebenen Achsenkreuzes bei der rechtwinkligen, eventuell auch Festlegung der Bildebene und Projektionsrichtung bei der schiefwinkligen Axonometrie.

Im folgenden sollen nur einige Aufgaben dieser Art gelöst werden. Sie lassen sich so in zwei Gruppen teilen, daß in der einen Gruppe nur Aufgaben auftreten, bei welchen es sich um die gegenseitige Lage der geometrischen Elemente zueinander handelt, während in der andern Gruppe Aufgaben enthalten sind, bei welchen man es mit Maßbeziehungen zu tun hat.

Die Aufgaben der ersten Gruppe sind von der Lage der Bildebene zu den in Frage kommenden Gebilden vollständig unabhängig und lassen demzufolge sowohl für die rechtwinklige wie für die schiefwinklige Axonometrie die gleiche Behandlung zu. Bei den Aufgaben der zweiten Gruppe ist zur Lösung der Aufgabe die Bildebene selbst erforderlich, und die Durchführung der

Lösung wird sich in rechtwinkliger axonometrischer Darstellung etwas bequemer und einfacher vollziehen, als das für die schiefwinklige Darstellung der Fall ist.

Aufgaben über Lagenbeziehungen.

Darstellung von Punkt, Gerade, Ebene, Körper in rechtwinkliger und schiefwinkliger Axonometrie.

34. Wie schon früher auseinandergesetzt wurde, bilden das axonometrische Bild eines Punktes im Raume

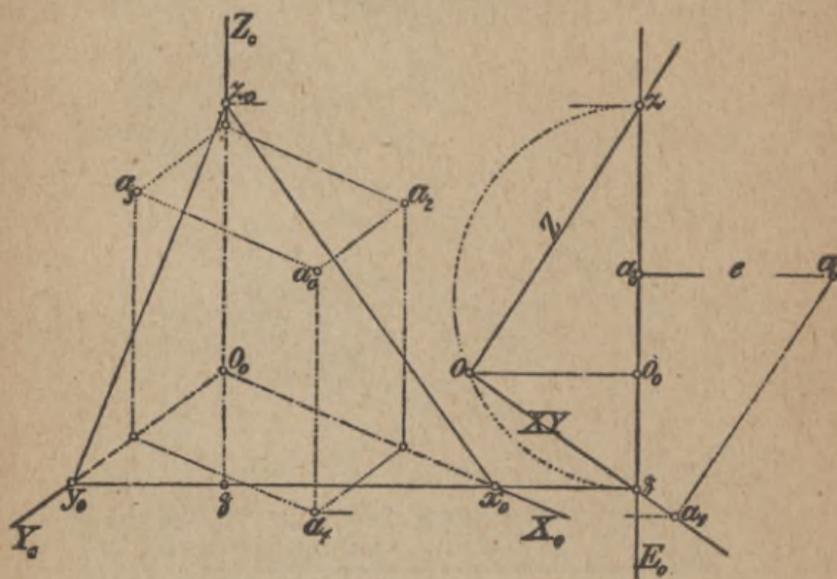


Fig. 61.

Fig. 62.

und der Koordinatenanfangspunkt die Endpunkte des Bildes einer Hauptdiagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedes, von welchem drei Kanten mit den Achsen X , Y und Z zusammenfallen und außerdem die Ecken a_1 , a_2 und a_3 in den Achsenebenen liegen (siehe Figur 61). Die letzteren Punkte kann man als

den axonometrischen Grund-, Auf- und Seitenriß oder mit dem gemeinsamen Namen Rißbilder des gegebenen Punktes bezeichnen. Es ist klar, daß die Lage eines Punktes im Raume vollständig bestimmt ist, wenn man von dem Punkte sein axonometrisches und ein Rißbild kennt, also z. B. a_0 und a_1 oder a_0 und a_2 oder a_0 und a_3 (siehe Figur 61). In gleicher Weise wird auch eine Gerade in ihrer Lage im Raume bestimmt durch ihr axonometrisches Bild und eines ihrer Rißbilder, z. B. A_0 und A_1 (siehe Figur 63).

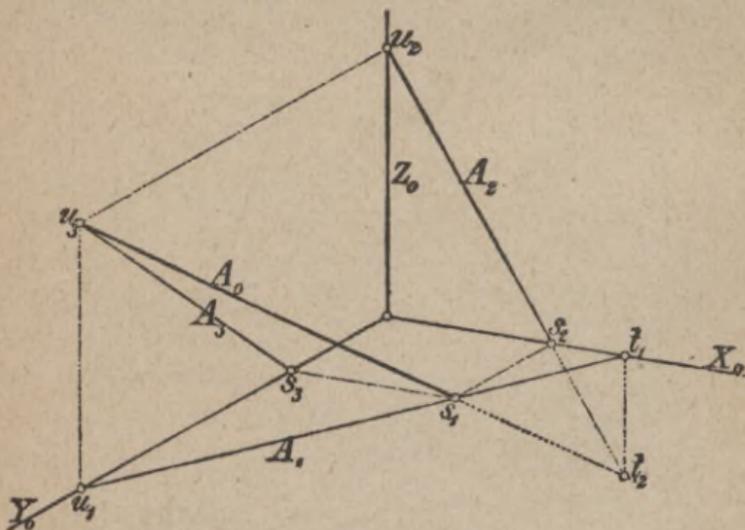
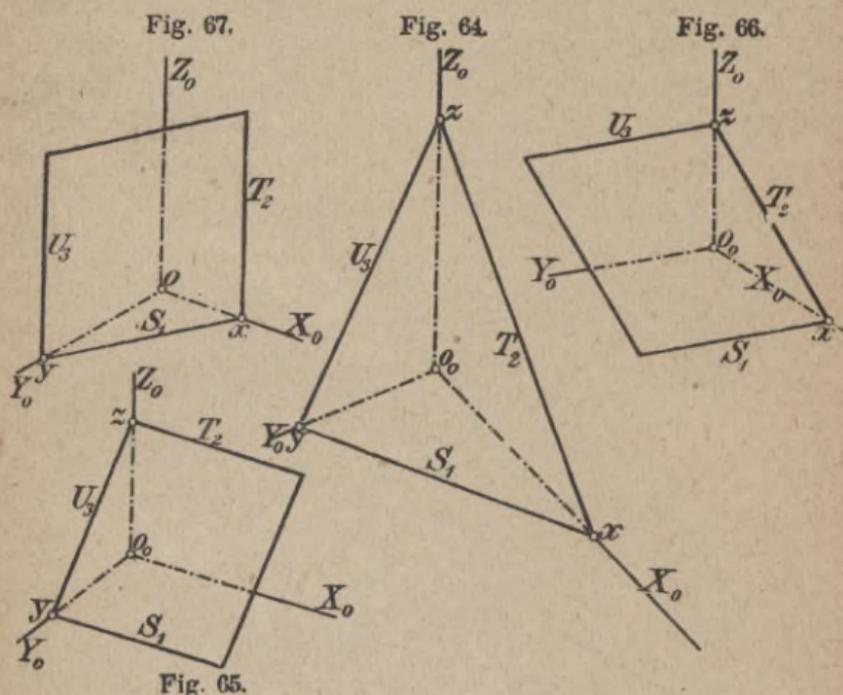


Fig. 63.

Eine Ebene wird zweckmäßig dargestellt durch ihre Schnittlinien mit den drei Achsenebenen, d. h. durch die Bilder ihrer Spuren, Spurbilder (siehe Figur 64). Selbstverständlich kann die Ebene auch durch andere Bestimmungsstücke dargestellt werden, z. B. durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte, durch zwei sich schneidende oder parallele Geraden usw. Hat die Ebene spezielle Lagen gegen die Achsenebenen, so werden

auch ihre Spurbilder besondere Lagen gegen die Achsenbilder einnehmen, z. B. die Ebenen in den Figuren 65 bis 67, welche bzw. parallel zu den Achsen X , Y und Z gerichtet sind.



Aufgaben der Gruppe I, welche in rechtwinkliger und schiefwinkliger axonometrischer Darstellung in gleicher Weise gelöst werden.

35. Aufgabe 18. Eine Gerade ist gegeben durch ihr axonometrisches Bild A_0 und ihr Reißbild A_1 . Gesucht die übrigen Reißbilder und die Spuren der Geraden.

Auflösung: Die Gerade A_1 (siehe Figur 63) schneidet die Y - und X -Achse in den Punkten u_1 und t_1 , denen auf A_0 die Punkte u_3 und t_2 entsprechen. Der

dem die Achsen Y_0 und Z_0 in y und z , wodurch auch das dritte Spurbild U_3 bestimmt ist.

37. Aufgabe 20. Eine Ebene ist durch ihre Spurbilder gegeben. In der Ebene ist a) eine beliebige Gerade zu zeichnen, b) ein beliebiger Punkt anzunehmen.

Auflösung a: Zeichnet man (siehe Figur 69) die Gerade A_0 ganz beliebig, so müssen ihre Schnittpunkte

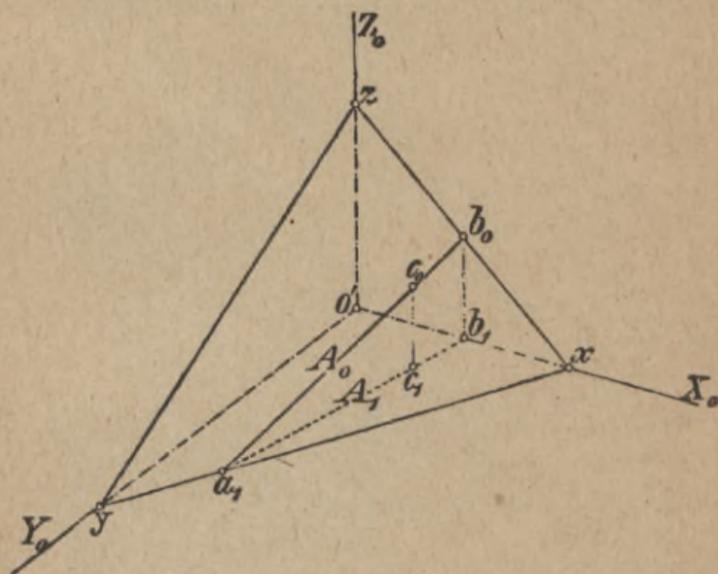


Fig. 69.

a_1 und b_0 mit den Seiten xy und xz des Spurendreiecks die Spurbilder mit den Achsenebenen XY und XZ darstellen. Das erste Rißbild b_1 von b liegt daher auf X_0 , während das erste Rißbild a_1 von a mit a_1 zusammenfällt. $a_1 b_1$ ist somit das erste Rißbild A_1 der Geraden A , welche in der Ebene xyz liegt.

Auflösung b: Um einen beliebigen Punkt der Ebene anzunehmen, wählt man, wie in Auflösung a gezeigt

wurde, eine Gerade A der Ebene beliebig und auf ihr einen Punkt c , es muß dann c_0 auf A_0 und c_1 auf A_1 liegen (siehe Figur 69).

38. Aufgabe 21. Gegeben die beiden Ebenen $S_1 T_2$ und $S'_1 T'_2$, gesucht ihre Schnittlinie.

Auflösung: Die gleichnamigen Spurbilder schneiden sich in Punkten a_1 und b_2 der gesuchten Schnittlinie (siehe Figur 70).

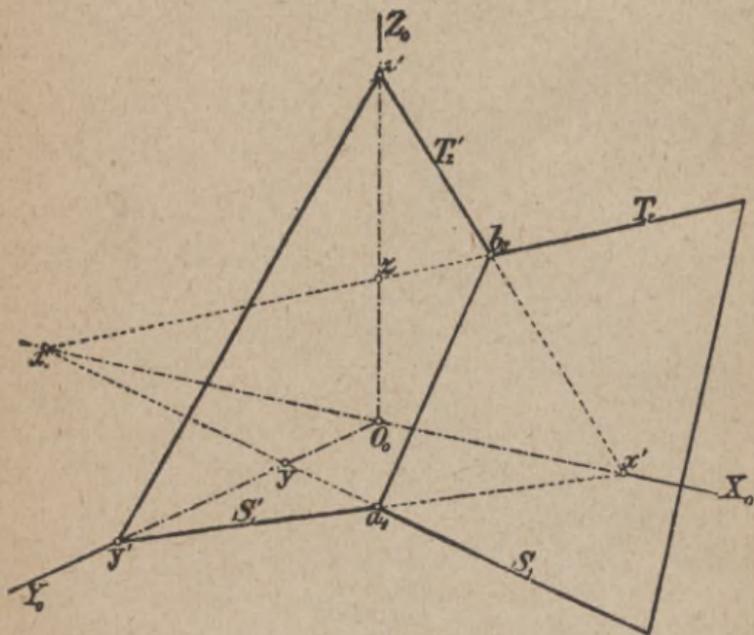


Fig. 70.

39. Aufgabe 22. Eine Ebene ist durch ihre Spurbilder gegeben, eine Gerade A durch ihr axonometrisches Bild A_0 und ihr Rißbild A_1 (siehe Fig. 71); gesucht der Schnittpunkt der Geraden A mit der Ebene.

Auflösung: Das Rißbild A_1 ist zugleich Spurbild einer zu Z_0 parallelen Ebene, deren Spurbild auf XZ

durch t_1 parallel zu Z_0 hindurchgeht und T_2 in t_2 schneidet. Die Verbindungslinie $s_1 t_2$ liefert auf A_0 das axonometrische Bild v_0 des Schnittpunktes v von A mit der Ebene ST .

