

ANDRZEJ KOBIELSKI\*

DYSKRETNY MODEL SIECI TRAKCYJNEJ  
W BADANIACH DYNAMIKI UKŁADU MECHANICZNEGO  
ODBIERAK PRĄDU – SIEĆ TRAKCYJNADISCRETE MODEL OF A RAILWAY CATENARY IN  
PANTOGRAPH – CATENARY DYNAMICS RESEARCH

## Streszczenie

W pracy przedstawiono zagadnienie modelowania układu drgającego odbierak prądu – sieć trakcyjna jako modelu dyskretnego z masą zredukowaną sieci trakcyjnej jako zmienną w czasie. Wykazano, że w publikacjach zagranicznych dotyczących tego tematu nie uwzględnia się definicji siły jako pochodnej pędu względem czasu, co dla układów o zmiennej masie jest szczególnie istotne. W pracy przedstawiono porównanie wstępnych wyników symulacji wybranego modelu układu odbierak prądu – sieć trakcyjna z uwzględnieniem w równaniach ruchu układu pochodnej masy względem czasu i bez jej uwzględnienia, jak to jest stosowane w literaturze zagranicznej.

*Słowa kluczowe: odbierak prądu-sieć trakcyjna, modelowanie dyskretne*

## Abstract

This paper is concerned with the dynamics of the overhead contact system for current collection on electrified railway lines. Presented paper consist an especially problem of time-varying mass in dynamics. This problem exist in modelling of railway pantograph-overhead catenary system vibration too. In this domain various models are introduced to describe the overhead equipment and the pantograph. Author of this paper presents own experiments and results of computer simulation. For this reason the simplified model of pantograph-catenary system was used.

*Keywords: pantograph-catenary, discrete modelling*

---

\* Dr inż. Andrzej Kobielski, Instytut Pojazdów Szynowych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Prawidłowe działanie systemu zasilania elektrycznych pojazdów trakcyjnych oraz zapewnienie pożądanej lub wystarczającej niezawodności i trwałości jego elementów wymaga możliwie małego przedziału zmienności siły stykowej w przemieszczającym się przestrzennie zestyku elektrycznym pomiędzy drutem jezdnym sieci trakcyjnej a ślizgaczem odbieraka prądu.

Punkt styku w układzie odbierak prądu – sieć trakcyjna (zwany dalej układem **OPST**) jest punktem drgającym, zaś siła stykowa – jako siła wzajemnego oddziaływania drutu jezdnygo sieci trakcyjnej oraz ślizgacza odbieraka prądu pojazdu trakcyjnego – jest zależna od prędkości przemieszczania się styku ślizgowego, topologii sieci trakcyjnej, postaci kinematycznej odbieraka prądu, wymiarów oraz mas elementów składowych układu i podukładów, sztywności więzów, wielkości i rodzaju tłumienia, rodzaju i wielkości oddziaływań zewnętrznych (w tym atmosferycznych) oraz wielu innych czynników.

Masa elementów składowych systemu przekazywania energii jest z jednej strony określona ich wytrzymałością mechaniczną, z drugiej zaś – wielkością (natężeniem) prądu elektrycznego przekazywanego poprzez zestyk elektryczny do układu elektrycznego pojazdu.

Minimalizacja drgań punktu styku odbieraka prądu z siecią trakcyjną jest podstawowym postulatem stabilizacji styku elektrycznego, koniecznej do prawidłowego działania układu napędowego pojazdów trakcyjnych oraz trwałości i niezawodności kosztownego systemu sieci trakcyjnej. Poziom trudności w zapewnieniu pożądanej stabilizacji styku elektrycznego zależy także od systemu zasilania, rozumianego jako rodzaj prądu w sieci trakcyjnej i wielkość jego napięcia.

Układ **OPST**, mimo strukturalnych różnic podukładów, jest w pełni integralny, stąd zasadniczym problemem jakości i wiarygodności badań symulacyjnych jego modeli jest odwzorowanie własności dynamicznych sieci trakcyjnej.

O ile modelowanie struktury dynamicznej odbieraka prądu nie stanowi istotnego problemu, a wyznaczenia jego zredukowanych parametrów (masy, tłumienia) można dokonać na drodze analitycznej lub/i doświadczalnej, to opis cech dynamicznych sieci trakcyjnej przedstawia istotną trudność, która jest przyczyną zróżnicowanego podejścia badaczy do opisu własności dynamicznych sieci trakcyjnej, co w konsekwencji prowadzi do znacznych różnic w postaci i strukturze opisanych w literaturze modeli układu **OPST** [9].

