



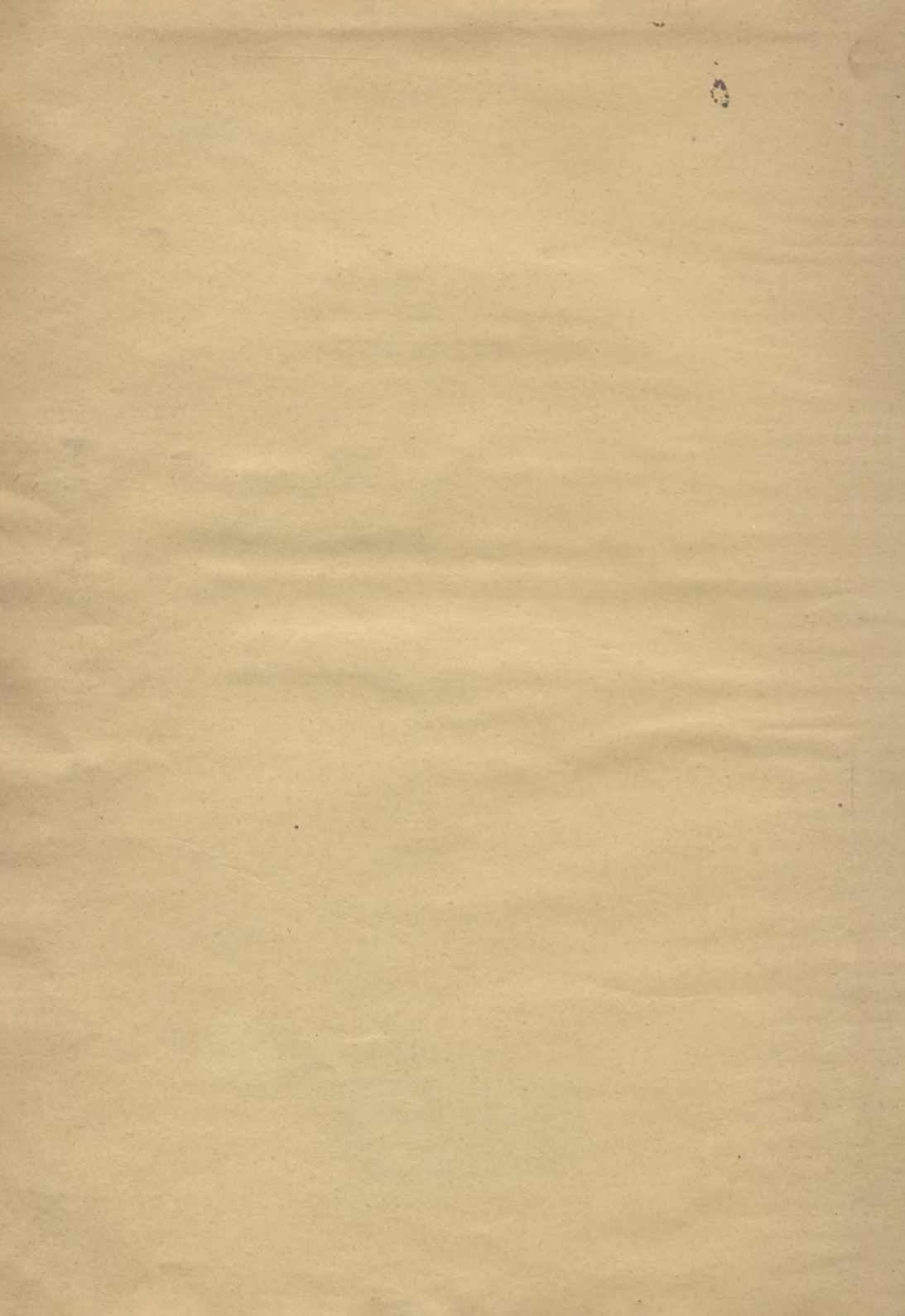
~~699/a/i~~  
II-568/I

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000323018





BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM XXII.

PROF. K. SKIBIŃSKI.

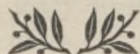
# TYCZENIE TRAS

DRÓG, KOŁEI ŻELAZNYCH, KANAŁÓW SPŁAWNYCH,  
REGULOWANYCH RZEK i t. d.

PODRĘCZNIK DLA INŻYNIERÓW I GEOMETRÓW

CZEŚĆ I: OPISOWA.

*Przebieg Włodzimierz*



WE LWOWIE.

NAKŁADEM AUTORA.

Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE.

1909.

*Lwów czerwiec 1920.*

PROF. K. ŚMIBIŃSKI



TYTUŁ TŁUM.

PROF. K. ŚMIBIŃSKI, KRAKÓW, SPECJALNYCH  
REGULOWANYCH PZK 1. 2.

11-355821

PODRECZNIK DLA INŻYNIERÓW I GEOMETRÓW

CZĘŚĆ I: OPISOWA.

*[Faint handwritten signature]*



WE LWOWIE.

WYDAWCA: KRAKÓW.

WYDAWCA: KRAKÓW.

1902.

## Przedmowa.

Podręczniki używane przez inżynierów do tyczenia tras, zawierają przeważnie mało co więcej prócz tabel służących do tyczenia łuków dwoma metodami i do tyczenia parabolicznych krzywych przejściowych. A jednak gdy się rozejrzy w dotyczącej literaturze, okaże się, że w przedmiocie wynajdywania różnych metod tyczenia prostych i łuków, w rozwiązywaniu zawilszych zagadnień, nareszcie w tendencji zastąpienia używanych krzywych przejściowych innymi krzywymi, — znachodzi się mnóstwo doskonałych prac rozrzuconych to w dziełach mniej znanych, to w czasopismach, szczególnie pracom geodezyjnym poświęconych.

Zebranie najważniejszych z tych prac w jedną całość w podręczniku polskim, któryby wyrugował dotychczas używane obce podręczniki, nadto podanie sposobów rozwiązywania trudnych zagadnień, ustalenie granic dopuszczalności stosowania różnych metod i t. d., — jest zadaniem niniejszej pracy.

Podręcznik składa się z dwóch części. Część pierwsza, opisowa, zawiera w I rozdziale opis i teoretyczne uzasadnienia wszelkich metod tyczenia, jakoteż wskazówki do rozwiązywania zagadnień; w II rozdziale są omówione krzywe przejściowe. Na dodanym zbiorze rachowanych przykładów może uczący się wyćwiczyć w przeprowadzaniu potrzebnych obliczeń.

Część druga, ujęta w mały format, wygodny do użycia w polu, zawiera tabele liczbowe, po części o wiele obszerniejsze niż zwykle używane.

Osądzenie, o ile sprostałem postawionemu zadaniu, należy do fachowych kolegów, których proszę o rzeczową krytykę, jakoteż o nadsyłanie uwag co do pożądanых zmian.

Za koleżeńską pomoc w układaniu tematu podręcznika, wyrażam profesorowi drwi Łásce szczerę podziękowanie.

Lwów, w kwietniu 1909 r.

*Autor.*

## Literatura

po części zużytkowana w niniejszym podręczniku :

Doležalek (tunel przez Gottard), Ztschr. des Arch. u. Ing. Vereines, Hannover, 1878 i 1880.

Dörfinger (tunel zwrotny koło Wasen), Ztschr. f. Verm. Wesen 1877.

Gelpke (tunel przez Gottard), Zivilng. 1870 i Ztschr. f. Verm. Wesen 1880.

Graf (kolej Albula), Schweiz. Bauztg. 1902.

Hecht (łuki kołowe i krzywe przejściowe), Drezno 1893.

Hecht (krzywe stożkowe), Drezno 1893.

Helmert (krzywe przejściowe), Akwizgran 1872.

Koppe (tunel przez Gottard), Ztschr. f. Verm. Wesen 1875, 1876, 1880 i Eisenbahn 1880.

Koppe (siedem tunelów zwrotnych kolei Gottarda), Eisenbahn 1880.

Leber, Raccordements etc. Paryż 1892.

D'Ocagne, Leçons sur la Topométrie, Paryż 1901.

Pestalozzi (tunel przez Gottard), Eisenbahn 1877.

Prévoit, Topométrie, Paris, Dunod 1900.

Rosenmund (tunel przez Simplon), Schweiz. Bauztg. 1901, 1902.

Roczniki czasopisma: Zeitschrift für Vermessungs-Wesen.

### Niektóre bardziej używane podręczniki:

Hecht, jak powyżej.

Helmert, jak powyżej.

Knoll-Weitbrecht (tyczenie krzywych), Sztutgart 1902.

Kröhnke (tyczenie krzywych), Lipsk 1896.

Pernt (tyczenie krzywych kołowych i przejściowych, metodą biegunową), Wiedeń 1903.

Petrlik (bardzo obszerny zbiór tabel), Praga 1903.

Sarrazin i Oberbeck (krzywe kołowe i przejściowe), Berlin 1899.

Polski podręcznik nieznanego autora, drukowany we Lwowie w drukarni Ossolineum w r. 1872.



# SPIS RZECZY CZĘŚCI I.

## Rozdział I.

### Proste, łuki kołowe i paraboliczne.

	Str.
§ 1. Tyczenie trasy . . . . .	1
§ 2. Tyczenie linii prostych . . . . .	1
a) Tyczenie punktów pośrednich . . . . .	2
b) Przedłużanie linii prostej . . . . .	6
§ 3. Nomogram do tyczenia prostych . . . . .	6
§ 4. Tyczenie prostych w tunelach . . . . .	7
§ 5. Tyczenie łuków kołowych . . . . .	9
§ 6. Określenie elementów zasadniczych . . . . .	9
§ 7. Tyczenie głównych punktów . . . . .	11
§ 8. Postępowanie przy tyczeniu głównych punktów . . . . .	13
§ 9. Kontrola rachunków . . . . .	13
§ 10. Tyczenie punktów pośrednich . . . . .	14
a) Metoda tangencyjalna . . . . .	14
b) Tyczenie od cięgiwy . . . . .	16
c) Tyczenie ze środka . . . . .	18
d) Metoda biegunowa . . . . .	19
e) Metoda stałych kątów . . . . .	20
f) Metoda siecznych . . . . .	21
§ 11. Tyczenie łuku bez użycia przyrządu kątomierniczego . . . . .	22
§ 12. Wyznaczenie kierunku stycznej w dowolnym punkcie łuku . . . . .	27
§ 13. Badanie łuku istniejącego toru . . . . .	30
§ 14. Poprawka odchyłki łuków z dwóch stron tyczonych . . . . .	31
§ 15. Zadania . . . . .	31
§ 16. Tyczenie serpentyn drogowych . . . . .	33
§ 17. Tyczenie łuków o małym kącie wierzchołkowym . . . . .	34
§ 18. Przystosowanie wytyczonego łuku do trasy . . . . .	38
§ 19. Do dwóch w polu wytyczonych łuków poprowadzić wspólną styczną . . . . .	39
§ 20. Z dowolnego punktu wytyczyć styczną do łuku w polu wytyczonego . . . . .	41
§ 21. Tyczenie łuków budowli wodnych . . . . .	41
§ 22. Tyczenie wypukłego brzegu . . . . .	42
§ 23. Tyczenie wklęsłego brzegu . . . . .	43
§ 24. Tyczenie łuków kosзовych . . . . .	46
§ 25. Tyczenie łuków kosзовych o dwóch łukach . . . . .	47

	Str.
§ 26. Łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni . . . . .	49
§ 27. Zastosowanie § 26 . . . . .	51
§ 28. Łuk koszowy o małym kącie wierzchołkowym . . . . .	52
§ 29. Łuk koszowy o trzech łukach . . . . .	52
§ 30. Łuk w zastępstwie krótkiej prostej . . . . .	54
§ 31. Tyczenie łuku koszowego w trudniejszych warunkach . . . . .	56
§ 32. Tyczenie łuku w tunelu . . . . .	58
§ 33. Tyczenie łuku koszowego w tunelu . . . . .	59
§ 34. Połączenie odchylonych prostych kierunków w tunelu . . . . .	59
§ 35. Przykłady tras kolejowych z tunelami . . . . .	59
§ 36. Parabola drugiego rzędu . . . . .	64
§ 37. Tyczenie paraboli . . . . .	67

## Rozdział II.

### Krzywe przejściowe.

	Str.
Wstęp . . . . .	71
§ 38. Przechyłka toru kolejowego . . . . .	72
§ 39. Ogólna teoria krzywej przejściowej . . . . .	73
§ 40. Krzywa przechyłki toru, której rzędne są proporcjonalne do długości rzutu poziomego krzywej przejściowej . . . . .	74
§ 41. Na podstawie krzywej § 40 wyprowadzone krzywe przejściowe	75
a) Klotoida . . . . .	75
b) Lemniskata . . . . .	76
c) Parabola sześcienna . . . . .	77
§ 42. Krzywa przejściowa w założeniu, że przechyłkę toru przeprowadzi się podług zmiennego nachylenia . . . . .	78
§ 43. Parabola sześcienna jako krzywa przejściowa . . . . .	78
§ 44. Łuk kołowy z krzywą przejściową . . . . .	82
§ 45. Łuk kołowy zostaje przesunięty . . . . .	86
§ 46. Położenie stycznych i środka łuku pozostaje nienaruszone . . . . .	89
§ 47. Łuk pierwotny pozostaje nienaruszony, natomiast styczna zostaje przesunięta . . . . .	90
§ 48. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy zbliża się do $180^\circ$ . . . . .	93
§ 49. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy jest bardzo mały . . . . .	95
§ 50. Zastosowanie krzywej przejściowej do budowy wodnych . . . . .	95
§ 51. Krzywa przejściowa styczna do dwóch łuków kołowych . . . . .	97
§ 52. Tyczenie krzywej przejściowej od łuku kołowego . . . . .	101
§ 53. Łuk koszowy z krzywami przejściowymi . . . . .	102
§ 54. Zastosowanie krzywych przejściowych dla przypadku, gdy prosta między łukami jednakowo skierowanymi jest krótka . . . . .	103
§ 55. Zastosowanie krzywej przejściowej na istniejących torach . . . . .	106
§ 56. Zastosowanie wzorów z § 55 b dla $d = \frac{r}{20}$ . . . . .	108
§ 57. Wyokrąglenie załomów spadków . . . . .	109
§ 58. Zagadnienie . . . . .	111
Zbiór przykładów . . . . .	121

## Uzupełnienia i ważniejsze usterki.

Do §§ 2, 6, 7 i 10 należą numera 1 do 10 zbioru przykładów.  
Zastosowanie § 11c znajduje się w numerze 11 zbioru przykładów.  
Str. 5 w wzorach na  $AB$  ma być  $y_B$  i  $x_B$  zam.  $y$  i  $x$ . Można także

$AB$  wyznaczyć z wzorów  $\frac{x_A}{\cos y}$  i  $\frac{y_A}{\sin y}$ .

Str. 11 wiersz 8 z góry, zam.  $dz$  rzutu, ma być  $d$  z rzutu.

Str. 13 wiersz 1 z dołu ma być  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .

Str. 15 w. 8 z dołu w wzorze na  $x$  ma być  $\Delta$  zam.  $A$ .

Str. 18 w. 1 z dołu ma być Topométrie, zam. Topographie.

Str. 23 w. 10 z dołu ma być  $AB'-x$ , zam.  $A'B-x$ .

Str. 29 po wierszu 6 z góry dodać: Dla  $s=s_1$  jest  $\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi_1}{2} = \frac{180-\mu}{2}$ .

Str. 36 w. 12 z góry ma być  $A_1P_1$ , zam.  $A_1P_2$ .

Str. 50 u góry dodać: Oznaczmy kąty przy  $P_1$  i  $P_2$  literami  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .

Str. 53 w. 13 z dołu opuścić: „punkt  $P_2$ “, gdyż już był wytyczony.

Str. 57 w. 5 z góry ma być raczej: o promieniu  $r_2$  i kącie  $\alpha_2$ .

Str. 60 w. 4 z góry dodać: „Promień  $r$  luków wyjęto z projektu“.

Str. 74 w. 8 z dołu po słowach: „przedstawi się“, i w. 5 z dołu po słowie: „krzywej“ dodać: „prawie“.

Str. 79 w. 4 z dołu ma być  $\frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ , zam.  $\left(\frac{3}{2} \frac{dy}{dx}\right)^2$ .

Str. 93 w. 7 i 8 z góry, zam. „niemożliwe“, ma być: „utrudnione (ob. § 54)“.

Str. 94 w. 1 z dołu zam. „wz. 23“, ma być „nr. 23“.

Str. 103 w. 9 z dołu zam. „prosta  $P$ “, ma być „prosta  $p$ “.

Str. 104 w. 1 z dołu po znaku — brakuje litery  $p$ .

Str. 120 w. 12 z dołu zam.  $P_1O_2$ , ma być  $P_1O_1$ .

Str. 122 w. 6 z góry ma być  $x = 66.0763$ .

Str. 123 w. 10 z góry ma być 9.8814557, a w. 12 z góry być 9.6727341.

Str. 135 w. 5 z dołu ma być  $\lg \tan \frac{\alpha_2}{2} = 9.1396320$ .

Str. 137 w. 2 z góry ma być  $WP_1$ , zam.  $WP_2$ .

Str. 143 w. 7 z dołu ma być 31.9753, zam. 31.9750.

Str. 144 w. 14 z góry ma być  $t' = 2.0$ , zam.  $t' = 20$

Str. 146 w. 8 z góry ma być w kącie  $\varphi + \alpha$ : 26.2, zam. 56.2“.

- Na rys. 23 należy umieścić literę  $T$  na przecięciu prostych  $MN$  i  $SO$ .
- „ „ 50a na lewym końcu stycznej w  $P$  brakuje litery  $M$ .
- „ „ 51 należy wierzchołek wieloboku opisanego między  $A$  i  $B$  oznaczyć liczbą 1, między  $B$  i  $Q$  liczbą 2, a po  $Q$  liczbą 3.
- „ „ 55 prosta  $O_1O_n$  nie musi być przedłużeniem promienia  $PO_1$ .
- „ „ 57 należy środki kół oznaczyć przez  $O_1$  i  $O_2$ .
- „ „ 60 punkt  $Q'$  ma leżeć na przecięciu prostych  $O_1M$  i  $O_3Q$ ; na prostej  $W_2W_3$  ma być  $M'$ , zam.  $M$ , zaś na końcu łuku koszowego brakuje litery  $P_2$ .
- „ „ 61 na prostej  $W_2W_3$  ma być  $t_4$ , zam.  $tu$ .
- „ „ 82 należy  $z$  i  $z_0$  zamienić, zaś w punkcie, z którego wychodzi promień  $\rho$ , należy umieścić literę  $C$ .
- „ „ 84 na stycznej  $WW_1$  należy umieścić literę  $C$  pionowo nad  $P_0$ , zaś literę  $P'$  pionowo nad  $P$ .
- „ „ 97 należy umieścić literę  $A$  na początku krzywej przejściowej.

# ROZDZIAŁ I.

## Proste, łuki kołowe i paraboliczne.

### § 1. Tyczenie trasy.

Pod trasą rozumiemy wytyczoną na gruncie oś drogi, kolei żelaznej, kanału splawnego, wodociągu lub brzeg regulowanej rzeki. Dla trasy opracowuje się projekt w sytuacji (rzut poziomy trasy) i w profilu podłużnym (rzut pionowy trasy), a podług danych otrzymanych w tym projekcie, jakoteż podług punktów nawiązkowych, znajdujących się w naturze, przenosi się trasę z projektu na grunt. Tę czynność zwiemy tyczeniem trasy.

Każda trasa składa się :

1. z linii prostych,
2. z łuków kołowych, lub parabolicznych, a nadto na trasie kolejowej
3. z krzywych przejściowych, łączących proste z łukami.

W niniejszej pracy przedstawimy w I. rozdziale tyczenie na gruncie prostych i łuków, a w II. rozdziale tyczenie krzywych przejściowych.

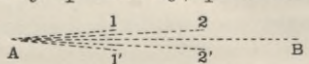
### § 2. Tyczenie linii prostych.

Prosta jest dana przez dwa punkty przeniesione z projektu na grunt, leżące na tej prostej. Wytyczyć prostą znaczy wyznaczyć dowolną ilość punktów pośrednich, położonych bądźto między tymi dwoma punktami, bądź też poza nimi. Stąd powstają dwa zadania :

- a) Tyczenie punktów pośrednich.
- b) Przedłużanie linii prostej.

## a) Tyczenie punktów pośrednich.

**1. Metoda zwykła.** Rys. 1. Dane w polu punkty  $A$  i  $B$ . Ustawiamy teodolit w  $A$  i tyczymy żerdki dokładnie w kierunku celowej  $AB$ .

Musimy o tem pamiętać, że wytyczyć linię prostą znaczy tyle, co wyznaczyć przekrój płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez dwa dane punkty tej prostej, z terenem. Jeżeli zatem oś  $A$   Rys. 1.

to oś celowa nie opisuje płaszczyzny pionowej, a rzut poziomy przekroju płaszczyzny, opisanej przez oś celową, z terenem, nie będzie identyczny z linią łączącą  $A$  i  $B$ .

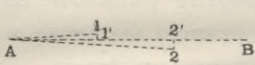
Aby błąd stąd powstały wyrugować, tyczymy każdy punkt podwójnie, w obu położeniach lunety, a szukany punkt znajdziemy w połowie odległości  $11'$ ,  $22'$ ...

**2. Metoda.** Rys. 2. Tyczymy żerdki tylko w przybliżeniu w kierunku  $AB$ . W punkcie  $A$  odmierzamy kąty:

$$BA1 = \alpha_1, \quad BA2 = \alpha_2 \dots$$

następnie mierzymy długość  $A1 = e_1$ ,  $A2 = e_2 \dots$  Odchylenia  $1$ ,  $2 \dots$  od prostej  $AB$  wyznaczają się z wzorów:

$$11' = e_1 \operatorname{tang} \alpha_1, \quad 22' = e_2 \operatorname{tang} \alpha_2 \dots$$

Ponieważ kąty  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , są bardzo  Rys. 2.

małe, to możemy napisać:

$$11' = \frac{e_1 \alpha_1''}{206265}, \quad 22' = \frac{e_2 \alpha_2''}{206265} \dots$$

Te długości odczytamy z diagramu podanego na rys. 10. i tyczymy prostopadłe do  $A1$ ,  $A2 \dots$ , przezco otrzymamy prawdziwe punkty  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ... prostej.

**3. Metoda ogólna.** Rys. 3. Jeżeli między punktami  $A$  i  $B$  są przeszkody (las, etc.), to obieramy punkty dogodne  $C$ ,  $D$  i mierzymy:  $AC = a$ ,  $BD = b$ ,  $CD = c$ , i kąty:  $\alpha$ ,  $\beta$ . Dla wyznaczenia pośredniego punktu  $E$  leżącego na prostej  $AB$  mamy równania, gdy oznaczymy  $CE$  przez  $x$ ,  $ED$  przez  $y$ :

$$x + y = c = CD; \tag{1}$$

następnie: 
$$\frac{x}{a} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\sin(\beta + \varphi)^*}{\sin \varphi}$$

\*) Funkcje trygonometryczne kątów zawiera tabela II. części II.

lub, gdy wykonamy dzielenie przez  $\sin \varphi$ :

$$\frac{x}{a} = \sin \alpha \cotg \varphi + \cos \alpha, \quad \frac{y}{b} = \sin \beta \cotg \varphi + \cos \beta,$$

a stąd:

$$\text{tang } \varphi = \frac{a \sin \alpha}{x - a \cos \alpha} = \frac{b \sin \beta}{y - b \cos \beta}, \text{ więc:}$$

$$x b \sin \beta - y a \sin \alpha = -ab \sin(\alpha - \beta). \quad (2)$$

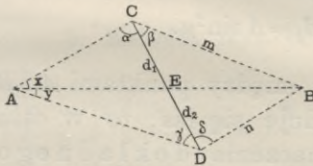
Równania 1. i 2. są to równania zasadnicze ty-  
czenia ogólnego; one pozwolą wyznaczyć  $x$  i  $y$ . Miano-  
wicie, gdy się wstawi wartość  $y = c - x$  z (1) równania w (2)  
otrzyma się:

$$x = a \frac{c \sin \alpha - b \sin(\alpha - \beta)}{a \sin \alpha + b \sin \beta}, \text{ również:}$$

$$y = b \frac{c \sin \beta + a \sin(\alpha - \beta)}{a \sin \alpha + b \sin \beta}.$$

Dla  $\alpha = \beta$ , jest  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .

Jeżeliby długości  $a$  i  $b$  na rys. 3. nie można zmierzyć,  
(np. gdy  $A$  i  $B$  są wieżami), to  
zmierzymy kąty  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , jakoteż  
długość  $CD = \Delta$  (Rys. 4.).



Rys. 4.

Punkt  $E$  na kierunku  $AB$  będzie  
wyznaczony, skoro wyznaczymy dłu-  
gość  $d_1$ , ewentualnie  $d_2$ . Oznaczmy  
tymczasem proste  $CB$  i  $BD$  literami

$m$  i  $n$ , to z trójkątów  $ACB$ ,  $ADB$  i  $BCD$ , znajdziemy:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin x} = \frac{AB}{m}$$

$$\frac{\sin y}{\sin(\gamma + \delta)} = \frac{n}{AB}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \beta} = \frac{m}{n}.$$

Wymnóżmy obie strony tych równań, a otrzymamy:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) \sin y \sin \delta}{\sin x \sin(\gamma + \delta) \sin \beta} = 1. \quad (3)$$

Następnie z trójkątów  $AEC$  i  $AED$ :

$$\frac{d_1}{AE} = \frac{\sin x}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AE}{d_2} = \frac{\sin \gamma}{\sin y}$$

a po obustronnem wymnożeniu:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin x}{\sin y}$$

Z (3) równania wynika, że:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \delta \sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin (\gamma + \delta)}, \text{ więc:}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \delta \sin \gamma \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta \sin (\gamma + \delta)}$$

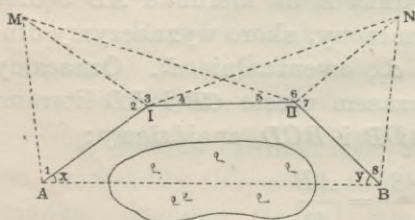
Podstawmy ten wyraz równy  $\tan^2 \mu$ , jeżeli  $\mu$  jest kątem pomocniczym i dodajmy obustronnie  $+1$ , to:

$$1 + \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_2} = 1 + \tan^2 \mu. \text{ A gdy } d_1 + d_2 = \Delta, \text{ zaś:}$$

$$1 + \tan^2 \mu = \frac{1}{\cos^2 \mu}, \text{ to:}$$

$$d_2 = \Delta \cos^2 \mu, \text{ a podobnie } d_1 = \Delta \sin^2 \mu.$$

#### 4. Metoda ogólna. Rys. 5. Jeżeli między punktami $A$ i $B$



Rys. 5.

znajduje się las, to w celu wyznaczenia dokładnego kierunku  $AB$  położymy wokoło lasu wielobok  $AIII$  i obierzemy dwa dowolne punkty  $M$  i  $N$  tak położone, aby do  $M$  można celować z  $A$ ,  $I$  i  $II$ , zaś do  $N$  z  $I$ ,  $II$  i  $B$ . Zmierzymy kąty:

1 2 3 4 5 6 7 8. Długość  $I, II$  obierzemy dowolnie, równą  $b$ . Przez wyznaczenie kątów  $x$  i  $y$  będzie kierunek  $AB$  ustalony.

$$IM = b \frac{\sin 5}{\sin (3+4+5)}; AI = IM \frac{\sin (1+2)}{\sin 1}$$

zatem: 
$$AI = a = b \frac{\sin 5 \sin (1+2)}{\sin (3+4+5) \sin 1}$$



podobnie:  $B\Pi = c = b \frac{\sin 4 \sin(7+8)}{\sin(4+5+6) \sin 8}$

Następnie obliczymy współrzędne wieloboku  $AIII B$ , obrawszy początek współrzędnych w  $A$ , oś odciętych w  $AI$ , oś rzędnych prostopadłe do  $AI$ :

$$x_A = 0 \quad x_I = a \quad x_{II} = x_I + b \cos(2+3+4-180^\circ)$$

$$y_A = 0 \quad y_I = 0 \quad y_{II} = b \sin(2+3+4-180^\circ)$$

$$x_B = x_{II} + c \cos(2+3+4+5+6+7-360^\circ)$$

$$y_B = y_{II} + c \sin(2+3+4+5+6+7-360^\circ)$$

Ostatecznie jest  $\tan x = \frac{y_B}{x_B}$ .

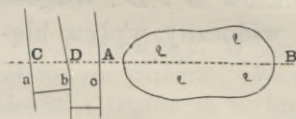
W podobny sposób obliczy się  $\tan y$ , a dla kontroli ma być:

$$x + y = (2+3+4+5+6+7) - 360^\circ$$

Jeżeliby zależało także na poznaniu długości  $AB$ , wtedy nie można długości  $b$  przyjąć dowolnie, lecz trzeba jeden z boków  $a$ ,  $b$  lub  $c$  zmierzyć, dwa inne boki podług powyższych wzorów obliczyć, następnie obliczyć  $x_B$ ,  $y_B$  i  $\tan x$ . Długość  $AB$  obliczy się wzorów:

$$AB = \frac{y}{\sin x}, \quad \text{lub} \quad AB = \frac{x}{\cos x}$$

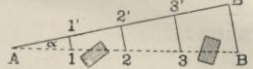
**5. Metoda.** Rys. 6. Przybliżony kierunek trasy  $AB$  znajdziemy, odmierzywszy na gruncie zmierzone w projekcie odstępki kilku przecięć linii  $AB$  z liniami parcel, od najbliższych granic parcel ( $a, b, c, \dots$ ).



Rys. 6.

Również można za pomocą busoli taki przybliżony kierunek na gruncie wyznaczyć.

**6. Metoda.** Rys. 7. W celu wyznaczenia kilku punktów prostej  $AB$ , na której znajdują się przeszkody, tyczymy na wolnej przestrzeni pod małym kątem  $\alpha$  prostą  $1', 2', 3', \dots$  tak daleko, aż będzie możliwość odrzucenia punktu  $B$  prostopadłe na  $AB'$  i zmierzmy długość  $A1'2' \dots B'$ , jakoteż  $BB'$ .

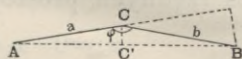


Rys. 7.

W diagramie rys. 10. wyszukamy linię kąta  $\alpha$ , a na niej odczytamy wprost wartości  $1'1, 2'2, \dots$  przynależnych do odstępów  $A1', A2' \dots$  (z warunku, że  $1'1 = A1' \tan \alpha \dots$ ). Te

wartości odniesione na prostopadłych do  $AB'$ , wyznaczają punkty 1, 2, 3... prostej  $AB$ .

**7. Metoda.** Rys. 8. Jeżeli między punktami  $A$  i  $B$  znajduje się wyniosłość, to przyjmiemy na niej punkt  $C$ , w pobliżu prostej  $AB$ , a punkt  $C'$ , leżący na prostej  $AB$  wyznaczymy w następujący sposób: Mierzmy kąt  $\varphi$  dokładnie, zaś długości  $a$  i  $b$  tachymetrycznie. Wtedy jest w przy-



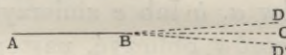
Rys. 8.

bliżeniu powierzchnia  $\Delta ACB = \frac{1}{2} ab \sin \varphi = \frac{1}{2} (a+b)CC'$ , zatem

$$CC' = \frac{ab}{a+b} \sin \varphi.$$

b) *Przedłużanie linii prostej.* Rys. 9.

Błąd kolimacyjny ( $k$ ) instrumentu wpływa oczywiście w całości na wynik. Jeżeli bowiem stojąc w punkcie  $B$  z instrumentem celujemy wstecz do  $A$ , poczem przerzucimy lunetę, to otrzymamy zamiast kierunku  $BC$ , kierunek



Rys. 9.

$BD$ , przyczem  $\sphericalangle ABD = 180 - 2k$ . Jeżeli teraz obrócimy limbus o  $180^\circ$ , znów celujemy do  $A$  i przerzucimy lunetę, to otrzymamy kierunek  $BD'$  po drugiej stronie prostej  $BC$ . Punkt prostej  $BC$  leży pośrodku odległości punktów  $D$  i  $D'$ . Wogóle przy tyczeniu prostych jest najbardziej widoczny wpływ błędów instrumentu na wynik pomiarów.

### § 3. Nomogram do tyczenia prostych. Rys. 10.

Przy tyczeniu prostych wypada często obrachować ilości

$$\varepsilon = e \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

dla bardzo małych kątów  $\alpha$ . Możemy napisać:

$$\operatorname{tang} \alpha = \alpha'' \sin 1'' = \frac{\alpha''}{206265}, \text{ więc:}$$

$$\varepsilon = \frac{e \alpha''}{206265}$$

Jeżeli więc narysujemy  $e$  w skali  $1:M$  jako  $e_1$ , zaś  $\varepsilon$  w skali  $1:m$  jako  $\varepsilon_1$ , przyczem należy obrać liczbę  $M$  wielką w stosunku do  $m$ , to  $e = e_1 M$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 m$ .

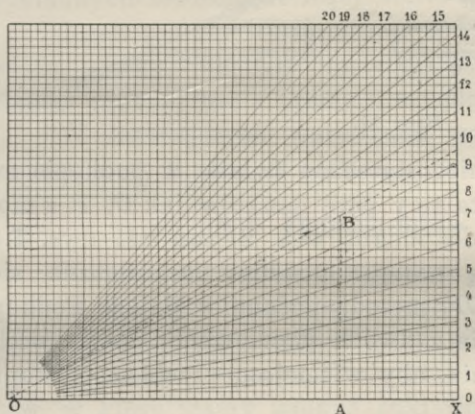
Po wstawieniu tych wartości we wzór na  $\varepsilon$  otrzymamy:

$$\varepsilon_1 m = \frac{e_1 M \alpha''}{206265}, \text{ czyli:}$$

$$\varepsilon_1 = e_1 \left( \frac{M \alpha''}{m 206265} \right) = e_1 \tan \varphi,$$

gdzie: 
$$\tan \varphi = \frac{M \alpha''}{m 206265} \dots a.$$

W celu otrzymania nomogramu rysujemy od punktu  $O$



Rys. 10.

promienie, nachylone do prostej  $Ox$  pod kątami  $\varphi$ , których tangens obliczy się z wzoru  $a$ . dla  $\alpha = 1', 2', 3' \dots$  i oznaczmy końce tych promieni przynależnymi kątami  $\alpha$ . Jeżeli następnie na linii  $Ox$  odetniemy długość  $e$  w skali  $1:M$  od  $O$  do  $A$  i wystawimy w  $A$  rzędną aż do przecięcia się z promieniem danego kąta  $\alpha$ ,

w punkcie  $B$ , to  $AB$  mierzone w skali  $1:m$  da szukaną długość  $\varepsilon$ .

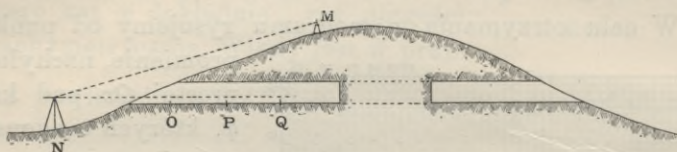
Przykład. W nomogramie na rys. 10., wykonanym na milimetrycznym papierze, rysowano  $\tan \varphi = 200 \tan \alpha$ , czyli  $M:m = 200$ , zatem i rzędne są wykreślone w skali 200 razy większej niż odcięte. Niech będzie dane  $e = 44 \cdot 35 m$ ,  $\alpha = 9'30''$ . Przyjmijmy  $M = 1000$ , to znaczy, że odcinamy  $e$  w skali  $1:1000$  od  $O$  do  $A$ , to  $OA = 44 \cdot 35 mm$ . Rzędna w  $A$  przecina promień dla kąta  $9'30''$  w punkcie  $B$ . Na  $AB$  odczytujemy długość  $\varepsilon_1 = 24 \cdot 5 mm$ . Ponieważ rzędne są kreślone w skali 200 razy większej niż odcięte, to  $\varepsilon$  mamy odczytać w skali  $1:5$ , zatem  $\varepsilon = e \tan \alpha = 5 \cdot \varepsilon_1 = 122 \cdot 5 mm$ .

#### § 4. Tyczenie prostych w tunelach.

Jeżeli oś tunelu jest prosta, to kierunek tej prostej ma być wprowadzony w podkop, który poprzedza wykonanie tunelu, następnie trzeba ten kierunek w miarę postępu podkopu przedłużać. Wyznaczenie kierunku osi podkopu może być dwojakie, zależne od długości tunelu.

a) *Tyczenie prostych w krótszych tunelach.* Rys. 11.

Trasę wytycza się przez górę, pod którą ma być wykonany tunel. Jeżeli punkty  $M$  i  $N$  są dokładnymi punktami trasy, z których  $N$  jest punktem dogodnym dla ustawienia teodolitu, zaś  $M$  punktem możliwie daleko położonym, natenczas celujemy do  $M$  i tę celowę wprowadzamy do podkopu



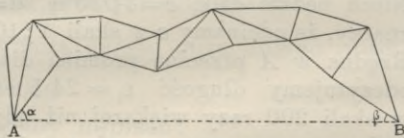
Rys. 11.

tak daleko, jak daleko niedostateczne światło w podkopie na to pozwoli. Tą celową ustalamy parę punktów jak  $O$ ,  $P$ , z możliwą dokładnością, metodą podaną w § 2. pod *a*1. (rys. 1.). Dalsze tyczenie w miarę postępu podkopu uskutecznia się przez przedłużanie linii  $OP$ , metodą podaną w §. 2. *b*. Podkop uskutecznia się przeważnie z dwóch stron, trzeba zatem wielkiej staranności w tyczeniu, aby w miejscu przebicia podkopu oś się zgodziła.

b) *Tyczenie prostych w długich tunelach.* Rys. 12.

Tunele pod głównymi alpejskimi działami wód posiadają kilka do kilkunastu kilometrów długości\*).

Przez tak wysokie szczyty i przepaściste tereny, z jakimi w tym wypadku ma się do czynienia, jest wytyczenie i pomiar trasy na gruncie zbyt uciążliwe, albo wprost niemożliwe, dlatego ustala się w inny sposób kierunek osi tunelu. Po obu stronach działu wód obiera się dogodne punkty  $A$  i  $B$ , między którymi jest projektowane przebicie tunelu. Te punkty nawiązuje się albo do istniejącej, albo specjalnie w tym celu założonej sieci tryangulacyjnej, a za pomocą tej sieci oblicza się długość  $AB$  i kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , zawarte między



Rys. 12.

\*) Do najdłuższych należą tunele przez Mont Cenis 12.200 m dł., przez Gottard 14.900 m dł., przez Arlberg 10.250 m dł. i przez Simplon 19.730 m dł.

prostą  $AB$  a najbliższymi bokami sieci\*\*). Podług tych kątów tyczyć się z dwóch stron oś tunelu w podkopie.

Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  muszą być bardzo dokładnie wyznaczone, gdyż błąd w kącie wynoszący  $10''$  powoduje:

na	1	10	20 km długości
odchyłkę	0.05	0.5	1.0 m.

Dlatego używa się do pomiaru kątów siatki nadzwyczaj dokładnych teodolitów. Kąty siatki trzeba należycie wyrównać.

Jeżeli punkty katastralne, do których miałyby się nawiązać siatkę, nie były dostatecznie dokładnie oznaczone, to pomiar osobnej basis będzie niezbędną.

W łatwiejszych warunkach wyznaczy się kierunek  $AB$  metodą w §. 2. pod 4. podaną.

### § 5. Tyczenie łuków kołowych.

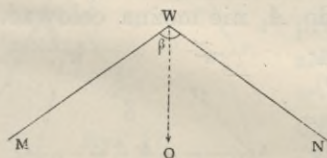
Kolejno po sobie następujące proste kierunki, przeniesione z projektu na grunt, o jakich mówiono w poprzednich paragrafach, przecinają się w punktach, które zwiemy punktami wierzchołkowymi. One są wierzchołkami kątów, w które mamy włożyć łuki kołowe, łączące proste kierunki trasy.

Dla tych łuków należy:

1. określić elementa zasadnicze,
2. wytyczyć punkty główne,
3. wytyczyć punkty pośrednie.

### § 6. Określenie elementów zasadniczych.

Elementami zasadniczymi i wystarczającymi dla tyczenia łuku są to kąt wierzchołkowy  $\beta$ , który zawierają proste kierunki i promień łuku  $r$ . Wielkość promienia jest już dana z projektu, pozostaje zatem wyznaczenie kąta  $\beta$ . Rozróżniamy różne przypadki.



Rys. 13.

a) Punkt wierzchołkowy  $W$  jest dostępny. (Rys. 13.). Ustawiamy się w punkcie  $W$  przyrządem kątomierniczym i wykonujemy

\*\*\*) O przeprowadzeniu takiego obliczenia patrz: Rosenmund, tyczenie tunelu Simplonńskiego i rozprawa o kolei „Albula“ w Schweizerische Bauzeitung z r. 1903.

dokładny pomiar kąta  $\beta$ , podług metod podanych w miernictwie. Równocześnie należy wytyczyć kierunek prostej  $WO$  połowiącej ten kąt, bo się nam później przyda.

b) Punkt wierzchołkowy nie jest dostępny, albowież bardzo oddalony, co nastąpi, gdy kąt  $\beta$  jest mały. (Rys. 14.). Wtedy obieramy na danych prostych dowolne punkty  $A$  i  $A_1$ , byleby dokładny pomiar długości  $d$  prostej  $AA_1$  był możliwy. Następnie wykonamy dokładny pomiar kątów  $\gamma$  i  $\delta$  i obliczymy:

$$\beta = \gamma + \delta - 180^\circ$$

jakoteż długości:

$$WA = b = \frac{d}{\sin \beta} \sin \delta, \quad WA_1 = c = \frac{d}{\sin \beta} \sin \gamma.$$

Jeżeli prostej  $AA_1$  nie można wprost zmierzyć jak na rys. 15. z powodu przeszkody (np. rzeka), to odmierzymy dwie dowolne długości  $AB = a$  i  $A_1B_1 = a_1$ , jakoteż kąty  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi$ ,  $\psi_1$ . Wtedy:

$$AA_1 = d = \frac{a \sin(\varphi + \psi_1)}{\sin \psi_1} = \frac{a_1 \sin(\varphi_1 + \psi)}{\sin \varphi_1}$$

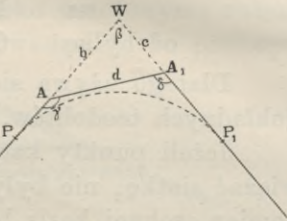
Obydwa wzory należy obliczyć w celu kontroli.

Następnie:

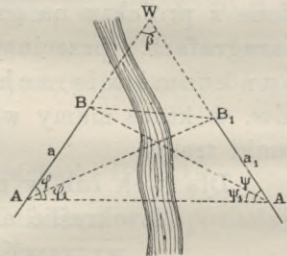
$$\beta = 180 - (\varphi + \psi), \quad WA = b = \frac{d}{\sin \beta} \sin \psi, \quad WA_1 = c = \frac{d}{\sin \beta} \sin \varphi.$$

c) Zadanie jak pod b, gdy z  $A$  do  $A_1$  nie można celować. Wtedy należy te punkty połączyć ciągiem polygonalnym, np.  $A_1 2 A$  rys. 16\*). Zmierzymy długości boków oraz zaznaczone kąty polygonu  $\varepsilon$  i  $\varphi$  a obliczymy  $AA_1 = d$ , jakoteż kąty  $\mu$  i  $\nu$  w następujący sposób:

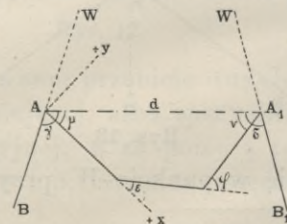
Oś  $X$ -ów obierzemy na kierunku  $AA_1$ , początek układu w  $A$ , wtedy:



Rys. 14.



Rys. 15.



Rys. 16.

\*) Punkt 1 należy do kąta  $\varepsilon$ , punkt 2 do kąta  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}x_{A_1} &= 0, & x_1 &= A_1, & x_2 &= x_1 + 12 \cos \varepsilon, \\y_{A_1} &= 0, & y_1 &= 0, & y_2 &= y_1 + 12 \sin \varepsilon, \\x_{A_2} &= x_2 + A_1 2 \cos(\varepsilon + \varphi), \\y_{A_2} &= y_2 + A_1 2 \sin(\varepsilon + \varphi).\end{aligned}$$

Z tych współrzędnych obliczymy:  $\operatorname{tang} \mu = \frac{y_{A_2} - y_{A_1}}{x_{A_2} - x_{A_1}}$  i wyznaczmy kąt  $\mu$ , poczem:

$$d = \frac{y_{A_2} - y_{A_1}}{\sin \mu}, \text{ lub } d = \frac{x_{A_2} - x_{A_1}}{\cos \mu}, \quad \nu = \varepsilon + \varphi - \mu.$$

Dla kontroli można obliczyć długość  $dz$  rzutu polygonu na kierunek  $AA_1$ . Otrzyma się:

$$d = A_1 \cos \mu + 12 \cos(\mu - \varepsilon) + A_1 2 \cos \nu.$$

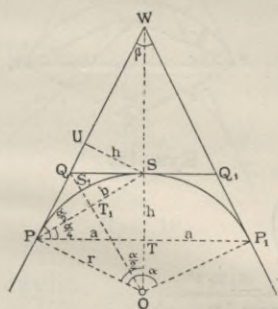
Po zmierzeniu kątów  $B_1A_1$  i  $B_1A_1 2$  i doliczeniu do nich kątów  $\mu$  i  $\nu$ , wyznaczają się kąty  $\gamma$  i  $\delta$ , nareszcie:

$$\beta = \gamma + \delta - 180^\circ.$$

W celu osiągnięcia większej dokładności można niezależnie od ciągu  $A_1 2 A_1$ , poprowadzić drugi ciąg polygonalny, najlepiej po drugiej stronie, aby mieć polygon zamknięty\*).

## § 7. Tyczenie głównych punktów.

Głównymi punktami nazywamy (patrz rys. 17) punkty styczności  $P$  i  $P_1$  łuku z danymi prostymi, następnie punkt środkowy łuku  $S$ , leżący na przecięciu prostej połowiącej kąt wierzchołkowy z łukiem; nareszcie punkty  $Q$  i  $Q_1$ , punkty wierzchołkowe połówek łuku, leżące na przecięciu stycznej poprowadzonej w punkcie  $S$  z danymi prostymi.



Rys. 17.

kąt przy  $O$ :

$$\alpha = 180^\circ - \beta,$$

$PW = P_1W = t = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ , zowie się krótko styczną łuku.

\*) Kontrolę rachunków do rys. 14, 15 i 16 obacz § 9.

$$WO = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{zatem: } WS = WO - SO = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} - r = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4},$$

$$PQ = QS = SQ_1 = Q_1P_1 = t_1 = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4},$$

$$QS_1 = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{4}} - r = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{8},$$

$$PT = P_1T = a = r \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$ST = h = SO - TO = r \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2r \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right) *).$$

Nie trudno zauważyć, że prosta  $PS$  połowi kąt  $WPP_1$ , i że zawiera z prostymi  $PW$  i  $PP_1$  kąt  $\frac{\alpha}{4}$ . Stąd wynika, że prosta  $SU$  poprowadzona prostopadłe do  $PW$  równa się  $h$ , zaś  $PU$  równa się  $a$ .

Jeżeli tyczenie głównych punktów sposobem powyżej podanym jest z powodu przeszkód niemożliwe, to można dowolny punkt łuku  $M$  w inny sposób na gruncie wyznaczyć (rys. 18). Obierzemy w pobliżu łuku dowolny punkt  $C$  i zmierzmy kąty  $\mu$  i  $\nu$ , jakoteż długość:  $PP_1 = 2a$ . Chodzi o wyznaczenie długości  $CM = x$ . Z rys. 18 wynika, że:

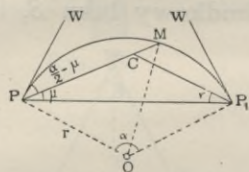
$$PC = 2a \frac{\sin \nu}{\sin (\mu + \nu)},$$

$$PM = 2r \cos \left( 90 - \frac{\alpha}{2} + \mu \right),$$

$$\text{zatem: } x = PM - PC = 2r \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) - 2a \frac{\sin \nu}{\sin (\mu + \nu)},$$

co należy od punktu  $C$  w kierunku  $PC$  odmierzyć.

Liczba głównych punktów powinna być tem większa, im dłuższy jest łuk, aby skrócić partye, w których się tyczą punkty pośrednie (§ 10).



Rys. 18.

\*) Wszystkie powyższe wartości wyznaczy się podług tabeli II. części II.



### § 8. Postępowanie przy tyczeniu głównych punktów.

Po wyznaczeniu kątów  $\beta$  i  $\alpha$  i obrachowaniu ilości z § 7 odmierzy się długości  $WP=WP_1=t$  (rys. 17), albo długości  $t-b=AP$  i  $t-c=A_1P_1$  (rys. 14), przez co początek i koniec łuku  $P$  i  $P_1$  będą ustalone. Następnie odmierzy się  $PQ=P_1Q_1$ , a na prostej  $QQ_1$  długości  $QS=SQ_1$ , które mają być równe  $PQ$ . Dla kontroli punktu  $S$  powinno wypaść  $SU=h$  i  $PU=a$ , co należy zmierzyć.

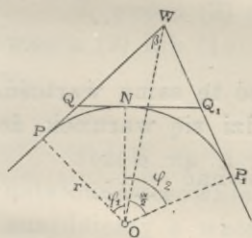
Również dla kontroli możnaby zmierzyć kąty w  $Q$  i  $Q_1$  równe  $180-\frac{\alpha}{2}$ , a jeżeliby na połowiącej tych punktów odcięło się długości  $QS_1$ , uzyskaloby się dalsze dwa główne punkty, co mianowicie przy długich łukach jest wskazane.

Między głównymi punktami wytyczy się punkty pośrednie podług wskazówek § 10.

Dla łuków o małym kącie środkowym zachodzi nieraz trudność wyznaczenia głównych punktów. Te przypadki są omówione w §§ 16, 17, 21, 22, 23, 31 i 32.

### § 9. Kontrole rachunków. Rys. 19.

Przypuśćmy, że prosta  $QQ_1$  jest styczną do łuku w punkcie  $N$ , wtedy wiemy, że:



Rys. 19.

$$PW=t=r \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$PQ=t_1=r \tan \frac{\varphi_1}{2}=QN,$$

$$P_1Q_1=t_2=r \tan \frac{\varphi_2}{2}=NQ_1.$$

Z trójkąta  $WQ_1Q$  wynika, że:

$$\frac{QQ_1}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} = \frac{WQ}{\sin \varphi_2},$$

czyli:  $(t-t_1) \sin(\varphi_1+\varphi_2) = (t_1+t_2) \sin \varphi_2$ ,

i podobnie:  $(t-t_2) \sin(\varphi_1+\varphi_2) = (t_1+t_2) \sin \varphi_1$

jako próba rachunku.

Jeżeli:  $\varphi_1=\varphi_2=\frac{\alpha}{2}$ , jak na rys. 17, to punkt  $N$  przejdzie w środek łuku  $S$ , a próba opiewa:

$$(t-t_1) \sin \alpha = 2t_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ czyli: } (t-t_1) \cos \frac{\alpha}{2} = t_1.$$

Jeżeli kąt  $\beta$  został pośrednio wyznaczony, jak na rys. 14, 15 lub 16, to, gdy na rys. 20:  $PW=t=r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ , jest:

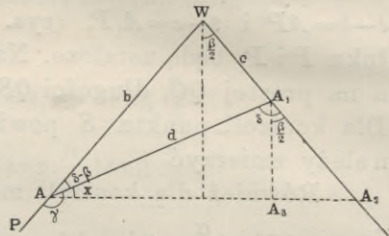
$$AP=t-b, \quad A_1P_1=t-c.$$

Odejmijmy:  $P_1A_2=PA$ , to kąt:

$$x = \left(90 - \frac{\beta}{2}\right) - (\delta - \beta) = 90 + \frac{\beta}{2} - \delta,$$

a gdy:

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma + \delta}{2} - 90, \text{ to: } x = \frac{\gamma - \delta}{2}.$$



Rys. 20.

Spuścimy z  $A_1$  prostą  $A_1A_3$ , prostopadłą do  $AA_2$ , to z trójkątów  $AA_1A_3$  i  $A_1A_2A_3$  wynika:

$$A_1A_3 = A_1A_2 \cos \frac{\beta}{2} = d \sin \frac{\gamma - \delta}{2},$$

czyli: 
$$(A_1P_1 - AP) \cos \frac{\beta}{2} = d \sin \frac{\gamma - \delta}{2},$$

lub: 
$$(b - c) \cos \frac{\beta}{2} = d \sin \frac{\gamma - \delta}{2}.$$

Ten wzór należy obrachować dla kontroli rachunków.

Dalszą kontrolę da nam warunek, że na rys. 17:

$$\frac{TS}{SW} = \frac{a}{t}.$$

Obydwa stosunki obliczone mają mieć tę samą wartość.

Nareszcie z trójkąta  $PTO$  wyprowadzi się warunek, że

wyjęta z tabel wartość:  $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$  ma się równać  $\frac{a}{r-h}$ .