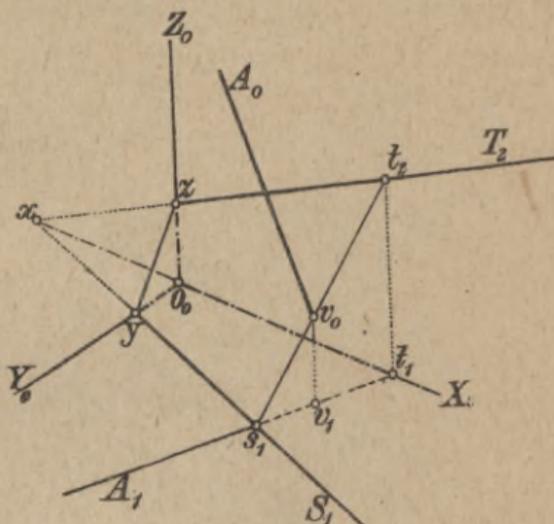


Fig. 71.

40. Aufgabe 23. Ein mit seiner Grundfläche in der XY -Ebene aufliegendes Prisma ist durch sein axonometrisches Bild (siehe Fig. 72) gegeben. Man soll den Schnitt dieses Prismas mit einer durch ihre Spurbilder S_1 und T_2 gegebenen Ebene konstruieren.

Auflösung: Die Aufgabe wird mittels Hilfsebenen gelöst, welche durch die Seitenkanten des Prismas etwa parallel zur Geraden T gelegt werden. Die Schnittlinien dieser Ebenen mit XY gehen durch die Ecken 1 bis 6 der Grundfläche des Prismas parallel zu X_0 und schneiden S_1 in Punkten, durch welche parallel zu T_2 die Schnittlinien der genannten Hilfsebenen mit der Ebene $S_1 T_2$ zu ziehen sind, die dann auf den axonometrischen Bildern

der Seitenkanten die gesuchten Schnittpunkte der letzteren Linien mit der Ebene ST ausschneiden.

Die Parallele durch 3 zu X_0 liefert auf S_1 den Punkt e_1 , die Parallele durch e_1 zu T_2 schneidet die Prismenkante durch 3 in 3_0 . Punkt 3_0 gehört der Schnittfigur an.

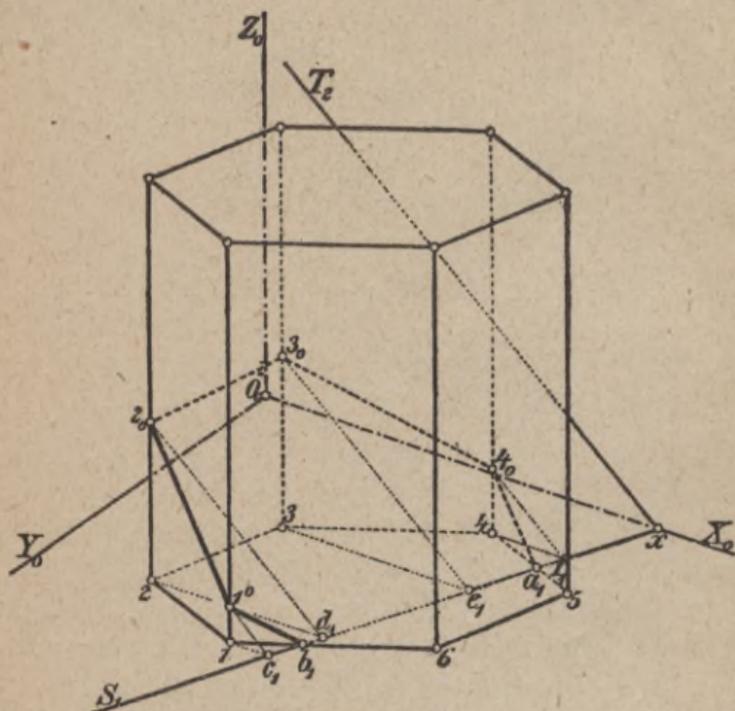


Fig. 72.

41. Aufgabe 24. Zwei senkrechte Kreis-
zylinder, von denen der eine senkrecht zur XY -
Ebene, der andere senkrecht zur XZ -Ebene ge-
richtet ist, sind axonometrisch darzustellen
unter der Annahme, daß die Zylinderachsen
sich schneiden. Außerdem ist die Durchdrin-
gungskurve beider Zylinder zu zeichnen.

Auflösung: In der Figur 73 ist die Darstellung in schiefer Projektion $1:1\frac{1}{2}:1$ gewählt. Die axonometrischen Grundrisse beider Zylinder sind in Figur 74 angegeben.

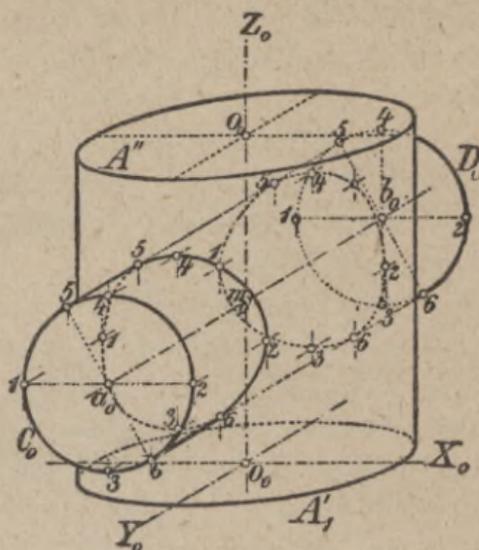


Fig. 73.

Hieraus ergeben sich die axonometrischen Bilder selbst, wenn man A_1 nach A'_1 und A'' verschiebt, durch den Mittelpunkt m_0 von o_0 o_0 die Parallele zu Y_0 zeichnet, darauf a_0 und b_0 als axonometrische Bilder der Endpunkte a

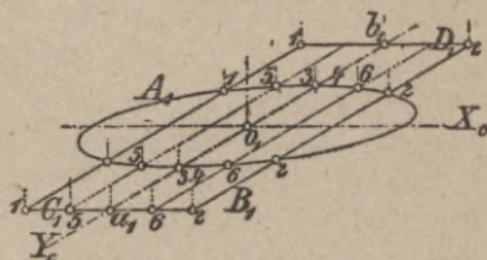


Fig. 74.

und b der Zylinderachse ermittelt und um a_0 und b_0 Kreise C_0 und D_0 mit einem Halbmesser gleich jenem des Zylinders B beschreibt. Die gemeinsamen Tangenten

an C_0 und D_0 vervollständigen das axonometrische Bild des Zylinders B . Nunmehr nimmt man eine Anzahl von Mantellinien auf dem Zylinder B an und sucht deren Schnittpunkte mit dem Zylinder A . Im axonometrischen Grundriß sind diese Schnittpunkte unmittelbar zu ersehen, woraus sich auch das axonometrische Bild selbst ergibt durch Hinaufprojizieren auf die axonometrischen Bilder der betreffenden Mantellinien. Die in den Figuren 73 u. 74 gewählte Bezeichnung läßt die Konstruktion deutlich erkennen.

Anmerkung 8: Man löse die Aufgabe 24 auch in anderer Darstellung, z. B. rechtwinklig isometrisch oder dimetrisch oder trimetrisch, und zeichne auch andere Durchdringungen, etwa zweier Prismen, zweier Kegel, zweier Pyramiden usw., in axonometrischer Darstellung.

Aufgaben über Maßbeziehungen.

Darstellung in rechtwinkliger Axonometrie.

42. Aufgabe 25. Es ist der Abstand eines Punktes a (siehe Fig. 61) von der Bildebene zu ermitteln.

Auflösung. Ist $x_0 y_0 z_0$ das Spurendreieck der Bildebene, so denkt man sich durch die Z -Achse eine Ebene senkrecht zur Bildebene gelegt und deren Schnitt mit der XY -Ebene ausgeführt und diesen Schnitt in die Bildebene nach Figur 62 umgelegt. In dieser Figur ist E_0 die Projektion der Bildebene, auf welcher die den Punkten x_0 und z_0 entsprechenden Punkte x und z liegen. Ein über xz beschriebener Halbkreis liefert auf der Parallelen durch o_0 (Fig. 61) zu $x_0 y_0$ den Punkt o und damit in $o z$ die Projektion der X - Y -Ebene. Sucht man nun auf $o z$ (Fig. 62) den dem Punkte a_1 (Fig. 61) ent-

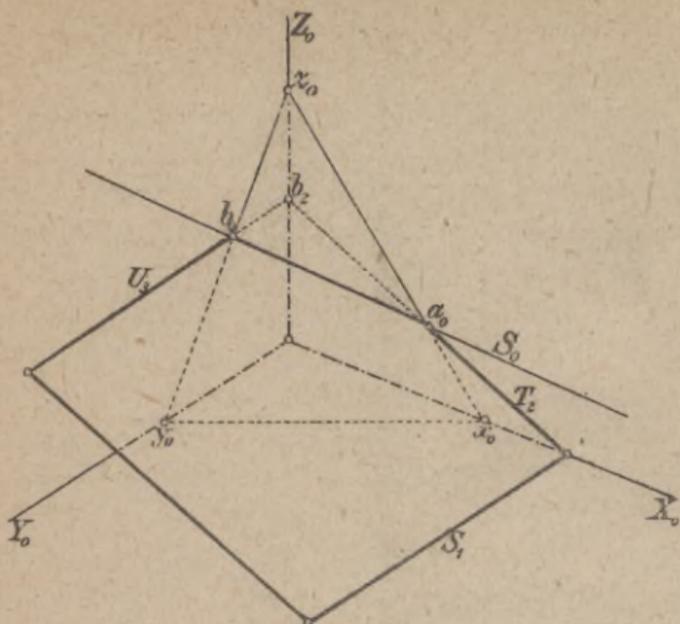


Fig. 76.

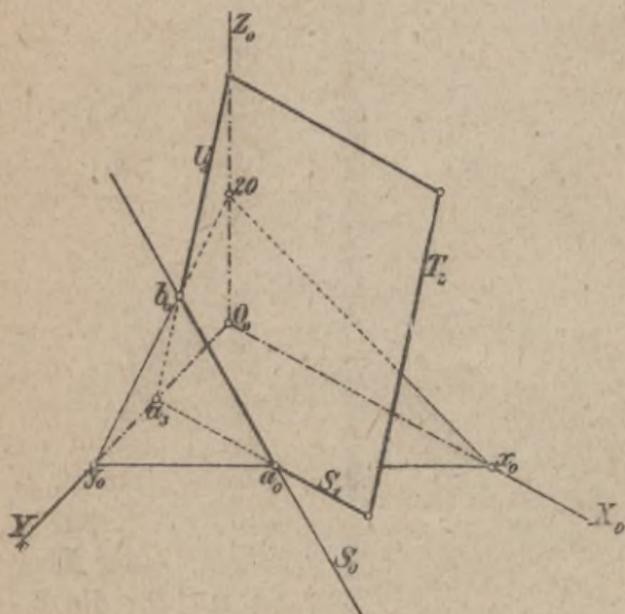


Fig. 77.

Weise kann man auch die Schnittlinie irgend einer Körperoberfläche mit der Bildebene als die Nullspur dieses Körpers bezeichnen.

44. Aufgabe 27. Es ist die Nullspur einer gegebenen Geraden zu ermitteln.

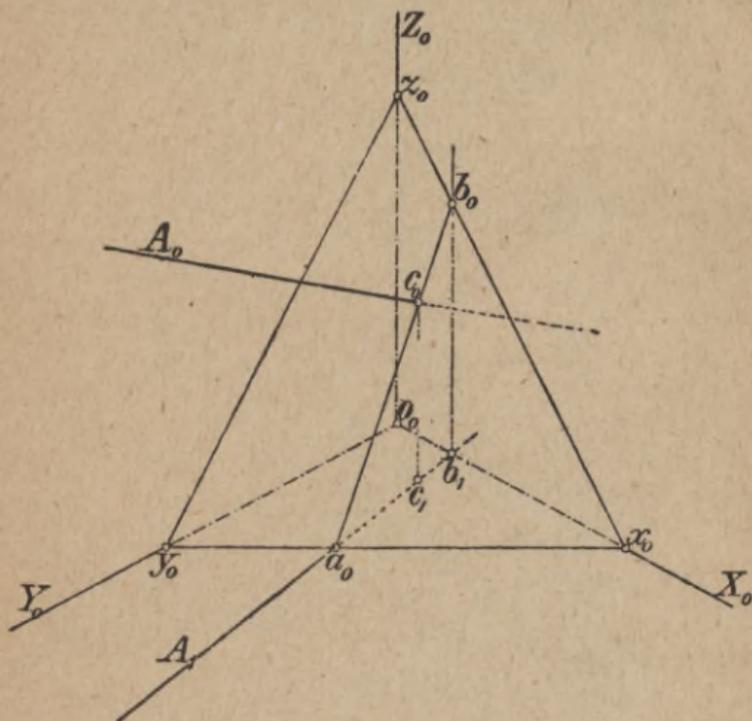


Fig. 79.

Auflösung: Ist $x_0 y_0 z_0$ (siehe Fig. 79) das Spurendreieck der Bildebene, so legt man durch A_1 eine Ebene senkrecht zur XY -Ebene und bestimmt nach Nr. 43 deren Nullspur $a_0 b_0$, welche letztere A_0 in c_0 , der Nullspur von A , durchschneidet.