W rzeczywistości sieć trakcyjna jest podukładem ciągłym o nieskończonej liczbie stopni swobody, a jej ruch można opisać:

- 1) jednym równaniem różniczkowym zwyczajnym lub układem wielu równań różniczkowych zwyczajnych – model dyskretny,
- 2) jednym równaniem lub układem równań różniczkowych cząstkowych (w zależności od struktury sieci) – model ciągły.

Klasyfikację modeli matematycznych sieci trakcyjnych oraz modeli układu **OPST** przedstawiono w pracy [8].

Istotną zaletą dyskretnego, najczęściej jednomasowego modelu sieci trakcyjnej w postaci masy zredukowanej jest prostota modelu cyfrowego układu dynamicznego **OPST** i jego duża efektywność obliczeniowa.

Pomimo znacznych ograniczeń, modele dyskretne sieci trakcyjnych są skutecznie stosowane w badaniach symulacyjnych układu **OPST** [8]. Poparcie tej tezy stanowią m.in. prace [1, 4].

## 2. Sformułowanie problemu

Spośród stosowanych w badaniach symulacyjnych modeli dyskretnych układu **OPST**, wyjątkową pozycję zajmują modele ze zmienną w przestrzeni lub w czasie masą sieci trakcyjnej, zredukowaną do punktu styku ze ślizgaczem odbieraka prądu.

Podstawy teoretyczne takiego modelu dyskretyzacji masy sieci trakcyjnej przedstawiono po raz pierwszy w pracy [11] i rozwinięto w pracy [12].

Podstawą do przyjęcia opisanego tam modelu masy zredukowanej sieci trakcyjnej (zwanej przez niektórych badaczy masą zastępczą) jest zjawisko bardzo małego wpływu położenia punktu przyłożenia impulsu wzbudzającego drgania swobodne sieci trakcyjnej (wzdłuż długości przęsła) na ich częstotliwość.

Zakres zmian częstotliwości drgań swobodnych sieci trakcyjnej w funkcji położenia punktu wzbudzenia tych drgań nie przekracza w stosowanych sieciach wartości rzędu  $\cong 7\%$  [7].

W zależności od konstrukcji sieci trakcyjnych, ich masy jednostkowej oraz naprężeń w linach nośnych i przewodach jezdnych, częstotliwość drgań swobodnych  $f_{st}$  zawiera się w granicach:  $0,7 \text{ Hz} < f_{st} < 1 \text{ Hz}$ .

Cechą charakterystyczną sieci trakcyjnych jest bardzo duża zmienność jej sztywności  $k_{st}$  wzdłuż przęsła, mająca charakter okresowy z maksimum na podporze przęsła, a minimum w jego środku. Zatem uwzględniając ruch punktu styku, sztywność sieci trakcyjnej jest okresową funkcją czasu  $k_{st} = f(t)$ .

Autorzy pracy [10], wychodząc z trywialnej zależności określającej częstotliwość drgań swobodnych układu drgającego o jednym stopniu swobody:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

określili masę zredukowaną sieci trakcyjnej w postaci zależności:

$$m_{st} = \frac{k_{st}}{(2\pi f_{st})^2} \quad (2)$$

Według przedstawionej metody dyskretyzacji masy sieci trakcyjnej wyznacza się funkcję opisującą masę zredukowaną sieci trakcyjnej na podstawie pomiarów sztywności sieci trakcyjnej wzdłuż przęsła oraz pomiaru częstotliwości drgań swobodnych sieci trakcyjnej.