## § 10. Tyczenie punktów pośrednich.

Pomiędzy główne punkty, wyznaczone możliwie dokładnie, tyczy się punkty pośrednie co 5 m, do najwyżej 20 m, za pomocą następujących różnych metod.

a) *Metoda tangencyalna (tyczenie rzędnemi od stycznej).*

Jeżeli  $M$  na rys. 21 jest głównym punktem, a  $MN_1$  styczną do łuku w tym punkcie, to zachodzi związek:

$$(r-y)^2 + x^2 = r^2. \quad (1)$$

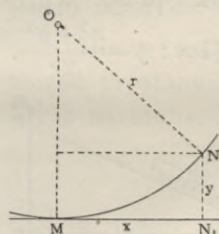
Z tego równania lub wprost z rysunku wyznaczy się:

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad (2)$$

jako dokładny wzór, podług którego dla obranych wartości  $x$  (np. co 2, 5 lub 10  $m$ ) obrachowano rzędne  $y$  w tabeli III. części II.

Z wzoru (1) otrzymamy:

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r}. \quad (1a)$$



Rys. 21.

Dla płaskich łuków jest:  $\frac{y^2}{2r}$  tak małą ilością wobec  $\frac{x^2}{2r}$ , że można ją opuścić, a wtedy otrzymamy prosty przybliżony wzór:

$$y = \frac{x^2}{2r}. \quad (3)$$

Jestto równanie paraboli o parametrze  $r$ , którą zastąpiliśmy łukiem kołowym. Rzędne rosną w kwadracie odciętych, więc:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = x_1 & \text{ jest } y = y_1, \\ \text{„ } x = 2x_1 & \text{ „ } y = 4y_1, \\ \text{„ } x = 3x_1 & \text{ „ } y = 9y_1, \\ & \text{i t. d.} \end{aligned}$$

Z wzoru (3) otrzymamy  $y$  mniejsze niż z dokładnego wzoru (2) lub (1a), a błąd popełniony wynosi:

$$\Delta = \frac{y^2}{2r}, \text{ a stąd: } y \approx \sqrt{2r\Delta}. \quad (4)$$

Jeżeli za  $\Delta$  wstawimy granicę dopuszczalnego błędu, ustaloną stosownie do dokładności, którą chcemy uzyskać, to znajdziemy z wzoru (4) granicę dla rzędnej  $y$ . Gdy w (4) wzór wstawi się:  $y = \frac{x^2}{2r}$ , to się otrzyma:  $\Delta = \frac{x^4}{8r^3}$ , skąd:  $x \approx \sqrt[4]{8r^2\Delta}$ , jako granicę dla  $x$ . Jednakże ten wzór nie jest wygodny do rachowania.

Np. jeżeli dopuścimy błąd:  $\Delta = 0.01 m$ , to dla:

$$\begin{aligned} r = 10, 20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000 m, \\ \max y = 0.447, 0.632, 1.000, 1.414, 2.000, 2.450, 3.162, 4.472 m. \end{aligned}$$

Zróźniczkujemy wzór (3):

$$dy = \frac{x}{r} dx. \quad (5)$$

To równanie zużytkujemy, aby dla pośrednich wartości  $x$ , nie znajdujących się w tabelach, szybko obliczyć  $y^*$ ). Np. chcielibyśmy obliczyć rzędną dla  $x=31$  m i  $r=400$  m. W tabeli III. znajdziemy dla  $x=30$ ,  $y=1.127$ . Tu  $dx=1$  m, więc:

$$dy = \frac{30}{400} \cdot 1 = 0.075,$$

zatem:  $y = 1.127 + 0.075 = 1.202$  m, dla  $x=31$  m.

Wzór (3) może dać dokładniejszy wynik, przez wprowadzenie poprawki, do której użyjemy wzoru (1a):  $y = \frac{x^2 + y^2}{2r}$ .

Obliczymy naprzód podług przybliżonego wzoru:  $y_1 = \frac{x^2}{2r}$  i odmierzymy od  $P$  do  $P_1$ .

Następnie zmierzmy  $AP_1 = s_1$ , a gdy  $s_1 = \sqrt{x^2 + y_1^2}$ , to podług (1a) drugie przybliżenie jest:  $y_2 = \frac{s_1^2}{2r}$ ,

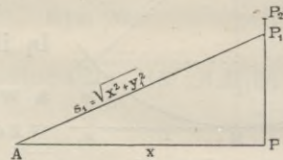
co obliczymy i odmierzymy od  $P$  do  $P_2$ .

Np. dla  $r=400$  i  $x=30$ , obliczy się:  $y_1 = \frac{900}{800} = 1.125$ .

Gdy zmierzmy:  $s_1 = 30.02$ , to:

$$y_2 = \frac{901.2}{800} = 1.1265,$$

zgodnie z dokładną wartością 1.127.

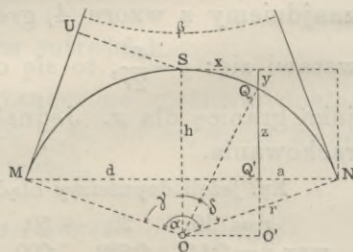


Rys. 22.

### b) Tyczenie od cięciwy. Rys. 23.

Zamiast tyczenia pośrednich punktów łuku od stycznej w  $M$ ,  $N$  lub  $S$  za pomocą rzędnych, opisanego pod (a), możemy te punkty tyczyć za pomocą rzędnych od cięciwy, łączącej dwa główne punkty  $M$  i  $N$ . W tym celu należy długość  $MN=2d$  zmierzyć.

Przedłużmy dowolną rzędną  $z$  do przecięcia w  $O'$  z równoległą do  $MN$ , poprowadzoną z punktu  $O$ , to w prostokątnym trójkącie  $OQO'$ , jest:



Rys. 23.

\*) Ob. także rozprawę p. Schulze w Allg. Vermessungs-Nachrichten nr. 25 z r. 1902 p. t.: „Ueber das Stationiren von Kreiskrümmungen“.

$$\sphericalangle OQO' = \frac{\alpha}{2} - \delta = \frac{\gamma - \delta}{2}, \text{ zatem: } O'Q = r \cos \frac{\gamma - \delta}{2},$$

$$O'Q' = r \cos \frac{\alpha}{2} = r \cos \frac{\gamma + \delta}{2},$$

zatem:

$$z = O'Q - O'Q' = r \left( \cos \frac{\gamma - \delta}{2} - \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \right) = 2r \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}, \quad (6)$$

jestto wzór dokładny dla obrachowania rzędnych  $z$ .

Dla płaskich łuków o małych kątach  $\alpha$  można zastosować prostszy wzór przybliżony, podstawiając arcus kątów  $\gamma$  i  $\delta$  za sinus. Wtedy:

$$z = 2r \operatorname{arc} \frac{\gamma}{2} \operatorname{arc} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} r \operatorname{arc} \gamma \operatorname{arc} \delta.$$

A jeżeli zważymy, że  $r \operatorname{arc} \gamma$  i  $r \operatorname{arc} \delta$  są to łuki  $MQ$  i  $QN$ , to ostatecznie:

$$z = \frac{MQ \cdot QN}{2r}, \quad (7)$$

wzór przybliżony dający trochę za wielkie rzędne.

Wzór w tej formie bywa nieraz w innych przypadkach stosowany; dla celów tyczenia nie jest przydatny, gdyż długości łuków nie znamy.

Inny wzór przybliżony otrzymamy, zastępując płaski łuk kołowy parabolą podług wz. (3). Jeżeli  $NQ'$  oznaczymy literą  $a$ , to ten wzór przejdzie w następujący:

$$y = \frac{(d-a)^2}{2r}, \text{ a dla punktu } N: h = ST = \frac{d^2}{2r}.$$

$$\text{Otóż: } z = h - y = \frac{d^2 - (d-a)^2}{2r} = \frac{a(2d-a)}{2r}.$$

Oznaczmy  $MQ' = 2d - a = b$ , to ostatecznie:

$$z = \frac{a \cdot b}{2r}, \text{ a dla środka: } h = \frac{d^2}{2r}^* \quad (8)$$

Wzory proste, które pozwalają na polu obliczyć  $z$  dla dowolnych odcinków. Z (8) wzoru obliczone  $z$  daje cośkolwiek mniejszą wartość, niż  $z$  wzoru (6). Różnica  $\Delta$  wyznacza się również wzorem (4), zatem granice dla  $z$  są te same, które poprzednio podano dla  $y$ . Metoda ta z powodu swej prostoty jest chętnie stosowana (Ob. nr. 11 zbioru przykładów).

\*) Ob. także § 37. d.

## c) Tyczenie ze środka.

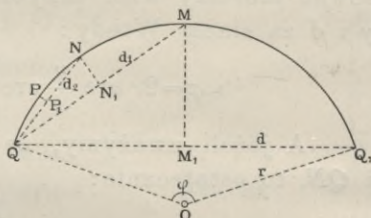
Jestto to sposób pod (b) podany, gdy się uwzględni tylko rzędną w środku cięciwy. W tym celu zmierzy się długość cięciwy, wystawi w jej środku prostopadłą i odmierzy długość określoną wz. 2. I tak (rys. 24):

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } QQ_1=2d, \text{ jest } MM_1=r-\sqrt{r^2-d^2} \\ \text{dla } QM=2d_1, \text{ jest } NN_1=r-\sqrt{r^2-d_1^2} \\ \text{dla } QN=2d_2, \text{ jest } PP_1=r-\sqrt{r^2-d_2^2} \text{ i t. d.} \end{array} \right\} \quad (9^*)$$

$M, N, P$  są wtedy punktami łuku.

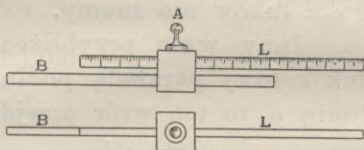
Dla płaskich łuków zastosujemy wzór 8:

$$\begin{aligned} M_1M &= \frac{d^2}{2r}, & N_1N &= \frac{d_1^2}{2r}, \\ P_1P &= \frac{d_2^2}{2r} \text{ i t. d.} \end{aligned} \quad (10)$$

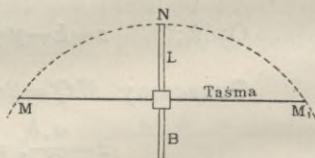


Rys. 24.

Na podstawie tych wzorów skonstruował Moreau \*\*) przyrząd do tyczenia łuków, o promieniach od 23 do 10000 m. Na lineale  $L$  (rys. 25) jest umieszczona podziałka do nastawiania na różne promienie.  $B$  jest to balans, także w pochwecie przesuwający się dający, a służący do zrównoważenia linealu, tak aby trzymając przyrząd za guzik  $A$ , lineale były poziome. Do guzika można przyczepić końce dwóch taśm mierniczych. Jeżeli długość linealu  $L$  została wyznaczona z wz. (9) lub (10) na podstawie długości taśmy  $d$  i promienia  $r$ , natenczas  $N$  (rys. 26) jest punktem łuku.



Rys. 25.



Rys. 26.

Przyrząd jest tak urządzony że dla promieni:

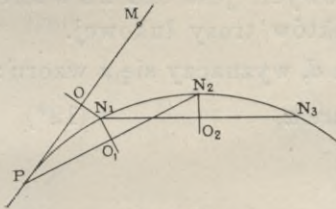
23	do 60 m	wynosi długość cięciwy	$MM_1$	10 m,
60	" 1000 m	"	"	20 m,
1000	" 10000 m	"	"	40 m.

\*) Albo też  $MM_1=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $N_1N=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{4}\right)$  do obrachowania podług tabeli II. części II.

\*\*) Ob. dzieło: Topographie p. Eugène Prévot, Paris Dunod 1900.

Dla tych długości cięciw i promieni są na podziałce zaznaczone przynależne strzałki łuków.

Gdy się nastawi indeks na tę strzałkę, zrównoważy balansem i przyczepi taśmy, to tyczenie łuku tak się przedstawi:



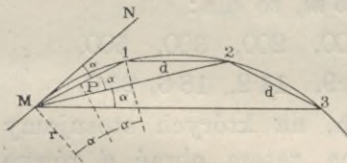
Rys. 27.

Koniec jednej taśmy przykłada się do początku łuku  $P$  i wyciąga obie taśmy w kierunku stycznej do  $M$ ; w punkcie  $N_1$  wbija się kolek.  $N_1$  jest punktem łuku (ob. rys. 17, gdzie  $US=ST$ ). Następnie obróci się przyrząd tak, aby przy wyciągniętej taśmie  $PN_2$ , koniec strzałki padł na  $N_1$ , wtedy koniec taśmy wyznaczy drugi punkt łuku  $N_2$ . Podobnie gdy się wyciągnie taśmy od  $N_1$  ku  $N_3$ , tak aby koniec strzałki padł na  $N_2$ , to  $N_3$  jest nowym punktem łuku i t. d.

Ten sposób tyczenia wymaga bardzo mało miejsca a jest dosyć dokładny, może być zatem korzystnie stosowany w lesie, w zbożu, a szczególnie w podkopach tunelowych dla przedłużenia łuku w międzyczasie pomiędzy dokładnymi kontrolami trasy.

d) *Metoda biegunowa (metoda promieniowania)*. Rys. 28.

Zasada się na tej własności koła, że równym długościom cięciw  $M1=12=23\dots=d$ , odpowiadają przy biegunie  $M$  równe kąty  $\alpha$ . Z trójkąta  $MPO$  wyznaczy się, gdy  $O$  jest środkiem koła:



Rys. 28.

$MP=MO \sin \alpha$ , więc:  $\sin \alpha = \frac{MP}{MO}$ ,

$$\text{czyli: } \sin \alpha = \frac{d}{2r}. \quad (11^*)$$

Przyjawszy  $d$  w okrągłej liczbie, zwykle 10 lub 20 m (długość taśmy), znajdziemy z tablic kąt  $\alpha$ . Jeżeli od stycznej w głównym punkcie  $M$  łuku, z  $M$  jako bieguną wytyczymy kąt  $NM1=\alpha$ , a równocześnie figurant przyłoży do  $M$  jeden koniec taśmy, zaś drugi koniec zaopatrzony w żerdkę wprowadzi w kierunku  $M1$ , to punkt 1 będzie punktem łuku.

\*) Kąt  $\alpha$  wyznaczy się z tabeli IV części II.

Przykładając następnie taśmę do punktu 1 i wprowadzając jej koniec w celową  $M2$ , wyprowadzoną od stycznej o  $2\alpha$ , otrzyma się punkt 2 łuku i t. d.

Ta metoda jest szczególnie w terenie płaskim chętnie stosowana, gdyż pozwala wytyczyć łuk równie szybko jak prostą linię, zaś w podkopach tunelowych jest ona z a w s z e stosowana dla głównej kontroli punktów trasy łukowej.

Długość łuku  $s$ , którego cięciwa  $d$ , wyznaczy się z wzoru:

$$s = r \operatorname{arc} 2\alpha = 2r \operatorname{arc} \alpha, \quad (12^*)$$

lub:

$$s = \frac{2r \alpha''}{206265}$$

Zwykle obierze się tak małą długość cięciwy  $d$ , że ją można zastąpić długością łuku  $s$ . Nastąpi to wtedy, gdy różnica  $s - d$  jest mniejszą niż dokładność przyłożenia taśmy. Nazwijmy błąd przyłożenia taśmy  $\Delta$ , to ma być  $s - d \leq \Delta$ , to znaczy:

$$2r \operatorname{arc} \alpha - 2r \sin \alpha \leq \Delta,$$

lub gdy  $\sin \alpha$  rozwiniemy w szereg, z którego zatrzymamy tylko dwa pierwsze człony:

$$2r \frac{\alpha^3}{6} \leq \Delta.$$

Gdy  $\alpha = \frac{s}{2r}$ , to otrzymamy ostatecznie:

$$s \leq \sqrt[3]{24r^2 \Delta}, \text{ a w przybliżeniu: } d \leq \sqrt[3]{24r^2 \Delta}. \quad (13)$$

Przypuścimy, że  $\Delta$  wynosi 0.003 m, to dla:

$$r = 10, 20, 50, 100, 200, 300, 500,$$

może być  $s$  lub  $d \leq 1.9, 3.0, 5.6, 8.9, 14.2, 18.6, 26.0$ .

Dla głównych kolei żelaznych, na których stosujemy promienie większe niż 300 m, można zatem obrać  $d$  równe długości 20 metrowej taśmy (Ob. tabelę IV).

#### e) Metoda stałych kątów. Rys. 29.

Jeżeli  $M$  i  $N$  są głównymi punktami łuku, a  $MM'$  i  $NN'$  styczne w tych punktach, to kąt  $PMM'$  równa się połowie kąta  $MOP$ , zaś kąt  $PNN'$  równy połowie kąta  $PON$ .

\*) Długość łuku wyznaczy się podług tabeli I.

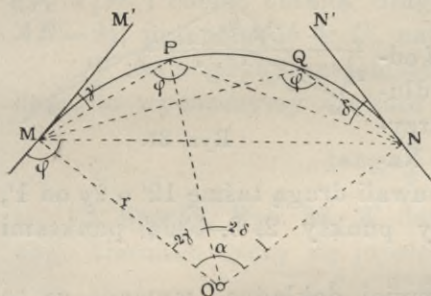


Z czworoboku  $MPNO$  wynika, że:

$$\begin{aligned} 360^{\circ} &= \alpha + \varphi + (90^{\circ} - \gamma) + (90^{\circ} - \delta), \\ &= 180^{\circ} + \varphi + \alpha - (\gamma + \delta), \end{aligned}$$

a gdy:  $\gamma + \delta = \frac{\alpha}{2}$ , to  $360^{\circ} = 180^{\circ} + \varphi + \frac{\alpha}{2}$ ,

a stąd:  $\varphi = 180^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$  (14)

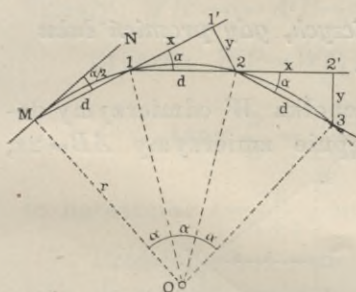


Rys. 29.

Taki sam kąt będzie przy innym dowolnym punkcie  $Q$ . Jeżeli zatem mamy pryzmat podwójny, t. zw. arcograf, który pozwala na takie ustawienie, że daje możliwość tyczenia kąta  $180^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$ , wtedy każdy punkt, jak  $P, Q$ , na którym nastąpi w arcografie pokrycie obrazów tyczek  $M$  i  $N$ , jest punktem łuku. Ta metoda należy do najmniej dokładnych.

*f) Metoda siecznych, zwana także metodą przedłużania lub angielską.*

Dla obranej długości  $d$  na rys. 30. obliczymy kąt  $\alpha$  z wzoru:



Rys. 30.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d^*}{2r} \quad (15)$$

Punkt 2 wyznaczmy za pomocą współrzędnych:

$$x = d \cos \alpha, \quad y = d \sin \alpha. \quad (16)$$

Do stycznej  $MN$  głównego punktu  $M$  wytyczmy kąt  $\frac{\alpha}{2}$  i odmierzymy  $M1 = d$ , to punkt 1 leży na łuku. Na przedłużeniu prostej  $M1$  odmierzymy  $x = 11'$  i prostopadłe  $y = 1'2$ , podobnie  $22' = x$  na przedłużeniu prostej  $12$  i  $2'3 = y$ , to punkty 2, 3... będą punktami łuku.

\*) Kąt  $\alpha$  wyznaczy się z tab. IV. części II.

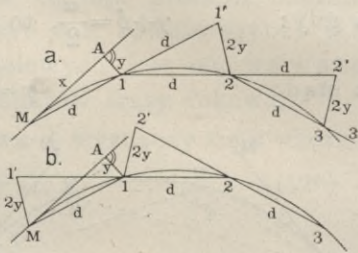
Bez użycia przyrządu kątomierniczego bywa ta metoda w praktyce w innej formie stosowana (rys. 31. a.):

Obieramy stosownie małą długość cięciwy  $d$  i obliczamy rzędną  $A1=y$  z dokładnego wzoru 1a.

$$y = \frac{x^2 + y^2}{2r} = \frac{d^2}{2r}.$$

Długości  $1'2 = 2'3 \dots$  równają się dokładnie:  $2y = \frac{d^2}{r}$ .

Taśmę  $M1'$  o długości  $2d$  odsuniemy od stycznej  $MA$  o długość  $y$  w punkcie 1, wtedy otrzymamy pierwszy punkt łuku. Następnie będziemy kolejno odsuwali drugą taśmę  $12'$  o  $2y$  od  $1'$ , taśmę  $23'$  o  $2y$  od  $2'$ ..., wtedy punkty 2, 3, będą punktami łuku.



Rys. 31.

Metoda siecznych jest mniej dokładna, wymaga za to mało czasu i mało miejsca.

## § II. Tyczenie łuków bez użycia przyrządu kątomierniczego.

W przypadkach, gdy się nie ma pod ręką przyrządu kątomierniczego, można tyczenie łuku skutecznie wyłącznie za pomocą taśmy mierniczej.

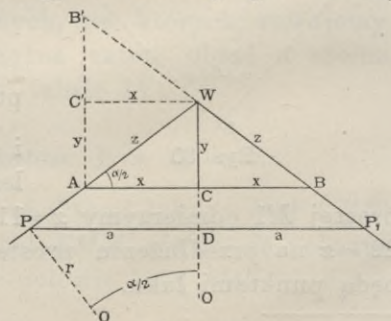
Niektóre sposoby wymagają jeszcze bębena lub pryzmatu, w celu tyczenia prostopadłych.

### a) Wyznaczenie elementów zasadniczych, gdy promień łuku jest dany.

**1. Sposób.** Rys. 32. Z wierzchołka  $W$  odmierzmy dowolne długości  $WA = WB = z$ , następnie zmierzmy  $AB = 2x$ , przepołowimy w punkcie  $C$  i zmierzmy  $WC = y$ . Dla kontroli należy obliczyć  $z^2 = x^2 + y^2$ .

Z podobieństwa trójkątów  $POW$  i  $WAC$  wynika  $t:r = y:x$ , więc  $t = r \frac{y}{x}$ , gdy  $t$  jest styczną łuku  $PW = WP_1$ .

Odmierzwszy te długości, otrzymamy początek i koniec



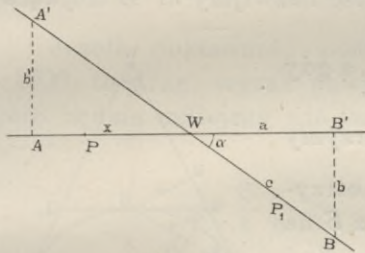
Rys. 32.

łuku. Dalszą kontrolę uzyskamy, gdy zmierzmy  $PP_1=2a$  i z proporcji  $a:x=t:z$  obliczymy  $a=t\frac{x}{z}$ . Nareszcie wyznaczy się  $D$  w połowie  $PP_1$  i zmierzmy  $CD$ , wtedy ma być:  $WD=y+CD=t\frac{y}{z}$ , jako dalsza kontrola. Jeżeli kąt wierzchołkowy jest bardzo rozwarty, wtedy wygodniej będzie przedłużyć  $P_1W$  i odciąć obraną długość  $z=WA$  i  $WB'$ , zmierzmy  $AB'=2y$ , przepołowić w  $C'$ , nareszcie zmierzmy  $WC'=x$ .

W razie gdyby znajomość kąta środkowego  $\alpha$  była pożądana, to wyznaczymy z wzoru:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{y^*}{x}$$

**2. Sposób.** Rys. 33. W dowolnych punktach  $A$  i  $B'$  jednego kierunku tyczą się prostopadłą na ten kierunek do  $A'$  i  $B$  na drugim kierunku. Następnie zmierzmy się  $b, b'$  i  $AB'$ . Jeżeli  $AW=x$ , to:



$$\frac{x}{AB'-x} = \frac{b'}{b}, \text{ stąd: } x = \frac{AB' \cdot b'}{b+b'}$$

Gdy się obliczoną długość  $x$  odmierzy, to się otrzyma punkt  $W$ , który powinien wypaść dokładnie na kierunku  $A'B$ . Następnie znajdziemy:  $WB'=a=A'B-x$ , zaś zmierzmy  $WB=c$ .

Styczna  $WP=WP_1=t=r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ , a gdy:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{c + c \cdot \cos \alpha} = \frac{b}{a+c},$$

to nareszcie:  $t = \frac{rb}{a+c}$ , co się odmierzy.

Prościej, choć mniej dokładnie dojdzie się do wartości  $t$ , gdy się wprost zmierzmy  $a, b, c$  po ustaleniu wierzchołka  $W$ .

**3. Sposób** (rys. 34) zastosuje się wtedy, gdy punkt wierzchołkowy  $W$  nie jest dostępny. Przesuniemy jeden kierunek, np.  $AW$  równolegle i dokładnie o dowolny wymiar  $h$ , tak

\*) Podług tab. II. części II.

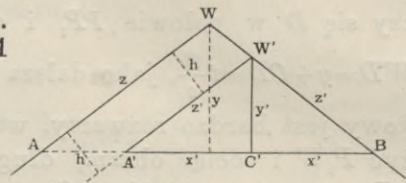
aby przecięcie się tej przesuniętej prostej z drugą prostą w punkcie  $W'$  było możliwe.

Następnie odmierzymy dowolną długość  $W'A' = z' = W'B$ , i zmierzmy  $A'B = 2x'$  i  $W'C' = y'$ .

Jeżeli przedłużymy  $BA'$  do  $A$  i zmierzmy  $AA'$ , to:

$$AB = 2x = AA' + 2x',$$

$$z = \frac{z'}{x'} x, \quad y = \frac{y'}{x'} x.$$



Rys. 34.

Znając te wartości nastąpi dalsze obrachowanie jak 1. sposobem.

#### b) Wyznaczenie głównych i pośrednich punktów łuku. Rys. 35.

Poprzednio zmierzaliśmy lub też obliczyliśmy już  $PT = TP_1 = a$  i wyznaczyliśmy:  $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ , którą ilość nazwijmy  $k$ . Z trójkąta

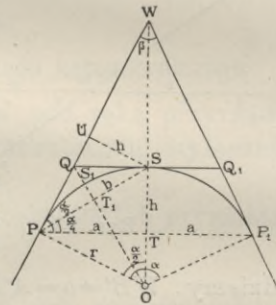
$POT$  wynika, że  $OT = a \cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{k}$ , a gdy

$TS = h = r - OT$ , to  $h = r - \frac{a}{k}$ . Odmierzmy

tę długość na kierunku  $TW$ , a otrzymamy środek łuku  $S$ . Prostopadła z  $S$  na styczną  $PW$  równa się także  $h$ , gdyż prosta  $PS$  połowi kąt  $WPT$ ; z tego też powodu  $PU = a$ , zatem  $WU = t - a$ . Odmierzmy tę długość, to prostopadła z  $U$  powinna trafić punkt  $S$ , a nadto  $US$  ma być równe  $h$ , co posłuży do skontrolowania punktu  $S$ . Teraz możemy łuk wytyczyć albo od cięciwy (§ 10 b), albo od środka (§ 10 c). Można też dalsze główne punkty  $S_1, S_2$  w ten sposób wyznaczyć, że się zmierzy  $PT_1 = T_1S = b$ , wystawi w  $T_1$  prostopadłą na  $PS$  do punktu  $Q$  i zmierzy ją, a następnie zmierzy i skontroluje  $PQ = QS = t_1$ . Po obliczeniu

$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} = \frac{T_1Q}{b} = k_1$ , obliczy się  $S_1T_1 = h_1 = r - \frac{b}{k_1}$ , przezco otrzyma się główny punkt  $S_1$ .

Jeżeli łuk  $PS_1S$  jest dostatecznie płaski, to według wzoru (8) § 10 jest  $h_1 = \frac{b^2}{2r}$ , zaś  $OT_1 = r - h_1$ . Z podobieństwa



Rys. 35.

trójkątów  $OPQ$  i  $OT_1S$  wynika, że  $t_1:r=b:r-h_1$ , skąd obliczy się  $t_1=\frac{rb}{r-h_1}$ , co posłuży dla kontroli wyznaczenia punktów  $Q$  i  $Q_1$ .

c) Wyznaczenie długości łuku.

Ponieważ znamy  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{z}$ , lub  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r}$ , to wyznaczmy  $\alpha$ , a wtedy długość łuku równa  $r\alpha$ . Można jednakże podług danych  $a$  i  $r$  wyprowadzić wzór na długość łuku. Oznaczmy  $\sin \frac{\alpha}{2}$  literą  $x$ , to:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{a}{2},$$

$$\text{zatem długość łuku: } r\alpha = 2r \left( x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right) + r \frac{3}{4} \frac{x^5}{5}.$$

Jeżeli dokładność pomiaru długości przyjmiemy na 1:1000, to drugi wyraz powyższego równania można opuścić skoro będzie mniejszy niż  $r\alpha:1000$ , zatem:

$$r \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} \ll r\alpha \ll \frac{2r \left( x + \frac{x^3}{6} \right)}{1000},$$

$$\text{stad: } x^4 - \frac{2}{900} x^2 - \frac{4}{300} \ll 0, \text{ lub } x^2 \ll \frac{1 + \sqrt{1 + 10800}}{900},$$

a gdy jedynki w czynniku opuścimy, to:

$$x \ll \sqrt{\frac{\sqrt{10800}}{900}} \ll 0.34 \gg \sin \frac{\alpha}{2} \gg \frac{a}{r},$$

stad w okrągłych cyfrach:

$$\alpha \ll 40^\circ, \quad a \ll \frac{r}{3}.$$

Dla mniejszej dokładności pomiaru długości 1:213 otrzyma się  $\alpha \ll 60^\circ$ ,  $a \ll \frac{r}{2}$ .

Zatem tylko dla takich wartości można drugi człon we wzorze na  $r\alpha$  opuścić, wtedy pozostanie długość łuku:

$$r\alpha = 2a \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]$$

Jeżeli kąt środkowy łuku jest większy niż  $40^{\circ}$ , to należy go podzielić na partye mniejsze niż  $40^{\circ}$ , i dla każdej osobno długość łuku obliczyć.

Jeżeli punkty główne lub pośrednie zostały wyznaczone w tak małych odległościach, że cięciwa między nimi mierzona czyni zadosyć równaniu (13) w § 10, natenczas przyjmujemy długość łuku równą długości cięciwy\*).

*d) Wyznaczenie elementów zasadniczych, gdy dany początek łuku.*

Wtedy promień  $r$  nie jest znany, nie można zatem użyć wzorów pod *a)* i *b)* podanych. Skoro położenie punktu  $P$  (rys. 35) jest dane, zmierzmy  $WP=t$  i odniesiemy tę samą długość od  $W$  do  $P_1$ ; następnie zmierzy się  $PP_1=2a$  i  $TW=p$ . Dla kontroli pomiarów obliczy się  $t^2=a^2+p^2$ . Ponieważ  $PS$  połowi kąt  $WPT$ , to w trójkącie  $WPT$  mają się do siebie odcinki  $WS$  i  $ST$  jak przyległe boki, zatem:

$$p-h:h=t:a, \text{ więc także: } p:h=t+a:a, \text{ a stąd: } h=\frac{ap}{t+a}.$$

Po odmierzeniu  $SD=h$ , otrzyma się punkt  $S$ . Długość promienia  $r$  wyznaczy się z trójkąta  $POT$ :

$$r^2=a^2+(r-h)^2, \text{ a stąd: } r=\frac{a^2+h^2}{2h}.$$

Jeżeliby zależało na zaokrągleniu promienia  $r$  na całkowitą liczbę  $r'$ , to wtedy należy  $t$ ,  $p$  i  $h$  pomnożyć stosunkiem  $\frac{r'}{r}$  i te zmienione długości wytyczyć.

Na podstawie tych wyznaczonych ilości nastąpi wytyczenie łuku jak pod *b)*.

*e) Dany mniej więcej środek łuku  $S^{**}$ ).*

Ten przypadek zachodzi nieraz na drogach lub rowach, gdy się je chce oprowadzić około jakiejś przeszkody. Wtedy znajdzie się przez próbny pomiar krokami takie przybliżone

\*) Vogler w rozprawie „Zur Kreisabsteckung ohne Theodolit“ (Ztschr. f. Vermessungswesen z r. 1894) podaje na długość łuku wzór:

$2a + \frac{2}{3}(t-a) - \frac{4}{9} \frac{(t-a)^2}{t}$ , w którym  $t$  oznacza długość stycznnej, zaś  $a$  połowę długości cięciwy. Ten wzór daje dla  $r=1$ , a  $\alpha=30$  do  $90^{\circ}$  wyniki zgodne na trzy dziesiątne.

\*\*\*) Vogler, jak powyżej.



c) Jeżeli styczna w  $A$  jest dana, jednak punkt  $A$  nie jest pewnie oznaczony (np. na istniejącym torze kolejowym), wtedy spuścimy z  $M$  prostopadłą  $MM_1$  do stycznej  $AM_1$  i zmierzmy jej długość  $y$ . Długość  $AM_1 = QM = x$  obliczymy z wzoru (ob. § 10 a)  $x = \sqrt{(2r-y)y}$ , która wyznaczy początek łuku  $A$ , poczem zastosujemy sposoby powyżej pod  $b$ ) podane.

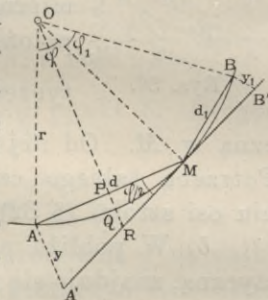
Alboteż można wprost wyznaczyć długość  $M_1N$ . Z podobieństwa trójkątów  $OAN$  i  $AM_1M$  wynika, że:

$$AN : r = y : x, \text{ czyli: } AN = \frac{ry}{x}$$

Znając długość  $AN$ , jest  $M_1N = x - AN$ . Tę długość odmierzy się od  $M_1$  do  $N$ , w celu otrzymania położenia stycznej  $MN$ .

d) Jeżeli w pobliżu punktu  $M$  niema stycznej wytyczonej do łuku, wtedy obierzemy dowolny punkt  $A$ , wyznaczmy jak pod  $b$ ) kąt  $\varphi$  z długości łuku  $AM = s$ , lub z długości cięciwy  $d$  i wytyczymy styczną  $MA'$ . Można przyjąć drugi punkt  $B$  (rys. 37) i wyznaczyć styczną  $MB'$  dla kontroli; punkty  $A'$ ,  $M$  i  $B'$  mają leżeć na jednej prostej.

Bez pomiaru kąta można dojść do położenia stycznej przez wyznaczenie długości prostej  $AA' = y$ , wyprowadzonej z punktu  $A$  prostopadłe do cięciwy  $AM$ .



Rys. 37.

Z trójkąta  $MAA'$  otrzyma się  $MA' = \sqrt{d^2 + y^2}$ .

Z podobieństwa trójkątów  $MAA'$  i  $OPM$  wynika:

$$m \dots MA' : y = r : \frac{d}{2}, \text{ czyli: } yr = MA' \frac{d}{2},$$

a po wstawieniu wartości za  $MA'$  wyznaczy się:

$$y = \frac{2 \left( \frac{d}{2} \right)^2}{\sqrt{r^2 - \left( \frac{d}{2} \right)^2}}$$

Podobnie można wyznaczyć  $B'$ .

e) Jeżeli promień łuku nie jest znany, to można różnie postąpić.

a) Obierze się możliwie dalekie punkty  $A$  i  $B$  i zmierzy długości łuków  $AM = s$  i  $MB = s_1$ . Ponieważ w mierze łukowej:



$$\varphi = \frac{s}{r}, \quad \varphi_1 = \frac{s_1}{r}, \quad \text{to } \varphi : \varphi_1 = s : s_1$$

Następnie zmierz się dokładnie kąt  $AMB = \mu$ . Otóż:

$$\mu + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi_1}{2} = 180^\circ$$

Jeżeli się w to równanie wstawi za  $\varphi_1$  wartość z powyższej proporcji, otrzyma się:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{180 - \mu}{s + s_1} s \quad \text{i analogicznie: } \frac{\varphi_1}{2} = \frac{180 - \mu}{s + s_1} s_1$$

Za pomocą tych kątów wyznaczy się kierunek stycznej. Gdy z górnych równań jest:

$$r = \frac{s}{\varphi}, \quad \text{zaś: } \varphi = \frac{\varphi''}{206265'}$$

$$\text{to: } r = \frac{206265 \cdot s}{\varphi''}, \quad \text{lub: } r = \frac{206265 \cdot s_1}{\varphi''_1}$$

$\beta$ ) Obierze się dowolny, możliwie daleki punkt  $A$  i zmierzy się  $MA = d$  i strzałkę łuku  $PQ = h$ .

Otóż wiadomo (ob. rys. 17), że  $\tan \frac{\varphi}{4} = \frac{2h}{d}$ . Stąd wyznaczy się  $\varphi$  i położenie stycznej; albo obliczy się:

$$AA' = y = d \tan \frac{\varphi}{2}, \quad r = \frac{d}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$\gamma$ ) Bez wyznaczenia kąta  $\varphi$  można tak postąpić: Z § 11 d) wiadomo, że:

$$QR : PQ = MA' : d, \quad \text{lub: } PQ + QR : PQ = MA' + d : d$$

$$\text{Gdy: } PQ + QR = \frac{y}{2}, \quad PQ = h, \quad MA' = \sqrt{d^2 + y^2},$$

$$\text{więc: } \frac{dy}{2} = hd + h \sqrt{d^2 + y^2},$$

$$\text{a stąd: } y = \frac{d^2 h}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - h^2}$$

zaś z równania  $m$  pod  $d$ ) wyznaczy się:

$$r = \frac{d \sqrt{d^2 + y^2}}{2y} = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}{2h} *$$

\*) W § 13 podano jeszcze inny sposób wyznaczania promienia  $r$  z pomiaru rzędnych od cięciwy.

Podobnie obliczy się dla kontroli  $y_1$  i  $r$  dla punktu  $B$ .

Jeżeli w powyższych przypadkach okaże się, że albo punkty  $A'$ ,  $M$  i  $B'$  nie leżą na jednej prostej, albo że wartości promienia obliczone dla różnych punktów łuku nie są zgodne, to albo łuk nie jest w porządku, albo nie jest jednolity, a wtedy należy postąpić podług § 13.

### § 13. Badanie łuku istniejącego toru.

Powyżej w § 12 *e*) widzieliśmy, że mogą wypaść różne wartości promienia dla tego samego łuku. Nastąpi to wtedy, gdy łuk toru kolejowego został albo przez ruch pociągów zdeformowany, albo ma się do czynienia z łukiem koszowym, albo też wchodzi się w krzywą przejściową toru kolejowego, gdy jeden z punktów  $A$  lub  $B$  znajduje się w pobliżu początku łuku.

O tych stosunkach łuku można się najłatwiej przekonać, jeżeli od możliwie długiej cięciwy odmierzy się rzędne symetrycznie względem jej środka położone. Długości dwóch symetrycznie ułożonych rzędnych mają być równe, a różnicę się mogą tylko w granicach dopuszczalnego błędu. Takie pomiary winno się uskuteczyć w różnych partyach łuku. Z relacji wz. (8) w § 10, gdy rzędne nie przekraczają dozwolonych długości:

$$z = \frac{ab}{2r}, \text{ lub: } h = \frac{d^2}{2r}$$

obliczy się promień  $r$ , który ze wszystkich pomiarów powinien otrzymać tę samą wartość.

Jeżeli się znajdzie różnice w pomiarze rzędnych, lub w obliczonych wartościach promienia, wtedy trzeba łuk na nowo tyczyć. W tym celu należy zmierzyć kąt wierzchołkowy  $\beta$ , wyznaczyć punkt  $S$  na przecięciu połowiącej kąt  $\beta$  z łukiem, następnie zmierzyć albo  $WS$  (rys. 17), albo  $SU = h$ . Wtedy wyznaczy się promień  $r$  z wzorów:

$$WS = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4}, \text{ lub } h = 2r \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)$$

Tym promieniem wytyczy się łuk. Teraz pokaże się czy łuk toru jest jednolity, czy koszowy, lub też czy były stosowane krzywe przejściowe. W tych ostatnich wypadkach należy tyczenie łuku przeprowadzić podług § 25 i dalszych, ewentualnie podług wskazówek zawartych w II rozdziale.

Jeżeliby wyznaczenie ilości zasadniczych łuku nastąpiło podług § 11, to odnośnie do rys. 35 i 32 nie trudno ustawić proporcję:

$$WO : r = t : a = z : x,$$

a stąd:  $WO = \frac{z}{x} r, \quad WS = WO - r = \frac{z-x}{x} r,$

a zatem:  $r = WS \frac{x}{z-x}, \quad \text{lub: } r = h \frac{z}{z-x}$

#### § 14. Poprawka odchyłki łuków z dwóch stron tyoczonych. Rys. 38.

Przy tyoczeniu łuków popełnia się nieuniknione błędy, które są przyczyną, że łuki z dwóch stron od głównych punktów  $A$  i  $B$  tyoczone nie zejda się dokładnie w tym samym punkcie, okaże się jakaś odchyłka  $CD = \Delta$ , która wymaga poprawienia łuków. Przyjmujemy, że odchyłka jest proporcjonalna do długości wytyczonego łuku. Jeżeli zatem długości łuków  $AC$  i  $BD$  nazwiemy  $s_1$  i  $s_2$ , a ich odchyłki:

$$\Delta_1 \text{ i } \Delta_2, \text{ to } \Delta_1 : \Delta_2 = s_1 : s_2,$$

a stąd:  $\Delta_1 : \Delta_1 + \Delta_2 = s_1 : s_1 + s_2$ , a gdy:  $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$  zmierzono,

to: 
$$\Delta_1 = s_1 \cdot \frac{\Delta}{s_1 + s_2}, \quad \Delta_2 = s_2 \cdot \frac{\Delta}{s_1 + s_2}$$

Po odmierzeniu tych odchyłek otrzyma się wspólny punkt zetknięcia  $E$ . W celu poprawienia poszczególnych punktów łuku zważmy, że wyraz  $\frac{\Delta}{s_1 + s_2}$  jest odchyłką przypadającą na jednostkę długości łuku, że zatem poprawka np. dla punktu 2 wyniesie:

$$s \frac{\Delta}{s_1 + s_2}$$

jeżeli  $s$  jest długością łuku  $A2$  (Ob nr. 12. zbioru przykładów).

W ten sposób poprawi się mniejsze odchyłki. Dla większych odchyłek należy postąpić podług § 27.

#### § 15\*).

**Zadanie.** Położyć łuk stycznie do trzech danych kierunków. Rys. 39. Dane kierunki  $AW_1$ ,  $W_1W_2$  i  $W_2B$ . Zmierzy się dłu-

\*) Zadania podług Voglera.

gość  $W_1 W_2 = t_1 + t_2$  i kąty  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .  $W_1 C = t_1$  i  $C W_2 = t_2$  są to styczne dla kątów  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i nieznanego promienia  $r$ , więc

$$\text{(ob. § 7): } W_1 W_2 = t_1 + t_2 = r \left( \cotg \frac{\beta_1}{2} + \cotg \frac{\beta_2}{2} \right),$$

$$\text{zatem: } r = \frac{t_1 + t_2}{\cotg \frac{\beta_1}{2} + \cotg \frac{\beta_2}{2}} = (t_1 + t_2) \frac{\sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}}{\sin \left( \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right)}$$

Obliczy się:

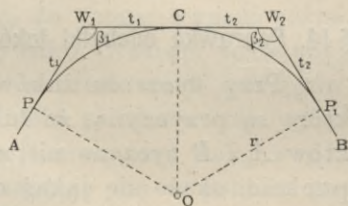
$$t_1 = r \cotg \frac{\beta_1}{2}, \quad t_2 = r \cotg \frac{\beta_2}{2},$$

przyczem suma musi się zgodzić ze zmierzoną długością  $W_1 W_2$ ;

następnie odmierzy się:

$$W_1 C = W_1 P = t_1 \text{ i } W_2 C = W_2 P_1 = t_2,$$

przezco otrzyma się początek i koniec łuku i punkt styczności  $C$ .



Rys. 39.

**Zadanie.** Między dwa dane punkty  $A$  i  $B$  łuku wytyczyć trzeci punkt, jeżeli z  $A$  nie można celować do  $B$ . Punkty  $A$  i  $B$  są na gruncie dane, a pomiędzy nimi nie można celować z powodu istniejącej przeszkody. Rozróżnimy dwa przypadki.

a) Położenie stycznej w punkcie  $A$  jest dane. Rys. 40. Wtedy promień łuku  $r$  jest określony, nie można go zatem z góry obrać. Obierzemy dowolny punkt  $C$  tak, aby z tego punktu można celować i mierzyć ku  $A$  i ku  $B$ . Zmierzymy kąt  $\varepsilon$  i długości:

$AC = b$ ,  $CB = c$ . Z tych ilości obliczymy:  $AB = 2a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \varepsilon}$ , następnie z warunku, że:

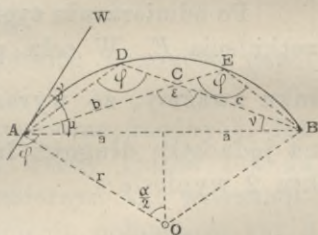
$$\frac{\sin \mu}{c} = \frac{\sin \nu}{b} = \frac{\sin \varepsilon}{2a}$$

obliczymy:  $\sin \mu = \frac{c}{2a} \sin \varepsilon$ ,  $\sin \nu = \frac{b}{2a} \sin \varepsilon$ .

Dla kontroli ma być:  $\mu + \nu + \varepsilon = 180^\circ$ .

Następnie zmierzmy kąt  $WAC = \gamma$ , to:  $\frac{\alpha}{2} = \mu + \gamma$ , zaś:

$$r = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$



Rys. 40.

Teraz można wyznaczyć np. punkt  $D$ , leżący na przedłużeniu  $BC$ , przez obliczenie długości  $CD$  (gdy  $\varphi=180-\frac{\alpha}{2}$  podł. § 10 e):

$$CD=b \frac{\sin(\varepsilon-\varphi)}{\sin \varphi}, \text{ podobnie: } CE=c \frac{\sin(\varepsilon-\varphi)}{\sin \varphi},$$

a dla kontroli obliczyć:

$$AE=b+CE=2a \frac{\sin(\mu+\varphi)}{\sin \varphi}=2r \sin(\mu+\varphi),$$

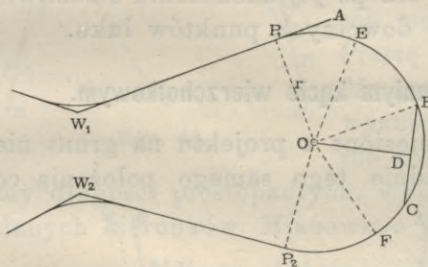
$$BC=c+CD=2a \frac{\sin(\nu+\varphi)}{\sin \varphi}=2r \sin(\nu+\varphi).$$

b) Dane są punkty  $A$  i  $B$  i promień  $r$ .

Postępowanie to samo co przed tem, tylko zamiast pomiaru kąta  $\gamma$ , potrzebnego do wyznaczenia kąta  $\alpha$ , obliczymy ten kąt z wzoru:  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r}$ . (Ob. nr. 13. zbioru przykładów).

### § 16. Tyczenie serpentyn drogowych. Rys. 41.

Serpentyny drogowe należą do łuków o małym kącie wierzchołkowym, o których mowa w następującym paragrafie; gdy jednak promienie łuków w takich serpentynach stosowane są małe, w granicach od 10 do 25 m, to może być odmienna metoda tyczenia stosowana.



Rys. 41.

Jeżeli wierzchołek  $W_1$  i kierunek  $W_1A$  może być na polu ustalony, wtedy odmierzy się długość  $W_1P_1$  wyjętą z projektu i na prostopadłej z  $P_1$  odmierzy się długość  $P_1O=r$ . Jeżeliby natomiast dwa punkty  $B$  i  $C$  łuku mogły być na gruncie ustalone, natenczas spólowi-

my prostą  $BC$  i wystawimy do niej z  $D$  prostopadłą, którą przetniemy długością  $BO=r$ . Dla niewielkiej długości łuku  $BC$  można podług § 10 wz. (8) wyznaczyć:  $DO=r-\frac{(BC)^2}{8r}$  i tę długość od  $D$  odmierzyć.

Gdy w ten sposób środek  $O$  jest ustalony, odmierzy się wprost  $r$  na dowolnie obranych kierunkach do punktów  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ..., przez co otrzyma się szereg pośrednich punktów łuku.

To odmierzenie powinno być poziomo wykonane, więc dla punktów jak  $E, F$ , leżących w pobliżu linii największego spadku, trzeba wykonać pomiar za pomocą łąty i libeli, sposobem schodkowym, zaś dla innych punktów wprost taśmą możliwie poziomo ułożoną.

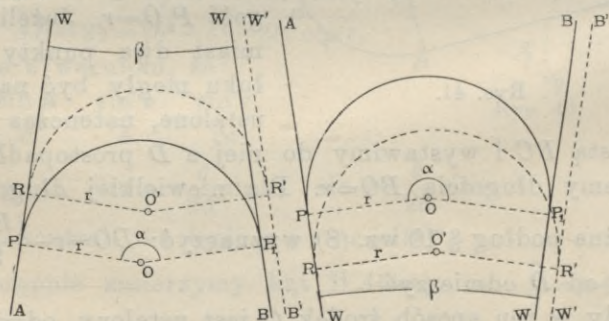
Jeżeli punkt  $O$  wyznaczono pierwszym sposobem od  $P_1$ , trzeba będzie z następnego wierzchołka  $W_2$  poprowadzić styczną do wytyczonego łuku i wyznaczyć koniec łuku  $P_2$ . Tę styczną poprowadzi się dostatecznie dokładnie podług oka, poczem prostopadła z  $O$  do tej stycznej poprowadzona wyznaczy  $P_2$ . Można też za pomocą przyzmatu wyznaczyć punkt  $P_2$  jako wierzchołek prostego kąta  $W_2P_2O$ , a zarazem odległego od  $O$  na długość taśmy równej  $r$ . Jeżeli punkt  $O$  wyznaczyło się z punktów  $B, C$ , wtedy oba końce łuku trzeba w ten sposób wyznaczyć.

W tym wypadku może się zdarzyć, że punkty  $W_1$  i  $W_2$  nie będą na gruncie ustalone, lecz wyznaczone z warunku pewnej, w projekcie przewidzianej długości  $W_1P_1$  i  $W_2P_2$ . Wtedy zużytkujemy przyzmat do wyznaczenia przez próby takiego kąta prostego, aby punkty  $P$  miały przepisane odstępny od  $W$  i od  $O$ .

Środek łuku powinien być za pomocą pala ustalony, aby, czy to podczas budowy, czy też po jej ukończeniu umożliwić szybkie, a pewne wytyczenie dowolnych punktów łuku.

### § 17. Tyczenie łuków o małym kącie wierzchołkowym.

Kierunki prostych przeniesione z projektu na grunt nie mają względem siebie dokładnie tego samego położenia co



Rys. 42.

Rys. 43.

w projekcie. Różnice stąd powstałe między położeniem łuku

w projekcie i na gruncie będą nie wielkie, jeżeli kąt wierzchołkowy  $\beta$  jest wielki, mogą być jednakże znaczne, gdy kąt  $\beta$  zbliża się do zera, a kąt środkowy  $\alpha$  do  $180^\circ$ .

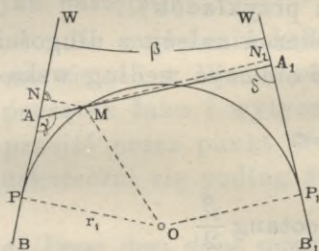
Na rys. 42 jest  $\beta > 0$ ,  $\alpha < 180^\circ$ , zaś na rys. 43  $\beta < 0$ ,  $\alpha > 180^\circ$ . Obydwa rysunki pokazują, że drobne przesunięcie prostych  $WB$  na gruncie wobec  $W'B'$  w projekcie, powoduje znaczne przesunięcie łuku na polu wobec projektu.

Ponieważ takie znaczniejsze przesunięcie łuku jest nieraz z różnych powodów niedopuszczalne, zatem trzeba położenie łuku na polu ustalić, przez przeniesienie jednego lub dwóch punktów łuku z projektu na grunt.

Tu mogą zajść różne przypadki.

a) Przez punkt łuku  $M$  dany na gruncie wytyczyć łuk łączący dwa proste kierunki, bez naruszenia ich położenia. Rys. 44.

Przez dany punkt  $M$  i dwa styczne kierunki jest łuk zupełnie określony; nie można zatem z góry obrać promienia  $r_1$ , lecz trzeba jego wielkość wyznaczyć. Przy małym kącie  $\beta$  wypada punkt wierzchołkowy daleko, a często jest niedostępny, więc dla wyznaczenia kąta wierzchołkowego zastosujemy sposób podany w § 6 pod b) lub c). Prostą  $AA_1$  położymy przez punkt  $M$ , zmierzmy kąty  $\delta$  i  $\gamma$ , poczem wyznaczymy  $\beta = \gamma + \delta - 180^\circ$ . Następnie zmierzmy  $AM$  i  $MA_1$  i obliczy-



Rys. 44.

my długości prostokątów, wyprowadzonych z punktu  $M$  do danych kierunków. Mianowicie jest:

$$MN = p = AM \sin \gamma, \quad MN_1 = q = MA_1 \sin \delta.$$

Między długościami  $PN = x$  i  $P_1N_1 = x_1$ , a rzędniemi  $p$  i  $q$  zachodzą związki:

$$p = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}, \quad q = r_1 - \sqrt{r_1^2 - x_1^2},$$

z których obliczy się:

$$x = \sqrt{(2r_1 - p)p}, \quad x_1 = \sqrt{(2r_1 - q)q}.$$

Jeżeli wykonamy rzut zamkniętego wieloboku  $OPNMN_1P_1O$  na kierunek promienia  $OP$ , to otrzymamy równanie:

$$r_1 - p - q \cos \beta - x_1 \sin \beta + r_1 \cos \beta = 0,$$

a po wstawieniu za  $x_1$  powyżej wyznaczonej wartości:

$$\sin \beta \sqrt{(2r_1 - q)q} = -p - q \cos \beta + r_1 (1 + \cos \beta).$$

Po obustronnem kwadrowaniu i należytem uporządkowaniu, otrzyma się równanie dla niewiadomej  $r_1$ :

$$r_1^2 (1 + \cos \beta)^2 - 2r_1 [p + (p + q) \cos \beta + q] + p^2 + 2pq \cos \beta + q^2 = 0,$$

$$\text{a stąd: } r_1 = \frac{p + q \pm \sqrt{2pq(1 - \cos \beta)}}{1 + \cos \beta} = \frac{p + q}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} \left( 1 \pm 2 \frac{\sqrt{pq}}{p + q} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

Z dwóch znaków przed pierwiastkiem odnosi się znak + do przypadków przedstawionych na rys. 42 i 43; znak - odnosi się do uzupełnień do pełnego koła.