45. Aufgabe 28. Es ist die wahre Länge einer Strecke pq und ihr Neigungswinkel mit der Bildebene zu ermitteln.

Auflösung: Man bestimmt (siehe Fig. 80 u. 81), wie in Aufgabe 27, den Schnitt einer durch die Z -Achse senkrecht zur Bildebene geführten Ebene mit letzterer und der XY -Ebene und ermittelt nach Nr. 42 die Abstände pp_0 und qq_0 der Punkte p und q von der Bildebene. Errichtet man nun über p_0q_0 Figur 80 das Trapez $p_0p'q'q_0$, wobei p_0p' Figur 80 = pp_0 Figur 81 und q_0q' Figur 80 = qq_0 Figur 81 ist, so stellt das Trapez $p_0p'q'q_0$ die Umlegung des räumlichen Trapezes p_0pqq_0 in die Bildebene dar, und folglich ist die Strecke $p'q'$ die wahre Länge von pq .

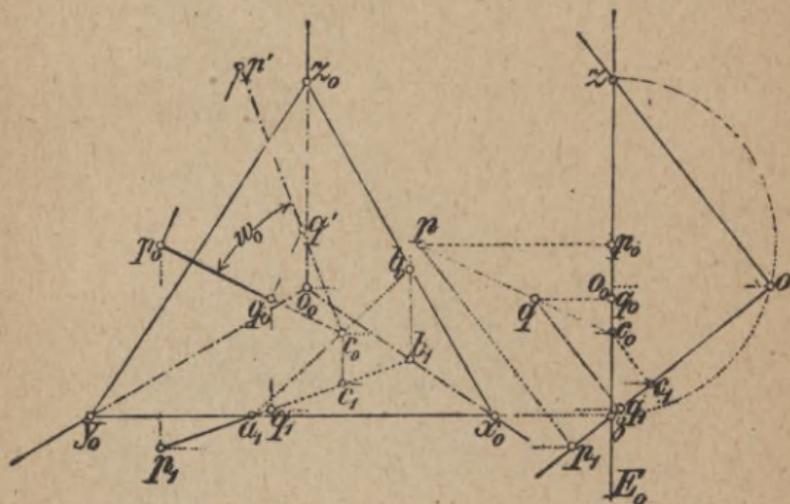


Fig. 80.

Fig. 81.

46. Aufgabe 29. Es ist der Neigungswinkel einer Geraden pq mit der Bildebene zu ermitteln.

Auflösung: Man verfährt in gleicher Weise wie in voriger Aufgabe und erhält in dem Winkel ω_0 (siehe Fig. 80), welchen die Seiten p_0q_0 und $p'q'$ des Trapezes $p_0p'q'q_0$ miteinander einschließen, den Winkel der Geraden pq mit der Bildebene in wahrer Größe.

Anmerkung-12: Die Linien A_1 und B_1 sind die axonometrischen Bilder zweier in Wirklichkeit aufeinander senkrecht stehenden Geraden A und B der XY -Ebene. Der Winkel von A_1 und B_1 ist also das axonometrische Bild eines rechten Winkels, und man sagt, die Geraden A_1 und B_1 stehen axonometrisch senkrecht aufeinander.

Liegt die Gerade in einer der beiden anderen Koordinatenebenen, wie z. B. die Gerade B der XZ -Ebene

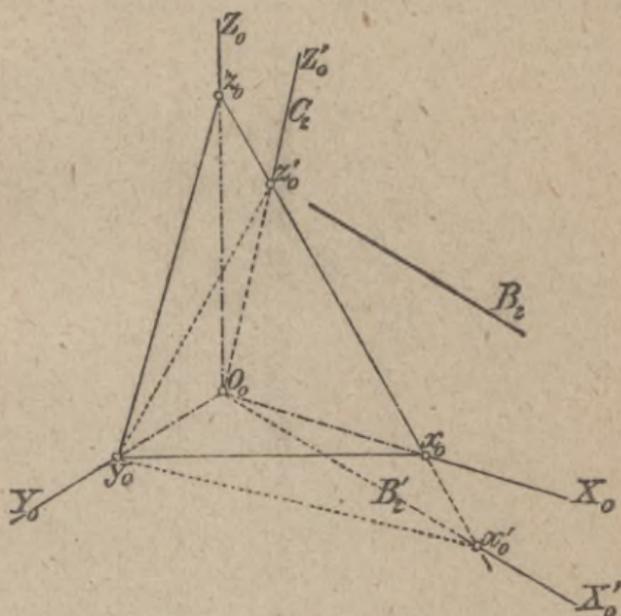


Fig. 83.

(siehe Fig. 83), so kann die oben gegebene Lösung sinngemäß auch hier Anwendung finden. Man zieht durch o_0 eine Parallele B'_2 zu B_2 und nimmt diese als neue Achse X'_0 für ein Achsenkreuz Y_0, X'_0, Z'_0 , dann steht Z'_0 oder C_2 senkrecht zur Seite $y_0 x'_0$ des zugehörigen Spurendreiecks. C_2 ist das axonometrische Bild einer Senkrechten zur Geraden B_2 .

Die in der Aufgabe 30 gegebene allgemeine Konstruktion einer axonometrischen Senkrechten zu einer in einer Koordinatenebene liegenden Geraden läßt sich noch vereinfachen: Ist nämlich (siehe Fig. 84) A_1 die gegebene Gerade der XY -Ebene, zu welcher eine

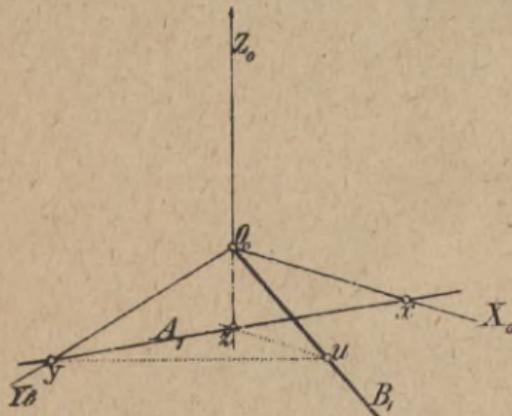


Fig. 84.

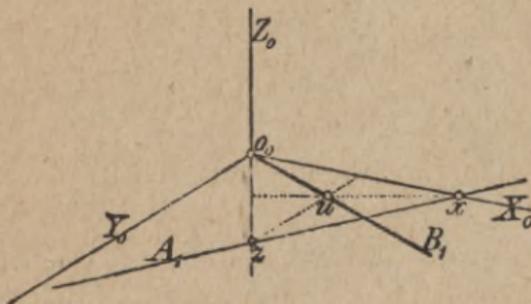


Fig. 85.

axonometrische Senkrechte gezeichnet werden soll, so braucht man nur zu bedenken, daß z. B. in dem Dreieck $o_0 y z$ die von y auf $o_0 z$ gefällte geometrische Senkrechte zugleich das axonometrische Bild dieser Senkrechten ist; zieht man außerdem durch z eine Parallele zu X_0 bis zum Schnittpunkt u mit der vorhin ge-

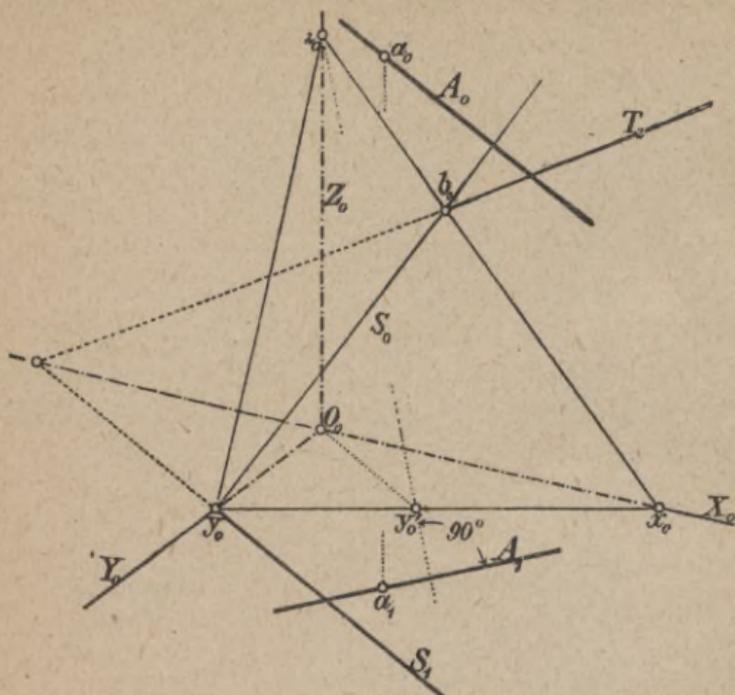


Fig. 87.

49. Aufgabe 32. Es ist der Neigungswinkel einer Ebene ST mit der Bildebene zu ermitteln.

Auflösung: Man konstruiert die Schnittlinie einer durch die Z -Achse senkrecht zur Bildebene geführten Ebene mit der Bildebene und der XY -Ebene und ermittelt den Abstand eines in der Ebene gewählten Punktes, z. B. p_0 von der Bildebene gleich der Strecke p_0p (Fig. 89). Fällt man nun von p_0 (Fig. 88) die Senkrechte p_0q_0 zur Nullspur der Ebene ST , macht p_0p' senkrecht p_0q_0 und gleich p_0p (Fig. 89), so ist in dem Dreieck p_0q_0p' bei q_0 der Winkel W_0 der Ebene ST mit der Bildebene in wahrer Größe enthalten.

50. Aufgabe 33. Es ist die wahre Gestalt einer ebenen Figur, z. B. des Dreiecks bcd (Fig. 90), zu ermitteln.

Auflösung: Man bestimmt sich wieder (siehe Fig. 91) den Schnitt der durch die Z -Achse senkrecht zur Bildebene geführten Ebene mit der Bild- und XY -Ebene, ferner die Nullspur $a_0 y_0$ der gegebenen Ebene und außerdem so, wie in Aufgabe 32 angegeben, den Winkel W_0 der Ebene abc mit der Bildebene. Wird nun die Ebene ST um ihre Nullspur $a_0 y_0$ in die Bildebene umgelegt, so kommt der Punkt p nach p'' , so daß $p_0 p''$ senkrecht zu $y_0 a_0$ und $q_0 p'' = q_0 p'$ ist. Die Verbindungslinien $p'' y_0$ und $p'' a_0$ liefern die Umlegungen S'' und T'' der Spurbilder S_1 und T_2 . Zieht man nun durch b_0, c_0 und d_0 Parallelen zu T_2 bis zum Schnitt e, f und g mit S_0 und hierdurch Parallelen zu T'' , so treffen die Senkrechten durch b_0, c_0, d_0 zu S_0 die zuletzt genannten Parallelen in den Punkten b'', c'', d'' , den Umlegungen der Punkte b, c, d . Somit ist $b'' c'' d''$ die wahre Gestalt des Dreiecks bcd .

Anmerkung 13: Das axonometrische Bild $b_0 c_0 d_0$ des Dreiecks bcd und die Umlegung $b'' c'' d''$ sind affine Figuren mit S_0 als Affinitätsachse und der Senkrechten zu S_0 als Affinitätsrichtung, folglich liegen auch die Schnittpunkte von $b_0 c_0$ und $b'' c''$, $c_0 d_0$ und $c'' d''$, endlich $d_0 b_0$ und $d'' b''$ auf S_0 .

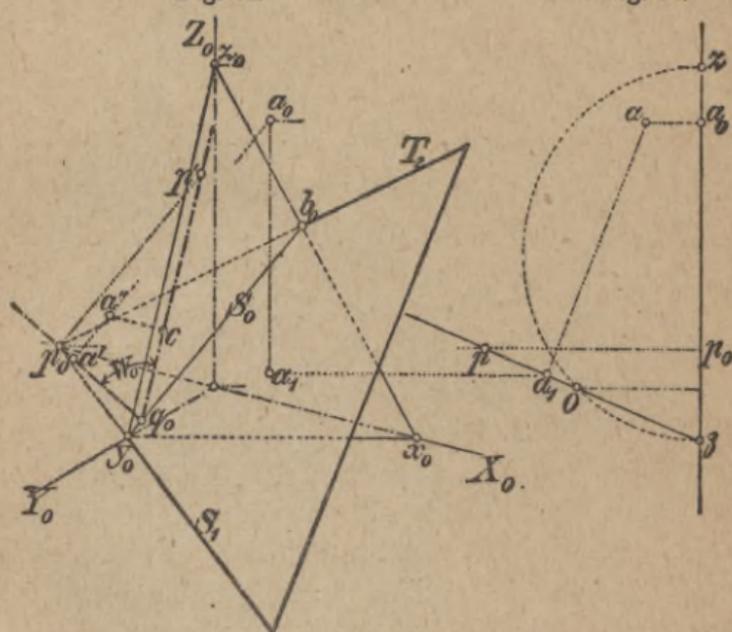
Anmerkung 14: Man hätte die Punkte b'', c'', d'' auch mit Benutzung des Winkels W_0 erhalten können, indem man die Längen hb'', ic'' und kd'' als Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten $b_0 h, c_0 i$ und $d_0 k$ und dem anliegenden Winkel W_0 bzw. konstruiert und diese Hypotenusen dann von h, i, k nach hb'', ic'' und kd'' abgetragen hätte.

