H. POINCARÉ

PROF. SORBONY CZŁONEK AKADEMII

Nauka i Hypoteza

PRZEKŁAD M. H. HORWITZA

POD REDAKCYĄ LUDWIKA SILBERSTEINA.

NAKŁAD JAKÓBA MORTKOWICZA.

WARSZAWA 1908 - G. CENTNERSZWER I SKA.

LWÓW: KSIĘGARNIA H. ALTENBERGA.

NAUKA I HYPOTEZA

H. POINCARÉ

PROF. SORBONY CZŁONEK AKADEMII

Nauka i Hypoteza

PRZEKŁAD M. H. HORWITZA

POD REDAKCYĄ LUDWIKA SILBERSTEINA.

NAKŁAD JAKÓBA MORTKOWICZA.

WARSZAWA 1908 - G. CENTNERSZWER i SKA.

LWÓW: KSIĘGARNIA H. ALTENBERGA.

ODBITO W DRUKARNI NARODOWEJ W KRAKOWIE.

WSTĘP.

Dla powierzchownego spostrzegacza prawda naukowa nie podlega żadnej wątpliwości; logika nauki jest nieomylną, jeżeli zaś uczonym zdarza się błądzić, to wówczas tylko, gdy sprzeniewierzają się jej prawidłom.

Prawdy matematyczne wywodzą się z niewielkiej ilości twierdzeń oczywistych zapomocą łańcucha rozumowań wolnych od zarzutu; narzucają się one nietylko nam, ale i samej przyrodzie. Krępują one, że tak powiem, Stwórcę i pozostawiają mu wybór między pewną tylko, względnie niewielką, ilością rozwiązań. Wobec tego wystarczy kilka doświadczeń, abyśmy poznali, jakiego mianowicie dokonał on wyboru. Z każdego doświadczenia będzie można wyprowadzić mnóstwo wyników drogą dedukcyj matematycznych i w ten to sposób każde poszczególne doświadczenie zapozna nas z jakimś zakątkiem Wszechświata.

Takie to jest dla wielu ludzi, dla gimnazistów, którym wykłada się pierwsze początki fizyki, źródło pewności naukowej. Tak to rozumieją oni rolę doświadczenia i matematyki. Tak również rozumiało ją przed stu laty wielu uczonych, którzy marzyli o zbudowaniu świata, zapożyczając od doświadczenia możliwie najmniej materyałów.

Trochę zastanowienia wystarczyło, aby dostrzedz jakie miejsce zajmuje w nauce hypoteza; przekonano się, że obejść się bez niej nie może matematyk, że i eksperymentor się bez niej nie obywa. Natenczas zadano sobie pytanie, czy wszystkie te konstrukcye posiadają poważną trwałość, i powzięto obawę, że jeden podmuch zdoła je obalić. Sceptycyzm taki również jest powierzchowny. Wątpić o wszystkiem lub we wszystko wierzyć — są to dwa rozwiązania jednako dogodne, obadwa bowiem jednako oszczędzają nam trudu myślenia.

Zamiast więc wygłaszać sumaryczne wyroki powinniśmy zbadać starannie rolę hypotezy; przekonamy się wówczas, że jest ona nietylko niezbędną, ale że najczęściej jest uprawnioną. Zobaczymy również, że istnieje kilka rodzajów hypotez, że jedne z nich są sprawdzalne, i że skoro zostaną potwierdzone przez doświadczenie, stają się płodnemi prawdami; że inne, nie mogąc wprowadzić nas w błąd, mogą nam być pożyteczne przez dostarczenie oparcia naszej myśli, że wreszcie inne jeszcze są hypotezami tylko z pozoru, i sprowadzają się do zamaskowanych określeń lub umów.

Te ostatnie napotyka się zwłaszcza w matematyce i w naukach z nią spowinowaconych. Stąd właśnie nauki te czerpią swą ścisłość; umowy te są wytworem swobodnej działalności naszego umysłu, który w tej dziedzinie nie zna przeszkód. Tutaj umysł nasz może twierdzić, gdyż dekretuje; zrozumiejmy się przecież: dekrety te narzucają się naszej nauce, która bez nich byłaby niemożliwa; nie narzucają się jednak przyrodzie. Czy wszakże dekrety te są dowolne? Nie, albowiem w takim razie byłyby jałowe. Doświadczenie pozostawia nam wprawdzie wolny wybór, lecz służy nam za przewodnika, pozwala nam rozeznać drogę najdogodniejszą. Dekrety nasze są tedy podobne do dekretów władcy absolutnego lecz rozumnego, zasięgającego opinii swojej Rady Państwa.

Niektórych autorów uderzył ten charakter wolnej umowy, jakiego dopatrzono się w pewnych zasadach podstawowych nauki. Chcieli oni uogólniać nad miarę i zapomnieli przytym, że wolność nie jest dowolnością. Doszli oni w ten sposób do tak zwanego nominalizmu, i zadali sobie pytanie, czy badacz nie pada ofiarą własnych swych określeń, i czy świat, który w swoim mniemaniu odkrywa, nie jest poprostu tworem jego kaprysu[1]). Wobec tego nauka byłaby pewną, ale pozbawioną swej doniosłości.

Gdyby tak było, nauka byłaby bezsilna. A przecież patrzymy codzień na jej działalność. Byłoby to niemożliwe, gdyby nie zapoznawała nas ona z czymś rzeczywistym. Wszelako to, do czego ona dociera, nie są to rzeczy same, jak sądzą naiwni dogmatycy, lecz tylko stosunki między rzeczami; poza temi stosunkami niema rzeczywistości poznawalnej.

Do takiego to wniosku dojdziemy, przebiegłszy szereg nauk od arytmetyki i geometryi do mechaniki i fizyki doświadczalnej.

Jaką jest istota rozumowania matematycznego? Czy jest ona rzeczywiście dedukcyjna, jak mniema się pospolicie? Głębszy rozbiór tej kwestyi przekonywa nas, że tak bynajmniej nie jest, że posiada ono w pewnej mierze charakter rozumowania indukcyjnego, i że to właśnie stanowi o jego płodności. Niemniej przeto zachowuje ona cechę bezwzględnej ścisłości; wykazanie tego będzie pierwszym naszym zadaniem.

Po bliższym poznaniu jednego z narzędzi, które matematyka daje badaczowi, poddamy z kolei analizie inne pojęcie podstawowe, pojęcie wielkości matematycznej. Czy znajdujemy je w przyrodzie, czy też sami je do niej wprowadzamy? Jeżeli sami wprowadzamy, czyż nie narażamy wszystkiego na wypaczenie? Porównanie surowych danych naszych zmysłów z owym niezmiernie złożonym i subtelnym pojęciem, które matematycy nazywają wielkością, zniewala nas do uznania, że zachodzi między niemi rozbieżność; a więc rama ta, w którą wszystko chcemy wtłoczyć, naszej jest roboty; ale nie zrobiliśmy jej na chybił-trafił, zrobiliśmy ją, że tak powiem, na miarę, i dlatego to możemy umieszczać w niej fakty nie kalecząc ich cech istotnych.

Inną ramą, narzuconą przez nas światu, jest przestrzeń. Jakie jest źródło pierwszych zasad geometryi? Czy narzuca je nam logika? Łobaczewski okazał, że tak nie jest, przez

[1]) Patrz Le Roy, Science et Philosophie (Revue de Métaphisique et de Morale, 1901).

stworzenie geometryi nie-euklidesowych. Czy przestrzeń objawia się nam przez zmysły nasze? Bynajmniej; albowiem przestrzeń, którą mogłyby nam pokazać nasze zmysły, różni się najzupełniej od przestrzeni geometry. Czy geometrya pochodzi może z doświadczenia? Głębsze roztrząśnięcie wykaże nam, że nie. Dojdziemy tedy do wniosku, że zasady te są tylko umowami, ale umowy te nie są dowolne, i gdyby nas przeniesiono do innego świata, (który nazwę światem nie-euklidesowym, usiłując wyobrazić go sobie), zniewoliłoby nas to do przyjęcia innych umów.

W mechanice dojdziemy do wniosków podobnych i zobaczymy, że zasady tej nauki, jakkolwiek bardziej bezpośrednio oparte na doświadczeniu, posiadają również ów charakter konwencyonalny, właściwy postulatom geometrycznym. Dotychczas tryumfuje nominalizm, lecz oto dochodzimy do nauk fizycznych we właściwym znaczeniu. Tutaj scena się zmienia; napotykamy inny rodzaj hypotez i widzimy całą ich płodność. Wprawdzie zrazu teorye wydają się nam kruchemi, a dzieje nauki dowodzą, że są one przemijające: wszelako nie umierają one zupełnie, lecz z każdej z nich coś pozostaje. Należy tedy dołożyć starań, aby wyodrębnić to »coś«, albowiem to właśnie i tylko to stanowi prawdziwą rzeczywistość.

Metoda nauk fizycznych opiera się na indukcyi, która każe nam oczekiwać powtórzenia się pewnego zjawiska, gdy powracają okoliczności, w których zjawisko to powstało po raz pierwszy. Gdyby w s z y s t k i e te okoliczności mogły wraz powrócić, zasadę tę możnaby stosować bez obawy, lecz nie zdarzy się to nigdy; niektórych z tych okoliczności będzie zawsze brakowało. Czy jesteśmy zupełnie pewni, że są one pozbawione znaczenia? Oczywiście nie. Będzie to mogło być prawdopodobne, lecz nie ściśle pewne. Stąd doniosła rola, jaką odgrywa w naukach fizycznych pojęcie prawdopodobieństwa. Rachunek prawdopodobieństwa nie jest więc tylko rozrywką lub przewodnikiem dla graczy w bakarata — i wypadnie nam postarać się o zgłębienie jego zasad. Atoli wyniki, do których tu dojdziemy, będą dość niezupełne, albowiem ów mglisty instynkt, który pozwala nam na oryentowanie się w prawdopodobieństwach, jest w wysokim stopniu oporny analizie.

Po zbadaniu warunków, w jakich pracuje fizyk, sądziłem, że należy pokazać go przy pracy. W tym celu zaczerpnąłem kilka przykładów z historyi optyki oraz elektryczności. Zobaczymy, skąd się wzięły idee Fresnela i pomysły Maxwella, i jakie hypotezy wprowadzili nieświadomie Ampère i inni założyciele elektrodynamiki.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

LICZBA I WIELKOŚĆ.

Rozdział Pierwszy.

O istocie rozumowania matematycznego.

I.

Sama już możliwość nauki matematycznej wydaje się sprzecznością nierozwiązalną. Jeżeli nauka ta pozornie tylko jest dedukcyjną, skąd się bierze owa doskonała jej ścisłość, której nikt nie myśli poddawać wątpliwości? Jeżeli natomiast wszystkie twierdzenia, jakie ona głosi, mogą być wyprowadzone jedne z drugich zapomocą prawideł logiki formalnej, czemuż matematyka nie sprowadza się do olbrzymiej tautologii? Sylogizm nie może nas nauczyć niczego istotnie nowego, i jeżeli wszystko miałoby wypływać z zasady tożsamości, wszystko też dałoby się do niej znowu sprowadzić. Czyż zgodzimy się na to, że sformułowania wszystkich twierdzeń, zapełniające tyle tomów, są jedynie okolnymi sposobami wypowiedzenia, że *A* jest *A*!

Prawdą jest niewątpliwą, że można wznieść się do pewników, leżących u źródła wszystkich tych rozumowań. Jeżeli się sądzi, że niepodobna ich sprowadzić do zasady sprzeczności, jeżeli z drugiej strony nie chce się w nich upatrywać faktów doświadczalnych, które nie mogłyby posiadać charakteru konieczności matematycznej, pozostaje jeszcze wyjście trzecie: uznać je za sądy syntetyczne *a priori*. Nie jestto wszakże rozwiązaniem trudności, lecz tylko jej ochrzczeniem; i nawet gdyby istota sądów syntetycznych nie posiadała już dla nas tajemnic, sprzeczność nie znikłaby, lecz przesunęłaby się tylko; rozumowanie sylogistyczne nie może niczego dodać do danych, których mu się dostarcza; dane te sprowadzają się do kilku pewników, a więc i we wnioskach nie powinniśmy znajdować nic ponad to.

Żadne twierdzenie nie powinnoby być nowym, jeżeli do dowodu tego twierdzenia nie wprowadziło się nowego pewnika; rozumowanie mogłoby nam zwrócić tylko prawdy wprost oczywiste, a zapożyczone od bezpośredniej intuicyi; byłoby ono tylko pasorzytniczym pośrednikiem, a wobec tego czyż nie wypadałoby zadać sobie pytania, czy cały aparat sylogistyczny nie służy poprostu do zasłonięcia owej pożyczki?

Sprzeczność stanie się jeszcze bardziej uderzającą, skoro otworzymy jakąkolwiek książkę matematyczną; na każdej stronicy autor zapowiada zamiar uogólnienia twierdzenia poprzednio znanego. Czyż znaczyłoby to, że metoda matematyczna postępuje od szczególnego do ogólnego, a w takim razie, jakże można nazywać ją dedukcyjną?

Gdyby wreszcie nauka o liczbie była czysto analityczną albo też mogła być wyprowadzona analitycznie z niewielkiej ilości sądów syntetycznych, umysł dość potężny mógłby, zdaje się, jednym rzutem oka objąć wszystkie jej prawdy; co mówię! możnaby nawet mieć nadzieję, że nadejdzie dzień, kiedy zostanie wynaleziony tak prosty sposób ich wysłowienia, że będą też one bezpośrednio dostępne dla pospolitej nawet umysłowości.

Jeżeli wzdragamy się przyjąć te konsekwencye, musimy przecież uznać, że rozumowanie matematyczne posiada samo przez się pewnego rodzaju zdolność twórczą, że więc różni się od sylogizmu.

Różnica ta musi być nawet głęboką. Nie znajdziemy naprzykład klucza tej tajemnicy w częstym stosowaniu prawidła, według którego jedno i to samo jednoznaczne działanie, zastosowane do dwu równych liczb, da wyniki identyczne.

Wszystkie te sposoby rozumowania, niezależnie od tego, czy dają się one sprowadzić do właściwego sylogizmu, czy też nie, zachowują charakter analityczny, i przez to już są bezsilne.

II.

Stary to spór; już Leibniz usiłował dowieść, że 2 i 2 daje 4; rozpatrzmy nieco bliżej jego dowodzenie.

Przypuśćmy, że określono liczbę 1 oraz działanie $x + 1$, które polega na dodaniu jedności do danej liczby x. Określenia te, jakakolwiek jest ich treść, nie będą występowały w dalszym ciągu rozumowania.

Określam następnie liczby 2, 3 i 4 zapomocą równości:

$$(1)\ 1 + 1 = 2; \quad (2)\ 2 + 1 = 3; \quad (3)\ 3 + 1 = 4.$$

Określam podobnież działanie $x + 2$ przez równość:

$$(4)\ x + 2 = (x + 1) + 1.$$

To założywszy mamy

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 \qquad \text{(określenie 4)}$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 \qquad \text{(określenie 2)}$$
$$3 + 1 = 4 \qquad \text{(określenie 3)}$$

skąd wypływa

$$2 + 2 = 4 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Niepodobna zaprzeczyć, że rozumowanie to jest czysto analityczne. Zapytajcie jednak o to jakiegokolwiek matematyka, a odpowie wam: »Nie jest to dowodzenie we właściwym znaczeniu słowa, lecz tylko sprawdzenie«. Ograniczono się do zestawienia dwóch określeń czysto konwencyonalnych i stwierdzono ich tożsamość; nie dowiedziano się niczego nowego. Sprawdzenie różni się od prawdziwego dowodzenia tym właśnie, że jest czysto analityczne i że jest jałowe. Jest jałowe, gdyż wniosek jest tylko przekładem na inny język treści zawartej w przesłankach. Dowodzenie prawdziwe jest natomiast płodne, ponieważ wniosek, do jakiego prowadzi, jest poniekąd ogólniejszy niż przesłanki.

Równość $2 + 2 = 4$ może być poddana sprawdzeniu dlatego tylko, że jest szczególną. Każde twierdzenie szczególne w matematyce będzie zawsze nadawało się do takiego rodzaju sprawdzenia. Gdyby wszakże matematyka miała się redukować do szeregu takich sprawdzeń, nie byłaby ona nauką. Tak naprzykład szachista nie tworzy bynajmniej nauki, wygrywając partyę. Niemasz nauki jak o rzeczach ogólnych.

Można nawet rzec, że przedmiotem właśnie nauk ścisłych jest oszczędzanie nam takich sprawdzeń bezpośrednich.

III.

Przypatrzmy się tedy matematykowi przy pracy, i sprobujmy uchwycić, na czym polega właściwe mu postępowanie. Zadanie to nie jest pozbawione trudności; nie wystarcza otworzyć jakąś książkę na chybił-trafił i zbadać pierwsze lepsze dowodzenie.

Musimy przedewszystkiem wyłączyć geometryę, w której kwestya komplikuje się przez trudne zagadnienia, dotyczące roli postulatów, istoty i pochodzenia pojęcia przestrzeni. Dla podobnych racyj nie możemy zwrócić się do analizy nieskończonostkowej. Musimy zbadać myśl matematyczną tam, gdzie pozostała ona czysta, to jest w arytmetyce.

I tutaj jeszcze musimy wybierać; w najwyższych działach teoryi liczb pierwotne pojęcia matematyczne uległy już tak głębokiemu opracowaniu, że analiza ich nastręcza wielkie trudności.

W działach początkowych arytmetyki winniśmy tedy szukać wyjaśnień, o które nam chodzi — jakkolwiek właśnie w dowodzeniach twierdzeń najelementarniejszych autorzy traktatów klasycznych ujawnili najmniej ścisłości i precyzyi. Nie należy im tego poczytać za zbrodnię; ulegli oni tylko konieczności; początkujący nie są przygotowani do prawdziwej ścisłości matematycznej; nie widzieliby oni w niej nic prócz próżnych i nużących subtelności; stratą czasu byłoby, gdyby usiłowano zbyt wcześnie zwiększać ich wymagalność; powinni oni przebiedz szybko, ale bez przeskakiwania etapów, drogę, którą przebyli powoli założyciele nauki.

Czemuż potrzebne jest tak długie przygotowanie, aby przyzwyczaić się do doskonałej ścisłości, która, zdawałoby się, powinnaby narzucać się w sposób naturalny wszystkim zdrowym umysłom? Jest to zagadnienie z dziedziny logiki i psychologii, w wysokim stopniu godne rozmyślań.

Nie zatrzymamy się przecież nad nim; jest ono obce przedmiotowi, który nas tutaj zaprząta; to tylko stwierdzimy, że, pod grozą chybienia naszego celu, musimy przerobić dowodzenia twierdzeń najelementarniejszych i nadać im zamiast postaci nieociosanej, którą się im pozostawia kwoli nietrudzenia początkujących, postać ścisłą, która zadowoliłaby wytrawnego matematyka.

Określenie dodawania. — Przypuśćmy, że określono uprzednio działanie $x + 1$, polegające na dodaniu liczby 1 do danej liczby x.

Określenie to, jakąkólwiek włożono w nie treść, nie będzie grało żadnej roli w dalszych rozumowaniach.

Chodzi teraz o określenie działania $x + a$, polegającego na dodaniu liczby a do danej liczby x.

Przypuśćmy, że określono działanie

$$x + (a - 1);$$

działanie $x + a$ będzie natenczas określone przez równość:

$$(1) \quad x + a = [a + (x - 1)] + 1.$$

Będziemy więc wiedzieli, co to jest $x + a$, skoro będziemy wiedzieli, co jest $x + (a - 1)$; że zaś przypuściliśmy na początku, iż wiemy, co jest $x + 1$, będziemy tedy mogli określić kolejno i »przez rekurencyę« działania $x + 2$, $x + 3$ itd.

Określenie to zasługuje na chwilę uwagi; jest ono natury osobliwej, wyróżniającej je już od określenia czysto logicznego; w rzeczy samej równość (1) zawiera nieskończoność poszczególnych określeń, z których każde ma sens jedynie o tyle, o ile znamy poprzedzające.

Własności dodawania. — *Łącznościowość.* — Twierdzę, że

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

W rzeczy samej, twierdzenie to jest prawdziwe dla $c = 1$; brzmi ono wówczas

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

co, z pominięciem różnicy w znakowaniu, nie jest niczym innym, jak równością (1), zapomocą której określiliśmy dodawanie.

Przypuśćmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $c = \gamma$; twierdzę, że będzie ono prawdziwe i dla $c = \gamma + 1$; jakoż niechaj będzie

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma),$$

skąd kolejno wyprowadzimy

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$$

albo na podstawie określenia (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

skąd wynika, przez szereg dedukcyj czysto analitycznych, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\gamma + 1$.

Skoro zaś jest ono prawdziwe dla $c = 1$, tedy kolejno można okazać w sposób powyższy, że jest prawdziwe dla $c = 2$, dla $c = 3$, i t. d.

Przemiennościowość. — 1^0 Twierdzę, że

$$a + 1 = 1 + a.$$

Twierdzenie to jest oczywiście prawdziwe dla $a = 1$; można by sprawdzić zapomocą rozumowań czysto analitycznych, że jeśli jest prawdziwe dla $a = \gamma$, to będzie również dla $a = \gamma + 1$; otóż jest prawdziwe dla $a = 1$, będzie więc nim również dla $a = 2$, dla $a = 3$, i t. d., co wyraża się, mówiąc, że twierdzenie zostało dowiedzione przez rekurencyę.

2^0 Twierdzę, że

$$a + b = b + a.$$

Twierdzenia tego dowiedliśmy przed chwilą dla $b = 1$; można sprawdzić analitycznie, że skoro jest ono prawdziwe dla $b = \beta$, to będzie również prawdziwe dla $b = \beta + 1$.

Twierdzenie jest tedy dowiedzione przez rekurencyę.

Określenie mnożenia. — Mnożenie określimy zapomocą równości

$$a \times 1 = a$$

$$(2) \quad a \times b = [a \times (b - 1)] + a.$$

Równość (2) zawiera podobnie jak równość (1), nieskończoną ilość określeń; po określeniu $a \times 1$ pozwala ona kolejno określić $a \times 2$, $a \times 3$ i t. d.

Własności mnożenia. — *Rozdzielnościowość.* — Twierdzę, że

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Sprawdza się analitycznie, że równość ta jest prawdziwa dla $c = 1$; następnie, że jeśli jest prawdziwa dla $c = \gamma$, jest prawdziwa i dla $c = \gamma + 1$. I to twierdzenie jest tedy dowiedzione przez rekurencyę.

Przemiennościowość. — 1⁰ Twierdzę, że

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Twierdzenie to jest oczywiste dla $a = 1$.

Sprawdza się analitycznie, że jeśli jest prawdziwe dla $a = \alpha$, to jest prawdziwe dla $a = \alpha + 1$.

2⁰ Twierdzę, że

$$a + b = b + a. \qquad a \times b = b \times a$$

Twierdzenia tego dowiedliśmy powyżej dla $b = 1$. Można sprawdzić analitycznie, że jeśli jest ono prawdziwe dla $b = \beta$, to będzie prawdziwe również dla $b = \beta + 1$.

IV.

Urywam tutaj ten monotonny szereg rozumowań. Lecz sama ta monotonia posłużyła do lepszego uwydatnienia sposobu rozumowania, który jest jednostajny i napotyka się na każdym kroku.

Sposób ten polega na dowodzeniu przez rekurencyę. Ustanawia się naprzód twierdzenie dla $n = 1$; okazuje się następnie, że jeśli jest ono prawdziwe dla $n - 1$, będzie nim też dla *n*, skąd się wnosi, że jest prawdziwe dla wszystkich liczb całkowitych.

Widzieliśmy powyżej, jak można się nim posługiwać dla dowiedzenia prawideł dodawania i mnożenia, to jest prawideł rachunku algebraicznego; rachunek ten jest narzędziem przekształcania, nadającym się do znacznie większej rozmaitości kombinacyi niż prosty sylogizm; ale jest to również narzędzie czysto analityczne, niezdolne do powiedzenia nam czegoś nowego. Gdyby matematyka nie rozporządzała żadnym innym, zatrzymałaby się rychło w swym rozwoju; lecz ucieka się ona znowu do tego samego postępowania, t. j. do rozumowania przez rekurencyę, i w ten sposób może postępować naprzód.

Przy baczniejszej nieco uwadze, odnajdujemy ten sposób rozumowania na każdym kroku, bądź w postaci prostej, którąśmy mu powyżej nadali, bądź w postaci mniej lub bardziej zmienionej.

Jest to więc rozumowanie matematyczne *par excellence*, i dlatego wypada nam bliżej je rozpatrzeć.

V.

Cechą istotną rozumowania przez rekurencyę jest, że zawiera ono zgęszczoną, że tak powiem w jedną formułę nieskończoną ilość sylogizmów.

Aby lepiej to uwydatnić wypowiedzmy jedne po drugich te sylogizmy, układające się — że użyjemy wyrażenia obrazowego — w kaskadę.

Są to rozumie się, sylogizmy hypotetyczne.

Twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1.

Jeżeli zaś jest prawdziwe dla 1, to jest prawdziwe i dla 2.

A więc jest prawdziwe dla 2.

Jeżeli zaś jest prawdziwe dla 2, to jest prawdziwe dla 3.

A więc jest prawdziwe dla 3, i tak dalej.

Widzimy, że wniosek każdego sylogizmu służy jako przesłanka mniejsza sylogizmu następnego.

Nadto przesłanki większe wszystkich naszych sylogizmów można sprowadzić do jedynej formuły:

Jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$, to jest prawdziwe i dla n.

Widzimy tedy, że w rozumowaniach przez rekurencyę formułuje się tylko przesłankę mniejszą pierwszego sylogizmu oraz formułę ogólną, zawierającą, jako wypadki szczególne, wszystkie przesłanki większe.

W ten sposób szereg sylogizmów, któryby się nigdy nie skończył, sprowadzony zostaje do zdania kilkuwierszowego.

Łatwo jest teraz zrozumieć, czemu to każdy wynik szczególny danego twierdzenia może zostać sprawdzony — jakeśmy to wyjaśnili wyżej — sposobami czysto analitycznemi.

Gdybyśmy chcieli, zamiast okazać, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb, dowieść tylko, że jest ono prawdziwe dla liczby 6 naprzykład, wystarczyłoby ustanowić 5 pierwszych sylogizmów naszej kaskady; potrzebowaliśmy ich 9 dla liczby 10; potrzebowalibyśmy ich więcej jeszcze dla liczby większej; ale jakkolwiek wielką byłaby ta liczba, potrafilibyśmy zawsze jej dosięgnąć, i każdy wynik możnaby poddać sprawdzeniu analitycznemu.

A jednak, jakkolwiek dalekobyśmy się w ten sposób posunęli, nie wznieślibyśmy się nigdy do twierdzenia ogólnego, stosującego się do wszystkich liczb, a takie jedynie twierdzenie może być przedmiotem nauki. Aby doń dotrzeć trzebaby nieskończonej ilości sylogizmów, trzebaby przebyć przepaść, której cierpliwość analityka, rozporządzającego jedynie środkami logiki formalnej, nie zdoła nigdy zapełnić!

Zadaliśmy sobie na początku pytanie, dlaczego niepodobna wyobrazić sobie umysłu dość potężnego, któryby objął jednym rzutem oka całokształt prawd matematycznych.

Odpowiedź teraz jest łatwa; szachista może skombinować z góry cztery lub pięć posunięć, lecz najlepszy nawet szachista będzie mógł przygotować sobie zawsze tylko pewną skończoną liczbę posunięć; jeżeli zwróci on swe zdolności do arytmetyki, nie zdoła on objąć ogólnych jej prawd zapomocą jednej bezpośredniej intuicyi; chcąc dojść do najmniejszego bodaj twierdzenia, nie będzie mógł obejść się bez pomocy rozumowania przez rekurencyę, albowiem jest to narzędzie pozwalające na przejście od skończoności do nieskończoności.

Narzędzie to jest zawsze pożyteczne, ponieważ dając nam możność przebycia jednym skokiem dowolnej liczby etapów, zwalnia nas ono od sprawdzań długich, mozolnych i monotonnych, które rychło stałyby się praktycznie niewykonalnemi. Ale staje się ono niezbędnym, skoro tylko mamy na widoku twierdzenie ogólne, do którego sprawdzanie analityczne bezustannie by nas przybliżało, nie pozwalając nam wszakże nigdy doń dotrzeć.

Zdawać by się mogło, że ten dział arytmetyki odległy jest bardzo od analizy nieskończonostkowej; a przecież, jak widzieliśmy powyżej, idea nieskończoności matematycznej odgrywa w nim już rolę przemożną, i bez niej nie byłoby nauki, bo nie byłoby nic ogólnego.

VI.

Sądowi, na którym oparte jest rozumowanie przez rekurencyę, można nadać inne postacie; można np. powiedzieć, że w nieskończonym zbiorze liczb całkowitych różnych istnieje zawsze jedna, która jest mniejsza od wszystkich innych.

Możnaby przejść łatwo od jednego sformułowania tego sądu do drugiego, łudząc się, że dowiodło się prawowitości rozumowania przez rekurencyę. Ale zawsze gdzieś będziemy musieli się zatrzymać, zawsze dojdziemy do jakiegoś nie dającego się dowieść pewnika, który nie będzie w gruncie rzeczy niczym innym, jak właśnie twierdzeniem, o którego dowiedzenie chodzi, w innym tylko wysłowieniu.

Niepodobna więc uchylić się od wniosku, że prawidło rozumowania przez rekurencyę nie da się sprowadzić do zasady sprzeczności.

Prawidło to nie może być również pochodzenia doświadczalnego; doświadczenie mogłoby nam tylko powiedzieć, że prawidło to jest prawdziwe dla dziesięciu, dla stu np. pierwszych liczb; nie może ono objąć nieskończonego szeregu liczb, ale jedynie część tego szeregu krótszą lub dłuższą, lecz zawsze tylko ograniczoną.

Gdyby chodziło tylko o to, zasada sprzeczności byłaby wystarczająca; pozwoliłaby nam ona zawsze na rozwinięcie tylu sylogizmów, ilebyśmy tylko chcieli; dopiero gdy chodzi o zamknięcie w jednej formule nieskończonej ich ilości, dopiero przed nieskończonością zasada ta odmawia usług; tutaj również okazuje się bezsilnym doświadczenie. Reguła ta, niedostępna dla dowodu analitycznego i dla doświadczenia jest prawdziwym typem sądu syntetycznego *a priori*. Niepodobna z drugiej strony upatrywać w niej prostej umowy jak w wypadku niektórych postulatów geometryi.

Dlaczegóż więc sąd ten narzuca się nam z nieodbitą oczywistością? Albowiem jest on wprost stwierdzeniem potęgi umysłu, który czuje się zdolnym do pojmowania nieograniczonego powtarzania jednego i tego samego aktu myśli, skoro tylko akt ten możliwy jest raz jeden. Umysł posiada bezpośrednią intuicyę tej potęgi, i doświadczenie może być dlań jedynie sposobnością posługiwania się nią, a tym samym uświadomienia jej sobie.

Ale, powie kto, jeżeli surowe doświadczenie nie może upodstawnić rozumowania przez rekurencyę, to czy stosuje się to samo do doświadczenia, wspartego przez indukcyę? Widzimy kolejno, że dane twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1, dla liczby 2, dla liczby 3 i tak dalej, mówimy tedy, że uwydatnia się tu wyraźne prawo, z tegoż samego tytułu co każde prawo fizyczne, oparte na dostrzeżeniach w ilości bardzo dużej wprawdzie, lecz zawsze ograniczonej.

Niepodobna zaprzeczyć, że zachodzi tu uderzająca analogia ze zwykłemi metodami indukcyi. Istnieje wszakże i istotna różnica. Indukcya w zastosowaniu do nauk fizycznych, jest zawsze niepewna, gdyż opiera się na wierze w powszechny porządek Wszechświata, porządek poza nami będący. Indukcya matematyczna czyli dowodzenie przez rekurencyę narzuca się natomiast z koniecznością, albowiem jest stwierdzeniem własności samego umysłu.

VII.

Matematycy, jak powiedziałem wyżej, usiłują zawsze uogólniać twierdzenia, do których doszli: aby nie szukać innych przykładów, przypomnijmy sobie, że dowiedliśmy przed chwilą równości

$$a + 1 = 1 + a,$$

i użyliśmy jej następnie dla ustanowienia równości

$$a + b = b + a,$$

która jest oczywiście ogólniejszą.

Matematyka więc, podobnie jak inne nauki może postępować od szczególnego do ogólnego.

Tkwi w tym fakt, który wydawałby się nam niezrozumiałym na początku niniejszego wykładu, a w którym niema już dla nas nic tajemniczego, skoro stwierdziliśmy analogie zachodzące między dowodzeniem przez rekurencyę a zwykłą indukcyą.

Zapewne, rozumowanie matematyczne rekurencyjne a rozumowanie fizyczne indukcyjne spoczywają na różnych podstawach, lecz bieg ich jest równoległy, postępują one w jednym kierunku, mianowicie od szczególnego do ogólnego.

Rozpatrzmy kwestyę tę nieco bliżej.

Aby dowieść równości:

$$(1)\ a + 2 = 2 + a,$$

wystarczy zastosować dwukrotnie prawidło

$$(2)\ a + 1 = 1 + a$$

i napisać

$$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a.$$

Równość (1), wyprowadzona w ten sposób drogą czysto analityczną z równości (2), nie jest przecież względem niej zwyczajnym wypadkiem szczególnym, lecz czymś innym.

Nie można więc nawet powiedzieć, że w części rzeczywiście analitycznej i dedukcyjnej rozumowań matematycznych postępuje się od szczególnego do ogólnego w zwykłym tego słowa znaczeniu.

Obie części równości (1) są poprostu bardziej skomplikowanemi kombinacyami obu części równości (2), a analiza służy jedynie do wyodrębnienia elementów, które wchodzą do tych kombinacyi, i do zbadania ich stosunków.

Matematycy postępują tedy »zapomocą konstrukcyi«, »konstruują« oni kombinacye coraz bardziej skomplikowane. Powracając następnie przez analizę tych kombinacyi, tych skupień, że tak powiem, do ich elementów pierwotnych, dostrzegają oni stosunki tych elementów i wyprowadzają z nich stosunki samych skupień.

Jest to droga czysto analityczna, nie jest to wszakże droga od ogólnego do szczególnego, gdyż skupień owych nie można oczywiście uważać za bardziej szczególne od ich elementów.

Niektórzy pisarze przywiązywali, słusznie zresztą, wielką wagę do tego postępowania przez »konstrukcyę« i chcieli upatrywać w nim warunek konieczny i dostateczny postępu nauk ścisłych.

Konieczny — zapewne, ale niedostateczny.

Aby dana konstrukcya mogła być pożyteczna, aby była czymś więcej, niż próżnym nużeniem umysłu, aby mogła służyć, jako szczebel, dla badaczy, którzy wznieść się chcą wyżej, musi ona przedewszystkim posiadać pewną jedność, którąby pozwalała widzieć w niej coś innego niż proste zestawienie elementów.

Mówiąc ściślej, trzeba, aby rozważanie konstrukcyi raczej niż samych jej elementów przedstawiało pewną dogodność.

Jakąż może być ta dogodność?

Po co rozumować nad wielokątem np., dającym się zawsze rozłożyć na trójkąty, nie zaś nad trójkątami elementarnemi?

Oto dlatego, że istnieją własności wielokątów o dowolnej liczbie boków, które następnie dają się wprost zastosować do jakiegokolwiek wielokąta szczególnego.

Natomiast odnalezienie tych własności przez bezpośrednie badanie stosunków trójkątów elementarnych wymagałoby na ogół większych wysiłków. Tych właśnie oszczędza nam znajomość twierdzenia ogólnego.

Konstrukcya staje się interesującą o tyle tylko, o ile można ją uszeregować obok innych konstrukcyi podobnych, stanowiących gatunki jednego i tego samego rodzaju.

Jeżeli czworobok jest czymś więcej niż zestawieniem dwu trójkątów, to dlatego, że należy on do rodzaju wielokąta.

Trzeba nadto, by własności rodzaju mogły być dowiedzione bez kolejnego ustanawiania ich dla każdego gatunku.

Aby to osiągnąć, należy koniecznie wznieść się od szczególnego do ogólnego, wspinając się o jeden lub kilka szczebli.

Postępowanie analityczne przez »konstrukcyę« nie zmusza nas wprawdzie do schodzenia na dół, lecz pozostawia nas na jednym i tym samym poziomie.

Wznieść się możemy tylko przez indukcyę matematyczną, która jedynie może powiedzieć nam coś nowego. Bez pomocy tej indukcyi, różnej pod pewnymi względami od indukcyi fizycznej, lecz również płodnej, konstrukcya byłaby bezsilną do tworzenia nauki.

Zauważmy na zakończenie, że indukcya ta jest możliwa tylko o tyle, o ile jedno i to samo działanie może być powtórzone nieograniczenie. Dlatego to teorya gry w szachy nie będzie mogła nigdy stać się nauką, gdyż poszczególne posunięcia jednej i tej samej partyi nie są do siebie podobne.

Rozdział Drugi.

Wielkość matematyczna a doświadczenie.

Aby dowiedzieć się, co matematycy rozumieją przez *continuum*, nie do geometryi należy się zwrócić. Geometra stara się mniej lub więcej wyobrazić sobie figury, które bada, ale wyobrażenia te są dlań tylko środkami pomocniczemi; posługuje się on w geometryi rozciągłością, podobnie jak posługuje się kredą, którą kreśli po tablicy; to też należy wystrzegać się przywiązywania zbytniej wagi do okoliczności wypadkowych, które nie bardziej są dla danej kwestyi istotne, niż biała barwa kredy.

Analityk czysty może nie obawiać się tego szkopułu. Uwolnił on naukę matematyczną od wszelkich pierwiastków obcych, może więc dać odpowiedź na nasze pytanie: Czym jest w istocie swej owo *continuum*, które jest przedmiotem rozumowań matematyków? Wielu z nich, umiejących rozmyślać nad swą sztuką, dało już odpowiedź na to pytanie, jak np. Tannery w swojej *Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable.*

Weźmy za punkt wyjścia drabinę liczb całkowitych; między dwa kolejne szczeble wstawmy jeden lub kilka szczebli pośrednich, następnie między te nowe szczeble wstawmy inne, i tak dalej bez końca. Otrzymamy w ten sposób nieograniczoną ilość wyrazów — będą to liczby ułamkowe, racyonalne lub spółmierne. Ale nie dość na tem; między wyrazy te, których jest nieskończenie wiele, należy wstawić inne jeszcze, zwane iracyonalnemi lub niespółmiernemi.

Zanim pójdziemy dalej, zróbmy jedną uwagę. *Continuum*, tak rozumiane, jest tylko zbiorem indywiduów, uszeregowanych w pewnym porządku; jest ich wprawdzie nieskończenie wiele, lecz każde jest z e w n ę t r z n e względem innych. Nie odpowiada to zwykłemu pojmowaniu, przypuszczającemu między elementami, stanowiącemi *continuum*, pewną łącznię wewnętrzną tworzącą z nich całość, w której nie punkt istnieje przed linią lecz linia przed punktem. Ze słynnej formuły: »*continuum* jest to jedność w mnogości« — pozostała tylko mnogość, jedność znikła. Niemniej wszakże analitycy mają zupełną słuszność, gdy określają swoje *continuum* w sposób wskazany powyżej, bo takie właśnie jest przedmiotem ich rozumowań od czasu, gdy w rozumowaniach tych zaczęli skwapliwie przestrzegać ścisłości. Wystarcza to, byśmy zdali sobie sprawę z tego, że prawdziwe *continuum* matematyczne jest czymś zupełnie innym, niż *continuum* fizyków, oraz metafizyków.

Mógłby ktoś zarzucić jeszcze, że matematycy, zadawalający się tem określeniem, ulegają złudzeniom słownym, że należałoby powiedzieć w sposób ścisły, czym jest każdy z tych szczebli pośrednich, wytłumaczyć, jak należy je wstawiać, i dowieść, że można to istotnie wykonać. Zarzut ten byłby niesłuszny; jedyna własność tych szczebli, wchodząca do ich rozumowań[1]), polega na tym, że znajdują się one przed lub po takich a takich innych szczeblach; ta więc jedynie własność powinna wchodzić do określenia.

Tak więc nie należy kłopotać się o to, w jaki sposób mają być wstawiane wyrazy pośrednie; z drugiej strony nikt nie będzie wątpił, że operacya ta jest możliwa, chyba, że zapomni, iż wyraz ten w języku matematyków znaczy poprostu: wolna od sprzeczności.

Wszelako określenie nasze nie jest jeszcze zupełne; powróćmy więc doń po tej przydługiej dygresyi.

Określenie liczb niespółmiernych. — Matematycy szkoły berlińskiej, zwłaszcza L. Kronecker, pracowali nad budową owej drabiny ciągłej liczb ułamkowych i niespółmiernych bez pomocy innych materyałów, jak liczby całkowite. *Continuum* matematyczne ma być z tego stanowiska czystym tworem umysłu, zbudowanym bez żadnego udziału doświadczenia.

---

[1]) Wraz z własnościami zawartemi w specyalnych umowach służących do określenia dodawania, o których będziemy mówili niżej.

Ponieważ pojęcie liczby wymiernej nie zdawało im się nasuwać żadnych trudności, skierowali oni swoje usiłowania przeważnie na określenie liczby niespółmiernej. Zanim wszakże odtworzymy tutaj ich określenie, zrobimy pewną uwagę, aby uprzedzić zdziwienie, któreby określenie to zapewnie wywołało u czytelników mało obytych z nawyknieniami matematyków.

Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami; obojętnym jest im tedy zastąpienie tych przedmiotów przez inne, byle tylko stosunki pozostały niezmienione. Nie obchodzi ich treść, zajmuje ich tylko forma. Gdybyśmy o tym zapomnieli, nie zrozumielibyśmy, dlaczego Dedekind oznacza przez nazwę liczby niespółmiernej prosty symbol, czyli coś bardzo różnego od wyobrażenia, jakie się ma pospolicie o ilości, jako o czymś nadającym się do pomiaru i niemal dotykalnym.

Oto jest określenie Dedekinda:

Istnieje nieskończona ilość sposobów podziału liczb spółmiernych na dwie klasy takie, iżby każda liczba pierwszej klasy była większa od każdej liczby drugiej klasy.