Podług wyznaczonego promienia  $r_1$  obliczy się  $x$  i  $x_1$ , jakoteż  $AN = -AM \cos \gamma$  i  $A_1N_1 = -MA_1 \cos \delta$ , co posłuży do wyznaczenia:  $AP = x - AN$ ,  $A_1P_1 = x_1 - A_1N_1$ . Po odmierzaniu tych długości będą wyznaczone początek  $P$  i koniec łuku  $P_1$ , zaś łuk wytyczy się podanymi sposobami.

Promień  $r_1$  tylko nieznacznie będzie się różnić od promienia  $r$  projektu. (Ob. nr. 14. zbioru przykładów).

W celu kontroli powyższych obliczeń należy z długości  $AA_1 = d$  i z pomierzonych kątów  $\gamma$  i  $\delta$  obliczyć według wskazówek § 6 b)

$$WA = b \text{ i } WA_1 = c.$$

Kontrolą będzie warunek, że:

$$PA + b = P_1A_1 + c = t = r_1 \cotang \frac{\beta}{2}$$

Prościej niż rachunkiem można dojść do przybliżonej wartości  $r_1$  próbnym wykresem, wykonanym na podstawie w polu pomierzonych ilości  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $AM$  i  $MA_1$ . Podług tej wartości  $r_1$  obliczamy wprost:

$$t = r_1 \cotang \frac{\beta}{2} \text{ i } AP = t - b, \quad A_1P_1 = t - c.$$

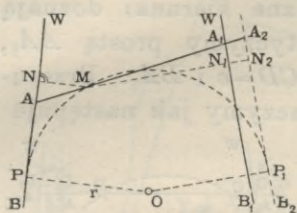
Te ostatnie długości posłużą do wyznaczenia początku i końca łuku. Tą przybliżoną wartością promienia  $r_1$  wytyczony łuk nie przejdzie dokładnie przez dany punkt  $M$ .

*b) Zadanie jak pod a), lecz prosta  $B_1W$  może doznać równoległego przesunięcia. Rys. 45.*

W tym przypadku przeprowadzimy przez  $M$  łuk o promieniu  $r$  z projektu, a wyznaczmy wielkość przesunięcia



prostej  $B_1W$ . Pomiary kątów i długości, jakoteż obliczenie długości  $p$ ,  $q$  i  $x$  skuteczni się jak pod  $a$ ).



Rys. 45.

Oznaczmy przez  $q_1$  długość  $MN_2$  i wykonajmy rzut tego samego wieloboku co pod  $a$ ) na kierunek promienia  $OP_1$ , to otrzymamy równanie:

$$r - p \cos \beta - q_1 - x \sin \beta + r \cos \beta = 0,$$

a stąd:

$$q_1 = r(1 + \cos \beta) - p \cos \beta - x \sin \beta.$$

Znając  $q_1$ , znajdziemy  $q_1 - q$  jako szukaną wielkość równoległego przesunięcia prostej  $B_1W$ .

$$\text{Zmieniona długość } P_1N_2 = x_1 = \sqrt{(2r - q_1)q_1}.$$

Dalsze obliczenia i kontrola rachunku jak pod  $a$ ). Zamiast równoległego przesunięcia można także inny kierunek nadać prostej przesuniętej, jak o tem będzie mowa w §§ 19 i 20.

Powyższe zadanie przedstawia się w prostszej formie jak następuje:

Po zmierzeniu kątów  $\gamma$  i  $\delta$ , jakoteż długości  $AM$ , obliczy się  $p$  i  $x$ . Po odmierzeniu długości  $NP = x$  otrzyma się początek łuku i wytyczy cały łuk, który powinien dokładnie przejść przez punkt  $M$ . Połączenie tego łuku z dalszą trasą skuteczni się podług §§ 19 i 20.

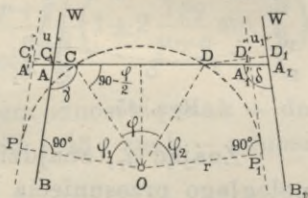
*c) Przez dwa dane punkty  $C$  i  $D$  wytyczyć łuk bez naruszenia prostych  $BW$  i  $B_1W$ .*

Prostą  $AA_1$  przeprowadzimy przez dane punkty i zmierzmy  $AC$ ,  $CD$ ,  $DA_1$  i kąty  $\gamma$  i  $\delta$  (rys. 46). Sposobem pod  $a$ ) podanym wyznaczmy rachunkiem lub wykresem promień  $r_1'$  dla łuku przechodzącego przez  $C$  i promień  $r_1''$  dla łuku przechodzącego przez  $D$ , a podług średniej  $r_1$  z tych dwóch promieni wyznaczmy:  $t = r_1 \cotang \frac{\beta}{2}$  i odmierzymy  $AP = t - b$  i  $A_1P_1 = t - c$ , w celu otrzymania początku i końca łuku. Łuk promieniem  $r_1$  wytyczony przejdzie w pobliżu danych punktów  $C$  i  $D$ . Prościej można tę średnią wartość  $r_1$  wyznaczyć wprost z wykresu.

d) Przez dwa dane punkty  $C$  i  $D$  przeprowadzić łuk o danym promieniu  $r$ . Rys. 46.

W tym przypadku obydwa styczne kierunki doznają przesunięcia. Przez dane punkty wytyczymy prostą  $AA_1$ , zmierzmy kąty  $\gamma$  i  $\delta$  i długości  $AC$ ,  $CD=e$  i  $DA_1$ . Przesunięcia  $u$  i  $u_1$  prostych  $BW$  i  $B_1W$  wyznaczmy jak następuje

Prostopadłe  $CC_1=p$  i  $DD_1=q$  wyznaczmy jak w poprzednich zadaniach z długości  $AC$  i  $DA_1$ . Następnie podług zmierzonej długości  $CD=e$  obliczymy:  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{e}{2r}$ . Znając  $\varphi$ , wyznaczmy z warunku, że:



Rys. 46.

$$\varphi_1 + \frac{\varphi}{2} + 90 + \gamma + 90 = 360^\circ,$$

$$\varphi_1 = 180^\circ - \gamma - \frac{\varphi}{2}, \text{ podobnie: } \varphi_2 = 180^\circ - \delta - \frac{\varphi}{2}.$$

Długość:  $CC_1 = r(1 - \cos \varphi_1) = p + u$ , więc:

$$u = r(1 - \cos \varphi_1) - p, \quad u_1 = r(1 - \cos \varphi_2) - q,$$

przyczem dodatnia lub ujemna wartość  $u$  lub  $u_1$  wskazuje, że przesunięcie prostej następuje na zewnątrz lub na wewnątrz.

Punkta  $P$  i  $P_1$  wyznaczy się jak w poprzednich zadaniach podano, albo też z wzorów:

$$A'P = C_1P - A'C_1 = r \sin \varphi_1 - (p + u) \cotang (180 - \gamma),$$

$$A_1P_1 = D_1P_1 - A_1D_1 = r \sin \varphi_2 - (p + u_1) \cotang (180 - \delta).$$

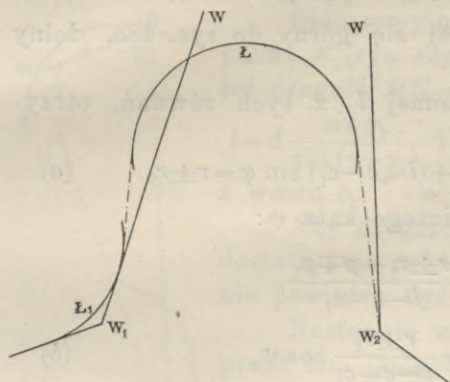
Kontrolę rachunku przeprowadzi się jak pod  $a$ ) podano.

Jeżeli równoległe przesunięcie prostych nie jest požądane, natenczas przez główne punkty  $C$  i  $D$  wytyczy się cały łuk o danym promieniu  $r$  i połączy obustronnie z dalszą trasą za pomocą stycznych podług §§ 19 i 20.

**§ 18. Przystosowanie wytyczonego łuku do trasy w tym przypadku, jeżeli przy wytyczeniu łuku nastąpiła zmiana położenia danych prostych kierunków.** Rys. 47.

W zagadnieniach pod  $b$ ) i  $d$ ) poprzedniego paragrafu przyjęliśmy, że jedna prosta lub obie proste zostały równoległe przesunięte. Takie równoległe przesunięcie nie będzie

zawsze dopuszczalne. Jeżeli mianowicie przed uważanym łukiem  $\mathcal{L}$  (rys. 47) był już wytyczony łuk  $\mathcal{L}_1$ , to należy do



obydwu łuków poprowadzić wspólną styczną; lub też jeżeli w trasie po łuku  $\mathcal{L}$  następującej wierzchołek  $W_2$  nie może zmienić swego położenia, wtedy należy z tego punktu poprowadzić styczną do łuku  $\mathcal{L}$ .

Te obydwie zagadnienia rozpatrzmy w następujących paragrafach.

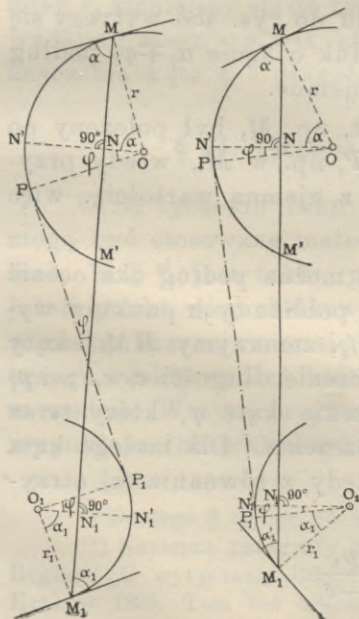
Rys. 47.

### § 19. Do dwóch w polu wytyczonych łuków poprowadzić wspólną styczną.

Obydwie łuki mogą być jednakowo lub odwrotnie skierowane. Rysunki 48 i 49.

#### a) Przeprowadzenie ogólne.

Na dokładnie wyznaczonych głównych punktach  $M$  i  $M_1$



Rys. 48 a.

Rys. 48 b.

wykonamy pomiar kątów  $\alpha$  i  $\alpha_1$ , zawartych między stycznymi w tych punktach, a prostą  $MM_1$  i zmierzmy długość  $MM_1 = l$ . Następnie obliczymy:

$$MN = c = r \sin \alpha,$$

$$M_1N_1 = c_1 = r_1 \sin \alpha_1,$$

$$NN' = p = r(1 - \cos \alpha),$$

$$N_1N'_1 = p_1 = r_1(1 - \cos \alpha_1).$$

Oznaczmy przez  $l_0$  długość stycznej  $PP_1$ , a przez  $\varphi$  kąt zawarty między tą styczną a prostą  $MM_1$ , to te dwie ilości należy wyznaczyć. W tym celu wykonajmy rzut wieloboku  $NN'PP_1N'_1N_1N$  na kierunek prostej  $MM_1$  i na prostopadłą do tego kierunku, a otrzymamy dwa równania:

$$l - c - c_1 = r \sin \varphi + l_0 \cos \varphi \pm r_1 \sin \varphi,$$

$$p \pm p_1 = r(1 - \cos \varphi) + l_0 \sin \varphi \pm r_1(1 - \cos \varphi).$$

Z dwóch znaków odnosi się górny do rys. 48a, dolny do rys. 48b.

Po wyłączeniu niewiadomej  $l_0$  z tych równań, otrzyma się:

$$(r \pm r_1 - p \mp p_1) \cos \varphi + (l - c - c_1) \sin \varphi = r \pm r_1. \quad (a)$$

Podstawmy dla pomocniczego kąta  $\psi$ :

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{r \pm r_1 - p \mp p_1}{l - c - c_1},$$

$$\text{a otrzymamy:} \quad \sin(\psi + \varphi) = \frac{r \pm r_1}{l - c - c_1} \cos \psi, \quad (b)$$

wzór dla wyznaczenia kąta  $\varphi$ . Po wstawieniu tej wartości w pierwotne równania znajdzie się:

$$l_0 = \frac{l - c - c_1 - (r \pm r_1) \sin \varphi}{\cos \varphi}, \text{ albo: } l_0 = \frac{p \pm p_1 - (r \pm r_1)(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \quad (c)$$

Dla kontroli należy  $l_0$  z obydwu wzorów obliczyć.

Punkty styczności  $P$  i  $P_1$  wyznaczy się w zastosowaniu do rys. 48a przez wytyczenie łuku o kącie  $\alpha + \varphi$  z  $M$ , zaś o kącie  $\alpha_1 + \varphi$  z  $M_1$ ; w zastosowaniu do rys. 48b wytyczy się z  $M$  łuk o kącie  $\alpha \pm \varphi$ , a z  $M_1$  łuk o kącie  $\alpha_1 \mp \varphi$ , podług tego, czy  $p - p_1$  jest dodatnie czy ujemne.

**Uwaga.** Jeżeliby obrany punkt, np.  $M$ , był położony po drugiej stronie punktu styczności  $P$ , np. w  $M'$ , wtedy przynależny kąt  $\alpha$  należy wprowadzić z ujemną wartością, więc i  $c$  otrzyma znak ujemny.

b) W zastosowaniu praktycznym można podług oka ocenić położenie punktów styczności, a w pobliżu tych punktów wyznaczymy dokładnie punkty  $M$  i  $M_1$ , zmierzmy  $MM_1$  i kąty  $\alpha$  i  $\alpha_1$  jak przedtem. Również obliczenie długości  $c$ ,  $c_1$ ,  $p$  i  $p_1$  pozostaje to samo, tylko wyznaczenie kąta  $\varphi$ , który teraz będzie bardzo mały, dozna uproszczenia. Dla małego kąta możemy podstawić  $\cos \varphi = 1$ , a wtedy z równania (a) otrzyma się wzór prosty:

$$\sin \varphi = \frac{p \pm p_1}{l - c - c_1}$$

Podług tej wartości obliczy się  $l_0$  z wzoru (c).

Zamiast dokładnego pomiaru długości  $l$  wystarczy pomiar tachymetryczny, albo też w następujący sposób:



Rys. 49.

Obierzemy na łuku dokładnie wyznaczony punkt  $N$  (rys. 49), zmierzmy kąty  $\gamma$  i  $\gamma_1$ , jako też długość  $MN=d$ , a wtedy obliczymy:

$$l = d \frac{\sin \gamma_1}{\sin (\gamma + \gamma_1)} \text{ i } \sin \varphi \text{ z górnego wzoru, a } l_0$$

z wzoru  $c$ .

Aby długość obliczona z tego wzoru była dostatecznie dokładna dla wyznaczenia kąta  $\varphi$ , nie powinien być stosunek  $d:l$  zbyt mały.

Następnie wytyczy się punkty  $P$  i  $P_1$  jak przed tem podano i zmierzy dokładnie  $l_0$ . Nie może ono zupełnie zgodzić się z wartością obrachowaną podług wzoru  $e$ , gdyż  $l$  nie było dostatecznie dokładnie wyznaczone \*).

## § 20. Z dowolnego punktu wytyczyć styczną do łuku w polu wytyczonego (np. z punktu $W_2$ na rys. 47).

To zagadnienie redukuje się do poprzedniego, skoro promień  $r_2$  zmniejszy się do zera. Jeżeli zatem w wzory § 19. wprowadzimy  $r_1 = c_1 = p_1 = 0$ , otrzymamy wzory potrzebne do wyznaczenia kąta  $\varphi$  i długości  $l_0$ .

## § 21. Tyczenie łuków budowli wodnych.

O ile tyczenie łuku uskutecznia się na suchym lądzie, mogą być stosowane metody podane w poprzednich paragrafach. W § 6. jest także podane jak sobie poradzić należy, jeżeli punkt wierzchołkowy nie jest dostępny, gdyż wpada w rzekę. Inaczej rzecz się przedstawia, jeżeli linia regulacyjna brzegu rzeki, wzdłuż której ma być zbudowana tama, leży w wodzie. W tym przypadku jest postępowanie odmienne dla wypukłego lub wklęsłego brzegu \*\*).

\*) Do tego § ob. nr. 15. zbioru przykładów.

\*\*\*) Następne paragrafy 22. i 23. głównie podług dzielka: Inżynier Regiec: „O wytyczaniu łuków przy budowach lądowych i wodnych“, Kraków 1895. Tam też obszerne tabele ułatwiające tyczenie budowli wodnych.

## § 22. Tyczenie wypukłego brzegu. Rys. 50. a i b.

Zastosujemy tyczenie rzędniemi od cięciwy, podług § 10 b). W tym celu obierzemy długość łuku  $PA$ , stosownie do wielkości promienia  $r$  tak, aby łuk był dostatecznie płaski, obliczymy przynależny kąt środkowy  $\alpha_1$  i długość cięciwy:

$$PA = 2r \sin \frac{\alpha_1}{2}.$$

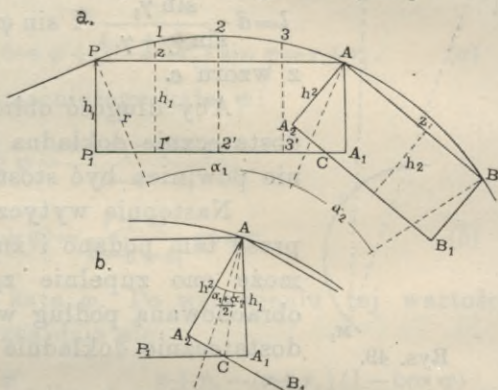
$$\text{Kąt: } MPP_1 = 90 - \frac{\alpha_1}{2}$$

wytyczymy, a na prostej  $PP_1$  odmierzymy taką długość  $h_1$ , aby prosta  $P_1A_1$  równoległa do  $PA$  wypadła na wolnem, suchem miejscu. Tę równoległą również wytyczymy za pomocą prostego kąta przy  $P_1$

i odmierzymy na niej obliczoną długość  $PA$ . Teraz obierzemy na  $P_1A_1$  dowolną ilość punktów  $1', 2', 3' \dots$  i obliczymy dla nich podług § 10 b) rzędne  $z$ ; w tych punktach wystawimy prostopadłe do  $P_1A_1$  i tak będziemy kierować łódką na wodzie, aby można wstawić w wodę tykę w kierunku tej prostopadłej i w odległości  $h_1 + z$ , mierzonej taśmą. Dla ustalenia tyki trzeba ją będzie nieraz otoczyć narzutem kamiennym.

W celu tyczenia następnego elementu łuku  $AB$  o kącie środkowym  $\alpha_2$ , można po wykonaniu tamy  $PA$  ustawić się w  $A$ , odmierzyć od  $AP$  kąt  $PAA_2$  równy:  $90 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ , obrać  $AA_2 = h_2$  i postąpić jak poprzednio. Gdyby jednak ustawienie w punkcie  $A$  przedstawiało trudności, to można prostą  $A_2B_1$  wytyczyć za pomocą punktu  $C$ , leżącego na przecięciu prostych  $P_1A_1$  i  $A_2B_1$ . W celu wyznaczenia tego punktu wykonajmy rzut linii  $AA_1C$  na kierunek  $AA_2$  (rys. b), zważywszy, że kąt przy  $A$  równy  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ :

$$h_2 = h_1 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + A_1C \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$



Rys. 50.

a stąd:

$$A_1 C = \frac{h_2 - h_1 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}$$

i podobnie:

$$A_2 C = \frac{h_1 - h_2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}$$

Przez odmierzenie obliczonej długości  $A_1 C$  otrzyma się punkt  $C$ , a przez wytyczenie kąta  $P_1 C B_1 = 180 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  otrzyma się kierunek  $C B_1$ , na którym odmierzona długość  $A_2 C$  wyznaczy punkt  $A_2$ . Z  $A_2$  odmierzy się  $A_2 B_1$  równe obliczonej długości  $AB$  etc.

Dla  $\alpha_1 = \alpha_2$  i  $h_1 = h_2$ , jest  $A_1 C = A_2 C = h_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2}$ .

### § 23. Tyczenie wklęsłego brzegu.

Przy tyczeniu tam łukowych przy wklęsłym brzegu możemy tylko tak postąpić, że na podstawie elementu łuku tamy w wodzie już zbudowanego, wyznaczamy kierunek dla następnego elementu. Mniej dokładnie skuteczni się tyczenie metodą w § 10 f) na rys. 31b podaną. Punkt 1 należy wytyczyć rzędną od stycznej, a po zbudowaniu elementu  $M1$  wyznaczymy tyczkami wstecz kierunek 1'1 i w jego przedłużeniu wybudujemy element 12 i t. d.

Ta metoda wystarczy na krótkie łuki. Dokładniejsze metody są następujące:

a\*) Tyczymy styczną w punkcie początkowym łuku (rys. 51), a na niej odmierzamy dogodną długość  $PM = D$ . W  $M$  tyczymy prostą kierunkową  $MN$ , prostopadłą do  $PM$ . Na łuku obieramy równe długości  $s$  tak wielkie, żeby je można uważać za elementy proste. Styczne w punktach  $A, B, \dots$ , pomyślny sobie przedłużone ku stycznej  $PM$  i ku linii kierunkowej  $MN$ .

Kąt  $\alpha$  elementu łuku wyznaczymy podług  $\alpha = \frac{s}{r}$  i obliczymy:

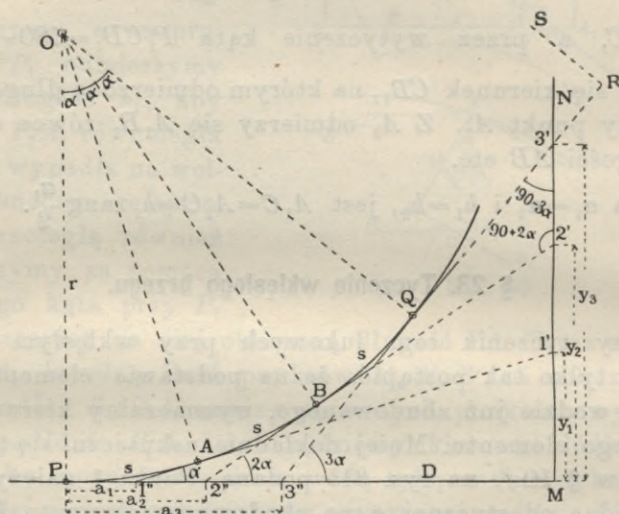
\*) Trochę odmiennie jak w dziełku inż. Regieca.

$$a_1 = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}, \quad a_2 = r \operatorname{tang} 2 \frac{\alpha}{2}, \quad \dots, \quad a_n = r \operatorname{tang} n \frac{\alpha}{2}$$

Różnica długości dwóch po sobie następujących odcinków równa się:

$$a_n - a_{n-1} = r \left[ \operatorname{tang} \frac{n\alpha}{2} - \operatorname{tang} \frac{(n-1)\alpha}{2} \right] = \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{(n-1)\alpha}{2}}$$

Ten wzór posłuży do kontroli rachunku.



Rys. 51.

Teraz można obliczyć odcinki na linii kierunkowej:

$$y_1 = (D - a_1) \operatorname{tang} \alpha,$$

$$y_2 = (D - a_2) \operatorname{tang} 2\alpha,$$

$$y_3 = (D - a_3) \operatorname{tang} 3\alpha$$

• • • • •

$$y_n = (D - a_n) \operatorname{tang} n\alpha.$$

Te odcinki odmierzy się.

Postępowanie przy tyczeniu łuku jest następujące:

Naprzód zbuduje się element tamy  $P1''$  o długości  $a_1$  w kierunku  $PM$ ; następnie celując ku  $1'$  buduje się element  $1''1'$  o długości  $s$ ; następnie celując z  $1''$  ku  $2'$  wykona się element  $1''2'$  o długości  $s$  i t. d. W ten sposób tyczy się wielobok opisany  $1''12''\dots$ , który można uważać za łuk, jeżeli dłu-



gość  $s$  obrano odpowiednio małą. Jeżeli się odmierzy długości  $a_1, a_2, a_3 \dots$ , to się ma kontrolę roboty w warunku, że punkty  $1'', 1, 1'$ , lub  $2'', 2, 2'$  muszą leżeć dokładnie na jednej prostej.

Jeżeli łuk jest długi, to może jedna linia kierunkowa nie wystarczyć; natenczas możemy obrąć dowolny już wytyczony styczny kierunek i do niego odnieść nową linię kierunkową. Np. obierzemy styczny kierunek  $3''3'$ , dokładnie wytyczymy, a na nim obrany punkt  $Q$  w środku boku  $23$  będzie nowym początkiem łuku, od którego w dogodnym odstępie  $D$  obierzemy punkt  $R$ , poprowadzimy linię kierunkową  $RS$  i t. d.

Aby błędy poprzednio tyzonego łuku na ten nowy układ się nie przeniosły, dobrze będzie punkty  $2$  i  $Q$  na nowo wyznaczyć. Mianowicie z trójkąta  $2'23'$  obliczy się:

$$22' = (y_3 - y_2) \frac{\cos 3\alpha}{\sin \alpha}$$

i odmierzy dokładnie od  $2'$  do  $2$ , poczem odmierzy się:

$$2Q = Q3 = a_1 = r \tan \frac{\alpha}{2}.$$

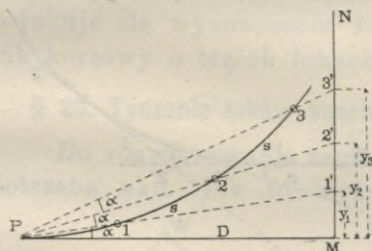
Metoda *a)* może być korzystnie zastosowana dla tam faszynowych.

*b)* Można także zastosować metodę biegunową, podaną w § 10 pod *d)* z tą różnicą, że i tu poprowadzimy jak przedtem linię kierunkową (rys. 52), obliczymy:

$$y_1 = D \tan \alpha,$$

$$y_2 = D \tan 2\alpha$$

$$y_n = D \tan n\alpha$$



Rys. 52.

i odmierzymy te odcinki na linii kierunkowej.

Teraz można poszczególne punkty łuku w wodzie tyczyć. Kierujemy z punktu  $P$  łódź tak, aby żerdka z łodzi trzymana weszła w kierunek  $P1'$  i miała od  $P$  odległość  $s$ . Tę żerdkę wbijamy i otoczmy narzutem kamiennym. Następnie kierujemy łódź z żerdką w kierunek  $P2'$  i wbijamy ją w odległości  $s$  od punktu  $1$  i t. d.

Ta metoda może być z korzyścią dla kamiennych tam stosowana.

Dla długich łuków można przyjąć w dowolnym  $n$ -tym

punkcie nową styczną i nową linię kierunkową. W celu otrzymania dokładnych podstaw dla dalszego tyczenia, należy punkt, w którym chce się poprowadzić styczną, dokładnie ustalić a styczną dokładnie wyznaczyć. Punkt  $n$  (rys. 53) ustalimy za pomocą współrzędnych:

$$x_n = r \sin 2na,$$

$$y_n = r(1 - \cos 2na) = 2r \sin^2 na,$$

zaś dla wyznaczenia kierunku stycznej obliczymy i odmierzymy albo:  $PQ = r \tan na$ , albo z trójkąta  $PQR$ ,  $PR = PQ \tan 2na = r \tan na \tan 2na$ .

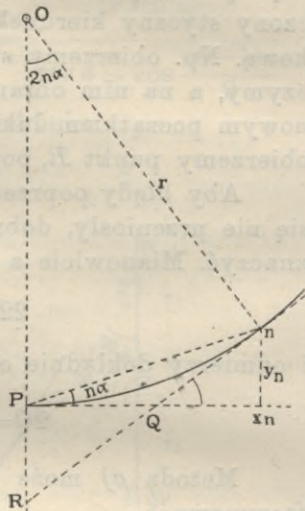
c) Jeżeliby linia kierunkowa w powyższych metodach stosowana wypadła również w rzekę, co się zdarzyć może przy przejściu z wklęsłego do wypukłego brzegu, lub też na tamie separacyjnej, budowanej na wylocie bocznego dopływu rzeki, natenczas trzeba styczną  $PM$  (rys. 54) poprowadzić wstecz pod bieg rzeki, a linię kierunkową obrać powyżej początku łuku. Jeżeli zastosujemy metodę  $a$ ), to różnica w wzorach na  $y$  będzie tylko ta, że w nawiasach będzie znak  $+$ . Zatem:

$$y_1 = (D + a_1) \tan \alpha,$$

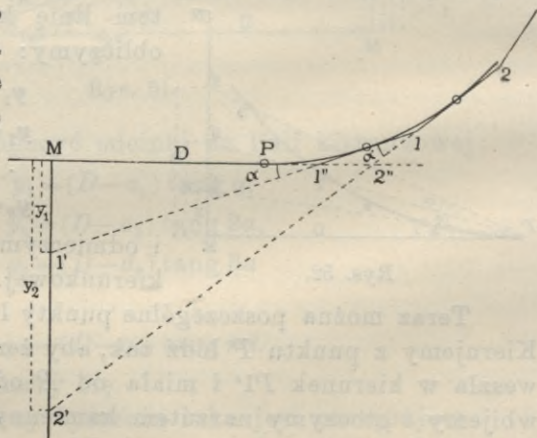
$$y_2 = (D + a_2) \tan 2\alpha$$

$$y_n = (D + a_n) \tan na.$$

Zresztą postępowanie przy tyczeniu łuku nie wymaga objaśnienia.



Rys. 53.

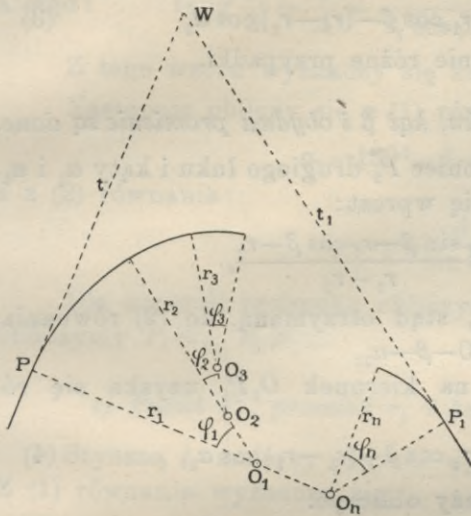


Rys. 54.

## § 24. Tyczenie łuków koszowych. Rys. 55.

W celu lepszego zastosowania się do trudnego górskiego terenu, lub też w celu obejścia jakiejś przeszkody, stosuje się nieraz łuki koszowe.

Jeżeli w łuku koszowym o  $n$  łukach połączmy środki kół, to otrzymamy wielobok  $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$  o  $n$  bokach.



Rys. 55.

Przyjmijmy\*), że z projektu są znane długości wszystkich promieni łuków, to długości boków tego wieloboku, z wyjątkiem boku  $O_1O_n$  równają się różnicy przylegających promieni. Długość boku  $O_1O_n$  wyznaczy się podług danych długości  $t$  i  $t_1$  z pięcioboku  $O_1PWP_1O_nO_1$ .

Między kątami  $\varphi$  a bokami wieloboku zachodzą trzy związki, wyznaczone trzema równaniami. Jedno równanie otrzyma się z wa-

runku, że  $\Sigma\varphi = 180 - \beta$ . Dwa inne równania otrzymamy z rzutów wieloboku  $O_1O_2O_3\dots O_n$  na dwa dowolne kierunki. Należy zatem z projektu wyjąć wartości  $n-3$  kątów  $\varphi$ , zaś pozostałe trzy kąty wyznaczy się z tych trzech równań. Przez to redukuje się wyznaczenie łuku koszowego o  $n$  łukach, na łuk koszowy o trzech łukach.

### § 25. Tyczenie łuków koszowych o dwóch łukach. Rys. 56.

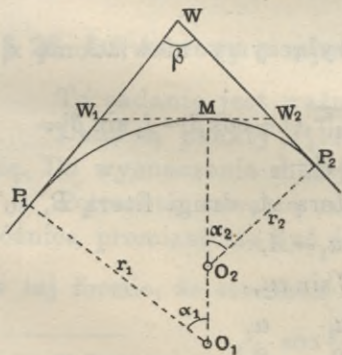
Do rozwiązywania zagadnień dotyczących łuków koszowych potrzeba nam, jak to wykazano w poprzednim paragrafie, trzech równań.

Jedno równanie wyznacza warunek, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180 - \beta. \quad (1)$$

Dwa dalsze równania uzyskamy z rzutu wieloboku  $O_1P_1WP_2O_2O_1$  na dwa dowolne kierunki. Długości stycznych  $P_1W$  i  $P_2W$  oznaczmy przez  $t_1$  i  $t_2$ .

Rzut wieloboku na kierunek  $WP_2$  da równanie:



Rys. 56.

\*) Podług Pullera w Ztschr. f. Verm. 1892.

$$t_2 = t_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - (r_1 - r_2) \sin \alpha_2. \quad (2)$$

Rzut na kierunek  $O_2P_2$  do poprzedniego prostopadły:

$$r_2 = t_1 \sin \beta - r_1 \cos \beta - (r_1 - r_2) \cos \alpha_2. \quad (3)$$

Rozpatrzmy następnie różne przypadki.

a) Początek  $P_1$  jednego łuku, kąt  $\beta$  i obydwie promienie są dane.

Należy wyznaczyć koniec  $P_2$  drugiego łuku i kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .  
Z (3) równania otrzymana się wprost:

$$\cos \alpha_2 = \frac{t_1 \sin \beta - r_1 \cos \beta - r_2}{r_1 - r_2},$$

a wstawiwszy wartość  $\alpha_2$ , stąd otrzymaną, do (2) równania, obliczymy  $t_2$ . Zaś:  $\alpha_1 = 180 - \beta - \alpha_2$ .

Z rzutu wieloboku na kierunek  $O_1P_1$  uzyska się równanie:

$$r_1 = t_2 \sin \beta - r_2 \cos \beta + (r_1 - r_2) \cos \alpha_1, \quad (4)$$

które dla kontroli należy obliczyć.

Dla tyczenia przydatne będą jeszcze długości:

$$P_1W_1 = W_1M = r_1 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2}, \quad P_2W_2 = W_2M = r_2 \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2},$$

które odmierzymy.

Równość długości  $P_1W_1 = W_1M$  i  $P_2W_2 = W_2M$  będzie dalszą kontrolą. W ten sposób otrzymamy wspólny punkt  $M$  i koniec łuku  $P_2$ .

b) Punkty  $P_1$  i  $P_2$  i promień  $r_1$  są dane.

Oprócz tego dany jest kąt  $\beta$ , a długości  $t_1$  i  $t_2$  są również dane, lub zmierzmy je w polu. Wyznaczyć należy  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $r_2$ .

Jeżeli z (2) i (3) równania wyłączymy niewiadomą  $r_2$ , to otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 [t_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - t_2] + \sin \alpha_2 [r_1 (1 + \cos \beta) - t_1 \sin \beta] = \\ = t_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - t_2. \end{aligned}$$

Oznaczmy pierwszy nawias literą  $A$ , drugi literą  $B$ , to:

$$A \cos \alpha_2 + B \sin \alpha_2 = A,$$

czyli: 
$$A(1 - \cos \alpha_2) = B \sin \alpha_2,$$

lub: 
$$A \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} = B \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2},$$

a stąd: 
$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = \frac{B}{A} = \frac{2r_1 \cos^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) - t_1 \sin \beta}{t_1 \cos \beta + r_1 \sin \beta - t_2}$$

Z tego wzoru wyznaczmy się kąt  $\alpha_2$ .

Następnie obliczy się z (1) równania:

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta - \alpha_2,$$

a z (2) równania:

$$r_2 = r_1 - \frac{A}{\sin \alpha_2}$$

Dla kontroli rachunku obliczymy równanie (4). Również obliczymy  $P_1 W_1$ ,  $P_2 W_2$ ...

c) Punkt  $P_1$ , promień  $r_1$  i kąty  $\alpha_1$  i  $\beta$  są dane.

Styczną  $t_1$  zmierzy się, zaś wyznaczyć należy  $t_2$ ,  $r_2$  i  $\alpha_2$ .  
Z (1) równania wyznaczy się:

$$\alpha_2 = 180 - \beta - \alpha_1.$$

Z (3) równania:

$$r_2 = \frac{t_1 \sin \beta - r_1 (\cos \beta + \cos \alpha_2)}{1 - \cos \alpha_2},$$

albo w formie wygodniejszej dla rachunku logarytmami:

$$r_2 = \frac{t_1 \sin \beta - 2r_1 \cos \frac{\beta + \alpha_2}{2} \cos \frac{\beta - \alpha_2}{2}}{2 \sin^2 \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)}$$

Podług tych wartości obliczy się  $t_2$  z (2) równania.

## § 26. Łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni. Rys. 57\*).

To zadanie jest ważne szczególnie dla trasy kolei.

Dane są punkty  $P_1$  i  $P_2$  i kąt  $\beta$ , zatem  $t_1$  i  $t_2$  zmierzy się. Do wyznaczenia mamy  $r_1$  i  $r_2$  i kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .

Potrzebne czwarte równanie uzyskamy z założenia, że różnica promieni ma być jak najmniejsza, które wprowadzimy w tej formie, że stosunek  $\frac{r_2}{r_1}$  ma być jak największy.

\*) Inne rozwiązanie patrz: D'Ocagne, Leçons sur la Topométrie.

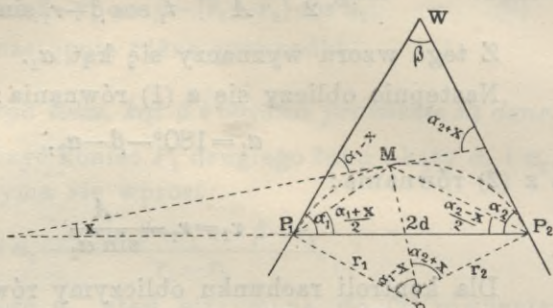
W punkcie wspólnym  $M$  poprowadzona styczna niech zawiera z prostą  $P_1P_2$  kąt  $x$ , to z trójkąta  $P_1MP_2$  wynika, że:

$$\frac{P_2M}{P_1M} = \frac{\sin \frac{\alpha_1 + x}{2}}{\sin \frac{\alpha_2 - x}{2}}$$

zaś z trójkątów  $P_1MO_1$  i  $P_2MO_2$  wyznaczy się:

$$P_1M = 2r_1 \sin \frac{\alpha_1 - x}{2}$$

$$P_2M = 2r_2 \sin \frac{\alpha_2 + x}{2}$$



Rys. 57.

co wstawivszy w poprzednie równanie wyznaczy:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \frac{\alpha_1 + x}{2} \sin \frac{\alpha_1 - x}{2}}{\sin \frac{\alpha_2 - x}{2} \sin \frac{\alpha_2 + x}{2}} = \frac{\cos x - \cos \alpha_1}{\cos x - \cos \alpha_2}$$

W tym wyrazie jest tylko  $x$  ilością zmienną. Znajdźmy jego pochodną podług  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{dx} &= \frac{-\sin x (\cos x - \cos \alpha_2) + \sin x (\cos x - \cos \alpha_1)}{(\cos x - \cos \alpha_2)^2} \\ &= \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{(\cos x - \cos \alpha_2)^2} \sin x \end{aligned}$$

Dla  $\max\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$  ma ten wyraz równać się zero, co nastąpi, gdy  $x=0$ , czyli gdy styczna w punkcie  $M$  będzie równoległa do prostej  $P_1P_2$ .

Wobec tego wyniku, są kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  przy  $P_1$  i  $P_2$  zarazem kątami środkowymi łuków. Można je albo wprost zmierzyć, jeżeli z  $P_1$  do  $P_2$  można celować, alboważ można je wyznaczyć.

Mianowicie z trójkąta  $P_1WP_2$  otrzyma się:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin(\beta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1},$$

czyli:  $\cotang \alpha_1 = \frac{t_1 - \cos \beta}{\sin \beta}$ , podobnie  $\cotang \alpha_2 = \frac{t_2 - \cos \beta}{\sin \beta}$   
 przyczem ma być  $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ - \beta$ .

W celu wyznaczenia wielkości promieni, zużytkujemy wzór powyżej ustawiony, w który wstawimy  $x=0$ :

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} \quad (a)$$

Jeżeli zważymy, że prosta  $MO_1$  stoi prostopadle do  $P_1P_2$ , to:

$$P_1P_2 = 2d = r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2. \quad (b)$$

Wartość dla  $d$  otrzymamy albo wprost przez zmierzenie, albo z wzoru:  $2d = t_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_1} = t_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_2}$ .

Jeżeli z wzoru (a) otrzymaną wartość za  $r_2$  wstawimy w wzór (b), to otrzymamy równanie:

$$2r_1 \left( \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) = 2d \sin^2 \left( \frac{\alpha_2}{2} \right),$$

z którego ostatecznie wyznaczy się:

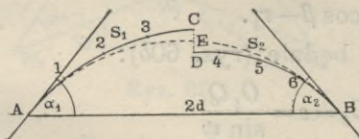
$$r_1 = \frac{d \sin \frac{\alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\beta}{2}}, \quad \text{podobnie } r_2 = \frac{d \sin \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$$

Dla kontroli rachunku należy obliczyć wzór (2) lub (3) z poprzedniego paragrafu\*).

Dla tyczenia łuków obliczymy (ob. rys. 56) styczne  $P_1W_1 = W_1M$  i  $MW_2 = W_2P_2$ .

### § 27. Zastosowanie § 26. Rys. 58.

Dłuższe łuki tyczone z dwóch stron nie zejną się w jednym wspólnym punkcie, z powodu nieuniknionych błędów popełnionych przy tyczeniu. Jeżeli odchyłka  $\Delta$  jest mała, to ją równomiernie na obydwie łuki rozdzielimy podług § 14. Jeżeli zaś jest większa, to pomiędzy dwa dokła-



Rys. 58.

\*) Ob. nr. 16 zbioru przykładów.

dnie wytyczone punkty  $A$  i  $B$  wstawimy łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni. W tym celu zmierzmy kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  zawarte między stycznymi w tych punktach a prostą  $AB$ , następnie zmierzmy albo długości stycznych, albo  $AB=2d$ . Dalsze obliczenie jak w § 26.

### § 28. Łuk koszowy o małym kącie wierzchołkowym. Rys. 59.

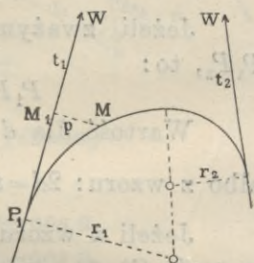
Odwołując się na to, co powiedziano w § 17, należy ustalić na polu choć jeden punkt łuku koszowego. Jeżeli  $M$  jest tym punktem, to spuścimy prostopadłą do stycznej i zmierzmy  $MM_1=p$ ; albo też dojdziemy do wartości  $p$  przez postępowanie wskazane w § 17a.

Długość promienia  $r_1$  weźmie się z projektu, wtedy obliczymy i odmierzymy:

$$M_1P_1 = \sqrt{p(2r_1 - p)}$$

przezco otrzyma się punkt  $P_1$ , a po wyznaczeniu długości  $M_1W$ , wyznaczy się:

$t_1 = M_1P_1 + M_1W$ . Dalsze tyczenie łuku nastąpi podług § 25.



Rys. 59.

### § 29. Łuk koszowy o trzech łukach\*).

Rozpatrzmy dwa różne przypadki.

a) Dane początek i koniec łuku i wszystkie trzy promienie.

Rys. 60 i 61.

Styczne  $t_1$  i  $t_2$ , jakoteż kąt  $\beta$  zmierzy się na gruncie.

Wyznaczyć mamy kąty  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$ . Nazwijmy różnice promieni  $O_1O_2=d_1$  a  $O_2O_3=d_2$ . Poprowadźmy na rys. 60a  $O_3Q \parallel O_1P_1$ , zaś  $O_1Q \perp O_3Q$  i wykonajmy rzut wieloboku  $O_1P_1WP_2O_3QO_1$  na kierunku  $P_1W$  i na prostopadłą do tego kierunku, a otrzymamy:

$$O_1Q = t_1 - t_2 \cos \beta - r_3 \sin \beta,$$

$$O_3Q = t_2 \sin \beta - r_3 \cos \beta - r_1.$$

Jeżeli te ilości obliczymy, to będzie (rys. 60b):

$$\text{tang } \psi = \frac{O_1Q}{O_3Q}, \quad O_1O_3 = c = \frac{O_1Q}{\sin \psi}$$

\*) Puller, Zeitschr. für Vermessungswesen z r. 1893: „Ueber das Abstecken von Kreisbögen“.



W trójkącie  $O_1O_2O_3$  oznaczmy  $s = \frac{d_1 + d_2 + c}{2}$ , to:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-d_2)}{s(s-c)}}$$

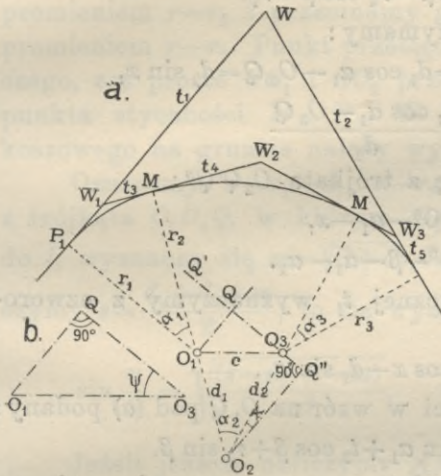
Z trójkąta  $O_1O_3Q'$  wynika, że kąt  $O_2O_1O_3 = \alpha_1 + \psi$ , zatem:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_1 + \psi}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-c)}{s(s-d_2)}}$$

wreszcie:

$$\alpha_3 = 180^\circ - \beta - \alpha_1 - \alpha_2.$$

W miarę zwiększania się kąta  $\alpha_1$  zmniejsza się kąt  $\psi$ , a staje się zerem, skoro promień  $O_1P_1$  spadnie z kierunku  $O_1O_3$ , czyli gdy kąt  $P_1O_1O_3$  osiągnie  $180^\circ$ . Dla kąta  $P_1O_1O_3$  większego niż  $180^\circ$ , staje



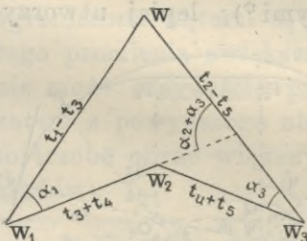
Rys. 60.

się kąt  $\psi$  ujemny, na co przy obliczaniu należy zwrócić uwagę.

Gdy kąt  $\beta$  jest ujemny, jak np. na rys. 43 lub 63, natenczas jest:  $360^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 180^\circ - \beta$ ,

czyli:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ + \beta$ , więc:  $\alpha_3 = 180^\circ + \beta - \alpha_1 - \alpha_2$ .

Podług wyznaczonych kątów  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$  obrachuje się i wytyczy styczne okalające łuki, punkt  $P_2$  i punkty wspólne  $M$  i  $M'$ .



Rys. 61.

Z czworoboku stycznych (rys. 61) możemy otrzymać dwa równania, wykonując rzut tego czworoboku na kierunku prostopadłe do głównych stycznych  $WW_1$  i  $WW_3$ :

$$(t_1 - t_3) \sin \beta = (t_3 + t_4) \sin (\alpha_2 + \alpha_3) + (t_4 + t_5) \sin \alpha_3,$$

$$(t_2 - t_5) \sin \beta = (t_3 + t_4) \sin \alpha_1 + (t_4 + t_5) \sin (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Te równania należy obliczyć dla kontroli\*).

\*) Ob. nr. 17 zbioru przykładów.

b) Dane wszystkie trzy promienie, kąt  $\alpha_1$  i koniec łuku  $P_2$ .

Zmierzymy kąt  $\beta$  i  $WP_2 = t_2$ , a wyznaczyć należy  $t_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$ . Podług wzoru pod (a) obliczy się:

$$O_3 Q = t_2 \sin \beta - r_3 \cos \beta - r_1.$$

Z trójkąta  $O_3 O_2 Q''$  otrzymamy:

$$O_3 Q'' = Q Q'' - O_3 Q = d_1 \cos \alpha_1 - O_3 Q = d_2 \sin x,$$

stąd: 
$$\sin x = \frac{d_1 \cos \alpha_1 - O_3 Q}{d_2}$$

Znając  $x$ , wyznaczy się z trójkąta  $O_2 Q' Q''$ :

$$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1 - x,$$

wreszcie:

$$\alpha_3 = 180^\circ - \beta - \alpha_1 - \alpha_2.$$

W celu obliczenia stycznej  $t_1$  wyznaczymy z czworoboku  $O_2 O_1 Q Q''$ :

$$O_1 Q = d_2 \cos x - d_1 \sin \alpha_1,$$

a po wstawieniu tej wartości w wzór na  $O_1 Q$  pod (a) podany:

$$t_1 = d_2 \cos x - d_1 \sin \alpha_1 + t_2 \cos \beta + r_3 \sin \beta.$$

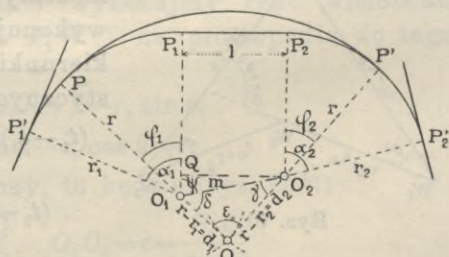
Dla kontroli rachunku obliczy się te same równania, co pod (a).

c) Jeżeliby zamiast  $t_2$  było dane  $t_1$ , wtedy obliczenie redukuje się do łuku koszowego o dwóch łukach.

d) Jeżeliby jeden punkt, np. pierwszego łuku był ustalony, natenczas wyznaczy się  $t_1$  jak w § 28, a dalsze obliczenie skutecznymi się jak pod (a) lub (b).

### § 30. Łuk w zastępstwie krótkiej prostej. Rys. 62.

Na trasie kolejowej należy unikać krótkich prostych między łukami jednakowo skierowanymi\*); lepiej utworzyć łuk koszowy, a więc zastąpić prostą łukiem stycznymi do danych łuków. Na rysunku obok zastąpiliśmy prostą  $l$  łukiem  $PP'$  o promieniu  $r$ . Ten promień musi być większy niż  $r_1$  i  $r_2$ , jest jednakże pożądane, aby różnica między



Rys. 62.

\*) Ob. rozdz. II § 54.

dzy promieniem  $r$  i danymi promieniami była niewielka. Jeżeli taki łuk zastępczy chcemy wprowadzić w projekcję, to bierzemy wielkość promienia  $r$ , a punkty styczności  $P$  i  $P'$  wyznaczy się w następujący sposób. Ze środka  $O_1$  kreślimy łuk promieniem  $r-r_1$  i przecinamy go łukiem zakreślonym z  $O_2$  promieniem  $r-r_2$ . Punkt przecięcia jest środkiem łuku zastępczego, zaś proste  $OO_1$  i  $OO_2$  przedłużone do łuków, wyznaczają punkta styczności  $P$  i  $P'$ . W celu wytyczenia tego łuku koszowego na gruncie należy wyznaczyć kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ .

Oznaczmy:  $r-r_1=d_1$ ,  $r-r_2=d_2$ ,  $r_1-r_2=c$ ,  $O_1O_2=m$ , to z trójkąta  $O_1O_2Q$ , w którym  $O_2Q$  poprowadzono równoległe do  $l$ , wyznaczy się  $m=\sqrt{l^2+c^2}$ . Jeżeli dla trójkąta  $OO_1O_2$  oznaczymy  $s=\frac{d_1+d_2+m}{2}$ , to się wyznaczy:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_2)(s-m)}{md_2}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-m)}{md_1}}$$

Jeżeli jeszcze obliczymy  $\sphericalangle QO_1O_2$  z tang  $\psi = \frac{l}{c}$ , to:

$$\varphi_1 = 180^\circ - \psi - \delta, \quad \varphi_2 = \psi - \gamma.$$

Dla kontroli rachunku można wyznaczyć kąt  $\varepsilon$  z wzoru:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-d_2)}{d_1d_2}}$$

Kąt  $\varepsilon$  ma się równać  $\varphi_1 + \varphi_2$ .

Znając kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  wyznaczymy punkt  $P$  tycząc albo z  $P_1$  łuk o kącie  $\varphi_1$ , albo z  $P'_1$  łuk o kącie  $\alpha_1 - \varphi_1$ .

Podobnie wyznaczy się  $P'$ , poczem wytyczy się łuk  $PP'$ .

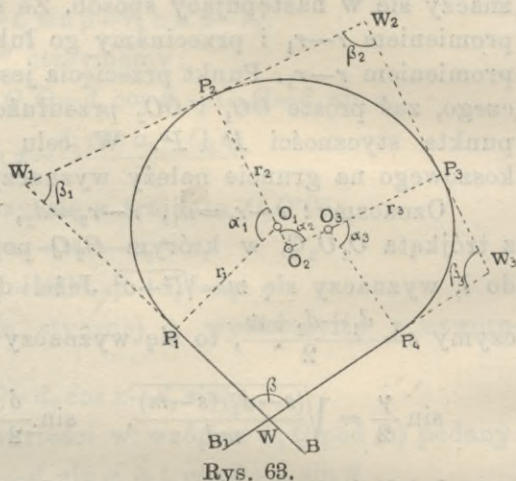
**Uwaga.** Dowolność w obiorze wielkość promienia  $r$  jest ograniczona kątami  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Bowiem w miarę zmniejszania tego promienia zwiększają się kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , których wielkość nie może oczywiście przekroczyć wartości  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Jeżeliby zatem z powyższego obliczenia wypadło  $\varphi_1 > \alpha_1$  lub  $\varphi_2 > \alpha_2$ , to trzeba obrać większy promień  $r^*$ ). (Ob. nr. 18 zbioru przykładów).