W pracy [2] przedstawiono funkcję opisującą wartość masy zredukowanej sieci trakcyjnej kolei włoskich na linii Rzym–Florencja. Posiada ona następującą postać:

$$m_{st} = 165 + 87,4 \cos(\omega t) + 31,6 \cos(2\omega t) \text{ [kg]} \quad (3)$$

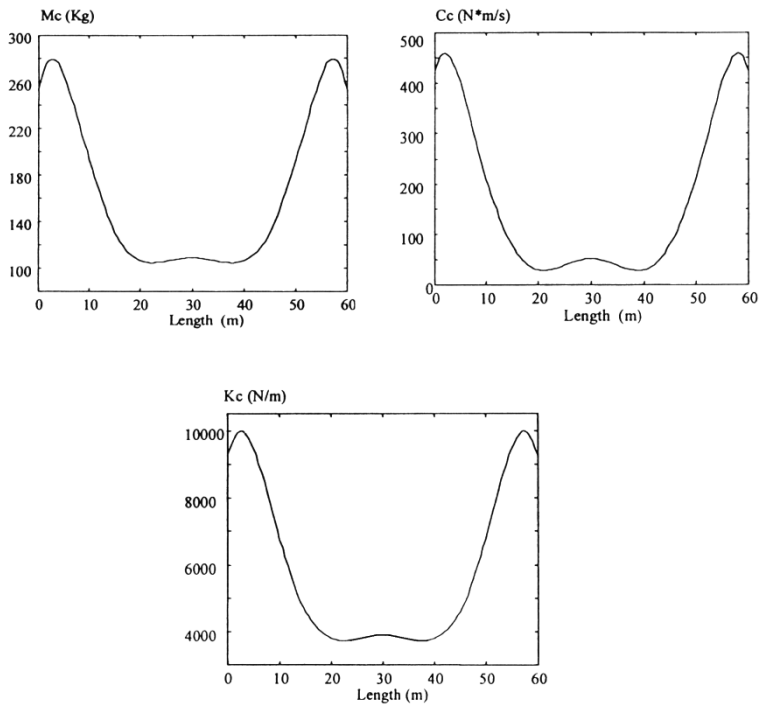
gdzie:

$$\omega = \frac{2\pi v}{L},$$

$v$  – prędkość jazdy [m/s],

$L$  – długość przeszła sieci trakcyjnej [m].

Na poniższym rysunku przedstawiono skopiowane z pracy [1, s.73] wykresy uzyskane na podstawie wyników badań doświadczalnych opisanych w pracy [2], gdzie oprócz charakterystyki zmienności masy zredukowanej sieci trakcyjnej oznaczonej jako  $M_c$ , zamieszczono również charakterystyki sztywności  $K_c$  oraz tłumienia wiskotycznego  $C_c$  sieci trakcyjnej. Oryginalny rysunek w pracy [1] zawiera błędy rysunkowe (niezgodność kształtu krzywych z równaniami) oraz błędną jednostkę tłumienia wiskotycznego  $C_c$ .



Rys. 1. Charakterystyki mechaniczne sieci trakcyjnej kolei włoskich na linii Rzym–Florenceja [za: Balestrino A., Bruno O., Landi A., Sani L., Innovative solutions for overhead catenary-pantograph system: wire actuated control and observed contact force, *Vehicle System Dynamics*, 33 (2000), s. 73]

Fig. 1. Mechanical characteristics of italian overhead catenary on line Roma-Florence [1, p. 73]

W klasycznych podręcznikach fizyki, np. [3, 5–6, 13] oraz mechaniki, np. [10], definicja siły  $F$  wywodzi się z drugiej zasady dynamiki Newtona jako pochodna pędu  $p$  względem czasu:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (4)$$

Zatem jeśli:

$$\frac{dv}{dt} \neq 0 \wedge \frac{dm}{dt} \neq 0 \rightarrow F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (5)$$

W dyskretnych modelach matematycznych układu **OPST** opisanych w literaturze, m.in. [1, 4], siła  $F$  jest zdefiniowana jako:

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

Wyjątek stanowią prace [6, 8] i inne tychże autorów.

Masa zredukowana sieci trakcyjnej jest zmienna podczas przemieszczania się punktu styku wzdłuż przęsła (rys.1), stąd jedno z równań różniczkowych ruchu modelu układu **OPST** powinno zawierać człon pochodnej masy zredukowanej sieci trakcyjnej względem czasu.

Jednakże w żadnej ze znanych autorowi prac, które dotyczą badań symulacyjnych układu **OPST** z wykorzystaniem modeli dyskretnych i opublikowanych w zagranicznych uznanych periodykach naukowych, nie uwzględniono występowania członu równania różniczkowego zawierającego pochodną masy zredukowanej sieci trakcyjnej.