51. Aufgabe 34. Es ist der Abstand eines Punktes a von einer Ebene ST zu ermitteln.

Auflösung: Man ermittelt wieder Figur 93 aus Figur 92 wie früher und bestimmt mittels des Punktes p_0 den Winkel W_0 der Ebene S_1T_2 mit der Bildebene. Konstruiert man ferner den Abstand $a_0 a$ (siehe Fig. 93) des Punktes a von der Bildebene, zieht durch a_0 (Fig. 92) die Senkrechte $a_0 a'$ zu $p_0 q_0$ und macht $a' a''$ (Fig. 92)

Fig. 92.

Fig. 93.



$= a_0 a$ (Fig. 93), so gibt die Senkrechte $a'' c$ von a'' auf $q_0 p'$ den gesuchten Abstand des Punktes a von der Ebene ST an.

Anmerkung 15: Die im vorstehenden behandelten Aufgaben bilden die Grundaufgaben der darstellenden Geometrie, und es lassen sich mit ihrer Hilfe nunmehr alle weiteren Aufgaben, bei welchen es sich um Lagen oder Maßbeziehungen zwischen den geometrischen Ele-

52. Aufgabe 35. In einer durch ihre Spurbilder S_1 und T_2 gegebenen Ebene (siehe Fig. 94) liegt ein regelmäßiges, sechsseitiges, hohles Prisma mit seiner Grundfläche so auf, daß der Mittelpunkt der letzteren mit einem gegebenen Punkte m_0 zusammenfällt, und außerdem eine Grundkante parallel zur Bildebene sein soll. Die Längen der Grundkanten und die Prismenhöhe sind bekannt. Man soll das axonometrische Bild des Prismas darstellen.

Auflösung: Man bestimmt zunächst den Neigungswinkel W_0 der Ebene ST mit der Bildebene (siehe Nr. 49); wählt man nun den Punkt m_0 in der Ebene ST beliebig, zieht $m_0 n_0$ senkrecht zur Nullspur $y_0 a_0$, ferner durch n_0 eine Parallele zu $q_0 p'$ und durch m_0 eine Senkrechte $m_0 m'$ zu $m_0 n_0$, so ist $m_0 m'$ der Abstand des Punktes m von der Bildebene, und man kann nun die Ebene ST um die Nullspur in die Bildebene umlegen; dann gelangt der Punkt m nach m'' , wobei $m_0 m''$ senkrecht $y_0 a_0$, $n_0 m'' = n_0 m'$ ist. Um m'' lassen sich mit den gegebenen Strecken die beiden Sechsecke 1—6 und 7—12 konstruieren. Überträgt man die Punkte 1 bis 12 auf die Linie $n_0 m'$, so sind damit die axonometrischen Bilder der Sechseckspunkte 1 bis 12 bestimmt; sie liegen auf den Senkrechten durch die umgelegten Sechseckspunkte zu $y_0 a_0$ und auf den Senkrechten durch die Punkte 1 bis 12 auf $n_0 m'$ zu $m_0 n_0$. Macht man $m' r'$ senkrecht zu $n_0 m'$ und gleich der Höhe des Prismas, so bestimmt sich hieraus r_0 auf $m_0 n_0$; damit sind auch die übrigen Ecken der oberen Prismengrundfläche festgelegt, indem man ja nur die Strecke $m_0 r_0$ auf den durch die Sechseckspunkte 1 bis 12 zu $a_0 y_0$ gezogenen Senkrechten abzutragen hat.

53. Aufgabe 36. Es ist ein Kreisring rechtwinklig axonometrisch darzustellen, wenn seine Achse mit der Z -Achse zusammenfallen soll.

Auflösung: Man verschafft sich wie früher den Schnitt $\alpha o \beta$ (siehe Fig. 97) und zeichnet die Projektion des Kreisringes in die Ebene $\alpha o \beta$. Man erhält hierfür die beiden gleichweit von Z abstehenden Kreise K und K' mit den Mittelpunkten m und n und deren gemeinsamen äußeren Tangenten. Wählt man auf dem Kreisringe einen beliebigen Parallelkreis, etwa F , so gibt es längs dieses Kreises eine den Kreisring berührende Kugel A mit dem Mittelpunkt c . Der axonometrische Umriss dieser Kugel ist ein zur Bildebene paralleler Kreis, der sich in Figur 97 als eine durch c zu $\alpha \beta$ gezogene Parallele darstellt, welche F in einem Punkt d trifft. Das axonometrische Bild d_0 bzw. d'_0 in Figur 96 liegt auf einem um c_0 , dem axonometrischen Bild von c , mit einem Halbmesser gleich jenem von A in Figur 97 beschriebenen Kreise A_0 und außerdem auf der Senkrechten durch \bar{a} (Fig. 97) zu Z_0 .

Nimmt man eine Anzahl von Parallelkreisen auf dem Kreisringe an und wiederholt das angegebene Verfahren, so erhält man hierdurch hinlänglich viele Punkte des axonometrischen Umrisses C_0 bzw. D_0 des Kreisringes.

Anmerkung 16: In Fig. 97 liegen die Schnittpunkte d der Umrissprojektionen der berührenden Kugeln A mit den zugehörigen Parallelkreisen F usw. auf den Kurven C und D . Diese Kurven treffen die Kreise K und K' in den Punkten f, g, h und i , denen in Figur 96 die Punkte f_0, g_0, h_0 und i_0 auf Z_0 entsprechen. Die Kurven C und D treffen sich in Figur 97 in kl , gelegen auf der Verbindungslinie mn ; diesen Punkten entsprechen die Punkte k_0 und k'_0 bzw. l_0 und l'_0 auf

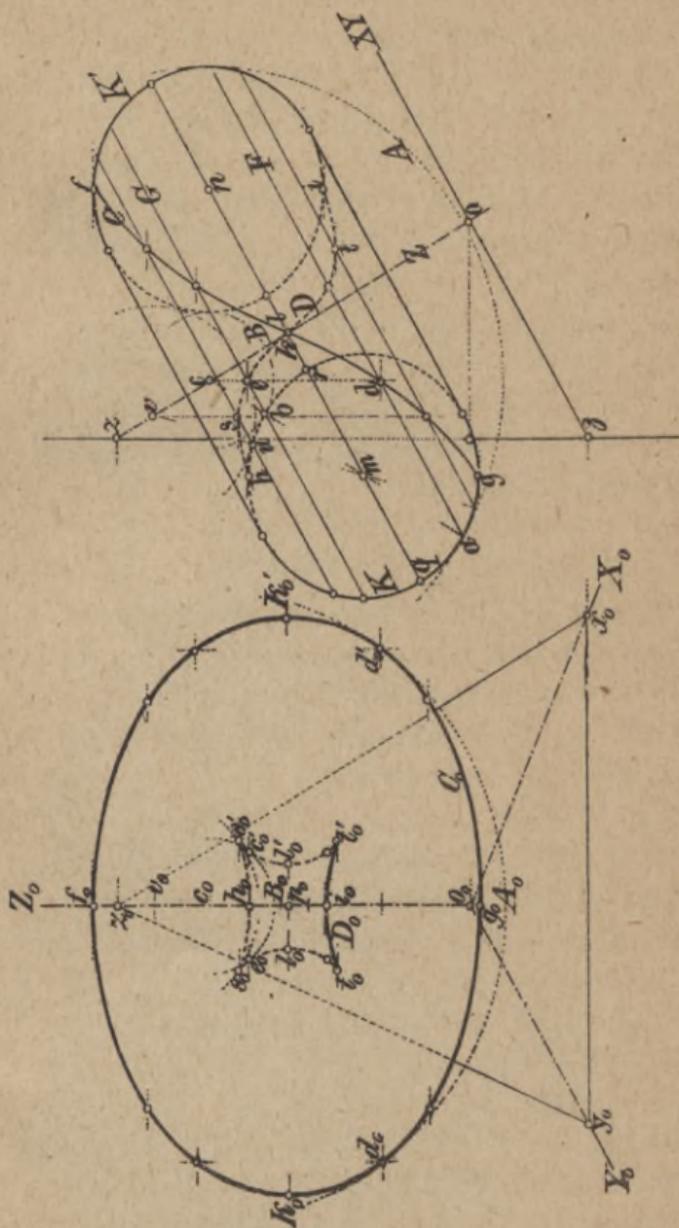


Fig. 97.

Fig. 96.

der Senkrechten durch kl zu Z_0 , wobei $p_0 k_0 = p_0 k'_0$ Figur 96 = kq Figur 97 und $p_0 l_0 = p_0 l'_0$ Figur 96 = kr Figur 97 ist. An die Linie D (Figur 97) sind zwei Tangenten senkrecht zu xz möglich; sie berühren in den Punkten s und t , denen in Figur 96 die Punkte s_0 und s'_0 bzw. t_0 und t'_0 entsprechen, welche für die Kurve D_0 Rückkehrpunkte oder Spitzen darstellen. Sie werden in gleicher Weise wie die übrigen Punkte ermittelt. Durch s z. B. geht ein Parallelkreis, der auf K den Punkt u liefert, woraus sich durch den Schnitt von mu mit Z der Punkt v ergibt, dem auf Z_0 (Fig. 96) der Punkt v_0 entspricht. Ein Kreis um v_0 als Mittelpunkt und vu (Fig. 97) als Halbmesser enthält auf der Senkrechten durch s (Fig. 97) zu xz die Punkte s_0 und s'_0 .

Darstellung in schiefwinkliger Axonometrie.

54. Die Aufgaben über Maßbeziehungen zwischen den geometrischen Elementen lassen sich auch in schiefwinkliger Darstellung ausführen; doch ist hierbei die Kenntnis des Spurendreiecks und damit auch der Projektionsrichtung erforderlich. Das Spurendreieck kann beliebig gewählt werden. Ist z. B. o', X', Y', Z' (siehe Fig. 98) das gegebene Achsenkreuz und x, y, z das Spurendreieck der Bildebene, so erhält man im Höhenschnittpunkt o_0 des Dreiecks xyz den Koordinatenanfangspunkt für ein Achsenkreuz X_0, Y_0, Z_0 in rechtwinkliger Darstellung auf die nämliche Bildebene. Hieraus ermittelt sich aber sofort die Projektionsrichtung für die schiefwinkliger Darstellung, indem man mittels des Dreiecks $o_0 z o''$ den Abstand des Koordinatenanfangspunktes von der Bildebene in der Strecke $o_0 o''$ feststellt, $o_0 o'''$ senkrecht $o_0 o'$ zieht und $o_0 o''' = o_0 o''$

abträgt. $o_0 o'$ ist das axonometrische Bild der Projektionsrichtung und σ ihr Winkel mit der Bildebene. Ein Punkt a , gegeben durch Ribbild a'_1 und axonometrisches Bild a' , kann nun auch in rechtwinkliger Darstellung $a_1 a_0$ angegeben werden, indem man die

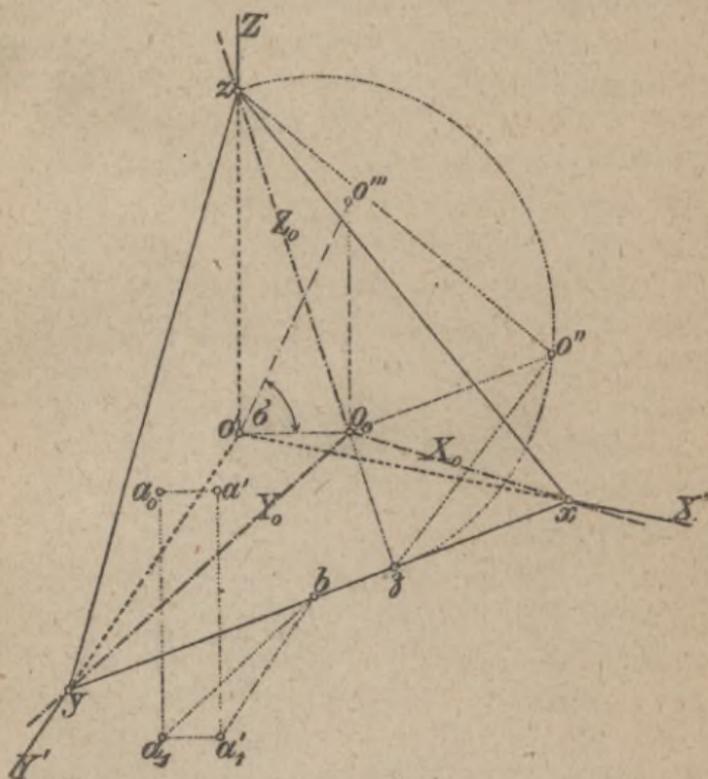


Fig. 93.

Affinität zwischen den in der XY -Ebene liegenden rechtwinkligen und schiefwinkligen Darstellungen mit der xy -Seite als Affinitätsachse und dem Bild der Projektionsrichtung als Affinitätsrichtung berücksichtigt. Zieht man also durch a'_1 eine Parallele zu Y' und durch ihren Schnitt b mit xy eine Parallele zu Y_0 , so liefert

letztere im Schnitt a_1 mit dem durch a'_1 gezogenen Projektionsstrahl das Ribbild a_1 des Punktes a in rechtwinkliger Darstellung; die Parallelen durch a_1 zu Z' und durch a' zur Projektionsrichtung liefern das axonometrische Bild a_0 des Punktes a in rechtwinkliger Darstellung.