\*) Nie trudno wyprowadzić wzór dla najmniejszego jeszcze dopuszczalnego promienia  $r$ ; mianowicie dla  $\varphi_1 = \alpha_1$  jest  $\delta = 180^\circ - \psi - \alpha_1$ , a wtedy z powyższego wzoru dla  $\sin \frac{\delta}{2}$  wyznaczy się:

$$\min d_1 = \frac{l^2}{2[c - m \cos(\psi + \alpha_1)]} \quad \text{i podobnie:} \quad \min d_2 = \frac{l^2}{2[m \cos(\psi - \alpha_2) - c]}$$

### § 31. Tyczenie łuku koszowego w trudniejszych warunkach. Rys. 63.

Na trasie kolei żelaznych czy to w serpentynach, czy też w miejscach, gdzie mają być wykonane tunele zwrotne, mamy nieraz do czynienia z łukiem o jednym promieniu, lub też z łukami koszowymi, których kąt środkowy jest większy niż  $180^\circ$ . Przytem, z powodu trudności terenu bywa pomiar kątów jak  $\beta_1, \beta_2, \dots$ , a tembardziej pomiar stycznych  $WW_1, W_1W_2, \dots$ , albo bardzo utrudniony, albo wprost niemożliwy. Wtedy postąpimy w inny sposób. Przyjmijmy, że tylko kierunki końcowych stycznych  $BW$  i  $B_1W$  są dane, a kąt  $\beta$  może być zmierzony.



#### 1. Łuk o jednym promieniu $r$ .

Dla zmierzonego kąta  $\beta$  obliczymy długość stycznych  $WP_1 = WP_4 = r \cotg \frac{\beta}{2}$ , odmierzymy je i wytyczymy łuk z dwóch stron. Jeżeli w punkcie zetknięcia będzie różnica mała, to ją wyrównamy.

Jeżeliby zaś różnica była większa, to obierzemy dwa dokładnie wytyczone punkty, np.  $P_2$  i  $P_3$  i włożymy łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni, podług § 26.

#### 2. Łuk koszowy o kilku łukach.

Dla dokładnie zmierzonego kąta  $\beta$ , który będzie się cołkowiek różnić od kąta  $\beta$  projektu, wyrysujemy przez próby łuk koszowy, któryby możliwie dokładnie zgodził się z projektem. Z tego wykresu wyjmiemy długość  $WP_1$ , odmierzymy ją i wytyczymy łuk  $P_1P_2$  dla promienia  $r_1$  i kąta  $\alpha_1$ , wyjętych również z wykresu. Tyczenie tego łuku może nastąpić

albo przy pomocy wierzchołka  $W_1$ , albo też bez jego pomocy. Otrzymamy w ten sposób punkt  $P_2$ . Dalsze postępowanie może być różne.

a) Po wyznaczeniu położenia stycznej w  $P_2$  (§ 12), tyczymy łuk  $P_2P_3$  promieniem  $r_2$  i kątem  $\alpha_2$  wyjętymi z wykresu i to znów przy pomocy wierzchołka  $W_2$  lub bez jego pomocy. Po wyznaczeniu położenia stycznej w  $P_3$  wyznaczy się  $W_3$  i zmierzy  $P_3W_3$ . Kąt  $\beta_3$  lub  $\alpha_3$  jest dany, gdyż:

$$\beta_3 = 360^\circ - \beta - \beta_1 - \beta_2, \text{ zaś: } \alpha_3 = 180^\circ + \beta - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Dla kontroli można kąt  $\beta_3$  na miejscu zmierzyć. Ponieważ zmierzona długość  $P_3W_3 = r_3 \tan \frac{\alpha_3}{2}$ , więc wyznaczy się:

$$r_3 = P_3W_3 \cotang \frac{\alpha_3}{2}$$

Gdy się jeszcze odmierzy  $W_3P_4 = P_3W_3$ , to można wytyczyć łuk  $P_3P_4$  obliczonym promieniu  $r_3$ .

Jeżeliby jednak wierzchołka  $W_3$  nie można wyznaczyć, a drobna zmiana w położeniu końcowej stycznej  $WP_4$  była dopuszczalna, natenczas z punktu  $P_3$  tyczymy łuk o promieniu  $r_3$  wyjętym z wykresu i o kącie  $\alpha_3$  powyżej wyznaczonym. Ten łuk w ogóle nie będzie styczny do  $WB_1$ , wtedy z następnego wierzchołka położonego na prostej  $WB_1$  wytyczymy styczną do łuku podług § 20.

b) Można jeszcze inaczej postąpić. Mianowicie wyjmemy z wykresu długość  $WP_4$  i odmierzymy w polu. Następnie tyczymy z dwóch stron, więc łuk  $P_1P_2$  i łuk  $P_4P_3$ , dla promieni i kątów wyjętych z projektu, następnie włożymy między  $P_2$  i  $P_3$  łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni podług § 26.

c) Jeżeli łuk koszowy składa się z trzech łuków, to zamiast powyższych sposobów można dla zmierzonego kąta  $\beta$  i wyjętych z wykresu długości promieni, wyznaczyć dokładnie kąty  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$ , na podstawie przyjętych w wykresie długości  $WP_1 = t_1$  i  $WP_4 = t_2$ , podług § 29 a). Tyczenie nastąpi z dwóch stron, a małą niedokładność, która się pokaże przy zetknięciu, poprawimy, zaś przy większej różnicy włożymy łuk koszowy podług § 26.

### § 32. Tyczenie łuku w tunelu.

Robotę tunelową rozpoczyna się przebijaniem podkopu (sztolni), w którym w miarę postępu tyczymy oś. Dla głównego tyczenia stosuje się tu zawsze metodę biegunową (§ 10 *d*) jako najdokładniejszą i najlepiej nadającą się do tyczenia w sztolni. Natomiast do prowizorycznego przedłużenia łuku w sztolni zastosuje się korzystnie metoda siecznych (§ 10 *f*). Przy takim tyczeniu niema mowy o wyznaczeniu punktu wierzchołkowego i głównych punktów łuku. Jeżeli łuk zaczyna się dopiero wewnątrz tunelu, wtedy wyznacza się jego początek za pomocą dokładnego pomiaru prostej poprzeczającej ten łuk, a od tego punktu na podstawie prostej jako stycznej łuk się tyczy. Jeżeli zaś łuk już z zewnątrz wchodzi w tunel, to się wyznacza dokładnie punkt łuku w bliskości wlotu sztolni położony, wyznacza położenie stycznej w tym punkcie, a na jej podstawie wprowadza się łuk do sztolni. W celu późniejszej kontroli należy położenie tej stycznej za pomocą wbitych pali dokładnie ustalić. Tyczenie łuku metodą biegunową odbywa się krótkimi partjami, na jakie ograniczona szerokość sztolni pozwala. Jeżeli szerokość sztolni, jak to zwykle bywa, nie wiele przekracza 2 m, wtedy z jednego stanowiska można wytyczyć łuk tylko o takiej długości, jaka odpowiada strzałce 1 m. Jeżeli przez  $\alpha$  nazwiemy kąt środkowy tego łuku, to strzałka:

$$p = r \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2r \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right),$$

skąd: 
$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{p}{2r}}$$

Dla  $p=1$  m jest  $\sin \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$ . Dla różnych wartości  $r$  otrzyma się następujące kąty  $\alpha$  i długości łuku w zaokrąglonych wartościach:

$r=50,$	100,	200,	300,	400,	500 m
$\alpha=22^{\circ}57',$	$16^{\circ}13',$	$11^{\circ}28',$	$9^{\circ}22',$	$8^{\circ}6'$	$7^{\circ}15',$
łuk=20.0,	28.3,	40.0,	49.0,	56.6,	63.3 m.

Po wytyczeniu tak niewielkiej długości trzeba się z instrumentem przestawić.

Jeżeli sztolnię pędzi się z dwóch stron, to w punkcie przebicia sztolni łuki się nie zgodzą. Drobnią odchyłkę usu-

niemy poprawką łuków. Przy większej odchyłce włożymy łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni podług § 26.

### § 33. Tyczenie łuku koszowego w tunelu.

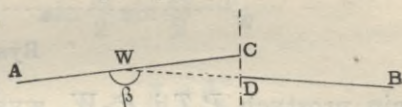
Łuk koszowy jak na rysunku 63. wytyczy się z dwóch stron, dokładnie jak § 31 c) podano.

### § 34. Połączenie odchylonych prostych kierunków w tunelu.

Proste kierunki tyczone z dwóch stron nigdy w punkcie przebiecia sztolni się nie zgodzą, należy je zatem za pomocą włożonych łuków ze sobą połączyć. Mogą tu zajść dwa przypadki.

a) Prosta  $BD$  (rys. 64) przedłużymy po za punkt zetknięcia  $D$  aż do przecięcia z kierunkiem  $AC$  w punkcie  $W$ , zmierzmy kąt  $\beta$  i włożymy łuk o dowolnym promieniu.

b) Jeżeli punkt przecięcia  $W$  wypadnie po za obręb prostej  $AC$ , albo jeżeli odchylenie prostych nastąpi po obu stronach prostej trasy tunelu, na-

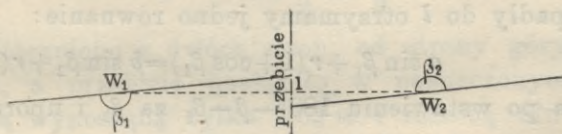


Rys. 64.

tenczas może nastąpić połączenie prostych tylko za pomocą odwrotnych łuków. Między odwrotne łuki żądane jest wstawienie prostej o pewnej długości, zależnej od wielkości promieni łuków. Mamy więc zadanie włożyć między dwie proste dwa odwrotne łuki o przyjętym promieniu  $r$  i prostą  $l$  zawartą między nimi.

Na danych prostych

obierzmy dwa punkty  $W_1$  i  $W_2$ , zmierzmy dokładnie kąty  $\beta_1$  i  $\beta_2$



Rys. 65.

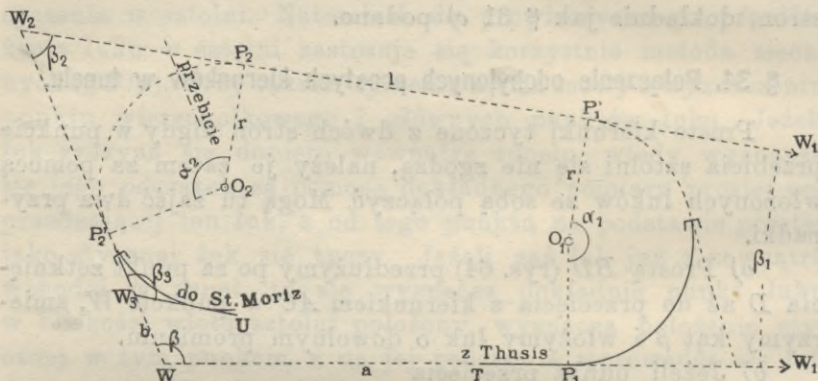
i włożymy w nie łuki. Ażeby między łukami zmieściła się żądana prosta  $l$ , wypada długość  $W_1W_2$  obrać conajmniej na 50 m dla wielkich promieni  $r$ , a na 70 m dla najmniejszych na danej trasie stosownych promieni.

### § 35. Przykłady tras kolejowych z tunelami.

Jako przykłady tyczenia tras w trudnych warunkach, przytoczymy kilka przykładów z kolei Albuli, między Thusis

a St. Moritz w Szwajcaryi\*). Wszelkie tyczenia łuków wykonano metodą biegunową.

1. *Tunel zwrotny Greifenstein*. Rys. 66. Na polu ustalono proste kierunki  $TP_1$ ,  $W_3P'_2$  i wierzchołek  $W_3$ . Ze zmierzonego kąta  $\beta_3$  obliczono i odmierzono styczną  $W_3P'_2$ . Po przedłuże-



Rys. 66.

niu prostych  $P_1T$  i  $P'_2W_3$  wyznaczono  $W$  i zmierzono kąt  $\beta$ , jakoteż długość  $WP_1=a$  i  $WP'_2=b$ . Dla tyczenia potrzebna znajomość kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , jakoteż długości  $P'_1P_2=l$ . Pomiedzy kątami zachodzą związki:

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta_1, \quad \alpha_2 = 180^\circ - \beta_2, \quad \beta + \beta_1 + \beta_2 = 180^\circ,$$

a stąd:  $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta = 180^\circ.$

Z rzutu wieloboku  $WP_1P'_1P_2P'_2W$  na kierunek prostopadły do  $l$  otrzymamy jedno równanie:

$$a \sin \beta_1 + r(1 + \cos \beta_1) = b \sin \beta_2 + r(1 + \cos \beta_2),$$

a po wstawieniu  $180^\circ - \beta - \beta_1$  za  $\beta_2$  i uporządkowaniu:

$$\cos \beta_1(r - b \sin \beta + r \cos \beta) - \sin \beta_1(b \cos \beta + r \sin \beta - a) = 0,$$

z którego wyznaczy się nareszcie:

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \frac{r - b \sin \beta + r \cos \beta}{b \cos \beta + r \sin \beta - a},$$

i podobnie: 
$$\operatorname{tang} \beta_2 = \frac{r - a \sin \beta + r \cos \beta}{a \cos \beta + r \sin \beta - b},$$

przyczem ma się zgodzić, że  $\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ - \beta.$

\*) Wyjęte z Schweizerische Bauzeitung z r. 1902, tom 40, str. 284 i dalsze. Sposób obliczania podany przez autora niniejszego podręcznika,



Z rzutu tego samego wieloboku na kierunek  $l$  wyznaczy się:

$$l = a \cos \beta_1 - r \sin \beta_1 + b \cos \beta_2 - r \sin \beta_2.$$

W celu kontroli rachunku można jeszcze  $l$  wyznaczyć z trójkąta  $WW_1W_2$ . Mianowicie jest:

$$WW_1 = WP_1 + P_1W_1 = a + r \cotg \frac{\beta_1}{2},$$

zaś: 
$$\frac{WW_1}{\sin \beta_2} = \frac{W_1W_2}{\sin \beta}, \text{ czyli: } W_1W_2 = WW_1 \frac{\sin \beta}{\sin \beta_2}$$

Wstawmy za  $WW_1$  powyższą wartość i zważmy, że:

$$W_1W_2 = l + r \left( \cotg \frac{\beta_1}{2} + \cotg \frac{\beta_2}{2} \right),$$

zaś: 
$$\cotg \frac{\beta_1}{2} + \cotg \frac{\beta_2}{2} = \frac{\sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}},$$

to będzie ostatecznie:

$$l = \left( a + r \cotg \frac{\beta_1}{2} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \beta_2} - r \frac{\sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}}$$

lub analogicznie:

$$l = \left( b + r \cotg \frac{\beta_2}{2} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} - r \frac{\sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}}$$

Tyczenie uskuteczniiono z dwóch stron, od strony góry na krótszej partyi, a przebicie nastąpiło w naznaczonym punkcie, z odchyłką wynoszącą tylko 0.02 m i różnicą długości 0.03 m.

2. *Tunel zwrotny w Ragnux.* Rys. 67. Dane było położenie stycznych  $W_1W$  i  $P_2W$ , jakoteż punkt  $P_2$ , jednakże punktu przecięcia stycznych  $W$  nie można było wyznaczyć, trzeba więc było wytyczyć i zmierzyć pomocniczą prostą  $AB$ , zmierzyć kąty przy  $A$  i  $B$  (ob. § 6b) i obliczyć kąt  $\beta$ , jakoteż długość  $BW$  i  $AW$ . W ten sposób była długość  $WP_2 = a$  wyznaczona.

Ponadto były dane promienie  $r_1$  i  $r_2$ , pozostaje zatem dla tego łuku koszowego o dwóch łukach do wyznaczenia kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , jakoteż długość  $P_1W = x$ .

To zadanie może być całkowicie rozwiązane podług § 25 a), gdy wzory tam podane będą należycie zastosowane. Jednakże dla ćwiczenia czytającego przeprowadzimy obliczenie cokolwiek inaczej.

Z trójkąta  $WW_1W_2$  wynika, że  $\beta_2 = \beta + \beta_1$ , a gdy:

$$\alpha_1 = 180^\circ + \beta_1,$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \beta_2,$$

to:  $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ - \beta$ .

Rzut wieloboku  $WP_2O_2O_1P_1W$  na kierunku prostopadły do  $WP_1$  wyznacza równanie:

$$a \sin \beta + r_2 \cos \beta - (r_1 - r_2) \cos (\alpha_1 - 180^\circ) - r_1 = 0,$$

$$\text{stąd: } \cos \alpha_1 = \frac{r_1 - a \sin \beta - r_2 \cos \beta}{r_1 - r_2} = -\cos \beta_1,$$

zatem znane  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Z rzutu samego wieloboku na kierunku  $WP_1$ , otrzymamy wprost:

$$x = a \cos \beta - r_2 \sin \beta - (r_1 - r_2) \sin (\alpha_1 - 180^\circ),$$

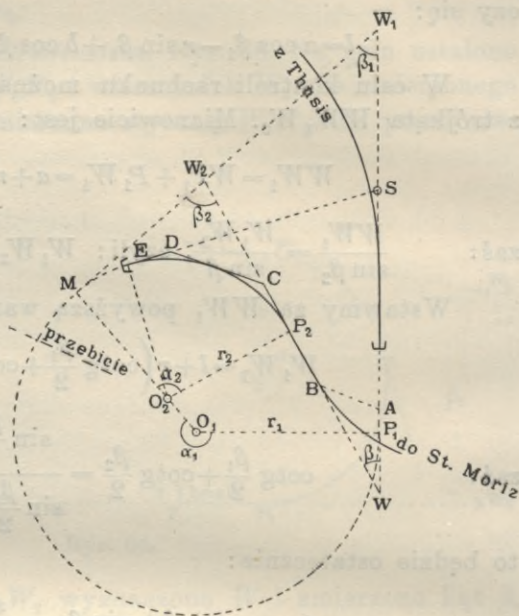
$$\text{lub: } x = a \cos \beta - r_2 \sin \beta + (r_1 - r_2) \sin \alpha_1.$$

Dla kontroli rachunku wyznaczmy z trójkąta  $WW_1W_2$ :

$$\frac{x + r_1 \cotg \frac{\beta_1}{2}}{\sin \beta_2} = \frac{a + r_2 \cotg \frac{\beta_2}{2}}{\sin \beta_1}$$

Z tego wzoru obliczone  $x$  powinno się zgodzić z poprzednio obliczonym.

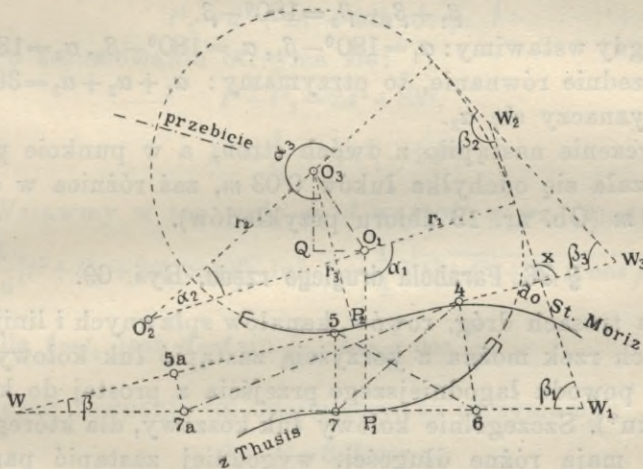
Tyczenie rozpoczęto od  $P_2$  położeniem stycznych do łuku  $P_2CDE$ , aż do punktu  $E$  położonego w bliskości projektowanego wylotu tunelu, potem przedłużono styczną  $ED$  wstecz aż do przecięcia się ze styczną  $WP_1$  w punkcie  $S$ . W tym punkcie ustawiono mурowany sygnał, na który brano celową



Rys. 67.

przy wszystkich kontrolach w tunelu, tak łuku  $P_1M$ , jak też łuku  $P_2M$ . W punkcie przebiecia skonstatowano odchyłkę łuków 0.10 m i skrócenie długości 0.30 m.

3. *Dolny tunel Toua*. Rys. 68. Trasa tunelu jest łukiem koszowym o trzech łukach, dla którego ustalenie ilości zasadniczych przedstawiało pewne trudności. Mianowicie na gruncie można było z projektu wyznaczyć tylko krótkie partie 45 i 67 końcowych stycznych. Zmierzono również 57 i 46, jakoteż wszystkie kąty, poczem wyznaczono rachunkiem długości 5W i 7W i kąt  $\beta$  (Ob. § 6 b). Później po przecięciu



Rys. 68.

lasu wykonano jeszcze pomiar 67a i 5a7a i kąty przy 7a i 4, co posłużyło do kontroli pierwszego rachunku. Następnie obrano z projektu położenie punktów  $P_1$  i  $P_2$ , więc długości  $WP_1=t_1$  i  $WP_2=t_2$  były znane. Gdy i promienie  $r_1, r_2, r_3$  zostały z projektu przyjęte, pozostało tylko do obrachowania  $a_1, a_2, a_3$ .

To obrachowanie jest zawarte w § 29, my je jeszcze raz przeprowadzimy. Poprowadźmy więc  $O_1Q$  i  $O_3Q$  prostopadłe i równoległe do promienia  $O_1P_1$  i nazwijmy kąt  $O_1O_3Q=\psi$ . Z rzutu wieloboku  $P_1WP_2O_3QO_1P_1$  na te same dwa kierunki otrzymamy:

$$O_1Q=t_1-t_2 \cos \beta+r_3 \sin \beta,$$

$$O_3Q=t_2 \sin \beta+r_3 \cos \beta-r_1,$$

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{O_1 Q}{O_3 Q}, \quad O_1 O_3 = c = \frac{O_1 Q}{\sin \psi}$$

Jeżeli  $d_1 = r_2 - r_1$ ,  $d_2 = r_2 - r_3$ , a  $s = \frac{d_1 + d_2 + c}{2}$ , to:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-d_2)}{s(s-c)}}, \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha_1 - \psi}{2} = \sqrt{\frac{(s-d_1)(s-c)}{s(s-d_2)}}$$

Tu jest  $\frac{\alpha_1 - \psi}{2}$ , bo kąt  $O_2 O_1 O_3 = \alpha_1 - \psi$ . Te wzory wyznaczają  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .

Nareszcie między kątami istnieje taki związek:

$$x = 180^\circ - \beta - \beta_1, \quad \beta_2 = \beta_3 + x = 180^\circ - \beta - \beta_1 + \beta_3,$$

czyli:

$$\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 180^\circ - \beta.$$

A gdy wstawimy:  $\alpha_1 = 180^\circ - \beta_1$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ - \beta_2$ ,  $\alpha_3 = 180^\circ + \beta_3$  w poprzednie równanie, to otrzymamy:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ + \beta$ , skąd wyznaczy się  $\alpha_3$ .

Tyczenie nastąpiło z dwóch stron, a w punkcie przebiecia okazała się odchyłka łuków 0,03 m, zaś różnica w długości 0,02 m (Ob. nr. 19 zbioru przykładów).

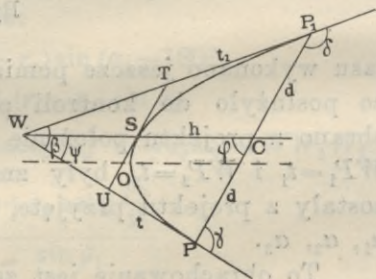
### § 36. Parabola drugiego rzędu. Rys. 69.

Na trasach dróg, rowów, kanałów spławnych i linii regulacyjnych rzek można z korzyścią zastąpić łuk kołowy parabolą, z powodu łagodniejszego przejścia z prostej do krzywizny łuku\*). Szczególnie kołowy łuk koszowy, dla którego obie styczne mają różne długości, wygodniej zastąpić parabolą. Rozpatrzmy jakie stosunki zachodzą między zasadniczymi ilościami paraboli drugiego rzędu.

Parabola  $PSP_1$  będzie wyznaczona, skoro będzie znany kąt  $\beta$  i położenie początku  $P$  i końca  $P_1$  paraboli. Kąt  $\beta$  mierzy się wprost, albo pośrednio podług § 6.

Jeżeli można zmierzyć  $PP_1 = 2d$  i kąty  $\gamma$  i  $\delta$ , wtedy:

$$\beta = \gamma + \delta - 180^\circ, \quad WP = t = 2d \frac{\sin \delta}{\sin \beta}, \quad WP_1 = t_1 = 2d \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$



Rys. 69.

\*) Tylko na trasach kolei żelaznych, gdzie się stosuje przechyłkę toru, nie można zastąpić koła parabolą.

Styczne  $t$  i  $t_1$  mogą być ewentualnie wprost zmierzone. W ten sposób wyznaczymy podstawowe ilości  $\beta$ ,  $t$  i  $t_1$ , które w zupełności parabolę wyznaczają. Na ich podstawie wyznaczymy inne ilości, które się nam w dalszym ciągu przydadzą.

Gdy  $PP_1=2d$ , to z trójkąta  $PWP_1$  wynika:

$$4d^2 = t^2 + t_1^2 - 2tt_1 \cos \beta, \text{ więc: } d = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + t_1^2 - 2tt_1 \cos \beta} \quad (1)$$

Jeżeli oznaczymy  $WC=2h$ , zważywszy, że dla paraboli jest  $WS=SC=h$ , to z trójkątów  $WPC$  i  $WP_1C$  ustawimy równania:

$$\left. \begin{aligned} t^2 &= d^2 + 4h^2 - 4dh \cos \varphi, \\ t_1^2 &= d^2 + 4h^2 + 4dh \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Po zesumowaniu otrzyma się:

$$t^2 + t_1^2 = 2d^2 + 8h^2,$$

skąd: 
$$h^2 = \frac{1}{8} (t^2 + t_1^2 - 2d^2). \quad (2)$$

Wstawmy w ten wzór za  $d$  wartość z wz. (1), to:

$$h^2 = \frac{1}{16} [t^2 + t_1^2 + 2tt_1 \cos \beta], \text{ lub } h = \frac{1}{4} \sqrt{t^2 + t_1^2 + 2tt_1 \cos \beta} \quad (2a)$$

$$\text{Dla } t=t_1 \text{ jest } d=t \sin \frac{\beta}{2}, \quad h = \frac{t}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Jeżeli równania (a) odejmiemy, to otrzymamy:

$$t_1^2 - t^2 = 8dh \cos \varphi,$$

skąd: 
$$\cos \varphi = \frac{t_1^2 - t^2}{8dh}, \quad (3a)$$

a z tego wzoru, z uwzględnieniem wz. (1) i (2a):

$$\sin \varphi = \frac{tt_1 \sin \beta}{4dh} \quad (3b)$$

Przez podzielenie wzoru (3b) przez (3a):

$$\text{tang } \varphi = \frac{2tt_1 \sin \beta}{t_1^2 - t^2} = \frac{2tt_1 \sin \beta}{(t_1 + t)(t_1 - t)} \quad (3c)$$

Z trójkąta  $PWC$  znajdziemy:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \sin \varphi \frac{d}{t} = \frac{t_1 \sin \beta}{4h}, \\ \text{a analogicznie: } \sin(\beta - \psi) &= \frac{t \sin \beta}{4h} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dla spólrzędnych w kierunkach  $SC$  i  $ST$  i dla początku układu  $S$ , jest równanie paraboli:

$$y^2 = 2p'x$$

Jeżeli  $p$  jest parametrem paraboli, to  $p' = \frac{p}{\sin^2 \varphi}$ , zatem:

$$y^2 = \frac{2px}{\sin^2 \varphi}$$

Dla punktu  $P_1$  jest  $x=h$ ,  $y=d$ , zatem:

$$d^2 = \frac{2ph}{\sin^2 \varphi},$$

a stąd wartość parametru paraboli:

$$p = \frac{d^2 \sin^2 \varphi}{2h} \quad (5)$$

Parametrowi równa się promień krzywizny  $\varrho_0$  w wierzchołku  $O$ , zatem podług wz. (5), po wstawieniu wartości za  $\sin^2 \varphi$ :

$$\varrho_0 = \frac{d^2 \sin^2 \varphi}{2h} = \frac{t^2 t_1^2 \sin^2 \beta}{32h^3} \quad (6)$$

Jestto zarazem najmniejszy promień krzywizny paraboli.

W dowolnym innym punkcie paraboli równa się promień krzywizny:

$$\frac{\varrho_0}{\sin^3 \alpha}$$

jeżeli  $\alpha$  jest kątem, który styczna w tym punkcie poprowadzona zawiera z osią paraboli; zatem promień krzywizny:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla punktu } S: \quad \varrho_s &= \frac{\varrho_0}{\sin^3 \varphi} = \frac{d^2}{2h \sin \varphi} = \frac{2d^3}{tt_1 \sin \beta} \\ \text{" " } P: \quad \varrho &= \frac{\varrho_0}{\sin^3 \psi} = \frac{2t^2}{t_1 \sin \beta} \\ \text{" " } P_1: \quad \varrho_1 &= \frac{\varrho_0}{\sin^3(\beta - \psi)} = \frac{2t_1^2}{t \sin \beta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

i stosunki:  $\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{t^3}{t_1^3}$ ,  $\frac{\varrho}{\varrho_s} = \frac{t^3}{d^3}$ ,  $\frac{\varrho_1}{\varrho_s} = \frac{t_1^3}{d^3}$

Obliczenie promienia  $\varrho_0$  będzie nieraz potrzebne, w celu przekonania się czy nie przekracza się najmniejszej dla danej trasy dozwolonej wartości.

Wyznaczenie ilości  $h$ ,  $d$ ,  $\varphi$  rachunkiem, czy też wprost pomiarem, będzie ewentualnie potrzebne, stosownie do metody użytej do tyczenia paraboli\*).

### § 37. Tyczenie paraboli.

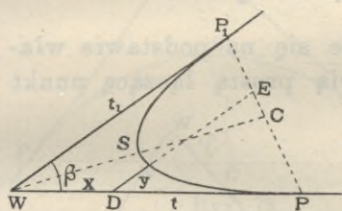
Skoro ilości  $\beta$ ,  $t$  i  $t_1$  są ustalone, można wyznaczyć położenie punktu  $S$ , leżącego na prostej  $WC$  równoległej do głównej osi paraboli, z następujących własności paraboli:

Końce stycznej  $UT$  (rys. 69) połowią styczne  $WP$  i  $WP_1$ , zaś punkt  $S$  połowi prostą  $UT$ , przyczem:  $US=ST=\frac{d}{2}$ . Następnie punkt  $S$  połowi prostą łączącą  $W$  z punktem  $C$  połowiącym prostą  $PP_1$ , przyczem  $WS=SC=h$ .

Do tyczenia punktów pośrednich służą różne metody.

a) *Tyczenie rzędnymi od stycznych.* Rys. 70.

Jeżeli obierzemy  $W$  jako początek układu współrzędnych, których kierunki spadają ze stycznymi  $WP$  i  $WP_1$ , to równanie paraboli:



Rys. 70.

$$\sqrt{\frac{x}{t}} + \sqrt{\frac{y}{t_1}} = 1 \quad (8)$$

Z tego równania wyznaczy się wzór:

$$\frac{y}{t_1} = \left(1 - \sqrt{\frac{x}{t}}\right)^2$$

podług którego obliczono następującą tabliczkę:

$\frac{x}{t}$	$\frac{y}{t_1}$ **)
0.1 . . .	0.46754
0.2 . . .	0.30558
0.25 . . .	0.25000
0.3 . . .	0.20456
0.4 . . .	0.13509
0.5 . . .	0.08578
0.6 . . .	0.05081

\*) Ob.nr. 20. zbioru przykładów.

\*\*) Ta tabliczka jest powtórzona na tab. Va.

0.7 . . . 0.02668

0.8 . . . 0.01115

0.9 . . . 0.00263

1.0 . . . 0.00000

Stosując tę tabelę, wytyczy się parabolę z dwóch stron od punktu  $S$ , dla którego  $\frac{x}{t} = \frac{y}{t_1} = 0.25$ . Rzędne trzeba wytyczyć pod kątem  $\beta$ , za pomocą przyrządu, który umożliwi nastawienie na dowolny kąt. Jeżeli takiego przyrządu niema pod ręką, to można na podstawie proporcji:

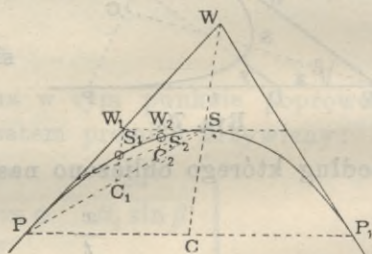
$$WD : WP = P_1E : P_1P$$

podzielić  $P_1P$  na tyle części, na ile  $WP$  zostało podzielone, a przynależne punkty podziału wyznaczają kierunki rzędnych. Ten sposób tyczenia paraboli należy do najdokładniejszych. Zwykle wytyczy się jedną połowę od stycznej  $WP$ , drugą połowę od stycznej  $WP_1$ .

b) Tyczenie przy użyciu cięciw. Rys. 71.

Prosty sposób tyczenia uzyskuje się na podstawie własności paraboli, że jej punkty połowią prostą łączącą punkt wierzchołkowy z punktem połowiącym cięciwę.

Jeżeli  $C$  połowi  $PP_1$ , to  $S$  połowi  $WC$ ; jeżeli  $W_1$  połowi  $WP$ , zaś  $C_1$  połowi  $PS$ , to  $S_1$  połowi  $W_1C_1$ ;  $W_2$  połowi  $W_1S$ ,  $C_2$  połowi  $S_1S$ , to  $S_2$  połowi  $W_2C_2$  i t. d. Proste  $W_1C_1$ ,  $W_2C_2$  są równoległe do  $WC$ .



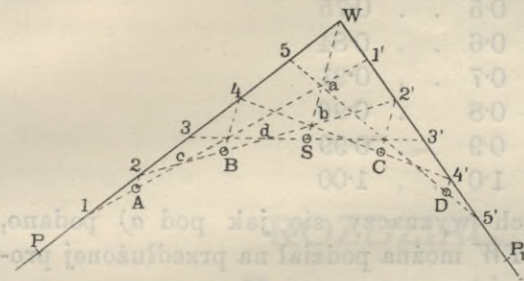
Rys. 71.

c) Tyczenie za pomocą stycznych otaczających parabolę. Rys. 72.

Polega na znanej konstrukcji podziału stycznych na jednakową liczbę równych części i połączenia należytego punktów podziału. Jeżeli tę liczbę obierze się wielką, to punkty przecięcia się stycznych jak 1, c, d... można uważać za punkty paraboli.



Można jednakże rzeczywiste punkty paraboli  $A, B, \dots$  na stycznych wyznaczyć, jeżeli się odmierzy:



Rys. 72.

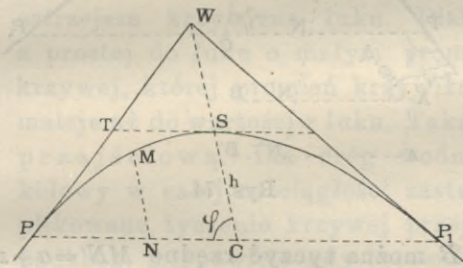
$$1A = 1'a, \quad 2B = 2'b, \\ 4'C = 4b, \quad 5'D = 5a.$$

Przy parzystej liczbie podziału otrzyma się punkt  $S$  na przecięciu prostej  $Wab$  ze styczną  $33'$ .

Sposoby pod  $a$  i  $c$  podane dadzą się zastosować do tyczenia wklęsłych brzegów rzek.

d) *Tyczenie od cięwiwy.* Rys. 73 i 74.

Ten sposób tyczenia poznaliśmy już w § 10 pod  $b$ ), gdyżśmy płaski łuk kołowy zastąpili parabolą.



Rys. 73.

Jeżeli jak tam oznaczymy (rys. 73):

$$PC = CP_1 = d, \quad SC = h,$$

$$MN = z, \quad PN = a,$$

$$NP_1 = b = 2d - a,$$

to możemy użytkować wzór (8) tego paragrafu dla wyznaczania rzędnych  $z$ :

$$z = \frac{ab}{2r}, \quad h = \frac{d^2}{2r},$$

a po wyłączeniu ilości  $r$ :

$$z = \frac{ab}{d^2} h, \quad \text{albo: } \frac{z}{h} = \frac{a}{d} \left( \frac{2d-a}{d} \right) = \frac{a}{d} \left( 2 - \frac{a}{d} \right) \quad (9)$$

Podług tego wzoru obliczono następującą tabliczkę, przyjmawszy podział prostej  $PC$  lub  $CP_1$  na 10 części:

$\frac{a}{d}$	$\frac{z}{h}$ *)
0.1	0.19
0.2	0.36

\*) Ta tabliczka jest powtórzona na tab. Vb.

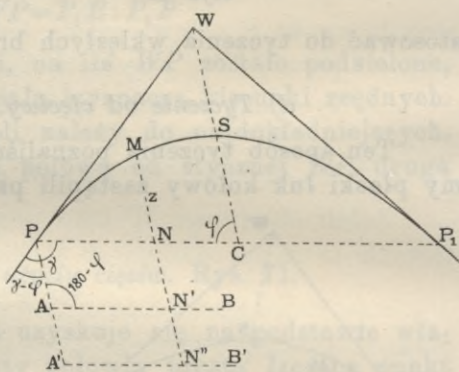
0.3	. . .	0.51
0.4	. . .	0.64
0.5	. . .	0.75
0.6	. . .	0.84
0.7	. . .	0.91
0.8	. . .	0.96
0.9	. . .	0.99
1.0	. . .	1.00

Kierunek rzędnych wyznaczy się jak pod *a)* podano, przyczem zamiast na *TW* można podział na przedłużonej prostej *TS* uskuteczyć.

Ten sposób tyczenia można zastosować do tyczenia wypukłego brzegu rzeki, podobnie jak w § 22. z pewną modyfikacją.

Po ustaleniu ilości  $\beta$ ,  $t$  i  $t_1$ , obliczymy  $d$ ,  $h$  i kąt  $\varphi$ , a zmierzmy kąt  $\gamma$ .

Z *P* tyczymy kierunek *PA* (*PA'*) pod kątem  $\gamma - \varphi$  do stycznej i odmierzymy dowolną długość  $PA = a$ . Następnie z *A* tyczymy kąt  $PAB = 180^\circ - \varphi$ . Od *AB* można tyczyć rzędne  $MN' = a + z$  dla połowy parabol. Tyczenie rzędnych pod kątem  $\varphi$  można przeto ominąć, że się wytyczy  $A'B' \parallel AB$  i podzieli tak samo jak *AB*, a wtedy przynależne punkty podziału, jak *N'* i *N''*, wyznaczą kierunek rzędnej.



Rys. 74.

## ROZDZIAŁ II.

### Krzywe przejściowe.

**Wstęp.** Przejście trasy bezpośrednie z prostego kierunku do krzywizny łuku powoduje przerwę ciągłości ruchu wody na drogach wodnych, lub ruchu wozów na torze kolejowym, co ujemnie oddziaływa tak na budowie trasy jak na środki przewozowe. Te ujemne objawy występują tem silniej, im ostrzejsza krzywizna łuku. Dlatego staramy się przejście z prostej do łuku o małym promieniu złagodzić za pomocą krzywej, której promień krzywizny od nieskończoności stale maleje aż do wartości  $r$  łuku. Taką krzywą zwiemy krzywą przejściową. Dla dróg wodnych byłoby korzystne łuk kołowy w całej rozciągłości zastąpić taką krzywą, lecz skomplikowane tyczenie krzywej przejściowej musi w wielu wypadkach, mianowicie gdy tyczenie odbywa się w wodzie, ustąpić prostszemu tyczeniu łuku kołowego. Jeszcze bardziej byłoby wskazaniem na trasie kolejowej zastąpić cały łuk krzywą przejściową, jednakże ze względów, które później poznamy, jest to niedopuszczalne; zadowolamy się zatem łukiem kołowym, a tylko krótszą partycję takiej krzywej wkładamy na przejściu z prostej do łuku. To samo moglibyśmy uczynić także na trasie drogi wodnej, na co w należytem miejscu będzie zwrócona uwaga czytelnika.

Równie ważnem jak łagodne przejście z prostej w krzywiznę łuku jest na torze kolejowym racjonalne sprowadzenie przechyłki toru do zera; ono też daje podstawę do wyprowadzenia matematycznego kształtu krzywej przejściowej. Obecnie stosuje się bezwarunkowo na wszystkich ważniejszych kolejach żelaznych krzywe przejściowe, normowane odpowiednimi przepisami.

### § 38. Przechyłka toru kolejowego.

Masa  $m$  poruszająca się po drodze krzywoliniowej zostaje pod wpływem działania siły odśrodkowej, określonej wzorem:

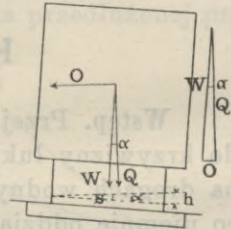
$$O = \frac{mv^2}{\rho},$$

w którym  $\rho$  oznacza w uważanym punkcie promień krzywizny, zaś  $v$  chyżość ruchu. W zastosowaniu do wozu poruszającego się po torze kolejowym, otrzyma ten wzór formę:

$$O = \frac{Qv^2}{g\rho}$$

$Q$  oznacza ciężar wozu,  $g$  przyspieszenie siły ciężkości.

Siła  $O$  wywiera szkodliwy nacisk na tok zewnętrzny toru, dlatego staramy się ją zrównoważyć przez pochylenie toru o taki kąt  $\alpha$ , aby wypadkowa  $W$  z ciężaru  $Q$  i siły odśrodkowej  $O$  wpadła w środek toru (rys. 75).



Rys. 75.

Z trójkąta sił wynika, że  $\tan \alpha = \frac{O}{Q}$ , a z uwzględnieniem

górnego wzoru:  $\tan \alpha = \frac{v^2}{g\rho}$

Przechyłkę toru urabiamy przez podniesienie zewnętrznego toku ponad wewnętrzny o wymiar  $h$ , który, jak z rysunku widać równa się  $s \cdot \sin \alpha$ , gdy  $s$  jest szerokością toru. Ponieważ kąt  $\alpha$  jest mały (dochodzi ledwie do  $6^\circ$ ) można za  $\sin \alpha$  postawić  $\tan \alpha$ , określone powyższym wzorem, więc przechyłka toru:

$$h = s \tan \alpha = \frac{sv^2}{g\rho} \quad (1)$$

Dla danej linii kolejowej jest  $v$  ilością stałą,  $s$  i  $g$  są również stałymi ilościami, zatem:

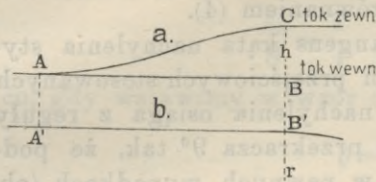
$$h = \frac{k}{\rho}, \quad \text{gdzie } k = \frac{sv^2}{g}, \quad (2)$$

a dla łuku o promieniu  $r$ :

$$h = \frac{k}{r} \quad (3)$$

\*) W praktyce stosuje się trochę odmienny wzór. Przechyłki stosowane na austr. państwowych kolejach żelaznych są zestawione w tabeli XI, do której jest dodana tabela dla rozszerzenia toru w łukach.

Ten wzór okazuje związek między przechyłką toru a promieniem. Żądamy, aby na początku łuku  $B'$  (rys. 76b) była

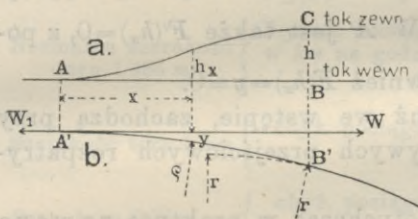


Rys. 76.

pełna przechyłka toru, trzeba ją więc w prostej partyi  $AB$  (rys. 76a) sprowadzić do zera. Mamy wtedy w prostym torze zmienną przechyłkę toru, gdzie jej wcale nie potrzeba, a nawet jest szkodliwą. Dlatego właśnie, a także w celu łagodnego wprowadzenia wozu w krzywiznę łuku, na partyi  $A'B'$  układamy krzywą przejściową.

### § 39. Ogólna teoria krzywej przejściowej. Rys. 77a i b.

Stosownie do rozważań poprzedniego paragrafu przechyłkę  $h$  przynależną do promienia łuku  $r$  zagubi się na partyi



Rys. 77.

partyi  $BA$  (rys. a, rzut tłowy) podług dowolnej krzywej  $AC$ , dla której ustawimy pewne warunki. Dowolna rzędna  $h_x$  tej krzywej jest funkcją odciętej, zatem  $h_x = f(x)$ .

Zakrzywiony rzut osi toru  $A'B'$  ma być styczny w  $A'$  do stycznej  $W_1W$

a w  $B'$  do łuku kołowego.

Ta w dwóch rzutach  $AC$  i  $A'B'$  przedstawiona krzywa jest krzywą przestrzenną. Jej rzut tłowy  $AC$  zwiemy krzywą przechyłki toru, zaś rzut poziomy  $A'B'$  osi toru zwiemy krzywą przejściową. Żądamy, aby w każdym punkcie rzędnej  $h_x$  odpowiadał w krzywej przejściowej promień krzywizny  $\rho$  podług związku wykazanego wzorem (2), mianowicie:

$$h_x = \frac{k}{\rho} \quad (4)$$

Jeżeli literą  $y$  oznaczy się rzędną krzywej  $A'B'$ , to oczywiście jest  $y = F(h_x)$ , zaś ogólny wzór na promień krzywizny, z uwzględnieniem wz. (4):

$$\rho = \frac{\{1 + [F'(h_x)]^2\}^{3/2}}{F''(h_x)} = \frac{k}{h_x} \quad (5)$$

Jestto w najogólniejszym kształcie równanie różniczkowe krzywej przejściowej, czyniącej zadość warunkowi wyrażonemu równaniem (4).

Ilość  $F'(h_x)$ , oznaczająca tangens kąta nachylenia stycznej do osi  $x$ , jest dla krzywych przejściowych stosowanych w praktyce małą, gdyż ten kąt nachylenia osiąga z reguły nie więcej jak  $6^\circ$ , a w ogóle nie przekracza  $9^\circ$  tak, że podniesiona do kwadratu może być w pewnych wypadkach (ob. § 43.) wobec jedności opuszczoną. Wtedy powyższe równanie różniczkowe uprości się na:

$$\frac{1}{\rho} = F''(h_x) = \frac{h_x}{k} \quad (6)$$

i w tej formie będzie w dalszym ciągu stosowane.

Na początku krzywej  $A'$  jest  $h_x=0$ , zatem  $F''(h_x)=0$ , czyli  $A'$  jest punktem przegięcia krzywej, posiada więc promień krzywizny nieskończenie wielki, który stale malejąc osiąga w  $B'$  wartość:  $\frac{k}{h}=r$ . W  $A'$  jest także  $F'(h_x)=0$ , z powodu styczności do  $WW_1$ , również  $F(h_x)=y=0$ .

Te stosunki omówione już we wstępie, zachodzą przy wszystkich rodzajach krzywych przejściowych rozpatrywanych w dalszym ciągu.

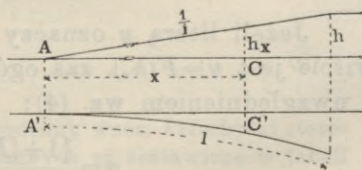
Linie  $h_x$  przyjmuje się dotychczas w praktyce zawsze tak, że rzędne  $h_x$  są dokładnie lub w przybliżeniu proporcjonalne do długości krzywej przejściowej.

Takie przyjęcie upraszcza wprawdzie zastosowanie tej krzywej, nie jest jednakże najlepsze. Odmienne przyjęcie, z wykazaniem wad powyższego uproszczenia omówimy w § 42.

#### § 40. Krzywa przechyłki toru, której rzędne $h_x$ są proporcjonalne do długości krzywej przejściowej. Rys. 78.

Ponieważ zakrzywienie krzywej przejściowej jest małe, to krzywa przechyłki toru przedstawi się jako linia prosta, a z powodu proporcjonalności rzędnych do długości krzywej przejściowej, jest spadek tej krzywej ilością stałą. Oznaczmy go  $1:i$ .

W praktyce obiera się spadek mały, zatem  $i$  wielkie, wynoszące 200 do 500, stosownie



Rys. 78.

do ważności linii kolejowej. Jeżeli łuk  $A'C'$  oznaczymy literą  $S$ , to warunek proporcjonalności wyrazi się wzorem:

$$\frac{h_x}{S} = \frac{1}{i}, \text{ czyli: } h_x = \frac{S}{i},$$

co, gdy wstawimy w wzór (5), otrzymamy:

$$\varphi = \frac{ki}{S} = \frac{C}{S} \quad (7)$$

Stałą ilość  $ki$  oznaczyliśmy literą  $C$ ; uwzględnivszy wzór (2) ma ona wartość:

$$C = \frac{sv^2i}{g} \quad (8)$$

Zależnie od szerokości toru  $s$ , największej chyżości pociągów i od liczby  $i$  jest wielkość stałej  $C$  różna.

Np. na austriackich państwowych kolejach żelaznych przyjmuje się w okrągłych cyfrach:

Normalna szerokość toru 1'435 m	Chyżość pociągu w km na godz.	60,	40,	35,	30
		$C=12000,$	6000,	4500,	3000
Szerokość toru 1'0 m	chyż. pociągu	=35,	25,	20	
		$C=4500,$	3000,	1500	
Szer. toru 0'76 m	chyż. pociągu	=35,	25,	20	
		$C=3000,$	1500,	750	

Te liczby należy jeszcze uzupełnić dla większych chyżości kolei normalnotorowych, przyczem  $i$  należy przyjąć około 500:

$$\begin{array}{l} \text{chyż. w km na godz.} = 80, \quad 90 \\ C = 36000, \quad 45000 \end{array}$$

#### § 41. Na podstawie warunków ustalonych w § 40. wyprowadzone krzywe przejściowe.

##### a) Dokładne równanie. Kłotoida. Rys. 79.

Warunek proporcjonalności rzędnej  $h_x$  do długości krzywej przejściowej, doprowadził do zasadniczego wzoru (7), który z uwzględnieniem wzoru (5) posłuży do ustawienia równania różniczkowego krzywej. Obierzemy jednak inną drogę\*). Jeżeli  $\varphi$  oznacza kąt, który w dowolnym punkcie

\*) Podług Leber, Raccordements, Paris 1892.

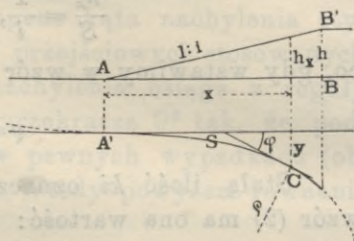
$C$  poprowadzona styczna zawiera z osią  $x$ , a  $S$  łuk  $A'C$  krzywej, to wiemy, że  $dS = \rho d\varphi$ , zaś po wstawieniu za  $\rho$  wartości z wzoru (7):

$$d\varphi = \frac{S dS}{C}, \quad \varphi = \frac{S^2}{2C}$$

Następnie jest:

$$dx = dS \cos \varphi, \quad dy = dS \sin \varphi,$$

$$\text{więc: } \left. \begin{aligned} x &= \int_0^S \cos\left(\frac{S^2}{2C}\right) dS, \\ y &= \int_0^S \sin\left(\frac{S^2}{2C}\right) dS \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



Rys. 79.

Jestto równanie krzywej zwanej kłotoidą, — krzywej spiralnej o punkcie przegięcia w  $A$ . Dla praktyki użyłoby się tylko małą część tej krzywej, dla której p. d'Ocagne\*) obliczył tablice, zawierające wartości  $x$  i  $y$  dla różnych stałych  $C$ . Dotychczas ta krzywa nie została do praktyki wprowadzona.

b) Pierwsze uproszczenie. Lemniskata. Rys. 80.

Zamiast dokładnej krzywej pod  $a$ ) podanej możemy dopuścić uproszczenie, że zamiast do długości krzywej przejściowej są rzędne  $h_x$  proporcjonalne do długości cięciwy  $A'C = p$ . Jeżeli będziemy uważali  $p$  za promień wodzący, a kąt, który ten promień zawiera z osią  $x$ , nazwiemy  $\omega$ , to na podstawie wzoru (7), który obecnie zmieni się na:

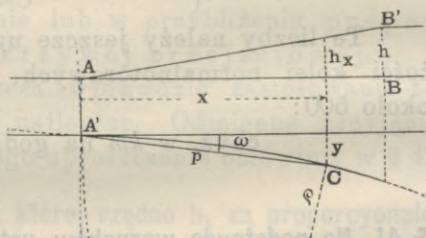
$$\rho = \frac{C}{p}$$

dojdziemy do równania:

$$p^2 = \pm 3C \sin(2\omega) \quad (10)$$

Jestto równanie biegunowe lemniskaty. Ta krzywa przez p. Lebera bardzo zalecona, również nie znalazła dotychczas praktycznego zastosowania.

Kłotoidę i lemniskatę przedstawia rys. 81.



Rys. 80.