Przykładem może być cytowana już praca włoskich badaczy [1, s. 88], co ilustruje rys. 2.

$$B_{(q,\dot{q},t)} = \begin{bmatrix} C_c(t)\dot{x}_c + K_c(t)x_c \\ 2C\dot{\theta} + 2L_T\theta \\ C_a\dot{\phi} + K_a\phi \\ C_a\dot{\beta} + K_a\beta \\ C_q\dot{x}_q + K_qx_q - M_a \frac{L}{2} \left( \dot{\alpha}^2 \cos(\varphi_0 + \varphi) + \dot{\beta}^2 \cos(\beta_0 + \beta) \right) \end{bmatrix}$$

Rys. 2. Macierz sztywności modelu matematycznego układu **OPST** wg pracy [1, s. 88]

Fig. 2. Stiffnes matrix of mathematical model of pantograph-catenary system due to paper [1, p. 88]

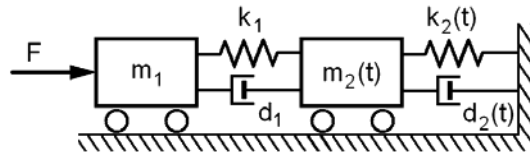
Podobnie nie uwzględniano pochodnej masy sieci trakcyjnej w jednej z ostatnio opublikowanych prac badaczy hiszpańskich [4].

### 3. Wpływ pochodnej masy zredukowanej sieci trakcyjnej na charakterystykę ruchu wybranego modelu układu OPST

W celu wstępnego określenia wpływu pochodnej masy zredukowanej sieci trakcyjnej na charakterystykę ruchu układu **OPST** wykonano serię eksperymentów symulacyjnych na modelu, którego schemat przedstawiono na rys. 3.

Zasadnicze uproszczenie modelu polega na tym, że odbierak prądu jest modelowany jako układ o jednym stopniu swobody jako masa  $m_1$ , na którą oddziałuje stała siła docisku statycznego ślizgacza odbieraka prądu do drutu jezdnego sieci trakcyjnej. Parametry  $k_1$  oraz  $d_1$  oznaczają odpowiednio sztywność usprężynowania ślizgacza odbieraka prądu i tłumienie wiskotyczne w układzie odbieraka prądu.

Model sieci trakcyjnej jest przedstawiony jako masa zredukowana  $m_2(t)$  zmienna w czasie oraz sztywność sieci  $k_2(t)$  oraz tłumienie wiskotyczne  $d_2(t)$  również zmiennie w czasie.



Rys. 3. Uproszczony model układu OPST

Fig. 3. Simplified model of pantograph-catenary system

Do eksperymentów symulacyjnych wykorzystano parametry modelu sieci w postaci równań aproksymacyjnych zamieszczonych w pracy [2]:

$$m_2(t) = 165 + 87,4 \cos(\omega t) + 31,6 \cos(2\omega t) \quad [\text{kg}] \quad (7)$$

$$k_2(t) = 5860 + 3110 \cos(\omega t) + 1180 \cos(2\omega t) \quad [\text{N/m}] \quad (8)$$

$$d_2(t) = 168 + 202,1 \cos(\omega t) + 91,6 \cos(2\omega t) \quad [\text{Ns/m}] \quad (9)$$

$$\omega = \frac{2\pi v}{L} \quad (10)$$

Dla pozostałych parametrów modelu, jak na rys. 3, przyjęto następujące wartości:

$L = 60$  m (długość przęsła sieci trakcyjnej kolei włoskich na linii Rzym–Florenceja),

$m_1 = 40$  kg,

$k_1 = 4500$  N/m,

$d_1 = 400$  Ns/m,

$F = 200$  N.

Wartości prędkości  $v$  przyjmowano w przedziale 20–50 m/s.

Na rys. 4 i 5 przedstawiono charakterystyki fazowe ruchu ramy odbieraka prądu (masa  $m_1$ ) oraz sieci trakcyjnej (masa  $m_2$ ) dla prędkości  $v = 30$  m/s w przypadku:

- a** – bez uwzględnienia pochodnej masy zredukowanej sieci,
- b** – z uwzględnieniem pochodnej masy zredukowanej sieci.