Es ist klar, daß auf die angegebene Weise zu jeder schiefwinkligen Darstellung die zugehörige rechtwinklige sich ermitteln läßt; in letzterer kann dann die geforderte geometrische Aufgabe gelöst und hierauf in die schiefwinklige Darstellung übertragen werden. Diese Darstellungsweise findet eine praktische Verwendung nur für den speziellen Fall, daß die Bildebene mit einer Koordinatenebene zusammenfällt, wie dies ja für die sogenannte schiefe Projektion der Fall ist. Für diesen besonderen Fall der Darstellung erledigen sich dann aber die Grundaufgaben in einfacher Weise.

Im folgenden sollen nur einige dieser Aufgaben behandelt werden.

55. Aufgabe 37. Ein Punkt a (siehe Fig. 99) ist in schiefer Projektion durch axonometrisches Bild a' und erstes Ribbild a'_1 gegeben; es ist sein Abstand von der Bildebene zu ermitteln.

Auflösung: Bestimmt man mittels der Parallelen $a'_1 a_x$ und $a' a_2$ zu Y' und $a_x a_2$ zu Z' das Ribbild a_2 , so ist der gesuchte Abstand des Punktes a von der Bildebene gleich der doppelten Länge von $a'_1 a_x$ oder $a' a_2$. Zieht man $a_x a_1$ senkrecht X' und gleich $2 a_x a'_1$, so ist $a_x a_1$ gleich dem Abstand des Punktes a von der Bildebene.

Anmerkung 17: Verbindet man $a_1 a'_1$, so ist $a_1 a'_1$ senkrecht zu Y' .

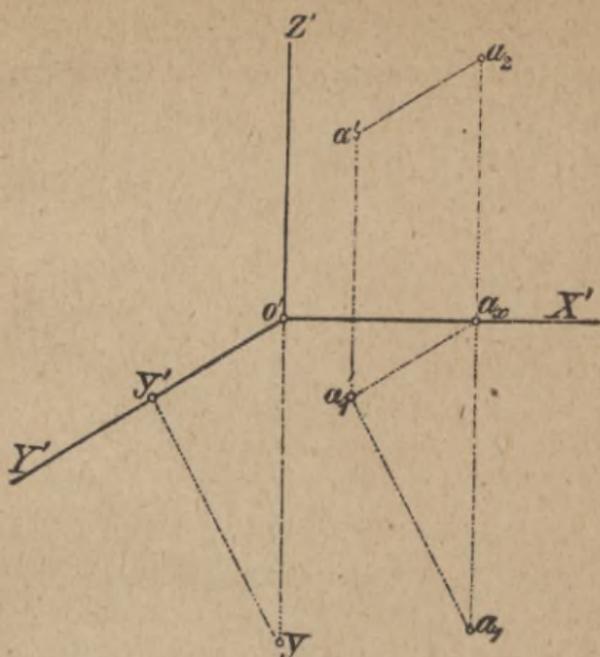
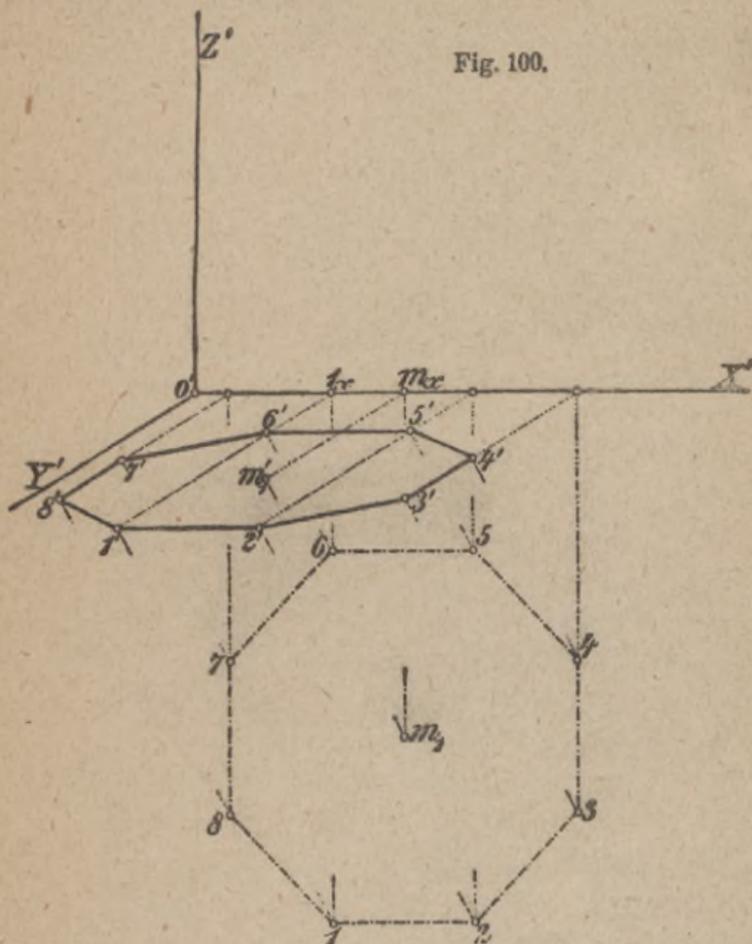


Fig. 99.

56. Aufgabe 38. Ein Punkt m'_1 (siehe Fig. 100) der XY -Ebene ist als Mittelpunkt eines regelmäßigen Achtecks von bekannter Seitenlänge gegeben. Es ist das axonometrische Bild des Achtecks zu zeichnen, wenn zwei Seiten desselben parallel zur X -Achse sein sollen.

Auflösung: Man legt die XY -Ebene in die Bildebene um, dann gelangt der Punkt m'_1 nach m_1 . Um m_1 konstruiert man nun mit der gegebenen Länge als Seite das regelmäßige Achteck $1 \dots 8$ in der vorgeschriebenen Lage und bringt hierauf die XY -Ebene in ihre ursprüngliche Lage zurück. Dann ergibt sich das Achteck $1'$ bis $8'$ als schiefe Projektion des verlangten Achtecks. Zur Bestimmung einer Ecke dieses Achtecks sind drei Linien erforderlich: einmal

die Senkrechte zu X' durch die betreffende Ecke z. B. 1, dann die Parallele durch 1_x zu Y' , hierauf die Senkrechte durch 1 zu Y'



57. Aufgabe 39. In einer beliebig gegen die Koordinatenebenen geneigten Ebene S_1T_2 (siehe Fig. 101) ist ein regelmäßiges Sechseck mit dem Mittelpunkte m zu konstruieren, wenn die Länge einer Sechseckseite und ihre Lage bekannt sein soll.

Auflösung: Ist xyz das Spurendreieck der gegebenen Ebene, so kann die Aufgabe in doppelter Weise gelöst werden; man kann nämlich die gegebene Ebene um ihre Spur S oder auch um ihre Spur T in die Bildebene umlegen. Zunächst soll das erstere geschehen.

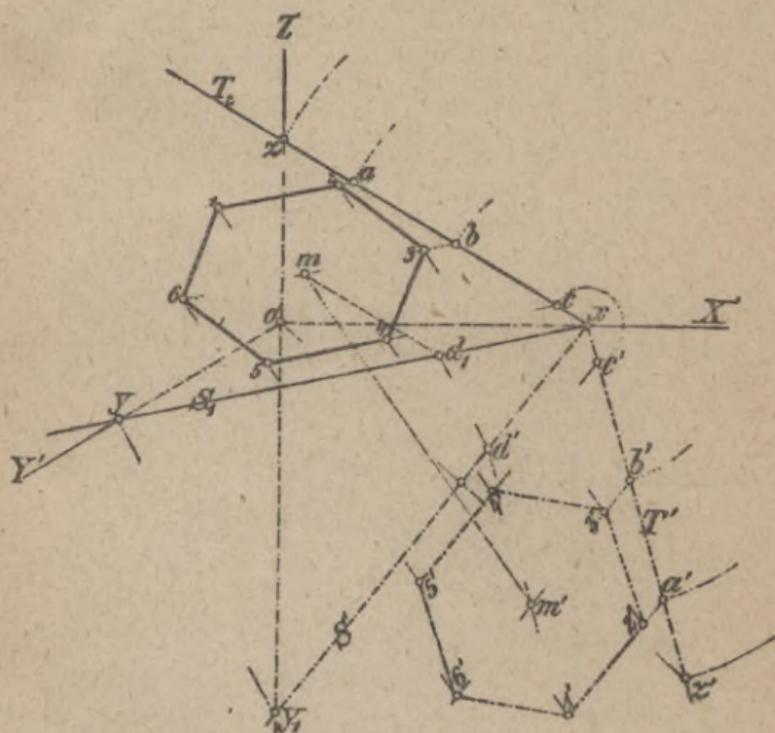


Fig. 101.

In diesem Falle legt man zuerst die XY -Ebene mit der Spur S_1 in die Bildebene um, dann gelangt die Spur S_1 nach S' . Fällt man nun von o' eine Senkrechte zu S' , so wird diese von einem um x mit einem Halbmesser gleich xx beschriebenen Kreisbogen in einem Punkte x' durchschnitten, so daß die Verbindungslinie $x'a$

oder T' die Umlegung der Spur T der Ebene ST in die Bildebene bezeichnet.

Zieht man durch m eine Parallele zu S_1 bis zum Schnitt b mit T_2 , macht xb' auf $T' = xb$ und zieht durch b' eine Parallele zu S' , so muß hierauf m' liegen. Zieht man durch m eine Parallele md_1 zu T_3 , durch d_1 eine Senkrechte zu Y' bis zum Schnitt d' mit S' , so durchschneidet die Parallele durch d' zu T' die durch b' zu S' gezogene Parallele in m' . Um m' als Mittelpunkt zeichnet man nun das regelmäßige Sechseck $1'$ bis $6'$ von bekannter Seitenlänge, und zwar so, daß zwei Seiten parallel zu S' werden. Das axonometrische Bild des Sechsecks läßt sich mittels der Affinität bestimmen, die zwischen der Umlegung und dem axonometrischen Bilde besteht. Man zieht also durch die Ecken $1'$ bis $6'$ Parallele zu S' bis zum Schnitt mit T' , macht $xc = x'c'$ $xa = xa'$, zieht durch c und a die Parallelen zu S_1 , so werden diese Linien von den Parallelen zu mm' durch die Ecken $5' \cdot 4'$, bzw. $1' \cdot 2'$ in den entsprechenden Ecken $5 \cdot 4$, $1 \cdot 2$ getroffen, die noch fehlenden Ecken $6 \cdot 3$ liegen auf mb .

Die Umlegung der Ebene ST in die Bildebene könnte aber auch um die Spur T_2 vorgenommen werden; wie in diesem Falle vorgegangen wird, ist in der folgenden Aufgabe gezeigt.

58. Aufgabe 40. In einer Ebene ST (siehe Fig. 102) liegt eine Figur $abcd$. Man soll ihre wahre Gestalt durch Umlegung der Ebene um die Spur T_2 in die Bildebene bestimmen.

Auflösung: Ist xyx das Schnittdreieck der gegebenen Ebene mit den Koordinatenebenen und liegt in ersterer das Viereck $abcd$, so bestimmt man zunächst mittels des Punktes a den Winkel W' der Vierecksebene mit

der Bildebene und erhält hierdurch auf der Senkrechten durch a_0 zu xx in a''' , wobei $pa''' = pa''$ ist, die Umlegung a''' des Punktes a in die Bildebene. Die Umlegung des Vierecks und sein axonometrisches Bild sind nun affine Figuren hinsichtlich der Linie xx als Affinitäts-

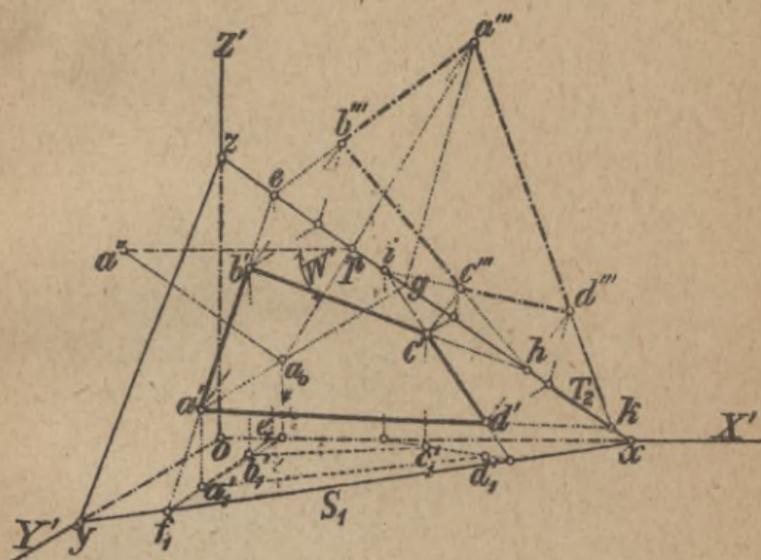


Fig. 102.

achse und der Verbindungslinie $a'a'''$ als Affinitätsrichtung. Die verlängerten Vierecksseiten $a'b'$, $c'd'$, $b'c'$ und $a'd'$ treffen die Affinitätsachse in Punkten e , i , h und k , durch welche die Umlegungen $a'''b'''$ usw. hindurchgehen; $a'''b'''c'''d'''$ ist die wahre Gestalt des Vierecks $abcd$.

