PHILOSOPHIE DER ARITHMETIK.

PSYCHOLOGISCHE UND LOGISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

DR. E. G. HUSSERL,
PRIVATDOCENT DER PHILOSOPHIE AN DER UNIVERSITÄT
ZU HALLE.

ERSTER BAND.

HALLE-SAALE.
C. E. M. PFEFFER (ROBERT STRICKER).
1891.

MEINEM LEHRER

FRANZ BRENTANO

IN INNIGER DANKBARKEIT.

Vorrede.

Die „Philosophie der Arithmetik“, die ich hiemit der Oeffentlichkeit übergebe, beansprucht nicht ein regelrechtes System dieser für den Mathematiker und Philosophen gleich wichtigen Grenzdisciplin aufzubauen, wol aber in einer Reihe „psychologischer und logischer Untersuchungen“ die wissenschaftlichen Fundamente für einen künftigen Aufbau derselben vorzubereiten. Mehr als solche Vorbereitung konnte bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft nicht angestrebt werden. Nicht eine Frage von Bedeutung wüsste ich zu nennen, in deren Beantwortung unter den betheiligten Forschern auch nur erträgliche Harmonie bestände; Beweis genug, dass in unserem Gebiete von einer bloss architectonischen Gliederung bereits gesicherter Erkenntnisse noch keine Rede sein kann. Die gegebene Aufgabe ist hier vielmehr die: in geduldiger Einzelforschung nach den haltbaren Fundamenten zu suchen, in sorgfältiger Kritik die beachtenswerten Theorien zu prüfen, Richtiges und Verfehltes zu sondern, um, so belehrt, Neues und wenn möglich besser Gesichertes an deren Stelle zu setzen. Damit ist die Tendenz dieses Werkes gekennzeichnet.

Kritische Vollständigkeit habe ich nicht angestrebt. Ich hielt es im Interesse der Sache nicht für geboten, die zahllosen Versuche, welche die Grundfragen des behandelten

Gebietes angehen und mir bekannt worden sind, in Betracht zu ziehen; es genügte die Auswahl solcher, die, sei es durch ihren besonderen Charakter, sei es durch ihre weitreichende Verbreitung, sei es durch ihre innere Bedeutung einen Vorzug zu verdienen schienen.

Ich hoffe, dass eine kritische Methode, die ich öfter befolgte, mir nicht zum Tadel gereichen werde. Wo es irgend angieng, bemühte ich mich leitende Gedanken, die ich bei verschiedenen Autoren immer wiederkehren sah und die, nicht immer klar und consequent verfolgt, deren theoretische Ueberzeugungen bestimmten, auszulösen, begrifflich scharf zu fixiren und auf Grund derselben eine möglichst consequente Theorie aufzubauen. Die nachfolgende Kritik konnte dann zeigen, wie weit derartige, zunächst plausibel erscheinende Motive überhaupt zu reichen vermöchten.

In den positiven Entwicklungen liess ich mich nicht ausschliesslich vom Interesse einer erkenntnisstheoretischen Erforschung der Arithmetik leiten. Wo die Analyse einerseits der arithmetischen Elementarbegriffe, andererseits der die Arithmetik auszeichnenden symbolischen Methoden für die Psychologie oder Logik einigen Ertrag versprach, habe ich mich auf detaillirtere Untersuchungen eingelassen, als es eine „Metaphysik des Calculs" gerade erfordert hätte. Dies gilt z. B. von den Partien dieses Bandes, in welchen die Psychologie der Begriffe Vielheit, Einheit und Anzahl eine möglichst sorgsame und hoffentlich nicht ganz fruchtlose Bearbeitung erfährt. Ganz aus den Rahmen einer Philosophie der Arithmetik treten aber nur die im Anhange des II. Bandes mitzutheilenden Untersuchungen zur allgemeinen Logik der symbolischen Methoden (zur „Semiotik"), in welchen ich den Versuch wagen will, eine wesentliche Lücke der bisherigen Logik auszufüllen.

Dem philosophischen Leser werden, wie ich hoffe, derartige Specialuntersuchungen gerade in dem Zusammenhange, in dem sie, wie entstanden so auch dargelegt sind, nicht unwillkommen sein; der mathematische Leser hingegen wird, was ihn weniger interessirt, leicht überschlagen können. Im Uebrigen bemerke ich mit Rücksicht auf letzteren, dass philosophische Fachkenntnisse zum Verständniss dieses Werkes nicht erfordert sind. Von der ohnehin ziemlich vagen philosophischen Terminologie habe ich sparsamen Gebrauch gemacht, zumal keinen Terminus verwendet, der nicht durch Definition oder durch Beispiel hinreichend verdeutlicht wäre. Auf der andern Seite verlangt das Verständniss, wenn nicht dieses, so des nachfolgenden Bandes, einige mathematische Vorkenntnisse, so viel etwa ein erster Cursus der Algebra und Analysis zu bringen pflegt. Dergleichen war naturgemäss nicht zu vermeiden; wer nicht einige mathematische Studien betrieben hat, wird wol auch nicht ernstlich daran gehen können, sich über die Philosophie dieser Disciplin zu orientiren.

Der hier vorliegende I. Band behandelt in dem ersten seiner beiden Theile die der Hauptsache nach psychologischen Fragen, welche mit der Analyse der Begriffe von Vielheit, Einheit und Anzahl, soweit sie uns eigentlich und nicht durch indirecte Symbolisirung gegeben sind, zusammenhängen. Der zweite Theil betrachtet dann die symbolischen Vorstellungen von Vielheit und Anzahl und versucht zu zeigen, wie die Thatsache, dass wir fast durchgehends auf symbolische Zahlbegriffe eingeschränkt sind, den Sinn und Zweck der Anzahlenarithmetik bestimmt.

Die logische Untersuchung des arithmetischen Algorithmus — immer noch in seiner Auffassung als Arithmetik der Anzahl — und die Rechtfertigung der rechnerischen Verwertung der aus den inversen Operationen entstehenden

Quasizahlen, der negativen, imaginären, der gebrochenen und irrationalen Zahlen soll der erste Theil des II. Bandes enthalten. Die kritischen Betrachtungen desselben geben mehrfachen Anlass der Frage näher zu treten, ob es das Anzahlengebiet oder welches Begriffsgebiet es sonst sei, das die allgemeine Arithmetik im ersten und ursprünglichen Sinne beherrscht. Dieser Fundamentalfrage soll dann der zweite Theil des II. Bandes gewidmet sein. Es ergiebt sich das Resultat, dass identisch derselbe Algorithmus, dieselbe arithmetica universalis eine Reihe wol zu sondernder Begriffsgebiete beherrscht, und dass keineswegs eine einzige Begriffsart, sei es die Anzahl oder die Ordinalzahl oder irgend eine andere, überall die Anwendung vermittle. Auf die volle logische Aufklärung des wahren Sinnes der allgemeinen Arithmetik, sowie auf die Analyse der durch sie logisch zu beherrschenden Begriffe (wie Reihe, Grösse etc.) soll im Verlaufe dieser Untersuchungen alle Sorgfalt verwendet werden.

Schon aus diesen dürftigen Andeutungen ersieht der Leser, dass ich mich von den gegenwärtig praevalirenden Ansichten nicht unerheblich entferne. Gleichwol fürchte ich nicht den Vorwurf, dass ich das Neue um der Neuerung willen bevorzugt habe. Von den geltenden Ansichten bin auch ich ausgegangen, und erst die volle Ueberzeugung ihrer Unhaltbarkeit, die sich mir bei dem Bestreben, sie praecise zu formuliren, aufdrängte, zwang mich zu neuen Theorien, deren, wie ich hoffe, befriedigendere Ausgestaltung die Frucht mehrjährigen Nachdenkens ist. Vielleicht waren meine Bemühungen nicht ganz nutzlos, vielleicht wird es mir gelingen, wenigstens in einigen Grundpunkten der wahren Philosophie des Calculs, diesem Desiderat von Jahrhunderten, den Weg zu bahnen.

Wenn Zeit und Umstände günstig sind, gedenke ich im II. Bande auch eine neue philosophische Theorie der Euclidischen Geometrie, deren Grundgedanken mit den dort abzuhandelnden Fragen in nahem Zusammenhange stehen, zu entwickeln. Vielleicht erweckt es von vornherein kein ungünstiges Vorurtheil für meine Bestrebungen, wenn ich sage, dass ich die Grundgedanken meiner neuen Theorie dem Studium der vielgelesenen und doch immer nur einseitig ausgenützten Gauss'schen Anzeige über die biquadratischen Reste (II) verdanke.

Ich muss noch bemerken, dass ein Theil der psychologischen Untersuchungen des vorliegenden Bandes nahezu wörtlich bereits in meiner Habilitationsschrift enthalten war, von welcher im Herbste 1887 ein Heftchen von vier Bogen unter dem Titel „Ueber den Begriff der Zahl, psychologische Analysen" gedruckt worden aber nicht in den Buchhandel gekommen ist.

Der II. Band, im Concept grossentheils fertig, dürfte nach Verlauf eines Jahres dem Drucke übergeben werden.

Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass dieses Werk schon mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der behandelten Probleme jene nachsichtige Beurtheilung finden werde, auf welche der erste grössere Versuch eines Autors rechnen zu dürfen glaubt.

Halle a. S., im April 1891.

E. G. Husserl.

Inhalt des I. Bandes.

II. Theil.

Die symbolischen Anzahlbegriffe und die logischen Quellen der Anzahlen-Arithmetik.

ERSTER THEIL.

DIE EIGENTLICHEN BEGRIFFE VON VIELHEIT, EINHEIT UND ANZAHL.

Einleitung.

Der Begriff der Zahl ist ein vielfacher. Darauf weist uns schon die Mehrheit verschiedener Zahlwörter hin, die in der Sprache des gewöhnlichen Lebens auftreten und von den Grammatikern unter folgenden Titeln aufgeführt zu werden pflegen: Die Anzahlen oder Grundzahlen (numeralia cardinalia), die Ordnungszahlen (n. ordinalia), die Gattungszahlen (n. specialia), die Wiederholungszahlen (n. iterativa), die Vervielfältigungszahlen (n. multiplicativa) und die Bruchzahlen (n. partitiva). Dass die Anzahlen als die ersten in dieser Reihe genannt werden, beruht ebenso wie die charakteristischen Namen, die sie sonst tragen — Grund- oder Cardinalzahlen — nicht auf blosser Convention. Sie nehmen sprachlich eine bevorzugte Stellung dadurch ein, dass die sämmtlichen übrigen Zahlwörter nur durch geringe Modificationen aus den Anzahlwörtern hervorgehen. (Z. B. zwei, zweiter, zweierlei, zweifach, zweimal, zweitel.) Die letzteren sind also wahrhafte Grundzahlwörter. Die Sprache leitet uns hiemit auf den Gedanken hin, es möchten auch die correspondirenden **Begriffe** sämmtlich in einem analogen Abhängigkeitsverhältnisse stehen zu denen der Anzahlen und gewisse inhaltreichere Gedanken vorstellen, in welchen die Anzahlen blosse Bestandtheile bilden. Die einfachste Ueberlegung scheint dies zu bestätigen. So handelt es sich bei den Gattungszahlen (einerlei, zweierlei u. s. w.) um eine Anzahl von Verschiedenheiten innerhalb einer Gattung; bei den Wiederholungszahlen

?

Das scheint mir den Grammatikern nicht zu folgen. denn die verschiedenen Zahlwörter bezeichnen nicht begriffl. Unterschiede, sondern Unterschiede der Gattung od. Unterschiede der Operationen.

besser wäre Artzahl

(einmal, zweimal u. s. w.) um die Anzahl einer Wiederholung. Bei den Vervielfältigungs- und Bruchzahlen dient die Anzahl dazu, das Verhältniss eines in gleiche Theile getheilten Ganzen zu einem Theile, bzw. eines Theiles zum Ganzen genauer zu determiniren. Ist das Ganze in n Theile getheilt, dann heisst es das n-fache jedes Theiles und jeder Theil ein n^tel (n-Theil) des Ganzen. In ähnlicher Weise drücken die Wörter zweitheilig, dreitheilig u. s. w. die Anzahl der Theile eines Ganzen, als äusseres Merkmal desselben aufgefasst, aus. Alle diese und ähnliche Begriffe haben einen offenbar secundären Charakter; wenn auch nicht logische Specialisirungen des Anzahlbegriffes, sind sie doch beschränktere Bildungen, welche ihn voraussetzen, indem sie ihn in gewisser Weise mit anderen elementaren Begriffen verknüpfen. Nur bei den Ordinalzahlen ist diese Auffassung bestritten. Die sprachliche Abhängigkeit ihrer Namen von denen der Anzahlen ist zwar nicht minder offenkundig, und auch die Vergleichung der Begriffe scheint, wie in den anderen Fällen, auf ein entsprechendes Abhängigkeitsverhältniss hinzuweisen. Wie nämlich die Anzahlen sich auf Mengen beziehen, so die Ordinalzahlen auf Reihen. Reihen sind aber geordnete Mengen. So möchte man von vornherein geneigt sein, auch den Ordinalzahlen eine selbständigere Stellung abzuläugnen. Indessen sind hervorragende Forscher — und keine geringeren wie W. Rowan Hamilton, v. Helmholtz und Kronecker — entgegengesetzter Ansicht; sie gehen so weit, den Ordnungszahlen die Superiorität gegenüber den Anzahlen zu vindiciren, derart, dass die letzteren bloss aus speciellen Verwendungen der ersteren hervorgehen sollen. Die Paradoxie dieser Ansicht löst sich aber durch die erweisliche Thatsache, dass, was diese Forscher Anzahl und Ordinalzahl nennen, nicht dem Begriffe entspricht, den man sonst mit diesen Namen verbindet.[1])

---

[1]) Vgl. den Anhang zum I. Theile.

Achtet man auf die gemeinüblichen Bedeutungen derselben, dann bleibt es zu Recht bestehen, dass der Begriff der Ordinalzahl den der Anzahl einschliesst, also voraussetzt, wie die Bildungsweise der Namen dies richtig ausdrückt.

Ausser den Zahlenarten des practischen Lebens giebt es noch eine grosse Reihe anderer, welche der arithmetischen Wissenschaft eigenthümlich sind. Sie spricht von positiven und negativen, rationalen und irrationalen, reellen und imaginären Zahlen, von Quaternionen, alternirenden, idealen Zahlen u. s. w. Wie verschieden aber die arithmetischen Ausdrücke all' dieser Zahlen auch sein mögen, immer schliessen sie die Anzahlzeichen 1, 2, 3 .... als Bestandtheile ein, und so scheinen auch in der Arithmetik die Anzahlen in gewisser Art die Rolle von Grundzahlen zu spielen, wofern der Schluss von der Abhängigkeit der Signaturen auf diejenige der Begriffe nicht gänzlich trügt. Thatsächlich sind viele und darunter sehr bedeutende Mathematiker, wie WEIERSTRASS[1]) und DEDEKIND, sogar der Ueberzeugung, dass die Anzahlen die eigentlichen und einzigen Fundamentalbegriffe der Arithmetik bilden. Andere Forscher sind freilich anderer Ansicht. Für diejenigen, welche die Anzahlen als Specialisirungen der Ordinalzahlen betrachten, sind in der Regel diese letzteren die arithmetischen Fundamentalbegriffe. Andere wiederum lehnen die eine wie die andere Ansicht ab und fassen den Begriff der linearen Grösse als den Grundbegriff der Arithmetik auf. U. s. w. Um nun vorläufig überhaupt einen Standpunkt einzunehmen, wollen wir uns der zuerst betrachteten, als der zunächst liegenden Ansicht anschliessen und

[1]) WEIERSTRASS pflegte seine epochemachenden Vorlesungen über die Theorie der analytischen Functionen mit den Sätzen zu eröffnen: Die reine Arithmetik (oder reine Analysis) ist eine Wissenschaft, die einzig und allein auf den Begriff der Zahl basirt ist. Sie bedarf sonst keinerlei Voraussetzung, keiner Postulate und Vordersätze. (So, fast gleichlautend, im S/S 1878 und W/S 1880/81.) Daran schloss sich dann die Analyse des Zahlbegriffes, im Sinne der Anzahl.

demgemäss mit einer möglichst sorgfältigen Analyse des Anzahlbegriffes beginnen. Einer endgiltigen Entscheidung soll dadurch in keiner Weise vorgegriffen werden. Vielleicht weist sogar der Fortschritt unserer Entwicklungen im II. Bande die Undurchführbarkeit der vorausgesetzten Meinung nach. Keinesfalls würde hiedurch den folgenden Analysen etwas von ihrem Werte geraubt; denn sie sind von allen arithmetischen Theorien unabhängig und für alle von Nutzen. Wie auch immer die verschiedenen Parteien das der Arithmetik eigenthümliche und ursprüngliche Begriffsgebiet bestimmen mögen, darin sind sie doch, genau besehen, einig, dass der Anzahlbegriff in allen arithmetischen Dingen eine überaus wichtige Rolle spiele. Wer z. B. nicht diesen Begriff, sondern den der linearen Grösse als den wahrhaften Fundamentalbegriff der Arithmetik ansieht, wird darum doch nicht läugnen, dass die vorausgesetzten Messungen der Grössen überall auf Zählungen, d. h. auf Anzahlbestimmungen beruhen; ferner, dass die Anzahlen in Gestalt von Multiplicatoren und Divisoren, von Potenz- und Wurzelexponenten u. s. w. unentbehrliche Hilfsmittel arithmetischer Begriffsbildung sind. Eine höchst bedeutsame Stellung bleibt also den Anzahlen in der Arithmetik auch dann zugesichert, wenn diese nicht als Wissenschaft von den Anzahlen, sondern als Wissenschaft von den linearen Grössen oder auf irgend welche andere Weise definirt würde. In jedem Falle ist somit eine Analyse des Anzahlbegriffes ein wichtiges Vorerforderniss für eine Philosophie der Arithmetik; und sie ist deren erstes Erforderniss, falls nicht etwa dem Ordinalzahlbegriffe, wie von anderer Seite behauptet wurde, die logische Priorität zukommt. Die Möglichkeit einer von diesem Begriffe völlig absehenden Analyse des Anzahlbegriffes wird den besten Beweis für die Unzulässigkeit dieser Ansicht liefern. Im Uebrigen dient eine solche Analyse keineswegs bloss arithmetischen Zwecken. Die zusammengehörigen Begriffe von Einheit, Vielheit und

Anzahl sind Fundamentalbegriffe der menschlichen Erkenntnis überhaupt, und beanspruchen als solche ein besonderes philosophisches Interesse, zumal die erheblichen Schwierigkeiten, die ihrem Verständnisse anhaften, jederzeit zu gefährlichen Irrthümern und subtilen Streitigkeiten Anlass gegeben haben. Diese Schwierigkeiten hängen innig zusammen mit gewissen Eigenthümlichkeiten der psychologischen Constitution der genannten Begriffe, an deren Aufhellung auch die Psychologie ein specielles Interesse nimmt. Nicht bloss jene arithmetischen, sondern vor allem diese logischen und psychologischen Interessen zu befriedigen, bezeichne ich als die Aufgabe der nachfolgenden Analysen.

I. Capitel.

Die Entstehung des Begriffes Vielheit vermittelst desjenigen der collectiven Verbindung.

Die Analyse des Anzahlbegriffes setzt die des Vielheitsbegriffes voraus.

Die allbekannte Definition des Begriffes der Zahl — so dürfen wir, conform mit der gemeinüblichen Sprechweise kurzweg für Anzahl sagen — lautet: Die Zahl ist eine Vielheit von Einheiten. Seitdem EUCLID[1]) sie gebraucht hat, kehrt sie immer wieder. Statt Vielheit sagt man auch Mehrheit, Inbegriff, Aggregat, Sammlung, Menge u. s. w., lauter Namen, die gleichbedeutend oder nahezu gleichbedeutend sind, obschon nicht ohne merkliche Nuancen.[2])

Freilich ist mit dieser Definition nicht viel gethan. Was ist Vielheit und was Einheit? Wir brauchen nur diese Fragen aufzuwerfen und stehen mitten in den Controversen. Manche Autoren wandten gegen die Definition ein, dass Vielheit doch nahezu dasselbe bedeute wie Anzahl. Daran ist aber nur so viel richtig, dass der Name Anzahl in einem weiteren Sinne genommen werden kann, in welchem er wirklich

---

[1]) Zu Anfang des VII. Buches der Elemente.

[2]) Um diese auszuschliessen, unterlassen wir es bis auf Weiteres einen dieser Namen allein zu gebrauchen. Die Gründe, warum wir in verschiedenen Darlegungen verschiedene derselben bevorzugen (bald ‚Inbegriff', bald ‚Vielheit' oder ‚Menge') werden späterhin ihre Erklärung finden.

gleichbedeutend ist mit dem der Vielheit. Im engeren und eigentlichen Sinne supponirt er aber nur für irgend eine bestimmte Zahl Zwei, Drei, Vier, und drückt dann einen reicheren Gedanken aus als der Name Vielheit. Immerhin bleibt auch dann eine innige Beziehung der beiderseitigen Begriffe bestehen. Wo von einer bestimmten Zahl die Rede ist, kann stets von einer Vielheit gesprochen werden, und wo von einer Vielheit, da auch immer von einer bestimmten Zahl; nur sind die bestimmten Zahlen, die hiebei vermitteln, von Fall zu Fall verschiedene. Der Anzahlbegriff umfasst also, obschon erst auf dem Wege über die Umfänge seiner Speciesbegriffe, der Zahlen Zwei, Drei, Vier . . ., dieselben concreten Phaenomene wie der Begriff der Vielheit. Auch die nahe Verwandtschaft der zugehörigen Begriffsinhalte ist von vornherein klar, wenn nur beachtet wird, dass die bestimmten Zahlen als Determinationen des in gewisser Art unbestimmten Vielheitsbegriffes anzusehen sind. Wo immer eine Vielheit gegeben ist, da ist die Frage nach dem Wieviel am Platze, und darauf antwortet eben die zugehörige Anzahl. Es wird daher naturgemäss sein, in erster Linie die Analyse des allgemeineren und in der angegebenen Beziehung unbestimmteren Vielheitsbegriffes anzustreben, und erst in weiterer Folge diejenigen Determinationen zu charakterisiren, durch welche die Reihe der bestimmten Zahlen und der sie voraussetzende Gattungsbegriff der Anzahl entspringt. Die obige Zahldefinition aber lassen wir nun bei Seite, da sie für unsere gegenwärtigen Zwecke doch nichts nützen kann.

Die concreten Grundlagen der Abstraction.

In Betreff der concreten Phaenomene, welche für die Abstraction der in Frage stehenden Begriffe die Grundlage bilden, besteht keinerlei Zweifel. Es sind Inbegriffe, Vielheiten bestimmter Objecte. Was mit diesem Ausdrucke gemeint ist, weiss Jeder. Niemand wird schwanken, ob gegebenenfalls von einer Vielheit die Rede sein könne oder nicht, ein Beweis dafür, dass der zugehörige Begriff trotz der Schwierigkeit seiner Analyse, ein vollkommen scharfer, der Umfang seiner Geltung ein genau begrenzter ist. Diesen Umfang dürfen wir daher als ein Gegebenes ansehen, auch wenn wir über das Wesen und die Entstehung des Begriffes selbst noch im Unklaren sind. Dasselbe gilt, aus gleichen Gründen, von den Anzahlbegriffen.

Wir beschränken uns zuvörderst auf eigentlich vorgestellte Vielheiten, wir schliessen — der correlative Ausdruck erscheint manchem Leser vielleicht als der klarere — symbolisch vorgestellte Vielheiten aus. Unser Gebiet sei also das der Inbegriffe einzeln für sich gegebener und collectiv zusammengefasster Objecte. Demgemäss werden unsere Analysen zunächst nur die Entstehung und den Inhalt der eigentlichen Begriffe von Vielheit und Zahl betreffen, während die Analyse der sie voraussetzenden symbolischen Bildungen uns erst viel später eingehend beschäftigen wird.

Unabhängigkeit der Abstraction von der Natur der colligirten Inhalte.

Wir beginnen nun mit der psychologischen Charakteristik der Abstraction, welche zum (eigentlichen) Begriffe der Vielheit und in weiterer Folge zu den Zahlbegriffen führt. Die Concreta, auf welche sich die abstrahirende Thätigkeit bezieht, haben wir bereits bezeichnet, es sind Inbegriffe bestimmter Gegenstände; wir fügen jetzt auch hinzu: vollkommen willkürlicher. In der That, für die Bildung concreter Inbegriffe giebt es in Beziehung auf die zu befassenden Einzelinhalte keinerlei Schranken. Jedes Vorstellungsobject, ob physisch oder psychisch, abstract oder concret, ob durch Empfindung oder Phantasie gegeben, kann zusammen mit einem jeden und beliebig vielen anderen zu einem Inbegriffe vereinigt und demgemäss auch gezählt werden. Z. B. Einige bestimmte Bäume; Sonne, Mond, Erde und Mars; ein Gefühl, ein Engel, der Mond und Italien u. s. w. Immer können wir in diesen Beispielen von einem Inbegriffe, von einer Vielheit und von einer bestimmten Zahl sprechen. Auf die Natur der einzelnen Inhalte kommt es also in keiner Weise an.

Diese ebenso einfache als unbestreitbare Thatsache schliesst bereits eine Klasse von Ansichten über die Entstehung der Zahlbegriffe aus, diejenigen nämlich, welche die Begriffe auf besondere Gebiete von Inhalten, z. B. auf das der physischen Inhalte, einschränken. Schon LEIBNITZ fand es nötig, gegen solche Irrthümer anzukämpfen. „Die Scholastiker", sagt er, [1] „glaubten fälschlich, die Zahl entstehe aus der blossen Theilung eines Continuums und könne nicht auf Unkörperliches angewendet werden". Aber die Zahl sei gewissermassen „eine unkörperliche Figur, entstanden aus der Vereinigung irgendwelcher Dinge (entium), z. B. Gottes, eines Engels, eines Menschen, der Bewegung, welche zusammen vier sind". Daher sei die Zahl ein „universalissimum". In demselben Sinne nennt auch LOCKE [2] „die Zahl die allgemeinste unserer Ideen, anwendbar auf Menschen, Engel, Handlungen, Gedanken, kurz auf jedes Ding, das sein oder gedacht werden kann". Der alte Irrthum hat neue Geltung erlangt in der um die Psychologie sonst so verdienten empiristischen Schule J. ST. MILL's. „Die in der Definition einer Zahl ausgesagte Thatsache ist", meint dieser Philosoph, [3] „eine physische Thatsache." „Jede von den Zahlen zwei, drei, vier u. s. w. bezeichnet physische Phaenomene und bezeichnet mit eine physische Eigenschaft

---

[1]) De arte combinatoria 1666, Opp. phil. Erdm. p. 8.

[2]) Essay Book II. chap. XVI. sect. 1.

[3]) J. ST. MILL's Logik. III. Buch, XXIV. Cap. § 5 (Gomperz' Uebersetzung II. 342. Vgl. auch II. Buch, IV. Cap. § 7 (a. a. O. I. 237), wo die Zahleneigenschaft mit den physischen Eigenschaften der Farbe, des Gewichts und der Ausdehnung parallelisirt wird.

dieser Phaenomene. Zwei zum Beispiel bezeichnet alle Paare von Dingen und zwölf alle Dutzende und bezeichnet das mit, was sie zu Paaren oder Dutzenden macht, und dies ist etwas Physisches; denn man kann nicht läugnen, dass zwei Aepfel physisch unterscheidbar von drei Aepfeln sind; zwei Pferde von einem und so fort, dass sie ein verschiedenes sicht- und greifbares Phaenomen sind." Diese Ansicht ist so handgreiflich falsch, dass man sich nur wundern muss, wie ein Denker von MILL's Range sich bei ihr beruhigen konnte. Zwei Aepfel mögen ohne Zweifel physisch unterscheidbar sein von drei Aepfeln; aber doch nicht zwei Urtheile von dreien, zwei Unmöglichkeiten von dreien u. s. w. Also kann auch der Zahlenunterschied als solcher nicht ein physicher, sicht- und greifbarer sein. Der blosse Hinweis auf die psychischen Acte oder Zustände, welche man doch ebenso gut zählen kann, wie die physischen Inhalte, schlägt die Theorie MILL's nieder. [1])

Die Entstehung des Vielheitsbegriffes durch Reflexion auf die collective Verbindung.

Wenn nun die Allgemeinbegriffe Vielheit und bestimmte Zahl zu den bezüglichen Concretis, von denen sie abstrahirt sind — den Inbegriffen bestimmter aber beliebiger Inhalte — nicht in dem Verhältnisse der physischen Eigenschaften zu physischen Dingen stehen, wie ist ihr Verhältniss dann zu fassen? Auf die Besonderheiten der colligirten und zu zählenden Inhalte kommt es, wie wir erkannten, durchaus nicht an. Wenn aber dies, wie sollen wir zu den gewünschten Allgemeinbegriffen gelangen? Wie uns den Abstractionsprocess denken, der sie liefert? Was behält man bei der Abstraction übrig als den Inhalt des Begriffes, und was ist dasjenige, wovon abstrahirt wird?

[1]) Auch bei Mathematikern finden wir häufig analoge Ansichten. Beispiele führt FREGE in seinen „Grundlagen der Arithmetik" (Breslau. W. Koebner 1884) S. 27 an.

Da wir einer vorausgeschickten Bemerkung zufolge über die Umfänge unserer Begriffe wie über ein Gegebenes verfügen dürfen, so muss es doch möglich sein, uns auf dem Wege der Vergleichung und Unterscheidung an der Hand passend gewählter Beispiele aus den bez. Umfängen, den Inhalten der intendirten Begriffe zu nähern. Von den differenten Merkmalen absehend, halten wir die überall gemeinsamen fest, als diejenigen, welche dem Inhalte des jeweiligen Begriffes angehören dürften.

Versuchen wir nun dieser Anweisung hier Folge zu leisten.

Dass uns zunächst die Vergleichung der einzelnen Inhalte, welche wir in den gegebenen Inbegriffen vorfinden, nicht den Begriff der Vielheit oder bestimmten Zahl ergeben würde, ist selbstverständlich, und es war (denn auch dieses kam vor) widersinnig dergleichen zu erwarten. Nicht jene Einzelinhalte sind ja die Unterlagen der Abstraction, sondern die concreten Inbegriffe als Ganze, in welchen sie zusammengefasst sich finden. Indessen auch durch deren Vergleichung scheint das gewünschte Resultat nicht hervorgehen zu wollen. Die Inbegriffe bestehen doch bloss aus den Einzelinhalten. Wie sollten sich also irgend welche gemeinsame Merkmale der Ganzen herausheben lassen, wenn die sie constituirenden Theile völlig heterogen sein dürfen?

Auch diese Schwierigkeit ist nur eine scheinbare. Es ist misverständlich zu sagen, die Inbegriffe beständen bloss aus den Einzelinhalten. Wie leicht man es auch übersieht, so ist doch über die Einzelinhalte hinaus etwas da, was bemerkt werden kann und was in allen Fällen, wo wir von einem Inbegriff oder einer Vielheit sprechen, notwendig vorhanden ist: die Verbindung der einzelnen Elemente zu dem Ganzen. Und es verhält sich hier, wie bei manchen anderen Klassen von Relationen; es kann bei der grössten Verschiedenartigkeit der bezogenen Inhalte, doch in Hinsicht auf die verbindenden Relationen Gleichartigkeit bestehen. So giebt es Gleichheiten, Steigerungen, continuirliche Verbindungen auf ganz heterogenen Gebieten, sie können sowol zwischen sinnlichen Inhalten als auch zwischen psychischen Acten statt haben. Es ist also recht wol möglich, dass zwei Ganze als solche gleichartig sind, obschon die sie constituirenden Theile beiderseits völlig heterogen sind.

Jene, in allen Fällen, wo von Vielheiten die Rede ist, gleichartigen Verbindungen sind nun die Grundlagen für die Bildung des Allgemeinbegriffes der Vielheit.

Was die Art des Abstractionsvorganges, der unseren Begriff liefert, anbetrifft, so werden wir sie am besten charakterisiren können, indem wir auf die Entstehungsweise anderer Zusammensetzungsbegriffe (Ganzen) hinweisen. Achten wir z. B. auf die Zusammenhänge der Punkte einer Linie, der Momente einer Zeitdauer, der Farbennüancen einer continuirlichen Farbenreihe, der Tonqualitäten einer „Tonbewegung" u. s. f., dann erlangen wir den Begriff der continuirlichen Verbindung und vermittelst desselben den Begriff des Continuums. Dieser Begriff ist nicht etwa als ein besonderer und für sich bemerkbarer Theilinhalt in der Vorstellung eines jeden concret gegebenen Continuums enthalten. Was wir im concreten Falle bemerken, das sind einerseits die Punkte, bzw. die ausgedehnten Theile, andererseits die eigenthümlichen Verbindungen derselben. Diese letzteren nun sind das überall, wo wir von Continuis sprechen, gleichartig Vorhandene, wie verschieden auch immer die absoluten Inhalte, welche sie verknüpfen, (die Orte, Zeiten, Farben, Töne etc.) sein mögen. Mit Reflexion auf diese charakteristische Verbindung von Inhalten entsteht nun der Begriff Continuum als der eines Ganzen, dessen Theile eben in der Weise continuirlicher Verbindung geeinigt sind. Oder betrachten wir, um ein anderes Beispiel zu nehmen, die ganz eigenthümliche Art, in welcher bei beliebigen Gesichtsobjecten die räumliche Ausdehnung mit der Farbe und diese wieder mit der Intensität in gegenseitiger Durchdringung verknüpft ist. Mit Hinblick auf diese Verbindungsart,[1]) können wir nun wieder den Begriff eines Ganzen bilden, dessen Theile eben auf solche Weise geeinigt sind.

Wir können überhaupt ganz allgemein sagen: Wo uns eine besondere Klasse von Ganzen entgegentritt, da kann der Begriff derselben nur entstanden sein durch die Reflexion auf eine wol charakterisirte, bei jedem Ganzen dieser Klasse gleichartige Verbindungsweise von Theilen.

Ebenso verhält es sich nun in dem Falle, der uns hier beschäftigt. Auch von einem Inbegriffe können wir sagen, er bilde ein Ganzes. Die Vorstellung des Inbegriffes gegebener Objecte ist eine Einheit, in welcher die Vorstellungen der einzelnen Gegenstände als Theilvorstellungen enthalten sind. Freilich ist diese Verbindung von Theilen, wie wir sie bei jedem beliebigen Inbegriffe vorfinden, eine im Vergleiche mit anderen Fällen der Verbindung lose und äusserliche zu nennen, ja so sehr, dass man fast Anstand nehmen möchte, hier überhaupt noch von einer Verbindung zu sprechen. Aber wie auch immer, es ist eine besondere Einigung da, und sie musste auch als solche bemerkt worden sein, da sonst nimmermehr der Begriff des Inbegriffs (der Vielheit) hätte entstehen können. Ist also unsere Auffassung richtig, dann ist der Begriff der Vielheit durch die Reflexion auf die besondere und in ihrer Besonderheit wol bemerkbare Einigungsweise von Inhalten, wie sie jeder concrete Inbegriff aufweist, in analoger Weise entstanden, wie der Begriff irgend einer anderen Art von Ganzen durch Reflexion auf die ihnen eigenthümliche Verbindungsweise.

Wir wollen von nun an zur Bezeichnung der Verbindung, welche den Inbegriff charakterisirt, den Namen **collective Verbindung** verwenden.

---

[1]) Brentano spricht hier von „metaphysischer" Verbindung; Stumpf (Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung 1873 S. 9) von dem Verhältniss „psychologischer Theile".

Ehe wir unsere Entwicklungen fortsetzen, wird es gut sein, einen naheliegenden Einwand abzuwehren. Wird die Vielheit als ein Ganzes definirt, dessen Theile durch collective Verbindungen geeinigt sind, dann ist diese Definition, so könnte man uns entgegenhalten, eine blosse Diallele. Denn sprechen wir von „Theilen", so stellen wir doch eine Vielheit vor, und da die Theile nicht individuell bestimmt sind, so stellen wir diese Vielheit allgemein vor. Wir erklären somit Vielheit durch sich selbst.

Indessen so viel Scheinbarkeit dieser Einwand auch haben möge, wir können seine Triftigkeit nicht zugeben. Zunächst sei bemerkt, dass wir es nicht auf eine Definition des Begriffes Vielheit, sondern auf eine psychologische Charakteristik der Phaenomene abgesehen haben, auf welchen die Abstraction dieses Begriffes beruht. Alles was diesem Zwecke dienen kann, müssen wir daher willkommen heissen. Der Plural „Theile" implicirt nun allerdings (abgesehen von seiner Correlation zum Begriffe des Ganzen) die allgemeine Vorstellung einer Vielheit; aber er drückt nicht aus, was diese Vielheit als Vielheit besonders charakterisirt. Indem wir hinzusetzten, die Theile seien collectivisch verbunden, wiesen wir auf den Punkt hin, auf welchem unser besonderes Interesse ruht und vermöge dessen die Vielheit eben als Vielheit anderen Ganzen gegenüber charakterisirt wird.

II. Capitel.

Kritische Entwicklungen.

Auf die Frage nach der Art der Einigung, welche im Inbegriffe vorliegt, ist die kürzeste Antwort der directe Hinweis auf die Phaenomene. Und wirklich handelt es sich hier um letzte Thatsachen. Hiemit sind wir aber nicht der Aufgabe enthoben, diese Verbindungsart genauer zu betrachten, ihre charakteristischen Verschiedenheiten von anderen hervorzuheben, zumal falsche Charakteristik und Verwechslungen mit anderen Relationsgattungen häufig genug vorgekommen sind. Wir wollen zu diesem Zwecke eine Reihe möglicher und zum Theil wirklich aufgestellter Theorien prüfen, deren jede die collective Einigung in einer anderen Weise charakterisirt und mit Beziehung darauf auch in einer anderen Weise den Ursprung der Begriffe Vielheit und Zahl zu erklären versucht.

Die collective Einigung und die Einigung der Theilphaenomene im jeweiligen Gesammtbewusstsein.

Die Verbindung der Vorstellungen zu einem Inbegriff, könnte man sagen, verdient doch kaum den Namen einer Verbindung. Was liegt denn vor, wenn wir von einem Inbegriff beliebiger Gegenstände sprechen? Nichts weiter, als dass diese Gegenstände zusammen in unserem Bewusstsein da sind. Die Einheit der Vorstellungen des Inbegriffs besteht also nur in der Angehörigkeit zu dem sie umfassenden

Bewusstsein. Immerhin ist dies aber eine Thatsache, auf die man achten kann; und so entstehen denn mit Reflexion auf sie jene Begriffe, um deren Analyse es sich hier handelt.

Diese Ansicht ist offenbar irrthümlich. Gar mannigfache Phaenomene bilden in jedem Momente den Bestand unseres Gesammtbewusstseins; aber es gehören besondere Interessen dazu, gewisse Vorstellungen aus dieser Fülle herauszuheben und collectivisch zu einigen. Und dies geschieht, ohne dass etwa alle übrigen Vorstellungen aus dem Bewusstsein entschwänden. Wäre jene Ansicht richtig, dann gäbe es in jedem Momente nur einen einzigen Inbegriff, bestehend in der Gesammtheit der vorhandenen Theilinhalte unseres Gesammtbewusstseins; während wir doch jederzeit und nach Willkür mannigfache Inbegriffe bilden, einen bereits gebildeten durch Hinzufügen neuer Inhalte erweitern, durch Hinweglassung anderer verengen können, ohne dass etwa die ausgeschiedenen aus dem Bewusstsein treten müssten; kurz wir sind uns einer Spontaneität bewusst, die sonst undenkbar wäre.

Jene Ansicht enthält aber, in ihrer allgemeinen und unbestimmten Fassung, überdies eine Absurdität. In der That, gehören nicht Continua zu dem Bestande unseres Bewusstseins mit ihrer unendlichen Menge von Punkten? Wer hätte sie jemals in der Weise eines Inbegriffs wirklich vorgestellt?

Es ist wichtig hervorzuheben, dass einem Inbegriffe (einer eigentlichen Vielheitsvorstellung) nur solche Inhalte als Elemente angehören können, deren wir uns als *für sich bemerkte* bewusst sind; alle anderen Inhalte aber, die nur als nebenbei bemerkte da sind, und die entweder überhaupt nicht für sich bemerkt werden können (wie die Punkte der Continua), oder die bloss momentan nicht für sich bemerkt werden, alle diese können nicht die Elemente abgeben, aus denen ein Inbegriff sich constituirt.

Dies Alles wird wol leichte Zustimmung finden, und der

Vertreter der eben kritisirten Ansicht dürfte seine Behauptungen alsbald dahin restringiren, dass unter dem „umfassenden Bewusstsein", welches die Vorstellungen zu einer Vielheit einige, ein besonderer Bewusstseinsact zu verstehen sei und nicht das Bewusstsein im weitesten Sinne als Gesammtheit unserer psychischen Phaenomene; so dass es sich darnach um Einheit in einem heraushebenden und zusammenfassenden Acte des Vorstellens oder um eine Einheit des Interesses oder Aehnliches handeln würde. Auf eine genauere Erwägung der solcherart corrigirten Lehre wollen wir späterhin noch zurückkommen.

Das collective Zusammen und das zeitliche Zugleich.

Wir gehen nun zu der Betrachtung einer neuen Theorie über, welche folgendermassen argumentirt:

Ist uns ein Inbegriff von Inhalten gegenwärtig, was sollten wir anderes bemerken als dies, dass jeder Inhalt da ist, zugleich mit jedem anderen. Die zeitliche Coexistenz der Inhalte ist unerlässlich für die Vorstellung ihrer Vielheit. Nun erfordert zwar ein jeder zusammengesetzte Denkact die Coexistenz seiner Theile; aber während in anderen Fällen neben der Gleichzeitigkeit noch besondere Beziehungen oder Verbindungen vorhanden sind, welche die Theile einigen, so ist es eben die auszeichnende Eigenthümlichkeit bei der Vorstellung des Inbegriffs, dass sie nichts weiter enthält als die gleichzeitigen Inhalte. Daher bedeute auch Vielheit in abstracto nichts anderes als: gleichzeitiges Gegebensein irgend welcher Inhalte.

Diese Ansicht verfällt, wie man leicht einsieht, eben denselben Einwänden wie die vorhergehende, überdies aber manchen anderen. Es wäre überflüssig die ersteren zu wiederholen; von den letzteren genügt es hervorzuheben, dass Inhalte gleichzeitig vorstellen noch nicht heisst, Inhalte als gleichzeitige vorstellen. Damit z. B. die Vorstellung einer Melodie zu Stande komme, müssen die einzelnen Töne, welche sie zusammensetzen, auf einander bezogen werden. Jede Beziehung erfordert aber das gleichzeitige Vorhandensein der bezogenen Inhalte in einem Bewusstseinsacte. Es müssen also auch die Töne der Melodie gleichzeitig vorgestellt werden. Keineswegs aber als gleichzeitige; ganz im Gegentheil erscheinen sie uns als in einer gewissen zeitlichen Aufeinanderfolge befindlich.

Nicht anders ist es in dem Falle, wo wir eine Vielheit von Gegenständen vorstellen. Dass wir die Gegenstände gleichzeitig vorstellen müssen, ist gewiss; dass wir sie aber nicht als gleichzeitige vorstellen, vielmehr besondere Reflexionen erforderlich sind, um jene Gleichzeitigkeit des Vorstellens der Objecte zu bemerken, dies beweist unmittelbar der Hinweis auf die innere Erfahrung.

Wir sehen auf diese Weise, dass das collective Zusammen nicht als ein zeitliches Zugleich beschrieben werden darf.

Collection und Succession.

Eine dritte Ansicht gründet sich ebenfalls auf die Zeit als einen unaufhebbaren psychologischen Factor. In directem Gegensatze zu der vorhergehenden argumentirt sie wie folgt:

Vermöge der discursiven Beschaffenheit unseres Denkens können überhaupt nicht mehrere von einander verschiedene Inhalte zugleich gedacht werden. Unser Bewusstsein kann in jedem Momente nur mit *einem* Gegenstande beschäftigt sein. Jede beziehende und höhere Geistesthätigkeit wird nur dadurch möglich, dass die Gegenstände, auf die sie geht, *zeitlich nacheinander* gegeben sind. So ist denn jedes complicirte Denkgebilde, jedes aus irgend welchen Theilen zusammengesetzte Ganze ein aus einfachen Factoren successive gewordenes; wir haben es stets mit schrittweisen Processen und Operationen zu thun, welche in der Zeit verlaufend, sich immer mehr verschlingen und erweitern. Im Besonderen setzt also auch jede Collection ein Colligiren, jede Zahl ein Zählen voraus, und hiemit ist notwendigerweise eine zeitliche Anordnung der zusammengefassten Gegenstände bzw. der gezählten Einheiten gegeben. Aber noch mehr als dies. Die zeitliche Aufeinanderfolge und nichts sonst ist es, was die Vielheit als Vielheit charakterisirt. Allerdings ist eine Succession überall vorhanden, wo überhaupt Inhalte in irgend welche, einfache oder complicirte, Beziehung treten und sich so zu einem Vorstellungsganzen zusammenfügen; aber immer können wir dann zugleich auch von einer Vielheit sprechen; und dies kann doch nicht geschehen mit Bezug auf irgend welche von Fall zu Fall wechselnde Relationen, sondern auf jene einzige, die überall auftritt, nämlich die zeitliche Folge. In dem Falle der denkbar losesten Verbindung, wo beliebige, sonst beziehungslose (resp. in Abstraction von etwaigen Beziehungen aufgefasste) Inhalte bloss zusammen, d. h. als Vielheit gedacht werden, da ist die Succession, mit der die Inhalte in das Bewusstsein traten, die einzige Beziehung, welche die Inhalte noch verknüpft. Was also die Vielheit gegenüber anderen und innigeren Zusammensetzungsformen kennzeichnet, ist der Umstand, dass bei ihr blosse Succession die Inhalte in Beziehung setzt, bei jenen aber nebstbei noch andere Relationen. Demgemäss folgt auch: Vielheit in abstracto ist nichts weiter als Succession, Succession irgend welcher für sich bemerkter Inhalte. Die Zahlbegriffe aber repräsentiren die bestimmten Vielheits- oder Successionsformen in abstracto.

Um die Aufmerksamkeit nicht durch wenig fruchtbare Einzelkritiken zu zersplittern, habe ich es vorgezogen, statt die einzelnen Autoren, welche solche oder ähnliche Theorien vertreten haben, der Reihe nach zu kritisiren, vielmehr die Ansicht selbst, welche ihnen mehr oder minder deutlich vorschwebt, so klar und consequent als irgend möglich darzustellen und an ihr die Kritik zu üben.

Die Ansicht, die hier bekämpft werden soll, fusst auf wesentlichen psychologischen und logischen Irrthümern.

Zunächst beruft sie sich auf die psychologische Thatsache der Enge des Bewusstseins, dieselbe jedoch übertreibend und falsch interpretirend. Es ist wahr, die Zahl der besonderen Inhalte, welchen wir in jedem Augenblicke mit Aufmerksamkeit zugewendet sein können, ist eine höchst beschränkte, ja sie schrumpft bei höchster Concentration des Interesses auf einen einzigen zusammen. Aber unwahr ist es, dass wir in einem und demselben Momente nie mehr als mit einem Inhalte beschäftigt sein können. Ja gerade die Thatsache des beziehenden und verknüpfenden Denkens, sowie überhaupt aller complicirteren Geistes- und Gemüthsthätigkeiten, auf welche jene Theorie sich beruft, lehrt evident die völlige Absurdität ihrer Auffassung. Ist jederzeit nur Ein Inhalt unserem Bewusstsein gegenwärtig, wie sollten wir auch nur die einfachste Beziehung bemerken können? Stellen wir den einen Beziehungspunkt vor, so ist der andere entweder noch nicht oder nicht mehr in unserem Bewusstsein. Einen Inhalt, dessen wir uns nicht bewusst sind, der also für uns überhaupt nicht ist, können wir nun doch nicht verknüpfen mit dem einzigen, der uns gegenwärtig und wirklich gegeben ist. Bei dieser Interpretation der Enge des Bewusstseins würde also der Hinweis auf das zeitliche Nacheinander der zu beziehenden Vorstellungen, statt die Möglichkeit des beziehenden Denkens zu begründen, ganz im Gegentheil dessen Unmöglichkeit zur Evidenz bringen.

Aber lehrt denn nicht die Erfahrung (so antwortet vielleicht der Gegner), dass wir thatsächlich immer nur eine gegenwärtige Vorstellung haben können, und dass es sehr wol möglich ist, sie mit vergangenen in Beziehung zu bringen? Damit, dass eine Vorstellung vergangen ist, hört sie also keineswegs auf zu sein.

Man sieht leicht ein, dass eine solche Antwort auf Misdeutungen der Erfahrung beruhen würde. Man darf nicht verwechseln gegenwärtige Vorstellungen mit Vorstellungen von Gegenwärtigem und vergangene Vorstellungen mit Vorstellungen von Vergangenem. Nicht jede gegenwärtige Vorstellung ist, wie wir hier von neuem betonen müssen, eine Vorstellung von Gegenwärtigem. Gerade alle Vorstellungen, die auf Vergangenes gehen, bilden eine Ausnahme; denn sie alle sind in Wahrheit gegenwärtige Vorstellungen. Erinnern wir uns z. B. eines Liedes, das wir gestern gehört haben, so ist diese Erinnerungsvorstellung doch eine gegenwärtige Vorstellung; nur wird sie von uns auf Vergangenes bezogen. Behält man dies im Auge, dann wird man natürlich keinerlei Schwierigkeit mehr darin finden, dass wir Vorstellungen gegenwärtiger Inhalte und solche vergangener Inhalte in Beziehung zu bringen vermögen. Indem wir dies thun, sind sie ja alle gleichzeitig in unserem Bewusstsein vorhanden, sie sind insgesammt gegenwärtige Vorstellungen. Dagegen können wir vergangene Vorstellungen weder unter einander noch mit gegenwärtigen beziehend verbinden; denn als vergangene sind sie unwiederbringlich und für immer dahin.

Die vermeintliche Erfahrungsthatsache, welche der Gegner im Auge hat, käme also darauf zurück, dass, wenn immer wir eine Mehrheit von Inhalten vorstellen, stets nur einer ein gegenwärtiger wäre, während alle anderen grössere oder geringere zeitliche Unterschiedenheiten aufwiesen. Natürlich würde dann jedes aus gesonderten (für sich bemerkten) Theilen zusammengesetzte Vorstellungsganze entstanden sein müssen durch successive Acte des Bemerkens und Beziehens der einzelnen Theilinhalte, während das Ganze selbst, als ein fertiges und gewordenes, alle Theile zu gleicher Zeit enthielte, nur versehen mit ungleichen zeitlichen Bestimmtheiten.

Es ist nun allerdings sicher, dass schon bei einer sehr mässigen Anzahl von Inhalten ein zusammenfassendes Bemerken derselben nur dadurch möglich ist, dass sie successive oder in ganz kleinen Gruppen aufgefasst und festgehalten werden. Sollten wir aber bei zwei oder drei sehr distincten Inhalten nicht die Fähigkeit besitzen, sie in einem Acte aufzufassen und verbunden festzuhalten, ohne dass ein successives Fortschreiten von einem zum anderen erforderlich wäre? Ich würde es nicht wagen, diese Frage so zuversichtlich zu verneinen. [1])

Wie auch immer, wir können es als eine Thatsache anerkennen, dass für die Entstehung der Mengenvorstellungen (einige wenige vielleicht ausgenommen) und aller Zahlvorstellungen die zeitliche Succession ein unerlässliches psychologisches Erfordernis bildet. Man ist daher ganz berechtigt, wenn nicht alle, so doch fast alle Mengen und Zahlen als Resultate von Processen, und sofern unser Wille hiebei betheiligt ist, als Resultate von Thätigkeiten, von Operationen des Colligirens bzw. Zählens zu bezeichnen.

Aber das ist auch Alles, was wir zugestehen können. Nur dies eine und nicht mehr ist bewiesen, dass die Succession in der Zeit eine unaufhebbare psychologische Vorbedingung für die Bildung weitaus der meisten Zahlbegriffe

---

[1]) Vielleicht wundert sich mancher Leser, dass ich mich hier zweifelnd ausdrücke, wo doch bestättigende Beispiele selbst für erheblich grössere Anzahlen so leicht beizubringen seien. Thatsächlich erfassen wir z. B. im Dominospiel Gruppen von zehn bis zwölf Punkten in einem Blick, ja wir agnosciren sogar ganz unmittelbar deren Zahl. Es ist indessen wol zu beachten, dass in solchen Fällen weder von einem wirklichen Colligiren noch von einem wirklichen Zählen die Rede sein kann. Mit der charakteristischen sinnlichen Erscheinung ist hier der Zahlname direct associirt, und er wird nun durch sie ohne jede begriffliche Vermittlung jederzeit zurückgerufen. Bei so grossen Mengen ist, wie Jeder erproben kann, eine directe und eigentliche Collection und Zählung eine Unmöglichkeit. Bei ganz kleinen Gruppen von zwei oder drei Objecten ist die Sache zweifelhaft, weil die successiven Auffassungen der Elemente so schnell erfolgt sein konnten, dass sie selbst der geschärften Aufmerksamkeit entgehen mussten. Daher die vorsichtige Ausdrucksweise im Text.

und concreten Vielheiten — so gut wie aller complicirteren Begriffe überhaupt — bildet. Sie haben ein zeitliches Werden, und durch dieses erhält jeder Bestandtheil des gewordenen Ganzen eine andere zeitliche Bestimmtheit in unserer Vorstellung. Ist aber damit auch erwiesen, dass die zeitliche Ordnung in den Inhalt jener Begriffe eingehe oder gar die besondere Relation sei, welche die Mehrheiten als solche anderen Zusammensetzungsbegriffen gegenüber charakterisire? Häufig genug begnügte man sich mit solch' dürftigen Argumentationen, ohne zu bedenken, dass die Zeit genau in gleicher Weise für j e d e s höhere Denken die Grundlage bilde und man z. B. mit eben demselben Rechte folgern könnte, die Beziehung zwischen Praemissen und Schlusssatz sei identisch mit ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge. Indessen von dieser offenbaren Unzuträglichkeit ist die Fassung, welche wir der Zeit-Theorie für unsere Zwecke gaben, bereits befreit. Ihre Behauptung geht nur dahin, dass der Fall des Inbegriffes (der concreten Vielheit) vor demjenigen irgend eines anderen zusammengesetzten Ganzen dadurch ausgezeichnet sei, dass bei ihm b l o s s e Succession der Theilinhalte vorliege, bei anderen Ganzen jedoch ü b e r d i e s noch irgend welche a n d e r e Verbindungen. Sie argumentirt also nicht schlechtweg: weil das Zählen zeitliche Succession der Vorstellungen erfordert, ist die Zahl die zusammenfassende Form des Successiven in abstracto; sondern sie meint auch zeigen zu können, dass die zeitliche Aufeinanderfolge das einzig Gemeinsame in allen Fällen der Vielheit bilde und darum die Grundlage für die Abstraction dieses Begriffes bilden müsse.

Aber auch so gefasst, können wir der Theorie nicht beistimmen. Wäre sie im Rechte, dann fehlte doch jeder verständliche Unterschied zwischen den Begriffen Vielheit und Succession, die wol Niemand ernstlich identificiren wird. Welchen Sinn hätte es denn sonst von einer Vielheit g l e i c h - z e i t i g e r Inhalte zu sprechen? Die Entstehung des Begriffes der zeitlichen Coexistenz wäre von diesem Standpunkte aus ein unfassbares Rätsel.

Und in gleicher Weise können wir überhaupt jeden irgend erdenklichen Versuch, die Begriffe der Vielheit und Anzahl durch den Hinweis auf die zeitliche Folge aufzuhellen, als von vornherein aussichtslos bezeichnen. Folgende einfache Betrachtung bringt dies zur Evidenz. Soll die zeitliche Folge in welcher Form auch immer zum Inhalte der genannten Begriffe einen Beitrag leisten, dann würde es nicht genügen, dass sie in den zugehörigen concreten Fällen überall zu constatiren sei, sondern sie müsste auch wirklich in allen Fällen den Gegenstand besonderer Beachtung bilden. Dies aber trifft sicher nicht zu. Wir achten nicht immer auf die zeitlichen Beziehungen, und eben darum sind wir befähigt zu unterscheiden zwischen einer Vielheit schlechthin und einer Vielheit aufeinanderfolgender (oder gleichzeitiger) Inhalte. Immer wieder ist dieser Fehler auf der einen Seite begangen, auf der anderen gerügt worden; zeitlich succedirende Inhalte wahrnehmen, heisst noch nicht, Inhalte als zeitlich succedirende wahrnehmen, ein Satz, den wir auch in Betreff gleichzeitiger Inhalte gelegentlich (S. 20) betonen mussten. Von besonderer Wichtigkeit aber ist es, zu beachten — und dies ist ein Punkt, der in der Regel übersehen wird — dass, selbst wo wir auf ein zeitliches Folgen von Inhalten merken, keineswegs schon bestimmte Vielheiten herausgehoben sind. Dies leisten erst gewisse zusammenfassende psychische Acte. Sie übersehen, heist eben das ausser Acht lassen, was die wahre und alleinige Quelle des Begriffes der Vielheit, sowie der Zahlbegriffe bildet. Beispiele mögen dies Alles verdeutlichen.

Die Uhr schlägt ihr einförmiges Tik-Tak; ich höre die einzelnen Schläge, aber es braucht mir nicht beizufallen, auf ihre zeitliche Folge zu achten. Und selbst wenn ich darauf achte, so ist damit noch nicht irgend eine Anzahl von Schlägen herausgehoben, durch ein zusammenfassendes Bemerken zu einem Inbegriff geeinigt. Oder ein anderes Beispiel: Die Augen schweifen nach verschiedenen Richtungen umher, bald diesen, bald jenen Gegenstand fixirend und solcherart nacheinander mannigfaltige Vorstellungen anregend. Aber ein besonderes Interesse ist notwendig, wenn die zeitliche Folge für sich bemerkt werden soll. Und um alle oder einige der bemerkten Gegenstände für sich festzuhalten, auf einander zu beziehen und in einen Inbegriff zusammenzufassen, dazu gehören abermals besondere Interessen und besondere, auf diese herausgehobenen Inhalte und keine anderen gerichtete Acte des Bemerkens. Selbst wenn also die zeitliche Folge, in welcher die Gegenstände colligirt werden, stets beachtet würde, bliebe sie immer noch unfähig, für sich allein die Einheit des collectiven Ganzen zu begründen. [1]) Da wir aber nicht einmal zugestehen können, dass das zeitliche Nacheinander auch nur als constanter und allezeit beachteter

[1]) Durch Uebersehen dieses Umstandes ist auch der neueste Zergliederer des Zahlbegriffes, W. Brix, in Irrthümer verfallen, in seinem psychologisch unhaltbaren Versuch, „die Zahl der Zeitanschauung oder Anzahl“ als die zweite genetische Stufe in der Entwicklung des Zahlbegriffes zu fassen, dessen erste durch „die Zahl der Raumanschauung“ repräsentirt sein soll. (Wundt, Philos. Studien V, S. 671 u. ff.) Aus der Möglichkeit, die successive Setzung von Einheiten beliebig weit fortzusetzen, zieht Brix nämlich den sehr gewagten Schluss (a. a. O. S. 675), dass auf solchem Wege beliebig grosse Zahlen gebildet werden könnten. Aber das blosse Nacheinander der wiederholten Setzungen gewährleistet doch noch keine Synthesis, ohne welche die collective Einheit der Zahl undenkbar ist. Eben an der Unfähigkeit des wirklichen Vollzuges solcher Synthesis scheitert thatsächlich, wie wir noch erörtern werden, jeder Versuch, die höheren Mengen und Zahlen in eigentlicher Vorstellung zu bilden. Durch einfachsten Versuch hätte sich Brix davon überzeugen können, dass schon neunzehn Einheitssetzungen von zwanzig nicht scharf zu unterscheiden sind, es sei denn durch indirecte Mittel der Symbolisirung, welche für die wirklichen Synthesen surrogiren. Ohne die Möglichkeit solcher Unterscheidung kann aber natürlich von einer wirklichen Bildung der betreffenden Zahlen in Form von Folgen gesetzter Einheiten nicht gesprochen werden.

Bestandtheil in die Vorstellung eines jeden Inbegriffs eingehe, so ist klar, dass es um so weniger in den entsprechenden Allgemeinbegriff (Vielheit, Zahl) irgendwie eintreten kann.

Mit vollem Recht sagt HERBART[1]): „Die Zahl hat mit der Zeit nicht mehr gemein, als hundert andere Vorstellungsarten, die auch nur allmälig konnten erzeugt werden"; und ebenso drastisch als zutreffend drückt denselben Gedanken BENEKE[2]) aus: „Dass über dem Zählen Zeit verfliesst, kann keinen Beweis abgeben: denn worüber verflösse wohl nicht Zeit."

Würde es sich blos darum handeln, das Phaenomen zu beschreiben, welches vorliegt, wenn wir eine Vielheit vorstellen, dann müssten wir gewiss der zeitlichen Modificationen, welche die einzelnen Inhalte erleiden, Erwähnung thun, obgleich sie in der Regel nicht besonders beachtet werden. Aber abgesehen davon, dass ebendasselbe für jedes zusammengesetzte Ganze gilt, so muss doch überhaupt unterschieden werden zwischen dem Phaenomen als solchem und dem, wozu es uns dient oder was es uns bedeutet; und demgemäss auch zwischen der psychologischen Beschreibung eines Phaenomens und der Angabe seiner Bedeutung. Das Phaenomen ist die Grundlage für die Bedeutung, nicht aber sie selbst. Ist ein Inbegriff von Gegenständen A, B, C, D in unserer Vorstellung, dann wird, mit Rücksicht auf den successiven Process, durch welchen das Ganze entsteht, schliesslich vielleicht nur D als Empfindungsvorstellung gegeben sein, die übrigen Inhalte aber bloss als Phantasievorstellungen in zeitlich und auch sonst inhaltlich modificirter Weise. Gehen wir umgekehrt von D aus gegen A hin, dann ist das Phaenomen ein anderes. Alle diese Unterschiede hebt die logische Bedeutung auf.

---

1) Psychologie als Wissenschaft. Königsberg 1824. II, 162.
2) System der Logik. Berlin 1842. I, 279.

Die modificirten Inhalte dienen als Zeichen, als Vertreter für die unmodificirt gewesenen. Indem wir die Inbegriffsvorstellung bilden, achten wir nicht darauf, dass mit den Inhalten im Fortgange des Colligirens Veränderungen vorgehen; wir meinen sie wirklich festzuhalten und zu einigen, und so ist denn der logische Inhalt jener Vorstellung nicht etwa D, jüngst vergangenes C, früher vergangenes B, bis zu dem am stärksten veränderten A, sondern nichts Anderes als (A, B, C, D); die Vorstellung befasst jeden einzelnen der Inhalte ohne Rücksicht auf die zeitlichen Unterschiede und die darauf gegründete zeitliche Anordnung.

Wir sehen also, die Zeit spielt für unsere Begriffe nur die Rolle einer psychologischen Vorbedingung und dies in doppelter Weise:

1) Es ist unerlässlich, dass die in der Vorstellung der Vielheit bzw. Anzahl geeinigten Theilvorstellungen zugleich in unserem Bewusstsein vorhanden sind.

2) Fast alle Vielheitsvorstellungen und jedenfalls alle Zahlvorstellungen sind Resultate von Processen, sind aus den Elementen successive entstandene Ganze. Insofern trägt jedes Element eine andere zeitliche Bestimmtheit an sich.

Wir erkannten aber, dass weder die Gleichzeitigkeit, noch die Aufeinanderfolge in der Zeit in den Inhalt der Vielheits- und somit auch der Zahlvorstellungen irgendwie eintreten.

Bekanntlich schien bereits ARISTOTELES Zeit und Zahl in nahen Zusammenhang zu bringen, indem er definirte: die Zeit ist die Zahl der Bewegung nach früher und später. Indessen erst seit KANT ist es allgemeiner üblich geworden, die ‚Anschauungsform' der Zeit als das Fundament des Zahlbegriffes zu betonen. Gewiss geschah dies weit mehr zufolge der Autorität seines Namens als der Kraft seiner Argumentationen. Einen ernstlichen Versuch einer logischen oder psychologischen Analyse des Zahlbegriffes finden wir bei KANT nicht. Einheit, Vielheit und Allheit bilden nach seiner Metaphysik die Kategorien der Quantität. Die Zahl ist das transscendentale Schema der Quantität. Ausführlich spricht sich KANT in der Kritik der reinen Vernunft[1]) folgendermassen aus: „Das reine Schema der Grösse aber (quantitatis), als eines Begriffes des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbefasst; also ist die Zahl nichts Anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch dass ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge".

Die Stelle ist dunkel und will sich auch nicht recht mit den Erklärungen, welche KANT von der Function des Schema giebt, zusammenreimen. Diese selbst sind freilich nicht gerade uniform. So sagt er:[2]) „Wir wollen diese formale und reine Bedingung der Sinnlichkeit, auf welche der Verstandesbegriff in seinem Gebrauch restringirt ist, das Schema dieses Verstandesbegriffes ... nennen". Hingegen heisst es einige Zeilen weiter: „Die Vorstellung .. von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff sein Bild zu verschaffen, nenne ich das Schema zu diesem Begriffe".

Uebertrügen wir diese letztere Bestimmung auf das Schema der Quantität, dann müssten wir sagen: die Zahl ist die Vorstellung von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, dem Begriff der Quantität sein Bild zu verschaffen. Indessen mit diesem Verfahren kann doch nur das Zählen gemeint sein. Ist es aber nicht klar, dass ‚Zahl' und ‚Vorstellung des Zählens' nicht dasselbe ist? Es ist ferner

---

[1]) KANT's sämmtliche Werke herausgegeben von Hartenstein III, S. 144.

[2]) a. a. O. S. 142.

nicht eben leicht einzusehen, wie wir a priori, von der Kategorie der Quantität aus, vermittelst der Zeitvorstellung (als des gemeinsamen Schema aller Kategorien) zu den einzelnen bestimmten Zahlbegriffen gelangen sollten; und noch weniger leuchtet die Notwendigkeit ein, die uns bestimmt, einer concreten Vielheit eine gewisse und stets dieselbe Zahl zuzuschreiben, die eben, von welcher wir sagen, sie komme ihr zu. Die Lehre vom Schematismus der reinen Verstandesbegriffe scheint hier, wie auch sonst, den Zweck zu verfehlen, für den sie besonders geschaffen wurde.

Wir können davon absehen, die Philosophen, welche nach KANT den Zahlbegriff auf die Vorstellung der Zeit gründeten, aufzuzählen. Anhänger des extremen Empirismus, wie z. B. ALEXANDER BAIN [1]) berühren sich hier mit denjenigen des Kant'schen Apriorismus. Von mathematischer Seite seien hier zwei berühmte Namen erwähnt. SIR W. ROWAN HAMILTON nennt die Algebra geradezu „the science of pure time", auch „the science of order in progression". [2]) In Deutschland ist es H. von HELMHOLTZ, welcher in seiner Abhandlung „Ueber Zählen und Messen" [3]) denselben Standpunkt vertritt. Wir werden noch später Anlass finden, uns mit dieser Abhandlung gründlich zu beschäftigen. [4])

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die meisten unter den Forschern, welche für die Entwicklung der Zahlbegriffe, sowie der Grundsätze der Arithmetik die Vorstellung der Reihe statt der der Menge zu Grunde legten, durch die Zeit-Theorie wesentlich beeinflusst waren.

---

[1]) BAIN, Logic. Part. II. p. 201, 203. Man vgl. die treffende Kritik der BAIN'schen Lehren in SIGWART's Logik. II, S. 39 ff.

[2]) Vgl. H. HANKEL, Theorie der complexen Zahlensysteme S. 17.

[3]) Philosophische Aufsätze. EDUARD ZELLER zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet. 1887.

[4]) Vgl. den Anhang zum I. Theile d. W.

Die collective und die räumliche Synthesis.

A. F. A. LANGE's Theorie. Während KANT die Zahl in eine enge Beziehung zur Zeitvorstellung setzte, meint F. A. LANGE, dass Alles, was bei jenem die Zeit leiste, weit einfacher und sicherer aus der Raumvorstellung abgeleitet werden könne. „Schon BAUMANN", sagt er, [1]) „hat gezeigt, dass die Zahl weit besser mit der Raumvorstellung als mit derjenigen der Zeit in Einklang stehe. . . . Die ältesten Ausdrücke für die Zahlwörter bezeichnen, soweit wir ihren Sinn kennen, überall Gegenstände im Raum mit bestimmten Eigenschaften, welche der Zahl entsprechen, so z. B. Viereckiges der Zahl vier. Wir sehen daraus auch, dass die Zahl ursprünglich nicht etwa durch systematisches Hinzufügen von Einem zu Einem entsteht, sondern dass jede der kleineren, dem später entstehenden System zu Grunde liegenden Zahlen durch einen besonderen Act der Synthesis der Anschauungen gebildet wird, worauf dann erst späterhin die Beziehungen der Zahlen zu einander, die Möglichkeit des Addirens u. s. w. erkannt werden".

„Es ist der Raumvorstellung eigen, dass sich innerhalb der grossen, allumfassenden Synthesis des Mannigfaltigen mit Leichtigkeit und Sicherheit kleinere Einheiten der verschiedensten Arten aussondern lassen. Der Raum ist daher das Urbild nicht nur der continuirlichen sondern auch der discreten Grössen, und zu diesen gehört die Zahl, während wir die Zeit kaum anders [wie] als Continuum denken können. Zu den Eigenschaften des Raumes gehören ferner nicht nur die Verhältnisse, welche zwischen den Linien und Flächen geometrischer Figuren stattfinden, sondern nicht minder die Verhältnisse der Ordnung und Stellung discreter Grössen. Werden solche discrete Grössen als unter sich gleichartig

[1]) Logische Studien. 1877. S. 140.

betrachtet und durch einen neuen Act der Synthesis zusammengefasst, so entsteht die Zahl als Summe". [1])

„Jeden Zahlbegriff erhalten wir", sagt LANGE an einem anderen Orte, [2]) „ursprünglich als das sinnlich bestimmte Bild einer Gruppe von Gegenständen, seien es auch nur unsere Finger oder die Knöpfe und Kugeln einer Zählmaschine".

Unsere Kritik wird nicht erst weit nach Anhaltspunkten suchen müssen. Besonderen Anstoss erregt das letzte Citat; denn der uns wolbekannte Allgemeinbegriff der Zahl erscheint hier als ein individuelles Phaenomen, als das sinnlich bestimmte Bild einer Gruppe von Raumdingen. Indessen mag hier wol nur eine ungenaue Ausdrucksweise vorliegen; die Meinung geht wahrscheinlich dahin, dass die Zahl etwas in der Weise einer sinnlichen Eigenschaft an derartigen Gruppen Bemerkbares und durch Abstraction Herauszuhebendes ist. Es tritt hier deutlich der Einfluss J. ST. MILL's hervor, welcher, wie wir oben [3]) hörten, die Zahl als eine sinnliche Eigenschaft betrachtet, die er in eine Parallele setzt mit der Farbigkeit, Wägbarkeit u. s. w. Während aber MILL auf eine weitere Erklärung des Zahlunterschiedes ausdrücklich Verzicht leistet, indem er ihn, wie es scheint, als etwas Letztes, nicht weiter Definirbares betrachtet — genau so wie eben den Unterschied der Farbe oder des Gewichtes — glaubt LANGE dessen Quelle in der Natur und den Eigenschaften der Raumvorstellung nachweisen zu können. Die Synthesis, auf welche der Begriff der Zahl sich gründet (in unserer Ausdrucksweise die ‚collective Verbindung'), ist ihm eine Synthesis räumlicher Anschauungen. Ganz in derselben Art wie die Geometrie soll demgemäss die Arithmetik auf räumlicher Anschauung beruhen. Eigenthümlichkeiten dieser letzteren sollen es sein, welche die einleuchtende Wahrheit der

[1]) Logische Studien. 1877. S. 141.

[2]) Geschichte des Materialismus II³, 26.

[3]) Vgl. die Citate S. 11.

arithmetischen Axiome und den ihnen innewohnenden Charakter absoluter Notwendigkeit begründen.[1])

Diese Theorie überrascht durch die Kühnheit, mit der sie dem klaren Zeugniss der inneren Erfahrung Trotz bietet. Sind denn bloss räumlich vertheilte Inhalte zählbar, wird man sofort fragen? Sprechen wir nicht z. B. von vier Cardinaltugenden, von zwei Praemissen eines Schlusses? Welche räumliche Stellung oder Ordnung ist bei irgend welchen psychischen Acten oder Zuständen, indem wir sie zählen, die Grundlage der Zahlbezeichnung?

Vor diesem Einwande würde LANGE freilich nicht zurückschrecken; führt er doch nicht bloss das mathematische, sondern alles logische Denken auf Raumanschauung zurück, alles Psychische ist ihm localisirt. Es ist hier nicht der Ort, diese eigenthümliche Ansicht, welche mir gänzlich haltlos erscheint, einer umfassenden Kritik zu unterwerfen. Nur diejenigen Punkte sollen hervorgehoben werden, die speciell die arithmetischen Probleme betreffen.

Selbst wenn wir die LANGE'sche Grundansicht zugäben, wäre in Beziehung auf die Raumvorstellung nicht mehr bewiesen, als früher in Beziehung auf die Zeitvorstellung zugestanden ward; sie würde eine unaufhebbare psychologische Vorbedingung für die Entstehung des Zahlbegriffes bilden, aber dies nicht mehr und nicht anders als für die Entstehung aller anderen Begriffe. Käme aber auch allen Inhalten, die wir denkend verbinden, räumliche Bestimmtheit zu, so bliebe es immer noch zweierlei: räumlich bestimmte Inhalte vorstellen und Inhalte nach ihren räumlichen Bestimmtheiten vorstellen. Allerdings ist hiemit noch nicht ausgemacht, ob nicht trotzdem die Raumvorstellung für den I n h a l t des Zahlbegriffes einen besonderen Beitrag leiste. Man sieht leicht, dass dies nicht der Fall ist. Vergegenwärtigen wir

---

[1]) Logische Studien S. 140.

uns an irgend welchem Beispiele, wie wir räumliche Objecte collectivisch zusammenfassen oder zählen. Achten wir da stets und notwendig auf die Verhältnisse der Stellung und Ordnung? Gewiss nicht. Unendlich viele Stellungen und Ordnungen giebt es, die Zahl aber bleibt unverändert. Zwei Aepfel bleiben zwei Aepfel, ob wir sie nähern oder entfernen, ob wir sie nach rechts verschieben oder nach links, nach oben oder nach unten. Die Zahl hat eben mit der räumlichen Lage nichts zu thun. Mögen immerhin die Relationen der Stellung und Ordnung bei der Vorstellung einer Vielheit von Raumgegenständen im Phaenomen implicite mitvorgestellt sein; sicher ist es, dass sie bei der Zusammenfassung und Zählung nicht die Objecte des aussondernden und den Inhalt des Zahlbegriffes bestimmenden Interesses bilden.

Lange betont aber nicht bloss die räumliche Natur der gezählten Inhalte und deren räumliche Beziehungen; es müssen nach ihm, damit die Zahlvorstellung entstehe, die einzelnen Inhalte auch als unter sich gleichartig betrachtet und durch einen besonderen Act der Synthesis einheitlich zusammengefasst werden. Den ersten Theil der Behauptung lassen wir dahingestellt; die Frage, ob mit dem Zählen notwendig ein Vergleichen Hand in Hand gehe, soll späterhin genauer erwogen werden. Wichtiger ist für uns der zweite Punkt, nämlich der Hinweis auf besondere Acte der Synthesis, durch welche die Zahlvorstellungen zu Stande kommen. Lange scheint es also selbst gefühlt zu haben, dass die „allumfassende Synthesis" des Raumes, mit anderen Worten, dass die räumlichen Beziehungen oder Verbindungen nicht hinreichen, um die Einigung der gezählten Inhalte in der Zahl zu charakterisiren. Gleichwol ist er von einer klaren Einsicht so weit entfernt, dass er wiederholt die Raumvorstellung als das „Urbild aller Synthesis" und im Besonderen als das „Urbild der discreten

Grössen" (und zu diesen gehöre die Zahl) bezeichnet. Die Unklarheit des Gedankens verrät sich schon an der Verschwommenheit der Ausdrücke. Was soll dieser eigenthümliche Ausdruck „Urbild" besagen? Es muss wol eine Art bildlicher Aehnlichkeit gemeint sein. Wie soll aber eine bildliche Aehnlichkeit vorhanden sein zwischen der Synthesis der „discreten Grössen" (also Vielheit und Zahl), welche in einem einigenden psychischen Acte besteht, und der Synthesis der Raumvorstellung, welche die Verbindung von Theilen einer Anschauung, also eine Verbindung im Vorstellungsinhalte ist?

Lange's Ansicht wird uns etwas verständlicher, wenn wir den Zusammenhang beachten, in welchem die citirten Stellen sich befinden. Er streift die Fragen nach der Entstehung und dem Inhalt der Zahlvorstellungen bei Gelegenheit ausgedehnter metaphysischer Betrachtungen über den von Kant eingeführten „äusserst folgenreichen Begriff der Synthesis". Einige Bemerkungen über die Kant'sche Lehre von der Synthesis, an welche Lange anknüpft, dürften hier am Platze sein, zumal sie auch für die von uns angestrebte Charakteristik der collectiven Synthesis von Interesse ist.

Den Terminus Synthesis (Verbindung) gebraucht Kant in einem doppelten Sinne: erstens in dem Sinne der Einheit der Theile eines Ganzen, sei es der Theile einer Ausdehnung, sei es der Eigenschaften eines Dinges, sei es der Einheiten einer Zahl u. s. w.; zweitens in dem Sinne der geistigen Thätigkeit („Verstandeshandlung") des Verbindens. Es handelt sich hier um eine Aequivocation durch Uebertragung; denn beide Bedeutungen stehen bei Kant dadurch in enger Beziehung, dass nach seiner Ansicht ein jedes Ganze, welcher Art es auch immer sei, ein durch die Selbstthätigkeit des Geistes aus seinen Theilen Gewordenes ist. Synthesis bedeutet ihm also zugleich das Verbinden (den Beziehungsact) und das Resultat des Verbindens (den Beziehungsinhalt). Indem er nun beide

Bedeutungen vermengt, gelangt er dazu, die Verbindung überhaupt, auch dort, wo nur eine Verbindung in dem Sinne eines primären Vorstellungsinhaltes gemeint sein konnte, geradezu als „Actus der Selbstthätigkeit“, als „Verrichtung des Verstandes“ zu bezeichnen.[1]) Dadurch wird auch KANT's eigenthümliche Ansicht über die Entstehung der Vorstellung der Verbindung verständlich. Besteht alle Verbindung nur durch verbindende Acte, und liegt nur in ihnen deren Einheit, dann kann selbstredend die Vorstellung der Verbindung nur erlangt sein durch Reflexion auf solche Acte. Dies ist denn auch KANT's Meinung. Freilich drücken wir uns gewöhnlich so aus, als kämen die Beziehungen und Verbindungen den Objecten selbst zu, als würde es sich bei den Relationen nicht anders als bei den absoluten Inhalten nur um ein passives Aufnehmen und Bemerken handeln. Nach KANT wäre dies nur Schein. Er sagt ausdrücklich: „Verbindung liegt nicht in den Gegenständen und kann von ihnen nicht etwa durch Wahrnehmung entlehnt und in den Verstand dadurch allererst aufgenommen werden, sondern ist allein eine Verrichtung des Verstandes, der selbst nichts weiter ist, als das Vermögen a priori zu verbinden. . . .[2]) Und ebenso heisst es an einer anderen Stelle, „dass wir uns nichts als im Objecte verbunden vorstellen können, ohne es vorher selbst verbunden zu haben und unter allen Vorstellungen die V e r b i n d u n g die einzige ist, die nicht durch Objecte gegeben, sondern nur vom Subjecte verrichtet werden kann, weil sie ein Actus der Selbstthätigkeit ist“.[3])

Von dieser KANT'schen Lehre geht LANGE aus. Die oben erwähnte Aequivocation im Begriffe Synthesis hat er nicht beseitigt, und sie trug ohne Zweifel zu den vielfachen

---

1) Man vgl. das weiter unten folgende Citat.

2) Kritik d. r. V. § 16 d. 2. Auflage. S. W. III. Bd. S. 117 der Hartenstein'schen Ausgabe.

3) Ebendaselbst § 15 S. 114.

Unklarheiten seiner eigenen Aufstellungen wesentlich bei. So spricht er einerseits von synthetischen Begriffen, von der Synthesis der Raumvorstellung u. dgl., andererseits von der Synthesis als einem „schaffenden Acte unseres Geistes", von besonderen Acten der Synthesis der Anschauungen, welche die Zahlvorstellungen liefern [1]) u. s. w. In anderer Hinsicht weicht er aber nicht unerheblich von KANT's Auffassung ab, wonach der Begriff der Synthesis nicht durch Analyse und Abstraction aus den primären Inhalten, sondern nur im Hinblick auf die Verstandeshandlung des Verbindens gewonnen werde. LANGE gieng vielleicht von der Beobachtung aus, dass diese Ansicht mit der Erfahrung in gewissem Widerspruch stehe. Bei den meisten zusammengesetzten Vorstellungen bemerken wir, wenn sie uns analysirt gegeben sind, sehr wol die Verbindung ihrer Theilinhalte aber nicht das Mindeste von einer zusammensetzenden, jene inhaltliche Verbundenheit erst schaffenden Thätigkeit. Z. B. die Verbindung der Farbe und der Ausdehnung eines Dinges ist nicht und implicirt auch nicht die Vorstellung einer psychischen Activität, sondern ist etwas der Anschauung selbst Angehöriges und in ihr Bemerkbares. Dasselbe gilt bei den Relationen des Abstandes, der Richtung u. s. w. Wollte LANGE nun gleichwol den KANT'schen Gedanken, dass jede Verbindung auf einer verbindenden Thätigkeit beruhe, festhalten, dann blieb nur die Annahme übrig, dass in solchen Fällen die verbindende Thätigkeit, obwol wir von ihr nichts wahrnehmen, doch vorhanden sei, dass sie also eine unbewusste sei, während das, was sie schöpferisch bewirke, die Vor-

[1]) Vgl. neben den obigen Citaten die Gesch. d. Materialism. II. Bd. S. 119—121 d. 3. Aufl. In den Log. Studien S. 136 erklärt er, wir hätten „in diesem Ausdruck [Synthesis] zunächst nicht viel mehr als eine Fixirung der Thatsache, dass sich in allen unseren Vorstellungen Einheit und Mannigfaltigkeit findet . . ." Wenige Zeilen später ist aber von der Thatsache der Synthesis als von einem ‚Vorgange' die Rede, „durch welchen wir als Subject erst entstehen".

stellung der Verbindung in unser Bewusstsein falle. Jedenfalls ist dies der Weg, den LANGE einschlägt; und er verfolgt ihn bis in's Extrem. Die Vorstellung der Verbindung gewinnen wir nach ihm, sowie jede andere Vorstellung, durch Analyse und Abstraction aus den primären Inhalten. Was aber die von KANT ausschliesslich und einseitig betonten synthetischen Acte anbetrifft, durch welche die inhaltlichen Verbindungen erst geschaffen sein sollen, so werden sie in den transscendentalen Hintergrund des Lebens verlegt, der dem Bewusstsein vorhergeht, weshalb sie natürlich zur Entstehung des Begriffes der Verbindung nichts beitragen können.

Wie KANT verfolgt hier auch LANGE hauptsächlich metaphysische Tendenzen. Das Bewusstsein selbst und damit Subjectivität soll aus den unbewussten Eindrücken erst durch einen Vorgang höchster Synthesis entstehen. So ist die Einheit des Bewusstseins erklärt. Ihr correspondirt nun als höchste Synthesis des Bewusstseinsinhaltes die „allumfassende Synthesis“ der Raumvorstellung; denn „der Raum ist die Form aller Objecte“ (p. 148). Wie fernerhin jene oberste Synthesis in dem Ganzen der Raumvorstellung, so objectivirt sich jeder einzelne synthetische Act in anschaulichen Synthesen von Raumbildern. Alle Verbindung ist also im Grunde genommen räumliche Verbindung und Beziehung. „In der Raumvorstellung“ sagt LANGE ausdrücklich, „finden wir die Anschauung zu den Begriffen des Zusammenhanges und der Trennung, der Aequivalenz und der Verhältnisse eines Ganzen zu seinen Theilen, eines Dinges zu seinen Eigenschaften“.[1]) Daher ist alles logische und mathematische Denken ein Denken in Raumbildern; daher ist insbesondere „der Raum überall der Ursprung alles Apriorischen“. In der That handelt es sich in den apriorischen Wissenschaften (der formalen Logik und Mathematik) jederzeit um ein Fortschreiten innerhalb

[1]) Log. Stud. S. 148.

einer Kette in sich zusammenhängender Relationen. Jedes Axiom beurtheilt Verhältnisse zwischen Verhältnissen. Wenn nun der Raum auch in dem Sinne Form allen Inhaltes ist, dass nicht bloss kein absoluter Inhalt, sondern auch kein Relationsinhalt denkbar ist, der nicht in den Eigenschaften der Raumvorstellung, in ihren Beziehungen und Verbindungen seine Anschauungsgrundlage hätte, dann intervenirt freilich bei einer jeden apriorischen Erkenntnis die Raumvorstellung als unentbehrliche Vermittlerin.