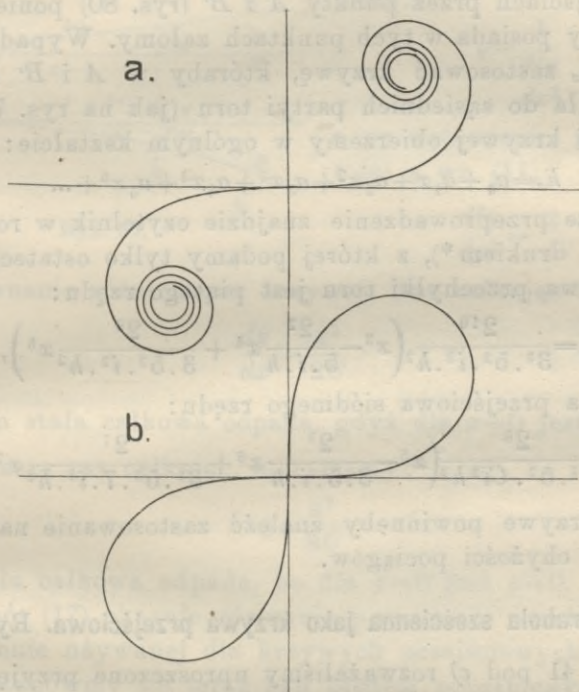
\*) Leçons sur la Topométrie etc. Paris 1904.



c) *Drugie uproszczenie. Parabola sześcienna.*

Jeżeli w chęci dalszego uproszczenia wzoru na krzywą przejściową przyjmiemy, że rzędna przechyłki toru  $h_x$  jest proporcjonalna do odciętej  $x$  zamiast do długości łuku krzywej, to wzór (7) przejdzie w następujący:

$$e = \frac{C}{x}, \quad (11)$$



Rys. 81.

z którego wyprowadzi się (ob. § 43) parabola trzeciego rzędu, jako dziś powszechnie stosowana krzywa przejściowa. Powyższe uproszczenie jest dopuszczalne, ponieważ dla tych krótkich partii krzywych, które się w praktyce stosuje, różnica między długością krzywej a odciętą  $x$  jest bardzo mała.

Z powodu proporcjonalności rzędnych  $h_x$  do odciętych  $x$  jest  $AB'$  (rys. 80) linią prostą, nachyloną pod przyjętym spadkiem 1:2.

## § 42. Krzywa przejściowa w założeniu, że przechyłkę toru przeprowadzi się podług zmiennego nachylenia.

W poprzednim paragrafie przyjęto przeprowadzenie przechyłki toru stałym spadkiem. To przyjęcie wraz z uproszczeniem  $S=x$  doprowadza wprawdzie do prostych wzorów na krzywą przejściową i wystarcza dla małych chyżości pociągów; jednakże przy wielkich chyżościach następuje rzucanie wozu przy przejściach przez punkty  $A$  i  $B'$  (rys. 80) ponieważ tok zewnętrzny posiada w tych punktach załomy. Wypada zatem dla linii  $h_x$  zastosować krzywą, któraby w  $A$  i  $B'$  stycznie przechodziła do sąsiednich partyi toru (jak na rys. 77). Równanie tej krzywej obierzemy w ogólnym kształcie:

$$h_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

Dalsze przeprowadzenie znajdzie czytelnik w rozprawie ogłoszonej drukiem\*), z której podamy tylko ostateczne wyniki. Krzywa przechyłki toru jest piątego rzędu:

$$h_x = \frac{2^{10}}{3^3 \cdot 5^2 \cdot i^3 \cdot h^2} \left( x^3 - \frac{2^2}{5 \cdot i \cdot h} x^4 + \frac{2^6}{3 \cdot 5^3 \cdot i^2 \cdot h^2} x^5 \right), \quad (12)$$

zaś krzywa przejściowa siódmego rzędu:

$$y = \frac{2^8}{3^3 \cdot 5^2 \cdot C i^2 h^2} \left( x^5 - \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot i \cdot h} x^6 + \frac{2^7}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot i^2 \cdot h^2} x^7 \right) \quad (13)$$

Te krzywe powinny znaleźć zastosowanie na liniach o wielkiej chyżości pociągów.

## § 43. Parabola sześcienna jako krzywą przejściową. Rys. 82.

W § 41 pod  $c$ ) rozważaliśmy uproszczone przyjęcie proporcjonalności rzędnej  $h_x$  do odciętej  $x$ , które doprowadziło do zasadniczego wzoru:

$$q = \frac{C}{x}, \quad (11)$$

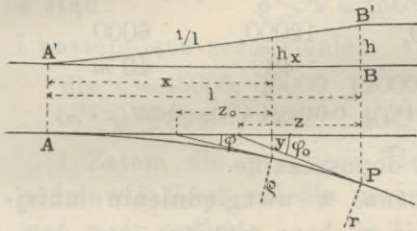
z którego wynika, że promień krzywizny w dowolnym punkcie krzywej jest odwrotnie proporcjonalny do odciętej  $x$ . Znaczenie stałej  $C$  podano w § 40.

Jeżeli  $x$  i  $y$  oznaczają spólrzędne krzywej, to promień krzywizny wyraża się ogólnym wzorem (ob. także wz. 5):

\*) Inż. K. Wątopek, Krzywe przejściowe, Czasopismo techniczne z r. 1906.

$$\varrho' = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} *)}{d^2y/dx^2} \quad (14a)$$

Jak już w § 39 powiedziano, możemy w zastosowaniu do krzywej przejściowej  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  wobec jednościi opuścić i na-



Rys. 82.

pisać:

$$\varrho = \frac{1}{d^2y/dx^2} \quad (14b)$$

a po wstawieniu za  $\varrho$  wartości z wz. (11):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{C}, \quad (15)$$

jako równanie różniczkowe krzywej. Raz całkując będzie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2C} \quad (16)$$

przyczem stała całkowa odpada, gdyż dla  $x=0$  jest:  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Jeszcze raz całkując, otrzymamy:

$$y = \frac{x^3}{6C} \quad (17)$$

Stała całkowa odpada, bo dla  $x=0$  jest  $y=0$ .

Wzór (17) okazuje równanie paraboli sześcienniej, powszechnie używanej dla krzywych przejściowych.

Zastanówmy się teraz nad błędem popełnionym przeto, żeśmy zamiast dokładnego wzoru (14a), zastosowali przybliżony (14b). Z tych wzorów wynika, że:

$$\varrho' = \varrho \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

W dostatecznym przybliżeniu możemy napisać:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 1 + \left(\frac{3}{2} \frac{dy}{dx}\right)^2,$$

więc błąd popełniony wynosi:

\*) Podług tego dokładnego wzoru wyprowadził równanie krzywej przejściowej p. Leber w dziele jak wyżej.

$$\varrho' - \varrho = \frac{3}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \varrho,$$

lub, gdy się uwzględni wz. (16) i (11):

$$\varrho' - \varrho = \frac{3}{8} \frac{x^4}{C^2} \varrho = \frac{3}{8} \frac{C^2}{\varrho^3} \quad (18)$$

Dla kolei główniejszych osiąga  $x$  największą wartość 40 do 60 m; dla tych wartości obliczy się z wz. (18):

gdy $C=45000$ ,	36000,	12000,	6000
najw. $x = 45$	60	48	40 m

$$\frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} = 0.00076 (0.08\%), \quad 0.00375 (0.4\%), \quad 0.0138 (1.4\%), \quad 0.027 (2.7\%).$$

Są to różnice praktycznie dopuszczalne.

Dla kolei podrzędnych można, w uwzględnieniu mniejszej chyżości pociągów, dopuścić większą różnicę.

Jeżeli przyjmiemy:  $\varrho' - \varrho \leq 0.1\varrho$ , to z wzoru (18) otrzyma się:

$$\frac{3}{8} \frac{C^2}{\varrho^3} \leq 0.1\varrho, \text{ a stąd: } \varrho \geq \sqrt[3]{3.75C^2} \geq 1.391\sqrt{C}$$

Podług tego wzoru obliczno graniczne wartości dla  $\varrho$ :

gdy $C=4500$ ,	3000,	1500,	750
$\varrho \geq 94$	76,	54,	39 m

Te wartości zostały uwzględnione w tab. VI. części II.

Drugi błąd popełniamy w pomiarze długości przeto, że zastępujemy zwykle długość krzywej  $S$ , odciętą  $x$ .

Z wzoru ogólnego dla długości krzywej:

$$dS = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot dx$$

rozwinętego w szereg, po wstawieniu wartości za  $\frac{dy}{dx}$  z wz. (16):

$$dS = \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2C} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{x^2}{2C} \right)^4 \right] dx,$$

otrzyma się przez całkowanie wzór:

$$S = x + \frac{x^5}{40C^2} - \frac{x^9}{1152C^4} \quad (19)$$

Po wstawieniu za  $x$  wartości z wz. (11), otrzyma się:

$$S - x = \frac{C^3}{40\varrho^5} - \frac{C^5}{1152\varrho^9} \quad (19a)$$

Drugi człon z prawej strony daje dla najmniejszych promieni, wykazanych w tab. VI., różnicę dochodzącą ledwie do 0·001 *m*, może być więc zawsze opuszczony. Co do pierwszego członu, to jeżeli dopuścimy w praktyce różnicę  $S-x$  mniejszą niż pół centimetra, natenczas mamy warunek:

$$\frac{C^3}{40\varrho^5} \leq 0\cdot004 \text{ m}$$

$$\text{a stąd: } \varrho \geq \sqrt[5]{6\cdot25C^3} \geq 1\cdot4426\sqrt[5]{C^3} \quad (19b)$$

i następujące zestawienie:

$$\begin{array}{l} \text{dla } C=45000, 36000, 12000, 6000, 4500, 3000, 1500, 750 \\ \varrho \geq 894, \quad 782, \quad 404, \quad 267, \quad 224, \quad 176, \quad 116, \quad 77 \text{ m} \end{array}$$

Zatem dla promieni większych, niż powyższe, możemy podstawić  $S=x$ , zaś dla mniejszych promieni należy zastosować wzór ogólny:

$$S=x\left(1+\frac{x^4}{40C^2}\right) \quad (20)$$

Tabela VI. zawiera długości krzywej dla  $S-x \leq 0\cdot001 \text{ m}$ . To poprzedziwszy, powróćmy do wzorów (11) i (14) do (17), które w zupełności określają krzywą przejściową.

W punkcie końcowym  $P$  krzywej osiąga  $\varrho$  wartość promienia  $r$  łuku kołowego, zaś  $x$  długość  $l$ , więc podług wz. (11):

$$l = \frac{C}{r}$$

a ponieważ wiemy, że linia  $A'B'$  przechyłki toru jest prostą nachyloną spadkiem 1:  $i$ , to:

$$x = ih_x, \text{ zaś: } l = ih$$

jako drugi wyraz dla długości krzywej przejściowej.

Z wz. (16) otrzymamy, gdy  $\varphi$  jest kątem nachylenia stycznej,  $\text{tang } \varphi = \frac{x^2}{2C}$ , a dla końca w  $P$ :  $\text{tang } \varphi_0 = \frac{l^2}{2C} = \frac{C}{2r^2}$

Jeżeli końcową rzędną w  $P$  oznaczymy literą  $e$ , to z wz. (17):

$$e = \frac{l^3}{6C} = \frac{C^2}{6r^3}$$

zaś rzędna w połowie krzywej, dla  $x = \frac{l}{2}$  równa się:

$$\frac{l^3}{48C}, \text{ czyli równa: } \frac{e}{8}$$

Oznaczmy podstyczne w punktach  $C$  i  $P$  przez  $z$  i  $z_0$ , to:

$$z = y \cotang \varphi = \frac{x}{3}, \text{ zaś: } z_0 = e \cotang \varphi_0 = \frac{l}{3}$$

Te wzory są tak proste, że je można wprost na polu do obliczenia zastosować.

Dla lepszego przeglądu zestawiamy powyższe wzory, określające zupełnie krzywą przejściową:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \frac{C}{x}; & l &= \frac{C}{r} \text{ (także } l = ih) \\ \text{tang } \varphi &= \frac{x^2}{2C}; & \text{tang } \varphi_0 &= \frac{l^2}{2C} = \frac{C}{2r^2} = \frac{3e}{l} \\ z &= \frac{x}{3}; & z_0 &= \frac{l}{3} \\ y &= \frac{x^3}{6C}; & e &= \frac{l^3}{6C} = \frac{C^2}{6r^3} \end{aligned} \right\} (21^*)$$

Rzędna w połowie długości  $\left(x = \frac{l}{2}\right)$  równa  $\frac{e}{8}$

$$S = x \left(1 + \frac{x^4}{40C^2}\right) \text{ (granice stosowania podaje wz. (19b))}$$

$$v = \frac{e}{4} \text{ (ob. § 44)}$$

$a =$  (podług wz. 24a,  $b$  lub  $c$  w § 44).

**Uwaga.** Dla wielkich promieni  $r$  wypada  $l$  małe; można zatem dla głównych kolei przyjąć jako najmniejszą długość  $l = 20 \text{ m}$ . Wtedy jest  $C$  zmienne z  $r$ , mianowicie  $C = 20r$ . Jest to uwzględnione w tabeli VII.

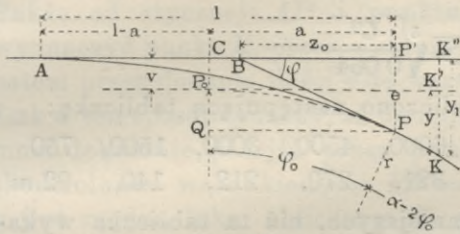
#### § 44. Łuk kołowy z krzywą przejściową. Rys. 83.

Jeżeli między łuk kołowy  $P_0PK$ , a prostą styczną do łuku włożymy krzywą przejściową  $AP$ , to ponieważ ta krzywa jest łagodniej zakrzywiona, niż łuk, jej przebieg wypada po zewnętrznej stronie łuku.

Z tego powodu styczna do łuku  $P_0K'$  i styczna do krzywej przejściowej  $AP'$  muszą być względem siebie równoległe przesunięte o pewien wymiar  $v$ . Styczne przejście krzywej do łuku następuje w tym punkcie  $P$ , w którym promień  $\varrho$

\*) Ob. tabelę VI. w II. części.

krzywej osiąga wartość  $r$  łuku, a kąt styczności wartość  $\varphi_0$ , określona wz. (21). Należy przedewszystkiem wyznaczyć ów odstęp stycznych  $v$ . Z trójkąta  $OPQ$  wynika ( $O$  środek koła):



Rys. 88.

$$QP = CP' = a = r \sin \varphi_0 \quad (22)$$

$P_0Q$  jako strzałka płaskiego łuku, równa się  $\frac{a^2}{2r}$

(ob § 10b), a gdy  $v = e - P_0Q$ , więc  $v = e - \frac{a^2}{2r}$ . Wymiar  $v$

jest zawsze mały, można

zatem za  $a$  zamiast  $r \sin \varphi_0$  wprowadzić  $r \tan \varphi_0 = \frac{C}{2r}$  (wz 21).

Wtedy jest:

$$\frac{a^2}{2r} = \frac{C^2}{8r^3} = \frac{6}{8} \cdot \frac{C^2}{6r^3} = \frac{3}{4} e \quad (\text{ob. wz. 21}),$$

więc: 
$$v = e - \frac{3}{4} e = \frac{e}{4} \quad (23)$$

Zatem wielkość przesunięcia stycznej łuku względem stycznej krzywej równa się jednej czwartej końcowej rzędnej krzywej przejściowej.

Jeżeli w wz. (22) wyrazimy  $\sin \varphi_0$  przez znaną wartość  $\tan \varphi_0$ , to otrzymamy:

$$a = r \sin \varphi_0 = \frac{r \tan \varphi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}} = \frac{l}{2\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_0}} \quad (24)$$

Jestto dokładny wzór dla obliczenia  $a$  jednakże nie używamy go, gdyż dla promieni stosowanych w praktyce wystarczą wzory przybliżone. Rozwińmy prawą stronę wz. (24) w szereg:

$$a = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 + \frac{3}{8} \tan^4 \varphi_0 \right),$$

lub: 
$$\frac{l}{2} - a = \frac{l}{4} \tan^2 \varphi_0 - \frac{3l}{16} \tan^4 \varphi_0 \quad (24a)$$

Drugi wyraz po prawej stronie można opuścić, gdyż dla najmniejszych w praktyce stosowanych promieni daje ledwie 0.001  $m$ . Natomiast pierwszy wyraz opuszczimy wtedy, jeżeli zajdzie warunek:

$$\frac{l}{4} \tan^2 \varphi_0 \leq 0.004$$

Wstawmy za  $l$  i  $\text{tang } \varphi_0$  wartość z wz. (21), natenczas:

$$\frac{C}{4r} \left( \frac{C}{2r^2} \right)^2 = \frac{C^3}{16r^5} \leq 0.004,$$

a stąd:

$$r \geq \sqrt[5]{\frac{C^3}{0.064}}$$

Podług tego wzoru obliczono następującą tabliczkę:

$C=$	45000,	36000,	12000,	6000,	4500,	3000,	1500,	750
$r \geq$	1074,	939,	486,	321,	270,	212,	140,	92 m

Zatem dla promieni mniejszych, niż ta tabliczka wykazuje, zastosujemy wzór:

$$\frac{l}{2} - a = \frac{l}{4} \text{tang}^2 \varphi_0, \text{ lub: } a = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \text{tang}^2 \varphi_0 \right) \quad (24b)$$

zaś dla większych promieni wzór:

$$a = \frac{l}{2} \quad (24c)$$

W tabeli VI. uwzględniono różnicę:  $\frac{l}{2} - a \leq 0.001$  m.

Z powyższego rozpatrywania wynika:

1. Włożenie krzywej przejściowej między prostą i łuk kołowy jest tylko wtedy możliwe, jeżeli styczna  $AP_0$  w początku łuku i do niej równoległa styczna do krzywej przejściowej posiadają odstęp  $v$ , określony wz. (23), względnie (21).

2. Odstęp początku i końca krzywej przejściowej od punktu  $C$ , który jest rzutem początku łuku  $P_0$  na styczną do tej krzywej, wynoszą  $l - a$ , względnie  $a$ , określone wzorami 24a, b lub c.

*Tyczenie krzywej i łuku.* Jeżeli względne położenia stycznych, jakoteż punkty  $A$  i  $P$  zostały na polu wyznaczone (ob. dalsze paragrafy), to się tyczy krzywą przejściową za pomocą rzędnych od stycznej, wyjętych dla odległości co 5 lub 10 m aż do długości  $x=l$ , przynależnej do danego promienia  $r$ .

Wszystkie potrzebne dane są zawarte w tab. VI., ewentualnie VII., zaś dla promieni w tabeli nie zawartych, obliczy się je podług wz. (21) na polu.

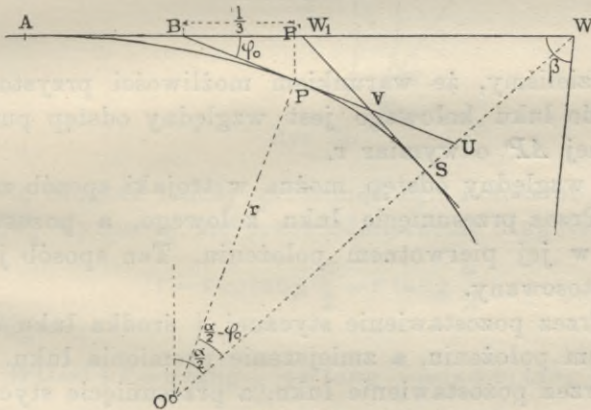
W dalszym ciągu ma być od punktu  $P$ , a stycznie do krzywej przejściowej tyczony łuk o promieniu  $r$ .

To tyczenie łuku można różnymi sposobami skutecznie.



a) Za pomocą rzędnych od stycznej. W tym celu wyznaczy się początek łuku  $P_0$ , a wtedy dla dowolnej odciętej  $P_0K'$  wytyczy się przynależną rzędną  $KK'=y$ , wyjętą z tabeli III. Także od stycznej  $AP'$  i punktu  $C$ , jako początku można wyznaczyć punkt  $K$ , przez wytyczenie rzędnej  $KK''=y_1=y+v$ , zatem przez dodanie ilości  $v$  do wartości  $y$  wyjętej z tabeli III. Łuk w ten sposób tyoczony, aż do najbliższego głównego punktu, musi dokładnie przejść przez punkt  $P$ . Tę zgodność można skontrolować warunkiem, że  $PP'=e$  ma się równać  $y+v$ , jeżeli  $y$  jest rzędną łuku, obliczoną dla odciętej  $CP'=a$ .

b) Przy użyciu stycznej  $BP$  (rys. 83). Podług wz. (21) jest:  $BP'=z_0=\frac{l}{3}$ ; jeżeli tę długość odmierzymy od punktu  $P'$  do  $B$ , to prosta łącząca punkt  $B$  z punktem  $P$  już poprzednio wyznaczonym, jest styczną do łuku kołowego, od której ten łuk za pomocą metod podanych w rozdz. I. może być wytyczony.



Rys. 83a.

Jednakże styczna w ten sposób ustalona jest zanedo krótka dla dokładnego tyoczenia łuku, trzeba ją zatem jeszcze przez jeden punkt ustalić. Jako taki dobrze się nadaje punkt  $U$  (rys. 83a), leżący na przecięciu stycznej  $BP$  z linią symetrii  $WS$ . Mianowicie jest:

$$US=UO-SO=r\left[\sec\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi_0\right)-1\right]$$

Wartość  $\sec\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi_0\right)-1$  wyjmie się z tab. II.

Gdy się  $US$  odmierzy, otrzyma się styczną  $BU$ , która musi przejść dokładnie przez punkt  $P$ . Ten sposób ustalenia stycznej nadaje się dobrze dla wielkich kątów  $\beta$ . Dla małych kątów jest wyznaczenie punktu  $U$  niepewne, gdyż proste  $BU$  i  $WS$  przecinają się pod ostrym kątem. Wtedy użyjemy punktu  $V$ , leżącego na przecięciu stycznej  $BP$  z pomocniczą styczną łuku  $W_1S$ .

Mianowicie są  $PV$  i  $VS$  stycznymi do łuku o kącie środkowym:  $\frac{\alpha}{2} - \varphi_0$ , zatem:

$$PV = VS = r \operatorname{tang} \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

Odmierzmy  $VS$  i skontrolujemy zgodność  $VS = PV$ .

Styczna  $BV$  powinna przejść przez  $P$ . Długość  $VS$  obliczymy podług tab. II.

Widzieliśmy, że warunkiem możliwości przystosowania krzywej do łuku kołowego jest względny odstęp punktu  $P_0$  od stycznej  $AP'$  o wymiar  $v$ .

Ten względny odstęp można w trojaki sposób uzyskać:

a) Przez przesunięcie łuku kołowego, a pozostawienie stycznej w jej pierwotnym położeniu. Ten sposób jest najczęściej stosowany.

b) Przez pozostawienie stycznej i środka łuku  $S$  w ich pierwotnym położeniu, a zmniejszenie promienia łuku.

c) Przez pozostawienie łuku, a przesunięcie stycznej.

Te przypadki rozpatrzmy w następujących paragrafach.

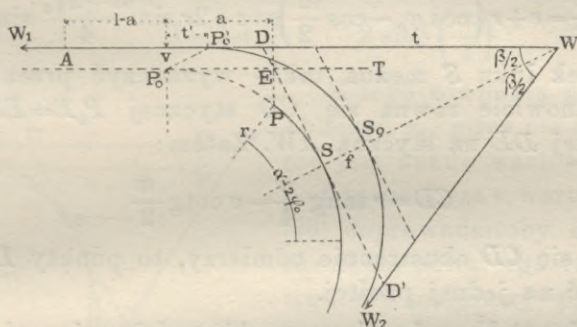
#### § 45. Łuk kołowy zostaje przesunięty. Rys. 84.

Jeżeli są w polu wyznaczone kierunki proste  $W_1W$  i  $WW_2$ , które mają być połączone łukiem kołowym, to wiemy już z I. rozdziału, że w celu wytyczenia łuku należy zmierzyć kąt  $\beta$ , wyznaczyć  $\alpha = 180 - \beta$ , obliczyć i odmierzyć:

$$WP'_0 = t = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2},$$

nareszcie wyznaczyć  $S_0$  na linii połowiącej kąt wierzchołkowy, która jest linią symetrii dla całego układu. Przesunięcie łuku potrzebne w celu uzyskania odstępu  $P_0C=v$  może nastąpić tylko wzdłuż osi symetrii o pewną długość  $S_0S=f$ . Ponieważ każdy punkt łuku w tym samym kierunku i o tę samą długość się przesunie, więc też pierwotny początek łuku  $P'_0$  przesunie się w kierunku  $P'_0P_0$  równoległym do  $S_0S$  i o długość  $P'_0P_0=f$ , którą obliczy się z trójkąta  $P_0CP'_0$ , skoro  $v$  już poprzednio wyznaczono. Mianowicie:

$$f = v \operatorname{cosec} \frac{\beta}{2} = v \sec \frac{\alpha}{2} \quad (26)$$



Rys. 84.

O tę długość należy przesunąć  $S_0$ . Położenie punktu  $C$  i linii  $CP_0$  wyznaczy się przez odmierzenie długości  $t' = P_0C$ :

$$t' = v \cotang \frac{\beta}{2} = v \tang \frac{\alpha}{2} \quad (27)$$

Długość:

$$WC = t + t' = r \tang \frac{\alpha}{2} + v \tang \frac{\alpha}{2} = (r + v) \tang \frac{\alpha}{2},$$

czyli, że długość  $WC$  jest styczną dla łuku o promieniu  $r + v$ .

Możemy zatem punkt  $C$  wyznaczyć od razu, bez pomocy pierwotnego początku łuku  $P'_0$ . Powyższe ilości obliczy się podług tabeli II. Z tabeli VI. wyjmie się ilości  $l$ ,  $a$  i  $e$  i odmierzy się  $a$  od  $C$  ku  $P$ ,  $l - a$  od  $C$  ku  $A$ , przezco otrzyma się początek i koniec krzywej przejściowej, zaś  $e$  od  $P'$  ku  $P$ . Tyczenie tej krzywej nastąpi podług § 44.

Podobnie można od razu wyznaczyć punkt  $S$ . Mianowicie jest podług § 7.  $WS_0 = r \sec \frac{\alpha}{2} - r$ , zaś:

$$WS = WS_0 + f = r \sec \frac{\alpha}{2} - r + v \sec \frac{\alpha}{2} = (r+v) \sec \frac{\alpha}{2} - r$$

Nadto jeżeli się wytyczy przesuniętą styczną  $P_0T$ , to można punkt  $S$ , położenie stycznej w  $S$ , jakoteż dowolną ilość głównych punktów łuku wyznaczyć sposobem w I. rozdziale podanym.

W celu kontroli powyższych rachunków uzyska się równanie, gdy się wykona rzut linii  $P'PSW$  na kierunek  $P'P$ ; mianowicie rzut linii  $WS$  na ten kierunek ma się równać rzutowi linii  $P'PS$ , czyli:

$$WS \cos \frac{\alpha}{2} = e + r \left( \cos \varphi_0 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = e + 2r \sin \frac{\alpha + 2\varphi_0}{4} \sin \frac{\alpha - 2\varphi_0}{4}$$

Środek łuku  $S$  można także wyznaczyć przez styczną  $DD'$ ; mianowicie równa się  $CD$  stycznej  $P_0E = ES$ , mniej rzut prostej  $DE$  na styczną  $AW$ . Zatem:

$$CD = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} - v \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

Gdy się  $CD$  obustronnie odmierzy, to punkty  $D$ ,  $S$  i  $D'$  mają leżeć na jednej prostej.

Dla kontroli można jeszcze obliczyć i zmierzyć:

$$DS = r \operatorname{tang} \frac{\alpha}{4} + v \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$$

Jeżeli kąt  $\beta$  staje się ujemny, to znaczy  $\alpha > 180^\circ$  (jak na rys. 43), wtedy  $f$  i  $t'$  otrzymują ujemną wartość.

Przesunięcie łuku powoduje zmianę pierwotnie projektowanej trasy, która nie zawsze jest dopuszczalną.

Wzór (26) okazuje, że  $f$  jest zależne od  $v$ , które jest tem większe, im mniejszy promień  $r$ , i od  $\operatorname{cosec} \frac{\beta}{2}$ , które jest tem większe, im mniejszy kąt wierzchołkowy. Zatem dla małych promieni i małych  $\beta$  (wielkich  $\alpha$ ) może otrzymać  $f$  bardzo znaczną wartość, dochodzącą do nieskończoności dla  $\beta = 0$ . Jeżeli zatem obliczona długość  $f$  wypadnie znaczna, należy w projekcie wrysować przesunięty łuk i przekonać się, czy przesunięcie jest dopuszczalne; w przeciwnym razie należy postąpić podług § 46 lub § 47 (Ob. także § 49\*).

\*) Do §§ 43, 44, 45 ob. zbiór przykładów, jakoteż przykład przy tabeli VI.

## § 46. Położenie stycznych i środka łuku pozostaje nie naruszone.

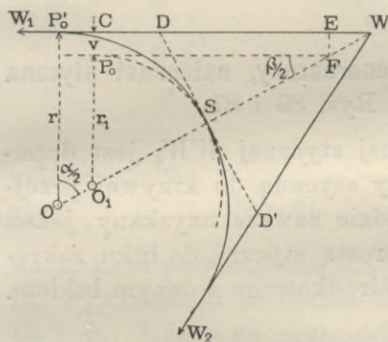
Rys. 85.

W tym przypadku należy zmniejszyć promień  $r$  na taką wartość  $r_1$ , ażeby odstęp  $P_0C$  otrzymał wymiar  $v_1$ , obliczony dla promienia  $r_1$ . Z rzutu linii  $OO_1P_0C$  na kierunek  $OP_0$  otrzymana się, zważywszy, że  $OO_1 = r - r_1$ , równanie:

$$r = (r - r_1) \cos \frac{\alpha}{2} + r_1 + v_1,$$

z którego wyznaczy się:

$$r_1 = r - \frac{v_1}{1 - \cos \frac{\alpha}{2}} = r - \frac{v_1}{2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)} \quad (28)$$



Rys. 85.

Z tego równania nie można obliczyć  $r_1$ , gdyż nie znając  $r_1$ , nie jest znana wartość  $v_1$ , zaś podstawienie za  $v_1$  wartości z wz. (23) doprowadziłoby dla  $r_1$  do równania czwartego rzędu. Tę trudność omiemy przez wyznaczenie przybliżonej wartości dla  $r_1$ . Wzór (28) okazuje, że dla małych promieni  $r$  i małego kąta  $\alpha$  może otrzymać wyraz:  $v_1 : 2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)$  wielką, a nawet

z różnych względów niedopuszczalną wartość. My jednak stosujemy rozważony przypadek tylko dla wielkich kątów  $\alpha$ , t. j. dla takich, dla których przesunięcie łuku podług § 45 jest niedopuszczalne. Otóż dla wielkich kątów  $\alpha$  zbliża się wyraz:  $2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)$  do jedności, którą osiąga dla  $\alpha = 180^\circ$ , wtedy różnica między promieniami  $r$  i  $r_1$  jest niewielka, a różnica między  $v_1$  a  $v$  obliczonym podług  $r$  wprost praktycznie zanika.

Możemy zatem w przybliżeniu podstawić  $v$  za  $v_1$  i obliczyć  $r_1$  z wzoru:

$$r_1 = r - \frac{v}{2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)} \quad (28a)$$

Podług tego promienia obliczymy  $v_1$  i nie troszcząc się o dane położenie punktu  $S$  wyznaczmy  $P_0$ . Mianowicie jeżeli styczną w  $P_0$  przedłużymy do punktu  $F$ , z  $F$  spuścimy prostopadłą do stycznej w  $E$ , to  $P_0F$  jest styczną do łuku o promieniu  $r_1$ , zaś:  $EW = v_1 \tan \frac{\alpha}{2}$ , więc:

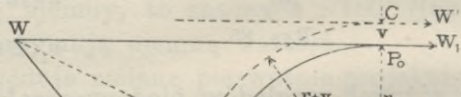
$$CW = (r_1 + v_1) \tan \frac{\alpha}{2} \quad (\text{zgodnie z § 45}) \quad (29)$$

Po odmierzeniu tej długości otrzyma się  $C$  i  $P_0$ , od którego wytyczy się łuk. Ten łuk nie przejdzie całkiem dokładnie przez punkt  $S$ , gdyż promień  $r_1$  nie był zupełnie dokładnie wyznaczony\*).

Krzywą przejściową wytyczy się podług wskazówek § 44. Styczną  $DD'$  wyznaczy się jak w § 45. (Ob. przykład rachowany przy tabeli VI).

#### § 47. Łuk pierwotny pozostaje nienaruszony, natomiast styczna zostaje przesunięta. Rys. 86 i 87.

Jeżeli przesunięcie pierwotnej stycznej  $WW_1$  jest dopuszczalne, to warunek, aby między styczną do krzywej przejściowej a łukiem był odstęp  $v$  będzie zawsze uzyskany, jeżeli tę styczną poprowadzimy jako prostą styczną do łuku określonego promieniem  $r+v$ , a współśrodkowego z danym łukiem. Jeżeli  $P_0S$  na rys. 86 jest łukiem pierwotnym o promieniu  $r$ , a zakresimy łuk (kreskowany) promieniem  $r+v$ , to w dowolnym punkcie tego łuku poprowadzona styczna, powyższemu warunkowi zadosyć uczyni.



Rys. 86.

Rozróżnimy różne przypadki.

##### a) *Styczna zostaje przesunięta równolegle do pierwotnego kierunku. Rys. 86.*

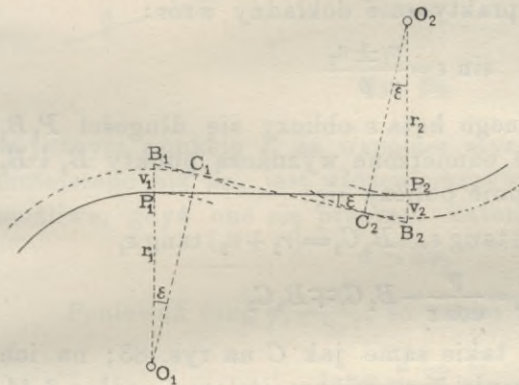
Jeżeli dalsza trasa nie jest jeszcze tyczona, a zmiana położenia następującego wierzchołka  $W_1$  jest dopuszczalna,

\*) Helmert w swoim dziełku: „Die Uebergangscurven“, podaje inny bardziej skomplikowany sposób rozwiązania tego zagadnienia.

wtedy otrzyma się najprostsze rozwiązanie, gdy prostą  $P_0W_1$  przesunie się równoległe o wymiar  $v$ . Wprost otrzyma się punkt  $C$ , który posłuży do wytyczenia krzywej przejściowej podług § 44.

b) *Przesunięta styczna ma być wspólną do dwóch łuków.* Rys. 87.

Łuki mogą być odwrotnie skierowane, jak na rys. 87, albo też jednakowo skierowane. Wspólna styczna łuków jest



Rys. 87.

$P_1P_2=p$ . Jeżeli zamierzamy między łuki a prostą włożyć krzywe przejściowe, to podług powyższych wskazówek pomysłimy sobie ze środków  $O_1$  i  $O_2$  zakreślone łuki o promieniach:

$$r_1 + v_1 \text{ i } r_2 + v_2,$$

a styczna wspólna do tych łuków odpowie

warunkowi potrzebnemu dla włożenia krzywych przejściowych. Do wyznaczenia położenia tej nowej stycznej posłużą punkty  $B_1$  i  $B_2$ , leżące na przecięciu tej stycznej z przedłużonymi promieniami  $O_1P_1$  i  $O_2P_2$ . Jeżeli ze środków łuków spuścimy na nową styczną prostopadłe do punktów  $C_1$  i  $C_2$ , to kąt  $B_1O_1C_1 = B_2O_2C_2$  równy kątowi  $\varepsilon$  zawartemu między pierwotną a nową styczną.

Otóż z rysunku wynika, że:

$$P_1B_1 \pm P_2B_2 = P_1P_2 \tan \varepsilon = p \tan \varepsilon$$

Znak dolny odnosi się do przypadku, gdy łuki są jednakowo skierowane.

Następnie wynika z trójkątów:  $B_1O_1C_1$  i  $B_2O_2C_2$ , że:

$$P_1B_1 = \frac{r_1 + v_1}{\cos \varepsilon} - r_1, \quad P_2B_2 = \frac{r_2 + v_2}{\cos \varepsilon} - r_2$$

Jeżeli te wartości wstawi się w poprzedni wzór, to będzie:

$$\frac{(r_1 + v_1) \pm (r_2 + v_2)}{\cos \varepsilon} - (r_1 \pm r_2) = p \tan \varepsilon,$$

$$\text{lub: } (r_1 \pm r_2) \cos \varepsilon + p \sin \varepsilon = (r_1 \pm r_2) + (v_1 \pm v_2) \quad (a)$$

Gdy się podstawią:  $\text{tang } \varphi = \frac{r_1 \pm r_2}{p}$ , to się otrzyma:

$$\sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{(r_1 \pm r_2) + (v_1 \pm v_2)}{p} \cos \varphi$$

Z tego równania wyznaczy się dokładną wartość kąta  $\varepsilon$ . Gdy jednak kąt  $\varepsilon$  jest nie wielki, to dla znaczniejszych długości  $p$  można w równaniu (a) podstawić  $\cos \varepsilon = 1$ , a wtedy otrzyma się prostszy, praktycznie dokładny wzór:

$$\sin \varepsilon = \frac{v_1 \pm v_2}{p}$$

Podług wyznaczonego kąta  $\varepsilon$  obliczy się długości  $P_1B_1$  i  $P_2B_2$ , które należy odmierzone wyznaczą punkty  $B_1$  i  $B_2$  nowej stycznej. Następnie obliczy się:

$$B_1C_1 = (r_1 + v_1) \text{ tang } \varepsilon, \quad B_2C_2 = (r_2 + v_2) \text{ tang } \varepsilon,$$

$$C_1C_2 = \frac{p}{\cos \varepsilon} - B_1C_1 \mp B_2C_2$$

Punkty  $C_1, C_2$  są takie same jak  $C$  na rys. 83; na ich podstawie nastąpi tyczenie krzywej przejściowej podług § 44. Kontrolę rachunków da równanie, uzyskane z rzutu łuków i prostej  $C_1C_2$  na kierunek  $P_1P_2$ :

$$p = (r_1 \pm r_2) \text{ tang } \varepsilon + C_1C_2 \sec \varepsilon$$

Na prostej  $C_1C_2$  ma się pomieścić, oprócz długości  $t'$  (§ 45) po połowie długości (a raczej  $l - a$ ) krzywej przejściowej jednego i drugiego łuku, a nadto, jeżeli łuki są odwrotnie skierowane, żąda się pewnej długości  $l_0^*$  między początkami krzywych przejściowych. Zatem powyższe rozwiązanie będzie możliwe, jeżeli:

$$C_1C_2 \geq l_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} + t'_1 + t'_2,$$

dla łuków odwrotnie skierowanych;

$$C_1C_2 \geq \frac{l_1 + l_2}{2} + t'_1 + t'_2,$$

dla łuków jednakowo skierowanych (\*\*). (Ob. także § 54).

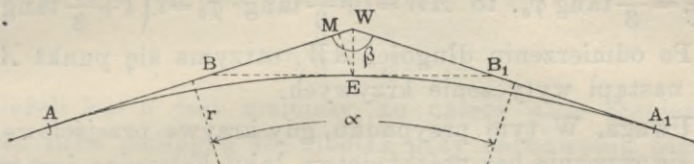
\*)  $l_0$  wynosi conajmniej 10 m dla kolei głównych, a 7 m dla kolei podrzędnych.

\*\*) Ob. nr. 22 zbioru przykładów.



§ 48. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy zbliża się do  $180^\circ$ . Rys. 88.

W miarę zwiększania się kąta  $\beta$ , zmniejsza się długość łuku kołowego. Kąt środkowy tego łuku wynosi  $\alpha - 2\varphi_0$  (ob. rys. 83 i 84), zatem łuk zniknie, skoro  $\alpha - 2\varphi_0 = 0$ . Wtedy obustronne krzywe przejściowe  $AE$  i  $A_1E$  (rys. 88) zetkną się



Rys. 88.

w jednym punkcie  $E$  na wspólnej stycznej  $BB_1$ . Dla kąta  $\alpha$  mniejszego niż  $2\varphi_0$  jest włożenie krzywych przejściowych niemożliwe, gdyż one się przetną. Zatem musi zająć warunek:

$$\alpha \geq 2\varphi_0$$

Ponieważ  $\tan \varphi_0 = \frac{C}{2r^2}$ , to zatem ma być:

$$\tan \frac{\alpha}{2} \geq \frac{C}{2r^2}$$

Ten wzór okazuje, że czem mniejszy promień, tem większy powinien być kąt  $\alpha$ . Np. dla głównych kolei, gdy  $C=12000$ , ma być:

$$\begin{array}{cccc} \text{dla } r = & 300, & 400, & 500, & 1000 \text{ m} \\ \alpha \geq & 7^\circ 38', & 4^\circ 18', & 2^\circ 45', & 0^\circ 42' \end{array}$$

Z tego przykładu widzimy, że ze zmniejszającym się promieniem kąt  $\alpha$  jeszcze dopuszczalny bardzo szybko rośnie.

Jeżeliby kąt  $\alpha$  był tylko nieco mniejszy, niż powyższymi wzorami określony, to przyjmiemy:  $\varphi_0 = \frac{\alpha}{2}$ , a w celu umożliwienia włożenia dwóch stykających się krzywych przejściowych, należy do tego warunku  $C$  lub  $r$  zastosować. Zatem z powyższego wzoru obliczy się, albo zmniejszoną wartość:

$$C = 2r^2 \tan \frac{\alpha}{2}$$

albo zwiększoną wartość:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2} C \cotang \frac{\alpha}{2}}$$

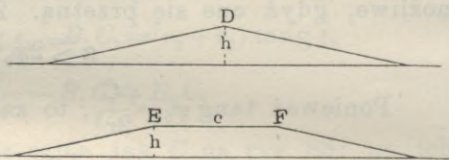
Podług tych zmienionych wartości obliczymy długość krzywej  $AM=l$  i rzędne krzywej przejściowej. Ustalenie początku  $A$  krzywej nastąpi albo zwykłym sposobem, albo wprost przez wyznaczenie długości  $AW$ . Ponieważ kąt  $MEW$  równy  $\varphi_0$ , to:

$AW=l+e \operatorname{tang} \varphi_0$ , a gdy z wz. (21) jest:

$$e = \frac{l^3}{6C} = \frac{l}{3} \operatorname{tang} \varphi_0, \text{ to } AW = l + \frac{l}{3} \operatorname{tang}^2 \varphi_0 = l \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^2 \varphi_0 \right)$$

Po odmierzeniu długości  $AW$ , otrzyma się punkt  $A$ , potem nastąpi wytyczenie krzywych.

**Uwaga.** W tym przypadku, gdy krzywe przejściowe stykają się stycznie bez pośrednictwa łuku kołowego jest ta niewłaściwość, że przechyłka toru wzrastając z jednej i z drugiej strony tworzy w punkcie zetknięcia  $D$  (rys. 89) załom, który, mianowicie na liniach o wielkiej chyżości pociągów jest niedopuszczalny. Należy zatem obrać większy promień  $r$ , tak, aby między krzywymi przejściowymi pośredniczył łuk kołowy o długości  $c$ , zależnej od największej chyżości



Rys. 89.

pociągów. Dla obranej długości  $c$  (np. od 10 do 50 m) można wyznaczyć związek między promieniem  $r$  a potrzebnym kątem środkowym  $\alpha$ . Mianowicie jest w tym przypadku:

$$c = r \operatorname{arc} (\alpha - 2\varphi_0)$$

Ponieważ obrana wartość  $c$  nie musi być dokładnie dochowana, to możemy arcus zastąpić przez tangens i napisać powyższy wzór w tej formie:

$$c = 2r \left( \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tang} \varphi_0 \right)$$

Zważywszy, że  $\operatorname{tang} \varphi_0 = l^2 : 2C = l : 2r$ , to otrzyma się:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{c+l}{2r}$$

Dla różnych wartości  $C$  i im odpowiednich  $c$  obrachowano tabelę, umieszczoną na końcu tabeli VI. części II\*).

Wobec powyższej uwagi lepiej już przy projektowaniu unikać wielkich kątów wierzchołkowych z łukami o małych promieniach.

\*) Ob. wz. 23 zbioru przykładów.

### § 49. Przypadek, gdy kąt wierzchołkowy jest bardzo mały.

Wzór (26) okazuje, że dla małych kątów  $\beta$  wypada długość przesunięcia łuku  $f$  wielka i może być ze względu na zmianę położenia trasy niedopuszczalna. Jeżeli w danych warunkach może wielkość przesunięcia osiągnąć co najwyżej wartość  $q$ , to z wz. (26) wynika, że ma być:

$$\sin \frac{\beta}{2} \geq \frac{v}{q}$$

Jeżeli kąt  $\beta$  jest mniejszy, to należy albo zmniejszyć promień łuku podług § 45, albo przy zachowaniu promienia uskutecznić przesunięcie stycznych, podług § 47\*).

### § 50. Zastosowanie krzywej przejściowej do budowy wodnych.

Dla kolei żelaznych doprowadził warunek przeprowadzenia przechyłki toru do paraboli sześcienniej jako krzywej przejściowej. Dla łuków budowy wodnych tego warunku niema, mogłyby więc różne krzywe posiadające punkt przecięcia ( $\varphi = \infty$ ) być obrane jako krzywe przejściowe, umożliwiające ciągle przeprowadzenie krzywizny od prostej aż do danego promienia łuku. Gdy jednakże parabola sześcienna jest dla obliczenia i wytyczenia bardzo prosta, nadaje się więc doskonale także do budowy wodnych.

O ile tyczenie łuków uskutecznia się na stałym łądzie, mogą wszystkie metody opisane w poprzednich paragrafach znaleźć tu zastosowanie.

Rozchodzi się tylko o to, jak wielką stałą  $C$  przyjąć należy. Ponieważ do budowy wodnych obok małych także wielkie promienie się stosuje, dla których, przy przyjęciu jednej tylko wartości  $C$  wypadłyby zaledwie krótkie krzywe przejściowe, powinno się przyjąć  $C$  zmienne z wielkością promienia.

W jakim stosunku najkorzystniejszym mają stać te dwie ilości, wykaże dopiero doświadczenie\*\*).

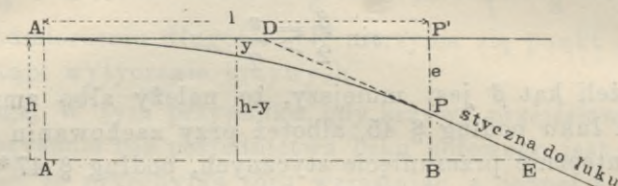
Dla wytyczenia tam w wodzie rozróżnimy znów brzeg wypukły i wklęsły. Najlepiej zastosować przesunięcie łuku

\*) Ob. nr. 24 zbioru przykładów.

\*\*\*) Ob. także Handb. d. Ing. Wiss. Flussbau, vierte Aufl. 1907, str. 100.

podług § 45, ale to przesunięcie już w projekcie wrysować i podług projektu początek  $A$  krzywej przejściowej na polu wyznaczyć.

Na wypukłym brzegu (rys. 90) poprowadzimy równoległą  $A'B'E$  do stycznej  $AP'$  w dowolnym odstępnie  $h$ , a od  $A'B$  wytyczymy krzywą przejściową rzędnymi  $h-y$ . Na tej pod-



Rys. 90.

stawie, że podstyczna równa jednej trzeciej długości odciętej, jest  $DP' = \frac{1}{3}l$ . Otóż z trójkątów  $DPP'$  i  $PBE$  wynika, że:

$$BE : h - e = \frac{1}{3}l : e,$$

zatem :

$$BE = \frac{l(h-e)}{3e}$$

Tę długość odmierzymy, wtedy  $PE$  jest kierunkiem stycznej, od której możemy wytyczyć łuk kołowy podług § 22.

Na wklęsłym brzegu (rys. 91) postąpimy inaczej; mianowicie wytyczymy wielobok krzywej przejściowej. Boki tego wieloboku odcinają na stycznej odcinki  $\xi$ , które nie trudno obliczyć. Mianowicie np. dla cięciwy 34 jest:

$$x_3 - \xi_3 : x_4 - \xi_3 = y_3 : y_4,$$

a stąd:

$$\xi_3 = \frac{x_3 y_4 - x_4 y_3}{y_4 - y_3}$$

lub ogólnie:

$$\xi_n = \frac{x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n}{y_{n+1} - y_n}$$

Jeżeli w tym wzorze wstawimy:  $y = \frac{x^3}{6C}$ , to otrzymamy:

$$\xi_n = \frac{x_n x_{n+1} (x_n + x_{n+1})}{x_n^2 + x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2} \quad (a)$$

jako wzór ogólny.

Odstępy rzędnych obierzemy zawsze równe; oznaczmy je literą  $a$ , to:  $x_n = na$ ,  $x_{n+1} = (n+1)a$ ,

$$\text{zatem: } \xi_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 + n(2n+1)} \cdot a \quad (b)$$

Tylko dla końcowej rzędnej, która od poprzedzającej może mieć odstęp od  $a$  odmienny, zastosujemy ogólny wzór ( $a$ ). Jeżeli w wzór ( $b$ ) wstawimy za  $n$  kolejno wartości od 1 do 9, otrzymamy następującą tabliczkę:

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$
$\frac{6}{7} a$	$\frac{30}{19} a$	$\frac{84}{37} a$	$\frac{180}{61} a$	$\frac{330}{91} a$	$\frac{546}{127} a$	$\frac{840}{169} a$	$\frac{1224}{217} a$	$\frac{1710}{271} a$

Podług tej tabliczki obliczono tabelę VIII dla  $a=5$  i  $10 m$ .

Wytyczymy naprzód punkt 1, odmierzywszy  $a$  i  $y_1 = \frac{a^3}{2C}$  (wartość  $y_1$  wyjęta z tabeli VI).

Następnie odmierzymy  $\xi_1$  i w kierunku 1'1 wybudujemy element 12 tamy o długości  $a$ . Po odmierzeniu  $\xi_2$  zbudujemy w kierunku 2'2 drugi element tamy i t. d. Dojdziemy w ten sposób aż do końcowego punktu krzywej przejściowej, który za pomocą obliczonej rzędnej skontrolujemy, ewentualnie drobny błąd poprawimy.

W tym końcowym punkcie wyznaczmy dokładnie styczną, podług wskazówek § 44, a od tej stycznej wytyczymy łuk sposobami podanymi w § 23.

## § 51. Krzywa przejściowa styczna do dwóch łuków kołowych.

Rys. 92.

Zbadamy naprzód warunki, kiedy krzywa przejściowa może być styczną do dwóch łuków kołowych. Niech  $ADE$  jest tą krzywą. W dowolnym punkcie  $D$ , o współrzędnych  $x_1$  i  $y_1$ , jest promień krzywizny  $r_1$  zarazem promieniem koła styczności  $C_1DF$ . Jeżeli to koło przedłużymy do punktu  $C'_1$ , w którym promień jest prostopadły do stycznej  $AW$ , to jak nam z § 45 wiadomo jest odstęp  $C_1C'_1 = v_1$ , zaś długość  $\xi_1 = AC_1$  równa  $\frac{1}{2}x_1$ , z dostateczną dokładnością. Spółrzędne środka  $O_1$  są  $\xi_1$  i  $O_1C_1 = \eta_1$ .

Podobnie dla drugiego dowolnego punktu  $E$  jest  $C'_2GE$  kołem styczności o promieniu  $r_2$ , o odstępie  $C'_2C_2 = v_2$  i o współrzędnych środka  $\xi_2 = \frac{1}{2}x_2$  i  $\eta_2$ .

Te dwa koła przedłużone aż do wspólnego promienia  $O_1O_2GF$  otrzymają na tym promieniu odstęp  $GF=c$ , który należy wyznaczyć. Nie trudno zauważyć, że:

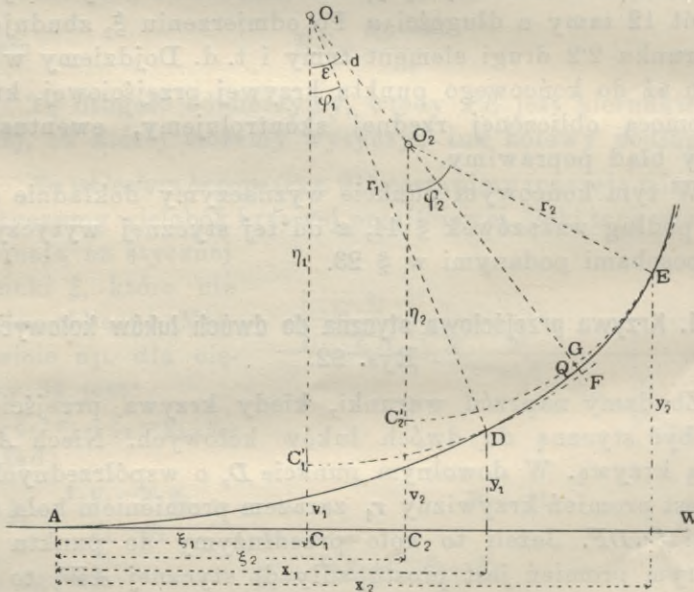
$$O_1O_2=d=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_1-\eta_2)^2},$$

a ponieważ:

$$\xi_1=\frac{x_1}{2}, \quad \xi_2=\frac{x_2}{2}, \quad \eta_1=r_1+v_1, \quad \eta_2=r_2+v_2,$$

więc:

$$\left. \begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 + [r_1-r_2-(v_2-v_1)]^2} = \\ &= (r_1-r_2) \sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2}{4(r_1-r_2)^2} + \left(1 - \frac{v_2-v_1}{r_1-r_2}\right)^2} \\ d &= (r_1-r_2) \sqrt{1 - \frac{2(v_2-v_1)}{r_1-r_2} + \frac{(v_2-v_1)^2}{(r_1-r_2)^2} + \frac{(x_2-x_1)^2}{4(r_1-r_2)^2}} \end{aligned} \right\} (30a)$$



Rys. 92.