59. Aufgabe 41. Ein senkrechter Kreiskegel, dessen Grundfläche in einer gegebenen Ebene xyz liegt (siehe Fig. 103), und von welchem der Mittelpunkt und der Halbmesser des Grund-

kreises sowie die Kegelhöhe bekannt sind, ist in schiefer Projektion darzustellen.

Auflösung: Dem Punkte m entspricht in rechtwinkliger Projektion der Punkt m_0 . Zeichnet man $m_0 p$ senkrecht zu zx und $m_0 m''$ senkrecht zu $m_0 p$ und

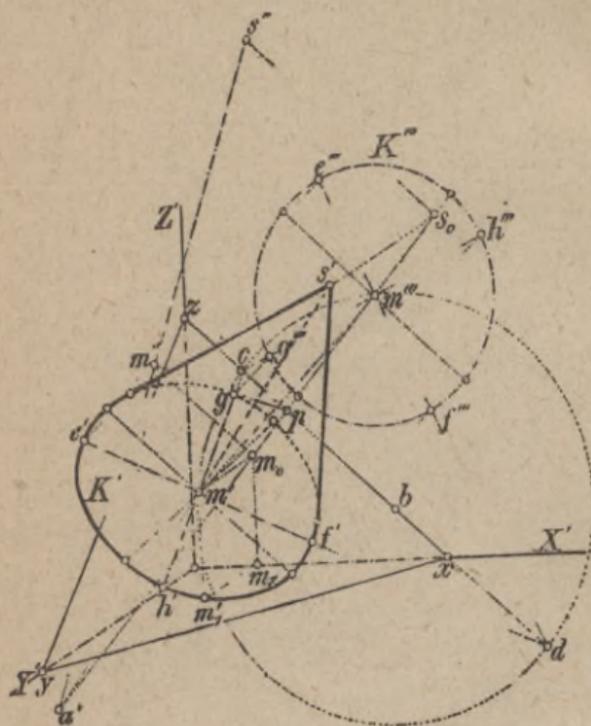


Fig. 103.

gleich $2 m' m_0$, so ist auf der verlängerten $m_0 p$ die Strecke $p m''' = p m''$ abzutragen und um m''' mit dem gegebenen Halbmesser der Kreis K''' zu beschreiben, aus welchem sich K' mittels der Affinitätsbeziehung zwischen K''' und K' ergibt. Trägt man ferner auf der Senkrechten durch m'' zu $p m''$ die Kegelhöhe nach $m'' s''$ auf, so ergibt sich zunächst s_0 auf $m_0 p$ in der

Senkrechten durch s'' zu $m_0 p$ und hierauf s' auf dem Projektionsstrahl durch s_0 und auf der Verbindungslinie des Schnittpunktes a' von $m'' s''$ und $m_0 s_0$ mit m' . Die Tangenten von s' an K' geben die Umrißmantellinien des schiefen Bildes des Kreiskegels.

60. Aufgabe 42. Ein Kreisring, dessen Mittelenebene mit der XY -Ebene zusammenfällt, ist in schiefer Projektion darzustellen.

Auflösung: In Figur 104 ist der rechtwinklige Grundriß des Kreisringes in halber Größe dargestellt. Man zeichnet zunächst (siehe Fig. 105) die axonometrischen Bilder A' , B' , C' der Kreise A , B , C und hierauf die Bilder einer Anzahl von Meridianschnitten des Ringes. Eine diese Bilder umhüllende Kurve gibt den axonometrischen Umriß des Ringbildes. In der Figur 105 trifft die X' -Achse die Ellipsen A' , B' , C' in den Punkten c , a , b bzw. c' , a' , b' . Die Kreise um b bzw. b' mit dem Halbmesser ab bzw. $a'b'$ sind die in der XZ -Ebene liegenden Meridianbilder. Die Y' -Achse liefert auf A' , B' und C' die Schnittpunkte f , d , e bzw. f' , d' , e' . Zieht man durch e und e' Parallelen zur Z' -Achse und trägt hierauf von e bzw. e' nach oben und unten die Strecke ab nach ei , eh bzw. $e'i'$ und $e'h'$ ab, so bilden df und ih bzw. $d'f'$ und $i'h'$ konjugierte Durchmesser der Meridianbilder D und D' .

In der Figur 105 ist ein weiterer Durchmesser $f'' f'''$ gezogen, woraus sich die konjugierten Durchmesser $d'' f''$, $i'' h''$ und $d''' f'''$, $i''' h'''$ für die Meridianbilder D'' und D''' ergeben.

IV. Schattenkonstruktionen in axonometrischer Darstellung.

Wahl der Lichtrichtung, Schatten eines Punktes.

61. Die Lichtrichtung wird dargestellt durch ihr axonometrisches Bild und ein Reißbild. Ist $X'Y'Z'$ ein Achsenkreuz, gleichviel ob in rechtwinkliger oder in schiefer Darstellung, und L' das axonometrische Bild, L_1 das erste Reißbild eines Lichtstrahles, s. Fig. 106, so liefert der Schnittpunkt α''' der Geraden L' mit der ZY -Ebene einen Punkt des Reißbildes L_3 ; ein weiterer Punkt ergibt sich in dem dritten Reißbilde α'_3 des Schnittpunktes α' von L' und L_1 . Bestimmt man α'_2 als zweites Reißbild von α' auf X' und α''_2 als zweites Reißbild von α''' auf Z' , so liefert die Verbindungslinie $\alpha'_2\alpha''_2$ das Reißbild L_2 der Lichtrichtung.

62. Ist ein Punkt im Raume gegeben, so versteht man unter seinem Schatten auf irgend eine Fläche den Durchschnittspunkt des den Punkt enthaltenden Lichtstrahles mit der betreffenden Fläche.

Verschiedene Aufgaben.

62. Aufgabe 43. Eine Gerade ab ist gegeben (siehe Fig. 106). Es ist ihr Schatten auf die Ebenen XY und XZ gesucht.

Auflösung: Man zeichnet durch die Endpunkte a und b von ab Lichtstrahlen und bestimmt deren Schnittpunkte mit den genannten Ebenen. Die Lichtstrahlen durch a und b schneiden die XY -Ebene in den Punkten α' und β' . Die Verbindungslinie $\alpha'\beta'$ ist also der

Schatten von ab auf die XY -Ebene unter der Voraussetzung, daß letztere als unbegrenzt gedacht ist. Beim Vorhandensein der XZ -Ebene gilt als wirklicher Schatten

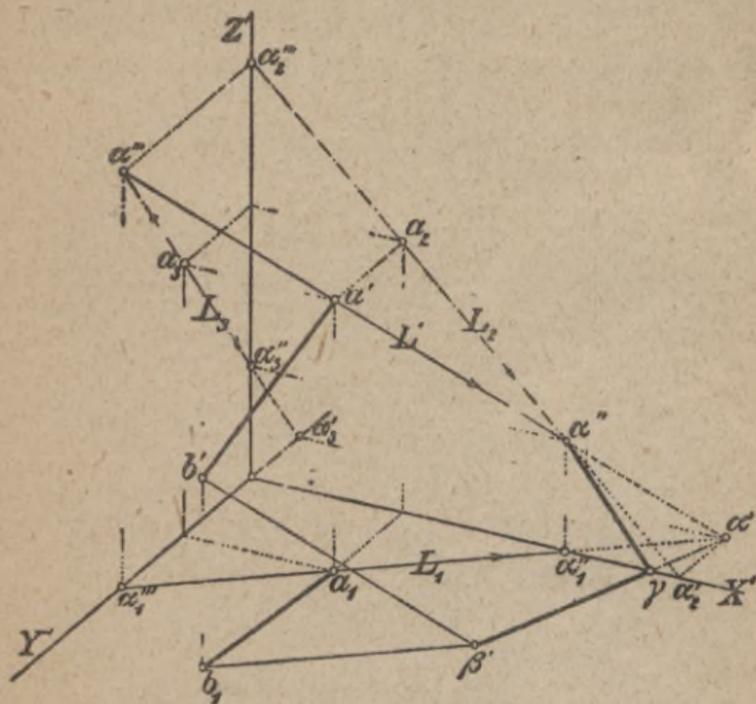


Fig. 100.

von ab auf die XY -Ebene nur die Strecke $\beta'\gamma$, und der Schatten des Punktes a fällt auf die XZ -Ebene nach α'' . Der Schatten von ab auf die beiden Ebenen XY und XZ ist somit dargestellt durch den Linienzug $\beta'\gamma\alpha''$.

63. Aufgabe 44. Für den in Fig. 107 in schiefer Projektion dargestellten Gesimskörper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Als Lichtrichtung ist die bei Schattenkonstruktionen allgemein übliche Richtung, bei welcher

Grund- und Aufriß der Lichtrichtung mit der Projektionsachse den Winkel von 45° einschließen, gewählt. Trägt man daher auf der X -Achse (siehe Fig. 107) die Strecke $ab = 2$ auf Y' , $ac = 1$ und auf der durch c zu Z' gezogenen Parallelen $cd = 2$ ab, so geben die Verbindungslinien db , cb und da die Bilder L' , L_1 und L_3 der Lichtrichtung. Zeichnet man nun parallel

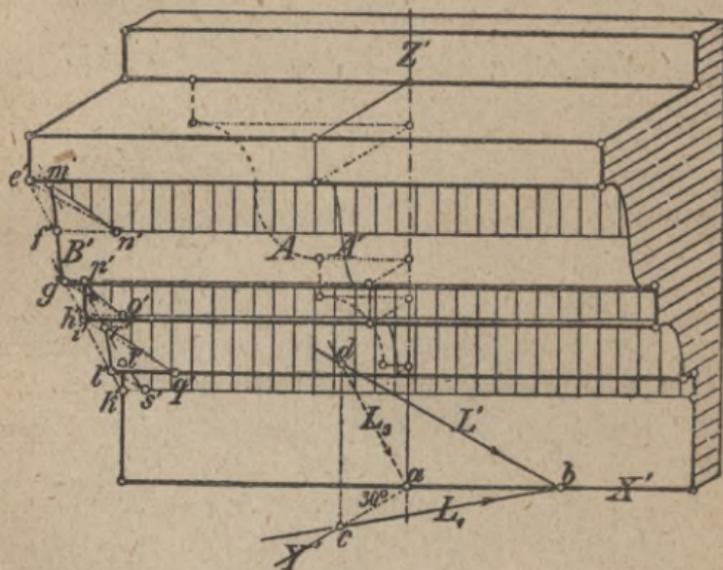


Fig. 107.

zu L_3 an das zu A' parallele Profil B' die möglichen Tangenten, die in m' , g' und r' berühren, so ergibt sich hierdurch die Begrenzung des Selbstschattens und damit auch der Schlagschatten auf den Gesimskörper, der in der gleichen Weise wie bei der gewöhnlichen rechtwinkligen Darstellung mit Benützung von L' und L_3 konstruiert wird. Z. B. der Lichtstrahl durch e' parallel zu L_3 liefert den Punkt f' , durch welchen der Schlagschatten der Gesimskante durch e' auf die Sima hin-

durchgeht. Der Bogen $n'm'$ ist der Schlagschatten des Bogens $m'e'$ auf die Gesimsfläche. Der Lichtstrahl durch g' parallel zu L_3 liefert den Punkt h' und damit die Schattengrenze durch h' . Der Lichtstrahl durch g' parallel zu L' liefert den Punkt o' und damit in $p'o'$ den Schatten des Bogens $g'p'$ usw.

64. Aufgabe 45. Für den in Fig. 108 dargestellten Gesimskörper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Die Konstruktion erledigt sich in gleicher Weise, wie in Aufgabe 43 angegeben.

65. Aufgabe 46. Für den in Figur 110 in schiefer Projektion dargestellten konsolartigen Körper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Die Konstruktion wird wieder mit Benutzung der Lichtstrahlen L' und L_3 ausgeführt und ist aus der Zeichnung wohl zu ersehen.

66. Aufgabe 47. Für den in Figur 112 in rechtwinklig dimetrischer Darstellung gezeichneten Körper ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Man bestimmt sich L_1 , L_3 und L_0 . Die Selbstschattengrenzen für die Zylinder I und III bzw. II und IV ermitteln sich mittels der Tangenten parallel zu L_1 bzw. L_3 an die Bilder der zugehörigen Zylindergrundkreise. Die Schlagschattengrenzen ergeben sich unter Benützung der Lichtstrahlen L_1 und L_0 für die Zylinder I und III bzw. L_3 und L_0 für die Zylinder II und IV; so liefert z. B. der Lichtstrahl durch 1 des Zylinders III den Schlagschattenpunkt 1' auf I, der Lichtstrahl durch 2 liefert den Schlagschatten 2" usw.

Fig. 108.