Zdarzyć się może, że wśród liczb klasy pierwszej znajduje się jedna mniejsza od wszystkich innych; jeżeli np. umieścimy w pierwszej klasie wszystkie liczby większe od 2 oraz samą liczbę 2, w drugiej zaś wszystkie liczby mniejsze od 2, natenczas liczba 2 będzie oczywiście mniejsza od wszystkich liczb klasy pierwszej. Liczbę 2 będzie można wziąć za symbol tego podziału.

Może się też zdarzyć, że wśród liczb klasy drugiej będzie jedna większa od wszystkich innych; zachodzi to np. wówczas, gdy pierwsza klasa zawiera wszystkie liczby większe od 2, druga zaś wszystkie liczby mniejsze od 2 oraz liczbę 2. I w tym wypadku będzie można wziąć liczbę 2 za symbol tego podziału.

Ale zdarzyć się również może, że ani w pierwszej klasie nie będzie liczby mniejszej od wszystkich innych ani w drugiej — liczby większej od wszystkich innych. Przypuśćmy np., że umieszczamy w klasie pierwszej wszystkie liczby spółmierne, których kwadrat jest większy od 2, w drugiej zaś wszystkie liczby spółmierne, których kwadrat mniejszy jest od 2. Wiadomo, że niema żadnej, której kwadrat byłby ściśle równy 2. Nie będzie oczywiście w klasie pierwszej liczby mniejszej od wszystkich innych, gdyż jakkolwiek bliskim 2 będzie kwadrat jakiejś liczby, zawsze znaleźć będzie można liczbę spółmierną, której kwadrat będzie bardziej jeszcze zbliżony do 2.

Ze stanowiska Dedekinda liczba niespółmierna

$$\sqrt{2}$$

nie jest niczym innym, jak tylko symbolem tego szczególnego podziału liczb spółmiernych; każdemu podziałowi odpowiada w ten sposób liczba spółmierna lub niespółmierna, która jest jego symbolem.

Gdybyśmy przecież zadowolili się tym, to zgrzeszylibyśmy pominięciem pochodzenia tych symbolów; wypada nadto wyjaśnić, w jaki sposób matematycy doszli do przypisywania tym symbolom pewnego rodzaju istnienia konkretnego; z drugiej zaś strony czyż trudność nie zachodzi już dla samych liczb ułamkowych? Czy posiadalibyśmy pojęcie tych liczb, gdybyśmy nie znali z góry jakiegoś przedmiotu, który pojmujemy jako nieskończenie podzielny czyli jako *continuum?*

Continuum fizyczne. — Prowadzi nas to do pytania, czy pojęcie *continuum* matematycznego nie jest poprostu zaczerpnięte z doświadczenia. Gdyby tak było, dane surowe doświadczenia, czyli nasze czucia, byłyby dostępne pomiarom. Możnaby mniemać, że tak jest rzeczywiście, albowiem w ostatnich czasach usiłowano je poddać pomiarom, a nawet sformułowano prawo, znane pod nazwą prawa Fechnera, według którego czucie ma być proporcyonalne do logarytmu podniety.

Bliższe atoli rozpatrzenie doświadczeń, zapomocą których starano się prawo to ustanowić, doprowadza do wniosku wprost przeciwnego. Dostrzeżono np., że ciężar A 10-gramowy i ciężar B 11-gramowy wywołują czucia jednakowe, że ciężaru B niepodobna również odróżnić od ciężaru C 12-gramowego, że natomiast odróżnia się łatwo ciężar A od ciężaru C. Surowe więc wyniki doświadczenia dadzą się wyrazić przez następujące wzory:

$$A = B,\ B = C,\ A < C,$$

które można uważać za formułę *continuum* fizycznego. Między tą formułą a zasadą sprzeczności zachodzi jawny rozdźwięk, i właśnie konieczność usunięcia tego rozdźwięku zmusiła nas do wynalezienia *continuum* matematycznego.

Musimy tedy wnieść, że wprawdzie pojęcie to zostało zupełnie stworzone przez umysł, lecz że doświadczenie nastręczyło mu po temu sposobności.

Nie możemy się zgodzić, by dwie ilości równe jednej i tej samej trzeciej mogły nie być sobie równe, i w ten to sposób naprowadzeni zostajemy na przypuszczenie, że A jest różne od B a B od C, lecz że niedoskonałość naszych zmysłów nie pozwoliła ich nam odróżnić.

Stworzenie *continuum* matematycznego. — Pierwsze stadyum. — Dotychczas wystarczyłoby, dla zdania sobie sprawy z faktów, wstawienie między A i B małej ilości oddzielnych *(discrets)* wyrazów. Cóż stanie się wszakże, gdy wzmocnimy słabe nasze zmysły zapomocą jakiegoś narzędzia, np. mikroskopu? Wyrazy, których nie mogliśmy poprzednio od siebie odróżnić, jak A i B, występują dla nas teraz jako różne; lecz między A i B, które stały się różnemi, znajdzie się wyraz nowy D, którego nie będziemy mogli odróżnić ani od A ani od B. Pomimo stosowania najbardziej udoskonalonych środków wyniki surowe naszego doświadczenia zachowają zawsze charakter *continuum* fizycznego wraz z tkwiącą w nim sprzecznością.

Aby uwolnić się od tej sprzeczności, będziemy musieli ustawicznie wstawiać nowe wyrazy między wyrazy już rozróżnione, i działanie to powtarzać nieograniczenie. Nie moglibyśmy wyobrazić sobie, by trzeba było gdziekolwiek się zatrzymać, chyba że wystawilibyśmy sobie jakieś narzędzie tak potężne, że rozłożyłoby ono *continuum* fizyczne na elementy odrębne, podobnie jak teleskop rozkłada drogę mleczną na gwiazdy. Lecz tego właśnie nie możemy sobie wyobrazić; bo z narzędzi korzystamy zawsze zapomocą naszych zmysłów; powiększony przez mikroskop obraz obserwujemy okiem, obraz ten musi przeto zawsze zachowywać charakter czucia wzrokowego, a więc i *continuum* fizycznego.

Pewna długość obserwowana wprost nie różni się niczym od połowy tejże długości, powiększonej dwa razy przez mikroskop. Całość jest jednorodną względem części; mamy tu nową sprzeczność, a właściwiej mielibyśmy ją, gdybyśmy przypuścili, że ilość wyrazów jest skończona; oczywiście bowiem część, zawierająca mniej wyrazów niż całość, nie mogłaby być do tej całości podobna.

Sprzeczność ta znika, skoro tylko uważać będziemy ilość wyrazów za nieskończoną: nic np. nie przeszkadza rozpatrywać ogół liczb całkowitych jako podobny do ogółu liczb parzystych, który przecież stanowi tylko część pierwszego; w rzeczy samej, każdej liczbie całkowitej odpowiada liczba parzysta, otrzymana przez podwojenie tamtej.

Atoli inne jeszcze racye, prócz konieczności usunięcia tej sprzeczności tkwiącej w danych empirycznych naprowadzają umysł na stworzenie pojęcia *continuum*, złożonego z nieograniczonej ilości wyrazów.

Sprawa jest zupełnie ta sama jak dla szeregu liczb całkowitych. Posiadamy zdolność pojmowania, że jedność może być dodana do danego zbioru jedności; dzięki doświadczeniu mamy sposobność ćwiczenia tej naszej zdolności i uświadomienia jej sobie: ale odtąd czujemy tu, że ta nasza zdolność nie ma granic, i że moglibyśmy liczyć nieograniczenie, nie bacząc na to, że w praktyce zdarzało nam się liczyć jedynie skończone ilości przedmiotów.

Podobnież, skoro tylko naprowadzeni zostaliśmy na wstawienie wyrazów pośrednich między dwa kolejne wyrazy szeregu, czujemy, że działanie to może być kontynuowane poza wszelką granicę, i że niema, że tak powiem, żadnej wewnętrznej racyi zatrzymania się.

Niechaj mi będzie wolno, dla krótkości wysłowienia, nazwać *continuum* matematycznym pierwszego rzędu każdy zbiór wyrazów, utworzony według tego samego prawa, co drabina liczb spółmiernych. Jeżeli wpleciemy następnie nowe szczeble według prawa tworzenia się liczb niespółmiernych, otrzymamy *continuum* matematyczne drugiego rzędu.

Drugie stadyum. — Zrobiliśmy dopiero pierwszy krok; wytłumaczyliśmy pochodzenie *continuów* pierwszego rzędu; trzeba teraz zbadać, dlaczego okazały się one niewystarczającemi i dlaczego trzeba było wynaleźć liczby niespółmierne.

Jeżeli wyobrażamy sobie linię, to zawsze posiada ona charakter *continuum* fizycznego, t. j. wyobrażamy ją sobie jako posiadającą pewną szerokość. Dwie linie przedstawiać nam się będą w postaci dwu wąskich wstęg i jeśli zadowolimy się tym grubym obrazem tedy oczywistym będzie, że linie te, przecinając się, posiadają pewną część wspólną.

Ale czysty geometra zdobywa się na jeszcze jeden wysiłek: nie zrzekając się całkowicie pomocy swych zmysłów, chce on dojść do pojęcia linii bez szerokości, punktu bez rozciągłości. Dopiąć tego może jedynie przez rozważanie linii, jako granicy, do której zdąża wstęga coraz węższa, a punktu jako granicy, do której zdąża pole coraz to mniejsze. Wobec tego dwie nasze wstęgi, jakkolwiek wąskie, będą zawsze posiadały wspólne pole tym mniejsze im będą węższe, a granicą tego wspólnego pola będzie to, co geometra czysty nazywa punktem.

Dlatego to mówi się, że dwie przecinające się linie posiadają punkt wspólny i prawda ta wydaje nam się intuicyjną.

Tkwiłaby w niej atoli sprzeczność, gdybyśmy pojmowali linie, jako *continua* pierwszego rzędu, t. j. gdyby na liniach, kreślonych przez geometrę, miały się znajdować jedynie punkty, których spółrzędne są liczbami spółmiernemi. Sprzeczność ta stałaby się jawną, skorobyśmy założyli np. istnienie prostych i kół.

W rzeczy samej, gdyby jedynie punkty o spółrzędnych spółmiernych były uważane za punkty rzeczywiste, okrąg wpisany do kwadratu i przekątna tego kwadratu nie przecinałyby się, oczywiście, spółrzędne bowiem punkty ich przecięcia są niespółmierne.

Nie wystarczałoby to jednak; tym bowiem sposobem mielibyśmy niektóre tylko liczby spółmierne, lecz nie wszystkie.

Wyobraźmy sobie teraz prostą, podzieloną na dwie półproste. Każda z nich przedstawia się naszej wyobraźni, jako wstęga o pewnej szerokości; wstęgi te będą zresztą końcami swemi następowały na siebie, gdyż nie ma być między niemi odstępu. Część wspólna przedstawi się nam jako punkt, który istnieć będzie ciągle, jakkolwiek wąskiemi będziemy sobie wyobrażali nasze wstęgi; przyjmiemy tedy jako prawdę intuicyjną, że jeśli prosta jest podzielona na dwie półproste, wspólne ich pogranicze jest punktem. Poznajemy tu koncepcyę Dedekinda, w której liczba niespółmierna jest rozpatrywana jako granica wspólna dwu klas liczb spółmiernych.

Takie jest pochodzenie *continuum* drugiego rzędu, które stanowi właściwe *continuum* matematyczne.

S t r e s z c z e n i e. — Umysł posiada zdolność tworzenia symbolów i w ten to sposób zbudował *continuum* matematyczne, które jest pewnym tylko szczególnym układem symbolów. Jedynym ograniczeniem tej potęgi umysłu jest konieczność unikania wszelkiej sprzeczności; atoli umysł korzysta z tej swojej zdolności o tyle tylko, o ile doświadczenie daje mu do tego powód.

W zajmującym nas wypadku powodem tym było pojęcie *continuum* fizycznego, zaczerpnięte z surowych danych zmysłowych. Lecz pojęcie to prowadzi do szeregu sprzeczności, od których trzeba się kolejno wyzwalać. W ten sposób jesteśmy zmuszeni do budowania coraz bardziej skomplikowanego układu symbolów. Układ, na którym się zatrzymamy, jest nietylko wolny od wszelkiej sprzeczności wewnętrznej — bo takim był już na wszystkich kolejnych etapach — ale jest on nadto w zgodzie z poszczególnemi twierdzeniami, które nazywamy intuicyjnemi, a które są wyprowadzone z mniej lub bardziej obrobionych pojęć empirycznych.

Wielkość wymierzalna. — Wielkości, któreśmy rozpatrywali dotychczas, nie są wymierzalne; umiemy wprawdzie powiedzieć, czy jedna z tych wielkości jest większa od drugiej, lecz nie — czy jest większa dwa lub trzy razy.

Jakoż zajmowaliśmy się dotychczas jedynie porządkiem, w jakim wyrazy nasze są uszeregowane. Dla większości zastosowań nie jest to przecież wystarczające. Należy się nauczyć porównywania odstępów, oddzielających dwa jakiekolwiek wyrazy. Pod tym dopiero warunkiem *continuum* staje się wielkością wymierzalną i można doń zastosować działania arytmetyki.

W tym celu należy wprowadzić nową a specyalną umowę. Umówimy się, że w takim a takim wypadku odstęp, zawarty między wyrazami A i B jest równy odstępowi, oddzielającemu C i D. Na początku naszej pracy np. wyszliśmy ze skali liczb całkowitych i przypuściliśmy, że się wstawia między każde dwa kolejne stopnie n stopni pośrednich; otóż mocą umowy nowe te stopnie będziemy uważali za jednakowo od siebie oddalone.

Jest to zarazem sposób określenia dodawania dwu wielkości; skoro bowiem na mocy określenia odstęp AB jest równy odstępowi CD, odstęp AD będzie na mocy tegoż określenia sumą odstępów AB i AC.

Określenie to jest dowolne w znacznej bardzo mierze, lecz przecież nie zupełnie. Podlega ono pewnym warunkom, naprzykład prawidłu przemiennościowemu i łącznościowemu dodawania. Byle tylko określenie czyniło zadość tym regułom, wybór jego będzie zresztą obojętny, i zbyteczne jest bardziej go ograniczać.

Różne uwagi. — Nasuwa się kilka ważnych pytań: 1⁰ Czy zdolność twórcza umysłu jest wyczerpana przez stworzenie *continuum* matematycznego?

Nie: dowodzą tego w sposób uderzający prace Du Bois Reymonda.

Wiadomo, że matematycy rozróżniają nieskończenie małe ilości różnych rzędów, i że nieskończenie małe rzędu drugiego są niemi nietylko bezwzględnie lecz również w stosunku do nieskończenie małych rzędu pierwszego. Nietrudno jest stworzyć pojęcie nieskończenie małych rzędu ułamkowego lub nawet niespółmiernego i odtworzyć w ten sposób drabinę *continuum* matematycznego, która była przedmiotem poprzedzających stronic.

Niedość tego; istnieją nieskończenie małe, które są nieskończenie małemi w stosunku do nieskończenie małych rzędu pierwszego a nieskończenie wielkiemi w stosunku do nieskończenie małych rzędu $1 + \varepsilon$, i to jakkolwiek małe będzie ε. Wprowadza to do naszego szeregu wyrazy nowe i — jeśli wolno powrócić do wysłowienia, którem się już wyżej posługiwaliśmy, i które jest dość dogodne, jakkolwiek nie uświęcone przez zwyczaj — powiemy, żeśmy stworzyli w ten sposób pewnego rodzaju *continuum* trzeciego rzędu.

Łatwo byłoby iść jeszcze dalej, ale byłaby to już tylko próżna gra umysłu; tworzyłoby się jedynie symbole, pozbawione wszelkiej stosowalności, i nikt nie zechce się tym zająć. Już *continuum* trzeciego rzędu, do którego prowadzi rozważanie różnych rzędów nieskończenie małych, jest zbyt mało pożyteczne, aby zdobyć sobie prawo obywatelstwa, i matematycy patrzą na nie jak na prostą ciekawostkę. — Umysł korzysta ze swej zdolności twórczej wówczas tylko, gdy doświadczenie narzuca mu konieczność tego.

2⁰ Czy stworzenie pojęcia *continuum* matematycznego ochrania nas ostatecznie od sprzeczności podobnych do tych, które je zrodziły?

Nie, — a oto tego przykład:

Trzeba już być bardzo uczonym, żeby nie uważać za oczywiste, że każda krzywa posiada styczną: istotnie, skoro wyobrazimy sobie tę krzywą oraz prostą, jako dwie wąskie wstęgi, zawsze będziemy ją mogli ułożyć tak, by miały, nie przecinając się, część wspólną. Każmy następnie szerokości każdej z tych wstęg nieograniczenie się zmniejszać, a owa wspólna część będzie nadal istniała, i w granicy obie linie będą posiadały, nie przecinając się, punkt wspólny — to znaczy będą się stykały.

Geometra, któryby w ten sposób rozumował świadomie lub nieświadomie, nie robiłby nic innego, jak to, cośmy uczynili wyżej, aby dowieść, że dwie przecinające się linie posiadają punkt wspólny, a intuicya jego miałaby to samo uprawnienie co w tamtym wypadku.

A przecież wprowadziłaby go ona w błąd. Można dowieść, że istnieją krzywe, nie posiadające stycznej, o ile krzywe te są określone jako *continua* analityczne drugiego rzędu.

Zapewne, sprzeczność ta dałaby się usunąć zapomocą konstrukcyi pojęciowej analogicznej do tych, które zbadaliśmy powyżej; ponieważ wszakże sprzeczność tę napotyka się jedynie w wypadkach wyjątkowych, matematycy nie troszczyli się o nią. Zamiast postarać się o pogodzenie intuicyi z analizą, woleli poświęcić jedną z nich, a że analiza musi być bez zarzutu, odmówili poprostu słuszności intuicyi.

Wielowymiarowe *continuum* fizyczne. — Zbadaliśmy powyżej *continuum* fizyczne takie, jakie nam dają bezpośrednie dane naszych zmysłów albo, jeśli kto woli, wyniki surowe doświadczeń Fechnera; okazaliśmy, że wyniki te streszczają się w sprzecznych wzorach

$$A = B, \; B = C, \; A < C.$$

Zobaczmy teraz, jak pojęcie to uległo uogólnieniu, i jak można było zeń wyprowadzić pojęcie *continuów* wielowymiarowych.

Rozważmy dwie jakiekolwiek grupy czuć. Albo będziemy je mogli wzajem od siebie odróżnić, albo też nie, — podobnie jak w doświadczeniach Fechnera ciężar 10-cio-gramowy można było odróżnić od 12-sto-gramowego, ale nie można go było odróżnić od 11-sto-gramowego. Nie potrzebujemy nic ponadto, aby zbudować *continuum* o kilku wymiarach.

Nazwijmy elementem jedną z tych grup czuć. Będzie to coś analogicznego do punktu matematyków; nie będzie wszakże zupełnie to samo. Nie możemy powiedzieć, że element nasz jest pozbawiony rozciągłości, skoro nie umiemy go odróżnić od elementów sąsiednich, skoro więc jest on otoczony pewnego rodzaju mgłą. Jeżeliby wolno mi było użyć porównania astronomicznego, »elementy« nasze byłyby mgławicami a punkty matematyczne — gwiazdami.

Otóż układ elementów tworzyć będzie *continuum*, jeżeli można przejść od jakiegokolwiek z nich do jakiegokolwiek innego przez szereg elementów kolejnych takich, iżby każdy z nich nie dawał się odróżnić od poprzedniego. Ten szereg liniowy ma się tak do linii matematyka, jak oddzielny element do punktu.

Zanim pójdziemy dalej, należy objaśnić, co to jest przekrój. Rozważajmy *continuum* C i wykluczmy zeń niektóre z jego elementów, na które przez chwilę będziemy patrzeli jako na nienależące już do tego *continuum*. Ogół elementów, wykluczonych w ten sposób, będzie się nazywał przekrojem. Może się stać, że dzięki temu przekrojowi C będzie podzielone na kilka odrębnych *continuów*, t. j. ogół pozostałych elementów przestanie stanowić jedno *continuum*.

Natenczas w C będą istniały dwa elementy A i B, które trzeba będzie uważać za należące do dwu odrębnych *continuów*, a oznaką tego będzie niemożność znalezienia szeregu liniowego elementów kolejnych C takich, iżby każdy z tych elementów nie dał się odróżnić od poprzedzającego, przyczym pierwszym ma być A, ostatnim zaś B, — chyba, że jeden z elementów tego szeregu będzie nieodróżnialnym od jednego z elementów przekroju. Możliwe jest z drugiej strony, że przekrój nie będzie wystarczał dla podzielenia *continuum* C. Aby rozklasyfikować *continua* fizyczne, zbadamy właśnie, jakie należy w nich zrobić przekroje, aby je podzielić.

Jeżeli można podzielić *continuum* fizyczne C zapomocą przekroju, sprowadzającego się do skończonej liczby elementów, które wszystkie dają się wzajemnie odróżnić (a przeto nie stanowią ani jednego *continuum* ani kilku *continuów*), powiemy, że C jest *continuum* jednowymiarowym.

Jeżeli natomiast C można podzielić jedynie zapomocą przekrojów, które same muszą być *continuami*, powiemy, że C posiada kilka wymiarów. Jeżeli wystarczają przekroje będące *continuami* jednowymiarowemi, powiemy, że C jest dwuwymiarowe; jeżeli wystarczają przekroje dwuwymiarowe, powiemy, że C jest trójwymiarowe, itd.

W ten sposób doszliśmy do określenia pojęcia wielowymiarowego *continuum* fizycznego na podstawie prostego bardzo faktu, że dwie grupy czuć mogą być wzajemnie odróżnialne lub nieodróżnialne.

Wielowymiarowe *continuum* matematyczne. Pojęcie *continuum* matematycznego n — wymiarowego wynikło z pojęcia *continuum* fizycznego w sposób naturalny zapomocą procesu zupełnie podobnego do tego, któryśmy rozpatrzyli na początku niniejszego rozdziału. Punkt takiego *continuum*, jak wiadomo, przedstawia się nam, jako określony przez układ n różnych wielkości, zwanych jego spółrzędnemi.

Wielkości te niezawsze muszą być wymierzalne, i istnieje np. gałęź geometryi, w której abstrahuje się od pomiaru wielkości; gałąź ta zajmuje się jedynie zagadnieniami takiemi, jak np. czy na krzywej ABC punkt B leży między A i C?

przyczem jest zupełnie obojętne, czy łuk AB jest równy łukowi BC, czy też jest odeń dwa razy większy. Dział ten geometryi nosi nazwę Analizy Położenia (*Analysis Situs*).

Jest to zwarta i systematyczna nauka, którą zajmowali się najwięksi matematycy; znajdujemy w niej łańcuch ciekawych a doniosłych twierdzeń ustanowionych drogą ścisłych rozumowań. Wyróżniają się te twierdzenia od twierdzeń geometryi zwykłej tym, że są czysto jakościowe, i że pozostałyby prawdziwe, gdyby figury zostały przerysowane przez niezręcznego rysownika, któryby brutalnie zmienił ich proporcye i zamiast prostych nakreślił linie mniej lub więcej krzywe.

Dopiero gdy do *continuum*, któreśmy powyżej określili, wprowadzono miarę, stało się ono przestrzenią, i narodziła się geometrya. Zbadanie tej sprawy zachowam jednak dla części drugiej.

CZĘŚĆ DRUGA.

PRZESTRZEŃ.

Rozdział Trzeci.

Geometrye nieeuklidesowe.

Każdy wniosek ma przesłanki, które są albo oczywiste same przez się i nie potrzebują dowodu, albo też mogą być ustanowione jedynie przez powołanie się na inne twierdzenia; ponieważ zaś nie można się w ten sposób cofać do nieskończoności, każda nauka dedukcyjna a w szczególności geometrya musi opierać się na pewnej liczbie pewników, nie dających się dowieść. Jakoż wszystkie wykłady geometryi rozpoczynają się od sformułowania tych pewników. Wśród nich należy wszakże rozróżnić dwa rodzaje: niektóre, jak np. ten oto: »dwie ilości równe trzeciej, są wzajem równe«, nie są twierdzeniami geometrycznemi lecz twierdzeniami z dziedziny analizy. Uważam je za sądy analityczne *a priori* i nie będę się niemi zajmował.

Muszę natomiast zatrzymać się nad innemi pewnikami, właściwemi samej geometryi. Większość wykładów tej nauki formułuje w sposób jawny trzy takie pewniki:

1° Przez dwa punkty może przechodzić jedna tylko prosta;

2° Linia prosta jest najkrótszą drogą od jednego punktu do drugiego;

3° Przez dany punkt można przeprowadzić jedną tylko równoległą do danej prostej.

Jakkolwiek drugie z powyższych twierdzeń podawane bywa zwykle jako pewnik, a więc jako niewymagające dowodu, w rzeczywistości możnaby je wyprowadzić z dwu pozostałych oraz z innych liczniejszych jeszcze pewników, które przyjmuje się milcząco w sposób utajony, jak to w dalszym biegu naszych rozważań wykażemy.

Przez długi czas starano się napróżno o przeprowadzenie dowodu trzeciego pewnika, znanego pod nazwą p o s t u l a t u E u k l i d e s a. Trudno zaprawdę wyobrazić sobie, ile zużyto wysiłków dla dopięcia tego chimerycznego celu. Wreszcie na początku ubiegłego stulecia i prawie jednocześnie dwaj uczeni: rosyanin Łobaczewski i węgier Bolyai okazali w sposób niezbity, że dowód ten jest niemożliwy: uwolnili nas oni prawie zupełnie od wynalazców geometryi bez postulatu; od owego czasu (paryska) Akademia Umiejętności nie otrzymuje rocznie więcej nad dwa lub trzy nowe dowody.

Kwestya ta przecież nie została wyczerpana; rychło posunęła się ona o wielki krok naprzód przez ogłoszenie słynnej rozprawy Riemanna: *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Rozprawa ta natchnęła większość prac nowszych, o których mówić będziemy w dalszym ciągu, a wśród których wymienić wypada badania Beltramiego i Helmholtza.

Geometrya Łobaczewskiego. — Gdyby można było wyprowadzić postulat Euklidesa z pozostałych pewników, tedy zaprzeczenie tego postulatu łącznie z przyjęciem pozostałych pewników doprowadziłoby oczywiście do wyników sprzecznych; niemożliwym więc byłoby zbudować na takich przesłankach logicznie spójną geometryę.

Otóż Łobaczewski taką właśnie geometryę zbudował. Zakłada on na samym wstępie, że:

Przez dany punkt można przeprowadzić kilka równoległych do danej prostej.

Pozatym jednak zachowuje wszystkie inne pewniki Euklidesa. Z założeń tych wyprowadza on szereg twierdzeń nie zawierających żadnej sprzeczności, i buduje geometryę, której logika wewnętrzna nie ustępuje w niczym logice geometryi euklidesowej.

Twierdzenia te różnią się oczywiście bardzo od twierdzeń, do których jesteśmy przyzwyczajeni, i z początku nieco nas dziwią.

Tak naprzykład »Suma kątów trójkąta jest zawsze mniejsza od dwu prostych, i różnica między tą sumą a dwoma prostemi jest proporcyonalna do pola trójkąta«.

»Niemożliwe jest zbudować figurę podobną do figury danej lecz o innych rozmiarach«.

»Podzielmy okrąg na *n* równych części i poprowadźmy styczne w punktach podziału; styczne te utworzą wielokąt, jeżeli promień okręgu jest dostatecznie mały; — jeżeli natomiast jest on dostatecznie wielki, styczne nie spotkają się«.

Zbyteczne byłoby mnożenie tych przykładów; twierdzenia Łobaczewskiego różnią się zasadniczo od twierdzeń Euklidesa, niemniej wszakże są one logicznie ze sobą powiązane.

Geometrya Riemanna. — Wyobraźmy sobie świat, zaludniony wyłącznie przez istoty pozbawione grubości; przypuśćmy nadto, że te »nieskończenie płaskie« zwierzęta znajdują się wszystkie w jednej płaszczyźnie i nie mogą z niej wyjść. Przypuśćmy jeszcze, że świat ten jest dostatecznie oddalony od innych, aby nie ulegać ich wpływom. Skoro już gromadzimy przypuszczenia, tedy nic nam nie przeszkadza obdarzyć istoty te władzą rozumowania i uważać je za zdolne do zajmowania się geometryą. W geometryi swojej nadadzą one oczywiście przestrzeni dwa tylko wymiary.

Przypuśćmy jednak z kolei, że urojone te żyjątka pozostając nadal bez grubości, mają postać figur sferycznych nie zaś płaskich i znajdują się wszystkie na jednej kuli, od której nie mogą się oderwać. Jakąż będą one mogły zbudować geometryę? Przedewszystkim, oczywiście przypiszą one przestrzeni dwa tylko wymiary; rolę linii prostej dla nich grać będzie najkrótsza droga między dwoma punktami kuli, czyli łuk wielkiego koła; jednym słowem, geometrya ich będzie geometryą sferyczną.

Przestrzenią nazywać będą powierzchnię kulistą, z której nie mogą się wydostać i na której odbywają się wszystkie zjawiska, dostępne dla ich poznania. Przestrzeń ich *nie będzie więc miała granic*, gdyż można po kuli posuwać się ustawicznie przed siebie, nie trafiając nigdy na przeszkodę; będzie wszakże *skończona*; nigdy nie dojdzie się do jej krańca, lecz będzie można obejść ją dookoła.

Otóż geometrya Riemanna — to geometrya sferyczna, rozciągnięta do trzech wymiarów. Aby ją zbudować, matematyk niemiecki musiał odrzucić nietylko postulat Euklidesa, ale nadto pierwszy pewnik, który brzmi: *Przez dwa punkty można przeprowadzić jedną tylko prostą.*

Przez dwa punkty dane na kuli można przeprowadzić *naogół* jedno tylko wielkie koło (które, jakeśmy widzieli, odgrywa dla naszych istot urojonych rolę linii prostej); istnieje wszakże wyjątek: jeżeli dwa dane punkty są średnicowo przeciwległe, można przez nie przeprowadzić nieskończoną liczbę wielkich kół.

Podobnież w geometryi Riemanna (a przynajmniej w jednej z jej postaci) przez dwa punkty będzie przechodziła na ogół jedna tylko prosta; istnieją wszakże wypadki wyjątkowe, dla których przez dwa punkty będzie przechodziło nieskończenie wiele prostych.

Między geometryą Riemanna a geometryą Łobaczewskiego zachodzi pewnego rodzaju przeciwstawność.

Tak naprzykład suma kątów trójkąta jest:
równa dwu prostym w geometryi Euklidesa,
mniejsza od dwu prostych w geometryi Łobaczewskiego,
większa od dwu prostych w geometryi Riemanna.

Liczba równoległych do danej prostej, które można przeprowadzić przez dany punkt jest równa:
Jedności w geometryi Euklidesa,
Zeru w geometryi Riemanna,
Nieskończoności w geometryi Łobaczewskiego.

Dodajmy, że przestrzeń Riemanna jest skończona, jakkolwiek nieograniczona, w powyższym znaczeniu wyrazów.

Powierzchnie o stałej krzywiźnie. — Pozostawał atoli jeszcze jeden możliwy zarzut. Wprawdzie twierdzenia Łobaczewskiego i Riemanna nie zawierają żadnej sprzeczności; lecz jakkolwiek licznemi byłyby konsekwencye, które ci matematycy wyprowadzili ze swych założeń, musieli się oni zatrzymać, zanim te konsekwencye wyczerpali, boć ilość ich możnaby zwiększać do nieskończoności; któż więc zaręczy nam, że, jeśliby posunęli oni dalej swoje dedukcye, nie napotkaliby wreszcie jakiejś sprzeczności?

Wątpliwość ta nie zachodzi dla geometryi Riemanna, o ile ograniczymy się do dwóch wymiarów, albowiem dwuwymiarowa geometrya Riemanna nie różni się, jak widzieliśmy, od geometryi sferycznej, która jest gałęzią geometryi zwykłej, a więc stoi poza wszelką dyskusyą.

Beltrami sprowadził dwuwymiarową geometryę Łobaczewskiego również do jednej z gałęzi geometryi zwykłej i tym samym odparł ów zarzut w stosunku do niej.

Osiągnął on to w sposób następujący. Rozważmy na pewnej powierzchni dowolną figurę. Wyobraźmy sobie, że figura ta jest nakreślona na giętkim i nierozciągliwym płótnie, rozpostartym na tej powierzchni tak, iż przy zmianie miejsca i kształtu tego płótna poszczególne linie figury mogą zmieniać swój kształt, zachowując wszakże długość. Naogół giętka ta i nierozciągliwa figura nie będzie mogła się przesuwać, nie opuszczając tej powierzchni; istnieją przecież pewne powierzchnie szczególne, na których ruch taki jest możliwy: są to powierzchnie, o stałej krzywiznie.

Jeżeli powrócimy do porównania, którym posługiwaliśmy się już wyżej, i wyobrazimy sobie istoty pozbawione grubości, żyjące na jednej z takich powierzchni, będą one uważały za możliwy ruch figury, której wszystkie linie zachowują długość stałą. Ruch taki wydawałby się natomiast niedorzecznym żyjątkom dwuwymiarowym, przebywającym na powierzchni o krzywiznie zmiennej.

Powierzchnie te o krzywiznie stałej rozpadają się na dwie klasy:

Jedne posiadają krzywiznę dodatnią i mogą po odkształceniu zostać rozpostarte na kuli. Geometrya tych powierzchni sprowadza się więc do geometryi sferycznej, czyli geometryi Riemanna.

Inne posiadają krzywiznę ujemną. Beltrami okazał, że geometrya tych powierzchni jest taka sama, jak geometrya Łobaczewskiego. Geometrye dwuwymiarowe Riemanna i Łobaczewskiego dały się więc wprowadzić w związek z geometryą euklidesową.

Interpretacya geometryi nie-euklidesowych. — W ten sposób znika ostatni zarzut w stosunku do geometryi dwuwymiarowych.

Nie trudno byłoby rozciągnąć rozumowanie Beltramiego na geometrye trójwymiarowe. Umysły, których nie odstręcza przestrzeń czterowymiarowa, nie będą w tym widziały żadnej trudności, nie są one jednakże liczne. Obierzmy tedy inną drogę.

Rozważajmy pewną płaszczyznę, którą nazwiemy płaszczyzną podstawową i sporządźmy pewnego rodzaju słownik, w którym każdemu wyrazowi, wpisanemu do jednej kolumny, będzie odpowiadał wyraz wpisany do drugiej, zupełnie tak jak w zwykłych słownikach odpowiadają sobie wyrazy dwóch języków, posiadające to samo znaczenie:

Przestrzeń . .	Część przestrzeni, leżąca nad płaszczyzną podstawową.
Płaszczyzna .	Kula przecinająca normalnie płaszczyznę podstawową.
Prosta	Koło przecinające pod kątem prostym płaszczyznę podstawową.
Kula	Kula.
Koło	Koło.
Kąt	Kąt.
Odległość dwóch punktów	Logarytm stosunku anharmonicznego tych dwóch punktów oraz przecięć płaszczyzny podstawowej z kołem, przechodzącym przez te dwa punkty i przecinającym ją pod kątem prostym; i t. d. i t. d.

Weźmy następnie twierdzenia Łobaczewskiego i przetłumaczmy je zapomocą tego słownika tak, jakbyśmy przetłumaczyli tekst niemiecki zapomocą słownika niemiecko-francuskiego. Otrzymamy w ten sposób twierdzenia geometryi zwykłej.

Naprzykład twierdzenie Łobaczewskiego: »suma kątów trójkąta jest mniejsza od dwóch prostych« w tłumaczeniu takim brzmi: »Jeżeli boki trójkąta krzywolinijnego są łukami kół, które w przedłużeniu przecięłyby pod kątami prostemi płaszczyznę podstawową, suma kątów tego trójkąta krzywolinijnego będzie mniejsza, niż dwa proste«. Tak tedy, jakkolwiek daleko posuniemy się w wyprowadzaniu wniosków z założeń Łobaczewskiego, nie trafimy nigdy na sprzeczność.

Istotnie bowiem, gdyby dwa twierdzenia Łobaczewskiego przeczyły sobie, to samo zachodziłoby dla przekładów dwu tych twierdzeń, dokonanych zapomocą naszego słownika; ale przekłady te są twierdzeniami geometryi zwykłej, a nikt nie wątpi, że geometrya zwykła wolna jest od sprzeczności. Skąd pochodzi ta pewność i czy da się usprawiedliwić? Jest to kwestya, której nie możemy rozważać tutaj, gdyż wymagałaby ona dłuższych wywodów.

W każdym razie, zarzut przytoczony powyżej upada zupełnie.

Lecz to jeszcze nie wszystko. Geometrya Łobaczewskiego, skoro nadaje się do interpretacyi konkretnej, przestaje być próżnym ćwiczeniem logicznym i może znaleźć zastosowania; nie mogę mówić tutaj o tych zastosowaniach ani o ich wyzyskaniu przez Feliksa Kleina i przezemnie dla całkowania równań liniowych.

Interpretacya ta nie jest zresztą jedyną, i możnaby sporządzić kilka słowników analogicznych do powyższego, a wszystkie pozwoliłyby nam na przekształcenie zapomocą prostego »przekładu« twierdzeń Łobaczewskiego na twierdzenia geometryi zwykłej.

Pewniki utajone. — Czy pewniki, jawnie sformułowane w wykładach geometryi, są jedynemi jej podstawami? Można być z góry pewnym, że tak nie jest, skoro po kolejnym ich odrzuceniu pozostała jeszcze pewna liczba twierdzeń wspólnych teoryom Euklidesa, Łobaczewskiego i Riemanna. Twierdzenia te muszą opierać się na jakichś przesłankach, które geometrzy zakładają, nie formułując ich jawnie. Ciekawe byłoby wydzielenie ich z dowodzeń klasycznych.

Stuart-Mill twierdził, że każde określenie zawiera w sobie pewnik, albowiem określając, zakładamy domyślnie istnienie określanego przedmiotu. Posunął on się przecież zbyt daleko; w matematyce zdarza się rzadko, by po określeniu nie dawano dowodu istnienia określonego przedmiotu, a kiedy sobie tego oszczędzamy, to zazwyczaj dlatego, że czytelnik z łatwością sam to może uzupełnić. Pamiętać należy, że wyraz »istnienie« ma różne znaczenia zależnie od tego, czy stosuje się do tworu matematycznego, czy też do przedmiotu materyalnego. Twór matematyczny istnieje zawsze, byle jego określenie nie zawierało sprzeczności, bądź wewnętrznej, bądź w stosunku do twierdzeń poprzednio przyjętych.

Jeżeli wszakże uwaga Stuarta Milla nie da się zastosować do wszystkich określeń, to niemniej jest ona słuszna w odniesieniu do niektórych z pośród nich. Spotykamy się niekiedy z następującym określeniem płaszczyzny:

Płaszczyzną nazywamy powierzchnię taką, iż prosta, łącząca dwa jakiekolwiek z jej punktów, cała leży na tej powierzchni.

Określenie to kryje w sobie najwyraźniej nowy pewnik; możnaby wprawdzie wprowadzić do niej pewne zmiany — i lepiej byłoby to uczynić — ale wówczas trzebaby sformułować jawnie ów domyślny pewnik.

Inne określenia nasuwają niemniej doniosłe uwagi.

Takie jest np. określenie równości dwóch figur: dwie figury są równe, gdy można je nałożyć na siebie; aby tego dokonać trzeba przenieść jedną z nich tak, aby zlewała się z drugą, ale jak należy ją przenieść? Na pytanie to odpowiedzianoby nam zapewne, że należy ją przenosić, nie zmieniając jej kształtu, na podobieństwo bryły niezmiennej. Odpowiedź ta zawierałaby oczywiście błędne koło.

W rzeczy samej, definicya ta nie określa niczego; nie miałaby ona żadnego sensu dla istoty, zamieszkującej świat, w którym istniałyby jedynie płyny. Jeżeli nam wydaje się ona jasną, to dlatego, że jesteśmy przyzwyczajeni do własności przyrodzonych brył stałych, nie wiele różniących się od własności brył idealnych, których wszystkie wymiary pozostawałyby niezmiennemi.

Ale obok wszystkich tych braków, w określeniu tym tkwi jeszcze pewien utajony pewnik.

Możliwość ruchu figury niezmiennej nie jest sama przez się oczywistą, a jeżeli jest ona oczywistą to w takim tylko znaczeniu, jak postulat Euklidesa, nie zaś jak sądy analityczne *a priori*.

Roztrząsając zresztą określenia i dowodzenia geometryi, przekonywamy się, że zachodzi konieczność przyjęcia bez dowodu nietylko możliwości tego ruchu, ale nadto niektórych jego własności.

Wynika to przedewszystkim z samego określenia linii prostej. Istnieje wiele wadliwych określeń tej linii, prawdziwą wszakże jest poniższa, tkwiąca domyślnie we wszystkich dowodzeniach, do których wchodzi linia prosta:

»Może się zdarzyć, że ruch figury niezmiennej odbywa się w sposób taki, iż wszystkie punkty pewnej linii, należącej do tej figury, pozostają nieruchome, gdy wszystkie punkty poza tą linią leżące poruszają się. Linia taka nazywać się będzie linią prostą«. Rozmyślnie oddzieliliśmy, w tym sformułowaniu, określenie od związanego z nim pewnika.

Wiele dowodzeń — np. rozmaitych wypadków równości trójkątów, możliwości opuszczenia prostopadłej do danej prostej z danego punktu — przypuszcza domyślnie twierdzenia, których wyraźnego sformułowania oszczędzamy sobie; opierają się one bowiem na założeniu, że możliwe jest przeniesienie w pewien sposób figury w przestrzeni.

C z w a r t a g e o m e t r y a. — Z pośród tych pewników domyślnych jeden zdaje nam się zasługiwać na uwagę, gdyż odrzucenie go pozwala na zbudowanie czwartej geometryi, równie logicznie spójnej, jak geometrye Euklidesa, Łobaczewskiego i Riemanna.

Aby dowieść, że można zawsze wznieść w punkcie A prostopadłą do danej prostej AB, rozważa się prostą AC, ruchomą dokoła punktu A i zlewającą się pierwotnie z prostą stałą AB i każe się jej obracać dokoła punktu A aż przystanie ona do przedłużenia AB.

Czyni się przytym dwa założenia: naprzód, że obrót taki jest możliwy, powtóre, że można go dokonywać, póty aż jedna z prostych stanie się przedłużeniem drugiej.

Przyjmując pierwsze założenie, a odrzucając drugie, otrzymalibyśmy szereg twierdzeń dziwniejszych jeszcze niż twierdzenia Łobaczewskiego i Riemanna, ale równie jak tamte wolnych od wszelkich sprzeczności.