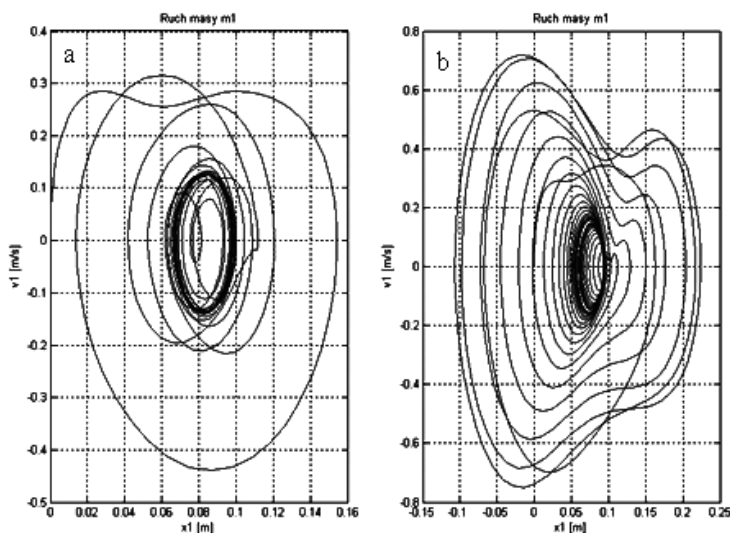
Jak wynika z porównania przypadków **a** i **b** dla obu rysunków, uwzględnienie w uproszczonym modelu układu **OPST** pochodnej masy zredukowanej sieci trakcyjnej istotnie wpływa na charakter ruchu układu tak w aspekcie jakościowym, jak i ilościowym.

Przedstawione wykresy fazowe w obu przypadkach **a** i **b** dla ramy odbieraka prądu (masa  $m_1$ ) oraz dla sieci trakcyjnej (masa  $m_2$ ) znacznie się od siebie różnią i tym samym nie ma podstaw do stawiania tezy, iż pochodna masy zredukowanej sieci trakcyjnej nie ma wpływu na charakter drgań układu **OPST**.

#### 4. Podsumowanie

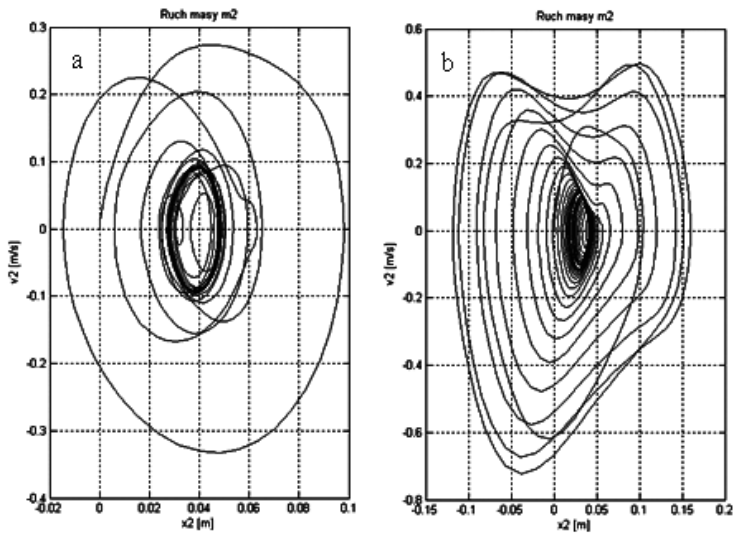
Jak wynika z przedstawionych rezultatów wstępnych, porównawczych badań symulacyjnych, istnieje duża różnica w otrzymanych charakterystykach fazowych ruchu modelowanego układu odbierak prądu – sieć trakcyjna. Dotyczy to zarówno kształtu charakterystyk fazowych ruchu ramy odbieraka prądu i ruchu sieci trakcyjnej, jak i ekstremalnych wartości przemieszczeń oraz prędkości tych mas.

Jest to wyraźnie widoczne w przypadku uproszczonego modelu przedstawionego na rys. 3. Model ten jest skrajnie uproszczony przez przyjęcie jednomasowego modelu odbieraka prądu, przez co nie była na tym etapie badań analizowana siła stykowa pomiędzy odbierakiem prądu a siecią trakcyjną. Wynika to z pominięcia w tym modelu masy ślizgacza odbieraka prądu.