Nach alledem versteht man die eigenthümlichen Ausdrücke LANGE's, der Raum sei das Urbild aller Synthesis und im Besonderen das Urbild der Zahlen; man versteht, welch bedeutsame Rolle der Raumvorstellung nicht bloss für die Entstehung der Zahlvorstellungen, sondern auch für die ganze philosophische Theorie der arithmetischen Wissenschaft als einer apriorischen und somit auf Raumanschauung begründeten zugedacht ist.

Absichtlich bin ich viel tiefer, als es für unsere allernächsten Zwecke erforderlich war, auf die Darlegung der Ansichten LANGE's eingegangen. Die nun folgende Kritik widerlegt, obschon sie ausschliesslich auf die uns hier allein interessirenden Punkte reflectirt, auch die LANGE'sche Theorie der arithmetischen Erkenntnis, eine Theorie, die bekanntlich Schule gemacht hat und mit Rücksicht auf die weiteren Ziele unserer Untersuchungen nicht übergangen werden konnte.

Die Lehre von der Synthesis, die wir eben kennen gelernt haben, ist unhaltbar und beruht auf wesentlichen Missverständnissen. KANT übersah, dass viele inhaltliche Verbindungen uns gegeben sind, bei denen von einer synthetischen, die inhaltliche Verbundenheit schaffenden Thätigkeit nichts zu merken ist. LANGE wieder nimmt gar keine Rücksicht auf diejenigen Fälle, wo zusammengesetzte Vorstellungen ihre Einheit einzig und allein synthetischen Acten verdanken, während im primären Inhalte eine Verbindung nicht vorhanden ist oder nicht in Betracht kommt. Nach ihm soll alle Verbindung im Inhalte und zwar vermöge der allen Inhalt umspannenden Raumform statthaben. Dies ist falsch. Gerade die Begriffe Vielheit und Zahl widerstreben dieser Auffassung. Die Verbindung der colligirten Inhalte in der Vielheit, der gezählten in der Zahl ist nicht eine räumliche Verbindung, so wenig sie als eine zeitliche (und wie wir sogleich hinzufügen können, so wenig sie als eine andere Verbindung im primären Inhalte) aufgefasst werden kann. Ist der Raum allumfassende Form, dann einigt er nicht bloss die eben gezählten, sondern diese mit allen überhaupt vorhandenen Inhalten. Was macht aber z. B. die besondere Einheit der gerade gebildeten Collection von fünf Dingen aus, um derentwillen ihrer eben fünf sind? Und mögen die Verknüpfungen dieser fünf Dinge sein welche auch immer — können wir nicht im nächsten Moment von denselben bloss zwei, drei oder vier durch einen einigenden Act des Interesses herausheben, ohne die factisch vorhandenen inhaltlichen Verbindungen (z. B. Abstände, physische Verbindungen oder dgl.) im geringsten zu tangiren?

Man sieht, dass die Synthesis unserer Begriffe nicht im Inhalte, sondern nur in gewissen synthetischen Acten liegen und daher auch nur in Reflexion auf sie bemerkt werden kann. LANGE selbst muss dies wol gefühlt haben, da er auf besondere Acte der Synthesis der Anschauungen Gewicht legt. Aber wie reimt sich dies mit seinen sonstigen Lehren? Diese Acte sind doch nicht als etwas Räumliches zu fassen. Es wäre jedenfalls eine pure Absurdität, solches anzunehmen.

So ist es klar, dass weder die Zahlbegriffe noch die Zahlverhältnisse, geschweige denn die ganze Arithmetik mit der Raumvorstellung etwas zu schaffen haben. Der Satz, der Raum sei das Urbild der Zahlen, hat, wie wir ihn auch drehen und wenden mögen, keine Bedeutung. Weder hat es Sinn, von einer bildlichen Gleichheit zu sprechen, da auf der einen

Seite eine Synthesis im Inhalte, auf der andern eine active Synthesis besteht, noch hat es einen Sinn, im Raume die Anschauungsgrundlage für die Zahlvorstellungen und Zahlrelationen zu suchen.

Schliesslich müssen wir auch noch fragen, woher wir den Begriff synthetischer Acte nehmen sollen, mit dem auch LANGE so viel operirt, wenn alle synthetische Thätigkeit in das unbewusste Jenseits, deren Resultat aber, die Vorstellung der Verbindung, in den primären Bewusstseinsinhalt verlegt wird, aus dem wir ihn einfach durch Analyse und Abstraction entnehmen. Es ist dabei auch hervorzuheben, dass die ganze bei LANGE wie bei KANT zu Grunde liegende Anschauung, wonach ein Relationsinhalt Resultat eines Relationsactes sei, psychologisch unhaltbar ist. Die innere Erfahrung — und diese allein ist hier entscheidend — lehrt nichts von solchen schöpferischen Processen. Unsere Geistesthätigkeit macht nicht die Relationen; sie sind einfach da und werden bei gehöriger Richtung des Interesses bemerkt so gut als irgend welche andere Inhalte.[1]) Im eigentlichen Sinne schöpferische Acte, welche als ein von ihnen verschiedenes Resultat irgend einen neuen Inhalt schaffen, sind psychologische Undinge. Freilich unterscheidet man ganz allgemein die beziehende Geistesthätigkeit von der Beziehung selbst (das Vergleichen von der Gleichheit u. s. f.). Aber wo man solcher Art von beziehender Thätigkeit spricht, versteht man darunter entweder das Auffassen des Relationsinhaltes; oder das die Beziehungspunkte heraushebende und umfassende Interesse, die unerlässliche Vorbedingung dafür, dass die jene Inhalte verbindenden Relationen bemerkbar würden. Aber wie auch immer, man wird nie behaupten können, dass der betreffende Act seinen Inhalt schöpferisch erzeuge.

Vielleicht antwortet man uns gerade durch den Hinweis

[1]) Vgl. Stumpf, Tonpsychologie I, S. 104 u. f.

auf die synthetischen Acte, die wir oben bei den Zahlvorstellungen constatirt haben, und welche, wie wir noch sehen werden, identisch sind mit unseren ‚collectiven' Verbindungen. Bei ihnen sei es doch der Act allein, der die Verbindung schaffe. — In gewissem Sinne ist dies wol richtig. Die Verbindung besteht nämlich einzig und allein in dem einigenden Acte selbst und somit auch die Vorstellung der Verbindung in der Vorstellung des Actes. Nicht aber besteht neben dem Acte ein von ihm selbst verschiedener Beziehungsinhalt als dessen schöpferisches Resultat, wie es die von uns bekämpfte Ansicht überall voraussetzt. [1])

Nur ein Argument haben wir noch nicht berücksichtigt, nämlich dass die ältesten Ausdrücke für die Zahlwörter auf Gegenstände im Raume hinweisen mit Eigenschaften, welche der Zahl entsprechen. Es wäre sehr gewagt, daraus zu schliessen, dass der menschliche Intellect bei aller Zählung notwendig auf Räumlichkeit eingeschränkt war, nachdem andere Erklärungen so nahe liegen. Die Menschen fanden eben auf den primitiveren Culturstufen nur Anlässe, Gruppen von Raumobjecten zu zählen, und so mochte ihr Zahlbegriff mit dem übereinstimmen, den wir jetzt nur durch den zusammengesetzten Namen ‚Anzahl von Raumobjecten' bezeichnen können. Die fortgeschrittenere Cultur übernahm die alten Worte, deren Bedeutung sich aber inzwischen auf dem Wege metaphorischer Uebertragung weit über das räumliche Gebiet

---

[1]) Die hier gerügten Irrthümer führten Lange zu sonderbaren Consequenzen. In der Raumvorstellung soll der Ursprung der Kategorien liegen; seine Eigenschaften bilden die „Norm unserer Verstandesfunctionen" u. s. w. „So zeigt sich", fasst Lange schliesslich zusammen (a. a. O. S. 149), „die Raumvorstellung mit ihren für unseren Verstand constitutiven Eigenschaften als die bleibende und bestimmende Urform unseres geistigen Wesens, als das wahre objective Gegenbild unseres transscendentalen Ich". So wie man sich bemüht, mit diesen Sätzen einen klaren Sinn zu verbinden, zerfliessen sie in nichts.

hinaus erweitert hatte. Wie die meisten Begriffe haben eben auch die Zahlbegriffe eine historische Entwicklung durchgemacht.

B. BAUMANN's Theorie. Analoge Irrthümer in Beziehung auf das Wesen der Zahlbegriffe finden sich auch bei BAUMANN, von welchem LANGE in seiner Theorie der arithmetischen Begriffe und Erkenntnisse nicht unbeträchtlich beeinflusst war. BAUMANN macht den Antheil unserer psychischen Activität an der Bildung der Zahlbegriffe wiederholt und lebhaft geltend. Er sagt z. B. „Die Zusammenfassung von 1, 1, 1 in drei ist ein neuer Act des Geistes, keinem verständlich, der ihn nicht machen kann, d. h. das blosse Sehen von einem und einem und einem Ding giebt noch nicht die 3zahl, sondern diese neue Zusammenfassung will erst gemacht sein.“ [1]) So entspringen die arithmetischen Begriffe überhaupt, die der Zahlen wie die der Rechnungsoperationen, durch ein „geistiges Thun, welches sich nur in innerer Anschauung erregen und ergreifen lässt“. [2]) Während wir so in uns „rein geistige Vorstellungen der Mathematik“ erzeugen, soll auf der anderen Seite die äussere Erfahrung „das Mathematische unabhängig von unserem Geiste in sich tragen und dieses unverkennbar darbieten“, [3]) ein Umstand, durch welchen BAUMANN die Anwendbarkeit der Mathematik auf die Aussenwelt erklärt. Im Besonderen heisst es bezüglich der Zahl, sie sei „im Raume so gut und noch mehr enthalten als in der Zeit“. „Wir finden die Zahl wieder in der äusseren Welt, wenden sie nach ihren Andeutungen an und sie bewährt sich praktisch d. h. durch den Erfolg der Berechnung. Sie

---

[1]) BAUMANN, Die Lehre von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. Berlin 1869, II, 571.

[2]) a. a. O. S. 669.

[3]) a. a. O. S. 675.

ist so mit dem Raume zusammen und überall mit ihm; daher die Geometrie auch auf arithmetische Ausdrücke gebracht wird".[1]) Auf die letzteren Citate hat LANGE ausdrücklich Bezug genommen.[2])

Dem „Mathematischen in uns" entspricht also nach BAUMANN ein Mathematisches ausser uns, dieses wird durch jenes erkannt ganz im Einklange mit dem uralten Spruche des EMPEDOCLES: „Gleiches wird durch Gleiches erkannt". So weit diese Theorie die Zahlen betrifft, und dies allein geht uns hier an, fusst sie auf einer irrthümlichen Auffassung des Abstractionsprocesses, welcher diese Begriffe liefert. Gewiss hat BAUMANN Wahres im Auge, indem er das innere Thun bei der Zahlenconception so kräftig hervorhebt. Es ist unzweifelhaft, dass es sich bei der Bildung von Zahlen, wie auch von Vielheiten in concreto, nicht um ein passives Aufnehmen oder ein bloss heraushebendes Bemerken eines Inhaltes handelt; wenn irgendwo, so liegen hier spontane Thätigkeiten vor, die wir an die Inhalte knüpfen. Je nach Willkür und Interesse können wir gesonderte Inhalte zusammenfassen, von den eben zusammengefassten wiederum Inhalte fortlassen oder neue hinzufügen. Ein einheitliches, die sämmtlichen Inhalte umspannendes und sie verknüpfendes Interesse und zugleich mit und in ihm (in jener gegenseitigen Durchdringung, die psychischen Acten eigen ist) ein Act einheitlicher Auffassung hebt die Inhalte heraus, und das intentionale Object dieses Actes ist eben die Vorstellung der Vielheit oder des Inbegriffs jener Inhalte. In dieser Weise sind die Inhalte zugleich und zusammen gegenwärtig, sind sie Eins, und mit Reflexion auf diese Einigung gesonderter Inhalte durch jenen complexen psychischen Act entstehen die Allgemeinbegriffe Vielheit und bestimmte Zahl.

---

[1]) a. a. O. II, 668—71, 675.

[2]) Log. Stud. S. 140.

Entspricht nun dies alles der Wahrheit, dann ist es klar, dass BAUMANN von richtigen Bemerkungen ausgeht, aber mit unhaltbaren endet. Einerseits sollen die Zahlen in gewisser Art rein geistige Schöpfungen sein; und dies trifft wirklich zu, indem die Zahlen auf psychischen Thätigkeiten beruhen, die wir an den Inhalten üben. Nach dieser Hinsicht finden wir bei BAUMANN mancherlei treffende Beobachtungen, und so steht dem Anscheine nach seine Auffassung mit der unsrigen in bestem Einklange. Wäre dies aber wirklich der Fall, wollte BAUMANN nicht mehr und nicht Anderes behaupten, als dass in die Zahlbegriffe die Begriffe von geistigen Thätigkeiten eingehen, wie wäre es möglich, dass er auf der anderen Seite ein Wiederfinden der Zahl in der Aussenwelt, ein Zusammensein in und mit dem Raume lehrt? Bei äusseren Thätigkeiten scheidet man allerdings die Thätigkeit von dem Werke, welches sie schafft, und welches draussen fortdauern kann, während sie selbst längst dahin ist. Aber die psychischen Thätigkeiten, welche die Zahlbegriffe begründen, schaffen in ihnen doch nicht neue primäre Inhalte, die, losgelöst von den erzeugenden Thätigkeiten, nun im Raume oder in der Aussenwelt wiedergefunden werden könnten.

In welcher Weise sollten auch all' die denkbaren Zahlen, die wir durch willkürlich combinirende Zusammenfassung räumlicher Inhalte zählen können, in dem Raume enthalten sein? Was anschaulich vorhanden ist, was wir im Raume vorfinden und bemerken können, das sind doch nicht Zahlen an und für sich, sondern nur Raumgegenstände und deren räumliche Beziehungen. Hiermit ist aber noch keine Zahl gegeben; und wo uns eine Zahl gegeben ist, da sind es nicht die räumlichen Synthesen und können es nicht sein, welche die Einigung des Gezählten als solches bewirken. Das Zusammensein von Gegenständen im Raume ist noch nicht die collective Einigung in unserer Vorstellung, welche der Zahl wesentlich ist. Welche äusseren Gegenstände und wieviele derselben wir colligiren und zählen, das hängt allein von unserem Interesse ab, und so wird die Einigung des Colligirten nur bestimmt und vollzogen durch einen psychischen Act oben beschriebener Art. Im Raume Zahlen zu suchen scheint nach alledem nicht minder absurd, als in ihm nach Urtheilen Willensacten, Wünschen u. dgl. zu fahnden. Raumobjecte sind allenfalls die Inhalte solcher Acte, nicht aber diese selbst; Raumobjecte sind allenfalls die gezählten Gegenstände, nicht aber die Zahlen. Es ist ebenderselbe Irrthum, in welchen LANGE verfiel, als er die Raumanschauung als das Urbild wie aller Synthesis, so auch der Synthesis der Zahlen erklärte, und welche überhaupt seiner Lehre von der Synthesis zu Grunde liegt.

Anmerkung. In ganz neuer und eigener Art finden wir Zahl und Raumanschauung in Beziehung gesetzt in der Abhandlung von W. BRIX „Ueber den mathematischen Zahlbegriff“ (WUNDT, Studien V, 671—72). „Die Zahl der Raumanschauung“ soll eine erste, primitive Form des Zahlbegriffes und neben der „Zahl der Zeitanschauung“ ein „durchaus heterogenes und selbständiges Stadium in der genetischen Entwicklung“ desselben darstellen. „Allerdings ist die Zahl auf dieser Stufe noch kein Begriff. . . . Sie ist vielmehr nichts weiter als ein gewisses Schema der Wahrnehmung, eine Art Anschauungsform in kantischem Sinne. Denn sie haftet noch völlig an den Gegenständen der Wahrnehmung, d. h. man zählt auf dieser Stufe der Ausbildung nicht drei, vier, fünf, sondern etwa drei Häuser, vier Pferde u. s. w. Deshalb erfordert sie auch noch keinerlei Abstraction, sondern besteht lediglich wie DU BOIS-REYMOND es ausdrückt: ‚in der Vorstellung vom Getrenntsein der Wahrnehmungsgegenstände‘. Sie deckt sich also nahezu mit der Raumanschauung, da der Raum gerade durch die einzelnen Gegenstände bestimmt erscheint, die in der Zahlvorstellung zusammengefasst werden.“

BRIX hat die Psychologie des Zahlbegriffes etwas zu leicht genommen. Was bedeutet denn in den Ausdrücken: drei Häuser, drei Pferde, drei Aepfel u. s. w. das Wörtchen drei? Die Vorstellung vom Getrenntsein der Gegenstände? Gut, dann muss dies überall gleichartige Getrenntsein als solches für sich bemerkt worden sein, und die Abstraction ist da. Ein allgemeines Wort ohne begriffliche Unterlage wäre auch eine merkwürdige psychologische und logische Entdeckung. Man sieht übrigens leicht ein, dass die Erklärung der collectiven Verbindung von Raumobjecten als eines räumlichen Getrenntseins derselben unhaltbar ist, indem sie einem Einwande unterliegt, den wir gegen die bisher betrachteten Theorien wiederholt urgiren mussten. Wenn wir aus n gegebenen Raumdingen nach Belieben und in willkürlicher Auswahl 2, 3, . . . n — 1 geistig herausheben — ich sage geistig, denn physisch rücken wir sie ja nicht von der Stelle — und sie zählen, ändert sich da etwas an der räumlichen Anschauung, etwa (das von Brix als ein positives Moment derselben angesehene) „Getrenntsein der Wahrnehmungsgegenstände“? Das Aufwerfen dieser Frage genügt, um die Unhaltbarkeit der Ansicht klar zu machen. Und wie unterscheiden sich zwei, drei, vier Rauminhalte als zwei, drei, vier von einander? Räumliches Getrenntsein lässt doch keine, der Zahl parallellaufende specifische Unterscheidung zu. Die schönen philosophischen Termini ‚Schema der Wahrnehmung', ‚Anschauungsform' helfen nur, die Unklarheit der Gedanken zu verhüllen, und garnichts anzufangen wissen wir mit der sonderbaren Bemerkung, dass diese Anschauungsform der räumlichen Zahl sich nahezu mit der Raumanschauung decke. Wie die Behauptung im Uebrigen in Einklang zu bringen ist mit der auf derselben Seite der Brix'schen Abhandlung folgenden, dass „die Zahl hier nur als Bestimmung gilt für den Raum der jeweiligen Wahrnehmung“, wollen wir auf sich beruhen lassen. Ein Citat jedoch möge hier noch seine Stelle finden: „Die Fähigkeit solche [Zahl] Vorstellungen zu vollziehen, muss man daher wohl den meisten höheren Organismen zugestehen — vielleicht wäre die Vermuthung nicht ganz grundlos, dass sie an das Sehvermögen [!] gebunden ist — denn auch Thiere setzen sich, wie Du Bois-Reymond hervorhebt, gegen mehrere Feinde anders zur Wehr als gegen einen Hund [Feind?], ‚auch die Ente zählt', wie Hankel betont, ‚ihre Jungen'.“ Man sieht, diese verdienten Mathematiker begehen hier die starke

Verwechslung zwischen der Vorstellung einer bestimmten Menge physischer Individuen und der Vorstellung ihrer Zahl; verwunderlich ist nur, dass Brix ihnen darin Folgenschaft leistet.

Colligiren, Zählen und Unterscheiden.

Bei weitem wissenschaftlicher und plausibler als alle die Theorien, welche bezüglich der Entstehung der Begriffe Vielheit und Anzahl bisher kritisirt wurden, ist diejenige, zu deren Entwicklung wir jetzt übergehen wollen. Damit aber in aller Klarheit hervortrete, ob sie das leistet, was sie verspricht, will ich mich bemühen, ihr eine so consequente Ausbildung zu geben, als irgend möglich, und verzichte lieber darauf, meine Darstellung und Kritik unmittelbar an irgend eine der Formen, in welchen sie von diesem oder jenem hervorragenden Autor de facto vertreten worden ist, anzuknüpfen. Folgende Argumentation dürfte viel Schein für sich haben.

Von einer Vielheit kann nur da die Rede sein, wo von einander *verschiedene* Gegenstände vorliegen. Wären sie alle identisch, dann hätten wir ja keine Vielheit von Gegenständen, sondern eben nur Einen Gegenstand. Diese Verschiedenheiten müssen aber auch bemerkt worden sein, sonst bildeten die verschiedenen Gegenstände für unsere Auffassung nur ein unanalysirtes Ganzes, und wir fänden abermals keinerlei Möglichkeit, um zu der Vorstellung einer Vielheit zu kommen. Also Verschiedenheitsvorstellungen gehören wesentlich mit zur Vorstellung eines jeden Inbegriffs. Indem wir ferner jeden einzelnen Gegenstand desselben von den anderen unterscheiden, ist mit der Vorstellung des *Unterschiedes* auch die Vorstellung der *Identität* jedes Gegenstandes mit sich selbst notwendiger Weise mitgegeben. In der Vorstellung einer concreten Vielheit wird also jeder einzelne Gegenstand sowol als ein von allen anderen verschiedener, wie auch als ein mit sich identischer gedacht.

Dies festgestellt, liegt nun, wie es scheint, auch die Entstehung des Allgemeinbegriffes der Vielheit klar zu Tage. Was könnte auch in allen Fällen, wo wir von Vielheit sprechen, sonst noch Gemeinsames vorhanden sein, als jene Vorstellungen der Verschiedenheit und Identität, nachdem es bekanntlich bei der Abstraction des Vielheitsbegriffes auf die Besonderheiten der einzelnen Inhalte durchaus nicht ankommt? Wir erhalten also, ausgehend von irgend einer concreten Vielheit, den allgemeinen Vielheitsbegriff, indem wir jeden Inhalt auf jeden anderen unterscheidend beziehen, hiebei aber, völlig abstrahirend von der besonderen Beschaffenheit der concret gegebenen Inhalte, einen jeden bloss als irgend etwas mit sich selbst Identisches betrachten. Auf diese Weise entsteht der Begriff der Vielheit gewissermassen als die leere Form der Verschiedenheit.

Mit dem Begriffe der Vielheit ist nun aber sofort auch derjenige der Einheit gegeben, und sein Inhalt ist aus den vorstehenden Betrachtungen mit Leichtigkeit zu entwickeln. Indem wir im strengen Sinne des Wortes zählen, d. h. also die Zahlenabstraction vollziehen, bringen wir jedes zu zählende Ding unter den Begriff der Einheit, wir betrachten es bloss als Eins. Damit will nichts weiter gesagt sein als eben dies: wir betrachten jedes bloss als etwas mit sich Identisches und von allen anderen Verschiedenes. Wie das Unterscheiden und Identischsetzen von einander unabtrennbare, sich gegenseitig bedingende Functionen sind, so sind auch die in Reflexion auf diese Functionen gebildeten Allgemeinbegriffe der Vielheit und Einheit von einander abhängige, correlative Begriffe.

Aus dem Begriff der leeren Verschiedenheitsform entspringen durch die mannigfachen Determinationen, die er zulässt, die Zahlbegriffe. Sie sind also nichts anderes als die klassificatorisch gesonderten, allgemeinen Verschiedenheitsformen.

Gedanken solcher oder ähnlicher Art finden wir besonders in den logischen Werken von JEVONS, SIGWART und SCHUPPE wirksam.[1]) So erklärt SCHUPPE, „dass das Wesen der Zahl undefinirbar ist, weil es direct aus dem Identitätsprincip fliesst. Mit diesem unmittelbar ist das Eine und das Andere gesetzt, indem das Eine von dem Anderen unterschieden wird. Hierin ist also die Mehrheit oder Vielheit gegeben . . .“ „Rot ist nicht grün und nicht blau, a ist weder b noch c, und b ist weder a noch c, c ist weder a noch b. Diese Urtheile einfachster Art bilden bei der Praedicirung der Zahl die Voraussetzung, und man kann, um ebendenselben Sinn auszudrücken, statt der blossen Unterscheidung die Zahl aussagen: rot, grün und blau sind — nicht etwa Eins — sondern drei; man kann auch vollständiger sagen: Drei Verschiedene oder drei verschiedene Farben; aber es ist überflüssige Deutlichkeit . . .; ‚sind drei Farben' sagt dasselbe, wie ‚drei verschiedene Farben'. Was ich nicht unterscheiden kann, das kann ich nicht zählen, das ist Eins.“ — Die Zahl, resp. die Aussage der Mehrheit durch ein bestimmtes oder unbestimmtes Zahlwort, „behauptet nur Verschiedenheit ohne die Unterschiede zu nennen“.[2])

Zum Theil noch näher steht JEVONS der oben entwickelten Theorie: „Number is but another name for diversity. Exact identity is unity, and with difference arises plurality“. „Plurality arises when and only when we detect difference“.[3])

[1]) Von mathematischer Seite möge hier Paul DU BOIS-REYMOND genannt werden. „Die Anzahl“, sagt er in seiner Allgemeinen Functionentheorie 1882, I, 16, „ist gleichsam der Rest, der in unserer Seele zurückbleibt, wenn Alles, was die Dinge unterschied, verflüchtigt, und nur die Vorstellung sich erhält, dass die Dinge getrennt waren.“ Hier wird freilich Unterschiedensein in dem Sinne von Getrenntsein gebraucht, was kein notwendiger Bestandtheil einer Unterschiedstheorie der Zahl ist. Im Uebrigen hält DU BOIS-REYMOND diesen Gedanken nicht rein; auch scheint er sich auf räumliche Objecte zu beschränken.

[2]) Erkenntnistheoretische Logik S. 405 u. ff.

[3]) The principles of science. 2. ed. (Macmillian and Co., London 1883) S. 156.

Hier ist, wie man sieht, „number“ in dem weiteren Sinne genommen, als gleichbedeutend mit „plurality“.

Bezüglich der Art der Abstraction, die hier vorliegt, sagt derselbe Autor: „There will now be little difficulty in forming a clear notion of the nature of numerical abstraction. It consists in abstracting the character of the difference from which plurality arises, retaining merely the fact.... Abstract number, then, is the empty form of difference; the abstract number three asserts the existence of marks without specifying their kind.“ „Three sounds differ from three colours, or three riders from three horses; but they agree in respect of the variety of marks by which they can be discriminated. The symbols 1 + 1 + 1 are thus the empty marks asserting the existence of discrimination.[1])

Indessen fehlt es bei JEVONS an einer tieferen psychologischen Fundirung, die wir, hauptsächlich mit freier Benutzung SIGWART'scher Andeutungen, oben zu geben versuchten.

Für den ersten Augenblick hat es den Anschein, als sei die Theorie solcher Art auf unzweifelhaft sicheren Grundlagen aufgebaut, und so möchte die Kritik zunächst bloss an der Unbestimmtheit der Resultate Anstoss nehmen. Dass Vielheit, bzw. Anzahl in dem weiteren und unbestimmteren Sinne, nichts weiter sei als „leere Form der Verschiedenheit“, damit könnte man sich noch zufrieden geben. Aber diese Allgemeinheit genügt noch nicht, um den Inhalt der scharf geschiedenen Zahlbegriffe: Zwei, Drei, Vier u. s. w. in Beziehung auf einander scharf zu charakterisiren. „Leere Formen der Verschiedenheit“ sind sie doch alle. Was unterscheidet Drei von Zwei, Vier von Drei u. s. f.? Sollen wir etwa die bedenkliche Antwort geben: bei der Zwei bemerken wir eine Unterschiedsrelation, bei der Drei zwei, bei der Vier drei u. s. f.?

[1]) a. a. O. S. 159.

Die Auskunft, die uns die letzte der citirten Stellen giebt, ist offenbar sehr dürftig. Jene „variety of marks“ bedeutet entweder soviel als wiederum die Zahl, oder sie bedeutet soviel als „Form der Verschiedenheit“. Aber wodurch charakterisiren sich psychologisch diese Formen gegen einander, so dass sie in ihren besonderen Bestimmtheiten erfasst, von einander klar unterschieden und demgemäss auch mit verschiedenen Namen benannt werden können? Hier liegt eine wesentliche Unvollkommenheit der Theorie; sehen wir zu, ob sich dieselbe beheben lässt.

Der Einfachheit halber betrachten wir nur einen Inbegriff von drei Gegenständen A, B, C. In die Vorstellung desselben müssen nach jener Theorie, die Unterschiedsrelationen

$$\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{BC},\ \overset{\frown}{CA}$$

eingehen (die Bogen mögen diese Relationen andeuten); sie sind zusammen in unserem Bewusstsein gegeben und bewirken die Einigung der Gegenstände zu dem collectiven Ganzen. Möge man nun für A, B und C Inhalte welcher Art auch immer setzen, stets bleiben diese Unterschiede als irgendwie bestimmte vorhanden; sie bilden also die ‚Form’ der Verschiedenheit, welche für die Zahl Drei charakteristisch ist.

Hier erheben sich jedoch gewisse Einwände. Sind jene Unterschiedsrelationen zusammen in unserer Vorstellung, dann musste, falls die Grundansicht der Theorie richtig ist, doch auch jede von jenen Unterschiedsvorstellungen als mit sich identisch und verschieden von jeder anderen percipirt worden sein; denn würden z. B. $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{BC}$ nicht als verschieden erkannt werden, dann flössen sie eben unterschiedslos zusammen, und es könnten dann, wie man sofort sieht, auch deren Fundamente nicht als von einander unterschiedene in der Vorstellung des Inbegriffs auftreten. Es müssen also auch die sämmtlichen Unterschiede von den Unterschieden in unserer Vorstellung sein, d. h.:

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{AB}\;\overset{\frown}{BC}};\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{BC}\;\overset{\frown}{CA}};\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{CA}\;\overset{\frown}{AB}};$$

aber auch bezüglich ihrer gälte das Gleiche, u. s. f.

Um also der „Form der Verschiedenheit" habhaft zu werden, kämen wir in einen artigen regressus in infinitum.

Es giebt aber noch einen Ausweg, durch den man dieser Consequenz entgehen kann. Wenn wir, könnte man erwiedern, unterscheidend von A zu B und von diesem zu C übergehen, dann ist eine neue Unterscheidung des C von A nicht mehr erfordert; indem wir nämlich die beiden Unterschiede $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{BC}$, welche durch das eine Fundament *B* zusammenhängen, vermittelst eines höheren Actes der Unterscheidung auf einander beziehen, ist die Möglichkeit, dass C und A zusammenfliesse, eo ipso ausgeschlossen. So ergäbe sich als das wahre Schema:

$$\overset{\frown}{A \frown B \frown C}$$

Was nun auch immer A, B und C bedeuten möge, dieses schematische Bild weist auf einen überall gleichartigen Process hin. Abstrahiren wir daher von den Besonderheiten der einzelnen Inhalte, einen jeden nur als irgendwie bestimmten festhaltend, dann haben wir hier die gesuchte Form, welche allen Vielheiten von drei Inhalten gemeinsam ist, und um derentwillen wir denselben auch die Zahl Drei zuschreiben.

In dieser Weise könnte man alle Verschiedenheitsformen, welche die Grundlage der Zahlbenennungen bilden sollen, aufstellen. So wäre z. B. $\overset{\frown}{AB}$ das Schema der einfachsten Zahl, Zwei; dasselbe drückte aus, dass in allen Fällen, wo eine Zweiheit vorliegt, ein Gegenstand und noch ein von ihm verschiedener Gegenstand da sei. Legen wir einem concreten Inbegriff die Zahl Zwei bei, so hiesse dies: wir lenken unsere Aufmerksamkeit bloss darauf, dass ein Inhalt und noch ein anderer Inhalt vorhanden ist; sie ruhte nicht auf der Besonderheit des Unterschiedes, sondern auf dem blossen Factum eines solchen.

Die schematische Form für die Zahl Vier wäre

$$A\ B\ C\ D$$

und man übersieht nun leicht, wie sich die Formen weiter compliciren. Immer liegen Unterschiede vor, welche an einander grenzen (d. h. ein Fundament gemeinsam haben) und es so ermöglichen, insgesammt vermittelst unterscheidender Acte höherer Ordnung schliesslich in einem einzigen Acte befasst zu werden.

Diese Schemata würden als die Abbilder jener geistigen Vorgänge gelten müssen, wie sie bei der Vorstellung irgend eines Inbegriffes bzw. von zwei, drei, vier u. s. w. Inhalten statthaben, und in Reflexion auf diese geistigen Vorgänge, deren wolcharakterisirte Verschiedenheit innerlich bemerkt sein müsste, entständen die Zahlbegriffe.

So zeigt es sich, dass die Unvollkommenheiten, an welche unsere Kritik oben Anstoss nahm, sich völlig beheben lassen. Ja noch mehr. Die feinere Ausbildung, welche die Theorie nun erhalten hat, scheint als Miterfolg die Lösung vieler in Betreff der Zahlbegriffe sich aufdrängender Fragen unmittelbar herbeizuführen. So würde z. B. die ausserordentlich rasch steigende Complication jener Formen uns verständlich machen, warum wir nur von den kleineren Zahlen eigentliche Vorstellungen erlangen, während wir die grösseren bloss symbolisch, gewissermassen auf Umwegen zu denken vermögen.

Die Unabhängigkeit der Anzahl von der Ordnung der gezählten Gegenstände wäre durch Anblick der schematischen Form sofort zur Evidenz gebracht. Die Form bleibt ja offenbar ungeändert, wie auch die A, B, C, . . mit einander vertauscht werden mögen.

So könnte noch mancherlei zu Gunsten der Theorie angeführt werden. Eine besonders wichtige Bestättigung derselben scheint aber der Sprachgebrauch darzubieten. In demselben Sinne sagen wir: A und B sind verschiedene

Dinge — sind zwei Dinge. Rot, Grün und Blau sind drei, das besagt, sie sind nicht etwa eine sondern drei verschiedene Farben; „aber das ist überflüssige Deutlichkeit und Nachdrücklichkeit: sind drei Farben, sagt dasselbe, wie drei verschiedene Farben". So fasst auch SCHUPPE — denn dies ist sein Beispiel — den Sprachgebrauch als völlig harmonirend mit der Unterschiedsdeutung des Zahlbegriffes.

Nach alledem scheint hier eine wolbegründete und folgerichtig durchgeführte Theorie auf Zustimmung Anspruch zu erheben. Gleichwol lehrt eine tiefeindringende Untersuchung, dass dieselbe nicht haltbar ist. Lässt sich auch gegen die Consequenz des Aufbaues ein triftiger Einwand nicht mehr vorbringen, so hält doch ihr psychologisches Fundament einer scharfen Kritik nicht stand.

Es ist richtig, von einem Inbegriffe kann nur da die Rede sein, wo Inhalte vorliegen, die von einander verschieden sind. Unrichtig ist aber die Behauptung, die hieran angeschlossen wird: diese Verschiedenheiten müssten als solche vorgestellt worden sein, sonst wäre in unserer Vorstellung nur eine unterschiedslose Einheit und keine Vielheit. Es ist wichtig, dass man auseinander halte: zwei verschiedene Inhalte bemerken und: zwei Inhalte als von einander verschiedene bemerken. Im ersten Falle haben wir, vorausgesetzt, dass die Inhalte zugleich einheitlich zusammengefasst werden, eine Inbegriffsvorstellung, im zweiten eine Unterschiedsvorstellung. Unsere Auffassung geht da, wo ein Inbegriff gegeben ist, zunächst bloss auf absolute Inhalte (nämlich die, die ihn zusammensetzen); hingegen da, wo eine Unterschiedsvorstellung (oder ein Complex solcher) gegeben ist, auf Verhältnisse zwischen Inhalten. Nur dies ist richtig: wo eine Mehrheit von Gegenständen wahrgenommen wird, da sind wir stets berechtigt, auf Grund der einzelnen Inhalte evidente Urtheile zu fällen, welche besagen, dass ein jeder der Inhalte von jedem anderen verschieden sei; aber unrichtig ist es, dass wir diese Urtheile fällen müssen.

In Betreff der Begriffe Unterscheiden und Unterschied herrschen überhaupt vielfache Unklarheiten, welche aus gewissen Aequivocationen entsprungen sind, und zu den Irrthümern, die ich hier berühre, wesentlich beigetragen haben.

1) ‚Unterschied' oder ‚Verschiedenheit' bedeutet das Resultat einer Vergleichung. Eine Vergleichung kann entweder das Ergebnis liefern, dass die betrachteten Inhalte gleich sind, oder dass sie verschieden, d. h. nicht gleich sind. Hier bedeutet also Verschiedenheit etwas Negatives, die blosse Abwesenheit einer Gleichheit. In diesem Sinne spricht man von dem Vergleichen und Unterscheiden als zusammengehörigen, enge verbundenen Thätigkeiten. In der That kommen überall, wo es sich um ein willkürliches Vergleichen handelt, Ergebnisse beiderlei Art vor, es werden affirmative Urtheile gefällt, welche Gleichheiten anerkennen, und nach anderen Seiten hin negative, welche solche verwerfen. Auf dieses Affirmiren von Gleichheiten bezieht sich nun der Ausdruck ‚Vergleichen', auf das Negiren von Gleichheiten der Ausdruck ‚Unterscheiden' beim Gebrauche der Combination ‚Vergleichen und Unterscheiden'.

In dem Falle, wo die Vergleichung von Inhalten in einer gewissen Hinsicht zum Ergebnis der Ungleichheit führt, kann es aber eintreten, dass wenigstens eine Aehnlichkeit oder ‚Steigerung' u. s. w. bemerkt wird; dies sind wolcharakterisirte Relationsklassen, bei welchen, ganz so wie im Falle der Gleichheit, die Relationsvorstellung einen reellen positiven Vorstellungsinhalt repräsentirt. Man nannte nun auch diese Relationen Verschiedenheitsrelationen, und insbesondere ist der Name Unterschied oder Verschiedenheit für Abstände in Continuis gebräuchlich. Wir sprechen in diesem Sinne von Unterschieden des Ortes, der Zeit, der Intensität und

Qualität (Unterschied zweierlei Farben, Töne, Gerüche etc.) [1]) Diese engere Bedeutung jener Termini führte nun aber umgekehrt wieder dahin, auch die blossen Ungleichheitsfälle, da sie Unterschiede hiessen, so aufzufassen, als wären sie Inhaltsrelationen, d. h. als läge bei ihnen die Relation im Vorstellungsinhalt, während in der That nichts weiter gegeben ist, als ein evidentes negatives Urtheil, welches das Vorhandensein einer solchen (nämlich einer Gleichheitsrelation) negirt.

Es mag vom practischen Gesichtspunkte der Vergleichung aus immerhin nützlich sein, die sämmtlichen Ergebnisse, zu denen sie führen kann, unter die beiden Titel Gleichheit und Verschiedenheit zu ordnen; es darf jedoch nicht übersehen werden, dass dann unter dem letzteren Titel Relationsklassen zusammenstehen, welche einander ihrer phaenomenalen Beschaffenheit nach fremd sind, während überdies ein Theil derselben mit den unter dem anderen Haupttitel geführten Gleichheitsrelationen in naher Verwandtschaft steht. Vom psychologischen Gesichtspunkte aus gehören die Relationen der Aehnlichkeit, Gleichheit, metaphysischen Verbindung u. s. w., kurz alle Relationen, welche den Charakter von Vorstellungsphaenomenen im engeren Sinne (also primären Inhalten, nicht aber vorgestellten psychischen Acten) tragen, in eine Klasse. [2]) Zu ihnen gehört aber nicht die Verschiedenheit im weitesten Sinne; denn sie ist nicht ein zugleich mit den Fundamenten unmittelbar bemerkbarer Vorstellungsinhalt, sondern ein auf Grund derselben gefälltes, resp. als gefällt vorgestelltes, negatives Urtheil.

---

[1]) Damit hängt es wol auch zusammen, dass man zeitweise, insbesondere bei physischen Inhalten, ‚Unterschiedensein' in gleichem Sinne gebraucht wie ‚Getrenntsein' (in der Anschauüng), Ausdrücke, die sich nicht immer decken, wie aus dem Verhältniss von Ganzem und Theil zu ersehen. Wir fassen dies daher nicht als eine wesentlich neue Art der Aequivocation.

[2]) Wir werden sie primäre Inhaltsrelationen nennen. Das Nähere über die hier angedeutete Eintheilung, die sich als wichtig erweisen wird zum Zwecke einer Charakteristik der collectiven Verbindung, im Cap. III.

2) Der Name Unterscheiden wird aber noch in einer anderen Bedeutung gebraucht, welche mit der Analyse in Zusammenhang steht. Dieser gemäss heisst ‚unterschieden' dasjenige, was durch Analyse herausgehoben und besonders bemerkt worden ist, und ‚unterscheiden' soviel als ‚ausscheiden', ‚analysiren'.

Indem man nun den die Analyse begünstigenden Bedingungen nachforschte, zeigte es sich, dass eine Mehrheit von Theilinhalten umso leichter und sicherer ausgeschieden wird, je grösser der Zahl und dem Grade (oder Abstande) nach ihre Unterschiede unter einander und der Umgebung gegenüber sind. Diese Reflexionen, welche in Vergleichungen und Unterscheidungen an den bereits analysirten Inhalten bestanden, verleiteten nun häufig zu der irrthümlichen Ansicht, als ob auch der Vorgang des Unterscheidens in dem Sinne des Analysirens eine solche Urtheilsthätigkeit des Unterscheidens (im Sinne des Unterscheidens verglichener Inhalte) sei. Man schloss dann: damit mehrere Inhalte als ausgeschiedene, d. h. analysirte, für sich bemerkte, im Bewusstsein sich erhalten können, müssen sie als von einander unterschiedene, d. h. verglichene und ihren Unterschieden nach besonders charakterisirte, gedacht werden. Dies ist falsch, ja offenbar absurd. Die Urtheilsthätigkeit des Unterscheidens setzt evidentermassen bereits ausgeschiedene, für sich bemerkte Inhalte voraus, es können also diese Inhalte nicht erst dadurch bemerkbar geworden sein, dass sie von einander unterschieden wurden.

Dieser Irrthum ist es nun, welchen die von uns bekämpfte Theorie begeht, indem sie argumentirt: Die Verschiedenheiten zwischen den Gegenständen einer Vielheit müssen als solche bemerkt worden sein, sonst kämen wir in unserer Vorstellung nie über eine unanalysirte Einheit hinaus, und von Vielheit wäre keine Rede; es müssen also die Verschiedenheitsvorstellungen explicite in der Vorstellung der Vielheit enthalten sein.

Richtig ist: wären die Inhalte nicht von einander verschieden, so gäbe es keine Vielheit. Richtig ist ferner: die Unterschiede, wenn sie Abstände waren, mussten ein gewisses Mass überschritten haben; sonst wäre eben keine Analyse eingetreten. Unrichtig aber ist die Supposition, als würde jeder Inhalt zu einem besonderen, d. h. für sich bemerkten erst durch die Auffassung seiner Unterschiede von anderen Inhalten; während doch evident ist, dass jede Unterschiedsvorstellung bereits für sich bemerkte und in diesem Sinne unterschiedene Inhalte als ihre Fundamente voraussetzt.

Damit eine concrete Inbegriffsvorstellung entstehe, ist es nur erfordert, dass ein jeder der darin befassten Inhalte ein für sich bemerkter, ein ausgeschiedener sei; es liegt jedoch keine unbedingte Nötigung vor, auf die Unterschiede der Inhalte zu achten, obschon dies häufig genug vorkommen wird.

Ganz Analoges, wie in Betreff der Vorstellung des Unterschiedes ausgeführt worden ist, gilt auch von derjenigen der I d e n t i t ä t. Beides sind Begriffe, welche aus der Reflexion auf gewisse Urtheilsthätigkeiten entspringen; Urtheilsthätigkeiten, welche im practischen Leben eine weitreichende Bedeutung besitzen und auch mit dem Vorstellen einer Mehrheit parallel einhergehen mögen. Dass sie dies aber immer und notwendig thun, dass sie überhaupt „constante und in jedem Denkacte sich wiederholende Thätigkeiten“ repräsentiren, in denen „das in allen Acten gleiche und identische Selbstbewusstsein sich verwirklicht“; [1]) und vor allem, dass die Begriffe von Einheit, Vielheit, bestimmte Zahl mit Beziehung auf sie gewonnen werden — all' das können wir nicht für begründet erachten durch die uns dargebotenen Argumentationen. Hier, wie

[1]) Sigwart, Logik II, 37.

sonst bei Analysen elementarer Begriffe, unterlag man allzusehr der Versuchung, Resultate nachträglicher Reflexionen über ihren Inhalt als etwas ursprünglich in ihm Enthaltenes oder als notwendiges Moment seiner Entwicklung anzusehen.

Hat sich nun auch die für den ersten Anblick so einleuchtende Argumentation, welche mit unausweichlicher Notwendigkeit auf die Unterschiedstheorie hinzudrängen schien, als hinfällig erwiesen, so ist hiemit die Frage noch nicht entschieden, ob nicht trotz alledem Unterschiedsvorstellungen wesentliche Bestandtheile der Zahlbegriffe bilden. Bloss die Ansicht ist bisher widerlegt worden, als könnte die Vorstellung einer Mehrheit in concreto nicht zu Stande kommen, ohne dass die einzelnen Objecte durch unterscheidende Urtheilsthätigkeiten erst auseinander gehalten würden. Daraus folgt nur so viel, dass keinesfalls eine sozusagen apriorische Nötigung bestehe, bei der Entwicklung der Zahlbegriffe auf Unterschiedsvorstellungen zu recurriren und in Consequenz davon, eben diese Begriffe mit jener pyramidenartig auf einander gebauten Unterschieden höherer Ordnung zu identificiren. Immerhin wäre es noch denkbar, dass die Richtung des Interesses bei der Zahlbildung gerade den Unterschieden der zu zählenden Objecte zugewendet sei.

Entscheidend ist aber der Hinweis auf die innere Erfahrung. Sie zeigt mit aller Deutlichkeit, dass weder die Vorstellung einer concreten Vielheit, noch diejenige der correspondirenden Zahl die expliciten Vorstellungen der Unterschiede zwischen den gezählten Einzelinhalten notwendig einschliessen. An Unterschiede im Sinne von Abständen wäre hier ohnehin nicht zu denken, da ganz disparate Inhalte zusammengefasst und gezählt werden können, während doch zwischen disparaten Inhalten Abstandsverhältnisse nicht bestehen. Es blieben demnach nur jene Unterschiedsvorstellungen, wie sie aus der Vergleichung entstehen und die Reflexion auf negative Urtheile voraussetzen. Aber von solchen

Urtheilsthätigkeiten, durch welche die Einzelinhalte als von einander unterschieden aufgefasst werden sollen, wenn wir sie zählen, zeigt uns die innere Erfahrung nichts; geschweige denn, dass sie eine Spur aufwiese von jenen stufenartig aufeinander gegründeten Unterscheidungen höherer Ordnung, zu deren Annahme die consequente Ausbildung der Unterschiedstheorie nötigen würde. Gewiss ist, dass wir die Einzelinhalte jederzeit zu Fundamenten von Unterscheidungen machen können; nicht minder gewiss ist es aber, dass diese nicht das beim Zählen Gemeinte sind. Unterscheiden auf der einen Seite und Zusammenfassen und Zählen auf der anderen sind ganz verschiedene Geistesthätigkeiten. Nur das Eine und nicht mehr ist erfordert, dass die zu zählenden Inhalte ausgeschiedene (d. h. für sich bemerkte) seien, nicht aber in irgend einem Sinne von einander unterschiedene. Freunde unbewusster psychischer Thätigkeiten mögen die unterscheidenden Acte, die wir hier läugnen, immerhin in die nebulöse Region des Unbewussten versetzen; dort hätten dann auch die beschriebenen ‚Formen der Verschiedenheit' ihren Platz. Aber so viel ist, denke ich, klar, dass jene unbewussten psychischen Mechanismen weder zum Inhalt unserer bewussten Zahlvorstellung irgend etwas beigetragen haben können, noch fähig wären, bezüglich der Entstehung dieser Vorstellungen das Geringste zu erklären.

Es bleibt nur noch übrig das letzte Argument zu lösen, welches für eine Unterschiedstheorie besonders günstig zu disponiren schien, nämlich den bestättigenden Hinweis auf gewisse Aequivalenzen des Sprachgebrauches. Rot, grün und blau sind drei Farben sagt dasselbe wie: sind drei verschiedene Farben; ja eine überflüssige Deutlichkeit und Nachdrücklichkeit implicire, meint SCHUPPE,[1]) die letztere Aussageform. Wol nicht ganz mit Recht. Man achte nur auf

[1]) Vgl. die obigen Citate.

die besondere Betonung des Zahlwortes, die unerlässlich ist, damit der Sinn der beiden Aussagen wirklich gleich werde. Rot, grün und blau sind drei Farben drückt bereits einen ganz anderen Sinn aus. Zur Abwehr einer drohenden Verwechslung mehrerer Inhalte kann eben auch die Betonung ihrer Anzahl dienen; denn ohne Verschiedenheit keine Zahl. Das ist eine übertragene, einem ganz speciellen Zwecke angepasste Function dieses Begriffes. Sagen wir: Rot und Grün sind zwei contrastirende Farben, so hat die Zahl nicht mehr diese besondere Function. Die Verschiedenheit liegt in gewisser Weise darin, aber sie auszudrücken ist nicht die besondere Absicht. Und dasselbe lehren andere und beliebig zu vermehrende Beispiele. Der Saturn hat acht Monde und drei Ringe. Dieser Stab hat eine Länge von zehn Metern u. s. w. Es ist eben nicht richtig, „dass die Zahl nur Verschiedenheit behauptet, ohne sie zu nennen". Die Sprache besitzt übrigens besondere Formen von Zahlwörtern, bei welchen dieser Zweck einen wesentlichen Theil der Bedeutung bildet, die sogenannten Gattungszahlwörter: einerlei, zweierlei, u. s. w.; es ist offenbar, dass man sie durchaus nicht überall für die Grundzahlwörter eins, zwei u. s. w. substituiren kann.

Kritischer Zusatz. Wir haben oben unter den Hauptrepräsentanten der Unterschiedstheorie neben JEVONS und SCHUPPE auch SIGWART genannt. Und wirklich sind von ihm die Grundgedanken dieser Theorie wiederholt geltend gemacht worden. Damit soll aber nicht behauptet werden, dass seine Ansicht über den Inhalt der Zahlbegriffe mit den obigen Entwicklungen völlig übereinstimme. Wenn er sagt: „Sämmtliche Zahlbegriffe sind somit nur in immer höheren Synthesen sich vollziehende Entwicklungen der formellen Functionen, die wir in jedem Denkacte überhaupt durch Einheit-Setzen und Unterscheiden üben", [1]) so möchte man allenfalls noch an die vorhin deducirten Verschiedenheitsformen

[1]) Logik II, 38.

gemahnt werden. Dasselbe gilt von einer anderen Stelle:[1] „Denn was identisch gesetzt und von einem anderen unterschieden wird, wird ebendarin ebenso wie dieses andere als Eins gesetzt; und indem wir diese zusammengehörigen Functionen in Beziehung auf einander ins Bewusstsein erheben, entsteht mit dem Begriffe der Eins auch der von Zwei, und damit die Grundlage aller Zahlbegriffe". An anderen Stellen jedoch wird von einer „Unterscheidung und Zusammenfassung der Acte des Fortgehens von Einem zu einem Anderen",[2] von einem Bewusstsein der Uebergänge des Bewusstseins[3] gesprochen und das Zählen selbst als „die allgemeine Form des bewussten Fortschreitens von einer Einheit zur anderen"[4] bezeichnet. Es spielen also bei SIGWART neben den Acten des Identischsetzens und Unterscheidens noch andere von uns oben nicht berücksichtigte Elemente in die Zahlbegriffe hinein; es scheinen bei ihm jene Synthesen oder Zusammensetzungen nicht bloss in unterscheidenden Acten höherer Stufe zu bestehen, wie wir sie bei dem consequenten Aufbau der Verschiedenheitsformen vorausgesetzt haben. Immerhin vertritt er an vielen Stellen seiner Logik gerade die wesentlichen Gedanken der Unterschiedstheorie. Das Unterscheiden und Identischsetzen sollen nach ihm Thätigkeiten sein, die wir bei jeder Vorstellung von Objecten vollziehen; es seien „einfache, unter sich zusammenhängende Acte, durch die überhaupt erst Vieles und Unterschiedenes zu unserem Bewusstsein gelangt".[5] Nicht minder deutlich drückt dieselbe Meinung eine andere Stelle[6] aus: „Damit dass mehrere unterschiedene Objecte im Bewusstsein sind, ist wol Unterscheiden vorausgesetzt; aber zunächst kommt nur das Resultat dieser Function zu Bewusstsein, dass in dem Nebeneinander mehrerer Objecte, deren jedes für sich festgehalten wird, besteht." Hier finden wir ganz und gar die Ansicht, die wir eben widerlegt haben. Unterscheiden und Identischsetzen können unmöglich die Function haben, die SIGWART ihnen zuschreibt. Wo die Beziehungspunkte nicht schon getrennt sind,

[1] Logik II, 37. [2] Ebendas. S. 38. [3] Ebendas. S. 41.
[4] Ebendas. S. 43. [5] Ebendas. S. 36. [6] a. a. O. I, 36.

wo nicht Vieles und Verschiedenes bereits vorliegt, da hat keinerlei beziehende Thätigkeit und somit auch nicht diejenige des Unterscheidens und Vergleichens irgend welche Möglichkeit, in Kraft zu treten. Das Unterscheiden und Identischsetzen sind Urtheilsthätigkeiten, deren practische Bestimmung im Zusammenhange unseres Denkens mir in einer ganz anderen Richtung zu liegen scheint. A ist mit sich selbst identisch, das heisst, A ist nicht B, C, D ..., sondern eben A. Eine solche Reflexion zielt dahin, Verwechslungen des A mit anderen Inhalten vorzubeugen, ein Ziel, welches erreicht wird, indem man die ,Unterschiede' des A von den B, C, D ... (d. h. die charakteristischen Merkmale, die ihm zukommen und den anderen nicht) aufsucht und hervorhebt. Aber während dieser Process sich anspinnt, sind A, B, C, D ... bereits als von einander gesonderte Inhalte dem Bewusstsein gegenwärtig, und es ist durchaus nicht seine Aufgabe, erst zu trennen, was ursprünglich ein identisches Eins ist, und so durch die Scheidung der Einheiten die Vielheit allererst zu ermöglichen. Dass gerade die in den Ausdrücken Unterscheiden und Unterschied liegende Aequivocation, welche zwei wol zu sondernde Begriffe (das Analysiren und das urtheilende Unterscheiden) verknüpft, Sigwart zu seiner Auffassung verleitet habe, dürfte aus den citirten Stellen hinreichend klar hervorgehen.

Es ist allerdings merkwürdig genug, dass Sigwart selbst gelegentlich das richtige Verhältniss bemerkt, indem er nahezu denselben Irrthum bei Ulrici rügt. [1]) Mit Rücksicht darauf wird man geneigt sein, anzunehmen, dass Sigwart, wo er vom Unterscheiden spricht, am Ende doch nicht eine urtheilende Thätigkeit im Auge hatte, sondern die von uns als das analysirende Ausscheiden dem urtheilenden Unterscheiden gegenübergestellte. Ich finde es aber

[1]) a. a. O. I[1], 279. Anm. „Die Meinung, als ob erst durch die Unterscheidung eine Vorstellung eine bestimmte werde, vergisst, dass das Unterscheiden selbst nur möglich ist zwischen schon vorhandenen verschiedenen Vorstellungen, und dass die Unterscheidung also den verschiedenen Gehalt nicht erzeugt.“ Sigwart bezieht sich hiebei auf Ulrici, Compendium der Logik 2. Aufl. S. 60.

nicht möglich, diese Deutung aufrecht zu halten. Das Unterscheiden wird von SIGWART wiederholt mit dem Vergleichen zusammengestellt, als psychische Thätigkeiten, mit Reflexion auf welche die Begriffe von Gleichheit und Unterschied gewonnen würden. So heisst es z. B. gerade in Fortsetzung der letzten der S. 64 citirten Stellen: „Die Vorstellung des Unterschiedes . . . entwickelt sich erst dann, wenn das Unterscheiden mit Bewusstsein vollzogen und auf diese Thätigkeit reflectirt wird.“ Es ist nicht denkbar, dass hier andere psychische Thätigkeiten gemeint sind als die Urtheilsacte, in welchen wir Unterschiede, bzw. Gleichheiten auffassen. Sicher käme nicht in Betracht das Analysiren; denn dieses ist überhaupt keine psychische Thätigkeit in dem eigentlichen Sinne des Wortes, d. h. eine solche, die in den Bereich der Reflexion fiele. Man unterscheide zwischen einem psychischen Geschehen und einem psychischen Acte. Psychische Acte sind das Vorstellen, Bejahen, Verneinen, Lieben, Hassen, Wollen u. s. w., von welchen uns die innere Wahrnehmung (LOCKE's reflection) Kunde giebt. Ganz anders verhält es sich mit dem Analysiren. Niemand kann eine analysirende Thätigkeit innerlich wahrnehmen. Wir können die Erfahrung machen, dass ein zuerst unanalysirter Inhalt dann zu einem analysirten wird; wo früher Ein Inhalt war, wird jetzt eine Vielheit bemerkt. Mehr aber als dieses post hoc ist innerlich nicht zu constatiren. Von einer psychischen Thätigkeit, durch welche aus der unanalysirten Einheit die Vielheit erst wird, lehrt die innere Wahrnehmung nichts.[1]) Das Factum aber der eingetretenen Analyse kommt zu unserer Kenntniss, indem wir die Erinnerungsvorstellung des unanalysirten Ganzen mit dem gegenwärtigen des analysirten vergleichen. Es treten solcher Art Acte des Vergleichens und Unterscheidens auf, welche jedoch die vollzogene Analyse voraussetzen. Ist dies Alles richtig, dann entbehrt eine Auffassung, welche die Begriffe Unterschied, Mehrheit und Zahl durch Reflexion auf die Thätigkeiten des Unterscheidens in dem Sinne des Analysirens hervorgehen lassen wollte, jedes Bodens. Somit ist dies auch kein Weg, die SIGWART'schen Auf-

---

[1]) Sehr treffend definirt daher STUMPF in seiner Tonpsychologie I, 96 die Analyse als das Bemerken einer Mehrheit.

stellungen umdeutend zu festigen und an Stelle der oben entwickelten eine neue und haltbarere Unterschiedstheorie der Zahl zu construiren. [1])

III. Capitel.

Die psychologische Natur der collectiven Verbindung.

Rückblick.

Blicken wir nun auf unsere bisherigen Betrachtungen und deren Ergebnisse zurück.

Wir nahmen uns vor, den Ursprung der Begriffe Vielheit und Zahl aufzuzeigen. Zu diesem Behufe war es notwendig, die concreten Phaenomene, von denen sie abstrahirt werden, genau ins Auge zu fassen. Diese lagen klar zu Tage als die concreten Vielheiten oder Inbegriffe. Indessen schienen besondere Schwierigkeiten dem Uebergange von ihnen zu den Allgemeinbegriffen in den Weg zu treten. Dass die besondere Beschaffenheit der in der Form einer Vielheit zusammengefassten Einzelobjecte zu dem Inhalt des zugehörigen Allgemeinbegriffes nichts beitragen könne, wurde zunächst klar. Das Einzige, was bei dieser Begriffsbildung in Betracht

[1]) Irrthümer in Betreff der Function des Unterscheidens für die Vorstellung mehrerer Objecte liegen so nahe, dass wir uns nicht wundern werden, sie bereits bei älteren Autoren zu finden. Man vergleiche Locke's Essay concerning human understanding B. II, ch. XI, sect. 1. und B. IV, ch. VII sect. 4. Ferner James Mill's Analysis of the phenomena of the human mind, ed. by J. St. Mill. London 1879. II, 15: „As having a sensation, and a sensation, and knowing them, that is distinguishing them, are the same thing . . .“; auch sonst wiederholt er vielfach diese Behauptung.

kommen konnte, war die Verbindung der Objecte in der einheitlichen Vorstellung ihres Inbegriffes. Es handelte sich nun um eine genauere Charakteristik dieser Verbindungsart. Aber eben dies schien keine so leichte Sache zu sein. In der That lernten wir eine Reihe von Theorien über den Ursprung und Inhalt der Begriffe Vielheit und Anzahl kennen, welche insgesammt an Misverständnissen in Betreff der hier vorliegenden Synthesen scheiterten. Die erste charakterisirte die collective Verbindung als die blosse Angehörigkeit zu Einem Bewusstsein. Sie war offenbar unzureichend, machte uns aber aufmerksam auf eine wichtige psychologische Vorbedingung: Jeder colligirte Inhalt muss ein für sich bemerkter sein. Auch wurde uns bereits nahe gelegt, die Einigung der Inhalte als eine durch besondere Bewusstseinsacte vermittelte anzusehen. Immer wieder bestärkt wurden wir hierin durch die Kritik der drei folgenden Theorien, welche vermeinten, durch die ‚Anschauungsformen' der Zeit und des Raumes unseren Begriffen auf den Grund kommen zu können. Wir lernten hiebei die Zeit als psychologische Vorbedingung der Zahl kennen. Die letzte Theorie, die wir betrachteten, die einzige, welcher ächte Wissenschaftlichkeit zukommt, war die Unterschiedstheorie. Sie gieng von vornherein von gewissen psychischen Acten aus, aber es waren Acte des Unterscheidens, welche eine tiefer eindringende Kritik nicht anerkennen durfte als die für Collectivum und Anzahl in Wirksamkeit tretenden synthetischen Acte.

Die Collection eine besondere Verbindungsart.

Welche Möglichkeiten bleiben nun noch übrig? Wir haben von den Relationsarten noch nicht alle untersucht — sollte unter den noch verbleibenden die collective Verbindung ihre Stelle finden? Einer detaillirten Erwägung der einzelnen Relationsarten sind wir jedoch aus leicht ersichtlichen Gründen enthoben. Da wir wissen, dass die heterogensten Inhalte in collectivischer Weise vereinigt werden können, so entfallen unbesehen alle Relationen, deren Anwendungsgebiet ein durch die Natur besonderer Inhalte beschränktes ist; also Relationen von der Art der Aehnlichkeit, Steigerung, continuirlichen Verbindung u. s. w. Ja es scheint, dass überhaupt keine der bekannten Relationsarten den gestellten Anforderungen Genüge leisten könne, nachdem die zeitlichen und die Unterschiedsrelationen ausgeschlossen sind. Höchstens an die Gleichheitsrelationen könnte man noch denken; denn, wie sehr auch zwei Inhalte von einander abweichen mögen, immer wird es möglich sein, eine Rücksicht anzugeben, in der sie einander gleich sind. Thatsächlich glaubte man auch vielfach (ja die Mehrheit der Forscher ist dieser Ansicht) bezüglich der Entstehung der Zahlbegriffe auf Gleichheitsrelationen recurriren zu müssen. Dies soll uns späterhin noch beschäftigen. (Vgl. VIII. Cap.) Hier aber genügt die kurze Bemerkung, dass die Gleichheiten, die wir allenfalls zwischen den colligirten Inhalten entdecken mögen, sicher nicht den Kitt bilden können, welcher die Synthesis der in der Vorstellung des Inbegriffes zusammengehaltenen Objecte bewerkstelligt; denn die Collection setzt keinerlei Vergleichung voraus. Indem wir z. B. den Inbegriff von Uhr, Tinte und Feder denken, brauchen wir diese Inhalte nicht erst zu vergleichen; im Gegentheil: um dies thun zu können, müssen wir sie bereits colligirt haben.

Es scheint also nichts übrig zu bleiben, als für die collective Verbindung eine neue und von allen anderen wolgeschiedene Relationsklasse in Anspruch zu nehmen. Hiefür spricht auch positiv die innere Erfahrung. Wenn wir einzelne Inhalte in der Art eines Inbegriffs ‚zusammen' denken, dann lässt sich dieses Zusammen nicht in irgend welche andere Relationen auflösen und durch sie definiren.

Dasselbe dürfte seine Bestättigung in den folgenden Betrachtungen finden, welche dahin zielen, die collective Verbindung in ihrer Eigenart anderen Beziehungen gegenüber noch näher zu charakterisiren.

Zur Relationstheorie.

Da ich nicht in der Lage bin, mich auf eine festbegründete und anerkannte Relationstheorie zu stützen, so sehe ich mich genötigt, an dieser Stelle einige allgemeine Bemerkungen, welche dieses sehr dunkle Capitel der beschreibenden Psychologie betreffen, einzufügen.

Zunächst wird es nützlich sein, uns über den Terminus Relation zu einigen. Was ist in allen Fällen, wo wir von einer ‚Relation' sprechen, das Gemeinsame, um dessentwillen eben dieser Name verwendet wird? Darauf giebt uns J. St. Mill in einer Note zu dem psychologischen Werke seines Vaters[1]) folgende verständliche und der Hauptsache nach ausreichende Antwort: „Any objects, whether physical or mental, are related, or are in a relation, to one another, in virtue of any complex state of consciousness into which they both enter; even if it be a no more complex state of consciousness than that of merely thinking of them together. And they are related to each other in as many different ways, or in other words, they stand in as many distinct relations to one another, as there are specifically distinct states of consciousness of which they both form parts."

Hiezu seien einige Bemerkungen ergänzend hinzugefügt. Der Ausdruck Bewusstseinszustand (state of mind) ist hier nicht etwa als psychischer Act zu verstehen, sondern muss in dem weitesten Sinne genommen werden, derart, dass er in dem Umfange seiner Bedeutung geradezu mit ‚Phaenomen' übereinstimmt. — In den obigen Sätzen hat Mill, genau besehen, eigentlich nur den Begriff ‚in Relation Stehen' definirt; was soll nun aber unter ‚Relation' verstanden werden? Dass

[1]) James Mill, Analysis II, 10.

dies keine müssige Frage ist, geht schon daraus hervor, dass MILL selbst in seiner Terminologie schwankt. Er bezeichnet wiederholt [1]) jenen complexen Bewusstseinszustand, von dem oben die Rede ist, als das ‚Fundament der Relation', während er unter Relation schlechtweg die in Reflexion auf das Fundament zu bildenden relativen Attribute versteht. Es kommt aber auch vor, [2]) dass er von dem Fundament selbst erklärt, es mache die Relation aus; wodurch freilich dieser Name aequivok wird. Um nun unseren Sprachgebrauch zu fixiren, setzen wir fest, dass unter ‚Relation' jenes complexe Phaenomen, welches die Grundlage für die Bildung der relativen Attribute bildet, und dass unter ‚Fundament der Relation' (in Uebereinstimmung mit dem gegenwärtig allgemein üblichen Sprachgebrauche) jeder der bezogenen Inhalte zu verstehen sei.

Ich merke noch an, dass die Definition nur in einer Hinsicht etwas zu enge ist, sofern sie von Relationen zwischen nur *zwei* Fundamenten spricht. Es giebt aber auch Relationen zwischen mehreren Fundamenten, und zwar auch *einfache*, wie wir nachher sogleich zeigen werden.

Zum Zwecke einer Eintheilung der Relationen könnte man zunächst die Beschaffenheit der Inhalte, welche sie auf einander beziehen (also der ‚Fundamente'), als Richtschnur nehmen. Eine solche Eintheilung bliebe jedoch an der Oberfläche haften. Auf den verschiedenartigsten Gebieten finden wir Relationen, welche einen und denselben Charakter haben. So kommen Gleichheiten, Aehnlichkeiten u. s. w. sowol auf dem Gebiete der primären Inhalte (der ‚physischen Phaenomene') als auch auf dem der psychischen Acte (der ‚psychischen Phaenomene') vor.[3])

---

[1]) a. a. O. S. 9. Vgl. ferner seine Logik, Buch I, Cap. 3, § 10. (GOMPERZ I, 56.)

[2]) Logik, Buch I, Cap. 2, § 7. (GOMPERZ I, 29.)

[3]) Bezüglich der Bedeutung der Termini ‚physisches' und ‚psychisches' Phaenomen und der fundamentalen, für unsere nächstfolgenden

Man kann aber, und dies ist das tiefergreifende Eintheilungsprincip, die Relationen auch klassificiren nach ihrem eigenen phaenomenalen Charakter. Von diesem Gesichtspunkte aus ergeben sich mehrfache Eintheilungen der Relationen, unter anderen eine solche in die beiden folgenden Hauptklassen:

1) Relationen, welche den Charakter von primären Inhalten (von ‚physischen Phaenomenen' in dem von F. BRENTANO definirten Sinne) besitzen.

Jede Relation ruht auf ‚Fundamenten', sie ist ein complexes Phaenomen, welches in einer gewissen (nicht näher zu beschreibenden) Weise Theilphaenomene umfasst; aber keineswegs umfasst jede Relation ihre Fundamente intentional,[1]) d. h. in jener specifisch bestimmten Weise, in der ein ‚psychisches Phaenomen' (ein Act des Bemerkens, Wollens etc.) seinen Inhalt (das Bemerkte, Gewollte etc.) umfasst. Man vergleiche z. B. die Art, in welcher die Vorstellung, die wir Aehnlichkeit zweier Inhalte nennen, diese selbst einschliesst, mit irgend einem Fall der intentionalen Inexistenz, und man wird anerkennen müssen, dass es sich um ganz verschiedene Arten des Einschlusses handelt. Darum ist eben auch die Aehnlichkeit nicht unter den Begriff der ‚psychischen Phaenomene' zu subsumiren; mit Rücksicht darauf gehört sie vielmehr zu den primären Inhalten. Dasselbe gilt auch für andere Relationen, z. B. für die Gleichheit, die Steigerung, die continuirliche Verbindung (die Verbindung der Theile eines Continuums), die ‚metaphysische' Verbindung (die Verbindung von Eigenschaften, wie der Farbe mit der räumlichen Ausdehnung), den logischen Einschluss (wie der Farbe in der

---

Betrachtungen unerlässlichen Unterscheidung, welche ihnen zu Grunde liegt, vergleiche man F. BRENTANO's Psychologie vom empir. Standpunkte I. Bd. 2. Buch, 1. Cap.

[1]) a. a. O. S. 115.

Röte) u. s. f. Jede dieser Relationen repräsentirt eine besondere Art primärer Inhalte (in der hier zu Grunde gelegten Bedeutung dieses Terminus) und gehört mit Bezug darauf in dieselbe Hauptklasse.

Ich bemerke noch ausdrücklich, dass es hier gar nicht darauf ankommt, ob die Fundamente selbst primäre Inhalte sind oder irgend welche psychische Phaenomene (vorgestellte psychische Zustände). Auch solche Gleichheiten, Aehnlichkeiten etc., die wir zwischen psychischen Acten oder Zuständen (Urtheilen, Willensacten u. s. w.) wahrnehmen, haben in der betrachteten Rücksicht den Charakter primärer Inhalte, nur treten sie aus Anlass jener psychischen Phaenomene auf und sind in ihnen begründet.

Nicht unpassend könnten die Relationen dieser Klasse, als zu den primären Inhalten gehörig, kurzweg durch den Namen primäre Relationen bezeichnet werden; nur müsste man sich vor dem Misverständnisse hüten, als ob es sich dabei immer um Relationen zwischen primären Inhalten handelte, während es hierauf, wie eben betont wurde, gar nicht ankommt.

2) Auf der anderen Seite steht eine zweite Hauptklasse von Relationen, welche dadurch charakterisirt ist, dass hier das Relationsphaenomen ein psychisches ist. Richtet sich auf mehrere Inhalte ein einheitlicher psychischer Act, dann sind im Hinblick auf ihn die Inhalte verbunden oder auf einander bezogen.

Vollziehen wir einen solchen Act, dann würden wir natürlich im Vorstellungsinhalte, den er einschliesst, vergeblich nach einer Beziehung oder Verbindung suchen (es sei denn, dass überdies noch eine primäre Relation da wäre). Die Inhalte sind hier eben nur durch den Act geeinigt, und es kann daher erst durch eine besondere Reflexion auf ihn diese Einigung bemerkt werden.

Als Beispiel kann jeder beliebige Vorstellungs-, Urtheils- oder Gefühls- und Willensact herangezogen werden, welcher auf eine Mehrheit von Inhalten geht. Von jedem dieser psychischen Acte können wir im Einklange mit der MILL'schen Definition sagen, er setze die Inhalte in Beziehung zu einander. Im Besonderen gehört z. B. hierher die früher besprochene Unterschiedsrelation im weitesten Sinne, bei welcher zwei Inhalte durch ein evidentes negatives Urtheil in Beziehung gesetzt werden.

Den charakteristischen Unterschied der beiden Klassen von Relationen kann man auch dadurch kennzeichnen, dass die primären Relationen in gewissem Sinne zu dem Vorstellungsinhalte derselben Stufe gehören wie ihre Fundamente, die psychischen jedoch nicht. Indem wir die Fundamente vorstellen, ist in dem ersteren Falle die Relation unmittelbar mitgegeben als Moment desselben Vorstellungsinhaltes. In dem zweiten Falle aber, dem der psychischen Relation, bedarf es zur Vorstellung der Relation erst eines auf den beziehenden Act reflectirenden Vorstellens. Der unmittelbare Inhalt des letzteren ist der die Beziehung stiftende Act, und erst vermittelst dieses geht es auf die Fundamente. Die bezogenen Inhalte und die Relation bilden so gewissermassen Inhalte verschiedener Stufe.[1]

Eine andere Eintheilung der Relationen, die für uns in Betracht kommt, ist die bekannte in einfache und zusammengesetzte Relationen. Häufig wird hiebei ein

[1]) Ich habe in den vorstehenden Erörterungen den Ausdruck ‚physisches Phaenomen', welcher bei BRENTANO dem ‚psychischen Phaenomen' correspondirt, vermieden, weil es etwas Inconvenientes hat, eine Aehnlichkeit, Steigerung u. dgl. als physisches Phaenomen zu bezeichnen. Auch hatte BRENTANO selbst bei dieser Benennung nur die absoluten primären Inhalte im Auge und zwar individuelle Phaenomene und nicht abstracte Momente einer Anschauung. Indessen sieht man aus den obigen Darlegungen, dass das Merkmal der intentionalen Inexistenz, welches bei BRENTANO als das erste und durchgreifendste Trennungsmerkmal der psychischen von den physischen Phaenomenen fungirt, auch bei der Klassification der Relationen auf eine wesentliche Scheidung führt.

falsches Scheidungsprincip für massgebend angesehen. Relationen zwischen zwei Fundamenten seien einfache, zwischen mehr als zwei Fundamenten zusammengesetzte.[1]) Indessen die blosse Zahl begründet doch keinen wesentlichen Unterschied, sondern kann höchstens indirect auf einen solchen hinweisen, und zwar müsste dies hier derjenige der Einfachheit und Zusammengesetztheit der Relationen sein, in dem eigentlichen Sinne dieser Termini. Wirklich lag der tiefere Grund dafür, die Zahl als das scheidende Merkmal aufzuführen, in der für selbstverständlich erachteten Ansicht, dass, sowie jede zusammengesetzte Relation, als ein Relationscomplex, notwendig mehr als zwei Fundamente einschliesse, so auch umgekehrt jede Relation mit mehr als zwei Fundamenten notwendig ein Complex von Relationen sei, und zwar von solchen, die zwischen je zweien der Fundamente statthaben.

Dies Alles kann ich nicht für richtig halten. Einerseits giebt es zwischen zwei Fundamenten Relationen, die zusammengesetzt sind: man denke nur an die Relation der Endglieder einer Reihe; andererseits giebt es wieder bei mehr als zwei Fundamenten Relationen, die einfach sind, und gerade zu diesen werden wir nachher die collective Verbindung zwischen beliebig vielen Gliedern rechnen müssen. Uebrigens kann auch das Beispiel der sinnlichen Gleichheit dienen, um mindestens die Möglichkeit von Relationen der letzteren Art evident zu machen. Eine Gleichheit zwischen mehr als zwei sinnlichen Objecten können wir unter günstigen und häufig realisirten Umständen in einem Blicke auffassen, ohne dass wir das Geringste merkten von der grossen Mannigfaltigkeit einfacher Beziehungen, die zwischen je zweien der Objecte vollzogen werden können.[2]) Die Zahl derselben wäre schon bei kleinen (noch eigentlich vorstellbaren) Mengen eine in einheitlichem Acte nicht mehr zu bewältigende. Bei sechs Objecten fünf-

[1]) Vgl. z. B. Drobisch, Logik, 4. Aufl. S. 34.

[2]) Vgl. auch Stumpf, Tonpsychologie II, 310.

zehn, bei sieben einundzwanzig Beziehungen und so fortwachsend. Damit ist freilich noch nicht ausgeschlossen, dass eine solche Gleichheit trotzdem eine zusammengesetzte Relation sei. Ist sie dies auch nicht in der Weise eines Relationscomplexes, in welchem die Elementarrelationen als für sich bemerkte Bestandtheile enthalten sind, so könnte sie dies doch in der Weise einer Relationsverschmelzung [1]) sein, in deren unanalysirter Einheit die Elementarrelationen zunächst als unbemerkte Factoren vorhanden wären. Aber selbstverständlich ist dies nicht. Dass die Relation vorerst als eine einfache erscheint, beweist jedenfalls zur Genüge die Möglichkeit einfacher Relationen mit mehr als zwei Fundamenten. Man sieht zugleich, dass auch die Ansicht, jede Relation könne direct nur zwei und nicht mehr Fundamente verknüpfen, nicht berechtigt ist.

Die passendsten Definitionen dürften hier die folgenden sein: Relationen, die selbst wieder aus Relationen zusammengesetzt sind, heissen zusammengesetzte; Relationen, bei denen dies nicht zutrifft, einfache.

Psychologische Charakteristik der collectiven Verbindung.

Nach diesem Excurs in die Relationstheorie kehren wir nun wieder zu den besonderen Beziehungen zurück, deren Charakteristik unser Ziel ist, und stellen zunächst die Frage:

Sind die Relationen, welche die Gegenstände des Inbegriffes einigen, und die wir collective Verbindungen nannten, primäre Relationen in dem oben praecisirten Sinne, wie z. B. die metaphysischen und continuirlichen Verbindungen, oder müssen wir sie vielleicht der Klasse der psychischen Relationen zuweisen? Genauer ausgedrückt: Sind die collectiven Verbindungen im Vorstellungsinhalte des Inbegriffes als Theilphaenomene anschaulich so enthalten und besonders zu bemerken, wie etwa die metaphysischen Verbindungen im metaphysischen

[1]) Ueber den Begriff der Relationsverschmelzung vgl. das XI. Cap.

Ganzen, oder ist im Vorstellungsinhalte selbst nichts von einer Verbindung zu bemerken, sondern nur in dem psychischen Acte, welcher die Theile einigend umschliesst?

Vergleichen wir, um diese Frage zu entscheiden, zunächst den Inbegriff mit irgend einem primären Vorstellungsganzen. Um bei einem solchen die verbindenden Relationen zu bemerken, ist Analyse nötig. Handelt es sich z. B. um das Vorstellungsganze, das wir Rose nennen, dann erhalten wir durch Analyse successive die verschiedenen Theile derselben: die Blätter, den Stengel u. s. w. (die physischen Theile); dann die Farbe, deren Intensität, den Geruch u. s. w. (die Eigenschaften). Jeder Theil wird durch ein besonderes Bemerken herausgehoben und mit den bereits ausgeschiedenen z u s a m m e n festgehalten. Als nächster Erfolg der Analyse resultirt, wie wir sehen, ein Inbegriff, nämlich der Inbegriff der für sich bemerkten Theile des Ganzen. Dazu treten aber noch, mit Rücksicht auf die Einigung der Theile in dem anschaulichen Ganzen, die Verbindungsrelationen als besondere und specifisch bestimmte primäre Relationsinhalte; in unserem Beispiel: die continuirlichen Verbindungen der Blätter, oder die wiederum ganz anders charakterisirten Verbindungen der Eigenschaften, wie der Röte und der räumlichen Ausdehnung u. s. w. So ergeben sich die Verbindungsrelationen gewissermassen als das Mehr gegenüber dem blossen Inbegriff, welcher die Theile nur festzuhalten, nicht aber zu verbinden scheint. Was zeichnet also den Fall dieser primären Verbindungen vor demjenigen der collectiven aus? Offenbar dies, dass im ersten Falle anschaulich im Vorstellungsinhalte eine Einigung bemerkbar ist, im letzteren jedoch nicht.

Dasselbe lehrt auch der Vergleich der collectiven Verbindung mit den Relationen der Gleichheit, Aehnlichkeit, Steigerung u. s. w. (welche innerhalb der Klasse der primären Relationen, ähnlich wie die Verbindungsrelationen, eine psychologisch wolcharakterisirte Gruppe bilden). Obgleich sie die Inhalte, welche ihnen als Fundamente zu Grunde liegen, nicht ‚verbinden', so bilden sie doch primäre Inhalte, und wieder erscheint ihnen gegenüber die collective Verbindung gewissermassen als der Fall der Relationslosigkeit. Und so spricht man denn auch von ‚unverbundenen' oder ‚beziehungslosen' Inhalten dann, wenn es sich darum handelt, die Abwesenheit von primären Inhaltsrelationen überhaupt, oder von solchen, auf die gerade das leitende Interesse gerichtet ist, zu betonen. In diesem Falle sind die Inhalte eben bloss ‚zusammen' gedacht, d. i. als Inbegriff gedacht. Keineswegs sind sie aber wirklich unverbunden, beziehungslos. Im Gegentheil, sie sind verbunden durch den sie zusammenhaltenden psychischen Act. Nur im Inhalte desselben fehlt jede bemerkbare Einigung.[1])

Auch der folgende Umstand zeigt, dass zwischen der collectiven Verbindung und allen primären Inhaltsrelationen ein wesentlicher Unterschied besteht, welcher nur darin seine Erklärung finden kann, dass die erstere überhaupt nicht zu den primären Relationen zu rechnen ist. Jede Relation ruht auf Fundamenten und hängt in gewisser Weise von ihnen ab. Während aber bei allen Inhaltsrelationen die Veränderlichkeit der Fundamente, welche zulässig ist, um die Relation der Art nach zu erhalten, eine beschränkte ist, kann bei

---

[1]) Darum hat J. St. Mill ganz Recht, wenn er ausdrücklich betont, Objecte ständen schon dann in Relation zu einander, wenn wir auch nur zusammen an sie dächten. Sie bilden eben mit Rücksicht auf den sie zusammen denkenden psychischen Act Theile eines psychischen Ganzen und können durch Reflexion darauf jederzeit auch als verbundene erkannt werden; dies macht ihre ‚Relation' aus, und nur wenn man diesen Terminus auf das, was wir primäre Relationen nannten, beschränken würde, dann könnte natürlich im Falle psychischer Verbindung nicht mehr von Relation die Rede sein. Einestheils ist dies freilich Sache der Terminologie; anderentheils aber besteht de facto zwischen Inhaltsrelation und psychischer Relation dem Hauptmomente nach so viel Gemeinsamkeit, dass ich nicht einsehe, warum hier ein gemeinsamer Terminus nicht gerechtfertigt sein sollte.

der collectiven Verbindung jedes Fundament völlig unbeschränkt und willkürlich variirt werden, und die Relation bleibt doch bestehen. Dasselbe gilt auch von der Unterschiedsrelation im weitesten Sinne. Nicht jeder Inhalt kann mit jedem anderen als ähnlich, continuirlich verbunden u. s. f. gedacht werden; immer aber als verschieden und als collectivisch geeinigt. Es liegt eben in beiden Fällen die Relation nicht unmittelbar in den Phaenomenen selbst, sondern ist ihnen gewissermassen äusserlich.

So sprechen denn vielerlei Zeugnisse und vor Allem die innere Erfahrung selbst dafür, dass wir uns für die zweite Auffassung entscheiden müssen, der zufolge die collectivische Einigung nicht im Vorstellungsinhalte anschaulich gegeben ist, sondern nur in gewissen psychischen Acten, welche die Inhalte einigend umschliessen, ihren Bestand hat, ein Resultat, welches sich uns auch in den kritischen Discussionen des vorigen Capitels wiederholt aufdrängte.

Offenbar kann es sich hier nur um die elementaren Acte handeln, welche fähig sind, alle und jede Inhalte, seien sie noch so disparat, zu umfassen. Eine aufmerksame Betrachtung der Phaenomene lehrt nun Folgendes:

Ein Inbegriff entsteht, indem ein einheitliches Interesse und in und mit ihm zugleich ein einheitliches Bemerken verschiedene Inhalte für sich heraushebt und umfasst. Es kann also die collective Verbindung auch nur erfasst werden durch Reflexion auf den psychischen Act, durch welchen der Inbegriff zu Stande kommt.

Die vollste Bestättigung für unsere Auffassung bietet wieder die innere Erfahrung. Fragen wir, worin die Verbindung bestehe, wenn wir z. B. eine Mehrheit so disparater Dinge wie die Röte, der Mond und Napoleon denken, so erhalten wir die Antwort, sie bestehe bloss darin, dass wir diese Inhalte zusammen denken, in einem Acte denken.