Przytoczę jedno tylko z tych twierdzeń, i to nie najosobliwsze: prosta rzeczywista może być do siebie samej prostopadła.

Twierdzenie Liego. — Liczba pewników wprowadzonych domyślnie do dowodzeń klasycznych jest większa, niżby to było niezbędne; interesujące więc byłoby sprowadzenie ich do minimum. Możnaby sobie uprzednio zadać pytanie, czy jest to wogóle możliwe, czy liczba pewników niezbędnych i liczba geometryi możliwych nie jest nieskończona.

Nad całą tą kwestyą góruje pewne twierdzenie, podane przez Sophusa Liego. Można je tak wysłowić:

,Przypuśćmy następujące przesłanki:

1⁰ Przestrzeń posiada n wymiarów;

2⁰ Ruch figury niezmiennej jest możliwy;

3⁰ Trzeba p warunków, aby oznaczyć położenie tej figury w przestrzeni.

Natenczas liczba różnych geometryi zgodnych z temi przesłankami będzie ograniczona.

Możemy nawet dodać, że jeśli n jest dane, to można wyznaczyć dla p pewną górną granicę.

Jeżeli więc zakłada się możliwość ruchu (bez odkształcenia) liczba geometryi trójwymiarowych, które możnaby wymyślić, jest skończona (a nawet dość niewielka).

Geometrye Riemanna. — Wynikowi temu przeczą napozór badania Riemanna, który skonstruował nieskończenie wiele różnych geometryi, a ta, której zazwyczaj daje się jego imię, jest tylko wypadkiem szczególnym.

Wszystko zależy, powiada on, od sposobu, w jaki określa się długość krzywej. Otóż istnieje nieskończenie wiele sposobów określenia tej długości, a każdy z nich może się stać punktem wyjścia nowej geometryi.

Jest to całkiem słuszne, lecz większość tych określeń nie da się pogodzić z ruchem figury niezmiennej, którego możliwość zakłada się w twierdzeniu Liego. Te geometrye Riemanna, lubo wielce interesujące pod wielu względami, pozostałyby więc zawsze czysto analitycznemi i nie nadawałyby się do dowodzeń analogicznych do euklidesowych.

O istocie pewników. — Większość matematyków uważa geometryę Łobaczewskiego za prostą tylko ciekawostkę logiczną; niektórzy wszakże idą dalej. Skoro kilka jest geometryi możliwych, czyż pewnym jest, że prawdziwą jest nasza? Wprawdzie doświadczenie nas uczy, że suma kątów w trójkącie jest równa dwóm prostym; ale to dlatego, że operujemy tylko zbyt małemi trójkątami; różnica jest, według Łobaczewskiego, proporcyonalna do pola trójkąta: czy nie może się ona stać dostrzegalną, gdy będziemy mieli do czynienia z trójkątami większemi, albo też gdy pomiary nasze staną się dokładniejsze? Geometrya euklidesowa byłaby w takim razie tylko prowizoryczną.

Ażeby roztrząsnąć ten pogląd, musimy przedewszystkim zadać sobie pytanie, jaka jest istota pewników geometrycznych?

Czy są to sądy syntetyczne *a priori*, jak mówił Kant?

Gdyby tak było, narzucałyby się nam one z siłą taką, że nie moglibyśmy wprost pojmować twierdzeń przeciwnych ani też budować na nich gmachów teoretycznych. Nie byłoby więc geometryi nieeuklidesowej.

Aby się o tym przeświadczyć, weźmy prawdziwy sąd syntetyczny *a priori*, ten naprzykład, którego rolę przemożną okazaliśmy w rozdziale pierwszym:

Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 1 i jeżeli dowiedziono, że jest ono prawdziwe dla $n+1$, skoro jest nim dla n, tedy będzie ono prawdziwe dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich.

Spróbujmyż wyzwolić się od tego twierdzenia i przyjmując założenie przeciwne, zbudować fałszywą arytmetykę analogiczną do geometryi nieeuklidesowej — nie potrafimy tego dokonać; skłonni nawet bylibyśmy zrazu uważać te sądy, za analityczne.

Powróćmy z drugiej strony do naszej fikcyi o żyjątkach pozbawionych grubości; niepodobna wprost przypuścić, by istoty te, o ile mają umysł ukształtowany na podobieństwo naszego, przyjęły geometryę euklidesową, której przeczyłoby wszelkie ich doświadczenie.

Czyż mamy wobec tego wnieść, że pewniki geometryi są prawdami doświadczalnemi? Ale przedmiotem doświadczeń nie są idealne proste lub okręgi; dotyczyć one mogą jedynie przedmiotów materyalnych. Do czegóż miałyby się tedy ściągać doświadczenia, któreby służyły za podstawę geometryi? Odpowiedź jest łatwa.

Widzieliśmy wyżej, że rozumuje się ustawicznie tak, jak gdyby figury geometryczne zachowywały się na wzór brył stałych. Geometrya miałaby więc zapożyczyć od doświadczenia własności tych brył?

Własności światła i prostolinijne jego rozchodzenie się dały również pochop do wprowadzenia niektórych twierdzeń do geometryi a w szczególności do geometryi rzutowej, tak, iż z tego stanowiska możnaby mniemać, że geometrya metryczna jest to badanie brył stałych, a geometrya rzutowa badanie światła.

Zachodzi wszakże pewna trudność, i to trudność niepokonalna. Gdyby geometrya była nauką doświadczalną, nie byłaby nauką ścisłą, podlegałaby ustawicznej rewizyi. Powiemy więcej: dziś już powinnibyśmy ją uważać za błędną, bo wiemy, że niema brył zupełnie niezmiennych.

P e w n i k i g e o m e t r y c z n e n i e s ą w i ę c a n i s ą d a m i s y n t e t y c z n e m i *a priori* a n i f a k t a m i d o ś w i a d c z a l n e m i.

Są one u m o w a m i; w wyborze naszym pomiędzy wszystkiemi możliwemi umowami k i e r u j e m y s i ę faktami doświadczalnemi; pozostaje on wszakże w o l n y, i ogranicza go jedynie warunek unikania wszelkich sprzeczności. W ten to sposób postulaty mogą pozostawać ściśle prawdziwemi nawet wówczas, gdy prawa doświadczalne, które wpłynęły na ich wybór, są tylko przybliżone.

Innemi słowy, pewniki geometryi (nie mówimy o pewnikach arytmetyki) są to określenia zamaskowane.

Cóż wobec tego należy myśleć o pytaniu: Czy geometrya euklidesowa jest prawdziwa?

Niema ono sensu.

Równie dobrze możnaby pytać, czy system metryczny jest prawdziwy a dawne miary fałszywe; czy spółrzędne kartezyańskie są prawdziwe a spółrzędne biegunowe fałszywe. Jedna geometrya nie może być prawdziwsza niż inna; może tylko być dogodniejsza.

Otóż geometrya euklidesowa jest i pozostanie najdogodniejszą:

1° Dlatego, że jest najprostsza; a jest nią nietylko naskutek naszych nawyknień umysłowych czy też jakiejś bezpośredniej intuicyi przestrzeni euklidesowej; jest ona najprostsza sama przez się, podobnie jak wielomian pierwszego stopnia jest prostszy od wielomianu drugiego stopnia; wzory trygonometryi kulistej są zawilsze niż — prostolinijnej, i takimi też wydawałyby się analitykowi, który nie znałby ich znaczenia geometrycznego.

2° Dlatego, że przystosowana jest dość dobrze do własności brył stałych przyrodzonych, brył, do których zbliżają się członki naszego ciała i nasze oko i z których sporządzamy nasze przyrządy miernicze.

Rozdział Czwarty.

Przestrzeń a Geometrya.

Rozpocznijmy od małego paradoksu.

Istoty, obdarzone takim samym umysłem, jak my, oraz takimi samymi zmysłami, a nie posiadające żadnego uprzedniego wykształcenia, gdyby zostały umieszczone w odpowiednio dobranym świecie zewnętrznym, odbierałyby od tego świata wrażenia takie, iż doprowadziłoby je to do zbudowania geometryi innej niż geometrya Euklidesa i do lokalizowania zjawisk tego świata zewnętrznego w przestrzeni nieeuklidesowej albo nawet w przestrzeni czterowymiarowej.

My, których wykształcenie urobione zostało przez nasz świat obecny, gdybyśmy zostali nagle przeniesieni do tego nowego świata, nie znajdowalibyśmy trudności w odnoszeniu jego zjawisk do naszej przestrzeni euklidesowej.

I odwrotnie, gdyby te istoty przeniesione zostały do nas, to odnosiłyby nasze zjawiska do przestrzeni nieeuklidesowej.

Co mówię! przy pewnym wysiłku moglibyśmy to sami uczynić.

Ktoś, co poświęciłby temu swoje życie, mógłby może dojść do wyobrażenia sobie czwartego wymiaru.

Przestrzeń geometryczna a przestrzeń wyobrażeniowa. — Mówi się często, że obrazy przedmiotów zewnętrznych lokalizujemy w przestrzeni, że jest to nawet warunek konieczny ich powstawania. Powiada się również, że przestrzeń ta, która służy w ten sposób jako gotowa rama dla naszych czuć i wyobrażeń, tożsamą jest z przestrzenią geometrów i wszystkie jej posiada własności.

Każdemu, kto podziela taki pogląd, musiało się poprzednie nasze twierdzenie wydać bardzo dziwnym. Rozważmy wszelako, czy pogląd taki nie jest złudzeniem, które rozwiaćby mogła głębsza nieco analiza.

Jakież są własności przestrzeni we właściwym znaczeniu, tj. przestrzeni, która jest przedmiotem geometryi, i którą nazwiemy przestrzenią geometryczną? Oto niektóre z najistotniejszych tych własności:

1⁰ Przestrzeń jest ciągła,

2⁰ Jest nieskończona,

3⁰ Posiada trzy wymiary;

4° Jest jednorodna, to znaczy, że wszystkie jej punkty są toż same między sobą;

5° Jest izotropową, to znaczy, że wszystkie proste przechodzące przez jeden i ten sam p unkt, są tożsame między sobą.

Porównajmy ją teraz do ramy naszych wyobrażeń i naszych czuć, którą moglibyśmy nazwać przestrzenią wyobrażeniową *(l'espace représentatif)*.

Przestrzeń wzrokowa. — Rozważmy nasamprzód wrażenie czysto wzrokowe, pochodzące od obrazu tworzącego się na siatkówce.

Sumaryczna analiza powiada nam, że obraz ten jest ciągły, lecz posiada tylko dwa wymiary, i tym już różni się czysta przestrzeń wzrokowa od przestrzeni geometrycznej.

Następnie obraz ów zawarty jest w ograniczonej ramie.

Wreszcie zachodzi jedna jeszcze niemniej ważna różnica: ta czysta przestrzeń wzrokowa nie jest jednorodna. Nie wszystkie punkty siatkówki, niezależnie od tego, jakie się na niej tworzą obrazy, odgrywają jednakową rolę. Żółtej plamy nie można żadną miarą uważać za tożsamą z punktem, położonym na brzegu siatkówki. Nietylko bowiem jeden i ten sam przedmiot tworzy w tym miejscu o wiele żywszy obraz, lecz naogół w każdej ograniczonej ramie punkt, zajmujący jej środek, nie będzie tożsamy z punktem, leżącym w pobliżu jednego z jej brzegów.

Głębsza analiza wykazałaby nam bez wątpienia, że i ciągłość przestrzeni wzrokowej i dwa jej wymiary są również tylko złudzeniem; odsunęłaby ją przeto jeszcze bardziej od przestrzeni geometrycznej — ale nie zatrzymamy się tu dłużej na tej uwadze.

Atoli wzrok pozwala nam oceniać odległości a więc postrzegać trzeci wymiar. Wiadomo wszakże, iż to postrzeganie trzeciego wymiaru sprowadza się do wysiłku akomodacyjnego oraz do wysiłku zbieżności, którą nadać trzeba obu oczom, aby wyraźnie postrzegać dany przedmiot.

Są to czucia mięśniowe całkiem odmienne od czuć wzrokowych, które dały nam pojęcie dwu pierwszych wymiarów. Trzeci wymiar nie będzie więc dla nas odgrywał tej samej roli co tamte dwa. A więc to, co moglibyśmy nazwać przestrzenią wzrokową zupełną, nie jest przestrzenią izotropową.

Posiada ona wprawdzie trzy właśnie wymiary; to znaczy, że elementy naszych czuć wzrokowych (a przynajmniej te, które składają się na wytworzenie pojęcia rozciągłości) będą całkowicie określone, skoro się będzie znało trzy z pośród nich, czyli — w języku matematycznym, będą to funkcye trzech zmiennych niezależnych.

Rozpatrzmy przecież sprawę tę nieco bliżej. Trzeci wymiar objawia się nam dwoma różnemi sposobami: przez wysiłek akomodacyi i przez zbieżność oczu.

Zapewne, obie te wskazówki są zawsze ze sobą w zgodzie, zachodzi między niemi stały związek czyli — mówiąc językiem matematycznym — obie zmienne, będące miarą tych dwu czuć mięśniowych, nie przedstawiają się nam jako niezależne; innemi jeszcze słowy, unikając odwoływania się do dość już subtelnych pojęć matematycznych, możemy sformułować ten sam fakt w języku poprzedniego rozdziału tak oto: Jeżeli dwa czucia zbieżności A i B nie dają się wzajemnie odróżnić, tedy towarzyszące im czucia akomodacyjne A^1 i B^1 również nie dadzą się od siebie odróżnić.

Ale jest to, że tak powiem, fakt doświadczalny; nic nie przeszkadza *a priori*, abyśmy przypuścili, że jest przeciwnie, a jeśli to przypuszczenie przeciwne jest prawdziwe, jeżeli te dwa czucia mięśniowe zmieniają się jedno niezależnie od drugiego, to będziemy mieli o jedną zmienną niezależną więcej i »przestrzeń wzrokowa zupełna« stanie się dla nas *continuum* fizycznym o czterech wymiarach.

Dodałbym nawet, że jest to fakt doświadczenia zewnętrznego. Nic nie zabrania nam przypuścić, że istota o umyśle takim samym, jak nasz o tych samych organach zmysłowych, co my, znalazła się w świecie, w którym światło dochodziłoby do niej dopiero po przejściu zawile ukształtowanych środowisk załamujących. Owe dwie wskazówki, służące nam do oceniania odległości, przestałyby być związane zależnością stałą. Istota, której zmysły kształciłyby się w podobnym świecie, przypisywałaby niewątpliwie przestrzeni wzrokowej zupełnej cztery wymiary.

Przestrzeń dotykowa i przestrzeń ruchowa (motoryczna). »Przestrzeń dotykowa« jest bardziej jeszcze skomplikowana, niż wzrokowa, i bardziej jeszcze oddalona od przestrzeni geometrycznej. Zbytecznym byłoby powtarzać dla dotyku roztrząsanie, które przeprowadziliśmy dla wzroku.

Lecz poza danemi wzroku i dotyku istnieją inne jeszcze czucia, przyczyniające się tyleż, jeśli nie więcej, do genezy pojęcia przestrzeni. Są to znane każdemu czucia, towarzyszące naszym ruchom, zwane zwykle czuciami mięśniowemi.

Odpowiadająca im rama stanowi to, co można nazwać przestrzenią ruchową.

Każdy mięsień rodzi specyalne czucie, które może się zmniejszać i zwiększać, tak iż ogół naszych czuć mięśniowych zależeć będzie od tyluż zmiennych, ile posiadamy mięśni. Z tego więc punktu widzenia przestrzeń ruchowa posiadałaby tyleż wymiarów, ile mamy mięśni.

Powie kto na to, że jeśli czucia mięśniowe biorą udział w tworzeniu się pojęcia przestrzeni, to dlatego, że posiadamy poczucie kierunku każdego ruchu, które stanowi część integralną czucia. Gdyby tak było rzeczywiście, gdyby czucie mięśniowe nie mogło powstawać inaczej, jak w związku z tym poczuciem geometrycznym kierunku, przestrzeń geometryczna byłaby w istocie formą, narzuconą naszemu światu czuć.

Atoli analizując nasze czucia, bynajmniej tego nie stwierdzamy.

Widzimy tylko, że czucia, odpowiadające ruchom o tych samych kierunkach, związane są w naszym umyśle prostym s k o j a r z e n i e m w y o b r a ż e ń. Do tego to skojarzenia sprowadza się tak zwane »poczucie kierunku«. Nie moglibyśmy więc odnaleźć go w j e d n y m czuciu.

Skojarzenie to jest niezmiernie zawiłe, albowiem skurcz jednego i tego samego mięśnia może odpowiadać, w zależności od położenia członków naszych, ruchom o bardzo różnych kierunkach.

Oczywiście zresztą jest ono nabyte; jest, jak wszystkie skojarzenia wyobrażeń, wynikiem p r z y z w y c z a j e n i a, które z kolei pochodzi od licznych bardzo d o ś w i a d c z e ń; niema wątpliwości, że gdyby wykształcenie naszych zmysłów odbywało się w innym środowisku, gdzie podlegalibyśmy innym wrażeniom, zrodziłyby się odmienne przyzwyczajenia, i mięśniowe nasze czucia kojarzyłyby się według innych praw.

C e c h y p r z e s t r z e n i w y o b r a ż e n i o w e j. — Tak więc przestrzeń wyobrażeniowa w trojakiej swej postaci, wzrokowej, dotykowej i ruchowej, jest zasadniczo różna od przestrzeni geometrycznej.

Nie jest ani jednorodna ani izotropowa; nie można nawet powiedzieć, że ma trzy wymiary.

Mówi się często, że »rzutujemy» w przestrzeń geometryczną przedmioty naszego zewnętrznego postrzegania, że je »lokalizujemy«.

Czy ma to jaki sens, i jakiż mieć może?

Czy ma to oznaczać, że w y o b r a ż a m y sobie przedmioty zewnętrzne w przestrzeni geometrycznej?

Nasze wyobrażenia są tylko odtworzeniem naszych czuć, mogą się więc one mieścić w tej samej tylko ramie, co one, tj. w przestrzeni wyobrażeniowej.

Równie jest dla nas niemożliwe wyobrażać sobie ciała zewnętrzne w przestrzeni geometrycznej, jak niemożliwym jest dla malarza namalowanie na płaskiej tablicy przedmiotów z ich trzema wymiarami.

Przestrzeń wyobrażeniowa jest tylko obrazem przestrzeni geometrycznej, obrazem odkształconym przez pewnego rodzaju perspektywę; nie możemy wyobrażać sobie przedmiotów inaczej, jak naginając je do praw tej perspektywy. Nie wyobrażamy więc sobie ciał zewnętrznych — w przestrzeni geometrycznej, lecz rozumujemy nad temi ciałami, tak, jak gdyby znajdowały się w przestrzeni geometrycznej.

Kiedy zaś mówi się, że »lokalizujemy« dany przedmiot w tym a tym punkcie przestrzeni, co to ma znaczyć? Znaczy poprostu, że wyobrażamy sobie ruchy, jakich trzeba dokonać, aby dosięgnąć tego przedmiotu; i niechaj nikt nam nie zarzuci, że aby wyobrazić sobie te ruchy, trzeba je również rzutować w przestrzeń, że przeto pojęcie przestrzeni musi już istnieć poprzednio. Mówiąc, że wyobrażamy sobie te ruchy, nie chcemy powiedzieć nic więcej jak to, że wyobrażamy sobie towarzyszące im czucia mięśniowe, które nie posiadają żadnego charakteru geometrycznego, a więc bynajmniej nie polegają na założeniu uprzedniem istnienia pojęcia przestrzeni.

Zmiany stanu i zmiany położenia. Jeżeli tedy idea przestrzeni geometrycznej nie narzuca się naszemu umysłowi, jeżeli z drugiej strony żadne z naszych czuć nie może nam jej dostarczyć, to skądże mogła się ona wziąć? Do poszukania odpowiedzi na to pytanie przejdziemy teraz, a zajmie nam to trochę czasu; możemy wszakże obecnie już streścić w kilku słowach próbę wyjaśnienia, które poniżej rozwiniemy.

Żadne z oddzielnych naszych czuć nie mogłoby nas doprowadzić do idei przestrzeni, doszliśmy zaś do niej, badając prawa, według których czucia te po sobie następują.

Widzimy przedewszystkim, że nasze wrażenia ulegają zmianom; lecz wśród zmian tych rychło zaczynamy robić pewne rozróżnienia.

Powiadamy raz, że przedmioty wywołujące nasze wrażenia uległy zmianom stanu, to znów, że zmieniły położenie, że się tylko przesunęły.

Zarówno zmiana jak zmiana stanu położenia wyraża się dla nas zawsze w jeden tylko sposób: jako zmiana w całokształcie naszych wrażeń.

Cóż nas naprowadziło na zrobienie zaznaczonego powyżej rozróżnienia? Nie trudno zdać sobie z tego sprawę. Jeśli zaszła tylko zmiana położenia, tedy możemy odtworzyć znowu pierwotny całokształt wrażeń, wykonywając ruchy, które sprawią, że zajmiemy w stosunku do przedmiotu ruchomego to samo położenie względne. Korygujemy w ten sposób zmianę zaszłą i odtwarzamy stan początkowy przez zmianę odwrotną.

Jeżeli chodzi np. o wrażenia wzrokowe i jeżeli przedmiot przesuwa się przed nami, możemy za nim »wodzić okiem« i zatrzymać jego obraz w tym samym punkcie siatkówki przez odpowiednie ruchy gałki ocznej.

Jesteśmy świadomi tych ruchów dlatego, że są dowolne, oraz że towarzyszą im czucia mięśniowe, co wcale jednak nie znaczy, byśmy je sobie wyobrażali w przestrzeni geometrycznej.

Tak więc charakteryzuje zmianę położenia i odróżnia ją od zmiany stanu to, że można ją zawsze skorygować we wskazany sposób.

Może się tedy zdarzyć, że przechodzi się od grupy wrażeń A do grupy B dwiema różnemi drogami: 1^0 bez udziału woli i bez czuć mięśniowych, mianowicie wówczas, gdy przedmiot się porusza; 2^0 z udziałem woli i z czuciami mięśniowemi co zachodzi, gdy przedmiot pozostaje nieruchomy, a porusza się obserwator, tak iż przedmiot posiada w stosunku do niego ruch względny.

W obu razach przejście od grupy A do grupy B jest tylko zmianą położenia.

Wynika stąd, że wzrok i dotyk nie mogłyby dać nam pojęcia przestrzeni, bez pomocy »zmysłu mięśniowego«.

Pojęcie przestrzeni nie mogło tedy pochodzić od jednego czucia lecz wymagało szeregu czuć; cowięcej: istota nieruchoma nie mogłaby pojęcia tego nigdy zdobyć, albowiem skoroby nie mogła korygować zapomocą swoich ruchów skutków zmian położenia przedmiotów zewnętrznych, nie miałaby żadnego powodu odróżniać je od zmian stanu. Nie mogłaby również go zdobyć, gdyby ruchy jej nie odbywały się z udziałem jej woli lub gdyby nie towarzyszyły im żadne wogóle czucia.

Warunki kompensacyi. — Jakże możliwą jest taka kompensacya, która sprawia, że dwa od siebie niezależne ruchy wzajemnie się korygują.

Umysł, któryby znał już geometryę, rozumowałby tak oto:

Ażeby zaszła kompensacya, trzeba oczywiście, by z jednej strony poszczególne części przedmiotu zewnętrznego, z drugiej zaś poszczególne organy naszych zmysłów, znalazły się po obu zmianach w tym samym położeniu względnym. To zaś wymaga, żeby poszczególne części przedmiotu zewnętrznego zachowały również jedne w stosunku do drugich to samo położenie względne, oraz żeby to samo miało miejsce dla położenia względem siebie poszczególnych części naszego ciała.

Innemi słowy, przy pierwszej zmianie przedmiot zewnętrzny musi się przesuwać na podobieństwo bryły niezmiennej, przy drugiej zmianie, korygującej pierwszą, tak samo ma się zachowywać całe nasze ciało.

Takie są warunki odbycia się kompensacyi.

My jednak, którzy nie znamy jeszcze geometryi, skoro pojęcie przestrzeni jeszcze się dla nas nie ukształtowało, nie możemy rozumować w ten sposób, nie możemy przewidzieć *a priori*, czy kompensacya jest możliwa. Otóż doświadczenie uczy nas, że odbywa się ona niekiedy, i ten to fakt doświadczalny jest dla nas podstawą rozróżniania zmian stanu od zmian położenia.

Ciała stałe a geometrya. — Wśród przedmiotów, które nas otaczają, istnieją niektóre, ulegające często przesunięciom nadającym się do skorygowania w zaznaczony sposób przez ruch spółwzględny naszego własnego ciała, i są to ciała stałe.

Inne przedmioty, o kształcie zmiennym, ulegają wyjątkowo tylko podobnym przesunięciom (zmiana położenia bez zmiany postaci). Gdy ciało przesunęło się zmieniając swój kształt, nie możemy już zapomocą odpowiednich ruchów nadać organom naszych zmysłów tego samego położenia względnego w stosunku do tego ciała; nie możemy zatym odbudować pierwotnego całokształtu wrażeń.

Później dopiero, na podstawie nowych doświadczeń, uczymy się rozkładać ciała o zmiennym kształcie na takie elementy mniejsze, iż każdy z nich przesuwa się według tych samych mniej więcej praw co ciało stałe. Odróżniamy w ten sposób »odkształcenia« od innych zmian stanu; w tych odkształceniach każdy element ulega prostej zmianie położenia, która może być skorygowana; lecz zmiana zaszła w całości jest głębsza i nie nadaje się już do skorygowania zapomocą ruchu spółwzględnego.

Pojęcie takie jest już bardzo złożone i zjawić się mogło dopiero względnie późno; nie mogłoby ono zresztą powstać, gdyby obserwacya ciał stałych nie była nas już nauczyła odróżniać zmiany położenia od zmian innych.

Gdyby więc w przyrodzie nie było ciał stałych, nie byłoby geometryi.

Inna jeszcze uwaga zasługuje na chwilę zastanowienia. Niechaj pewne ciało stałe zajmuje naprzód położenie α i przejdzie następnie do położenia β: w pierwszym swym położeniu wywoła ono w nas grupę wrażeń A, w drugim grupę wrażeń B. Weźmy teraz inne ciało stałe, o własnościach zupełnie różnych od pierwszego, np. posiadające inną barwę. Przypuśćmy również, że przechodzi ono od położenia α, w którym wywołuje w nas grupę wrażeń A', do położenia β, w którym wywołuje w nas grupę wrażeń B'.

Naogół grupa A nie będzie miała nic wspólnego z grupą A', ani też grupa B z grupą B'. Przejście od grupy A do grupy B oraz przejście od grupy A' do grupy B' są to więc dwie zmiany, które same przez się nie mają naogół nic wspólnego.

A przecież obie te zmiany uważamy za przesunięcia a nawet więcej — za to samo przesunięcie. Czymże to się dzieje?

Oto dlatego poprostu, że tak jedna jak druga zmiana mogą być skorygowane przez ten sam ruch spółwzględny naszego ciała.

Ten to więc »ruch spółwzględny« stanowi jedyny łącznik między dwoma zjawiskami, którychbyśmy pozatym nigdy nie mieli żadnej racyi zestawiać ze sobą.

Z drugiej strony ciało nasze dzięki znacznej ilości swych artykulacyi i mięśni może odbywać mnóstwo rozmaitych ruchów; nie wszystkie przecież są zdolne »korygować« zmiany w przedmiotach zewnętrznych; te tylko będą się do tego nadawały, przy których całe nasze ciało, albo przynajmniej te z jego organów, które wchodzą w grę, przesuwają się jako całość tj. bez zmiany w swych położeniach względnych, a więc zachowują się na podobieństwo ciała stałego.

W streszczeniu:

1⁰ Nasuwa się nam przedewszystkim rozróżnienie dwu kategoryi zjawisk:

Jedne, zachodzące bez udziału naszej woli, którym nie towarzyszą czucia mięśniowe, przypisujemy przedmiotom zewnętrznym; są to zmiany zewnętrzne.

Inne, o cechach przeciwnych, przypisujemy ruchom naszego własnego ciała; są to zmiany wewnętrzne;

2⁰ Stwierdzamy, że niektóre zmiany jednej z tych kategoryi mogą być skorygowane przez zmianę korelatywną drugiej kategoryi;

3⁰ Wśród zmian zewnętrznych wyróżniamy te, które posiadają korelatyw taki w drugiej kategoryi, i zmiany te nazywamy przesunięciami; podobnież wśród zmian wewnętrznych wyróżniamy te, które posiadają korelatyw w pierwszej kategoryi.

W ten sposób określona została, dzięki tej dwustronnej odpowiedniości, szczególna klasa zjawisk, które nazywamy przesunięciami. Prawa tych to zjawisk stanowią przedmiot geometryi.

Prawo jednorodności. — Pierwszym z tych praw jest prawo jednorodności.

Przypuśćmy, że na skutek zmiany zewnętrznej α przechodzimy od zespołu wrażeń A do zespołu B, że następnie zmiana α zostaje skorygowana przez ruch spółwzględny β, dokonany z udziałem naszej woli, tak iż powracamy do zespołu A. Niechaj teraz inna zmiana zewnętrzna α' przeprowadzi nas znowu od zespołu wrażeń A do zespołu B. Doświadczenie natenczas uczy, że ta zmiana α' może być, podobnie jak α, skorygowana przez ruch spółwzględny β', dokonany z udziałem naszej woli, i że ruch β' odpowiada tym samym czuciom mięśniowym, co ruch β, korygujący α. Ten to fakt formułuje się zwykle przez powiedzenie, że przestrzeń jest jednorodna i izotropowa.

Można również powiedzieć, że ruch, który się odbył raz, może zostać powtórzony po raz drugi, trzeci, i tak dalej bez zmiany w jego własnościach.

W rozdziale pierwszym, w którym badaliśmy istotę rozumowania matematycznego, widzieliśmy, jaką doniosłość ma możliwość nieograniczonego powtarzania tego samego działania.

Z tego powtarzania czerpie rozumowanie matematyczne swą zdolność twórczą: dzięki prawu jednorodności zdołało ono ogarnąć fakty geometryczne.

Dla zupełności wypadałoby dołączyć do prawa jednorodności mnóstwo innych jeszcze praw analogicznych, w których szczegóły nie chcę tu wchodzić; ogół tych praw matematycy streszczają krótko, mówiąc, że przesunięcia tworzą »grupę«.

Świat nie-euklidesowy. — Gdyby przestrzeń geometryczna była ramą, narzucającą się każdemu naszemu wyobrażeniu, rozważanemu oddzielnie, byłoby niemożliwym wyobrazić sobie obraz, pozbawiony tej ramy, i nie moglibyśmy niczego zmienić w naszej geometryi.

Tak wszakże nie jest, geometrya jest jedynie streszczeniem praw, według których obrazy te następują po sobie. Nic wobec tego nie stoi na zawadzie, abyśmy wystawili sobie szereg wyobrażeń, pod każdym względem podobnych do naszych zwykłych wyobrażeń, lecz następujących po sobie według praw innych niż te, do których jesteśmy przyzwyczajeni.

Pojmujemy tedy, że istoty, które by zdobywały swe wykształcenie w środowisku, w którym panowałyby prawa odmienne, mogłyby mieć geometryę bardzo różną od naszej.

Weźmy np. świat, zamknięty w wielkiej kuli i ulegający następującym prawom:

Temperatura nie jest w nim jednostajna; jest ona największa w środku, i spada w miarę oddalania się odeń, aby dosięgnąć zera bezwzględnego u powierzchni kuli, zawierającej ten świat.

Określę bliżej jeszcze prawo, według którego zmienia się ta temperatura. Niechaj R będzie promieniem kuli granicznej; niech r oznacza odległość rozważanego punktu od środka tej kuli. Temperatura bezwzględna niechaj będzie proporcyonalna do $R^2 - r^2$.

Przypuścimy nadto, że w świecie tym wszystkie ciała posiadają ten sam spółczynnik rozszerzalności, tak iż długość jakiejkolwiek linii będzie proporcyonalna do jej temperatury absolutnej.

Przypuścimy wreszcie, że przedmiot, przeniesiony z jednego punktu do innego o różnej temperaturze, wstępuje natychmiast w stosunek równowagi cieplnej z nowym swym otoczeniem.

W założeniach tych niema nic, coby zawierało w sobie sprzeczność lub nie dało się wyobrazić.

Poruszający się przedmiot będzie w takich warunkach stopniowo malał w miarę tego, jak zbliżać się będzie do kuli granicznej.

Zauważmy, że jeżeli świat ten jest ograniczony ze stanowiska naszej zwykłej geometryi, to mieszkańcom swym będzie się wydawał nieskończonym.

W rzeczy bowiem samej, gdy chcą się oni zbliżyć do kuli granicznej, oziębiają się i stają się coraz mniejsi. Kroki ich są więc również coraz mniejsze, nie mogą oni przeto nigdy dosięgnąć kuli granicznej.

Jeżeli dla nas geometrya jest tylko badaniem praw, według których poruszają się niezmienne ciała stałe — dla urojonych tych istot będzie ona badaniem praw, według których poruszają się ciała stałe odkształcane przez omówione powyżej zmiany temperatury.

Zapewne, i w naszym świecie przyrodzone ciała stałe ulegają również zmianom kształtu i objętości naskutek nagrzania lub ochłodzenia. Lecz my, kładąc podwaliny geometryi, zmiany te pomijamy, albowiem są one nietylko bardzo nieznaczne, ale nadto nieprawidłowe, naskutek czego wydają się nam wypadkowemi.

Inaczej byłoby w tym świecie hypotetycznym, w którym zmiany te odbywałyby się według praw regularnych i bardzo prostych.

Zaznaczamy, że poszczególne stałe części składowe, które tworzyłyby ciało jego mieszkańców ulegałyby tym samym zmianom kształtu i objętości.

Zrobimy jeszcze jedno przypuszczenie; założymy mianowicie, że światło przechodzi przez środowiska niejednakowo załamujące, przyczym spółczynnik załamania jest odwrotnie proporcyonalny do $R^2 - r^2$. Łatwo można się przekonać, że w takich warunkach promienie światła byłyby nie prostolinijne lecz kołowe.

Ażeby usprawiedliwić wszystko powyższe, powinniśmy jeszcze okazać, że niektóre zmiany, zaszłe w położeniu przedmiotów zewnętrznych, mogą być skorygowane przez ruchy korelatywne istot czujących, zamieszkujących ten świat urojony, i to w sposób odbudowujący pierwotny zespół wrażeń, odebranych przez te istoty czujące.

Przypuśćmy, w samej rzeczy, że pewien przedmiot przesuwa się nie jak niezmienne ciało stałe, lecz jak ciało stałe, ulegające rozszerzaniu się niejednostajnemu, ściśle stosującemu się do wyłożonego powyżej prawa temperatury. Niechaj mi będzie wolno dla krótkości wysłowienia nazwać taki ruch przesunięciem nie-euklidesowym.

Jeżeli tuż znajduje się istota czująca, wrażenia jej ulegną zmianie naskutek przesunięcia się przedmiotu, ale będzie ona je mogła odtworzyć, poruszając się sama w odpowiedni sposób. Wystarczy, by ostatecznie zespół przedmiotu oraz istoty czującej, rozważany jako stanowiący jedno cialo, uległ jednemu z owych przesunięć, które nazwaliśmy nie-euklidesowymi. Jest to możliwe, jeżeli przypuścimy, że członki tych istot rozszerzają się według tego samego prawa, co inne ciała zamieszkałego przez nie świata.

Jakkolwiek z punktu widzenia naszej zwykłej geometryi ciała odkształciły się przy tym przesunięciu i poszczególne ich części nie znajdują się już w tym samym położeniu względnym, to przecież przekonamy się, że wrażenia istoty czującej stały się znowu te same, co pierwotnie.

Jakoż, jeśli odległości wzajemne poszczególnych części mogły się zmienić, to wszakże części, które się pierwotnie ze sobą stykały, znowu się stykają. Wrażenia dotykowe nie zmieniły się zatym.

Następnie, wobec powyższego założenia co do załamania światła i krzywości promieni świetlnych, wrażenia wzrokowe pozostaną również te same.

Urojone te istoty zostaną więc, podobnie jak my, naprowadzone na podział obserwowanych przez siebie zjawisk i na wyróżnienie z pośród nich »zmian położenia« nadających się do skorygowania przez ruch spółwzględny dokonany z woli obserwatora.

Jeżeli zbudują geometryę, nie będzie to badanie ruchów naszych niezmiennych ciał stałych, lecz badanie zmian położenia, wyróżnionych we wskazany powyżej sposób, badanie owych »przesunięć nie-euklidesowych«; będzie to geometrya nie-euklidesowa.

Tak więc podobne do nas istoty, których wykształcenie odbywałoby się w takim świecie, nie miałyby tej samej geometryi, co my.

Świat czterowymiarowy. — Podobnie jak świat nie-euklidesowy można sobie wyobrazić świat czterowymiarowy.

Zmysł wzroku, nawet ograniczony do jednego oka, łącznie z czuciami mięśniowemi, związanemi z poruszeniami gałki ocznej, mógłby nam wystarczyć do poznania przestrzeni trójwymiarowej.

Obrazy przedmiotów zewnętrznych rysują się na siatkówce, która jest tablicą dwuwymiarową; są to perspektywy.

Ponieważ wszakże przedmioty te są ruchome, zarówno, jak nasze oko, oglądamy kolejno różne perspektywy tego samego ciała, wzięte z różnych punktów widzenia.

Stwierdzamy zarazem, że przejściu od jednej perspektywy do drugiej towarzyszą często czucia mięśniowe.

Jeżeli przejściu od perspektywy A do perspektywy B oraz przejściu od perspektywy A' do perspektywy B' towarzyszą te same czucia mięśniowe, zestawiamy je jako działania o tej samej istocie.

Badając następnie prawa, według których kombinują się te działania, przekonywamy się, że stanowią one grupę, posiadającą taką samą strukturę jak grupa ruchów brył niezmiennych.

Widzieliśmy zaś, że z cech tej właśnie grupy zostało wysnute pojęcie przestrzeni geometrycznej oraz trzech wymiarów.

Rozumiemy tedy, w jaki sposób widok tych perspektyw mógł zrodzić ideę przestrzeni trójwymiarowej, jakkolwiek każda z nich posiada dwa tylko wymiary: — albowiem następują one po sobie według pewnych praw.

Otóż, podobnie jak można zrobić na danej płaszczyźnie perspektywę figury trójwymiarowej, można zrobić perspektywę figury czterowymiarowej na tablicy trój- (lub dwu-) wymiarowej. Dla matematyka jest to zabawka.

Można nawet sporządzić kilka perspektyw jednej i tej samej figury, zdjętych z kilku punktów widzenia.

Perspektywy te możemy wyobrazić sobie łatwo, albowiem posiadają one tylko trzy wymiary.

Przypuśćmy, że rozmaite perspektywy jednego i tego samego przedmiotu następują kolejno po sobie; że przejściu od jednej do drugiej towarzyszą czucia mięśniowe.

Dwa takie przejścia, o ile im towarzyszyć będą te same czucia mięśniowe, będziemy oczywiście uważali za działania jednakowej natury.

Nic natenczas nie przeszkadza wyobrazić sobie, że działania te kombinują się z sobą według takiego lub innego prawa, naprzykład tak, iżby tworzyły grupę o takiej samej budowie, jak grupa ruchów czterowymiarowej bryły niezmiennej.

Niema w tym niczego, co nie dałoby się wyobrazić, a przecież czucia te byłyby właśnie czuciami istoty o siatkówce dwuwymiarowej, która mogłaby się poruszać w przestrzeni czterowymiarowej.

W tym to znaczeniu wolno powiedzieć, że możnaby sobie wyobrazić czwarty wymiar.

Wnioski. — Widzimy, że doświadczenie gra niezbędną rolę w genezie geometryi; lecz błędem byłoby wnieść stąd, że geometrya jest, bodaj w części, nauką doświadczalną.

Gdyby była doświadczalną, byłaby tylko przybliżoną i prowizoryczną. I jakże zgruba przybliżoną!

Geometrya byłaby tylko badaniem ruchów ciał stałych; w rzeczywistości wszakże nie zajmuje się ona przyrodzonemi bryłami: przedmiotem jej są pewne bryły idealne, bezwzględnie niezmienne, będące tylko uproszczonym i bardzo odległym obrazem tamtych.

Pojęcie tych ciał idealnych wzięte jest w całości z naszego umysłu, doświadczenie zaś jest tylko sposobnością, pobudzającą nas do ukształtowania tego pojęcia.

Przedmiotem geometryi jest badanie pewnej »grupy« szczególnej; lecz pojęcie ogólnej grupy istnieje już uprzednio w naszym umyśle, przynajmniej potencyalnie. Narzuca się ono nam nie jako forma naszego doświadczenia zmysłowego, lecz jako forma naszego poznania.

Zachodzi jedynie potrzeba wyboru z pośród wszystkich grup możliwych grupy, mającej być, że tak powiem, wzorem, do którego będziemy odnosili zjawiska przyrodzone.

Doświadczenie kieruje nami w tym wyborze, ale go nam nie narzuca; pozwala nam ono poznać, nie która geometrya jest najprawdziwszą, lecz która jest najdogodniejszą.

Zaznaczyć należy, że mogliśmy opisać światy fantastyczne, o których mówiliśmy wyżej, nie przestając używać języka geometryi zwykłej.

I w rzeczy samej, gdybyśmy w światy te zostali przeniesieni, nie mielibyśmy potrzeby zmieniać tego języka.

Istoty, które wychowywałyby się tam, uznałyby zapewne za dogodniejsze stworzenie geometryi różnej od naszej, przystosowanej lepiej do ich wrażeń. Co do nas, to wobec tych samych wrażeń uważalibyśmy najpewniej za dogodniejsze nie zmieniać naszych przyzwyczajeń.

Rozdział Piąty.

Doświadczenie a Geometrya.

1. W rozdziałach poprzedzających staraliśmy się niejednokrotnie okazać, że zasady geometryi nie są faktami doświadczalnemi i że w szczególności postulat Euklidesa nie może być dowiedziony przez doświadczenie.

Jakkolwiek przekonywującemi wydają nam się racye, które już podałem, uważam przecież za wskazane jeszcze do tej kwestyi powrócić, albowiem mamy tu do czynienia z poglądem błędnym a głęboko zakorzenionym w wielu umysłach.