Rys. 4. Charakterystyka fazowa ruchu ramy odbieraka prądu: a) bez uwzględnienia pochodnej masy sieci trakcyjnej; b) z jej uwzględnieniem

Fig. 4. Phase plot of motion of pantograph arm (a – without a derivative of mass, b – with a derivative of mass)



Rys. 5. Charakterystyka fazowa ruchu sieci trakcyjnej: a) bez uwzględnienia pochodnej masy sieci trakcyjnej; b) z jej uwzględnieniem

Fig. 5. Phase plot of motion of catenary (a – without a derivative of mass, b – with a derivative of mass)

Z porównania charakterystyk fazowych zamieszczonych na rys. 4 i 5 wynika, że uwzględnienie pochodnej masy zredukowanej sieci trakcyjnej względem czasu wpływa na znacznie skuteczniejsze tłumienie drgań modelowanego układu **OPST**.

Wynika stąd, że pochodna masy zredukowanej sieci trakcyjnej względem czasu posiada charakter i wymiar nieliniowego, okresowo zmiennego współczynnika tłumienia wiskotycznego [ $\text{kg s}^{-1}$ ]. Łatwo to wykazać za pomocą elementarnych rachunków. Współczynnik tłumienia wiskotycznego ma wymiar:

$$d \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right] \rightarrow \left[ \frac{\text{kgms}}{\text{s}^2 \text{m}} \right] \rightarrow [\text{kg s}^{-1}] \quad (11)$$

Przyjęcie bardziej złożonego modelu odbieraka prądu umożliwi analizę siły stykowej. Sądząc po otrzymanych wstępnych wynikach badań symulacyjnych, należy się spodziewać, że różnice siły stykowej w obu rozważanych w niniejszej pracy przypadkach będą znacznie większe – zarówno w kwestii charakteru przebiegu, jak i wartości ekstremalnych.

Reasumując niniejsze rozważania, autor uważa, że stosowane w literaturze zagranicznej podejście, polegające na zaniedbaniu pochodnej zredukowanej masy sieci trakcyjnej względem czasu, jest niepoprawne, właściwe zaś jest uwzględnienie tejże pochodnej jako konsekwencję stosowania klasycznej definicji siły bezwładności, będącą pochodną pędu względem czasu.



## Literatura

- [1] Balestrino A., Bruno O., Landi A., Sani L., *Innovative solutions for overhead catenary-pantograph system: wire actuated control and observed contact force*, Vehicle System Dynamics, 33 (2000), 69-89.
- [2] Brandani V., Galeotti G., Toni P., *Simulazione del comportamento dinamico del sistema pantografo-catenaria*, Ingegneria Ferroviaria, 1991, nr 11, 3-10.
- [3] Cannon R.H., *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973.
- [4] Carnicero-Lopez A., Lopez-Garcia O., Marono J.L., *Modelo simplificado de la interaccion dinamica catenaria-pantografo*, Annales de Mecanica y Electricidad, Mayo-Junio 2006, 30-35.
- [5] Cooper L.N., *Istota i struktura fizyki*, PWN, Warszawa 1975.
- [6] Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M., *Feynmana wykłady z fizyki*, Tom I – część 1, PWN, Warszawa 1974.
- [7] Grajnert J., *Drgania ruchomego układu dyskretnego współpracującego z układem ciągłym na przykładzie współpracy odbieraka prądu z siecią trakcyjną*, praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1979.
- [8] Kobielski A., *Aktywne odbieraki prądu – stan badań*, XIV Konferencja Naukowa Pojazdy Szynowe 2000, Kraków–Arlamów, październik 2000, 203-217.
- [9] Kobielski A., *Wyznaczenie wpływu parametrów mechanicznych układu odbierak prądu – sieć trakcyjna na jego własności dynamiczne metodami symulacji komputerowej*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1982.
- [10] Nizioł J., *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*, PWN, Warszawa 1980.
- [11] Pascucci L., Gargiulo A., *Calcolo meccanico delle funi tese fissate agli estremi e sollecitate da carichi uniformemente distribuiti e da carichi concentrati*, Ingegneria Ferroviaria, 1956, nr 11, 882-887.
- [12] Pascucci L., *Movimenti delle condutture di contatto delle linee ferroviarie elettrificate alle alte velocità*, Ingegneria Ferroviaria 1967, nr 1, 3-12.
- [13] Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., *Wstęp do fizyki*, Tom 1, PWN, Warszawa 1984.