Zur weiteren Charakteristik der collectiven Verbindung diene noch Folgendes. Für die Auffassung eines jeden der colligirten Inhalte bedarf es eines besonderen psychischen Actes; ihre Zusammenfassung erfordert dann einen neuen, der jene gliedernden Acte offenbar in sich schliesst, also einen psychischen Act zweiter Ordnung bildet. Wird eine Vielheit unter Vermittlung von Untergruppen vorgestellt, wie wenn wir eine Vielheit von sechs Objecten in der Form von 3 + 3 oder 2 + 2 + 2 vorstellen, da verlangt die Bildung einer jeden Untergruppe einen psychischen Act zweiter Ordnung, somit muss die sie alle umfassende Collectiveinheit durch einen psychischen Act dritter Ordnung hergestellt werden. Wie es kommt, dass wir trotz dieser Complication aufeinander gerichteter Acte eine solche Vorstellungsart häufig vorziehen, soll uns im Verlaufe des XI. Capitels beschäftigen.

Da die collective Verbindung eine besondere Relationsart darstellt, so ist es selbstverständlich, dass mindestens zweigliederige Collectionen den Charakter einfacher Relationen besitzen. Wie verhält es sich aber mit mehrgliederigen Collectionen? Sind sie etwa Complexe oder Gewebe aus collectiven Verbindungen zwischen je zweien ihrer Glieder? Ich glaube nicht. Der colligirende Act umfasst alle Glieder ohne collective Sonderverknüpfungen, und wo wir solche zu bemerken meinen, zeigt die genauere Betrachtung stets, dass es heterogene Verknüpfungen sind, welche mit der Collection concurriren. So ist es z. B., wenn wir die gliedweisen Auffassungen successive vornehmen, wodurch Glied mit Glied reihenartig verknüpft ist. Von dieser zeitlichen Verknüpfung müssen wir abstrahiren, wofern wir die collective Verbindung rein erhalten wollen. — Man wird hier auch nicht die Ansicht vertreten können, dass die Einheit der Gesammtcollection eine Verschmelzung darstelle, in welcher die Elementarcollectionen zunächst ungeschiedene Momente bilden; denn auch durch die nachträgliche Analyse finden wir diese nicht vor, es sei denn, dass wir sie von Neuem vollziehen.

Wir betrachten daher die collective Verbindung beliebig vieler Fundamente gleichfalls als eine einfache Relation.

Die collective Verbindung spielt für unser ganzes geistiges Leben eine höchst bedeutsame Rolle. Jedes complicirte Phaenomen, welches für sich bemerkte Theile voraussetzt, jede höhere Geistes- und Gemütsthätigkeit erfordert, um überhaupt entstehen zu können, collective Verbindungen von Theilphaenomenen. Niemals könnte es auch nur zur Vorstellung einer einfacheren Beziehung kommen (z. B. einer Gleichheit, Aehnlichkeit u. s. w.), wenn nicht ein einheitliches Interesse und damit zugleich ein Act des Bemerkens die Fundamente zusammen heraushöbe und geeinigt festhielte. Diese psychische Relation ist also eine unerlässliche psychologische Vorbedingung für jede Beziehung und Verbindung überhaupt.

Vermöge der elementaren Natur der collectiven Verbindung ist es natürlich, dass sie auch in der gewöhnlichen Sprache ihre Ausprägung gefunden haben muss. In dieser Hinsicht genügte das synkategorematische Wörtchen Und allen practischen Bedürfnissen. An und für sich ist es ohne Bedeutung; aber wo es zwei oder mehrere Namen verbindet, deutet es die collective Verbindung der benannten Inhalte an. Dass die Sprache des Volkes keinen selbständigen Namen für den Begriff der collectiven Verbindung besitzt, darf uns nicht Wunder nehmen; auf ihn geht nur ein ausnahmsweises, wissenschaftliches Interesse. Die ständigen Zwecke des Denkens und Sprechens verlangen eben nur die sprachliche Fixirung des Umstandes, dass gegebene Inhalte in collectivischer Weise verbunden seien, und dies leistet für unsere Sprache in vollkommen angemessener Weise die Conjunction Und.[1])

[1]) Die Thätigkeit des Colligirens beschreibt LOCKE im Essay B. II, ch. XI, s. 6 unter dem Titel „Compounding“. Er bemerkt auch, dass sie die Einheiten einer Zahl verknüpfe. Gleichwol hat er die Rolle, die sie bei der Abstraction dieses Begriffes spielt, nicht erkannt.

IV. Capitel.

Analyse des Anzahlbegriffes nach Ursprung und Inhalt.

Vollendung der Analyse des Vielheitsbegriffes.

Nachdem wir die psychologische Natur der collectiven Verbindung festgestellt haben, können wir unsere Aufgabe, den Ursprung und Inhalt der Begriffe Vielheit, Anzahl, sowie der einzelnen Anzahlbegriffe aufzuzeigen, zur Vollendung bringen.

Für das Verständniss der Entstehung des Vielheitsbegriffes haben wir bereits am Eingange unserer Untersuchungen (Cap. I, S. 12—15) wesentlich vorgearbeitet. Durch Reflexion auf den psychischen Act, welcher die Einheit der zum Inbegriffe verbundenen Inhalte bewirkt, erlangen wir die abstracte Vorstellung der collectiven Verbindung, und vermittelst dieser bilden wir den Begriff der Vielheit als den eines Ganzen, welches Theile in bloss collectivischer Weise verbindet.

Da die Ausdrücke „Ganzes" und „Theil" häufig in einem engeren Umfange gebraucht werden, als es hier geschieht, und leicht den Gedanken einer innigeren, im primären Inhalte selbst liegenden Verbindung mit sich führen könnten, welche hier keineswegs gemeint ist, so wollen wir unser Resultat noch in anderer Weise ausdrücken. Eine Vorstellung, können wir sagen, fällt unter den Begriff der Vielheit, sofern sie irgend welche für sich bemerkte Inhalte in collectivischer

Weise verbindet. Nachdem wir nun die Quelle, aus welcher die collective Verbindung entspringt, aufgefunden und sie mit gewissen psychischen Acten identificirt haben, kann in Betreff unseres Begriffes kaum noch eine Unklarheit bestehen.

Nur ein Punkt, der jedoch mehr die Terminologie betrifft, könnte Bedenken erregen. Wozu, möchte man fragen, werden überhaupt noch die Termini, also auch die Begriffe Vielheit und collective Verbindung geschieden? Da in allen Fällen, wo man von Vielheit spricht, nichts anderes gemeinsam ist, als die collective Verbindung, so sind doch beide Begriffe identisch. Wir werden uns rasch einigen, wenn wir nur auf die im Terminus Begriff enthaltene Aequivocation achten. Verstehen wir unter ‚Begriff' das den Namen zu Grunde liegende Abstractum, dann besteht wirklich eine Identität der beiderseitigen Begriffe. Aber dies beweist nicht, dass nun auch die beiderseitigen Namen eines Sinnes sind. Verstehen wir nämlich unter den ‚Begriffen' die gedanklichen Correlate der Namen, dann sind dieselben hier thatsächlich verschieden und die trennende Terminologie gerechtfertigt. Denn wo immer wir den Namen Vielheit verwenden, ist, von seltenen Ausnahmen abgesehen, nicht die collective Verbindung als solche Gegenstand des Interesses, sondern das collective Ganze. Jene repräsentirt das Abstractum, welches dem allgemeinen Begriff Vielheit oder collectives Ganzes zu Grunde liegt, somit wol die ‚Bedeutung' des Namens Vielheit im Sinne der Logik; aber diese ‚Bedeutung' macht noch nicht den ganzen logischen Gehalt des Namens aus. Der ganze Begriff, der ihm entspricht, ist der eines ‚Etwas, das dieses abstracte Moment der collectiven Verbindung besitzt'. So aufgefasst, bildet der Begriff der collectiven Verbindung den wesentlichsten Bestandtheil des Vielheitsbegriffes, ohne dass beide identisch wären. Aehnlich verhält es sich auch sonst mit allgemeinen Namen. Reden wir von einem Menschen schlechthin, dann haben wir den

Begriff eines Etwas, das die und die abstracten Merkmale besitzt. Wollen wir das besondere Interesse auf den Verein dieser Merkmale für sich hinlenken, dann müssen wir sagen: das Abstractum Mensch. Aequivok ist der Ausdruck ‚der Begriff Mensch', er kann beides bedeuten: den allgemeinen und den abstracten Begriff. — Ausnahmsweise wird übrigens der Name Vielheit auch für sich allein in dem abstracten Sinne verstanden. So sprechen hervorragende Psychologen, wie LOTZE [1]) und STUMPF [2]) von der Vielheit als von einem Verhältnisse, wobei offenbar nichts anderes gemeint sein kann, als die collective Verbindung. Durch die Einführung des Terminus ‚collective Verbindung' haben wir diese Aequivocation beseitigt.

Wir können den Inhalt des Vielheitsbegriffes noch in einer anderen Weise ausdrücken, welche für unsere weiteren Analysen wichtig ist. Zu diesem Zwecke müssen wir den eigenthümlichen Abstractionsvorgang, welcher diesen Begriff ergiebt, etwas genauer zergliedern.

Kein Begriff kann gedacht werden ohne Fundirung in einer concreten Anschauung. So haben wir auch, wenn wir den allgemeinen Begriff der Vielheit vorstellen, immer die Anschauung irgend einer concreten Vielheit im Bewusstsein, an welcher wir den Allgemeinbegriff abstrahiren. In welcher Weise geht nun diese Abstraction von statten? Von den Besonderheiten der colligirten Einzelinhalte ist, wie wir feststellten, gänzlich zu abstrahiren, gleichwol aber deren Verbindung festzuhalten. Darin scheint eine Schwierigkeit, wo nicht eine psychologische Unmöglichkeit zu liegen. Machen wir mit jener Abstraction Ernst, dann verschwindet mit den einzelnen Inhalten natürlich auch die collective Verbindung, statt als begrifflicher Extract übrig zu bleiben.

---

1) Metaphysik, S. 530.

2) Tonpsychologie I, 96.

Die Lösung liegt nahe. Von etwas absehen oder abstrahiren heisst bloss: darauf nicht besonders merken. Die Erfüllung der Forderung, von den inhaltlichen Besonderheiten gänzlich zu abstrahiren, hat also durchaus nicht den Effect, dass die Inhalte und damit ihre Verbindung unserem Bewusstsein entschwinden. Die Auffassung der Inhalte und ihre Collection ist natürlich die Vorbedingung der Abstraction. Bei dieser geht aber das heraushebende Interesse nicht auf die Inhalte, sondern ausschliesslich auf deren gedankliche Verknüpfung — das ist Alles, was gemeint ist.

Die Abstraction, die zu vollziehen ist, kann nun folgendermassen beschrieben werden: Irgendwie bestimmte Einzelinhalte sind in collectiver Verbindung gegeben; indem wir nun abstrahirend zum Allgemeinbegriff übergehen, beachten wir sie nicht als so und so bestimmte Inhalte; das Hauptinteresse concentrirt sich vielmehr auf ihre collective Verbindung, während sie selbst nur als irgend welche Inhalte, ein jeder als ein irgend Etwas, irgend Eins, betrachtet und beachtet werden.

Dieses Resultat wollen wir uns zu Nutze machen, indem wir es mit einer früheren Bemerkung verbinden, nach welcher die collective Verbindung im sprachlichen Ausdrucke durch die Conjunction Und in vollkommen klarer und verständlicher Weise angedeutet werden kann. Vielheit im Allgemeinen, so können wir uns jetzt ganz einfach und ohne jede Umschreibung ausdrücken, ist nichts weiter als: irgend Etwas und irgend Etwas und irgend Etwas, u. s. w.; oder irgend Eines und irgend Eines und irgend Eines, u. s. w.; oder kürzer: Eins und Eins und Eins u. s. w.

Der Begriff Etwas.

Wir sehen auf diese Weise, dass der Begriff der Vielheit mit und in dem Begriffe der collectiven Verbindung auch denjenigen des Etwas enthält. Es ist daher unsere Aufgabe, diesen Begriff nach Inhalt und Entstehung genauer zu charakterisiren.

Etwas ist ein Name, welcher auf jeden denkbaren Inhalt passt. Jedes wirkliche oder Gedankending ist ein Etwas. Aber auch ein Urtheil, einen Willensact, einen Begriff, eine Unmöglichkeit, einen Widerspruch u. s. w. können wir so benennen. Der Begriff Etwas ist natürlich durch keine denkbare Inhaltsvergleichung aller Gegenstände physischer und psychischer Art zu gewinnen. Eine solche Vergleichung bliebe schlechthin ohne Ergebniss. Das ‚Etwas' ist eben kein abstracter Theilinhalt. Worin alle Gegenstände — wirkliche und mögliche, reale und nicht reale, physische und psychische u. s. w. — übereinkommen, ist nur dies, dass sie Vorstellungsinhalte sind oder durch Vorstellungsinhalte in unserem Bewusstsein vertreten werden. Offenbar verdankt der Begriff des Etwas seine Entstehung der Reflexion auf den psychischen Act des Vorstellens, als dessen Inhalt eben jedes bestimmte Object gegeben ist. Das ‚Etwas' gehört also nur in jener äusserlichen und uneigentlichen Weise zum Inhalt eines jeden concreten Gegenstandes, wie irgend welche relativen und negativen Attribute; ja es ist selbst als eine relative Bestimmung zu bezeichnen. Natürlich kann der Begriff Etwas nie gedacht werden, ohne dass irgend ein Inhalt gegenwärtig ist, an dem jene Reflexion vollzogen wird; doch hiezu ist jeder gleich gut geeignet, selbst der blosse Name Etwas.

Die wichtige Function des Begriffes Etwas oder Eins für die Entstehung des Allgemeinbegriffes der Vielheit besteht darin, dass jeder einzelne unter den bestimmten Inhalten, welche die concrete Vielheitsvorstellung in sich begreift, unter Vermittlung des Etwasbegriffes gedacht und nur, insofern er unter diesen Begriff fällt, beachtet wird; hiedurch entsteht jene vollkommenste Inhaltsentschränkung, welche dem Begriffe der Vielheit seine Allgemeinheit verleiht.

Die Anzahlen und der Gattungsbegriff der Anzahl.

Der Ausdruck „Eins und Eins und Eins u. s. w.“, welcher nach den gegebenen Erläuterungen den Inhalt des Vielheitsbegriffes deutlich ausprägt, weist durch das „u. s. w.“ auf eine gewisse Unbestimmtheit hin, die dem Begriffe in seiner weiten Fassung wesentlich ist. Nicht als ob die Collection der Einse, welche uns den Begriff der Vielheit repräsentirt, kein Ende nähme; geschweige denn, dass die Vielheitsform, die wir, ausgehend von einem bestimmt gegebenen Inbegriff, nach dem oben beschriebenen Abstractionsverfahren erlangen, ohne Abschluss wäre; vielmehr ist nichts Anderes gemeint, als dass in Betreff der Abgrenzung keine Bestimmung getroffen, beziehungsweise dass die factisch vorhandene Begrenzung als etwas anzusehen sei, worauf es nicht ankomme.

Wollen wir aber diese Unbestimmtheit beheben, dann ergeben sich vielerlei Möglichkeiten, und es ist einleuchtend, dass diesen entsprechend der Vielheitsbegriff alsbald in eine Mannigfaltigkeit von bestimmten, auf das Schärfste gegen einander abgegrenzten Begriffen, den Zahlen, zerfällt. Es entstehen Begriffe wie: Eins und Eins; Eins, Eins und Eins; Eins, Eins, Eins und Eins; u. s. f., welche vermöge ihres höchst primitiven Charakters und ihrer practischen Wichtigkeit wenigstens in beschränktem Umfange — soweit nämlich ihre leichte Unterscheidbarkeit reicht — schon auf den untersten Stufen der menschlichen Geistesentwicklung gebildet wurden, so dass deren Namen Zwei, Drei, Vier u. s. w. zu den frühesten Schöpfungen aller Sprachen gehören.

Es ist natürlich nicht nötig, für die Herleitung der Zahlbegriffe den allgemeinen und unbestimmten Vielheitsbegriff zum Vermittler zu nehmen. Wir kommen direct zu denselben, ausgehend von beliebigen concreten Vielheiten, denn eine jede fällt unter einen und zwar einen bestimmten dieser Begriffe. Der Abstractionsprocess, welcher die einer gegebenen concreten Vielheit zukommende bestimmte Zahl ergiebt, ist nach den obigen Analysen völlig klar. Absehend von der besonderen Beschaffenheit der zusammengefassten Einzelinhalte, betrachtet und behält man einen jeden nur, insofern er ein Etwas oder Eins ist, und gewinnt so, mit Rücksicht auf die collective Verbindung derselben, die zu der vorliegenden Vielheit gehörige allgemeine Vielheitsform: Eins und Eins, u. s. w., und Eins, mit welcher ein bestimmter Zahlname associirt ist.

Alle Begriffe, die so entstehen, sind sichtlich mit einander verwandt. Ihre Aehnlichkeit beruht auf der Gleichheit der sie zusammensetzenden Theilvorstellungen (der Einsen oder Einheiten), sowie auf der elementaren Aehnlichkeit der die letzteren verbindenden psychischen Acte; sie reicht hin, um die Zahlbegriffe als eine wolcharakterisirte Klasse von Begriffen abzugrenzen, und um als Grundlage für eine allgemeine Benennung zu dienen. Diesen Zweck erfüllt der Name Anzahl. Anzahl ist ein gemeinsamer Name für die Begriffe Zwei, Drei, Vier, u. s. f.[1]) Nun spricht man freilich auch von einem Allgemeinbegriff und nicht bloss von einem allgemeinen Namen Anzahl. Diesen Begriff können wir aber nicht anders erklären, als dadurch, dass wir auf die Aehnlichkeit der sämmtlichen Zahlbegriffe unter einander hinweisen. Eine Anzahl im Allgemeinen, die als eine für sich bemerkbare Theilvorstellung in der Weise eines physischen oder auch nur metaphysischen Theiles (z. B. der Farbe oder Gestalt eines Aussendinges) aus der Vorstellung eines jeden Anzahlbegriffes heraushebbar wäre, giebt es nicht. Eher scheint das Verhältniss zwischen logischem

[1]) James Mill rechnet den Namen Anzahl zu jener Gattung von Namen, die er ‚names of names' nennt. Vgl. Analysis etc. II, 4. Dies ist eine sehr unzutreffende Ausdrucksweise. Anzahl ist nicht als ein allgemeiner Name für die Namen Zwei, Drei u. s. w., sondern für die durch dieselben bezeichneten Begriffe entstanden, deren innere Verwandtschaft zu einer gemeinsamen Benennung Grund und Anlass bot.

Theil und logischem Ganzen (z. B. von Farbe und Differenz der Röte) demjenigen zwischen Anzahl im Allgemeinen und bestimmter Zahl (Zwei, Drei u. s. f.) zu entsprechen.

Verhältniss der Begriffe Anzahl und Vielheit.

Wie verhalten sich nun die Begriffe Anzahl und Vielheit zu einander? Dass sie ihrem wesentlicheren Gehalte nach übereinstimmen, ist von vornherein ersichtlich. Der Unterschied besteht nur darin, dass der Begriff der Anzahl bereits eine Unterscheidung der abstracten Vielheitsformen von einander voraussetzt, derjenige der Vielheit aber nicht. Der erstere ist zu fassen als der Gattungsbegriff, welcher aus der Vergleichung der von einander bereits unterschiedenen, bestimmten Vielheitsformen oder Zahlen, als der Speciesbegriffe, entspringt; der Vielheitsbegriff hingegen erwächst unmittelbar aus der Vergleichung concreter Inbegriffe. Freilich führt das beschriebene Abstractionsverfahren bei verschiedenen Inbegriffen nicht immer zu derselben Vielheitsform; aber auf der Stufe der Abstraction, welcher der Vielheitsbegriff angehört, hat eine Unterscheidung und Klassification der mannigfaltigen Vielheitsformen entweder noch nicht stattgefunden, oder liegt ausserhalb des herrschenden Interesses. Beachtung findet nur die offenbare Gleichartigkeit jener psychischen Reflexionen, die überall wirksam sind, wo wir von concreten Vielheiten zu dem bezüglichen Begriffe aufsteigen; während die Unterschiede, welche zu der scharfen Sonderung jener unbegrenzten Reihe von Speciesbegriffen führen, noch unbemerkt oder absichtlich unbeachtet bleiben. Infolge dessen trägt eben der Begriff der Vielheit jene vage Unbestimmtheit in sich, die wir oben gekennzeichnet haben. Was ihm fehlt ist dasjenige, was den Zahlencharakter erst vollendet und ihn auszeichnet: das scharf bestimmte Wieviel.

Dass wirklich der unbestimmte Vielheitsbegriff eine erheblich tiefere Stufe der Begriffsbildung repräsentirt, findet seine Bestättigung in Erfahrungen an Kindern und an den in der Kindheitsperiode stehenden Völkern. Es ist bekannt, welche Schwierigkeit es kostet, Kinder, die längst schon den Namen und Begriff des Vielen besitzen, zu der klaren Unterscheidung der Zahlbegriffe anzuleiten. Was die wilden Völker anlangt, so besitzen selbst die in der Cultur am tiefsten stehenden, welche in der Benennung der bestimmten Zahlbegriffe nicht über Drei oder Fünf gekommen sind, doch sämmtlich den Namen und Begriff des unbestimmt Vielen. [1])

Eins und Etwas.

Das Verhältniss der Begriffe Eins und Etwas bedarf noch einer Erläuterung. Nach unserer Auffassung kommt das Eins seinem Begriffe nach wesentlich überein mit ‚irgend Eines', ‚irgend ein Ding', oder ‚ein Ding' schlechtweg, wo ‚ein' den unbestimmten Artikel bedeutet; und alle diese Namen haben wieder wesentlich dieselbe Bedeutung wie das Etwas. Indem wir zählen, bringen wir jedes der concret vorliegenden Dinge unter diesen Begriff. Nun besteht aber zwischen der Vielheit als einem Ganzen und den einzelnen Gegenständen als seinen Theilen ein Correlationsverhältniss, also auch zwischen der Vielheit in abstracto und der Einheit als dem unter der Vermittlung des Begriffes Etwas gedachten Elemente der Vielheit. Indem nun der Name ‚Eins' beim Zählen ausschliesslich in Gebrauch kam, trat ein gewisser Unterschied der Bedeutung zwischen Eins und ‚ein Ding' und ‚Etwas' dadurch hervor, dass Eins die Correlation zur Vielheit als Mitbezeichnung erhielt. Dies ergab sich durch die Art der Verwendung ganz von selbst. So

---

[1]) Vgl. TYLOR, Anfänge der Cultur. 7. Cap. Die Zählkunst. Insbes. S. 240, 261 u. s. f. LUBBOCK, Die Entstehung der Civilisation S. 364 u. ff.

wurde denn Eins gleichbedeutend mit ‚gezähltes Ding' oder ‚ein Ding' im Gegensatz zu vielen Dingen, während ‚ein Ding' schlechtweg bei unbetontem ‚ein', und das gleichbedeutende ‚Etwas', von dieser Beziehung auf den Begriff der Vielheit frei blieb. Bei der Charakteristik der Zahlenabstraction sagte ich mit Absicht: wir bringen jeden Inhalt unter den Begriff des Etwas, und nicht: wir bringen einen jeden unter den Begriff des Eins; denn die Correlation zum Begriffe der Vielheit, welche allein den Begriff des Eins vor dem des Etwas auszeichnet, ist nicht ein Punkt, der für die Zahlenabstraction irgendwie in Betracht kommt. Indem jeder Gegenstand der Vielheit bloss als ein Etwas gedacht ist, so ist das Etwas bereits ‚Eins'; es steht als ein Etwas in der Vielheit und besitzt hiedurch eo ipso jene Correlation zu ihr.

Man kann mit vollem Rechte die Begriffe Etwas und Eins, Vielheit und Anzahl, diese allgemeinsten und inhaltleersten aller Begriffe, als Formbegriffe oder Kategorien bezeichnen. Was sie als solche charakterisirt, ist der Umstand, dass sie nicht Begriffe von Inhalten bestimmter Gattung sind, sondern in gewisser Art alle und jede Inhalte in sich befassen. Aehnliche Relationsbegriffe giebt es auch sonst noch, z. B. die Begriffe des Unterschiedes und der Identität. Ihr allumfassender Charakter findet seine einfache Erklärung darin, dass sie Begriffe von Attributen sind, welche in Reflexion auf psychische Acte entstehen, die an allen Inhalten ohne Ausnahme geübt werden können.

Kritischer Zusatz. Unsere Analysen führten zu einem wichtigen, sowol auf kritischem als positivem Wege festbegründeten Resultat. Es ist unmöglich, die Entstehung der Zahlbegriffe auf gleiche Weise zu erklären, wie etwa diejenige der Begriffe Farbe, Gestalt u. s. w., welche als positive Momente im primären Inhalt, durch blosse Analyse desselben herausgehoben werden. Darum war nicht bloss ARISTOTELES im Irrthum, wenn er[1]) die Zahlen und das Eins zu den αἰσθητὰ κοινά, zu den gemeinsamen Objecten aller Sinne, sondern auch LOCKE, wenn er das Eins zu den Begriffen rechnete, die zugleich auf dem Gebiete der Sensation und dem der Reflexion ihre Quelle haben.[2]) Die gezählten Inhalte können freilich physische so gut wie psychische sein, aber die Zahlbegriffe und das Eins gehören ausschliesslich dem Gebiete der Reflexion an. Und demgemäss ist es auch von vornherein absurd, wenn LOCKE (wie so viele nach ihm) die vorgestellten Zahlen als „primäre Qualitäten“ betrachtet, als vollkommene Abbilder originaler Qualitäten, die in den Dingen selbst und unabhängig von unserem Geiste Bestand haben.[3])

In dieser allgemeinsten Form ist unser Ergebniss nicht neu. Bereits SIGWART hat dasselbe in seiner Logik — als das Erste, soweit mir bekannt ist — ausgesprochen und hiedurch der Analyse des Zahlbegriffes den richtigen Weg gewiesen. Indessen fehlt es bei SIGWART an einer sicher durchgeführten und haltbaren Theorie. Glücklich und treffend sind seine Darlegungen nur überall da, wo er die Haltlosigkeit der physischen Abstractionstheorie an den Lehren J. ST. MILL's und BAIN's kritisch darthut.[4])

Es sei hier ausgesprochen, dass mich zunächst das kritische Studium der SIGWART'schen Untersuchung zu der oben entwickelten Theorie geführt hat.

Unter dem Einflusse SIGWART's stehen, wenn ich nicht irre, die Ausführungen WUNDT's über den Zahlbegriff in seinem grossen logischen Werke. Auch er lässt denselben durch Reflexion auf psychische Acte hervorgehen, wobei er sich jedoch von der Unterschiedstheorie fernzuhalten weiss. Ich muss bekennen, dass es mir nicht gelungen ist, ein ganz deutliches Bild seiner Auffassung zu erlangen. Was ich verstehe, kann ich nicht in dem Sinne einer

[1]) De Anima II, 6, § 3; III, 1, § 5; u. s. w. Vgl. BRENTANO, Die Psychologie des Aristoteles, S. 83. Dem ARISTOTELES folgte u. A. auch LEIBNITZ (Opp. phil. Erdm. 97).

[2]) Essay B. II, chap. VII, 7.

[3]) Essay B. II, chap. VIII, 11, 17, u. ö. Vgl. die Kritik der BAUMANN'schen Ansichten im zweiten Cap., S. 44—47 d. W.

[4]) SIGWART, Logik II, 39 ff.

klaren und folgerichtigen Ansicht nehmen. „Der Ausgangspunkt für die Entwicklung des Zahlbegriffes," sagt WUNDT,[1]) „ist die Einheit. Sie erscheint in der ursprünglichen Bethätigung der Function des Zählens als eine Abstraction von dem einzelnen Gegenstand; eine verbreitete Anschauung sieht darum in der Zahl eine Nachbildung der einzelnen zählbaren Dinge, bei welcher die unterscheidenden Eigenschaften der letzteren vernachlässigt werden. Nun ist es klar, dass die Dinge zählbar erst werden können, indem das Denken sie als Einheiten auffasst. Zu dieser logischen Handlung liegen sicherlich Motive in den Vorstellungen der Dinge, ihrer Abgeschlossenheit und Selbständigkeit gegenüber anderen Vorstellungen. Aber es wäre völlig unbegreiflich, wie diese Motive wirksam werden sollten, wenn nicht unser Denken die Eigenschaft besässe, den einzelnen Gegenstand als eine Einheit aufzufassen. Der eigentliche Träger des Begriffes der Einheit ist also der einzelne Denkact. Darum ist zählbar, was nur immer in einzelne mit einander verbundene Denkacte gegliedert werden kann . . ."

Ich suche vergeblich den nervus probandi dieser Argumentation. Könnte man nicht genau ebenso den einzelnen Denkact als „Träger" eines jeden Begriffes erweisen und z. B. argumentiren: Die Farbe ist eine Abstraction vom farbigen Gegenstande. Das Auffassen der farbigen Dinge als solcher ist eine logische Handlung, zu der Motive in den Dingen selbst vorhanden sein mögen; aber es wäre unbegreiflich, wie diese Motive wirksam sein sollten, wenn nicht unser Denken die Eigenschaft besässe, den farbigen Gegenstand als farbigen aufzufassen. Der eigentliche Träger des Begriffes Farbe ist also der einzelne (den farbigen Gegenstand auffassende) Denkact. — Allerdings in gewissem Sinne ist der Satz hier und überall giltig, nicht aber in dem ganz besonderen, auf den es bei der Einheit ankommt. Zwei sehr verschiedene Behauptungen werden hier, wenn nicht Alles täuscht, verwechselt:

1) Der Einheitsbegriff kann nicht entstehen ohne einen ihn tragenden — nämlich ihn abstrahirenden — Denkact. Diese Behauptung ist giltig für jeden und nicht bloss für den Begriff der

[1]) Logik I, 468.

Einheit. Dass die obige Argumentation nur diese Behauptung trifft, ist klar, daher eben die Möglichkeit ihrer Uebertragung auf jeden anderen Begriff. Im Uebrigen müht sie sich wol ohne Not, eine pure Selbstverständlichkeit zu erweisen.

2) Der abstracte Einheitsbegriff kann nicht entstehen, ohne einen ihn tragenden — nämlich einen gewissen zu seinem Inhalte gehörigen — Denkact. Diese Behauptung ist allerdings gar nicht selbstverständlich; sie wird aber mit der obigen verwechselt; es wird der Beweis der ersten auch für die zweite Behauptung als giltig angesehen.

Wir können daher auch die weiteren Sätze, die Wundt folgen lässt, nicht als was sie sich geben, nämlich als logische Consequenzen der vorgängigen Argumentation gelten lassen: „Darum ist zählbar, was nur immer in einzelne mit einander verbundene Denkacte gegliedert werden kann. Zählbar sind also nicht bloss Gegenstände, sondern ebensowol Eigenschaften und Ereignisse. . . . Die Function des Zählens besteht, worauf sie sich auch beziehen möge, immer in einer Verbindung einzelner Denkacte zu zusammengesetzten Einheiten. . . . Sie entsteht aus der Verbindung auf einander folgender Denkacte, wenn von dem Inhalt der letzteren völlig abstrahirt wird. Wie die Eins alles Mögliche bezeichnet, was als einzelner Denkact gegeben sein kann, so stellt jede aus Einheiten zusammengesetzte Zahl eine Reihe von Denkacten beliebigen Inhalts dar. . . .“

Obgleich mir manche Ausdrücke nicht ganz klar sind, würde ich doch geneigt sein, diese und ähnliche, an anderen Orten wiederkehrende Sätze in dem Sinne der in den obigen Untersuchungen als richtig erwiesenen Theorie zu deuten, wenn bei Wundt nicht so Vieles folgte, was sich mit ihr durchaus nicht vereinigen liesse. Ich verstehe nicht, wie nach dem zuletzt citirten Satze, demzufolge „jede aus Einheiten zusammengesetzte Zahl eine Reihe von Denkacten beliebigen Inhaltes“ darstellen soll, die Rede sein kann von der „Ausbildung der aus Einheiten zusammengesetzten Gebilde zur stetigen Reihe der Zahlbegriffe“ und von einer „begrifflichen Entwicklung“, welche „die Quelle aller der reichen Umgestaltungen“ bilden soll, die der Zahlbegriff erfahren hat. Es ist hier gemeint die Entstehung der negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären Zahlen. Es soll z. B. die gebrochene Zahl aus der Aufgabe hervorgehen, die Zahl a zu bestimmen, welche entsteht, wenn eine Zahl c durch eine andere b getheilt wird. Es kann sich nun ereignen, „dass eine solche Zahl a nicht existirt in der Reihe der positiven ganzen Zahlen, so dass a dem Begriff einer Zahl entspricht, welche zwischen zwei benachbarten Zahlen gelegen ist". [1]) Schon jene Aufgabe als solche würde sich formuliren lassen, wenn wir für ‚Zahl' die obige Erklärung WUNDT's nähmen. Beachtet man nun erst den Umstand, dass ‚ganze positive Zahl' hier weiter nichts bedeutet, als ‚Zahl', [2]) dann wird es ganz unverständlich, wie jenes a, das nicht in der Zahlenreihe existirt, dem Begriffe einer Zahl entsprechen kann, welche z w i s c h e n zwei Zahlen bestehen, also etwas repräsentiren soll, das nicht aus n und nicht aus n + 1 Denkacten zusammengesetzt, aber „zwischen ihnen gelegen ist". „Da der Quotient $\frac{c}{b} = a$," so fährt WUNDT fort, „alle möglichen Zwischenwerte zwischen zwei ganzen Zahlen annehmen kann, so erwächst hieraus die Forderung, den Zahlbegriff derart zu erweitern, dass er Alles, was nach zwei einander entgegengesetzten Richtungen zu- und abnimmt, umfasst. Diejenigen Zahlen, welche man, um diese Forderungen zu erfüllen, zwischen den positiven und negativen ganzen [und gebrochenen Zahlen] als Zwischenwerte einschalten muss, sind die irrationalen Zahlen." Wie der Begriff einer Reihe von Denkacten die Möglichkeit ergeben kann zu „Erweiterungen" oder „Umgestaltungen", welche diese oder jene Forderung zu erfüllen vermöchten, bleibt ebenso rätselhaft, wie die Denkbarkeit und der Begriff von „Zwischenwerten".

Noch Eines sei hier besprochen: WUNDT nennt [3]) die Zahl „die abstracteste Form, in welcher das Gesetz des discursiven Denkens, wonach jeder zusammengesetzte Gedanke aus einzelnen Denkacten besteht, zum Ausdruck kommt". Ich finde nicht,

---

[1]) Für dieses, wie die vorhergehenden Citate vgl. a. a. O. S. 469—71.

[2]) „Die Zahl als eine Verbindung von Einheiten ist zunächst positive Zahl und . . . . ganze Zahl" a. a. O. S. 469.

[3]) Ebendas. S. 468.

dass die Zahl hiedurch eine besondere Charakteristik erlangt. Wie steht es denn überhaupt mit jenem Gesetz des discursiven Denkens? Ich darf wol behaupten, wenn es wahr ist, so ist es eine Tautologie, und wenn es keine Tautologie ist, so ist es nicht wahr. Verstehen wir unter einem zusammengesetzten Gedanken einen solchen, der aus einzelnen Denkacten besteht, dann ist die Tautologie klar. Verstehen wir aber unter einem zusammengesetzten Gedanken jeden zusammengesetzten Inhalt überhaupt, dann ist der Satz nicht richtig, sofern eben keineswegs eine jede inhaltliche Zusammengesetztheit aus (vorgestellten) Denkacten besteht. Nur dies ist giltig, dass die ursprünglich ungeschiedene Einheit eines zusammengesetzten Phaenomens in eine Mehrheit übergeht, zu deren Heraushebung eine Mehrheit von Denkacten erforderlich ist. Aber auch für diese elementare Thatsache unseres psychischen Lebens ist es nicht abzusehen, wie sie im Zahlbegriffe zum Ausdrucke kommen sollte, da dieser auch ohne sie bestehen kann. Mit der collectiven Verbindung ist der Zahlbegriff möglich, gleichgiltig woher sie stammen möge.

V. Capitel.

Die Relationen Mehr und Weniger.

Nach den Analysen des letzten Capitels ergaben sich die Anzahlbegriffe als eine unbestimmt, scheinbar sogar ins Endlose fortzusetzende Folge von Begriffen, deren Deutlichkeit und leichte gegenseitige Unterscheidbarkeit ausser Frage zu stehen und weitere Untersuchungen zum Zwecke praeciser gegenseitiger Abgrenzung überflüssig zu machen schien. Eins und Eins ist scharf unterschieden von Eins, Eins und Eins, dieses wieder von Eins, Eins, Eins und Eins, u. s. f. Man sieht indessen, dass diese Leichtigkeit der Unterscheidung doch merklich abnimmt, je weiter wir in der Reihe der Zahlen fortschreiten. Neunzehn ist von Zwanzig viel weniger leicht zu unterscheiden als Neun von Zehn, und dieses weniger leicht als Drei von Vier. Dass dieser Umstand keinen Schaden bringt, dass wir trotzdem Zahlbestimmungen und Zahlunterschiede als die schärfsten im Bereiche unserer Erkenntniss betrachten, hat in gewissen Hilfsmitteln seinen Grund, durch welche wir im Stande sind, in Fällen, wo die unmittelbare Anschauung entweder gänzlich versagen oder leicht irren könnte, auf Umwegen das Ziel scharfer Unterscheidung zu erreichen und den Irrthum in sehr enge Grenzen zu schliessen. Diese Hilfsmittel bestehen in Zählen und Rechnen, d. i. in gewissen s. z. s. mechanischen Operationen, deren eigentliches Fundament in den elementaren Zahlenrelationen ruht. Die psychologische Analyse dieser Relationen von Mehr und Weniger ist das Ziel, das wir uns jetzt stellen.

Der psychologische Ursprung dieser Relationen.

Gehen wir wieder in den Kreis der concreten Phaenomene zurück. Denken wir uns zu einer gegebenen Menge, etwa von Kugeln, eine oder mehrere Kugeln hinzugesetzt, dann sagen wir, die neue Menge habe um die hinzugefügten Kugeln mehr; werden aber Kugeln weggenommen, dann sagen wir, um diese seien nun weniger. In diesem Falle handelt es sich um physische Objecte und um ein physisches Thun mit denselben. Aber auch da, wo wir nicht gerade äussere Inhalte collectivisch zusammendenken, giebt es ein solches Hinzu- und Hinwegnehmen. Was damit gemeint ist, lässt sich freilich nur aufweisen nicht definiren. Es ist eine elementare und in keiner anderen Art als durch den Hinweis auf die Phaenomene zu beschreibende Thatsache, dass, während gewisse Inhalte von uns ‚zusammen' gedacht werden, nun noch neue

Inhalte hinzutreten und mit den bereits vorhandenen zusammengefasst werden können. Der ursprüngliche Act erweitert sich durch Aufnahme neuer Inhalte. Aber auch das Umgekehrte kann eintreten: von den bereits zusammengefassten Inhalten fallen welche fort, indem jener einigende Act nur die übrigen festhält und umschliesst.

Diese Thatsachen der Erweiterung und Verengung von Inbegriffen reichen aber allein noch nicht hin, um die Relationsbegriffe des Mehr und Weniger zu begründen. Zwar kann man an diese Thatsachen die richtige Erklärung knüpfen, dass der erweiterte Inbegriff um die neu aufgenommenen Elemente mehr, und ebenso, dass der verengerte Inbegriff um die fortgefallenen Elemente weniger enthält, als der ursprünglich vorgestellte. Man kann ferner den richtigen Schluss ziehen, dass Mehr und Weniger correlative Begriffe sind, indem der Rückgang von dem vermehrten Inbegriff zu dem ursprünglichen ein Vermindern, der Rückgang von dem verminderten Inbegriff zu dem ursprünglichen ein Vermehren erfordert. Dies alles ist richtig, aber es setzt doch, um möglich zu sein, ein neues Factum der inneren Erfahrung voraus. Wie jede Relation das Zusammensein der Fundamente in einem Bewusstseinsacte erfordert, so auch unsere Relation des Mehr und Weniger. Sie setzt also, um vollzogen werden zu können, voraus, dass uns der ursprüngliche und der erweiterte Inbegriff zugleich und in Einem Acte gegenwärtig sei. Daran noch nicht genug, muss sogar der letztere als ‚Summe' zweier Inbegriffe erscheinen, von denen der eine als identisch erkannt wird mit dem ursprünglichen Inbegriff, der andere aber den der neu hinzugekommenen Inhalte repräsentirt. Erweitere ich z. B. den Inbegriff (A, B, C) zu (A, B, C, D, E), dann erfordert das Urtheil, dass der zweite um D und E mehr ist, die gleichzeitige Vorstellung von

(A, B, C), (A, B, C, D, E) und (A, B, C; D, E)

und zwar in Einem Acte.

Es ist also eine Thatsache, dass wir die Fähigkeit haben, mehrere Inbegriffe zusammen, zu Einem Inbegriffe geeinigt vorzustellen, ohne dass ihnen hiedurch ihre besonderen Einigungen abhanden kommen. Wir stellen Inbegriffe vor, deren Elemente wieder Inbegriffe sind. Ja auch Inbegriffe von Inbegriffen von Inbegriffen sind denkbar u. s. f. Dass für das eigentliche Vorstellen die Schranken früh genug gesteckt sind und alles Uebrige nur uneigentliches (symbolisches) Vorstellen ist, braucht nicht weitläufig auseinandergesetzt zu werden. Sicher ist jedoch, dass das eigentliche Vorstellen mindestens für die ersten Schritte vorhanden ist; denn sonst wäre selbst der Gedanke einer solchen Zusammensetzung absurd, und von einer Vergleichung der Vielheiten nach Mehr und Weniger wäre keine Rede.

Was die psychologische Grundlage dieser complicirteren Bildungen anlangt, so erkennt man, dass hier psychische Acte höherer Ordnung vorliegen, d. h. psychische Acte, welche wieder auf psychische Acte gerichtet sind und erst durch Vermittlung dieser auf die primären Inhalte gehen. Stellen wir in einem Acte mehrere Inbegriffe vor, dann ist für die Bildung jedes einzelnen ein einigender Act der oben beschriebenen Art erfordert; und soll jeder von ihnen in seiner Einheit mit Bewusstsein festgehalten und mit den anderen vereinigt gedacht werden, dann muss ein psychischer Act zweiter Ordnung auf jene Acte erster Ordnung — in welchen die besonderen Einigungen der Theilinbegriffe ruhen — und erst durch sie auf die primären Inhalte gerichtet sein. Bei Inbegriffen von Inbegriffen von Inbegriffen kämen wir auf psychische Acte dritter Ordnung u. s. w. Ja genauer besehen, sind diese Stufenzahlen noch um eine Einheit zu erhöhen, denn schon bei den einfachen Inbegriffen, d. h. solchen, deren Elemente nicht weiter analysirte einheitliche Inhalte sind, liegen Acte zweiter Ordnung vor, nämlich derart, dass die einzelnen Inhalte durch besondere Acte herausgehoben und dann erst durch einen gemeinsamen sie alle einigenden Act umfasst werden. (Vgl. S. 80.)

Vergleichung von beliebigen Vielheiten, sowie von Zahlen nach Mehr und Weniger.

Wir haben bisher bloss Inbegriffe, welche aus einander durch Vermehrung oder Verminderung hervorgehen, betrachtet. Man begreift jedoch leicht, dass die Vergleichung ganz beliebiger Inbegriffe nach Mehr und Weniger in psychologischer Beziehung keine neuen Schwierigkeiten mit sich bringt. Eine solche Vergleichung kann in concreto allerdings nur unter einer gewissen Bedingung stattfinden. Es müssen die zu vergleichenden Inbegriffe ganz oder zum Theil aus wechselseitig gleichen Inhalten bestehen und zwar so, dass die sämmtlichen Inhalte des einen in dem andern durch gleiche vertreten sind. Wird etwa der erstere M, der letztere N genannt, dann können wir diesen in zwei Theilinbegriffe zerlegt denken M' und N',

$$N = M' + N'$$

von denen M' die gleichen Elemente umfasst wie M und daher dem M gleich ist. Indem nun der Inbegriff N um die Elemente N' mehr enthält als sein Theilinbegriff M', dieser aber gleich ist dem Inbegriff M, so sagen wir auch, dass der Inbegriff N um die Elemente N' (oder um den Inbegriff N') mehr enthält, als der Inbegriff M.

Die vorausgesetzte Bedingung für eine Vergleichbarkeit ist natürlich immer erfüllt, wenn beide Inbegriffe aus Inhalten einer und derselben Gattung bestehen. Zwei derartige Mengen befinden sich also unter allen Umständen in dem Verhältnisse von Mehr und Weniger. Bestehen aber Inbegriffe aus heterogenen Inhalten, oder ist jene Bedingung nicht erfüllt, dann kann man nur ihre Zahlen nach Mehr und Weniger vergleichen. Dies geschieht nun genau in der eben beschriebenen Weise. Denn infolge der völligen Inhaltsentschränkung, welche mit der Zahlenabstraction einhergeht, repräsentiren diese allgemeinsten Inbegriffsformen, äusserlich betrachtet, selbst wieder Inbegriffe unter einander gleicher Inhalte, nämlich der Einheiten. Indem jeder concret vorliegende Inhalt nur, sofern er ein Etwas ist, betrachtet und mit den anderen zusammengedacht wird, ist ein jeder jedem — eben als ein Etwas — gleich geworden. Darum können Zahlen mit einander in Beziehung auf Mehr und Weniger ebenso verglichen werden, wie Inbegriffe aus gleichartigen concreten Elementen. In dieser Höhe und Leerheit der Abstraction verschwinden eben eo ipso alle Unterschiede.

Aus unserer letzten Untersuchung geht hervor, dass wir mit einem besonderen Rechte die Ausdrucksweise ‚Vergleichung von Inbegriffen, bzw. Zahlen, nach Mehr und Weniger' gebraucht haben. Jede Erkenntniss eines solchen Verhältnisses schliesst die Erkenntniss einer Gleichheit ein. Handelt es sich um concrete Inbegriffe, dann besteht der vergleichende Act darin, dass die Gleichheit des einen mit einem Theil-Inbegriffe des anderen erkannt und der Ueberschuss für sich aufgefasst wird. Und ebenso ist es bei den Zahlen. Urtheilen wir, dass Fünf um Zwei mehr sei als Drei, dann stellen wir Fünf in die beiden Theilzahlen Zwei und Drei zerlegt vor, und indem die Gleichheit der als Theilzahl vorgestellten mit der für sich vorgestellten Drei constatirt wird, kommt der Ueberschuss als die Theilzahl Zwei zum Bewusstsein. Weil nun dieses Mehr (bzw. vom Standpunkte der zweiten Vielheit, das Weniger) als Grund der Unterschiedenheit beider Vielheiten erkannt wird, nennt man es geradezu den Unterschied oder die Differenz derselben. Und ebenso spricht man von einem Unterschied (Differenz) zweier Zahlen, wo man eine Zahl versteht, welche als der Ueberschuss der einen Zahl in Beziehung auf die andere gedacht ist.

Dies ist also die charakteristische Art, wie bei den Zahlen die vergleichende und unterscheidende Geistesthätigkeit zur Geltung kommt. Die Anzahlengleichheit, an und für sich eine einfache Sache, werden wir, da sie in der neueren Zeit Anlass zu merkwürdigen Discussionen geboten und sogar als Ausgangspunkt für eigenthümliche Analysen und Definitionen des Zahlbegriffes gedient hat, noch in dem nächsten Capitel behandeln.

Die Sonderung der Zahlenspecies bedingt durch die Erkenntniss von Mehr und Weniger.

Die Vielheitsrelationen Gleich, Mehr und Weniger bedingen wesentlich die Entstehung der Anzahlbegriffe. HERBART geht allerdings zu weit, wenn er sagt:[1]) „Der eigentliche wissenschaftliche Begriff der Zahl ist kein anderer als derjenige des Mehr und Minder"; richtig aber ist, dass die bestimmten Zahlen Zwei, Drei u. s. w. eine Vergleichung und Unterscheidung begrenzter, in abstracto gedachter Vielheiten nach Mehr und Minder voraussetzen. Damit wir uns über den Begriff der ‚Vielheit von Einheiten' erheben und die Reihe der Anzahlen Zwei, Drei u. s. w. bilden können, müssen wir Vielheiten von Einheiten klassificiren, und dies erfordert Urtheile über Gleichheit und Ungleichheit; ein exactes Urtheil über Ungleichheit ist aber in diesem Falle ohne Erkenntniss von Mehr oder Minder nicht möglich. Zwei Zahlen sind ungleich, wenn die eine gleich ist einem Theile der anderen.

Anmerkung. Da in diesem Cap. vor Allem die psychischen Thätigkeiten in Frage kamen, welche dem Vielheitsbegriffe wesentlich sind, bevorzugte ich, wie sonst in gleichen Fällen, gegenüber den Terminis Vielheit, Mehrheit u. s. w. den Terminus Inbegriff, der besonders deutlich das in Eins Zusammenbegreifen der colligirten Inhalte ausprägt.

---

[1]) HERBART, Psychologie als Wissenschaft II, 163 d. Orig. Ausg.

VI. Capitel.

Die Definition der Gleichzahligkeit durch den Begriff der gegenseitig eindeutigen Zuordnung.

Seitdem EUKLID's Elemente als das Muster wissenschaftlicher Darstellung Geltung erlangt haben, folgen die Mathematiker dem Grundsatze, mathematische Begriffe nicht früher als vollberechtigt anzusehen, als bis sie durch strenge Definitionen wolausgeschieden sind. Dieser ohne Zweifel sehr nützliche Grundsatz hat aber nicht selten zu ungerechtfertigten Uebertreibungen geführt; in dem Uebereifer einer vermeintlichen Strenge mühte man sich auch, solche Begriffe zu definiren, die wegen ihres elementaren Charakters einer Definition weder fähig noch bedürftig sind. Von dieser Art sind die sogenannten Definitionen der Zahlen-Gleichheit und -Verschiedenheit, deren Widerlegung uns jetzt beschäftigen soll, und die schon darum ein besonderes Interesse beanspruchen, weil sie zu einer Klasse von Definitionen der Zahlbegriffe selbst geführt haben, die unberechtigt und wissenschaftlich nutzlos, gleichwol um eines gewissen formalen Charakters willen, unter den Mathematikern und den von ihnen beeinflussten Philosophen Beifall gefunden haben.

Leibnitzens Definition des allgemeinen Gleichheitsbegriffes.

Am extremsten sind in dieser Hinsicht diejenigen Forscher, welche, der Anregung des genialen HERMANN GRASSMANN folgend, meinen, sogar den allgemeinen Gleichheitsbegriff definiren zu müssen, um ihn auf Mengen und Zahlen anwenden zu können. Hier die Definition des genannten philosophischen Mathematikers:[1] „Gleich heissen zwei Dinge, wenn man in jeder Aussage statt des einen das andere setzen kann". Im Wesentlichen dieselbe Definition hat schon LEIBNITZ[2] aufgestellt: „Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate", welche FREGE[3] seinem Aufbau des Zahlbegriffes zu Grunde gelegt hat.

Von dem Werte dieser Definition können wir uns nicht überzeugen. Zunächst ist es ersichtlich, dass sie statt der Gleichheit die Identität definirt. So lange noch ein Rest von Verschiedenheit vorhanden ist, wird es Urtheile geben, in welchen man die betreffenden Dinge nicht vertauschen darf ‚salva veritate'.

Für's Zweite ist es klar, dass die Definition den wahren Sachverhalt gerade auf den Kopf stellt. Angenommen, wir hätten uns bezüglich zweier Inhalte die Ueberzeugung verschafft, dass sie der Definition Genüge leisten (und das hätte seine Schwierigkeiten!), dann erhebt sich noch die wolberechtigte Frage: Welches ist denn der Grund dafür, dass man den einen Inhalt für den anderen in einigen oder allen wahren Urtheilen ersetzen darf? Die einzig zutreffende Antwort lautet: Die Gleichheit, bzw. Identität beider Inhalte. Jedes gleiche Merkmal begründet gleiche Urtheile, nicht aber begründen gleiche Urtheile gleiche Merkmale. Würde man daher die umgekehrte Frage stellen: warum sind die beiden Inhalte einander gleich? dann wäre die Antwort: weil sie sich in wahren Urtheilen vertauschen lassen, offenbar verfehlt.

---

[1] H. GRASSMANN, Lehrbuch d. Arithmetik. Berlin 1861. S. 1.

[2] Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Opp. phil. Erdm. S. 94. Die Substituirbarkeit in allen Urtheilen wird in der beigegebenen Erläuterung ausdrücklich verlangt.

[3] FREGE, Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884. S. 76.

Zu welchen absurden Consequenzen die entgegengesetzte Auffassung führt, zeigt folgende einfache Betrachtung. Läge in der oben geforderten Vertauschbarkeit der Grund für die Erkenntniss der Gleichheit zweier Inhalte, dann müsste in jedem Falle unserer Anerkennung der Gleichheit diejenige der Vertauschbarkeit vorhergehen. Der letztere Act besteht aber doch selbst aus nichts anderem, als aus einer (sogar unendlichen!) Anzahl von Acten, deren jeder die Anerkennung einer Gleichheit implicirt; nämlich der Gleichheit je eines wahren Urtheils, welches auf den ersten Inhalt geht, und ‚desselben' Urtheils, welches auf den zweiten Inhalt geht. Um alle diese Gleichheiten anzuerkennen, bedürfte es aber wieder der Erkenntniss, dass in Betreff jedes dieser Urtheilspaare ‚dieselben' wahren Urtheile gelten; u. s. w. Wir kommen also in ein wahres Labyrinth von unendlichen Regressen.[1])

Die Definition der Gleichzahligkeit.

In anderen Fällen begnügte man sich damit, die Gleichheit neben dem Mehr und Weniger speciell für Vielheiten in Beziehung auf ihre Anzahl zu definiren. Insbesondere haben die Mathematiker gegenwärtig eine Vorliebe für folgende Definition, die ich in der Fassung, wie ich sie gerade bei STOLZ finde, citire: „Zwei Vielheiten heissen einander gleich [oder correcter: heissen gleichviel, gleichzahlig], wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen lässt und keines von dieser unverbunden bleibt".[2]) Hieran schliesst sich ergänzend die Definition:

[1]) Auch v. HELMHOLTZ hat in seiner Abhandlung ‚Ueber Zählen und Messen', obgleich sonst von GRASSMANN beeinflusst, dessen Gleichheitsdefinition abgelehnt. Philosophische Aufsätze z. ZELLER's Jubil. S. 38.

[2]) STOLZ, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Leipzig 1885. I, 9. Die STOLZ'sche Definition wäre ohne die oben angebrachte Correctur sehr misverständlich, zumal er unmittelbar vorher definirt: „Unter

„Grösser von zwei Vielheiten heisst diejenige, von welcher, nachdem jedes Ding der anderen (kleineren) je einem von ihr zugeordnet ist, noch einige Dinge (ein Rest) unverbunden bleibt". [1])

Man darf sich keiner Täuschung hingeben über das, was diese Definitionen in psychologischer und logischer Hinsicht leisten. Sieht man genauer zu, so zeigt es sich, dass in der Definition der Gleichheit die Vorstellung des Mehr und Weniger bereits eingeschlossen ist, während diese doch selbst, wie wir uns oben überzeugten, ohne Gleichheitsvorstellungen nicht concipirt werden kann. Wenn wir sagen, die gegenseitige Zuordnung dürfe kein Element unverbunden lassen, so ist dieses nur ein anderer Ausdruck dafür, dass auf keiner Seite ein Element mehr bzw. weniger sein dürfe. Der Cirkel liegt also zu Tage.

Man könnte entgegnen, dass mit dieser Argumentation die Nutzlosigkeit der Definitionen noch nicht erwiesen sei. Man müsse sie vielleicht nur als Namenerklärungen ansehen,

---

Vielheit versteht man eine Menge von unter sich gleichen Gegenständen, d. h. den Inbegriff von disjuncten Dingen, deren Verschiedenheiten jedoch nicht beachtet werden, ohne Rücksicht auf ihre Anordnung". Dann aber würde für die Gleichheit zweier Vielheiten jene gegenseitig eindeutige, restlose Zuordnung nichts nützen. Gleichheit in Beziehung auf die Gattung der inbegriffenen Dinge wäre doch vor Allem erfordert. Stolz müsste eben in der obigen Definition anstatt gleich sagen: gleichviel, oder wie andere Mathematiker es vorziehen: gleichzahlig.

[1]) In Uebereinstimmung mit dem in der Mathematik üblicheren Sprachgebrauch sagt Stolz grösser und kleiner, wo wir, um nicht unnötig den Grössenbegriff hereinzuziehen, von mehr und weniger sprechen würden.

Stolz knüpft an diese Definitionen noch einen, dem wesentlichen Gedanken nach von Schröder (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 1873. S. 14) herrührenden Beweis dafür, dass das Resultat jener Zuordnungsoperationen von deren Verknüpfungsmodus unabhängig ist; woraus folgt, dass eine Gleichheit oder Differenz, welche für einen Verknüpfungsmodus gefunden worden ist, für jeden anderen bestehen bleibt.

wie solche zum Zwecke der Verständigung überall da wertvoll sind, wo ein Name einer scharfen oder einsinnigen Bedeutung ermangelt. — Indessen auch von diesem Gesichtspunkte aus können wir uns von dem Werte der Definitionen nicht überzeugen. Einerseits ist der Ausdruck ,Gleichheit zweier Vielheiten' einer weiteren Erklärung nicht bedürftig, und andererseits wird durch die obige Definition das Naheliegende und an sich Wolbekannte durch ein Entferntes und Fremdes verdunkelt. In der That, als ein Entferntes und Fremdes müssen wir jene gegenseitige Zuordnung [1]) bezeichnen, welche zur Erklärung der Gleichheit herangezogen wird. Es ist nicht richtig, dass jene Definition eine blosse Namenerklärung ist, obgleich sie sich dafür ausgiebt. Wenn STOLZ sagt: „Zwei Vielheiten heissen einander gleich [sc. in Bezug auf ihre Anzahl], wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen lässt . . ."; so ist doch nichts sicherer, als dass Vorder- und Nachsatz gedanklich nicht gleichwertig sind. Sich zwei gleichzahlige Vielheiten vorstellen, und sich zwei Vielheiten gliedweise gegenseitig zugeordnet vorstellen, ist nicht ein- und dasselbe; die Definition spricht einen wahren, nicht aber einen identischen Satz aus. Es mag wol vorkommen, dass wir, um in concreto die Gleichheit zweier Mengen ihrer Vielheit nach zu constatiren, die Elemente paarweise neben einander legen oder sonstwie mit einander verknüpfen; aber weder können wir diese Operation überall für notwendig erachten, noch liegt, wo sie stattfindet, in ihr allein das Wesen des Vergleichungsactes.

Um den eigentlichen Sinn der uns hier dargebotenen Gleichheitsdefinition klarzustellen, wollen wir zunächst einige allgemeine Bemerkungen über Sinn und Zweck specieller Gleichheitsdefinitionen überhaupt, vorausschicken.

[1]) Statt Zuordnung werden auch andere Ausdrücke, wie ,Verbindung', ,Verknüpfung', ,Paarung', ,Zugesellung' u. a. verwendet. Vgl. SCHRÖDER a. a. O. S. 7—9.

Ueber specielle Gleichheitsdefinitionen.

Was es heisst, zwei relativ einfache, d. i. nicht weiter analysirte Inhalte seien einander gleich, ist einer Erklärung weder fähig noch bedürftig. Fassen wir daher sofort zusammengesetzte Inhalte ins Auge. In Beziehung auf diese schwankt dem ersten Anscheine nach der Sprachgebrauch. Wenn derartige Inhalte gleich sind, dann müssen wechselseitig irgend welche Merkmale derselben (also ev. auch physische Theile, denn auch der Besitz solcher kann als Merkmal dienen) gleich sein; das ist selbstverständlich. Aber das Umgekehrte scheint nicht zu gelten. Mitunter sind Merkmale beiderseitig gleich, und trotzdem sprechen wir nicht von der Gleichheit der Gegenstände. Ja es kann sogar vorkommen, dass dieselben Objecte einmal von uns gleich genannt werden, das anderemal ungleich. So heissen z. B. in der Geometrie zwei gerade Strecken gleich, wenn sie gleiche Länge haben; ebensolche heissen aber mitunter ungleich, indem als gleiche diejenigen verstanden werden, welche gleich lang und überdies parallel und gleichen ‚Sinnes' sind. Und ähnlich verhält es sich mit dem Begriffe der Gleichheit von Figuren und Körpern, der bald den gemessenen Inhalt, bald auch noch die Lage berücksichtigt.

Dieses scheinbare Schwanken in der Ausdrucksweise klärt sich sehr einfach auf. Schlechthin sagen wir von irgend welchen Inhalten, sie seien einander gleich, wenn Gleichheit in den (inneren oder äusseren) Merkmalen besteht, die gerade den Mittelpunkt des Interesses bilden. In der Massgeometrie (wie bei EUKLID) geht das Interesse eben nur auf die Quantität der Gebilde (Länge, Flächen- und Rauminhalt); in der Lagengeometrie auch auf die Lage, und darnach richtet sich die Vergleichung. Zwei Gebilde sind gleich — dies ist dem Geometer nur ein practisch abgekürzter Ausdruck dafür, dass sie gleich seien in einer bestimmten, in dem betreffenden Untersuchungsgebiete vorherrschend interessirenden Hinsicht.

Derartig abgekürzte Redeweisen werden natürlich nur da angewendet, wo Misverständnisse ausgeschlossen sind; anderenfalls werden die Momente, in Hinsicht auf welche Gleichheit statthat, entweder ausdrücklich angegeben — die Objecte sind, sagen wir gleich: in Beziehung auf Grösse, relative Lage, Farbe u. s. w. — oder es werden besondere Gleichheitsbegriffe durch besondere Namen ausgezeichnet und hiedurch scharf unterschieden. Dies die Quelle und der Zweck specieller „Gleichheitsdefinitionen“. Sie werden in der Wissenschaft sich überall da nützlich und notwendig erweisen, wo verschiedene typische Vergleichungsfälle in naher Beziehung stehen, und man wird naturgemäss, wo die letzteren häufig neben einander auftreten, deren Unterscheidung durch besondere Namen zu erleichtern trachten. So unterscheidet z. B. die Geometrie des Masses in Betreff der Figuren eine Gleichheit schlechthin, als Gleichheit in Beziehung auf den Flächeninhalt, von der Congruenz als Gleichheit in Beziehung auf die inneren Massverhältnisse der Figur; und beides wieder von der Aehnlichkeit, als Gleichheit in Beziehung auf die Form, quantitativ bestimmt durch gewisse Längen oder Winkelgrössen u. s. w.[1])

Anwendung auf die Gleichheit beliebiger Vielheiten.

Betrachten wir nun im Besonderen Vielheiten. Sind uns zunächst zwei Mengen bestimmt gegebener Objecte zur Vergleichung vorgelegt, dann kann Gleichheit in mehrfacher Hinsicht bemerkbar sein. Dies oder jenes Element auf der einen Seite ist vielleicht diesem und jenem auf der anderen

[1]) Es ist charakteristisch für den Ursprung der Geometrie aus der Praxis, dass Gleichheit schlechthin von altersher gerade in dem erwähnten Sinne gebraucht wird, während die heutige geometrische Wissenschaft weit entfernt davon wäre, in der quantitativen Gleichheit (d. i. derjenigen der messenden Zahlen) die Gleichheit κατ᾽ ἐξοχήν zu sehen.

Seite gleich. Vielleicht findet sich sogar für jedes Element in der einen Menge ein correspondirend gleiches in der anderen, wobei das Umgekehrte zutreffen oder nicht zutreffen mag. Welcher unter den vielen möglichen Gleichheitsfällen derjenige ist, der uns zu dem Ausspruche veranlasst, die beiden Mengen seien einander gleich, ergiebt sich sofort nach dem eben aufgestellten Princip. Indem wir die Mengenvorstellung bilden, vertheilt sich ein einheitliches Interesse gleichmässig über die inbegriffenen Einzelinhalte. Von Gleichheit zweier Mengen werden wir also nur da sprechen, wo Gleichheit allen Theilen nach statthat, d. h. wo jedem Element der einen Menge je ein gleiches in der anderen correspondirt und umgekehrt. Diese Forderung wollen wir noch kurz expliciren: Denken wir uns den Vergleichungsact, wie in der Regel, als successiven Process; dann muss

1) jedem Elemente der Menge, bei der wir anheben, ein gleiches und zwar Schritt für Schritt ein neues in der anderen Menge correspondiren.

2) In der zweiten Menge dürfen keine Elemente übrig bleiben. Denn dies hiesse nichts anderes, als dass sie Theile besässe, welche die erste Menge nicht besitzt. Es bestände also nicht Gleichheit beider collectiver Ganzen allen Theilen nach.

Nur bei Erfüllung dieser Bedingungen sind also zwei Vielheiten als solche gleich zu nennen.

Hiemit soll übrigens nicht behauptet werden, dass jederzeit der Vergleichungsact eine solche Folge von Einzelvergleichungen der beiderseitigen Elemente factisch implicire. Bei Mengen aus wenigen (etwa zwei bis vier) Elementen mag unter besonders günstigen Verhältnissen die Erkenntniss der Gleichheit der Collectionen als Ganzer gewissermassen in einem Blicke aufleuchten, ohne dass successive Einzelvergleichungen von Nöten wären. Ist jedoch die Anzahl der Elemente eine grössere oder die Art der sonstigen Umstände minder günstig, dann sind bei unserer beschränkten Geistesfähigkeit schrittweise Operationen unerlässlich. Man darf daher die Auflösung der Vergleichung in eine Reihe von Elementarvergleichungen geradezu als den typischen Fall ansehen.

Wir können unser Resultat mit Anwendung eines nicht unpassenden Bildes auch folgendermassen ausdrücken: Zwei collective Ganze werden verglichen, indem man Element für Element wechselseitig zur Deckung zu bringen sucht. Thatsächlich ist das beschriebene Verfahren analog mit demjenigen der Geometer, die Congruenz oder Incongruenz von Raumgebilden zu erweisen. Ja es ist, wie man erkennt, überall dasselbe, wo immer ein analysirtes Ganzes mit einem anderen derselben Art verglichen wird. Denn jedes Ganze erscheint hiebei vorgestellt in Form einer Collection, nämlich der seiner analysirten Theile; und der Vergleichungsprocess geht derart von statten, dass man Theil für Theil auf der einen und anderen Seite gegenüberstellt und zur Deckung zu bringen versucht. [1])

Vergleichung von Vielheiten einer Gattung.

Gehen wir nun zu dem speciellen aber practisch besonders wichtigen Fall über, wo die beiden Vergleichs-Mengen aus Dingen einer einzigen Gattung bestehen. Wissen wir dies im Voraus, dann erfährt der Vergleichungsprocess eine

[1]) Das räumliche Aufeinanderlegen in der Geometrie, das zur Deckung Bringen im engsten Sinne, ist ein Phantasievorgang, der allerdings etwas mehr enthält als ein gewöhnlicher Vergleichungsfall. Durch allmälige Minderung der bei der Vergleichung nicht in Betracht kommenden Momente, welche die räumliche Differenzirung der Gebilde (ihren Lagenunterschied) bewirken, werden dieselben continuirlich in einander übergeführt, sie werden identisch Eins. So kommt die Gleichheit in Beziehung auf die Momente, welche während des Processes unverändert bleiben, zur Evidenz. Ein analoges Verfahren schlagen wir nicht überall ein, weil der Nutzen nicht überall so augenfällig ist. In der Regel concentriren wir die Aufmerksamkeit auf die zu vergleichenden Bestandtheile, von den differenten Merkmalen möglichst abstrahirend.

wesentliche Vereinfachung. Die Notwendigkeit entfällt, zuerst zu untersuchen, ob jedem Element in der einen Menge ein gleiches in der anderen entspricht. Es genügt, dass überhaupt je einem Elemente einerseits eines andererseits entspricht und umgekehrt. Zwei Elemente in der Vorstellung haben, und zwei gleiche Elemente in der Vorstellung haben, ist in diesem Falle Eins. Fassen wir also je ein Element der ersten mit je einem der zweiten Menge einheitlich zusammen, dann kann die so entstehende Vorstellung einer Folge von Elementenpaaren (an deren Gleichheit weiter nicht gedacht zu werden braucht) als vollgiltiger Repräsentant jenes sonst notwendigen, ebenso viele Gleichheitsrelationen umfassenden Actes gelten. Statt paarweise zu vergleichen, stellen wir also die Elemente bloss in unserer Vorstellung zusammen. Wir bilden eine Collection von Collectionen je zweier Correspondenten.

Vergleichung von Vielheiten in Beziehung auf ihre Zahlen.

Wir haben bisher die Vergleichung concreter Mengen als solcher betrachtet; wie verhält es sich nun bei der Vergleichung gegebener Mengen in Beziehung auf ihre Anzahl?

Wir erhalten die zu einer Menge gehörige abstracte Vielheitsform, indem wir jedes Element derselben zum blossen Eins entschränken und die so entstehenden Einheiten collectivisch zusammenfassen; und wir erhalten die entsprechende Anzahl, indem wir die gebildete Vielheitsform als eine Zwei, Drei u. s. w. klassificiren. Handelt es sich nun um blosse Constatirung der Anzahlengleichheit (bzw. eines Mehr oder Weniger) und nicht um die Anzahl selbst (um das Wieviel, bzw. ‚um wieviel mehr oder weniger'), dann bedürfen wir nicht erst der Klassification, und der Vergleichungsact scheint sich zu vereinfachen, indem er sich auf die Vergleichung der den gegebenen Mengen correspondirenden Vielheitsformen reducirt. Diese aber können wie Mengen gleicher Inhalte angesehen werden. Zwei Mengen sind also zahlengleich, wenn deren Einheiten sich gedanklich in gegenseitig-eindeutige Correspondenz setzen lassen.

Man erkennt indessen leicht, dass noch eine andere, und viel einfachere Vergleichungsweise möglich ist. Statt erst zu den allgemeinen Vielheitsformen aufzusteigen und diese dann mit einander zu vergleichen, können wir auch, unmittelbar an den concreten Mengen operirend, die Gleichheit feststellen. Da wir von vornherein wissen, dass jedes einzelne Ding nur als Eins in Betracht kommen würde, so dürfen wir beide Mengen so auffassen, als beständen sie aus lauter gleichen Dingen (gleich als Einheiten). Die Mengen werden also von gleicher Anzahl sein, wenn die beiderseitigen Elemente selbst sich gegenseitig in der wiederholt bezeichneten Weise zuordnen lassen.

Zur Constatirung der Gleichzahligkeit steht uns aber noch eine dritte und die bei Weitem vorzüglichste Methode offen. Bei der ersten Methode, auf die auch die zweite sich gründete, recurrirten wir bloss auf die Constatirung des Gleichviel, vermieden aber die Bestimmung der Anzahlen selbst — in der Meinung eines Ersparnisses an geistiger Arbeit. Diese Meinung ist aber eine irrige. Ist doch die Zahlbestimmung vermöge der Leichtigkeit des bekannten symbolischen Zählungsverfahrens das uns zu allernächst liegende Hilfsmittel. Und es ist ein ganz mechanisches Verfahren; wir folgen ihm, ohne an die Begriffe selbst zu denken, und sind doch sicher, dass das resultirende Zahlwort, wenn wir uns seine Bedeutung zum Bewusstsein bringen, wirklich den richtigen Zahlbegriff darstellt. Was ist also einfacher, als die beiden Vielheiten ihrer Zahl nach dadurch zu vergleichen, dass man sie beide in symbolischem Sinne durchzählt? Und wir erhalten so nicht bloss die Ueberzeugung von der Gleichheit (bzw. Ungleichheit) der Zahlen, sondern auch diese Zahlen selbst. Dass der mechanische Process der Zählung schon bei Mengen relativ geringer Anzahl unvergleichlich schneller und sicherer von statten gehen wird, als jener scheinbar so einfache Process der gegenseitigen Zuordnung, bedarf wol keines Nachweises.

Der wahre Sinn der behandelten Gleichheitsdefinition.

Unsere letzten Analysen setzen den Sinn und die Tragweite der behandelten Gleichheitsdefinition ins klarste Licht. Die Möglichkeit der gegenseitig-eindeutigen Zuordnung zweier Vielheiten *ist* nicht deren Gleichzahligkeit, sondern *verbürgt* sie nur. Die Erkenntniss, dass die Anzahlen gleich seien, erfordert durchaus nicht die Erkenntniss ihrer Zuordnungsmöglichkeit; geschweige denn, dass beides identisch wäre. Die bestrittene Definition ist also weit entfernt davon, eine Nominaldefinition darzustellen, welche die Bedeutung des Ausdruckes ‚Gleichheit zweier Vielheiten in Beziehung auf die Anzahl' fixirt. Alles was wir zugeben können ist: dass sie ein für alle Fälle giltiges, *in logischem Sinne notwendiges und hinreichendes Kriterium* für den Bestand der Gleichheit aufstellt. Obschon wir die Vergleichung nicht vermittelst der eindeutigen Zuordnung vornehmen müssen, können wir sie doch in allen Fällen so vornehmen, und dann muss die in der Definition ausgesprochene Bedingung stets erfüllt sein. Hierin besteht daher der einzig brauchbare Sinn und die Leistung der ‚Definition'.

Was nun den Nutzen dieses Kriteriums anlangt, so werden wir ihn kaum hoch anschlagen können. Nur für jene Geistesstufe, auf welcher die Klassification der Vielheiten (die Unterscheidung und Benennung der Anzahlen) und das darauf begründete mechanische Zählungsverfahren noch zurückgeblieben ist, werden wir demselben einen beträchtlichen Wert zuerkennen müssen. Für jene Wilden, denen es, wie man berichtet, eine unüberwindliche Schwierigkeit bereitet, über Fünf hinaus zu zählen, wird die Vergleichung der Anzahl zweier Mengen ausserordentlich erleichtert, wenn nicht erst ermöglicht, durch Herstellung der gegenseitigen Zuordnung, die dann selbst wieder durch physische Verknüpfungen erleichtert und ersetzt werden mag. Wo hingegen ein so rasches und sicheres Verfahren zu Gebote steht wie unser symbolisches Zählen, da ist, wie bereits bemerkt, das einfachste Kriterium für die Gleichheit der Zahl eben das Ergebniss derselben Zahl bei der Abzählung der Vergleichsmengen.

Gegenseitige Zuordnung und collective Verbindung.

Wir haben die gegenseitig-eindeutige Zuordnung oben als collective Verbindung von Paaren aufgefasst, verbunden mit der Erkenntniss, dass in jedem Paare je ein Element der einen und das andere der anderen Vielheit zugehöre; dadurch eben erlangen beide eine Auszeichnung vor einander, die einen gewissen Gegensatz zwischen ihnen begründet, mit Beziehung auf welchen wir von einem „Gegenüberstellen" in unserer Vorstellung sprechen durften. — Diese Auffassung steht durchaus im Widerspruch mit der unserer Gegner, die sich hier mit einem gewissen Rechte auf das Zeugniss der Erfahrung berufen könnten. Wenn wir, so werden sie einwenden, die Gleichheit zweier Mengen von physischen Objecten durch gegenseitige Zuordnung constatiren, so thun wir denn doch etwas mehr, als nur gedanklich je ein Ding der einen mit je einem der anderen zusammenstellen. Wir legen sie paarweise an- und aufeinander, wir knüpfen sie vielleicht auch zusammen und dgl. Was in solchen Fällen die gegenseitig-eindeutige Zuordnung oder Verknüpfung bewirkt, ist also nicht blosse Collection, sondern eine räumliche, physische oder sonstige Verbindung. Im Uebrigen scheint, näher besehen, jede beliebige Relation gleich gut geeignet zu sein, um die Zuordnung zu bewirken. Vergleichen wir z. B. die Tonvielheiten (c, d, e) und (C, D, E), dann können wir auch das Octavenverhältniss verwenden und zuordnen: c — C, d — D, e — E; dies ist eine Art, eindeutig zuzuordnen, und aus ihrer Möglichkeit ergiebt sich die Gleichzahligkeit beider Vielheiten. Solche Auffassungen finden wir bei E. SCHRÖDER [1]) und FREGE, welche beide die Gleichzahligkeit in der von uns bestrittenen Weise definiren. So fordert z. B. der Letztere für seine Definition, dass es eine beliebige Beziehung φ gebe, welche die eindeutige Zuordnung leiste. a steht in der Beziehung φ zu b, und a ist b zugeordnet, gilt ihm als dasselbe. [2])

Es wird uns nicht schwer fallen, die Triftigkeit unserer Ansicht diesen Einwänden gegenüber zu behaupten. Wir haben gesehen, dass die Vergleichung von Mengen ihrer Anzahl nach, wenn wir das technische Hilfsmittel des Zählens nicht verwenden, gewissermassen der abgeblasste Schatten des Vergleichungsvorganges ist, wie wir ihn bei der Vergleichung beliebiger concreter Mengen zu beobachten haben. Es entfällt hier nämlich die Notwendigkeit, die paarweise gegenüber gestellten Elemente noch besonders zu vergleichen. Die Gleichheit in Beziehung auf das Einssein ist eo ipso da. Das blosse Gegenüberstellen in unserer Vorstellung vertritt das sonst noch nötige Vergleichen. Dass dieses Gegenüberstellen, abgesehen von der erwähnten gegensätzlichen Cha-

---

1) SCHRÖDER, Lehrbuch der Arithmetik etc. S. 7—8 (I. Cap. Nr. 7).

2) Wonach also zu folgen scheint, dass es ebensoviele Arten von Gleichzahligkeit und demgemäss auch von Anzahlbegriffen geben müsse, als begrifflich verschiedene Arten von eindeutig-zuordnenden Relationen denkbar sind. Ich sagte: auch von Anzahlbegriffen; denn durch die Gleichzahligkeit soll bei FREGE allererst der Begriff der Zahl definirt werden. Die Einheit des Anzahlbegriffes beruht bei ihm nur auf der Unbestimmtheit der Beziehung φ, welche die Zuordnung vermittelt. Sowie wir bestimmte Zuordnungsrelationen feststellten, gewönnen wir bestimmte Species von Anzahlen, also verschiedene Zweien, Dreien etc. — ein Resultat, welches FREGE allerdings nicht beabsichtigt hat. Näheres über dessen rein logischen Aufbau des Zahlbegriffes vgl. VII. Cap. S. 129 ff.

rakteristik, identisch ist mit dem, was wir collectives Verbinden nannten, sieht man sofort. Es ist nun richtig, dass wir bei dem Vergleichen von äusseren Dingen jedenfalls noch andere, z. B. physische Relationen verwenden, um eine Zuordnung herzustellen; aber man darf sie darum nicht mit der Zuordnung selbst verwechseln. Die Zuordnung als solche ist unter allen Umständen eine collective Verbindung. Jenes Nebeneinander- oder Aufeinanderlegen oder sonstige andere Manipulationen verfolgen gewisse nebenherlaufende Zwecke; sie sollen die Bildung der aus Paaren bestehenden Collection erleichtern, sie vor allem sicherer gestalten. Wenn wir einen Haufen Aepfel und einen Haufen Nüsse vergleichen, um zu constatiren, ob beiderseits gleich viele vorhanden sind, bzw. welcher Seite das Mehr zukommt, dann würde es häufig schwer fallen, bei dem gegenseitigen Zuordnen Irrthümer zu vermeiden, einzelne Elemente nicht zu übersehen, andere nicht doppelt zu zählen. Legen wir aber immer einen Apfel und eine Nuss zusammen, die so entstehenden Paare wieder in eine Reihe oder in eine übersichtliche Figur, dann ist die Gefahr des Irrthums ausserordentlich verringert. Der Unterschied zwischen einem einzelnen Elemente und einem Paare ist ein sinnenfälliger, wir erkennen also in einem Ueberblicke, ob lauter Paare da liegen oder nicht. Jedes Paar hebt sich als einheitliche Vorstellung aus der Umgebung heraus — wir ersparen also die geistige Arbeit, die Collection der Paare beständig als solche festzuhalten. Die anschauliche, relativ einheitliche Vorstellung, die wir auf dem angegebenen Wege erzeugt haben, ist eben von einer Art, dass sie durch eine sehr leichte Analyse die intendirte Collection ergiebt, die sonst auf dem viel mühsameren Wege successiver Synthese erzeugt werden müsste. Nicht zu übersehen ist aber, dass wir, um die Vorstellung des Gleichviel zu erlangen, nach jenem Processe die erwähnte Analyse auch wirklich vornehmen (oder im Falle symbolischer Vorstellung mindestens anstreben) müssen. Eine Vorstellung muss resultiren, welche jedes Paar für sich und in jedem Paare jedes Ding für sich gesondert enthält. Nicht jene äussere Anschauung, sondern die auf Grund derselben zu bildende Collectivvorstellung verbürgt die Gleichheit der Anzahlen. — Der zur Bildung dieser Collectivvorstellung erforderliche psychische Process kann allerdings sehr vereinfacht werden; denn die besondere Beschaffenheit der Anschauung, die durch jene äussere Manipulationen des paarweisen Verknüpfens erzeugt wurde, ebnet dem symbolischen Vorstellen den Weg, welches den Process abkürzt, ohne den Erkenntnisswert des Resultates wesentlich zu beeinträchtigen. Die anschauliche Einheit der etwa in Form einer Reihe von Paaren mit einem Blick zu umfassenden Doppelmenge löst sich, wenn wir wollen, sofort in eine Vielheit auf, deren jedes Element (d. i. jedes Paar) zunächst als unanalysirte anschauliche Einheit gegeben sein wird. Richtet sich nun das Interesse auf irgend eines derselben, dann entsteht alsbald die Vorstellung einer Collection von zwei Elementen, von denen wir erkennen, dass das eine der einen, das andere der anderen Menge angehört hatte. Die anschauliche Gleichheit der Paare macht es überflüssig, bei einem jeden die gleichen Ueberlegungen vorzunehmen. Es genügt also die Vorstellung der Reihe und der Gedanke, diese Analysen vornehmen zu können, als symbolischer Vertreter für die wirkliche Vorstellung der Collection von Collectionen.

In dieser Weise mag nun je nach Umständen das eine Mal diese, das andere Mal jene Verknüpfungsart als Hilfsmittel der Zuordnung und Zahlvergleichung dienen können. Sicher ist aber der auxiliäre Charakter solcher Verknüpfungsarten. Beachtet man dies, so wird es auch klar, dass nicht jede Relation, wie behauptet wird, als zuordnende zu gebrauchen ist, sondern nur die collective, während irgendwelche andere eben nur sofern in Betracht kommen können, als sie diese symbolisch zu vertreten geeignet sind. Angenommen, es sei φ eine beliebige aber bestimmte Relation, welche die Elemente beider Mengen in gegenseitig-eindeutige Relation setzt; dann frage ich: was soll diese Relation uns denn leisten? Sie bewirkt, sagt man, die gewünschte Zuordnung. Aber was sie, das leistet jede andere Relation, die zwischen den beiderseitigen Elementen möglich ist. Kommt es aber auf das Was der Zuordnungsrelation nicht an, nun dann kann es auch nicht wesentlich sein, dass eine Relation überhaupt da ist. Der allgemeine Gedanke, es sei eine x-beliebige Relation annehmbar, ist doch hier zu nichts nütze. Das Wesentliche ist eben, dass die correspondirenden Elemente in unserem Denken verknüpft, dass sie colligirt seien; denn dies ist uns wertvoll als absolut sicheres Zeichen dafür, dass je eine Einheit der einen je einer der zweiten Menge entspricht. Finden wir zufällig eine inhaltliche Verknüpfung vor, welche die Elemente beider Mengen paarweise vereinigt, so ist sie uns willkommen, weil sie unser verknüpfendes Denken bequem anleitet oder gar symbolisch vertritt. Von ihr muss aber wieder abstrahirt werden, soll der Zweck des Processes überhaupt erfüllt werden. Eine Relation erst künstlich herbeiziehen in Absicht auf eindeutige Zuordnung, das heisst ihren Zweck vergessen und verfehlen; denn dies hätte den Erfolg, die Aufmerksamkeit abzulenken von dem, worauf es bei der Sache ankommt, nämlich von der Zahlvergleichung.

Unabhängigkeit der Gleichzahligkeit vom Verknüpfungsmodus.