2. Sporządźmy sobie materyalne koło, zmierzmy jego promień i obwód i sprobujmy sprawdzić, czy stosunek tych dwu długości równy jest π; cóż zrobimy w ten sposób? Zrobimy doświadczenie nad własnościami materyi, z której sporządzony został nasz krążek, oraz materyi, z jakiej sporządzono metr, którym dokonaliśmy pomiaru.

3. Geometrya a astronomia. — Kwestyę tę postawiono w inny jeszcze sposób. Jeżeli geometrya Łobaczewskiego jest prawdziwa, to paralaksa bardzo oddalonej gwiazdy będzie skończona; jeżeli prawdziwa jest geometrya Riemanna, tedy paralaksa ta będzie ujemna. Są to rezultaty, które wydają się dostępnemi doświadczeniu, to też żywiono nadzieję, że obserwacye astronomiczne pozwolą, być może, na rozstrzygnięcie, która z trzech geometryi jest prawdziwą.

Lecz to, co w astronomii nazywa się linią prostą, jest tylko drogą promienia świetlnego. Gdyby więc, na przekór wszystkiemu, zdarzyło się, że trafionoby na paralaksy ujemne, albo też, że okazanoby, iż wszystkie paralaksy wykraczają ponad pewną granicę, pozostawałby wybór między dwoma wnioskami: moglibyśmy zrzec się geometryi euklidesowej albo zmienić prawa optyki i przypuścić, że światło nie rozchodzi się ściśle po liniach prostych.

Zbytecznym jest dodać, że każdy uważałby to ostatnie rozwiązanie za dogodniejsze.

Geometryi euklidesowej nie może więc nic grozić ze strony nowych doświadczeń.

4. Czy można twierdzić, że pewne zjawiska, możliwe w przestrzeni euklidesowej byłyby niemożliwe w przestrzeni nie-euklidesowej, że przeto doświadczenie, wykazując te zjawiska, zaprzeczałoby wprost założeniu nie-euklidesowemu? Zdaniem moim, pytanie takie wcale nie może być postawione. Albowiem jest ono zupełnie równoważne z pytaniem następującym, którego niedorzeczność bije w oczy: czy istnieją długości, dające się wyrazić w metrach i centymetrach, lecz

nie dające się zmierzyć zapomocą sążni, stóp i cali, tak iż doświadczenie, wykazując istnienie takich długości zaprzeczyłoby wprost założeniu, że istnieją sążnie, podzielone na sześć stóp?

Rozważmy kwestyę tę bliżej. Przypuśćmy, że linia prosta posiada w przestrzeni euklidesowej dwie jakiekolwiek własności, które nazwiemy A i B; że w przestrzeni nie-euklidesowej, posiada ona również własność A, lecz nie posiada już własności B; przypuśćmy wreszcie, że zarówno w przestrzeni euklidesowej, jak w nie-euklidesowej prosta jest jedyną linią, posiadającą własność A.

Gdyby tak było, doświadczenie mogłoby rozstrzygnąć między założeniem Euklidesa a założeniem Łobaczewskiego. Stwierdzonoby, że dany przedmiot konkretny dostępny doświadczeniu, np. pęk promieni świetlnych, posiada własność A; wywnioskowanoby stąd, że jest on prostolinijny, poczym sprawdzonoby, czy posiada lub nie własność B.

Tak wszakże nie jest — niema własności, którąby mogła, na podobieństwo owej własności A, służyć jako kryteryum bezwzględne do rozpoznania linii prostej i odróżnienia jej od każdej innej linii.

Powie, kto może: »oto własność taka: linia prosta jest linią taką, iż figura, w której skład linia ta wchodzi, może się poruszać bez żadnej zmiany we wzajemnej odległości jej punktów, przyczym wszystkie punkty tej linii pozostają nieruchome«.

Istotnie własność ta przysługuje, zarówno w przestrzeni euklidesowej jak i nie-euklidesowej, linii prostej i jedynie tylko linii prostej. Ale jakże sprawdzić doświadczalnie, czy jest ona własnością tego lub innego przedmiotu konkretnego? Trzeba będzie mierzyć odległość, a skądże będziemy wiedzieli, że taka a taka wielkość konkretna, którą zmierzyliśmy naszym materyalnym narzędziem mierniczym, rzeczywiście wyobraża abstrakcyjną odległość?

Trudność nie została pokonana, lecz tylko przesunięta. W rzeczywistości własność, którą sformułowaliśmy powyżej, nie jest własnością samej tylko linii prostej, jest to własność linii prostej i odległości. Ażeby mogła ona służyć jako kryteryum bezwzględne, trzebaby ustanowić nietylko, że nie jest ona własnością żadnej innej linji, prócz linji prostej oraz odległości, lecz nadto, że nie jest ona własnością żadnej innej linii prócz prostej i żadnej innej wielkości prócz odległości. Otóż to nie jest prawdą.

Niepodobna zatym wyobrazić sobie żadnego konkretnego doświadczenia, które mogłoby być interpretowane w geometryi euklidesowej a nie miałoby interpretacyi w geometryi Łobaczewskiego; wobec tego wolno nam sformułować wniosek następujący:

Żadne doświadczenie nie będzie nigdy w sprzeczności z postulatem Euklidesa; ale zarazem też żadne doświadczenie nie będzie w sprzeczności z postulatem Łobaczewskiego.

5. Nie wystarcza jednak to, że geometryi euklidesowej (lub nie-euklidesowej) żadne doświadczenie nie zdoła nigdy wprost zaprzeczyć. Czy nie mogłoby się stać, że pogodzenie jej z doświadczeniem wymagałoby pogwałcenia zasady racyi dostatecznej i zasady względności przestrzeni?

Wytłumaczmy się jaśniej; rozważmy jakikolwiek układ materyalny; z jednej strony będziemy musieli wziąć pod uwagę »stan« poszczególnych ciał tworzących ten układ (np. ich temperaturę, potencyał elektryczny, itd.), z drugiej zaś strony ich położenie w przestrzeni; a wśród danych, pozwalających na oznaczenie tego położenia, rozróżnimy jeszcze wzajemne odległości tych ciał, określające ich położenia względne, i warunki określające położenie bezwzględne układu i jego bezwzględną oryentacyę w przestrzeni.

Prawa zjawisk, które zachodzą w tym układzie, będą mogły zależeć od stanu tych ciał i od ich odległości wzajemnych; lecz naskutek względności i bierności przestrzeni, nie będą one zależały od położenia i oryentacyi bezwzględnej układu.

Innemi słowy, stan ciał i ich odległości wzajemne w chwili dowolnie obranej zależne będą jedynie od stanu tych ciał i ich odległości wzajemnych w chwili początkowej, zupełnie zaś będą niezależne ani od początkowego położenia bezwzględnego układu ani od jego początkowej oryentacyi bezwzględnej. Moglibyśmy to nazwać, dla krótkości wysłowienia, prawem względności.

Mówiłem dotychczas jak geometra euklidesowski. Ale, jakeśmy już powiedzieli, jeżeli każde doświadczenie posiada interpretacyę przy założeniu euklidesowym, to posiada ono również interpretacyę przy założeniu nie-euklidesowym. Otóż, wykonaliśmy szereg doświadczeń; znaleźliśmy dla nich interpretacyę przy założeniu euklidesowym i przekonaliśmy się, że zainterpretowane w ten sposób doświadczenia nie gwałcą owego »prawa względności«.

Interpretujmy je teraz przy założeniu nie-euklidesowym, co zawsze jest możliwe; tylko odległości nie-euklidesowe poszczególnych naszych ciał nie będą w nowej tej interpretacyi naogół te same, co odległości euklidesowe w interpretacyi pierwotnej.

Czy doświadczenia nasze w tej nowej interpretacyi będą również w zgodności z naszymi »prawem względności«? — A jeśli zgodność ta nie zachodzi, czy nie wypadnie wnieść, że doświadczenie dowiodło fałszywości geometryi nie-euklidesowej?

Łatwo można się przekonać, że obawa ta jest płonna; w rzeczy samej, aby można było zastosować z całą ścisłością prawo względności, trzeba je zastosować do całego wszechświata. Albowiem, gdybyśmy rozważali jedynie część pewną wszechświata, i gdyby położenie bezwzględne tej części zmieniło się, zmieniłyby się również odległości od innych ciał wszechświata, a przeto wpływ ich na rozważaną część mógłby się zwiększyć lub zmniejszyć, co mogłoby spowodować zmianę w prawach zjawisk, jakie w niej zachodzą.

Lecz skoro układem naszym jest cały wszechświat, doświadczenie nie może powiadomić nas o jego położeniu i oryentacyi bezwzględnej w przestrzeni. Najdoskonalsze nawet narzędzia nasze nie mogą nam nigdy dać poznać nic ponad stan poszczególnych części wszechświata i ich odległości wzajemne.

Wobec tego nasze prawo względności przybiera następującą postać:

Dane, które odczytamy na naszych przyrządach w jakiejkolwiek chwili, zależeć będą jedynie od danych, które moglibyśmy odczytać na tych samych przyrządach w chwili początkowej.

Otóż formuła taka jest niezależna od wszelkiej interpretacyi doświadczeń. Jeżeli prawo jest prawdziwe w interpretacyi euklidesowej, będzie nim również w interpretacyi nie-euklidesowej.

Niechaj nam będzie wolno zrobić przy tej sposobności małą dygresyę. Mówiliśmy wyżej o danych, określających położenie poszczególnych ciał układu; powinnibyśmy byli mówić również o danych określających ich prędkości; śród tych prędkości wyróżnilibyśmy prędkość, z jaką zmieniają się wzajemne odległości poszczególnych ciał, z drugiej zaś strony prędkość przenoszenia się i obrotu układu, tj. prędkości, z jakiemi zmienia się jego położenie i oryentacya bezwzględna.

Aby wszystkie wymagania umysłu były zaspokojone, powinnoby prawo względności brzmieć, jak następuje:

Stan ciał i ich odległości wzajemne w jakiejkolwiek chwili jak również prędkości, z jakiemi odległości te zmieniają się w tej samej chwili, zależne będą jedynie od stanu tych ciał i od ich odległości wzajemnych w chwili początkowej oraz od prędkości, z jakiemi odległości te zmieniały się w owej chwili początkowej, lecz nie będą zależne ani od początkowego położenia bezwzględnego układu, ani od jego oryentacyi bezwzględnej, ani też od prędkości z jakiemi zmieniało się to położenie i ta oryentacya bezwzględna w chwili początkowej.

Na nieszczęście prawo, w ten sposób sformułowane, nie jest w zgodzie z doświadczeniami, przynajmniej przy zwykłej tych doświadczeń interpretacyi.

Przypuśćmy, że człowiek przeniesiony został na planetę, której niebo jest ustawicznie pokryte grubą zasłoną obłoków, tak iż nie widać stamtąd nigdy innych ciał niebieskich; człowiekowi temu planeta ta będzie się zdawała odosobnioną w przestrzeni. Człowiek ten będzie wszakże mógł dostrzedz, że się ona obraca, bądź przez pomiar spłaszczenia (co robi się zazwyczaj z pomocą obserwacyi astronomicznych, lecz mogłoby być uskutecznione środkami wyłącznie geodezyjnemi) bądź przez powtórzenie eksperymentu Foucaulta. Obrót bezwzględny tej planety mógłby zatym zostać ujawniony.

Jest to fakt, który razi filozofa, fizyk przecież zmuszony jest go uznać.

Wiadomo, że z faktu tego Newton wywnioskował istnienie przestrzeni bezwzględnej; z poglądem tym nie mogę żadną miarą się zgodzić, co uzasadnię w części trzeciej niniejszej książki. W tej chwili jednak nie chciałbym jeszcze rozważyć tej trudności.

Musiałem tedy pogodzić się z tym, że w sformułowaniu prawa względności pomieszane są ze sobą prędkości wszelkiego rodzaju wśród danych, określających stan ciał.

W każdym razie trudność ta zachodzi równie dobrze dla geometryi euklidesowej, jak dla geometryi Łobaczewskiego; nie mamy więc powodu niepokoić się nią, i mówiliśmy o niej tylko przygodnie.

Ważne jest dla nas to, że doświadczenie nie może rozstrzygnąć między Euklidesem a Łobaczewskim.

Słowem, w którąkolwiek stronę się zwrócimy, nie widzimy możności wykrycia, jaki sens rozumny możnaby nadać empiryzmowi geometrycznemu.

6. Doświadczenia pozwalają nam poznać jedynie wzajemne stosunki ciał; żadne z nich nie dotyczy i dotyczyć nie może stosunków ciał do przestrzeni ani stosunków wzajemnych poszczególnych części przestrzeni.

»Zapewne«, powie kto na to, »jedno doświadczenie wystarczyć nie może, bo daje nam tylko jedno równanie z kilku niewiadomemi; kiedy wszakże wykonam dostateczną ilość doświadczeń, będę miał dość równań, aby obliczyć wszystkie niewiadome«.

Znajomość wysokości wielkiego masztu nie wystarcza do wyliczenia wieku kapitana. Kiedy zmierzymy wszystkie kawałki drewna, z których składa się okręt, będziemy mieli wiele równań, ale nie poznamy przez to lepiej wieku kapitana. Wszystkie nasze pomiary dotyczą tylko kawałków drewna, a więc nie mogą nam ujawnić nic ponad to co dotyczy tych kawałków drewna. Podobnież doświadczenia nasze, jakkolwiek byłyby liczne, ponieważ dotyczyły jedynie stosunków wzajemnych ciał, nie ujawnią nam nic, coby dotyczyło wzajemnych stosunków poszczególnych części przestrzeni.

7. Wprawdzie, odpowiedzą nam, chociaż doświadczenia dotyczą tylko ciał, to dotyczą one przecież własności geometrycznych tych ciał.

Ale cóż to należy rozumieć przez własności geometryczne ciał? Przypuśćmy, że chodzi tu o stosunki ciał z przestrzenią; własności te są w takim razie niedostępne dla doświadczeń, które dotyczą jedynie wzajemnych stosunków ciał. To jedno wystarczyłoby do okazania, że nie o te własności tu chodzi.

Zacznijmy przeto od porozumienia się co do znaczenia wyrażenia: własności geometryczne ciał. Kiedy mówimy, że ciało składa się z kilku części, to nie formułujemy przez to chyba żadnej własności geometrycznej, nawet wówczas, gdybyśmy najmniejszym rozważanym przez nas cząstkom danego ciała nadali nazwę punktów.

Kiedy mówimy, że pewna część danego ciała styka się z daną częścią pewnego innego ciała, wypowiadamy twierdzenie, dotyczące wzajemnych stosunków tych dwu ciał, nie zaś ich stosunków z przestrzenią.

Sądzę, że czytelnik zgodzi się ze mną na to, że nie są to własności geometryczne; pewny jestem w każdym razie, że przyzna mi, iż twierdzenia te są niezależne od jakiejkolwiek znajomości geometrycznej.

Po tym objaśnieniu wyobraźmy sobie ciało, składające się z ośmiu wąskich żelaznych prętów OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, połączonych u jednego ze swych końców O. Weźmy inne jeszcze ciało stałe, np. kawałek drewna, na którym znajdują się trzy plamki atramentowe, powiedzmy α, β, γ. Przypuśćmy następnie, że stwierdzamy, iż można doprowadzić α β γ do zetknięcia z AGO (tj. α z A, i jednocześnie β z G i γ z O), następnie, że można doprowadzić kolejno do zetknięcia α β γ z BGO, CGO, DGO, EGO, FGO dalej z AHO. BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, wreszcie α γ kolejno z AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Fakty te stwierdzić można, nie mając uprzednio żadnej wiadomości o kształcie lub własnościach metrycznych przestrzeni. Nie dotyczą one wcale »geometrycznych własności ciał«. A fakty te nie będą możliwe, jeśli ciała, z któremi eksperymentowaliśmy, poruszają się według grupy o takiej samej strukturze, jak grupa Łobaczewskiego (to znaczy, według tych samych praw, co ciało stałe w geometryi Łobaczewskiego). Wystarczają one tedy do okazania, że ciała te poruszają się według grupy euklidesowej albo przynajmniej, że nie poruszają się według grupy Łobaczewskiego.

Że ruchy te zgadzają się z grupą euklidesową, dowieść nietrudno.

Albowiem dałyby się one wykonać, gdyby ciało α β γ było niezmienną bryłą naszej geometryi zwykłej o formie trójkąta prostokątnego a punkty A B C D E F G H wierzchołkami wielościanu, utworzonego przez dwie piramidy sześciokątne foremne zwykłej naszej geometryi, posiadające jako wspólną podstawę A B C D E F a jako wierzchołki jedna G, druga H.

Przypuśćmy teraz, że zamiast poprzednio stwierdzonych faktów stwierdza się, że można przyłożyć α β γ jak i powyżej kolejno do AGO, BGO, CGO, DGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, następnie, że można przyłożyć α β (nie zaś α γ) kolejno do AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Fakty takie możnaby stwierdzić, gdyby geometrya nie-euklidesowa była prawdziwa, gdyby ciała $\alpha\ \beta\ \gamma$, $O\ A\ C\ D\ E\ F\ G\ H$ były niezmiennemi bryłami, gdyby pierwsze było trójkątem prostokątnym a drugie podwójną piramidą sześciokątną foremną odpowiednich rozmiarów.

Nowe te fakty są tedy niemożliwe, jeśli ciała poruszają się według grupy euklidesowej; stają się natomiast możliwe, skoro przypuścimy, że ruch ciał odbywa się według grupy Łobaczewskiego. Wystarczyłyby tedy (gdyby je stwierdzono) do okazania, że pomienione ciała nie poruszają się według grupy euklidesowej.

Tak więc, nie czyniąc żadnego założenia co do kształtu, co do istoty przestrzeni, co do stosunków ciał z przestrzenią, nie przypisując ciałom żadnej własności geometrycznej, stwierdziliśmy fakty, które pozwoliły nam wykazać w pierwszym wypadku, że ciała, których dotyczyło doświadczenie, poruszają się według grupy o strukturze euklidesowej, w drugim zaś wypadku, że poruszają się one według grupy o strukturze Łobaczewskiego.

Nie należy wszakże sądzić, że pierwszy zespół faktów stanowiłby doświadczenie dowodzące, że przestrzeń jest euklidesowa, a drugi, że przestrzeń jest nie-euklidesowa.

W rzeczy bowiem samej, możnaby w y o b r a z i ć s o b i e ciała, poruszające się w sposób, umożliwiający stwierdzenie drugiego zespołu faktów. Mógłby je zbudować pierwszy lepszy mechanik, gdyby chciał zadać sobie trudu i nie szczędził kosztów. A przecież nikt z tego nie wniesie, że przestrzeń jest nie-euklidesowa.

Tymbardziej, że ponieważ zwykłe ciała stałe nie przestałyby istnieć z chwilą, gdyby nasz mechanik zbudował owe osobliwe ciała, o których mówiliśmy, trzeba byłoby wynioskować, że przestrzeń jest zarazem euklidesowa i nie-euklidesowa.

Przypuśćmy np., że mamy wielką kulę o promieniu R, i że temperatura zmniejsza się od środka tej kuli ku jej powierzchni według prawa, o którym mówiliśmy, opisując świat nie-euklidesowy.

Moglibyśmy mieć ciała, których rozszerzanie się byłoby nieuczuwalne, i które zachowywałyby się jak zwykłe bryły niezmienne, oprócz zaś nich inne ciała o bardzo wielkiej rozszerzalności, zachowujące się, jak bryły nie-euklidesowe. Moglibyśmy mieć dwie podwójne piramidy $O\,A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H$ i $O'\,A'\,B'\,C'\,D'\,E'\,F'\,G'\,H'$ i dwa trójkąty $\alpha\,\beta\,\gamma$ i $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$. Pierwsza piramida podwójna byłaby prostolinijna, druga krzywolinijna; trójkąt $\alpha\,\beta\,\gamma$ składałby się z materyi nierozszerzalnej, drugi zaś z materyi bardzo rozszerzalnej.

Natenczas, operując piramidą podwójną OAH i trójkątem $\alpha\beta\gamma$, stwierdzilibyśmy pierwszy zespół faktów, posługując się zaś podwójną piramidą $O'A'H'$ i trójkątem $\alpha'\beta'\gamma'$ — drugi zespół faktów.

Doświadczenie zdawałoby się tedy dowodzić raz, że geometrya euklidesowa jest prawdziwa, to znów, że jest fałszywa.

D o ś w i a d c z e n i a n i e d o t y c z y ł y z a t y m p r z e s t r z e n i, l e c z c i a ł.

DODATEK.

8. Dla zupełności powinnibyśmy mówić teraz o pewnej kwestyi bardzo subtelnej i wymagającej długich wywodów; ograniczę się streszczeniem tego, co wyłożyłem w tej mierze w *Revue de Métaphysique et de Morale* i w *The Monist*[1]).

Gdy mówimy, że przestrzeń posiada trzy wymiary, co chcemy przez to powiedzieć?

Widzieliśmy, jak ważną rolę odgrywają owe »zmiany wewnętrzne«, które objawiają się nam przez czucia mięśniowe. Charakteryzują one rozmaite p o s t a w y naszego ciała. — Obierzmy dowolnie, jako postawę początkową, jedną z tych postaw A. Gdy przechodzimy od tej postawy A do jakiej-

---

[1]) On the foundation of Geometry, The Moinst, edited by P. Carus, vol. 9, Chicago 1898.

kolwiek innej *B*, odczuwamy szereg *S* czuć mięśniowych, i ten szereg *S* określi *B*. Zaznaczmy wszakże, iż często będziemy uważali dwa szeregi *S* i *S'* za określające tę samą postawę *B* (albowiem przy tych samych postawach początkowej i końcowej *A* i *B* postawy pośrednie i odpowiadające im czucia mogą być różne). W jakiż sposób poznamy równoważność tych dwu szeregów? Oznaką tej równoważności będzie to, że oba szeregi mogą skompensować jedną i tę samą zmianę zewnętrzną, albo, mówiąc ogólniej, że gdy chodzi o kompensacyę pewnej zmiany zewnętrznej, jeden z szeregów może być zastąpiony przez drugi.

Wśród szeregów tych wyróżniliśmy te, które mogą same przez się skompensować zmianę zewnętrzną, i które nazwaliśmy »przesunięciami«. Ponieważ nie umiemy odróżnić od siebie dwu zbyt bliskich siebie przesunięć, zespół więc tych przesunięć posiada cechy *continuum* fizycznego; doświadczenie powiada nam, że są to cechy *continuum* fizycznego o sześciu wymiarach; lecz nie wiemy jeszcze, ile sama przestrzeń posiada wymiarów, musimy uprzednio rozwiązać inne zagadnienie.

Co to jest punkt przestrzeni? Wszystkim się zdaje, że wiedzą to — ale jest to złudzenie. To, co widzimy, gdy usiłujemy sobie wyobrazić punkt przestrzeni, jest to czarna plama na białym papierze, plama kredowa na czarnej tablicy, jest to zawsze przedmiot. Pytanie nasze należy przeto rozumieć w następujący sposób:

Co chcę powiedzieć, gdy mówię, że przedmiot *B* znajduje się w tym samym punkcie, który zajmował poprzednio przedmiot *A*? Innemi słowy, jakie kryteryum pozwala mi na rozpoznanie tego.

Chcę powiedzieć, że jakkolwiek nie poruszyłem się sam (o czym powiadamia mnie zmysł mięśniowy) pierwszy mój palec, który przed chwilą dotykał przedmiotu *A*, dotyka teraz przedmiotu *B*. Mógłbym posługiwać się innemi kryteryami, np. innym palcem lub zmysłem wzroku. Lecz pierwsze kryteryum wystarcza; wiem, że skoro ono da odpowiedź twierdzącą, wszystkie inne kryterya dadzą taką samą odpowiedź. Wiem to z doświadczenia, nie mogę tego wiedzieć *a priori*. Dla tej samej racyi powiadam, że dotyk nie może działać na odległość; jest to inny sposób wyrażenia tego samego faktu doświadczalnego. Gdy natomiast powiadam, że wzrok działa na odległość; chcę przez to rozumieć, że sprawdzian jakiego dostarcza mi wzrok, może dać odpowiedź twierdzącą, gdy inne sprawdziany dają odpowiedź przeczącą.

Jakoż, obraz przedmiotu, jakkolwiek przedmiot ten się oddalił, może tworzyć się w tym samym punkcie siatkówki. Wzrok odpowiada twierdząco, mówi, że przedmiot pozostał w tym samym punkcie, dotyk natomiast zaprzecza temu, albowiem palec mój, który poprzednio dotykał przedmiotu, teraz go już nie dotyka. Gdyby doświadczenie wykazało nam, że jeden palec może odpowiedzieć przecząco, gdy drugi daje odpowiedź twierdzącą, powiedzielibyśmy podobnież, że dotyk działa na odległość.

Słowem, dla każdej postawy mego ciała, pierwszy mój palec określa punkt; — to i tylko to określa punkt przestrzeni.

Każdej postawie odpowiada w ten sposób punkt; zdarza się przecież często, że jeden i ten sam punkt odpowiada kilku różnym postawom (w tym to razie mówimy, że palec nasz nie poruszył się, gdy poruszyła się reszta ciała). Wśród zmian postawy wyróżniamy tedy te, przy których palec się nie poruszył. Co nas na to naprowadza? To, iż często zauważamy, że przy zmianach tych przedmiot, znajdujący się w zetknięciu z palcem, nie przestaje się z nim stykać.

Umieśćmy tedy w jednej klasie wszystkie postawy, które wyprowadzają się jedne z drugich przez jedną ze zmian, któreśmy w ten sposób wyróżnili. Wszystkim postawom jednej klasy będzie odpowiadał jeden i ten sam punkt przestrzeni. Każdej więc klasie odpowiadać będzie punkt, a każdemu punktowi klasa. Zaznaczyć jednak trzeba, że doświadczenie nie dotyczy punktu lecz tej klasy zmian albo, jeszcze ściślej, odpowiadającej jej klasy czuć mięśniowych.

Kiedy więc mówimy, że przestrzeń posiada trzy wymiary, chcemy poprostu powiedzieć, że całokształt tych klas przedstawia się nam jako *continuum* fizyczne o trzech wymiarach.

Czy, gdybyśmy dla określenia punktów przestrzeni posługiwali się nie pierwszym palcem lecz innym, wyniki byłyby takie same? Nie jest to bynajmniej oczywiste *a priori*, ale, jakeśmy widzieli, doświadczenie wykazało, że wszystkie nasze kryterya są ze sobą w zgodzie; to pozwala nam na pytanie powyższe odpowiedzieć twierdząco.

Powracając do tak nazwanych przez nas przesunięć, których ogół, jak widzieliśmy, stanowi grupę, zaznaczmy, że z pośród nich wypadnie nam wyróżnić te, przy których palec się nie porusza; według powyższych wywodów te właśnie charakteryzują punkt przestrzeni i ogół ich stanowić będzie pod-grupę naszej grupy. Każdej pod-grupie odpowiadać więc będzie w ten sposób punkt przestrzeni.

Zdawać by się mogło, że wypływa stąd wniosek, iż d o ś w i a d c z e n i e powiedziało nam, ile przestrzeń posiada wymiarów. W rzeczywistości przecież i tu stwierdzić należy, że doświadczenia nasze dotyczyły nie przestrzeni lecz naszego ciała i jego stosunków do pobliskich przedmiotów. Doświadczenia te, nadto, są nadzwyczaj grube.

W umyśle naszym istniała uprzednio utajona idea pewnej ilości grup, teoryę których zbudował Lie. Jaką z nich obierzemy, aby z niej zrobić pewnego rodzaju wzorzec, do którego będziemy porównywali zjawiska przyrodzone? A po wyborze tej grupy, którą z pod-grup weźmiemy dla scharakteryzowania punktu przestrzeni? W zadaniu tym doświadczenie było nam pomocne, wskazując, jaki wybór jest najlepiej przystosowany do własności naszego ciała. Do tego wszakże ograniczyła się jego rola.

Doświadczenie naszych przodków.

Spotyka się często zdanie, że jeśli doświadczenie indywidualne nie mogło stworzyć geometryi, to potrafiło tego dokonać doświadczenie naszych przodków. Cóż ma znaczyć to zdanie? Czy to, że my nie możemy dowieść doświadczalnie postulatu Euklidesa, lecz przodkowie nasi byli w stanie to zrobić? Bynajmniej. Ma ono wyrażać, że umysł nasz przystosował się drogą doboru naturalnego do warunków świata zewnętrznego, że przyjął on geometryę najkorzystniejszą dla gatunku, czyli innemi słowy, najdogodniejszą. Jest to w zupełnej zgodności z naszemi wnioskami: geometrya nie jest prawdziwa, lecz korzystna.

CZĘŚĆ TRZECIA.

SIŁA.

Rozdział Szósty.

Mechanika klasyczna.

Anglicy wykładają mechanikę jako naukę doświadczalną; na kontynencie wykłada się ją zawsze jako naukę mniej lub więcej dedukcyjną i *a priori*. Racyę mają, rozumie się, anglicy; lecz jakże można było tak długo trwać w błędnych poglądach? czemu uczonym kontynentalnym, którzy usiłowali wyzbyć się nawyknień swych poprzedników, powiodło się to li tylko niezupełnie?

Następnie, jeśli zasady mechaniki nie mają innego źródła prócz doświadczenia, to czyż nie są one tylko przybliżone i prowizoryczne? Czyż nowe doświadczenia nie sprawią z czasem, że trzeba będzie zasady te zmienić lub nawet porzucić?

Pytania takie nasuwają się w sposób naturalny, a trudność ich rozwiązania płynie głównie stąd, że w wykładach mechaniki nie odróżniano wyraźnie, co jest doświadczeniem, co rozumowaniem matematycznym, co umową, co założeniem.

Nadto pamiętać należy, że:

1° Niema przestrzeni bezwzględnej i umysł nasz pojmuje jedynie ruchy względne; tymczasem fakty mechaniczne formułuje się zwykle tak, jak gdyby istniała przestrzeń bezwzględna, do której możnaby je odnosić;

2° Niema czasu bezwzględnego; powiedzenie, że dwa odstępy czasu są równe, nie ma samo przez się sensu, a nabrać go może jedynie mocą pewnej umowy;

3° Nietylko nie posiadamy bezpośredniej intuicyi równości dwu odstępów czasu, lecz nie posiadamy jej również w stosunku do jednoczesności dwu zjawisk, zachodzących na różnych widowniach; wytłumaczyłem to w artykule zatytułowanym *Mesure du temps*[1].

4° Wreszcie nawet nasza geometrya euklidesowa jest tylko pewnego rodzaju umową słowną; moglibyśmy formułować fakty mechaniczne, odnosząc je do przestrzeni nie-euklidesowej, która byłaby *kanwą* mniej dogodną lecz równie uprawnioną, jak nasza zwykła przestrzeń; sformułowanie byłoby wówczas bardziej skomplikowane, lecz zawsze jeszcze możliwe.

Tak więc przestrzeń bezwzględna, czas bezwzględny, a nawet geometrya nie są warunkami, narzucającemi się mechanice; wszystkie te rzeczy nie mają względem mechaniki uprzedniego istnienia, podobnie jak język francuski nie ma, logicznie biorąc, uprzedniego istnienia w stosunku do prawd, wysłowionych po francusku.

Możnaby podjąć próbę sformułowania praw podstawowych mechaniki w języku, któryby był niezależny od wszyst-

---

[1]) Revue de Métaphysique et de Morale t. VI, str. 1—13 (styczeń 1898 r.).

(Artykuł ten wchodzi w skład książki tegoż autora pod tyt. »Wartość Nauki«, stanowiącej dalszy ciąg niniejszej. *Przyp. tłum.*).

kich tych umów; pozwoliłoby to zapewne lepiej zdać sobie sprawę z tego, jaka jest właściwa treść tych praw; zadanie to, przynajmniej w części, postawił sobie Andrade w swoich *Leçons de Mécanique physique.*

Sformułowanie tych praw stałoby się naturalnie bardziej skomplikowane, boć wszystkie te umowy wynaleziono właśnie po to, by sformułowanie to skrócić i uprościć.

Co do mnie, to z wyjątkiem kwestyi przestrzeni bezwzględnej, wszystkie te trudności pozostawię na uboczu; nie dlatego abym je zapoznawał; bynajmniej; lecz rozpatrzyłem je dostatecznie w dwu pierwszych częściach tej książki.

Przyjmiemy tedy prowizorycznie czas bezwzględny i geometryę euklidesową.

Zasada bezwładności. — Ciało, na które nie działa żadna siła, może jedynie posiadać ruch prostolinijny i jednostajny.

Czy jest to prawda, narzucająca się *a priori* umysłowi? Gdyby tak było, to jakże Grecy mogliby ją zapoznawać? Jak mogliby sądzić, że ruch ustaje, skoro ustaje przyczyna, która go zrodziła? albo też, że każde ciało, jeśli nic mu się nie sprzeciwia, nabiera ruchu kołowego, najszlachetniejszego ze wszystkich ruchów?

Skoro mówi się, że prędkość danego ciała nie może się zmienić, jeśli niema powodu aby się zmieniła, to czyż nie możnaby równie dobrze twierdzić, że położenie tego ciała lub że krzywizna jego drogi nie może się zmienić, jeśli nie zmieni jej przyczyna zewnętrzna?

Czy zasada bezwładności, skoro nie jest prawdą *a priori*, jest przeto faktem doświadczalnym? Lecz czyż robiono kiedykolwiek doświadczenia z ciałami, nie ulegającemi działaniu żadnej siły, a jeśli tak, to skąd wiedziano, że na ciała te nie działała żadna siła? Przytacza się zwykle przykład kuli z kości słoniowej, toczącej się bardzo długo po marmurowym stole; dlaczegóż jednak mówimy, że nie ulega ona żadnej sile? czy dlatego, że jest zbyt oddalona od wszystkich innych ciał, by mogły one na nią oddziaływać w sposób uczuwalny? Wszak nie jest ona bardziej odległa od ziemi, niż, gdybyśmy ją swobodnie rzucili w powietrze — a każdy wie, że w takim wypadku ulegałaby ona wpływowi ciężkości, pochodzącemu od przyciągania ziemi.

Profesorowie mechaniki prześlizgują się zazwyczaj szybko po tym przykładzie; dodają przecież, że zasada bezwładności sprawdza się pośrednio przez swe następstwa. Wyrażają się oni źle; chcą oczywiście powiedzieć, że można sprawdzić rozmaite konsekwencye zasady ogólniejszej, której zasada bezwładności jest tylko wypadkiem szczególnym.

Ogólniejszej tej zasadzie nadałbym postać następującą:

Przyśpieszenie danego ciała zależy jedynie od położenia tego ciała i ciał sąsiednich oraz od ich prędkości.

Matematyk powiedziałby, że ruchy wszystkich cząsteczek materyalnych wszechświata podlegają równaniom różniczkowym drugiego rzędu.

Ażeby wykazać, że jest to rzeczywiście naturalne uogólnienie prawa bezwładności, pozwolę sobie na rozważenie pewnej fikcyi. Prawo bezwładności, jak powiedziałem wyżej, nie narzuca się nam *a priori:* na równi z nim inne prawa byłyby zgodne z zasadą dostatecznego powodu. Jeżeli na ciało nie działa żadna siła, tedy zamiast przypuścić, że nie zmienia się jego prędkość, możnaby przypuścić, że nie powinno się zmieniać jego położenie albo jego przyspieszenie.

Otóż przypuśćmy na chwilę, że jedno z tych dwu praw hypotecznych jest prawem przyrody i zastępuje nasze prawo bezwładności. Jakie byłoby naturalne jego uogólnienie? Chwila zastanowienia da nam odpowiedź na to pytanie.

W pierwszym wypadku należałoby przypuścić, że prędkość ciała zależy jedynie od jego położenia oraz od położenia ciał sąsiednich; w drugim, że zmiana przyspieszenia danego ciała zależy jedynie od położenia tego ciała i ciał sąsiednich, od ich prędkości i ich przyspieszeń, czyli, mówiąc językiem matematycznym, równania różniczkowe ruchu byłyby pierwszego rzędu w wypadku pierwszym, trzeciego zaś w wypadku drugim.

Zmodyfikujmy nieco naszą fikcyę. Wyobraźmy sobie świat analogiczny do naszego układu słonecznego, w którym wszakże, osobliwym przypadkiem, orbity wszystkich planet nie miałyby mimośrodu ani nachylenia. Przypuśćmy nadto, że masy tych planet zbyt są nieznaczne, by wzajemne ich pertubacye dawały się odczuwać. Astronomowie, zamieszkujący jedną z tych planet, wywnioskowaliby niechybnie, że orbita każdego ciała niebieskiego musi być kołowa i równoległa do pewnej płaszczyzny; położenie takiego ciała w danej chwili wystarczyłoby natenczas do oznaczenia jego prędkości i całej jego drogi. Obraliby oni jako prawo bezwładności pierwsze z dwu praw hypotetycznych, o których mówiliśmy przed chwilą.

Przypuśćmy teraz, że przez układ ten przeszłoby nagle z wielką prędkością ciało o wielkiej masie, przybyłe z odległych konstelacyi. Wszystkie orbity uległyby znacznym zakłóceniom. Astronomowie nasi nie byliby jeszcze bardzo zdziwieni; domyśliliby się łatwo, że jedynym sprawcą wszystkiego jest nowe to ciało niebieskie, sądziliby jednak, że skoro oddali się ono, porządek zostanie przywrócony sam przez się; zapewne, odległości planet od słońca nie będą te same co przed kataklizmem, lecz gdy zniknie ciało zakłócające, orbity przybiorą znowu kształty kół.

Dopiero gdy ciało perturbujące zginie w oddali a pomimo to orbity zamiast powrócić do kształtu kołowego staną się eliptycznemi, dostrzegą astronomowie ci swój błąd i stwierdzą konieczność przebudowania całej swej mechaniki.

Zatrzymałem się nieco dłużej na tych hypotezach, albowiem sądzę, że niepodobna dobrze zrozumieć, czym jest nasze uogólnione prawo bezwładności, jeżeli nie przeciwstawić mu przypuszczenia przeciwnego.

Zapytajmy teraz, czy uogólnione to prawo bezwładności zostało stwierdzone przez doświadczenie i czy można je tą drogą stwierdzić? Kiedy Newton pisał swoje *Principia,* uważał tę prawdę za ustanowioną i dowiedzioną przez doświadczenie — nietylko przez wyobrażenia antropomorficzne, do których wrócimy jeszcze niżej, lecz przez prace Galileusza, a nadto przez same prawa Keplera; albowiem według praw tych droga planety jest całkowicie oznaczona przez jej początkowe położenie i prędkość; a tego właśnie wymaga nasza uogólniona zasada bezwładności.

Żeby zasada ta pozornie tylko była prawdziwą, żeby zachodziła obawa, że wypadnie ją kiedyś zastąpić przez jedną z zasad analogicznych do tych, jakie jej przeciwstawialiśmy powyżej, trzebaby abyśmy byli wprowadzeni w błąd przez jakiś niezwykły przypadek, podobny do tego, który w powyższej fikcyi wprowadził w błąd naszych urojonych astronomów.

Przypuszczenie takie zbyt mało jest prawdopodobne, byśmy się nad nim mieli zastanawiać. Nikt nie uwierzy, by przypadki takie mogły zachodzić; zapewne, prawdopodobieństwo, że dwa mimośrody będą jednocześnie równe zeru, z pominięciem błędów obserwacyi, nie jest mniejsze niż prawdopodobieństwo, że jeden z nich będzie równy *0, 1* drugi zaś *0, 2* przy zaniechaniu tychże błędów. Prawdopodobieństwo zjawiska prostego nie jest mniejsze niż prawdopodobieństwo zjawiska złożonego; pomimo to, jeśli pierwsze zajdzie, nie zgodzimy się na to, by przypisać je przypadkowi; nie zechcemy uwierzyć, by przyroda postąpiła tak umyślnie dla oszukania nas. Odsuwając tedy przypuszczenie co do możliwości tego rodzaju błędu, możemy powiedzieć, że, co dotyczy astronomii, prawo nasze zostało stwierdzone przez doświadczenie.

Lecz astronomia nie stanowi całej fizyki.

Czy nie należy się obawiać, że jakieś nowe doświadczenie z innego obszaru fizyki nie zaprzeczy kiedyś temu prawu? Prawo doświadczalne podlega zawsze rewizyi; przygotowanym być trzeba na to, że może ono być zastąpione przez inne prawo ściślejsze.

A przecież nikt nie żywi poważnej obawy, by prawo, o którym mówimy, kiedykolwiek miało zostać porzucone czy poprawione. Dlaczego? Dlatego właśnie, że niepodobna będzie nigdy poddać go próbie decydującej.

Przedewszystkim zauważmy, że, aby próba ta była zupełna, trzebaby, by po pewnym czasie wszystkie ciała wszechświata powróciły do początkowych swych położeń i prędkości początkowych. Zobaczylibyśmy wówczas, czy poczynając od tej chwili pobiegną one znów po tych samych drogach, po których biegły dawniej.

Lecz doświadczenie to jest niewykonalne, zrobić je można jedynie częściowo i jakkolwiek dobrzeby je zrobiono, zawsze znajdzie się pewna liczba ciał, które nie powrócą do swych położeń początkowych; tak tedy każde uchylenie się od naszego prawa będzie mogło łatwo znaleźć wytłumaczenie.

Następnie: w astronomii w i d z i m y ciała, których ruchy badamy, i przypuszczamy prawie zawsze, że nie ulegają one działaniu żadnych innych ciał niewidzialnych. Wobec tego doświadczenie musi prawo nasze potwierdzić albo mu zaprzeczyć.

W fizyce natomiast jest inaczej: jeżeli podstawą zjawisk fizycznych są ruchy, to są to ruchy cząsteczek, których nie widzimy. Jeżeli tedy przyśpieszenie jednego z widzialnych ciał zdaje się nam zależeć od c z e g o ś i n n e g o niż od położeń lub prędkości innych ciał widzialnych lub cząsteczek niewidzialnych, których istnienie uważalibyśmy za wskazane uprzednio przypuścić, to nic nie przeszkodzi nam przypuścić, że t o c o ś i n n e g o jest to położenie lub prędkość innych cząsteczek, których obecności nie podejrzywaliśmy przedtym. Prawo zatym będzie uratowane.