Ilość  $\frac{(v_2-v_1)^2}{(r_1-r_2)^2}$  jest tak małą wobec jedności, że ją można opuścić. Pozostałe dwie ilości są wobec jedności także bardzo małe, możemy więc napisać:

$$d = (r_1 - r_2) \left( 1 - \frac{v_2 - v_1}{r_1 - r_2} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{8(r_1 - r_2)^2} \right) \quad (30b)$$

Z rysunku widać, że:  $O_1 F = O_1 O_2 + O_2 G + GF$ , więc:

$$GF = c = r_1 - r_2 - d, \quad (31a)$$

a gdy za  $d$  podstawimy wartość z wz. (30b), to:

$$c = v_2 - v_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{8(r_1 - r_2)}$$

zatem ilość bardzo mała. Jeżeli jeszcze podstawimy:

$$x_1 = \frac{C}{r_1}, \quad x_2 = \frac{C}{r_2} \quad (\S 41) \quad \text{i} \quad v_1 = \frac{C^2}{24r_1^3}, \quad v_2 = \frac{C^2}{24r_2^3} \quad (\text{wz. } 2\beta),$$

$$\text{to:} \quad c = \frac{C^2(r_1^3 - r_2^3)}{24r_1^3 r_2^3} - \frac{C^2(r_1 - r_2)}{8r_1^2 r_2^2},$$

$$\text{lub:} \quad c = \frac{C^2(r_1 - r_2)^3}{24r_1^3 r_2^3} \quad (31b)$$

Następnie wyznaczmy kąt  $\varepsilon$ , który zawiera wspólny promień z prostopadłą do stycznej  $AW$ . Z rysunku widać, że:

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_1 - \eta_2} = \frac{x_2 - x_1}{2[r_1 - r_2 - (v_2 - v_1)]} = \frac{C(r_1 - r_2)}{2r_1 r_2 [r_1 - r_2 - (v_2 - v_1)]}$$

Jestto dokładny wzór dla tang  $\varepsilon$ . Dla dalszych celów wprowadzimy wzór dostatecznie przybliżony, jeżeli małą ilość  $v_2 - v_1$  wobec  $r_1 - r_2$  opuścimy. Wtedy jest:

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{C}{2r_1 r_2} \quad (32)$$

Jeżeli uwzględnimy, że podług wz. (21) jest:

$$\text{tang } \varphi_1 = \frac{C}{2r_1^2}, \quad \text{tang } \varphi_2 = \frac{C}{2r_2^2},$$

$$\text{to:} \quad \text{tang } \varepsilon = \sqrt{\text{tang } \varphi_1 \text{ tang } \varphi_2}$$

Zatem  $\text{tang } \varphi_1 < \text{tang } \varepsilon < \text{tang } \varphi_2$ , zaś  $\varphi_1 < \varepsilon < \varphi_2$ .

$$\text{Przypatrzymy się ilości: } \text{tang } (\varepsilon - \varphi_1) = \frac{\text{tg } \varepsilon - \text{tg } \varphi_1}{1 + \text{tang } \varepsilon \text{ tang } \varphi_1}$$

i wstawmy w ten wzór powyższe wartości, to otrzymamy:

$$\text{tang } (\varepsilon - \varphi_1) = \frac{\frac{C}{2r_1 r_2} - \frac{C}{2r_1^2}}{1 + \frac{C}{2r_1 r_2} \cdot \frac{C}{2r_1^2}} = \frac{2C(r_1^2 - r_1 r_2)}{4r_1^3 r_2 + C^2} = \frac{2Cr_1(r_1 - r_2)}{4r_1^3 r_2 + C^2}$$

W mianowniku jest  $C^2$  wobec  $4r_1^3 r_2$  zwykle ilością małą, tak, że gdy ją opuścimy, otrzymamy:

$$\text{tang}(\varepsilon - \varphi_1) = \frac{C(r_1 - r_2)}{2r_1^2 r_2}, \text{ podobnie: } \text{tang}(\varphi_2 - \varepsilon) = \frac{C(r_1 - r_2)}{2r_1 r_2^2}$$

W praktyce są różnice kątów  $\varepsilon - \varphi_1$  lub  $\varphi_2 - \varepsilon$  bardzo małe, tak, że zamiast tangens, możemy podstawić arcus, a wtedy otrzymamy:

$$\begin{aligned} r_1 \text{arc}(\varepsilon - \varphi_1) &= r_2 \text{arc}(\varphi_2 - \varepsilon) = \frac{C(r_1 - r_2)}{2r_1 r_2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{C}{r_2} - \frac{C}{r_1} \right) = \frac{x_2 - x_1}{2} \end{aligned} \quad (34)$$

to znaczy, że długości łuków  $DF$  i  $EG$  są sobie równe.

Doszliśmy więc do następujących, dla dalszego zastosowania ważnych wyników:

1. Do dwóch łuków o różnych promieniach można tylko wtedy przystosować stycznie krzywą przejściową, jeżeli te łuki są na wspólnym promieniu przesunięte o wymiar  $c$ , wyznaczony wzorem (31b); o ten wymiar jest łuk o mniejszym promieniu przesunięty ku środkowi koła.

2. Punkta styczności krzywej przejściowej z łukami są równo oddalone od wspólnego promienia o długość wyznaczoną wzorem (34).

Ponieważ prostsze w zastosowaniu wzory (30b), (31b), (32) i (34) są tylko przybliżone, należy przekonać się o ile wyniki obliczeń różnią się podług dokładnych i podług przybliżonych wzorów. Różnice będą tem większe, im mniejsze są promienie łuków i czem większa różnica między tymi promieniami. Obierzemy więc dla przykładu, przy  $C=12000$ , najmniejszy promień  $r_2=300\text{ m}$  i dwa razy tak wielki promień  $r_1=600\text{ m}$ . Dla tych wartości obliczyliśmy następującą tabliczkę:

	podług dokładnych wzorów:	podług przybliżonych wzorów:	różnica:
	$d=299.9723$	299.9722	0.0001
	$c=0.0277$	0.0278	0.0001
	$\varepsilon=1^\circ 55' 6.9''$	$1^\circ 54' 32.9''$	34''
	$r_1 \text{arc}(\varepsilon - \varphi_1) = 10.0924$	9.9935	+0.0989
	$r_2 \text{arc}(\varphi_2 - \varepsilon) = 9.9248$	9.9742	-0.0494
suma tych łuków	$= 20.0172$	19.9677	+0.0495
różnica tych łuków	$= 0.1676$	0.0193	



Podług wz. (34) są obydwa łuki równe, o długości 10 000 m.

Ta tabliczka okazuje, że różnice są praktycznie za małe, aby miały wpływ na przebieg krzywej przejściowej. Następnie wykazuje nawet dla tak niekorzystnego przykładu bardzo małe przesunięcie łuków  $c$ .

### § 52. Tyczenie krzywej przejściowej od łuku kołowego. Rys. 93\*).

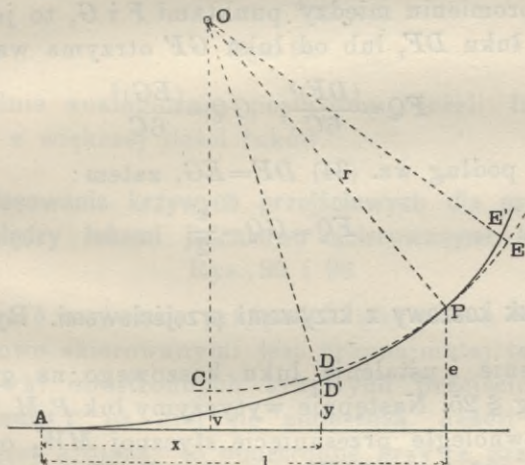
W punkcie  $P$  krzywej przejściowej poprowadźmy koło krzywizny  $CDPE$  o promieniu  $r$ . W dowolnym punkcie  $D$  poprowadźmy promień  $ODD'$ , to rzędną  $DD' = \zeta$  potrafimy w przybliżeniu wyznaczyć.

Mianowicie jest:

$$v + r = y + (r + \zeta) \cos (DOC),$$

stąd (porównać wz. 21):

$$\zeta \cos (DOC) = \frac{l^3}{24C} - \frac{x^3}{6C} + 2r \sin^2 \left( \frac{DOC}{2} \right)$$



Rys. 93.

Podstawmy w tem równaniu  $\cos (DOC) = 1$ , a za sinus podstawmy arcus (tośmy obie strony nieco powiększyli), to otrzymamy:

$$\zeta = \frac{l^3 - 4x^3}{24C} + 2r \left( \frac{\text{arc } CD}{2} \right)^2 = \frac{l^3 - 4x^3}{24C} + \frac{(CD)^2}{2r}$$

\*) Podług dzielka: Helmert, Uebergangscurven.

Za łuk  $CD$  możemy podstawić  $x = \frac{l}{2}$ , zaś  $r = \frac{C}{l}$ , zatem:

$$\zeta = \frac{l^3 - 4x^3}{24C} + \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \cdot l}{2C} = \frac{1}{24C} [4l^3 - 12l^2x + 12lx^2 - 4x^3],$$

czyli: 
$$\zeta = \frac{(l-x)^3}{6C}$$

A gdy za  $l-x$  wstawimy łuk  $PD$ , to otrzymamy ostatecznie:

$$\zeta = \frac{(PD)^3}{6C} \quad (35)$$

to znaczy, że rzędna krzywej mierzona na prostopadłej do łuku kołowego równa się długości łuku, mierzonej od punktu styczności koła z krzywą, a podniesionej do trzeciej potęgi, zaś dzielonej przez  $6C$ . Ten sam wynik otrzymalibyśmy dla rzędnej  $EE'$  po drugiej stronie punktu styczności. Zastosujemy powyższy wzór do punktu  $Q$  (rys. 92), położonego na wspólnym promieniu między punktami  $F$  i  $G$ , to jego rzędna tyczona od łuku  $DF$ , lub od łuku  $GF'$  otrzyma wartości:

$$FQ = \frac{(DF)^3}{6C}, \quad GQ = \frac{(EG)^3}{6C}$$

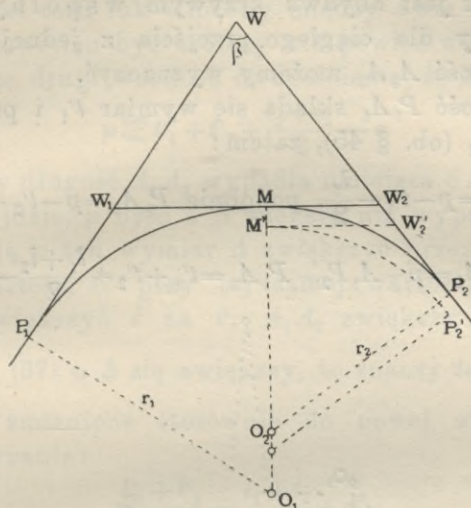
a ponieważ podług wz. (34)  $DF = EG$ , zatem:

$$FQ = GQ = \frac{c}{2} \quad (36)$$

### § 53. Łuk koszowy z krzywymi przejściowymi. Rys. 94.

Obliczenie i ustalenie łuku koszowego na gruncie nastąpi podług § 25. Następnie wytyczymy łuk  $P_1M$ , w  $M$  uskuteczymy równoległe przesunięcie stycznej  $MW_2$  o wymiar  $c$  (wz. 31b) do położenia  $M'W'_2$ , a od tej stycznej wytyczymy łuk  $M'P'_2$ . W celu wytyczenia krzywych przejściowych na początku i końcu łuku, to znaczy około punktów  $P_1$  i  $P'_2$  nie wolno zmieniać położenia łuków, zastosujemy zatem przesunięcie stycznych podług § 47. Krzywą przejściową wspólną do obydwu łuków około  $M$  wytyczymy za pomocą rzędnych od tych łuków, podług § 52, po wyznaczeniu kątów  $\varepsilon$ ,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  (§ 51) i długości łuków  $DF$  i  $EG$  (rys. 92).

Możnaby wprowadzić i w tym wypadku zastosować przesunięcie łuków podług § 45, jednakże tylko kosztem zawiłych obliczeń, których nie przeprowadzamy.



Rys. 94.

Zupełnie analogicznie postąpimy, jeżeli łuk koszowy składa się z większej ilości łuków.

**§ 54. Zastosowanie krzywych przejściowych dla przypadku, gdy prosta między łukami jednakowo skierowanymi jest krótka.**

Rys. 95 i 96

W § 47b omówiono przypadek, gdy prosta między łukami jednakowo skierowanymi jest przynajmniej tak długa, że dwie połówki obustronnych krzywych przejściowych, wraz z długościami  $t'$  na niej się zmieszczą. Jeżeli jednakże ta prosta  $P$  jest krótszą, to obustronne krzywe przejściowe się przetną, a wtedy należy je ciągle ze sobą połączyć\*).

Niech przedstawia linia  $MP_1P_2N$  te dwa łuki z prostą  $P_1P_2=p$ . Pomyślmy sobie obydwaj łuki podług § 45 należycie przesunięte i do nich wykreślone krzywe przejściowe  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ , które się przecinają. Obierzmy na krzywych takie punkty  $D_1$  i  $D_2$ , w których promienie krzywizny przechodzą przez  $A_2$  i  $A_1$ , to te promienie  $\rho$  są równe, gdyż równają się

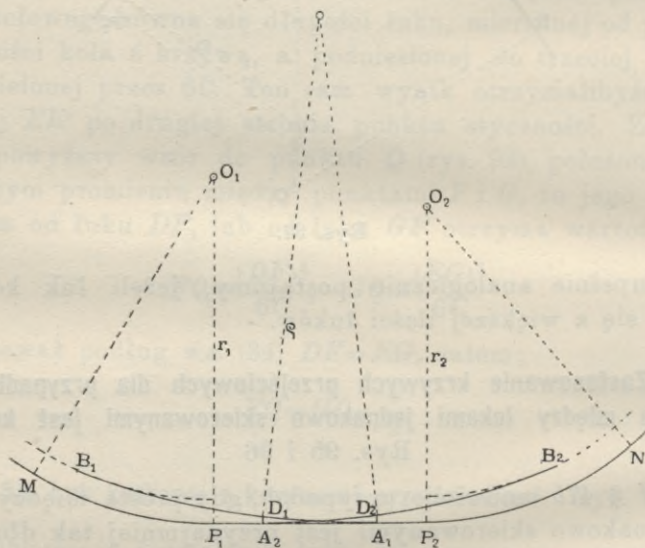
\*) Ob. Helmer: Uebergangscurven.

$\frac{C}{A_1A_2}$ . Łuk o promieniu  $\rho$  styczny w  $D_1$  do krzywej ma w środku długości  $A_1A_2$  styczną poziomą, to samo łuk w  $D_1$ , zatem ten łuk jest obydwu krzywym wspólny, może być zatem włożony dla ciągłego przejścia z jednej krzywej do drugiej. Długość  $A_1A_2$  możemy wyznaczyć.

Na długość  $P_1A_1$  składa się wymiar  $t'_1$  i połowa długości krzywej  $l_1$  (ob. § 45), zatem:

$$A_1P_2 = p - t'_1 - \frac{l_1}{2}, \text{ podobnie } P_1A_2 = p - t'_2 - \frac{l_2}{2},$$

więc: 
$$A_1A_2 = p - A_1P_2 - P_1A_2 = t'_1 + t'_2 + \frac{l_1 + l_2}{2} - p \quad (37)$$



Rys. 95.

Znając  $A_1A_2$  obliczymy  $\rho = \frac{C}{A_1A_2}$ , a odstęp łuku o promieniu  $\rho$  od stycznej  $P_1P_2$  wynosi  $\frac{(A_1A_2)^3}{24C}$  (jako  $v$  dla  $l = A_1A_2$ ).

Jeżeli promień  $r_1 > r_2$ , to krzywa  $A_1B_1$  jest krótsza niż  $A_2B_2$ . Otóż rozwiązanie będzie niemożliwe, skoro punkt  $D_1$  wypadnie po za punkt  $B_1$ , co by wtedy nastąpiło, gdyby było  $A_1A_2 > l_1$ . Zatem musi nastąpić:

$$A_1A_2 \leq l_1, \text{ czyli: } t'_1 + t'_2 + \frac{l_1 + l_2}{2} \leq l_1,$$

a stąd: 
$$p \geq t'_1 + t'_2 + \frac{l_2 - l_1}{2} \quad (38)$$

Widzieliśmy w § 48, że dla należytego przeprowadzenia przechyłki toru łuk włożony między dwie krzywe przejściowe nie powinien być krótszy niż pewien wymiar  $c$ , zatem mamy jeszcze drugi warunek do spełnienia, że  $A_1 A_2 \geq c$ , skąd:

$$p \leq t'_1 + t'_2 + \frac{l_1 + l_2}{2} - c \quad (39)$$

Jeżeliby długość  $A_1 A_2$  wypadła mniejsza o  $\Delta$  niż  $c$  (lub, co na jedno wyjdzie,  $p$  było o  $\Delta$  większe niż wypada z wz. 39), to możemy ją o ten wymiar  $\Delta$  zwiększyć przez zastosowanie większej wartości  $C'$  przy tej samej wartości  $k$  (ob. § 40), to znaczy zwiększyć  $i$  na  $i'$ .  $A_1 A_2$  zwiększy się o  $\Delta$ , jeżeli  $\frac{l_1 + l_2}{2}$  w wz. (37) o  $\Delta$  się zwiększy, to znaczy że, jeżeli  $l'_1$  i  $l'_2$  są długości zmienione stosownie do nowej wartości  $C$ , ma nastąpić równanie:

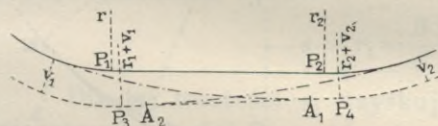
$$\frac{l'_1 + l'_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2} + \Delta.$$

Gdy  $l_1 = ih_1$ ,  $l_2 = ih_2$ , to:  $l'_1 = i'h_1$ ,  $l'_2 = i'h_2$ , zatem:

$$\frac{i'(h_1 + h_2)}{2} = \frac{i(h_1 + h_2)}{2} + \Delta, \text{ a stąd: } i' = i + \frac{2\Delta}{h_1 + h_2}, \text{ a } C' = C \cdot \frac{i'}{i}$$

Podług tej nowej wartości  $C'$ , zaokrąglonej na najbliższą całkowitą większą liczbę, rozwiąże się powyższe zadanie. (Ob. nr. 25 zbioru przykładów).

To zadanie można także rozwiązać pod warunkiem, że



Rys. 96.

łuki mają pozostać na swoim miejscu. W tym celu pomyślmy sobie na rys. 96 z tych samych środków zakreślone łuki promieniami  $r_1 + v_1$  i  $r_2 + v_2$ , następ-

nie poprowadźmy do nich wspólną styczną (podług § 47) i wyznaczmy punkty styczności  $P_3$  i  $P_4$ . Otrzymamy teraz nową prostą  $P_3 P_4 = p$ , a zadanie przeprowadzimy zupełnie tak jak dla rys. 95.

Z powyższego wynika, że należy przy projektowaniu unikać krótkich prostych między łukami jednakowo skierowanymi (Ob. także § 30).

### § 55. Zastosowanie krzywej przejściowej na istniejących torach.

Rys. 97.

Włożenie krzywej przejściowej w istniejący tor powinno być tak uskutecznione, aby nie wymagało przekształcenia toru na znaczne długości. Przedewszystkiem więc pozostawimy łuk przeważnie na swoim miejscu.

Włożenie krzywej przejściowej można w dwojaki sposób uskutecznić.

a) Sposobem podanym w § 47 przez przesunięcie stycznej wspólnej dwóm po sobie następującym łukom. Wtedy największe przesunięcie w poprzek toru wynosi  $v$ , to znaczy na głównych kolejach najwyżej 0,22 m. Na takie przesunięcie zazwyczaj jeszcze szerokość podtorza wystarczy. W tym przypadku nastąpi jednakże przesunięcie toru na większe długości, zwłaszcza jeżeli prosta między łukami jest długa. Dla małych promieni podrzędnych kolei tego sposobu stosować nie można.

b) Na znacznie mniejszą długość zredukuje się przesunięcie toru, jeżeli się zastosuje następujący powszechniej używany sposób:

W dany łuk  $PM$

o promieniu  $r$  wło-

żemy łuk  $MBC$

o mniejszym pro-

mieniu  $r_1$  tak, aby

odstęp punktu  $C$  od

stycznej  $AM_1$  wyno-

sił  $v_1 = \frac{C^2}{24r_1^3}$ . Róż-

nicę promieni  $r - r_1$

oznaczymy literą  $d$ .

Oprócz  $v_1$  obliczymy

dla promienia  $r_1$  dłu-

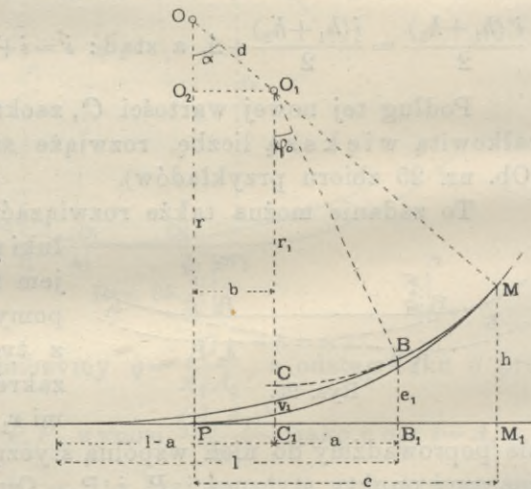
gość  $l = \frac{C}{r_1}$ . Z warun-

ku  $CC_1 = v_1$  wynika

położenie punktu sty-

czności  $M$ , które znajdziemy, skoro wyznaczmy kąt  $POM = \alpha$ .

Z trójkąta  $OO_1O_2$  wynika  $b = \sqrt{OO_1^2 - OO_2^2}$ , a gdy  $OO_1 = d$ , zaś:  $OO_2 = r - r_1 - v_1 = d - v_1$ , to:



Rys. 97.

$$b = \sqrt{d^2 - (d - v_1)^2} = \sqrt{v_1(2d - v_1)} \quad (40)$$

Rzędna  $h = r(1 - \cos \alpha)$ , ale równa się także  $r_1(1 - \cos \alpha) + v_1$ ,

więc:

$$1 - \cos \alpha = \frac{v_1}{d}, \quad \cos \alpha = 1 - \frac{v_1}{d} \quad (41)$$

Następnie z trójkąta  $OO_1O_2$  wynika:

$$\sin \alpha = \frac{b}{d} \quad (42)$$

a gdy  $PM_1 = c = r \sin \alpha$ , to:

$$c = \frac{rb}{d} \quad (43)$$

Nareszcie gdy  $h = r(1 - \cos \alpha)$ , to podług (41):

$$h = \frac{rv_1}{d} \quad (44)$$

Ilościami  $c$  i  $h$  jest wyznaczony punkt  $M$ , zaś początek krzywej przejściowej dany jest przez  $AP = l - a - b$ . Przesunięcie toru redukuje się na długość  $AM$ , a w bok o długość nie wiele większą niż  $\frac{v_1}{2}$ .

Czem mniejszy obierzemy promień  $r_1$ , tem większa długość  $AB$  krzywej przejściowej, tem bardziej zbliżają się punkty  $B$  i  $M$ , aż dla pewnej wartości  $r_1$  spadną razem.

Wtedy jest  $e_1 = h = \frac{rv_1}{d}$ , a gdy  $e_1 = 4v_1$  (ob. wz. 21), to:

$$4v_1 = \frac{rv_1}{d}, \quad (45)$$

a stąd graniczna wartość:

$$r_1 = \frac{3}{4} r \quad (45)$$

Dla tej wartości  $r_1$  uzyskuje się krótki układ, mimo to nie stosuje się jej w praktyce, gdyż przy tak wielkiej różnicy promieni, wynoszącej  $\frac{r}{4}$ , następuje w punkcie  $M$  nadto raptowny skok w przechyłce toru. Stosuje się więc znacznie mniejszą różnicę  $d$ .

Przyjmijmy ogólnie  $d = \frac{r}{n}$ , a więc  $r_1 = \frac{n-1}{n} r$ .

Gdy tę wartość wprowadzimy do wzoru:  $v_1 = \frac{C^2}{24r_1^3}$ , to:

$$v_1 = \frac{n^3}{24(n-1)^3} \cdot \frac{C^2}{r^3} = \gamma \frac{C^2}{r^3}, \text{ jeżeli: } \gamma = \frac{n^3}{24(n-1)^3}, \left. \begin{array}{l} \\ \text{lub też:} \end{array} \right\} (46)$$

$$\frac{v_1}{r} = \gamma \left( \frac{C}{r^2} \right)^2$$

Wzór (40) przejdzie w następujący:

$$b = \sqrt{v_1(2d-v_1)} = \sqrt{\gamma \frac{C^2}{r^3} \left( \frac{2r}{n} - \gamma \frac{C^2}{r^3} \right)} = \frac{C}{r} \sqrt{\frac{\gamma}{n} \sqrt{2-n\gamma \left( \frac{C}{r^2} \right)^2}} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (47)$$

$$\frac{b}{r} = \frac{C}{r^2} \sqrt{\frac{\gamma}{n} \sqrt{2-n\gamma \left( \frac{C}{r^2} \right)^2}}$$

Dla obranej wartości  $n$  jest  $\frac{C}{r^2}$  zmienną ilością. Nazwijmy ją  $z$ , to wzory (46) i (47) przejdą w następujące:

$$\frac{v_1}{r} = \gamma z^2, \quad \frac{b}{r} = z \sqrt{\frac{\gamma}{n} \sqrt{2-n\gamma z^2}} \quad (48)$$

Ilość  $\frac{b}{r}$  osiągnie swoją graniczną wartość, gdy:

$\sqrt{2-n\gamma z^2} = 0$ , to znaczy dla  $z = \sqrt{\frac{2}{n\gamma}}$ , a gdy  $z = \frac{C}{r^2}$ , to tę graniczną wartość osiągnie się dla:

$$r = \sqrt{C \sqrt{\frac{n\gamma}{2}}} \quad (49)$$

Dla mniejszych wartości  $r$  trzeba  $C$  lub  $n$  stosownie zmniejszyć.

Skoro  $v_1$  i  $b$  obliczono, wtedy:

$$\sin \alpha = n \left( \frac{b}{r} \right), \quad c = nb, \quad h = nv_1^* \quad (50)$$

### § 56. Zastosowanie wzorów § 55 b) dla $d = \frac{r}{20}$ .

W nowszych czasach weszło w użycie stosowanie  $n=20$ , zatem  $d = \frac{r}{20}$ ,  $r_1 = \frac{19}{20}r$ .

Dla tych wartości jest:

$$\gamma = \frac{20^3}{24 \cdot 19^3} = 0.0485979492, \quad \frac{b}{r} = z \sqrt{\frac{\gamma}{10} \sqrt{1-10\gamma z^2}}, \quad (48a)$$

\*) Ob. nr. 26 zbioru przykładów.



$$\sin \alpha = 20 \left( \frac{b}{r} \right), \quad c = 20b, \quad h = 20v_1$$

Graniczną wartość wzoru (49) osiągnie się dla:

$$r = \sqrt{C \sqrt{10\gamma}}$$

Dla różnych wartości  $C$  obliczono z tego wzoru następującą tabelę:

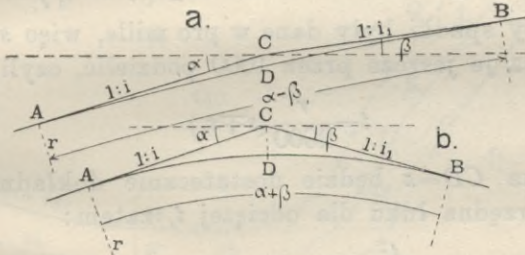
$C=45000$	36000	12000	6000	4500	3000	1500	750
$r=177.1$	158.4	91.5	64.7	56.0	45.7	32.4	22.9

Ponieważ w praktyce stosowane promienie są większe, niż te, które wykazuje tabela, zatem wzór (48a) ma nieograniczone zastosowanie dla  $n=20$ .

Podług powyższych wzorów dla  $n=20$  obliczono tabelę IX\*).

### § 57. Wyokrąglenie załomów spadków. Rys. 98 a i b.

Przy zmianie spadku niwelety powstaje załom, który podług istniejących przepisów powinien być wyokrąglony



Rys. 98.

łukiem kołowym. Na drogach uskutecznia się to wyokrąglenie podług oka łukiem o niewielkim promieniu, lecz na kolejkach żelaznych stosuje się promienie bardzo wielkie\*\*), a w celu dokładnego ułożenia nawierzchni należy wyznaczyć

\*) P. Leber w swoim dziele p. t. „Raccordements“ proponuje dla istniejących torów krzywą przejściową złożoną, któraby osiągnawszy pewien promień krzywizny  $r_1 < r$ , potem stale ten promień aż do wartości  $r$  zwiększała. Wtedy powstaną jednakże w przechyłce toru odwrotne spadki, których wadliwość wykazano w końcowej uwadze § 48.

\*\*) Podług norm związku niemieckich zarządów kolejowych ma ten promień wynosić co najmniej 5000 m na głównych, a 1000 m na podzędnych kolejkach żelaznych.

długość, a więc styczną  $AC=CB=t$  i strzałkę  $CD=z$  łuku zaokrąglenia.

Jeżeli na rys. *a* lub *b* w *C* następuje zmiana spadku z  $1:i=\tan\alpha$  na  $1:i_1=\tan\beta$ , to podług § 7 jest:

$$t=r \tan \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

W tym wzorze odnosi się znak górny do rys. *a*, t. j. do przypadku, gdy spadki po sobie następujące są jednakowo skierowane, zaś znak dolny do rys. *b*, gdy spadki są odwrotne.

Ponieważ kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są małe, wprowadzimy w tym wzorze pewne uproszczenia. Naprzód napiszemy:

$$t = \frac{1}{2} r \tan(\alpha \mp \beta) = \frac{r}{2} \cdot \frac{\tan \alpha \mp \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \tan \beta}$$

Następnie opuścimy w mianowniku iloczyn tangensów wobec jedności i otrzymamy prosty wzór:

$$t = \frac{r}{2} (\tan \alpha \mp \tan \beta) = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{i} \mp \frac{1}{i_1} \right)$$

Jeżeliby spadki były dane w pro mille, więc  $s^0/_{00}$  i  $s_1^0/_{00}$ , wtedy trzeba je jeszcze przez 1000 podzielić, czyli:

$$t = \frac{r}{2000} (s \mp s_1)$$

Strzałka  $CD=z$  będzie dostatecznie dokładnie wyznaczona jako rzędna łuku dla odciętej  $t$ , zatem:

$$z = \frac{t^2}{2r} \quad (\text{ob. wz. 3 w § 10}).$$

Np. niech w zastosowaniu do rys. *a* dla głównej kolei będzie  $s=20$ ,  $s_1=12^0/_{00}$ ,  $r=5000$  m, to:

$$t = 2.5(20 - 12) = 20 \text{ m}, \quad z = \frac{20^2}{10000} = 0.04 \text{ m}$$

A w zastosowaniu do rys. *b* podrzędnej kolei niech będzie  $s=15$ ,  $s_1=12^0/_{00}$ ,  $r=1000$  m, to:

$$t = 0.5(15 + 12) = 13.5 \text{ m}, \quad z = \frac{(13.5)^2}{2000} = 0.091 \text{ m}$$

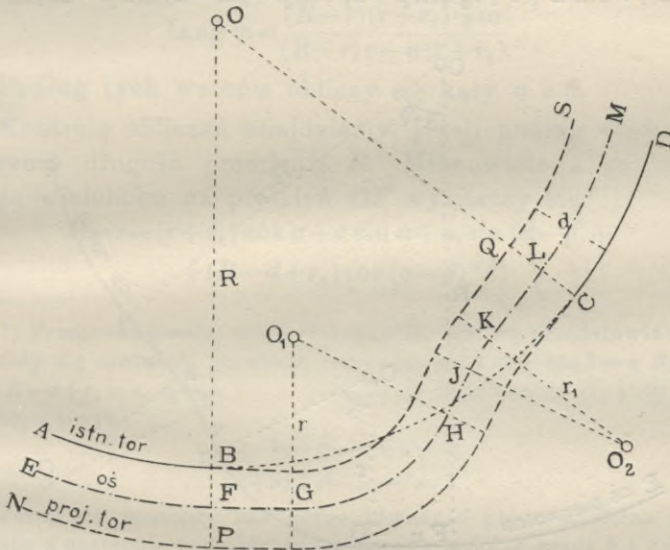
Dla promienia  $r=1000$  są ilości  $t$  i  $z$  zestawione w tabeli X.

## § 58. Zagadnienie.

*Zmiana osi przy projektowaniu drugiego toru.*

Jeżeli do istniejącego, powiedzmy lewego toru, ma się zaprojektować drugi, prawy tor, to mianowicie w terenie górzystym zachodzi nieraz potrzeba zmiany osi toru w ten sposób, że istniejący tor staje się prawym, a zaprojektować należy lewy tor. Następuje więc przesunięcie osi kolei dwutorowej o odstęp torów  $d$ , a połączenie pierwotnej osi z przesuniętą nastąpi za pomocą prostych i łuków.

*I. Przypadek.* Rys. 99 i 100. Rozpatrzmy naprzód najogólniejszy przypadek, gdy tor istniejący jest w łuku, a po-



Rys. 99.

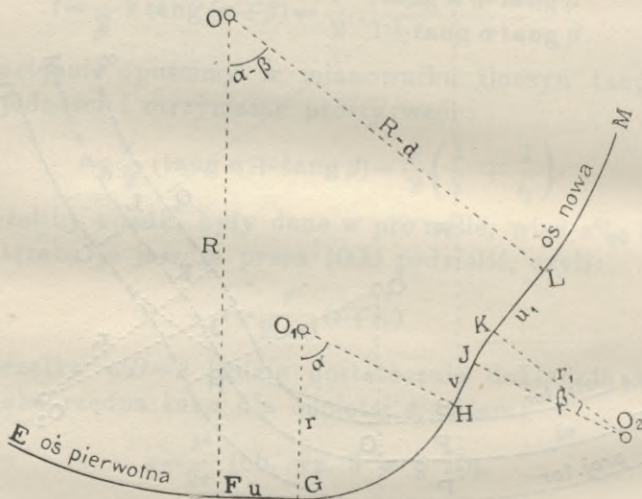
łączenie osi pierwotnej z przesuniętą nastąpi za pomocą odwrotnych łuków, w celu osiągnięcia najkrótszego układu. Niech na rys. 99 łuk  $ABCD$  przedstawia istniejący lewy tor, a  $NP$  tor projektowany, tak że łuk  $EF$  jest osią kolei dwutorowej, to w dalszym ciągu staje się istniejący tor  $CD$  prawym, zaś  $QS$  jest projektowanym lewym torem, gdy  $LM$  jest przesuniętą osią. Pierwotna oś  $EF$  i przesunięta  $LM$  są połączone za pomocą prostej  $FG$ , łuku  $GH$ , prostej  $HI$ , łuku  $IK$  i prostej  $KL$ . Znaczenie prostych  $FG$ ,  $HI$ ,  $KL$ , jakoteż ich długości są rozpatrywane w §§ 47 i 54.

Rys. 100 przedstawia linię osi, wyjętą z rys. 99.

W celu możliwego skrócenia układu, należy przyjąć długości  $u$ ,  $v$ ,  $u_1$  prostych i promienia  $r$  dopuszczalnie najmniejsze. Dla promienia  $r_1$  nie można przyjąć małej wartości, gdyż wypadnie kąt  $\beta$  mniejszy, niż podług § 48 jest dopuszczalny, dla pomieszczenia krzywych przejściowych.

Do wyznaczenia pozostają kąty  $\alpha$  i  $\beta$ . Potrzebne dwa równania uzyskamy z rzutu zamkniętego wieloboku  $OFGHJKLO$  na dwa kierunki. Najkorzystniej wypadną równania, jeżeli jako osie rzutów obierze się kierunek  $III$  i do niego prostopadły. Rzut na kierunek  $III$ :

$$u \cos \alpha + r \sin \alpha + v + r_1 \sin \beta + u_1 \cos \beta + (R-d) \sin \beta - R \sin \alpha = 0.$$



Rys. 100.

Rzut na prostopadłą do  $HI$ :

$$u \sin \alpha + r(1 - \cos \alpha) + u_1 \sin \beta + r_1(1 - \cos \beta) + R \cos \alpha - (R-d) \cos \beta = 0.$$

Po należytem uporządkowaniu otrzymuje się równania:

$$(R-r) \sin \alpha - u \cos \alpha - (R-d+r_1) \sin \beta - u_1 \cos \beta - v = 0, \quad (1)$$

$$u \sin \alpha + (R-r) \cos \alpha + u_1 \sin \beta - (R-d+r_1) \cos \beta + (r+r_1) = 0. \quad (2)$$

Po wyrugowaniu z tych wzorów raz  $\alpha$ , drugi raz  $\beta$ , otrzyma się dla wyznaczenia tych kątów następujące równania \*):

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{(R-d+r_1)^2 - (R-r)^2 - u^2 + u_1^2 + (r+r_1)^2 + v^2}{2[v(R-d+r_1) + u_1(r+r_1)]} \cos \varphi \quad (3)$$

Kąt  $\varphi$  jest określony wzorem:

$$\text{tang } \varphi = \frac{(R-d+r_1)(r+r_1) - u_1 v}{v(R-d+r_1) + u_1(r+r_1)} \quad (4)$$

$$\sin(\psi - \alpha) = \frac{(R-d+r_1)^2 - (R-r)^2 - u^2 + u_1^2 - (r+r_1)^2 - v^2}{2[(R-r)v - u(r+r_1)]} \cos \psi \quad (5)$$

gdz kąt  $\psi$  jest określony wzorem:

$$\text{tang } \psi = \frac{(R-r)(r+r_1) + uv}{(R-r)v - u(r+r_1)} \quad (6)$$

Podług tych wzorów obliczy się kąty  $\alpha$  i  $\beta$ .

Kontrolę obliczeń znajdziemy, jeżeli podług tych kątów obliczymy długość promienia  $R$ . Mianowicie z rzutu tego samego wieloboku na promień  $OF$  wyznaczy się:

$$R = r - (r+r_1) \cos \alpha + v \sin \alpha + u_1 \sin(\alpha - \beta) + (R-d+r_1) \cos(\alpha - \beta) \quad (7)$$

\*) Przeprowadzenie, cokolwiek zawile, tak się przedstawia:

Gdy się oznaczy:  $\sin \alpha = x$ ,  $\cos \alpha = y$ ,  $\sin \beta = \xi$ ,  $\cos \beta = \eta$ ,  $R-r = a$ ,  $u = b$ ,  $R-d+r_1 = c$ ,  $u_1 = e$ ,  $v = v$ ,  $(r+r_1) = f$ , to równania (1) i (2) przejdą w następujące:

$$\begin{aligned} ax - by - c\xi - e\eta - v &= 0, \\ bx + ay + e\xi - c\eta + f &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli się pomnoży raz górne równanie przez  $b$ , dolne przez  $a$  i odejmie, a następnie pomnoży górne przez  $a$ , a dolne przez  $b$  i zesumuje, to się otrzyma dwa nowe równania:

$$\begin{aligned} x(a^2 + b^2) &= \xi(ac - be) + \eta(ae + bc) - bf + av, \\ y(a^2 + b^2) &= -\xi(ae + bc) + \eta(ac - be) - af - bv. \end{aligned}$$

Po obustronnem kwadrowaniu i zesumowaniu, zważywszy, że  $x^2 + y^2 = 1$ , otrzyma się ostatecznie równanie:

$$\eta(cf - ev) - \xi(ef + vc) = \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2 + e^2 + f^2 + v^2).$$

Jeżeli w tem równaniu podstawi się  $\text{tang } \varphi = \frac{cf - ev}{ef + vc}$ , to się otrzyma:

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + e^2 + f^2 + v^2}{2(ef + vc)} \cos \varphi,$$

z którego kąt  $\beta$  się wyznaczy. Po wstawieniu napowrót wartości otrzyma się wzory 3 i 4. W podobny sposób doszło się do wzorów 5 i 6.

\*\*\*) Ob. nr. 27 zbioru przykładów.

To zagadnienie z zastosowaniem odwrotnych łuków jest możebne pod warunkiem, że  $\beta \geq 0$ , to znaczy, gdy  $\sin \varphi$  jest większe niż prawa strona wzoru (3). Jeżeli wtedy obie strony podzielimy przez  $\cos \varphi$ , otrzymamy tang  $\varphi$ , więc powyższy warunek wyrazi się także wzorem:

$$\frac{(R-d+r_1)(r+r_1)-u_1v}{v(R-d+r_1)+u_1(r+r_1)} \geq \frac{(R-d+r_1)^2-(R-r)^2-u^2+u_1^2+(r+r_1)^2+v^2}{2[(R-d+r_1)v+u_1(r+r_1)]},$$

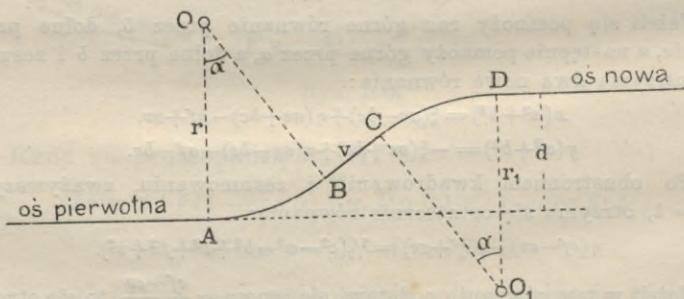
który po uproszczeniu wyznaczy warunek, że:

$$2d(R-r)-d^2+u^2-(u_1+v)^2 \geq 0 \quad (8)$$

Ten warunek znajdzie zawsze, jeżeli różnica  $R-r$  jest wielka i wtedy zastosowanie łuków odwrotnych powoduje skrócenie układu tem większe, im większa jest ta różnica. Jednakże trasa o łukach odwrotnych jest nieładna i dla ruchu niekorzystna. Dlatego jeżeli skrócenie układu nie jest znaczne, albo też na takim skróceniu nie zależy, uskuteczni się przesunięcie osi za pomocą jednego łuku podług rys. 103. To rozwiązanie nie ma zastosowania do przypadku, jeżeliby istniejący tor na rys. 99 był prawnym, a trzeba by zaprojektować lewy tor. (Ob. przyp. IVb).

## II. przypadek. Tory są proste. Rys. 101.

Jestto szczególny przypadek poprzedniego zagadnienia, gdy  $R=\infty$ . Kąt  $\alpha$  jest wtedy równy kątowi  $\beta$ , a wyznaczy się albo podług wzorów (5) i (6), jeżeli się w nie wstawi



Rys. 101.

$R=\infty$  i  $u=u_1=0$ , albo z rzutu linii  $ABCD$  na kierunek  $d$ :

$$d=r(1-\cos \alpha)+v \sin \alpha+r_1(1-\cos \alpha),$$

a stąd:  $(r+r_1) \cos \alpha - v \sin \alpha = r+r_1-d$

Podstawmy:  $\text{tang } \varphi = \frac{r+r_1}{v}$ , a otrzymamy:

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{r+r_1-d}{v} \cos \varphi \quad (9)$$

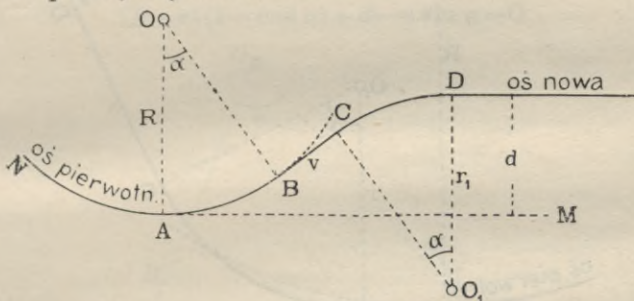
wzór do obliczenia kąta  $\alpha$ .

W celu otrzymania krótkiego układu, obierze się  $v$  dopuszczalnie najmniejsze, natomiast  $r$  i  $r_1$  nie zbyt małe, aby zadosyć uczynić warunkowi § 48.

Jako kontrolę obliczymy  $d$  z pierwszego równania, które w tym celu tak napiszemy:

$$d = 2(r+r_1) \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + v \sin \alpha \quad (10^*)$$

**III. przypadek.** a) Tor istniejący lewy przechodzi z łuku w prostą. Rys. 102.



Rys. 102.

Łuk  $NA$ , prosta  $AM$ . Wtedy dany łuk o promieniu  $R$  przedłuż się ( $AB$ ), zresztą rozwiąże się zagadnienie podług poprzedniego, gdy za  $r$  wstawi się  $R$ .

b) Jeżeli istniejący tor jest prawym torem, to jest to przypadek identyczny z przypadkiem V a).

**IV. przypadek.** a) Tor istniejący lewy jest w łuku. Rys. 103 a.

Przypadek ten sam, co pod I., lecz rozwiązanie ma być uskutecznione za pomocą tylko jednego łuku. Obierze się małe długości dla  $u$  i  $r$ , a wyznaczy się kąt  $\alpha$  i długość  $v$  stycznej do łuku przesuniętej osi. To rozwiązanie jest zawsze możliwe, tylko dla małej długości  $r$  może wypaść kąt  $\alpha$  mniejszy, niż podług § 48 jest dopuszczalny.

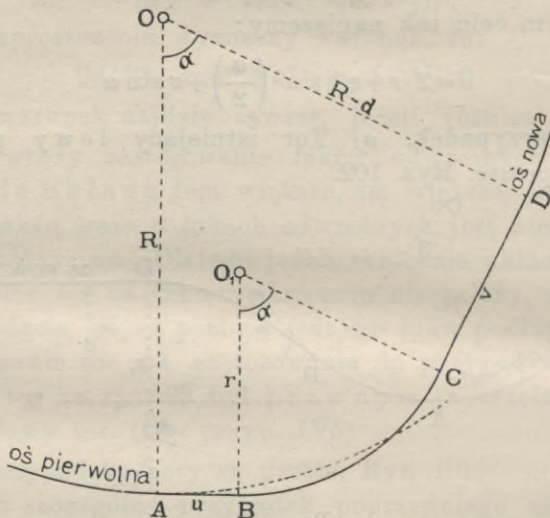
\*) Ob. nr. 28 w zbiorze przykładów.

Równania pod I. podane możemy wprost zastosować, gdy podstawimy  $r_1=0$ ,  $\beta=0$  i  $u_1=0$ . Równania (1) i (2) przejdą w następujące:

$$(R-r) \sin \alpha - u \cos \alpha - v = 0 \quad (11)$$

$$(R-r) \cos \alpha + u \sin \alpha = R - r - d \quad (12)$$

Gdy się podstawią w wzorze (12) kąt pomocniczy  $\varphi$ , którego tang  $\varphi = \frac{R-r}{u}$ , to się otrzyma wzór:



Rys. 103a.

$$\sin(\varphi + \alpha) = \frac{R-r-d}{u} \cos \varphi, \quad (13)$$

z którego wyznaczy się kąt  $\alpha$ . Długość  $v$  obliczy się z wzoru (11). Jeżeli równanie (8) zrównamy ze zerem, co nastąpi właśnie dla  $\beta=0$ , to możemy z tego wzoru wyznaczyć:

$$v = \pm \sqrt{2d(R-r) + u^2 - d^2}, \quad (14)$$

które obliczy się dla kontroli rachunku.

Jeżeli się wykona rzut wieloboku  $OABCO$  na kierunek  $OA$ , to się otrzyma równanie:

$$R = r + (R-d-r) \cos \alpha + v \sin \alpha$$

Jeżeli od tego równania odejmiemy się równanie (12), otrzyma się:

$$(v-u) \sin \alpha - d(1 + \cos \alpha) = 0,$$



$$\text{lub:} \quad (v-u) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - d \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

$$\text{a stąd:} \quad \text{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{v-u} \quad (15)$$

Po wyznaczeniu ilości  $v$  z poprzednich wzorów, można z wzoru (15) dla kontroli obliczyć kąt  $\alpha^*$ .

b) Istniejący prawy tor jest w łuku. Rys. 103 b.

Z rzutów wieloboku  $ABCO$  na kierunki promieni  $OA$  i  $OD$  uzyska się dwa równania:

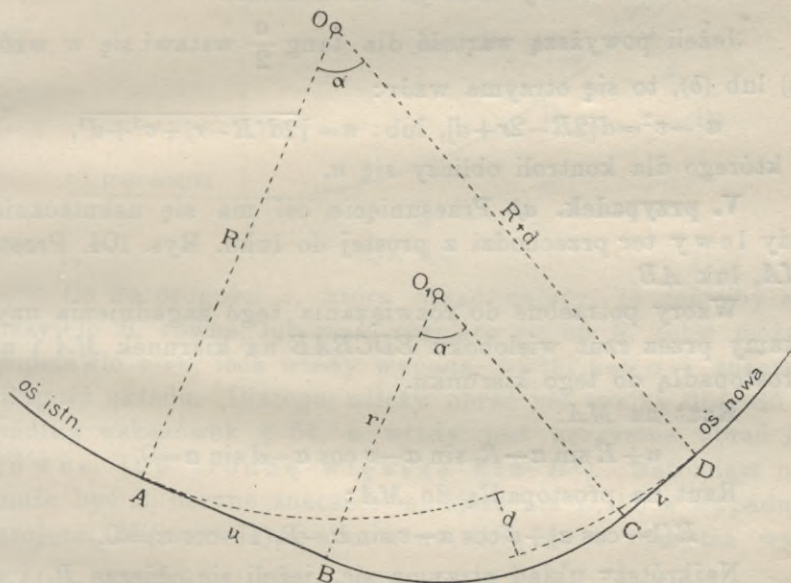
$$R = r(1 - \cos \alpha) + v \sin \alpha + (R+d) \cos \alpha,$$

$$R+d = r(1 - \cos \alpha) + u \sin \alpha + R \cos \alpha$$

Napiszmy je w tej formie:

$$(R-r)(1 - \cos \alpha) - d \cos \alpha - v \sin \alpha = 0, \quad (a)$$

$$(R-r)(1 - \cos \alpha) + d - u \sin \alpha = 0 \quad (b)$$



Rys. 103 b.

Z tych równań wynika, że  $u$  będzie zawsze większe niż  $v$ . Dlatego obierzemy  $v$  i  $r$  w wartości dopuszczalnie najmniejszej, a z powyższych równań wyznaczmy  $u$  i  $\alpha$ .

\*) Ob. nr. 29 w zbiorze przykładów.

Jeżeli się napisze równanie (a) w tej formie:

$$(R+d-r) \cos \alpha + v \sin \alpha - (R-r) = 0$$

i podstawią:  $\operatorname{tang} \varphi = \frac{R+d-r}{v}$ , to się otrzyma:

$$\sin(\varphi + \alpha) = \frac{R-r}{v} \cos \varphi$$

wzór dla wyznaczenia kąta  $\alpha$ . Z równania (b) wyznaczy się  $u$ .

Jeżeli się odejmie równanie (a) od (b), to się otrzyma równanie:

$$d(1 + \cos \alpha) - (u-v) \sin \alpha = 0,$$

a gdy:  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ , to się wyznaczy:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{u-v}$$

Ten wzór należy obliczyć dla kontroli.

Jeżeli powyższą wartość dla  $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$  wstawi się w wzór (a) lub (b), to się otrzyma wzór:

$$u^2 - v^2 = d[2R - 2r + d], \text{ lub: } u = \sqrt{2d(R-r) + v^2 + d^2},$$

z którego dla kontroli obliczy się  $u$ .

**V. przypadek.** a) Przesunięcie osi ma się skutecznąć, gdy lewy tor przechodzi z prostej do łuku. Rys. 104. Prosta  $MA$ , łuk  $AB$ .

Wzory potrzebne do rozwiązania tego zagadnienia użyjemy przez rzut wieloboku  $EDCBAE$  na kierunku  $MA$  i na prostopadłą do tego kierunku.

Rzut na  $MA$ :

$$u + R \sin \alpha - R_1 \sin \alpha - v \cos \alpha - d \sin \alpha = 0.$$

Rzut na prostopadłą do  $MA$ :

$$R(1 - \cos \alpha) + d \cos \alpha - v \sin \alpha - R_1(1 - \cos \alpha) = 0.$$

Najkrótszy układ otrzyma się, jeżeli się obierze  $R_1$  i  $v$ , a wyznaczy z pierwszego równania:

$$u = (R_1 - R + d) \sin \alpha + v \cos \alpha, \quad (16)$$

a z drugiego równania kąt  $\alpha$ . To równanie w tej formie:

$$(R_1 - R + d) \cos \alpha - v \sin \alpha = R_1 - R,$$

wyznaczy, gdy  $\operatorname{tang} \varphi = \frac{R_1 - R + d}{v}$ , wzór:

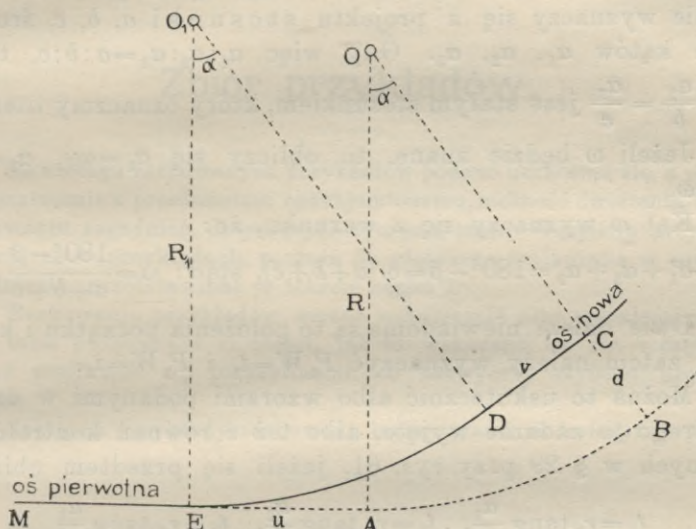
$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{R_1 - R}{v} \cos \varphi \quad (17)$$

dla obliczenia kąta  $\alpha$ .