Nach diesen Aufklärungen unterliegt es auch keinem Zweifel, wie wir uns verhalten müssen zu einem hieher gehörigen Satze, auf den die Mathematiker Gewicht legen, und der besagt, dass die Gleichzahligkeit zweier Vielheiten von dem Verknüpfungsmodus unabhängig ist; oder genauer, dass zwei Vielheiten, welche als gleichzahlig sich erweisen, indem wir je ein bestimmtes Element der einen mit je einem bestimmten der anderen paaren, auch gleichzahlig bleiben, wenn wir diese Paarungen auflösen und von Neuem je ein Element der ersten mit je einem — und zwar nun einem anderen Element der zweiten Vielheit verbinden. „Völlig zu erklären, weshalb wir durch unseren Verstand gezwungen sind“ diesen Satz zu bejahen, darin sieht E. SCHRÖDER[1]) „eine Aufgabe der Psychologie“; und v. HELMHOLTZ stimmt ihm hierin so sehr zu, dass er ihm die Erkenntniss dieser Sachlage als besonderes Verdienst anrechnet.[2]) Ich denke, alles Psychologische, das hier überhaupt in Betracht kommen kann, ist durch unsere Analysen zu Tage gefördert, und es wäre ermüdend, das ausführlich Erörterte in neuer Wendung zu wiederholen. Was den häufig reproducirten Beweis des Satzes anlangt, so wollen wir ihn nicht anfechten. Notwendig ist er offenbar nur für den Fall, als die Gleichheit in Beziehung auf die Anzahl durch die gegenseitige Zuordnung wirklich definirt, d. h. Beides als gleichbedeutend angesehen wird. Geht man aber von dem wahren und eigentlichen Gleichheitsbegriff aus, dann implicirt das Verlangen nach dem Beweise eine Absurdität. Wir haben erkannt, dass die Möglichkeit einer — irgend einer beliebigen — gegenseitig-eindeutigen Zuordnung als ein logisch notwendiges und hinreichendes Kriterium der Gleichzahligkeit (in dem wahren Sinne des Wortes) dienen könne. Der Gedanke, dass die Aenderung der Verknüpfungsweise zu einem unverbundenen Reste führt, ist gleichwertig dem, dass die beiden Vielheiten, die wir vergleichen, unter denselben und zugleich unter einen verschiedenen Zahlbegriff fallen — was absurd ist.

---

[1]) a. a. O. S. 14.

[2]) Scheinbar bezieht sich v. HELMHOLTZ an der hier betrachteten Stelle (a. a. O. S. 19) auf etwas Anderes, nämlich auf „die Thatsache, dass die Anzahl einer Gruppe von Objecten unabhängig von der Reihenfolge, in der man sie zählt, zu finden ist“. Indessen wird hier (wie gelegentlich auch bei SCHRÖDER) Anzahl als das Anzahl-Zeichen verstanden und die Zählung der Gruppe als die successive Zuordnung der Zahlzeichen in ihrer natürlichen Folge zu den Elementen der Gruppe angesehen.

VII. Capitel.

Die Zahlendefinitionen durch Aequivalenz.

Aufbau der Aequivalenztheorie.

Nicht ohne Grund haben wir im letzten Capitel der Aufhellung der Misverständnisse, welche mit der Definition der Gleichzahligkeit durch gegenseitig - eindeutige Zuordnung überall verknüpft sind, so viel Aufmerksamkeit zugewendet. Dieselben haben in der That schlimme Folgen nach sich gezogen, indem sie zu einer gänzlichen Verkennung des Anzahlbegriffes selbst geführt haben. Es wird vielleicht nicht unpassend sein, wenn wir, zunächst ohne auf thatsächlich aufgestellte Lehren Rücksicht zu nehmen, uns folgenden Gedankengang überlegen, welcher die hier und dort verstreuten Gedanken zu einer möglichst consequenten Theorie concentrirt.

Die Definitionen des Gleichviel, Mehr und Weniger, wie sie hier zu Grunde gelegt werden, sind von dem Anzahlbegriffe unabhängig; sie verlangen nur, dass man die zu vergleichenden Mengen nehme, Element für Element einander zuordne und dann nachsehe, ob Elemente dabei übrig bleiben oder nicht. Also ohne die Mengen zählen, ja selbst ohne wissen zu müssen, was Zählen heisst, ist man trotzdem im Stande ein sicheres Urtheil su fällen, ob sie gleichzahlig sind oder nicht; wobei nur zu achten ist, dass das Wort gleichzahlig nicht anders verstanden werden darf, als die Definition es bestimmt. Sagen wir daher lieber a e q u i v a l e n t anstatt gleichzahlig, da letztere Wortbildung in ihrer Mitbezeichnung den Begriff der Anzahl enthält, während die Definition von ihm unabhängig ist. Gehen wir nun von einer beliebigen concreten Menge M aus, dann können wir alle anderen gegebenen oder denkbaren Mengen mit ihr in Correspondenz setzen und so die Gesammtheit der Mengen aussondern, welche der gegebenen Menge M aequivalent sind. In diesem Sinne wollen wir von der zu M gehörigen Mengenklasse K sprechen. Nun fügen wir ein willkürliches neues Element zu M hinzu und bilden die zugehörige Klasse aequivalenter Mengen; dann fügen wir wiederum ein neues Element zu und bilden die zugehörige Klasse und so fort. Der Process geht, wie man sieht, in infinitum, da keine Menge denkbar ist, zu der wir nicht ein neues Element hinzufügen könnten. Ebenso verfahren wir in umgekehrter Richtung: wir unterdrücken irgend ein Element in M und bilden die entsprechende Klasse, dann wiederum ein Element u. s. w., bis alle in M verfügbaren Elemente unterdrückt sind. Die so vollzogene Klassification aller erdenklichen Mengen ist die schärfste, die man sich vorstellen kann. Nie kann eine Menge gleichzeitig zwei verschiedenen Klassen angehören. Jede gegebene Menge wird durch Anwendung der vorausgeschickten Aequivalenzdefinition unter eine bestimmte Klasse und nur unter diese eine, subsumirt. Und umgekehrt ist jede Klasse durch eine beliebige der ihr angehörigen Mengen völlig bestimmt; eine jede ihrer Mengen kann also mit demselben Rechte als Fundament der Klassenbildung verwendet und als Repräsentant der Klasse angesehen werden. Man sieht auch, dass aus einer Menge die ganze Klasse entsteht, indem mit den einzelnen Elementen alle erdenklichen qualitativen Veränderungen (also keine Theilungen) vorgenommen werden.

Die Gesammtheit der Klassen ist uns bisher als ein ungeordneter Inbegriff gegeben. Wir entdecken leicht ein Princip der Anordnung; es ist dasselbe, welches uns bereits bei der successiven Klassenbildung leitete. Wir gehen von irgend einer Klasse K aus; die Menge M diene als ihr Repräsentant. Denken wir uns nun in M irgend ein Element unterdrückt, dann wollen wir die Klasse K', deren Repräsentant die so entstehende Menge M' ist, die zu K nächstniedrigere Klasse nennen. Es ist leicht zu erweisen, dass die Klasse K' unverändert dieselbe bleibt, welches von den Elementen der Menge M wir auch unterdrücken mögen, so dass K' eindeutig bestimmt ist. Bilden wir ferner aus M durch Hinzunahme eines beliebigen Dinges eine neue Menge M'', dann heisse die zu dieser gehörige Klasse K'', die in Beziehung auf K nächsthöhere. Auch sie ist eine völlig bestimmte.

Diese Festsetzungen genügen offenbar, um sämmtliche Klassen auf eindeutige Weise in eine Reihe zu ordnen, in welcher eine jede eine ganz bestimmte Stelle erhält.

Der folgende einfache Gedankengang führt nun von hier zu den Anzahlbegriffen. Je eine Klasse umfasst die Gesammtheit der denkbaren Mengen von je einer Anzahl; verschiedenen Klassen entsprechen verschiedene Anzahlen. Dass wir sämmtlichen Mengen einer Klasse ein und dieselbe Anzahl zuschreiben, kann nur auf Grund einer Beschaffenheit erfolgen, die allen Mengen der Klasse gemeinsam ist. Was sie aber insgesammt gemein haben, und was sie von den übrigen denkbaren Mengen unterscheidet, ist doch nichts anderes als der Umstand, dass sie eben zu derselben Klasse gehören, d. h. dass sie im Verhältnisse wechselseitiger Aequivalenz stehen. Um diese Eigenschaft für irgend eine gegebene Menge M auszudrücken, bedarf es einer einheitlichen, die Klassen in ihrem natürlichen Zusammenhange, in ihrer Reihenfolge wiederspiegelnden Bezeichnung. Eine Klasse kann durch irgend eine ihrer Mengen eindeutig repräsentirt werden. Obschon es ganz gleichgiltig ist, welche wir hiezu auswählen, so müssen wir doch, um für den wissenschaftlichen Sprachgebrauch einheitliche Bezeichnungen zu erhalten, eine bestimmte Auswahl treffen. Wir nehmen die durch Wiederholung eines Striches 1, bezw. durch Wiederholung des Lautcomplexes Eins entstehenden concreten Mengen 11, 111, 1111, ..., oder (um der Verwechslung mit gewissen zusammengesetzten Zeichen des dekadischen Zahlsystems vorzubeugen) $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$, ..., als Repräsentanten der Klassen und benennen sie der Reihe nach durch 2, 3, 4 ... Diese aus Strichen formirten Mengen sind die natürlichen Zahlen, indem sie als Repräsentanten der Klassen auch Repräsentanten der Anzahlbegriffe sind.

Eine concret vorgelegte Menge wird gezählt, indem die natürliche Zahl gesucht wird, die ihr aequivalent ist, und damit ist sie auch der ihr zugehörigen Klasse eingereiht. Die der Menge correspondirende Zahl finden wir vielfach dadurch, dass wir jedes Element durch einen Strich „abbilden"; so ergiebt sich eine der Menge aequivalente Menge von Strichen, und dies ist die natürliche Zahl. Die Zahlen bilden eine geordnete Reihe, entsprechend der Reihe der Klassen.

Dies ist wol hinreichend zur Charakteristik eines eigenthümlichen Versuches, den Zahlbegriff aus dem der Gleichzahligkeit allererst herzuleiten, und mit Umgehung aller immerhin etwas misslichen psychologischen Analysen die Einsicht in die grundlegenden arithmetischen Begriffe zu gewinnen.

Belege.

Damit man sehe, dass diese Theorie nicht bloss das Ergebniss spielender Phantasie sei, wollen wir nun auch eine Belegstelle aus einem neueren mathematischen Werke, nämlich der oben bereits citirten „Allgemeinen Arithmetik" von STOLZ anführen. Nach der Aufstellung der uns bekannten Definitionen der Vielheit und der Verhältnisse des Gleich, Grösser und Kleiner zwischen Vielheiten, giebt STOLZ folgende Erklärung des Begriffes der Anzahl, oder wie er sich ausdrückt, der „natürlichen Zahl"[1]):

[1]) Diesen Namen hat E. SCHRÖDER eingeführt. Vgl. a. a. O. S. 2 und

„Das gemeinsame Merkmal aller Vielheiten, welche einer bestimmten gleich sind, wird durch ein Grundzahlwort ausgedrückt. Man vergleicht die Vielheiten mit den durch beständige Wiederholung eines Striches: 1 (eine Eins, ein Einer) entstandenen 11, 111, ... (diese Zeichen sind für die Zahlen eilf, einhunderteilf ... erst später einzuführen). Jedes der wiederholten Setzung fähige Ding heisst eine benannte Einheit, eine 1, die Einheit schlechtweg. Die natürliche Zahl ist eine Vielheit von Einheiten d. i. Einern. Jede andere Vielheit heisst eine benannte Zahl. Jeder solchen Vielheit entspricht nämlich eine ihr gleiche natürliche Zahl, welche gefunden wird, indem man von den der Vielheit angehörigen Einheiten eine nach der anderen herausgreift, sie mit dem Striche 1 abbildet und hierauf bei Seite legt. Unter sich gleichen Vielheiten entsprechen gleiche Zahlen, der grösseren Vielheit die grössere Zahl."

„Von gleichen natürlichen Zahlen kann man nur insofern sprechen, als man irgend eine solche Zahl, wie jeden Begriff, beliebig oft gesetzt denken kann."

Zunächst möchte es allerdings scheinen, als ob STOLZ die Zahl bloss als Menge von Einerstrichen definirte. Indess der erste Satz besagt doch, dass durch ein Grundzahlwort das gemeinsame Merkmal aller Vielheiten, welche einer bestimmten gleich (d. i. in unserer Sprechweise: aequivalent) sind, aus-

---

S. 5 u. ff. Er soll wol dazu dienen, um den Unterschied der Anzahlen gegenüber den anderen Zahlformen, welche in der Arithmetik zur Verwendung kommen, den rationalen und irrationalen, den positiven, negativen und imaginären Zahlen, zu markiren; zudem ist der Name Anzahl nicht ganz eindeutig, da er mitunter zur Bezeichnung von Reihenzahlbegriffen verwendet wurde. Vgl. GEORG CANTOR, Grundlagen der Mannigfaltigkeitslehre. 1883. S. 5, und FRIEDRICH MEYER, Elemente der Arithmetik und Algebra. 1885. S. 3. Gleichwol hielten wir es für das Passendste, uns in dieser Schrift an den älteren und fast allgemein üblichen Sprachgebrauch anzuschliessen.

gedrückt werde. Da nun weder vorher noch nachher das Geringste von solch einem Merkmal verlautet, so müssen wir annehmen, dass der Zusatz „welche einer bestimmten gleich [aequivalent] sind“ dieses Merkmal selbst ausdrücke; wodurch die Uebereinstimmung der Ansicht mit der oben entwickelten Theorie bewiesen ist.[1])

Kritik.

Wenden wir uns nun zur Kritik. Die Irrthümer, welche diese extrem-relativistische Theorie begeht, hängen auf das Engste zusammen mit der Verkennung des Wesens der eindeutigen Zuordnung und der Function, die ihr für die Erkenntniss des Gleichviel zweier Mengen zukommt. Die Definition der Aequivalenz ist, wie wir festgestellt haben, nicht mehr als ein blosses Kriterium für den Bestand der Gleichheit der Anzahl zweier Mengen, während sie hier als Nominaldefinition angesehen wird. Aber es ist nicht richtig, dass ‚Aequivalenz’ und ‚gleiche Anzahl’ Begriffe von demselben Inhalte sind; nur das ist richtig, dass ihr Umfang derselbe

---

[1]) Selbst G. Cantor stellte in seinen „Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre“ (1883) Definitionen auf, welche ganz in diesem Sinne klingen, z. B. S. 3: „Jeder woldefinirten Menge kommt . . eine gewisse Mächtigkeit zu, wobei zwei Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben wird, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.“ Man vgl. auch die entsprechende Fassung der „Anzahl“-Definition ebendas. S. 5. („Mächtigkeit“ bedeutet in der Terminologie Cantor’s so viel wie Cardinalzahl, „Anzahl“ so viel wie Ordinalzahl.) Gleichwol gehört dieser geniale Mathematiker keineswegs in die oben zu kritisirende Richtung, wie aus allen seinen späteren Publicationen hervorgeht. Schon in seinem Schreiben an Lasswitz (datirt vom 15. Febr. 1884 und abgedruckt in den „Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten“, Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik, Bd. 91 S. 13) erscheint die erstere Definition in einer vertiefenden Modification, die ihr ein ganz anderes Gepräge giebt, und an einer anderen Stelle der „Mittheilungen“ (S. 55 Anm.) sagt er sehr treffend: „Zur Bildung des Allgemeinbegriffs ‚fünf’ bedarf es nur einer Menge, . . . welcher diese Cardinalzahl zukommt“.

ist. Identificirt man Aequivalenz mit Gleichheit der Anzahl, dann liegt es freilich nahe, die Aequivalenz nun auch als Quelle des Anzahlbegriffes selbst anzusehen und zu schliessen: die Gesammtheit der einander gleichzahligen (i. e. aequivalenten, zu einer ‚Klasse' gehörigen) Mengen könne doch nichts Anderes gemeinsam haben, als die in der angegebenen Weise definirte Gleichzahligkeit; die Angehörigkeit zur Klasse sei also das für den betreffenden Anzahlbegriff Wesentliche. Einer concreten Menge eine Zahl zuschreiben, heisse also nichts Anderes, als sie in diesem Sinne klassificiren.

Diese Schlussweise können wir natürlich nicht annehmen. Was die aequivalenten Mengen gemeinsam haben, ist nicht bloss die ‚Gleichzahligkeit' oder deutlicher gesprochen: die Aequivalenz, sondern die gleiche Anzahl im wahren und eigentlichen Sinne des Wortes.

Wir sagen: Anzahl im wahren und eigentlichen Sinne des Wortes; denn zwischen dem, was wir in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Sprachgebrauche in Leben und Wissenschaft Anzahlen nennen, und dem, was nach dieser Theorie so benannt sein soll, besteht, wie wir leicht zeigen können, keinerlei Gemeinsamkeit. Werden die Anzahlen als jene auf Aequivalenz gegründeten Relationsbegriffe definirt, dann gienge doch jede Zahlenaussage anstatt auf die concret vorliegende Menge als solche, immer nur auf Verhältnisse derselben zu anderen Mengen. Dieser Menge eine bestimmte Zahl zuschreiben, hiesse, sie zu einer bestimmten Gruppe unter einander aequivalenter Mengen klassificiren; dies ist aber ganz und gar nicht der Sinn einer Zahlenaussage. Man betrachte doch irgend ein specielles Beispiel. Nennen wir eine Menge vor uns liegender Nüsse darum vier, weil sie einer gewissen Klasse von unendlich vielen Mengen angehört, die sich wechselseitig in eindeutige Correspondenz setzen lassen? Wol niemand hatte hiebei jemals solche Gedanken, und kaum fänden wir überhaupt practische Anlässe, uns für dergleichen zu interessiren. Was uns in Wahrheit interessirt, das ist der Umstand, dass eine Nuss und eine Nuss und eine Nuss und eine Nuss da ist. Diese ungeschickte und umständliche Vorstellung (und um wieviel mehr verdiente sie diese Bezeichnung erst bei erheblicheren Mengen!) gestalten wir sofort für Denken und Sprechen bequemer, indem wir sie unter Vermittelung der allgemeinen Mengenform Eins und Eins und Eins und Eins, welche den Namen Vier hat, denken. Hiebei erhält das unbestimmte Eins seine Determination durch den zum Zahlnamen gefügten Gattungsnamen — eine Determination, genau so weit reichend als unser logisches Interesse: als ‚eine Nuss' interessirt uns hier eben das concret Einzelne und nicht als diese so und so beschaffene Nuss. In diesem schon für den gewöhnlichsten Denkgebrauch greifbaren Nutzen gründet das Interesse für die Heraushebung der allgemeinen Mengenform oder Anzahl. Völlig nutzlos und gleichgiltig erscheinen uns aber jene Aequivalenzbeziehungen einer gegebenen Menge zu anderen Mengen, in welchen die in Rede stehende Theorie den Ursprung und Sinn des Anzahlbegriffes sucht.

Die Sachlage wird für diese Theorie natürlich auch nicht günstiger durch Recurs auf jene Mengen von Strichen 11, 111, ..., welche als normale Repräsentanten (gewissermassen als Etalons) der Klassen dienen, und vermittelst welcher die Subsumption der zu zählenden Menge unter die bezügliche Klasse vollzogen wird. Gänzlich verkehrt müssen wir es finden, wenn man diese Strichmengen als ‚natürliche Zahlen' bezeichnet und die Namen Zwei, Drei u. s. w. als d e r e n Benennungen auffasst, und nicht minder, wenn man den Begriff der Einheit mit dem eines solchen Einerstriches identificirt. Wir schreiben doch nicht einer Menge von Nüssen die Zahl Vier und jeder einzelnen dieser Nüsse die Zahl Eins zu, weil diese Menge durch 1111, jede einzelne Nuss aber durch 1 „abgebildet" werden kann!

Worin gründet es denn, möchte man fragen, dass wir alle einzelnen Inhalte, die wir zählen — und nichts ist denkbar, das nicht auch gezählt werden könnte — durch einen solchen Strich bezeichnen dürfen? Soll diese Bezeichnung ein wahres Fundament haben, dann muss sie auf einer allen und jeden Inhalten gemeinsamen Beschaffenheit beruhen. Es giebt aber nur einen allumfassenden Begriff: den des Etwas. Der Strich 1 kann also an jedem Inhalt nur bezeichnen, dass er ein Etwas ist, und Anzahl ist sonach Etwas und Etwas u. s. w. So möchte es scheinen, dass die geringste Ueberlegung vom Irrthum zur Wahrheit führen müsse; es möchte scheinen, dass es bereits hinreiche, die obige Frage auch nur aufzuwerfen, um den richtigen Weg zu gewinnen. Indessen die Antwort liegt zu nahe und klingt im ersten Augenblicke zu trivial; so geriet wol Mancher, ihr auszuweichen, auf jene entlegenen und gekünstelten Constructionen, welche in der Absicht, die elementaren arithmetischen Begriffe aus ihren letzten definitorischen Merkmalen aufzubauen, sie derart um- und wegdeuten, dass schliesslich ganz fremde, für Praxis und Wissenschaft gleich nutzlose Begriffsbildungen resultiren.

Frege's Versuch. Die Triftigkeit der letzten Bemerkungen wird auch vortrefflich illustrirt durch das wiederholt citirte geistreiche Buch von FREGE, welches ausschliesslich der Analyse und Definition des Anzahlbegriffes gewidmet ist. In der That wirft er die Frage, warum wir denn alle Dinge mit dem Namen Eins bezeichnen können, auf und widmet ihr lange Erörterungen.[1]) Er streift auch gelegentlich an die richtige Antwort, um sich nachher aber desto weiter von der Wahrheit zu entfernen. Es ist hier der Ort, FREGE's merkwürdigen Versuch zu besprechen, denn die Auffassung, zu der er schliesslich gelangt, steht, wenn wir auf das Wesentliche achten, zu der oben kritisirten Aequivalenztheorie in naher Beziehung.

Worauf FREGE es abgesehen hat, ist ganz und gar nicht eine

[1]) cf. a. a. O. S. 40 ff.

psychologische Analyse des Anzahlbegriffes; nicht von einer solchen erhofft er Aufklärung über die Grundlagen der Arithmetik. „Die Psychologie bilde sich nicht ein, zur Begründung der Arithmetik irgend etwas beitragen zu können". Und auch sonst spart er nicht an entschiedenen Protesten gegen die vermeintlichen Eingriffe der Psychologie in unser Gebiet. [1]) Man sieht bereits, wohin FREGE zielt. „So sehr sich . . die Mathematik jede Beihilfe von der Psychologie verbitten muss, so wenig kann sie ihren Zusammenhang mit der Logik verläugnen". Eine Fundirung der Arithmetik auf eine Folge formaler Definitionen, aus welchen die sämmtlichen Lehrsätze dieser Wissenschaft rein syllogistisch gefolgert werden könnten, ist das Ideal FREGE's.

Es ist wol nicht nötig weitläufig auseinander zu setzen, warum ich diese Auffassung nicht theilen kann, zumal die sämmtlichen Untersuchungen, die ich bisher geführt habe, lauter Argumente der Widerlegung darstellen. Definiren kann man doch nur das logisch Zusammengesetzte. Sobald wir auf die letzten, elementaren Begriffe stossen, hat alles Definiren ein Ende. Begriffe wie Qualität, Intensität, Ort, Zeit u. dgl. kann Niemand definiren. Und dasselbe gilt von den elementaren Relationen und den auf sie gegründeten Begriffen. Gleichheit, Aehnlichkeit, Steigerung, Ganzes und Theil, Vielheit und Einheit u. s. w. sind Begriffe, die einer formal-logischen Definition gänzlich unfähig sind. Was man in solchen Fällen thun kann, besteht nur darin, dass man die concreten Phaenomene aufweist, aus oder an denen sie abstrahirt sind, und die Art dieses Abstractionsvorganges klarlegt; man kann, wo es sich notwendig erweist, durch verschiedene Umschreibungen die bezüglichen Begriffe scharf umgrenzen und so

[1]) „Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine Vorstellung entsteht, für eine Definition . ." (a. a. O. S. VI). „Die Zahl ist ebensowenig ein Gegenstand der Psychologie oder ein Ergebniss psychischer Vorgänge, wie es etwa die Nordsee ist" (a. a. O. S. 34). An einer Stelle klagt FREGE, dass selbst in mathematischen Lehrbüchern psychologische Wendungen vorkommen. „Wenn man eine Verpflichtung fühlt, eine Definition zu geben, ohne es zu können, so will man wenigstens die Weise beschreiben, wie man zu dem betreffenden Gegenstande oder Begriffe kommt" (a. a. O. S. VIII).

Verwechslungen derselben mit verwandten Begriffen vorbeugen. Was man von der sprachlichen Darlegung eines solchen Begriffes, (z. B. bei der Exposition einer Wissenschaft, die sich auf ihn stützt) vernünftiger Weise verlangen kann, wäre demgemäss so zu fixiren: sie muss wolgeeignet sein, uns in die richtige Disposition zu versetzen, dass wir diejenigen abstracten Momente in der inneren oder äusseren Anschauung, welche gemeint sind, selbst herausheben, beziehungsweise jene psychischen Processe, welche zur Bildung des Begriffes erforderlich sind, in uns nacherzeugen können. Nützlich und notwendig wird dergleichen freilich nur dann sein, wenn der den Begriff bezeichnende Name allein zum Verständnisse nicht hinreicht, sei es vermöge vorhandener Aequivocationen, sei es vermöge irgend welcher Misdeutungen, zu denen der Begriff Anlass gab. Ein solcher Fall liegt gerade bei den Zahlbegriffen vor, und so können wir es an sich gar nicht tadelnswert finden, wenn Mathematiker an der Spitze ihres Systems anstatt eine logische Definition der Zahlbegriffe zu geben, „die Weise beschreiben, wie man zu diesen Begriffen kommt“; nur müssten diese Beschreibungen richtige sein, die ihren Zweck auch erfüllen.

Im Uebrigen ist aus unseren Analysen mit unwidersprechlicher Klarheit hervorgegangen, dass die Begriffe Vielheit und Einheit unmittelbar auf letzten, elementaren psychischen Daten beruhen und somit zu den in dem angegebenen Sinne undefinirbaren Begriffen gehören. Mit diesen aber hängt der Anzahlbegriff so nahe zusammen, dass auch bei ihm von einem Definiren kaum zu reden ist.[1]) Das Ziel, das sich FREGE setzt, ist also ein chimärisches zu nennen. Es ist daher auch kein Wunder, wenn sein Werk, trotz allen Scharfsinns, in unfruchtbare Hypersubtilitäten verläuft und ohne positive Resultate endet. Es würde uns zu weit von unserer Aufgabe ablenken, wollten wir seinen Darlegungen Schritt für Schritt folgen. Hier wird es genügen einige wichtigere seiner Definitionen herauszugreifen und zu prüfen. Zu ihrem Verständnisse muss vorausgeschickt werden, dass nach FREGE die

[1]) Ueber die gewöhnlichen Zahldefinitionen vgl. d. VIII. Cap. dieses Theiles.

Zahlenangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält. [1]) Die Zahl kommt weder einem einzelnen Gegenstande, noch einer Menge von Gegenständen zu, sondern dem Begriffe, unter den die gezählten Objecte fallen. Wenn wir urtheilen: Der Jupiter hat vier Monde, so wird dem Begriffe Jupitermond die Zahl Vier zugeschrieben.

Der Grundgedanke in der FREGE'schen Darstellung stimmt insofern mit dem der obigen Aequivalenztheorie überein, als auch er von der Definition der „Gleichzahligkeit" ausgehend, den Zahlbegriff gewinnen will. Die Methode, die er einschlägt, betrachtet er als Specialfall einer allgemeinen logischen Methode, welche es ermöglichen soll, aus einem bekannten Gleichheitsbegriff die Definition dessen, was als gleich zu betrachten ist, zu gewinnen. „Das scheint freilich eine sehr ungewöhnliche Art der Definition zu sein, welche wol von den Logikern noch nicht genügend beachtet ist; dass sie aber nicht unerhört ist, mögen einige Beispiele zeigen: ‚die Gerade a ist parallel der Gerade b', in Zeichen

$$a \parallel b,$$

kann als eine Gleichung gefasst werden. Wenn wir dies thun, erhalten wir den Begriff der Richtung und sagen: ‚die Richtung der Gerade a ist gleich der Richtung der Gerade b'. Wir ersetzen also das Zeichen $\parallel$ durch das allgemeinere $=$, indem wir den besonderen Inhalt des ersteren an a und b vertheilen. Wir zerspalten den Inhalt in anderer als der ursprünglichen Weise und gewinnen dadurch einen neuen Begriff." [2])

Und noch ein zweites Beispiel giebt FREGE: „Aus der geometrischen Aehnlichkeit geht der Begriff der Gestalt hervor, so dass man z. B. statt „die beiden Dreiecke sind ähnlich" sagt: die beiden Dreiecke haben gleiche Gestalt, oder „die Gestalt des einen Dreiecks ist gleich der Gestalt des anderen".

Der Parallelismus, bzw. die geometrische Aehnlichkeit liefern für diese Beispiele „die bekannten Gleichheitsbegriffe". Sehen wir nun zu, wie FREGE vermittelst ihrer die Definition dessen, was als gleich zu betrachten ist, d. h. die Definitionen der Richtung

---

[1]) a. a. O. S. 59 Vgl. darüber die Darlegungen im IX. Cap. dieses Theiles.

[2]) a. a. O. S. 74—75.

einer Geraden, bzw. der Gestalt eines Dreiecks gewinnen will. Folgendes ist das Resultat einer längeren Erörterung:

„Wenn die Gerade a der Gerade b parallel ist, so ist der Umfang des Begriffes ‚Gerade parallel der Gerade a' gleich dem Umfange des Begriffes ‚Gerade parallel der Gerade b'; und umgekehrt: wenn die Umfänge der genannten Begriffe gleich sind, so ist a parallel b. Versuchen wir also zu erklären:

Die Richtung der Gerade a ist der Umfang des Begriffes ‚parallel der Gerade a';

Die Gestalt des Dreiecks d ist der Umfang des Begriffes ‚ähnlich dem Dreiecke d'" [1])

Man sieht nun sofort, wie diese Gedanken und Definitionen sich für den Begriff der Anzahl verwerten lassen. Wie die Richtung Geraden, die Gestalt Dreiecken zukommt, so kommt die Anzahl Begriffen zu. Wir haben also an die Stelle der Geraden und Dreiecke Begriffe zu setzen. Ferner tritt an die Stelle des Parallelismus und der Aehnlichkeit der hier bestehende Gleichheitsbegriff: die „Gleichzahligkeit" von Begriffen. Der Begriff F wird dem Begriffe G gleichzahlig genannt, wenn die Möglichkeit vorliegt, die unter den einen und unter den anderen Begriff fallenden Gegenstände beiderseits eindeutig zuzuordnen. Auf solche Weise ergiebt sich die Definition:

„Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes ‚gleichzahlig dem Begriffe F',"

welche zusammen mit der vorhergehenden den Ausgangspunkt für eine lange Reihe weiterer Definitionen und an sie anknüpfender subtiler Erwägungen bildet. [2])

---

[1]) a. a. O. S. 79.

[2]) Es mag genügen hier nur einige wenige zu citiren: „Der Ausdruck ‚n ist eine Anzahl' sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke ‚es giebt einen Begriff der Art, dass n die Anzahl ist, welche ihm zukommt'" (a. a. O. S. 85). „0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe ‚sich selbst ungleich' zukommt" (a. a. O. S. 87).

Diese letztere Definition wird freilich nur dadurch möglich, dass derjenigen der Gleichzahligkeit eine gezwungene Auslegung gegeben wird, vermöge deren sie auch den Fall umfasst, wo unter die Begriffe F und G kein Gegenstand fällt. — Die Zahl 1 wird definirt als „die

Ich kann nicht einsehen, dass diese Methode eine Bereicherung der Logik bedeute. Ihre Resultate sind von einer Art, dass wir uns nur wundern können, wie Jemand sie auch nur vorübergehend für wahr halten konnte. In der That, was diese Methode zu definiren gestattet, sind nicht die Inhalte der Begriffe Richtung, Gestalt, Anzahl, sondern deren Umfänge. So ergab sie: „Die Richtung der Gerade a ist der Umfang des Begriffes ‚parallel der Gerade a'". Unter Umfang eines Begriffes versteht man doch den Inbegriff der unter ihn fallenden Gegenstände. Die Richtung der Geraden a wäre also der Inbegriff der zu a parallelen Geraden. Desgleichen ergab sie: „Die Gestalt des Dreieckes d ist der Umfang des Begriffes ‚ähnlich dem Dreiecke d'", i. e. der Inbegriff der sämmtlichen zu d ähnlichen Dreiecke. Und so wird denn auch „die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt" definirt als der Umfang des Begriffes ‚gleichzahlig dem Begriffe F'; mit anderen Worten: der Begriff dieser Anzahl ist die Gesammtheit der zu F gleichzahligen Begriffe, also eine Gesammtheit von unendlich vielen „aequivalenten" Mengen. Ein weiterer Commentar ist wol überflüssig. Man bemerkt übrigens, dass alle Definitionen zu richtigen Sätzen werden, wenn man statt der zu definirenden Begriffe ihre Umfänge substituirt; aber freilich auch zu ganz selbstverständlichen und wertlosen Sätzen. [1])

Anzahl, welche dem Begriffe ‚gleich Null' zukommt". Endlich legt FREGE noch besonderes Gewicht auf die Definition des Ausdrucks ‚n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m', was durch den Satz geschieht: „Es giebt einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x derart, dass die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, n ist, und dass die Anzahl, welche dem Begriffe ‚unter F fallend aber nicht gleich x' zukommt, m ist". Dazu kommen Beweise, dass auf jede Anzahl n in der natürlichen Zahlenreihe eine und nur eine Anzahl unmittelbar folge; u. s. w. Diese Proben genügen wol, um eine Vorstellung von dem Geiste dieser Theorie zu geben.

[1]) FREGE selbst scheint das Bedenkliche dieser Definition empfunden zu haben, da er in einer Anmerkung zu derselben sagt: „Ich glaube, dass für ‚Umfang des Begriffes' einfach ‚Begriff' gesagt werden könnte". Ueberlegen wir uns, was das heissen soll. Die ‚Anzahl der Jupitermonde' hiesse danach soviel wie ‚gleichzahlig mit dem Begriff Jupitermond', oder deutlicher ausgedrückt: gleichzahlig mit dem Inbegriffe der Jupiter-

Kerry's Versuch. Wir wollen schliesslich noch einen, von den bisher behandelten wesentlicher unterschiedenen Versuch besprechen, den Begriff der Anzahl vermittelst des der eindeutigen Zuordnung aufzuhellen. In einer Abhandlung von KERRY [1]) finde ich folgenden Passus: „Die Angabe der Hinsicht, in welcher zwei Inhalte einander gleich genannt werden sollen, wird im Allgemeinen keine mühelose Angelegenheit sein; sie ist vielmehr vielfach nur durch Neuschöpfung eines Begriffes erreichbar. Man denke sich z. B. Vielheiten von zweierlei Gegenständen, etwa von Aepfeln und Glockenschlägen, mit einander verglichen; bevor man hier zu einem Gleichheitsurtheile, z. B. demjenigen, wonach die Anzahl der Aepfel gleich sei der Anzahl der Glockenschläge, gelangt, muss man den Begriff der Hinsicht, in welcher Gleichheit besteht, den Begriff des A n z a h l m ä s s i g e n concipirt haben: — ein Begriff, der sich freilich nur durch die folgende Bestimmung wird definiren lassen. Es seien die Gegenstände einer (endlichen) Vielheit V, deren Anzahlmässiges man erfassen will, gegenseitig-eindeutig zuordenbar den Gegenständen einer anderen, unveränderlichen Vielheit V_1, und ferner die Gegenstände von V beliebigen Veränderungen unterzogen gedacht; so ist das Anzahlmässige an V dasjenige, was durch alle diese Veränderungen hindurch erhalten bleiben muss, falls jene Zuordenbarkeit der Gegenstände von V und V_1 n a c h den vor sich gegangenen Veränderungen ebenso stattfinden soll, wie v o r denselben."

Ich versprach einen neuen Definitionsversuch für den Anzahlbegriff darzulegen und citire hier die Definition von einem „Anzahlmässigen", welches im Zusammenhange der Rede von der

---

monde. Man sieht, wir erhalten wiederum Begriffe gleichen Umfanges, nicht aber gleichen Inhaltes. Der letztere Begriff ist identisch mit dem Begriffe ‚irgend eine Menge aus der durch den Inbegriff der Jupitermonde bestimmten Aequivalenzklasse'. Alle diese Mengen fallen auch unter die Anzahl vier. Dass hier aber verschiedene Begriffe vorliegen, bedarf keines Beweises. Man erkennt auch, dass FREGE durch die erwähnte Modification in das Fahrwasser der oben widerlegten, und im Ganzen noch natürlicheren Aequivalenztheorie gerät.

[1]) Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung III. Art. Vierteljahrsschrift für wissenschaftl. Philosophie XI. 1. S. 79. Anm.

„Anzahl„ unterschieden und als Neuschöpfung eines Begriffes bezeichnet wird. Genauer besehen, handelt es sich indessen bloss um Neuschöpfung eines Namens, während das, was gemeint ist und nur gemeint sein kann, identisch ist mit dem, was wir und was man sonst allgemein unter „Anzahl“ im abstracten Sinne des Wortes verstanden hat. [1])

Wir gestehen sogleich zu: was diese Definition aussagt, ist richtig. Das Einzige, was an einer Menge V unverändert bleibt, wenn wir sie solchen, im Uebrigen völlig unbeschränkten Veränderungen unterziehen, die ihre Aequivalenz mit der fixen Menge V_1 nicht stören, ist wirklich deren Anzahl. Leider können wir aber nicht zugestehen, dass, was diese Definition aussagt, auch nützlich sei, dass sie uns das Geringste leiste, dass sie uns in irgend einer Hinsicht belehre. Was ist, fragen wir nun erst recht, die Anzahl? Was ist dasjenige an der gegebenen Menge V, das bei all diesen Variationen ungeändert bleibt? Wir wünschen etwas über den Inhalt des Anzahlbegriffes zu erfahren, und man nennt uns den Umfang. Die KERRY'sche Definition ist nichts anderes, als die Umschreibung des Satzes: Anzahl der Menge V ist dasjenige, was sie mit allen ihr gleichzahligen Mengen gemein hat. Ja wir halten sogar diese letztere schlichte und gerade Erklärung

[1]) Bei KERRY rührt die Unterscheidung zwischen Anzahl und Anzahlmässigem daher, dass er die Anzahlen durch die bekannte Reihe von Sätzen $1+1=2$, $2+1=3$, ... definirt denkt, welche Begriffe nur in mittelbarer Beziehung zu den Anzahlen in unserem Sinne stehen. Der Gedanke nun, dass die Ausführung der Vergleichung zweier Mengen in Beziehung auf Gleichviel, Mehr und Weniger möglich ist ohne (successive) Abzählung einer jeden und Vergleichung der resultirenden Zahlen, und dass somit das hiebei unmittelbar Verglichene die Anzahl (in dem Sinne jener Definitionen) nicht sein kann, hat, wie es scheint, KERRY zur Einführung dieses Begriffes des Anzahlmässigen geführt; dieser soll eben die unmittelbare Hinsicht repräsentiren, nach welcher die Vergleichung statthat. Dieser Gedankengang ist irrig. Die gegenseitige Zuordnung ist nur in ganz uneigentlichem Sinne eine Vergleichung zu nennen; sie dient nur der Vergleichung. Die ‚Aequivalenz' zweier Mengen ist in keinem Sinne eine Gleichheit derselben; sie ist bloss ein Merkzeichen ihrer Gleichheit in Beziehung auf die Anzahl im eigentlichen Sinne des Wortes. Die Frage, welches die unmittelbare Hinsicht sei, nach welcher diese Quasi-Vergleichung erfolge, ist also gegenstandslos.

für die bei Weitem vorzüglichere, da diejenige KERRY's den irrigen Gedanken sehr nahelegt, dass die Anzahl ein Theilinhalt, ein inneres Merkmal sei. Das überall Gleichartige ist, wie unsere Untersuchung gelehrt hat, nichts dem Inhalte Angehöriges, sondern die Form psychischer Synthese.

Man könnte das Verdienst der obigen Definition vielleicht darin suchen, dass sie den Umfang des Anzahlbegriffes scharf präcisire, durch ein Merkmal (nämlich das der Aequivalenz), welches diesen Begriff nicht voraussetze; das Letztere ist richtig. Indessen wüsste ich nicht, dass sich an den Umfang des Anzahlbegriffes wesentlichere Zweifel geknüpft hätten, so dass durch seine Präcision Alles erledigt wäre. Im Gegentheil ist der Inhalt und der Ursprung des Begriffes die Quelle all der grossen Schwierigkeiten gewesen, die ihn zu einem Kreuz der Philosophen und Mathematiker gemacht haben. Ueber Beides erfahren wir durch jene Definition nichts, und darum ist sie wertlos.

Schlussbemerkung. Indem ich diese Betrachtungen abschliesse, hoffe ich theils durch eine genauere Zergliederung des Wesens der eindeutigen Zuordnung und ihrer eigentlichen Function für die Anzahlvergleichung, theils durch Widerlegung auf sie gegründeter und verfehlter Theorien gezeigt zu haben, dass der Begriff der Aequivalenz für die Definition oder Analyse des Anzahlbegriffes nichts leistet und nichts leisten kann. Eine gründlichere Untersuchung über das Verhältniss beider hielt ich hauptsächlich aus dem Grunde für geboten, weil gerade jetzt die allgemeine Neigung verbreitet ist, dem Aequivalenzbegriffe eine übertriebene Bedeutung in der angeführten Hinsicht zu geben und jeden Augenblick neue Versuche auftauchen, vermittelst desselben den Inhalt der Anzahlbegriffe zu verdeutlichen oder gar zu definiren.[1])

---

[1]) Seitdem dieses Capitel geschrieben wurde, ist wieder eine Reihe neuer Versuche von der oben charakterisirten Tendenz erschienen. Erwähnenswert ist hier vor Allem HEYMANS, „Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens" (1890) I, § 36, S. 146 u. ff. Vgl. insbesondere S. 150 oben. „Der Begriff des Gleichzähligen [kommt] historisch und logisch v o r dem Begriff der Zahl". Die HEYMANS'sche An-

VIII. Capitel.

Discussionen über Einheit und Vielheit.

In den letzten Capiteln haben wir alle wesentlichen Fragen erledigt, welche das Verständniss der psychologischen Entstehung und des Inhaltes der Begriffe Vielheit und Einheit, der bestimmten Anzahlbegriffe, sowie der Begriffe Gleichviel, Mehr und Weniger betreffen. Es wird nun unsere nächste Aufgabe sein, die gewonnene Einsicht durch die Lösung der Schwierigkeiten zu bewähren, die man in diesen Begriffen gefunden hat, und die auf unentwirrbare Widersprüche und Subtilitäten zu führen schienen.

---

sicht fällt, wie eine detaillirte Zergliederung zeigen würde, genau unter unsere ‚Aequivalenztheorie'. — Auch die Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?" (1888) des berühmten Arithmetikers Dedekind darf ich hier citiren. Sie vertritt, wenn auch nicht in allen, so doch in wesentlichen Punkten analoge Gedanken. „Verfolgt man genau, was wir beim Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen thun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden ... Auf dieser *einzigen* .. *Grundlage* muss .. die gesammte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden" (a. a. O. VIII). Der ursprüngliche Zahlbegriff ist für Dedekind allerdings die Ordinalzahl oder „natürliche Zahl" (S. 21). *Anzahl* einer Menge ist ihm diejenige Ordinalzahl, welche die Eigenschaft hat, dass die Gesammtheit der in Bezug auf sie rang-niedrigeren Zahlen, der vorliegenden Menge aequivalent ist. — So sehr ich die innere formelle Consequenz der Entwicklungen in der Theorie dieses bedeutenden Mathematikers bewundere, so scheint sie mir doch in ihrer absonderlichen Künstlichkeit von der Wahrheit weit abzuirren.

Die Definition der Zahl als Vielheit von Einheiten. Eins als abstracter, positiver Theilinhalt. Eins als blosses Zeichen.

Als unseren Ausgangspunkt nehmen wir die alte Definition: Die Zahl ist eine Vielheit von Einheiten. Hinter ihr versteckt sich bei sehr vielen Autoren das grobe Misverständniss, als ob es sich bei der Zahl um eine specielle Art von Mengen unter einander gleicher Gegenstände handelte. So nämlich wie es Mengen von Aepfeln, Steinen u. s. w. gäbe, so auch von Einheiten. Hierbei dachte man sich die Einheiten entweder als concrete Inhalte, indem man sich an die blossen Namen oder Schriftzeichen hielt, oder (und dies ist die Regel) als abstracte, positive Theilinhalte, welche isolirt herausgehoben und zu Mengen colligirt werden können.

Als vorzüglichen Repräsentanten der letzteren Ansicht führen wir LOCKE an. Er sagt [1]) „Amongst all the ideas we have, as there is non suggested to the mind by more ways, so there is non more simple than that of unity or one. It has no shadow of variety or composition in it; every object our senses are employed about, every idea in our understandings every thought of our minds, brings this idea along with it.“ „By repeating this idea in our minds and adding the repetitions together, we come by the complex ideas of the modes of it“ [number]. Einer Kritik dieser offenbar verfehlten Lehre dürfen wir uns hier entheben. Die Auffassung der Einheit als eines absoluten Theilinhaltes ist noch sehr roh, und sie bot schon LOCKE's nicht unebenbürtigen Kritikern, LEIBNIZ und BERKELEY, Anlass zu entgegnenden Bemerkungen. BERKELEY setzt die relative Natur der Zahlbegriffe wiederholt und ausführlich auseinander und sucht dieselbe als Stützpunkt für seine nominalistischen Ansichten zu verwerten. Auch die LOCKE'sche Auffassung der Einheit und Anzahl als primäre Qualitäten, die auch ausser unserem Geiste in den

[1]) Essay, B. II. chap. 16. sect. 1 a. 2.

Dingen Bestand haben, wird von ihm lebhaft bekämpft. Während er aber in der Kritik meistens scharf und richtig argumentirt, nähert er selbst sich einer Ansicht, deren Irrthum wir sogleich beleuchten werden, und welche dahin tendirt, die Zahl nicht als allgemeinen Begriff, sondern als ein blosses allgemeines Zeichen zu erklären.[1]) Ungefähr zu derselben Zeit hat auch LEIBNIZ den relativen Charakter der Zahlbegriffe betont. So sagt z. B. sein Theophil in den Nouveaux Essays:[2]) „Peut-être que douzaine ou vingtaine ne sont que les relations et ne sont constituées que par le rapport à l'entendement. Les unités sont à part et l'entendement les prend ensemble quelques dispersées qu'elles soyent.“ Kurz und bestimmt schreibt er 1706 an den Pater DES BOSSES: „Numeri unitates, fractiones naturam habent relationum“.[3])

Manche Autoren, sagten wir, betrachten die Einheit oder das Eins als ein blosses Zeichen, welches jedem der gezählten Gegenstände ertheilt wird, und so erscheint ihnen die Zahl als eine ganz specielle concrete Menge von lauter Einsen. Zu diesem Irrthum hat die Misdeutung des primitivsten symbolischen Zählungsverfahrens den Anlass gegeben. Da dem Zwecke der Zählung gemäss die Aufmerksamkeit nicht von den Besonderheiten der einzelnen Gegenstände festgehalten werden darf, so bediente man sich zur Erleichterung des Abstractionsverfahrens folgendes einfachen Mittels: Man ersetzte jeden Gegenstand durch ein gleichförmiges und möglichst gleichgiltiges Zeichen, z. B. durch einen blossen Strich 1. So entstanden als Vertreter der zu zählenden Vielheiten, Mengen von lauter Strichen 1. Diese

---

[1]) BERKELEY, Princ. of Hum. Knowledge, sect. 12, 13, 118—121 (wo LOCKE kritisirt wird, ohne genannt zu sein).

[2]) Livre II. ch. 12. § 3. Opp. phil. Erdm. S. 238.

[3]) Opp. phil. Erdm. S. 435. Im Jahre 1684 rechnet er die Zahl noch zu den Begriffen, die mehreren Sinnen gemeinschaftlich sind. Vgl. Erdm. S. 79 (nicht S. 97, wie irrthümlich auf Seite 92 citirt ist).

aber erwiesen sich sofort als vorzüglich geeignet, die Zahlbegriffe selbst als deren Zeichen zu vertreten, vorausgesetzt, dass man, was nahe lag und geschah, stets diese selben Bezeichnungsmittel anwandte. Diese Abbildung eines jeden zu zählenden Dinges durch ein gleichförmiges, an sich bedeutungsloses Zeichen, spiegelt ja nur den Process ab, welcher von der concreten Vielheit zur Zahl hinführt; und nur soweit hat sie Sinn und Bedeutung, als sie dies thut. Alles Zählen (welches freilich infolge andauernder Gewohnheit zu einem maschinenmässigen Verfahren geworden ist) wäre völlig sinnlos, wenn das Zeichen 1, bzw. das Wort Eins nicht die dem Begriff Eins entsprechende Bedeutung besässe, d. h. wenn es nicht den Abstractionsprocess anzeigte, welcher den einzelnen bestimmten Gegenstand der zu zählenden Menge zum blossen Etwas oder Eins entschränkt; denn nur auf diese Weise erhalten wir statt einer leeren Anhäufung von Strichen oder Worten den Begriff, unter den die concret vorliegende Vielheit als Vielheit fällt, und auf den es in Wahrheit allein abgesehen ist. Indem man sich aber bloss an das Zählen als den mechanisch äusserlichen Process hielt, übersah man gänzlich den logischen Gedankeninhalt, der ihm Berechtigung und Wert für unser geistiges Leben verleiht.

Auch abgesehen von den gerügten Irrthümern, welche die besprochene Definition der Zahl nahelegt, finden wir an ihr wenig Nützliches. Vielheit und Einheit sind Correlativa; folglich ist dies keine irgendwie charakterisirende Beschaffenheit für die Vielheit, die wir Zahl nennen, dass sie aus Einheiten bestehe. Soll aber vielleicht aufmerksam gemacht werden darauf, dass unter Zahl nicht eine concrete Vielheit, sondern eine unter Vermittlung des abstracten Vielheitsbegriffes gedachte Vielheit verstanden werden solle, d. h. eine solche, deren einzelne Elemente bloss, sofern sie Einheiten sind, zu beachten seien, dann wäre es doch am besten, dies eben in der Definition ausdrücklich zu sagen. Selbst dann würde ihr aber noch die volle Deutlichkeit fehlen, da sie dem Unterschiede zwischen Vielheit in dem weiteren und Vielheit in dem engeren Sinne (welch letzterer auf einer Klassification der Vielheitsformen beruht) nicht Rechnung trüge. Etwas deutlicher ist in dieser Hinsicht die Fassung von HOBBES: „Zahl ist Eins und Eins; oder Eins, Eins und Eins; oder u. s. w.“, [1]) wenn nur ‚Eins’ in dem richtigen, von uns praecisirten Sinne verstanden wird — wovon HOBBES bei seinem extrem nominalistischen Standpunkte freilich sehr weit entfernt war. Im Uebrigen ist mit solchen Definitionen wenig gethan; die Schwierigkeit liegt in den Phaenomenen, ihrer richtigen Beschreibung, Analyse und Deutung; nur im Hinblicke auf sie ist Einsicht in das Wesen der Zahlbegriffe zu gewinnen.

Eins und Null als Zahlen.

Gegen die obige Definition fanden wir im Wesentlichen nur deren Misverständlichkeit einzuwenden, hervorgerufen durch diejenige der Begriffe Einheit und Vielheit. Viel ernster sind die Einwürfe, die andere Autoren gegen sie erhoben. Einige finden sie unzulänglich, andere von Grund aus irrig. Die Kritik dieser Einwürfe diene uns wiederum als äusserer Anlass, wichtigere Misverständnisse, die sich in ihnen documentiren, aufzuhellen.

Der Einwand der Unzulänglichkeit wird folgendermassen begründet: Die Definition ist offenbar nur auf die Zahlen der von Zwei beginnenden Zahlenreihe anwendbar. Die Null und Eins erscheinen nach ihr vom Begriffe der Zahl ausgeschlossen. [2]) „Man wende nicht ein, dass Null und Eins

[1]) De corp. VII, 7, citirt von BAUMANN, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik I, 274.

[2]) Vgl. FREGE, Grundlagen d. Arithmetik S. 38. Die im Text folgenden Sätze sind demselben Werke S. 57 entnommen, wo sie aber in einem anderen Gedankenzusammenhange stehen. Da es uns gerade um die in denselben ausgesprochenen Ideen zu thun ist, fügen wir sie hier ein.

nicht Zahlen in demselben Sinne seien wie Zwei und Drei! Die Zahl antwortet auf die Frage wieviel? und wenn man z. B. fragt, wieviel Monde hat dieser Planet? so kann man sich ebenso gut auf die Antwort Null und Eins, wie zwei und drei gefasst machen, ohne dass der Sinn der Frage ein anderer wird. Zwar hat die Zahl Null etwas Besonderes und ebenso die Eins, aber das gilt im Grunde von jeder ganzen Zahl; nur fällt es bei den grösseren immer weniger in die Augen. Es ist durchaus willkürlich, hier einen Artunterschied zu machen. Was nicht auf Null oder Eins passt, kann für den Begriff der Zahl nicht wesentlich sein."

Dieser Einwand betrifft nicht bloss die EUCLID'sche Definition, sondern auch unsere eigenen Versuche über die Zahlbegriffe. Von Null und Eins als Zahlen war nirgends die Rede, und man sieht auch, dass alle unsere Analysen auf diese Begriffe gar nicht passen. Es bliebe nur der Ausweg, geradezu zu läugnen, dass Null und Eins zu den Zahlbegriffen gehören, und diesen scheint sowol die obige Argumentation als auch der allgemein übliche Sprachgebrauch zu versperren.

Betrachten wir die Sache etwas näher. Ohne jede weitere Erklärung und fast wie eine Nominaldefinition der Zahl wird der Satz hingestellt: die Zahl antwortet auf die Frage wieviel? oder, um eine Ausdrucksweise zu wählen, die den Sinn desselben schärfer markirt: Zahl ist *jede mögliche* Antwort auf die Frage wieviel? [1]) Ueberlegen wir den Sinn dieses Satzes. Wieviel? ist die Frage nach der näheren Determination eines Viel. Dieses Viel bedeutet hier offenbar nicht den Gegensatz zu einem Wenig, sondern es drückt einfach die (eigentliche oder symbolische) Vorstellung einer Collection (eines Inbegriffs, einer Vielheit) von Gegenständen aus. Die Frage geht nun auf die nähere Bestimmung derselben als einer Zwei oder Drei u. s. w. Nach unseren früheren

[1]) Vgl. die Aeusserung HERBART's, Psychologie als Wissenschaft. 1825. II. § 116. S. 162 oben.

Untersuchungen sind die Zahlen aufzufassen als die sämmtlichen denkbaren Determinationen des unbestimmten Vielheitsbegriffes. Jede mögliche Art, denselben begrenzend zu bestimmen, giebt einen neuen Zahlbegriff. Die Definition „Die Zahl antwortet auf die Frage wieviel?“ scheint also vollkommen mit den Resultaten unserer Untersuchungen zu harmoniren.

In Wirklichkeit ist dies jedoch nur der Fall, wofern sie richtig verstanden wird. Nicht jede mögliche Antwort auf die Frage wieviel?, sondern jede mögliche positive Antwort führt auf Zahlen. Es verhält sich hier ebenso wie bei vielen anderen analogen Definitionen. Z. B. Ortsbestimmtheit nennt man jede Antwort auf die Frage wo?, Zeitbestimmtheit jede Antwort auf die Frage wann? Auch in diesen Fällen sind negative Antworten durch den Sinn der Definition ausgeschlossen. Nirgendwo und Niemals sind nicht Besonderungen von Orten, bzw. von Zeiten. Allerdings grammatisch fungiren diese negativen Antworten ganz so, wie die positiven, daher haben auch die Grammatiker keinen Anlass, Adverbien, welche Ort und Zeit im eigentlichen Sinne determiniren, von denen, die dies im uneigentlichen Sinne thun, zu trennen. Aber begrifflich besteht ein wesentlicher Unterschied. Analoges gilt selbstverständlich für die negativen Antworten auf die Frage wieviel? Nicht-viel oder ‚keine Vielheit' ist nicht eine Besonderung des Viel. Ein Gegenstand ist nicht ein Collectivum von Gegenständen; daher ist die Aussage, es sei Einer da, keine Zahlenaussage. Und ebenso ist kein Gegenstand nicht ein Collectivum und daher die Aussage, es sei keiner da, keine Zahlenaussage. Eins und Keins — das sind die beiden möglichen negativen Antworten auf das Wieviel. Sprachlich fungiren sie wiederum so wie Zahlen, und daher mögen die Grammatiker sie als Zahlenbestimmungen ansehen. Aber logisch sind sie dies nicht.

Man muss demgemäss wol beachten, dass die Bezeichnung der Null und Eins als Zahlen eine Uebertragung dieses Namens auf andersartige, wenn auch mit den eigentlichen Anzahlen in engerem Zusammenhange stehende Begriffe darstellt. Im Uebrigen meinen wir durchaus nicht, dass für diese Uebertragung bloss sprachliche und nicht auch wissenschaftliche Motive von grösster Tragweite sprechen. Es würde in der Zahlenlehre zu den hemmendsten Umständlichkeiten, ja Unzuträglichkeiten führen, wollte man die eigentlichen Zahlen und die Eins und Null beständig auseinanderhalten und auf eine gemeinsame Bezeichnung beider (wozu sich der Name Zahl bei der so naheliegenden Uebertragung von selbst darbot) verzichten. Null und Eins sind mögliche und häufig genug vorkommende Resultate arithmetischer Aufgaben. Ein algebraischer Calcul, der allen denkbaren Fällen Rechnung tragen will, kann daher zwischen Null und Eins auf der einen und den übrigen Zahlen auf der anderen Seite keinen Unterschied machen. Die a, b, c ... x, y, z der allgemeinen Arithmetik müssen Zeichen sein, welche ebenso gut durch 2, 3, 4 ... als durch 0 und 1 zu specialisiren sind.

Die Einführung der 1 und ganz besonders die noch ferner liegende der 0 als Zahlen, den 2, 3, 4 ... coordinirt, kann mit Rücksicht auf ihre mathematische Bedeutung nicht hoch genug geschätzt werden. Erst sie ermöglichte einen arithmetischen Algorithmus, d. h. ein System von formellen Regeln, durch welche man, in rein mechanischem Operiren, Zahlenaufgaben lösen, d. i. aus bekannten Zahlen und Zahlbeziehungen unbekannte auffinden kann. Schon das dekadische Zahlensystem, welches das Fundament der gemeinen Rechenkunst (arithmetica numerosa) ist, die sich an bestimmten gegebenen Zahlen bethätigt, wäre ohne jene folgenreiche Erweiterung des Zahlbegriffes undenkbar.

Was nun den inneren Grund dieser Sachlage anbelangt, so liegt er in der Gleichartigkeit der Relationen, welche die Zahlen des erweiterten Gebietes insgesammt mit einander verknüpfen. Die Beziehungen von Mehr und Weniger bestehen nicht bloss zwischen den eigentlichen Anzahlen, sondern auch zwischen diesen und der Eins und Null. a ist um a — 1 mehr als 1, dieses um a — 1 weniger als a. Deutet man die Setzung einer Zahl a als collective Hinzufügung zu Nichts, so kann man sogar sagen: a ist um a mehr als 0, 0 um a weniger als a. Darauf beruht nun die Einordnung der Eins und Null in die Zahlenreihe. Ordnen wir die Zahlen in der ‚natürlichen' Reihe, d. h. so an, dass jede folgende aus der vorhergehenden durch collective Hinzufügung einer Einheit entsteht, dann ist 1 + 1 die erste Zahl, insofern sie keine vorhergehende besitzt. Aber da 1 + 1 aus 1 ebenso entsteht, wie 1 + 1 + 1 aus 1 + 1, so fügt sich die 1 als Glied dieser Reihe naturgemäss ein. Ob wir die 1 eine Zahl nennen oder nicht, dieser Begriffsreihe gehört sie an. Und auch die Null lässt sich ihr adjungiren, indem wir die Setzung einer 1 als collective Hinzufügung der 1 zu Nichts fassen. Ungezwungener noch leistet dasselbe der umgekehrte Process der Verminderung: durch denselben Schritt, der von 3 zu 2, von 2 zu 1 führt, gelangen wir von 1 zu 0.

Diese Angehörigkeit der Null und Eins zu der Reihe der Zahlen in Beziehung auf die elementaren Relationen und Operationen macht es verständlich, warum bei der rechnerischen Lösung von Aufgaben (sobald für die eigentlichen Zahlen die Rechnungsregeln gefunden waren) nicht bloss irgend eine Zahl, sondern auch die Null oder Eins als Operationsglied, bzw. als Resultat auftreten konnte; dieser Umstand aber musste zur Erweiterung des Zahlengebietes und der damit verbundenen Aenderung des Zahlbegriffes führen, ein arithmetischer Fortschritt, der sich natürlich nicht in Form rein logischer Ueberlegungen und Definitionen zu vollziehen brauchte, sondern sich kund that in der Einführung der Zeichen 0 und 1 und deren consequenter Verwendung in den Rechnungen. Bedenkt man nun, dass ein einförmiges, geregeltes Operiren nur dann möglich ist, wenn jedes denkbare Resultat einer

Operation formell in gleicher Weise behandelt werden kann, dann wird es klar, wie diese Erweiterung des Rechengebietes wirklich einen bedeutsamen Schritt in der Richtung auf eine Arithmetik bilden musste. [1]) Im Uebrigen vermag natürlich auch die Arithmetik den wesentlichen begrifflichen Unterschied der neu adjungirten Zahlen gegenüber den ursprünglichen nicht völlig auszulöschen. Ihr Grenzcharakter zeigt sich deutlich in den Ausnahmen, welche sie bei den meisten Rechnungsarten mit sich führen: die Addition durch Null erweitert nicht, die Subtraction vermindert nicht, die Division führt zu einem sinnlosen Ergebniss, desgleichen die Potenzirung u. s. f. Die Multiplication mit Eins vervielfältigt nicht, die Division theilt nicht u. s. f. Das sind Besonderheiten augenscheinlich ganz anderer Art als diejenigen, welche speciellen Anzahlen zukommen; denn sie durchbrechen die Allgemeinheit von Sätzen, die das gesammte sonstige Zahlgebiet (eben das der wirklichen Zahlen) beherrschen.

So mag man also immerhin und aus guten Gründen von Eins und Null als Zahlen sprechen. Man mag auch eine jede Zahl, Null und Eins ausgenommen, als Summe gleicher Zahlen Eins ansehen, nur muss der thatsächlich vorhandene begriffliche Unterschied nicht ausser Acht gelassen werden. Die Einheit des Begriffes ist für die wirklichen Zahlen, d. h. jene, die Vielheitsdeterminationen sind, eine innere. Sie bilden eine logische Gattung im engeren Sinne. Die Einheit des Zahlbegriffs nach seiner Erweiterung ist hingegen eine äussere, durch gewisse Relationen gestiftete. Zahl ist darnach jedes mögliche Resultat einer Rechnung, jedes denkbare Glied

---

[1]) Bekanntlich gehört die rechnerische Verwendung der 1, die sehr nahe lag, bereits der vorwissenschaftlichen Periode der Arithmetik an, während die Einführung der 0, welche eine relativ hoch entwickelte arithmetische Einsicht voraussetzte, indischer Weisheit zu danken ist. Wie M. CANTOR, Geschichte d. Mathematik I, 159 bemerkt, galt die Eins noch den Pythagoräern nicht als eine Zahl.

der Zahlenreihe, jede mögliche Antwort auf die Frage wieviel. Man sieht jeder dieser Fassungen an, dass der Zahlbegriff in der engeren Bedeutung vorausgesetzt ist.

So glaube ich, dass der Artunterschied zwischen beiderlei Begriffen ganz und gar nicht willkürlich ist, und es muss daher ein verfehltes Princip genannt werden, welches Frege mit den oben citirten Worten aufstellt: „Was nicht auf Null und Eins passt, kann für den Begriff der Zahl nicht wesentlich sein.“

Der Begriff der Einheit und der Begriff der Zahl Eins.

An die Analyse des Begriffes der Zahl Eins knüpfen wir eine, wie das Folgende zeigen wird, nicht überflüssige, obgleich an sich nahezu selbstverständliche Bemerkung. Der Begriff der Zahl Eins ist nämlich wol zu unterscheiden von dem Begriffe der Einheit oder des Eins, von welchem in unseren früheren Untersuchungen stets die Rede war. Eins als eine mögliche Antwort auf die Frage wieviel? deckt sich dem Begriffe nach nicht mit Eins als Correlativum der Vielheit. Einheit im Gegensatze zur Vielheit ist nicht dasselbe wie Einheit in der Vielheit. Mit dem Begriffe der Vielheit (bzw. Anzahl) ist der Begriff der Einheit unabtrennbar mitgegeben. Keineswegs gilt dies aber von dem Begriffe der Zahl Eins; dieser ist erst ein späteres Kunstproduct. Practisch betrachtet sind diese Unterschiede freilich belanglos, da jeder Einheit in der Zahl auch die Zahl Eins zukommt. Der Satz: die Zahl ist eine Vielheit von Einheiten, bleibt richtig, ob wir den Namen Einheit in dem einen oder dem anderen Sinne nehmen.

Sind nun auch derartige Unterschiede dem Arithmetiker — und mit Recht — gleichgiltig, so dürfen sie es doch nicht für den Logiker sein. Indem der erstere, geleitet von gewissen Reflexionen, die Eins unter den Namen Zahl mitbefasst, ändert er auch ihren Begriff, weil jene Reflexionen den Inhalt desselben beeinflussen; so wird Eins ein aequivoker Name. Durch Uebersehen dieses Umstandes verfällt man leicht in Irrthümer. In der That liegt hier die Quelle für eine Art von falschen Argumentationen, denen man mitunter begegnet. Die Zahl, sagt man, kann nicht durch Hinzufügen von Einem zu Einem entstanden sein; denn nicht nur ist die Eins selbst eine Zahl, sondern wir bedürfen zur Bildung ihres Begriffes sogar der grösseren Zahlen. „Es entstehen die grösseren Zahlen nicht aus der Eins, sondern gerade umgekehrt die Eins aus der Mehrheit“. [1]) Damit hängt es auch zusammen, dass HERBART und manche, die ihm folgen, die gewöhnliche Auffassung, welche die Zahl aus Einheiten bestehend denkt, als eine vermeintlich falsche verwirft. Wir hätten also hier zugleich eine Argumentation gegen die alte Zahlendefinition, in welcher die letztere als ein ὕστερον πρότερον erklärt wird.

Die Argumentation wäre richtig, wenn Eins immer und überall die Zahl Eins bezeichnete; dies ist aber durchaus nicht der Fall. Sagen wir: die Zahl entstehe durch Hinzufügen von Einem zu Einem, oder sie bestehe aus Einheiten, dann bedeutet Eins und Einheit bloss das Correlativum zur Vielheit. In dieser Hinsicht geht aber weder die Vielheit der Einheit noch die Einheit der Vielheit voraus; sie entstehen beide zugleich.

Es ist übrigens zu bemerken, dass man der Sprache einigen Zwang anthut, wenn man mit HERBART, VOLKMANN [2]) u. A. den Namen Einheit in dem Sinne der Zahl Eins nimmt. Man spricht nicht von der Zahl Einheit; auf die Frage: wieviel Aepfel? erhält man nicht zur Antwort: Einheit, sondern: Einer, oder: ihre Zahl ist Eins. Daher bedeutet auch der Ausdruck ‚Vielheit von Einheiten' gemeiniglich

---

[1]) HERBART a. a. O. II, 162 (§ 116).

[2]) VOLKMANN, Psychologie II³, 114.

nicht dasselbe, wie ‚Vielheit von Zahlen Eins'. Beides identificiren heisst, dem Namen Einheit zu den vielen Aequivocationen, die er ohnehin besitzt, eine neue zutheilen, von welcher er im gewöhnlichen Sprachgebrauche noch frei ist.

Weitere Unterscheidungen betreffend Eins und Einheit.

Wir hatten bereits wiederholt Gelegenheit zu sehen, wie gross auf unserem Gebiete die Versuchung ist, sich durch Synonymien und Aequivocationen in die Irre führen zu lassen. Neue Beispiele hiefür werden die folgenden Betrachtungen liefern. Wir werden uns häufig in scheinbar sprachliche Untersuchungen verlieren müssen über die Bedeutungen von Namen, um Unklarheiten und Misdeutungen der uns interessirenden Begriffe ein Ende zu machen.

In einer solchen Lage befinden wir uns auch bei der Frage, die uns jetzt beschäftigen soll, nämlich der nach dem Verhältnisse der Begriffe, bzw. Namen Eins und Einheit. Manche Philosophen legen auf die Unterscheidung beider Gewicht, ohne dass jedoch über den Sinn derselben Einstimmigkeit herrschte. Leibniz [1]) fasst Einheit als Abstractum von Eins; „abstractum ab uno est unitas" sagt er, gleichwol gebraucht er noch in der Fortsetzung desselben Satzes den Plural unitates, während doch ein Abstractum des Plurals nicht fähig ist. Diese Pluralbildung ist auch sonst üblich. ‚Die Zahl ist eine Vielheit von Einheiten', ‚drei Einheiten mehr fünf Einheiten ergeben sieben Einheiten' u. s. w. Auf der anderen Seite wieder spricht man von dem Begriffe Eins und fasst so Eins als Namen für denselben Begriff wie den durch ‚Einheit' bezeichneten. Auch der Plural Einse ist gebräuchlich, was hier aus gleichen Gründen anstössig erscheinen könnte, und er bedeutet dann ebensoviel wie ‚Einheiten'.

---

[1]) Opp. phil. Erdm. S. 53 (De arte combinatoria).

Trotz dieser Verwirrung im Sprachgebrauch besteht die begriffliche Unterscheidung, welche LEIBNIZ durch Gegenübersetzung von Eins und Einheit markiren will, zu Recht. Eine allgemeinere Betrachtung wird auch für den hier vorliegenden Fall Aufklärung bieten. Diese Aequivocation der Namen Eins und Einheit (welche durch den Gebrauch der Pluralform deutlich wurde) ist nämlich eine Erscheinung, welche sich in ganz analoger Weise bei allen abstracten Namen findet.

Jeder abstracte Name wird in einer zweifachen Bedeutung gebraucht; das eine Mal dient er als Name für den abstracten Begriff als solchen, das andere Mal als Name für irgend einen unter diesen Begriff fallenden Gegenstand, er bezeichnet das Concrete unter Vermittlung des in demselben enthaltenenen oder darauf bezogenen Abstracten. Die Sprache operirt vielfach mit abstracten Namen und verwendet sie zur Bezeichnung concreter Dinge und Vorgänge. Dies wird dadurch möglich, dass sie die abstracten Namen als allgemeine verwendet, und dann durch die Verbindung mehrerer, sich gegenseitig in ihrer Allgemeinheit einschränkender Namen das Concrete aussondert.

So kann z. B. ‚Farbe' den logischen Theil, welcher der Röte, Bläue etc. gemein ist, für sich bedeuten. Sprechen wir aber von ‚Farben', von ‚dieser Farbe' und ‚jener Farbe' etc., dann ist Farbe ein allgemeiner Name für jede einzelne Farbenspecies als solche. Um diese Verwendungsweise des Namens schärfer zu markiren, sagen wir statt ‚Farbe' ‚eine Farbe', ‚eine gewisse Farbe' u. s. w., während wir, wo das Abstractum gemeint ist, betonen: der abstracte Begriff Farbe (oder kurzweg der Begriff Farbe). Im Plural entfällt begreiflicherweise die Notwendigkeit solcher Zusätze, da dann eo ipso nur die Begriffsgegenstände gemeint sein können. ‚Farben' kann nichts anderes heissen als ‚gewisse Farben'.

Was wir an diesem Beispiele erläutert haben, gilt ganz allgemein. Den practischen Bedürfnissen entsprechend fungiren die meisten Namen gewöhnlich als allgemeine. Concreten Dingen und Verhältnissen ist das Interesse vorzugsweise zugewendet. Indessen fehlt es doch nicht in Leben und Wissenschaft an Veranlassungen, das Abstracte als solches zu betrachten, und demgemäss hat auch die Sprache Vorsorge für deren markirte Bezeichnung getroffen, wobei der allgemeine Name verwendet und bloss durch determinirende Ausdrücke, durch Hinzufügung synkategorematischer Zeichen etc. modificirt wurde. Besonders dienten auch Endungen wie ‚schaft' (Vater — Vaterschaft) oder ‚heit' (Mensch — Menschheit) zur Bezeichnung der den allgemeinen Vorstellungen entsprechenden abstracten Beschaffenheiten. Natürlich war der betreffende abstracte Begriff bereits gebildet, als der allgemeine Name entstand; aber er war nur Gegenstand des Interesses, insofern die und die Objecte ihn als Merkmal enthielten. Das Interesse für das Abstractum für sich kann also sehr wol erst später entstanden sein und zu einer besonderen Benennung desselben Anlass gegeben haben.

Unsere Darstellung könnte ein gewisses Bedenken aufregen: sie gieng aus von den abstracten Namen und zeigte, wie sie als allgemeine verwendet werden, wobei zur Markirung dieser Verwendung häufig der sprachliche Ausdruck des abstracten Namens sich ändere; sie gieng dann über zu den allgemeinen Namen und zeigte, wie aus diesen durch gewisse sprachliche Aenderungen abstracte gebildet werden, wobei überdies betont wurde, dass die allgemeinen Namen, als den gewöhnlichen Zwecken des Denkens und Sprechens am nächsten stehend, wol einer früheren Entwicklungsstufe angehören dürften. Wenn also aus den allgemeinen Namen die abstracten allererst entstehen, wie sollen wiederum aus den abstracten die allgemeinen gebildet werden?

Das wäre freilich ein offenbarer Cirkel, wenn die zuletzt genannte zweite Stufe eine blosse Umkehrung der ersten wäre.

So ist natürlich nicht unsere Meinung. Nachdem aus den ursprünglich gegebenen allgemeinen Namen gewisse abstracte gebildet wurden, sollen aus diesen nicht etwa wiederum dieselben allgemeinen, sondern eben andere gebildet werden. Das Adjectivum rot fungirt als allgemeiner Name aller roten Dinge. Daraus entspringt der abstracte Name Röte (das Rot), welcher dann wieder als allgemeiner Name für verschiedene Differenzen des Rot: Carmoisinrot, Zinnoberrot etc. dient.

Die oben erwähnten sprachlichen Vorsorgen zur deutlichen Unterscheidung der aus den allgemeinen Namen zu bildenden abstracten (z. B. gefällig — Gefälligkeit, Freund — Freundschaft) erwiesen sich aber nicht als ausreichend. Dem vorherrschenden Zuge unseres Denkens gemäss wurden diese ausdrücklich als Namen für Abstracta gebildeten Formen doch wieder als allgemeine Namen verwendet, und so entstanden erst recht wieder aequivoke Namen.[1]) Man sprach z. B. im Plural von Gefälligkeiten, Freundschaften u. s. w.

Dieser Fall liegt nun auch bei den Namen Eins und Einheit vor. Ursprünglich war jedenfalls Eins ein concretallgemeiner Name, begründet auf den Einheit benannten Begriff. Als aber der Name Einheit immer mehr als allgemeiner misbraucht wurde, da mochte es kommen, dass Mancher, das Bedürfniss nach Bezeichnung des Abstractums empfindend, nun gerade nach dem parallelgehenden Ausdruck Eins griff, so dass auch dieser aequivok wurde.

Wir wollen von diesem Gesichtspunkte aus auch die Unterschiede der Namen Vielheit, Mehrheit, Menge, Inbegriff,

[1]) Nach diesen Ausführungen möchte es scheinen, als ob die Eintheilung der Namen in abstracte und allgemeine, auf die z. B. MILL (Logik I. Buch, 2. Cap. § 4) so grosses Gewicht legt, eine nutzlose, weil undurchführbare sei. Definiren wir jedoch den abstracten Namen als Namen eines abstracten Begriffs, den allgemeinen aber als Namen der bezüglichen Begriffsgegenstände, dann ist in jedem Falle aus dem Sinne der Rede sofort zu entscheiden, ob ein Name als abstracter oder allgemeiner gebraucht werde, trotz seiner Aequivocation.

Aggregat, Sammlung u. s. f. erläutern. Ein Theil dieser Namen (wie die drei letzteren) wird fast ausschliesslich in distributiver Weise angewendet; man hat, wenn man sie ausspricht, immer concrete Phaenomene im Auge; der abstracte Begriff, der ihnen zu Grunde liegt, ist nicht der Gegenstand des besonderen Interesses; er dient bloss als vermittelnder Gedanke, als allgemeines Zeichen für das unter ihn fallende Besondere. Anders bei den Namen Anzahl, Vielheit und Mehrheit, welche ebenderselbe Begriff fundirt. Zwar werden auch sie häufiger als allgemeine Namen gebraucht, aber daneben auch als Namen für den Begriff selbst, wozu sie zum Theil durch ihre sprachliche Form prädestinirt sind. Bei dem Namen Anzahl complicirt sich die Sache noch dadurch, dass er nicht bloss als allgemeiner Name für irgend welche concrete Mengen, sondern auch als allgemeiner Name für jede der unter den Begriff der Anzahl fallenden besonderen Zahlen: Zwei, Drei, Vier . . . dient.[1])

Alle diese verschiedenen Verwendungsweisen gleicher Namen müssen hier, wie sonst, gut auseinander gehalten werden; dann verschwinden von selbst manche der Scheinschwierigkeiten, die man in unseren Begriffen gefunden hat.

Gleichheit und Verschiedenheit der Einheiten.

Viel erheblicher sind die Schwierigkeiten, welche sich an die Frage knüpfen, in welcher Weise Vorstellungen der Gleichheit und Verschiedenheit an der Bildung der Begriffe Einheit und Zahl betheiligt sind, und in wieweit sie in den Inhalt derselben explicite eintreten.

Die Gleichheit der Einheiten wurde schon in früherer Zeit nachdrücklich betont. So sagt HOBBES:[2]) „Die Zahl, absolut gesagt, setzt in der Mathematik unter sich gleiche

[1]) Dies war mit ein Motiv, welches uns veranlasste, da, wo wir im Kreise der concreten Phaenomene verweilten, die Namen Inbegriff oder Menge, da, wo wir zum Allgemeinbegriff übergiengen, die Namen Vielheit etc. zu bevorzugen. (Vgl. auch Anm. S. 102.)

[2]) BAUMANN, Die Lehren von Raum, Zeit etc. I, 242.

Einheiten voraus, aus denen sie hergestellt wird". Wir sehen, hier wird die Gleichheit der Einheiten als eine besondere Voraussetzung der Mathematik hingestellt. Und dieselbe Ansicht wird von vielen Anderen, z. B. von J. St. Mill, Jevons, Delboef, Kroman u. s. w. ausgesprochen. Die Forscher, welche die Gleichheit der Einheiten hervorgehoben haben, bilden überhaupt zwei Gruppen. Die Einen (wie die eben Genannten) stellen die Gleichheit der Einheiten als eine Forderung oder Voraussetzung auf, die Anderen behaupten sie, ohne sie zu fordern. Zu den Letzteren gehört Locke. Da nach ihm jeder Inhalt, welcher es auch sei, stets die einfache Idee der Einheit mit sich führt und die Zahl durch Wiederholung dieser einfachen Idee entsteht, so braucht er natürlich die Gleichheit der Einheiten nicht erst zu fordern. Was die Forscher der ersteren Gruppe anlangt, so meinen sie entweder mit Hobbes, Mill u. A., es sei die Gleichheit der Einheiten bloss für die Zwecke des Rechnens und für die Anwendung der Arithmetik eine notwendige Hypothese; oder sie meinen, dass die gezählten Gegenstände als solche in irgend einer Hinsicht einander gleich sein müssten, um überhaupt zählbar zu sein.

Letzteres ist auch die Meinung Herbart's. „Man besinne sich nur zuvörderst, dass beim Zählen allemal Etwas vorhanden ist, welches gezählt wird; und dass die Vorstellung von diesem Etwas immer gleichartig bleiben muss, indem bekanntlich ungleichartige Dinge, z. B. Federn, Papierbogen, Siegellackstangen, sich nicht zusammenzählen lassen, es sei denn, dass man sie als gleichartig (durch den allgemeinen Begriff der Schreibmaterialien) auffasse. Jede Zahl nun bezieht sich auf solche Weise auf einen allgemeinen Begriff des Gezählten; dieser Begriff aber kann ganz unbestimmt bleiben, indem für die Zahlbestimmung es gänzlich gleichgiltig ist, was man zähle". [1])

[1]) a. a. O. II, § 116 S. 160. In gleichem Sinne lehrt Ueberweg,

Indessen andere Philosophen fanden dies so wenig bekannt und selbstverständlich, dass sie vielmehr das gerade Gegentheil behaupteten. So LEIBNIZ, wenn er betont, dass die Zahl „gewissermassen eine unkörperliche Figur sei, entstanden durch die Vereinigung irgend welcher Dinge, z. B. Gottes, eines Engels, eines Menschen, der Bewegung, welche zusammen vier sind“. (Vgl. S. 11.) Ferner JEVONS, welcher sogar die These vertritt: Zahl sei bloss ein anderer Name für Verschiedenheit. [1])

FREGE widmet in seinen „Grundlagen“ der Frage nach dem Verhältnisse, in dem Gleichheit und Verschiedenheit zum Zahlbegriffe beitragen, ausgedehnte Erörterungen. „Wir stehen demnach,“ so fasst er sein Ergebniss zusammen, „vor folgender Schwierigkeit: Wenn wir die Zahl durch Zusammenfassung von verschiedenen Gegenständen entstehen lassen wollen, so erhalten wir eine Anhäufung, in der die Gegenstände mit eben den Eigenschaften enthalten sind, durch die sie sich unterscheiden, und das ist nicht die Zahl. Wenn wir die Zahl andererseits durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fliesst dies immerfort in eins zusammen, und wir kommen nie zur Vielheit“. „Wenn wir mit 1 jeden der zu zählenden Gegenstände bezeichnen, so ist das ein Fehler, weil Verschiedenes dasselbe Zeichen erhält. Versehen wir die 1 mit unterscheidenden Strichen, so wird sie für die Arithmetik unbrauchbar“. [2])

Wie lösen sich nach unserer Theorie diese Schwierigkeiten?

Was die Rolle anbelangt, welche Unterschiedsvorstel-

Logik 5. Aufl. S. 129: „Nur auf Grund der Begriffsbildung können die Numeralia verstanden werden, welche die Subsumption gleichartiger Objecte unter den nämlichen Begriff voraussetzen“ (vgl. auch ebendaselbst S. 141).

[1]) Vgl. das Citat S. 51.

[2]) a. a. O. S. 50.

lungen bei der Abstraction des Zahlbegriffes spielen, so haben wir dieselbe in unseren früheren Untersuchungen (S. 49—67) ausführlich charakterisirt. Zu einem Inbegriffe kann evidenter Weise nur verbunden werden, was verschieden ist; aber in der Vorstellung des Inbegriffs ist nichts von Unterschiedsrelationen vorhanden. Die Elemente des Inbegriffs sind in unserer Vorstellung da als das, was sie sind, und werden hiezu nicht erst durch Unterscheidung. Es bedarf nicht erst einer besonderen unterscheidenden Thätigkeit, damit sie nicht in Eins zusammenfliessen. Nur wenn es sich um sehr ähnliche Inhalte handelt, üben wir Unterscheidung, um der Gefahr der Verwechslung vorzubeugen, d. h. wir achten auf die Merkmale, in welchen Unterschiedenheit stattfindet. Was den Zahlbegriff anbetrifft, so entsteht er aus Inbegriffen in einer Weise, dass auch er, principiell betrachtet, besondere Unterscheidungen nicht benötigt. Das Zählen, d. i. der successive Process, durch welchen wir die Zahl einer Menge ermitteln, bedarf im Allgemeinen nur der Unterschiedenheit der zu zählenden Gegenstände, nicht aber ihrer Unterscheidung. Eine Ausnahme tritt nur ein bei der Zählung leicht zu verwechselnder Inhalte: wir müssen dann achtsam sein auf Auslassungen und Doppelzählungen.

Schwieriger ist es die Rolle, welche den Gleichheitsrelationen bei der Zahlvorstellung zugetheilt ist, psychologisch correct zu charakterisiren.

Welcher Auffassung betreffs der Entstehung des Zahlbegriffs man auch huldigen möge, die Gleichheit der Einheiten ist eine Thatsache, welche nicht zu läugnen ist. Der scheinbare Widerspruch mancher Forscher wird uns nicht irre machen über das, was schliesslich ihre eigentliche Meinung sein musste. Wo man die Gleichheit der Einheiten läugnete, da meinte man die Gleichheit der zu zählenden Gegenstände, und es fragt sich nun, wie die völlige Gleichheit der Einheiten in der Zahl verträglich sein soll mit der

Verschiedenheit, ja eventuell unvergleichbaren Verschiedenheit der gezählten Gegenstände, welche jene Forscher im Auge hatten. Freilich behaupten im Gegensatz dazu viele, wie z. B. HERBART (vgl. die obigen Citate), ungleichartige Dinge liessen sich nicht zusammenzählen; immer müssten verschiedene Dinge, sollen sie zählbar werden, erst unter einen gemeinsamen Gattungsbegriff gebracht sein.