Niechaj mi będzie wolno sięgnąć na chwilę do języka matematycznego dla wyrażenia tej samej myśli w innej postaci. Przypuśćmy, że obserwujemy n cząsteczek i stwierdzamy, że ich $3n$ spółrzędne czynią zadość $3n$ równaniom różniczkowym czwartego rzędu (nie zaś drugiego rzędu, jak wymagałoby tego prawo bezwładności). Wiadomo, że przez wprowadzenie $3n$ zmiennych pomocniczych układ $3n$ równań czwartego rzędu daje się sprowadzić do układu $6n$ równań drugiego rzędu. Jeżeli więc przypuścimy, że te $3n$ zmienne pomocnicze przedstawiają spółrzędne n cząsteczek niewidzialnych, rezultat będzie znowu zgodny z prawem bezwładności.

Słowem, prawo to, stwierdzone doświadczalnie w pewnej liczbie wypadków szczególnych, daje się bez obawy rozciągnąć na wypadki najogólniejsze, albowiem wiemy, że w ogólnych tych wypadkach doświadczenie nie może już ani go potwierdzić ani mu zaprzeczyć.

Prawo przyspieszenia. — Przyspieszenie danego ciała równe jest sile, która nań działa, podzielonej przez jego masę.

Czy prawo to można sprawdzić doświadczalnie? Aby to uczynić, należałoby zmierzyć trzy wielkości, figurujące w jego wysłowieniu: przyspieszenie, siłę i masę.

Przyjmuję, że można zmierzyć przyspieszenie, gdyż pomijam trudności, związane z kwestyą pomiaru czasu. Ale jakże zmierzyć siłę lub masę? Toż nie wiemy nawet, co to jest.

Co to jest masa? Jest to, odpowiada Newton, iloczyn z objętości przez gęstość. — Trafniej byłoby powiedzieć, mówią Thomson i Tait, że gęstość jest ilorazem z masy przez objętość. — Co to jest siła? Jest to, odpowiada Lagrange, przyczyna wywołująca ruch ciała lub dążąca do wywołania go. — Jest to, powie Kirchhoff, iloczyn z masy przez przyspieszenie. Czemuż więc nie powiedzieć, że masa jest ilorazem z siły przez przyspieszenie?

Trudności te są niepokonalne.

Kiedy mówimy, że siła jest przyczyną ruchu, wkraczamy w metafizykę, i określenie to, gdyby się nim miano zadowolić, okazałoby się zupełnie jałowym. Aby określenie mogło do czegoś służyć, musi ono nas nauczyć mierzenia siły;

będzie to zresztą wystarczające; bynajmniej nie jest potrzebne, by mówiła nam ona o tym, czym jest siła s a m a w s o b i e, ani też, czy jest ona przyczyną czy skutkiem ruchu.

Należy więc przedewszystkim określić równość dwu sił. Kiedy powiemy, że dwie siły są równe? Wówczas, odpowie kto, gdyby, przyłożone do jednej i tej samej masy, nadadzą jej one takie same przyspieszenie, albo też, gdy przeciwstawione sobie, wzajemnie się zrównoważą. Określenie to jest tylko złudzeniem. Nie można odpiąć siły, przyłożonej do pewnego ciała, i zahaczyć ją o inne ciało tak, jak się odpina lokomotywę, aby ją zaprząc do innego pociągu. Nie można tedy wiedzieć, jakie przyspieszenie nadałaby dana siła przyłożona do danego ciała, innemu ciału, j e ż e l i byłaby doń przyłożona. Niepodobna wiedzieć, jak zachowywałyby się dwie nieprzeciwstawione sobie siły, g d y b y były sobie przeciwstawione.

To właśnie określenie usiłuje się, że tak powiem, zmateryalizować, gdy się mierzy siłę zapomocą dynamometru lub równoważy ją zapomocą ciężaru. Niechaj dwie siły F i F' — dla prostoty przypuścimy, że są one pionowe i skierowane od dołu ku górze — przyłożone będą do dwu ciał C i C'; zawieśmy jeden i ten sam ciężar P naprzód u ciała C, następnie u ciała C'; jeżeli równowaga zachodzi w obu wypadkach, wniesiemy, że dwie siły F i F' są sobie równe, gdyż obydwie są równe ciężarowi ciała P.

Lecz czyż jesteśmy pewni, że ciało P zachowało ten sam ciężar, gdyśmy je przenosili od pierwszego ciała do drugiego? Bynajmniej — p e w n i j e s t e ś m y, ż e j e s t p r z e c i w n i e; wiemy, że natężenie ciężkości zmienia się ze zmianą miejsca, że jest ono np. większe u bieguna niż na równiku. Zapewne, różnica ta jest bardzo niewielka, i w praktyce pominiemy ją; lecz dobre określenie powinnoby posiadać ścisłość matematyczną; tu zaś ścisłości tej niema. Co powiedzieliśmy o ciężarze, stosuje się oczywiście również do siły sprężyny dynamometru, która zmienić się może pod wpływem temperatury oraz mnóstwa innych okoliczności.

Nie dość na tem; nie można powiedzieć, że ciężar ciała *P* jest przyłożony do ciała *C* i równoważy wprost siłę *F*. Do ciała *C* jest przyłożone działanie *A* ciała *P* na ciało *C*; ciało *P* ulega ze swej strony swemu ciężarowi oraz działaniu *R* ciała *C* na *P*. W rezultacie siła *F* równa jest sile *A*, gdyż równoważy ją; siła *A* równa jest sile *R* na mocy prawa równości działania i oddziaływania; wreszcie siła *R* równa jest ciężarowi ciała *P*, ponieważ równoważy go. Z tych to trzech równości wyprowadzamy, jako wniosek, równość *F* i ciężaru ciała *P*.

Zmuszeni więc jesteśmy wprowadzić do określenia równości dwóch sił samą zasadę równości działania i oddziaływania; wobec tego zasady tej nie należy uważać za prawo doświadczalne lecz za określenie.

Posiadamy tedy dwa prawidła do stwierdzenia równości dwu sił: równość dwu sił, równoważących się wzajemnie; równość działania i oddziaływania. Widzieliśmy wszakże powyżej, że dwa te prawidła nie są wystarczające: musimy uciec się do trzeciego prawidła i przypuścić, że niektóre siły, jak np. ciężar ciała są stałe co do wielkości i kierunku. Lecz trzecie to prawidło, jak powiedziałem, jest prawem doświadczalnym; jest ono prawdziwe tylko w przybliżeniu; jest ono złym określeniem.

Powracamy więc do określenia Kirchhoffa: siła jest równa masie pomnożonej przez przyspieszenie. To »prawo Newtona« przestaje więc z kolei grać rolę prawa doświadczalnego, staje się poprostu określeniem. Lecz i to określenie nie wystarcza, skoro nie wiemy, co to jest masa. Pozwala nam ono wprawdzie na wyliczenie stosunku dwóch sił, przyłożonych do jednego ciała w różnych chwilach; nie mówi nam przecież nic o stosunku dwóch sił, przyłożonych do dwóch różnych ciał.

Aby je uzupełnić, trzeba znowu uciec się do trzeciego prawa Newtona (równość działania i oddziaływania) uważanego również nie za prawo doświadczalne lecz za określenie. Dwa ciała A i B działają jedno na drugie; przyspieszenie A, pomnożone przez masę A równa się działaniu B na A; podobnież iloczyn przyspieszenia B przez jego masę równa się oddziaływaniu A na B. Ponieważ, na mocy określenia, działanie równa się oddziaływaniu, masy A i B mają się do siebie w stosunku odwrotnym do swoich przyspieszeń. W ten sposób określony zostaje stosunek tych dwóch mas, i rzeczą doświadczenia będzie sprawdzić, że stosunek ten jest stały.

Wszystko to byłoby bardzo dobre, gdyby ciała A i B istniały samowtór i nie ulegały wpływowi reszty świata. Lecz tak bynajmniej nie jest; przyspieszenie A pochodzi nietylko od działania B, ale nadto od działania mnóstwa innych ciał C, D... Aby zastosować poprzedzające prawidło, należy więc rozłożyć przyspieszenie A na kilka składowych i wsród nich wyróżnić tę, która pochodzi od działania B.

Rozkład ten byłby jeszcze możliwy, gdybyśmy przypuścili, że działanie C na A dodaje się poprostu do działania B na A, przyczym obecność ciała C nie zmienia w niczym działania B na A, ani też obecność B nie zmienia działania C na A, gdybyśmy więc przypuścili, że dwa jakiekolwiek ciała przyciągają się, że wzajemne ich działanie jest skierowane wzdłuż łączącej je prostej, i zależy jedynie od ich odległości, gdybyśmy jednym słowem założyli hypotezę sił centralnych.

Wiadomo, że dla oznaczenia mas ciał niebieskich, używa się innej całkiem zasady. Prawo ciążenia uczy, że przyciąganie dwóch ciał jest proporcyonalne do ich mas; jeśli r jest ich odległością, m i m' ich masami, k stałą, tedy przyciąganie będzie równe

$$\frac{k\,m\,m'}{r^2}.$$

Mierzy się wówczas nie masę jako stosunek siły do przyspieszenia, lecz masę przyciągającą; nie bezwładność ciała, lecz jego zdolność przyciągania.

Jest to metoda pośrednia, której stosowanie nie jest teoretycznie nieodzowne. Mogłoby bardzo dobrze zdarzyć się, że przyciąganie byłoby odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości, nie będąc zarazem proporcyonalne do iloczynu mas, że byłoby ono równe

$$\frac{f}{r^2}$$

przyczym nie zachodziłaby równość

$$f = k\, m\, m'.$$

Gdyby tak było, możnaby pomimo to mierzyć masy ciał niebieskich na podstawie obserwacyi ruchów względnych tych ciał.

Lecz czy mamy prawo założyć hypotezę sił centralnych? Czy hypoteza ta jest ściśle prawdziwa? Czy jest pewnym, że doświadczenie nigdy jej nie zaprzeczy. Któż ośmieliłby się to twierdzić? Jeśli zaś będziemy musieli porzucić to założenie, cały nasz tak pracowicie wzniesiony gmach runie.

Nie mamy więc już prawa mówić o składowej przyspieszenia A, pochodzącej od działania B. Nie mamy żadnego sposobu odróżnienia jej od składowej, pochodzącej od działania C lub jakiegokolwiek innego ciała. Prawidło mierzenia mas przestaje być stosowalne.

Cóż pozostaje wobec tego z zasady równości działania i oddziaływania? Jeśli odrzucimy hypotezę sił centralnych, zasada ta będzie oczywiście musiała brzmieć, jak następuje: wypadkowa geometryczna wszystkich sił przyłożonych do poszczególnych ciał układu, nie ulegającego wpływowi żadnych działań zewnętrznych, będzie równa zeru. Albo, innemi słowy, ruch środka ciężkości tego układu będzie prostolinijny i jednostajny.

Tu, jak się zdaje, mamy sposób określenia masy; położenie środka ciężkości zależy oczywiście od wartości nadanych masom; trzeba będzie wartości te oznaczyć tak, by ruch środka ciężkości był prostolinijny i jednostajny, będzie to zawsze możliwe, jeśli trzecie prawo Newtona jest prawdziwe, i naogół określi wartość mas w sposób jednoznaczny.

Lecz niema układów, nie ulegających żadnemu działaniu zewnętrznemu; wszystkie części wszechświata ulegają w mniejszym lub większym stopniu działaniu wszystkich innych części. Prawo ruchu środka ciężkości jest ściśle prawdziwe jedynie w zastosowaniu do całego wszechświata.

Wobec tego jednak dla oznaczenia zapomocą tego prawa wartości mas, należałoby obserwować ruch środka ciężkości wszechświata. Niedorzeczność tego wniosku bije w oczy; znamy jedynie ruchy względne; ruch środka ciężkości wszechświata pozostanie dla nas wieczną niewiadomą.

Nie pozostaje więc nic — usiłowania nasze okazały się bezowocne; ostać się jedynie może określenie następujące, które jest w gruncie rzeczy stwierdzeniem naszej bezsilności: masy są to spółczynniki, których wprowadzenie do rachunków jest dogodne.

Moglibyśmy przebudować od początku całą mechanikę, nadając wszystkim masom inne wartości. Nowa ta mechanika nie byłaby w sprzeczności ani z doświadczeniem, ani z ogólnemi zasadami dynamiki (zasada bezwładności, proporcyonalności sił do mas i do przyspieszeń, równość działania i oddziaływania, ruch prostolinijny i jednostajny środka ciężkości, zasada pól).

Ale równania tej nowej mechaniki byłyby mniej proste. Zrozumiejmy się: mniej prostemi byłyby tylko pierwsze wyrazy, tj. te, które poznaliśmy już z doświadczenia; być może, iż możliwe byłoby zmienienie wartości mas o niewielkie ilości bez ujęcia ani też dodania równaniom zupełnym pierwotnej ich prostoty.

Hertz zadał sobie pytanie, czy zasady mechaniki są ściśle prawdziwe. »W przekonaniu wielu fizyków, powiada on, wydaje się to nie do pojęcia, by najodleglejsze nawet doświadczenie mogło kiedykolwiek zmienić coś w niezachwianych zasadach mechaniki, a przecież, co pochodzi od doświadczenia, może być zawsze poprawione przez doświadczenie«.

Po tym, co powiedzieliśmy wyżej, obawy te będą zbyteczne. Zasady dynamiki wydawały się nam naprzód prawdami doświadczalnemi, lecz byliśmy zmuszeni posługiwać się niemi, jako określeniami. Mocą określenia równa się siła iloczynowi masy przez przyśpieszenie; oto zasada, którą tym samym nie może zachwiać żadne późniejsze doświadczenie. Podobnież mocą określenia działanie równa się oddziaływaniu.

Lecz w takim razie, powie kto, te nie dające się sprawdzić zasady są pozbawione wszelkiego znaczenia; doświadczenie nie może im zaprzeczyć; ale i one nie mówią nam nic pożytecznego; pocóż tedy studyować dynamikę?

Zbyt pospieszny ten wyrok byłby niesprawiedliwy. Niema w przyrodzie układu doskonale odosobnionego, doskonale obcego wszelkim wpływom zewnętrznym; lecz istnieją układy w przybliżeniu odosobnione.

Obserwując podobny układ, można badać nietylko ruch względny poszczególnych jego części jednych w odniesieniu do drugich, lecz nadto ruch jego środka ciężkości w odniesieniu do innych części wszechświata. Stwierdza się natenczas, że ruch tego środka ciężkości jest w przybliżeniu prostolinijny i jednostajny, zgodnie z trzecim prawem Newtona.

Jest to prawda doświadczalna, lecz doświadczenie nie będzie mogło nią zachwiać; cóż bowiem powiedziałoby nam doświadczenie ściślejsze od poprzednich? Powiedziałoby, że prawo było tylko w przybliżeniu prawdziwe; ale o tym wiedzieliśmy już przedtym.

Rozumiemy teraz, w jaki sposób doświadczenie mogło służyć za podstawę zasadom mechaniki a jednak nie będzie nigdy mogło zasadom tym zaprzeczyć.

Mechanika antropomorficzna. — Kirchhoff, powie kto, uległ poprostu powszechnej dążności matematyków do nominalizmu; zręczność jego, jako fizyka, nie zdołała go od tego uchronić. Chciał mieć określenie siły, zrobił więc je z pierwszego lepszego twierdzenia; lecz określenie siły wcale nam nie jest potrzebne: idea siły jest ideą pierwotną, niedającą się sprowadzić do żadnej innej, niedającą się określić; wszyscy wiemy, co to jest, posiadamy bezpośrednią jej intuicyę. Źródłem tej bezpośredniej intuicyi jest idea wysiłku, z którą oswoiliśmy się od dzieciństwa.

Otóż zauważmy przedewszystkim, że gdyby nawet bezpośrednia ta intuicya dawała nam poznać prawdziwą naturę siły samej w sobie, to byłaby przecież niewystarczającą do ugruntowania mechaniki; byłaby poza tym zupełnie bezużyteczna. Chodzi bowiem nie o to by wiedzieć, co to jest siła, lecz o to, by umieć ją mierzyć.

Wszystko, co nie uczy nas, jak ją mierzyć, jest równie bezpożyteczne dla mechanika, jak jest np. dla fizyka, badającego ciepło, bezpożyteczne subjektywne pojęcie zimna i gorąca. Subjektywnego tego pojęcia nie można wyrazić w liczbach, więc nie zda się ono na nic; uczony, którego skóra byłaby zupełnie złym przewodnikiem ciepła, który przeto nie odczuwałby nigdy wrażeń zimna, ani gorąca, mógłby obserwować termometr równie dobrze, jak inny, a wystarczyłoby mu to do zbudowania całej teoryi ciepła.

Otóż owa bezpośrednia idea wysiłku nie może nam służyć do pomiaru siły; oczywistym jest np., że ja odczuję więcej zmęczenia przy podniesieniu ciężaru pięćdziesięciu-kilogramowego, niż człowiek nawykły do dźwigania ciężarów.

Cowięcej: pojęcie to wysiłku nie ujawnia nam prawdziwej istoty siły; sprowadza się ono ostatecznie do wspomnienia czuć mięśniowych, a nikt wszak nie będzie utrzymywał, że słońce doznaje czucia mięśniowego, przyciągając ziemię.

Doszukiwać by się w nim można co najwyżej pewnego symbolu, mniej dokładnego i mniej dogodnego niż strzałki, któremi się posługują matematycy, lecz równie jak one odległego od rzeczywistości.

Antropomorfizm odegrał znaczną rolę historyczną w genezie mechaniki; być może, iż dostarczy on jeszcze niekiedy symbolu, który wyda się dogodnym temu lub owemu umysłowi; nie może on atoli stać się podstawą żadnej teoryi o charakterze prawdziwie naukowym, lub prawdziwie filozoficznym.

»Szkoła Nici«. — Andrade w swoich *Leçons de Mécanique physique* odmłodził mechanikę antropomorficzną. Szkole mechaników, do której należy Kirchhoff, przeciwstawia on dość dziwacznie przez siebie nazwaną »szkołę nici«. Szkoła ta usiłuje wszystko sprowadzić do »rozważania pewnych układów materyalnych o masie tak nieznacznej, że można ją pominąć; układy te znajdują się w stanie napięcia i zdolne są przekazywać znaczne wysiłki ciałom odległym · idealnym typem takich układów jest nić«.

Nić, przenosząca jakąkolwiek siłę, wydłuża się nieco pod wpływem tej siły; kierunek nici wskazuje nam kierunek siły, wydłużenie nici jest miarą wielkości siły.

Można tedy wyobrazić sobie następujące doświadczenie. Ciało A przywiązane jest do nici; na przeciwny koniec nici każemy działać jakiejkolwiek sile, której wielkość zmieniamy póty, aż nić wydłuży się o α, notujemy wówczas przyspieszenie ciała A; odwiązujemy A i przywiązujemy do tej samej nici ciało B, każemy znowu działać tej samej sile, lub innej, póty, aż wydłużenie nici będzie znowu równe α; notujemy przyspieszenie ciała B. Powtarzamy następnie to samo doświadczenie zarówno z ciałem A jak z ciałem B lecz tak, aby wydłużenie nici równało się β. Cztery zaobserwowane przyspieszenia winny być proporcyonalne. Daje nam to próbę doświadczalną sformułowanego wyżej prawa przyspieszeń.

Albo też poddaje się ciało jednoczesnemu działaniu kilku identycznych nici, identycznie napiętych i szuka się doświadczalnie, jakie powinny być wzajemne kierunki wszystkich tych nici, aby ciało pozostawało w równowadze. Daje nam to próbę doświadczalną prawidła składania sił.

Ale cóż w rezultacie zrobiliśmy w ten sposób? Określiliśmy siłę, której ulega nić, przez zmianę postaci, zaszłą w nici — co jest dosyć racyonalne; przypuściliśmy następnie, że gdy ciało przywiązane jest do nici, wysiłek przekazany mu za pośrednictwem nici równa się działaniu, jakie ciało to wywiera na nić; w rezultacie odwołaliśmy się do zasady równości działania i oddziaływania, uważając ją nie za prawdę doświadczalną lecz wprost za określenie siły.

Określenie to jest zupełnie tak samo umowne, jak określenie Kirchhoffa, ale jest znacznie mniej ogólne.

Niewszystkie siły przekazują swe działanie zapomocą nici (a gdyby nawet tak było, nici te musiałyby być tożsame, aby można było posługiwać się niemi dla porównania samych sił). Jeślibyśmy nawet przypuścili, że ziemia połączona jest ze słońcem jakąś niewidzialną nicią, to każdy przyzna nam przynajmniej, że nie posiadamy żadnego sposobu zmierzenia wydłużenia tej nici.

Dziewięć tedy razy na dziesięć określenie to odmówiłoby nam usług; niepodobnaby było nadać mu żadnej treści, i trzebaby było powrócić do określenia Kirchhoffa.

Pocóż więc obierać tak okólną drogę? Mamy przyjąć pewne określenie siły, posiadające sens jedynie w pewnych szczególnych wypadkach. W wypadkach tych sprawdzamy doświadczalnie, że prowadzi ona do prawa przyspieszenia. Opierając się na powadze tego doświadczenia, bierzemy następnie prawo przyspieszenia, jako określenie siły we wszystkich innych wypadkach.

Czyż nie byłoby prościej uważać prawo przyspieszenia za określenie we wszystkich wypadkach a na pomienione doświadczenia patrzeć nie jako na sprawdzenie tego prawa lecz jako na probierz zasady oddziaływania lub jako na dowód, że odkształcenia ciała sprężystego zależą jedynie od sił, którym ciało to jest poddane?

A to tymbardziej, że warunkom, w których owo określenie mogłoby się nadać, nie może się nigdy stać zadość w sposób doskonały, że nić nigdy nie jest pozbawiona masy, że nie jest ona nigdy wolna od działania innych sił prócz oddziaływania ciał, przyczepionych do jej końców.

Niemniej przecież pomysły Andrade'a bardzo są interesujące; jeżeli nie zaspakajają one naszych wymagań logicznych, to pozwalają nam lepiej zrozumieć genezę historyczną podstawowych pojęć mechanicznych. Refleksye, jakie one w nas wzbudzają, wykazują nam, jak umysł ludzki wzniósł się od naiwnego antropomorfizmu do spółczesnych koncepcyi naukowych.

Widzimy u punktu wyjścia doświadczenie bardzo szczególne i zresztą dość zgruba ciosane; u punktu końcowego — prawo zupełnie ogólne, zupełnie ścisłe, prawo, którego pewność uważamy za bezwzględną. Pewność tę czerpie to prawo z naszej, że tak powiem woli, albowiem uważamy je za umowę.

Czyż więc prawo przyspieszenia i reguła składania sił są tylko dowolnemi naszemi umowami? Umowami — zapewne, ale nie dowolnemi: byłyby one dowolne, gdybyśmy zapomnieli o doświadczeniach, które doprowadziły założycieli nauki do ich przyjęcia, a które pomimo całej swej niedoskonałości są wystarczające, aby je usprawiedliwić. Dobrze jest, że się od czasu do czasu skierowuje naszą uwagę na doświadczalne źródło tych umów.

Rozdział Siódmy.

Ruch względny a ruch bezwzględny.

Zasada ruchu względnego. — Próbowano kilkakrotnie związać prawo przyspieszenia z zasadą ogólniejszą. Ruch jakiegokolwiek układu ulegać musi tym samym prawom, czy to w odniesieniu do osi stałych czy do osi ruchomych, ożywionych ruchem prostolinijnym i jednostajnym. Stanowi to zasadę ruchu względnego, która narzuca się nam dla dwu racyi: naprzód potwierdza ją najpospolitsze doświadczenie, powtóre zaś przypuszczenie przeciwne wydaje się umysłowi dziwnie odstręczającym.

Przyjmijmy więc tę zasadę, i rozważmy ciało, na które działa siła; ruch względny tego ciała w stosunku do obserwatora, poruszającego się z prędkością jednostajną równą prędkości początkowej ciała, będzie musiał być tożsamy z ruchem bezwzględnym tego ciała, gdyby początkowym jego stanem był spoczynek. Wnosi się stąd, że przyspieszenie jego nie powinno zależeć od jego prędkości bezwzględnej; usiłowano nawet wyprowadzić stąd całkowite prawo przyspieszenia.

Przez długi czas ślady tego dowodzenia pozostały w programach *baccalauréat ès sciences*. Oczywistym jest, że usiłowanie to jest próżne. Przeszkodą uniemożliwiającą nam dowiedzenie prawa przyspieszenia, było to, żeśmy nie mieli określenia siły; przeszkoda ta istnieje i nadal, boć powołana zasada nie dała nam brakującego określenia.

Niemniej jednak zasada ruchu względnego jest interesująca sama przez się, i zasługuje na bliższe zbadanie. Postarajmy się naprzód sformułować ją w sposób ścisły.

Powiedzieliśmy wyżej, iż przyspieszenia poszczególnych ciał, wchodzących w skład układu odosobnionego, zależą jedynie od ich prędkości i położeń względnych, nie zaś od ich prędkości i położeń bezwzględnych, byle osi ruchome, do których odnosimy ruch względny, ożywione były ruchem prostolinijnym i jednostajnym. Innemi słowy, przyspieszenia ich zależą jedynie od różnic ich prędkości i różnic ich spółrzędnych, nie zaś od wartości bezwzględnych tych prędkości i tych spółrzędnych.

Jeżeli zasada ta jest prawdziwa dla przyspieszeń względnych, czyli dla różnic przyspieszeń, tedy, kojarząc ją z prawem oddziaływania, będzie można dowieść, że jest ona prawdziwa i dla przyspieszeń bezwzględnych.

Pozostaje jeszcze dowiedzenie, że różnice przyspieszeń zależą jedynie od różnic prędkości i spółrzędnych, albo, mówiąc językiem matematycznym, że różnice spółrzędnych czynią zadość równaniom różniczkowym drugiego rzędu.

Czy dowód ten można wyprowadzić z doświadczeń czy też z rozważań *a priori?*

Na podstawie tego, cośmy powiedzieli wyżej, czytelnik znajdzie sam na to odpowiedź.

W rzeczy bowiem samej, w tym sformułowaniu zasada ruchu względnego dziwnie jest podobna do zasady, którąśmy nazwali uogólnioną zasadą bezwładności; nie jest z nią tożsama, albowiem mamy tu różnice spółrzędnych, nie zaś same spółrzędne. Nowa zasada mówi przeto więcej, niż poprzednia, lecz to samo roztrząsanie daje się do niej zastosować i do tych samych prowadzi wniosków; niema więc potrzeby doń powracać.

Argument Newtona. — Nasuwa się tu kwestya bardzo ważna i nawet nieco niepokojąca. Powiedziałem, że zasada ruchu względnego jest dla nas nietylko wynikiem doświadczenia, i że *a priori* wszelkie przypuszczenie przeciwne wydaje się umysłowi odstręczającym.

Skoro tak, to dlaczego zasada ta jest prawdziwa jedynie o tyle, o ile ruch osi ruchomych jest prostolinijny i jednostajny? Czy nie powinnaby ona narzucać się nam z równą siłą, gdy ruch ten jest niejednostajny, albo przynajmniej gdy sprowadza się on do jednostajnego obrotu. Otóż w obu tych wypadkach zasada ta nie jest prawdziwa.

Nie zatrzymamy się długo nad wypadkiem, w którym ruch osi jest prostolinijny lecz niejednostajny; chwila zastanowienia wystarczy tu, aby rozwiać paradoks. Gdy jedziemy w wagonie, i pociąg, potykając się o jakąkolwiek przeszkodę, nagle się zatrzyma, zostaniemy rzuceni na przeciwległą ławkę, chociaż nie działa na nas bezpośrednio żadna siła. Niema w tym nic tajemniczego; jeśli my nie ulegliśmy działaniu żadnej siły zewnętrznej, to przecież pociąg uległ zewnętrznemu uderzeniu. Nie może być nic paradoksalnego w tym, że ruch względny dwu ciał zostaje zakłócony, skoro ruch jednego z nich ulega zmianie za sprawą przyczyny zewnętrznej.

Zatrzymam się dłużej nad wypadkiem ruchów względnych, odniesionych do osi ożywionych ruchem obrotowym o jednostajnej prędkości. Gdyby niebo było ustawicznie pokryte obłokami, gdybyśmy nie mieli możności obserwowania ciał niebieskich, moglibyśmy pomimo to dowiedzieć się, że ziemia się obraca; powiadomiłoby nas o tym spłaszczenie ziemi lub eksperyment Foucault'a.

A jednak czyż w takich warunkach powiedzenie, że ziemia obraca się, miałoby jakikolwiek sens? Jeśli niema przestrzeni bezwzględnej, to czy można się obracać nie obracając się względem czegoś — z drugiej zaś strony czyż moglibyśmy zgodzić się na wniosek, wyprowadzony przez Newtona, i wierzyć w istnienie przestrzeni bezwzględnej?

Nie wystarczy przecież stwierdzić, że wszystkie możliwe rozwiązania jednakowo nas rażą; trzeba zanalizować w każdym oddzielnym wypadku przyczyny naszego wstrętu, ażeby zdecydować się na wybór z całą znajomością rzeczy. Wobec tego czytelnik wybaczy mi następujące długie rostrząsania.

Powróćmy do naszej fikcyi: gęste obłoki ukrywają ciała niebieskie przed oczyma ludzi, którzy nietylko nie mogą ich obserwować, lecz nie wiedzą nawet o ich istnieniu; w jakiż sposób ludzie ci dowiedzą się, że ziemia się obraca? Z większą jeszcze, niż nasi przodkowie, pewnością uważać oni będą ziemię, po której stąpają, za nieruchomą i niewzruszoną; długo bardzo wypadnie im czekać na przyjście ich Kopernika. Ale w końcu ten Kopernik zjawiłby się; zachodzi pytanie: jakże mógłby się zjawić?

Mechanicy tego fikcyjnego świata nie napotkaliby z początku sprzeczności niepokonalnych. W teoryi ruchu względnego rozważa się, prócz sił rzeczywistych, dwie siły fikcyjne, które nazywa się siłą odśrodkową zwyczajną i siłą odśrodkową złożoną. Nasi urojeni badacze mogliby więc wszystko wytłumaczyć, uważając te dwie siły za rzeczywiste, i nie widzieliby w tym sprzeczności w stosunku do uogólnionej zasady bezwładności, albowiem jedna z tych sił zależałaby od położeń bezwzględnych poszczególnych części układu, podobnie jak rzeczywiste przyciągania, druga zaś od ich prędkości względnych, podobnie jak rzeczywiste tarcia.

Rychło przecież nastręczyłyby się ich uwadze liczne trudności; niechby sporządzili układ odosobniony, a środek ciężkości tego układu nie biegłby drogą przybliżenie prostolinijną. Dla wytłumaczenia tego faktu mogliby powołać się na siły odśrodkowe, któreby uważali za rzeczywiste i przypisywali zapewne wzajemnemu działaniu na siebie ciał. Tylko siły te nie malałyby ze zwiększaniem się odległości tj. w miarę doskonalszej izolacyi układu; wprost przeciwnie: siła odśrodkowa rośnie nieograniczenie wraz z odległością.

Ta już trudność zdawałaby im się dość wielką; rychło przecież daliby sobie i z nią radę: przypuściliby istnienie jakiegoś bardzo subtelnego środowiska, w rodzaju naszego eteru, otaczającego wszystkie ciała i wywierającego na nie działanie odpychające.

Nie wszystko to jednak. Przestrzeń jest symetryczna, a prawa ruchu nie przedstawiałyby symetryi; rozróżniałyby one prawicę od lewicy. Stwierdzonoby np., że cyklony wirują stale w jedną i tę sama stronę, gdy ze względu na symetryę meteory te powinnyby obracać się bez różnicy to w tę, to w ową stronę. Gdyby uczonym naszym powiodło się drogą uporczywej pracy nadać swemu wszechświatowi symetryę, symetrya ta nie ostałaby się wobec powyższych zjawisk, pomimo że niema żadnej widocznej racyi, aby została ona zakłócona raczej w jednym kierunku, niż w przeciwnym.

I z tym zapewne poradziliby sobie, wymyśliliby coś, co nie byłoby bardziej osobliwe ani sztuczne, niż szklane sfery Ptolemeusza, i posuwaliby się w ten sposób naprzód, gromadząc skomplikowane założenia, ażby zjawił się oczekiwany Kopernik i zmiótł je jednym zamachem, mówiąc: Prościej daleko będzie przypuścić, że ziemia się obraca.

I podobnie jak nasz Kopernik nam powiedział: Dogodniej jest przypuścić, że ziemia się obraca, gdyż pozwala to wyrazić prawa astronomii językiem daleko prostszym, ów rzekłby: Dogodniej jest przypuścić, że ziemia się obraca, gdyż pozwala to wyrazić prawa mechaniki językiem daleko prostszym.

Nie przeszkadza to bynajmniej temu, że przestrzeń bezwzględna, tj. układ, do którego trzebaby odnieść ziemię, by dowiedzieć się, czy obraca się ona rzeczywiście, nie posiada żadnego objektywnego istnienia. Przeto twierdzenie: »ziemia się obraca« nie ma żadnego sensu, albowiem niema doświadczenia któreby mogło je sprawdzić; albowiem doświadczenie takie nietylko nie dałoby się urzeczywistnić lub wymarzyć przez najzuchwalszego Juliusza Vernea, lecz nie da się nawet pomyśleć bez sprzeczności; albo raczej, dwa te twierdzenia: »ziemia się obraca« i »dogodniej jest przypuścić, że się ziemia obraca« posiadają jeden i ten sam sens; jedno nie zawiera więcej niż drugie.

Być może, że wyda to się komu niezadawalającym i że razić go będzie, iż wśród wszystkich hypotez czy raczej wszystkich umów, jakie możemy zrobić dla wytłumaczenia sobie zjawisk mechanicznych, istnieje jedna, która jest dogodniejsza od innych.

Lecz skoro zgodzono się na to bez szemrania, gdy szło o prawa astronomii, to czemużby miało to razić, gdy chodzi o mechanikę?

Widzieliśmy, że spółrzędne ciał określone są przez równania różniczkowe drugiego rzędu i że to samo odnosi się do różnic tych spółrzędnych. Stanowi to to, co nazwaliśmy uogólnioną zasadą bezwładności i zasadą ruchu względnego. Gdyby odległości tych ciał były również określone przez równania drugiego rzędu, wymagania naszego umysłu powinnyby, jak się zdaje, być w zupełności zaspokojone. W jakiejże mierze są one zaspokojone i czemu zadowolenie naszego umysłu nie jest jednak całkowite?

Dla wyświetlenia tych pytań, lepiej będzie wziąć prosty przykład. Przypuśćmy, że znajdujemy się w układzie analogicznym do naszego układu słonecznego, takim wszelako, że nie widać zupełnie gwiazd stałych zewnętrznych względem tego układu; astronomowie mogą przeto obserwować jedynie odległości wzajemne planet i słońca, nie zaś długości bezwzględne planet. Jeśli wyprowadzimy wprost z prawa Newtona równania różniczkowe, określające zmiany tych odległości, równania te nie będą drugiego rzędu. Chcę przez to powiedzieć, że gdybyśmy znali, prócz prawa Newtona, wartości początkowe tych odległości i ich pochodnych względem czasu, nie wystarczyłoby to do oznaczenia wartości tychże odległości w jakiejkolwiek chwili późniejszej. Brak byłoby jeszcze jednej danej, a daną tą mogłaby być np. tak zwana w astronomii stała pól.

Dwa wszakże możliwe są tu stanowiska: możemy rozróżnić dwa rodzaje stałych. Dla fizyka świat sprowadza się do szeregu zjawisk, zależnych jedynie z jednej strony od zjawisk początkowych, z drugiej zaś od praw, wiążących zjawiska następujące ze zjawiskami poprzedzającemi. Jeśli tedy doświadczenie wykazuje, że pewna wielkość jest stała, mamy wybór między dwoma poglądami.

Albo założymy, że zachodzi prawo, na mocy którego wielkość ta musi pozostawać niezmienną, a że zdarzyło się przypadkiem, iż posiadała ona tę a nie inną wartość na początku dziejów świata, tę więc wartość musi zachowywać stale. Wielkość tę możnaby w takim razie nazwać stałą p r z y p a d k o w ą.

Albo też założymy, że istnieje prawo przyrody, narzucające tej wielkości tę właśnie wartość a nie inną. Wielkość ta nazywać się będzie wówczas stałą i s t o t n ą.

Naprzykład, według prawa Newtona czas obiegu ziemi musi być stały. Ale to, że równa się on 366 z ułamkiem dni gwiazdowych nie zaś 300 lub 400, to jest to rzeczą jakiegoś przypadku początkowego. Jest to stała przypadkowa. Jeśli natomiast wykładnik odległości, figurujący we wzorze siły przyciągającej, równa się — *2*, nie zaś — *3*, to nie dla przypadku, lecz dlatego, że wymaga tego prawo Newtona. Jest to stała istotna.

Być bardzo może, iż takie przyznawanie pewnej roli przypadkowi nie jest samo przez się uprawnione, i że w rozróżnieniu takim tkwi coś sztucznego; pewne jest w każdym razie, że dopóki przyroda będzie posiadała tajemnice, w stosowaniu tego rozróżnienia będzie zawsze dużo dowolności i ryzyka.

Stałą pól uważamy zazwyczaj za przypadkową. Czy jest pewne, że za taką samą uważaliby ją nasi urojeni astronomowie? Gdyby mieli możność porównania dwu różnych układów słonecznych, rozumieliby, że stała ta może posiadać kilka różnych wartości; ale przypuściliśmy właśnie z góry, że układ ich wydaje się im odosobnionym, i że nie obserwują oni żadnego ciała niebieskiego poza tym układem. W takich warunkach znaliby oni tylko stałą jedyną, o wartości bezwzględnie niezmiennej; skłonni więc byliby niewątpliwie do uważania jej za stałą istotną.

Zauważmy mimochodem dla uniknięcia możliwego zarzutu, że mieszkańcy tego świata fikcyjnego nie mogliby ani zaobserwować ani określić stałej pól w taki sam sposób jak my, ponieważ długości bezwzględne dla nich nie istnieją; pomimo to rychło naprowadzeniby zostali na spostrzeżenie pewnej stałej, wchodzącej w sposób naturalny do ich równań, tej samej właśnie, którą my nazywamy stałą pól.

Natenczas rzecz się będzie przedstawiała, jak następuje. Jeśli stałą pól uważa się za stałą istotną, za zależną od pewnego prawa przyrody, tedy dla wyliczenia odległości planet w jakiejkolwiek chwili wystarczy znać wartości początkowe tych odległości oraz ich pochodnych pierwszych. Z tego nowego stanowiska odległościami będą rządziły równania różniczkowe drugiego rzędu.

Czyż umysł tych astronomów byłby całkowicie zaspokojony? Nie sądzę; przedewszystkim zauważyliby rychło, że różniczkując swe równania otrzymaliby równania wyzszego rzędu, wprawdzie, lecz znacznie prostsze. Zwłaszcza zaś uderzyłaby ich trudność, związana z kwestyą symetryi. Mianowicie w zależności od tego, czy ogół planet przedstawiałby kształt pewnego wielościanu czy też wielościanu względem niego symetrycznego, wypadałoby przyjąć odmienne prawa, i jedynym sposobem uniknięcia tej konieczności byłoby uważanie stałej pól za przypadkową.

Wziąłem przykład dość szczególny, założyłem bowiem astronomów, którzy nie zajmują się wcale mechaniką ziemską, a których wzrok nie sięga poza układ słoneczny. Lecz wyniki nasze stosują się do wszystkich wypadków. Nasz wszechświat bardziej jest rozległy niż ich, gdyż posiadamy gwiazdy stałe, ale i on jest ograniczony, moglibyśmy więc rozumować o całości naszego wszechświata tak samo, jak ci astronomowie o swoim układzie słonecznym.

Widzimy tedy, że ostatecznie doszliśmy do wniosku, iż równania, określające odległości, są rzędu wyższego niż drugi. Czemużby miało to nas razić? Czemu uważamy za całkiem naturalne, że kolej zjawisk zależy od wartości początkowych pierwszych pochodnych tych odległości, gdy natomiast wahamy się uznać, że mogą one zależeć od wartości początkowych drugich pochodnych? Jedyną tego przyczyną mogą być nasze przyzwyczajenia umysłowe, wyrobione przez ustawiczne badanie uogólnionej zasady bezwładności i jej konsekwencyi.

Wartości odległości w jakiejkolwiek chwili zależą od ich wartości początkowych, od wartości początkowych ich pochodnych pierwszych oraz jeszcze od czegoś innego. Czym jest to c o ś i n n e g o?

Jeżeli nie chcemy, aby była to poprostu jedna z pochodnych drugich, tedy mamy otwarty wybór wśród rozmaitych przypuszczeń. Przypuszczenie, że to »coś innego« — jest to oryentacya bezwzględna wszechświata w przestrzeni, lub prędkości, z jaką się ta oryentacya zmienia, jest niewątpliwie najdogodniejszym dla matematyka rozwiązaniem; nie jest przecież najbardziej zadawalającym dla filozofa, boć oryentacya ta nie istnieje.

Można przypuścić, że to »coś innego« jest to położenie lub prędkość jakiegoś niewidzialnego ciała; tak też zrobili niektórzy autorzy i nadali nawet temu ciału nazwę »Ciała Alfa«, jakkolwiek skazani jesteśmy na to, że o ciele tym nie będziemy nigdy nic wiedzieli, prócz jego imienia. Jest to wybieg, zupełnie podobny do tego, o którym mówiliśmy przy końcu paragrafu, poświęconego rozważaniom nad zasadą bezwładności.

W rezultacie przecież trudność, jaką się tu upatruje jest sztuczna. Byle przyszłe dane, jakie odczytamy na naszych narzędziach mierniczych, zależały jedynie od danych, których nam one już dostarczyły lub dostarczyć mogły dawniej, to mamy wszystko, czego nam potrzeba. A pod tym względem możemy być spokojni.

Rozdział Ósmy.

Energia a Termodynamika.

S y s t e m e n e r g e t y c z n y. — Trudności, wynikłe z mechaniki klasycznej, doprowadziły pewne umysły do zastąpienia jej przez nowy system, który nazywają *energetyką*.

System energetyczny powstał naskutek odkrycia zasady zachowania energii. Ostateczną postać nadał jej Helmholtz.

Określa się przedewszystkim dwie wielkości grające w tej teoryi rolę podstawową. Wielkości te są: z jednej strony *energia kinetyczna* czyli siła żywa, z drugiej *energia potencyalna*.

Wszystkiemi zmianami, którym mogą ulegać ciała przyrody, rządzą dwa prawa doświadczalne:

1° Suma energii kinetycznej i energii potencyalnej jest stała. Jest to zasada zachowania energii.