Wzór (14) ma i w tym przypadku zastosowanie. Jeżeli z tego wzoru wyznaczymy:

$$u = \pm \sqrt{2d(R_1 - R) + v^2 + d^2} \quad (18)$$

to się obliczy  $u$  dla kontroli rachunku.



Rys. 104.

Co do długości  $v$ , którą obrać należy, to jeżeliby się przyjęło  $R_1$  równe, lub mało różniące się od  $R$ , toby można podstawić  $v=0$ , lecz wtedy wypada wielki kąt  $\alpha$  i znaczna długość układu. Dlatego należy obrać nie wielką długość  $v$ , podług wskazówek § 54, a wtedy jest korzystne obrać  $R_1$  równe, lub trochę większe niż  $R$  (\*). Natomiast nie może być  $R_1$  obrane znacznie mniejsze niż  $R$ , bo  $u$  wypadnie urojone. Mianowicie wynika z wz. (18), że  $u$  otrzyma wartość rzeczywistą, jeżeli będzie:  $R - R_1 \leq \frac{v^2 + d^2}{2d}$ . Np. dla  $v=30$ ,  $d=4$ , ma być  $R - R_1 \leq \frac{916}{8} \leq 114,5$  m.

b) Istniejący prawy tor przechodzi z prostej w łuk.

Jestto przypadek przedstawiony na rys. 103 b, jeżeli łuk przed punktem  $A$  przejdzie w prostą. Rozwiązanie zagadnienia podług IV b).

\*) Ob. nr. 30 zbioru przykładów.

§ 59. Zadanie o łukach koszowych z §§ 25 i 29 można inaczej postawić i uzyskać prostsze rozwiązanie\*).

Do § 29. Rys. 60 Między kierunkami głównych stycznych, przeniesionych z projektu na grunt, zmierzy się kąt  $\beta$ . Dla tego kąta, który od kąta  $\beta$  projektu będzie się cośkolwiek różnić, wrysuje się promieniami  $r_1$ ,  $r_2$  i  $r_3$  wyjętymi z projektu, łuk koszowy, możliwie zgodny z projektem, następnie wyznaczy się z projektu stosunki  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , środkowych kątów  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Gdy więc  $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3=a:b:c$ , to:

$\frac{\alpha_1}{a} = \frac{\alpha_2}{b} = \frac{\alpha_3}{c}$  jest stałym stosunkiem, który oznaczymy literą  $\omega$ .

Jeżeli  $\omega$  będzie znane, to obliczy się  $\alpha_1=a\omega$ ,  $\alpha_2=b\omega$ ,  $\alpha_3=c\omega$ .

Kąt  $\omega$  wyznaczy się z warunku, że:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ - \beta = \omega(a + b + c), \text{ stąd: } \omega = \frac{180^\circ - \beta}{a + b + c}$$

Dwie dalsze niewiadome są to położenia początku i końca łuku, zatem należy wyznaczyć  $P_1W=t_1$  i  $P_2W=t_2$ .

Można to uskutecznić albo wzorami podanymi w dziele, z którego to zadanie wyjęto, albo też z równań kontrolnych, podanych w § 29 przy rys. 61, jeżeli się przedtem obliczy:

$$t_3 = r_1 \tan \frac{\alpha_1}{2}, \quad t_4 = r_2 \tan \frac{\alpha_2}{2}, \quad t_5 = r_3 \tan \frac{\alpha_3}{2}$$

Można też wykonać rzut wieloboku na kierunki skrajnych promieni  $P_1O_2$  i  $P_2O_3$ :

$$r_3 + d_2 \cos \alpha_3 - d_1 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) - r_1 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\ - t_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

$$r_1 + d_1 \cos \alpha_1 - d_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) - r_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\ - t_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0.$$

Z tych równań można  $t_1$  i  $t_2$  dla kontroli obliczyć.

Do § 25. Rys. 56. Podobne rozwiązanie. Tu jest:  $\omega = \frac{180^\circ - \beta}{a + b}$ ,  $\alpha_1 = a\omega$ ,  $\alpha_2 = b\omega$ , zaś z równań (3) i (4) obliczy się  $t_1$  i  $t_2$ .

Dla kontroli można zużytkować np. wzór na  $\tan \frac{\alpha_2}{2}$ , pod b) podany.

\*) Z Handb. d. Jng. Wiss. Der Flussbau, 1907, str. 99.

## Zbiór przykładów.

Na szeregu rachowanych przykładów podano uczącemu się, a jeszcze niedostatecznie z przedmiotem obznajomionemu, możliwość ćwiczenia w rozwiązywaniu zagadnień dotyczących tyczenia tras. Wątpliwe przypadki przerobione w przykładach, posłużą do głębszego wniknięcia w niektóre zagadnienia, przedstawione w tekście części I.

Rachowanie przykładów można uskutecznić albo w całości za pomocą tabel podanych w II części, jak to wskazano na str. 7 części II, albowież posilkując się logarytmami, co zazwyczaj szybciej prowadzi do celu.

Następne przykłady rachowano logarytmami siedmiocyfrowymi.

### Przykład 1. Do § 2 punkt 3. Rys. 3.

Zmierzono:  $a = 180 \text{ m}$ ,  $b = 230 \text{ m}$ ,  $c = 80 \text{ m}$ ,  $\alpha = 76^\circ 24' 10''$ ,  
 $\beta = 94^\circ 17' 40''$ . Zatem:  $\alpha - \beta = -17^\circ 53' 30''$ ,  $\sin(\alpha - \beta)$  jest ujemne.

$$\begin{array}{lll} \lg a = 2.2552725 & \lg \sin \alpha & = 9.9876539 \\ \lg b = 2.3617278 & \lg \sin \beta & = 9.9987790 \\ \lg c = 1.9030900 & \lg \sin(\alpha - \beta) & = 9.4874469 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lg c = 1.9030900 & \lg c = 1.9030900 & \lg a = 2.2552725 \\ \lg \sin \alpha = 9.9876539 - 10 & \lg \sin \beta = 9.9987790 - 10 & \lg \sin \alpha = 9.9876539 - 10 \\ \hline 1.8907439 & 1.9018690 & 2.2429264 \end{array}$$

$$c \cdot \sin \alpha = 77.7578 \quad c \cdot \sin \beta = 79.7754 \quad a \cdot \sin \alpha = 174.9549$$

$$\begin{array}{lll} \lg a = 2.2552725 & \lg b = 2.3617278 & \\ \lg \sin(\alpha - \beta) = 9.4874469 - 10 & \lg \sin \beta = 9.9987790 - 10 & \\ \hline 1.7427194 & 2.3605068 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lg b = 2.3617278 \\ \lg \sin(\alpha - \beta) = 9.4874469 - 10 \\ \hline 1.8491747 \end{array}$$

$$a \cdot \sin(\alpha - \beta) = 55.2993 \quad b \cdot \sin \beta = 229.8543 \quad b \cdot \sin(\alpha - \beta) = 70.6602$$

$$\left. \begin{array}{l} c \cdot \sin \alpha = 77.7578 \\ -b \cdot \sin(\alpha - \beta) = +70.6602 \end{array} \right\} 148.4180, \text{ licznik dla } x; \log \text{ liczn.} = 2.1714866$$

$$\left. \begin{array}{l} c \cdot \sin \beta = 79.7754 \\ a \cdot \sin(\alpha - \beta) = -55.2998 \end{array} \right\} 24.4761, \text{ licznik dla } y; \log \text{ liczn.} = 1.3887422$$

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot \sin \alpha = 174.9549 \\ b \cdot \sin \beta = 229.3543 \end{array} \right\} 404.3092, \text{ mianownik; } \log \text{ mian.} = 2.6067136$$

$\lg a = 2.2552725$	$\lg b = 2.3617278$	Kontrola: $x+y=c$ .
$\lg \text{ liczn.} = 2.1714866$	$\lg \text{ liczn.} = 1.3887422$	$x = 66.076$
$4.4267591$	$3.7504700$	$y = 13.9238$
$\lg \text{ mian.} = 2.6067136$	$\lg \text{ mian.} = 2.6067136$	$x+y = 80.0001$
$\lg x = 1.8200455$	$\lg y = 1.1437564$	zgodnie ze zmierzona
$x = 66.0763$	$y = 13.9238$	długością $c$ .

**Przykład 2.** Do § 2 punkt 3. Rys. 4.

Zmierzono:  $\Delta = 120 \text{ m}$ ,  $\alpha = 83^\circ 43' 30''$ ,  $\beta = 47^\circ 14' 10''$ ,  $\gamma = 56^\circ 27' 20''$ ,  
 $\delta = 64^\circ 31' 20''$ . Zatem  $\alpha + \beta = 130^\circ 57' 40''$ ,  $\gamma + \delta = 120^\circ 58' 40''$ .  
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin 49^\circ 2' 20''$ ,  $\sin(\gamma + \delta) = \sin 59^\circ 1' 20''$ .

$\lg \sin \delta = 9.9555686 - 10$	$\lg \sin \alpha = 9.9973902$
$\lg \sin \gamma = 9.9208834 - 10$	$\lg \sin \beta = 9.8657895$
$\lg \sin(\alpha + \beta) = 9.8780359 - 10$	$\lg \sin(\gamma + \delta) = 9.9331668$
$\lg \text{ liczn.} = 0.7544879 - 1$	$\lg \text{ mian.} = 0.7963465 - 1$
$\lg \text{ liczn.} = 0.7544879 - 1$	$\tan^2 \mu = 0.908116$
$\lg \text{ mian.} = 0.7963465 - 1$	$1 + \tan^2 \mu = 1.908116$
$\lg \tan^2 \mu = 0.9581414 - 1$	$\lg(1 + \tan^2 \mu) = 0.2806048$

Ponieważ  $\sin^2 \mu = \frac{\tan^2 \mu}{1 + \tan^2 \mu}$ ,  $\cos^2 \mu = \frac{1}{1 + \tan^2 \mu}$ , więc:

$\lg \tan^2 \mu = 0.9581414 - 1$	$\lg 1 = 0.0000000$
$\lg(1 + \tan^2 \mu) = 0.2806048$	$\lg(1 + \tan^2 \mu) = 0.2806048$
$\lg \sin^2 \mu = 0.6775366 - 1$	$\lg \cos^2 \mu = 0.7193952 - 1$
$\lg \Delta = 2.0791812$	$\lg \Delta = 2.0791812$
$\lg d_1 = 1.7567178$	$\lg d_2 = 1.7985764$
$d_1 = 57.1107$	$d_2 = 62.8893$

Kontrola:  $d_1 + d_2 = \Delta$

$$\begin{array}{r} 57.1107 \\ 62.8893 \\ \hline 120.0000 = \Delta \end{array}$$

**Przykład 3.** Do § 2 punkt 4. Rys. 5.

Zmierzono kąty: Ponieważ żąda się także wyznaczenia długości  $AB$ ,  
 więc zmierzono  $c = 360 \text{ m}$ .

$1 = 38^\circ 12' 00''$	Sumy kątów:
$2 = 77^\circ 43' 10''$	$(1+2) = 115^\circ 55' 10''$ , $180^\circ - (1+2) = 64^\circ 4' 50''$
$3 = 110^\circ 6' 10''$	$(3+4+5) = 130^\circ 26' 10''$ , $180^\circ - (3+4+5) = 49^\circ 33' 50''$
$4 = 8^\circ 53' 40''$	$(7+8) = 108^\circ 17' 40''$ , $180^\circ - (7+8) = 71^\circ 42' 20''$
$5 = 11^\circ 26' 20''$	$(4+5+6) = 116^\circ 24' 0''$ , $180^\circ - (4+5+6) = 63^\circ 36' 0''$
$6 = 96^\circ 4' 00''$	$(2+3+4 - 180^\circ) = 196^\circ 43' 0'' - 180^\circ = 16^\circ 43' 0''$
$7 = 81^\circ 12' 30''$	$(2+3+4+5+6+7 - 360^\circ) = 25^\circ 25' 50''$
$8 = 27^\circ 5' 10''$	$(5+6+7 - 180^\circ) = 188^\circ 42' 50'' - 180^\circ = 8^\circ 42' 50''$

Naprzód obliczy się długości  $a$  i  $b$ . Z wzoru dla  $c$ :

$$b = c \frac{\sin(4+5+6) \sin 8}{\sin 4 \sin(7+8)}$$

$\begin{aligned} \lg c &= 2.5563025 \\ \lg \sin(4+5+6) &= 9.9521683-10 \\ \lg \sin 8 &= 9.6583254-10 \\ \hline &2.1667962 \\ &9.1667253-10 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg \sin 4 &= 9.1892505-10 \\ \lg \sin(7+8) &= 9.9774748-10 \\ \hline &9.1667253-10 \end{aligned}$
---	---

$\lg b = 3.0000709$ , zatem  $b = 1000.164$ . Teraz obliczy się  $a$ :

$\begin{aligned} \lg b &= 3.0000709 \\ \lg \sin 5 &= 9.2973722-10 \\ \lg \sin(1+2) &= 9.9539575-10 \\ \hline &2.2514006 \\ &9.6727341-10 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg \sin(3+4+5) &= 9.8814588-10 \\ \lg \sin 1 &= 9.7912754-10 \\ \hline &9.6737341-10 \end{aligned}$
---	---

$\lg a = 2.5786665$  więc  $a = 379.024$ .

Teraz przystąpi się do obliczenia  $x_B$  i  $y_B$ :

$\begin{aligned} \lg b &= 3.0000709 \\ \lg \cos(2 \text{ do } 4-180^\circ) &= 9.9812471-10 \\ \hline &2.9813180 \\ b \cdot \cos(2 \text{ do } 4-180^\circ) &= 957.895 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg b &= 3.0000709 \\ \lg \sin(2 \text{ do } 4-180^\circ) &= 9.4588480-10 \\ \hline &2.4589189 \\ b \sin(2 \text{ do } 4-180^\circ) &= 287.686 \end{aligned}$
$\begin{aligned} \lg c &= 2.5563025 \\ \lg \cos(2 \text{ do } 7-360^\circ) &= 9.9557389-10 \\ \hline &2.5120414 \\ c \cdot \cos(2 \text{ do } 7-360^\circ) &= 325.118 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg c &= 2.5563025 \\ \lg \sin(2 \text{ do } 7-360^\circ) &= 9.6328791-10 \\ \hline &2.1891816 \\ c \sin(2 \text{ do } 7-360^\circ) &= 154.590 \end{aligned}$

Zatem  $x_B$ :

$$\begin{aligned} 379.024 \\ 957.895 \\ 325.118 \\ \hline x_B = 1.662.037 \end{aligned}$$

$y_B$ :

$$\begin{aligned} 287.686 \\ 154.590 \\ \hline y_B = 442.276 \end{aligned}$$

$$\lg y_B = 2.6456934$$

$$\lg x_B = 3.2206406$$

$$\lg \tan x = 9.4250528-10$$

$$\text{Kąt } x = 14^\circ 54' 4.9''$$

Jeżeli teraz postąpimy symetrycznie odwrotnie i obróczy w  $B$  początek układu współrzędnych, a w  $B_6$  oś odciętych, to dla punktu  $A$  znajdzie się:

$$x_B = 0 \quad x_I = c, \quad x_{II} = x_I + b \cdot \cos(5+6+7-180^\circ)$$

$$y_B = 0 \quad y_I = 0 \quad y_{II} = b \cdot \sin(5+6+7-180^\circ)$$

$$x_A = x_{II} + a \cos(2+3+4+5+6+7-360^\circ)$$

$$y_A = y_{II} + a \sin(2+3+4+5+6+7-360^\circ)$$

$\begin{aligned} \lg b &= 3.0000709 \\ \lg \cos(5 \text{ do } 7-180^\circ) &= 9.9949579-10 \\ \hline &2.9950288 \\ b \cdot \cos(5 \text{ do } 7-180^\circ) &= 988.619 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg b &= 3.0000709 \\ \lg \sin(5 \text{ do } 7-180^\circ) &= 9.1804139-10 \\ \hline &2.1804848 \\ b \sin(5 \text{ do } 7-180^\circ) &= 151.525 \end{aligned}$
--	--

$\begin{aligned} \lg a &= 2.5786665 \\ \lg \cos(2 \text{ do } 7-360^\circ) &= 9.9557389-10 \\ \hline &2.5344054 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lg a &= 2.5786665 \\ \lg \sin(2 \text{ do } 7-360^\circ) &= 9.6328791-10 \\ \hline &2.2115456 \end{aligned}$
--	--

$$a \cdot \cos(2 \text{ do } 7-360^\circ) = 342:299$$

$$a \cdot \sin(2 \text{ do } 7-360^\circ) = 162:759$$

Zatem: $x_A$ :	$y_A$ :	
360:000	151:525	$\lg y_A = 2:4973223$
988:619	162:759	$\lg x_A = 3:2281226$
342:299	$y_A = 314:284$	$\lg \tan y = 9:2691997-10$
$x_A = 1690:918$		$\text{Kąt } y = 10^\circ 31' 45:1''$

Suma  $x+y = 25^\circ 25' 50''$  zupełnie zgodnie ze sumą (2 do 7-360°) podaną powyżej.

Długość  $AB$  obliczy się z wzorów:

$$AB = \frac{y_B}{\sin x} = \frac{x_B}{\cos x}$$

albo:

$$AB = \frac{y_A}{\sin y} = \frac{x_A}{\cos y}$$

W celu kontroli obliczymy  $AB$  podług  $y_B$  i  $y_A$ :

$\lg y_B = 2:6456934$	$\lg y_A = 2:4973223$
$\lg \sin x = 9:4101962-10$	$\lg \sin y = 9:2618253-10$
$\lg AB = 3:2354972$	$\lg AB = 3:2354970$
$AB = 1719:876$	$AB = 1719:876$

Zatem zgodność zupełna.

**Przykład 4.** Do § 2 punkt 7. Rys. 8.

Zmierzono  $\varphi = 179^\circ 2' 0''$ . Długość  $a = 230$  i  $b = 350$  m zmierzono z dokładnością  $\pm 1$  m. W celu przekonania się jak wielki wpływ ma ten błąd na ostateczny wynik, obliczymy  $CC'$  raz podług  $a = 229$  i  $b = 349$ , drugi raz podług  $a = 231$  i  $b = 351$ .

$\lg 229 = 2:3598355$	$\lg 231 = 2:3636120$
$\lg 349 = 2:5428254$	$\lg 351 = 2:5453071$
$\lg \sin \varphi = 8:2271335-10$	$\lg \sin \varphi = 8:2271335-10$
$3:1297944$	$3:1860526$
$\lg 578 = 2:7619278$	$\lg 582 = 2:7641761$
$0:3678666$	$0:3718765$
$CC' = 2\ 333$ m	$CC' = 2\ 354$

Różnica wynosi zatem 21 mm; jest ona dla zagadnień tyczenia tras przeważnie dopuszczalna. Dla subtelniejszych zagadnień należałoby  $a$  i  $b$  dokładniej zmierzyć.

**Przykład 5.** Do § 6. Rys. 14 i do § 9.

Zmierzono:  $d = 468:12$  m,  $\gamma = 132^\circ 42' 30''$ ,  $\delta = 157^\circ 33' 10''$ , zatem:  $\beta = \gamma + \delta - 180^\circ = 110^\circ 15' 40''$ .

$\lg d = 2:6703572$	$\lg d = 2:6703572$
$\lg \sin \delta = 9:5818726-10$	$\lg \sin \gamma = 9:8661786-10$
$2:2522298$	$2:5865358$
$\lg \sin \beta = 9:9722603-10$	$\lg \sin \beta = 9:9722603-10$
$\lg b = 2:2799695$	$\lg c = 2:5642755$
$b = 190:533$	$c = 366:670$



W celu kontroli obliczymy  $d$  z trójkąta  $AWA_1$ :

$$d = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta}$$

$\lg b^2 = 4.5599390$	$\lg 2 = 0.3010300$	$36302.71$
$b^2 = 36302.71$	$\lg b = 2.2799695$	$134447.00$
$\lg c^2 = 5.1285510$	$\lg c = 2.5642755$	$+48886.72$
$c^2 = 134447.00$	$\lg \cos \beta = 9.5894512 - 10$	$219136.48 = d^2$
	$4.6847262$	
	$2bc \cdot \cos \beta = -48886.72$	$\lg d^2 = 5.3407146$
		$\lg d = 2.6703573$
		$d = 468.12 \text{ m}$

Wynik zupełnie zgodny z pomiarem.

Inną kontrolę można przeprowadzić podług § 9. Mianowicie jest

$$\frac{\beta}{2} = 55^\circ 7' 50'', \quad \frac{\gamma - \delta}{2} = -(12^\circ 25' 20''), \quad b - c = -176.137.$$

$\lg(b-c) = 2.2458506$	$\lg d = 2.6703572$
$\lg \cos \frac{\beta}{2} = 9.7571746 - 10$	$\lg \sin \frac{\gamma - \delta}{2} = 9.3326691 - 10$
$2.0030252$	$2.0030263$
$(b-c) \cos \frac{\beta}{2} = 100.699$	$d \sin \frac{\gamma - \delta}{2} = 100.699$

Zatem i tu zgodność zupełna.

**Przykład 6.** Do § 6. Rys. 15.

Zmierzone:  $\varphi = 42^\circ 6' 20''$ ,  $\psi = 28^\circ 13' 0''$ ,  $\varphi_1 = 20^\circ 16' 40''$ ,  
 $\psi_1 = 18^\circ 24' 50''$ , zatem:  $\beta = 180 - 70^\circ 19' 20'' = 109^\circ 40' 40''$ .

W celu wyznaczenia długości  $d$  zmierzono  $a = 76.03 \text{ m}$ .

Znajomość długości  $a_1$  jest tylko dla kontroli pożądana.

Z powyższych danych wyznaczmy:

$$\varphi + \psi_1 = 60^\circ 31' 10'' \qquad \varphi_1 + \psi = 48^\circ 29' 40''$$

$$\begin{aligned} \lg a &= 1.8809850 \\ \lg \sin(\varphi + \psi_1) &= 9.9397801 - 10 \\ &\quad 1.8207651 \\ \lg \sin \psi_1 &= 9.4995207 - 10 \\ \lg d &= 2.3212444 \qquad d = 209.529 \end{aligned}$$

Obliczenie  $b$  i  $c$  i kontrolę, przeprowadzi się jak w 5 przykładzie.

**Przykład 7.** Do § 6. Rys. 16. To zagadnienie jest identyczne z zagadnieniem w § 2 punkt 4, tylko przeprowadzenie jest odmienne. Na podstawie danych, lub wyznaczonych ilości w 3 przykładzie, urobimy następujące ilości:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180 - (1+x) = 126^\circ 58' 55'' & A_1 = a &= 379.024 \\ \delta &= 180 - (8+y) = 142^\circ 23' 5'' & 12 = b &= 1000.164 \\ \varepsilon &= (2+3+4) - 180 = 16^\circ 43' 0'' & 2A_1 = c &= 360.000 \\ \varphi &= (5+6+7) - 180 = 8^\circ 42' 50'' \\ x_{A_1} \text{ (równe } x_B \text{ z prz. 3)} &= 1662.037, & y_{A_1} \text{ (równe } y_B) &= 442.276 \\ \mu \text{ (równe } x \text{ z prz. 3)} &= 14^\circ 54' 5'', & \nu \text{ (równe } y) &= 10^\circ 31' 45'' \\ \lg(A_1) &= 2.5786665 & \lg(12) &= 3.0000709 & \lg(2A_1) &= 2.5563025 \\ \lg \cos \mu &= 9.9851434 - 10 & \lg \cos(\mu - \varepsilon) &= 9.9997820 - 10 & \lg \cos \nu &= 9.9926212 - 10 \\ &2.5638099 & &2.9998529 & &2.5489237 \end{aligned}$$

$$(A_1) \cos \mu = 366 \cdot 277 \quad (12) \cos (\mu - \varepsilon) = 999 \cdot 661 \quad (2A_1) \cos \nu = 353 \cdot 935$$

Nareszcie  $d = 366 \cdot 277 + 999 \cdot 661 + 353 \cdot 935 = 1719 \cdot 873$  zgodnie z długością  $AB$  z przykł. 3.

$$\beta = \gamma + \delta - 180^\circ = 89^\circ 17' 0''$$

**Przykład 8.** Do § 7. Rys. 17.

Przykład przeprowadzony na str. 5 i 6 części II, wyłącznie za pomocą tabeli II.

**Przykład 9.** Do § 7. Rys. 18.

Dane:  $r = 400 \text{ m}$ ,  $\alpha = 54^\circ 12' 40''$ , punkty  $P$  i  $P_1$ . Zmierzono:  $2a = 476 \cdot 26$ ,  $\mu = 15^\circ 17' 20''$ ,  $\nu = 8^\circ 12' 20''$ , zatem:  $\mu + \nu = 23^\circ 29' 40''$ ,

$$\frac{\alpha}{2} - \mu = 11^\circ 49' 0''.$$

$$\lg 2r = 2 \cdot 9030900$$

$$\lg 2a = 2 \cdot 6778441$$

$$\lg \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) = \frac{9 \cdot 3112892 - 10}{2 \cdot 2143792}$$

$$\lg \sin \nu = \frac{9 \cdot 1544998 - 10}{1 \cdot 8323439}$$

$$2r \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \mu \right) = 163 \cdot 825$$

$$\lg \sin (\mu + \nu) = \frac{9 \cdot 606028 - 10}{2 \cdot 2317411}$$

$$\frac{2a \sin \nu}{\sin (\mu + \nu)} = 170 \cdot 506$$

$$\text{Zatem } x = 163 \cdot 825 - 170 \cdot 506 = -6 \cdot 681.$$

Ponieważ  $x$  wypadło ujemne, więc punkt  $C$  leży na zewnątrz łuku.

Kontrola na miejscu przez zmierzenie np. kąta  $PMP_1$ , który podług § 10 e ma się równać  $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

**Przykład 10.** Do § 10 a. Rys. 21.

Dla promienia  $520 \text{ m}$ , dla którego w tabeli III niema podanych wartości na  $y$ , chcemy obliczyć rzędne. Podług tabeli na str. 15 możemy rachować rzędne podług przybliżonego wzoru  $y = x^2 : 2r$ , jeżeli ich długość nie przekroczy około  $3 \cdot 2 \text{ m}$ ; zatem dla  $x = 10$  do  $50 \text{ m}$  obliczy się  $y$  podług przybliżonego wzoru, zaś od  $x = 60$  począwszy zastosuje się wzór dokładny:  $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ .

Wzór przybliżony:

$x$	$y$
10	0.096
20	0.385
30	0.865
40	1.538
50	2.404

Wzór dokładny:

$x$	$y$
60	3.478
70	4.738
80	6.191
90	7.848
100	9.706

**Przykład 11.** Do § 10 b. Rys. 23 i § 11 c.

Między głównymi punktami  $M$  i  $N$  łuku o promieniu  $r = 600 \text{ m}$  należy wytyczyć 10 punktów łuku od cięciwy  $MN$ .

Zmierzono  $2d = 118 \cdot 64 \text{ m}$ .

Dla 10 punktów jest w zastosowaniu do wz. 8:

$a = 0 \cdot 1$	0.2	0.3	0.4	0.5 razy ( $2d$ )
$b = 0 \cdot 9$	0.8	0.7	0.6	0.5 razy ( $2d$ )
$ab = 0 \cdot 09$	0.16	0.21	0.24	0.25 razy ( $2d$ ) <sup>2</sup>

Zatem dla $a = 11.86$	28.73	35.59	47.46	59.32 <i>m</i>
jest $z = 1.056$	1.877	2.547	2.915	2.932 <i>m</i>

Ponieważ rzędne nie przekraczają wartości podanych w tabelce na str. 15, przeto ich obliczenie na podstawie wz. 8 jest dopuszczalne.

Jeżeliby długość łuku  $MN$  była żądana, to trzeba wyznaczyć kąt  $\alpha$  z wzoru  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{r} = \frac{59.32}{600}$ .

$$\lg d = 1.7732011 \quad \text{zatem: } \frac{\alpha}{2} = 5^{\circ} 40' 26'', \quad \alpha = 11^{\circ} 20' 52''$$

$$\lg r = 2.7781513 \quad \text{Podług I tabeli jest } \text{arc } \alpha = 0.1980561, \text{ więc}$$

$$\lg \sin \frac{\alpha}{2} = 8.9950498 - 10 \quad \text{długość łuku } r \text{ arc } \alpha = 118.834 \text{ m.}$$

Można długość łuku także wyznaczyć podług § 11c:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left(\frac{59.32}{600}\right)^2 = 0.0097746; \quad \frac{1}{6} \left(\frac{a}{r}\right)^2 = 0.0016291, \text{ więc:}$$

$$\text{długość łuku} = 118.64 \cdot 1.0016291 = 118.833 \text{ m.}$$

**Przykład 12.** Do § 14. Rys. 38.

Łuk tyczono z  $A$  i  $B$  o długości  $s_1 = 148.64$  i  $s_2 = 180.00 \text{ m}$ , przy czym znaleziono odchyłkę  $\Delta = 84 \text{ mm}$ . Więc  $\Delta : (s_1 + s_2) = 0.2556 \text{ mm}$ , zaś  $\Delta_1 = 148.64 \cdot 0.2556 = 38 \text{ mm}$ ,  $\Delta_2 = 180 \cdot 0.2556 = 46 \text{ mm}$ .  $\Delta_1 + \Delta_2 = 84 \text{ mm}$ .

Poszczególne punkty, mające od  $A$  lub  $B$  odległość:

	20	40	60	80	100	120	140	160 <i>m</i>
należy przesunąć o	5	10	15	20	26	31	36	41 <i>mm</i>

**Przykład 13.** Do § 15. Rys. 40. Dane punkty  $A$  i  $B$  i styczna w  $A$ .

Dla stosownie obranego punktu  $C$  zmierzono:  $b = 478.15$ ,  $c = 386.84 \text{ m}$ ,  $\varepsilon = 135^{\circ} 2' 40''$ , zatem  $180 - \varepsilon = 44^{\circ} 57' 20''$ ; również zmierzono  $\gamma = 29^{\circ} 48' 20''$ .

Obliczenie długości  $2a$ :

$\lg b = 2.6795642$	$\lg c = 2.5875314$	$\lg 2 = 0.3010300$
$\lg b^2 = 5.3591284$	$\lg c^2 = 5.1750628$	$\lg b = 2.6795642$
$b^2 = 228627.47$	$c^2 = 149645.21$	$\lg c = 2.5875314$
		$\lg \cos \varepsilon = 9.8498216 - 10$
Zatem wyraz pod pierwiastkiem:		$\lg 2bc \cos \varepsilon = 5.4179472$
228627.47		$2bc \cos \varepsilon = -261786.42$
149645.21		
261786.42		
640059.10	logarytm tego wyrazu = 5.8062201.	

Logarytm pierwiastka:  $2.9031101 = \lg 2a$ , zatem  $2a = 800.037$ .

Obliczenie  $\mu$  i  $\nu$ :

$\lg c = 2.5875314$	$\lg b = 2.6795642$
$\lg \sin \varepsilon = 9.8491479 - 10$	$\lg \sin \varepsilon = 9.8491479 - 10$
2.4366793	2.5287121
$\lg 2a = 2.9031101$	$\lg 2a = 2.9031101$
$\lg \sin \mu = 9.5335692 - 10$	$\lg \sin \nu = 9.6256020 - 10$

$$\begin{aligned} \mu &= 19^{\circ} 58' 37.7'' & \varepsilon - \varphi &= 49^{\circ} 49' 37.7'' \\ \nu &= 24^{\circ} 58' 43.3'' & \mu + \varphi &= 150^{\circ} 11' 40.0'' \\ \gamma + \mu &= \frac{\alpha}{2} = 49^{\circ} 46' 57.7'' & \nu + \varphi &= 155^{\circ} 11' 45.6'' \\ \varphi &= 180 - \frac{\alpha}{2} = 130^{\circ} 13' 2.3'' \end{aligned}$$

Obliczenie długości  $CD$  i  $CE$ :

$$\begin{aligned} \lg b &= 2.6795642 & \lg c &= 2.5875314 \\ \lg \sin(\varepsilon - \varphi) &= \frac{8.9250533 - 10}{11.6046175 - 10} & \lg \sin(\varepsilon - \varphi) &= \frac{8.9250533 - 10}{11.5125847 - 10} \\ \lg \sin \varphi &= \frac{9.8828666 - 10}{1.7217509} & \lg \sin \varphi &= \frac{9.8828666 - 10}{1.6297181} \\ \lg CD &= 1.7217509 & \lg CE &= 1.6297181 \\ CD &= 52.693 & CE &= 42.630 \end{aligned}$$

Obliczenie  $r$ :

$$\begin{aligned} \lg a &= 2.6020801 & \text{Kontrola:} & \\ \lg \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{9.8828666 - 10}{2.7192135} & \lg r &= 2.7192135 \\ \lg r &= 2.7192135 & \lg \sin(\mu + \varphi) &= 9.6964071 - 10 \\ & & \lg 2 &= 0.3010300 \end{aligned}$$

$$2r \sin(\mu + \varphi) = 520.776$$

$$\begin{aligned} \lg r &= 2.7192135 \\ \lg \sin(\nu + \varphi) &= 9.6227480 - 10 \\ \lg 2 &= 0.3010300 \\ & \frac{2.6429915}{} \end{aligned}$$

$$2r \sin(\nu + \varphi) = 439.533$$

$$r = 523.858 \text{ m,} \quad \text{zaś } b + CE = 520.780, \quad \text{zaś } c + CD = 439.533$$

Co do tyczenia tym promieniem ob. tekst do tabeli IV.

**Przykład 14.** Do § 17a. Rys. 44.

Zmierzono:  $AM = 126.42$ ,  $MA_1 = 887.53$ ,  $\gamma = 96^{\circ} 42' 10''$ ,  $\delta = 85^{\circ} 53' 20''$ .

Więc  $\beta = +29^{\circ} 35' 30''$ ,  $AM + MA_1 = d = 963.95$ ,  $180 - \gamma = 83^{\circ} 17' 50''$ .

Obliczenie  $p$  i  $q$ :

$$\begin{aligned} \lg AM &= 2.1018158 & \lg MA_1 &= 2.9230004 & p + q &= 960.931 \\ \lg \sin \gamma &= \frac{9.9970214 - 10}{1.25556} & \lg \sin \delta &= \frac{9.9988811 - 10}{1.835375} & \lg pq &= 5.0207187 \\ \lg p &= 2.0988372 & \lg q &= 2.9218815 & \lg \sqrt{pq} &= 2.5103594 \\ p &= 125.556 & q &= 835.375 \end{aligned}$$

Obliczenie promienia  $r_1$ :

$$\begin{aligned} \lg \sqrt{pq} &= 2.5103594 & \lg \text{nawiasu} &= 0.0065703 \\ \lg \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{8.3543892 - 10}{1.1657786} & \lg(p + q) &= \frac{2.9826923}{2.9892626} \\ \lg 2 &= 0.3010300 & \lg 2 &= 0.3010300 \\ \lg(p + q) &= \frac{2.9826923}{0.1830863 - 2} & \lg \cos^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{9.9997780 - 10}{2.6884546} \\ & & \lg r_1 &= 2.6884546 \\ & & r_1 &= 488.039 \end{aligned}$$

$$\text{liczba} = 0.0152436$$

$$\frac{1}{\phantom{0.0152436}}$$

$$\text{nawias} = 1.0152436$$

Obliczenie  $x$  i  $x_1$ :

$$\begin{array}{r}
 2r_1 = 976.078 \\
 p = 125.556 \\
 2r_1 - p = 850.522 \\
 \lg(2r_1 - p) = 2.9296855 \\
 \lg p = 2.0988372 \\
 \quad \quad \quad \underline{5.0285227} \\
 \lg x = 2.5142614 \\
 x = 326.784
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2r_1 = 976.078 \\
 q = 835.375 \\
 2r_1 - q = 140.703 \\
 \lg(2r_1 - q) = 2.1483034 \\
 \lg q = 2.9218815 \\
 \quad \quad \quad \underline{5.0701849} \\
 \lg x_1 = 2.5350925 \\
 x_1 = 342.841
 \end{array}$$

Obliczenie  $AN$  i  $A_1N_1$ :

$$\begin{array}{r}
 \lg AM = 2.1018158 \\
 \lg \cos \gamma = 9.0671411 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{1.1689569} \\
 AN = +14.756 \\
 \lg MA_1 = 2.9230004 \\
 \lg \cos \delta = 8.8554639 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{1.7784643} \\
 A_1N_1 = -60.043
 \end{array}$$

$$AP = x - AN = 312.028,$$

$$A_1P_1 = x_1 - A_1N_1 = 402.884.$$

Kontrola, jak w tekście podano. Tu przyprowadzi się jednakże inną prostszą kontrolę, równaniem uzyskanem z rzutu wieloboku  $PA A_1 P_1 O$  na kierunek promienia  $PO$ :

$$r_1(1 + \cos \beta) = d \cos(\gamma - 90^\circ) + A_1P_1 \sin \beta.$$

$$r_1(1 + \cos \beta) = 2r_1 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right):$$

$$\begin{array}{r}
 \lg 2 = 0.3010300 \\
 \lg r_1 = 2.6884546 \\
 \lg \cos^2 \frac{\beta}{2} = 9.9997780 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{2.9892626}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 d \cos(\gamma - 90^\circ): \\
 \lg d = 2.9840545 \\
 \lg \cos(\gamma - 90^\circ) = 9.9970214 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{2.9810759}
 \end{array}$$

$$\text{liczba} = 957.361$$

$$\begin{array}{r}
 A_1P_1 \sin \beta: \\
 \lg A_1P_1 = 2.6051800 \\
 \lg \sin \beta = 8.6553084 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{1.2604884}
 \end{array}$$

$$\text{liczba} = 18.218$$

$$r_1(1 + \cos \beta) = 975.580$$

$$957.361 + 18.218 = 975.579$$

**Przykład 15.** Do § 19a. Rys. 48a.

Dane:  $r = 600$ ,  $r_1 = 450$  m. Obrano stosowne punkty  $M$  i  $M_1$  i zmierzono:  $l = 1436.27$  m,  $\alpha = 41^\circ 36' 20''$ ,  $\alpha_1 = 33^\circ 24' 10''$ .

Obliczenie  $c$  i  $c_1$ :

$$\begin{array}{r}
 \lg r = 2.7781513 \\
 \lg \sin \alpha = 9.8221672 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{2.6003185}
 \end{array}$$

$$c = 398.399$$

$$\begin{array}{r}
 \lg r_1 = 2.6532125 \\
 \lg \sin \alpha_1 = 9.7407740 - 10 \\
 \quad \quad \quad \underline{2.3939865}
 \end{array}$$

$$c_1 = 247.734$$

Obliczenie  $p$  i  $p_1$ :

$$\begin{array}{r}
 \lg r = 2.7781513 \\
 \lg 2 = 0.3010300 \\
 \lg \sin \frac{\alpha}{2} = 9.5504146 - 10
 \end{array}$$

$$\lg \sin \frac{\alpha}{2} = 9.5504146 - 10$$

$$\quad \quad \quad \underline{2.1800105}$$

$$\begin{array}{r}
 \lg r_1 = 2.6532125 \\
 \lg 2 = 0.3010300 \\
 \lg \sin \frac{\alpha_1}{2} = 9.4584622 - 10
 \end{array}$$

$$\lg \sin \frac{\alpha_1}{2} = 9.4584622 - 10$$

$$\quad \quad \quad \underline{1.8711669}$$

$$l-c-c_1=790\cdot147, \quad r+r_1-p-p_1=824\cdot310, \quad p=151\cdot360, \quad p_1=74\cdot330$$

$$\lg(r+r_1-p-p_1)=2\cdot9160906 \quad \psi=46^\circ 12' 44\cdot1''$$

$$\lg(l-c-c_1)=2\cdot8977079 \quad \lg \cos \psi=9\cdot8400991-10$$

$$\lg \operatorname{tang} \psi=10\cdot0183827-10$$

$$\lg(r+r_1)=3\cdot0211893 \quad \psi+\varphi=66^\circ 51' 43\cdot1''$$

$$\lg \cos \psi=9\cdot8400991-10 \quad \psi=46 \ 12 \ 44\cdot1$$

$$\frac{2\cdot8612884}{\phantom{2\cdot8612884}} \quad \varphi=20^\circ 38' 59\cdot0''$$

$$\lg(l-c-c_1)=2\cdot8977079$$

$$\lg \sin(\psi+\varphi)=9\cdot9635805-10$$

$l_0$  z pierwszego wzoru:

$$\lg(r+r_1)=3\cdot0211893$$

$$\lg \sin \varphi=9\cdot5473486-10$$

$$\frac{2\cdot5685379}{\phantom{2\cdot5685379}}$$

$$\text{liczba}=370\cdot287$$

$$l-c-c_1=790\cdot147$$

$$\frac{419\cdot860}{\phantom{419\cdot860}}$$

$$\lg=2\cdot6231045$$

$$\lg \cos \varphi=9\cdot9711616-10$$

$$\lg l_0=2\cdot6519429$$

$$l_0=448\cdot686$$

$l_0$  z drugiego wzoru:

$$\lg 2=0\cdot3010300$$

$$\lg(r+r_1)=3\cdot0211893$$

$$\lg \sin \frac{\varphi}{2}=9\cdot2534085-10$$

$$\lg \sin \frac{\varphi}{2}=9\cdot2534085-10$$

$$\frac{1\cdot8290363}{\phantom{1\cdot8290363}}$$

$$\text{liczba}=67\cdot458$$

$$p+p_1=225\cdot690$$

$$\frac{158\cdot232}{\phantom{158\cdot232}}$$

$$\lg=2\cdot1992943$$

$$\lg \sin \varphi=9\cdot5473486-10$$

$$\lg l_0=2\cdot6519457$$

$$l_0=448\cdot689$$

### Przykład 16. Do § 26. Rys. 57.

Łuk koszowy o najmniejszej różnicy promieni.

Dane: punkty  $P_1$  i  $P_2$ . Zmierzone:  $t_1=686\ 24$ ,  $t_2=507\ 16$ ,  
kąt  $\beta=82^\circ 16' 30''$ . Zatem  $\lg \sin \beta=9\cdot9960406$ ,  $\lg \cos \beta=9\cdot1284593$ ,  
 $\cos \beta=0\cdot134419$ .

Wyznaczenie kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ :

$$\lg t_1=2\cdot8364760$$

$$\lg t_2=2\cdot7051450$$

$$\frac{0\cdot1313310}{\phantom{0\cdot1313310}}$$

$$t_1:t_2=1\cdot353103$$

$$\cos \beta=0\cdot134419$$

$$\frac{1\cdot218684}{\phantom{1\cdot218684}}$$

$$\lg=0\cdot0358911$$

$$\lg \sin \beta=9\cdot9960406-10$$

$$\lg \operatorname{cotg} \alpha_1=10\ 0898505-10$$

$$\alpha_1=39^\circ 6' 53\cdot7''$$

$$\alpha_2=58 \ 36 \ 36\cdot4$$

$$\alpha_1+\alpha_2=97 \ 43 \ 30\cdot1$$

$$\text{równe } 180^\circ-\beta$$

$$\lg t_2=2\cdot7051450$$

$$\lg t_1=2\cdot8364760$$

$$\frac{0\cdot8686690-1}{\phantom{0\cdot8686690-1}}$$

$$t_2:t_1=0\cdot739042$$

$$\cos \beta=0\cdot134419$$

$$\frac{0\cdot604623}{\phantom{0\cdot604623}}$$

$$\lg=0\cdot7814847-1$$

$$\lg \sin \beta=9\cdot9960406-10$$

$$\lg \operatorname{cotg} \alpha_2=9\cdot7854441-10$$

$$\frac{\alpha_1}{2}=19^\circ 33' 26\cdot8''$$

$$\frac{\alpha_2}{2}=29 \ 18 \ 18\cdot2$$

$$\frac{\beta}{2}=41 \ 8 \ 15\ 0$$

Obliczenie ilości  $d$ ,  $r_1$  i  $r_2$ :

$$\begin{array}{r} \lg t_2 = 2.7051450 \\ \lg \sin \beta = \frac{9.9960406 - 10}{2.7011856} \\ \lg \sin \alpha_1 = \frac{9.7999453 - 10}{\phantom{2.7011856}} \\ \lg 2d = 2.9012403 \\ 2d = 796.60 \\ d = 398.30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \lg d = 2.6002103 \\ \lg \sin \frac{\alpha_2}{2} = \frac{9.6897166 - 10}{2.2899269} \\ \lg \sin \frac{\alpha_1}{2} = 9.5247227 - 10 \\ \lg \cos \frac{\beta}{2} = \frac{9.8768717 - 10}{\phantom{2.2899269}} \\ \lg r_1 = 2.8883325 \\ r_1 = 773.2724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg d = 2.6002103 \\ \lg \sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{9.5247227 - 10}{2.1249330} \\ \lg \sin \frac{\alpha_2}{2} = 9.6897166 - 10 \\ \lg \cos \frac{\beta}{2} = \frac{9.8768717 - 10}{\phantom{2.1249330}} \\ \lg r_2 = 2.5583447 \\ r_2 = 361.6968 \end{array}$$

$S_2$  to promień o najmniejszej różnicy.

Kontrolę rachunku przeprowadzi się np. podług 2 równania w § 25

$$\begin{array}{r} \lg t_1 = 2.8364760 \\ \lg \cos \beta = \frac{9.1284593 - 10}{1.9649353} \\ t_1 \cos \beta = 92.243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \lg r_1 = 2.8883325 \\ \lg \sin \beta = \frac{9.9960406 - 10}{2.8843731} \\ r_1 \sin \beta = 766.254 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg (r_1 - r_2) = 2.6144496 \\ \lg \sin \alpha_2 = \frac{9.9312762 - 10}{2.5457258} \end{array}$$

$$(r_1 - r_2) \sin \alpha_2 = 351.334$$

Zatem  $766.254 + 92.243 - 351.339 = 507.158$ , zgodnie z wartością  $t_2$ :

**Przykład 17.** Do § 29 a. Rys. 60 i 61.

Dla ćwiczenia obierzemy przypadek o tyle odmienny od tego, który przedstawia rys. 60, że przyjmiemy  $r_2$  mniejsze niż  $r_1$  i  $r_3$ , a kąt  $\beta > 90^\circ$ . Wtedy wypada kąt  $P_1 O_1 O_3 > 180^\circ$ , zaś ilości  $\psi$  i  $O_1 Q$  wypadają ujemnie.

Uczący się powinien, dla lepszego zorientowania, zrobić szkic rysunku, podług ilości poniżej obliczonych.

Dane: punkty  $P_1$  i  $P_2$ , promienie  $r_1 = 600$ ,  $r_2 = 450$  i  $r_3 = 800$  m.  
Zmierzone:  $t_1 = 507.36$ ,  $t_2 = 561.47$ ,  $\beta = 97^\circ 58' 20''$ .

Obliczenie  $O_1 Q$ :

$$\begin{array}{r} \lg t_2 = 2.7493266 \\ \lg \cos \beta = \frac{9.1420545 - 10}{1.8913811} \\ t_2 \cos \beta = -77.8720 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \lg r_3 = 2.9030900 \\ \lg \sin \beta = \frac{9.9957823 - 10}{2.8988723} \\ r_3 \sin \beta = +792.2684 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 507.86 \\
 t_2 \cos \beta &= \frac{+77.8720}{585.2320} \\
 r_3 \sin \beta &= \frac{-792.2684}{207.0364} \\
 O_1 Q &= -207.0364
 \end{aligned}$$

Obliczenie  $O_3 Q$ :

$$\begin{aligned}
 \lg t_2 &= 2.7493266 & \lg r_3 &= 2.9030900 \\
 \lg \sin \beta &= \frac{9.9957823 - 10}{2.7451089} & \lg \cos \beta &= \frac{9.1420545 - 10}{2.0451445}
 \end{aligned}$$

$$t_2 \sin \beta = 556.0438 \qquad r_3 \cos \beta = -110.9544$$

$$\begin{aligned}
 t_2 \sin \beta &= 556.0438 \\
 r_3 \cos \beta &= \frac{+110.9544}{666.9982}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 600 \\
 O_3 Q &= +66.9982
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 \lg O_1 Q = 2.3160467 & \lg O_1 Q = 2.3160467 & s = 358.8035 \\
 \lg O_3 Q = 1.8260631 & \lg \sin \psi = 9.9783737 - 10 & s - d_1 = 208.8035 \\
 \lg \tan \psi = 10.4899836 - 10 & \lg c = 2.3376730 & s - d_2 = 8.8035 \\
 \psi = -72^\circ 4' 52'' & c = +217.6071 & s - c = 141.1965
 \end{array}$$

Ponieważ  $O_1 Q$  jest ujemne, więc tang  $\psi$  i kąt  $\psi$  są ujemne; jednakże ujemnej wartości tang  $\psi$  odpowiada jeszcze druga wartość:  $\psi = +107^\circ 55' 54.8''$  i tylko ta wartość jest dla naszego przykładu przydatna.

Obliczenie kąta  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned}
 \lg (s - d_1) &= 2.3197377 \\
 \lg (s - d_2) &= \frac{0.9446554}{3.2643931} \\
 \lg s &= 2.5548566 \\
 \lg (s - c) &= \frac{2.1498239}{0.5597126 - 2} \\
 \text{połowa} &= 0.2798563 - 1
 \end{aligned}$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_2}{2} = 9.2798563 - 10$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = 10^\circ 47' 4.9''$$

$$\alpha_2 = 21 \quad 34 \quad 9.8$$

$$\frac{\alpha_1 + \psi}{2} = 71 \quad 52 \quad 32.1$$

$$\alpha_1 + \psi = 143 \quad 45 \quad 4.2$$

$$\psi = 107 \quad 55 \quad 54.8$$

$$\alpha_1 = 35 \quad 49 \quad 9.4$$

$$\alpha_3 = 24 \quad 38 \quad 20.8$$

Obliczenie kąta  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned}
 \lg (s - d_1) &= 2.3197377 \\
 \lg (s - c) &= \frac{2.1498239}{4.4695616} \\
 \lg s &= 2.5548566 \\
 \lg (s - d_2) &= \frac{0.9446554}{0.9700496} \\
 \text{połowa} &= 0.4850248
 \end{aligned}$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_1 + \psi}{2} = 10.4850248 - 10$$





Obliczenie stycznych:

$$\begin{aligned} \lg r_1 &= 2.7781513 & \lg r_2 &= 2.6532125 \\ \lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} &= \frac{9.5094404 - 10}{2.2875917} & \lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} &= \frac{9.2798563 - 10}{1.9330688} \\ t_3 &= 193.9062 & t_4 &= 85.7174 \\ \lg r_3 &= 2.9030900 \\ \lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_3}{2} &= \frac{9.3392383 - 10}{2.2423283} \\ t_5 &= 174.7142 \end{aligned}$$

$$t_1 - t_3 = 313.4538, \quad t_2 - t_5 = 386.7558, \quad t_3 + t_4 = 279.6236, \quad t_4 + t_5 = 260.4316, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 57^\circ 23' 19.2'', \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 46^\circ 12' 30.6''.$$

Kontrola:

$$\begin{aligned} \lg(t_1 - t_3) &= 2.4961735 & \lg(t_3 + t_4) &= 2.4465738 \\ \lg \sin \beta &= \frac{9.9957823 - 10}{2.4919558} & \lg \sin(\alpha_2 + \alpha_3) &= \frac{9.8584547 - 10}{2.3050285} \\ \lg(t_4 + t_5) &= 2.4156937 \\ \lg \sin \alpha_3 &= \frac{9.6200332 - 10}{2.0357269} \end{aligned}$$

$$(t_1 - t_3) \sin \beta = 310.424 = [(t_3 + t_4) \sin(\alpha_2 + \alpha_3) = \\ = 201.850] + [(t_4 + t_5) \sin \alpha_3 = 108.574]$$

$$\begin{aligned} \lg(t_2 - t_5) &= 2.5874369 & \lg(t_3 + t_4) &= 2.4465738 \\ \lg \sin \beta &= \frac{9.9957823 - 10}{2.5832192} & \lg \sin \alpha_1 &= \frac{9.7673260 - 10}{2.2138998} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg(t_4 + t_5) &= 2.4156937 \\ \lg \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= \frac{9.9254905 - 10}{2.3411842} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t_2 - t_5) \sin \beta &= 383.018 = [(t_3 + t_4) \sin \alpha_1 = \\ = 163.644] + [(t_4 + t_5) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 219.374] \\ 163.644 + 219.374 &= 383.018 \end{aligned}$$

Przykład 18. Do § 30. Rys. 62

Dane łuki o promieniach  $r_1 = 550$  i  $r_2 = 500$  m, między nimi prosta  $l = 42.0$  m, zaś  $\alpha_1 = 24^\circ 16' 10''$ ,  $\alpha_2 = 15^\circ 42' 20''$ . Więc  $c = r_1 - r_2 = 50$  m. Chcemy się naprzód przekonać jak wielką wartość należy obrać dla  $r$ , aby kąty  $\varphi$  nie były większe niż kąty  $\alpha$ . W tym celu obliczymy naprzód  $\min d_1$  i  $\min d_2$ , podług wzorów podanych w odnośniku.