Eine leichte Unterscheidung wird zeigen, dass in gewissem Sinne beide Parteien Recht haben. Rechnen wir zum Inhalte einer Vorstellung nur Theilvorstellungen im eigentlichen und strengen Sinne („innere Merkmale“ nannten sie manche Logiker) und betrachten demgemäss Vorstellungen nur dann als vergleichbar, wenn sie gemeinsame Theilinhalte dieser Art besitzen, dann giebt es unendlich viele disparate und unvergleichbare Vorstellungen, und es ist klar, dass dann die Zählung Vergleichbarkeit (in dieser Bedeutung) nicht verlangt, da vielmehr ganz disparate Dinge zusammengezählt werden können. Meine Seele und ein Dreieck sind zwei, obgleich sie keinerlei gemeinsame innere Merkmale besitzen. Rechnen wir jedoch zum Inhalte einer Vorstellung auch alle ihr zukommenden negativen und relativen Bestimmungen (die „äusseren Merkmale“), dann giebt es überhaupt keine unvergleichbaren Vorstellungen; denn es giebt keine, die nicht mindestens als unter den Begriff Etwas fallende, gleichartig sind. Und gerade diese Subsumption unter den Begriff Etwas müssen wir (nach unserer Theorie) hinsichtlich eines jeden der zu zählenden Gegenstände vollziehen, um die Zahl zu erfassen. Insofern ist es also richtig, dass die zu zählenden Dinge unter einen gemeinsamen Gattungsbegriff (dies Wort freilich im äusserlichsten Sinne genommen) gebracht werden müssen.

Indessen die Meinung der Philosophen, welche die Zahl auf Gleichheit gründen, geht denn doch viel weiter, als wir es billigen können. Nach unserer Ansicht erwächst die Vorstellung der Zahl einer bestimmten Menge nicht dadurch, dass wir die Gegenstände, die in derselben befasst sind, mit einander vergleichen und sie unter den durch diese Vergleichung hervortretenden Gattungsbegriff (Pferd, Apfel, Ton, Bleistift) subsumiren; sondern vielmehr dadurch, dass wir sie — was auch immer wir zählen mögen — stets unter denselben Begriff, den des Etwas bringen, gleichzeitig die unter Vermittlung dieses Begriffs gedachten und im Hinblick auf ihn gleich bezeichneten Gegenstände collectivisch zusammenfassend. So entsteht die allgemeine Vielheitsform Eins und Eins und . . . Eins, unter welche die concret vorliegende Vielheit fällt, d. h. die ihr zugehörige Zahl. Nach jener weitverbreiteten Ansicht erforderte jede Zählung vorgängige oder gleichzeitige Vergleichungen, und es giengen Gleichheitsrelationen in den Begriff der Zahl wesentlich ein. Nach der unserigen ist keines von Beiden der Fall. Diejenige Abstraction (oder besser Reflexion), welche wir an den Gliedern einer Menge vornehmen müssen, um zur Zahl zu gelangen, bewirkt eo ipso, als Folge die Gleichheit der Einheiten. Aber weder hat sie selbst irgend etwas mit Vergleichungen zu thun, noch gehen in die Vorstellung der Zahl die Gleichheitsrelationen zwischen den Einheiten als explicite Bestandtheile notwendig ein. Sie sind so weit entfernt davon, wesentliche psychologische Factoren der Zahlvorstellung zu bilden, dass sie in vielen Fällen überhaupt nicht zur Beachtung kommen.

Da ich hier mit der Mehrzahl der Forscher in Widerspruch treten muss und es sich um eine etwas subtile Frage handelt, so will ich in die Kritik näher eingehen.

In welcher Weise, frage ich zunächst, soll die Gleichheit der zu zählenden Gegenstände in Beziehung auf irgend einen Gattungsbegriff zum Zustandekommen der Zahlenabstraction beitragen? Wir zählen jetzt Aepfel; dann ist Apfel der Gattungsbegriff. Hierauf zählen wir Pferde; nun ist Pferd der Gattungsbegriff. Also auf den besonderen Gattungsbegriff, der jeweilig vorhanden ist, kann es nicht ankommen. Wir können folglich die Sache einfach so fassen: die Zahlen entstehen durch Abstraction von Mengen, deren Glieder in irgend einer Hinsicht als unter einander gleich vorgestellt werden. ‚Mengen unter einander gleicher Dinge' — in abstracto gedacht — das sind ‚Zahlen'.

Unsere früheren Untersuchungen bieten uns alle Hilfsmittel, um die psychologischen Grundlagen des hier in Betracht kommenden Abstractionsprocesses aufzudecken. Man sieht alsbald, dass die Fundamentalrelation, welche die Relationscomplexe, die hier vorliegen, zu einheitlichen Vorstellungen, zu Ganzen macht, die Gleichheit nicht sein kann, sondern nur die collective Verbindung. Zwei Aepfel, das heisst nicht ein Apfel gleich einem andern Apfel, sondern ein Apfel und ein Apfel; und so auch allgemein. Nicht 1 = 1 ist 2, sondern 1 und 1 ist 2 u. s. f.

Ist dies aber zugestanden, dann ist es offenbar, dass die Abstraction des Allgemeinbegriffs, welcher nur Mengen unter einander gleicher Gegenstände umfasst, bis auf eine Modification, genau denselben Process darstellt, welcher uns auch den Allgemeinbegriff, unter welchen Mengen ganz beliebiger Gegenstände fallen, lieferte. Alle unsere Entwicklungen blieben bestehen, wofern nur überall an gehöriger Stelle eine gewisse Ergänzung eingeschaltet würde. In der That, gehen wir von concreten Mengen unter einander gleicher Inhalte aus, wovon müssten wir abstrahiren und was festhalten, damit der gesuchte Allgemeinbegriff resultire? Wieder sieht man ein, dass von den Inhalten nichts übrig behalten werden kann, als das äussere Merkmal, dass sie Inhalte sind; der leere Begriff ‚Etwas' oder ‚ein Ding' muss also auch hier vermitteln.

Aber neben diesem Begriffe und dem Begriffe der collectiven Verbindung, welche nach unserer Ansicht allein den Zahlbegriff constituiren, müsste hier noch der Begriff der Gleichheit beschränkend hinzutreten. Nicht wäre ‚Etwas und

Etwas' oder ,ein Ding und ein Ding' die sprachliche Explication des Begriffes Zwei; sondern: ein Ding und ein ihm gleiches Ding. Ebenso hiesse Drei soviel als: ,Ein Ding und ein Ding und ein Ding — welche einander gleich sind' u. s. f. Man sieht, dass es für unsere Theorie ein Leichtes wäre, sich den hier gestellten Anforderungen anzupassen, während andererseits die Ansicht, die wir bekämpfen, soll sie überhaupt möglich und consequent durchführbar werden, ganz den Weg einschlagen müsste, den wir in den vorangegangenen Untersuchungen vorgezeichnet haben. Die gegnerische Lehre, auf solche Weise modificirt und folgerichtig ausgestaltet, käme in die nächste Verwandtschaft mit der unsrigen; sie unterschiede sich von ihr nur durch jene beschränkenden Zusätze, vermöge deren die Gleichheit der Einheiten als eine besondere Forderung unseren Begriffsbildungen hinzugefügt würde.

Alles wol erwogen, kann ich doch die Triftigkeit dieser Zusätze nicht zugestehen. Der Grundgedanke, dem sie Ausdruck geben, dass nämlich nur solche Inhalte zusammenzählbar sein sollen, welche nach irgend einer Hinsicht als gleiche vorgestellt werden, ist sicher unrichtig. Auf die Frage: wieviel ist Jupiter, ein Widerspruch und ein Engel? antworten wir sofort: drei. Fällt es uns aber bei, erst nachzudenken, ob diese Inhalte in irgend einer Beziehung gleich seien? Stellen wir zuerst vor: Jupiter, ein Engel und ein Widerspruch sind bloss insofern einander gleich, als ein jeder irgend Etwas ist? oder vergleichen wir im Zählen schrittweise? Nichts von alledem kann ich bemerken. Wir zählen einfach: Jupiter ist Eins, und ein Widerspruch ist Eins, das giebt Eins und Eins, und der Engel ist Eins, das giebt Eins und Eins und Eins — also drei.

Natürlich sind die Einheiten einander gleich; aber diese ihre Gleichheiten sind ein Erfolg der Zahlenabstraction, nicht ihre Grundlage und Voraussetzung; sie entstehen nicht durch vorgängige Vergleichung, sondern durch jene absolute Inhaltsentschränkung, welche die Zahlenabstraction unter allen Umständen erfordert, selbst dann, wenn verglichene und als gleich vorgestellte Inhalte gezählt werden.

Gewiss, ein Apfel und ein Apfel sind zwei Aepfel, weil jeder ein Apfel ist. Warum aber sind sie überhaupt zwei? Nicht weil der eine Vorstellungsinhalt dem anderen als Apfel oder in irgend einer anderen bestimmten Hinsicht gleich ist, sondern weil ein jeder Eins oder Etwas ist. Zwei Aepfel, zwei Menschen, ein Apfel und ein Mensch, u. s. w. sind sämmtlich zwei, weil sie concrete Inbegriffe repräsentiren, welche durch das Zählungsverfahren gerade unter die abstracte Mengenform: Eins und Eins fallen und unter keine andere.

Ich glaube also, dass Vorstellungen der Gleichheit zur Zahlenabstraction ebensowenig beitragen als Vorstellungen der Verschiedenheit. Das Vergleichen und Unterscheiden, das Colligiren (die Einigung von concreten Inhalten zu Inbegriffen), sowie das Zählen (die Abstraction der allgemeinen Inbegriffsformen) sind wolunterschiedene Geistesthätigkeiten, welche auseinandergehalten werden müssen. Natürlich giebt es genug der Anlässe, wo alle diese Thätigkeiten zusammen wirken, so z. B. wenn wir aus einem Haufen von Geldsorten die Goldmünzen herauszählen.

Was jene zusammengesetzten Gleichheitsformen anlangt, welche nach der hier bestrittenen Ansicht die Zahlbegriffe selbst wären, so läugne ich gar nicht, dass sie ganz berechtigte Begriffsbildungen repräsentiren, von denen wir auch häufig genug Gebrauch machen; nur läugne ich, dass sie mit den Zahlbegriffen in deren voller Allgemeinheit identisch sind. Darum besitzen sie auch nicht besondere Namen, welche nach der Bildung und Benennung der wahren Zahlbegriffe überflüssig wären. Es genügt, um jene Reihe von Begriffen abstract auszudrücken, einfach das Attribut der Gleichheit hinzuzufügen; und so verfahren wir denn auch, indem wir sagen: zwei gleiche Dinge, drei gleiche Dinge, vier gleiche Dinge u. s. w. In solcher Weise bilden überhaupt die Zahlen als die allgemeinsten Inbegriffsformen wichtige Hilfsmittel für das combinirende und diese seine Combinationen zum sprachlichen Ausdruck bringende Denken. So sagen wir z. B. ein Ganzes von drei Theilen, von denen der eine die Beschaffenheit x, der zweite die Beschaffenheit y, u. s. w. besitzt. Es entsteht zunächst die leere Inbegriffsform: Etwas und Etwas und Etwas, und nun wird individualisirt und die leere Form mit concretem Inhalt erfüllt.

Eine ganz andere Frage ist die, ob nicht jene beschränkteren Begriffsbildungen historisch und psychologisch die früheren waren; ob also nicht die Zahlen ursprünglich durch Abstraction von Mengen unter einander gleicher Gegenstände entstanden sind. In der That lernen auch die Kinder an gleichartigen, und specieller sogar an physischen Dingen, wie Kugeln, Marken u. s. w. das Zählen. Und es ist sicher, die nächstliegenden und die bei Weitem häufigsten Anlässe für die Bildung der Zahlbegriffe finden sich bei Mengen unter einander gleicher Dinge. An sie knüpfen sich für unser Urtheilsleben sowol, als auch für unser Gefühlsleben die wesentlichsten Interessen. Dasselbe galt nun nicht minder für jene niedrigere Entwicklungsstufe der Menschheit, in welche die Bildung der ersten und elementarsten Abstractionen und die Entstehung der Sprache fiel. Indem gleiche Dinge durch denselben Namen bezeichnet wurden, war man, um Inbegriffe gleicher Dinge zu benennen und so für den sprachlichen Verkehr, wie für das eigene Denken zu fixiren, genötigt, je nach Umständen grössere oder kleinere Inbegriffe der wiederholten Namen zu bilden; also A und A; A und A und A; A und A und A und A; u. s. w.; eine allzu umständliche Ausdrucksweise. Um ihr zu entgehen, lag es nahe, die Vielheitsformen mit Hilfe eines unbestimmten und auf jeden Inhalt passenden Begriffs und Namens (Etwas, ein Ding, Eins) zu fixiren und für sie besondere Namen einzuführen (Zwei für: ein Ding und ein Ding; u. s. w.). Die ungeheure Abkürzung für den Ausdruck liegt zu Tage. Statt A und A und A und A konnte man nun sagen: vier A, d. h. man verband das Zeichen für Eins und Eins und Eins und Eins mit dem gemeinsamen Namen dessen, was hier den Inhalt des Eins (oder Etwas) bildete. Hiemit war dem vorwiegenden Interesse Genüge geleistet, denn die Zahl und der gemeinsame Gattungsbegriff sagt Alles aus, was uns in der Regel an einer Menge interessirt. [1])

Indem wir dies Alles zugestehen, kommen wir keineswegs in Widerstreit mit unseren Principien. Die Einschränkung, mit welcher die Zahlbegriffe im Leben der Völker sowol als der Individuen ursprünglich auftreten, beweist hier so wenig wie bei anderen Begriffen die wissenschaftliche oder selbst nur die practische Berechtigung dieser Einschränkung.

Wir wollen nun noch einige Worte den Schwierigkeiten zuwenden, welche Frege in der oben citirten Stelle darin gefunden hat, dass nicht nur Gleichheit sondern auch Verschiedenheit den Einheiten zugeschrieben wird. „Wenn wir die Zahl durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fliesst dies immerfort in eins zusammen und wir kommen nie zur Mehrheit." Hier wird Gleichheit mit Identität verwechselt. Jede anschauliche Vorstellung einer Menge gleicher Gegenstände demonstrirt ad oculos, dass Gleichheit und Verschiedenheit in keinerlei Widerspruch stehen und sehr wol in einem zusammenfassenden Denken gegeben sein können. In gewisser Hinsicht findet eben Gleichheit, in einer anderen Verschiedenheit statt, und je nach Umständen kann

[1]) Daher kommt es auch, dass die allgemeinen Namen, welche sich auf die Begriffe Vielheit und Zahl stützen (z. B. Menge), meistens die Gleichheit der zusammengefassten Gegenstände nebenbei mitbezeichnen. Am wenigsten ist dies noch der Fall beim Namen Inbegriff, der auch in dieser Beziehung einen gewissen Vorzug besitzt.

die Aufmerksamkeit bald vorzugsweise den gleichen, bald den verschiedenen Bestimmungen zugewendet sein. Nur wenn der Ausdruck ‚Zusammenfassung von Gleichem', womit man die Entstehung der Zahl beschreiben will, absolute Gleichheit verlangte — was FREGE fälschlich supponirt — dann läge hier eine Schwierigkeit, oder besser eine Unmöglichkeit vor.

„Wenn wir mit 1 jeden der zu zählenden Gegenstände bezeichnen, so ist das ein Fehler, weil Verschiedenheit dasselbe Zeichen erhält." Indessen diesen Fehler begehen wir mit jeder Anwendung allgemeiner Namen. Wenn wir Hans, Kunz etc. jeden einen Menschen nennen, so ist dies derselbe Fall wie die „fehlerhafte Schreibung", vermöge welcher wir bei der Zählung für jeden zu zählenden Gegenstand 1 schreiben. 1 ist eben das allgemeine Schriftzeichen, welches in dem Begriff der Einheit sein Fundament hat.

Noch in einer anderen Hinsicht (wie wir S. 155 erwähnten) wird die Gleichheit der Einheiten von Manchen betont; nämlich als eine Voraussetzung der Arithmetik. Besonders entschieden drücken diesen Gedanken J. ST. MILL und DELBOEF aus: „In allen Sätzen über Zahlen," erklärt der Erstere, „ist eine Bedingung vorausgesetzt, ohne die kein einziger von ihnen wahr wäre, und diese Bedingung ist eine Voraussetzung, die falsch sein kann. Die Bedingung ist die, dass $1 = 1$ ist, dass alle Zahlen Zahlen von denselben oder gleichen Einheiten sind. . . Wie können wir wissen, dass ein Pfund und ein Pfund zwei Pfund ausmachen, wenn das eine von den Pfunden Markgewicht und das andere Kramergewicht sein mag." [1]) Und DELBOEF statuirt: L'égalité des unités, telle est l'hypothèse fondamentale de l'arithmetique." [2])

---

[1]) MILL, Logik. Buch II. Cap. VI. § 3. Vgl. auch JEVONS, The principles of science. S. 159. Ferner die unten folgenden Citate aus Kroman, „Unsere Naturerkenntniss". — Die Ansicht ist übrigens auch unter Mathematikern viel verbreitet.

[2]) Logique Algorithmique. Liège 1877 (auch im I. Bd. der Revue

Weniges wird zur Widerlegung dieser irrigen Ansicht nötig sein. Den Satz $1 = 1$ eine arithmetische Voraussetzung zu nennen, heisst den Sinn der Arithmetik gänzlich verkennen. Die Arithmetik als Anzahlenlehre hat es nicht mit concreten Objecten zu thun, sondern mit den Anzahlen im Allgemeinen. Es ist wol richtig, dass die gewöhnlichen Anwendungen der Arithmetik sich beziehen auf Zahlverhältnisse von Vielheiten unter einander gleicher Objecte, ein Fall, auf welchen die Quantitätsverhältnisse auf dem Wege der Messung reducirt werden. Bei einer solchen Anwendung besteht gewiss die Voraussetzung, dass bei der betreffenden directen oder indirecten Zählung nur solche Gegenstände mitgezählt, somit als Einheiten in Rechnung gezogen werden, die das betreffende Gleichheitsmoment wirklich und genau so, wie verlangt ist, besitzen. Dies ist aber doch nicht eine Voraussetzung der Arithmetik, sondern der concreten Aufgabe, zu deren Lösung uns die Arithmetik dienen soll; diese letztere tritt erst in Action, sobald Alles in Zahlen ausgedrückt ist. Woher die Zahlen stammen, auf welche Aufgaben sie Anwendung finden und unter welchen Voraussetzungen — all das hat mit der Arithmetik nichts zu schaffen.

Weitere Misverständnisse.

Wie weit die Misverständnisse bezüglich des Wesens der Einheiten reichen konnten, spiegelt sich am auffallendsten in den eigenthümlichen Anforderungen wieder, die häufig an diese Begriffe gestellt worden sind, und die meistentheils mit der misverständlichen Forderung der Gleichheit innig zusammenhängen. Beispielsweise sei hier eine Stelle aus KROMAN's Werke „Unsere Naturerkenntniss“ angeführt. „Es ist,“ sagt

---

Philosophique erschienen) S. 33. DELBOEF steht auch sonst MILL nahe. Einige Zeilen weiter heisst es „Le nombre est l'expression scientifique de l'idée sensible de pluralité.“

dieser Autor, „keineswegs unsere Meinung zu läugnen, dass die Zahl eine Abstraction von der Wirklichkeit sei; wir halten es im Gegentheil für sicher genug, dass der Mensch durch Betrachtung verschiedener Mengen von gleichartigen Naturgegenständen allmälig seine Zahlvorstellungen gebildet und die natürliche Zahlenreihe gebaut hat. Aber eben die Abstraction von allem Uebrigen in diesen Mengen mit Ausnahme der Anzahl ihrer Theile, die Verwandlung der Theile in die vollkommen gleichartigen, gleichgrossen, constanten, von Zeit und Raum, Wärme und Kälte u. s. w. durchaus unabhängigen Einheiten, gerade dies macht die Zahl zu einem selbstgeschaffenen Object, einem Phantasieobject. Ebenso wie es sicher keine ganz geraden Linien, keine vollkommenen Kreise u. s. w. giebt, so giebt es sicher auch keine vollkommen gleichartigen und gleichgrossen Einheiten, und jedenfalls werden wir es nie erfahren können. Die arithmetischen Einheiten haben indessen diese Eigenschaften zufolge der Definition, zufolge des Beschlusses der Mathematiker.“ [1])

Diese von Grund aus irrige Auffassung hat ihre Quelle theils in einer unzureichenden Psychologie, theils darin, dass Kroman nur an die geometrischen und physikalischen Anwendungen der Zahlen dachte, als er die citirten Sätze niederschrieb. Es ist derselbe Irrthum, den wir oben bei Mill rügen mussten, und der überhaupt die Logik der Arithmetik in der extrem empiristischen Schule verfälscht. Wir müssen darum auch die weitgehenden erkenntniss-theoretischen Folgerungen, die an jene Auffassung geknüpft werden, ganz und gar ablehnen. Da die Zahl ein „selbstgeschaffenes Object“, „ein Phantasieobject“ sei, welches nur eine „grobe Annäherung“ zur Wirklichkeit darbiete, so bestehe auch die ganze Sicherheit der Arithmetik in ihrer groben Annäherung,

---

1) Kroman, Unsere Naturerkenntniss. Kopenhagen 1883. S. 104—105. Kroman ist durch A. Lange's Ansichten (vgl. d. II. Cap. d. W.) wesentlich beeinflusst.

ein Umstand, welcher nach KROMAN zugleich die Allgemeingiltigkeit ihrer Lehrsätze verbürgen soll.

Die Gleichheit der Einheiten, wie sie aus unserer psychologischen Theorie resultirt, ist evidentermassen eine absolute. Ja der blosse Gedanke einer Annäherung ist schon absurd. Denn es handelt sich um die Gleichheit von Inhalten in Beziehung darauf, dass sie Inhalte sind. Diese Gleichheit läugnen, heisst daher die Evidenz der inneren Wahrnehmung läugnen.

Nachdem wir soeben die Constanz der Einheiten, ihre Unabhängigkeit von Raum und Zeit, Wärme und Kälte u. s. w. betonen hörten, werden wir durch weitere Anforderungen, die von anderen Seiten erhoben werden, nicht mehr sehr überrascht sein. So wurde häufig, in alter und neuer Zeit, auf die strenge Abgeschlossenheit, Ungetheiltheit oder Untheilbarkeit der Einheiten besonderes Gewicht gelegt.[1]) Von historischen Namen seien hier bloss LOCKE,[2]) HUME,[3]) HERBART genannt. Als bequeme Unterlage für die kritische Aufklärung der hier obwaltenden Misverständnisse mögen einige Sätze von BAUMANN[4]) dienen. „Was wir als Punkt setzen oder nicht mehr als getheilt setzen wollen, das sehen wir als Eines an, aber jedes Eins der äusseren Anschauung, der reinen und empirischen, können wir auch als ein Vieles ansehen. Jede Vorstellung ist Eine, wenn abgegrenzt gegen eine andere Vorstellung; aber in sich kann sie wieder in ein Vieles unterschieden werden.“ — „Das Rechnen und die Zahlen sind so keine von den äusseren Dingen abgezogenen Begriffe; weil nämlich die äusseren Dinge uns keine strengen Einheiten darstellen, sie stellen nur abgegrenzte Gruppen

1) Vgl. FREGE a. a. O. p. 41 u. ff.

2) Vgl. das Citat S. 139 d. W.

3) Treatise of Human Nature. Part II. sect. II. (Ausg. v. Green und Grose I. S. 337—338.)

4) BAUMANN, Die Lehre von Raum, Zeit und Mathematik II, 669.

oder sinnliche Punkte dar, aber wir haben die Freiheit, diese selber noch als ein Vieles zu betrachten; manchmal finden wir auch in der Beschaffenheit der gegebenen Einheiten Gründe, sie nicht als solche bestehen zu lassen, manchmal nötigen diese äusseren Einheiten, sie nicht weiter wirklich in Viele zu unterscheiden, obwol wir es mathematisch könnten. Diese Unabhängigkeit von unseren Vorstellungen, dieser Zwang der Dinge gegenüber von ihnen ist zugleich ein Beweis für die Realität dieser gegebenen Einheiten." . . . Die Irrthümer, auf welchen die vorstehenden Behauptungen beruhen, gründen theils in der Verwechslung der Begriffe Einheit, Einfachheit und strenge Punktualität — eine Verwechslung, welche in der Philosophie nicht eben selten aufgetreten ist — theils in gewissen Aequivocationen, welche dem Namen Einheit anhaften. Dass derselbe mit Aequivocationen übermässig belastet ist, mussten wir bereits öfter bemerken. Es wird nützlich sein, die sämmtlichen hier einmal zusammenzustellen, obgleich wir nur einige derselben für den momentanen Zweck der Discussion benötigen. Man wird leicht erkennen, dass es sich nicht um ganz zufällige, sondern um Aequivocationen durch Uebertragung handelt.

Die Aequivocationen des Namens Einheit.

1. Der Name Einheit bezieht sich zunächst auf den abstracten Begriff der Einheit. Der Begriff der Einheit steht im Correlationsverhältniss zum Begriff der Vielheit; dieser aber ist nichts Anderes als der Begriff des collectiven Ganzen. So ist der Begriff der Einheit nichts anderes als der Begriff ‚collectiver Theil'.

2. Der Name Einheit bedeutet auch irgend einen Gegenstand, sofern er unter den Begriff der Einheit fällt. Diese Art der Aequivocation ist keine dem Namen Einheit eigenthümliche, er theilt sie mit allen abstracten Namen, sofern sie auch als allgemeine verwendet

werden. Danach ist also jedes Glied einer concreten Vielheit, falls an ihr die Zahlenabstraction vorgenommen wird, eine Einheit, oder Eines. Wir können auch sagen, Einheit in diesem Sinne bedeute: gezählter (oder in Uebertragung: zu zählender) Gegenstand als solcher, wobei zunächst an wirkliches und nicht an symbolisches Zählen zu denken ist.

3. Jede Einheit in der Vielheit ist auch Eins im Sinne der Zahl: Jeder Einheit kommt die Zahl Eins zu. Da nun für den Namen Einheit (in der hier betrachteten Bedeutung von Nr. 2) auch der Name Eins verwendet werden kann, so entstand eine Aequivocation des letzteren Namens, welche dazu führte, beide Begriffe zu vermengen und dann sogar für Eins im Sinne der Zahl den bei der anderen Bedeutung von Eins zulässigen Namen Einheit zu verwenden. So gebraucht z. B. HERBART, wie wir oben (149) sahen, den Namen Einheit für Zahl Eins und vermengt so zwei wolgeschiedene Begriffe.

4. Da in der Regel nur gleichartige Gegenstände gezählt werden, so nannte man wol auch den gemeinsamen Gattungsbegriff gezählter Gegenstände Einheit. Wo es sich um Continua handelt, da konnte man Relationen zwischen Ausdehnungen (physischen Theilen, Abständen etc.) auf Zahlenrelationen reduciren, indem man Theilungen in gleiche Theile ausführte. Dann hiess das zu Grunde gelegte gemeinsame Mass (d. h. der die gleichen Theile umfassende Gattungsbegriff) Masseinheit oder Einheit schlechtweg. Auch hier sieht man den Grund der Uebertragung leicht ein. Wenn z. B. Pfunde gezählt werden, so ist ein Pfund die Einheit. In der That, wenn das Interesse ausschliesslich auf Pfunde und deren Zählung geht, dann haben die Begriffe ‚zu zählender Gegenstand als solcher' und ‚Pfund' gleichen Umfang, und so übertragen wir den Namen des ersten Begriffs auf den zweiten. In diesem Falle giebt die ‚Einheit' an, was als Eins gezählt werden soll; zu einer wirklichen Einheit (im Sinne von Nr. 2)

wird sie aber erst, sofern man sie wirklich zählt.[1]) Die Aequivocation, die durch diese Uebertragung entstanden ist, hat zu allen Zeiten zu den meisten Irrthümern beigetragen.

5. In vielfachem Sinne ist in der höheren Analysis von Einheiten die Rede, welche mit der Anzahl unmittelbar nichts zu schaffen haben und nur in sehr entfernter Beziehung zu ihr stehen. Man spricht dort z. B. von vielerlei „imaginären Einheiten". Es sind dies gewisse, nicht weiter reductible Rechenelemente, vermittelst welcher andere, aus ihnen zusammengesetzt gedachte Formen ähnlich zu bilden sind, wie die Zahlzeichen aus dem Zeichen 1, d. h. durch Formeln wie $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ u. s. w. Die Function dieser Einheiten ist eine mehrfache. Oft dienen sie bloss als kunstmässige Hilfsmittel zur Vervollkomnung der arithmetischen Zeichentechnik, wobei ihnen keinerlei begrifflicher Gehalt, neben diesem technischen, correspondirt. In der Arithmetik bestimmter Sachgebiete entspricht ihnen aber häufig auch eine solche „reale Bedeutung". Analoges gilt von den übrigen Arten von Einheiten, welche die Arithmetiker verwenden, wie den negativen, gebrochnen u. s. w. Hierüber soll im II. Bande ausführlich gehandelt werden.

6. Als Zeichen für eine Einheit (im Sinn von Nr. 2) verwenden die Arithmetiker das Zeichen 1. Die Methode des mechanischen Zählens und Rechnens, das auf die zu Grunde liegenden Begriffe nicht reflectirt, führte dahin, diese Begriffe zu übersehen und wie die Zahlen so auch die Einheit als blosses Zeichen aufzufassen. Einheit wird also definirt als das Zeichen (der Strich) 1, mit dem beim Zählen jedes Ding „abgebildet" wird. Der älteste Vertreter dieses Irrthums

[1]) Aus leicht verständlichen Gründen pflegen die Mathematiker die Einheit gerade in diesem Sinne zu erklären. Vgl. P. Du Bois-Reymond, Allg. Functionentheorie, I, 48 und 49, wo die Verwechslung mit Einheit im Sinne von Nr. 2 klar hervortritt. Vgl. auch Frege a. a. O. S. 66.

ist Berkeley. Wir finden ihn wieder bei neueren Mathematikern wie Stolz,[1] v. Helmholtz[2] u. A.

7. Einheit bedeutet weiterhin soviel wie Ganzes. Der Anlass zu dieser Uebertragung ist naheliegend. Es steht gewiss nichts im Wege, zusammenhangslose und disparate Inhalte, oder ausgesonderte Attribute, relative Bestimmungen u. s. f. zusammenzuzählen; aber hiezu haben wir nur in seltenen Ausnahmsfällen einen Anlass. In der Regel zählen wir Dinge im engeren Sinne, überhaupt zusammengesetzte Ganze, die sich durch besonders innige Verbundenheit ihrer Theile ausnehmend leicht von der Umgebung abscheiden und als Ganze unser Interesse auf sich ziehen. Was sich nun durch innere Zusammengehörigkeit und scharfe Begrenzung als Ganzes aussondert, dem Interesse aufdrängt und hiedurch hauptsächlicher Gegenstand der Zählung wird, das wird Eines genannt. Durch weitere Uebertragung bezeichnete aber schliesslich Einheit soviel wie Ganzes.[3] Z. B. sagen wir, der Staat bilde eine Einheit.

8. Einheit wird endlich auch in dem Sinne gebraucht wie Ganzheit oder Geeinigtheit (man verzeihe die gezwungenen Wortbildungen). Für diesen Begriff haben wir überhaupt keinen anderen geläufigen Namen als Einheit. Es handelt sich hier offenbar um eine abermalige Uebertragung. In diesem Sinne sprechen wir z. B. von der Einheit der Seele als einer ihrer Beschaffenheiten.

Mit Hilfe der siebenten und achten Bedeutung des Namens Einheit können wir nun den Weg angeben, auf welchem man zur Behauptung der strengen Punktualität der Einheit gelangt sein mag. Eines ist, was geeinigt ist. Die Einigung lässt aber Vollkommenheitsgrade zu; sie ist um so vollkommener, je

---

[1]) Vgl. die Citate S. 125. [2]) Vgl. den Anhang z. I. Theil.

[3]) Auch der Name Einigung und das Verbum einigen (zu einem Ganzen verbinden) sind auf solche Weise entstanden.

inniger sie ist. Das Ideal der Einigung ist aber Untheilbarkeit, das Ideal der Untheilbarkeit der mathematische Punkt — folglich kommt der „strengen“ Einheit Punktualität zu.

Gegen BAUMANN hebe ich noch hervor, dass selbst dann, wenn die Aussenwelt ausschliesslich aus discreten mathematischen Punkten bestände, die Zahlen nicht mehr und nicht minder von ihr abstrahirt wären, als jetzt, wo sie ganz anders beschaffen ist. Der Geistesprocess der Zahlenabstraction bliebe genau derselbe.

Die Willkürlichkeit der Unterscheidung zwischen Einheit und Vielheit. Die Auffassung der Vielheit als einer Vielheit, als einer gezählten Einheit, als eines Ganzen.

Nach BAUMANN gründet die Thatsache, dass derselbe Inhalt uns bald als Eines, bald als Vieles erscheint, in eben jener Unvollkommenheit der äusseren Erfahrung, die uns keine „strengen Einheiten“ darbietet. Aber würden wir nicht auch in dem fictiven Idealfalle die Fähigkeit beanspruchen müssen, Gruppen von Punkten als neue Einheiten herauszuheben und selbst wieder zu zählen? Gewiss erschiene auch dann eine solche Gruppe je nach Gutdünken bald als Einheit und bald als Vielheit.

Wie aber erklärt sich dieses merkwürdige Factum selbst? Schon BERKELEY hob es hervor, und er macht daraus ein scharfsinniges Argument gegen die realistische Auffassung der Begriffe Einheit und Zahl als primärer Qualitäten. („Wir sagen Ein Buch, Eine Seite, Eine Linie; diese alle sind gleichsehr Einheiten, obschon einige derselben mehrere der anderen enthalten. Und in jedem Betracht ist es klar, dass die Einheit sich auf eine besondere Combination von Ideen bezieht, welche der Geist willkürlich zusammenstellt.[1]“) Liegt in dieser Willkür der Auffassung, die jeden Unterschied zwischen

[1]) Principles, sect. 12. Vgl. auch New theory of vision, sect. 109. (Works, Fraser 1, 85.)

Einem und Vielem zu verwischen scheint,[1]) nicht eine ernstliche Schwierigkeit?

Betrachten wir, um hier Klarheit zu erlangen, die Sachlage erst einmal näher. Es ist eine Thatsache, dass wir oft im Stande sind, einen und denselben Gegenstand, je nach Belieben, als Eines und Vieles aufzufassen. Es ist ferner eine Thatsache, dass wir Vielheiten zählen können, wodurch wir Zahlen erhalten, deren Einheiten selbst wieder Zahlen sind, und darauf beruht alle Arithmetik. Man sieht auch sofort, dass die zweite Thatsache eine Folge der ersten ist, eine Folge eben jener Willkür der Auffassung. Während man also einerseits erwarten möchte, dass die Willkür alle Arithmetik unmöglich mache, zeigt sich andererseits, dass auf ihr sich alle Arithmetik gründe.

Indessen diese Schwierigkeit ist blosser Schein. Bei einer wirklichen Zählung ist es nie zweifelhaft und willkürlich, was als Eins gezählt werden soll. Dies bestimmt das leitende Interesse, wie es auch bestimmt, wie viel wir zusammenzählen. Ohne Willkür in diesem Sinne gäbe es überhaupt keine Zahl. Werden Vielheiten zusammengezählt, so sind diese Vielheiten die Einheiten. Der Widerspruch liegt nur in den Worten. Man muss eben auseinanderhalten die Zählungen, welche jene Vielheiten ergeben — und nur im Hinblick auf diese sind sie Vielheiten — und die Zählung, welche dann die Vielheiten wiederum zu einer Vielheit verbindet — und in Beziehung auf diese neue Zählung sind sie nicht Vielheiten, sondern Einheiten.

Noch eine Bemerkung sei hier angefügt. Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen Vielheit schlechthin, d. h. Vielheit als Vielheit gedacht, und zwischen Vielheit als Einheit gedacht. Derselbe kann leicht auf seinen psychologischen Ursprung zurückgeführt werden.

---

[1]) Vgl. auch FREGE a. a. O. S. 58.

Was das heisst, eine Vielheit als solche aufzufassen, brauchen wir nicht von Neuem zu erläutern. Betrachten wir daher gleich jene zweite Auffassungsweise einer Vielheit, vermöge deren sie als Einheit gedacht wird.

Eine Vielheit (sei es in concreto oder in abstracto) ist ein Vorstellungsinhalt so gut wie irgend ein anderer; sie kann daher mit beliebigen anderen Inhalten colligirt und gezählt werden. Jede (eigentliche) Zahlbildung erfordert in Beziehung auf jeden einzelnen Gegenstand eine Reflexion auf den ihn vorstellenden psychischen Act, durch sie wird er als Einheit gedacht. Daher wird auch die Vielheit, sofern sie als zu zählender Gegenstand fungirt, als Einheit gedacht, indem sie mit Reflexion darauf, dass sie ein Inhalt, ein Etwas ist, angesehen wird.

Noch in einem ganz anderen Sinne kann von ‚Vielheit als Einheit' gesprochen werden, nämlich in dem Sinne ‚Vielheit als Ganzes'. Hier werden die Elemente der Vielheit (resp. die Einheiten der Zahl) als Theilvorstellungen des psychischen Actes gedacht, welcher die Vielheit zum intentionalen Objecte besitzt. Das Interesse ruht auf dem Geeinigtsein der Elemente oder Einheiten in der Vorstellung der Vielheit, bzw. Zahl; die Einigung aber erfolgt, wie wir feststellten, nur in dem psychischen Act des Interesses und Bemerkens, welcher die einzelnen Inhalte heraushebt und verbindet, und kann auch nur in Reflexion auf ihn bemerkt werden. Jede Vielheit besitzt, objectiv betrachtet, in diesem Sinne Einheit; sie ist ein Ganzes; aber nicht immer richtet sich ein besonderes Interesse darauf, nicht immer wird sie als Ganzes gedacht. Es wäre daher misverständlich zu sagen: „Jede Vielheit ist nicht bloss Vielheit, sondern eine Vielheit als Einheit gedacht" . . .[1]) Beides muss vielmehr wol auseinander gehalten werden.

---

[1]) Sigwart's Logik II, 42.

Herbart'sche Argumentationen.

Misverständnisse des Verhältnisses der Begriffe Einheit und Vielheit sind die Quelle unzähliger falscher Argumentationen in der Philosophie gewesen. Einheit und Vielheit sind einander entgegengesetzt; also, schloss man, kann nicht dasselbe zugleich Eines und Vieles sein. Dieser Schluss ist nur richtig, wenn man statt ‚dasselbe' sagt ‚dasselbe in derselben Hinsicht'. Zählen wir Soldaten, dann ist ein Regiment eine Vielheit; zählen wir Regimenter, so ist ein Regiment eine Einheit. Ein Widerspruch besteht nicht, weil diese Vielheit und diese Einheit keinen Gegensatz bilden; denn sie gehören verschiedenen Relationen als Glieder an. Nur wer behauptete, dass ein Regiment eine Vielheit von Regimentern, ein Soldat eine Vielheit von Soldaten sei, begienge einen Widerspruch. Es verhält sich hier wie bei Correlativbegriffen überhaupt; nur Glieder derselben Relation schliessen sich wechselseitig aus.

Mit diesem Misverständniss verband sich mitunter ein anderes, welches dadurch entstand, dass man Einheit auch in dem Sinne von Ganzes verstand und trotzdem Vielheit als das entsprechende Correlativum auffasste.

An diesen Irrthümern, sowie an der Verwechslung der Begriffe Einheit und Einfachheit scheitert die berühmte HERBART'sche Argumentation, welche in dem Begriffe Eines Dinges mit vielen Eigenschaften einen Widerspruch nachweisen will.

Auf die Frage, was ist das Ding? antworten wir durch Aufzählung der Eigenschaften, also mit einem Collectivum. Das sei, meint HERBART,[1]) wenn wir uns an den Wortlaut halten, ungereimt; denn die Rede war nicht von Vielem, das bloss in einer Summe sich zusammenfassen, aber zu keiner Einheit sich verschmelzen liesse.

---

[1]) Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie § 118.

Schon hier können wir nicht beistimmen. Keinerlei Ungereimtheit können wir in dem Wortlaut finden, und diejenige, die HERBART hineininterpretirt, kennzeichnet bloss eine begriffliche Verwechslung, die er begeht. Collectivum im weiteren Sinne bedeutet dasselbe wie Vielheit; Collectivum im engeren Sinn dasselbe wie Vielheit von gesonderten Dingen, Individuen. Durch Aufzählung der Eigenschaften antworten wir mit einem Collectivum in dem ersten Sinne, für den HERBART unberechtigter Weise den zweiten unterschiebt. Der sprachliche Ausdruck giebt den richtigen Gedanken ohne jede Zweideutigkeit wieder. Indem wir sagen, die Orange ist rot und rund u. s. w., drückt die adjectivische Form den Unterschied des unselbständigen Merkmals gegenüber dem Dinge klar aus. Ein solcher Satz hat einen ganz anderen sprachlichen Charakter wie z. B. der folgende: Die Commission besteht aus Müller, Lehmann und Schulze. Nur hier, wo ein Collectivum im engeren Sinne gemeint ist, giebt der Wortlaut ein solches wieder.

Die begriffliche Verwechslung, vermöge deren HERBART zur falschen Interpretation der sprachlichen Ausdrucksweise gedrängt wurde, liegt nun auch seiner weiteren Argumentation zu Grunde. Die Antwort auf die Frage: Was ist ein Ding? verliere, meint er, ihre augenscheinliche Ungereimtheit, wenn wir sie genauer so fassen: das Ding ist der Besitzer der Eigenschaften a b c etc. Dann trete aber der Widerspruch auf, wenn wir bedenken, dass der Besitz doch ein ebenso vielfacher sei, als es Eigenschaften gäbe. Die einfache Frage: Was ist das Ding? verlange eine einfache Antwort, die uns sage, von wem denn eigentlich gesagt wird, dass er Eigenschaften habe und sie vereinige. „Können wir nun das vielfache Besitzen der vielen Eigenschaften nicht auf einen einfachen Begriff zurückführen, der sich ohne allen Unterschied mehrerer Merkmale denken lasse, so ist der Begriff von dem Dinge, dem wir doch diesen vielfachen Besitz als seine wahre Qualität beilegen müssen, weil wir es durch viele Merkmale kennen lernten, ein widersprechender Begriff." [1])

Inwiefern ist die Frage: Was ist das Ding? eine einfache, die eine einfache Antwort verlange? HERBART supponirt der Einheit von vornherein die Einfachheit, und dann ist es kein Wunder, wenn die bestehende Vielheit der Eigenschaften ihr widerspricht. Um zu erfahren, wer es sei, der die Theile des Dinges einigt, wer sie hat, brauchen wir keine einfache, sondern einfach die richtige Antwort: die Vereinigung der Theile, das Ganze. Von jedem Ganzen gilt die Aussage, dass seine Theile ihm zukommen, und dass es die Gesammtheit der Theile vereinige, also auch von dem Ganzen, das wir Ding nennen. Und so ist denn dem Dinge in keinem anderen Sinne der vielfache Besitz als seine wahre Qualität beizulegen, wie irgend einem andersartigen Ganzen. Das Unterscheidende liegt bloss in der Weise des Besitzens, und diese ist es auch, die uns veranlasst in einem besonderen Sinne von der Einheit des Dinges zu sprechen. Was wir darunter verstehen, ist nichts Anderes als eben dies: dass die Eigenschaften in dem Begriffe eines Dinges nicht in der Weise eines blossen Collectivums zusammengerafft seien, sondern ein Ganzes inhaltlich verbundener (sich wechselseitig durchdringender) Theile constituiren. Die Aussage, dass ein Ding in diesem Sinne eine Einheit repräsentire (nämlich ein „metaphysisches Ganzes"), und diejenige, dass es eine Vielheit von Eigenschaften (von „metaphysischen Theilen") besitze, stehen mit einander so wenig in Widerspruch, dass sie sich vielmehr wechselseitig fordern. Ganzes und Theil sind eben Correlativa. Man darf sich nicht durch die Aequivocation des Wortes Einheit täuschen lassen, die es nahe legt, Einheit und Vielheit als sich ausschliessende Gegensätze schlechthin anzusehen. Einheit in dem Sinne der Zahl (die mit der Ein-

[1]) a. a. O. § 122.

fachheit immer gegeben ist) und Einheit in dem obigen Sinne der Verbundenheit sind wolunterschiedene Begriffe.

Forscht man nun nach der Quelle aller dieser Confusionen, so findet man, dass sie aus jener Verwechslung der beiden Collectivbegriffe entspringt, von der oben die Rede war. Wird der Begriff der Vielheit identificirt mit dem eines Collectivums von Individuen (die „bloss in einer Summe sich zusammenfassen, aber zu keiner Einheit sich verschmelzen lassen"), dann freilich erscheint die Vielheit von Eigenschaften in der Einheit des Dinges eine Unmöglichkeit, denn diese Einheit ist eben mehr als eine derartige Collectiveinheit. In solcher Weise zur Verwechslung der Begriffe Einheit des Dinges und Einfachheit des Dinges gedrängt, wird man es notwendig als Widerspruch empfinden, dass der Begriff des Dinges sich nicht als ein einfacher fassen lasse, der „ohne allen Unterschied mehrerer Merkmale" zu denken sei.

IX. Capitel.

Der Sinn der Zahlenaussage.

Widerstreit der Ansichten.

Wir gehen nun zu der Streitfrage nach dem eigentlichen Subject der Zahlenaussage über. Es ist bezeichnend für die Verwirrung in den Begriffen, wenn in diesem Punkte Uneinigkeit herrschen kann, und kaum glaublich ist es, wie weit hier die Meinungen der Philosophen von einander abweichen. J. St. Mill erklärt:[1]) „Die Zahlen sind im

[1]) James Mill, Analysis II, 92. Anm. Dem Wortlaute nach sagt James Mill im Texte (S. 91) genau das Gegentheil, wie sein Sohn in

strengsten Sinne Namen von Objecten. Zwei ist sicherlich ein Name der Dinge, welche zwei sind, der zwei Kugeln, zwei Finger u. s. w."

Ganz anders urtheilt HERBART. „Jede Zahl," sagt er, „bezieht sich . . . auf einen allgemeinen Begriff des Gezählten. . . . Zu der Zahl 12 denke man hinzu den allgemeinen Begriff eines Stuhles oder eines Thalers, so wird man gewahr werden, dass sich die Zahlbestimmung ungetheilt und auf einmal dem Begriffe anschliesst." [1]) Und diese Ansicht hat in jüngster Zeit an FREGE einen eifrigen Vertheidiger gefunden. „Die Zahlenangabe," sagt er [2]) kurz und klar, enthält „eine Aussage von einem Begriffe." Mit dieser Auffassung verwandt ist diejenige SCHUPPE's. Nach ihm beruht, wie wir früher besprachen, die Zahl auf Vergleichungen und Unterscheidungen der gezählten Inhalte. Das Subject der Zahlprädication sind aber, wie er meint, [3]) „nicht die Verglichenen, welche für verschieden erkannt werden," sondern „das, was in allen Unterschiedenen dasselbe ist." „Wir haben . . das Substantiv bei der attributiven Zahlbestimmung und das Subject bei einer prädicativen als das Erscheinen oder Gedachtwerden des einen Identischen — sei es eines Erscheinungselementes oder der Gattung eines solchen, sei es

---

der Anmerkung. „Numbers . . are not names of objects. They are names of a certain process; the process of addition." Der Gegensatz liegt aber nur in den Worten und beruht auf der entgegengesetzten Bedeutung, in der die beiden MILL die Termini „note" und „connote" gebrauchen. Indem JAMES MILL einige Zeilen später erklärt, die Namen bezeichneten mit („connote") die gezählten Dinge, drückt er in einer freilich sehr misverständlichen Form dasselbe aus wie sein Sohn, nämlich dass die Zahlen Aussagen von Dingen seien. (Im Uebrigen stimmen beide auch in der crass äusserlichen Auffassung der Zahlen überein. Der Process der Addition wird von JAMES MILL a. a. O. auf eine Stufe gestellt mit Gehen und Schreiben.)

[1]) a. a. O. II, 161 (§ 116). Vgl. auch die oben S. 155—56 citirten Stellen aus demselben Werke, sowie aus UEBERWEG's Logik.

[2]) FREGE, Grundlagen S. 59. [3]) SCHUPPE, Erkenntnissth. Logik S. 410.

eines Dingbegriffes, z. B. der allgemeinen Charakterzüge eines Hundes oder einer Katze — mit resp. an mehreren Wo oder mehreren Wann aufzufassen."

Wiederum anders fassen andere Forscher die Zahlenaussage: sie betrachten die Zahlen als Prädicate von Mengen. J. St. Mill, sich selbst nicht treu, drückt sich wiederholt auch in diesem Sinne aus. Nur wenige Zeilen nach der vorhin citirten Stelle heisst es: „Numerals . . . denote the actual collections of things".[1]) Endlich kommt es auch vor, dass zwei, drei, vier, . . . als Prädicate der Zahl im Allgemeinen angesehen werden. Sprechen wir z. B. von drei Aepfeln, dann sei nicht drei eine Bestimmung der Aepfel, sondern der Zahl der Aepfel. Der Ausdruck ‚der Aepfel sind drei' wäre der Bedeutung nach identisch mit dem genaueren ‚die Zahl der Aepfel ist drei'. Als Vertreter dieser Ansicht darf Sigwart bezeichnet werden: „Wenn [die Drei] Prädicat ist," sagt er, „ist sie wirklich Prädicat der Dinge, von denen sie ausgesagt wird, und nicht vielmehr Prädicat ihrer Zahl . . .?"[2])

Widerlegung und Entscheidung.

Für welche von diesen Auffassungen sollen wir uns entscheiden?

Die Ansicht, dass die Zahl Prädicat der gezählten Dinge sei, bedarf keiner langen Erwägung. Zwei ist sicherlich nicht „Name der Dinge, die zwei sind", denn sonst wäre eben jedes derselben zwei. Wir sagen darum auch nicht: die Dinge (die Kugeln, Finger u. s. w.) sind zwei, wie wir sagen: sie sind farbig, schwer u. s. w., sondern: der Dinge sind zwei. Dass die Zahlen keine Attribute von Dingen sind,

[1]) Vgl. z. B. auch Logik III. B. 24. Cap. § 5 (Gomperz II, 342). „Wenn wir eine Sammlung von Gegenständen zwei, drei, vier nennen . . ."

[2]) Sigwart, Logik I[1], 168.

zeigt sich auch sonst im sprachlichen Ausdruck: es giebt keine Zahlenadjectiva, wie es Adjectiva giebt für alle Arten von Attributen.

Eine genauere Untersuchung erfordert und verdient die HERBART'sche Ansicht, wonach die Zahlenangabe sich auf einen Begriff beziehe. HERBART selbst hat die Begründung derselben nicht genauer durchgeführt; wir halten uns daher an die Argumente von FREGE, welcher alle Sorgfalt daran wendete, HERBART's Ansicht besser auszubilden und auf positivem, wie auf kritischem Wege zu erweisen.

Folgendes ist sein Hauptargument: Betrachten wir Gegenstände als Träger der Zahl, dann entsteht der Schein, als ob demselben Gegenstande verschiedene Zahlen zukämen. Dies ändert sich sofort, wenn wir den Begriff als den wahren Träger in seine Rechte setzen. „Wenn ich in Ansehung derselben äusseren Erscheinung mit derselben Wahrheit sagen kann: ‚dies ist eine Baumgruppe' und ‚dies sind fünf Bäume' oder ‚hier sind vier Compagnien' und ‚hier sind fünfhundert Mann', so ändert sich dabei weder das Einzelne, noch das Ganze, das Aggregat, sondern meine Benennung. Das ist aber nur das Zeichen der Ersetzung eines Begriffes durch einen anderen. Damit wird uns . . . nahegelegt, dass die Zahlenangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte."

Das Argument stützt sich auf richtige Bemerkungen; aber sie beweisen nicht, was hier bewiesen werden soll. Es ist richtig, die Zahlen haften keinerlei Gegenständen als Merkmale an, und insofern sind diese nicht ihre Träger; aber sie sind dies gleichwol in einem anderen, besser berechtigten Sinne. Die Zahl verdankt ihre Entstehung einem gewissen psychischen Processe, welcher an die Zählobjecte sich anknüpft und in diesem Sinne von ihnen ‚getragen' wird. Hält man sich an diese Träger, und beachtet man die Art der Abstractionsprocesse, die hier vorliegen, dann entfällt auch die Schwierigkeit, die oben hervorgehoben wird. Die

Zahl ist eindeutig bestimmt, wenn der Inbegriff bestimmt ist, an dem wir jenen Abstractionsprocess üben. Aber die Gegenstände für sich allein bestimmen nicht den Inbegriff. Dieselben Gegenstände können in verschiedenen Inbegriffsformen vorgestellt werden. Anstatt sie alle ohne jede Bevorzugung collectivisch verbunden zu denken, können wir je nach der Richtung unseres Interesses diese oder jene Gruppen für sich herausheben und so auf mehr oder minder vielfältige Art Inbegriffe von Inbegriffen bilden. Wir können nun ferner diese Theilinbegriffe zählen, dann ist das schliessliche Zählungsresultat eine Summe von Zahlen; wir können aber auch jeden dieser Theilinbegriffe als Einheit ansehen, dann erhalten wir wieder ein anderes Resultat u. s. w. So ergeben sich je nach der Richtung des Interesses, welches die Inbegriffsbildung leitet, verschiedene Zahlen oder Zahlverbindungen, von denen aber eine jede durch die bei ihrer Zählung zu Grunde gelegte Inbegriffsform eindeutig bestimmt ist. Mit diesem Wechsel des Interesses hängt nun auch der Wechsel der Begriffe zusammen, unter denen wir die Gegenstände nach Gruppen sondern und zählen. Im Allgemeinen zählen wir doch nur Dinge, die als Träger der oder jener Eigenschaften uns interessiren. Gemeinsame Gattungsbegriffe leiten also in der Regel unser Interesse, sie bestimmen concreten Falls die Inbegriffsbildung. Mit dem Wechsel des Interesses wird also in der Regel ein Wechsel des Begriffes, unter dem wir die Zählobjecte denken, statthaben. Aber nicht immer ist dies der Fall. Wir können doch aus einer Menge gleichartiger Gegenstände, z. B. Aepfel, ganz nach Zufall und Willkür Gruppen zu zwei, drei u. s. w. zusammenfassen, ohne dass wir es hiebei abgesehen hätten auf irgend welche, gerade diese zwei, drei, . . . Objecte umgrenzenden Begriffe.

Es ist zwar selbstverständlich: für das eben diese Gruppe heraushebende und einigende Interesse muss ein Motiv da sein, bestehend in gewissen, gerade die Inhalte dieser Gruppe auszeichnenden begrifflichen Momenten; aber ist denn damit gesagt, dass wir hiebei und bei der sich anschliessenden Zählung eine logische Subsumption vornehmen und die einzelnen Inhalte explicite als Gegenstände dieser Begriffe denken müssen? Eine räumliche Configuration z. B. leitet unser Interesse, dass wir aus einem Haufen Aepfel eine Gruppe von vieren herausheben. Müssen wir darum jeden Apfel logisch subsumiren unter den Begriff des räumlichen, zu einer solchen Configuration gehörigen Inhaltes? Man darf also nicht vermengen: das Nebenbei-Bemerken gewisser begrifflicher Momente (abstracter Theilinhalte) in der äusseren Anschauung als das psychologische Motiv der Gruppenbildung, und die logische Subsumption der Gruppenglieder unter den bezüglichen Begriff. [1])

---

[1]) Wenn KERRY („Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung" VI. Art., Vierteljs. f. wiss. Phil. XIII, 392) sagt: „es muss, wo immer ich zähle ... ein Begriff da sein, dessen Gegenstände ich zähle", so begeht er offenbar die oben charakterisirte Verwechslung; und wenn er weiter zur Begründung darauf hinweist, dass wir ohne einen solchen „Leitbegriff" „Gefahr liefen, etwas mitzuzählen, was wir nicht mitzählen sollen, und etwas auszulassen, was wir mitzählen sollten" — so ist darin so viel zugestanden, als wir irgend wünschen können, nämlich dass man zählen kann auch ohne solchen Leitbegriff, mag es nun ein gefährliches Zählen sein oder nicht.

Wir können schon aus diesem Grunde die Triftigkeit der folgenden, sich daran schliessenden Definition nicht zugestehen: „ich nenne diejenige psychische Arbeit, wodurch ein Gegenstand unter einen der Leitbegriffe einer gestellten Zählaufgabe subsumirt wird, eine Einheitsetzung". Wenn ich einen Haufen Aepfel vor mir habe, brauche ich nicht besondere Subsumptionen unter den Begriff Apfel zu vollziehen, um schrittweise zählend einen jeden als einen zu erfassen. Und was könnten sie mir bestenfalls leisten? Die Constatirung der Thatsache, dass jedes der vorliegenden Dinge ein Apfel sei. Dass aber jeder ein Apfel sei, worauf es allein ankommt, erkenne ich so nicht, es sei denn, dass ich von dem Gattungsbegriffe Apfel wieder absehe und zum Eins schlechthin aufsteige. Und wie hier bei dem Begriff der Einheit, so kann ich auch sonst bei den elementaren arithmetischen Begriffen KERRY's Analysen nicht beistimmen.

Aber nehmen wir selbst an, es wäre immer so, wie man behauptet, wir colligirten und zählten stets nur Objecte, sofern sie unter einen gemeinsamen Begriff fallen, dann geht aus unserer Betrachtung klar hervor, dass die Zahl in keiner Weise als Bestimmung dieses Begriffes angesehen werden kann. Der Umstand, dass die Objecte a, b, c unter den momentan bewussten sich gerade durch die gemeinsame Eigenthümlichkeit α auszeichnen, ist der psychische Anreiz dazu, sie einheitlich herauszuheben; aber um sie zu zählen, d. i. die zu diesem Inbegriffe gehörige Zahlform zu ermitteln, dazu gehören neue Motive und zwar solche, die mit der Determination von α nichts zu thun haben. Interessiren wir uns für die a, b, c nur insofern sie von der Gattung α sind, dann umfasst die Anzahl derselben mit dem hinzugefügten Index α alles, was wir für den weiteren Denkgebrauch von dem Inbegriffe a, b und c festzuhalten benötigen. Wir erlangen so eine inhaltlich vereinfachte Vorstellung, welche die uns momentan gleichgiltigen individualisirenden Differenzen jener Objecte abgestossen hat. Dies sind aber Interessen, welche in keiner Weise auf eine nähere *Bestimmung* des Begriffes (man nehme diesen Ausdruck so weit, als man will) abzielen.

Abgesehen von den psychologischen Motiven, die uns zur Zahlenabstraction veranlassen, zeigt auch die directe Betrachtung der letzteren, dass die Zahl nicht auf den Begriff sich bezieht. Die Zahl ist die allgemeine Vielheitsform, unter welche der Inbegriff der Gegenstände a, b, c fällt. Daher ist es klar, dass dieser Inbegriff (diese Vielheit, Menge, oder wie man es sonst nennen möge) das Subject der Zahlenaussage bildet. Formell betrachtet verhalten Zahl und concrete Menge sich wie Begriff und Begriffsgegenstand. *Die Zahl bezieht sich also nicht auf den Begriff der gezählten Gegenstände, sondern auf deren Inbegriff.* Ihr Verhältniss zu dem Gattungsbegriffe des Gezählten ist einfach folgendes: Zählen wir eine Menge gleichartiger Objecte, z. B. A, A und A, so abstrahiren wir zunächst von den inhaltlichen Beschaffenheiten derselben, also auch davon, dass sie von der Gattung A sind. Wir bilden die Inbegriffsform Eins, Eins und Eins und merken nachträglich an, dass Eins hiebei die Bedeutung ‚ein A' haben solle. Also erst nach der Zählung, welcher als solchen der Umstand, dass die Objecte A's sind, ganz gleichgiltig ist, tritt der Gattungsbegriff als ein determinirender Factor zur Zahl hinzu; er determinirt die Einheit, d. h. die zunächst inhaltsleere Vorstellung des gezählten Etwas, als ein unter den Begriff A fallendes Etwas.

Das Verhältniss zwischen Zahl und Gattungsbegriff des Gezählten ist also in gewisser Weise das umgekehrte wie das von HERBART und FREGE behauptete. Nicht sagt die Zahl etwas von dem Begriffe des Gezählten, sondern dieser sagt etwas von der Zahl aus. Allerdings bezieht man den Ausdruck ‚Aussage von einer Zahl' gewöhnlich nur auf Verhältnisse der Zahl zu anderen Zahlen. Aber das ist nicht die einzige Art der Aussage, die möglich ist. Auch dies ist eine Aussage von der Zahl, dass die Einheiten, die sie zählt, gewisse Beschaffenheiten haben; denn dadurch wird die Zahl selbst (nur von der allgemeinen Vorstellung, nicht von dem Abstractum Zahl ist die Rede) zu einer concreteren Vorstellung determinirt.

Eine weitere Bestättigung für die Ansicht, dass die Zahl Begriffen beigelegt wird, sieht FREGE in dem deutschen Sprachgebrauche, demgemäss man ‚zehn Mann', ‚vier Mark', ‚drei Fass' sagt. Der Singular soll hier andeuten, dass der Begriff gemeint ist, nicht das Ding. [1])

Dies ist eine etwas kühne Deutung. FREGE übersieht, dass mit den Namen Mark, Fass, Mann nicht abstracte, sondern allgemeine Begriffe gemeint sind. Viel leichter passt daher jener Sprachgebrauch zu unserer Auffassung, wonach z. B.

---

[1]) a. a. O. S. 64.

zehn Mann kurz und gut dasselbe besagen würde wie: Zehn, worin jedes Eins, ein Mann ist, oder zehn Dinge, deren jedes ein Mann ist. Die gewöhnlichere Redeweise ist zehn Männer, zehn Fässer u. s. w. Der zu Grunde liegende Gedanke ist hier ein etwas anderer. Der Plural Männer deutet die unbestimmte Vielheit an, das zugesetzte Zahlenattribut determinirt oder klassificirt sie, es bestimmt das Wieviel. Man versteht nun auch, warum das Zahlenattribut niemals im Plural erscheint, während es doch an Pluralen für die Zahlensubstantiva (Zehner, Hunderte etc.) nicht fehlt. Steht das Zahlwort attributiv, dann bezieht es sich immer auf das durch den beistehenden Plural (Männer, Fässer etc.) angedeutete Collectivum als Ganzes. Anders verhält es sich mit sonstigen Attributen. Wir sagen nicht ‚gut Männer', sondern ‚gute Männer', weil die Güte nicht dem Collectivum, sondern jedem einzelnen Manne zugeschrieben wird; sie ist also eine ebenso vielfache als es Männer giebt, und dies drückt die Pluralbildung correct aus. Es ist folglich nicht richtig, wenn Frege den gewöhnlichen Sprachgebrauch irreführend nennt, weil z. B. in dem Ausdrucke ‚vier edle Rosse', ‚vier' und ‚edel' wie Merkmale gleicher Stufe behandelt wären. ‚Vier' ist doch nicht der Plural eines Adjectivs, welches durch diese Form eine Distribution auf jedes der Rosse sprachlich andeutet.

Allerdings giebt es sprachliche Ausdrücke, welche der Form nach misdeutlich genannt werden müssen. Man sagt ‚viele Menschen' statt des correcteren Ausdrucks ‚viel Menschen'. Man spricht von Vielheit und Zahl der Menschen, wie z. B. von Farbe und Grösse der Menschen. Es ist richtig, dass hier eine Unterscheidung zu machen ist; aber sie besteht in nichts anderem, als dass die ersteren Ausdrücke collectiv, die letzteren distributiv disponiren.

Was dazu verleitet hat, die Zahlenangabe als Aussage von einem Begriffe aufzufassen, ist folgender Gedanke. Man kann in jedem Falle die gezählten Objecte durch gemeinsame

Merkmale (seien es innere oder relative) so genau determiniren, dass der entstehende Gattungsbegriff nur auf die hic et nunc gezählten Objecte passt und auf keine anderen. Urtheilen wir z. B.: der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen, dann würde der Begriff Pferd dieser Anforderung nicht genügen, denn es giebt auch sonst noch Pferde. Anders wenn wir den Begriff ‚Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht', wählen, insbesondere wenn wir Ort, Datum und Tageszeit zu notiren nicht vergessen; dieser Begriff passt nur auf die vier hier concret gegebenen und gezählten Pferde. Verfährt man solcher Art in allen Fällen, dann entsteht offenbar ein Verhältniss eindeutiger Abhängigkeit zwischen dem so determinirten Begriff und der Anzahl der gezählten Objecte. Mit dem Begriffe ist auch die Zahl und zwar eindeutig bestimmt. Nehmen wir den Begriff Pferd, so ist über die Anzahl von Pferden noch nichts ausgemacht. Wählen wir aber den Begriff ‚Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht', dann ist mit ihm schon eo ipso gegeben, dass die Zahl der (so bestimmten) Pferde vier und nur vier sein kann. Macht man nun noch die Bemerkung, dass jede Aenderung des Begriffes auch eine Aenderung der Zahl bedingt, dann erscheint die Abhängigkeit der Zahl von dem Gattungsbegriffe des Gezählten als eine vollkommene, und es wird so der Gedanke nahegelegt, es möchte die Zahl überhaupt nichts anderes bedeuten als ein gewisses, jenem Begriffe zukommendes Merkmal; von einem Begriffe also (nämlich dem in der angegebenen Art präcisirten Begriffe des Gezählten) sage die Zahlenangabe etwas aus, und, was sie aussage, zu entwickeln, sei nun die Aufgabe logischer Analyse.[1])

Bei einer genaueren Erwägung der Sachlage zeigt es sich aber, dass die Zahl nur d i e Beziehung zu jenem Begriffe hat, dass sie seinen U m f a n g abzählt. Mit dem Begriffe ist auch sein

[1]) Dies war wol der Gedankengang FREGE's.

Umfang bestimmt, und da dieser in den hier betrachteten Fällen eine begrenzte endliche Vielheit darstellt, so kommt ihm natürlich auch eine Zahl zu. Nicht dem Begriffe ‚Pferd, welches den Wagen des Kaisers zieht', kommt die Zahl vier zu, sondern dem Umfange desselben, d. i. dem Inbegriffe dieser Pferde. Nur indirect kann man allenfalls sagen, der Begriff hat die Eigenschaft, dass seinem Umfange die Zahl vier zukommt. Dass die jeweilige Zahlenaussage nicht im Entferntesten den Ausdruck dieses complicirteren Gedankens meint, bedarf wol keines Beweises.

Nachdem wir in den vorstehenden Erörterungen den Sinn der Zahlenaussage und ihr Verhältniss zum Begriff des Gezählten klar bestimmt und für die S. 181 aufgeführte Ansicht MILL's Partei ergriffen haben, bedarf die SCHUPPE'sche Lehre, die als Subject der Aussage dasjenige ansieht, was „in allen Unterschiedenen dasselbe ist" (das kann doch nur ein gemeinsames begriffliches Moment sein), keiner besonderen Widerlegung.

Dagegen mögen einige Worte der oben an letzter Stelle erwähnten Ansicht gewidmet werden, welche zwei, drei u. s. w. als Prädicate der Zahl im Allgemeinen ansieht. Es ist kein Zweifel, dass wir den allgemeinen Anzahlbegriff sehr häufig als Vermittler nehmen. Wir sagen z. B. die Zahl der Aepfel ist drei. In diesem Falle subsumiren wir den concret vorliegenden Inbegriff der Aepfel erst unter den allgemeinen Anzahlbegriff. Indessen ist dies doch ein Umweg, für den es häufig an Anlässen fehlt. Sagen wir z. B. der Aepfel sind drei, so wird unmittelbar dem Inbegriff derselben die Zahl beigelegt.

Anhang zum ersten Theile.

Die nominalistischen Versuche von Helmholtz und Kronecker.

Wir hatten bereits im VIII. Capitel Gelegenheit, eine nominalistische Auffassung der Anzahlbegriffe kennen zu lernen. Sie beruhte auf der Verwechslung des Begriffes Eins mit dem Zeichen 1, welches jedem zu zählenden Gegenstande bei der primitivsten Art der symbolischen Zählung zugeordnet wird. Die Anzahlen sind dann blosse Zeichen für die entstehenden Einsermengen. So schliesst BERKELEY, „dass das, was man als abstracte Wahrheiten und Theoreme über Zahlen ansieht, in Wahrheit auf kein Object geht, das von den einzelnen zählbaren Dingen verschieden wäre, daneben bloss auf Namen und Ziffern, die ursprünglich in keinem anderen Sinne betrachtet wurden, als sofern sie Zeichen sind oder geeignet, auf eine angemessene Weise alle einzelnen Dinge zu bezeichnen, welche man zu zählen nötig hatte". [1]) Während BERKELEY von den primitiven und ursprünglicheren Formen symbolischer Zählung ausgegangen war und die höheren Formen als auf jene gegründet angesehen hatte, nehmen zwei neue nominalistische Versuche, noch mehr an der Oberfläche haftend, von vornherein ihren Ausgang von diesen höheren, uns jetzt alltäglichen Zählungsmechanismen, deren symbolischen Charakter sie gänzlich verkennen, indem sie in ihnen die ursprüngliche Quelle der Zahlbegriffe suchen. Herrührend von grossen Forschern und als die Grundlagen woldurchdachter arith-

[1]) Principles of Human Knowledge. Sect. 122. Vgl. auch Sect. 121. (UEBERWEG, S. 88.) Das „ursprünglich" im Citat richtet sich gegen die Philosophen; sie verkannten den natürlichen und ursprünglichen Sinn der Zahlnamen und -Zeichen, indem sie diese hinterher auf (eingebildete) abstracte Ideen bezogen.

metischer Theorien dienend, beanspruchen sie in besonderem Masse unser Interesse. Sowol v. HELMHOLTZ als KRONECKER zielen mit ihren Analysen auf die Gewinnung der wahren Fundamente der allgemeinen Arithmetik. Diese Seite ihrer Bemühungen müssen wir bei der nachfolgenden Kritik ausser Acht lassen, da wir die Frage nach den eigentlichen Grundbegriffen der allgemeinen Arithmetik bisher noch nicht in Angriff genommen haben.

„Das Zählen," sagt HELMHOLTZ, „ist ein Verfahren, welches darauf beruht, dass wir uns im Stande finden, die Reihenfolge, in der Bewusstseinszustände zeitlich nacheinander eingetreten sind, im Gedächtniss zu behalten. Die Zahlen dürfen wir zunächst als eine Reihe willkürlich gewählter Zeichen betrachten, für welche nur eine bestimmte Art des Aufeinanderfolgens als die gesetzmässige, oder nach gewöhnlicher Ausdrucksweise ‚natürliche' von uns festgehalten wird. Die Bezeichnung der ‚natürlichen' Zahlenreihe hat sich wol nur an eine bestimmte Anwendung des Zählens geknüpft, nämlich an die Ermittelung der Anzahl gegebener reeller Dinge. Indem wir von diesen eines nach dem andern dem gezählten Haufen zuwerfen, folgen die Zahlen bei einem natürlichen Vorgang auf einander in ihrer gesetzmässigen Reihe. Mit der Reihenfolge der Zahlzeichen hat dies nichts zu thun; wie die Zeichen in den verschiedenen Sprachen verschieden sind, so könnte auch ihre Reihenfolge willkürlich bestimmt werden, wenn nur unabänderlich irgend eine bestimmte Reihenfolge als die normale oder gesetzmässige festgehalten wird. Diese Reihenfolge ist in der That eine von Menschen, unseren Voreltern, die die Sprache ausgearbeitet haben, gegebene Norm oder Gesetz. Ich betone diesen Unterschied, weil das angeblich Natürliche mit der unvollständigen Analyse des Begriffs der Zahl zusammenhängt." [1])

„Nach den vorausgegangenen Erörterungen ist jede Zahl nur durch ihre Stellung in der gesetzmässigen Reihe bestimmt. Das Zeichen Eins legen wir demjenigen Gliede der Reihenfolge bei,

[1]) Die psychologischen Erörterungen, welche HELMHOLTZ in Betreff der „Eindeutigkeit der Folge" der Zeichen, und den Zusammenhang derselben mit Zeit und Gedächtniss anschliesst, können wir, als für unsere Zwecke irrelevant, übergehen.

mit dem wir beginnen. Zwei ist die Zahl, welche unmittelbar, d. h. ohne Zwischenschiebung einer anderen Zahl, in der gesetzmässigen Reihe auf Eins folgt. Drei ist die Zahl, die ebenso unmittelbar auf Zwei folgt u. s. w. Ein Grund, diese Reihe irgendwo abzubrechen, oder in ihr zu einem schon früher gebrauchten Zeichen zurückzukehren, ist nicht vorhanden." [1])

In dieser Weise schreitet HELMHOLTZ nun fort. Die Zeichen der von Eins beginnenden festen Reihe können dazu dienen, beliebige Folgen von Objecten zu signiren, unter Anderem auch irgend welche Ausschnitte der „Zahlenreihe" selbst. Hiedurch gewinnt HELMHOLTZ die Möglichkeit, die Addition als eine rein signitive Operation zu definiren, woraus Sätze, oder genauer gesprochen: Zeichenaequivalenzen der Art wie

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1)$$

hervorgehen. Ueberhaupt gelingt es, alle Grundformeln des Rechenalgorithmus der positiven ganzen Zahlen, also diejenigen Formeln, aus welchen alle seine Regeln deductiv hergeleitet werden können, zu erweisen, wobei nur zu beachten ist, dass sie insgesammt als blosse Aequivalenzen gewisser Zeichencomplexe (giltig im Sinne der signitiven Ausgangsdefinitionen) erscheinen.

Aber was soll uns dieses leere Zeichenspiel, wird man verwundert fragen? Auf diese Frage, welche bereits PAUL DU BOIS REYMOND [2]) früheren Bestrebungen von gleicher Tendenz entgegen gehalten hatte, ist HELMHOLTZ wol vorbereitet. „Abgesehen von der damit gemachten Probe auf die innere Folgerichtigkeit unseres Denkens, würde freilich ein solches Verfahren zunächst ein reines Spiel des Scharfsinns mit eingebildeten Objecten sein, . . . wenn es nicht so ausserordentlich nützliche Anwendungen zuliesse. Denn mittelst dieses Zeichensystems der Zahlen geben wir Beschreibungen der Verhältnisse reeller Objecte, die, wo sie anwendbar sind, jeden geforderten Grad der Genauigkeit erreichen können, und mittelst desselben werden in einer grossen Anzahl von Fällen,

---

[1]) Philos. Aufsätze zu ZELLER's Jubil. S. 22—23.

[2]) Allgemeine Functionentheorie S. 50—51. Vgl. übrigens auch MILL's Einwürfe gegen die nominalistischen Theorien der Arithmetik: Logik Buch II, Cap. VI, § 2. (Gomperz' Uebers. I, 274 ff.)

wo Naturkörper unter der Herrschaft bekannter Naturgesetze zusammentreffen oder zusammenwirken, die den Erfolg messenden Zahlenwerte durch Rechnung voraus gefunden.“ Obgleich nun HELMHOLTZ in den späteren Theilen seiner Abhandlung ausführlich auf diese Anwendungen eingeht und die Lösung der Frage: „Was ist der objective Sinn davon, dass wir Verhältnisse reeller Objecte durch benannte Zahlen als Grössen ausdrücken, und unter welchen Bedingungen können wir dies thun?“ als seine Hauptaufgabe betrachtet, [1]) so vermissen wir doch all das, was seine Aufstellungen über den Nominalismus erheben würde.

Die Zahlen sind von HELMHOLTZ zunächst als willkürliche Zeichen definirt. Vergeblich suchen wir aber im weiteren Verfolge seiner Darlegungen, was denn diese Zeichen eigentlich bedeuten. In verschiedenen Fällen können sie die heterogensten Gegenstände signiren, und doch ist die Signatur keine willkürliche. Wo immer wir den Namen Fünf gebrauchen, geschieht es in demselben Sinne. Worin ist es also begründet, dass verschiedenartige Vorstellungsinhalte in demselben Sinne von diesen Zeichen bezeichnet werden? Kurz, welches ist der Begriff, der bei jeder Verwendung der Zeichen vermittelt und die Einheit ihrer Bedeutung ausmacht?

Es ist nicht schwierig, aus der Art der Einführung und Verwendung der HELMHOLTZ'schen Zahlen - Zeichen die übersehenen und sie fundirenden Begriffe zu reconstruiren, wenn wir nur ständig die Frage im Auge behalten, was denn Zeichen solcher Art zu signiren fähig seien. Bei der zählenden Signirung verwenden wir irgend welche Strecken der von Eins beginnenden Zeichenreihe; eine Vielheit von Objecten muss also vorliegen, deren jedes, die Eindeutigkeit der Bezeichnung vorausgesetzt, je eins und nur eins der Zeichen erhält. Durch den als unbeschränkt angenommenen Vorrat von Bezeichnungen können wir nun die Elemente jeder erdenklichen Menge signiren. Soll dies aber nicht ein gänzlich sinnloses Thun sein, so muss an den Dingen oder der Menge selbst etwas sich finden, was durch diese Zeichen

[1]) a. a. O. S. 20.

speciell getroffen wird. Die concreten Inhalte können es nicht sein: sie wechseln von Menge zu Menge. Auch das Eins-sein des Einzelnen nicht; denn die Zeichen, die wir den verschiedenen Einzelobjecten beilegen, sind verschieden und müssen also ein verschiedenes begriffliches Fundament besitzen.

Nur eine Beschaffenheit der Zeichen haben wir noch unbeachtet gelassen: ihre festbestimmte Folge, in welcher sie auch stets (nach Vorschrift) bei der zählenden Signirung in Action treten. Ziehen wir dies in Betracht, dann findet sich sofort die Bedeutung der Zeichen. Ist deren Ordnung das Fundament der Bezeichnung, so muss jedes Zeichen vermöge seiner eindeutig bestimmten Stelle in der Zeichenreihe die entsprechende Stelle des signirten Mengengliedes in der Reihenordnung der ganzen Menge andeuten. Mit einem Worte: jedes Zeichen ist Ordnungszeichen, ist das Zeichen einer Ordinalzahl im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Die Bedeutung jedes Zeichens liegt darnach in seinem Stellenwerte. Eins wäre das Zeichen für das erste Glied einer Reihe als solcher, d. h. für das Anfangsglied. Zwei das Zeichen für das zweite Glied einer Reihe als solcher, d. h. für das auf das erste nächstfolgende Glied. Drei das Zeichen für das dritte Reihenglied, d. h. für das auf das zweite nächstfolgende u. s. w. Es ist klar, dass diese Bezeichnungen auf ungeordnete Mengen an und für sich nicht anwendbar sind. Fehlt indessen eine sachliche Anordnung, dann können dieselben doch mit Rücksicht auf die äusserliche zeitliche Folge, in welcher die Mengenglieder durchlaufen werden, Anwendung finden.

Durch diese Reflexionen haben wir aus den Erklärungen, durch welche HELMHOLTZ seine Bezeichnungen einleitet, und den Anwendungen, die er ihnen im Zählungsprocess vorschreibt, die Begriffe bestimmt, die ihnen zu Grunde liegen müssen und ihre logische Bedeutung ausmachen. Es geht hervor, dass HELMHOLTZ die Begriffe Eins, Zwei, Drei, u. s. w., d. h. die Anzahlbegriffe im gewöhnlichen Sinne des Wortes, mit den Ordinalzahlbegriffen (Erster, Zweiter, Dritter, u. s. w.) verwechselt, abgesehen davon, dass er diese nominalistisch als blosse Zeichen erklärt. Wir können nach dem Ausgeführten also auch nicht zustimmen, wenn er sagt: „die Zahlenreihe ist unserem Gedächtniss ausserordentlich viel fester eingeprägt als jede andere Reihe ... Wir brauchen sie deshalb auch vorzugsweise, um durch Anknüpfung an sie die Erinnerung anderer Reihenfolgen in unserem Gedächtniss zu festigen: d. h. wir brauchen die Zeichen als Ordnungszahlen". [1]) Nicht die Erinnerung anderer Reihenfolgen zu festigen, sondern die Stellungen der Glieder in irgend welchen Reihenfolgen als solchen, und zwar vermöge der abstracten Stellungsbegriffe zu bezeichnen, ist die Function der HELMHOLTZ'schen Zeichen; und es ist dies nicht bloss ihre „vorzugsweise" sondern ihre einzige Function. Jede Verwendung dieser Zeichen bedeutet eine Verwendung von Ordinalzahlen im eigentlichen Sinne des Wortes, sei es direct oder indirect.

Das zuletzt Gesagte wird natürlich auch Geltung besitzen für jene specielle Verwendungsweise der „Zahlenreihe", durch welche HELMHOLTZ den „Begriff der Anzahl der Elemente einer Gruppe" glaubt definiren zu können, und so haben wir ihn denn mit gutem Rechte zu jenen Forschern gerechnet, [2]) welche den Anzahlbegriff als eine blosse Dependenz des Begriffes der Ordinalzahl erklären. Fassen wir nun die HELMHOLTZ'sche Definition selbst ins Auge: „Wenn ich die vollständige Zahlenreihe von 1 bis n brauche, um jedem Elemente der Gruppe eine Zahl zuzuordnen, so nenne ich n die Anzahl der Glieder der Gruppe." [3]) Diese Zuordnung bewirkt eine bestimmte Anordnung der Gruppenglieder, und es ist dann ein Theorem, „dass die Anzahl der Glieder durch Aenderungen der Reihenfolge der Glieder unverändert bleibt, wenn Auslassungen und Wiederholungen derselben vermieden werden."

Entspricht diese Definition wirklich dem uns so wol vertrauten Anzahlbegriffe? Die Zahlenreihe wurde als eine Reihe willkürlicher Signaturen eingeführt. Sollte der Ausdruck ,Anzahl n einer Menge M' wirklich nichts anderes bedeuten, als die Eigenschaft dieser Menge, dass bei irgend einer beliebigen Anordnung und gliedweisen Signirung derselben durch die Reihe jener Zeichen, n das Zeichen des letzten und höchsten Gliedes sei?

Den HELMHOLTZ'schen Zeichen können, wie unsere obigen Analysen ergeben haben, vermöge ihrer besonderen Natur nur

[1]) a. a. O. S. 22. [2]) Vgl. S. 4 d. W. [3]) a. a. O. S. 32.

Ordinalzahlbegriffe entsprechen — sollte vielleicht der Recurs auf diese, von dem grossen Physiker nicht hinreichend gewürdigten Begriffe zu einem besseren Sinn der obigen Definition führen? Auch das kann ich nicht einsehen. Sage ich z. B. die Anzahl dieser Aepfel sei vier, so meine ich doch nicht den Umstand, dass bei irgend einer Anordnung derselben das letzte Element das vierte, sondern eben dass ein und ein und ein und ein Apfel vorhanden sei. Für den wahren Anzahlbegriff, der von einer Anordnung der gezählten Einheiten nichts enthält, ist natürlich das oben erwähnte Theorem ebenso belanglos, wie es vom Standpunkte der HELMHOLTZ'schen Definition unerlässlich ist.

Nach all diesen Ausführungen bedarf es nicht weitläufiger Beweise, dass die auffällige Polemik HELMHOLTZ' gegen die Bezeichnung der Zahlenanordnung als einer natürlichen[1]) nicht triftig sein kann. In keinem Punkte zeigen sich die nominalistischen Misverständnisse, in welche dieser geniale Forscher verfallen ist, deutlicher als hier. Wird es zugegeben, dass die Zahlen nichts anderes sind, als willkürliche Zeichen in willkürlich festgesetzter Anordnung, dann ist allerdings die Bezeichnung dieser Anordnung als einer „natürlichen" irreführend. Jede andere Anordnung der Zeichen hätte ebenso gut als Zahlenreihe angenommen werden können. Indessen diejenigen, welche von einer natürlichen Anordnung des Zahlengebietes sprechen, meinen doch nicht die Anordnung willkürlicher Zeichen, sondern gewisser, durch sie bezeichneter Begriffe. Welche immer wir betrachten, ob die Ordinalzahlen oder die Anzahlen (beide Termini im ächten Sinne genommen), wir erkennen stets, dass die Reihenordnung eine durch die Natur dieser Begriffe selbst begründete ist. Bei den Anzahlen z. B. besteht das Ordnungsprincip darin, dass jede in der Reihe nächstfolgende Zahl um Eins mehr ist als die vorhergehende.

Der nominalistische Versuch KRONECKER's ist von dem soeben besprochenen nicht sehr wesentlich unterschieden, wie man aus folgendem Citat ersieht:

„Den naturgemässen Ausgangspunkt für die Entwicklung des

[1]) Vgl. die unserer Kritik vorausgeschickten Citate.

Zahlbegriffes finde ich in den Ordnungszahlen. In diesen besitzen wir einen Vorrat gewisser, nach einer festen Reihenfolge geordneter Bezeichnungen, welche wir einer Schaar verschiedener und zugleich für uns unterscheidbarer Objecte beilegen können. Die Gesammtheit der hiebei verwendeten Bezeichnungen fassen wir in dem Begriffe der „Anzahl der Objecte", aus denen die Schaar besteht, und wir knüpfen den Ausdruck für diesen Begriff unzweideutig an die letzte der verwendeten Bezeichnungen an, da deren Aufeinanderfolge fest bestimmt ist. So kann z. B. in der Schaar der Buchstaben (a, b, c, d, e) dem Buchstaben a die Bezeichnung als „erster", dem Buchstaben b die Bezeichnung als „zweiter" u. s. f. und endlich dem Buchstaben e die Bezeichnung als „fünfter" beigelegt werden. Die Gesammtheit der dabei verwendeten Ordnungszahlen oder die „Anzahl" der Buchstaben a, b, c, d, e kann demgemäss in Anknüpfung an die letzte der verwendeten Ordnungszahlen durch die Zahl „Fünf" bezeichnet werden." [1])

Sollte also Fünf wirklich nichts anderes sein als ein Zeichen für den Inbegriff der Zeichen: Erster, Zweiter, Dritter, Vierter, Fünfter? [2])

Die Quelle der merkwürdigen Misverständnisse, in welche die beiden berühmten Forscher (wie vordem BERKELEY) verfallen sind, liegt nun, wie bereits eingangs dieser Kritik erwähnt wurde, in der Misdeutung des symbolischen Zählungsprocesses, den wir blindgewohnheitsmässig üben. Wir verfahren dabei so, dass wir den Gliedern der zu zählenden Menge die Zahlnamen mechanisch zuordnen, und dann den letzterforderten Namen als den der gesuchten Zahl ansehen. Wirklich dienen uns die Namen zunächst als eine gedächtnissmässig feste Reihe inhaltsleerer Zeichen; denn ihr begrifflicher Gehalt kommt während der Zählung durchaus nicht ins Bewusstsein. Erst nach Vollendung des Processes tritt, mit Rücksicht auf den eigentlichen Zweck desselben, der (eigentliche oder symbolische) Zahlbegriff ins Bewusstsein als die Bedeutung des

---

[1]) a. a. O. S. 265—66.