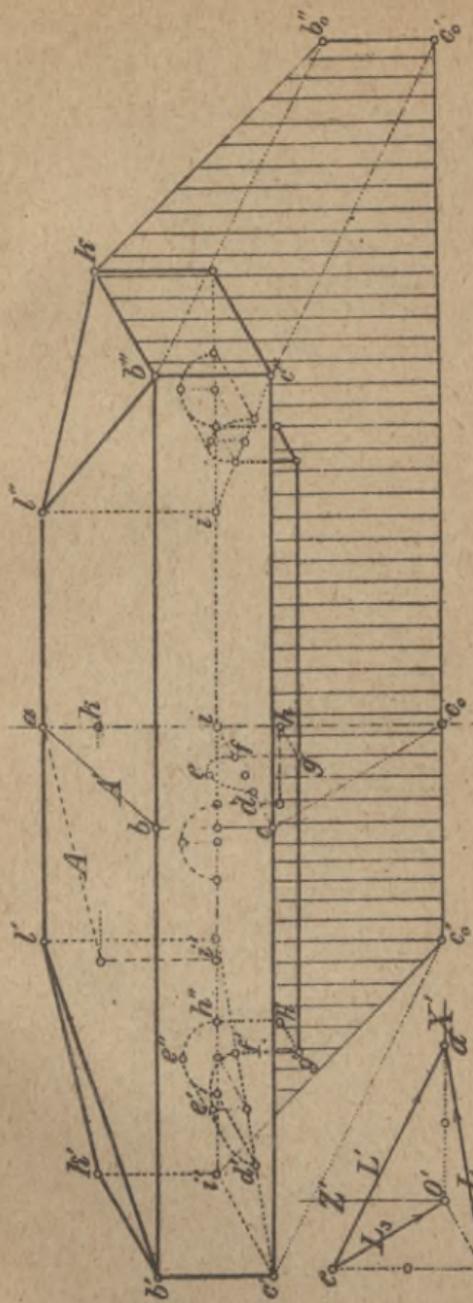


Fig 109.



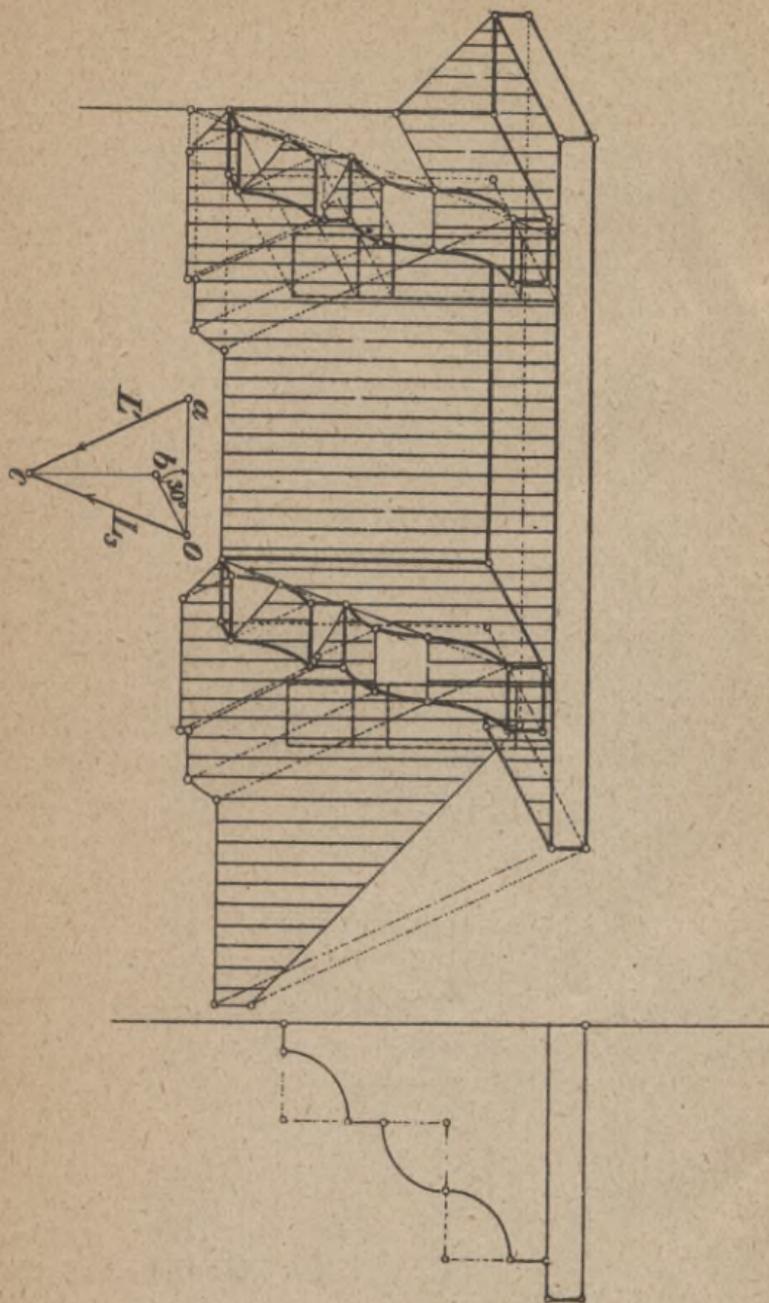


Fig. 110.

Fig. 111.

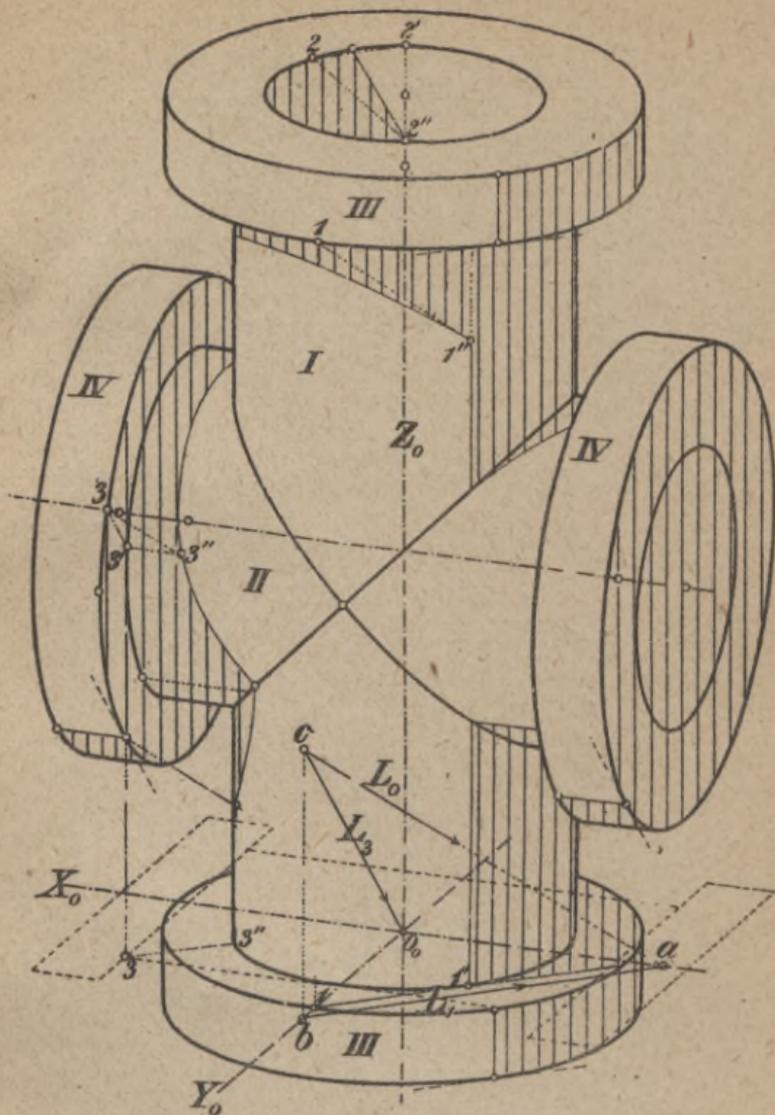


Fig. 112.

67. Aufgabe 48. Für die in Figur 113 in schiefer Projektion dargestellte flache Schraubenspindel ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Fig. 113.

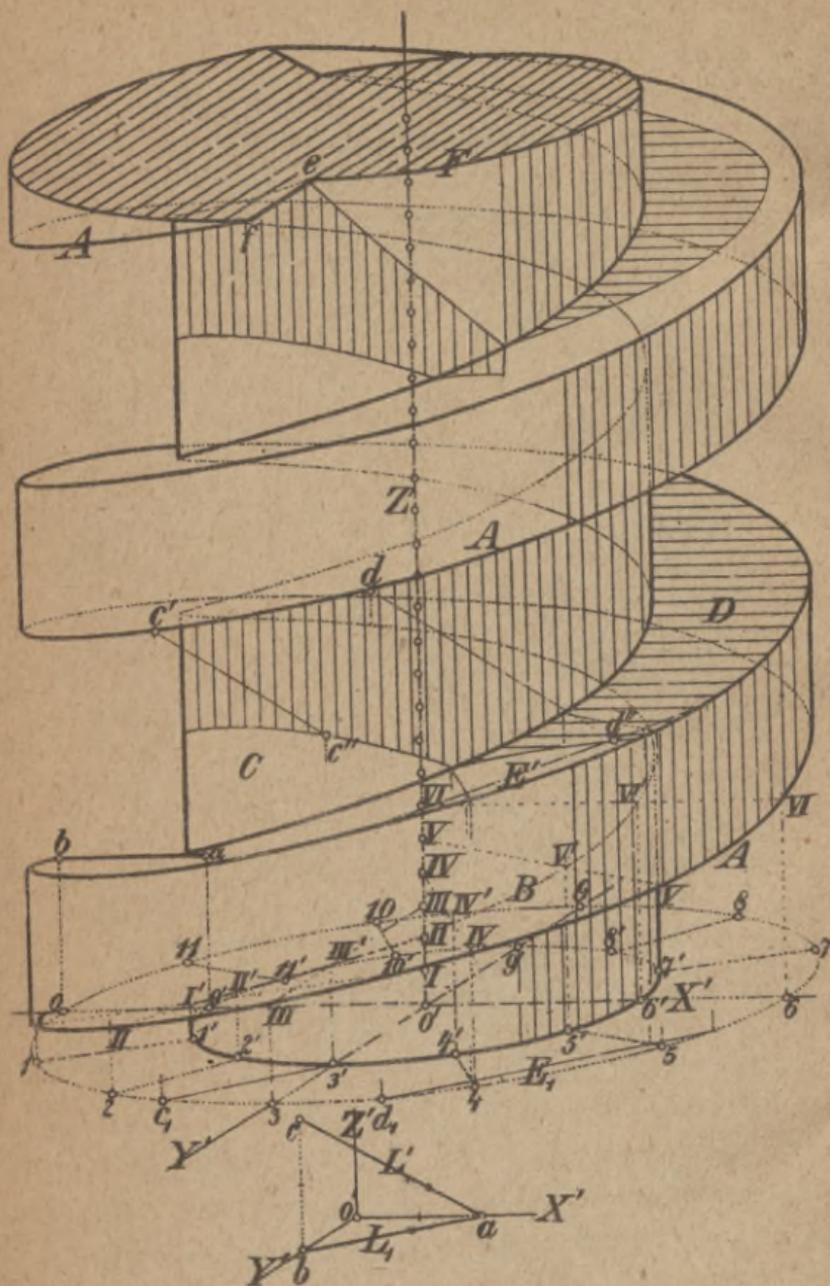


Fig. 114.

Auflösung: Zur Darstellung der Schraube zeichnet man die axonometrischen Grundrisse der beiden Schraubenlinien A und B , so daß den Punkten 0 bis 12 bzw. $0'$ bis $12'$ die Teilpunkte der entsprechenden in 12 gleiche Teile geteilten Kreise entsprechen. Trägt man nun auf der Schraubenachse Z' eine Strecke gleich dem zwölften Teil der Ganghöhe nacheinander nach $o'I, III, II, III$ usw. ab, so braucht man nur die Punkte I, II, III auf Z' Parallelen zu den Verbindungslinien $11', 22', 33'$ usw. zu ziehen, so werden diese Parallelen von den durch die Punkte $11', 22', 33'$ zu Z' gezogenen Parallelen in Punkten $I, I', II, II', III, III'$ der Schraubenlinien A und B getroffen.

Die Schattenkonstruktion erledigt sich mittels der Lichtstrahlen L_1 und L' .

Schatten entsteht:

1. von der Schraubenlinie A auf den Zylinder C ; der Punkt c' z. B. liefert den Schatten c'' ;

2. von der Schraubenlinie A auf die Schraubenfläche D ; der Punkt d liefert den Schatten d'' . Man bestimmt d_1 auf dem Grundriß von A , zieht durch d_1 einen Lichtstrahl parallel zu L_1 , legt durch diesen Lichtstrahl eine Ebene E_1 parallel zu Z' und bestimmt deren Schnitt E' mit der Schraubenfläche D . Der Lichtstrahl durch d parallel zu L' liefert auf E' den Schattenpunkt d'' .

3. von der oberen horizontalen Begrenzung F auf die Schraubenfläche; er wird in gleicher Weise bestimmt wie bei 2;

4. von der Linie ef auf den Zylinder C bzw. auf die Schraubenfläche; er bestimmt sich, wie bei 1 und 2 angegeben.

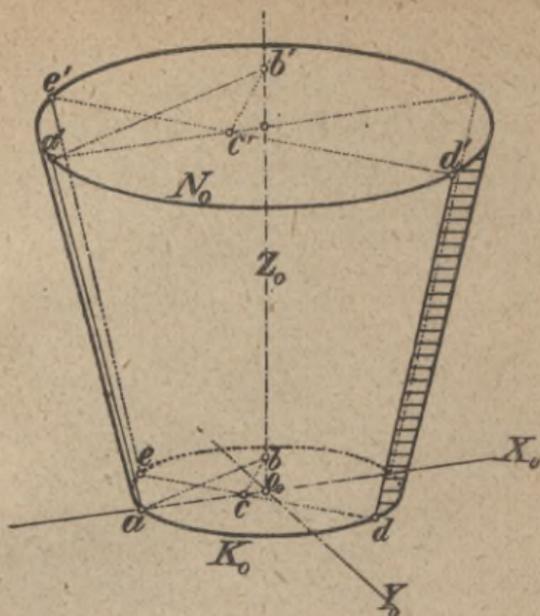


Fig. 117.