2° Jeśli układ ciał znajduje się w położeniu A w chwili

t_0, a w położeniu B w chwili t_1, przechodzi on zawsze od pierwszego położenia do drugiego przez drogę taką, iżby wartość średnia różnicy energii kinetycznej i potencyalnej w odstępie czasu oddzielającym chwile t_0 i t_1, była możliwie najmniejszą. Jest to zasada Hamiltona, czyli jedna z postaci zasady najmniejszego działania.

Teorya energetyczna przedstawia w porównaniu z teoryą klasyczną następujące dogodności:

1° Jest zupełniejsza; to znaczy, że zasady zachowania energii i Hamiltona mówią więcej, niż zasady podstawowe teoryi klasycznej i zarazem wykluczają pewne ruchy, nieurzeczywistniane przez przyrodę a zgodne z teoryą klasyczną;

2° Uwalnia nas ona od hypotezy atomów, której niepodobna niemal było uniknąć przy teoryi klasycznej.

Lecz przynosi ona ze swej strony nowe trudności:

Określenia obu gatunków energii nasunęłyby trudności prawie równie wielkie jak określenie siły i masy w systemie klasycznym. Wszelako możnaby sobie z niemi dać radę łatwiej, przynajmniej w wypadkach najprostszych.

Rozważmy układ odosobniony, składający się z pewnej liczby punktów materyalnych; przypuśćmy, że na punkty te działają siły zależne jedynie od ich względnego położenia oraz od ich odległości wzajemnych, niezależne zaś od ich prędkości. Naskutek zasady zachowania energii będzie musiała istnieć funkcya sił.

W prostym tym wypadku sformułowanie zasady zachowania energii nadzwyczaj jest proste. Pewna wielkość dostępna dla doświadczenia, musi pozostawać stałą. Wielkość ta jest sumą dwu wyrazów; pierwszy zależy jedynie od położenia punktów materyalnych, a jest niezależny od ich prędkości; drugi jest proporcyonalny do kwadratu tych prędkości. Rozkład na te dwa wyrazy może być dokonany w jeden tylko sposób.

Pierwszy z tych wyrazów, który nazwiemy U, będzie energią potencyalną; drugi, który oznaczymy przez T, energią kinetyczną.

Wprawdzie, skoro $T + U$ jest wielkością stałą, to samo zachodzi dla jakiejkolwiek funkcyi $T + U$:

$$\varphi\,(T + U).$$

Lecz funkcya taka $\varphi\,(T + U)$ nie będzie sumą dwu wyrazów, jednego niezależnego od prędkości, drugiego proporcyonalnego do kwadratu tych prędkości. Wśród funkcyi, zachowujących stałą wartość, jedna jedyna tylko posiada tę własność, mianowicie $T + U$ (lub funkcya liniowa $T + U$, co na jedno wychodzi, gdyż funkcyę tę liniową można zawsze sprowadzić do postaci $T + U$ przez zmianę jednośc[i] i punktu początkowego). To więc wyrażenie nazywać będziemy energią; pierwszy wyraz nosić będzie nazwę energii potencyalnej, drugi energii kinetycznej. Określenie obu gatunków energii można tedy skonstruować całkowicie bez żadnych dwuznaczności.

To samo da się powiedzieć o określeniu mas. Energia kinetyczna czyli siła żywa wyraża się w sposób prosty, zapomocą mas i prędkości względnych wszystkich punktów materyalnych w odniesieniu do jednego z nich. Te prędkości względne są dostępne dla obserwacyi; skoro zaś będziemy mieli wyraz energii kinetycznej jako funkcyi tych prędkości względnych, spółczynniki tego wyrazu dadzą nam masy.

Tak więc w prostym wypadku określenie pojęć zasadniczych nie nastręcza trudności. Ale trudności zjawiają się na nowo w wypadkach bardziej złożonych, np. gdy siły zależą nietylko od odległości, lecz również od prędkości. Weber np. przypuszcza, że działanie, jakie wywierają na siebie dwie cząsteczki elektryczne, zależy nietylko od ich odległości, ale nadto od ich prędkości i przyspieszenia. Gdyby punkty materyalne przyciągały się według analogicznego prawa, U zależałoby od prędkości i mogłoby zawierać wyraz proporcyonalny do kwadratu prędkości.

Pośród wyrazów proporcyonalnych do kwadratów prędkości jakże rozróżnić należące do T od tych, które wchodzą w skład U? Jak zatym wyodrębnić każdą część energii?

Co więcej, jak określić samą energię? Nie mamy już żadnej racyi wziąć, jako określenie, raczej $T + U$ niż jakąkolwiek inną funkcyę $T + U$, skoro znikła własność, charakteryzująca $T + U$, jako sumę dwu wyrazów o szczególnej postaci.

Więcej jeszcze: należy uwzględnić nietylko energię mechaniczną we właściwym znaczeniu lecz nadto inne postaci energii: ciepło, energię chemiczną, energię elektryczną itd. Zasada zachowania energii brzmieć więc musi:

$$T + U + Q = \text{stałej},$$

gdzie T przedstawia energię kinetyczną postrzegalną, U energię potencyalną położenia, zależną jedynie od położenia ciał, Q energię wewnętrzną cząsteczkową pod postacią cieplną, chemiczną lub elektryczną.

Wszystko poszłoby dobrze, gdyby te trzy wyrazy wyraźnie się od siebie różniły, gdyby T było proporcyonalne do kwadratu prędkości, U niezależne od tych prędkości i od stanu ciał, Q niezależne od prędkości i położeń ciał a zależne jedynie od ich stanu wewnętrznego.

Wyraz energii dałby się wówczas rozłożyć w jeden tylko sposób na trzy części o tej postaci.

Tak wszakże nie jest; rozważmy ciała naelektryzowane: energia elektrostatyczna, pochodząca od ich wzajemnego działania, zależeć będzie oczywiście od ich ładunku, to znaczy od ich stanu; ale zależeć też będzie od ich położenia. Jeśli ciała te znajdują się w ruchu, działać one będą na siebie elektrodynamicznie i energia elektrodynamiczna zależeć będzie nietylko od ich stanu i położenia ale nadto od ich prędkości.

Nie posiadamy więc żadnego sposobu dobrania wyrazów, które winny wejść w skład T, U i Q, i wyodrębnienia trzech części energii.

Jeśli $T + U + Q$ jest stałe, to stałą również jest jakakolwiek funkcya

$$\varphi\,(T + U + Q).$$

Gdyby $T + U + Q$ posiadało ową postać szczególną, którą rozpatrywaliśmy wyżej, nie mielibyśmy żadnej nieokreśloności: wśród funkcyi $\varphi(T+U+Q)$, zachowujących wartość stałą, jedna tylko posiadałaby tę postać szczególną, i tę właśnie zgodzilibyśmy się nazwać energią.

Ale, jak powiedziałem, nie jest ściśle tak; wśród funkcyi, pozostających stałemi, niema żadnej, którejby można nadać ściśle tę postać szczególną; jakże wobec tego wybrać z pośród nich tę, która ma się nazywać energią? Nie mamy już żadnych kryteryów, któreby mogły nami kierować w tym wyborze.

Jedno więc tylko pozostaje sformułowanie zasady zachowania energii: istnieje coś, co pozostaje stałe. W tej postaci zasada ta staje się niezachwianą w stosunku do doświadczenia i sprowadza się do pewnego rodzaju tautologii. Oczywistym jest, że skoro światem rządzą jakieś prawa, tedy pewne ilości muszą zachowywać wartości stałe. Podobnie jak zasada Newtona, i dla tej samej racyi, zasada zachowania energii zbudowana na doświadczeniu, nie mogłaby być przez nie nadwerężona.

Roztrząsanie to wykazuje, że przejście od systemu klasycznego do systemu energetycznego znamionuje postęp; ale wykazuje ono zarazem, że postęp ten nie jest wystarczający.

Cięższym jeszcze wydaje mi się inny zarzut: zasada najmniejszego działania stosuje się do zjawisk odwracalnych; nie jest ona natomiast bynajmniej zadawalającą w stosunku do zjawisk nieodwracalnych; próba, podjęta przez Helmholtza, rozciągnięcia jej na ten rodzaj zjawisk nie powiodła się i powieść się nie mogła: pod tym względem wszystko pozostaje jeszcze do zrobienia.

W samym sformułowaniu zasady najmniejszego działania tkwi coś, co razi nasz umysł. Cząsteczka materyalna, nie ulegająca działaniu żadnej stałej siły, lecz zniewolona poruszać się na danej powierzchni, aby przejść od jednego punktu do innego obierze linię geodetyczną czyli drogę najkrótszą.

Cząsteczka ta zdaje się postępować tak, jak gdyby znała punkt, do którego chce się ją poprowadzić, przewidywała ile czasu zużyje, podążając doń tą lub inną drogą, i wreszcie wybrała najodpowiedniejszą drogę. Sformułowanie to uważa ją, jak gdyby za istotę ożywioną i wolną. Oczywiście lepiejby było zastąpić je przez sformułowanie mniej rażące, w którym mówiąc językiem filozofów, przyczyny celowe nie zdawałyby się zajmować miejsca przyczyn sprawczych.

Termodynamika[1]. — Rola, jaką odgrywają obie zasady podstawowe termodynamiki we wszystkich gałęziach filozofii przyrody, nabiera z dnia na dzień większej wagi. Porzucając ambitne teorye z przed lat czterdziestu, przeładowane hypotezami molekularnemi, usiłujemy dzisiaj wznieść na fundamencie jednej Termodynamiki cały gmach fizyki matematycznej. Czy dwie zasady Meyera i Clausiusa zapewnią jej podstawę dość trwałą, by starczyła na czas pewien? Nikt o tym nie wątpi; lecz skądże płynie ta ufność?

Pewien wybitny fizyk powiedział mi kiedyś o prawie błędów: Wszyscy mocno w nie wierzą, dlatego, że matematycy wyobrażają sobie, że jest to fakt obserwacyjny, a obserwatorzy, że jest to twierdzenie matematyczne. To samo stosowało się przez długi czas do zasady zachowania energii. Dziś się to zmieniło; wszyscy wiedzą, że jest to fakt doświadczalny.

Skoro tak jest, to cóż daje nam prawo przypisywać samej zasadzie większej ogólności i ścisłości niż doświadczeniom, na których ją oparto? Sprowadza się to do pytania, czy jest uprawnionym codziennie praktykowane uogólnienie danych empirycznych; nie będę na tyle zuchwały, aby roztrząsać tu to pytanie, o którego rozstrzygnięcie kusiło się naprożno tylu filozofów. Jedno tylko jest pewne: gdyby nam tego prawa odmówiono, nauka nie mogłaby istnieć albo przynajmniej, zredukowana do roli inwentarzowania, stwierdzania

---

[1]) Poniższy ustęp jest częściowym odtworzeniem przedmowy do książki mojej pod tyt.: Thermodynamique.

odosobnionych faktów, nie miałaby dla nas żadnej wartości, albowiem nie mogłaby zaspakajać naszej potrzeby ładu i harmonii i zarazem byłaby niezdolna przewidywać. Ponieważ okoliczności, które poprzedziły jakikolwiek fakt, nigdy prawdopodobnie nie powrócą wszystkie łącznie, tedy przewidywanie powrotu tego faktu przy najlżejszej bodaj zmianie jednej z tych okoliczności, już wymaga pewnego uogólnienia.

Lecz każde twierdzenie można uogólnić w nieskończenie wiele sposobów. Musimy tedy dokonać wyboru z pośród wszelkich możliwych uogólnień, a wybrać możemy jedynie najprostsze. Winniśmy więc postępować tak, jakgdyby przy równości wszystkich innych warunków prawo proste było prawdopodobniejsze niż prawo złożone.

Przed półstuleciem wyznawano to otwarcie i głoszono, że przyroda lubi prostotę; od tego czasu dostarczyła nam ona aż nadto zaprzeczeń tego poglądu. Obecnie nie uznaje się już takiej dążności i zachowuje się z niej to tylko, co jest niezbędne, aby nauka nie stała się niemożliwa.

Formułując prawo ogólne, proste i dokładne na podstawie doświadczeń względnie nielicznych i nieco rozbieżnych, ulegamy tylko konieczności, z której umysł ludzki nie może się wyzwolić.

Tkwi w tym jednak coś jeszcze i dlatego zastanowimy się nad tym przedmiotem nieco dłużej.

Nikt nie wątpi, że zasada Meyera przeżyje wszystkie prawa szczególne, z których ją wyprowadzono, podobnie jak prawo Newtona przeżyło prawa Keplera, które je zrodziły i które wobec zakłóceń są tylko przybliżone.

Dlaczegoż zasada ta zajmuje pewnego rodzaju uprzywilejowane miejsce wśród wszystkich praw fizycznych? Przyczynia się do tego mnóstwo małych powodów.

Przedewszystkim przypuszcza się, że nie moglibyśmy odrzucić jej lub nawet wątpić o bezwzględnej jej ścisłości, nie przyjmując możliwości ruchu nieustającego (*perpertuum mobile);* uchylamy się oczywiście od takiego wniosku i uważamy, że mniej jest w tej sprawie zuchwałym potakiwanie niż przeczenie tej zasadzie.

Nie jest to, być może, zupełnie ścisłe; albowiem niemożliwość ruchu nieustającego pociąga za sobą zachowanie energii jedynie dla zjawisk odwracalnych.

Imponująca prostota zasady Meyera przyczynia się również do umocnienia naszej wiary. W prawie bezpośrednio wyprowadzonym z doświadczenia, jak np. prawo Mariotte'a, prostota taka budziłaby w nas raczej nieufność: tutaj zaś jest inaczej; widzimy, jak elementy na pierwszy rzut oka luźno rozrzucone układają się niespodziewanie w uporządkowane skupienie, tworząc harmonię całości i nie chcemy przypuszczać by nieprzewidziana taka harmonia była rzeczą prostego przypadku. Zdobycz nasza wydaje nam się tym droższą, im więcej nas kosztowała wysiłków, i tym pewniejsi jesteśmy, żeśmy wydarli przyrodzie prawdziwą jej tajemnicę, im zazdrośniej zdawała się ona ukrywać ją przed naszym wzrokiem.

Ale są to tylko małe racye; podniesienie prawa Meyera do godności zasady bezwzględnej wymagałoby roztrząsania bardziej pogłębiającego. Skoro wszakże probuje się je przeprowadzić, okazuje się, że już samo sformułowanie tej zasady bezwzględnej nie jest łatwe.

W każdym poszczególnym wypadku, widzimy wyraźnie, co to jest energia i możemy ją określić, bodaj prowizorycznie; lecz niemożliwym jest znalezienie dla niej określenia ogólnego.

Skoro probuje się sformułować zasadę w całej jej ogólności i w zastosowaniu do całego wszechświata, rozwiewa się ona, że tak powiem, w naszych oczach, i pozostaje z niej to tylko: Istnieje coś, co pozostaje stałe.

Ale czy i to posiada jakąkolwiek treść? Według hypotezy deterministycznej, stan wszechświata oznaczony jest przez bardzo wielką liczbę n parametrów, które nazwiemy $x_1, x_2, \dots x_n$. Skoro zna się wartości tych n parametrów w jakiejkolwiek chwili, zna się również ich pochodne względem czasu, można zatym wyliczyć wartości tychże parametrów w jakiejkolwiek chwili wcześniejszej lub późniejszej. Innemi słowy n tych parametrów czyni zadość n równaniom różniczkowym pierwszego rzędu.

Równania te prowadzą do $n-1$ całek, istnieje przeto $n-1$ funkcyi parametrów $x_1, x_2 - x_n$, które pozostają stałemi. Gdy natenczas powiadamy, że istnieje coś, co pozostaje stałym, to jest to prosta tautologia. Nie umielibyśmy nawet powiedzieć, która z pośród naszych $n-1$ całek ma zachować nazwę energii.

Nie w tym zresztą sensie rozumie się zasadę Meyera, gdy się ją stosuje do układu ograniczonego.

Przypuszcza się wówczas, że p z naszych n parametrów zmienia się w sposób niezależny, tak, iż posiadamy tylko $n-p$ równań naogół liniowych między naszemi n parametrami i ich pochodnemi.

Przypuśćmy dla większej prostoty sformułowania, że suma prac sił zewnętrznych jest równa zeru, podobnie jak suma ilości ciepła oddanych na zewnątrz. Zasada nasza nabierze wtedy następującego znaczenia.

Istnieje kombinacya tych $n-p$ równań, której lewa strona jest różniczką zupełną; a ponieważ różniczka ta w myśl naszych $n-p$ równań znika, tedy całka jej jest ilością stałą i tę to całkę nazywa się energią.

Lecz jakże stać się może, iż istnieje kilka parametrów, których zmiany są niezależne? Stać się to może jedynie pod wpływem sił zewnętrznych (jakkolwiek przypuściliśmy dla większej prostoty, że suma algebraiczna prac tych sił jest równa zeru). Gdyby bowiem układ nasz zupełnie był wolny od wszelkiego działania zewnętrznego, wartości naszych n parametrów w danej chwili wystarczyłyby do oznaczenia stanu układu w jakiejkolwiek chwili późniejszej, z tym wszakże warunkiem, że stoimy na gruncie hypotezy deterministycznej; wpadlibyśmy więc ponownie w tę samą trudność, co poprzednio.

Jeśli stan przyszły układu nie jest całkowicie oznaczony przez stan jego obecny, znaczy to, że zależy on prócz tego od stanu ciał niewciągniętych do układu. Czy jednak w takim razie jest prawdopodobne, że między parametrami x oznaczającemi stan układu istnieją równania niezależne od stanu ciał zewnętrznych; a jeśli w pewnych wypadkach zdaje nam się, że możemy równania takie znaleźć, czyż nie jest to jedynie wynikiem naszej nieświadomości lub tego, że wpływ tych ciał zewnętrznych zbyt jest słaby, by doświadczenie nasze mogło go ujawnić?

Jeśli układu nie uważamy za całkowicie odosobniony, prawdopodobne jest, że zupełnie ścisły wyraz jego energii wewnętrznej będzie musiał zależeć od stanu ciał zewnętrznych. Przytym przypuściliśmy wyżej, iż suma prac zewnętrznych jest równa zeru; gdybyśmy natomiast zechcieli uwolnić się od tego nieco sztucznego ograniczenia, sformułowanie stałoby się jeszcze trudniejszym.

Sformułowanie zasady Meyera rozumianej bezwzględnie wymagałoby tedy rozciągnięcia jej na cały wszechświat, co postawiłoby nas znowu wobec tych samych trudności, które staraliśmy się ominąć.

Słowem, mówiąc językiem zwykłym; prawo zachowania energii może posiadać jedno tylko znaczenie, to mianowicie, że istnieje własność wspólna wszystkim możliwościom; lecz według hypotezy deterministycznej istnieje jedna tylko możliwość, wobec czego prawo nasze traci wszelkie znaczenie.

Natomiast przy hypotezie indeterministycznej nabrałoby ono określonego znaczenia, nawet gdybyśmy chcieli je rozumieć w znaczeniu bezwzględnym; miałoby ono charakter granicy, narzuconej wolności.

Ale ostatni ten wyraz ostrzega nas, że zboczyliśmy z naszej drogi, że wykraczamy poza dziedzinę matematyki i fizyki. To też powściągamy się i z całego tego roztrząsania zapamiętamy sobie jedno tylko wrażenie, mianowicie, że prawo Meyera jest formą dość giętką, by można w nią było włożyć prawie wszystko, coby się włożyć chciało. Nie chcę przez to powiedzieć, że nie odpowiada ona żadnej objektywnej rzeczywistości ani też, że sprowadza się do prostej tautologii, albowiem w każdym wypadku szczególnym, o ile tylko nie chce się nadać mu zakresu absolutnego, posiada ono zupełnie jasne znaczenie.

Giętkość ta przemawia za długotrwałością tego prawa; że zaś z drugiej strony zniknie ono po to jedynie, by stopić się w wyższej jakiejś harmonii, tedy możemy opierać się na niem z ufnością, upewnieni z góry, że praca nasza nie będzie stracona.

Prawie wszystko, co powiedzieliśmy powyżej, da się zastosować do zasady Clausiusa. Różni się ona tym, że wyraża się zapomocą nierówności. Powie kto może, iż stosuje się to również do wszystkich praw fizycznych, gdyż dokładność ich nie przekracza nigdy granic zakreślonych przez błędy obserwacyi. Lecz w każdym razie roszczą one sobie pretensye do pewnego przybliżenia, i można spodziewać się, że będzie się je stopniowo zastępowało przez prawa coraz to dokładniejsze. Natomiast prawo Clausiusa wyraża się w postaci nierówności nie dla niedoskonałości naszych środków obserwacyi lecz na skutek samej istoty rzeczy.

Wnioski ogólne z części Trzeciej.

Na zasady mechaniki możemy tedy spoglądać z dwu różnych punktów widzenia. Z jednej strony są to prawdy oparte na doświadczeniu i stwierdzone ze znacznym przybliżeniem dla układów prawie odosobnionych. Z drugiej są to postulaty stosowalne do całości wszechświata i uważane za ściśle prawdziwe.

Jeżeli postulaty te posiadają ogólność i pewność, jakiej nie znajdujemy w prawdach doświadczalnych, to dlatego, że w ostatecznej analizie redukują się one do prostej umowy, którą mamy prawo zrobić, ponieważ pewni jesteśmy z góry, że nie zaprzeczy jej żadne przyszłe doświadczenie.

Lecz umowa ta nie jest zupełnie dowolna; nie rodzi jej nasz kaprys; przyjmujemy ją, ponieważ pewne doświadczenia wykazały nam, że będzie ona dogodna.

Tłumaczy to nam, dlaczego doświadczenie, które zbudowało zasady mechaniki nie będzie pomimo to mogło ich obalić.

Przeprowadźmy porównanie z geometryą. Twierdzenia podstawowe geometryi, jak np. postulat Euklidesa, są również tylko umowami i równie nierozumnym byłoby badać czy są one prawdziwe lub błędne, jak pytać się, czy system metryczny jest prawdziwy lub fałszywy.

Umowy te są poprostu dogodne a o tym powiadamiają nas pewne doświadczenia.

Na pierwsze wejrzenie zachodzi tu zupełna analogia; rola doświadczenia zdaje się być jednakową. To też mogłaby się nasunąć następująca alternatywa: Albo mechanikę należy uważać za naukę doświadczalną, a w takim razie to samo stosuje się i do geometryi; albo też geometrya jest nauką dedukcyjną i takąż jest mechanika.

Wniosek taki nie byłby słuszny. Doświadczenia, które naprowadziły nas na przyjęcie, jako najdogodniejszych, umów podstawowych geometryi, dotyczą przedmiotów nie mających nic wspólnego z przedmiotami, które bada geometrya; dotyczą one własności ciał stałych, prostolinijnego rozchodzenia się światła. Są to doświadczenia z dziedziny mechaniki, z dziedziny optyki; z żadnego tytułu nie można ich uważać za doświadczenia z dziedziny geometryi. Główną nawet racyą, dla której geometrya nasza wydaje nam się dogodną, jest to właśnie, że poszczególne części naszego ciała, nasze oko, nasze członki, posiadają własności ciał stałych. Z tego względu nasze doświadczenia podstawowe są przedewszystkim doświadczeniami fizyologicznemi dotyczącemi nie przestrzeni, która jest przedmiotem badań geometry, lecz jego ciała, to jest narzędzia, którym posługuje się on dla tych badań.

Podstawowe natomiast umowy mechaniki oraz doświadczenia dowodzące, że umowy te są dogodne, dotyczą tych samych przedmiotów lub przedmiotów analogicznych. Zasady umowne i ogólne są naturalnym i bezpośrednim uogólnieniem zasad doświadczalnych i szczególnych.

Niechaj przecież nikt mi nie zarzuci, że kreślę w ten sposób granice sztuczne między poszczególnemi naukami; że jeśli stawiam baryerę między geometryą właściwą a badaniem brył stałych, to mógłbym z równą racyą odgrodzić mechanikę doświadczalną od mechaniki umownej zasad ogólnych. Któż bowiem nie widzi, że odrywając od siebie dwie te nauki, kaleczymy tak jedną jak drugą, że z mechaniki umownej, gdybyśmy ją odosobnili, pozostałoby bardzo niewiele, i że pozostałość ta nie dałaby się zgoła porównać z ową wspaniałą a spójną całością naukową, która nazywa się geometryą?

Rozumiemy przeto, dlaczego nauczanie mechaniki powinno pozostać doświadczalnym.

W ten tylko sposób pozwoli nam ono zrozumieć genezę tej nauki, co jest niezbędne dla całkowitego zrozumienia samej nauki.

Nadto, jeśli studyuje się mechanikę, to po to, żeby ją stosować; a stosować można ją o tyle tylko, o ile pozostaje ona objektywną. Otóż widzieliśmy wyżej, że to co zasady zyskują na ogólności i na pewności, tracą na przedmiotowości. Z przedmiotową więc głównie stroną zasad wypada zawczasu się oswoić, a jedyną do tego drogą jest postępowanie od wypadków szczególnych do rzeczy ogólnych, nie zaś odwrotnie.

Zasady są umowami lub określeniami w przebraniu. Jednakże pochodzą one od praw doświadczalnych, które zostały, że tak powiem, podniesione do godności zasad i którym umysł nasz nadał wartość bezwzględną.

Niektórzy filozofowie poszli w uogólnianiu za daleko; zdaniem ich zasady stanowią całą naukę, a przeto cała nauka nosi charakter umowny [konwencyonalny].

Paradoksalny ten pogląd, przezwany nominalizmem, nie wytrzymuje krytyki.

W jaki sposób prawo może stać się zasadą? Wyrażało ono stosunek dwu wyrazów rzeczywistych A i B. Lecz nie było ściśle prawdziwe, było tylko przybliżone. Wprowadzamy dowolnie wyraz pośredni C mniej lub bardziej fikcyjny i C jest mocą określenia tym, czego stosunek do A odpowiada ściśle danemu prawu.

Prawo nasze zostaje w ten sposób rozłożone na zasadę bezwzględną i ścisłą, wyrażającą stosunek A do C oraz na prawo doświadczalne i podlegające rewizyi, wyrażające stosunek C do B. Jasnym jest, że jakkolwiek daleko posuniemy ten rozkład, pozostaną nam zawsze jeszcze pewne prawa.

Wkroczymy teraz w dziedzinę praw w właściwym znaczeniu tego wyrazu.

CZĘŚĆ CZWARTA.

PRZYRODA.

Rozdział Dziewiąty.

Hypotezy w Fizyce.

Rola doświadczenia i uogólnienia. — Doświadczenie jest jedynym źródłem prawdy: jedynie ono może nauczyć nas czegoś nowego; jedynie ono może nam dać pewność. Oto dwa punkty, których nikt nie może poddać wątpliwości.

Skoro jednak doświadczenie jest wszystkim, jakież miejsce pozostanie dla fizyki matematycznej? Na cóż fizyce doświadczalnej taka pomocnica, bezużyteczna, jak się zdaje, a może nawet niebezpieczna?

A przecież fizyka matematyczna istnieje; oddała ona usługi niezaprzeczone; jest to fakt, domagający się wytłumaczenia.

Otóż nie wystarcza obserwować, trzeba posługiwać się obserwacyami, a w tym celu trzeba uogólniać. To też czyniono zawsze; tylko, że pamięć dawnych błędów zrobiła człowieka coraz bardziej oględnym, obserwowano więc coraz więcej a uogólniano coraz mniej.

Każde stulecie kpiło z poprzedniego, oskarżając je, że uogólniało zbyt pośpiesznie i zbyt naiwnie. Descartes miał politowanie dla Jończyków: Descartes z kolei u nas wywołuje uśmiech; niewątpliwie synowie nasi śmiać się kiedyś będą i z nas.

Czyż wobec tego nie moglibyśmy iść odrazu aż do końca? Czy nie byłoby to sposobem uniknięcia tych przewidywanych naigrawań? Czy nie moglibyśmy zadowolić się nagim doświadczeniem?

Odpowiedź na to pytanie musi wypaść przecząco; w przeciwnym razie zapoznalibyśmy prawdziwy charakter nauki. Uczony powinien porządkować; naukę buduje się z faktów, jak dom z kamieni; lecz nagromadzenie faktów nie jest bardziej nauką niż kupa kamieni domem.

A przedewszystkim uczony powinien przewidywać. Carlyle napisał gdzieś coś w tym rodzaju: »Jedynie fakt ma znaczenie; Jan bez Ziemi przeszedł tędy — oto coś godnego uwielbienia, oto rzeczywistość, za którą oddałbym wszystkie teorye świata«. Carlyle był rodakiem Bacona; ale Bacon nie powiedziałby tego. Język Carlyle'a jest językiem historyka. Fizyk powiedziałby raczej: »Jan bez Ziemi poszedł tędy; mało mnie to obchodzi, skoro nigdy więcej tędy nie przejdzie«.

Wiemy wszyscy, że istnieją doświadczenia dobre i doświadczenia złe. Nagromadzenie złych do niczego nie doprowadzi; może ich być sto lub nawet tysiąc — jedna praca prawdziwego mistrza, np. jakiegoś Pasteura, starczy, by poszły one w zapomnienie. Bacon dobrzeby to był zrozumiał, bo on to właśnie wynalazł wyraz *experimentum crucis*. Nie rozumiał tego Carlyle. Fakt jest faktem; uczeń odczytał taką a taką liczbę na termometrze, przyczym nie stosował żadnych środków ostrożności; mniejsza z tym: w każdym razie odczytał ją, a jeśli jedynie ma znaczenie fakt, jest to rzeczywistość taka sama, jak wędrówka króla Jana bez Ziemi. Dlaczego fakt ten, zanotowany przez ucznia, jest bez znaczenia, podczas gdy fakt, że jakiś wyćwiczony fizyk odczytał stan temperatury miałby bardzo wielkie znaczenie? Dlatego, że z pierwszego faktu nie możemy niczego wywnioskować. Jakież więc doświadczenie jest dobre? Takie, które umożliwia nam poznanie czegoś więcej niż odosobniony fakt, które pozwala nam przewidywać, a więc też uogólniać.

Albowiem bez uogólnienia przewidywanie jest niemożliwe. Warunki, w jakich dokonano danego doświadczenia, nie powtórzą się nigdy jednocześnie. Zaobserwowany fakt nigdy przeto nie powróci; twierdzić można jedynie, że w warunkach analogicznych zajdzie fakt analogiczny. Aby przewidywać, trzeba więc odwoływać się przynajmniej do analogii, co już znaczy uogólniać.

Jakkolwiek nieśmiało byśmy sobie poczynali, musimy przecież interpolować; doświadczenie daje nam jedynie pewną liczbę odosobnionych punktów; trzeba je połączyć linią ciągłą; jest to prawdziwe uogólnienie. Jest to nawet więcej: krzywa, którą nakreślimy, przejdzie między temi punktami i w ich pobliżu, nie przejdzie przez same te punkty. Tak więc nie ograniczamy się do uogólnienia doświadczenia, ale nadto wprowadzamy doń poprawki, a fizyk, który zechciałby obchodzić się bez takich poprawek i rzeczywiście zadawalać się nagim doświadczeniem, zmuszony byłby formułować bardzo osobliwe prawa badanych przez się zjawisk.

Fakty nagie nie mogą nam tedy wystarczyć; dlatego też potrzeba nam nauki uporządkowanej albo raczej zorganizowanej.

Mówi się często, że trzeba eksperymentować bez myśli z góry powziętej. Jest to niemożliwe; nietylko bowiem sprawiłoby to, że wszelkie doświadczenie stałoby się jałowym, ale nawet przy najlepszej chęci byłoby to niemożliwe. Każdy nosi w sobie swoje pojmowanie świata, od którego nie tak łatwo się wyzwolić. Trzebaż np. posługiwać się językiem, a język nasz jest cały ulepiony z myśli z góry powziętych, i inaczej być nie może. Tylko, że są to myśli powzięte z góry nieświadomie, a przeto tysiąckrotnie niebezpieczniejsze od innych.

Czy wprowadzając z całą świadomością inne, zwiększymy przez to złe? nie sądzę; mniemam raczej, że jedne stanowić będą w stosunku do drugich przeciwwagę, powiedziałbym niemal: antydotum; zazwyczaj nie będą one zgodnie spółistniały, między jednemi a drugiemi ujawnią się konflikty i zmuszą nas do rozważania rzeczy z rozmaitych stron. Będzie to dla nas wystarczającą dźwignią wyzwolenia: nie jest się już niewolnikiem, skoro ma się możność wyboru swego pana.

Tak więc, dzięki uogólnianiu, każdy zaobserwowany fakt pozwala nam przewidywać znaczną ilość innych; tylko nie powinniśmy zapominać, że pewnym jest jedynie pierwszy, zaś wszystkie inne są tylko prawdopodobne. Jakkolwiek mocno ugruntowanym może się nam wydawać dane przewidywanie, nie jesteśmy nigdy b e z w z g l ę d n i e pewni, że doświadczenie nie zada mu kłamu, skoro zechcemy poddać je sprawdzeniu. Prawdopodobieństwo wszakże jest często dość wielkie, byśmy się nim mogli zadowolić w praktyce. Lepiej jest przewidywać bez pewności niż nie przewidywać wcale.

Nie należy tedy nigdy zaniedbywać poddawania przewidywań próbom, ilekroć nastręcza się po temu sposobność. Lecz wszelkie doświadczenie trudne jest i długie, badacze nieliczni, a ilość faktów, których przewidywanie jest potrzebne, jest olbrzymia; wobec tej masy liczba prób bezpośrednich, które zdołamy przeprowadzić, będzie zawsze tylko znikomo mała.

Ze skromnego, bezpośrednio dla nas dostępnego zasobu faktów trzeba umieć jak najlepiej skorzystać; trzeba, by każde doświadczenie pozwoliło nam na możliwie największą ilość przewidywań o możliwie największym prawdopodobieństwie. Zadanie polega, że tak powiem, na zwiększeniu wydajności maszyny naukowej.

Niechaj mi będzie wolno porównać Naukę do biblioteki, której zawartość ma ustawicznie rosnąć; bibliotekarz rozporządza dla zakupów funduszami niewielkiemi, musi więc starać się ich nie trwonić.

Zakupy powierzone są fizyce doświadczalnej; ona więc jedynie może zbogacać bibliotekę.

Zadaniem zaś fizyki matematycznej jest sporządzanie katalogu. Jeśli katalog ten ułożony będzie dobrze, biblioteka nie stanie się jeszcze przez to bogatsza. Ale będzie on mógł być pomocny czytelnikowi w korzystaniu z jej bogactw.

Nadto, wskazując bibliotekarzowi luki w jego zbiorach, pozwoli mu on robić trafniejszy użytek z jego funduszów; co jest tym ważniejsze, iż fundusze te zupełnie nie są wystarczające.

Taką jest więc rola fizyki matematycznej; winna ona kierować uogólnianiem, tak aby zwiększać to, co nazwałem wydajnością nauki. Jakiemi do tego dochodzi środkami, i w jaki sposób może to robić bez niebezpieczeństwa — rozpatrzymy poniżej.

Jedność przyrody. — Zauważmy przedewszystkim, że każde uogólnienie przypuszcza w pewnej mierze wiarę w jedność i prostotę przyrody. Kwestya jedności nie nastręcza żadnych trudności. Gdyby poszczególne części wszechświata nie stanowiły czegoś na podobieństwo organów jednego i tego samego ciała, nie oddziaływałyby one wzajem na siebie, byłyby dla siebie zupełnie obojętne; w szczególności zaś my znalibyśmy tylko jedną z pośród nich. Pytanie powinno tedy brzmieć nie: czy przyroda jest jedną? lecz jak jest ona jedną?

Kwestya prostoty przyrody jest już trudniejsza. Nie jest pewnym, że przyroda jest prosta. Czy możemy bez niebezpieczeństwa postępować tak, jak gdyby nią była?

Był czas, kiedy na prostotę prawa Mariotte'a powoływano się jako na argument za jego ścisłością, kiedy sam Fresnel, który w rozmowie z Laplacem powiedział, że przyroda nie troszczy się o nasze trudności analityczne, uważał za swój obowiązek tłumaczyć się przed czytelnikami, aby nie obrazić panujących zapatrywań.

Dzisiaj poglądy bardzo się zmieniły; a przecież ci, co nie sądzą, by prawa przyrody musiały być proste, zmuszeni są często postępować tak, jak gdyby takie było ich mniemanie. Gdyby zechcieli się odeń zupełnie wyzwolić, wszelkie uogólnianie a przeto wszelka nauka stałyby się niemożliwe.

Każdy fakt można oczywiście uogólnić w nieskończoną ilość sposobów, z których należy wybierać; wyborem tym może kierować jedynie wzgląd na prostotę. Weźmy wypadek najbanalniejszy: interpolacyę. Przeprowadzamy linię ciągłą o możliwie najprawidłowszym kształcie między punktami, których dostarczyło doświadczenie. Dlaczego unikamy załamań, przegięć zbyt gwałtownych? dlaczego nie każemy naszej linii dokonywać najkapryśniejszych zygzaków? Dlatego, że wiemy z góry, alboteż zdaje nam się, że wiemy, iż prawo, które ma wyobrażać ta linia, nie może być tak bardzo skomplikowane.

Masę Jowisza można wyprowadzić bądź z ruchów jego satelitów, bądź z perturbacyi wielkich planet, bądź z perturbacyi małych planet. Jeśli weźmiemy przeciętną z wyliczeń dokonanych na podstawie każdej z tych metod, otrzymamy trzy liczby bardzo do siebie zbliżone lecz różne. Rezultat ten możnaby interpretować tak, iż spółczynnik grawitacyi w każdym z tych trzech wypadków jest inny; pozwoliłoby to bez wątpienia na ściślejsze oddanie obserwacyi we wzorach matematycznych. Czemuż odrzucamy tę interpretacyę? Wcale nie dlatego, żeby w niej tkwiła jakaś niedorzeczność, lecz dlatego, że jest bezpożytecznie skomplikowana. Zgodzimy się na nią dopiero wówczas, gdy się nam narzuci, — dziś się jeszcze nie narzuca.

Słowem, zazwyczaj każde prawo uważa się za proste, chyba, że zostanie dowiedzione, że jest inaczej.

Zwyczaj ten narzuca się fizykowi dla powyżej zaznaczonych racyi; jakżeż go jednak usprawiedliwić wobec odkryć, które z dniem każdym ujawniają nam nowe szczegóły, coraz bogatsze i bardziej skomplikowane? Jakże pogodzić go nawet z naszym poczuciem jedności przyrody? Albowiem skoro wszystko zależy od wszystkiego, związki zachodzące między tylu rozmaitemi przedmiotami nie mogą być proste.

Badając dzieje nauki, widzimy dwa odwrotne w pewnym sensie procesy: to prostota ukrywa się pod pozorami skomplikowanemi, to znów pozorną jest prostota a kryje się za nią bardzo skomplikowana rzeczywistość.

Cóż bardziej skomplikowanego nad zakłócone ruchy planet, cóż prostszego nad prawo Newtona? Tutaj przyroda, drwiąc sobie, jak mówi Fresnel, z trudności analitycznych, używa jedynie środków prostych i przez ich skombinowanie tworzy pasma niezmiernie powikłane. Mamy tu ową ukrytą prostotę, którą trzeba ujawnić.

Przykładów przeciwnych istnieje obfitość wielka. W teoryi kinetycznej gazów rozpatruje się cząsteczki ożywione wielkiemi prędkościami, a drogi ich przekształcane ustawicznemi spotkaniami tych cząsteczek posiadają kształty najkapryśniejsze i przeszywają przestrzeń we wszystkich kierunkach. Rezultatem postrzegalnym tego wszystkiego jest proste prawo Mariotte'a; każdy indywidualny fakt był skomplikowany: prawo wielkich liczb przywróciło w wyniku przeciętnym — prostotę. Tutaj prostota jest tylko pozorną, i jedynie nieokrzesaność naszych zmysłów nie pozwala nam na postrzeganie owych skomplikowanych zjawisk.

Wiele zjawisk podlega prawu proporcyonalności; dlaczegóż to? Dlatego mianowicie, że w zjawiskach tych coś jest bardzo małe. Zaobserwowane proste prawo jest więc tylko wyrazem owego ogólnego analitycznego prawidła, według którego nieskończenie mały przyrost funkcyi jest proporcyonalny do przyrostu zmiennej. Ponieważ w rzeczywistości nasze przyrosty nie są nieskończenie małe, lecz bardzo małe, prawo proporcyonalności jest tylko przybliżenie prawdziwe a prostota tylko pozorna. Stosuje się to również do prawidła superpozycyi małych ruchów, które jest tak płodne i stanowi podstawę optyki.

A samo prawo Newtona? Prostota jego, tak długo ukryta, jest może tylko pozorna. Kto wie, czy nie pochodzi ono od jakiegoś skomplikowanego mechanizmu, od uderzeń wewnątrz jakiejś subtelnej materyi ożywionej nieprawidłowemi ruchami i czy nie stało się ono prostym za sprawą przeciętnych oraz wielkich liczb? W każdym razie trudno jest nie przypuścić, że prawdziwe prawo zawiera wyrazy dopełniające, które stałyby się postrzegalne na małych odległościach. Jeżeli w astronomii można je pominąć obok wyrazu Newtona, co nadaje prawu ową prostotę, tedy działoby się to jedynie na skutek ogromnych rozmiarów odległości niebieskich.

Gdyby nasze środki badania stawały się coraz subtelniejszemi i przenikliwszemi, odkrywalibyśmy bez wątpienia prostotę pod złożonością, następnie złożoność pod prostotą potym znów prostotę pod złożonością, i tak dalej, i przewidzieć niepodobnaby było, co będzie ostatnim wyrazem tego szeregu.

Należy przecież jednak zatrzymać się na czymśkolwiek, żeby zaś nauka była możliwa, wypada zatrzymać się wówczas, gdy znaleźliśmy prostotę. Jest to jedyny grunt, na którym będziemy mogli wznieść budowę naszych uogólnień. Ale wobec pozorności owej prostoty czyż grunt ten będzie dostatecznie pewny i trwały? Nad pytaniem tym wypada się zastanowić.

W tym celu rozpatrzmy, jaką rolę odgrywa w uogólnieniach naszych wiara w prostotę. Sprawdziliśmy pewne proste prawo w wielkiej ilości wypadków szczególnych; wzdragamy się przypuścić, by zgodność ta, tylekrotnie powtórzona, była rzeczą czystego przypadku, i wnosimy stąd, że prawo musi być prawdziwym w wypadku ogólnym.