[2]) Ein analoger Einwand trifft auch DEDEKIND's Definition der Anzahl. Vgl. oben S. 138 Anm., sowie die Seiten 54, 27 und 21 der dort citirten Schrift DEDEKIND's.

resultirenden Zahlwortes. An den äusserlichen und blinden Process haben jene grossen Mathematiker sich nun gehalten, seine symbolische Function verkannt und so Zeichen und Sache verwechselt. Dass sie mit den Zahlnamen dieselben Begriffe verbinden, wie alle anderen Menschen, ist unzweifelhaft und bei HELMHOLTZ finden sich Stellen genug, die nur mit Beziehung auf die wahren Zahlbegriffe ihre vollverständliche Interpretation erhalten können. Es mussten sehr kräftige wissenschaftliche Interessen sein, welche zu einem so merkwürdigen Uebersehen der Begriffe verleiten konnten. Und sie sind mindestens bei HELMHOLTZ durchsichtig genug: die Meinung, dass nur die Auffassung der allgemeinen Arithmetik als einer consequenten Zeichensystematik all die grossen Schwierigkeiten, welche in dieser merkwürdigen Wissenschaft anhaften, beseitigen könne, musste notwendig die Tendenz erzeugen, die Anzahlbegriffe, die man als ihre eigentlichen Wurzeln zu betrachten pflegt, in nominalistischem Sinne umzudeuten. Es ist hier noch nicht der Ort, auf die eben berührten Fragen näher einzugehen.

ZWEITER THEIL.

DIE SYMBOLISCHEN ANZAHLBEGRIFFE UND DIE LOGISCHEN QUELLEN DER ANZAHLEN — ARITHMETIK.

X. Capitel.

Die Zahloperationen und die eigentlichen Zahlbegriffe.

Nach der Discussion und Lösung der subtilen Fragen, welche mit der Analyse der Begriffe Einheit, Vielheit, Anzahl zusammenhängen, erwächst unserer philosophischen Untersuchung die Aufgabe, die Entstehung einer auf diesen Begriffen ruhenden Rechenkunst psychologisch und logisch begreiflich zu machen, und das Verhältniss derselben zur arithmetischen Wissenschaft zu erforschen.

Die Zahlen in der Arithmetik sind keine Abstracta.

Es wird zunächst nützlich sein, eine logische Schwierigkeit, die sich bezüglich allen Rechnens aufdrängt, zu erledigen. Man sagt 2 und 3 ist 5; aber der Begriff 2 und der Begriff 3 bleibt doch immer der Begriff 2 und der Begriff 3, und nie wird der Begriff 5 daraus. Und welchen Sinn hätte es gar von einem Rechnen mit gleichen Zahlen, von ihrer Addition, Multiplication etc. zu sprechen? Gold und Gold bleibt doch immer wieder Gold; warum bleibt 5 und 5 nicht wiederum 5? Wie könnte man also Zahlbegriffe operativ verknüpfen, da jeder identisch das bleibt, was er ist; und da jeder Begriff an und für sich nur ein einziger ist, wie sollte man gar gleiche Begriffe verknüpfen?

Die Antwort liegt nahe. Der Arithmetiker operirt überhaupt nicht mit den Zahlbegriffen als solchen, sondern mit den allgemein vorgestellten Gegenständen dieser Begriffe;

die Zeichen, die er rechnend verbindet, haben den Charakter auf Grund der Zahlbegriffe gebildeter allgemeiner Zeichen. So bedeutet 5 nicht den Begriff (das Abstractum) Fünf, sondern 5 ist ein allgemeiner Name (resp. ein Rechenzeichen) für irgend eine beliebige unter den Begriff Fünf fallende Menge als solche. $5 + 5 = 10$ heisst soviel als: eine (irgend eine, welche auch immer) unter den Begriff Fünf fallende Menge und irgend eine andere unter denselben Begriff fallende Menge ergeben vereinigt eine unter den Begriff Zehn fallende Menge.

Die Grundbethätigungen an Zahlen.

Verstehen wir unter ‚Zählung' den Process der Zahlbildung, dann können wir sagen: Zahlen entstehen durch Zählung von Vielheiten. Mitunter sagt man auch, sie entständen durch Zählung von Dingen (die natürlich als Glieder einer Vielheit gedacht sind), oder in weiterer Uebertragung, durch Zählung von Einheiten.

Zahlen entstehen aber nicht bloss auf diesem directen Wege durch einfache Zählung, sondern auch auf indirectem durch die Rechnungsoperationen, welche mehrfache Zählungen einschliessen. Die Grundbethätigungen, welche wir an allen Zahlen üben, und durch welche allein wir aus gegebenen Zahlen neue bilden können, sind Addition und Theilung.

Um die erstere zu erklären, pflegt man sich häufig so auszudrücken: Zahlen können nicht nur durch Zusammenzählung von Einheiten, sondern auch durch Zusammenzählung von Zahlen gebildet werden. Dies ist eine misverständliche Ausdrucksweise. Würde man Zahlen zusammenzählen im gewöhnlichen Sinne wie etwa Aepfel, dann ergäbe die Zählung von 2, 3 und 5 nicht 10 sondern 3. Das Zählen, das hier gemeint ist, bezieht sich offenbar nicht auf die Zahlen, wol aber auf die Einheiten der Zahlen und zwar derart, dass die besonderen Verbände, welche die Einheiten in den ‚zusammenzuzählenden' Zahlen bilden, aufgelöst und insgesammt zu Einer Zahl verknüpft werden.

Zahlen können ferner entstehen durch Theilung. Eine jede Zahl ist von Natur aus ein getheiltes Ganzes, die Einheiten sind diese natürlichen Theile. Aber jede Zahl, die 0, 1, 2 ausgenommen, lässt auch noch andere Theilungen zu, Theilungen im arithmetischen Sinne, d. i. in Zahlen.

Die psychologische Grundlage, auf welcher die Addition und Theilung der Zahlen beruht, haben wir im V. Capitel aufgezeigt. Es ist eine Thatsache, dass wir mehrere Inbegriffsvorstellungen zugleich festhalten und collectivisch einigen, also Inbegriffe von Inbegriffen bilden können; und wieder, dass wir einen gegebenen Inbegriff festhalten und doch zugleich Gruppen seiner Elemente durch besondere Inbegriffsvorstellungen einigen, also eine Mehrheit von Inbegriffen innerhalb des gegebenen vorstellen können. Und dasselbe ist auch bei den allgemeinen Inbegriffsvorstellungen, den Zahlen, der Fall.

Die Addition.

Betrachten wir nun die Grundoperationen etwas näher. Addiren heisst durch collective Verbindung der Einheiten von zwei oder mehreren Zahlen eine neue Zahl bilden. Aus Gründen, die wir früher [1]) discutirt haben, fassen die Mathematiker Eins als specielle Zahl auf. Demgemäss erscheint ihnen jede Zahl ihrer inneren Constitution nach als additive Verknüpfung von Einheiten oder Zahlen 1. Formell-arithmetisch betrachtet ist dies richtig: man kann ja die collective Verbindung von Einheiten als den speciellen Fall der Addition gelten lassen, wo alle Addenden gleich Eins sind. Trotzdem ist die Addition von Einheiten keine logische Specialisirung

[1]) Vgl. VIII. Cap. S. 145—47.

der Addition überhaupt. Ohne einen fertigen Zahlbegriff giebt es keinen Additionsbegriff und auch keinen Begriff einer Zahl 1. Es wäre demgemäss sehr verfehlt, die Zahl, wie es oft geschieht, als eine additive Verknüpfung von Einheiten zu erklären, statt als eine collective. Das Verbindungszeichen + zwischen Zahlenzeichen gesetzt, bedeutet die erstere, zwischen Einsen gesetzt die letztere. Dass innerhalb der Arithmetik von dieser täuschenden Doppeldeutigkeit des Zeichens abgesehen wird, ist tief in der Natur dieser Wissenschaft begründet. Wir stossen hier auf das erste Beispiel eines wesentlichen Unterschiedes, den zu urgiren wir noch sehr häufig Grund finden werden, den Unterschied zwischen logischer und mathematischer Allgemeinheit. Mathematisch betrachtet fungirt eine Collection von Einheiten als ein singulärer Specialfall einer Summation beliebiger Zahlen, während doch logisch betrachtet, der Begriff der Summe den der Collection von Einheiten voraussetzt.

Noch eine andere, übrigens verwandte Aequivocation hat zur Verwechslung dieser beiden Verbindungsarten Anlass gegeben, nämlich die in dem Wörtchen Und liegende. Im gewöhnlichen Sprechen dient es nur zur Bezeichnung der collectiven Verbindung; in der sprachlichen Wiedergabe arithmetischer Rechnungen hingegen wird + häufig als ‚und' gelesen. Wir schreiben $7 + 5$ und lesen sieben und fünf. ‚Und' in diesem Sinne deutet die Addition in dem oben definirten strengen Begriffe an. Hält man die beiden Begriffe nicht auseinander, dann kommt man leicht dahin, das +, bzw. das Und in dem zweiten Sinne, in das Und in dem ersten Sinne umzudeuten und so die Meinung des arithmetischen Zeichens zu misverstehen. So glaubt z. B. F. A. LANGE, [1]) die KANT'sche Auffassung des Urtheils $7 + 5 = 12$ gegen-

[1]) Geschichte des Materialismus II³, 119.

über den bekannten Angriffen R. ZIMMERMANN's[1]) dadurch rechtfertigen zu können, dass er 7 + 5 als blosse Verbindung von 7 und 5 deutet, wobei er mit Grund sich auf KANT beruft, der die „Zusammenstellung" der beiden Zahlen anstatt der Addition in jenem zusammengesetzten Zeichen ausgedrückt findet.[2]) Aber es ist ganz unzweifelhaft, dass 7 + 5 nicht die Bedeutung eines Collectivums haben kann, dessen Glieder 7 und 5 sind. 7 + 5 bliebe sonst immer nur 7 + 5 und Sätze wie: 7 + 5 = 8 + 4 = 9 + 3 u. s. w. und ebenso auch der Satz 7 + 5 = 12 wären evident falsch. Also nicht die blosse Zusammenstellung von 7 und 5 bezeichnet das complexe Zeichen 7 + 5, sondern die additive Vereinigung derselben; es bedeutet: eine Zahl, welche zugleich die Einheiten von 7 und diejenigen von 5, und nur diese allein, umfasst. Jetzt gilt wirklich der Satz 7 + 5 = 12 und zwar als ein aus den Begriffen 7, 5, 12 und dem Additionsbegriff als notwendig zu erweisender.

Ein allgemein zu charakterisirender Specialfall der Addition soll den gemeinüblichen Erklärungen zufolge eine neue Grundoperation der Arithmetik begründen. Die Multiplication einer Zahl a mit einer Zahl b pflegt man zu definiren, als die additive Verknüpfung so vieler gleicher Zahlen a, als die Zahl b Einheiten besitzt. Nennen wir das Resultat dieser Operation das Product von a in b, so können wir dieses kurz bezeichnen als eine Summe von b Zahlen a. Die Multiplication von a mit b ist also nicht eine Verknüpfung in der gewöhnlichen Wortbedeutung. Von einer Verknüpfung spricht man nur bei gesonderten Inhalten und bezeichnet demgemäss nicht ein Ganzes als verknüpft mit seinen Theilen.

---

[1]) „Ueber KANT's math. Vorurtheil und dessen Folgen", Sitzungsb. d. Wiener Acad., Bd. 67, H. 3, S. 16 ff.

[2]) Kritik der r. V. Elementarlehre II. Th. I. Abth. I. B. 2. Hauptst. 3. Abschn. (Hartenst. A. III, 157).

Verknüpft wird nicht eine Zahl a mit einer Zahl b, sondern verknüpft werden mehrere — und zwar b — Zahlen a. Das a in $a \times b$ ist ein Plural. 4×3 d. h. vier Dreien, aber nicht vier Dreien schlechthin, sondern vier additiv zu verknüpfende Dreien. [1])

Ist die Multiplication wirklich ein blosser Specialfall der Addition, nämlich der gleicher Addenden? Die Versuchung liegt nahe, dies zu bejahen. Indessen bezeichnet man doch Summen wie

$$a + a, \quad a + a + a, \quad a + a + a + a, \; \ldots$$

nicht als Multiplicationen, bzw. als Producte. Erst durch Zählung der additiven Glieder erlangen wir den Multiplicator und damit die Möglichkeit der Productbildungen

$$2\,a, \quad 3\,a, \quad 4\,a \; \ldots$$

Was ist nun der Zweck einer solchen Unterscheidung von Summe und Product? Wozu neben den Zählungen in den einzelnen Zahlen noch die Zählung dieser selbst? Die Antwort scheint klar: Wie die Zahlen überhaupt als abkürzende allgemeine Zeichen fungiren zur Erleichterung unseres Denkens und Sprechens, so fungiren sie auch als Multiplicatoren. Wie wir zur Abkürzung von complicirten Namen der Form A und A und A und A sagen vier A, so sagen wir zur Abkürzung von $3 + 3 + 3 + 3$ vier mal Drei, wobei die Addition stillschweigend mitverstanden ist.

Darnach scheint der ganze Unterschied zwischen Multiplication und Addition in einer neuen Art der Bezeichnung zu liegen, die bei speciellen Additionsformen möglich ist. Das

---

[1]) Man pflegt das Verhältniss zwischen der Zahl und ihrer Benennung als ein multiplicatives anzusehen. 4 Aepfel = vier mal ein Apfel, wie 4×3 = vier mal eine Drei. In der That findet bei der Multiplication ein Zählen von gleichen Zahlen statt, wie dort ein Zählen von gleichen Dingen. Trotzdem ist beides wol zu unterscheiden. Die Zahlen werden auch addirt, nicht aber die Dinge, zumal die Addition für diese keinen Sinn hat.

Product bietet eine bequem abgekürzte symbolische Vorstellung und Benennung der besonderen Summenformen, in welchen die Summanden gleiche Zahlen sind; sie wird ermöglicht und vermittelt durch die Zählung dieser gleichen Summanden. — Ist dem so, warum spricht man von einer besonderen Operation der Multiplication? Die abgekürzte Bezeichnungsart mag als solche sehr bequem und nützlich sein, aber sie ist doch keine Operation. Sie symbolisirt kurz und praecise die Art, wie die Zahl gebildet werden soll; aber damit spricht sie nur die Aufgabe aus und ergiebt nicht deren Lösung. Die intendirte Zahl wirklich zu erlangen, giebt es keinen anderen Weg, als die der Symbolisirung zu Grunde liegenden Additionen wirklich auszuführen; diese aber unterscheiden sich in nichts von irgend welchen anderen Additionen. Gleiche Zahlen werden nicht anders addirt, wie verschiedene. Und so bleiben wir im Unklaren, warum die Arithmetiker von einem Multipliciren, als einer neuen und fundamentalen Zahlenoperation sprechen.

Ein Product kann man wieder mit einer Zahl multipliciren, das so gebildete Product wieder u. s. f. Wir können. dies in Zeichen ausdrückend, bilden.

$$(a \,.\, b) \,.\, c; \quad ((a \,.\, b) \,.\, c) \,.\, d; \,\ldots.$$

wofür man einfach schreibt

$$a \,.\, b \,.\, c, \quad a \,.\, b \,.\, c \,.\, d, \,\ldots.$$

Auch hier haben wir es mit methodisch abgekürzten symbolischen Vorstellungen und Nennungen complicirter Summenbildungen zu thun, vermittelt durch die successiven Zählungen der gleichen Summanden in den aufeinander gegründeten Stufen. Und auch hier haben wir wiederum blosse Bezeichnungen von Aufgaben und keine Operationen der Ausführung.

Der specielle Fall, wo die Factoren einander gleich sind, wird abermals zum Anlass, von einer neuen Rechnungsoperation zu sprechen: der Potenzirung. Wir finden aber wieder nichts anderes als symbolische Vorstellungen und Signirungen höherer Stufe, vermittelt durch eine neuerliche Zählung, nämlich derjenigen der gleichen Factoren. Die Producte

$$a \,.\, a, \quad a \,.\, a \,.\, a, \quad a \,.\, a \,.\, a \,.\, a, \ldots.$$

erhalten für Denken und Sprechen einen ausserordentlich vereinfachten symbolischen Ausdruck durch Abzählung der Factoren. Die einförmigen und bei erheblicherer Factorenzahl schliesslich unerträglichen (übrigens auch schwer unterscheidbaren) Wiederholungen a mal a mal a mal a ..... ersetzen wir schon im gewöhnlichen Sprechen gerne durch ‚a zwei, drei, ... n mal mit sich multiplicirt'. Diese Ausdrücke lassen sich aber in Zeichen noch sehr vereinfachen. Wir brauchen bloss dem Zeichen a einen Zahlindex beizufügen, der uns symbolisch ausdrückt, wievielmal a als Factor zu setzen sei, und wir haben ein complexes Zeichen, das in aller Schärfe die Bildungsweise der intendirten Zahl ausprägt. Diesem Zwecke dienen die Potenzen der Arithmetik

$$a^2, \ a^3, \ a^4 \ldots.$$

als höchst abgekürzte Schreibungen für die obenstehenden Producte. Schon an ganz einfachen Beispielen ist der Nutzen dieser successiven Symbolisirung augenfällig.

$$4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = (4 \,.\, 4) \,.\, 4 =$$
$$= (4 + 4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4 + 4) +$$
$$+ (4 + 4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4 + 4);$$

nun wäre noch für 4 zu setzen $1 + 1 + 1 + 1$ und die Addition wirklich auszuführen. Mit Grundzahl und Exponenten wächst die Complication, wie man leicht erkennt, ungeheuer schnell, und so wird es klar, dass wir durch dieses einfache Hilfsmittel im Stande sind, in einem kurzen Zeichen additive Verbindungen von einer solchen Complication praecise zu bezeichnen, dass deren wirkliche Schreibung oder Nennung, die doch nur successive erfolgen könnte, nicht in Tagen oder Jahren, wenn überhaupt zu leisten wäre.

Grenzt jedoch nicht eben dieser Umstand den Nutzen der Bezeichnung in enge Schranken ein? Schliesslich handelt es sich doch um die wirklichen Zahlen, also um die wirkliche Addition, die dem Zeichenbau zu Grunde liegt und die bezeichnete Zahl allein ergiebt. Können wir die Addition nicht mehr schreiben und nennen, so können wir sie auch nicht mehr eigentlich denken, geschweige denn sie ausführen. Und gleichwol fühlt sich die Arithmetik durch derartige Schranken gar nicht gehemmt und behauptet rechnen zu können, wo nicht mehr von einem wirklichen Vorstellen, sondern nur von einem indirecten Signiren die Rede sein kann.

Die Theilung.

Die zweite fundamentale Bethätigung, die wir an Zahlen üben können, ist das Theilen. Die Addition verknüpfte eine gegebene Mehrheit von Zahlen zu einer neuen Zahl, die Theilung sondert eine gegebene Zahl in eine Mehrheit von Theilzahlen, und ist somit die inverse Operation zu jener.

Es muss hier auffällig erscheinen, dass die Arithmetiker nur zwei Specialfälle der Theilung als besondere Rechnungsoperationen aufführen: die Subtraction und Division. Eine Zahl b von einer Zahl a subtrahiren, heisst nach Absonderung von b Einheiten aus a die noch übrigen Einheiten in eine neue Zahl c zusammenfassen; diese Zahl c ist das Resultat der Subtraction und heisst die Differenz beider Zahlen. Die Subtraction repräsentirt also die Auflösung der folgenden Theilungsaufgabe: Wenn eine gegebene Zahl a in zwei Theilzahlen derart zerlegt werden kann, dass b die eine derselben ist, welches ist die andere?

Wie kommt es, wird man nun fragen, dass die Arithmetiker, statt der allgemeinen Theilungsoperation, die sie überhaupt nicht beachten, vielmehr die Subtraction, die doch ein blosser Specialfall derselben ist, als die zur Addition inverse Operation ansehen dürfen?

Im ersten Augenblicke möchte man vielleicht geneigt sein, der obigen Subtractionsaufgabe folgende Additionsaufgabe an die Seite zu stellen: Wenn wir zu einer gegebenen Zahl a eine andere b addiren, welches ist die resultirende Zahl? Offenbar soll durch diese Auffassung eine gewisse Bevorzugung des a gegenüber dem b, analog derjenigen des Minuend gegenüber dem Subtrahend, ausgedrückt werden. Aber worin gründet denn diese Bevorzugung? Besteht gegenüber der umgekehrten, b mit a vertauschenden Aufgabe ein Unterschied? Gewiss, antwortet man. Ich kann doch die Summe erzeugen, indem ich einmal mit a beginne und dann die Einheiten des b hinzufüge und das andere Mal mit b beginne und die Einheiten des a hinzufüge. Indessen eben dies können wir nicht zugestehen. So wenig als der Begriff der Zahl, schliesst auch derjenige der Addition von Zahlen etwas von zeitlicher Succession ein. Mit einer ganz anderen als mit einer solchen äusserlichen (logisch zufälligen, obschon psychologisch vielleicht notwendigen) Bevorzugung haben wir es bei dem Verhältniss von Minuend und Subtrahend zu thun. Hier liegt wirklich ein begrifflicher Unterschied, der sich z. B. darin documentirt, dass die Aufgaben a — b und b — a ihrer Möglichkeit nach sich logisch ausschliessen.

Wiederum scheint uns also die Analyse der arithmetischen Grundbegriffe dahin zu drängen, die Auffassung der arithmetischen Wissenschaft als irrig abzulehnen; es scheint nicht anzugehen, die Addition und Subtraction als inverse Operationen zu betrachten.

Aus der Theilung einer Zahl in gleiche Theile entspringt die arithmetische Grundoperation der Division. Die Aufgabe, die hier zu lösen ist, besteht darin, eine Zahl in eine vorgegebene Zahl gleicher Theile zu theilen und den gemeinsamen Zahlenwert der resultirenden Theile zu bestimmen. Dieser Wert ist der ‚Quotient', die zu theilende Zahl der ‚Dividend', die Anzahl der Theile der ‚Divisor'. Z. B.: Es sei 20 durch 4 zu dividiren. Der Erklärung zufolge heisst dies, es ist der gemeinsame Zahlenwert der vier bei der Theilung resultirenden gleichen Theilzahlen zu bestimmen. Die Lösung lautet: 5 ist der Quotient.

Ein in der Arithmetik gänzlich Unerfahrener möchte sich die Ausführung einer Division von a durch n so vorstellen: Man hebe eine Serie von n Einheiten aus a heraus, dann wieder eine Serie von n Einheiten und bilde aus beiden eine Serie von n Zweien; dann hebe man wieder eine Serie von n Einheiten aus a heraus und bilde mit jener eine Serie von n Dreien u. s. w. Ist a durch n dividirbar, dann erhalten wir schliesslich das Product $a = n.q$, welches alle Einheiten von a in die n Theilzahlen q vertheilt, und die Aufgabe ist gelöst. Dass die Arithmetik weit entfernt ist so zu verfahren, ebensowenig als es ihr beifällt, Multiplicationen und Potenzirungen durch wirkliche Berechnung der zu Grunde liegenden Additionen auszuführen, ist bekannt.

Wir unterlassen es, die analogen Bedenken auch für die Radicirung und Logarithmirung, die Umkehrungen der Potenzirung, durchzuführen. Ueberall ergiebt sich derselbe eigenthümliche Widerstreit gegen die Arithmetik, deren Sinn und Wesen sich immer mehr zu verdunkeln scheint, je mehr wir sie aufhellen möchten.

Die Arithmetik operirt nicht mit den ‚eigentlichen' Zahlbegriffen.

Verstehen wir unter Operationen wirkliche Bethätigungen mit und an den Zahlen selbst, dann giebt es keine anderen Operationen als Verbindung und Theilung. Was aber die Arithmetik Operationen nennt, entspricht diesem Begriffe ganz und gar nicht; es sind indirecte Symbolisirungen von Zahlen, welche dieselben bloss durch Relationen charakterisiren, statt sie operativ zu construiren. Handelte es sich aber in der Arithmetik um die wirklichen Zahlen, dann würde die Auswertung dieser Symbolisirungen immer den Recurs auf die ihnen zu Grunde liegenden wirklichen

Bethätigungen, also auf die Ausführung wirklicher Additionen und Theilungen erfordern. Davon ist in aller Arithmetik auch nicht eine Spur zu entdecken.

Wir sind offenbar nicht auf richtigem Wege. Die Voraussetzung, von der wir zunächst als wie von einer selbstverständlichen ausgiengen, nämlich, dass jedes arithmetische Operiren eine Bethätigung mit und an den wirklichen Zahlen sei, kann nicht der Wahrheit entsprechen. Allzu voreilig liessen wir uns von der gemeinüblichen und naiven Ansicht leiten, die den Unterschied zwischen symbolischen und eigentlichen Zahlvorstellungen nicht beachtet und der fundamentalen Thatsache nicht gerecht wird, dass alle Zahlvorstellungen, die wir über die wenigen ersten in der Zahlenreihe hinaus besitzen, symbolische sind und nur symbolische sein können; eine Thatsache, welche Charakter, Sinn und Zweck der Arithmetik ganz und gar bestimmt. Indem auch die Logiker der Arithmetik diesen wichtigen Umstand übersehen oder in seiner Bedeutung nicht gewürdigt haben, musste ihnen notwendig ein tieferes Verständniss dieser Disciplin verschlossen bleiben. Und so finden wir denn fast überall die falsche Lehre vorgetragen, dass aus dem Addiren und Subtrahiren, als wirkliche Bethätigungen aufgefasst, die höheren Operationen durch blosse Specialisirung hervorgehen: Das Multipliciren sei nichts als ein specielles Addiren, das Potenziren ein specielles Multipliciren u. s. w. „Alle Rechnungsarten der Arithmetik,“ sagt z. B. DÜHRING,[1]) „sind nur nähere Bestimmungen der besonderen Combinationen, in welchen die den einfachsten Zeichen Plus und Minus entsprechenden Thätigkeiten eine besonders geartete Anwendung finden. Die reiche Mannigfaltigkeit, die sich an niederen und höheren Operationen ergiebt, betrifft nicht das erste Material oder, mit andern Worten, die sich durch Alles

[1]) E. DÜHRING, Logik S. 249.

hindurchziehende Grundthätigkeit an sich selbst, sondern stellt in diesem Medium nur neue Wendungen dar." Und auf der Möglichkeit vielseitiger Variation dieser „Wendungen" soll die Arithmetik beruhen: „Es gäbe überhaupt keine besondere Arithmetik, wenn eben nicht die verschiedenen Formen, die in der Zusammenfassung von Einheiten möglich sind, in Frage kämen." Schon die oben vorausgeschickten Betrachtungen lassen die Undurchführbarkeit solcher Ansichten erkennen, und wir werden im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen noch directere positive Nachweisungen liefern, dass diese „neuen Wendungen", dass diese verschiedenen „Formen in der Zusammenfassung von Einheiten" nichts weiter sind als Wendungen und Formen der Symbolik, darauf begründet, dass alles Operiren, welches über die allerersten Zahlen hinausreicht, nur ein symbolisches Operiren mit symbolischen Vorstellungen ist.

Hätten wir von allen Zahlen eigentliche Vorstellungen wie von den ersten in der Zahlenreihe, dann gäbe es keine Arithmetik, denn sie wäre vollkommen überflüssig. Die complicirtesten Relationen zwischen Zahlen, welche jetzt nur mühsam durch umständliche Rechnungen entdeckt werden, wären uns in derselben anschaulichen Evidenz mit den Zahlvorstellungen zugleich gegenwärtig, wie etwa Sätze der Art $2+3=5$. Jedem, der weiss, was 2, 3, 5 und die Zeichen $+$ und $=$ bedeuten, leuchtet dieser Satz unmittelbar und mit Evidenz ein. Thatsächlich sind wir aber in unserer Vorstellungsfähigkeit höchst beschränkt. Dass uns hier irgend welche Grenzen gesteckt sind, liegt an der Endlichkeit der menschlichen Natur. Nur einem unendlichen Verstand können wir die eigentliche Vorstellung *aller* Zahlen zumuten; denn darin läge doch schliesslich die Fähigkeit, eine wahre Unendlichkeit von Elementen zu einer expliciten Vorstellung zu vereinigen. Immerhin aber wären endliche Wesen denkbar, die es zur wirklichen Vorstellung der Millionen und Trillionen, ja der Lichtjahre der Astronomen brächten; ein Fall der hinreichte, um der Ausbildung einer Arithmetik jeden practischen Anlass zu benehmen. Ist doch die ganze Arithmetik, wie wir sehen werden, nichts anderes als eine Summe kunstmässiger Mittel, die hier berührten wesentlichen Unvollkommenheiten unseres Intellects zu überwinden. [1])

In Wahrheit sind wir von jenem hypothetischen Idealfall fast um seine ganzen Leistungen entfernt. Nur unter besonders günstigen Umständen können wir noch concrete Vielheiten von ungefähr einem Dutzend Elementen eigentlich vorstellen, d. h. factisch (wie es intendirt ist) jedes ihrer Glieder als ein für sich bemerktes mit allen andern zusammen in einem Acte befassen. [2]) Demgemäss ist auch die Zwölf (oder eine ihr nahe stehende niedrigere Zahl) die letzte Grenze für die Conception der eigentlichen Zahlbegriffe. Trotzdem fühlt sich niemand durch diese Schranken gehemmt, die ja auch erst die psychologische Analyse entdeckt hat. In und ausserhalb der Wissenschaft spricht man so, als könnte man die Reihe der Zahlen ins Unendliche, d. h. über jede erreichte Grenze fortsetzen. Dazu gelten sogar diese Begriffe als die logisch vollkommensten im Bereiche der menschlichen Erkenntniss.

Wie kann man aber von Begriffen sprechen, die man eigentlich nicht hat, und wie ist es nicht absurd, dass auf solchen Begriffen die sicherste aller Wissenschaften, die Arithmetik, gegründet sein soll? Darauf ist zu antworten: Wenn wir die Begriffe auch nicht in e i g e n t l i c h e r, so

---

[1]) Mit Rücksicht darauf stimmt der bekannte GAUSS'sche Ausspruch: „*ὁ θεὸς ἀριθμητίζει*“ nicht mit dem Begriffe eines unendlich vollkommenen Wesens. DEDEKIND paraphrasirt ihn (vgl. das Motto der Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“) in „*ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει*“, was aus anderen Gründen nicht zu billigen ist. Ich würde bloss sagen: *ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.*

[2]) WUNDT, Physiologische Psychologie II^2, 214.

haben wir sie doch in symbolischer Weise gegeben. Die Erörterung dieser wesentlichen Unterscheidung und die psychologische Analyse der symbolischen Zahlvorstellungen soll die Aufgabe der folgenden Capitel bilden.

XI. Capitel.

Die symbolischen Vielheitsvorstellungen.

Eigentliche und symbolische Vorstellungen.

Wir wollen zunächst mit wenigen Worten den für alle weiteren Darlegungen fundamentalen Unterschied zwischen symbolischen und eigentlichen Vorstellungen erläutern.

Eine symbolische oder uneigentliche Vorstellung ist, wie schon der Name besagt, eine Vorstellung durch Zeichen. Ist uns ein Inhalt nicht direct gegeben als das, was er ist, sondern nur indirect durch Zeichen, die ihn eindeutig charakterisiren, dann haben wir von ihm, statt einer eigentlichen, eine symbolische Vorstellung. [1])

[1]) Auf den Unterschied zwischen „eigentlichen" und „uneigentlichen" oder symbolischen Vorstellungen hat F. Brentano in seinen Universitätsvorlesungen von jeher den grössten Nachdruck gelegt. Ihm verdanke ich das tiefere Verständniss der eminenten Bedeutung des uneigentlichen Vorstellens für unser ganzes psychisches Leben, welche vor ihm, soweit ich sehen kann, Niemand voll erfasst hatte. — Die obige Definition ist nicht identisch mit der von Brentano gegebenen. Ich glaubte die Eindeutigkeit der Charakteristik besonders hervorheben zu müssen, um die uneigentlichen Vorstellungen von den allgemeinen wolunterschieden zu halten. In der That wird man die allgemeine Vorstellung ‚ein Mensch' nicht als eine Vorstellung (sei es auch als eine symbolische) von einem

Wir haben z. B. von der äusseren Erscheinung eines Hauses eine eigentliche Vorstellung, wenn wir es wirklich betrachten; eine symbolische Vorstellung, wenn uns Jemand die indirecte Charakteristik giebt: das Eckhaus der und der Strassen und Strassenseiten. Jede Beschreibung eines anschaulichen Objects hat die Tendenz, die wirkliche Vorstellung desselben durch eine stellvertretende Zeichenvorstellung zu ersetzen. Charakteristische Merkmale kennzeichnen den Gegenstand in einer Weise, dass er gegebenenfalls wiedererkannt werden kann, und so können alle Urtheile, die an die symbolische Vorstellung angeknüpft werden, nachher auf ihn selbst übertragen werden. Demgemäss dient uns die symbolische Vorstellung als vorläufiges, in Fällen, wo das eigentliche Object unzugänglich ist, sogar als dauerndes Surrogat für die wirkliche Vorstellung.

Aber nicht bloss anschauliche Gegenstände können symbolisirt werden, sondern auch abstracte und allgemeine Begriffe. Eine bestimmte Species der Röte wird eigentlich vorgestellt, wenn wir sie als abstractes Moment einer Anschauung finden. Uneigentlich wird sie vorgestellt durch die symbolische Bestimmung: diejenige Farbe, welcher so und so viel Billionen Aetherschwingungen pro Sekunde entsprechen. Verbinden wir mit dem Namen Dreieck den Begriff einer geschlossenen, von drei Geraden begrenzten Figur, dann kann jede andere Bestimmung, welche in eindeutiger Ausschliess-

bestimmten Menschen Peter bezeichnen. Sie enthält nur einen Theil der zur Charakteristik des Letzteren geeigneten Merkmale und ist erst durch Hinzutritt weiterer Merkmale so zu vervollständigen, dass wir sie als eine (uneigentliche) Vorstellung des Individuums bezeichnen dürfen, die dann fähig ist, für die eigentliche Vorstellung desselben zu surrogiren. — Ausführlichere Untersuchungen über die symbolischen Vorstellungen und die darauf gegründeten Erkenntnissmethoden gedenke ich in einem Anhange zum II. Bande d. W. mitzutheilen. — Vgl. zu diesem § auch A. Meinong, Humestudien II, 86—88 (Sitzungsber. d. Wiener Acad. d. W. phil.-hist. Classe 1882. CI. Bd. S. 656—58).

lichkeit Dreiecken zukommt, als volles Zeichen für den eigentlichen Begriff eintreten, z. B. diejenige Figur, deren Winkelsumme gleich ist zwei Rechten.

Auch äussere Zeichen können der Symbolisirung dienen. So wird der Unmusikalische unter c^3 sich bloss vorstellen das indirecte Kennzeichen: derjenige Ton, den die Musiker durch das Zeichen c^3 andeuten. Psychologisch betrachtet vermitteln äussere Zeichen überall, wo die Sprache concurrirt; in logischem Sinne aber nur da, wo der Begriff des durch ein äusseres Zeichen zu Bezeichnenden als solches zum wesentlichen Inhalt der symbolischen Vorstellung gehört.

Ich merke noch an, dass die eigentliche und eine ihr zugehörige symbolische Vorstellung in dem Verhältnisse logischer Aequivalenz stehen. Logisch aequivalent sind zwei Begriffe, wenn jeder Gegenstand des einen auch ein Gegenstand des anderen ist und umgekehrt. Dass für die Zwecke unseres Urtheilsinteresses symbolische Vorstellungen im weitesten Masse für die entsprechenden eigentlichen surrogiren können, beruht auf diesem Umstande.

Die sinnlichen Mengen.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir dazu über, die Entstehung und Bedeutung der symbolischen Vorstellungen auf dem Gebiete der Zahl gründlich zu studiren. Zu diesem Zwecke müssen wir vorerst die Function des uneigentlichen Vorstellens für die Bildung von Vielheitsvorstellungen näher betrachten, wobei wir uns auf Vielheiten sinnlicher Inhalte beschränken dürfen.

Eine sinnliche Menge (man gestatte von nun an den bequemen, wenn auch nicht ganz correcten Ausdruck) bietet sich dem heraushebenden Interesse zunächst als eine einheitliche Anschauung, als ein Ganzes dar. Dies unterscheidet aber nicht die sinnliche Menge von dem sinnlichen Einzelding. Auch dieses ist ein Ganzes mit Rücksicht darauf, dass eine nachträgliche

Analyse an ihm eine Vielheit von Theilen, nämlich von Eigenschaften, entdeckt. Indessen in der sinnlichen Menge sind die Theile eben nicht in der Weise von Eigenschaften, sondern in der Weise für sich gesonderter Theilanschauungen enthalten, und zwar sind diese von der Art, dass sie unter den gegebenen Umständen ein vorwaltendes und einheitliches Interesse auf sich lenken.[1]) Eben darum geht unsere ursprüngliche Intention auf die Bildung einer Inbegriffsvorstellung, welche jede dieser Theilanschauungen für sich auffasst und mit den anderen einheitlich zusammenbegreift. Darauf geht unsere Intention, aber ihr vollauf zu genügen, fehlt es bei erheblicheren Mengen an einer entsprechenden Leistungsfähigkeit unseres Geistes. Wol ist noch die successive Einzelauffassung der Mengenglieder möglich, aber nicht mehr ihre zusammenfassende Collection, und sofern wir in derartigen Fällen doch von einer Menge oder Vielheit sprechen, kann dies offenbar nur in symbolischem Sinne geschehen. Häufig halten wir uns aber an symbolische Vorstellungen auch da, wo noch eine eigentliche Mengenvorstellung zu bilden wäre; und wo nicht, leisten wir an eigentlicher Bethätigung auch nicht Alles, was wir könnten. Wir unterlassen die wirkliche Auffassung aller einzelnen Glieder, vollführen nur ganz wenige, wenn überhaupt irgend welche Schritte und begnügen uns so mit einer noch viel uneigentlicheren Subsumption unter den

[1]) In eine Dingvorstellung können wol auch die Vorstellungen physischer Theile eingehen; aber die Aufmerksamkeit ruht hier auf der Verbindung der letzteren mit dem Ganzen, auf ihrer Angehörigkeit zu ihm, was sie zu Merkmalen desselben macht. In ganz anderer Weise gehören die Vorstellungen physischer Theile zu einer Mengenvorstellung. Jeder gilt für sich und nicht als Merkmal des Ganzen. Hier sind die Theile eben anschaulich gesondert, so dass ihre Verbindung innerhalb der Anschauung des Ganzen zurücktritt. Im Uebrigen hängt es, wo scharfe Trennung der Theilanschauungen mangelt, von der Richtung des Interesses ab, ob wir von einer Menge oder einem anschaulichen Dinge sprechen (Ein Baum — eine Menge Zweige).

Vielheitsbegriff, als sonst. Dies findet meist dann statt, wenn die Objecte einander ähnlich sind und uns nur als Angehörige ihrer unmittelbar kenntlichen Gattung interessiren. Die mit einem Blick zu constatirende Thatsache, dass diese hic et nunc gegebene Anschauung eine Vielheit von Dingen der Gattung A sei, befriedigt schon unser Interesse, wofern es nicht auch nach einer exacten Bestimmung des Wieviel verlangt.

Versuche zur Erklärung momentaner Mengenauffassungen.

Schon die Betrachtung nächstliegender Beispiele zeigt, dass in allen Fällen ernste und merkwürdige Schwierigkeiten dem Verständniss der die Symbolisirung vermittelnden Momente im Wege stehen.

Wir treten in einen Saal voll Menschen; ein Blick genügt, und wir urtheilen: eine Menge Menschen. Wir schauen zum Sternenhimmel auf, und in einem Blicke urtheilen wir: viele Sterne. Ebendasselbe gilt für Mengen gänzlich unbekannter Objecte. Wie sind derartige Urtheile möglich? Zur wirklichen Mengenvorstellung brauchen wir nach den früheren Analysen einen psychischen Act, welcher jedes einzelne Glied der Menge für sich und zusammen mit allen anderen vorstellt; also ebensoviele psychische Acte, als Inhalte da sind, geeinigt durch einen psychischen Act zweiter Ordnung. Und nur mit Rücksicht auf diese Form der psychischen Verbindung einzeln aufgefasster Inhalte erlangen die Namen Menge, Vielheit, Inbegriff etc. ihre Bedeutung. Sollten wir etwa in dem einen Ueberblick wirklich die complicirte psychische Bethätigung ausüben und zumal noch auf sie besonders reflectiren? Denn in den obigen Beispielen findet nicht bloss eine Auffassung der Menge, sondern auch eine Subsumption unter den Mengenbegriff statt. Dies wäre doch eine starke Zumutung an unsere psychische Leistungsfähigkeit. Bei absichtlichem Vollzuge einer collectiven Verbindung bringen wir es unter den günstigsten Umständen (d. h. bei Anspannung unserer ganzen psychischen Kraft, unter Voraussetzung besonders leicht merklicher Inhalte, die in einer nicht allzu raschen Succession der Auffassung sich darbieten) nicht über ein Dutzend von Elementen; und hier sollten wir ev. Hunderte ganz mühelos, fast momentan und jedenfalls unbewusst bezwingen. Ich sagte ‚unbewusst'; denn von der blitzschnellen Folge von Sonderauffassungen und Verknüpfungen merken wir nichts, und wir können doch nicht annehmen, es sei eine so umfassende und lebhafte Bethätigung momentan wieder vergessen worden.

Die aufgeworfene Hypothese ist also zu unwahrscheinlich, als dass wir sie zu Grunde legen dürften. Es ist unzweifelhaft, die concrete Vielheitsvorstellung ist hier keine eigentliche, und die Subsumption unter den allgemeinen Begriff der Vielheit, die mit der Verwendung des Namens Menge gegeben ist, konnte nur auf symbolischem Wege erfolgt sein. Aber wo liegt, das ist nun die Frage, der Grund und Anhalt der Symbolisirung?

Zu allererst bietet sich hier folgender Erklärungsversuch dar: Der ‚eine Blick', von dem wir oben sprachen, ist nicht ganz strenge zu nehmen. Die Auffassung ist nicht genau momentan, und wir beobachten mitunter, wie das sich bewegende Auge dieses oder jenes Einzelobject, da und dort eine kleine Gruppe hervorhebt. Statt den ganzen Process der Collection durchzuführen, begnügen wir uns also mit einem blossen Rudiment. Die nächstbesten Einzelobjecte, die sich gerade entgegendrängen, fassen wir auf, verknüpfen sie, brechen aber alsbald wieder ab, indem wir die Surrogatvorstellung bilden: Gesammtcollection von Objecten, welche der eben begonnene Process in seiner vollen Durchführung erzeugen müsste.

Aber nun bildet wieder die Möglichkeit dieser symbolischen Vorstellung die Schwierigkeit. Wie kann die Auffassung und Zusammenfassung einiger weniger Glieder als Zeichen für die intendirte Gesammtcollection dienen? Woher wissen wir, dass der Process der Collection auch nur um einen Schritt fortsetzbar ist, dass ausser dem factisch Colligirten noch etwas zu Colligirendes übrig ist? Woher wissen wir, dass eine ‚Gesammtcollection' zu intendiren sei? Nichts Geringeres wäre dazu nötig, als die bereits vollzogene Subsumption der sinnlichen Mengenanschauung unter den Mengenbegriff. Ist es bereits bekannt, dass die betrachtete Anschauung einer Menge zugehöre, dass an ihr also jene psychischen Bethätigungen geübt werden könnten, die dem Mengenbegriffe eigenthümlich sind, dann mögen wir sehr wol einige wenige Schritte des symbolisch vorgestellten Collectionsprocesses an den erstbesten Theilanschauungen wirklich ausführen und mit dem bekannten ‚u. s. w.' endigen, uns die vollständige Durchführung der wirklichen Mengenbildung sparend. Im entgegengesetzten Falle entbehrte dies alles einer verständlichen Grundlage.

Symbolisirungen durch Vermittlung des vollen Processes der Einzelauffassung.

Die Lösung dieser Schwierigkeiten wird uns leichter fallen, wenn wir vorerst auch die symbolischen Mengenvorstellungen einer genaueren Erwägung unterziehen, in denen die uneigentliche Subsumption unter den Mengenbegriff nicht in momentaner Unmittelbarkeit (bzw. unter blosser Vermittlung der Einzelauffassung weniger Mengenglieder) zu Stande kommt; in denen vielmehr von den eigentlich erforderlichen psychischen Bethätigungen geleistet wird, was überhaupt zu leisten ist, nämlich die successive Auffassung (wenn auch nicht die einheitliche Zusammenfassung) aller Mengenglieder. Es ist zu erwarten, dass diese symbolischen Vorstellungen, als den entsprechenden eigentlichen näherstehend, gewissermassen die Brücke zwischen diesen letzteren und jenen entfernteren Symbolisirungen bilden werden.

Allerdings in einem Acte können wir die successiven Auffassungen der Mengenglieder nicht mehr zusammenhalten. Nur eine kleine Zahl derselben bleibt jeweilig in scharfer Unterschiedenheit im Bereiche der colligirenden Bethätigung. Während immer neue Glieder aufgefasst und angeknüpft werden, entfallen wieder andere von den früher ausgeschiedenen; die sie für sich vorstellenden Acte verschwimmen immer mehr im Hintergrunde des Bewusstseins und verschwinden schliesslich ganz.

Gleichwol besitzen wir von der Einheit des ganzen Processes einen bestimmten Begriff. Ist uns auch nur das letzte und sehr beschränkte Stück wirklich gegenwärtig, so haben wir doch ein Wissen davon, dass dieses Stück nicht der ganze Process sei. Der Gang der Ideenassociation führt uns der Kette entlang wieder zurück zu den früheren Schritten oder mindestens zur Erinnerung, dass frühere Schritte vorgenommen worden waren. In neuerlicher Durchführung mag nun wol der Process die Mengenglieder in anderer Succession berühren; aber es sind doch dieselben Glieder, auf die er sich bezieht, es ist dieselbe Anschauungseinheit, innerhalb welcher er verläuft. Beides wiederzuerkennen sind wir fähig. Es mag auch vorkommen, dass Glieder einmal aufgefasst, das zweitemal übersehen werden; doch steht nichts im Wege, dem Begriffe des Processes die Forderung beizufügen, dass er alle erdenklichen Glieder in sich aufnehme. In häufigen Fällen mangelt es auch nicht (wie wir noch besprechen werden) an Mitteln, den Process so zu sichern, dass kein Mengenglied übergangen sein kann. Und so mögen wir aus alledem die symbolische Vorstellung bilden von einem vollständigen Processe, der in irgend einer Succession (diese ist uns ja gleichgiltig) alle erdenklichen Glieder des anschaulichen Ganzen zur Auffassung bringt.

Die vorgestellte Einheit dieses Processes, welcher, wenn auch nicht als ein Act, so doch als eine Succession die Sonderauffassungen aller einzelnen Glieder verknüpft (bzw. als alle verknüpfend symbolisch vorgestellt wird), kann dann in weiterer Folge als die symbolische Ersatzvorstellung dienen für die eigentlich angestrebte aber unvollziehbare Einheit der wirklichen Collection.

Neue Versuche zur Erklärung momentaner Mengenauffassungen.

Sehen wir nun zu, ob das Verständniss dieser symbolischen Mengenvorstellungen, welche den eigentlichen zunächst stehen, uns wirklich nützen könne für jene entfernteren, mit deren Aufklärung wir uns oben, wenn schon ohne Erfolg, mühten. In einem Blicke, sagten wir, wird bei ihnen der Mengencharakter agnoscirt. Sollte vielleicht die eigentliche oder symbolische Vorstellung des eben beschriebenen Processes, welcher die einheitliche Anschauung in eine Succession von Sonderauffassungen zerlegt, irgendwie zu dieser symbolischen Subsumption unter den Mengenbegriff beigetragen haben?

Die Meinung, dass der eine Blick die blitzschnelle Ausführung eines derartigen Processes der Sonderauffassung bedeute und dann in der oben beschriebenen Weise als symbolischer Vertreter für die eigentlich intendirte Collection diene, wird man aus ähnlichen Gründen ablehnen müssen, wie früher die ihr analoge, dass während der momentanen Auffassung, uns unbewusst, die wirkliche Collection zu Stande komme. Die willkürliche Ausführung des Processes erfordert unter den günstigsten Umständen sehr erhebliche Zeit und um so mehr, je mehr Elemente zu durchlaufen sind. Hier aber soll ein unwillkürliches Durchlaufen in einem Augenblick erfolgen, ob der Mengenglieder viele sind oder wenige. Das ist unannehmbar.

Auch der zweite Erklärungsversuch, den wir oben anstellten, lässt sich analogisch hier übertragen: Statt den ganzen Process durchzuführen, begnügen wir uns mit einem blossen Rudiment. Die nächstbesten Einzelobjecte, die sich uns aufdrängen, heben wir hervor und verknüpfen sie, brechen aber alsbald ab, indem wir die Surrogatvorstellung bilden: Gesammtheit von Objecten, welche der eben begonnene Process in seiner vollen Durchführung zur successiven Einzelauffassung bringen würde.

Aber auch hier misglückt der Versuch und aus ähnlichen Gründen. Wir müssen wieder fragen: wie können die zwei bis drei ersten Schritte des Processes als Zeichen für den angeblich intendirten vollen Process dienen? Woher wissen wir, dass der Process der Sonderauffassung auch nur um einen Schritt fortsetzbar ist? Woher, dass ein ‚voller Process' zu intendiren sei? Es ist klar, dass nichts Geringeres erforderlich wäre als die bereits vollzogene Subsumption der vorliegenden Anschauung unter den Mengenbegriff. Wol genügen die ausgeführten Schritte, um mit Rücksicht auf sie von einer Menge zu sprechen; aber das ist nicht die Menge, um die es sich hier handelt. Der Inbegriff der wenigen aufgefassten Glieder erschöpft nicht die vor uns liegende Mengenanschauung, und davon haben wir von vornherein eine gewisse Erkenntniss. Wir wissen, dass nebst den herausgehobenen Gliedern noch mannigfaltige andere existiren, und eben dieses Wissen giebt erst unserer Vorstellung von einem Processrudiment und einem zu intendirenden vollen Process seinen stützenden Gehalt.

So bleibt die wesentliche Schwierigkeit unverändert bestehen. Wir müssen schon Kenntniss davon haben, dass die vorliegende einheitliche Anschauung eine Menge sei, damit derjenige Begriff, welcher allererst das symbolisirende Moment abgeben und die indirecte Subsumption der Anschauung unter den Mengenbegriff erklären sollte, überhaupt einen verständlichen Sinn erhalte. Es scheint fast, als wären wir nun doch gezwungen, auf die oben abgelehnten unbewussten Processe zurückzugreifen.

Hypothesen.

Nur ein Ausweg ist hier denkbar: es müssen in der Anschauung der sinnlichen Menge unmittelbar zu erfassende Anzeichen liegen, an welchen der Mengencharakter erkannt werden kann, indem sie die Vollziehbarkeit der oben beschriebenen Processe indirect gewährleisten. Mit diesen Anzeichen könnte sich dann der Name und Begriff der Menge auch unmittelbar associiren.

Dass dergleichen Merkzeichen nicht dem einzelnen Mengengliede anhaften können, ist sicher. Jedes Glied könnte auch für sich bestehen und genau als das, was es in der Menge ist; es erhält durch sein Zusammensein mit den anderen kein neues positives Merkmal. — Sollen wir uns etwa an die sinnlichen Relationen halten, welche die Mengenglieder paarweise verbinden? Aber auch sie können die gesuchten Kennzeichen nicht darbieten. Die einzelnen Relationen nicht, aus gleichem Grunde wie die einzelnen Mengenglieder; und alle zusammen erst recht nicht, da ihre Mannigfaltigkeit viel grösser ist als diejenige der sie fundirenden Glieder.

Nur wenn wir annehmen dürften, dass von den die Gesammtmenge umspannenden Relationscomplexen, sei es alle oder einzelne, zu festen Einheiten verschmölzen, welche der ganzen Mengenerscheinung einen unmittelbar merklichen besonderen Charakter, sozusagen eine sinnliche Qualität zweiter Ordnung ertheilten, verhielte es sich anders: diese quasiqualitativen Charaktere, die gegenüber den sie bedingenden Elementarrelationen das *πρότερον πρὸς ἡμᾶς* wären, könnten dann den jeweiligen Anhalt für die Association abgeben. Sie würden indirect die Existenz eines Relationscomplexes und damit diejenige einer sie fundirenden Vielheit von Beziehungspunkten verbürgen. Wären diese Quasi-Qualitäten auch fallweise verschieden, würden sie je nach den mannigfachen Arten und specifischen Differenzen der sie begründenden Elementarrelationen, selbst mannigfach geartet und differenzirt erscheinen, so könnten doch gruppenweise (z. B. den Relationsklassen entsprechend) elementare Aehnlichkeiten zwischen ihnen bestehen, welche dann die Association vermitteln würden. Aber auch die Möglichkeit müssen wir offen halten, dass vielleicht in jedem Falle unmittelbarer Mengenerkenntniss eine einzige, stets gleichartig auftretende Quasi-Qualität dem gewünschten Zweck dienen würde. Wie auch immer, es könnte so wirklich in Einem Blick eine momentane, wenn auch ganz uneigentliche Subsumption unter den Mengenbegriff erfolgen.

Anstatt auf eine Verschmelzung der in der einheitlichen Mengenanschauung enthaltenen (primären) Relationen, könnte man auch auf die etwaige Verschmelzung der anschaulich gesonderten Mengenglieder selbst (eventuell auch noch dieser mit dem ‚Hintergrunde') recurriren, und zwar entweder der Mengenglieder als Ganzer oder irgend welcher abstracter positiver Momente derselben. Da jede solche Verschmelzung eine Relation wäre, so fiele diese Hypothese in den Bereich der vorhergehenden, falls wir annehmen dürften, dass die Gesammtverschmelzung der Theilinhalte selbst ein Verschmelzungsproduct der in ihr denkbaren elementaren Verschmelzungen bilde.

Endlich wäre noch eine dritte Hypothese möglich, welche sowol auf die quasi-qualitativen Charaktere der einen wie der anderen Art sich stützte, indem sie es zuliesse, dass bald die einen, bald die anderen und bald wieder complexe, aus der Verwebung beider Arten hervorgehende Charaktere die fraglichen reproductiven Momente darstellten.

Auch bei den letzten Hypothesen müssen wir, Allem gerecht zu werden, die Möglichkeit freihalten, dass vielleicht Eine, ganz bestimmte (ob einfache oder complexe) Quasi-Qualität den gewünschten Zweck erfülle, indem sie, in jedem Falle unmittelbarer Mengenauffassung auftretend, der Association des Mengenbegriffs den Anhalt gäbe.

Bei der nahen Verwandtschaft dieser Hypothesen können wir die nach ihnen resultirende Erklärung des psychologischen Ursprungs der fraglichen symbolischen Mengenauffassungen einheitlich aussprechen, wie folgt:

Ueberall, wo wir innerhalb einer einheitlichen Erscheinung anschaulich gesonderte Theile vorfinden, deren Gesammtheit in einem successiven Process von Einzelauffassungen herausgehoben, das Ganze schliesslich erschöpft, erlangen wir (wie dargelegt wurde) eine wolbegründete symbolische Vorstellung der, jener einheitlichen Erscheinung entsprechenden Collection; eben da finden wir aber auch stets gewisse markante Kennzeichen, welche, aus der Verschmelzung der Theilinhalte oder ihrer Relationen hervorgehend, nach Art der sinnlichen Qualitäten unmittelbar merklich sind und sich eventuell (falls sie nämlich vielfache Artungen und Differenzirungen zulassen) durch auffallende Aehnlichkeiten sozusagen in „Qualitätskreise“ gruppiren. Indem wir nun von früh auf die durchlaufende Einzelauffassung bei den verschiedenartigsten sinnlichen Mengen übten, mussten sich notwendig diese Kennzeichen (bzw. ihre verschiedenen Artcharaktere) mit dem Begriffe solcher Processe und in weiterer Folge mit dem Mengenbegriffe associiren und so jeweilig die Brücken herstellen für die unmittelbare Anerkenntniss einer zunächst einheitlichen sinnlichen Anschauung der hier betrachteten Art, als einer Menge.

Die figuralen Momente.

So sind wir durch die sorgsame Erwägung der eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche das Verständniss der unmittelbaren Auffassung grösserer Mengen als Mengen darbietet, zu Hypothesen gedrängt worden, die uns die einzigen Rettungsmittel gegen die, hier wenn irgendwo unannehmbare Hypothese unbewusster psychischer Bethätigungen zu sein schienen.

Nun wird Alles vom Zeugniss der Erfahrung abhängen.

Dass sie vor Allem die Existenz von quasi-qualitativen Momenten, der Art wie sie unsere Hypothesen voraussetzen, vollauf bestättigt, zeigen mannigfaltige und beliebig zu vermehrende Beispiele. Man braucht sie nur einmal bemerkt zu haben, um sie überall wiederzufinden. In häufigen Fällen sind sie auch durch die Sprache des gewöhnlichen Lebens deutlich ausgeprägt. Man spricht z. B. von einer Reihe Soldaten, einem Haufen Aepfel, einer Allee Bäume, einer Kette Hühner, einem Schwarm Vögel, einem Zug Gänse u. s. w. In jedem dieser Beispiele ist die Rede von einer sinnlichen Menge unter einander gleicher Objecte, die ihrer Gattung nach auch benannt sind. Aber nicht dies allein ist ausgedrückt — dazu würde der Plural des Gattungsnamens allein ausreichen — sondern eine gewisse charakteristische Beschaffenheit der einheitlichen Gesammtanschauung der Menge, die mit einem Blick erfasst werden kann, und in ihren wolunterschiedenen Formen den wesentlichsten Theil der Bedeutung jener den Plural einleitenden Ausdrücke Reihe, Haufen, Allee, Kette, Schwarm, Zug u. s. w. ausmacht. [1])

In allen Fällen stehen die Verschiedenheiten dieser quasiqualitativen Momente in functioneller Abhängigkeit bald von den inneren Beschaffenheiten der bezüglichen Theilanschauungen, bald von gewissen Relationen und Relationscomplexen, welche die Theilanschauungen mit einander verknüpfen, bald von beiden zusammen. Ja wir werden sogar die Ansicht zu begründen versuchen, dass diese Momente geradezu als Einheiten zu betrachten sind, in welchen die Besonderheiten der Inhalte oder deren primäre Relationen mit einander verschmelzen. Ich sage „ver-

[1]) Dass übrigens auch die sinnliche Gleichheit zu diesen charakteristischen Beschaffenheiten gehört, werden wir bald erweisen.

schmelzen“ und will damit betonen, dass die einheitlichen Momente eben Anderes sind als blosse Summen. Den quasiqualitativen Charakter der ganzen Anschauung erfassen wir als ein Einfaches und nicht als ein Collectivum von Inhalten und Relationen. Aber das für unsere erste Auffassung Einfache stellt sich bei nachträglicher Analyse als ein Vielfaches heraus. Wir finden die inneren und relationellen Besonderheiten, die der bezüglichen Quasi-Qualität zugehören, vor; wir sehen (mindestens in den leichter zu analysirenden Fällen) deutlich, dass sie Theile derselben bilden. Und überall können wir zur Evidenz bringen, dass sie wirklich und ausschliesslich den besonderen Charakter der Quasi-Qualität bedingen. — Fassen wir darnach das ursprünglich einfach Erscheinende als ein wahrhaft Vielfaches, so fassen wir es damit nicht als eine blosse Vielheit. Vielfachheit ist nicht Vielheit schlechthin, sondern eine Vielheit zu einem Ganzen im engsten Sinne des Wortes geeinigter Theile. Es besteht also keine Unzuträglichkeit darin, dass wir das quasi-qualitative Moment in der Weise eines Einfachen herausheben und es nachher doch in eine Vielheit für sich merklicher Theile analysiren sollen.

Beginnen wir nun die nähere Darlegung mit der Betrachtung irgend welcher Objectvertheilungen im Gesichtsfelde.

In Beziehung auf eine solche ist zunächst die Thatsache zu constatiren, dass wir ihre Configuration ganz wie eine Qualität in Einem Blicke erfassen, ohne dass in und mit ihm eine Analyse in die einzelnen die Figur bedingenden Relationen stattfände und stattfinden könnte. Die Behauptung, die Vorstellung der Figur bestände in der Vorstellung der Summe jener Relationen, schlösse ja die im Allgemeinen ganz unerfüllbare Forderung ein, dass wir in einer wirklichen Inbegriffsvorstellung all die einzelnen Punkt-Objecte in ihren wechselseitigen Relationen umfasst hielten. Offenbar lehrt uns erst die nachträgliche Analyse, dass das

Moment der Figur von den und jenen Relationen notwendig bedingt sei. Jede Variation der Lagenrelationen bedingt eine Variation der Figur und umgekehrt; aber die Variation der Figur merken wir, ehe es uns zum Bewusstsein kommt, dass die oder jene Lagen geändert wurden. Besonders deutlich illustriren dies beliebige Fälle von einfachen oder vielfachen Reihenordnungen. Jenachdem die einzelnen Glieder und die einzelnen Reihen sich nähern oder entfernen, gleichen oder ungleichen Abstand, parallele oder geneigte Richtungen annehmen, ändert sich die Anschauung des Ganzen. Unmittelbar leuchtet uns das figurale Moment auf, und erst bei nachfolgender Reflexion merken wir die bedingenden und von Fall zu Fall wechselnden Verhältnisse. [1])

Wir können uns an diesem Beispiel auch klar machen, in welchem Verhältniss die Relationen, von denen wir eben zeigten, dass sie das figurale Moment *bedingen*, zu einander und zu ihm selbst stehen. Zunächst als eine einheitliche abstracte Beschaffenheit der Anschauung drängt sich uns, wie wir eben betonten, der Reihencharakter auf. Bei nachheriger Analyse merken wir aber sehr wol, dass er nichts *Einfaches* sei. Wir erfassen die einfachen Relationen, die je zwei benachbarte Reihenglieder verknüpfen; wir erfassen auch die Relationen zweiter Ordnung, welche *die* Paare ein-

---

[1]) Wie man sieht, ist das, was hier mit dem ‚figuralen Moment' der Anschauung gemeint ist (auch bei der nur vorläufigen Beschränkung auf räumliche Beschaffenheiten), etwas Umfassenderes, als die Figur in dem gewöhnlichen Begriffe der Gestalt (Form) einer räumlichen Anschauung und im Gegensatze zu ihrer Grösse oder Lage; ein Begriff, von dem auch die idealisirende Conception des geometrischen Begriffes der Figur ihren Ausgang nimmt. Jede Verschiebung oder Drehung einer räumlichen Gestalt in unserem Gesichtsfelde bedingt bereits eine Veränderung des Momentes in der Anschauung, welches wir unter den Begriff des figuralen Momentes subsumiren würden. Desgleichen natürlich jede Aenderung der Grösse bei Erhaltung der Gestalt. Allerdings aber springt das, was gemeint ist, wol nirgends so deutlich in die Augen, als bei der Figur im gewöhnlichen Sinne des Wortes.

facher Relationen verbinden, die gewissermassen aneinander grenzen, indem sie ein Fundament individuell-identisch gemein haben. Und nicht erst durch die hinterher kommende beziehende Thätigkeit stiften wir diese Relationen; sie sind da und gehören unzweifelhaft mit zur Einheit der Figur. Dass diese mehr ist als die blosse Summe der Relationen, gestehen wir gerne zu; aber dies gilt doch für jede Einheit, die mehr ist als eine blosse Collectiveinheit.

Man erkennt auch, dass unsere Ausdrucksweise, die Relationen verschmelzen zur Einheit der Quasi-Qualität, ganz correct ist. Die Verschmelzung, die hier vorliegt, ist das genaue Analogon derjenigen, die STUMPF bei den gleichzeitigen Empfindungsqualitäten entdeckt hat. [1]) Thatsächlich finden wir die wesentlichen Bestimmungen des STUMPF'schen Begriffes hier wieder. Vor Allem, das die verschmelzenden Elemente als das, was sie sind, auch ausserhalb einer Verschmelzung auftreten können; und „in ihr werden sie nicht im geringsten verändert, aber es tritt ein neues Verhältniss zwischen ihnen auf, das eine engere Einheit herstellt, als sie zwischen Gliedern einer blossen Summe stattfindet.“ [2])

Auch dass die Verschmelzung in verschiedenen Graden auftreten kann, ist hier zu constatiren; und desgleichen können wir es auch hier als eine Folge der Verschmelzung bezeichnen, dass mit ihren höheren Graden der Gesammteindruck sich unter sonst gleichen Umständen dem einer wirklich einfachen Qualität nähert und immer schwerer analysirt wird. Im vorliegenden Falle bildet der continuirliche Punktzusammenhang den höchsten Verschmelzungsgrad.

---

[1]) Im Uebrigen ist STUMPF selbst eine weitere Geltung des Verschmelzungsbegriffes nicht entgangen, indem er erklärt: „Verschmelzung [ist] dasjenige Verhältniss zweier Inhalte, speciell Empfindungsinhalte, wonach sie nicht eine blosse Summe, sondern ein Ganzes bilden.“ Vgl. Tonpsychologie II, 126.

[2]) a. a. O. S. 64.

Wir haben vorhin schon auf die mannigfachen Variationen hingewiesen, welche das figurale Moment bei Variation der es bestimmenden Relationen erfährt. Sie stehen insgesammt in demselben Verhältniss zu einander, wie die mannigfachen specifischen Differenzen einer Gattung sinnlicher Qualitäten. Wir finden zwischen ihnen elementare, vielfach abgestufte Aehnlichkeiten, woraus sich ein Gattungsbegriff in der strengen Aristotelischen Bedeutung d. W. auslöst. Der allgemeine Begriff der Configuration ist das genaue Analogon des Begriffes einer Gattung von Sinnesqualitäten. Gleichheit bedeutet auch bei den Configurationen nichts anderes als extreme Aehnlichkeit. [1]) Die specifischen Differenzen unseres Gattungsbegriffes hängen ab von der Combination derjenigen der elementaren Abstands- und Richtungsrelationen, die in ihnen verschmelzen, und repräsentiren also ein viel mannigfaltigeres Continuum, als die Species dieser Elementarrelationen selbst.

Bisher haben wir nur die s. z. s. geometrischen Relationen des Abstandes und der Richtung in Betracht gezogen. Aber auf den quasi-qualitativen Charakter irgend welcher Objectvertheilungen im Gesichtsfelde haben auch andere Relationen einen merklichen Einfluss. Die einzelnen Objecte heben sich mehr oder minder scharf von einander und vom anschaulichen Hintergrunde ab, und auch dieses sich Abheben ist ein sinnlich-relationelles Moment, welches vielfache graduelle Abstufungen zulässt und ihnen entsprechend den quasi-qualitativen Charakter der ganzen Mengenanschauung mannigfach beeinflussen kann, wie an naheliegenden Beispielen zu erproben ist. Von einem gewissen Grade der Sonderung hängt sogar die Möglichkeit der Auffassung irgend welcher anderer figuralen Momente, ja die Möglichkeit einer Mengenauffassung selbst ab. Grenzen die Mengenglieder unmittelbar aneinander, füllen

[1]) Vgl. Stumpf, Tonpsychologie I, 111.

sie einen Theil des Gesichtsfeldes ganz aus, so müssen ihre Farbenqualitäten einen gewissen Abstand überschreiten, damit sie nicht in eine unanalysirbare Einheit verschmelzen. Sind dagegen die Mengenglieder über das Gesichtsfeld verstreut, dann gilt dieselbe Bedingung für ihre Farbenqualität im Vergleich mit der des ‚Hintergrundes', während sie unter einander von derselben Qualität sein können.

Die qualitativen Verhältnisse bedingen selbst wieder in mannigfacher Weise den Charakter der ganzen Mengenerscheinung wobei sie oft zu sehr merklichen quasi-qualitativen Momenten verschmelzen, die freilich von dem Momente der Configuration wesentlich bedingt zu sein pflegen. Ein charakteristischer Fall ist z. B. der der qualitativen Reihe in Verschmelzung mit der Reihe im örtlichen Sinne. Bilden dieselben Objecte eine andere Configuration, dann wird im Allgemeinen auch der Charakter der Farbenconstellation ein ganz anderer sein. Nur wenn die Objecte gleichfarbig sind, beeinflusst das Moment der Configuration nicht das der Qualität.

Die qualitative Gleichheit und so überhaupt die sinnliche Gleichheit der ganzen Mengenglieder ist eines der hervorstechendsten quasi-qualitativen Momente. Dass wirklich die sinnliche Gleichheit ein derartiges Moment begründet, erkennt man an jedem Beispiele. Sie giebt dem anschaulichen Mengenganzen einen specifischen Charakter, der zur Geltung kommt, ohne dass jedes Einzelding mit jedem andern verglichen würde. Wir urtheilen in einem Blick: eine Menge Aepfel, Nüsse, Menschen u. s. w., ohne die zugehörigen $\frac{n(n-1)}{2}$ Vergleichungen vornehmen zu müssen, und meist ohne es wirklich zu können. Die Erinnerung an frühere Vergleichungen kann uns hiebei nicht leiten; denn (um nur das Eine zu erwähnen) auch bei Mengen ganz unbekannter Objecte bedarf es solcher erschöpfenden Vergleichung ganz und gar nicht.

Wir hatten bisher nur ruhende Objectvertheilungen im

Gesichtsfelde betrachtet; aber auch jede Art von Bewegung oder qualitativer Veränderung der Einzelobjecte ertheilt dem Ganzen einen unmittelbar merklichen quasi-qualitativen Charakter. In einigen unserer Beispiele ist dieser auch sprachlich ausgedrückt, wie wenn wir von einem Schwarm (Vögel) sprechen. Im Uebrigen erkennt man die Besonderheit und unmittelbare Fassbarkeit dieses Momentes überall, sowie man nur einmal darauf achtsam geworden ist. — Und eben solche Momente entspringen, wie es scheint, aus allen anderen primären Relationen, die in den Bereich des Gesichtssinnes fallen.

Ausser den Relationen sind auch die inneren Beschaffenheiten der Theilanschauungen als verschmelzende Elemente wirksam. Unzweifelhaft tritt dies hervor an Beispielen vom Charakter des Schachbrettmusters. Die Configuration der schwarzen Felder ist genau gleich derjenigen der weissen. Innerhalb einer jeden sind die Felder nach Form, Grösse und Farbe unter einander gleich und begründen so im einen wie im andern Falle ein figurales Gleichheitsmoment. Trotzdem ist der einheitliche Gesammtcharakter der beiden Erscheinungen ein scharf unterschiedener, und dies eben vermöge der beiderseits unterschiedenen Farbe der Felder.

Analoges gilt auch für die figuralen Momente der gesonderten Theilanschauungen. Jede Veränderung derselben, z. B. der Grösse und Form der einzelnen Mengenglieder verändert auch den unmittelbaren Charakter der Gesammterscheinung.

All das, was wir hier für Mengen innerhalb des Gesichtsfeldes ausgeführt haben, lässt sich offenbar auf alle Arten sinnlicher Mengen übertragen; desgleichen auf Mengen überhaupt, sei es in der Phantasie vorgestellter sinnlicher Objecte, sei es psychischer Acte. Bei den letzteren bildet z. B. die zeitliche Folge und überhaupt die zeitliche Configuration (das genaue Analogon der räumlichen) ein derartiges Moment.

Es wäre vielleicht nicht unpassend, für diese den Sinnesqualitäten analogen Eigenthümlichkeiten einheitlicher Anschauungen — in Anknüpfung an ihren markantesten Specialfall — den Terminus figurales Moment zu wählen.

Von einem jeden dieser figuralen Momente der Mengenanschauungen gilt dasselbe, was oben für das räumlichfigurale sichtbarer Mengen dargelegt wurde: Einem jeden kommt nebst seinem specifischen, ein gewisser Gattungscharakter zu.

Die verschiedenartigen figuralen Momente treten, ihren specifischen Differenzen entsprechend, in den mannigfachsten Mischungen oder genauer: Verschmelzungen auf. In der bezüglichen Anschauung einheitlich verschmolzen, werden sie erst durch Abstraction gesondert. Das Moment der zeitlichen Configuration z. B. verschmilzt mit dem Qualitäts- und Intensitätsmomente, und das Gemisch hat zunächst einen einheitlichen Figural-Charakter, der erst durch Analyse in seine Componenten zerfällt. Ein complicirtes Gemisch solcher Art enthält eine Melodie. Ein ganz einfaches Beispiel bietet eine Reihe gleicher Gesichtsobjecte. Man sondert hier sehr leicht das Reihenmoment und das Gleichheitsmoment.

Während die Vereinigung figuraler Gattungscharaktere bei der Bildung von allgemeinen Mengenvorstellungen, von Mengenarten s. z. s., eine erhebliche Rolle spielt (man erwäge die allgemeine Bedeutung von Namen wie: Reihe, Schwarm, Kette, Haufen etc.), ist es die Vereinigung ihrer besonderen Differenzen, die der anschaulichen Menge ihr individuell-einheitliches Gepräge giebt.

Der abstrahirenden Hervorhebung setzen die verschiedenen figuralen Momente einen verschiedenen Widerstand entgegen. Das eine wird leichter, das andere schwerer bemerkt; manches kommt überhaupt nicht zu selbständiger Auffassung, und seine

Existenz kann nur indirect erschlossen werden auf dem Wege der Variation der gesammten Quasi-Qualität bei der Variation der sie bedingenden Elemente. Wir können hier von einem verschiedenen Grade der Verschmelzung sprechen, welche die verschiedenen Figural-Momente eingehen. Einen besonders kräftigen Reiz üben auf das isolirende Bemerken alle Arten von Reihen, Ordnungen, Systemen und alle aus Abstands- und Richtungsrelationen aufgebauten Configurationen, von denen die räumlichen nur einen Specialfall bilden. Beispiele liefern noch Complexe von Zeitpunkten, Intensitäten und sinnlichen Qualitäten.

Wo eine Vielheit gesonderter Objecte in einer Anschauung sich zusammenfindet, da concurriren die figuralen Momente, welche zu allen erdenklichen Theilvielheiten derselben gehören. Indem wir eine bestimmte Menge in anschaulicher Einheit herausheben, siegt eben dasjenige, welches den stärksten Reiz auf unsere Auffassung ausübte. Mitunter ist dieser Sieg nur ein momentaner: wir erfassen bald diese bald jene Menge innerhalb der Gesammtanschauung, der sie alle angehören, je nachdem das figurale Moment dieser oder jener überwog.

Entscheidung.

Für unsere Zwecke bedürfen wir nicht einer allseitigen Erforschung dieser merkwürdigen und bisher fast gar nicht beachteten [1]) Eigenthümlichkeiten einheitlicher Phaenomene

[1]) Die vorstehenden Untersuchungen waren nahezu ein Jahr ausgearbeitet, als die scharfsinnige Arbeit von EHRENFELS über Gestaltqualitäten (Vierteljahrsschrift f. wiss. Philos. 1890. 3. Heft) erschien, in welcher die oben nur gelegentlich, im Interesse der Erklärung indirecter Mengenauffassungen, untersuchten figuralen Momente einer umfassenden Untersuchung unterworfen werden. Leider ist mir die genannte Abhandlung, während ich diese Blätter für den Druck vorbereite, nicht zugänglich, so dass ich eine nähere Beziehung auf sie unterlassen muss. EHRENFELS wurde, wie er gleich zu Eingang seiner Darstellung ausspricht, durch E. MACH's „Beiträge zur Analyse der Empfindungen"

und speciell der sinnlichen Mengen. Was wir ausgeführt haben genügt, um uns der Existenz der figuralen Momente zu versichern, von denen unsere Hypothesen zur Erklärung symbolischer Mengenauffassungen Gebrauch machten.

Welcher von den Hypothesen sollen wir nun den Vorzug geben? Die erste reflectirte bloss auf figurale Momente, die aus der Verschmelzung von Relationen, die zweite bloss auf solche, die aus der Verschmelzung der absoluten Inhalte hervorgehen. Beiderlei Momente treten jedoch in so innigem Connex auf, dass wir uns von vornherein der dritten Hypothese zuneigen werden, welche Momente beider Art, eventuell in einheitlicher Verschmelzung zulässt.

Die Annahme (welche alle Hypothesen offen hielten), dass c o n s t a n t e, in jedem Falle unmittelbarer Mengenerkenntniss zu Tage tretende Momente die Association des Mengenbegriffes vermitteln, werden wir wol ablehnen müssen, obschon es an solchen Momenten nicht fehlen mag. Hieher gehört z. B. das Sonderungsmoment; denn von einer sinnlichen Menge ist nur da die Rede, wo innerhalb einer einheitlichen Erscheinung die Elemente sich von einander, bzw. vom Hintergrunde deutlich abheben. Solche Momente treten aber stets in Verschmelzung mit anderen, unter Umständen kräftigeren Momenten auf, und es ist zur Erklärung der fraglichen Mengenauffassungen nicht erforderlich, dass erst Analyse einträte, und die Association des Mengenbegriffes gerade immer unter Vermittelung jener ersteren constanten Momente erfolge. Indem besonders auffallende figurale Momente beider Art (wie z. B. die Configuration im engeren Sinne in Verschmelzung mit dem Gleichheits- oder Qualitätsmoment) zur Heraushebung einheitlicher Mengenanschauungen

(1886) zu seiner Untersuchung angeregt. Da ich diese Schrift des geistvollen Physikers gleich nach ihrem Erscheinen gelesen hatte, so ist es wol möglich, dass auch ich durch Reminiscenzen aus dieser Lecture in dem Gange meiner Gedanken mitbeeinflusst war.

den Anstoss gaben und in weiterer Folge der Process gliedweiser Auffassung sich anschloss, musste sich notwendig der symbolische Mengenbegriff mit ihnen, oder vielmehr mit ihren typischen Gattungscharakteren associiren, ohne dass erst eine Analyse in die Partialmomente und ein Herausheben irgend welcher, überall gemeinsamen stattfinden musste.

Haben wir den durchlaufenden Process der ausschöpfenden (oder vermeintlich ausschöpfenden) Einzelauffassung an vielen discreten Objectvertheilungen im Gesichtsfelde geübt, so erkennen wir schliesslich eine jede neue, auch ohne dieses Mittel, sofort als Menge. Die Analogie aller Configurationen unter einander oder die Analogie in Beziehung auf complexe Momente, die leicht kenntliche Mengenarten begründen, vermittelt die Association. Bei Mengen innerhalb anderer Sinnesfelder mögen uns andere Momente dienen; aber stets wird die Aehnlichkeit innerhalb gewisser Qualitätskreise s. z. s. den nächstliegenden Anhalt für die Association bieten. Deutlich ist dies auch an den Beispielen, von deren Betrachtung wir ausgiengen, wo die Figuralcharaktere zu besonderen Namen wie: Reihe, Heerde, Schwarm etc. führten. Nie sind zwei Reihen, Heerden, Schwärme einander genau gleich; aber ihre Aehnlichkeit begründet die Gattungsbegriffe, welche unmittelbar erkannt, nun auch die unmittelbare Erkenntniss des Mengencharakters vermitteln.[1])

---

[1]) Unsere Theorie der uneigentlichen Mengenauffassungen erklärt auch die von STUMPF bemerkte Thatsache, dass „die richtige Unterscheidung einer Mehrheit von einer anderen bereits eine höhere Leistung sei, als das Wahrnehmen einer Mehrheit überhaupt" (Tonpsychologie II, 371). Dieses Wahrnehmen ist eben in der Regel ein symbolisches, vermittelt durch den Figuralcharakter der ganzen anschaulichen Mengeneinheit, und es findet dann keine Sonderauffassung der Mengenglieder statt, wie sie behufs einer exacten Vergleichung der Menge mit anderen Mengen oder behufs ihrer Zählung (die STUMPF in der obigen Stelle besonders im Auge hat) im Allgemeinen erforderlich sein wird. Und es ist sehr wol möglich, dass ein figurales Moment reproductiv noch wirksam

Die psychologische Function der Fixirung einzelner Mengenglieder.

Die Conception der hier betrachteten uneigentlichen Mengenvorstellungen pflegt von einigen Schritten der Einzelauffassung irgend welcher Mengenglieder begleitet zu sein. Es ist nicht ohne psychologisches Interesse, die besondere Function dieses Processes genauer zu zergliedern.

Er liefert einerseits eine Annäherung an die wirkliche Mengenbildung und an die wirkliche Subsumption unter den Mengenbegriff, indem die erforderlichen psychischen Bethätigungen mindestens an einigen herausgegriffenen Gliedern wirklich ausgeführt werden. Das Processrudiment dient dann, unseren früheren Ausführungen gemäss, als Zeichen für den intendirten vollen Process, wobei die einheitliche Figural-Qualität der Mengenanschauung uns der Fortsetzbarkeit des angefangenen Processes versichert, zumal die anschauliche Mengeneinheit der herausgehobenen Glieder als Theil der gesammten Mengenanschauung erkannt wird.

Andererseits giebt die Einzelauffassung uns auch den Gattungsbegriff der Glieder. Ja sie bestimmt häufig erst die Aussonderung des Mengenganzen. Sowie das Interesse sich einem Dinge bloss vermöge einer gewissen Beschaffenheit zuwendet, leuchtet mit einem Male der Gesammtinbegriff der noch im anschaulichen Hintergrunde unbemerkt gebliebenen Objecte dieser Gattung auf, wofern sie sich nur scharf genug abheben, um überhaupt eine leicht merkliche Mengeneinheit bilden zu können; und je nachdem das Interesse bald dem, bald jenem Gattungsbegriff sich zuwendet, zieht es mit ihm bald die, bald jene Mengeneinheit aus dem unanalysirten Hintergrund hervor. Die Verschmelzung der gleichartigen Inhalte in der Anschauung bildet eben schon vor aller Analyse eine gewisse Einheit und

sei, selbst wenn die Mengenglieder in der Anschauung so innig verschmolzen sind, dass ihre deutliche Sonderauffassung überhaupt unmöglich wird.

vermittelt dadurch diese eigenthümliche Art der Association. Der einzelne Inhalt hängt gewissermassen an einer Kette, die er nach sich zieht, sowie er zu besonderem Bewusstsein kommt. Achten wir z. B. auf ein weisses Feld des Schachbrettes, so tritt die ganze Configuration der weissen Felder hervor; achten wir auf ein schwarzes, so die der schwarzen. Und umgekehrt: wollen wir die eine oder andere Configuration festhalten, so müssen wir mindestens ein einzelnes ihrer Felder fixiren. Achten wir auf eine Zeile dieser Seite, dann taucht schon die ganze Zeilenreihe hervor; heftet sich zufällig das Interesse an den weissen Zwischenraum zweier Zeilen (wie bei der Schätzung ihrer Distanz), dann ist es die Reihe dieser Streifen, die einheitlich hervortritt. Parallelstreifen in abwechselnder Färbung, Reihen mit Gliedern abwechselnder Gestaltung bieten überhaupt deutliche Beispiele.

Ich erwähne schliesslich, dass im Verlaufe des rascheren Denkens häufig auch die äussere Anschauung ohne irgend welche rudimentäre Processe, bloss vermöge ihres figuralen Charakters zum symbolischen Vertreter der eigentlichen Mengenvorstellung werden kann. Sprechen wir z. B. im Hinblicke auf eine gewisse Anschauung von einem Regiment Soldaten, einer Allee Bäume u. dergl., dann fehlt in der Regel die wahre Pluralvorstellung, und nur die unbearbeitete Anschauung ist da. Sowie es aber im Verlaufe des weiteren Denkens notwendig wird, beginnt das Spiel der psychischen Bethätigungen, die der Plural ausdrückt.

Worin liegt die Gewähr für die Vollständigkeit der durchlaufenden Einzelauffassung einer Menge?

In den bisher betrachteten Fällen findet das auffassende Interesse sein Genüge daran, dass eine durch den äusseren Rahmen der Anschauung (d. i. durch ein sich entgegendrängendes figurales Moment derselben) umgrenzte Vielheit von Objecten einer bestimmten Gattung gegeben sei. In anderen Fällen aber ist das Interesse jedem der umrahmten Einzelobjecte zugewendet, und es zielt daher auf das erschöpfende Durchlaufen aller dieser Objecte. Wie dergleichen zu Stande kommt, wäre wieder ohne den Recurs auf die figuralen Momente der Anschauung eine unlösbare Frage. Nachdem die eigentliche Collection bei erheblicheren Mengen eine Unmöglichkeit ist, woher die Gewissheit, wirklich alle Glieder derselben aufgefasst zu haben? Die richtige Beantwortung dieser Frage ist für die Psychologie des Zählungsprocesses von besonderer Wichtigkeit, denn sie beantwortet zugleich diejenige nach der Möglichkeit einer vollständigen Durchzählung.