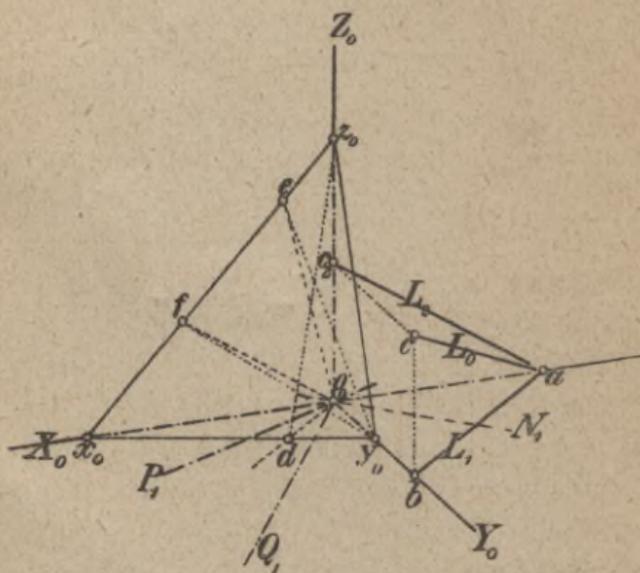


Fig 118.

und erhält hierdurch die Punkte d' und e' der Selbstschattengrenze. Die Verbindungslinien dd' und ee' bilden die Selbstschattengrenze des Kegels.

Auflösung b): Die Konstruktion erledigt sich in gleicher Weise wie unter a); ab ist axonometrisch senkrecht zu aa' , bc ist axonometrisch senkrecht zu L_2 (Fig. 118), cde ist axonometrisch senkrecht zu L_1 (Fig. 118).

Anmerkung 18: In Figur 118 ist die Konstruktion der axonometrischen Senkrechten zu den in Auflösung b) genannten Linien aa' , L_2 und L_1 durchgeführt. Es ist o_0e (Fig. 118) parallel zu aa' (Fig. 117), P_1 senkrecht zu y_0e , daher ab (Fig. 117) parallel zu P_1 (Fig. 118). Es ist ferner o_0f parallel L_2 , Q_1 senkrecht y_0f , daher bc (Fig. 117) parallel zu Q_1 (Fig. 118), endlich ist o_0d parallel L_1 , N_1 senkrecht zu x_0d , daher $e'd$ (Fig. 117) parallel N_1 (Fig. 118).

69. Aufgabe 50. Für die in schiefer Projektion dargestellte Kugelnische (siehe Fig. 119) ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Der Kreis A' stellt den Schnitt der Kugel mit der XZ -Ebene, die Ellipse B' jenen mit einer Parallelebene zur XY -Ebene dar.

Man zeichnet parallel zu L_2 an A' eine Tangente, so ist ihr Berührungspunkt k' ein Punkt der Schattengrenze. Zieht man senkrecht zu $o'k'$ den Halbmesser $o'f'$ und legt durch f' einen Lichtstrahl, so gibt dessen Schnitt mit der Kugeloberfläche einen zweiten Punkt i' , welcher mit o' verbunden den zu $o'k'$ konjugierten Halbmesser für die Schlagschattenellipse C' liefert. Um i' zu konstruieren, bestimmt man den axonometrischen Grundriß f_1 von f' in der Ebene B' , zieht durch f_1

einen Lichtstrahl parallel zu L_1 , welcher den Lichtstrahl durch f' parallel zu L' in g_1 schneidet.

Fig. 120.

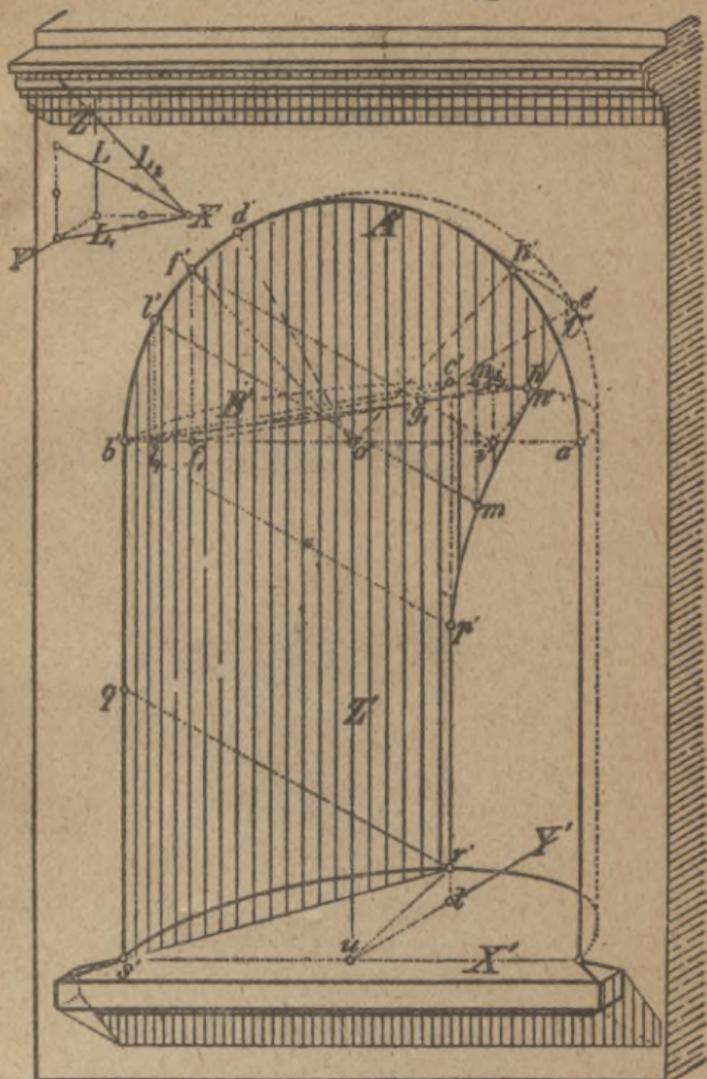


Fig. 119.

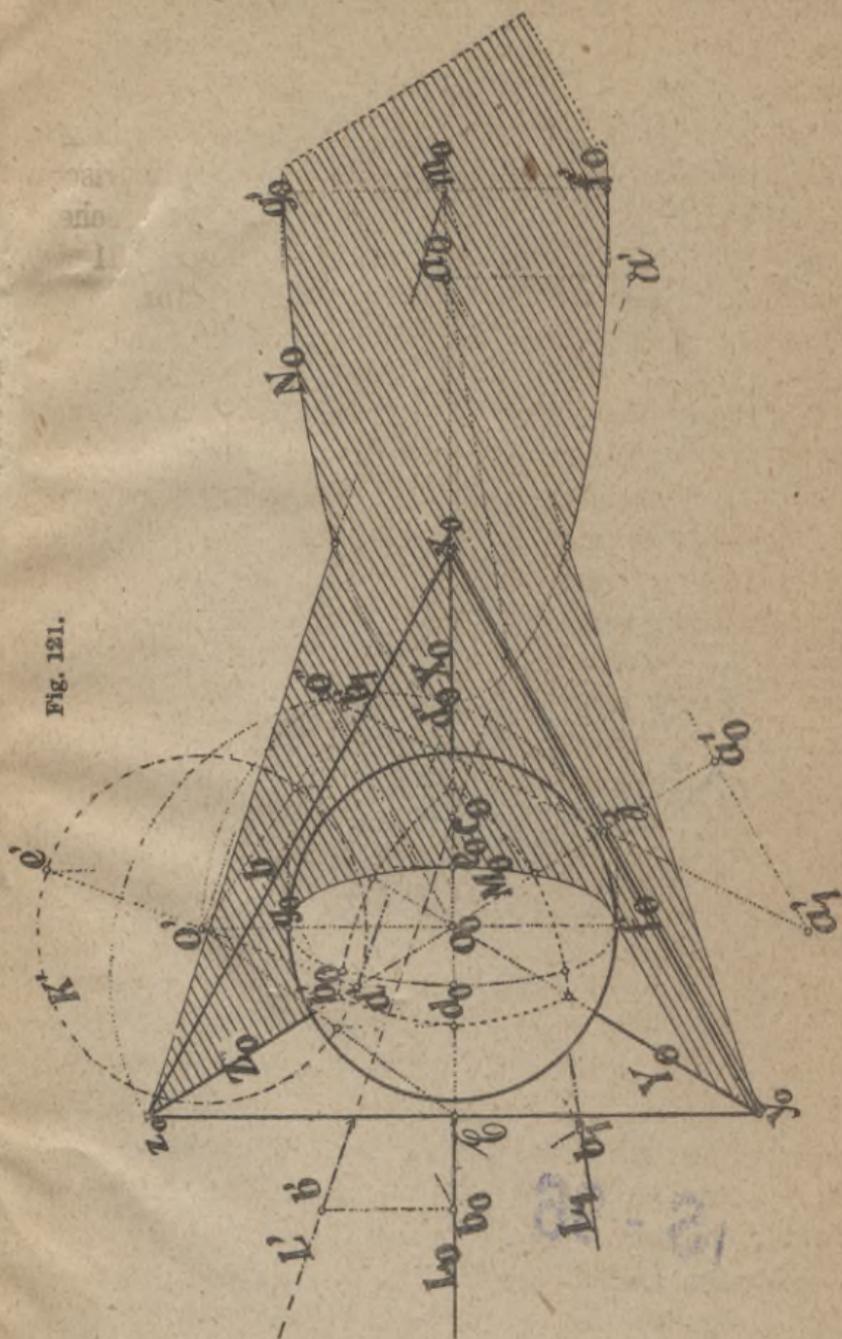
Die Verbindungslinie $b'g_1$ schneidet B' in h' , und die Parallele durch h' zu $o'b'$ liefert auf dem Lichtstrahl durch f_1 den Grundriß i_1 von i' ; die Parallele

durch i_1 zu Z' bestimmt auf dem Lichtstrahle durch f' den Punkt i' . Nunmehr kann die Ellipse C' konstruiert werden, welche B' in n' schneidet. Der Bogen $k'e'n'$ ist der auf die Kugel treffende Schlagschatten von A' . Die Konstruktion des Schattens auf die zylindrische Begrenzung der Nische ist aus der Figur zu ersehen.

70. Aufgabe 51. Für die in Figur 121 in rechtwinkliger isometrischer Projektion dargestellte Kugel ist die Schattenkonstruktion auszuführen.

Auflösung: Bei der gewählten Projektionsart ist die Lichtrichtung gegeben durch das Ribbild L_1 und das axonometrische Bild L_0 parallel zu X_0 . Der Mittelpunkt der Kugel soll mit dem Achsen Schnittpunkt o_0 zusammenfallen. Zur Ermittlung der Selbstschattengrenze legt man durch die X_0 -Achse eine Ebene senkrecht zur Bildebene, bestimmt ihren Schnitt mit der Kugel und legt diesen Schnitt samt der Lichtrichtung um $x_0\chi$ in die Bildebene nach K' und L' um, so erhält man in dem zu L' senkrechten Kreisdurchmesser $d'e'$ die Projektion der Selbstschattengrenze. Den Punkten d' und e' entsprechen auf o_0x_0 die Punkte d_0 und e_0 als Endpunkte der kleinen Achse der Selbstschattenellipse M_0 . Die große Achse f_0g_0 ist gleich dem Kugeldurchmesser und steht senkrecht zu L_0 . Der Schlagschatten der Kugel auf die Bildebene ist eine Ellipse N_0 , deren Mittelpunkt mit dem Schnittpunkt m_0 des durch o' parallel zu L' gezogenen Lichtstrahles mit der Bildebene zusammenfällt. Die kleine Achse steht senkrecht zu L_0 und ist gleich dem Kugeldurchmesser; die große Achse fällt mit dem durch o_0 gehenden Lichtstrahle L_0 zusammen und ihre Endpunkte ergeben sich in den Schlagschattenpunkten d'_0

Fig. 121.



2,00
112 IV. Schattenkonstr. in axonometrischer Darstellung.

und e'_0 (in der Figur ist nur d'_0 vorhanden) der Punkte d_0 und e_0 . Punkt d'_0 ergibt sich als Schnittpunkt des durch d' parallel zu L' gezogenen Lichtstrahles mit X_0 .

Anmerkung 19. In der Figur sind die Achsen-ebenen XY , XZ und YZ als wirklich vorhandene Ebenen dargestellt und ihre Schnittlinien mit der Kugel verzeichnet. Der Schlagschatten der durch die drei Achsenebenen und die Bildebene begrenzten Pyramide ist in der Figur 121 gleichfalls angedeutet. Die zugehörige Konstruktion ist aus der Figur zu ersehen.

Anmerkung 20: Der Leser führe die Aufgabe 51 in schiefwinkliger Axonometrie durch und zwar:

- a) in schiefer Parallelprojektion,
- b) in schiefer Projektion.



IS - 96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



I-301331

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298026