Kepler spostrzega, że wszystkie położenia jednej i tej samej planety, zaobserwowane przez Tychona, znajdują się na jednej i tej samej elipsie. Ani na chwilę nie przychodzi mu na myśl, by Tycho, zrządzeniem szczególnego przypadku, spoglądał na niebo wyłącznie w chwilach, gdy prawdziwa droga planety przecinała tę elipsę.

Jakąż ma wagę wobec tego, czy prostota jest rzeczywista, czy też pokrywa ona jakąś prawdę złożoną? Czy jest ona przejawem wpływu wielkich liczb, który niweluje indywidualne różnice, czy też pochodzi od wielkości lub małości pewnych liczb, pozwalającej na pomijanie pewnych wyrazów; tak czy owak, nie jest ona rzeczą przypadku. Rzeczywista lub pozorna, prostota ta posiada zawsze jakąś przyczynę. Będziemy tedy zawsze mogli przeprowadzić to samo rozumowanie, i jeśli proste prawo zostało zaobserwowane w kilku wypadkach szczególnych, będziemy mogli zasadnie przypuszczać, że będzie ono prawdziwe w wypadkach analogicznych. W przeciwnym bowiem razie przypisywalibyśmy przypadkowości rolę niedopuszczalną.

Zachodzi przecież pewna różnica. Gdyby prostota była rzeczywista i głęboka, okazałaby się ona wytrzymałą na rosnącą precyzyę naszych środków mierniczych; jeśli tedy wierzymy, że przyroda jest głęboko prosta, winnibyśmy wnieść z prostoty przybliżonej o prostocie ścisłej. Tak też robiono dawniej; dziś nie mamy już do tego prawa.

Prostota praw Keplera np. jest tylko pozorna. Nie przeszkadza to, że stosują się one, ze znacznym przybliżeniem, do wszystkich układów analogicznych do układu słonecznego, przeszkadza natomiast uważaniu ich za ściśle dokładne.

Rola hypotezy. — Wszelkie uogólnienie jest hypotezą; hypotezie przypada tedy w udziele rola niezbędna, której nikt nigdy nie zaprzeczał. Ale winna ona podlegać sprawdzeniu i to możliwie najrychlej i możliwie najczęściej. Rozumie się samo przez się, że jeśli nie wytrzyma ona tej próby, należy ją porzucić bez żadnej myśli ubocznej. To też czyni się zazwyczaj, lubo niekiedy z pewną niechęcią.

Otóż sama ta niechęć bynajmniej nie jest usprawiedliwiona; fizyk, który się zrzeka jednej ze swych hypotez, powinienby przeciwnie być pełen radości, albowiem natrafił na niespodziewaną sposobność do odkryć. Hypotezy jego, jak wyobrażam sobie, nie przyjęto lekkomyślnie; uwzględniała ona wszystkie znane czynniki, które, jak się zdawało, mogły wpływać na dane zjawiska. Skoro próba się nie powodzi, tedy zachodzi coś nieoczekiwanego, nadzwyczajnego; znaczy to, że badacz wykrywa coś nieznanego i nowego.

Czyż więc obalona w ten sposób hypoteza była jałową? Bynajmniej — twierdzić nawet można, że oddała ona więcej usług niż hypoteza prawdziwa; albowiem nietylko dała ona sposobność do decydującego doświadczenia, ale gdyby nawet przypadek naprowadził na to samo doświadczenie to w braku pomienionej hypotezy, nic byśmy zeń nie wywnioskowali; nie widzielibyśmy w nim nic nadzwyczajnego; poprostu wciągnęlibyśmy do katalogu jeszcze jeden fakt, żadnych z niego nie wyprowadzając konsekwencyi.

Zapytajmy teraz, pod jakiemi warunkami można korzystać z hypotezy bez niebezpieczeństwa?

Mocne postanowienie poddawania się doświadczeniu nie wystarcza; istnieją pomimo to hypotezy niebezpieczne; są to przedewszystkim i nadewszystko hypotezy milczące i nieświadome. Ponieważ robimy je, nie wiedząc o tym, nie możemy ich porzucić. I tu też właśnie fizyka matematyczna może nam oddać usługę. Przez właściwą sobie ścisłość zmusza nas ona do wyraźnego formułowania wszystkich hypotez, które, nie podejrzywając tego, robilibyśmy poza nią.

Zauważmy nadto, że nie należy nadmiernie mnożyć hypotez i że wprowadzać je należy kolejno, jedną po drugiej. Albowiem, jeśli budujemy teoryę, opartą na licznych hypotezach, to skoro doświadczenie ją obali, nie będziemy wiedzieli którą z tych przesłanek wypada zmienić. I odwrotnie, gdy powiedzie się doświadczenie, czyż potwierdzi to łącznie wszystkie te hypotezy? Czyż jedno równanie może określić kilka niewiadomych?

Należy również rozróżniać różne rodzaje hypotez. Istnieją przedewszystkim takie, które są całkiem naturalne i których niepodobna uniknąć. Trudno jest nie przypuścić, że wpływ ciał odległych daje się zupełnie pomijać, że małe ruchy podlegają prawom linijnym, że skutek jest funkcyą ciągłą swej przyczyny. To samo powiedziałbym o warunkach, które narzuca nam symetrya. Wszystkie te hypotezy stanowią, że tak powiem, podstawę wszystkich teoryi fizyki matematycznej. Są to te, które należy porzucać dopiero na samym końcu.

Jest druga kategorya hypotez, które scharakteryzowałbym jako obojętne. W większości zagadnień analityk przypuszcza na początku swego rachunku bądź, że materya jest ciągła, bądź przeciwnie, że utworzona jest z atomów. Gdyby zamiast jednego z tych założeń przyjął założenie przeciwne, nie zmieniłoby to w niczym jego wyników; conajwyżej rachunki jego byłyby dłuższe i trudniejsze. Jeśli następnie doświadczenie potwierdzi jego wnioski, czyż będzie to znaczyło, że dowiódł on rzeczywistego istnienia atomów?

Do teoryi optycznych wprowadza się dwa wektory, z których jeden uważany jest za prędkość, drugi za wir. I to jest hypotezą obojętną, bo doszłoby się do tych samych wniosków przyjmując założenie wprost odwrotne; powodzenie doświadczenia nie może więc dowodzić, że pierwszy wektor jest rzeczywiście prędkością; dowodzi ono jedynie tylko, że jest to wektor; jest to jedyna hypoteza, którą rzeczywiście wprowadzono do przesłanek. Ażeby nadać mu ów konkretny wygląd, jakiego wymaga słabość naszego umysłu, zmuszeni byliśmy rozważać go bądź jako prędkość, bądź jako wir, podobnie jak musieliśmy oznaczyć go zapomocą jakiejś litery, czy to zapomocą x czy y; lecz jakkolwiek wypadnie nasz wynik, nie dowiedzie on, że mieliśmy lub nie mieliśmy słuszności uważać go za prędkość; tak samo jak nie dowiedzie że było lub nie było słusznym oznaczenie go przez x nie zaś przez y.

Te hypotezy obojętne nie są nigdy niebezpieczne, pod warunkiem, że zdajemy sobie sprawę z ich istoty. Mogą one być pożyteczne bądź dla ułatwienia rachunku, bądź dla wsparcia naszego umysłu konkretnemi obrazami, »dla ustalenia pojęć«, jak się często mówi. Niema więc racyi je rugować.

Hypotezami trzeciej kategoryi są rzeczywiste uogólnienia. One to podlegają potwierdzeniu lub obaleniu przez doświadczenie. Sprawdzone czy też potępione, mogą one zawsze być płodne. Lecz dla racyi, które wyłożyłem, warunkiem tej płodności jest, iżby nie były zbyt liczne.

Pochodzenie fizyki matematycznej. — Wniknijmy głębiej w nasz przedmiot i zbadajmy bliżej warunki, które umożliwiły rozwój fizyki matematycznej. Stwierdzimy odrazu, że usiłowania badaczy zmierzały zawsze do rozkładu zjawiska złożonego, danego przez bezpośrednie doświadczenie, na bardzo wielką liczbę zjawisk elementarnych.

Rozkład taki odbywa się trzema różnemi sposobami: przedewszystkim w czasie. Zamiast ujęcia całokształtu postępowego rozwoju pewnego zjawiska usiłuje się poprostu związać każdą chwilę z chwilą bezpośrednio ją poprzedzającą; przypuszcza się, że stan obecny świata zależy jedynie od najbliższej przeszłości, nie ulega zaś bezpośrednio wpływowi przeszłości odległej. Dzięki temu postulatowi można zamiast bezpośredniego badania całej kolejności zjawisk, ograniczyć się do napisania jej »równania różniczkowego«; prawa Keplera zastępuje prawo Newtona.

Następnie usiłuje się rozłożyć zjawisko w przestrzeni. Doświadczenie daje nam mglisty całokształt faktów zachodzących na widowni posiadającej pewną rozciągłość; trzeba się starać o wyodrębnienie zjawiska elementarnego, zlokalizowanego w bardzo małej cząstce przestrzeni.

Kilka przykładów przyczyni się, być może, do lepszego uwydatnienia mej myśli. Gdyby ktoś zamierzył zbadać w całej jego złożoności rozmieszczenie temperatury w stygnącej bryle, przekonałby się, że zadanie to jest niewykonalne. Wszystko natomiast staje się prostym, skoro zważymy, że punkt bryły nie może bezpośrednio udzielać ciepła punktowi odległemu; udzielać go on może bezpośrednio jedynie punktom najbliższym, i tylko stopniowo prąd ciepła będzie mógł docierać do innych części bryły. Zjawiskiem elementarnym jest wymiana ciepła między dwoma punktami przyległemi; jest ono ściśle zlokalizowane, i jest względnie proste, jeśli przypuścimy — co nasuwa się w sposób naturalny — że nie ulega ono wpływowi cząsteczek znajdujących się w dostrzegalnej odległości.

Zginamy pręt; przybierze on kształt bardzo skomplikowany, którego bezpośrednie zbadanie byłoby niemożliwe; będziemy przecież mogli doń przystąpić, jeśli zauważymy, że wygięcie pręta jest wypadkową odkształceń jego elementów bardzo małych, i że odkształcenie każdego z tych elementów zależy jedynie od sił bezpośrednio doń przyłożonych, wcale zaś nie zależy od sił, które mogą działać na inne elementy.

We wszystkich tych przykładach, które moglibyśmy mnożyć bez trudności, przypuszcza się, że niema działania na odległość lub przynajmniej na wielką odległość. Jest to hypoteza; niezawsze jest ona prawdziwa, dowodzi tego prawo ciążenia; należy więc poddawać ją sprawdzeniu; jeśli doświadczenie potwierdzi ją, bodaj w przybliżeniu, będzie ona cenna, albowiem pozwoli nam na budowanie fizyki matematycznej, przynajmniej drogą przybliżeń kolejnych.

Jeśli natomiast nie ostoi się wobec prób, trzeba szukać innych analogicznych dróg, gdyż istnieją inne jeszcze środki osiągnięcia zjawisk elementarnych. Jeśli kilka ciał działa jednocześnie, zdarzyć się może, że działania ich są niezależne i dodają się poprostu jedne do drugich bądź na podobieństwo wektorów, bądź na podobieństwo wielkości skalarnych. Zjawiskiem elementarnym jest natenczas działanie jednego z tych ciał, wziętego w odosobnieniu od innych. Lub też mamy do czynienia z małemi ruchami, albo, mówiąc ogólniej, z małemi zmianami ulegającemi znanemu prawu superpozycyi. Zaobserwowany ruch rozłoży się wówczas na ruchy proste, np. dźwięk na składowe proste harmoniczne, światło białe na swe monochromatyczne składniki.

Skoro postanowiono już, w którą stronę zwrócić swe poszukiwania zjawiska elementarnego, to jakiemi środkami dopnie się go?

Przedewszystkim zdarzy się częstokroć, że aby je odgadnąć albo raczej aby odgadnąć zeń to, co nam będzie pożyteczne, nie będziemy musieli wniknąć w jego mechanizm; prawo wielkich liczb wystarczy. Powróćmy do przykładu rozchodzenia się ciepła; każda cząsteczka promieniuje ku każdej sąsiedniej cząsteczce; według jakiego prawa odbywa się to promieniowanie, nie mamy potrzeby wiedzieć; gdybyśmy zrobili co do tego jakieś przypuszczenie, byłaby to hypoteza obojętna a zatym bezużyteczna i niesprawdzalna. Bo w rzeczy samej działanie przeciętnych oraz symetrye środowiska sprawia, że wszystkie różnice wyrównywają się i jakakolwiek była owa hypoteza, rezultat będzie zawsze ten sam.

Ta sama okoliczność zachodzi w teoryi sprężystości, w teoryi włoskowatości; cząsteczki sąsiadujące ze sobą przyciągają się lub odpychają; nie mamy potrzeby wiedzieć, według jakiego prawa; wystarczy, abyśmy wiedzieli, że przyciąganie to jest uczuwalne jedynie na małe odległości, że cząsteczki są bardzo liczne, że środowisko jest symetryczne — a pozostanie nam jedynie zastosowanie prawa wielkich liczb.

I tutaj prostota zjawiska elementarnego ukrywała się pod komplikacyą dostrzegalnego zjawiska wypadkowego; ale z kolei i ta prostota była tylko pozorna i maskowała bardzo złożony mechanizm.

Najlepszym środkiem dotarcia do zjawiska elementarnego byłoby oczywiście doświadczenie. Należałoby za pomocą odpowiednich sposobów eksperymentalnych rozłożyć zawiły snop, dany nam bezpośrednio przez przyrodę, i starannie zbadać jego możliwie oczyszczone elementy; rozłożymy np. przyrodzone światło białe na światła monochromatyczne za pomocą pryzmatu, a na światła spolaryzowane zapomocą polaryzatora.

Na nieszczęście nie jest to ani zawsze możliwe ani zawsze wystarczające, i nieraz wypada umysłowi wyprzedzać doświadczenie. Jeden tylko przytoczę na to przykład, który zawsze żywo mnie uderzał:

Rozłożywszy światło białe, możemy wyodrębnić małą część widma, przyczym część ta, jakkolwiek mała, zachowa zawsze pewną szerokość. Podobnież światła naturalne zwane monochromatycznemi dają nam prążek bardzo wąski, a jednak nie nieskończenie wąski. Możnaby sądzić, że badając doświadczalnie własności naturalnych tych świateł, operując zapomocą coraz to węższych prążków widmowych i wreszcie przechodząc, że tak powiem, do granicy, dojdziemy do poznania własności światła ściśle monochromatycznego. Mniemanie takie byłoby błędne. Przypuśćmy, że dwa promienie pochodzą z jednego źródła, że polaryzuje się je w dwu płaszczyznach prostopadłych, że sprowadza się je następnie do jednej płaszczyzny polaryzacyi i usiłuje wywołać między niemi zjawisko interferencyi. Gdyby światło było ściśle monochromatyczne, interferencya zaszłaby; lecz nasze światła przybliżenie monochromatyczne nie dadzą interferencyi, i to jakkolwiek wąski będzie prążek; ażeby było inaczej, musiałby on być kilka miljonów razy węższy niż najwęższe ze znanych prążków.

W tym więc wypadku przejście do granicy wprowadziłoby nas w błąd; umysł musiał wyprzedzić doświadczenie, i jeśli zrobił to z powodzeniem, to dlatego, że poddał się kierownictwu instynktu prostoty.

Znajomość faktu elementarnego pozwala nam na ujęcie zagadnienia w równanie; pozostaje tylko wyprowadzenie zeń zapomocą kombinacyi rachunkowych zjawiska złożonego dostrzegalnego i sprawdzalnego. Nazywa się to całkowaniem; jest to rzeczą matematyka.

Możnaby zadać sobie pytanie, dlaczego w naukach fizycznych uogólnienie przybiera chętnie postać matematyczną. Po tym, cośmy powiedzieli wyżej, nie trudno będzie to wytłumaczyć; przyczyną tu jest nietylko okoliczność, że mamy wyrażać prawa liczebne, lecz również fakt, że zjawisko dostrzegalne pochodzi z superpozycyi wielkiej liczby zjawisk elementarnych, które są wszystkie do siebie podobne; tak to występują drogą naturalną równania różniczkowe.

Nie wystarcza, że każde zjawisko elementarne ulega prostym prawom; trzeba nadto, aby wszystkie takie zjawiska, które się łącznie rozważa, ulegały temu samemu prawu. Wówczas jedynie interwencya matematyki może być pożyteczna; albowiem matematyka uczy nas kombinowania rzeczy podobnych z podobnemi. Celem jej jest odgadnięcie rezultatu pewnej kombinacyi bez uciekania się do odrabiania tej kombinacyi element za elementem. Jeżeli wypada powtórzyć kilka razy to samo działanie, pozwala nam ona uniknąć tego powtarzania i poznać z góry jego rezultat zapomocą pewnego rodzaju indukcyi. Wytłumaczyłem to wyżej w rozdziale o rozumowaniu matematycznym.

Koniecznym jest w tym celu, by wszystkie te działania były podobne do siebie; w przeciwnym wypadku trzebaby oczywiście zdecydować się na kolejne ich wykonywanie jednego po drugim, i matematyka stałaby się zbyteczną.

Jeżeli tedy fizyka matematyczna mogła się narodzić, to dzięki przybliżonej jednorodności przedmiotu badanego przez fizyków.

W naukach przyrodniczych nie napotykamy już tych warunków: jednorodności, względnej niezależności części odległych, prostoty faktu elementarnego, — i dlatego to przyrodnicy zmuszemi są uciekać się do innych sposobów uogólniania.

Rozdział Dziesiąty.

Teorye Fizyki nowoczesnej.

Znaczenie teoryi fizycznych. — Profanów uderza charakter efemeryczny teoryi naukowych. Widzą oni, jak teorye te po pewnym okresie powodzenia kolejno zostają porzucane; widzą, jak ruiny gromadzą się na ruinach; przewidują, że na teorye dziś modne przyjdzie również rychło kolej upadku i wnoszą stąd, że teorye te są zupełnie czcze i próżne. Poglądy te swoje nazywają bankructwem nauki.

Sceptycyzm ich jest powierzchowny; nie zdają sobie zupełnie sprawy z celu i z roli teoryi naukowych, w przeciwnym bowiem razie zrozumieliby, że i ruiny mogą do czegoś służyć.

Żadna teorya nie wydawała się mocniej ugruntowaną od teoryi Fresnela, przypisującej światło ruchom eteru. A jednak ustąpiła ona dziś miejsca teoryi Maxwella. Czyż znaczy to, że dzieło Fresnela było próżne? Bynajmniej, albowiem celem Fresnela nie było dowiedzenie się, czy istnieje rzeczywiście eter, czy składa się on, czy też nie składa z atomów, czy atomy te poruszają się rzeczywiście w tym lub w owym kierunku, celem jego było przewidywanie zjawisk optycznych.

Otóż do tego celu nadaje się teorya Fresnela dzisiaj również dobrze jak przed Maxwellem. Równania różniczkowe zawsze są prawdziwe; zawsze można je całkować zapomocą tych samych metod, i wyniki tego całkowania zachowują zawsze swą wartość.

I niechaj nam nie mówią, że sprowadzamy w ten sposób teorye fizyczne do roli prostych przepisów praktycznych; równania te wyrażają pewne stosunki; jeżeli zaś równania pozostają prawdziwemi, to dlatego, żę i odnośne stosunki trwają nadal. Mówią nam one, obecnie jak i poprzednio, że między »czymś« a »czymś innym« ząchodzi pewien stosunek; tylko że to »coś« nazywaliśmy dawniej ruchem, obecnie zaś nazywamy je prądem elektrycznym. Lecz nazwy te były tylko obrazami zastępującemi rzeczywiste przedmioty, które przyroda wiecznie będzie przed nami ukrywała. Prawdziwe stosunki między temi rzeczywistemi przedmiotami są jedyną rzeczywistością, do której możemy dotrzeć, a jedynym warunkiem jest, by te same stosunki zachodziły między temi przedmiotami a obrazami któremi zmuszeni jesteśmy je zastępować. Skoro znamy te stosunki, jest już sprawą bez znaczenia, czy osądzimy za dogodne zastąpienie jednego obrazu przez inny.

Czy dane zjawisko peryodyczne (np. drganie elektryczne) pochodzi rzeczywiście od wibracyi jakiegoś atomu, który na podobieństwo wahadła przesuwa się rzeczywiście w tym lub owym kierunku — nie jest ani pewnym ani ciekawym. Że przecież między drganiem elektrycznym, ruchem wahadła i wszystkiemi zjawiskami peryodycznemi zachodzi wewnętrzne powinowactwo, odpowiadające głębokiej rzeczywistości; że powinowactwo to, to podobieństwo lub raczej ten paralelizm sięga nawet szczegółów tych zjawisk; że jest on konsekwencyą zasad ogólniejszych; mianowicie zasady energii oraz najmniejszego działania — oto są rzeczy, które możemy twierdzić z pewnością; oto prawda, która pozostanie zawsze tą samą, w jakąkolwiek uznamy za pożyteczne przyoblec ją szatę.

Podawano wiele teoryi rozszczepienia (światła); pierwsze z nich miały znaczne braki i zawierały jedynie małą część prawdy. Następnie przyszła teorya Helmholtza; później próbowano ją zmodyfikować na rozmaite sposoby i nawet sam jej autor obmyślił inną opartą na zasadach Maxwella. Rzecz przecież godna uwagi, że wszyscy badacze, którzy przyszli po Helmholtzu, doszli do tych samych co on równań, jakkolwiek punkty ich wyjścia były napozór bardzo odległe. Odważyłbym się twierdzić, że wszystkie te teorye są jednocześnie prawdziwe, nietylko dlatego, że każą nam przewidywać te same fakty, lecz nadto dlatego, że uwydatniają pewien prawdziwy stosunek, mianowicie stosunek pochłaniania do anormalnego rozszczepienia. W przesłankach tych teoryi prawdziwe jest to, co jest wspólne wszystkim autorom; jest to ustanowienie takiego a takiego związku między pewnemi rzeczami, które jedni nazywają jednym imieniem, inni zaś innym.

Przeciw teoryi kinetycznej gazów wytoczono wiele zarzutów, na które trudnoby było odpowiedzieć, gdyby chciano upatrywać w niej prawdę absolutną. Ale wszystkie te zarzuty nie znoszą faktu, iż była ona bardzo pożyteczna, co ujawniło się zwłaszcza w odkryciu za jej pomocą pewnego związku prawdziwego a głęboko dawniej utajonego, mianowicie związku między ciśnieniem gazowym a ciśnieniem osmotycznym. W tym też sensie można twierdzić, że jest ona prawdziwa.

Gdy fizyk stwierdza sprzeczność między dwiema teoryami, które są mu jednakowo drogie, mówi niekiedy: Nie niepokójmy się tym, lecz trzymajmy mocno oba końce łańcucha, chociaż ogniwa pośrednie są dla nas ukryte. Argument ten, zakrawający na tłumaczenie się zakłopotanego teologa, byłby śmieszny, gdyby się miało nadawać teoryom fizycznym to samo znaczenie, jakie w nich widzą profani. W razie sprzeczności jedną z nich przynajmniej trzebaby było natenczas uważać za błędną. Inaczej atoli rzecz się ma, jeśli szukamy w nich tego tylko, co w nich upatrywać należy. Możliwe jest, że tak jedna jak druga wyrażają prawdziwe związki a sprzeczność zachodzi jedynie między obrazami, w które przyodzialiśmy rzeczywistość.

Tym, którzyby uważali, że zbyt zacieśniamy obszar dostępny dla badacza, odpowiemy: Pytania, które ku waszemu żalowi z góry odrzucamy, są nietylko nierozwiązalne lecz nadto ułudne i pozbawione treści.

Ten lub ów filozof utrzymuje, że cała fizyka tłumaczy się przez wzajemne zderzenia atomów. Jeśli chce przez to poprostu powiedzieć, że między zjawiskami fizycznemi zachodzą te same związki, co między wzajemnemi uderzeniam wielkiej liczby bil, — doskonale — jest to twierdzenie sprawdzalne, może ono być prawdziwe. Ale chce on powiedzieć coś więcej; a nam się zdaje, że go rozumiemy, bo zdaje nam się, że wiemy, co to jest zderzenie samo w sobie; dlaczego? poprostu dlatego, że widzieliśmy niejednokrotnie partye bilardu. Czy będziemy sądzili, że Bóg, oglądając swoje dzieło, doznaje tych samych wrażeń, co my, przypatrując się partyi bilardu? Jeśli twierdzeniu jego nie chcemy nadać tego dziwacznego znaczenia, a jednocześnie odrzucamy owo zacieśnione znaczenie, które wyłożyliśmy powyżej i które jest znaczeniem właściwym, tedy nie będzie ono miało żadnego.

Hypotezy tego rodzaju posiadają więc jedynie znaczenie metaforyczne. Badacz nie ma więcej powodów wyrzekać się ich, niż poeta — wyrzekać się metafor; ale wiedzieć powinien, jaka jest ich wartość. Mogą one być pożyteczne dla zaspokojenia pewnych wymagań umysłu, a nie będą szkodliwe, o ile tylko są hypotezami obojętnemi.

Rozważania te tłumaczą nam, dlaczego pewne teorye, o których sądzono, że są porzucone i ostatecznie potępione przez doświadczenie, odradzają się nagle ze swych popiołów i rozpoczynają nowe życie. Albowiem wyrażały one prawdziwe związki; i nie przestały ich wyrażać i wówczas, gdy dla tej lub innej racyi uznaliśmy za odpowiednie wyrazić ten sam związek w innym wysłowieniu. Zachowały w ten sposób pewnego rodzaju życie utajone.

Zaledwie piętnaście lat temu czyż było coś śmieszniejszego, coś naiwniej staromodnego niż płyny Coulomba? A przecież obecnie pojawiają się znowu pod nazwą elektronów. Czym różnią się te cząsteczki naelektryzowane w sposób trwały od molekuł elektrycznych Coulomba? Wprawdzie w elektronach elektryczność dźwigają małe, ale to bardzo małe drobinki materyi; innemi słowy posiadają one masę, (której zresztą obecnie zaczęto im odmawiać); lecz i Coulomb nie odmawiał masy swym fluidom, albo jeśli to czynił, to tylko z żalem. Zbyt śmiałym byłoby utrzymywać, że wiara w elektrony nie ulegnie nigdy zaćmieniu; niemniej jednak warto było stwierdzić to nieoczekiwane odrodzenie.

Lecz najbardziej uderzającym przykładem jest zasada Carnota. Carnot ustanowił ją, wychodząc z założeń błędnych; gdy zauważono, że ciepło nie jest niezniszczalne, lecz może się przekształcać w pracę, porzucono zupełnie jego pomysły; później wrócił do nich Clausius i zapewnił im ostateczne zwycięstwo. Teorya Carnota w pierwotnej swej postaci wyrażała obok związków rzeczywistych inne związki nieodpowiadające rzeczywistości, odłamki starych poglądów; atoli obecność tych nie nadwerężała bynajmniej rzeczywistości tamtych. Clausiusowi pozostawało usunąć je poprostu, jak obłamuje się zeschłe gałęzie.

Rezultatem tego było drugie prawo podstawowe termodynamiki. Były to zawsze te same stosunki, jakkolwiek nie zachodziły już napozór między temi samemi przedmiotami. Wystarczyło to, by zasada zachowała swą wartość. Rozumowania nawet Carnota nie przepadły bezużytecznie; dotyczyły one treści błędnej; ale forma ich (czyli ich istota) pozostała poprawna.

Powyższe uwagi przelewają zarazem światło na rolę zasad ogólnych, jak np. zasada najmniejszego działania lub zasada zachowania energii.

Zasady te posiadają bardzo wysoką wartość; ustanowiono je drogą wykrycia pierwiastków wspólnych w formułach licznych praw fizycznych; stanowią one przeto jak gdyby kwintesencyę niezliczonych dostrzeżeń.

Z samego wszakże ich charakteru ogólnego wynika wskazana przez nas w Rozdziale VIII-ym ich właściwość, polegająca na tym, że doświadczenie nie może ich już obalić. Ponieważ nie możemy dać ogólnego określenia energii, zasada zachowania energii oznacza poprostu, że istnieje c o ś, co pozostaje niezmiennym. Otóż jakiekolwiek będą nowe pojęcia o świecie fizycznym, nasunięte nam przez przyszłe doświadczenia, pewni jesteśmy z góry, że zawsze coś będzie pozostawało stałym, i to coś będziemy mogli nazywać e n e r g i ą.

Czy znaczy to, że zasada ta nie ma żadnego znaczenia, że rozpływa się w tautologię? Bynajmniej, gdyż powiada ona, że owe różne rzeczy, którym dajemy nazwę e n e r g i i, związane są rzeczywistym powinowactwem; stwierdza prawdziwy między niemi związek.

Lecz skoro zasada ta ma pewien sens, tedy może być błędna; może się zdarzyć, że nie będziemy mieli prawa rozciągać nieograniczenie jej stosowalności — a przecież pewni jesteśmy z góry, że doświadczenie ją potwierdzi w ścisłym tego słowa znaczeniu; w jakiż sposób poznamy, że dosięgła ona ostatecznych krańców swej prawowitej stosowalności? Poprostu przez to, że przestanie ona być nam użyteczna, to jest pozwalać nam trafnie przewidywać nowe zjawiska. Pewni będziemy wówczas, że sformułowany związek nie odpowiada już rzeczywistości; w przeciwnym bowiem razie byłby płodny; doświadczenie, nie zaprzeczając bezpośrednio nowemu rozciągnięciu naszej zasady, niemniej każe je stanowczo odrzucić.

Fizyka a mechanizm. — Większość teoretyków posiada stałą predylekcyę do objaśnień, zapożyczonych od mechaniki lub dynamiki. Jedni byliby zadowoleni, gdyby mogli zdać sprawę ze wszystkich zjawisk zapomocą ruchów cząsteczek, przyciągających się według pewnych praw. Inni są bardziej wymagający; chcieliby oni znieść przyciągania na odległość; cząsteczki poruszają się w ich pojmowaniu po drogach prostolinijnych, od których mogą je odchylać jedynie zderzenia. Inni wreszcie, jak Hertz, znoszą również siły a zakładają, że cząsteczki połączone są wiązaniami geometrycznemi, analogicznie do naszych układów artykułowanych; chcą oni w ten sposób sprowadzić dynamikę do pewnego rodzaju kinematyki.

Wszyscy, jednym słowem, chcą nagiąć przyrodę do pewnej formy, poza którą dla umysłów ich nie masz zadowolenia. Czy przyroda okaże się dosyć po temu giętka?

Pytanie to rozpatrzymy w rozdziale XII-ym przy rozbiorze teoryi Maxwella. Zobaczymy, że ilekroć zasadom energii i najmniejszego działania staje się zadość, tedy nietylko możliwe jest objaśnienie mechaniczne, ale objaśnień takich istnieje zawsze nieskończoność. Dzięki pewnemu znanemu twierdzeniu Königsa o układach artykułowanych, dałoby się dowieść, że można objaśnić wszystko zapomocą połączeń Hertzowskich lub też sił centralnych i to na nieskończoną ilość sposobów. Możnaby zapewne również łatwo dowieść, że wszystko może być zawsze objaśnione przez zwyczajne zderzenia.

Oczywista, że nie można przytym ograniczać się do materyi pospolitej, tej, która podpada pod nasze zmysły, i której ruchy obserwujemy bezpośrednio. Trzeba albo założyć, że materya pospolita składa się z atomów, których ruchy wewnętrzne nie są dla nas postrzegalne, a dostępne naszym zmysłom jest jedynie przesunięcie ich całokształtu, albo też wyobrazić sobie jeden z owych subtelnych płynów, które pod nazwą eteru lub nazwami innemi odgrywały po wsze czasy w teoryach fizycznych rolę wybitną.

Częstokroć posuwają się fizycy jeszcze dalej i uważają eter za jedyną materyę pierwotną a nawet za jedyną materyę prawdziwą. Najbardziej umiarkowani patrzą na materyę pospolitą, jako na zgęszczony eter, w czym niema nic, coby nas raziło; inni przecież zmniejszają jeszcze bardziej jej znaczenie i widzą w niej jedynie miejsce geometryczne punktów osobliwych w eterze. Dla lorda Kelvina np. to, co nazywamy materyą, jest poprostu miejscem punktów, w których eter ożywiony jest ruchem wirowym; dla Riemanna była ona miejscem punktów, w których eter ustawicznie ulega zniszczeniu; dla innych autorów ostatniej doby, jak Wiechert lub Larmor, jest to miejsce punktów, w których eter ulega pewnemu szczególnemu bardzo skręceniu. Jeżeli chcemy stanąć na jednym z tych stanowisk, tedy zachodzi pytanie, jakim prawem rozciągnie się na eter, pod pozorem, że jest to prawdziwa materya, własności mechaniczne, zaobserwowane na materyi pospolitej, która jest tylko materyą pozorną.

Dawne fluidy, cieplik, elektryczność i t. d. zostały porzucone, skoro zauważono, że ciepło nie jest niezniszczalne. Ale porzucono je dla innej jeszcze racyi. Materyalizując je, podkreślano poniekąd ich indywidualność, kopano między niemi w pewnym sensie przepaść. Trzeba przecież było ją zapełnić, skoro zjawiło się żywe odczucie jedności przyrody i skoro zauważono głębokie związki łączące wszystkie jej części. Dawni fizycy, mnożąc fluidy, nietylko tworzyli bez potrzeby coraz to inne istoty, ale nadto zrywali rzeczywiste związki.

Nie wystarcza, aby dana teorya nie formułowała związków fałszywych, trzeba nadto, by nie zasłaniała związków rzeczywistych.

A eter nasz, czy istnieje rzeczywiście?

Wiadomo, skąd pochodzi wiara nasza w eter. Gdy światło dochodzi do nas z odległej gwiazdy, w ciągu kilku lat nie jest ono już na gwieździe, nie jest jeszcze na ziemi — musi więc ono być gdziekolwiek, dźwigane, że tak powiem, przez jakieś materyalne podłoże.

Tę samą myśl można wyrazić w postaci bardziej matematycznej i bardziej abstrakcyjnej. Bezpośrednio stwierdzamy jedynie zmiany zachodzące w cząsteczkach materyalnych; widzimy np., że klisza fotograficzna ulega wynikom zjawisk, których widownią była przed kilku laty rozżarzona masa gwiazdy. Owóż, w mechanice zwykłej stan badanego układu zależy jedynie od jego stanu w chwili bezpośrednio poprzedzającej; układ czyni więc zadość równaniom różniczkowym. Gdybyśmy zaś nie zakładali istnienia eteru, stan wszechświata materyalnego zależałby nietylko od stanu bezpośrednio poprzedzającego lecz nadto od stanów o wiele dawniejszych; układ czyniłby zadość równaniom o różnicach skończonych. Dla uniknięcia więc tego odchylenia od ogólnych praw mechaniki wynaleźliśmy eter.

Zmuszałoby to nas wszakże do napełnienia eterem jedynie próżni międzyplanetarnej, nie kazałoby mu jeszcze przenikać nawet do naszych środowisk materyalnych. Eksperyment Fizeau idzie dalej. Przez interferencyę promieni, które przeszły przez poruszające się powietrze lub wodę, zdaje się nam ukazywać dwa różne środowiska wzajem się przenikające, a przecież przesuwające się jeden względem drugiego. Mamy wrażenie, jak gdybyśmy nieledwie dotykali eteru palcami.

Można przecież wyobrazić sobie doświadczenia, któreby pozwoliły nam go dotknąć z bardziej jeszcze bliska. Przypuśćmy, że Newtonowska zasada równości działania i oddziaływania przestaje być prawdziwa w zastosowaniu do s a-m e j tylko materyi, i że zostaje to stwierdzone. Suma geometryczna wszystkich sił, przyłożonych do wszystkich cząsteczek materyalnych przestałaby być równą zeru. Musielibyśmy natenczas, aby uniknąć konieczności zmienienia całej mechaniki, wprowadzić eter, który pozwoliłby na przeciwważenie tego pozornego działania na materyę przez oddziaływanie materyi na coś innego.

Albo też przypuśćmy, że stwierdzone zostało, iż zjawiska optyczne i elektryczne ulegają wpływowi ruchu ziemi. Naprowadziłoby to nas na wniosek, że zjawiska te mogłyby nam ujawnić nietylko ruchy względne ciał materyalnych lecz również ruchy, jakby się zdawać mogło, bezwzględne. I w tym razie musielibyśmy przyjąć istnienie eteru, aby te rzekomo absolutne ruchy nie były ich przesunięciami względem przestrzeni próżnej, lecz względem czegoś konkretnego.

Czyż kiedykolwiek dojdziemy do tego? Nie mam tej nadziei, i niebawem objaśnię, dlaczego; a przecież nie jest ona bynajmniej tak niedorzeczna, skoro mieli ją inni.

Jeżeliby np. była prawdziwa teorya Lorentza, o której będziemy mówili szczegółowo w Rozdziale XIII-ym, tedy zasada Newtona nie stosowałaby się do s a m e j tylko materyi, i odchylenie od tej zasady byłoby niemal dostępne dla doświadczenia.

Z drugiej strony poczyniono wiele badań nad wpływem ruchu ziemi. Rezultaty były zawsze ujemne. Jeżeli wszakże podjęto te doświadczenia, to dlatego, że nie było z góry pewności co do ich wyników, a nawet według panujących teoryi kompensacya, która tu zdaje się zachodzić, ma być tylko przybliżoną i oczekiwać by należało, że metody dokładniejsze dadzą rezultaty dodatnie.

Zdaniem moim nadzieja taka jest ułudną; nie mniej warto było okazać, że powodzenie pomienionych eksperymentów otworzyłoby przed nami poniekąd świat nowy.

Niechaj mi tutaj czytelnik pozwoli na dygresyę; muszę bowiem wytłumaczyć, dlaczego wbrew Lorentzowi nie wierzę, by najdokładniejsze bodaj obserwacye mogły kiedykolwiek ujawnić coś więcej nad ruchy względne ciał materyalnych. Wykonano doświadczenia, które powinny byłyby wykryć wyrazy pierwszego rzędu; rezultaty były ujemne; czy mogło to być dziełem przypadku? Nikt tego nie dopuszczał; usiłowano znaleść ogólne wytłumaczenie tego faktu, i powiodło się to Lorentzowi: okazał on, że wyrazy pierwszego rzędu muszą się wzajem znosić, co natomiast nie zachodzi dla wyrazów rzędu drugiego. Wówczas wykonano doświadczenia dokładniejsze; lecz i one wypadły ujemnie: i to również nie mogło być rzeczą przypadku; trzeba było wytłumaczenia tego; znaleziono je; znajduje się je zawsze; hypotez bowiem nigdy nie brak.

Nie dość wszakże na tym; któż nie czuje, że pozostawia się w ten sposób przypadkowi rolę nadmierną? Czyż nie byłby również przypadkiem ów dziwny zbieg okoliczności, naskutek którego pewna okoliczność nadarza się właśnie po to, by znieść wyrazy pierwszego rzędu, a inna okoliczność najzupełniej różna, lecz równie na rękę, podejmuje się zniszczenia wyrazów drugiego rzędu. Nie; należy znaleść jedno i to samo wytłumaczenie dla jednych i dla drugich, wobec czego wszystko przemawia za tym, że wytłumaczenie to stosować się będzie również do wyrazów rzędu wyższego i że wzajemne znoszenie się tych wyrazów będzie ścisłe i absolutne.

Stan obecny nauki. — W dziejach rozwoju fizyki rozróżnić można dwie przeciwne dążności. Z jednej strony co chwila wykrywa się nowe związki między przedmiotami, które napozór zdawały się na zawsze od siebie niezależne; fakty rozsypane przestają być dla siebie obcemi, zdążają one do uszeregowania się w potężną syntezę. Nauka kroczy ku jedności i prostocie.

Z drugiej strony obserwacya wykrywa codziennie nowe zjawiska; muszą one wyczekiwać długo na swe miejsce i niejednokrotnie, aby im je wyznaczyć, wypada zburzyć jakąś część gmachu. Nawet w zjawiskach znanych, które tępym zmysłom naszym wydawały się jednostajnemi, odkrywamy szczegóły coraz to bardziej urozmaicone; to, cośmy uważali za proste, staje się znowu złożone, i nauka zdaje się kroczyć ku rozmaitości i komplikacyi.

Któraż z dwu tych dążności, zdających się tryumfować kolejno, weźmie ostatecznie górę? Jeśli pierwsza, nauka jest możliwa; ale nic nie dowodzi tego *a priori*, i obawiać się można, że po próżnych usiłowaniach nagięcia opornej przyrody do naszego ideału jedności, zalani wzbierającą ustawicznie falą naszych nowych bogactw, będziemy zmuszeni zrzec się ich ogarnięcia, porzucić nasz ideał, i zredukować naukę do rejestru niezliczonych recept.

Na pytanie to nie możemy odpowiedzieć. Możemy jedynie obserwować naukę obecną i porównywać ją z wczorajszą — nic ponad to. Zestawienie to pozwoli nam niewątpliwie na pewne domysły co do przyszłości.

Przed pół stuleciem żywiono bardzo wielkie nadzieje. Odkrycie zachowania energii i jej przekształceń ujawniło świeżo jedność siły. Wykazało ono w ten sposób, że zjawiska cieplne mogą być wytłumaczone przez ruchy molekularne. Nie wiedziano wprawdzie dokładnie, jaka jest istota tych ruchów, nie wątpiono wszakże, że rychło pozna się ją. Dla światła zadanie to wydawało się w zupełności spełnionym. Mniej daleko posunięta była znajomość elektryczności. Elektryczność świeżo dokonała zaboru magnetyzmu. Było to znacznym krokiem ku jedności, i to krokiem ostatecznym. Nie wiedziano jednakże wcale, jak wprowadzić elektryczność w obręb ogólnej jedności, jak sprowadzić ją do powszechnego mechanizmu. Możliwości tej redukcyi nikt przecież nie podawał w wątpliwość, — miano wiarę. Wreszcie podobna redukcya dla własności molekularnych ciał materyalnych zdawała się jeszcze łatwiejsza, lecz wszystkie jej szczegóły pozostawały we mgle. Słowem nadzieje były szerokie, były żywe — lecz były mgliste.

Dziś, cóż widzimy?

Nasamprzód pierwszy postęp, postęp olbrzymi. Związki elektryczności i światła są obecnie znane; trzy dziedziny: światła, elektryczności i magnetyzmu, niegdyś odosobnione, dziś stanowią jedną; a aneksya ta zdaje się ostateczną.