Es sind nun wieder gewisse figurale Beschaffenheiten innerhalb der einheitlichen Mengenanschauung, welche unserem sonderauffassenden Interesse einen geregelten und sicheren Gang ertheilen. Besitzt z. B. die Menge den Charakter einer einfachen Reihe, dann sind es die Verknüpfungen der elementaren Reihenrelationen (und das sind selbst figurale Momente), die uns anleiten. Ist die Reihe begrenzt, so beginnen wir mit einem der Randglieder; denn diese üben, unter sonst gleichen Umständen, den ersten und kräftigsten Anreiz auf das heraushebende Interesse. Das Randglied gehört einer ersten Elementarverknüpfung an, die in der Weise eines einheitlichen Figuralmomentes der Auffassung sich entgegendrängt. Durch Analyse derselben gelangen wir zum ersten Nachbargliede; in diesem verkettet sich mit der ersten eine neue Elementarverknüpfung; an der Hand derselben gelangen wir zum zweiten Nachbargliede u. s. w. Indem uns stets zwei aneinandergrenzende Verknüpfungen zugleich und zwar als wolgesonderte gegenwärtig sind, kann die neue als solche erkannt werden, und der Fortschritt wird zu einem eindeutig bestimmten. Diese Eindeutigkeit gewährleistet aber die Vollständigkeit der durchlaufenden Einzelauffassung.

Nicht viel complicirter liegt die Sache in dem Falle einer Doppelreihe. Die Gesammtmenge zerfällt hier sofort in eine Menge von Mengen, deren jede durch ein besonderes figurales Moment (das Reihenmoment) als solche gekennzeichnet ist, während ihre Gesammtheit wiederum durch solch ein Moment eben als Menge von diesen Mengen sich ausweist. Der Fortschritt von Reihe zu Reihe, und in jeder Reihe der Fortschritt von Glied zu Glied ist aus analogen Gründen wie im vorigen Beispiel ein eindeutig bestimmter, sobald nur jeweilig eine Randreihe als Ausgangsreihe und in ihr, wie in jeder folgenden ein Randglied als Anfangsglied gewählt ist.

Aehnlich verhält es sich nun ganz allgemein bei beliebigen Mengen. Entweder die gegebene Menge besitzt von vornherein nicht bloss ein sie als Ganzes auszeichnendes Figuralmoment, sondern auch natürliche oder bei den herrschenden Denkgewohnheiten sich aufdrängende Gliederungen, bedingt durch besondere Figuralmomente; diese scheiden Theilmengen in ihr aus und lassen die Gesammtmenge als eine übersichtlich geordnete Summe von Mengen erscheinen, zu welcher Ordnung natürlich wieder ein figurales Moment die Möglichkeit giebt. Oder die Menge ist zunächst ohne jede klare Gliederung und Ordnung; ein Fall, in welchem wir künstlich nachhelfen müssen durch willkürliche Gruppenbildung und Anordnung der Gruppen, wobei wir häufig zur grösseren Sicherheit des Verfahrens äussere Merkzeichen herbeiziehen, wie die Umrahmung durch Grenzlinien, die Numerirung der Gruppen u. dgl. Hiebei müssen die Gruppen so gewählt sein, dass der Fortschritt von Glied zu Glied hinreichend bestimmt ist, um die Vollständigkeit der Auffassung ihrer sämmtlichen Glieder zu verbürgen. Vermöge des geordneten Zusammenhanges der Gruppen unter einander ist dann auch ein erschöpfendes Durchlaufen der Glieder der Gesammtmenge gesichert.

Auffassung eigentlich vorstellbarer Mengen durch figurale Momente.

Ehe ich diesen Gegenstand verlasse, bemerke ich noch, dass auch bei der Auffassung kleiner Mengen, bei welchen noch von eigentlicher Collection gesprochen werden darf, figurale Momente oft eine nicht unerhebliche Rolle spielen. Jede, auch die kleinste Gruppe, z. B. von Gesichtsobjecten (und so von sinnlichen Inhalten überhaupt), ist durch ein figurales Moment als anschauliche Einheit charakterisirt, und so bestimmt dieses den Rahmen für unsere successiven Einzelauffassungen. Ferner: selbst bei Mengen von vier oder fünf Objecten findet häufig, obschon nicht notwendig, eine Gliederung in Untergruppen statt. Wir fassen sie dann auf in der Form 2 + 2, bzw. 2 + 3 oder 2 + 2 + 1. Bei Mengen, deren Elementenzahl grösser ist als fünf, sind solche Gliederungen geradezu eine Notwendigkeit, soll überhaupt eine wirkliche Mengenauffassung zu Stande kommen; und wo solche Gliederungen vermöge der Natur der Anschauung sich nicht von selbst aufdrängen, müssen wir sie künstlich in sie hineintragen.

Dass in derartigen Auffassungsformen eine Erleichterung liegt, ist eine unzweifelhafte aber auch merkwürdige Thatsache. Danach erscheint die Auffassung einer Collection von Collectionen leichter als die Auffassung einer einfachen, ungegliederten Collection, obgleich im ersteren Falle psychische Acte höherer Ordnung erforderlich sind als im letzteren (99). Indessen werden die psychischen Acte, die dort in Frage kommen, ausserordentlich erleichtert durch die figuralen Momente, welche die Inhalte der Gruppen charakteristisch verknüpfen. Um z. B. eine deutliche Auffassung von sechs aufeinanderfolgenden Glockenschlägen zu erhalten, gliedern wir dieselben in zwei Gruppen zu je drei Schlägen. Durch abgestufte Betonung erregen wir hiebei, den Gruppen entsprechend, besonders merkliche Figuralmomente (jedes gemischt aus einem intensiven und einem zeitlichen Moment), welche als parallellaufende Primär-Verknüpfungen den Gruppencollectionen s. z. s. einen festen Rahmen, einen äusseren Halt geben; zudem, wie es scheint, der colligirende Act mit der entsprechenden Figuralqualität eine Association eingeht. Durch solche Mittel bewältigt man noch Mengen, die in ungruppirter Form als wirkliche Collectionen nicht mehr festzuhalten wären, indem vielleicht an der Einförmigkeit ihrer Composition das verknüpfende Interesse erlahmen würde.

Immerhin muss man aber in dieser Art entstandene Mengenvorstellungen noch als eigentliche gelten lassen, da wirklich in einem Acte alle Glieder zu expliciter Vorstellung geeinigt erscheinen. Die stützenden figuralen Momente gehören hiebei wol mit zum psychologischen, nicht aber zum logischen Gehalte der Vorstellung. Wie von der zeitlichen Folge, so können wir auch von den figuralen Momenten, welche, sei es die Gesammtmenge, sei es Untergruppen derselben auszeichnen, abstrahiren und auf das blosse Zusammen der Glieder in einer Vorstellung achten; und dies müssen wir auch thun, wenn die eigentliche Meinung der Mengenvorstellung in Frage ist.

Die elementaren Vielheitsoperationen und -Relationen in Uebertragung auf symbolisch vorgestellte Vielheiten.

Auf symbolisch vorgestellte Vielheiten kann man, wie leicht einzusehen, auch die Begriffe der elementaren Operationen und Relationen übertragen, wobei oft wieder die figuralen Momente vermitteln werden. Sind uns z. B. mehrere sinnliche Mengen zugleich gegeben, durch die bekannten symbolisirenden Momente als solche taxirt, dann kommt ihnen auch eine anschauliche Gesammteinheit zu, vermöge eines sie alle umfassenden figuralen Momentes, welches das Ganze wieder als Menge charakterisirt. Dieses sinnliche Verhältniss der Anschauungen liefert einen gewissen Anhalt für die Symbolisirung der additiven Verknüpfung zwischen den zugehörigen wirklichen Collectionen. Ebenso können wir den Begriff von Theilmengen in Beziehung auf eine vorgelegte anschauliche Menge bilden. Die ganze Anschauung gliedert sich in Theilanschauungen, von denen jeder ein wolbemerkbares und sie als Menge charakterisirendes Figuralmoment zukommt. Das sinnliche Theilungsverhältniss mag wieder als Anhalt für die Symbolisirung des intendirten wirklichen Mengenverhältnisses dienen. Im Hinblick auf diese Sachlage können wir in gutem Sinne von Addiren und Theilen, und desgleichen offenbar von Vermehren und Vermindern sprechen. Wir können für beliebige symbolisch vorgestellte Mengen die Frage der Vergleichbarkeit aufwerfen, wobei die Begriffe von Gleich, Mehr und Weniger in naheliegenden (und darum nicht näher zu erörternden) symbolischen Wendungen erscheinen. Bei der Constatirung dieser Verhältnisse in gegebenen Vergleichsfällen kommen symbolische Mittel zur Verwendung, auf die wir bei anderer Gelegenheit schon aufmerksam wurden;[1]) so die paarweise Zuordnung der successive herausgehobenen Mengenglieder, oder aber die wechselseitige Abzählung, wofern die symbolische Ausdehnung der Zahlenreihe bereits vollzogen ist.

Ich betone schliesslich, dass die Veränderungen, welche die Vielheitsvorstellung durch all die beschriebenen Symbolisirungen erfährt, nicht ihren logischen Gehalt betreffen. Vielheit bleibt der Begriff einer Gesammtheit, einer bestimmten Collection von gesonderten Inhalten, nur dass in den jetzt betrachteten Fällen die Aussonderung von Inhalten und ihre Collection statt zu wirklichem Vollzuge zu gelangen, entweder ganz oder zum grössten Theile blosse Intention bleibt.

---

[1]) Vgl. VI. Capitel, S. 115–19.

Unendliche Mengen.

Die symbolischen Mengenvorstellungen, die wir bisher betrachteten, schliessen noch nicht die volle Erweiterung, dessen der Begriff der Menge oder Vielheit durch symbolische Mittel fähig ist, ein. Noch eine, besonders merkwürdige bleibt uns zu zergliedern übrig, welche den ursprünglichen Begriff in einer Weise extendirt, dass er nicht bloss die gewissermassen zufälligen, sondern auch die dem Wesen aller Erkenntniss notwendigen Schranken überspringt und damit im Grunde auch einen wesentlich neuen Inhalt gewinnt. Eine Erweiterung der Vorstellungsfähigkeit, die sie in den Stand setzen würde, Mengen von hundert, tausend, Millionen Elementen in eigentlicher Bethätigung collectiv zu befassen, ist sehr wol denkbar. Und so bietet denn unsere Intention, welche der symbolischen Vorstellung so grosser Mengen zu Grunde liegt, keinen Anlass zu logischen Bedenken; sie geht auf die wirkliche Vorstellung von Collectionen, die, wenn nicht in den Bereich unserer, so doch einer idealisirten menschlichen Erkenntnissfähigkeit fallen. Zur Surrogirung der wirklichen Collection können dann in vielen Fällen successive Processe dienen, die es mindestens zu einer successiven Einzelauffassung aller Glieder bringen. Wir sind im Stande, ein jedes Mengenelement für sich zur Vorstellung zu bringen in zeitlichem Nacheinander, wenn auch nicht in einem sie alle befassenden Acte. All dies ist aber unmöglich in den Fällen, auf die wir es nun abgesehen haben. Wir sprechen von Inbegriffen, Mengen, Vielheiten auch da, wo schon der Begriff ihrer eigentlichen Bildung oder ihrer Symbolisirung durch successive Ausschöpfung der befassten Einzelnen, eine logische Unmöglichkeit einschliesst. Wir sprechen von unendlichen Mengen. Unendlich sind die Umfänge der meisten allgemeinen Begriffe. Unendlich ist die Menge der Zahlen der symbolisch erweiterten Zahlenreihe, unendlich ist die Menge der Punkte in einer Linie und überhaupt der Grenzen eines Continuums. Der Gedanke, dass irgend eine fassbare Erweiterung unseres Erkenntnissvermögens dieses zu der wirklichen Vorstellung oder auch nur der successiven Ausschöpfung solcher Mengen befähigen könnte, ist unausdenkbar. Hier hat selbst unsere Kraft der Idealisirung eine Schranke.

Wie kommen nun aber diese symbolischen Begriffe zu Stande? Was macht ihren psychologischen und logischen Gehalt aus?

In jedem Falle, wo von einer unendlichen Menge die Rede ist, finden wir die symbolische Vorstellung eines unbeschränkt fortsetzbaren Processes der Begriffsbildung vor. Ein klares Princip ist gegeben, nach welchem wir jeden bereits gebildeten Begriff einer gewissen gegebenen Gattung umwandeln können (oder auch symbolisch als umgewandelt vorstellen können) in einen neuen, von dem ersteren scharf unterschiedenen; diesen abermals, u. s. w., derart dass die apriorische Sicherheit besteht, nie zu dem Ausgangsbegriffe und zu den bereits erzeugten Begriffen zurückzukehren. Wir bilden nun, mit Rücksicht auf die Ergebnisse dieses Processes, successive Mengenvorstellungen, die sich stetig erweitern, und ist wirklich das Bildungsprincip ein bestimmtes, dann erhält auch der Begriff der sich fortgesetzt erweiternden Menge von Begriffen einen ganz bestimmten Gehalt. Es ist a priori durch scharfe begriffliche Momente bestimmt, was diese stetig auszudehnende Menge umfasst oder umfassen kann, und was nicht; d. h. von einem jeden vorgegebenen Denkobject lässt es sich unzweideutig entscheiden, ob es Glied dieses Processes, bzw. dieser Mengenbildung sein könne oder nicht.

Betrachten wir z. B. den Begriff der unendlichen Menge von Zahlen. Der Process der Hinzufügung einer Einheit zu einer beliebig gegebenen Zahl ist eine Operation, deren Begriff es a priori gewährleistet, dass sie zu einer bestimmten und neuen Zahl hinführt. Gehen wir von der Zahl Eins aus, dann führt dieses Bildungsprincip zu Zwei, Drei, . . ., zu neuen und immer neuen Zahlen, ohne Rückkehr und ohne Schranken. Die begriffliche Bestimmung: ,Ein mögliches Resultat dieses Processes' ist, wie dessen Begriff selbst, eine scharfe, und so besitzen die möglichen Ergebnisse der angegebenen successiven Begriffsconstruction eine gemeinsame Charakteristik, die sie zusammenbindet, analog wie die collective (oder eine sie vertretende anschauliche) Einheit der Glieder einer Menge. Wir stellen also, wenn wir vom Inbegriffe aller natürlichen Zahlen sprechen, zunächst eine Menge im gewöhnlichen Sinne vor, nämlich die Zahlen eines Anfangsstückes der Zahlenreihe (symbolisirt durch die anschauliche Reihe der Zeichen oder dgl.). Dazu tritt die ergänzende Vorstellung, dass diese Reihe vermöge ihres Bildungsprincips erweitert werden könne in infinitum, wobei jedes neue Glied durch den Process bestimmt sei. Sprechen wir von der unendlichen Menge von Punkten einer Strecke, dann stellen wir zunächst irgend eine Punktvertheilung auf derselben vor, dazu den ergänzenden Gedanken eines unbeschränkten Processes, durch den wir jedes Paar benachbarter Punkte durch neue und abermals neue Punkte vermittelt denken können. Und so sonst.

Es ist nun leicht das Moment anzugeben, welches zu der Uebertragung des Begriffes der Vielheit auf die ihrem logischen Charakter nach wesentlich unterschiedenen Bildungen den Anlass geliefert hat. Schon bei der symbolischen Vorstellung von Mengen im gewöhnlichen Sinne surrogirt, wie wir früher sahen, häufig die Idee eines Processes, dessen Einheit durch irgend ein figurales Moment der Anschauung seine Bestimmtheit erhält. Aehnlich ist es hier, nur ist es ein entfernteres, begriffliches Princip, welches nun dem Processe seine Bestimmtheit verleiht und der Vorstellung von all dem, was durch ihn erreichbar ist, was er ‚umfasst', einen gewissen Halt giebt. Während aber im ersten Falle zum Begriffe des Processes seine Endlichkeit gehörte, so dass in der Succession der Schritte einer der letzte sein musste, gehört es im Gegentheil hier zu seinem Begriffe, unbegrenzt zu sein: der Begriff eines letzten Schrittes, eines letzterreichten Mengengliedes also, wird sinnlos. Im ersten Falle war es mitunter möglich den Process wirklich voll auszuschöpfen, ja vielleicht die entsprechende eigentliche Collection zu bilden; im letzteren ist schon der Gedanke daran absurd. Das sind wesentliche logische Unterschiede. Die Analogie, von der wir oben sprachen, erweckt aber die natürliche Neigung, auch der Vorstellung der unendlichen Menge die Intention auf die Bildung der entsprechenden wirklichen Collection zu unterschieben, trotz der Absurdität des Gedankens. So entsteht ein gewissermassen imaginärer Begriff, dessen widerlogischer Charakter im alltäglichen Denken keinen Schaden stiftet, da eben die Unverträglichkeit, die er einschliesst, im Gewöhnlichen nicht zur Geltung kommt; wie z. B., wenn wir uns im universellen Urtheil das ‚Alle S' wie eine geschlossene Menge vorstellen. Anders verhält es sich in anderen Fällen, wo die genannte Imaginarität selbst als wirksamer Factor das Urtheilen beeinflusst. Es ist klar: für eine streng logische Fassung dürfen wir dem Begriff der unendlichen Menge nicht mehr unterschieben, als was logisch wirklich zulässig ist; also vor Allem nicht die absurde Intention auf die Bildung der wirklichen Menge. Logisch unanfechtbar ist die Vorstellung eines bestimmten unbeschränkten Processes; desgleichen die Idee von alledem, was in seinen Bereich fällt, was er durch seine begriffliche Einheit umspannt. So viel und nicht mehr darf also der Begriff der unendlichen Menge in sich aufnehmen. Damit tritt aber auch deutlich hervor, dass es sich bei ihm um einen wesentlich neuen Begriff handelt, der nicht mehr ein Mengenbegriff im wahren Sinne des Wortes ist, obgleich er diesen Begriff (in dem des Processes z. B.) als wesentlichen Bestandtheil einschliesst.

Wo im Folgenden von Mengen die Rede ist, sollen, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben ist, stets endliche gemeint sein.

XII. Capitel.

Die symbolischen Zahlvorstellungen.

Die symbolischen Zahlbegriffe und ihre unendliche Mannigfaltigkeit.

Die symbolischen Mengenvorstellungen bilden das Fundament für die symbolischen Zahlvorstellungen. Wären wir auf die eigentlichen Mengenvorstellungen angewiesen, dann endete die Zahlenreihe bestenfalls mit der Zwölf, und darüber hinaus hätten wir auch nicht den Begriff einer Fortsetzung. Mit der offenbaren Schrankenlosigkeit in der symbolischen Erweiterung von Mengen ist, wie wir sogleich sehen werden, das Gleiche auch für Zahlen mitgegeben.

Die Zahlen sind die unterschiedenen Species des allgemeinen Begriffs der Vielheit. Jeder concreten Vielheit entspricht, möge sie nun eigentlich oder symbolisch vorgestellt sein, eine bestimmte Vielheit von Einheiten, eine Anzahl. Denken wir uns jedes Glied der Vielheit dem Einheitsbegriff subsumirt, dann ist doch der Begriff der Collection aller dieser Einheiten ein völlig bestimmter. Die Collection ändert sich mit jedem Gliede oder jeder Gliedersumme, die wir zu der gegebenen Menge hinzufügen, bzw. von ihr hinwegthun mögen. In symbolischem Sinne können wir also von einer beliebigen Menge sagen, ihr komme eine bestimmte Zahl zu, ehe wir diese selbst gebildet haben; ja auch dann, wenn wir zu der wirklichen Bildung derselben ausser Stande sind. Desgleichen werden wir mit gutem Grunde davon sprechen dürfen, dass zwei beliebige Mengen entweder von gleicher oder verschiedener Zahl sein müssen, ob wir die Zahl nun concipiren können oder nicht.

Wir sind selbst berechtigt zu urtheilen, dass das Gebiet der Zahl eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit von Species in sich fasst. In der That, gehen wir von irgend einer symbolischen Mengenvorstellung aus, dann besitzen wir (mindestens ideell) die Fähigkeit, dieselbe unbeschränkt erweitern zu können, indem wir fortgesetzt neue und neue Glieder hinzufügen. Steht uns Anderes nicht zu Gebote, so können wir doch die eigenen Glieder der Menge in steter Wiederholung gespiegelt denken und demgemäss den Begriff der fortlaufenden Erweiterung der Menge durch die Glieder ihrer Spiegelungen bilden. Allerdings schliesst diese symbolische Begriffsbildung eine starke Idealisirung unseres Vorstellungsvermögens ein. Factisch können wir ja nicht in infinitum die geforderten Wiederholungen bilden und aneinander reihen: es fehlt an Zeit und Kraft für die immer erneute Geistesbethätigung, sowie an Merkzeichen der Unterscheidung für ihre Bildungen. Indessen von diesen Beschränkungen unserer Fähigkeit können wir idealisirend absehen und die, auch in dieser Hinsicht symbolischen, Begriffe concipiren. Wird nun die gegebene Menge durch solche Mittel symbolisch erweitert, dann gehört, wiederum in symbolischer Vorstellung, zu jeder Stufe eine bestimmte, zu jeder neuen eine verschiedene Anzahl. Jede neue Mengenbildung ist ja Theil der früheren, und so gilt das Gleiche auch von deren Zahlen. Die Mannigfaltigkeit der denkbaren Zahlenbesonderungen ist also, wie die Mannigfaltigkeit der denkbaren Mengenstufen, eine unendliche.

So sind wirklich mit den Schranken, die unser Vorstellen von Mengen hemmten, auch diejenigen für die Conception der Zahlbegriffe gefallen. In symbolischem aber ganz bestimmtem Sinne können wir von Zahlen sprechen, wo deren eigentliche Vorstellung uns für immer versagt ist, und wir sind auf dieser Stufe sogar in der Lage, die ideelle Unendlichkeit des Zahlenreiches festzustellen. Damit aber ist unsere Untersuchnng keineswegs schon beendet. Die entfernten Symbolisirungen, die wir bis nun erreicht haben, können doch bei ihrer vagen Allgemeinheit für die Zwecke des Zählens und Rechnens nichts nützen. Dazu brauchen wir inhaltreichere symbolische Bildungen, welche, in scharfer Sonderung den wahren, uns aber unzugänglichen Zahlbegriffen ‚an sich' zugeordnet, wol geeignet sind, diese zu vertreten.

Die systemlosen Zahlsymbolisirungen.

Sei nun etwa Zehn die letzte eigentlich vorstellbare Zahl, dann giebt es mannigfache Möglichkeiten, um Mengen, welche durch die Zahlen bis Zehn nicht erschöpft werden, abzuzählen. Irgend eine willkürliche oder durch die Beschaffenheit der Mengenanschauung sich von selbst darbietende Zerfällung der Menge in eigentlich zählbare Theilmengen leitet zur symbolischen Bildung des Begriffs einer Zahl, welche aus den eigentlich vorstellbaren Zahlen der Theilmengen additiv zusammengesetzt ist. Was wir so an concreten Beispielen erfassen, können wir verallgemeinern, und es resultiren symbolische Zahlbildungen, wie $10+5$, $9+6+8$, $7+10+5$, u. dgl.

Eine wichtige Function erfüllen bei denselben die Zahlnamen, bzw. Zahlzeichen. Trotz der Gliederungen können wir in einheitlicher Vorstellung so erhebliche Mengen von Einheiten nicht mehr deutlich gesondert erhalten. Die Composition der Zeichen ist unsere Krücke. Indem wir schrittweise auf deren Bedeutung reflectiren, treten in Form einer bestimmten Succession die einzelnen Summenzahlen in unser

Bewusstsein. Verschwimmt auch, wenn die neue Zahl auftaucht, die vorhergehende in Undeutlichkeit, und kann demgemäss die wirklich intendirte Summenvorstellung nicht zu Stande kommen, so bleibt doch die sinnliche Composition der Namen (oder Schriftzeichen) als der feste Rahmen bestehen, innerhalb dessen die Succession der begrifflichen Summenglieder, welche die Symbolisirung vermittelt, stets in derselben bestimmten Weise zu erzeugen ist.

Man bemerkt sogleich, dass dieses zunächst sich darbietende Verfahren, bestimmte symbolische Zahlformen auszusondern, noch sehr unvollkommen ist. Wenn wir erheblichere Mengen in Theilmengen gliedern, deren jede die Zehnzahl nicht überschreitet, dann erhalten wir bald so vielfältige Wiederholungen derselben Theilzahlen, dass es mit der Unterscheidbarkeit der entstandenen symbolischen Bildungen kaum besser sich verhielte, als bei den entsprechenden ungegliederten Einheitensummen. Diesem Uebelstande lässt sich, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, abhelfen. Die Zahl der Summenglieder muss möglichst klein bleiben. Soll trotzdem jede beliebige Menge abzählbar sein, so müssen nicht bloss die eigentlich vorstellbaren Zahlen, sondern auch die bereits gebildeten symbolischen Zahlen als Vermittler der Summenbildung zugelassen werden. Es ist klar, dass zu diesem Zwecke für eine jede derartige Zahlcomposition ein besonderer Namen einzuführen wäre, da ohne die Stütze äusserer Zeichen der Stufenbau der auf einander gegründeten Symbolisirungen keinen Halt besässe. Auf solche Weise verfahrend, könnte man sich sogar auf zweigliedrige Summenbildungen beschränken. Hat man z. B. die symbolische Bildung $p = 10 + 5$ eingeführt, dann kann man etwa bilden $p + 8 = p'$, dann wieder $p' + 10 = p''$ u. s. f., wobei jede spätere in der ganzen Reihe der früheren ihr Fundament hat.

Durch solche Symbolisirungen scheint der allseitigen Erweiterung des ursprünglichen Zahlgebietes über jede Grenze hinaus nichts mehr im Wege zu stehen. Genau besehen, reichen wir aber mit den angegebenen Hilfsmitteln nicht weit. Würden Schritt für Schritt neuartige Summenbildungen zur Construction symbolischer Zahlbegriffe verwendet, so wäre die Mannigfaltigkeit von Zahlformen bald eine so grosse, dass an eine gedächtnissmässige Beherrschung derselben nicht zu denken wäre. Dazu kommen noch andere und nicht minder erhebliche Mängel. Ich weise nur hin auf das Problem der Zahlvergleichung. Bei jener ganz systemlosen Ausdehnung des Zahlengebietes werden im Allgemeinen ganze Reihen von symbolischen Zahlbildungen auftreten, die jeweilig einer und derselben wirklichen Anzahl zugehören. Man macht sich dies an Beispielen leicht klar. Eine und dieselbe Menge lässt mannigfache Gliederungen zu, deren jede auf eine neue symbolische Zahlform führen wird, während die Identität der ihnen allen entsprechenden wirklichen Zahl durch die Identität der vorliegenden Menge verbürgt ist. Den verschiedenen Formen aber sieht man diesen Umstand durchaus nicht an (z. B. $10 + 5$, $9 + 6$, $8 + 2 + 5$, u. s. w.). Demgemäss sind derartige systemlose Summenbildungen für die Zwecke der Zahlvergleichung ganz unbrauchbar. Finden wir für eine Menge die Form $p + q$, für eine zweite die Form $p_1 + q_1$, dann können wir durch den blossen Anblick derselben noch nicht entscheiden, ob nicht beiden Mengen die gleiche Anzahl, bzw. welcher die grössere und welcher die kleinere Anzahl entspricht. Damit wäre der Hauptzweck aller Zählung verfehlt.

Die natürliche Zahlenreihe.

Um diese Mängel zu überwinden, brauchen wir vor Allem ein streng systematisches Princip für die Bildung der symbolischen Zahlformen, welche das enge Gebiet der eigentlich vorstellbaren Zahlen zu ergänzen bestimmt sind. Nur ein solches mutet unserem Gedächtniss keine besonderen Lasten zu. Erfolgt der Fortschritt von den gegebenen Zahlen zu immer neuen durch stete Anwendung eines gleichförmigen und eindeutigen Bildungsprincips, dann brauchen wir eben nur dieses einzuprägen, und nicht die zu bildenden Formen. Der Process, der sie liefert, ist in allen Schritten eindeutig bestimmt. Es müsste ferner dafür gesorgt werden, dass auf diesem Wege für jede zu symbolisirende wirkliche Zahl nie mehr als eine symbolische Zahlform resultirte. Denn nur dann sind wir ja im Stande, aus der Verschiedenheit der bei der vergleichenden Zählung zweier Vielheiten hervorgehenden Zahlformen auch auf die Verschiedenheit der entsprechenden wirklichen Zahlen zu schliessen. Stimmte die mit der systematischen Entstehungsweise geschaffene Anordnung der Zahlen mit der Ordnung nach dem Mehr und Weniger überein, so könnten wir überdies die Frage, welche von beiden Zahlen die grössere sei und welche die kleinere, unmittelbar aus ihrer blossen Stellung im System entscheiden.

Alle diese Anforderungen lassen sich in der einfachsten Weise befriedigen, zum grössten Theil schon durch das Verfahren der successiven Zahlbildung, durch die Addition je einer Einheit zu der bereits gebildeten Zahl. Denken wir uns die eigentlich gegebenen Zahlen so angeordnet, dass eine jede aus der vorhergehenden durch Vermehrung um eine Einheit entsteht, dann erhalten wir die Reihe

$$1;\ 2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;\ \ldots;\ 10 = 9 + 1.$$

Die symbolische Fortsetzbarkeit dieser Reihe (wofern wir Zehn als die letzte eigentlich vorstellbare Zahl ansehen) ist klar. Wir können doch sofort die uneigentliche Vorstellung einer neuen Zahl bilden, welche aus Zehn ebenso hervorgeht, wie diese aus Neun, nämlich durch Addition um eine Einheit. Nennen wir Eilf (11) die Zahl, welche durch die Summe $10 + 1$ symbolisirt wird, dann ist dieselbe gegeben und definirt durch die Gleichung $11 = 10 + 1$. Ebenso können wir weiter definiren $12 = 11 + 1$, $13 = 12 + 1$, $14 = 13 + 1$

u. s. w. So erlangen wir die ins Endlose fortsetzbare Reihe der Zahldefinitionen, vermittelst welcher wir jede beliebige Vielheit abzählen können, wofern der Umfang der Begriffsbildung und Benennung hinreichend weit gediehen ist.

Die Zählung einer vorgelegten Vielheit würde in folgender Weise vor sich gehen: Man beginnt mit irgend einem Glied, zählt es als Eins, geht zu einem zweiten über und bildet $1 + 1 = 2$; der Uebergang zu einem dritten und die Addition der zugehörigen Eins zu der eben gebildeten Zwei giebt $2 + 1 = 3$; u. s. w., bis alle Glieder erschöpft sind. Die Eindeutigkeit dieses Verfahrens ist sicher. Mit welchem Glied wir auch beginnen und welche Richtung der successiven Durchzählung wir auch verfolgen, das Resultat muss immer dasselbe sein. Wirklich bleibt die zu zählende Vielheit identisch dieselbe, demgemäss auch die zugehörige Anzahl von Einheiten; es könnten also verschiedene Zählungen höchstens verschiedene symbolische Formen der Zusammensetzung derselben Zahl aus Theilzahlen ergeben. Nun ist aber die Symbolisirung einer jeden Anzahl vermittelst der um Eins kleineren, bzw. vermittelst der ganzen Strecke der Zahlenreihe, die ihr vorangeht, eine eindeutige, weil das Bildungsgesetz der Reihe ein völlig eindeutiges ist. Somit kann auch in concreto zu einer und derselben Vielheit nur eine ganz bestimmte symbolische Zahlform aus der Reihe gehören.

Der Idee nach ist die Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe in infinitum durch nichts beschränkt; sie kann also über jede gegebene Grenze als wirklich fortgeführt, und daher jede Vielheit von noch so vielen Einheiten als abzählbar angesehen werden. Indessen haftet an der Methode ein Gebrechen, welches ihre practische Verwendbarkeit in sehr enge Schranken halten würde. Jeder neue Schritt der symbolischen Zahlbildung erfordert einen neuen Schritt der Benennung. Wählten wir immer neue Namen (und dem ist doch nicht auszuweichen), so hiesse dies, unserem Gedächtniss Lasten aufladen, welche schon bei Zahlen, die wir gegenwärtig als mässige anzusehen gewohnt sind, unüberwindlich wären. Und unüberwindlich wären sie für immer, wenn alle die neuen Namen notwendig independent sein müssten; wenn es nicht gelänge, durch eine begrenzte nicht allzugrosse Anzahl von Grundzeichen nach einem einheitlichen, leicht fasslichen und übersichtlichen Princip alle Zahlen der Reihe zu signiren.

Man könnte vielleicht meinen, solch ein Princip sei uns durch die Bildungsweise der Reihe selbst nahegelegt. Man brauche nur die Bezeichnungen zum getreuen Spiegel der Begriffsbildungen zu machen, und es werde dann sogar schon ein einziger Grundname, der der Einheit, genügen, um durch seine fortgesetzten Vervielfältigungen jede beliebige Zahl zu benennen. Dies ist wol richtig. Aber eine solche Bezeichnungsart wäre so roh, dass noch die ihr extrem entgegengesetzte, welche jede neue Zahl durch ein neues, independentes Zeichen nennt, vorzüglicher bliebe. Wie ungeschickt und hemmend wären Namen, die auch nur aus fünf bis sechs, geschweige denn aus zwanzig bis dreissig Wiederholungen des Namens Eins entständen. Und wer unterschiede ohne besondere Cautelen auch nur neunzehn Wiederholungen der Eins von zwanzig, um nicht zu reden von den Benennungen grosser Zahlen. So wenig eine wirkliche Zahlbildung über die uns durch die factische Schwäche unserer Vorstellungsfähigkeit gesteckten Grenzen hinaus möglich ist, so wenig wäre auch diese parallelgehende rohe Signirung der Zahlen durch Einsermengen durchführbar und zur scharfen Klassification und Benennung derselben dienlich.

Das Zahlensystem.

Auf welchem Wege sollen wir nun aber das Ideal der Zahlbenennung, welches eine practische Beherrschung des Zahlgebietes in einem erheblicheren Umfange erst ermöglicht, verwirklichen; wie ein durchsichtiges, einfaches Princip finden, welches es gestattet, aus wenigen Grundzeichen ein Zeichensystem zu construiren, das jeder bestimmten Zahl ein bequemes, leicht unterscheidbares Zeichen verleiht und zugleich ihre systematische Stelle in der Zahlenreihe scharf ausprägt?

Für den ersten Augenblick scheint es, als handle es sich hier um Fragen blosser Nomenklatur. Aber eine nähere Erwägung der Sachlage zeigt, dass die Schwierigkeiten viel tiefer liegen, dass unser Problem viel mehr noch als die Weise der Benennung, die der Begriffsbildung trifft. Wie wollten wir auch ein System der Zahlbezeichnung construiren, gegründet auf einigen wenigen Grundzeichen, ohne dass ihr in strengem Parallelismus ein System der Begriffsbildung entspräche, gegründet auf gewissen Grundbegriffen?

Und noch ein anderer Gesichtspunkt ist von Wichtigkeit. Der Idee nach, meinten wir, könne die einfache Zahlenreihe in infinitum fortgesetzt gedacht werden. Ganz wol. Aber wirklich ausgeführt und gegeben ist sie uns doch nur innerhalb der Grenzen der Benennung. Wie sollten wir die einförmigen Schritte der Zahlbildung, wobei doch jeder neue Schritt die ganze Reihe der früheren voraussetzt, in ihrer schrankenlosen Succession unterschieden erhalten, ohne die Stütze begleitender Benennungen? Der Begriff 50 ist uns gegeben durch die Bildung $49+1$. Was ist aber 49? $48+1$. Was 48? $47+1$ u. s. w. Jede Antwort bedeutet eine Zurückschiebung der Frage um einen neuen Schritt, und erst wenn wir in das Gebiet der eigentlichen Zahlbegriffe gekommen sind, können wir befriedigt stehen bleiben. Aber welchen Halt besässe diese Kette von Begriffsbildungen ohne die Hilfe scharf unterschiedener Benennungen?

Wir können uns also nicht auf die Zahlenreihe als ein über jede Grenze hinaus Gegebenes beziehen, deren Glieder nur in einer anderen Weise als vorhin, kunstvoller oder bequemer, zu signiren seien. Um eine andere Methode der Begriffsbildung selbst wird es sich vielmehr handeln, die nicht minder klar und systematisch, dabei doch umfassender ist als die frühere und somit eine weitere und leichtere Beherrschung des Zahlgebietes in Gedanken und Wort ermöglicht. Das Princip der einfachen Reihenbildung durch successive Zuzählung einer Einheit war zu primitiv, und daran lag es, dass uns die Alternative gestellt war, entweder ganz systemlos jede Zahl mit einem neuen Zeichen zu versehen, oder in genauer Abbildung des Zählungsverfahrens alle Zahlen mittelst eines einzigen Namens (durch successive sich erweiternde Wiederholungen desselben) zu benennen — ein systematisches aber ganz unbrauchbares Benennungsprincip.

Versuchen wir also eine bessere, d. h. unseren logischen Anforderungen sich enger anpassende Methode der Zahlbildung und Zahlbezeichnung zu construiren.

Jede symbolische Bildungsweise geht darauf aus, die Zahl vermittelst der Zahloperationen, in letztem Grunde also durch Addition und Theilung aus bekannten, sei es in eigentlicher Vorstellung oder bereits durch eine Symbolisirung gegebenen Zahlen relationell zu bestimmen. Folgt die Bezeichnung getreu den Bahnen der Begriffsbildung, so wird eine entsprechende Zusammensetzung des Zahlnamens aus den Namen der elementaren Zahlbegriffe resultiren, wobei die Verbindung durch Operationszeichen angedeutet wird. Ist die Begriffsbildung systematisch, so ist es auch die Namenbildung, und umgekehrt. Sollen wir nun bei der letzteren unter allen Umständen mit einer beschränkten Zahl von Zeichen ausreichen, so darf dementsprechend die Begriffsbildung auch nur eine beschränkte Zahl von Begriffen operativ zu neuen verbinden. Unter allen Umständen gegeben sind uns die eigentlich vorstellbaren Zahlen und allenfalls noch die ihnen zunächststehenden; wenn irgend welche, so sind also diese als die Elementarbegriffe anzunehmen, und es wird nun die Aufgabe sein, aus ihnen nach einem einheitlichen, in der Anwendung stets gleichförmigen Princip in geregelter Reihenfolge Zahl für Zahl herzuleiten, derart, dass die Sicherheit besteht, es müsse einer jeden denkbaren Zahl in diesem System eine ganz bestimmte Stelle zukommen (oder mit anderen Worten, es müsse jede irgend denkbare Vielheit vermittelst des Systems abzählbar sein).

Die unübertreffliche Einfachheit in der Bildung der natürlichen Zahlenreihe, welche, wie wir sahen, den grössern Theil dieser Forderungen bereits befriedigt, lässt wünschen, ihr Princip so weit als thunlich aufrecht zu erhalten.

Wir betrachten also die Zahlen

$$1,\ 2,\ \ldots.\ X$$

in ihrer natürlichen Folge als das uns gegebene Anfangsstück des Systems und versuchen zunächst Neubildungen nach dem alten Reihenprincip:

$$X+1,\quad X+1+1,\quad X+1+1+1,\ \ldots.$$

Das alte Princip der Bezeichnung, wonach für $X+1$ ein neues Zeichen X', für die nächste Zahl $X'+1$ wieder ein neues X'' u. s. f. gesetzt wurde, müssen wir, bloss auf die Zeichen $1, 2 \ldots X$ eingeschränkt, meiden. Entweder wir behalten also die obigen Bezeichnungen bei — was ihrer Ungeschicklichkeit wegen nicht angeht — oder wir zeichnen einfacher:

$$\begin{array}{lll} X+1, & X+2, & \ldots\ldots\ X+X, \\ X+X+1, & X+X+2, & \ldots\ldots\ X+X+X, \\ X+X+X+1, & X+X+X+2, & \ldots\ \ X+X+X+X, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Aber auch diese Bezeichnungsweise genügt uns nicht. Je weiter wir kommen, um so schleppender wird die Bezeichnung durch die sich anhäufenden Summen der X. Hier bietet sich ein neues Abkürzungsmittel dar: Die einfache Abzählung der X führt auf die multiplicative Symbolisirung in Gedanken und Zeichen, d. h. auf

$$2\,X,\quad 3\,X,\quad 4\,X,\ \ldots.$$

resp. für $X+X,\quad X+X+X,\quad X+X+X+X,\ \ldots.$

Wir erhalten demzufolge die Reihe:
$1 \ldots . X, X+1 \ldots . 2X, 2X+1 \ldots . 3X, 3X+1 \ldots 4X, 4X+1 \ldots \ldots XX, XX+1 \ldots . XX+X \ldots . XX+2X \ldots . . XX+XX$, oder, wieder in multiplicativer Bildung: $2XX$; dann weiter $2XX+1 \ldots . 3XX \ldots . . XXX \ldots . . XXXX \ldots \ldots XXXXX \ldots . .$

Wieder werden die hier auftretenden Bildungen (im dekadischen System zehn mal zehn; zehn mal zehn mal zehn; zehn mal zehn mal zehn mal zehn; u. s. w.) so unhandlich, dass neue Abkürzungen erwünscht werden. Die Zählung der Factoren führt zur Potenzbildung: X^2 X^3 X^4 ..... Nach Einführung dieser Bildungen lautet die Reihe von $XX = X^2$ an:

$$X^2, X^2+1, \ldots 2X^2, 2X^2+1, \ldots 3X^2 \ldots (X-1)X^2 \ldots$$
$$X^3, X^3+1, \ldots 2X^3, 2X^3+1, \ldots 3X^3 \ldots (X-1)X^3 \ldots$$

. . . .

Man sieht, wie die Reihe sich fortsetzt und wie hiebei die Iteration der zuletzt eingeführten symbolischen Bildungsformen immer wieder auf neue führen würde. Für die Anforderungen der Praxis genügt es bei der Potenzirung stehen zu bleiben.

Um die solcherart geregelte Zählungsweise zur klaren Anschauung zu bringen, diene folgende Tabelle:

1	2	3	. . . .	$X-1$
$1X \ldots$	$2X \ldots$	$3X$	. . . .	$(X-1)X \ldots$
$1X^2 \ldots$	$2X^2 \ldots$	$3X^2$	. . . .	$(X-1)X^2 \ldots$
$1X^3 \ldots$	$2X^3 \ldots$	$3X^3$	. . . .	$(X-1)X^3 \ldots$

. . . .

Die Zählung gliedert sich in eine Folge von Stufen. In der ersten findet die einfache Durchzählung der Reihe von $1 \ldots X-1$ statt. In der zweiten erfolgt bereits eine mehrfache Zählung. Einerseits die multiplicative Zählung, durch welche X 1mal 2mal ... $(X-1)$ mal vervielfältigt wird; andererseits die schrittweisen additiven Zuzählungen der Zahlen der ersten Stufe ($1 \ldots X - 1$), welche je zwei Glieder jener multiplicativen Reihe vermitteln. Aehnlich verhält es sich in der dritten Stufe. In der multiplicativen Zählung fungirt nun X^2 als die gezählte Einheit. Zwischen je zwei der so gebildeten Zahlen vermittelt in stets gleicher Weise eine additive Zählung, und zwar die schrittweise Zuzählung aller Glieder der zweiten Stufe. U. s. w. Endlich durchkreuzt noch eine Zählungsweise sozusagen in verticaler Richtung (d. h. der Folge der Stufen entlang) das System; es ist die Zählung in der Potenzirung des X, welche indess keinen wesentlichen Systemwert besitzt, da der Potenzirung keine neue zahlbildende Operation folgt.

Die Zahlen innerhalb jeder Stufe bilden eine der Grösse nach geordnete Reihe. Jede Zahl ist um Eins grösser als die vorhergehende, die erste aber um Eins grösser als die letzte der vorhergehenden Stufe. So schliessen sich die sämmtlichen Stufen zu einer einzigen, ins Endlose fortlaufenden Zahlenreihe zusammen, welche genau der natürlichen, primitiven Zahlenreihe correspondirt. Während aber in der letzteren jene Grössenrelation einzig und allein das zahlbildende und -ordnende Princip war, sind bei der letzteren an ihre Stelle andere und complicirtere Principien getreten, durch welche jede Zahl, statt durch eine Kette von Definitionen aus der blossen Zahl Eins, vielmehr aus der Serie von Zahlen $1, 2, \ldots X - 1$ systematisch hergestellt wird. In der Sprechweise der modernen Analysis ausgedrückt, besteht diese systematische Bildungsweise darin, dass eine jede Zahl als „ganze, ganzzahlige Function“ einer bestimmten, ein für allemal conventionell festgesetzten „Grundzahl“ X vorgestellt und demgemäss genannt wird, mit Coefficienten, welche ausschliesslich der Zahlenstrecke $1, 2, \ldots X - 1$ angehören oder, wenn das betreffende Glied überhaupt nicht auftritt, verschwinden. Jede Zahl ist also symbolisch gegeben in der Form eines Aggregates

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots\ldots,$$

worin jedes der a einen der Werte $0, 1, 2, \ldots X-1$ besitzt. Man pflegt die Zahlen $1, 2 \ldots X$ Einer, die Potenzen von X ($X^0, X^1, X^2 \ldots$) Einheiten 0ter, 1ter, 2ter ... Stufe oder Stufenzahlen zu nennen.

Auf solche Weise haben wir ein Princip der Zahlen- und Zahlzeichenbildung gewonnen, welches wirklich den gestellten logischen Forderungen Genüge leistet: Es ermöglicht die systematisch gleichförmige Fortsetzung des uns gegebenen engen Zahlgebietes über jede Grenze hinaus; es benötigt hiezu, durch die Heranziehung der symbolischen Bildungsprincipien der Multiplication und Potenzirung, keiner anderen Bausteine als der Zahlen und Zeichen $1, 2, \ldots X$; es umfasst, der Idee nach, das ganze Zahlgebiet, d. h. es giebt keine wirkliche Zahl, der nicht eine ganz bestimmte, ihr gleichwertige systematische Bildung als ihr symbolisches Correlat entspräche.

Verhältniss des Zahlensystems zur natürlichen Zahlenreihe.

Wir haben oben darauf hingewiesen, dass unsere Zahlbildungen in ihrer systematischen Anordnung Schritt für Schritt parallellaufen denen der ‚natürlichen' Zahlenreihe. Dieser Umstand führt auf eine Bemerkung, die der Hervorhebung bedarf. Dächten wir uns nämlich die natürliche Zahlenreihe immer parallel mit der unseres Systems fortentwickelt, dann stände, wie es scheint, nichts im Wege, die Bezeichnungen der letzteren als solche der correspondirenden Zahlen in der ersteren anzusehen. Jeder natürlichen entspricht eine ganz bestimmte (ihr gleiche) systematische Zahl, und dieser wiederum eine ganz bestimmte, ihre Bildungsweise spiegelnde Bezeichnung. Der systematische Zahlbegriff wäre so der Vermittler zwischen der natürlichen Zahl und der systematischen Benennung.

Gleichwol halten wir die Auffassung für verwerflich, welcher das Zahlensystem ein blosses Mittel ist für die systematische Nomenklatur der natürlichen Zahlen mit dem Zwecke der Ersparung von Zeichen. Wir erinnern an die früheren Ausführungen. [1]) Die Sache liegt doch nicht so, dass uns zuerst die natürliche Zahlenreihe gegeben wäre, und wir hinterher für ihre Begriffsbildungen nach einer passenden Signatur suchten. Nur ein kleines Anfangsstück der Reihe ist uns gegeben. Allerdings können wir die Idee einer unbeschränkten Fortsetzung derselben concipiren, aber die wirkliche Fortsetzung, auch nur in dem mässigen Umfang der gemeinen Rechenpraxis, stellt bereits unerfüllbare Anforderungen an unsere geistigen Fähigkeiten. Die Unmöglichkeit, erheblichere Zählungsaufgaben auf solchem primitiven Wege lösen zu können, war die Quelle für jene logischen Postulate, deren Befriedigung zu einer neuen weiterreichenden Methode der Begriffsbildung führte. Und so ist denn die gewonnene Zahlensystematik (im Besonderen unser gemeinübliches dekadisches System) nicht eine blosse Methode, gegebene Begriffe zu signiren, als vielmehr neue Begriffe zu construiren und mit der Construction zugleich zu bezeichnen. Natürlich können wir das Ideal einer unbeschränkten Fortsetzung der einfachen Zahlenreihe bilden, indem wir unsere Geistesfähigkeit entsprechend idealisiren; wir können ferner die Zeichenbildungen des Zahlensystems auch als Signaturen für die parallelen Glieder der (ideell erweiterten) Zahlenreihe auffassen. Aber es ist wol zu beachten, dass all das nur höchst uneigentliche Vorstellungs- und Redeweisen sind, welche in den erwähnten Idealisirungen ihre Quelle haben; sie in einem anderen, eigentlicheren Sinne deuten, das heisst den ganzen Sinn und Zweck der systematischen Zahlbildung verkehren. Alle logische Kunst zielt auf die Ueberwindung der ursprünglichen Schranken unserer natürlichen Geistesanlagen

[1]) Vgl. S. 258.

durch geschickte Auswahl, Anordnung, Verknüpfung und stete Wiederholung der Bethätigungen, die sie zulassen, und die, einzeln betrachtet, nur Geringes zu leisten vermögen. So auch in unserem Falle. Wir stiessen zuerst auf die Schranken unserer Fähigkeit zu collectiven Verbindungen und überwanden sie durch mannigfaltige Symbolisirungen. Wir stiessen dann auf die Schranken des Gedächtnisses und überwanden sie wiederum durch Symbolisirungen, aber durch weit kunstvollere, welche sich zu dem harmonischen Bau des Zahlensystems zusammenschlossen.

Und noch Eins ist zu betonen, nämlich dass die sogenannten natürlichen Zahlbildungen nicht im Geringsten natürlicher sind, als die im engeren Sinne systematischen (z. B. dekadischen). In beiden Fällen handelt es sich um symbolische Bildungen für die uns im eigentlichen Sinne nicht zugänglichen Species des Anzahlbegriffes, und es ist rein Sache der logischen, d. h. den Zwecken der Erkenntniss des Zahlengebietes angepassten Beurtheilung, zu entscheiden, welche Methode symbolischer Bildung vorzüglicher sei.

Diese Punkte mussten mit einiger Ausführlichkeit besprochen werden, weil die bekämpften Vorurtheile allgemeine sind und selbst von den Forschern getheilt werden, welche der Logik der Sache sonst besondere Aufmerksamkeit zugewendet haben. [1])

Die Wahl der Grundzahl des Systems.

Wir haben bisher über die Grundzahl X des Systems in keiner Weise disponirt. Nicht als ob ihre Wahl logisch gleichgiltig wäre, sondern nur, weil unsere bisherigen Betrachtungen durch sie nicht tangirt wurden. Wir müssen nun die übrig gebliebene Lücke ausfüllen.

---

[1]) Vgl. z. B. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 10 und 12.

In welcher Weise die verschiedene Wahl der Grundzahl den logischen Charakter des Systems beeinflusst, ist leicht zu kennzeichnen. Wir brauchen genau ebensoviel Elemente (Begriffe und Zeichen) zur Herstellung aller Zahlen und Zahlzeichen, als die Zahl X Einheiten besitzt (es ist dies ja die Anzahl der 1, 2, ... X). Wäre also die Forderung einer möglichst geringen Elementezahl das oberste Princip, dann hätte offenbar die Wahl $X = 2$ den grössten Vorzug. Aber noch Anderes kommt wesentlich in Betracht. Vor Allem doch der Umfang des zu beherrschenden Zahlgebietes. Je grösser die Grundzahl ist, um so geringer die Anzahl von Wiederholungen der Elemente, die zur Herstellung irgend welcher Zahlen nötig sind, um so einfacher und übersichtlicher wird deren Ausdruck. Es würde ein arger Fehler der Systematik sein, wenn Zahlen, an deren Bildung und Beherrschung uns gelegen ist, in einer Form gebildet und ausgedrückt wären, welche ihre Unterscheidung (vermöge allzuhäufiger Wiederholung der Elementarzählungen) gefährden oder gar zur Unmöglichkeit machen würde. In dieser Hinsicht aber wäre für unser Zahlgebiet das dyadische System Leibnizens nicht um vieles besser, als das der natürlichen Zahlenreihe.

Je grösser also die Grundzahl, um so umfassender das wirklich zu beherrschende Zahlgebiet. Aber freilich nur unter einer Voraussetzung: nämlich, dass wir die Zahlen 1, 2, ... X wirklich als gegeben ansehen dürfen, dass sie uns also nicht erst durch entlegene und übercomplicirte Symbolisirungen vermittelt werden. Hierin liegt der wesentliche Grund, warum wir in der Zahl der Elemente beschränkt sind; denn wir stossen auch hier bald an die Grenzen unserer Geistesfähigkeit.

Zunächst möchte man das Verlangen stellen, dass die Elementarzahlen noch in den Bereich der eigentlich vorstellbaren Zahlen fallen müssten. Eine so weitgehende Einschränkung wäre jedoch unnötig. Wir werden nämlich bald

Gelegenheit finden zu sehen, dass es sich überhaupt als thunlich und vortheilhaft erweist, selbst den uns in Form eigentlicher Vorstellungen zugänglichen Zahlbegriffen gewisse Symbolisirungen, ja sagen wir es geradezu, äussere Zeichen zu substituiren. Hiemit aber verlieren, wenigstens für solche Zwecke, wie wir sie hier verfolgen, die eigentlich vorstellbaren Zahlen ihre wesentliche Auszeichnung vor den anderen, nur symbolisch vorzustellenden, und es hindert nichts mehr, auch einen Theil der letzteren als Elemente der Systematik anzunehmen. Aber keineswegs sind wir dadurch frei genug geworden, um nun ein beliebig grosses Stück der Zahlenreihe als das elementare für die 1, 2, . . . X zu setzen, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil dasselbe nach dem Principe der natürlichen Reihe gebildet und ohne entferntere systematische Mittel (sonst gäbe es ja Complication über Complication) uns geläufig sein muss. In dieser Hinsicht ist es fraglich, ob wir im Durchschnitt unserem Gedächtniss, bei der verlangten vollen Sicherheit der Reproduction, viel mehr als drei bis vier Dutzend Elementarzeichen anvertrauen dürften. Immerhin reichten wir über unsere beliebte Zehnzahl hinaus, und wir hätten genug der Möglichkeiten, um für X eine Wahl zu treffen.

Nach den bisher in Betracht gezogenen logischen Forderungen wäre das System um so vorzüglicher, je grösser X angenommen würde. Denn je grösser die Anzahl der Elemente, um so weniger complicirt wird der Ausdruck für jede neu zu bildende Zahl. Indessen noch andere logische Forderungen können die Wahl des X, der Grundzahl des Systems, beeinflussen, und solche erheben sich thatsächlich aus dem Bestreben nach möglichster Bequemlichkeit der Rechnungen. Jedes Zahlensystem begründet ihm eigenthümliche Rechenmechanismen, und das beste wird dasjenige sein, welches die kürzesten und bequemsten zulässt. Von diesem Gesichtspunkte aus erweisen sich die Systeme, deren

Grundzahl durch möglichst viele andere Zahlen theilbar ist, und deren Eins und Eins, wie Ein mal Eins nicht zu grosse Anforderungen an unser Gedächtniss stellt, als besonders vortheilhaft. Darum betrachten die Mathematiker das duodecimale System für vorzüglicher als das nun einmal angenommene decimale. Auf eine genauere Untersuchung dieses an sich nicht schwierigen Problems soll hier nicht eingegangen werden.

Die Systematik der Zahlbegriffe und die Systematik der Zahlzeichen.

Wir haben gesehen, wie jedes consequent gebildete Zahlensystem eine ganze Reihe logischer Forderungen befriedigt und demgemäss eine entsprechende Reihe logischer Vollkommenheiten besitzt. Nur einer haben wir noch nicht Erwähnung gethan, welche, obschon eine nebenbeifolgende Consequenz der übrigen, vielleicht doch als die wichtigste, jedenfalls aber als die merkwürdigste unter ihnen allen bezeichnet werden muss. Die folgende Betrachtung diene zu ihrer Charakteristik.

Die Systematik, die wir oben entwickelt haben, bietet, wie man sofort sieht, zwei Seiten: auf der einen liefert sie für jede Zahl eine systematische Bildungsart (als symbolische Vertretung für den fehlenden eigentlichen Zahlbegriff) vermittelst gewisser gegebener Elementarzahlen 1, 2, ... X; auf der anderen Seite eine systematische Bildungsart des einer jeden Zahl zugehörigen Zahl*namens* aus den Zahlnamen 1, 2, ... X. Ein strenger Parallelismus waltet hier zwischen der Methode der Fortsetzung der Reihe der Zahl*begriffe* und der Methode der Fortsetzung der Reihe der Zahl*zeichen*, und dies nicht bloss im Allgemeinen, sondern nach allen einzelnen Schritten. Und die Systematik der Zeichen ist nicht minder consequent in sich geschlossen, als die der Begriffe. Man abstrahire von der Bedeutung der Bezeichnungen 1, 2, ... X, desgleichen der Operationsbezeichnungen für Addition, Multiplication und Potenzirung und fasse sie als ganz willkürliche, bedeutungslose Zeichen (wie z. B. die Spielmarken); man ersetze die Zahldefinitionen und Operationsregeln, welche das ständige Medium des systematischen Fortschrittes sind, durch entsprechende, conventionell fixirte Formeln der Aequivalenz von Zeichenverbindungen — und man wird erkennen, dass auf diese Art wirklich ein independentes Zeichensystem entsteht, welches in einförmiger Schablone Zeichen für Zeichen herzuleiten gestattet, ohne dass jemals andere Zeichenbildungen auftreten würden und auftreten könnten als solche, die andernfalls, unter Begleitung des begrifflichen Processes, als Bezeichnungen der gebildeten Begriffe erscheinen.

Der innere Grund dieses eigenthümlichen Verhältnisses ist nicht schwer zur Evidenz zu bringen. Das Wesen der systematischen Zahlbildung besteht darin, dass sie vermittelst einiger weniger Elementarbegriffe und Sätze (Zahlformeln und Operationsregeln) alle anderen Zahlbegriffe construirt. Spiegelt nun das Bezeichnungssystem diese Bildungen getreu wieder, dann wird auch jede Zahlbezeichnung eine, aus den Bezeichnungen der Elemente und Operationen genau entsprechend gebildete sein müssen, wobei gewisse formelle Regeln der Ersetzung von Zeichenverknüpfungen durch andere — die Correspondenten jener Sätze über Beziehungen von Begriffen — zur Anwendung kommen werden. Der successive Bildungsprocess der Bezeichnungen wird derart fortschreiten, dass in typischer Form Zeichen schrittweise an Zeichen angegliedert werden (z. B. $X+1$, $X+1+1=X+2$, $X+2+1=X+3$ u. s. w., ebenso X^2+1, X^2+2, $X^2+3, \ldots$), wobei immer gewisse zusammengesetzte Zeichen durch einfachere ersetzt werden (z. B. $1+1$ durch 2; $2+1$ durch 3 u. s. w.; gemäss den Formeln: $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4 \ldots$). Nach Erreichung eines bestimmten Schrittes findet nach bestimmten Typen eine vereinfachende Umsetzung des erreichten gegliederten Zeichens statt (z. B. $X+X$ in $2X$, $X+X+X$ in $3X$; ... XX in X^2, XXX in X^3 ....), worauf wieder der einförmige Process der Angliederung beginnt; u. s. w. Sind nun auf der einen Seite alle Zahlbildungen systematisch strenge Consequenzen der Elementarbegriffe, sowie ihrer Verbindungs- und Umsetzungsformen, so werden auch auf der anderen die parallelen Zeichenbildungen systematisch strenge Consequenzen der Elementarzeichen, sowie deren Verbindungs- und Umsetzungsformen sein müssen. Allerdings werden dort die Umsetzungen erfolgen auf Grund von Erkenntnissen, die aus den bezüglichen Begriffen mit Notwendigkeit hervorgehen; während hier die Umsetzungen der Zeichen zwar in gewissen Typen, aber in ganz äusserlichen, schablonenhaften vor sich gehen werden. Lösen wir nun diese Typen von ihren begrifflichen Trägern los, fixiren wir sie ein für allemal in Form conventioneller Zeichenaequivalenzen (nach Art der Spielregeln), dann ist a priori klar, dass wir nun Alles besitzen, was zur independenten Entwicklung der Systematik der Zeichen nötig ist, und dass kein Resultat hervorgehen kann, das nicht auf der Seite der Begriffssystematik sein Correlat fände.

Das sinnlich-symbolische Zählungsverfahren.

Die Doppelseitigkeit der Systematik, die wir hier erklärt haben, bedingt als Folge die in logischer Hinsicht höchst merkwürdige Thatsache, dass man sowol bei Aufgaben practischer Zählung gegebener Mengen, als auch bei solchen der rechnenden Herleitung von Zahlen aus Zahlen die Lösung rein mechanisch gewinnen kann, indem man die Namen den Begriffen substituirt und dann, an der Hand der Systematik der Namen, in rein äusserlicher Procedur Namen aus Namen herleitet, wobei schliesslich Namen resultiren, deren begriffliche Deutung das gesuchte Resultat notwendig ergibt.

Schon bei der Erweiterung der Zahlenreihe in der zuerst besprochenen primitiveren Form leuchtet es ein, dass die Zählung einer Menge durch successives Fortschreiten der Reihe entlang keineswegs die schrittweise Bildung der (eigentlichen oder symbolischen) Zahlbegriffe verlangt. Auch die successiven Subsumptionen der einzelnen Mengenglieder unter den Begriff der Einheit werden überflüssig. Es genügt statt all dessen die schrittweise Signirung der Mengenglieder durch die Reihe der Zahlnamen, und es wird notwendig der letzte zur Signirung verwendete Name der des gesuchten und bei dem begrifflichen Wege thatsächlich resultirenden Begriffes sein müssen. Wie die in den sogenannten Zahldefinitionen (als blosse Zeichenaequivalenzen angesehen) ausgedrückten Beziehungen der aufeinanderfolgenden Glieder der Zahlzeichenreihe dazu dienen können, unendlich viele Zahlformeln und correspondirende Zahlsätze zu finden, soll hier noch nicht näher betrachtet werden; es genügt, darauf hingewiesen zu haben.

In allen diesen Beziehungen verhält sich genau ebenso das an zweiter Stelle behandelte, so viel feiner ausgebildete System der Zahlen und Zahlzeichen, nur dass es entsprechend vollkommenere Rechenmechanismen zulässt. Man folgt zählend ganz einfach der Systematik der Bezeichnungen und erhält schliesslich ein zusammengesetztes Zeichen, dessen Bildungsweise genau diejenige des gesuchten Begriffs verbirgt. Ein Gleiches gilt, wie sich zeigen wird, für das Rechnen: es ist nicht eine Bethätigung mit Begriffen, sondern mit Zeichen.

Die eminente Bedeutung dieser Vollkommenheit des Zahlensystems ist augenfällig. Sie eröffnet uns die Aussicht, Aufgaben zu bewältigen, welche bei beständiger Geistesbethätigung an den Begriffen selbst, vermöge der Fülle und Verwicklung der zu beherrschenden höchst abstracten Gedanken, ganz unlösbar blieben. Eine enorme Entlastung an höherer psychischer Bethätigung wird möglich und damit eine enorme Erweiterung der intellectuellen Leistungsfähigkeit überhaupt.

Erweiterung des Gebietes symbolischer Zahlen durch die sinnliche Symbolisirung.

Der erste und bedeutsamste Erfolg des Parallelismus zwischen dem System der Begriffe und dem der Zeichen besteht in einer eigenartigen Erweiterung, welche das Zahlengebiet selbst erfährt.

Wir sprachen bisher so, als wenn die oben entwickelte Art symbolischer Zahlbildung durch einen Complex indirect charakterisirender (selbst aber eigentlich vorgestellter) relativer Bestimmungen wirklich eine unbegrenzte Erweiterung des Zahlengebietes ermöglichte. Es war eine incorrecte Redeweise zum Zwecke einer vereinfachten Darstellung. Genauer betrachtet steckt uns die Enge des Bewusstseins auch bei der Anwendung jener künstlichen Mittel unüberschreitbare Schranken. Wir übersehen schliesslich nicht mehr die Folge der Verknüpfungen. Wol können wir, schrittweise vordringend, neue und neue Relationen vollziehen; aber die Gesammtheit der bereits vollzogenen als ein zusammenhängendes Ganzes in unserem Bewusstsein festzuhalten, das vermögen wir nicht. Es war also bereits eine Idealisirung unserer endlichen Geistesfähigkeit in Hinsicht auf den Umfang der zu vollziehenden Relationsverkettungen vorgenommen, als wir von der unbegrenzten Fortsetzbarkeit der systematisch angelegten Zahlenreihe sprachen, eine Idealisirung ganz ähnlicher Art wie diejenige, welche wir als das Fundament der gewöhnlichen Rede von der Unendlichkeit der ‚natürlichen' Zahlenreihe constatirten.

Wie kommt es nun, dass man dieser Schranken nicht gewahr wird, obgleich doch schon aus Anlässen des practischen Lebens mannigfaltige Zahlen auftreten und mit Sicherheit behandelt werden, welche dieselben überschreiten müssten?

Die Antwort lautet: Es werden die symbolischen Zahlbildungen des Systems eben nicht als Compositionen aus rein abstracten Bestimmungen gedacht. Die sinnlichen Zeichen sind hier nicht in der Art sprachlicher Zeichen blosse Begleiter der Begriffe. Sie betheiligen sich in einer weit hervorstechenderen Weise an unseren symbolischen Bildungen, mehr als wir es bisher geltend machten, ja so sehr, dass sie schliesslich fast das ganze Feld behaupten. In der That ermöglicht es der strenge Parallelismus zwischen dem System der Zahlbegriffe und dem der Zahlzeichen, systematische Fortbildungen der Reihe der Zeichen als die Repräsentanten (uneigentlich vorgestellter) systematischer Fortbildungen in der Reihe der Begriffe anzusehen. Mit der Composition sinnlicher Zeichen, die wir noch in einem Blicke überschauen und festhalten können, reichen wir aber viel weiter als mit der Composition der höchst abstracten Bestimmungen, welche den Zeichen als ihre Bedeutung entsprechen. Abgesehen von der geringeren psychischen Arbeit, welche die Auffassung und Verknüpfung sinnlicher Zeichen statt entfernter Abstractionen erfordert, sind besonders die figuralen Momente bedeutsam, die noch sehr erheblichen Zeichencomplexen einen einheitlichen Charakter ertheilen und deren einheitliche Auffassung ausserordentlich erleichtern. Bei Schriftzeichen sind es die linearen, bei gesprochenen Wortzeichen die zeitlichen und acustischen Verknüpfungen, die hier in Betracht kommen. Jeder solche Zeichencomplex liefert in seiner anschaulichen Einheit und typischen Form das feste Substrat für jene Kette begrifflicher Umsetzungen, welche die ‚Deutung‘ des zusammengesetzten Zeichens ausmachen. Auch darauf ist übrigens hinzuweisen, dass Folgen sinnlicher Zeichen sich dem Gedächtniss leichter einprägen als solche abstracter Begriffe, und so kann auch die feste Associationsfolge jener der symbolischen Vorstellung dieser dienen.

Wird nun eine Zahl durch einen solchen systematischen

Complex sinnlicher Zeichen definirt, dann bildet die Einheitlichkeit desselben das Symbolisirungsmittel für die sonst nicht zusammenhaltende Folge von begrifflichen Schritten. In welcher Art haben wir z. B. den Begriff einer zwanzigstelligen Zahl? Zunächst denken wir offenbar den blossen Begriff: eine gewisse Zahl, die diesem Zeichencomplex entspricht. Fragt man nach dem genauen Gehalt des Begriffes, also dem Sinne dieser Zeichnung, dann beginnt eine Kette von Explicationen, welche an der Einheit und an der besonderen Bildungsweise der Zeichencomposition ihren Halt besitzt. Erst auf solche Weise gewinnen wir die Möglichkeit einer Fortbildung des Zahlengebietes, welche unvergleichlich weiterreichend als die bisherige, die Anforderungen des gewöhnlichen Lebens und der Wissenschaft vollauf zu befriedigen vermag. Schlechthin unbeschränkt sind wir natürlich auch jetzt, auf dem Wege der blossen Zeichen, nicht; aber diese Schranken empfinden wir nicht mehr, denn sie hemmen uns nicht bei den Aufgaben, die in den Bereich unseres Interesses fallen.

Es erhebt sich nun die Frage, wie es kommt, dass wir den Unterschied zwischen den noch begrifflich und den nur signitiv zu symbolisirenden Zahlen eigentlich gar nicht merken. Die Antwort liegt nahe: weil wir auch schon bei kleinen Zahlen es bald bequemer finden, uns an die äusserlichen Signaturen zu halten, also selbst da, wo wir den begrifflichen Gehalt noch concipiren könnten. Es ist eine Thatsache, dass wir in praxi bei allem Zählen und Rechnen des Recurses auf die fundirenden Begriffe entraten können. Unerlässlich sind sie natürlich für jeden, der Wesen und Zweck des Zahlensystems allererst kennen lernt, oder der späterhin einmal das Bedürfniss hat, den vollen begrifflichen Gehalt eines complexen Zahlzeichens sich zum Bewusstsein zu bringen. Begriffliche Erwägungen sind die Quellen, aus welchen die Regeln alles arithmetischen Operirens entspringen; der practischen Bethätigung aber liegen stets die blossen sinnlichen Zeichen zu Grunde. Die Erklärung dieser Thatsache, gegen deren Merkwürdigkeit wir nur durch alltägliche Gewohnheit abgestumpft sind, wird uns im nächsten Capitel beschäftigen.

Die Unterschiede der sinnlichen Bezeichnungsmittel.

Die Betrachtungen, denen wir uns eben hingegeben haben, machen uns auf einen für unser wissenschaftliches Gebiet höchst bedeutsamen logischen Unterschied aufmerksam, auf den Unterschied der sinnlichen Bezeichnungsmittel. Dass es eine wichtige Aufgabe der Wissenschaft wäre, sich mit scheinbar so untergeordneten Dingen zu beschäftigen, als es die Wahl sinnlicher Zeichen ist, dürfte im ersten Augenblicke Bedenken erregen; doch wird es nicht schwer sein, dieselben zu zerstreuen. Wir werden sogleich sehen, wie der Unterschied zwischen Wort- und Schriftzeichen für die Arithmetik so wesentlich ist, dass eine notwendige Beschränkung auf die ersteren eine erheblichere Entwicklung der Arithmetik zur Unmöglichkeit gemacht hätte. Ja später werden wir sogar Gelegenheit finden zu zeigen, wie selbst scheinbar so nichtige Unterschiede wie die, ob man mit Tinte und Feder auf Papier oder mit Griffel auf staubbedecktem Täfelchen schreibt, den Gang arithmetischer Methoden wesentlich beeinflussen kann. Und das sollten nicht logische Unterschiede sein? Ein logischer Unterschied ist doch wol ein jeder, welcher die kunstmässige Beherrschung eines Erkenntnissgebietes beeinflusst.

Dass die Anwendung sinnlicher Zeichen überhaupt eine eminente Bedeutung für das arithmetische Gebiet besitzt, geht bereits aus unseren bisherigen Betrachtungen mit aller Deutlichkeit hervor. Logisch vollkommener werden nun diejenigen Bezeichnungsmittel sein, die ihrem Zwecke vollkommener entsprechen. In dieser Hinsicht aber sind dauernd fixirbare Zeichen für die Zahlen, im Besonderen Schriftzeichen, den Zahlwörtern ausserordentlich überlegen. Ein systematisches Schriftzeichen kann, ohne seine Uebersichtlichkeit zu verlieren, unvergleichlich umfassender sein als ein systematisches Wortzeichen; es ist leichter zu handhaben und stellt durch seine dauernde Fixirung an unser Gedächtniss keine besonderen Anforderungen. Führt das Ergebniss einer Zählung auf ein sehr complicirtes Zahlwort, so kommen wir sogleich in Gefahr, es wieder zu vergessen, selbst wenn wir es vollständig erfasst haben. Ein Schriftzeichen hält fest, und kann in jedem Moment von Neuem aufgefasst werden. Im Uebrigen sind solche Unterschiede noch viel wesentlicher für die Zwecke der Rechnung, als für die der Zählung. Complicirtere Rechnungsaufgaben wären von vornherein unausführbar, wenn wir, beschränkt auf das Wortzählen, von der Mangelhaftigkeit unseres Gedächtnisses abhiengen. Die besten Zeichen sind also leicht fixirbare, möglichst übersichtlich gebildete und dabei möglichst kurze und deutliche Schriftzeichen. Das bekannte indische Positionssystem entspricht diesem Ideal auf das Vollkommenste. Es erlangt seine unübertreffliche Uebersichtlichkeit und Kürze dadurch, dass es die geschriebenen Zahlwörter durch Ziffern ersetzt und die anschauliche Linienanordnung als systematisches Bezeichnungsmittel für die Ordnung der Stufenzahlen verwendet, wodurch eine besondere Bezeichnung für die Stufeneinheiten überflüssig wird. Eine dekadische Zahl hat die Form

$$a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} + \ldots + a_2 . 10^2 + a_1 . 10^1 + a_0 . 10^0$$

Das indische Ziffernsystem schreibt sie in der Form

$$a_n \; a_{n-1} \; \ldots \; a_2 \; a_1 \; a_0$$

wobei die Ordnung der Ziffern von rechts nach links der Ordnung der Stufenzahlen entspricht und sie bezeichnet. Die $m + 1^{\text{te}}$ Ziffer a_m in der Reihe (von der ersten rechter Hand gezählt) deutet durch ihre Stellung allein an, dass die Einheiten, die sie zählt, der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Stufe angehören. Freilich wurde eine solche Bezeichnungsweise erst möglich durch die Erfindung der Ziffer Null, welche die Function hat, das Ausfallen einer bestimmten Stufenzahl zu markiren und eben dadurch die Vollständigkeit der Stufenreihe, auf welcher die Beurtheilung des Stellenwertes beruht, zu erhalten.

Die natürliche Entstehung des Zahlensystems.

Man möchte meinen, dass die Erfindung dieser kunstreichen und bedeutungsvollen Doppelsystematik der Zahlen und Zahlzeichen, da sie ebenso umfassenden als fein abgewogenen Zwecken dient und nur durch verwickelte Gedankengänge zu rechtfertigen ist, das Product eines genialen, seines Zieles voll bewussten Geistes sein müsse, wie er nur denkbar ist auf dem Mutterboden einer hochentwickelten Culturnation. Und doch haben es fast alle Völker, die überhaupt entwickelt genug waren, um das Bedürfniss nach einer erheblicheren Erweiterung des Zahlgebietes zu empfinden — also schon auf recht niedrigem Culturniveau und lange vor aller wissenschaftlichen Reflexion — zu Zahlsystemen gebracht, die im Grossen und Ganzen (von vereinzelten Inconsequenzen abgesehen) das oben dargelegte fruchtbare Princip befolgen. Und nicht minder auffällig ist die Unabhängigkeit der Erfindung bei verschiedenen Völkern, welche aus den neben aller Gemeinsamkeit bestehenden Differenzen (z. B. in der Wahl der Grundzahl des Systems) mit Sicherheit zu erschliessen ist.

Die Erklärung dieser bemerkenswerten Erscheinung wird uns das erste Beispiel einer allgemeinen, in unserem Wissensgebiet so vielfach zu Tage tretenden Thatsache gewähren; sie wird es verständlich machen, wie überhaupt ein in seiner Art und Constitution künstliches Zeichensystem, dessen zweckbewusste Erfindung und theoretische Rechtfertigung abstracte Betrachtungen complicirtester Art erfordern würde, auf einem Wege n a t ü r l i c h e r p s y c h o l o g i s c h e r Entwicklung zu Stande kommen kann, und dies bereits auf einer Geistesstufe, von der aus schon die Problemstellung in unfassbaren Fernen liegen müsste.

Die Zeiten, in welche die Entstehung der Zahl- und Zahlzeichensysteme fällt, kannten keine historische Ueberlieferung, und so ist denn an eine Reproduction der historischen Entwicklung nicht zu denken. Gleichwol besitzen wir Anhaltspunkte genug — durch die ursprüngliche Bedeutung mancher Zahlnamen, durch unsere Kenntniss der Zählweise halbcivilisirter und wilder Völker, und vor Allem durch das Verständniss der hier in Betracht kommenden allgemeinen Züge der menschlichen Natur — um die psychologische Entwicklung derartiger Systembildungen a posteriori, und doch in allen wesentlichen Punkten zutreffend, zu reconstruiren.

Die Systematik der Zahlen und Zahlbenennungen ist aus dem systematischen Zählen, dieses wiederum aus gewissen natürlichen Zählgewohnheiten erwachsen, welche vermöge der Gleichartigkeit der menschlichen Anlagen bei den verschiedensten Völkern einer gewissen Culturstufe entstehen mussten.

Versetzen wir uns in die Jugendzeit der Völkerentwicklung. Das häufige Interesse an sinnlichen Mengen gleichartiger Objecte hatte bereits zur Auffassung einer gewissen Analogie und damit einer sie fundirenden gemeinsamen Beschaffenheit, also zum Begriff der Vielheit geführt, welcher, auf dieser Stufe natürlich viel weniger abstract als auf der unsrigen, sich auf Vielheiten gleichartiger und sinnlicher Inhalte beschränkte. Der Drang zur Mittheilung der Vorkommnisse des practischen Lebens, bei denen bestimmte Mengen solcher Objecte eine grosse Rolle spielten, führte hier, wo die Umstände besonders günstig lagen, leichter noch wie in anderen Gebieten zu dem Gedanken einer Nachbildung des Vorgestellten durch sinnliche Mittel. Nahe gelegt wurde dieser Gedanke durch die Hände, jene sichtlich hervortretenden Organe, mit denen das Individuum in ernster und spielender Bethätigung am meisten zu thun hatte, und welche je nach der Haltung der Finger wechselnde sinnliche Mengenbilder (die Fingergruppen) darboten und sich demgemäss zur Nachbildung und Symbolisirung entsprechender Mengen von beliebigen anderen Objecten besonders leicht aufdrängen mussten. [1]) So entstanden in der Gebärdensprache die ‚Fingerzahlen' als die ersten Zahlzeichen.

Ja wir können wol noch mehr behaupten: auf diesem sinnlichen Wege dürfte in der Regel überhaupt erst eine scharfe Unterscheidung und Klassification der bestimmten Zahlformen zu Stande gekommen sein. In gewisser Weise besass man natürlich schon die Zahlbegriffe, als man die Analogie verschiedener gleichzahliger Mengen unter einander und mit Fingergruppen aufgefasst hatte. Aber erst durch die constante Rückbeziehung der verschiedenartigsten Mengen auf die in sinnlicher Erscheinung scharf gesonderten Fingermengen, erhoben sich die Fingerzahlen zu Repräsentanten allgemeiner Begriffe, allgemeiner Beschaffenheiten der nach Mehr und Weniger klassificirten Mengen. Wir dürfen, ohne die Paradoxie zu scheuen, sagen: die Begriffe 1, 2, 3 .... als die Species des allgemeinen Vielheitsbegriffes, als die Besonderungen des Wieviel, kamen erst zu einem bestimmteren Bewusstsein in der begrifflichen Bedeutung der Fingerzahlzeichen.

---

[1]) Ich spreche oben von einer Nachbildung der Mengen in Beziehung auf ihre Zahl durch Fingergruppen. Diese Ausdrucksweise, obschon incorrect, ist hier doch passend, weil sie der betreffenden Geistesstufe angemessen ist. Die an den sinnlichen Mengen geübten psychischen Bethätigungen liefern Begriffe, welche das naivere Bewusstsein als abstracte positive Momente der bezüglichen Anschauungen selbst ansieht. Ganz wie Schönheit und Hässlichkeit, Güte und Schechtigkeit als innere Beschaffenheiten der Aussendinge, so werden auch Zweiheit, Dreiheit etc. als ebensolche der äusseren Mengen beurtheilt.

Die Wortsprache folgte in unserem Begriffsgebiet der Gebärdensprache nach, wie man an vielen Beispielen von Zahlwörtern erkennt, deren ursprüngliche Bedeutung als blosse Uebersetzung der Fingerzahlen in die Wortsprache zu charakterisiren ist. Jedenfalls wurden aus naheliegenden Gründen auch weiterhin, selbst noch auf viel höherem Bildungsniveau neben den Wortzeichen die Fingerzeichen als Zählungsmittel verwendet.

Es entspricht der niedrigen Geistesstufe, mit der wir es hier zu thun haben, dass schon das Zählen der kleinsten Mengen keine geringe Mühe verursachte (Berichte über das Zählen wilder Völker bestättigen dies), und so verlangte es die Sorge für die Sicherheit des Verfahrens, dass die Zählung schrittweise erfolgte, indem der Reihe nach je einem Gliede der Menge je ein erhobener Finger zugeordnet wurde. Es entstanden also successive die Zeichen für 1, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$, u. s. w., und derart war die Zahlenreihe als solche im Werden.

Es ist klar, dass diese Zählweise an das enge Gebiet eigentlicher Mengen- und Zahlvorstellungen nicht gebunden war, sondern in gleicher Weise (und ohne dass man den Unterschied zu beachten Anlass hatte) weiter fortgesetzt werden konnte; freilich nicht ohne gewisse natürliche Hemmungen und, sie zu überwinden bestimmte, Kunstgriffe. Einen ersten Haltpunkt in der Zählung gebot schon die Fünf — man war mit den Fingern einer Hand zu Ende; daher in manchen Sprachen das Zahlwort Fünf so viel wie „eine Hand" bedeutet. Mit Zuhilfenahme der Finger der zweiten Hand konnte man nun (in der Form $5 + 1$, $5 + 2, \ldots$) weiterzählen, bis die Zehn einen neuen und nicht mehr in derselben Weise überschreitbaren Haltpunkt setzte. (Nur Völker, welche auch die Zehen zum Zählen benutzten, kamen weiter, und erst Zwanzig war für sie die entsprechende Grenze.) Sollten nun gleichwol grössere Mengen abgezählt werden, dann blieb offenbar nichts übrig, als die einmal erfolgte Durchzählung der Finger (und ev. auch der Zehen) seitab durch ein sinnliches Zeichen zu notiren und die noch übrigen Objecte wieder durch die Finger (und Zehen) abzuzählen. Nach abermaliger Durchzählung musste jenes Zeichen für Zehn (resp. Zwanzig) wiederholt werden, u. s. f.

So zählte man grössere Mengen durch Theilung in Zehnergruppen und in eine Gruppe unter Zehn. Nun war aber noch eine zweite Zählung nötig geworden, nämlich für die Menge der Zehnerzeichen. War die Anzahl derselben grösser als Zehn, dann reichten für deren Durchzählung die zehn Finger nicht aus. Wieder bedurfte man zur Anzeige für die einmalige Aufwendung der sämmtlichen Finger der Einführung eines Zeichens, und zwar eines neuen, um nicht die einfache Zehn mit einer Zehn mal Zehn zu verwechseln. Sprechen wir, der Bequemlichkeit der Darstellung zuliebe, dieses Zeichen als „Hundert" aus, dann zwang in derselben Weise die Zählung der Hunderter zur Einführung eines neuen Zeichens „Tausend" für 10.100. U. s. w.

Auf solchem Wege wurde man auf ein allgemeines Verfahren der Gruppenzählung geführt, durch welches bereits jede grössere Zahl in Form einer ganzen Function der Potenzen von Zehn gebildet wird. Noch heute giebt es Völker, welche derartige Zählweisen beobachten, die den Ursprung des dekadischen Zahlsystems ganz verständlich machen. Auf den Südseeinseln rechnen, wie Tylor[1]) erzählt, die Eingeborenen so, dass sie beim Zählen der Einer Steinchen benützen; sind zehn Steinchen beisammen, so wird statt deren ein Stückchen von einem Cocosnussstiel zurückgelegt; sind solcher zehn beisammen, so wird ein grösseres Stück eines Cocosnussstiels genommen; u. s. w.

Die Wortsprache folgte in ihren Benennungen den Be-

[1]) E. B. Tylor, Einleitung in die Anthropologie (Siebert's Uebers.) S. 376.

griffsbildungen der Zahlensystematik. Natürlich waren neben den Namen für die Zahlen bis Zehn nur noch solche für die Stufenzahlen nötig; alle übrigen konnten durch blosse Zusammensetzungen dieser gebildet werden. Ein allgemeiner Gebrauch von Zahlwörtern beim Zählen musste dieses selbst erleichtern und vereinfachen, indem gewisse naheliegende und practische Veränderungen der Zählweise sich ergaben, durch welche dieselbe einheitlicher, systematischer und zugleich von anderen sinnlichen Mitteln als den Wörtern unabhängig wurde. Statt nämlich jede durchgeführte Zehnzählung seitab durch neue Zeichen zu signiren, dann immer von Neuem mit Eins zu beginnen und erst schliesslich die Zahl der Zehner abzuzählen, wobei wieder ein ähnliches Verfahren einzuschlagen war, konnte man doch vermittelst der Zahlwörter und ohne andere sinnliche Zeichen in folgender Art und Ordnung zählen:

1, 2, 3, ... 10; $10+1$, $10+2$, $10+3$, ... $10+10=2.10$; $2.10+1$, $2.10+2$, ... 3.10; ..... $10.10=100$; $100+1$, $100+2$ .... $100+10$; $100+10+1$, $100+10+2$ .... $100+2.10$; ....