Przed tem wyznaczmy się  $m = \sqrt{l^2 + c^2} = 65.2993$ ; następnie  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \lg l &= 1.6232493 & \psi &= 40^\circ 1.49.0'' \\ \lg c &= 1.6989700 & \psi + \alpha_1 &= 64 17 59.0 \\ \lg \operatorname{tang} \psi &= 9.9242793 - 10 & \psi - \alpha_2 &= 22 19 29.0 \end{aligned}$$

Obliczenie  $\min d_1$ :

$$\begin{aligned} \lg m &= 1.8149086 \\ \lg \cos(\psi + \alpha_1) &= \frac{9.6371528}{1.4520614} \end{aligned}$$

Obliczenie  $\min d_2$ :

$$\begin{aligned} \lg m &= 1.8149086 \\ \lg \cos(\psi - \alpha_2) &= \frac{9.9596259}{1.7745345} \end{aligned}$$

$$m \cos(\psi + \alpha_1) = 28\,3179$$

$$c = 50$$

$$\frac{21\cdot6821}{\phantom{000000}}$$

$$\text{mianown.} = 43\cdot9642$$

$$\lg l^2 = 3\cdot2464986$$

$$\lg \text{mian.} = 1\cdot6371313$$

$$\lg \min d_1 = 1\cdot6093673$$

$$\min d_1 = 40\cdot679$$

$$\min r = r_1 + d_1 = 590\cdot68$$

$$m \cos(\psi - \alpha_2) = 59\cdot5024$$

$$c = 50$$

$$\frac{9\cdot5024}{\phantom{000000}}$$

$$\text{mianown.} = 19\cdot0048$$

$$\lg l^2 = 3\cdot2464986$$

$$\lg \text{mian.} = 1\cdot2788633$$

$$\lg \min d_2 = 1\cdot9676353$$

$$\min d_2 = 92\cdot819$$

$$\min r = r_2 + d_2 = 592\cdot82$$

Obierze się więc za  $r$  najbliższą wyższą okrągłą cyfrę  $r = 600$ .  
Zatem  $d_1 = 50$ ,  $d_2 = 100$ ,  $s = 107\cdot6497$ ,  $s - d_1 = 57\cdot6497$ ,  $s - d_2 = 7\cdot6497$ ,  
 $s - m = 42\,3504$ .

Obliczenie kąta  $\gamma$ :

$$\lg(s - d_2) = 0\cdot8836444$$

$$\lg(s - m) = 1\cdot6268575$$

$$\frac{2\cdot5105019}{\phantom{000000}}$$

$$\lg m = 1\cdot8149086$$

$$\lg d_2 = 2$$

$$\frac{0\cdot6955933 - 2}{\phantom{000000}}$$

$$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = 9\cdot3477967 - 10$$

$$\lg(s - d_1) = 1\cdot7607971$$

$$\lg(s - m) = 1\cdot6268575$$

$$\frac{3\cdot3876546}{\phantom{000000}}$$

$$\lg m = 1\cdot8149086$$

$$\lg d_1 = 1\cdot6989700$$

$$\frac{1\cdot8737760 - 2}{\phantom{000000}}$$

$$\lg \sin \frac{\delta}{2} = 9\cdot9368880 - 10$$

$$\frac{\gamma}{2} = 12^\circ 52' 11\cdot9''$$

$$\frac{\delta}{2} = 59\ 51\ 13\cdot0$$

$$\gamma = 25\ 44\ 23\cdot8$$

$$\delta = 119\ 42\ 26\cdot0$$

$$\varphi_1 = 20\ 15\ 45\cdot0$$

$$\varphi_2 = 14\ 17\ 26\cdot2$$

Dla kontroli obliczy się kąt  $\varepsilon$ :

$$\lg(s - d_1) = 1\cdot7607971$$

$$\lg(s - d_2) = 0\cdot8836444$$

$$\frac{2\cdot6444415}{\phantom{000000}}$$

$$\lg d_1 d_2 = 3\cdot6989700$$

$$\frac{0\cdot9454715 - 2}{\phantom{000000}}$$

$$\lg \sin \frac{\varepsilon}{2} = 9\cdot4727358 - 10$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 17^\circ 16' 35\cdot7''$$

$$\varepsilon = 34\ 33\ 11\cdot4$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 34\ 33\ 11\cdot2 \quad \left. \vphantom{\frac{\varepsilon}{2}} \right\} \text{zgodnie.}$$

Punkty  $P$  i  $P'$  wyznaczy się na polu, jeżeli się wytyczy od  $P_1$  łuk o promieniu  $r_1$ , a kącie środkowym  $\alpha_1 - \varphi_1 = 4^\circ 0' 25''$ , a od  $P_2$  łuk o promieniu  $r_2$ , a kącie środkowym  $\alpha_2 - \varphi_2 = 1^\circ 24' 54''$ .

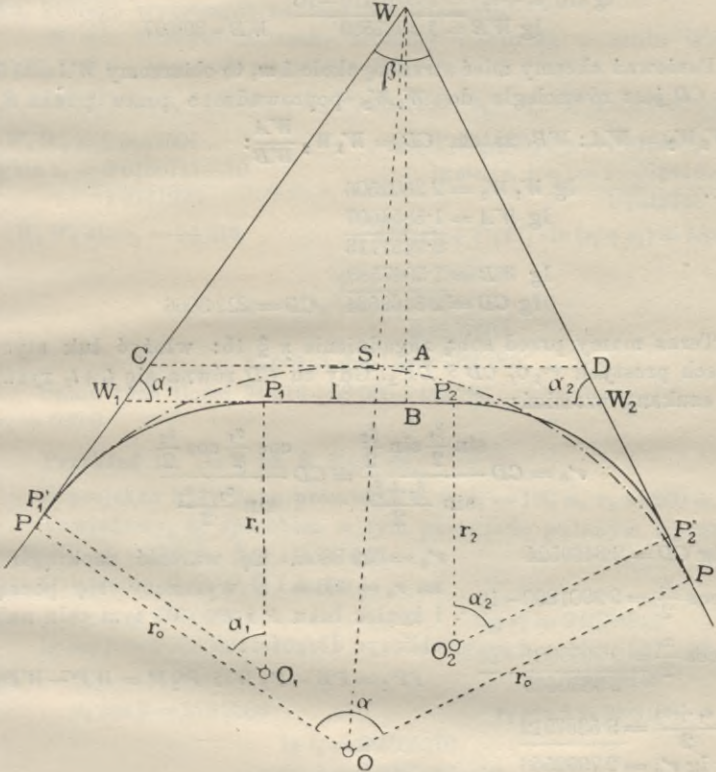
Łuk  $P'P_2$  wypadł tak krótki, że dla niego nie można zastosować krzywej przejściowej (ob. § 48); wypada zatem przyjąć większy promień  $r$ . Jednakże przeto zwiększy się różnica promieni, co powoduje inną trudność w przeprowadzeniu krzywej przejściowej w punktach  $P$  i  $P'$ .

Wszelkie trudności ominie się, a zarazem uzyska się ładniejszą trasę, jeżeli linię między  $P_1$  i  $P_2$  zastąpi się jednym łukiem, włożonym

w kąt utworzony przez styczne w punktach  $P'_1$  i  $P'_2$ , jak to na rysunku obok uwidoczniiono. Kąt wierzchołkowy utworzony przez te dwie styczne jest  $\beta = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 = 140^\circ 1' 30''$  \*). Przytem chcemy rozwiązać inne zagadnienie, mianowicie dobrać promień tego łuku tak, aby odstęp  $AB$  łuku od prostej  $P_1P_2$  nie przekroczył pewnej z góry ustalonej granicy, np. około 1 m.

W tym celu wyznaczy się naprzód długość:

$$W_1 W_2 = r_1 \tan \frac{\alpha_1}{2} + l + r_2 \tan \frac{\alpha_2}{2} :$$



Rys. 105.

$$\lg r_1 = 2.7408627$$

$$\lg r_2 = 2.6989700$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{9.3324695}{2.0728322}$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_2}{2} = \frac{9.1396020}{1.8386020}$$

$$r_1 \tan \frac{\alpha_1}{2} = 118.258$$

$$r_2 \tan \frac{\alpha_2}{2} = 68.961$$

$$W_1 W_2 = 118.258 + 42.0 + 68.961 = 229.219$$

\*) Na rysunku ten kąt z umysłu przyjęto mniejszy.

Następnie gdy  $W_1 B = WB \cotg \alpha_1$ ,  $B W_2 = WB \cotg \alpha_2$ , to:

$$W_1 B + B W_2 = W_1 W_2 = WB (\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2), \text{ a stąd:}$$

$$WB = \frac{W_1 W_2}{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2} = W_1 W_2 \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \text{ zatem:}$$

$$\lg W_1 W_2 = 2.3602506$$

$$\lg \sin \alpha_1 = 9.6138717 - 10$$

$$\lg \sin \alpha_2 = 9.4324782 - 10$$

$$\frac{1.4066005}{\phantom{lg}}$$

$$\lg \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = 9.8078416 - 10$$

$$\lg WB = 1.5987589$$

$$WB = 39.697$$

Ponieważ chcemy mieć strzałkę około 1 m, to obierzemy  $WA = 38.5 \text{ m}$ . Jeżeli  $CD$  jest równoległe do  $W_1 W_2$  poprowadzone przez punkt  $S$ , to

$$CD : W_1 W_2 = WA : WB, \text{ zatem } CD = W_1 W_2 \frac{WA}{WB}:$$

$$\lg W_1 W_2 = 2.3602506$$

$$\lg WA = 1.5854607$$

$$\frac{3.9457113}{\phantom{lg}}$$

$$\lg WB = 1.5987589$$

$$\lg CD = 2.3469524$$

$$CD = 222.3066$$

Teraz mamy przed sobą zagadnienie z § 15: włożyć łuk styczny do trzech prostych  $P_1 C$ ,  $CD$  i  $DP_2$ . Gdy tu  $CD$  równa się  $t_1 + t_2$  rysunku 39, to szukany promień:

$$r'_0 = CD \frac{\sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2}}{\sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}} = CD \frac{\cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}$$

$$\lg CD = 2.3469524$$

$$\lg \cos \frac{\alpha_1}{2} = 9.9901860 - 10$$

$$\lg \cos \frac{\alpha_2}{2} = 9.9959081 - 10$$

$$\frac{2.3330465}{\phantom{lg}}$$

$$\lg \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 9.5337912$$

$$\lg r'_0 = 2.7992553$$

$r'_0 = 629.88 \text{ m}$ . Tę wartość zaokrągli się na  $r_0 = 630 \text{ m}$  i wyznaczy się początek i koniec łuku  $P$  i  $P'$ . W tym celu należy obliczyć długości:

$$PP'_1 = PW - P_1 W \text{ i } P_2 P' = WP' - WP'_2.$$

$$WP'_1 \text{ równa się } W W_1 + W_1 P'_1 = W_1 W_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} + r_1 \tan g \frac{\alpha_1}{2}, \text{ zaś:}$$

$$WP'_2 = W_1 W_2 \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} + r_2 \tan g \frac{\alpha_2}{2}:$$

$$\lg W_1 W_2 = 2.3602506$$

$$\lg \sin \alpha_2 = 9.4324782 - 10$$

$$\frac{1.7927288}{\phantom{lg}}$$

$$\lg \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = 9.8078416 - 10$$

$$\frac{1.9848872}{\phantom{lg}}$$

$$\lg W_1 W_2 = 2.3602506$$

$$\lg \sin \alpha_1 = 9.6138717 - 10$$

$$\frac{1.9741223}{\phantom{lg}}$$

$$\lg \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = 9.8078416 - 10$$

$$\frac{2.1662807}{\phantom{lg}}$$

$$W W_1 = 96.580$$

$$W W_2 = 146.650$$

Styczne  $W_1P'_1$  i  $W_2P'_2$  są już powyżej obliczone; zatem:

$$WP_1 = 96\cdot580 + 118\cdot258 = 214\cdot838, \quad WP'_2 = 146\cdot650 + 68\cdot961 = 215\cdot611$$

$$PW = WP' = r_0 \operatorname{tang} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \text{ gdyż kąt } \alpha \text{ przy } O \text{ równa się } \alpha_1 + \alpha_2:$$

$$\begin{aligned} \lg r_0 &= 2\cdot7993405 & PW &= 229\cdot146, \text{ zatem:} \\ \lg \operatorname{tang} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} &= 9\cdot5607710 & PP'_1 &= 229\cdot146 - 214\cdot838 = 14\cdot308, \\ \lg PW &= 2\cdot8601115 & P'_2P' &= 229\cdot146 - 215\cdot611 = 13\cdot535 \end{aligned}$$

Przez odmierzanie tych długości otrzyma się początek i koniec łuku, którego wytyczenie nastąpi jak wiadomo.

W celu kontroli obliczeń, urobimy równanie z rzutu wieloboku  $PW_1W_2P'O$  na kierunek promienia  $PO$ :

$$PO = W_1W_2 \sin \alpha_1 + (W_2P'_2 + P'_2P') \sin (180 - \alpha_1 - \alpha_2) - P'O \cos (180 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} \lg W_1W_2 &= 2\cdot8602506 & \lg (W_2P'_2 + P'_2P') &= 1\cdot9164329 \\ \lg \sin \alpha_1 &= 9\cdot6138717 - 10 & \lg \sin (\alpha_1 + \alpha_2) &= 9\cdot8078416 - 10 \\ & \frac{1\cdot9741223}{1\cdot9741223} & & \frac{1\cdot7242745}{1\cdot7242745} \end{aligned}$$

$$W_1W_2 \sin \alpha_1 = 94\cdot216 \quad (W_2P'_2 + P'_2P') \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = 53\cdot000$$

$$\begin{aligned} \lg r_0 &= 2\cdot7993405 \\ \lg \cos (\alpha_1 + \alpha_2) &= 9\cdot8844129 - 10 \\ & \frac{2\cdot6837534}{2\cdot6837534} \end{aligned}$$

$$r_0 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) = -482\cdot785$$

Suma tych ilości  $94\cdot216 + 53\cdot000 + 482\cdot785 = 630\cdot001$  zgodnie z  $r_0 = 630\cdot0$ .

**Przykład 19.** Do § 35, 3. Rys. 68.

Z projektu były dane promienie  $r_1 = r_3 = 120\text{ m}$ ,  $r_2 = 300\text{ m}$ .

Powiedzmy w tym sposobem w tym paragrafie podanym wyznaczono:

$$t_1 = 283\cdot7, \quad t_2 = 282\cdot2, \quad \beta = 14^\circ 26' 15''.$$

Obliczenie  $O_1Q$ ,  $O_3Q$  i kąta  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \lg t_2 &= 2\cdot4505570 & \lg r_3 &= 2\cdot0791812 \\ \lg \cos \beta &= 9\cdot9860639 - 10 & \lg \sin \beta &= 9\cdot3967637 - 10 \\ & \frac{2\cdot4366209}{2\cdot4366209} & & \frac{1\cdot4759449}{1\cdot4759449} \\ t_2 \cos \beta &= 273\cdot2883 & r_3 \sin \beta &= 29\cdot9188 \\ \lg t_2 &= 2\cdot4505570 \\ \lg \sin \beta &= 9\cdot3967637 - 10 \\ & \frac{1\cdot8473207}{1\cdot8473207} \\ t_2 \sin \beta &= 70\cdot3592 \\ \lg r_3 &= 2\cdot0791812 & t_1 &= 283\cdot7 & t_2 \sin \beta &= 70\cdot3592 \\ \lg \cos \beta &= 9\cdot9860639 - 10 & r_3 \sin \beta &= 29\cdot9188 & r_3 \cos \beta &= 116\cdot2104 \\ & \frac{2\cdot0652451}{2\cdot0652451} & & \frac{313\cdot6188}{313\cdot6188} & & \frac{186\cdot5696}{186\cdot5696} \\ r_3 \cos \beta &= 116\cdot2104 & t_2 \cos \beta &= 273\cdot2883 & r_1 &= 120\cdot \\ & & O_1Q &= 40\cdot3305 & O_3Q &= 66\cdot5696 \\ \lg O_1Q &= 1\cdot6056336 & \psi &= 31^\circ 12' 32\cdot9'' \\ \lg O_3Q &= 1\cdot8232760 & \lg \sin \psi &= 9\cdot7144668 - 10 \\ \lg \operatorname{tang} \psi &= 9\cdot7823576 - 10 \end{aligned}$$

$$\lg O_1 Q = 1.6056336$$

$$\lg \sin \psi = \frac{9.7144668 - 10}{1.8911668}$$

$$c = 77.8335$$

$$d_1 = 300 - 120 = 180 = d_2$$

$$s = \frac{180 + 180 + 77.8335}{2} = 218.9168; \quad s - d_1 = s - d_2 = 38.9168, \quad s - c = 141.0833$$

Obliczenie kątów  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$\lg(s - d_1) = 1.5901372$$

$$\lg(s - d_1) = 1.5901372$$

$$\lg(s - d_2) = \frac{1.5901372}{3.1802744}$$

$$\lg(s - c) = 2.1494756$$

$$\lg s = 2.3402791$$

$$\lg s = 2.3402791$$

$$\lg(s - c) = \frac{2.1494756}{8.6905197 - 10}$$

$$\lg(s - d_2) = \frac{1.5901372}{9.8091965 - 10}$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_2}{2} = 9.3452599 - 10$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_1 - \psi}{2} = 9.9045988 - 10$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = 12^\circ 29' 10.3''$$

$$\alpha_2 = 24 \ 58 \ 20.6$$

$$\frac{\alpha_1 - \psi}{2} = 38 \ 45 \ 24.9$$

$$\frac{\psi}{2} = 15 \ 36 \ 16.4$$

$$\frac{\alpha_1}{2} = 54 \ 21 \ 41.3$$

$$\alpha_1 = 108 \ 43 \ 22.6$$

$$\alpha_3 = 360 + \beta - \alpha_1 - \alpha_2 = 240^\circ 44' 31.8'', \quad \frac{\alpha_3}{2} = 120^\circ 22' 15.9''$$

W celu kontroli rachunku obliczymy np. drugie równanie kontrolne z § 29:  $(t_2 - t_5) \sin \beta = (t_3 + t_4) \sin \alpha_1 + (t_4 + t_5) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

Naprzód wyznaczmy:  $t_3 = r_1 \tan \frac{\alpha_1}{2}$ ,  $t_4 = r_2 \tan \frac{\alpha_2}{2}$ ,  $t_5 = r_3 \tan \frac{\alpha_3}{2}$ :

$$\lg r_1 = 2.0791812$$

$$\lg r_2 = 2.4771213$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{0.1445127}{2.2236939}$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_2}{2} = \frac{9.3452599 - 10}{1.8223812}$$

$$t_3 = +167.3763$$

$$t_4 = +66.4326$$

$$\lg r_3 = 2.0791812$$

$$\lg \tan \frac{\alpha_3}{2} = \frac{0.2320889}{2.3112701}$$

$$t_5 = -204.7718$$

$$t_2 = 282.2$$

$$t_3 = 167.3763$$

$$t_4 = 66.4326$$

$$\alpha_1 = 108^\circ 43' 22.6''$$

$$t_5 = \frac{-204.7718}{+486.9718}$$

$$t_4 = \frac{66.4326}{+233.8089}$$

$$t_5 = \frac{-204.7718}{-138.3392}$$

$$\alpha_2 = \frac{24 \ 58 \ 20.6}{\alpha_1 + \alpha_2 = 133 \ 41 \ 43.2}$$

$$\begin{array}{r}
 \lg(t_2 - t_5) = 2.6875038 \\
 \lg \sin \beta = \frac{9.8967637 - 10}{2.0842675} \\
 (t_2 - t_5) \sin \beta = +121.4136 \\
 \\
 \lg(t_3 + t_4) = 2.8688611 \\
 \lg \sin \alpha_1 = \frac{9.9763875 - 10}{2.8452486} \\
 (t_3 + t_4) \sin \alpha_1 = +221.4362 \\
 \\
 \lg(t_4 + t_5) = 2.1409453 \\
 \lg \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{9.8591524 - 10}{2.0000977} \\
 (t_4 + t_5) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = -100.0225 \\
 \\
 \text{suma } 221.4362 - 100.0225 = 121.4137 \\
 \text{zgodnie z lewą stroną równania.}
 \end{array}$$

Przykład 20. Do § 36. Rys. 69.

Na podstawie danych z 16 przykładu zastąpimy łuk koszowy parabolą drugiego rzędu. Zatem podług rys. 69 dane są punkty  $P$  i  $P_1$ , a zmierzono  $t = 686.24$ ,  $t_1 = 507.16$ ,  $\beta = 82^\circ 16' 30''$ .

Naprzód wyznaczmy długości  $d$  i  $h$ .

$$\begin{array}{r}
 t^2 = 470925.838 \\
 t_1^2 = 257211.266 \\
 t^2 + t_1^2 = 728136.604 \\
 \\
 \lg t = 2.8364760 \\
 \lg t_1 = 2.7051450 \\
 \lg 2 = 0.3010300 \\
 \lg \cos \beta = \frac{9.1284593 - 10}{4.9711103} \\
 2t t_1 \cos \beta = 93564.32 \\
 \\
 t^2 + t_1^2 = 728136.60 \\
 2t t_1 \cos \beta = 93564.32 \\
 16h^2 = 821700.92 \\
 \\
 \lg 4d^2 = 5.8024811 \\
 \lg 2d = 2.9012405 \\
 2d = 796.600 \\
 \\
 \lg 16h^2 = 5.9147138 \\
 \lg 4h = 2.9573569 \\
 4h = 906.477 \\
 h = 226.619 \\
 \\
 (\text{zgodnie z prz. 16})
 \end{array}$$

Obliczenie kątów  $\varphi$  i  $\psi$ :

$$\begin{array}{r}
 \lg t = 2.8364760 \\
 \lg t_1 = 2.7051450 \\
 \lg \sin \beta = \frac{9.9960406 - 10}{5.5376616} \\
 \lg d = 2.6002103 \\
 \lg 4h = 2.9573569 \\
 \lg \sin \varphi = 9.9800944 \\
 \\
 \lg t_1 = 2.7051450 \\
 \lg \sin \beta = \frac{9.9960406 - 10}{2.7011856} \\
 \lg 4h = 2.9573569 \\
 \lg \sin \psi = 9.7438287 - 10 \\
 \psi = 33^\circ 40' 11.6''
 \end{array}$$

$\varphi = 72^\circ 47' 5.5''$ , lub  $\varphi = 107^\circ 12' 54.5''$ . Podług powyższych danych jest  $\varphi > 90^\circ$ , zatem ta druga wartość ma tu zastosowanie.

Kąt  $WPC$  równa się kątowi  $\alpha_1$  w przykl. 16; otóż jest kąt  $WPC = 180 - \varphi - \psi = 39^\circ 6' 53.9''$ , zgodnie z  $\alpha_1$  z przykładu 16.

Obliczenie promieni krzywizny:

$$\begin{array}{r}
 \lg t t_1 \sin \beta = 5.5376616 \\
 \lg t^2 t_1^2 \sin^2 \beta = 11.0753232 \\
 \lg 16h^2 = 5.9147137 \\
 \lg 2h = 2.6563269 \\
 \lg \rho_0 = 2.5042826 \\
 \rho_0 = 319.362 \\
 \\
 \lg d = 2.6002103 \\
 \lg d^3 = 7.8006309 \\
 \lg 2 = 0.3010300 \\
 \lg t t_1 \sin \beta = 5.5376616 \\
 \lg \rho_s = 2.5639993 \\
 \rho_s = 366.437
 \end{array}$$

$\lg t^2 = 5.6729520$ $\lg 2 = 0.3010300$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $5.9739820$ $\lg t_1 = 2.7051450$ $\lg \sin \beta = 9.9960406 - 10$ $\lg \rho = 3.2727964$ $\rho = 1874.116$	$\lg t_1^2 = 5.4102900$ $\lg 2 = 0.3010300$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $5.7113200$ $\lg t = 2.8364760$ $\lg \sin \beta = 9.9960406 - 10$ $\lg \rho_1 = 2.8788034$ $\rho_1 = 756.490$
--	---

**Przykład 21.** Do §§ 43, 44 i 45. Rys. 83 i 84.

Do tych paragrafów rachowano przykład podany przy tabeli VI, za pomocą tabel. Tu podamy inny przykład rachowany logarytmami.

Dany promień łuku  $r = 500 \text{ m}$  dla głównej kolei żelaznej, dla której  $C = 12000$ . Zmierzone  $\beta = 137^\circ 48' 40''$ , zatem  $\alpha = 42^\circ 11' 20''$ ,  $\frac{\alpha}{2} = 21^\circ 5' 40''$ .

Z tabeli VI wyjmiemy dla  $r = 500$ :  $l = 24.0$ ,  $e = 0.192$ , zatem  $v = \frac{e}{4} = 0.048$ . Następnie  $a = 12.0 = \frac{1}{2}l$ ,  $\varphi_0 = 1^\circ 22' 29''$ ,  $S = 24.0$ .

Wyznaczenie położenia punktów  $C$  i  $S$ :

$\lg(r+v) = 2.6990117$	$\lg(r+v) = 2.6990117$	535.964
$\lg \tan \frac{\alpha}{2} = 9.5863132 - 10$	$\lg \cos \frac{\alpha}{2} = 9.9698762 - 10$	$r = 500$
$\lg(t+t') = 2.2853249$	$\frac{2.7291355}{}$	$WS = 35.964$
$t+t' = 192.897$	$(r+v) \sec \frac{\alpha}{2} = 535.964$	

Kontrola punktu  $S$ :

$\lg r = 2.6989700$	$\lg v = 0.6812412 - 2$	93.096
$\lg \tan \frac{\alpha}{4} = 9.2699603 - 10$	$\lg \tan \frac{\alpha}{2} = 9.5863132 - 10$	0.124
$\frac{1.9689303}{}$	$\frac{0.0949280 - 1}{}$	$CD = 92.972$
$r \tan \frac{\alpha}{4} = 93.096$	$v \tan \frac{\alpha}{2} = 0.124 = t'$	

$$\lg v = 0.6812412 - 2$$

$$r \tan \frac{\alpha}{4} = 93.096$$

$$\lg \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{9.5561895 - 10}{0.1250517 - 1}$$

$$v : \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{0.133}{}$$

$$DS = 93.229$$

Kontrola na miejscu:  $ES = r \tan \frac{\alpha}{4} = 93.096$ ,  $DSD'$  jedna prosta.

Dla ustalenia stycznej  $BU$  (rys. 83a) obliczy się  $US$ :

$\frac{\alpha}{2} - \varphi_0 = 19^\circ 43' 11''$	$\lg 2r = 3$
$\frac{\alpha - 2\varphi_0}{4} = 9^\circ 51' 35.5''$	$\lg \sin^2 \left( \frac{\alpha - 2\varphi_0}{4} \right) = \frac{8.4672048 - 10}{1.4672048}$
$\lg \sin \frac{\alpha - 2\varphi_0}{4} = 9.2336024 - 10$	$\lg \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \varphi_0 \right) = \frac{9.9737531 - 10}{}$
	$\lg US = 1.4934517$
	$US = 31.150$



**Przykład 22.** Do § 47b. Rys. 87.

Łuki odwrotne kolei głównej, dla której  $C = 12000$ . Dane:  $r_1 = 600$ ,  $r_2 = 400$ . Zatem podług tabeli VI jest  $l_1 = 20$ ,  $e_1 = 0.111$ ,  $v_1 = 0.028$ ,  $l_2 = 30$ ,  $e_2 = 0.375$ ,  $v_2 = 0.094$ . Gdy  $l_0 = 10$ , to musi być  $p \geq 35$ . Obierzemy  $p = 40$  m.  $r_1 + v_1 = 600.028$ ,  $r_2 + v_2 = 400.094$ .

$\lg(r_1 + r_2) = 3$ $\lg p = \frac{1.6020600}{\lg \operatorname{tang} \varphi = \frac{11.3979400 - 10}{\varphi = 87^\circ 42' 33.8''}}$	$\lg(r_1 + r_2 + v_1 + v_2) = 3.0000528$ $\lg \cos \varphi = \frac{8.6017130 - 10}{1.6017658}$ $\lg p = 1.6020600$ $\lg \sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{9.9997058 - 10}{\varphi + \varepsilon = 87^\circ 53' 28.8''}$ $\varphi = 87^\circ 42' 33.8''$ $\varepsilon = 0^\circ 10' 55.0''$
$\lg(r_1 + v_1) = 2.7781715$ $\lg \cos \varepsilon = \frac{9.9999978 - 10}{2.7781737}$ $(r_1 + v_1) \cos \varepsilon = 600.031$ $r_1 = 600$ $P_1 B_1 = 0.081$ $\lg(r_1 + v_1) = 2.7781715$ $\lg \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{7.5018050 - 10}{\lg B_1 C_1 = 0.2799765}$ $B_1 C_1 = 1.9054$ $\lg p = 1.6020600$ $\lg \cos \varepsilon = \frac{9.9999978 - 10}{1.6020622}$	$\lg(r_2 + v_2) = 2.6021621$ $\lg \cos \varepsilon = \frac{9.9999978 - 10}{2.6021643}$ $(r_2 + v_2) \cos \varepsilon = 400.096$ $r_2 = 400$ $P_2 B_2 = 0.096$ $\lg(r_2 + v_2) = 2.6021621$ $\lg \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{7.5018050 - 10}{\lg B_2 C_2 = 0.1039671}$ $B_2 C_2 = 1.2705$ $p \cos \varepsilon = 40.0002$ $B_1 C_1 = 1.9054$ $B_2 C_2 = 1.2705$ $C_1 C_2 = 36.8243$

Obliczenie równania kontrolnego:

$\lg(r_1 + r_2) = 3$ $\lg \sin \varepsilon = \frac{7.5018028 - 10}{0.5018028}$ $(r_1 + r_2) \sin \varepsilon = 3.1754$	$\lg C_1 C_2 = 1.5661345$ $\lg \cos \varepsilon = \frac{9.9999978 - 10}{1.5661323}$ $C_1 C_2 \cos \varepsilon = 36.8241$
--	--

Suma równa 39.9995, zgodna z  $p = 40.0$ .

Podług przybliżonego wzoru  $\sin \varepsilon = \frac{v_1 + v_2}{p}$  obliczone  $\varepsilon$  wynosi  $0^\circ 10' 29.7''$ , zaś  $B_1 C_1 = 1.832$ ,  $B_2 C_2 = 1.221$ ,  $C_1 C_2 = 36.947$ . Więc różnice są znaczne, bo prosta  $p$  jest krótka.

**Przykład 23.** Do § 48. Rys. 88 i 89.

Dane:  $r = 400$  m,  $C = 12000$ . Zmierzone:  $\beta = 173^\circ 57' 40''$ , zatem  $\alpha = 6^\circ 2' 20''$ ,  $\frac{\alpha}{2} = 3^\circ 1' 10''$ . Podług tabelki § 48 jest kąt  $\alpha$  dostatecznie wielki dla pomieszczenia obustronnych krzywych przejściowych, jednakże stosownie do „uwagi“ i dodatku do tabeli VI jest ten kąt za mały, dla pomieszczenia łuku o długości 20 m. Z wzoru podanego w „uwadze“

otrzyma się dla obliczenia  $c$  wzór:  $c = 2r \tan \frac{\alpha}{2} - l$ , w którym podług tabeli VI wynosi  $l = 30 \text{ m}$ .

$$\begin{array}{r} \lg 2r = 2.9030900 \\ \lg \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{8.7222067 - 10}{1.6252967} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2r \tan \frac{\alpha}{2} = 42.2 \\ l = 30.0 \\ c = 12.2 \text{ m} \end{array}$$

Zwiększenie tej wartości  $c$  na  $20 \text{ m}$  nastąpi, gdy się stosownie zwiększy promień  $r$ , lub zmniejszy  $C$ . W celu wyznaczenia zmienionego promienia  $r_1$  zastosuje się wzór podany w „uwadze“:  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{c+l}{2r}$ , z którego, gdy za  $l$  wstawimy  $C$ ;  $r_1$ , otrzyma się równanie:

$$r_1 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 8C \tan \frac{\alpha}{2}}}{4 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

Po wstawieniu wartości znajdzie się  $r_1 = 445.12 \text{ m}$ . Tę wartość zaakrągli się na  $450$  i obliczy się podług powyżej przytoczonego wzoru  $c = 20.769 \text{ m}$ .

Drugi sposób zaradzenia, przez zmniejszenie ilości  $C$ , jest w tym przypadku niedopuszczalny, gdyż zmniejszone  $C = 4880$ , zatem zmniejszenie za wielkie.

#### Przykład 24. Do § 49.

Do tego paragrafu nie rachujemy przykładu. Chcemy tylko zauważyć, że dla kątów  $\beta$  bliskich zera, jest  $2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{4} \right)$  bliskie jedności, zatem w wzorze 28 można podstawić  $r_1 = r - v_1$ , a nawet  $r_1 = r - v$ . Wtedy można tyczyć łuk współśrodkowy z łukiem o promieniu  $r$ ; przytem przesunie się  $S$  o  $v$ , a punkt  $C$  spadnie z punktem  $P'_0$  (rys. 85).

#### Przykład 25. Do § 54. Rys. 95.

Rozpatrzmy jak wielką długość powinna mieć prosta  $p$  między jednakowo skierowanymi łukami o promieniach  $r_1 = 500$  i  $r_2 = 300 \text{ m}$  dla  $C = 12000$ . Podług tabeli VI jest  $l_1 = 24.0$ ,  $l_2 = 40.0$ , zaś obliczono (podł. § 45) np.  $t'_1 = 0.5$ ,  $t'_2 = 0.4 \text{ m}$ .

a) Żądamy, aby na prostej  $p$  obie krzywe przejściowe się mieściły, wtedy  $A_1 A_2 \geq 0$ , a podług wz. 37 ma być  $p \geq \frac{24+40}{2} + 0.9 \geq 32.9 \text{ m}$ .

b) Jeżeli długość  $p$  jest mniejszą niż  $32.9 \text{ m}$ , natenczas krzywe przejściowe się przetną, a ich zastosowanie będzie możebne, jeżeli podług wz. 38 będzie  $p \geq \frac{40-24}{2} + 0.9 \geq 8.9 \text{ m}$ .

Jeżeli w tym przypadku chcemy mieć między krzywymi przejściowymi łuk  $c = 20 \text{ m}$ , to ma być podług wz. 39  $p \leq 32.9 - 20.0 = 12.9 \text{ m}$ . Zatem  $p$  może się mieścić w granicach od  $8.9$  do  $12.9 \text{ m}$ .

Dla  $p < 8.9$  jest zastosowanie krzywych przejściowych niemożliwe, chyba że przez zmniejszenie jednego promienia lub obydwu promieni

łuków długość  $p$  stosownie się powiększy. Dla  $p$  cokolwiek większego niż 12,9, można uzyskać żadaną długość  $c$  przez stosowne powiększenie ilości  $C$  na  $C'$ .

Przyjmijmy, że  $p$  wynosi 15 m, czyli  $\Delta = 15 - 12,9 = 2,1$  m. Jeżeli na danej przestrzeni wynosi  $i = 300$ , to  $h_1 = \frac{24}{300} = 0,080$ ,  $h_2 = \frac{40}{300} = 0,133$ , więc  $i' = 300 + \frac{4 \cdot 2}{0,213} = 300 + 19,7 = 319,7$ . Zatem  $C' = 12000 \frac{319,7}{300} = 12788$ .

Tę liczbę zaokrągłi się na 12800 i dla niej obliczy się podług wz. 21 w § 43 dane potrzebne dla tyczenia krzywych przejściowych. Z powodu tego zaokrąglenia jest  $c$  cokolwiek większe niż 20 m; mianowicie jest  $v_1 = 12800 : 500 = 25,60$ ,  $v_2 = 12800 : 300 = 42,67$ , więc podług wz. 39:

$$c = \frac{25,60 + 42,67}{2} + 0,9 - 15,0 = 20,03.$$

**Przykład 26.** Do § 55 b Rys. 97.

Kolej fabryczna ma być przekształcona na publiczną kolej lokalną o  $C = 6000$ . Należy na istniejących torach wprowadzić krzywe przejściowe.

Jeżeli w § 56 stosowano dla głównych kolei  $d = r : 20$ , to dla kolei lokalnej o małej chyżości pociągów można zadowolić się większą różnicą promieni, np.  $d = r : 10$ . Zatem  $n = 10$ . Dany promień  $r = 200$ , więc  $r_1 = 180$  m,  $d = 20$  m.

Dla obliczenia zastosujemy prostsze wzory 40 do 44:

Podług tabeli VI jest dla promienia 180 m i  $C = 6000$ ,  $e_1 = 1,029$  zatem  $v_1 = 0,25725$ ,  $2d - v_1 = 39,74275$ ,  $\varphi_0 = 5^\circ 17' 24''$ ,  $a = 16,596$ .

$$\begin{array}{lll} \lg(2d - v_1) = 1,5992579 & \lg b = 0,5048067 & c = \frac{r}{d} b = 31,975 \\ \lg v_1 = 0,4103554 - 1 & \lg d = 1,3010300 & h = \frac{r}{d} v_1 = 2,573 \\ \frac{1,0096133}{\lg b = 0,5048067} & \lg \sin \alpha = 9,2037767 - 10 & \\ & \alpha = 9^\circ 11' 58,4'' & \\ b = 3,19747 & \frac{\alpha + \varphi_0}{2} = 7^\circ 14' 41,2'' & \frac{\alpha - \varphi_0}{2} = 1^\circ 57' 17,2'' \end{array}$$

W celu kontroli ustawimy równanie rzutu na kierunek  $AM_1$ :

$$\begin{array}{lll} r \sin \alpha = r_1 (\sin \alpha - \sin \varphi_0) + a + b = 2r_1 \cos \frac{\alpha + \varphi_0}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi_0}{2} + a + b & & \\ \lg r = 2,3010300 & \lg 2 = 0,3010300 & 12,1818 \\ \lg \sin \alpha = 9,2037767 - 10 & \lg r_1 = 2,2552725 & a = 16,5960 \\ \frac{1,5048067}{\lg \cos \frac{\alpha + \varphi_0}{2} = 9,9965195 - 10} & & b = 3,1975 \\ r \sin \alpha = 31,975 & & 31,9750 \\ \lg \sin \frac{\alpha - \varphi_0}{2} = 8,5328904 - 10 & \text{zgodnie z } r \sin \alpha & \\ \frac{1,0857124}{\text{liczba} = 12,1818} & & \end{array}$$

Długość przekształcenia istniejącego toru:  $AM = l - a - b + r \operatorname{arc} \alpha$   
Gdy  $\operatorname{arc} \alpha = 0,1605700$ ,  $r \operatorname{arc} \alpha = 32,1140$ ,  $l - a = 16,737$ ,

$$AM = 16,737 - 3,197 + 32,1140 = 45,654 \text{ m.}$$

**Przykład 27.** Do § 58 I. Rys. 99 i 100.

Istniejący lewy tor głównej kolei ( $C=12000$ ) jest w łuku o promieniu 2000 m. W odległości 4 m od istniejącego, ma być wybudowany prawy tor, tak, że promień wspólnej osi  $R=2002$  m. W celu uzyskania krótkiego układu zastosujemy odwrotne łuki i obierzemy wielką różnicę  $R-r$ , przez przyjęcie najmniejszej jeszcze dopuszczalnej wartości  $r=300$  m. Natomiast promień  $r_1$  obierzemy wielki, aby warunek tabeli w § 48 mógł być dopełniony. Zatem  $R=2002$ ,  $r=300$ ,  $r_1=1000$  m. Podług tabeli VI jest dla  $r=300$ ,  $l_1=40$ , zaś dla promieni 2002 i 1000 jest podług tabeli VII  $l=l_2=20$  m. Długość  $u$  obierzemy w najmniejszej wartości,

wyznaczonej wzorem 39 w § 54, t. j.  $u = \frac{l+l_1}{2} + t' + t'_1 - 20$ , zaś  $v$  i  $u_1$ , jako proste między odwrotnymi łukami, podług § 47:  $v = l_0 + \frac{l_1+l_2}{2} + t'_1 + t'_2$ ,  
 $u_1 = l_0 + \frac{l_1+l_2}{2} + t'_1 + t'_2$ .

Jeżeli dla pewności przyjmiemy każde  $t' = 20$  m, zaś  $l_0 = 10$  m, to będzie:  $u = 14$ ,  $v = 44$ ,  $u_1 = 34$  m. Gdy jeszcze odstęp torów  $d = 4$  m, to  $R-d+r_1 = 2998$ ,  $R-r = 1702$ . Zatem:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2998 \cdot 1300 - 34 \cdot 44}{44 \cdot 2998 + 34 \cdot 1300} = \frac{3895904}{176112}; \quad \lg \operatorname{tang} \varphi = 11 \cdot 3448193 - 10$$

$\varphi = 87^\circ 24' 42 \cdot 3''$ ,  $\lg \cos \varphi = 8 \cdot 6547359 - 10$ . Następnie wz. 3:

$(R-d+r_1)^2 = 8988004$	lg licznika = 6·8912081
$u_1^2 = 1156$	lg cos $\varphi = 8 \cdot 6547359 - 10$
$(r+r_1)^2 = 1690000$	5·5459440
$v^2 = 1936$	lg 176112 = 5·2457889
10681096	lg 2 = 0·3010300
$(R-r)^2 = 2896804$	lg sin ( $\varphi - \beta$ ) = 9·9991251 - 10
$u^2 = 196$	
7784096	

$$\varphi - \beta = 86^\circ 21' 51 \cdot 6''$$

$$\varphi = 87 \ 24 \ 42 \ 3$$

$$\beta = 1^\circ 2' 50 \cdot 7''$$

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1702 \cdot 1300 + 14 \cdot 44}{1702 \cdot 44 - 14 \cdot 1300} = \frac{2213216}{56688}; \quad \lg \operatorname{tang} \psi = 11 \cdot 5915328 - 10$$

$\psi = 88^\circ 31' 58 \cdot 0''$ ,  $\lg \cos \psi = 8 \cdot 4083257 - 10$ . Zaś wz. 5:

$(R-d+r_1)^2 = 8988004$	lg licznika = 6·6434748	lg cos $\psi = 8 \cdot 4083257 - 10$
$u_1^2 = 1156$	lg cos $\psi = 8 \cdot 4083257 - 10$	$\psi - \alpha = 83^\circ 35' 36 \cdot 5''$
8989160	5·0518005	$\alpha = 4^\circ 56' 21 \cdot 5''$
$(R-r)^2 = 2896804$	lg 56688 = 4·7534911	$\alpha - \beta = 3 \ 53 \ 30 \cdot 8$
$u^2 = 196$	lg 2 = 0·3010300	
$v^2 = 1936$	lg sin ( $\psi - \alpha$ ) = 9·9972794 - 10	
$(r+r_1)^2 = 1690000$		
4400224		

W celu kontroli rachunków mamy równanie:

$$R-r = (R-d+r_1) \cos(\alpha-\beta) + v \sin \alpha + u_1 \sin(\alpha-\beta) - (r+r_1) \cos \alpha$$

**69.**

$\lg(R-d+r_1) = 3.4768316$	$\lg v = 1.6484527$
$\lg \cos(\alpha-\beta) = \frac{9.9989973-10}{3.4758289}$	$\lg \sin \alpha = \frac{8.9850052-10}{0.5784579}$
liczba = 2991.086	liczba = 3.788
$\lg u_1 = 1.5314789$	$\lg(r+r_1) = 3.1139434$
$\lg \sin(\alpha-\beta) = \frac{8.8317037-10}{0.3631826}$	$\lg \cos \alpha = \frac{9.9988842-10}{3.1123276}$
liczba = 2.308	liczba = 1295.173

$$\begin{array}{r}
 2991.086 \\
 3.788 \\
 \hline
 2.308 \\
 \hline
 2997.182 \\
 1295.173 \\
 \hline
 1702.009
 \end{array}$$

zgodnie z  $R-r = 1702$

Długość, na którą tor istniejący ma być przekształcony, równa się, podług rysunku 99:  $(R - \frac{d}{2}) \text{arc}(\alpha - \beta) = 2000 \cdot 0.0679263 = 135.853 \text{ m}$ .  
(Ob. także przykl. 29).

**Przykład 28.** Do § 58 II. Rys. 102.

Obierzemy  $r=r_1=500 \text{ m}$ ,  $C=12000$ . Dla tego promienia jest  $l=24$ , zatem  $v = \frac{l+l_1}{2} + t' + t'_1 + 10$  (ob. przykl. 26) = okrągło  $40 \text{ m}$ ,  $d=4 \text{ m}$ ,  $r+r_1-d = 996 \text{ m}$ .

$\text{tang } \varphi = \frac{1000}{40} = 25$ , $\lg \text{tang } \varphi = 11.3979400 - 10$ , $\varphi = 87^\circ 42' 33.8''$	
$\lg \cos \varphi = 8.6017130 - 10$	
$\lg(r+r_1-d) = 2.9982593$	$\varphi - \alpha = 84^\circ 23' 11.4''$
$\lg v = \frac{1.6020600}{1.3961993}$	$\varphi = 87^\circ 42' 33.8''$
$\lg \cos \varphi = 8.6017130 - 10$	$\alpha = 3^\circ 19' 22.4''$
$\lg \sin(\varphi - \alpha) = 9.9979123 - 10$	$\frac{\alpha}{2} = 1^\circ 39' 41.2''$

Ten kąt  $\alpha$  jest większy niż w tabelce § 48 dla  $r=500$  podany, więc rozwiązanie jest możebne; jednakże jest on mniejszy niż kąt  $5^\circ 3'$  wykazany w tabeli dodanej na końcu tabeli VI, zatem uzyska się  $c < 20 \text{ m}$ . Można  $c$  wyznaczyć z wzoru podanego w uwadze do § 48:

$$c = 2r \text{ tang } \frac{\alpha}{2} - l$$

$$\lg 2r \text{ tang } \frac{\alpha}{2} = 1.4624849, \text{ więc } c = 29.006 - 24.000 = 5.006.$$

Kontrolne równanie:

$\lg 2(r+r_1) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0.2256344$	$\lg v = 1.6020600$	2.3185
liczba = 2.3185	$\lg \sin \alpha = 8.7631497$	1.6813
	$\frac{0.3652097}{3.9998}$	3.9998

liczba = 1.6813      zgodne z  $d = 4$

**Przykład 29.** Do § 58 IVa. Rys. 103a.

Te same dane, co w przykładzie 26, więc  $R=2002$ ,  $C=12000$ .

Gdy się przyjmie  $r=300$ , to kąt  $\alpha$  wypadnie mniejszy niż podany w tabelce § 48. Zatem obierzemy  $r=500$ , zaś  $u=14$ , tak samo jak w przykładzie 26,  $d=4$  m.  $R-r-d=1498$ .

$$\text{tang } \varphi = \frac{1502}{14}, \quad \lg \text{ tang } \varphi = 12.0305419 - 10, \quad \varphi = 89^{\circ} 27' 57.5''$$

$$\lg \cos \varphi = 7.9694338 - 10$$

$$\lg (R-r-d) = 3.1755118 \quad \varphi + \alpha = 85^{\circ} 46' 56.2'', \text{ albo } \varphi + \alpha = 94^{\circ} 13' 33.8''$$

$$\lg \cos \varphi = 7.9694338 - 10 \quad \text{W tym przypadku ważna druga wartość:}$$

$$\frac{1.1449456}{\lg u = 1.1461280} \quad \varphi + \alpha = 94^{\circ} 13' 33.8''$$

$$\varphi = 89 \ 27 \ 57.5$$

$$\lg \sin (\varphi + \alpha) = 9.9988176 - 10$$

$$\alpha = 4^{\circ} 45' 36.3''$$

Ponieważ  $\lg \cos \varphi$  dla kąta bliskiego  $90^{\circ}$  nie jest dostatecznie dokładny, zatem i kąt  $\alpha$  nie jest dokładny. Obliczymy go z wz. 15. W tym celu z wz. 14 wyznaczy się:

$$v = \sqrt{8 \cdot 1502 + 14^2 - 4^2} = 110.4355$$

$$\text{tang } \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{96.4355}, \quad \lg \text{ tang } \frac{\alpha}{2} = 8.6178228 - 10, \quad \frac{\alpha}{2} = 2^{\circ} 22' 30.7'', \text{ zatem:}$$

$\alpha = 4^{\circ} 45' 1.4''$ . Różnica z powyżej obliczonym kątem  $\alpha$  jest zatem znaczna.

Długość przekształcenia toru istniejącego  $(R - \frac{d}{2}) \text{ arc } \alpha = 165.820$  m.

W porównaniu z długością 135.853 m, uzyskaną w przykładzie 26 okazuje się zysk blisko 30 m przy zastosowaniu odwrotnych łuków.

**Przykład 30.** Do § 58 Va. Rys. 104.

Łuk  $AB$  istniejącej trasy posiada promień równy 500, zatem dla  $d=4$  jest  $R=502$  m. Obierzemy  $R_1=600$ ,  $v=20$  m.  $R_1-R+d=102$ .

$$\text{tang } \varphi = \frac{102}{20}, \quad \lg \text{ tang } \varphi = 10.7075702 - 10, \quad \varphi = 78^{\circ} 54' 22.6''.$$

$$\lg \cos \varphi = 9.2842376 - 10$$

$$\lg (R_1 - R) = 1.9912261$$

$$\varphi - \alpha = 70^{\circ} 31' 57.0''$$

$$\lg \cos \varphi = 9.2842376 - 10$$

$$\varphi = 78 \ 54 \ 22.6$$

$$\frac{1.2754637}{\lg v = 1.3010300}$$

$$\alpha = 8^{\circ} 22' 25.6''$$

$$\lg \sin (\varphi - \alpha) = 9.9744337$$

$$\lg (R_1 - R + d) = 2.0086002$$

$$\lg v = 1.3010300$$

$$14.8543$$

$$\lg \sin \alpha = 9.1632516 - 10$$

$$\lg \cos \alpha = 9.9953452 - 10$$

$$19.7868$$

$$\frac{1.1718518}{\text{liczba} = 14.8543}$$

$$\frac{1.2963752}{\text{liczba} = 19.7868}$$

$$u = 34.6411$$

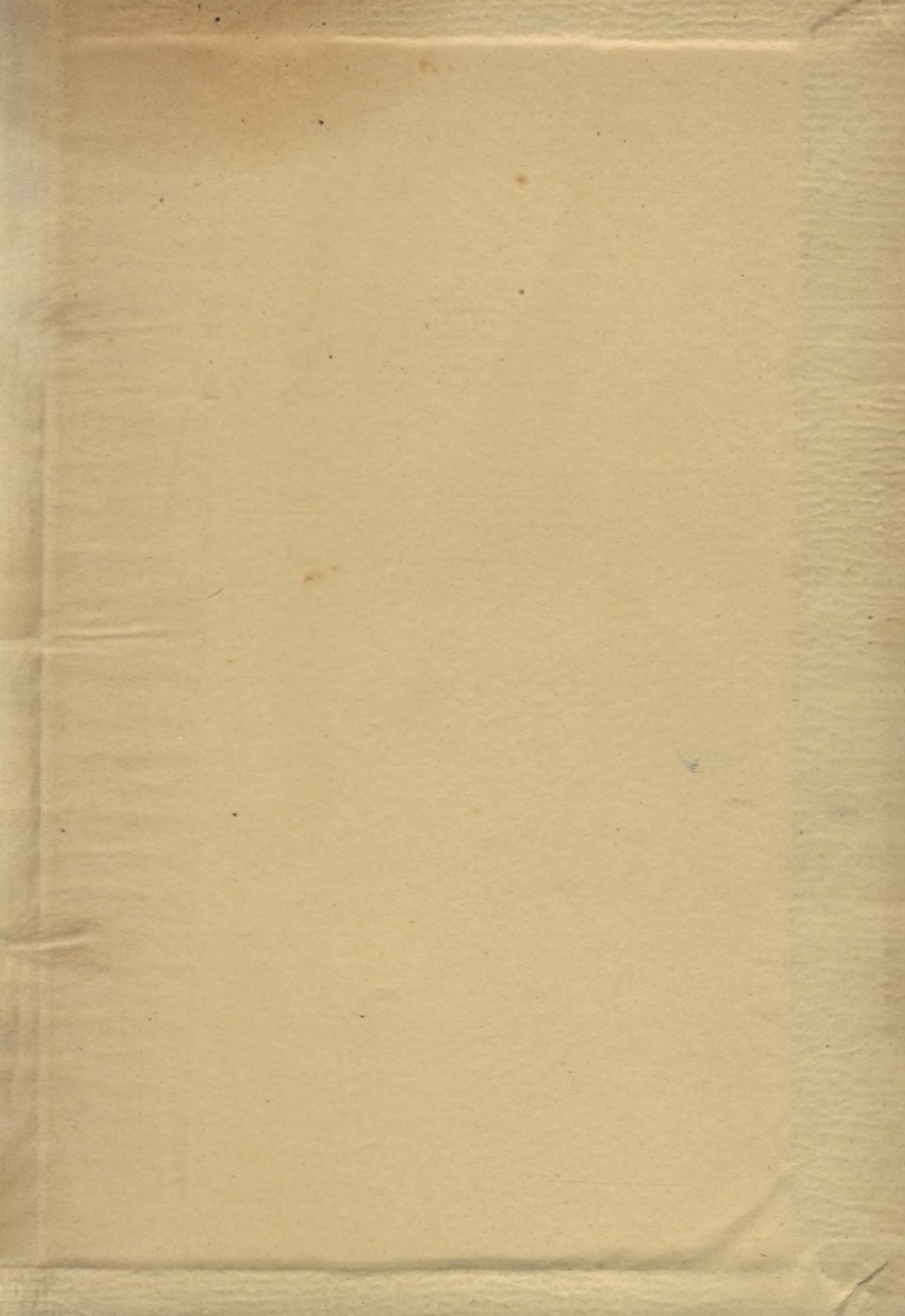
Dla kontroli obliczy się wz. 18:

$$u = \sqrt{8 \cdot 98 + 20^2 + 4^2} = \sqrt{1200} = 34.641 \text{ zgodne z powyższem.}$$

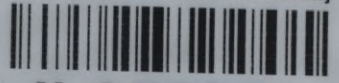








P C Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-355821

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000323018