So blieb man in einer gleichförmigen Zählung, welche die Zahlenreihe nach demselben Princip fortzusetzen geeignet war. Jeder neue Schritt, bestehend in der Hinzufügung einer Einheit zur eben gebildeten Zahl, ergab eine neue Zahl. Es ist aber nicht dieses einfache Reihenprincip allein, welches die neuen Bildungen bestimmt. Die Verwendung der Hilfsoperation der Multiplication und Potenzirung gestattet es, immer wieder die alten Begriffs- und Namenbildungen zu benutzen, so dass jede Zahl und jeder Zahlname als eine systematische Bildung aus sehr wenigen Elementarzahlen und -Namen (beides strenge parallel) erscheint.

Nach unserer Darstellung erklärt die naturgemässe Entwicklung der urwüchsigen Zählmethode durch die Fingerzahlen die Entstehung der systematischen Zählmethode vollkommen. Nur für die Wahl der Grundzahl blieben verschiedene Wege offen. Der Bequemlichkeit halber führten wir unsere Betrachtungen an der Grundzahl Zehn durch. Manche Völker hielten indess bereits die Fünf, welche als Fingerzahl einer Hand ausgezeichnet ist, als Grundzahl ständig fest. Andere wiederum, welche auch die Zehen zum Zählen verwendeten, konnten, gleich den alten Mexicanern, ein consequentes vigesimales Zahlensystem ausbilden. In den meisten Fällen wurde jedoch die Zehn zur Grundzahl, während die quinären Bildungen unter Zehn ($5+1$, $5+2$, ..., $5+5$), nachdem das wirkliche Fingerzählen dem Wortzählen Platz gemacht hatte, verschwanden, da ihnen weiter keine systematische Bedeutung zukam; so dass das Zählen bis Zehn als einfaches Reihenzählen aufgefasst wurde. (Die ursprünglichere Auffassungsweise prägt sich noch häufig genug in Wort und Schrift aus, z. B. in den römischen Zeichen V, VI, VII, VIII u. dgl.) Jedenfalls ist das Princip der Systembildung durch jenen Weg natürlicher Entwicklung völlig eindeutig erklärt.

Unsere Auffassung könnte noch zu einem Bedenken Anlass geben. In seinen geistvollen Fragmenten „Zur Geschichte der Mathematik“ meint nämlich H. Hankel, dass die Zählung über 10.10 hinaus auf einem doppelten Wege und doch consequent hätte fortschreiten können. Als man zu $10.10+10$ kam, konnte man dies entweder als hundert und zehn (in consequent dekadischer Sprechweise: zehnzig und zehn) oder als elf mal zehn und zehn (elfzig und zehn) auffassen und demgemäss weiterzählen. „Man nahm mit glücklichem Griffe das erste Schema, indem man die Grundzahl X ähnlich wie 1, als eine Einheit nur von anderer ... Stufe ansah, welche nicht über das Xfache hinaus vervielfältigt werden dürfe“. [1])

[1]) a. a. O. S. 11.

Dem gegenüber kann leicht gezeigt werden, dass der factisch eingeschlagene Weg nicht ein bloss glücklicher Griff, sondern vielmehr eine notwendige Consequenz der Weiterentwicklung des Fingerzählens war. Der äussere Anlass für diejenige Auszeichnung des 10.10, wodurch es weiterhin zu einer Einheit höherer Ordnung werden musste, war einfach die Nötigung, für zehn Zehner ein neues Zeichen (und demgemäss eine neue und besondere Wortbenennung) einzuführen. Hiemit war aber die Auffassung von 10.10 + 10 als 11.10, wie man an der sprachlichen Bildung Hundert und zehn sieht, ausgeschlossen, sie lag nicht mehr auf dem Wege natürlicher Zählung. Und ähnlich verhält es sich offenbar in Betreff der einzuschlagenden Richtung bei den weiteren Wendepunkten der Zählung, den späteren Stufenzahlen.

Die Entwicklung der Zahlenreihe bot ein System unbeschränkt fortsetzbarer symbolischer Begriffe, vermittelst welcher jede Zählungsaufgabe lösbar wurde. Die Zählung einer beliebig vorgelegten Menge erfolgte durch ein Fortschreiten entlang dieser periodisch gegliederten Begriffsreihe, oder genauer entlang der ihr correspondirenden Kette von Zahldefinitionen; sie lieferte den der Menge zugehörigen, eindeutig bestimmten Zahlbegriff, welcher (von den kleinsten Mengen abgesehen) nur in symbolischer Form und nur mit Hilfe eines derartigen gegliederten Reihenverfahrens hergestellt werden konnte. Aber wenn irgend ein Process, so hatte dieser die Eignung und Tendenz, zu einem ganz mechanischen und äusserlichen zu werden, und dies eben vermöge jener Zweiseitigkeit, die wir betont haben. Dem Fortschritt entlang der Reihe der Begriffe entspricht in strengem Parallelismus ein Fortschritt entlang der Reihe der Namen, und das System der Namen ist in sich genau so consequent, als das der Begriffe. Es ist klar: sowie man die Systematik durch

Uebung beherrschte, musste von selbst der geistige Process der Begriffsbildung den äusserlichen Reproductionsmechanismus der Namenbildung das Feld räumen. Ursprünglich zählte man, Glied für Glied der Menge heraushebend, in geistiger Bethätigung: Eins; Eins und Eins ist Zwei; Zwei und Eins ist Drei; u. s. f., wobei schrittweise die Namen reproducirt, über Zehn hinaus jedoch systematisch gebildet wurden und allenfalls auch durch ihre feste Folge die Stetigkeit des begrifflichen Processes stützen mochten. Nach erlangter Uebung aber ergab es sich von selbst, dass man sozusagen gedankenlos, mechanisch zählte, indem man der theils gedächtnissmässig fest eingeprägten, theils nach dem Princip der Systematik mechanisch herzustellenden Reihe von Namen und Sätzen folgte, ohne jede Reflexion auf deren gedankliche Bedeutung. Aus einem begrifflichen Verfahren zur Erzeugung des Zahlbegriffes wurde, indem die psychischen Correlate der einzelnen Schritte fortfielen, auf einem natürlichen Wege ein symbolisch-äusserliches Verfahren zur systematischen Herleitung des dem Begriffe correspondirenden Zahlnamens und erst mittelst dieses, des Begriffes selbst. Man bedurfte hiebei bloss der gedächtnissmässigen Beherrschung der Zahlen- und Zahldefinitionenreihe bis Zehn und der Vertrautheit mit dem System der dekadischen Zahlwortbildung. Die volle Beherrschung der erweiterten Zahlenreihe durch das Gedächtniss reicht aber für den geübten Rechner bald um vieles weiter als bis Zehn. Innerhalb der Grenzen, wofür dies der Fall ist, bedarf es nicht der immerhin (auch ohne die begleitenden begrifflichen Processe) Denken erfordernden Anwendung der Zahlwortsystematik; und so musste sich der auf Vereinfachungen bedachten Praxis bald noch ein weiterer, erheblich abkürzender Kunstgriff aufdrängen. Statt der Reihe der Zahldefinitionen konnte man doch derjenigen der Zahlworte allein folgen. Man kürzte die Reihe der Sätze [1], $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, ... in die der Worte 1, 2, 3, 4, ... Indem man den Mengengliedern schrittweise die Namen dieser Reihe (und natürlich jedem nur einmal) zuordnete, bis alle Glieder erschöpft waren, erlangte man in dem zuletzt herangezogenen Namen den der gesuchten Zahl, und damit diese selbst. Zum richtigen Resultat musste diese mechanische Procedur führen, weil die Anzahl der Namen der Zahlenreihe bis n inclusive, durch n selbst ausgedrückt ist. Dies ist innerhalb des Rahmens der gemeinen Praxis das übliche Verfahren; für grössere Zahlen aber, die über ihn hinausreichen, tritt das erstbehandelte ein. Man zählt über die gewohnten Grenzen hinaus durch Fortsetzung der Namenreihe nach dem Princip der dekadischen Zahlwortbildung.

Bei der Erklärung der natürlichen Entwicklung der Zahlensystematik haben wir nur auf die Wortzeichen Rücksicht genommen und mussten dies thun, weil nur die Zahlwortsysteme den natürlichen Gang der Begriffsbildung begleiten, während die Ziffernsysteme, sofern sie überhaupt auf den Namen von Systemen der Zahlbezeichnung Anspruch machen können, spätere, bald sich roh verflachende, bald genaue Nachbildungen der ersteren sind, und erst im genialen indischen System den Charakter eines logisch vollkommenen, aber auch durch wissenschaftliche Reflexion entstandenen Hilfsmittels der Arithmetik annehmen. Die Fortsetzung der logischen Entwicklungen im nächsten Capitel wird zeigen, dass die Wahl der Bezeichnungsmittel keineswegs eine bedeutungslose Sache ist. Die logischen Unterschiede zwischen denselben beruhen auf dem verschiedenen Grade ihrer Eignung für eine Kunst des Rechnens. Dies ist der Grund, warum wir dieselben hier noch nicht in den Kreis der Betrachtung ziehen. [1])

---

[1]) Reichhaltige Belege zu den Darlegungen dieses § findet man in den bekannten anthropologischen und sprachwissenschaftlichen Werken von Tylor, Lubbock, Pott u. A.

Zahlenschätzungen durch figurale Momente.

Im XI. Capitel haben wir ausführlich das Problem behandelt, wie unmittelbare Mengenschätzungen zu Stande kommen ohne wirkliche Durchführung der zugehörigen psychischen Bethätigungen, der Einzelauffassung und Collection. Eine einheitliche Anschauung ist uns gegeben, und in Einem Blick urtheilen wir: eine Menge von Kugeln, Münzen u. s. w. Zur Erklärung dieser eigenthümlichen Thatsache haben wir auf die figuralen Momente der einheitlichen Mengenanschauungen hingewiesen, welche eine Association mit dem Namen und symbolischen Begriff der Vielheit eingehen, die Reproduction des letzteren vermitteln und dadurch die unmittelbare Schätzung der Erscheinung als einer Menge ermöglichen. Ein ganz ähnliches Problem liegt bei den unmittelbaren Zahlenschätzungen vor, und auch zu seiner Lösung reichen wir mit den erwähnten Hilfen vollkommen aus.

Am klarsten liegt die Sache in Beispielen, wie sie uns Würfel, Domino- und Kartenspiel mannigfaltig darbieten. Jede Würfelfläche besitzt eine charakteristische, feste Punktconfiguration, die mit dem Zahlnamen (bzw. mit dem symbolischen Begriff einer gewissen, durch ihn genannten Zahl) eine Association eingeht. Wird mit mehreren Würfeln zugleich gewürfelt, so findet entweder eine rasche Quasi-Summation nach dem Eins und Eins statt, wobei natürlich die blossen Zahlwörter vermitteln; oder es wird, im Falle grosser Uebung, durch den Figuralcharakter der ganzen complexen Erscheinung unmittelbar das entsprechende Zahlwort der Augensumme reproducirt. Die Anzahl der hiefür einzuprägenden Configurationen ist ja nur eine beschränkte. Dasselbe gilt beim Dominospiel, und es ist bekannt, welche Fertigkeit geübte Spieler in der momentanen Zahlenschätzung haben; sie können oft bis vierzig Augen in einem Blick abzählen.

In den bisherigen Beispielen waren die Configurationen feste, oder vielmehr nahe verwandte. Zur Erklärung dieses letzteren Zusatzes sei darauf hingewiesen, dass eine Würfelfläche z. B. bei jeder drehenden Lagenänderung einen anderen Figuralcharakter erhält, und es daher der zugehörige Artcharakter sein musste, der im Grunde die Association vermittelte. Diese Bemerkung macht es deutlich, dass der Unterschied der betrachteten Fälle gegenüber anderen, wo ganz willkürliche Objectvertheilungen zahlenmässig geschätzt werden, nicht so erheblich ist, wie es anfangs scheinen möchte.

Wie auch immer drei scharf gesonderte Objecte im Gesichtsfelde vertheilt sein mögen, sie bilden zusammen eine charakteristische Configuration, vorausgesetzt, dass sie überhaupt zu einer anschaulich-einheitlichen Mengenerscheinung verschmelzen können. Die mannigfaltigen Dreipunkt-Configurationen, die je nach der wechselnden relativen Lage der Objecte entstehen, sind zwar anschaulich wolunterschieden; aber sie besitzen so viel augenfällige Analogie, dass ihr gemeinsamer Charakter gewiss die Reproduction der Zahl Drei (oder genauer des Namens Drei mit dem symbolischen Begriff einer gewissen, durch ihn benannten Zahl) vermitteln kann. Eine wesentlichere Differenz zeigt der Figuralcharakter nur dann, wenn die drei Objecte in geradliniger oder annähernd geradliniger Anordnung zu liegen kommen, ein Grenzfall, dessen wolbemerkbare Besonderheit die Association der Zahl ermöglicht. Ebenso verhält es sich bei Mengen von vier Objecten. Hier zeigt die Configuration entweder den bekannten Viereckstypus, oder es treten andere charakteristische Typen auf, wie wenn alle vier, oder irgend welche drei Objecte in einer Reihe liegen, oder wenn ein Object innerhalb der von den drei übrigen gebildeten Dreieckfigur fällt u. s. w.

Je mehr Objecte die Menge umfasst, um so grösser ist die zugehörige Zahl anschaulich unterschiedener Figuraltypen, und so wird es begreiflich, warum wir mit einer sicheren Zahlschätzung in der Regel nicht über fünfgliedrige

Mengen hinauskommen, es sei denn durch fortgesetzte und methodische Uebung. PREYER, welcher hierüber Versuche angestellt hat, meint, dass im letzteren Falle die erreichbare Grenze im Durchschnitt bei Zwanzig liegen dürfte. Der berühmte Rechner DAHSE konnte noch einige dreissig beliebig vertheilte Objecte momentan abschätzen.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ist zu ersehen, dass keinerlei Anlass besteht, für die Erklärung momentaner Zahlenschätzungen Anleihen bei dem allzeit gefälligen Unbewussten zu machen. Ich kann demgemäss auch die PREYER'sche Lehre vom „unbewussten Zählen"[1]) nicht billigen und wundere mich nur, wie dieser hervorragende Physiologe seine Argumente als bindend ansehen konnte. Aus der blossen Thatsache, dass wir kleine Objectgruppen momentan abschätzen, ohne dass zum überlegten, wenn auch noch so beschleunigten Zählen Zeit bliebe, schliesst er: „Also ist unbewusstes Zählen nicht nur nichts in sich Widersprechendes, sondern etwas Alltägliches." Zur weiteren Stütze fügt er noch bei: „Man darf nicht einwenden: das sei kein Zählen mehr; denn wenn Jemand bestimmt angeben kann, ob drei, vier, fünf Gegenstände sich vor ihm befinden, so muss er Zahlen unterscheiden können, und gewiss ist, dass wer nicht zählen kann, auch jene Fragen nicht zu beantworten vermag". Auch wenn der Umstand, auf den das letztere Argument fusst, unbestreitbar wäre, würde es nichts beweisen, nachdem eben noch der Weg offen bleibt, dass die Zahlnamen, nach wieder-

[1]) Die PREYER'sche Abhandlung „Ueber unbewusstes Zählen" erschien zuerst in der Gartenlaube 1886, S. 15 und 36 und ist wieder abgedruckt in seiner jüngst erschienenen Sammlung wissenschaftl. Aufsätze. Wie ernst es PREYER mit der Hypothese des Unbewussten nimmt, zeigen die beigegebenen physiologischen Erklärungen, wonach die der Verstandesthätigkeit des Zählens zugehörigen Bewegungen „schliesslich die sehr oft benutzten Nervenfasern und Nervenzellen im Gehirn unbewusst durchlaufen" und sich „der Reflexbewegung nähern".

holter Zählung mannigfacher Objectvertheilungen, mit deren typischen Figuralcharakteren feste Associationen eingehen. Im Uebrigen würde ich es sehr wol für möglich halten, dass auch ein des Zählens völlig Unkundiger die Zahlnamen mit diesen Figuralcharakteren zur Association brächte und sich z. B. zu einem tüchtigen Dominospieler ausbildete.

XIII. Capitel.

Die logischen Quellen der Arithmetik.

Rechnen, Rechenkunst und Arithmetik.

Den Begriff der Rechenkunst pflegt man mit dem der Arithmetik in nahe Beziehung zu bringen, ja häufig beide zu identificiren. Die Arithmetik wird gewöhnlich als die Wissenschaft von den Zahlen definirt. Diese Definition ist nicht hinreichend klar. Die einzelnen Zahlen für sich betrachtet geben zu einer erkenntnissmässigen Behandlung keinen Anlass, und wo von besonderen, wissenschaftlich zu ergründenden Beschaffenheiten einzelner Zahlen die Rede ist, handelt es sich stets um Merkmale, die ihnen zukommen auf Grund gewisser Relationen, welche sie mit einzelnen oder ganzen Klassen anderer Zahlen verbinden. Nur aus den Beziehungen der Zahlen zu einander entspringen Aufgaben für eine logische Behandlung. Besser wäre danach die Definition der Arithmetik als der Wissenschaft von den Zahlbeziehungen. Jedenfalls besteht ihre wesentliche Aufgabe darin, aus gegebenen Zahlen andere zu finden, vermöge gewisser bekannter Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen.

Betrachten wir nun den Begriff der Rechenkunst. Er ist uns gegeben, wenn wir den des Rechnens besitzen. Der Begriff des Rechnens lässt aber mehrfache, weitere und engere, Bedeutungen zu. Unter Rechnen im weitesten Sinne kann man jede Herleitungsweise von gesuchten Zahlen aus gegebenen verstehen. Danach müssten wir freilich die Vereinigung der Zahlen Zwei und Drei zu Fünf, auf Grund der eigentlichen Vorstellung der Begriffe selbst, schon ein Rechnen nennen; ebenso die Herstellung der Begriffe systematischer Zahlen, ob wir nun den Weg der Begriffsbildung oder den Weg der mechanisch-äusserlichen Zeichenbildung einschlügen. Jede arithmetische Methode wäre eo ipso eine rechnerische. Die Rechenkunst wäre die Kunst arithmetischer Erkenntnisse, die Arithmetik aber deren systematisch geordnete Gesammtheit.

Was nun die Methode der Herleitung von gesuchten aus gegebenen Zahlen anlangt, sind zwei Fälle denkbar: Entweder es ist diese Herleitung eine im Wesentlichen begriffliche Operation, bei welcher die Bezeichnungen eine nur untergeordnete Rolle spielen; oder sie ist eine im Wesentlichen sinnliche Operation, welche auf Grund des Zahlzeichensystems nach festen Regeln Zeichen aus Zeichen herleitet, um erst das Resultat als die Bezeichnung eines gewissen, des gesuchten, Begriffes zu reclamiren.

Welche von diesen Methoden die logisch vollkommenere ist, wird nur eine Frage der Leistungsfähigkeit sein können. Vorgreifend können wir hier schon sagen, dass die letztere auf unserem Gebiet unter allen Umständen den Vorzug besitzt und ihn auch vollauf verdient. Die Methode der Begriffe ist höchst abstract, beschränkt und selbst bei grösster Uebung mühsam; die der Zeichen concret-sinnlich, allumfassend und schon bei mässiger Uebung bequem zu handhaben. Ich sagte allumfassend: in der That giebt es keine erdenkliche Aufgabe, die sie zu lösen nicht im Stande wäre. So macht sie die begriffliche Methode ganz überflüssig, deren Anwendung nicht mehr dem wissenschaftlichen, sondern nur dem kindlich zurückgebliebenen Geisteszustande angepasst ist. Zu einer allgemeinen Anerkennung dieser Auffassung fehlt allerdings noch viel, und es hängt wol mit dem Mangel an einer Logik der symbolischen Erkenntnissmethoden (und vor Allem derjenigen der Arithmetik) zusammen, dass die meisten Forscher, geleitet von dem gewöhnlichen Vorurtheil, jede wissenschaftliche Methodik operire mit den jeweilig intendirten Begriffen selbst, auch die arithmetischen Operationen für abstract-begriffliche hielten — dem klaren Augenschein zu Trotze. Der Aufhellung der wahren Sachlage werden wir späterhin besonderes Augenmerk zuwenden.

Die Methode der sinnlichen Zeichen ist also *die* logische Methode der Arithmetik. Hier bietet sich nun derjenige Begriff des Rechnens, welchen wir, im Hinblick auf den Umfang der Anwendung, als den gemeinüblichsten bezeichnen dürfen. Er umfasst *jede symbolische Herleitung von Zahlen aus Zahlen, welche der Hauptsache nach auf geregelten Operationen mit sinnlichen Zeichen beruht.* Aus den obigen Bemerkungen geht hervor, dass, trotz dieser Einschränkung des Begriffes vom Rechnen, das Verhältniss der Begriffe Arithmetik und Rechenkunst keine wesentliche Veränderung erfahren hat, da in der ersteren andere als (in dem jetzigen Sinne) rechnerische Verfahrungsweisen eben nicht in Betracht kommen.

Mit Rücksicht darauf, dass der Mechanismus der symbolischen Methodik sich von seinen begrifflichen Anwendungssubstraten völlig loslösen lässt, drängt sich aber noch ein anderer Begriff des Rechnens auf, welcher im Vergleich mit dem vorigen nach der einen Richtung beschränkter, nach der anderen hingegen weiter ist.

Man kann ihn nämlich fassen als *jede geregelte Art der Herleitung von Zeichen aus Zeichen innerhalb irgend eines algorithmischen Zeichensystems, nach den diesem System eigenthümlichen ,Gesetzen', oder besser: Conventionen, der Verknüpfung, Sonderung und Umsetzung.*

Es sind höhere logische Interessen als diejenigen der arithmetica numerosa (mit der wir es momentan zu thun haben), welche diese Begrenzung des Begriffs fordern. Es ist eine für das tiefere Verständniss der Mathematik höchst bedeutsame Thatsache, dass ein und dasselbe System der Symbolik *mehreren* Begriffssystemen dienen kann, welche, ihrem Inhalte nach verschieden, nur in der Bildungsform Analogien aufweisen. Sie werden dann, wie wir sagen, durch dasselbe Rechensystem beherrscht.

Diese neue Formation des Begriffes vom Rechnen empfiehlt sich aber auch noch dadurch, dass sie uns eine logisch reinliche Sonderung der verschiedenen Schritte, welche die Aufgabenlösung in derartigen technisch zu behandelnden Gebieten erfordert, an die Hand giebt. Jede Lösung zerfällt offenbar in einen rechnerischen und in zwei begriffliche Theile: *Umsetzung der Ausgangsgedanken in Zeichen* — *Rechnung* — *Umsetzung der resultirenden Zeichen in Gedanken.* Im Anzahlengebiete, wo die Conception und Sonderung der Begriffe (von den wenigen ,eigentlichen' natürlich abgesehen) auf der mitlaufenden Signirung, als ihrer unerlässlichen Stütze, ruht, besteht jener erste Schritt bloss darin, dass man in den jeweilig gegebenen Complexen aus Begriffen und Namen von den ersteren abstrahirt und nur die letzteren festhält.

Das Verhältniss der Arithmetik und Rechenkunst hat sich nun mit diesem neuen Begriff des Rechnens (den wir von nun an allein verwenden wollen) freilich geändert. Lösen wir die Zahlzeichen von ihren begrifflichen Correlaten los und bilden, um alle begriffliche Anwendung unbekümmert, die technischen Methoden aus, die ihr System zulässt, dann haben wir die reine Rechenmechanik abgezogen, welche der Arithmetik zu Grunde liegt und die technische Seite ihrer Methodik ausmacht. Offenbar ist nun die Rechenkunst nicht mehr identisch mit der Kunst arithmetischer Erkenntniss.

Die arithmetischen Rechenmethoden und die Zahlbegriffe.

Bedarf eine Disciplin auf der Höhe ihrer Ausbildung zur Lösung irgend welcher Probleme keiner anderen als rechnerischer Hilfsmittel, so kann sie der begrifflichen doch nicht entraten in ihren Anfängen, wo es sich darum handelt, die Rechnung logisch zu fundiren. Nur an der systematischen Verknüpfung der ihr zu Grunde liegenden Begriffe und deren Beziehungen kann es ja liegen, dass die correspondirenden Bezeichnungen sich zu einem consequent gebildeten System zusammenschliessen und dabei die Sicherheit besteht, dass jeder im Sinne der Zeichenregeln folgerichtigen Ableitung von Zeichen und Zeichenbeziehungen aus den gegebenen, eine im Sinne der Gedanken folgerichtige Ableitung von Begriffen und Begriffsbeziehungen aus den hier gegebenen entsprechen müsse. Demgemäss werden wir auch zur Begründung der arithmetischen Rechenmethoden zurückgehen müssen auf die Zahlbegriffe und deren Verknüpfungsformen. Die ersteren sind uns bereits in den systematischen Formen der natürlichen Zahlenreihe oder den höheren des Zahlensystems (in dem besondern Sinne des Wortes) gegeben. Die Verknüpfungen aber, durch welche aus gegebenen neue Zahlen gewonnen werden, sind die Zahloperationen.

Die systematischen Zahlen als Vertreter der Zahlen an sich.

Die Zahlensystematik bietet, wie wir sahen, eine gleichförmige und (bei idealisirender Abstraction von gewissen

Schranken unserer Fähigkeiten) unerschöpfliche Methode der Fortsetzung des Zahlgebietes über jede Grenze hinaus. Da mittelst ihrer scharf gesonderten Begriffsbildungen jede denkbare Vielheit abzählbar ist, so kann es auch keine wirkliche Zahl geben, die nicht im Systeme ihr symbolisches Correlat fände, und zwar jeweilig nur eines, da verschiedene systematische Zahlsymbole notwendig auf verschiedene wirkliche Zahlen hindeuten. Ein Zahlensystem, wie es z. B. unser dekadisches ist, kann demnach als die vollkommenste Gegenspiegelung des Reiches der Zahlen an sich, d. i. der uns im Allgemeinen unzugänglichen wirklichen Zahlen, angesehen werden und dies auch nach Seite ihrer Anordnung, welche bei den symbolischen wie bei den eigentlichen Begriffen die einer einfachen Reihe ist. Mit Recht dürfen wir also die indirecten Bildungen des Systems als die symbolischen Surrogate für die Zahlen an sich betrachten.

Die symbolischen Zahlbildungen ausserhalb des Systems, als arithmetische Probleme.

Umfasst das System nun auch symbolische Correlate aller erdenklichen Zahlen, so umfasst es doch nicht alle erdenklichen Zahlsymbolisirungen überhaupt. Irgend eine Zahl kann durch mannigfache Relationen zu anderen, sei es wirklich oder bereits symbolisch vorgestellten, eindeutig charakterisirt werden, und jede solche Charakteristik liefert eine neue symbolische Vorstellung eben dieser Zahl.

Es giebt also ausserhalb des Systems noch unendlich viele symbolische Zahlformen. Dürfen wir nun diese als den geregelten Bildungen des Systems gleichwertig ansehen, als berechtigte Repräsentanten der wirklichen Zahlbegriffe gelten lassen? Dürfen wir sie in demselben Sinne als gegeben und die Reduction einer Aufgabe auf ein durch sie gekennzeichnetes Zahlenresultat als deren endgiltige Lösung anerkennen?

Einfache Reflexionen belehren uns, dass wir diese Fragen verneinen müssen. Vermöge der Reihenordnung können wir für zwei systematische Zahlen sofort entscheiden, ob sie die gleichen oder verschiedene Zahlen repräsentiren, und im letzteren Falle können wir auch sofort angeben, welche grösser ist und welche kleiner. Der blosse Hinblick auf ihr Rangverhältniss genügt. Ganz anders verhalten sich die unsystematischen Zahlsymbolisirungen. Bildungen der Art wie $18 + 49$, 7×36 u. dgl. bieten uns nicht minder bestimmte symbolische Zahlformen, als die ihnen correspondirenden dekadischen. Wie aber entscheiden, ob je zwei derselben gleich sind oder nicht, und dann welche die grössere und welche die kleinere? Besitzen wir bereits ein Zahlensystem, dann ist die Antwort klar: einfach durch Reduction auf die entsprechenden systematischen Zahlen. Denn das ist sicher, dass jeder unsystematischen eine eindeutig-bestimmte systematische Zahl entspricht, die ihr gleich ist, d. h. die denselben eigentlichen Zahlbegriff symbolisirt.

So kommt es, dass wir jede unsystematische Bildung nicht als ein Fertiges und Gegebenes, sondern als ein Problematisches ansehen. Sie giebt uns eine Aufgabe, die gelöst sein will, nämlich die ihr zugehörige und sie klassificirende systematische Zahl zu finden. Wieviel ist $18 + 48$? Wir antworten 67 und haben damit die Einordnung dieser Summenzahl in die Zahlenreihe vollzogen. Aus diesen Gründen werden dann die systematischen Zahlen, obgleich selbst nur symbolische Vertreter anderer, uns aber unzugänglicher Begriffe, in der Arithmetik wie die letzten Zahlbegriffe angesehen, auf welche alle anderen Zahlformen nur hinweisen, und welche aus ihnen daher noch zu construiren sind. In Wahrheit fungiren sie aber nur als die Normalzahlen, gleichsam als feste Etalons, auf welche alle anderen vergleichend zurückbezogen werden zu dem Zwecke ihrer exacten Vergleichung nach Mehr und Weniger. Und so ersehen wir, dass durch die Zahlenreihe das Ideal einer allgemeinen und exacten Zahlenklassification in vollkommenster Weise realisirt wird. Dass sie dies aber leistet, entspricht ganz und gar unseren ursprünglichen Intentionen. Das Bedürfniss nach Ordnung und klassificatorischer Scheidung in dem Gewirre symbolischer Zahlformen war ja der ursprüngliche Impuls, welcher unsere logische Entwicklung dazu drängte, das zunächst gegebene eigentliche Zahlengebiet gerade in den systematischen Formen zu erweitern. [1])

Die erste Grundaufgabe der Arithmetik.

Unsere letzte Untersuchung führte auf ein allgemeines arithmetisches Postulat: Von den systematischen Zahlen verschiedene symbolische Bildungen sind, wo immer sie auftreten, auf die ihnen gleichwertigen systematischen, als ihre Normalformen, zu reduciren. Demgemäss erwächst als die erste Grundaufgabe der Arithmetik, alle erdenklichen symbolischen Bildungsweisen von Zahlen in ihre verschiedenen Typen zu sondern und für einen jeden sichere und möglichst einfache Methoden jener Reduction aufzufinden.

Die elementaren arithmetischen Operationen.

Diese Aufgabe führt uns auf die sogenannten vier Species, die elementarsten arithmetischen Operationen. Bereits im X. Capitel haben wir uns um Sinn und Bedeutung derselben viel gemüht — nicht eben mit Glück. Wir gerieten auf den Abweg einer zersetzenden Skepsis, welche negirte statt aufzuklären und so in Widerstreit kam mit der Thatsache einer in so hohem Masse erfolgreichen und entwickelten Wissenschaft wie die Arithmetik. Dies war aber eine strenge Consequenz des Standpunktes, den wir dort einnahmen,

[1]) Vgl. XII. Cap. S. 254 ff.

nämlich den des vielverbreiteten Vorurtheils, dass die Arithmetik es mit den wahren und eigentlichen Zahlbegriffen und deren Verknüpfungs- oder „Operations“-Gesetzen zu thun habe. Wir haben seitdem zunächst die Einsicht erlangt, dass ihre eigentlichen Substrate symbolische Zahlbildungen sind, und zuletzt erkannt, dass ihre erste und wesentliche Aufgabe darin liege, allgemeine Regeln für die Reduction der verschiedenen Zahlbildungsformen auf gewisse normale aufzufinden.

Hier ist schon vorauszusehen, dass unter den sogenannten arithmetischen Operationen nichts Anderes zu verstehen sein wird, als Methoden der Ausführung dieser Reduction. Natürlich ändert hiemit der Begriff der Zahlenoperation, wie er auf Grund des eigentlichen Zahlbegriffes sich ergiebt, ganz wesentlich die urspüngliche Bedeutung. Den ersten Begriff der Addition z. B. erlangten wir durch Reflexion auf die Art, wie mehrere Inbegriffe in einen einzigen und demgemäss mehrere Zahlen in eine einzige überzuführen sind, welche die Einheiten jener insgesammt umfasst. Wenn wir jetzt aber von einer Addition, z. B. von $7+5$ sprechen, so ist abgezielt auf eine gewisse systematische (natürliche oder dekadische) Zahl, die dieser Summe gleichwertig ist.

Offenbar bleiben die beiden Operationsbegriffe noch in einem leicht erkennbaren Zusammenhang. Da die eigentlichen Zahlbegriffe uns nicht zugänglich sind, geschweige denn, dass wir sie klassificiren, addiren und theilen könnten, so operiren wir an ihrer Stelle mit scharf bestimmten symbolischen Surrogatbegriffen, die wir klassificiren durch Zugrundelegung einer Reihe von Normalbegriffen, und die wir addiren oder theilen, indem wir in jener Reihe die Begriffe aufsuchen, welche den Verbindungs- und Theilungsbegriffen eben entsprechen. Und genau ebenso wie die einzelne symbolische Zahl eine bestimmte eigentliche, vertritt auch jede symbolische Operationsverbindung eine bestimmte (obgleich nicht wirklich ausführbare) eigentliche.

Es wird sich nun die Frage erheben: Kann man überhaupt, resp. wie kann man jene Reductionsaufgaben (‚Operationen') ausführen? Von der Antwort wird die Triftigkeit unseres neuen Operationsbegriffes abhängen. Sollen wir ferner die erwünschte und nötige Uebereinstimmung mit der Redeweise der Arithmetik erlangen, so müssen wir auch zeigen, wie Addition und Theilung, als die begrifflichen Quellen alles Operirens, auf dem Gebiete der symbolischen Begriffe zu einer Mehrheit selbständiger Rechnungsoperationen führen, zunächst aber zu den vier Species.

Als gegeben haben wir anzusehen das gesammte Zahlensystem, oder genauer, wir denken uns das ursprüngliche Zahlgebiet in einer der systematischen Formen so weit entwickelt, dass nun alle irgendwie erforderten Zählungen als wirklich ausführbar und demgemäss schon als ein Gegebenes behandelt werden können. Alle anderen Formen der Zahlbildung sind, wie wir geradezu sagen, Verknüpfungen systematischer Zahlen. Nur kleine Zahlen können uns als einfache und unsystematische gegeben sein; aber ihre Einordnung in das System ist so leicht, dass wir sie in jedem Falle schon als vollzogen und darum auch Verknüpfungen derartiger Zahlen schon als solche systematischer ansehen können. Die Operationsformen, welche der Zahlbegriff zulässt, sind Addition und Theilung. Betrachten wir nun die besonderen Wendungen, welche dieselben in der Arithmetik erfahren.

Die Addition.

Wir beginnen mit der Addition. Mehrere Zahlen a, b, c, ... addiren, hiess im ursprünglichen Sinne, die Einheiten derselben zu einer neuen Zahl s vereinigen. Von einer besonderen Vorschrift der Ausführung konnte dort, im Gebiete der eigentlichen Zahlbegriffe, keine Rede sein. Ganz anders verhält es sich nun in unserem Gebiete symbolischer Zahlformen. Mehrere Zahlen $a, b, c, \ldots$ addiren, bedeutet jetzt, die ihrer Summe entsprechende systematische Zahl finden. Da die Summe ihrem Begriff nach von einer Ordnung der Summanden unabhängig ist, können wir die Ausführung successive und zwar in beliebiger Reihenfolge vornehmen, indem wir schrittweise zunächst eine Zahl, etwa a, herausheben, zu ihr b addiren, zu dem Resultat dieser eine neue, etwa c, u. s. w. (Es ist hiebei üblich und sachgemäss, die Reihenfolge der Operationen durch die Folge anzudeuten, in welcher die Summanden gesprochen, bzw. geschrieben werden.) Das Problem der Addition beliebig vieler Zahlen ist somit auf das der Addition von je zweien zurückgeführt. Die Lösung selbst ist nun leicht. Um eine Summe $a + b$ auszuwerten, brauchen wir bloss in unserem Zahlensystem von a auszugehen und, der festen Ordnung desselben folgend, um b Glieder weiterzuzählen. In der That liefert jeder neue Schritt eine um Eins grössere, also b Schritte eine um b grössere Zahl als a, d. h. eine Zahl, welche neben den Einheiten von a noch b Einheiten (und keine anderen) umfasst, also $a + b$. Dieselbe Zahl erhalten wir aber auch durch Zählung von a Gliedern über b hinaus, es resultirt nämlich die Zahl, welche neben den Einheiten von b noch a Einheiten (und keine anderen) umfasst; also mit Rücksicht auf den Summenbegriff identisch dieselbe Zahl wie vorhin.

Bei dieser Methode ist es übrigens gleichgiltig, ob wir der Arithmetik bloss die natürliche Zahlenreihe oder das Zahlensystem zu Grunde legen. Und es wird offenbar in beiden Fällen die Sicherheit des Resultates in keiner Weise tangirt, ob wir bei der Ausführung der Operation an die Begriffe selbst denken oder uns an die blossen Zeichen halten. Das Zeichen a ist ein absolut verlässlicher Vertreter seines Begriffs. Jeder neue Schritt liefert das Zeichen einer um Eins grösseren Zahl, also b Schritte das einer um b grösseren. Somit haben wir vom Zeichen a nur um b Zeichen weiterzuzählen, welche Zählung wieder, wie jede Zählung überhaupt, rein mechanisch vollzogen werden darf.

Im Zählen Ungeübte bevorzugen häufig ein anderes und noch roheres Verfahren, indem sie ihren Zählungen sinnliche Mengen z. B. von Steinchen, Zählmarken, Punkten auf dem Papiere als Stützen zu Grunde legen. Sie begleiten die Zählung von 1 bis a durch die successive Aussonderung einer sinnlichen Menge von a Gliedern. In gleicher Weise zählen sie eine zweite Menge von b Gliedern heraus, um dann schliesslich entweder an dieser in der Form $a+1$, $a+2$, ..., $a+b$, oder an der ersteren in der Form $b+1$, $b+2$, ..., $b+a$ weiterzuzählen. — Die logische Begründung dieser mechanischen Procedur macht keinerlei Schwierigkeit. Da das Zählungsresultat von der concreten Natur der gezählten Objecte unabhängig ist, so kann jedes am concreten Beispiel gewonnene Resultat alsbald für jede erdenkliche Art gezählter Einheiten in Anspruch genommen werden, mag im Uebrigen das Zählen ein eigentliches oder symbolisches gewesen sein, wofern es nur ein richtiges war. Findet also der Ungeübte in der zählenden Herstellung einer Summe, sei es von allgemeinen Zahlen, sei es von Zahlen ihm gerade unzugänglicher oder unbequemer Einheiten, eine Schwierigkeit, die für ihn bei der entsprechenden Zählung verfügbarer sinnlicher Objecte nicht besteht, dann thut er ganz wol daran, die correspondirende Aufgabe für Mengen eben solcher Objecte zu lösen, und das Resultat passend zu verallgemeinern, bzw. zu übertragen.

Bei grösseren Zahlen sind diese Additionsmethoden, obschon rein mechanisch zu vollziehende, höchst umständlich und zeitraubend und darum in ihrer Anwendbarkeit sehr beschränkt. Im Falle der natürlichen Zahlenreihe giebt es freilich keine besseren, wol aber in dem des Zahlensystems im engeren Sinne des Wortes.

Jede ihm angehörige Zahl ist ein Aggregat von Zahlen verschiedener Einheiten (X^0, X^1, X^2 . . .). Soll nun die Summe zweier solcher Zahlen ausgewertet werden, so können wir doch zunächst die entsprechenden Theilzahlen gleicher Einheit addiren und dann die Summe dieser Summen bilden. In Zeichen:

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots .) + (b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \ldots$$

Da nun sowol die a als die b Zahlen zwischen 0 und X darstellen, so werden die Coefficienten der erhaltenen Summe im Allgemeinen grösser als X, die Summe selbst also nicht mehr eine symbolische Zahl sein. Indessen die Auswertung der Coefficienten ergiebt Zahlen, die entweder kleiner als X sind — wir wollen solche Zahlen ein für allemal durch ein α mit oder ohne Index bezeichnen — oder die Form $\alpha + X$ besitzen. Demgemäss reducirt sich die Summe sehr leicht. Man bildet $a_0 + b_0$ und erhält α_0 oder $\alpha_0 + X$. Im ersteren Falle hat man bereits das unterste Glied der gesuchten Zahl, im letzteren Falle hält man bloss α_0 fest und zählt das X als eine Einheit der nächsthöheren Stufe bei der nun zu bildenden Summe $a_1 + b_1$ zu. Für $a_1 + b_1$, bzw. $a_1 + b_1 + 1$ erhält man wieder die Zahlform α_1 oder $\alpha_1 + X$. Da X Einheiten X_1 eine Einheit X^2 der nächsthöheren Stufe ergeben, so hält man im letzteren Falle wieder bloss α_1 fest und zählt das X^2 bei der nächstfolgenden Stufe als eine Einheit mit. Für diese hat man $a_2 + b_2$, resp. $a_2 + b_2 + 1$ als α_2 oder $\alpha_2 + X$ auszuwerten, im letzteren Falle wieder eine Einheit zur folgenden Stufe aufzuzählen; u. s. w. So resultirt ein gesetzmässiges Verfahren, welches successive die Glieder α_0, $\alpha_1 X$, $\alpha_2 X^2$; . . . . ergiebt, deren Summe die gesuchte systematische Zahl ist.

Die immensen Vortheile dieser Methode liegen auf der Hand. Die Addition zweier noch so grosser Zahlen, die nach den vorigen Methoden mindestens so viele einzelne Schritte erforderte, als die kleinere Zahl Einheiten besitzt, ist nun im Wesentlichen reducirt auf eine kleine Anzahl von Additionen je zweier Zahlen unterhalb X, eine Anzahl, die höchstens so gross ist als überhaupt Stufenglieder auftreten. Aber auch diese Additionen können wir uns ersparen. Denken wir uns nämlich alle erdenklichen Summen je zweier Zahlen unterhalb X (natürlich nach einer primitiveren Methode) ein für allemal berechnet, tabellarisch aufgezeichnet oder dem Gedächtniss eingeprägt, dann ersparen wir alle lästigen und selbst bei kleinen Zahlen umständlichen Zählungen. Durch die $(X-1)$ $(X-1)$, in unserem dekadischen System $9 . 9 = 81$, bekannten und stets verfügbaren Sätze des ‚Eins und Eins' ist solcherart jede Additionsaufgabe unmittelbar oder mittelbar zu lösen.

Man erkennt ohne Weiteres, dass dieses Additionsverfahren in practischer Bethätigung von selbst zu einem rein äusserlichen Rechnen werden muss. Ob dieses aber zu Recht besteht, ob wirklich der Wahrheitswert des Resultates notwendig unabhängig davon ist, ob wir mit den Begriffen oder ihren blossen Zeichen operiren, das bedarf noch der logischen Untersuchung.

Die oben abgeleitete Regel lehrt, wie eine beliebige Addition zweier systematischer Zahlen auf eine Reihe jeweilig ganz bestimmter Elementaradditionen zurückzuführen ist. Jeder systematischen Zahl entspricht nun ein bestimmtes systematisches Zeichen derart, dass nicht bloss die Zahl selbst als Ganzes, sondern auch ihre Bildungsweise aus Theilzahlen in dem Zeichen seinen symbolischen Ausdruck findet. Eben durch diese Theilzahlen (nämlich die Coefficienten der Stufenzahlen, in obiger Bezeichnung a_0, b_0; a_1, b_1 ...) sind aber jene Elementaradditionen (z. B. $a_0 + b_0$) eindeutig bestimmt. Folglich sind auch die sprachlichen Ausdrücke derselben durch die der gleichen Theilzahlen eindeutig bestimmt.

Ferner: die Elementaradditionen sind ihrem Resultat nach eindeutig; sie werden ausgeführt, sei es durch einen bestimmten Zählungsprocess, sei es durch den Hinweis auf die Tabelle von Wahrheiten des Eins und Eins. Aber auch die ihnen correspondirenden Quasi-Additionen der Zeichen sind ihrem Resultat nach eindeutig, sei es durch den parallellaufenden äusserlichen Zählungsprocess oder durch den Hinweis auf die Tabelle von Zeichenaequivalenzen des Eins und Eins. Damit ist allen einzelnen Schritten nach die streng eindeutige Correspondenz zwischen der in Begriffen denkenden und der in Zeichen rechnenden Additionsmethode nachgewiesen, und wir dürfen der letzteren volles Vertrauen schenken. Die ungeheure Ersparung psychischer Arbeit, welche das blind-mechanische Rechnen ermöglicht, liegt hier so klar vor Augen, dass eine nähere Besprechung unnötig wird.

Man sieht leicht, wie die Additionsmethode auf die gleichzeitige Addition beliebig vieler systematischer Zahlen erweitert werden kann, ohne dass sich etwas Wesentliches änderte und neben dem Eins und Eins ein neues Hilfsmittel nötig wäre.

Die Multiplication.

Eine erhebliche Veränderung erfährt die Methode in dem besonderen Falle, wo eine Anzahl gleicher Summanden zu addiren ist, daher man hier mit Recht von einer neuen Rechnungsoperation — der Multiplication — spricht. Eine eminente Abkürzung wird schon durch die multiplicative Vorstellungs- und Bezeichnungsweise bewirkt, indem die Anzahl der Summanden als Symbolisirungsmittel herangezogen wird; und sie vereinfacht in gleichem Masse die Auffindung der gesuchten Summe, oder wie man sich hier passend ausdrückt: des Productes. Die Aufgabe, welche die Multiplication löst, besteht darin, allein aus dem Multiplicandus (dem gemeinsamen Zahlenwert der Summanden) und Multiplicator (ihrer Anzahl) das Product (jenen Summenwert) zu berechnen, ohne die Addition wirklich ausführen oder auch nur ansetzen zu müssen. Betrachtungen ähnlicher Art, wie vorhin bei der Addition, ergeben, dass die Multiplication zweier Zahlen reducirt werden kann auf blosse Additionen und Multiplicationen von Zahlen zwischen 1 und X. Die Gedanken, die hier im Wesentlichen vermitteln, können wir in Zeichen durch folgende Gleichungskette ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots)\,(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots) \\
&= b_0\,(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots) + b_1 X\,(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots) + \\
&\qquad + b_2 X^2 (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots) + \ldots \\
&= b_0 a_0 + b_0 a_1 X + b_0 a_2 X^2 + \ldots. \\
&\qquad + b_1 a_0 X + b_1 a_1 X^2 + \ldots. \\
&\qquad\qquad + b_2 a_0 X^2 + \ldots. \\
&\qquad\qquad\qquad + \ldots. \\
&= b_0 a_0 + (b_0 a_1 + b_1 a_0) X + (b_0 a_2 + b_1 a_1 + b_2 a_0) X^2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Denkt man wieder alle möglichen $(X-1).(X-1)$ Elementarmultiplicationen ein für alle Mal ausgerechnet (durch wirkliche Addition), tabellarisch aufgezeichnet oder dem Gedächtniss eingeprägt, dann ist die Ausführung jeder Multiplication zurückgeführt auf einen geregelten Process, welcher in seinen einzelnen Schritten nur die Reproduction von Sätzen des ‚Eins und Eins', sowie des ‚Ein mal Eins' erfordert. Und wieder überzeugt man sich durch analoge Schlüsse wie oben, dass die Sicherheit des Resultates nichts einbüssen kann, wenn die begrifflich operirende Multiplication der rein mechanisch rechnenden weicht.

Aus dem Begriff der multiplicativen Verbindung folgt, dass (wenn wir die Bedeutung der arithmetischen Schreibweise als bekannt voraussetzen) die Producte $a.b$ und $b.a$ identisch demselben Zahlenwerte entsprechen. Ist daher das eine Product zu bestimmen, dann wird man, falls dies bequemer ist, bei der Ausführung der Multiplication auch das andere zu Grunde legen dürfen.

Subtraction und Division.

Gehen wir nun zu den Operationen der Theilung über. Vom Standpunkte des eigentlichen Zahlbegriffes war die Theilung die einzige der Addition gegenüberstehende Grundoperation. Allgemeine Regeln für ihre Ausführung liessen sich nicht geben. Speciellere Aufgaben auf Grund des Theilungsbegriffes waren Subtraction und Division. Für die Besitzer der eigentlichen Zahlbegriffe bedurfte es auch hier kaum irgend welcher künstlicher Vorschriften. Für uns, die wir der Hauptsache nach nur auf symbolische Zahlbildungen beschränkt sind, ändern diese Aufgaben ihren Sinn, und die ihnen angemessenen Lösungen gestatten und verlangen sehr wol eine geregelte Methode. Die allgemeine Theilungsaufgabe bleibt indessen auch jetzt ausgeschlossen; wogegen ihre beiden Besonderungen wirklich zu Rechnungsoperationen führen. Wir beginnen mit der Subtraction.

a von b subtrahiren hiess im ursprünglichen Sinne (also für die eigentlichen Zahlbegriffe) eine Anzahl b Einheiten des a absondern und die übrigen zu einer neuen, der gesuchten Differenzzahl c vereinigen. Mit anderen Worten, es ist a in eine Summe $b+x$ zu vertheilen, deren ein Glied b bekannt, deren zweites Glied x gesucht ist. Offenbar hat die Aufgabe nicht immer Sinn und Lösung. Es muss eben möglich sein, a als ein additives Ganzes zu fassen, dessen ein Theil b ist. Es kann aber umgekehrt die Zahl b ein Ganzes sein, dessen ein Theil a ist, ein Fall, der unverträglich ist mit dem vorigen. Es heisst nur, dieselbe Bedingung in andere Worte kleiden, wenn man sagt, es muss b kleiner sein als a, nicht aber b grösser als a. Haben wir es mit symbolischen und zwar systematischen Zahlbegriffen zu thun, dann ist die durch die Subtractionsoperation zu lösende Aufgabe, aus den systematischen Zahlen a und b die ihrer Differenz entsprechende systematische Zahl zu finden. Die besprochene Bedingung, an welcher die Ausführbarkeit der Operation haftet, kann bei den symbolischen Bildungen, welche in der Zahlenreihe geordnet sind, ohne Rückgang auf die bezüglichen eigentlichen Begriffe und den wirklichen Theilungsversuch, nach dem blossen Rangverhältniss beurtheilt werden und ist demgemäss durch die ihr gleichwertige zu ersetzen: dass die Zahl b einen niedrigeren Rang als die Zahl a besitzen muss.

Was nun die Lösung der Aufgabe anbelangt, so kann sie durch blosses Operiren an der fertigen Zahlenreihe (mag dieses übrigens die natürliche oder diejenige des Zahlensystems im engeren Sinne des Wortes sein) dadurch erfolgen, dass wir entweder von b ausgehen und aufwärts schreitend die Anzahl der Schritte bis a abzählen; oder dass wir von a ausgehen und rückwärts (d. h. gegen den Anfang der Reihe hin) schreitend die durch b Schritte fixirte Zahl festhalten. Die letztere Ausführung liefert die gesuchte Zahl durch einen Process, welcher der successiven Wegnahme von im Ganzen b Einheiten aus a entspricht; die erstere durch einen Process, welcher ihrer directen Construction als der Zahl, die zu b addirt a giebt, entspricht.

In dem besonderen Falle, wo a und b Glieder eines ‚Zahlensystems' sind, bietet sich eine andere und weit vorzüglichere Lösung, welche in ihrem Wege und in ihrer Tendenz genau der entsprechenden Additionsmethode folgt. Man versucht zunächst (analog wie S. 302) $a - b$ zu ersetzen durch

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\ X + (a_2 - b_2)\ X^2 + \ldots .$$

Hiebei kann es aber, wie man leicht sieht, kommen, dass, wenn auch nicht alle, so doch einige der angezeigten Subtractionen keinen Sinn haben. Findet dies nun z. B. an der Stelle $(a_k - b_k) X^k$ statt, so ‚borgt' man von der nächsthöheren Stelle eine Stufeneinheit und wandelt damit das Glied um in $((a_k + X) - b_k)\ X^k$, während an der nächsten Stelle $((a_{k+1} - 1) - b_{k+1}) X^{k+1}$ zu stehen kommt.

Die Ausführung der gestellten Subtractionsaufgabe wird reducirt auf diejenige von lauter Elementarsubtractionen der Form $\alpha - \beta$ oder $(\alpha + X) - \beta$, wobei α, β Zahlen zwischen 1 und X (im letzteren Falle mit Ausschluss der Werte $\beta = 1$, $\alpha = X - 1$) darstellen.

Es ist klar, dass die Summentabelle des Eins und Eins auch die Mühe dieser leichten Zählungen erspart. Jeder ihrer Sätze hat die Form $\alpha + \beta = \gamma$, wo α und β wieder eine der Zahlen $1, 2, \ldots X$; γ eine der Zahlen $2, 3 \ldots 2X - 2$ darstellen kann. Bei den Additionsaufgaben ist uns α und β gegeben und es ist ihre Summe γ der Tabelle zu entnehmen. In unserem Falle jedoch ist γ und α gegeben und ihre Differenz β der Tabelle zu entnehmen.

Die Subtraction heisst die inverse Operation zur Addition, weil ihrem Begriff nach $(a + b) - b = a$ ist. Was also die Hinzufügung des b erwirkte, wird durch die Subtraction von b wieder aufgehoben.

Aehnliche Betrachtungen wären nun auch für die Division anzustellen. Auch sie ist in der Ausführbarkeit beschränkt, insofern nur solche Zahlen b in a gleiche Theile getheilt werden können, welche Multipla von a sind. Das Verfahren, um die dem Quotienten $a:b$ entsprechende systematische Zahl zu finden, lässt sich, im Falle der Ausführbarkeit, wieder auf eine Folge von Elementardivisionen reduciren, wobei, ähnlich wie bei der Subtraction die Tabelle des Eins und Eins, nun die des Ein mal Eins concurrirt. Allerdings reicht man hier mit derselben nicht aus. Man brauchte im Grunde eine Tabelle aller Elementardivisionen der zweistufigen durch einstufige Zahlen; wenn die Divisionen nicht ‚aufgehen', mit der genauen Angabe des Restes. Es ist für unsere Zwecke nicht nötig, in die schon ziemlich complicirten Erwägungen einzutreten, welche im Falle der Division zur Begründung des Rechnungsverfahrens gehören.

Abermals gilt von der Subtraction und Division, was bei der Addition und Multiplication begründet wurde: das begriffliche Operiren, welches zur logischen Fundirung des Verfahrens nötig war, wird in der Anwendung überflüssig. An dessen Stelle tritt das mechanische Rechnen, dessen logische Triftigkeit durch den strengen Parallelismus zwischen der Systematik der Zahlen und Zahlbeziehungen auf der einen, und derjenigen der Zahlzeichen und Zahlzeichenbeziehungen (Zeichenaequivalenzen) auf der anderen Seite gewährleistet ist.

Nach diesen Ausführungen dürfen wir also die vier Species als arithmetische Rechnungsoperationen bezeichnen. Es sind Rechnungsoperationen, denn sie hantiren mit blossen Zeichen; arithmetische Operationen, denn sie dienen der Herleitung von Zahlen. Sie repräsentiren logische Methoden, um symbolische Zahlcompositionen (Summen, Producte, Differenzen, Quotienten) auszuwerten, d. h. die ihnen entsprechenden symbolischen Normalgebilde, als die logisch berufenen Vertreter der wirklichen Zahlbegriffe, zu bestimmen. Es sind indirecte Methoden der klassificatorischen Subsumption jener Compositionen unter den zugehörigen stellvertretenden Zahlbegriff.

Alle Schwierigkeiten und Zweifel, die wir im X. Cap. in dem Verständniss der Rechnungsoperationen und der sie behandelnden Arithmetik fanden, dürfen wir schon jetzt als gelöst ansehen. Bei dem veränderten Sinn, welchen die Operationen auf dem Gebiet der symbolischen Zahlbildungen erlangen, ist es völlig begreiflich geworden, warum hier wissenschaftlich ausgebildete Methoden der Operationsvollziehung nötig sind, die dort gegenstandslos schienen. Und die weiteren Untersuchungen, die wir unten anfügen, werden diese Erkenntniss noch bedeutend erweitern und vertiefen. Sie werden uns den wahren Sinn der Arithmetik zum Verständniss bringen durch die Entwicklung der logischen Bedürfnisse, denen sie erwächst und genügt.

Ehe wir diesen systematischen Leitfaden weiter verfolgen, wollen wir vorerst zur Ergänzung der bisherigen Darlegungen einige Zusätze folgen lassen über andersartige Rechenmethoden, sowie über den bedeutsamen Einfluss äusserer Umstände auf den speciellen Charakter solcher Methoden.

Rechenmethoden mit Abacus und in Columnen. Die natürliche Entstehung des indischen Ziffernrechnens.

Die logischen Erörterungen, durch welche wir zu den zuletzt entwickelten Methoden gelangt sind, setzten einerseits das voll und consequent ausgebildete Zahlensystem, andererseits ein dasselbe voll und consequent wiederspiegelndes System der Zahlbezeichnung voraus. Wir giengen so von einem logischen Idealfalle aus, der erst bei einem hoch ausgebildeten arithmetischen Verständniss seine Realisirung finden könnte. In historischen Zeiten war diese Forderung lange nicht erfüllt. Obschon der Hauptsache nach das Princip systematischer Zahlbildung bei den meisten Völkern, die über den barbarischen Zustand sich erhoben hatten, zum Durchbruch kam, blieben doch mehrfache Reste der unsystematischen älteren Bildungsweisen als Ueberlebsel bestehen, und so fehlte den Zahlsystemen — und damit auch den parallelen Zahlwortsystemen — die volle systematische Consequenz. In weit höherem Masse gilt dies noch von den Ziffernbezeichnungen, welche, aus älteren Zeiten übernommen und zähe festgehalten, hinter der Systematik der Wortzeichen weit zurückblieben, so dass sie selbst bei einem so hoch cultivirten Volke, wie die Römer, den Namen systematischer Bezeichnungen kaum verdienen. Nur die Chinesen und Indier hatten es schon in alten Zeiten zu der strengen Consequenz in den genannten Beziehungen gebracht.

Demgemäss konnten sich andere Völker als die zuletzt erwähnten zu Zwecken des practischen Rechnens auch nicht irgend welcher mechanischer Methoden bedienen, welche consequente Wort- und Ziffernbezeichnungen für die systematischen Zahlen voraussetzen. Gleichwol fehlte es vor der Erfindung derartiger Bezeichnungen nicht an mechanischen Methoden, ja sogar nicht an solchen, deren Princip im Wesentlichen identisch ist mit dem der oben logisch begründeten Methode. Ich meine die Rechenmethoden mit Abacus oder in Columnen. Dieselben repräsentiren Umgestaltungen jener natürlichen Zählweisen, die wir gelegentlich zur Erklärung der Zahlensysteme heranzogen.[1]) Innerhalb fix abgegrenzter räumlicher Gebiete (in Columnen oder auf Stäben) lassen sich bewegliche Marken, ev. Steinchen, Kugeln etc. in hinreichender Zahl anbringen. Diese Gebiete haben eine feste Ordnung; die Marken in der ersten Reihe sind Zeichen für Einer, die Marken der zweiten solche für Zehner u. s. w. Jede Markenvertheilung in den Columnen stellt also in streng gegliederter Form eine dekadische Zahl dar.

Damit ist dem Mangel der Wort- und Ziffernbezeichnung der Hauptsache nach schon abgeholfen. Eine künstliche und streng systematische dekadische Bezeichnung ist durch diese einfachen Veranstaltungen geschaffen, deren Erfindung natürlich eine klare Einsicht in das Princip des Zahlensystems voraussetzt. Ein erheblicher Fortschritt besteht darin, dass statt blosser Marken für die Stufeneinheiten, auch solche für die Stufenzahlen eingeführt werden. Bei schriftlicher Rechnung innerhalb der durch Parallellinien gebildeten Columnen schreibt man dann die jeweilig erforderten Zeichen aus dem Gebiete 1, 2 ... 9 in die gehörigen Columnen, z. B.

1	8	9	1	für 1891,
3	—	7	—	für 3070,

[1]) Vgl. XII. Capitel S. 281.

anstatt, wie nach der roheren Methode, jede Stufenzahl durch entsprechende Mengen sinnlicher Objecte abzubilden, die dann erst gezählt werden mussten. Nach Erfindung dieser Veranstaltungen streng systematischer dekadischer Zahlbildung und Zahlbezeichnung konnten die Rechnungsvorschriften mindestens für Addition, Multiplication und Subtraction genau denen entsprechen, die wir oben in allgemeiner Form entwickelten; was wol keiner weiteren Darlegung bedarf. Nur bei der ersterwähnten primitiveren Gestaltung des abacistischen Verfahrens bestehen kleine Abweichungen, dadurch bedingt, dass ständige Abzählungen der Einheitsmarken in den einzelnen Columnen erforderlich sind.

Es ist höchst wahrscheinlich, dass aus der Schreibweise der streng dekadisch gegliederten Zahlen in den Columnen das indische Ziffernsystem erwachsen ist, indem bei der zeilenförmigen Eintragung in die Columnen das Ausfallen einer Stufenzahl, zur klaren Erhaltung des linearen Zusammenhanges, ein bedeutungsloses Zeichen 0 eingetragen wurde; ähnlich wie heute die Kaufleute in die Columnen ihrer Geschäftsbücher zu ähnlichem Zwecke einen Strich — anzubringen pflegen. Von da war nur ein Schritt zu der Erkenntniss, dass die Columnenstriche bei consequenter Verwendung dieses Zeichens überflüssig seien, und das Positionssystem mit dem Nullzeichen war fertig.

Einfluss der Bezeichnungsmittel auf die Gestaltung der Rechenmethoden.

Die oben logisch entwickelten und gegenwärtig beim practischen Ziffernrechnen geübten Methoden, die vier Species auszuführen, sind aber nicht die einzig denkbaren. Es entspricht nicht meinen Absichten, andere zu gleichem Zwecke erfundene Methoden, welche ebenfalls auf der Doppelsystematik der dekadischen Zahlbegriffe und Zahlbezeichnungen ruhen, zu beschreiben und logisch zu rechtfertigen. Es kam mir nur darauf an, den wesentlichen Charakter solcher rein mechanischen Regelsysteme, ihre logisch-arithmetische Bedeutung, ihren logischen Ursprung an einem typischen Beispiele klar aufzuzeigen. Das Grundprincip ist bei allen derartigen Mechanismen dasselbe.

Bedeutsamer ist für uns die Bemerkung, dass die Verschiedenheit der symbolischen Rechenmethoden keineswegs allein oder vorzugsweise bedingt ist durch die zufällige Richtung des Interesses bei ihren Erfindern. Es ist eine logisch beachtenswerte Thatsache, dass auch die äusseren Bezeichnungsmittel, welche die jeweilige Cultur dem Arithmetiker aufdrängt, von wesentlichstem Einfluss werden können auf die Ausbildung der Algorithmen; so dass die specielle Methodik und damit der ganze Habitus der Wissenschaft durch Momente bedingt erscheint, deren Bedeutung zu unterschätzen der meist auf die höchsten Abstractionen achtende Logiker nur zu sehr geneigt sein möchte. Ich will zur Erläuterung dieser Bemerkungen einige Sätze aus den wiederholt citirten Fragmenten „Zur Geschichte der Mathematik“ von H. Hankel folgen lassen, dessen Scharfsinn diese Thatsache zuerst entdeckt hat.

Von den numerischen Rechenmethoden der Indier handelnd, sagt er folgendes:

„Wenn sich diese Methoden von den uns geläufigen oft sehr beträchtlich unterscheiden, so müssen wir beachten, dass die Indier nicht, wie wir, auf dem Papier mit Feder und Tinte, vielmehr mit Schreibrohr auf einem schwarzen Holztäfelchen mit einer dünnflüssigen weissen Farbe, die leicht abwischbare Zeichen liefert, oder auf einer weissen mit einem roten Mehl bestreuten Tafel von weniger als ein Fuss ins-Geviert rechnen, auf das sie mit einem Stäbchen die Ziffern schreiben, so dass diese weiss auf rotem Grunde erscheinen. Da die Ziffern, um deutlich lesbar zu sein, ziemlich gross geschrieben werden müssen, der Raum auf der Tafel daher sehr beschränkt ist, so müssen die Indier darauf bedacht sein, bei ihren Operationen möglichst viel Raum zu ersparen; sie erreichen dies, indem sie alle Ziffern einer Rechnung sogleich wegwischen, nachdem sie ihren Dienst gethan haben, und andere an deren Stelle setzen."

„Jene durch äussere Umstände veranlasste Forderung, dass die Rechnung einen möglichst kleinen Raum einnehmen soll, zusammen mit der Möglichkeit, an derselben Stelle nach einander verschiedene Ziffern zu setzen, muss, wie man sieht, zu wesentlich anderen Algorithmen führen, als wir sie auf dem Papiere vollziehen, wo an Stelle jener Forderung die der möglichsten Uebersichtlichkeit der Rechnung tritt, die Veränderung einer Ziffer aber nicht zulässig ist."

Die nähere Begründung dieser Sätze an den Additions- und Multiplicationsmethoden der Indier giebt HANKEL a. a. O. S. 187 u. ff.

Es ist überhaupt sehr interessant zu beobachten, wie die Rechenmethoden auch sonst durch die verschiedenen Culturverhältnisse, aus denen sie hervorgehen, und die speciellen Forderungen, denen sie nach Massgabe derselben genügen müssen, die wesentlichsten Verschiedenheiten erlangen können. So bemerkt HANKEL, dass die absonderlichen Divisionsmethoden GERBERT's (aus dem 10. Jahrh. stammend) ihre volle Erklärung finden, wenn man folgende Forderungen aufstellt: „1) Die Anwendung des Eins mal Eins soll möglichst beschränkt, namentlich niemals die Division einer zweistelligen Zahl durch einen Einer im Kopfe verlangt werden. 2) Subtractionen sollen so viel als möglich vermieden und durch Additionen ersetzt werden. 3) Die Operation soll nach einem völlig mechanischen Verfahren ohne jedes Probiren fortschreiten. — Keiner dieser Forderungen genügt unser jetziges Divisionsverfahren; dagegen werden sie sämmtlich von jener alten Divisionsmethode GERBERT's aufs Beste erfüllt und können . . . selbst die zum Theil capriciös erscheinende Auswahl der Methoden für jeden besonderen Fall erklären" (a. a. O. S. 322).

Die höheren Operationen.

Die vier Species, welche wir bisher betrachtet haben, schliessen den Kreis denkbarer Rechnungsoperationen keineswegs ab. Noch viele andere Formen symbolischer Zahlcomposition sind denkbar, und für jede derselben muss die Aufgabe gestellt werden, welche die vier Species für die ihrigen lösen. Z. B. Eine Summe gleicher Addenden (also die summatorische Iteration einer und derselben Zahl) gab durch die Abzählung ihrer Gliederzahl ein neues Mittel symbolischer Zahlbildung: b mal a; wir erhielten die Productvorstellung. Ein Product gleicher Factoren (also die multiplicative Iteration einer und derselben Zahl) liefert nun aber wiederum durch die Abzählung der Factorenzahl ein Mittel abgekürzter und indirecter Zahlencharakteristik; wir erhalten den Potenzbegriff: a^b; und man sieht leicht, dass diese neue Art symbolischer Zahlbildung für jedes Zahlenpaar a und b einen Sinn hat, d. h. eine ganz bestimmte Zahl charakterisirt. In gleicher Weise können wir fortschreiten: durch die Abzählung der potenzirenden Iteration einer Zahl entsteht eine neue Art symbolischer Zahlencharakteristik, die Elevation; durch die Abzählung der elevirenden Iteration wieder eine neue; und so in infinitum.

Damit sind wir aber noch nicht zu Ende. So wie der Productbegriff zu dem inversen Begriff des Quotienten führte, so führt auch jede dieser neuen Formen zu entsprechenden inversen. Ist z. B. der Potenzbegriff begründet, dann weist die symbolische Bildung a^b auf eine gewisse Zahl c hin, es ist $a^b = c$. Nun ist aber vermöge eben derselben Beziehung auch b in gewisser Weise durch a und c und ebenso a durch b und c charakterisirt. b ist charakterisirt als die Anzahl der multiplicativen Iteration des a, welche der Zahl c aequivalent ist, und a als die Zahl, welche b mal multiplicativ iterirt die Zahl c ergiebt. Wir haben hier also zwei neue Weisen indirect symbolisirender Zahlbildung (in Zeichen ${}^b\log a$ und $\sqrt[b]{c}$) durch die Umkehrung der den Potenzbegriff definirenden Beziehung gewonnen. Und ebenso liefert offenbar jede weitere in der Reihe der obigen Zahlcharakteristiken durch Umkehrung ihrer Definition ein Paar neuer.

Wieder erhebt sich die Aufgabe, Zahlcompositionen all dieser Arten auszuwerten, d. h. die ihnen entsprechende systematische Zahl zu bestimmen, und wieder wird man wünschen, dies erlangen zu können, ohne die bei grösseren Zahlen sicherlich Zeit und Kräfte übersteigende wirkliche Ausrechnung. Wir werden uns also z. B. bei der Potenzirung bemühen, die Operation zu reduciren auf eine relativ kleine und leicht zu bewältigende Anzahl, sei es von Elementarpotenzirungen (die als blosse Multiplicationen auszuführen sind), sei es überhaupt von Rechnungsoperationen niedrigerer Stufe, wobei bequeme Tabellen unterstützend und rechnerische Bemühung ersparend eingreifen mögen.

Ob nun die hier charakterisirten Aufgaben unter allen Umständen, d. h. für jedes beliebige Zahlenpaar a, b eine Bedeutung haben, ferner ob sie durch Verwechslung dieser Zahlenwerte ohne Aenderung der Verbindungsform tangirt werden oder nicht, das sind Fragen, welche bei dem Grade der Complication der Begriffe sich nicht mehr so unmittelbar, ohne tiefere Analyse entscheiden liessen. Jedenfalls aber müssten sie von vornherein beantwortet sein; die ersterwähnten schon darum, weil man doch vor Beginn der Rechnung wissen muss, ob sie überhaupt ein Resultat geben könne, ob die gestellte Zahlenaufgabe (und somit auch die sie fordernde Grössenaufgabe) nicht a priori Unmögliches einschliesse; und andererseits auch darum, weil der Gang der ausführenden Theiloperationen (ähnlich wie bei der Subtraction und Division), je nach Möglichkeit und Unmöglichkeit der zunächst angesetzten, Abänderungen erführe. Was aber die zweiterwähnten Fragen anlangt, die Vertauschbarkeit der Zahlenwerte bei Erhaltung der Verbindungsform betreffend, so wird die Kenntniss von Sätzen, wie z. B. $a \, . \, b = b \, . \, a$ unter Umständen die doppelte Mühe der Rechnung ersparen und auch sonst durch Auswahl der bequemeren unter den gleichwertigen Formen zu willkommenen Abkürzungen anleiten können.

Operationsmischungen.

Mit den bisher in Betracht gezogenen Zahlencompositionen und entsprechenden Operationen ist aber die Gesammtheit der überhaupt erdenklichen noch immer nicht abgeschlossen. Es tritt hinzu die ganze Mannigfaltigkeit neuer Formen, welche durch Combination aus den bereits gebildeten, als ihren Grundelementen, entspringen. Es erheben sich Aufgaben, wie z. B. eine Summe mit einer Zahl zu multipliciren; ein Product durch eine Summe zu dividiren; einen Quotienten zu einer Potenz zu erheben; u. s. w. Jede derartige Forderung liefert eo ipso eine Art symbolischer Zahlvorstellung welche in dem angegebenen Sinne ausgewertet, d. h. auf eine bestimmte systematische Zahl reducirt werden soll. — Nun kann freilich die Auswertung dadurch erfolgen, dass man einfach dem Gange der angezeigten Elementaroperationen Schritt für Schritt folgt. Aber wieder erfordern es logische Interessen, dass man einerseits vorher über die Möglichkeit der Ausführung (also Widerspruchslosigkeit der gestellten Aufgabe) im Sichern und andererseits, mit Rücksicht auf die Beschränktheit unserer Zeit und Kraft, auf eine möglichste Vereinfachung bedacht sein muss. Was den ersten Punkt anlangt, genügen wol die Regeln für die Ausführbarkeit der einzelnen Grundoperationen, und man wird ihnen gemäss von Fall zu Fall entscheiden. In letzterer Hinsicht ist aber ein genaues Studium der wechselseitigen Beziehungen, in welchen die verschiedenen Elementaroperationen zu einander stehen, unerlässlich. Hiedurch wird es ermöglicht, eine Folge von Operationen durch eine aequivalente Folge anderer zu ersetzen, die entweder einfacher oder doch leichter auszuführen ist; diese vielleicht wieder durch eine andere, bis man schliesslich zu einer Folge gelangt, welche ein nicht weiter reducirbares Minimum von Complication oder Schwierigkeit aufweist und nun durch wirkliche Ausführung der angezeigten Grundoperationen ausgewertet wird. Ja häufig genug kommt es vor, dass ganze Reihen von Operationsverknüpfungen in ihren Bildungen und Rückbildungen sich ganz aufheben.

Beispiele bieten sich leicht dar. Wird eine Zahl definirt als das Ergebniss der Multiplication von b mit a und nachheriger Division durch b, dann wäre die Bestimmung derselben durch Ausführung dieser Anweisung thöricht. Man sieht sogleich, dass a resultiren müsse. Nicht mehr so unmittelbar sieht man dasselbe bei der Aufgabe, a mit $b+c$ zu multipliciren, durch c zu dividiren, dann wieder durch $b+c$ zu dividiren und mit c zu multipliciren, obgleich die zugehörige Ueberlegung noch leicht zu bewerkstelligen ist. In complicirten Fällen kann dieselbe jedoch höchst subtil und mühsam und für denjenigen, der mit den Gesetzen der Operationsbeziehungen nicht auf das Genaueste vertraut ist, überhaupt undurchführbar sein; wie jeder in der Arithmetik Erfahrene wol weiss. Als einfachere Beispiele für die nützliche Reduction schwierigerer auf leichtere Operationen können uns auch jene obigen Betrachtungen dienen, welche zu den practischen Methoden der rechnerischen Ausführung der vier Species für systematische Zahlen im engeren Sinne d. W. geführt haben. So ist das Product zweier solcher Zahlen eo ipso das Product zweier Summenbildungen. Die Kenntniss der gesetzmässigen Beziehungen zwischen Addition und Multiplication war es nun, welche die Vornahme jener Decomposition ermöglichte, durch welche die ursprünglich so umständliche Operation auf eine kleine Anzahl sehr einfacher reducirt werden konnte.

Es ist offenbar, dass auch die Construction logisch vollkommener Methoden für die Ausführung der höheren Operationen (deren Begriffe wir oben angedeutet haben) ähnliche Bahnen einschlagen müsste; sie würde Betrachtungen erheischen, welche aus der Kenntniss der Beziehungen zwischen den höheren und niedrigeren Operationen Nutzen zu ziehen trachteten für eine möglichst günstige Reduction jener auf diese. Wir sehen damit zugleich, dass nicht allein das Bedürfniss nach einer möglichst vollkommenen Ausführung complicirterer Operationsverknüpfungen jenen Reductionsaufgaben Wichtigkeit verleiht, sondern auch dieses eben geltend gemachte Bedürfniss nach möglichst vollkommenen Methoden für die Auswertung der Grundoperationen selbst. Und so legt denn auch dieser Gesichtspunkt ein wissenschaftliches Studium der wechselseitigen Beziehungen zwischen den Grundoperationen nahe.

Freilich stände nichts im Wege, die zugehörigen Reflexionen von Fall zu Fall anzustellen. Aber entspräche dies auch den Zwecken der arithmetischen Erkenntniss? Sicherlich nicht. Ein für allemal gebildete Regeln ersparen die immer wieder erneute Mühe schwieriger Ueberlegungen und gestatten auch hier, ein rein mechanisches Operiren an Stelle des wirklichen Denkens zu setzen. Auch die Regeln für die Verbindung, Anordnung und Umsetzung der Operationen schliessen sich zu einem lückenlosen Rechenmechanismus zusammen, sowie die specielleren Regeln für die Auswertung der einzelnen Operationen. Sind diese Regeln nun im voraus fixirt und eingeprägt, dann kann für die Ausführung irgend welcher Operationscomplexe unter allen Umständen der kürzeste und vortheilhafteste Rechnungsweg ausgewählt werden, ohne dass man doch jemals auf die Bedeutung der Zeichen recurriren müsste.

Die wissenschaftlichen Ueberlegungen, durch welche die Begriffe der verschiedenen symbolischen Zahlbildungsformen definirt werden und die Erkenntniss ihrer wechselseitigen Beziehungen zu der Aufstellung eines Mechanismus von Rechnungsregeln für die aequivalente Verbindung, Anordnung und Umsetzung dieser Formen verwendet wird, bilden nun das Gebiet der allgemeinen Arithmetik.

Indirecte Zahlencharakterisirung durch Gleichungen.

Wir haben bisher nur eine Reihe von Aufgaben kennen gelernt, welche ein logisches Bedürfniss nach dem wissenschaftlichen Studium der verschiedenartigen Formen symbolischer Zahlbildung und der Gesetze ihrer wechselseitigen Verknüpfung erregen mussten. Stets hatten wir nur Fälle im Auge, wo eine Zahl symbolisch definirt wird durch ein Gebilde von lauter bekannten Zahlen, verknüpft und geformt durch jene symbolischen Grundverbindungen, die wir oben als Summe, Differenzen, Producte, Quotienten, Potenzen u. s. w. kennen gelernt haben. Aber noch andere Fälle sind denkbar. Eine Zahl kann auch symbolisch definirt sein als ein unbekannter Bestandtheil solch eines genau charakterisirten Gebildes, dessen Wert bereits bekannt oder vermittelst eines, durchweg aus bekannten Zahlen aufgebauten Operationsgebildes zu berechnen ist. Mit einem Worte: auch durch Gleichungen können Zahlen definirt sein. Was wir von einer solchen Zahl wissen, ist der Umstand, dass ihr Wert, falls er bekannt wäre, durch die und die Operationen mit gewissen gegebenen Zahlen verbunden, jenes direct oder indirect bekannte Resultat ergeben würde. Während es sich also im ersten Falle stets um die blosse (und möglichst einfache) Ausführung einer Reihe von Operationen mit bekannten Zahlen handelt, liegt nun hier eine weit schwierigere Aufgabe vor, nämlich der Aufwicklung complicirter Zahlbeziehungen, in welche die unbekannte Zahl selbst mit eingewoben ist.

Endlich ist noch die Möglichkeit zu erwähnen, dass eine Zahl statt durch eine einzige Gleichung, vielmehr durch ein Gleichungssystem definirt werde; ein Fall, der trotz der grösseren Complication in logischer Hinsicht nichts wesentlich Neues darbietet.

Man sieht sogleich, dass in allen diesen Fällen eine Verallgemeinerung jener Art indirecter Zahlencharakteristik vorliegt, die wir bei jeder „inversen" Zahlbildung beobachtet haben. In der ersten Reihe von Zahlbildungen wurde eine Zahl X definirt durch die Verknüpfungen

$$a+b,\quad a\,.\,b,\quad a^b,\ \text{u. s. w.};$$

in der zweiten Reihe durch die Bedingungen

$$a+x=b;\quad a\,.\,x=b;\quad a^x=b;\quad x^a=b;\ \text{u. s. w.}$$

Die Zahlen, welche diesen Bedingungen genügen, fasst man als letzte und elementare Bildungen, da sie weder auf einander noch auf diejenigen der ersten Reihe reducirbar sind. [1]) Es sind nun aber durch combinatorische Verknüpfung dieser auch andere verwickelte Bedingungen gleichen Charakters zu construiren. Z. B. $ax \pm b = c$, $ax^2 + b^x = c$, u. dgl. Ob nun auch derartige Aufgaben zu wesentlich neuen, d. h. letzten und nicht weiter reductiblen Zahlformen führen, ob sie unter allen oder nur unter besonderen Umständen Widerspruchloses ergeben oder nicht, das bedarf einer besonderen Untersuchung. Jedenfalls liegt der Gedanke nahe, es möchten sich, seien es alle, seien es bestimmt charakterisirte Klassen dieser Zahlformen, auf jene elementaren reduciren; es möchte gelingen, die Complication von Operationen, in welche die unbekannte Zahl eingewickelt ist, durch eine Reihe aequivalenter Transformationen derart aufzuwickeln, dass sie schliesslich als eine Zahl des erstbetrachteten Charakters dasteht, die in einem auf lauter bekannten Zahlen ruhenden Operationsgebilde ihr Aequivalent hat. Es ist offenbar, dass diese aufwickelnden Transformationen nur auf einer genauen wissenschaftlichen Erkenntniss der Beziehungen zwischen den verschiedenen elementaren Zahlbildungsarten und deren Com-

[1]) Wir stehen hier auf dem Standpunkte, wo die „negativen", „imaginären", „gebrochenen" und „irrationalen Zahlen" noch nicht eingeführt sind. Durch sie findet auf unserem Anzahlengebiete eine rechnerisch-formelle — obschon keineswegs begriffliche — Reduction der inversen Zahlformen auf die directen statt.

plicationsformen beruhen könnten, und so erregt auch diese zweite grosse Klasse von Problemen, welche ein besonderer und höchst wichtiger Zweig der Zahlenlehre — die Algebra — behandelt, das Bedürfniss nach einer allgemeinen Arithmetik in dem oben definirten Sinne einer allgemeinen Operationslehre.

Ergebniss. Die logischen Quellen der allgemeinen Arithmetik.

Damit haben wir die beiden grossen Problemgruppen, welche zu ihrer Lösung einer allgemeinen Arithmetik bedürfen und sie logisch fordern, gekennzeichnet. Die Erste geht auf eine indirecte Zahlbestimmung durch einen aequivalenten Complex gegebener Verknüpfungen von bekannten Zahlen, und die Aufgabe besteht darin, die wirkliche Ausführung auf ein Minimum von Schwierigkeit und Verwicklung zu reduciren; die Zweite geht auf eine in noch viel höherem Masse indirecte Zahlbestimmung durch einen Complex nur unvollkommen gegebener Operationen, sofern die unbekannte Zahl selbst als das eine Fundament der Verknüpfungen fungirt, und die Aufgabe besteht darin, die Unbekannte, sei es vollkommen oder wenigstens durch einen aequivalenten Complex der ersten Art zu bestimmen, welcher dann (vorausgesetzt dass die bezüglichen Auswertungsmethoden schon hinreichend ausgebaut sind) jederzeit ausgerechnet und somit wie der Repräsentant einer bekannten Zahl angesehen werden kann.

Mit den zuletzt betrachteten Problemen sind alle erdenklichen Arten symbolischer Zahlbestimmungen erschöpft, und so können wir unser Resultat in kurzer Form auch so aussprechen:

Die Thatsache, dass wir in der unvergleichlichen Mehrheit von Fällen auf symbolische Zahlbildungen eingeschränkt sind, zwingt zu einer geregelten Ausbildung des Zahlengebietes in Form eines Zahlensystems (sei es der natürlichen Zahlenreihe oder des Systems in dem engeren Sinn des Wortes), welches nach einem festen Princip aus der Gesammtheit der zu einem jeden wirklichen Zahlbegriff gehörigen und ihm aequivalenten symbolischen Bildungen je eine herausgreift und ihr zugleich eine systematische Stelle giebt. Für alle andern noch denkbaren Zahlformen erwächst dann das Problem der Auswertung, d. h. der klassificatorischen Reduction auf die ihnen aequivalente Zahl des Systems. Eine Uebersicht über die denkbaren Formen der Zahlbildung lehrte aber, dass die Erfindung zugehöriger Auswertungsmethoden abhängig ist von der Ausbildung einer allgemeinen Arithmetik in dem Sinne einer allgemeinen Operationslehre.

Berichtigungen.

S. 4 Anmerkung, nach „Vgl." einzuschalten „in Beziehung auf die beiden letztgenannten Forscher".

S. 5, Zeile 18 v. o. statt „Dedekind" lies „Kronecker".

S. 10, letzte Zeile vor Beginn des § statt „erst viel später" lies „erst im II. Theile".

S. 58, Zeile 4—5 v. o. statt „Inhaltsrelationen" lies „primäre Relationen (Vgl. S. 73)".

S. 92, Anmerkung [1]) statt „Leibnitz, Opp. phil. Erdm. 97" lies „Leibniz, Opp. phil. Erdm. 79".

S. 103 im §-Titel statt „Leibnitzens" lies „Leibnizens".

S. 104, Zeile 5 v. o. statt „Leibnitz" lies „Leibniz".

S. 116, Zeile 9 v. o. statt „die Quantitätsverhältnisse" lies „die Verhältnisse commensurabler Quantitäten".

G. Pätz'sche Buchdr. (Lippert & Co.), Naumburg a/S.