Zwycięstwo to wszelako odniesione zostało kosztem pewnych ofiar. Zjawiska optyczne wchodzą, jako wypadki szczególne, do zjawisk elektrycznych; dopóki były one odosobnione, łatwo było wytłumaczyć je zapomocą ruchów, które, jak się zdawało, znane były we wszystkich szczegółach, szło to *jak po maśle;* dziś natomiast wytłumaczenie o tyle tylko się nadaje, o ile można je bez trudności rosciągnąć na całą dziedzinę elektryczności. Otóż nie obywa się to bez przeszkód.

Najbardziej zadawalającą z dotychczasowych teoryi jest teorya Lorentza, która, jak zobaczymy w ostatnim rozdziale, tłumaczy prądy elektryczne przez ruch małych cząstek naelektryzowanych; teorya ta, bez kwestyi, najlepiej zdaje sprawę z faktów znanych, oświetla największą ilość prawdziwych związków, jest to teorya, której najwięcej śladów odnajdzie się w ostatecznej konstrukcyi naukowej. Niemniej posiada ona jedną ważną wadę, o której wspomniałem wyżej; sprzeciwia się Newtonowskiej zasadzie równości działania i oddziaływania; albo raczej zasada ta, zdaniem Lorentza, nie stosuje się do samej tylko materyi; jest ona prawdziwa o tyle, o ile uwzględnia się działanie eteru na materyę i oddziaływanie materyi na eter. Otóż obecnie przynajmniej nie jest prawdopodobnym, by tak było w rzeczywistości.

Jakkolwiekbądź, dzięki Lorentzowi został ustanowiony związek między wynikami badań Fizeau nad optyką ciał w ruchu, prawami rozszczepienia normalnego i anormalnego i prawami pochłaniania, oraz związek między niemi a innemi własnościami eteru, i związki te nigdy już zapewne nie zostaną zerwane. Zobaczcie, z jaką łatwością nowe zjawisko Zeemana znalazło sobie w tej teoryi jakgdyby przygotowane miejsce a nawet pomogło do umieszczenia w niej obrotu magnetycznego Faradaya, który opierał się skutecznie atakom Maxwella; łatwość ta dowodzi, że teorya Lorentza nie jest sztucznym zlepkiem, skazanym na rozpadnięcie się. Wypadnie prawdopodobnie ją zmodyfikować; ale nie zburzyć.

Lecz Lorentz nie miał innej ambicyi nad objęcie jednym zespołem całej optyki i elektrodynamiki ciał w ruchu; nie miał on pretensyi do wytłumaczenia mechanicznego tych dziedzin. Larmor idzie dalej; zachowując w teoryi Lorentza to, co w niej jest istotnego, szczepi on na niej, że tak powiem, poglądy Mac-Cullagha na kierunek ruchów eteru. Prędkość eteru posiada dlań ten sam kierunek i tę samą wielkość, co siła magnetyczna. Prędkość ta więc jest nam znana, albowiem siła magnetyczna jest dostępna dla doświadczenia. Jakkolwiek pomysłowym jest to przedsięwzięcie, odnajdujemy w nim tę samą wadę, co w teoryi Lorentza, i to w stopniu wzmożonym. Działanie nie jest równe oddziaływaniu. U Lorentza nie wiedzieliśmy, jakie są ruchy eteru; dzięki tej nieświadomości mogliśmy przypuścić, że są one takie, iż kompensując ruchy materyi, przywracają one równość działania i oddziaływania. U Larmora znamy ruchy eteru i możemy stwierdzić, że kompensacya się nie dokonywa.

Jeśli próba Larmora, zdaniem moim, nie powiodła się, czyż znaczy to, że wytłumaczenie mechaniczne nie jest możliwe? Bynajmniej: powiedzieliśmy wyżej, że skoro tylko pewne zjawisko podlega zasadom energii i najmniejszego działania, tedy dopuszcza ono nieskończenie wiele wytłumaczeń mechanicznych; stosuje się to zatym do zjawisk optycznych i elektrycznych.

Ale to nie wystarcza; tłumaczenie mechaniczne, aby było dobre, musi być proste; ażeby obrać jedno z pośród wszystkich wytłumaczeń możliwych, trzeba mieć inne jeszcze po temu racye niż konieczność dokonania wyboru. Otóż nie ma dotychczas teoryi, czyniącej zadość temu warunkowi, czyli niema teoryi, która mogłaby się do czegoś nadać. Czy mamy tego żałować? Byłoby to zapoznaniem naszego celu; albowiem celem naszym nie jest mechanizm — celem prawdziwym, jedynym jest jedność.

Powinniśmy tedy zakreślić granice naszej ambicyi; nie usiłujmy sformułować tłumaczenia mechanicznego; zadowolmy się okazaniem, że gdybyśmy zechcieli, moglibyśmy zawsze je znaleść. A tego dopięliśmy; zasadę zachowania energii potwierdza całe nasze doświadczenie; przyłączyła się do niej druga zasada — zasada najmniejszego działania, ubrana w postać odpowiadającą fizyce. I tę zasadę potwierdzało zawsze doświadczenie, przynajmniej w zakresie zjawisk odwracalnych, stosujących się do równań Lagrange'a, to jest do najogólniejszych praw mechaniki.

Zjawiska nieodwracalne są o wiele oporniejsze. I one wszakże dają się uporządkować i zdążają do sharmonizowania się z jednością powszechną; dzieje się to za sprawą zasady Carnota. Przez długi czas termodynamika ograniczała się do badań nad rozszerzaniem się ciał i zmian w ich stanie. Od pewnego czasu stała się ona zuchwalszą i znacznie rozszerzyła swój zakres. Zawdzięczamy jej teoryę stosu, teoryę zjawisk termo-elektrycznych; niema w całej fizyce kąta, któryby nie był objęty jej badaniami; zaatakowała ona nawet chemię. Wszędzie panują te same prawa; wszędzie pod rozmaitością pozorów odnajdujemy zasadę Carnota, wszędzie również owo tak niesłychanie abstrakcyjne pojęcie entropii, równie powszechne jak pojęcie energii i jak ono posiadające cechy czegoś realnego. Ciepło promieniste zdawało się jej nie podlegać; przekonano się niedawno, że i ono znajduje się pod panowaniem tych samych praw.

W ten sposób objawiają się nam nowe analogie, sięgające często szczegółów; opór ohmiczny podobny się staje do lepkości cieczy; hystereza ma raczej podobieństwo do tarcia ciał stałych. We wszystkich wypadkach tarcie byłoby typem, według którego kształtują się najrozmaitsze zjawiska nieodwracalne — a powinowactwo to jest rzeczywiste i głębokie.

Usiłowano również znaleść wytłumaczenie mechaniczne tych zjawisk we właściwym znaczeniu. Nie nadawały się one jednak do tego. Aby wytłumaczenie to znaleść, należało np. przypuścić, że nieodwracalność jest tylko pozorna, że zjawiska elementarne są odwracalne i ulegają znanym prawom dynamiki. Lecz elementy są nadzwyczaj liczne i mieszają się ze sobą coraz bardziej, tak iż dla tępych naszych oczu wszystko zdaje się zdążać do jednostajności, czyli wszystko zdaje się postępować w jednym kierunku, bez nadziei powrotu. Pozorna nieodwracalność jest tedy poprostu przejawem prawa wielkich liczb. Jedynie istota o zmysłach nieskończenie subtelnych, w rodzaju urojonego demona Maxwella, potrafiłaby rozwikłać tę poplątaną sieć i zawrócić świat wstecz.

Koncepcya ta, związana z teoryą kinetyczną gazów, powstała kosztem wielkich wysiłków i ostatecznie okazała się mało płodną, może się stać nią jednak. Nie tutaj miejsce rozpatrywać, czy nie prowadzi ona do sprzeczności, i czy odpowiada ściśle rzeczywistej naturze rzeczy.

Wspomnijmy przecież o oryginalnych pomysłach fizyka Gouy'ego, dotyczących ruchu brownowskiego. Według tego badacza osobliwy ten rodzaj ruchu uchyla się od zasady Carnota. Cząstki, które wprawia on we wstrząśnienie, mają być mniejsze niż oka tej tak gęsto zasnutej sieci; mogą one przeto oka te rozwikłać i w ten sposób kazać światu postępować wstecz. Zdawaćby się mogło, że widzimy przy pracy demona Maxwella.

Tak więc zjawiska dawniej znane szeregują się coraz lepiej; równocześnie wyłaniają się nowe zjawiska, domagające się dla siebie miejsca, które też w większości wypadków — jak np. zjawisko Zeemana — natychmiast znajdują.

Lecz mamy jeszcze promienie katodowe, promienie X, promienie uranu i radu. Świat cały, którego istnienia nikt nie podejrzewał. Ileż nieoczekiwanych gości wypada ulokować!

Nikt nie może teraz przewidzieć, jakie zajmą oni miejsce. Nie przypuszczam wszakże, by znieść one miały jedność ogólną, sądzę raczej, że ją uzupełnią. Albowiem z jednej strony nowe promieniowania zdają się związane ze zjawiskami luminescencyi; nietylko wywołują one fluorescencyę, ale niekiedy powstają w tych samych co ona warunkach.

Nie są one również obce przyczynom, sprawiającym wybuch iskry pod działaniem światła ultra-fioletowego.

Wreszcie, i nadewszystko, we wszystkich tych zjawiskach odnajdujemy, jak się zdaje, prawdziwe jony, tym tylko różniące się od zwykłych, że są ożywione prędkościami bez porównania większemi, niż w elektrolitach.

Wszystko to jest jeszcze bardzo nieokreślone, ale z czasem nabierze ścisłości.

Fosforescencya, działanie światła na iskrę, stanowiły obszary nieco odosobnione a przeto też zaniedbane nieco przez badaczy. Można się teraz spodziewać, że przeprowadzona zostanie nowa linia komunikacyjna, która ułatwi ich stosunki z nauką powszechną.

Nietylko odkrywamy nowe zjawiska, lecz nawet w zjawiskach, o których mniemaliśmy, że je znamy, ukazują się oczom naszym niespodziewane strony. W swobodnym eterze prawa zachowują majestatyczną swą prostotę; lecz materya we właściwym znaczeniu zdaje się coraz bardziej skomplikowana; cokolwiek się o niej mówi, jest zawsze tylko przybliżone, i co chwila zmuszeni jesteśmy uzupełniać nasze wzory nowemi wyrazami.

Nie łamie to wszakże ram konstrukcyi naukowych; związki, stwierdzone przez nas między przedmiotami, które uważaliśmy za proste, nie przestają istnieć między temi samemi przedmiotami, skoro poznajemy, że są one skomplikowane, a to jedynie posiada wagę. Równania nasze stają się wprawdzie coraz bardziej skomplikowane po to, by przylgnąć ściślej do komplikacyi przyrody; nic wszakże nie zmienia związków, pozwalających na wyprowadzenie tych równań *jedne z drugich*. Słowem, kształt tych równań zostaje zachowany.

Weźmy dla przykładu prawa odbicia; Fresnel ustanowił je zapomocą teoryi prostej i ponętnej, którą doświadczenie zdawało się potwierdzać. Od tego czasu dokładniejsze badania okazały, że potwierdzenie to było tylko przybliżone; ujawniły one wszędzie ślady polaryzacyi eliptycznej. Lecz dzięki pomocy, jaką okazało to pierwsze przybliżenie, znaleziono natychmiast przyczynę tych anomalii, mianowicie obecność warstwy przejściowej, tak iż teorya Fresnela ostała się w istotnej swej części.

Nie można przecież opędzić się jednej uwadze. Wszystkie te związki pozostałyby niedostrzeżonemi, gdyby przeczuwano odrazu komplikacyę przedmiotów, między któremi one zachodzą. Dawno już powiedziano: Gdyby Tycho posiadał narzędzia dziesięć razy dokładniejsze, nie byłoby nigdy ani Keplera, ani Newtona, ani astronomii. Jest nieszczęściem dla nauki, gdy rodzi się zbyt późno, kiedy środki obserwacyi stały się zbyt doskonałemi. W takim położeniu znajduje się dziś fizyko-chemia; w pracach szkicowych, założycielom jej utrudniają często sprawę trzecie i czwarte znaki dziesiętne; na szczęście są to ludzie mocnej wiary.

W miarę tego, jak poznaje się lepiej własności materyi, stwierdza się, że panuje w niej ciągłość. Od czasu prac Andrewsa i Van der Waalsa, zdajemy sobie sprawę z tego, w jaki sposób odbywa się przejście ze stanu ciekłego w stan gazowy, i że przejście to nie jest nagłe. Podobnież niema przepaści między stanami ciekłym a stałym, i w sprawozdaniach jednego z niedawnych Kongresów naukowych znalazła się obok pracy o sztywności cieczy rozprawa o rozlewaniu się ciał stałych.

Dążność ta nadweręża oczywiście prostotę; pewne zjawisko było wyobrażone przez kilka linii prostych: proste te wypada połączyć zapomocą mniej lub bardziej skomplikowanych krzywych. Jedność natomiast wiele na tym wygrywa. Owe ostro odcinające się kategorye oszczędzały umysłowi zmęczenia lecz go nie zadawalały.

Wreszcie metody fizyki wtargnęły do nowej dziedziny, do chemii: zrodziła się fizyko-chemia. Jest ona jeszcze bardzo młoda, ale już teraz jest widoczne, że pozwoli nam ona powiązać ze sobą zjawiska takie, jak elektroliza, osmoza, ruchy jonów.

Jakież wyprowadzimy wnioski z pobieżnego tego wykładu?

Wszystko wziąwszy w rachubę, zbliżono się do jedności; nie posuwano się tak prędko, jak się tego spodziewano przed pięćdziesięciu laty, nie zawsze wypadło iść drogą przewidzianą; w rezultacie wszakże dokonano znacznych podbojów.

Rozdział Jedenasty.

Rachunek prawdopodobieństwa.

Zdziwi to może kogo, że znajdzie na tym miejscu refleksye nad rachunkiem prawdopodobieństwa. Cóż ma on wspólnego z metodą nauk fizycznych?

A jednak kwestye, które poruszę poniżej, nie dając ich rozwiązania, nasuwają się w sposób naturalny filozofowi, rozmyślającemu nad fizyką.

I to w takim stopniu, że w dwu poprzedzających rozdziałach wypadło nam kilkakrotnie użyć wyrazów »prawdopodobieństwo« i »przypadek«.

»Fakty przewidywane«, powiedziałem wyżej, »mogą być tylko prawdopodobne. Jakkolwiek mocno ugruntowanym mogłoby się nam wydawać dane przewidywanie, nie jesteśmy nigdy zupełnie pewni, że doświadczenie nie zada mu kłamu. Lecz prawdopodobieństwo jest często dość wielkie, byśmy się nim mogli w praktyce zadowolić«.

A niżej nieco, dodałem:

»Zobaczmy, jaką rolę odgrywa w naszych uogólnieniach wiara w prostotę. Sprawdziliśmy pewne proste prawo w wielkiej liczbie wypadków szczególnych; wzdragamy się przypuścić, by ta tak często napotykana zgodność była poprostu rzeczą przypadku...«

Tak więc w bardzo wielu okolicznościach fizyk znajduje się w tym samym położeniu, co gracz, ważący swe szanse. Ilekroć rozumuje on sposobem indukcyi, tylekroć posługuje się mniej lub więcej świadomie rachunkiem prawdopodobieństwa.

Dlatego to muszę otworzyć nawias i zawiesić nasz rozbiór metody w naukach fizycznych, aby zbadać nieco bliżej, jaka jest wartość tego rachunku i na jakie zasługuje on zaufanie.

Sama nazwa rachunku prawdopodobieństwa jest paradoksem: prawdopodobieństwo, przeciwstawione pewności, oznacza, że się czegoś nie wie, jakże więc można obrachowywać to, czego się nie zna? A przecież wielu wybitnych uczonych zajmowało się tym rachunkiem i niepodobna zaprzeczyć, że nauka odniosła stąd pewną korzyść. Jakże wytłumaczyć tę pozorną sprzeczność?

Czy prawdopodobieństwo zostało określone? Czy wogóle daje się ono określić? Jeśli zaś nie, to jakże odważają się ludzie o nim rozumować? Określenie tego pojęcia, powie kto, bardzo jest proste: prawdopodobieństwo danego faktu jest to stosunek liczby wypadków, sprzyjających temu faktowi, do ogólnej liczby wypadków możliwych.

Prosty przykład okaże, w jakim stopniu określenie to jest niezupełne. Rzucamy dwie kości; jakie jest prawdopodobieństwo, by przynajmniej jedna z kości dała szóstkę? Każda kość może dać sześć różnych liczb: liczba wypadków możliwych wynosi $6 \times 6 = 36$; liczba wypadków sprzyjających wynosi 11; prawdopodobieństwo równa się przeto $\frac{11}{36}$.

Powyższe rozwiązanie jest rzeczywiście poprawne. Ale czy nie moglibyśmy równie dobrze rozumować tak oto: Liczby, które dadzą obie kości, mogą tworzyć $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ różnych kombinacyi; wśród tych kombinacyi 6 jest sprzyjających; prawdopodobieństwo wynosi $\frac{6}{21}$.

Dlaczego pierwszy sposób wyliczania wypadków możliwych jest słuszniejszy niż drugi. W każdym razie odpowiedzi na to nie dostarczy nam nasze określenie.

Zmuszeni więc jesteśmy dopełnić to określenie tak oto: »...do liczby ogólnej wypadków możliwych, o ile wypadki te są jednakowo prawdopodobne«. Doprowadza to nas więc do określenia prawdopodobieństwa przez prawdopodobieństwo.

W jakiż sposób będziemy wiedzieli, że dwa wypadki możliwe są jednakowo prawdopodobne? Czy drogą umowy? Jeśli na czele każdego zagadnienia sformułujemy wyraźną umowę, wszystko pójdzie dobrze; pozostanie nam tylko stosowanie prawideł arytmetyki i algebry, a doprowadzimy rachunek do końca i otrzymamy wynik, stojący ponad wszelką wątpliwością. Skoro wszakże zechcemy przejść do najmniejszego bodaj zastosowania tego wyniku, wypadnie nam okazać, że umowa nasza była uprawniona, staniemy więc znowu przed tą samą trudnością, którą chcieliśmy obejść.

Powie kto, że zdrowy rozsądek wystarcza, byśmy zmiarkowali, jaką ma być owa umowa? Niestety, tak nie jest. Bertrand okazał to na następującym prostym przykładzie? »Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa, wzięta na chybi trafi w danym okręgu, jest większa niż bok wpisanego równobocznego trójkąta?« Znakomity ten matematyk przyjął kolejno dwie umowy, które, jak się zdawało, z jednakową słusznością można było uważać za narzucone przez zdrowy rozsądek: jedna dała mu jako wynik $\frac{1}{2}$, druga $\frac{1}{3}$.

Z wszystkiego tego zdaje się wypływać wniosek, że rachunek prawdopodobieństwa jest nauką czczą, że należy odnosić się z nieufnością do owego niejasnego instynktu, który nazywamy zdrowym rozsądkiem i który miałby uprawniać nasze umowy.

Ale i na ten wniosek nie możemy się pisać; bez owego niejasnego instynktu nie możemy się obejść; bez niego nauka byłaby niemożliwa, bez niego nie moglibyśmy odkryć żadnego prawa ani go stosować. Czyż wolno nam, naprzykład, wypowiadać prawo Newtona? Zapewne, liczne obserwacye znajdują się z nim w zgodności; lecz czy nie jest to prostym przypadkiem? skąd zresztą wiemy, że prawo to, lubo prawdziwe od wielu wieków, będzie nim jeszcze w roku przyszłym? Na zarzuty te nie znajdziemy innej odpowiedzi jak tę: »Jest to bardzo mało prawdopodobne«.

Przyjmijmy jednak to prawo; zdaje nam się, że dzięki niemu możemy wyliczyć położenie Jowisza za rok. Mamyż prawo tak mniemać? Kto nam zaręczy, że w ciągu tego czasu jakaś olbrzymia masa, ożywiona ogromną prędkością, nie przebiegnie poprzez układ słoneczny i nie wywoła nieprzewidzianych zakłóceń? I tutaj również niema innej odpowiedzi jak: »Jest to bardzo mało prawdopodobne«.

W myśl tego wszystkie nauki byłyby tylko nieświadomemi zastosowaniami rachunku prawdopodobieństwa; wyrok, wydany na ten rachunek, byłby przeto wyrokiem wydanym na całą naukę.

Wspomnę tu tylko, dłużej się nad niemi nie zastanawiając, o zagadnieniach naukowych, w których udział rachunku prawdopodobieństwa bardziej jest widoczny. Takim jest w pierwszej linii zagadnienie interpolacyi, w którym znając pewne wartości funkcyi, staramy się odgadnąć wartości pośrednie.

Wymienię również: słynną teoryę błędów obserwacyi, do której powrócę niżej; teoryę kinetyczną gazów, znaną hypotezę, w której przypuszcza się, że każda cząsteczka gazu przebiega drogę niezmiernie skomplikowaną, a pomimo to mocą prawa wielkich liczb zjawiska przeciętne, które jedynie są dla nas postrzegalne, ulegają prostym prawom Mariotte'a i Gay Lussaca.

Wszystkie te teorye oparte są na prawach wielkich liczb, i obalenie rachunku prawdopodobieństwa wywołałoby oczywiście i ich wypadek. Przyznać wprawdzie należy, że przedstawiają one jedynie interes specyalny i że, wyłączając interpolacyę, są to ofiary, z któremi możnaby się pogodzić.

Ale, jak powiedziałem już wyżej, chodziłoby nietylko o te ofiary częściowe: zagrożoną byłaby prawowitość całej nauki.

Wiem wprawdzie, że możnaby na to odpowiedzieć: »Jesteśmy w nieświadomości, a jednak musimy działać. Aby działać, nie mamy czasu oddać się badaniom, wystarczającym do rozproszenia naszej nieświadomości; zresztą badania takie wymagałyby czasu nieskończonego. Musimy więc decydować się stanowić, nie wiedząc; trzeba to robić trochę poomacku i stosować się do pewnych prawideł, zbytnio w nie nie wierząc. Jeśli wiemy co, to nie, że to a to jest prawdziwe, lecz że najlepiej dla nas będzie, gdy będziemy działali tak, jak gdyby to było prawdziwe«. Rachunek prawdopodobieństwa, a więc też i nauka miałyby jedynie wartość praktyczną.

Na nieszczęście trudność nie zostaje w ten sposób pokonana: przypuśćmy, że pewien gracz chce zaryzykować stawkę i prosi nas o radę. Jeśli mu jej udzielimy, oprzemy się na rachunku prawdopodobieństwa, lecz nie zaręczymy mu za powodzenie. Mamy tu to, co nazwałbym prawdopodobieństwem subjektywnym. W tym wypadku możnaby się zadowolić powyżej naszkicowanym wytłumaczeniem. Przypuśćmy wszakże, iż ktoś obserwuje grę, notuje wszystkie kolejne wypadki, a gra trwa długo; gdy zrobi on bilans swoich notatek, stwierdzi, że rozkład tych wypadków odbył się zgodnie z prawami rachunku prawdopodobieństwa. Będziemy tu mieli to, co nazwałbym prawdopodobieństwem objektywnym, i to właśnie zjawisko wymagałoby wytłumaczenia.

Istnieją liczne towarzystwa asekuracyjne, stosujące prawidła rachunku prawdopodobieństwa, i rozdają swoim akcyonaryuszom dywidendy, których objektywnej rzeczywistości nikt nie będzie podawał w wątpliwość. Dla wytłumaczenia ich nie wystarczy odwołać się do faktu naszej nieświadomości połączonej z koniecznością działania.

Tak więc zupełny sceptycyzm nie może się tu ostać; powinniśmy żywić pewną nieufność, ale nie wolno nam potępiać w czambuł; narzuca się potrzeba bardziej szczegółowego rostrząsania.

I. — Klasyfikacya zagadnień o prawdopodobieństwach. — Przy klasyfikowaniu zagadnień dotyczących prawdopodobieństw, można rozpatrywać je z kilku różnych punktów widzenia, a przedewszystkim z punktu widzenia ogólności. Powiedziałem wyżej, że prawdopodobieństwo jest to stosunek liczby wypadków sprzyjających do liczby wypadków możliwych. To, co w braku lepszego terminu nazywam »ogólnością«, będzie rosło wraz z liczbą wypadków możliwych. Liczba ta może być skończona; np. przy rzucaniu dwu kości, gdy liczba wypadków możliwych wynosi 36. Stanowi to pierwszy stopień ogólności.

Gdy natomiast pytamy, jakie jest np. prawdopodobieństwo, żeby punkt wewnętrzny względem danego koła, leżał zarazem wewnątrz wpisanego doń kwadratu, to mamy tyleż wypadków możliwych, ile jest punktów w kole, to jest nieskończoność. Jest to drugi stopień ogólności. Ale ogólność może być jeszcze większa: zadajmy sobie pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo, by pewna funkcya czyniła zadość danemu warunkowi; mamy wówczas tyle wypadków możliwych, ile można wymyślić rozmaitych funkcyi. Jest to trzeci stopień ogólności, którego dosięgamy wówczas, gdy np. chcemy odgadnąć najprawdopodobniejsze prawo, opierając się na skończonej liczbie obserwacyi.

Można rozpatrywać zagadnienia o prawdopodobieństwach z całkiem innego punktu widzenia. Gdybyśmy nie byli w nieświadomości, nie byłoby żadnych prawdopodobieństw, mielibyśmy do czynienia jedynie z pewnością; lecz nieświadomość nasza nie może być zupełną, bo w takim razie nie byłoby również prawdopodobieństw, albowiem trzeba choć trochę światła, by zdobyć bodaj tę niepewną wiedzę. W ten sposób zagadnienia o prawdopodobieństwach można klasyfikować według mniejszego lub większego stopnia naszej nieświadomości.

Już w matematyce można sobie stawiać zagadnienia o prawdopodobieństwach. Jakie jest prawdopodobieństwo, by 5-*a* cyfra dziesiętna logarytmu, wziętego na chybi-trafi w tablicy, była 9? Każdy odpowie bez wahania, że prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{1}{10}$. W danym wypadku jesteśmy w posiadaniu wszystkich danych zagadnienia; umielibyśmy wyliczyć nasz logarytm bez uciekania się do tablicy; ale nie chcemy sobie zadać tego trudu. Jest to pierwszy stopień nieświadomości.

W naukach fizycznych nieświadomość nasza jest już większa. Stan układu w danej chwili zależy od dwu rzeczy: od jego stanu początkowego i od prawa, według którego stan ten się zmienia. Gdybyśmy znali i to prawo i ów stan początkowy, pozostawałoby nam jedynie rozwiązanie pewnego zagadnienia matematycznego: mielibyśmy zatym znowu ów pierwszy stopień nieświadomości.

Zdarza się atoli często, że zna się prawo, a nie zna stanu początkowego. Weźmy np. pytanie, jaki jest rozkład obecny małych planet; wiemy, że stosowały się one zawsze do praw Keplera, lecz nie wiemy, jaki był ich rozkład początkowy.

W teoryi kinetycznej gazów, przypuszcza się, że cząsteczki gazowe poruszają się po drogach prostolinijnych, i posłuszne są prawom zderzeń ciał sprężystych; ponieważ wszakże nie wiemy nic o ich prędkościach początkowych, nie wiemy również nic o ich prędkościach obecnych.

Jedynie rachunek prawdopodobieństwa pozwala na przewidywanie zjawisk przeciętnych, wynikających z kombinacyi tych prędkości. Jest to drugi stopień nieświadomości.

Zdarzyć się wreszcie może, że nietylko warunki początkowe nie są nam wiadome, lecz również same prawa; wpadamy w ten sposób w trzeci stopień nieświadomości, i natenczas naogół nie można twierdzić nic co do prawdopodobieństwa pewnego zjawiska.

Zdarza się często, że zamiast przewidywania jakiegoś faktu na podstawie mniej lub więcej niedoskonałej znajomości prawa, które nim rządzi, znamy właśnie fakty i usiłujemy odgadnąć prawo; że zamiast wyprowadzania skutków z przyczyn chce się wyprowadzić przyczyny ze skutków. Są to tak zwane zagadnienia o prawdopodobieństwie przyczyn, najbardziej interesujące ze względu na swe zastosowania naukowe.

Gram w écarté z człowiekiem, o którym wiem, że jest zupełnie uczciwy; na niego kolej; jakie jest prawdopodobieństwo, że odwróci on króla? wynosi ono $\frac{1}{8}$; jest to zagadnienie o prawdopodobieństwie skutków. Gram z panem, którego nie znam; na 10 razy 6 razy odwrócił króla; jakie jest prawdopodobieństwo, że pan ten jest szulerem? jest to zagadnienie o prawdopodobieństwie przyczyn.

Można powiedzieć, że jest to zasadnicze zagadnienie metody doświadczalnej. Zaobserwowaliśmy n wartości x i odpowiadające im wartości y; stwierdziliśmy, że stosunek drugich do pierwszych jest przybliżenie stały. Oto fakt; jaka jest jego przyczyna?

Czy jest prawdopodobne, że istnieje prawo ogólne, według którego y jest proporcyonalne do x, a drobne odchylenia pochodzą od błędów obserwacyi? Tego typu pytania stawiamy ustawicznie i nieświadomie rozwiązujemy, ilekroć traktujemy w sposób naukowy dane doświadczalne.

Dokonamy teraz przeglądu tych rozmaitych kategoryi zagadnień, biorąc kolejno pod uwagę scharakteryzowane powyżej prawdopodobieństwo subjektywne i prawdopodobieństwo objektywne.

II. — Prawdopodobieństwo w naukach matematycznych. — Niemożliwość kwadratury koła jest dowiedziona od r. 1883-go; ale na długo już przed świeżą tą datą wszyscy matematycy uważali tę niemożliwość za tak »prawdopodobną«, że paryska Akademia Umiejętności odrzucała bez rozpatrzenia zbyt liczne, niestety, rozprawy, które nadsyłali jej w tym przedmiocie rozmaici nieszczęśliwi obłąkańcy.

Czy Akademia nie miała racyi? Oczywiście, że tak, i wiedziała ona dobrze, iż, postępując w ten sposób, nie narażała się bynajmniej na zduszenie jakiegoś poważnego odkrycia. Nie mogłaby ona dowieść, że miała słuszność; ale wiedziała dobrze, że instynkt jej nie zwodzi. Gdybyście zapytali o to członków akademii, odpowiedzieliby wam: »Zestawiliśmy prawdopodobieństwo, że nieznany badacz odkrył to, czego szuka się napróżno od tylu wieków, z prawdopodobieństwem, że zjawił się jeszcze jeden obłąkany na kuli ziemskiej; i to drugie wydało nam się większym«. Są to bardzo dobre racye, ale niema w nich nic matematycznego, są one czysto psychologiczne.

A gdybyście natarczywiej ich pytali, dodaliby: »Dlaczegoż to pewna wartość szczególna pewnej funkcyi przestępnej ma być liczbą algebraiczną? i gdyby π było pierwiastkiem pewnego równania algebraicznego, to dlaczegóżby pierwiastek ten miał być peryodem funkcyi $\sin 2x$, i dlaczego nie miałyby posiadać tej własności również wszystkie inne pierwiastki tego równania? Słowem powołaliby się na zasadę dostatecznego powodu w najbardziej mglistej jej postaci.

Cóż wszakże mogli stąd wywnioskować? Co najwyżej regułę postępowania przy korzystaniu ze swego czasu, który pożyteczniej było obracać na zwykłe ich prace niż na czytanie elukubracyi, budzącej w nich uzasadnioną nieufność. Lecz to, co nazwaliśmy prawdopodobieństwem objektywnym, niema nic wspólnego z tym pierwszym zagadnieniem.

Inaczej rzecz się ma z zagadnieniem drugim.

Rozważmy 10000 pierwszych logarytmów zawartych w danej tablicy. Z pośród tych 10000 logarytmów weźmy jeden na chybi — trafi: jakie jest prawdopodobieństwo, że trzecia jego cyfra dziesiętna będzie parzysta? Odpowiecie bez wahania, że wynosi ono $\frac{1}{2}$, i w rzeczy samej, jeśli zbadacie w tablicy trzecie cyfry dziesiętne tych 10000 liczb, znajdziecie mniej więcej tyleż cyfr parzystych, co nieparzystych.

Albo też, jeśli kto woli, napiszmy 10000 liczb, odpowiadających naszym 10000 logarytmom, tak iż każdemu logarytmowi, którego trzecia cyfra dziesiętna jest parzysta, odpowiada liczba $+1$, w razie zaś przeciwnym -1. Weźmy następnie przeciętną z tych 10000 liczb.

Nie zawahałbym się powiedzieć, że przeciętna z tych 10000 liczb jest prawdopodobnie równa zeru, i gdybym rzeczywiście ją obliczył, sprawdziłoby się, że jest ona bardzo niewielka.

Próba ta byłaby nawet zbyteczna. Mógłbym dowieść ściśle, że przeciętna ta jest mniejsza niż 0,003. Dla przeprowadzenia tego dowodu musiałbym wykonać bardzo długi rachunek, którego nie mogę tutaj przytaczać; ograniczę się więc tylko odesłaniem do mego artykułu, pomieszczonego w *Revue générale des Sciences* 15 kwietnia 1899 r. Jedyny punkt, na który muszę zwrócić uwagę, jest następujący: w rachunku tym oparłem się na dwu tylko faktach, mianowicie, że pochodne pierwsza i druga logarytmu, dla rozważanych liczb, są zawarte między pewnemi granicami.

Wypływa stąd odrazu wniosek, że własność powyższa stosuje się nietylko do logarytmów lecz do każdej funkcyi ciągłej, gdyż pochodne każdej funkcyi ciągłej są ograniczone.

Jeśli z góry byłem pewien tego wyniku, to przedewszystkim dlatego, że często obserwowałem analogiczne fakty w wypadku innych funkcyi ciągłych; następnie i dlatego, że w głębszych pokładach mego umysłu przeprowadzałem w sposób mniej lub więcej nieświadomy i niedoskonały rozumowanie, które mnie doprowadziło do powyższych nierówności, podobnie jak wytrawny rachmistrz zanim dokończy mnożenia, zdaje sobie sprawę z tego, że »wyniesie to mniej więce tyle a tyle«.

Zresztą, ponieważ to, co nazwałem moją intuicyą, było poprostu niezupełnym szkicem prawdziwego rozumowania, tedy tłumaczy się, że obserwacya potwierdziła nasze przewidywania, że prawdopodobieństwo objektywne okazało się zgodnym z prawdopodobieństwem subjektywnym.

Jako trzeci przykład wybierzemy zagadnienie następujące: Niechaj u będzie liczbą wziętą na chybi-trafi, n daną liczbą całkowitą, bardzo wielką; jaka jest wartość prawdopodobna $\sin nu$? Zagadnienie to samo przez się nie ma żadnego sensu. Żeby mu sens nadać, trzeba zrobić umowę; umówimy się, że prawdopodobieństwo, by liczba u była zawarta między a i $a + da$ równa się $\varphi(a)\, da$; że zatym jest ono proporcyonalne do rozległości nieskończenie małego odstępu da i równa się tej rozległości, pomnożonej przez funkcyę $\varphi(a)$, zależną jedynie od a. Funkcyę tę obieram dowolnie, z tym jedynie zastrzeżeniem, by była ciągła. Ponieważ wartość sin nu pozostaje niezmieniona, gdy u zwiększa się o 2π, możemy, nie uszczuplając ogólności, przypuścić, że u jest zawarte między 0 i 2π, co naprowadza nas na założenie, że $\varphi(\alpha)$ jest funkcyą peryodyczną o okresie 2π.

Szukana wartość prawdopodobna da się bez trudności wyrazić w postaci prostej całki, i łatwo da się okazać, że całka ta jest mniejsza niż

$$\frac{2\pi M_k}{n^k}$$

gdzie M_k oznacza największą wartość k-tej pochodnej $\varphi(u)$. Widzimy tedy, że jeśli pochodna rzędu k jest skończona, nasza wartość prawdopodobna zdążać będzie do zera, gdy n będzie rosło nieograniczenie, i to prędzej niż $\frac{1}{n^{k-1}}$.

Wartość prawdopodobna sin nu dla n bardzo wielkiego równa się tedy zeru; aby oznaczyć tę wartość potrzebowaliśmy pewnej umowy; lecz wynik pozostaje taki sam, niezależnie od tego jaka była ta umowa. Narzuciliśmy sobie nieznaczne ograniczenia, przypuszczając, że funkcya $\varphi(a)$ jest ciągła i peryodyczna, a założenia te są tak naturalne, że doprawdy trudno byłoby ich uniknąć.

Rozpatrzenie trzech poprzedzających przykładów, tak różnych pod każdym względem, pozwoliło nam domyślić się z jednej strony, jaka jest rola zasady, zwanej przez filozofów zasadą dostatecznego powodu, z drugiej zaś — jaka jest doniosłość faktu, iż pewne własności wspólne są wszystkim funkcyom ciągłym. Zbadanie prawdopodobieństwa w naukach fizycznych doprowadzi nas do tego samego wyniku.

III. — Prawdopodobieństwo w naukach fizycznych. — Przystąpmy teraz do zagadnień, ściągających się do tak nazwanego przez nas drugiego stopnia nieświadomości; do tych mianowicie, w których znamy prawo, lecz nie znamy stanu początkowego układu. Moglibyśmy tu mnożyć przykłady, ale weźmiemy z nich tylko jeden: Jakie jest prawdopodobne rozmieszczenie obecne małych planet na pasie zwierzyńcowym?

Wiemy, że ulegają one prawom Keplera; możemy nawet, nie zmieniając w niczym natury zagadnienia, przypuścić, że wszystkie ich orbity są koliste i leżą w jednej płaszczyźnie, i że wiemy o tym. Nie wiemy natomiast zgoła jakie było ich rozmieszczenie początkowe. Pomimo to nie wahamy się twierdzić, że dzisiaj rozmieszczenie to jest jednostajne. Dlaczego?

Niechaj b będzie długością jednej z małych planet w chwili początkowej, czyli w chwili zero; niech a oznacza jej ruch średni; jej długość w chwili obecnej, tj. w chwili t, będzie $at + b$. Gdy mówimy, że rozkład obecny jest jednostajny, mówimy, że wartość średnia wstaw i dostaw wielokrotności $at + b$ jest równa zeru. Dlaczego twierdzimy, że tak jest?

Wyobraźmy każdą małą planetę przez punkt w płaszczyźnie, mianowicie przez punkt, którego spółrzędnemi są właśnie a i b. Wszystkie te punkty będą zawarte w pewnym obszarze płaszczyzny, a że są one bardzo liczne, obszar ten będzie wyglądał, jak usiany punktami. Nie wiemy zresztą nic o rozmieszczeniu tych punktów.

Jakże zastosować rachunek prawdopodobieństwa do podobnej kwestyi? Jakie jest prawdopodobieństwo, by jeden lub kilka z owych punktów reprezentacyjnych znajdowało się w określonej części płaszczyzny? W nieświadomości naszej zmuszeni jesteśmy uciec się do jakiegoś dowolnego przypuszczenia. Aby wytłumaczyć istotę tego przypuszczenia, niechaj nam będzie wolno użyć zamiast formuły matematycznej, obrazu przybliżonego, lecz konkretnego. Wyobraźmy sobie, żeśmy pokryli naszą płaszczyznę warstwą materyi o gęstości zmiennej, lecz zmieniającej się w sposób ciągły. Umówimy się natenczas, że ilość prawdopodobną punktów reprezentacyjnych, zawartych w danej części płaszczyzny, będziemy uważali za proporcyonalną do ilości materyi fikcyjnej, jaka ją pokrywa. Jeśli tedy weźmiemy dwa obszary płaszczyzny o jednakowej rozciągłości, prawdopodobieństwa, by punkt reprezentacyjny jednej z naszych małych planet znajdował się w jednym lub w drugim z tych obszarów, będą się do siebie miały jak gęstości średnie materyi fikcyjnej w jednym lub drugim obszarze.

Mamy tedy dwa rozmieszczenia: jedno rzeczywiste, w którym punkty reprezentacyjne są bardzo liczne, bardzo gęste lecz odosobnione jak cząsteczki materyi w hypotezie atomistycznej; drugie, dalekie od rzeczywistości, w którym nasze punkty reprezentacyjne są zastąpione przez fikcyjną ciągłą materyę. Wiemy, że drugie to rozmieszczenie nie może być rzeczywiste, lecz nieświadomość nasza skazuje nas na przyjęcie go.

Gdybyśmy jeszcze mieli jakie pojęcie o rzeczywistym rozmieszczeniu punktów reprezentacyjnych, moglibyśmy urządzić się tak, by na obszarze o pewnej rozciągłości gęstość tej fikcyjnej ciągłej materyi była przybliżenie proporcyonalna do ilości punktów reprezentacyjnych albo, jeśli kto woli, atomów, zawartych w tym obszarze. Lecz nawet to nie jest możliwe, i nieświadomość nasza tak jest wielka, że zmuszeni jesteśmy obrać dowolnie funkcyę określającą gęstość naszej fikcyjnej materyi. Jednym tylko, nieuniknionym, będziemy się musieli skrępować założeniem; przypuścimy mianowicie, że funkcya ta jest ciągła. Wystarczy to, jak zobaczymy, aby dojść do określonego wniosku.

Jakie jest w chwili t rozmieszczenie prawdopodobne małych planet? Albo też, jaka jest prawdopodobna wartość wstawy długości w chwili t, to znaczy $\sin(at + b)$? Zrobiliśmy na początku pewną dowolną umowę, lecz skorośmy się na nią zgodzili, ta wartość prawdopodobna całkowicie jest oznaczona. Rozłóżmy płaszczyznę na elementy powierzchni. Rozważmy wartość $\sin(at + b)$ w punkcie środkowym każdego z tych elementów; pomnóżmy tę wartość przez powierzchnię elementu i przez odpowiadającą mu gęstość materyi fikcyjnej; weźmy następnie sumę tych iloczynów odpowiadających wszystkim elementom płaszczyzny. Mocą określenia suma ta da nam szukaną wartość przeciętną, która zostanie w ten sposób wyrażona zapomocą całki podwójnej.

Wydawać by się mogło, że ta wartość przeciętna zależeć będzie od wyboru funkcyi φ, określającej gęstość materyi fikcyjnej i że, wobec tego, iż funkcya ta φ jest dowolna, będziemy mogli otrzymać taką lub inną wartość w zależności od wyboru, jaki zrobimy. Pogląd taki zupełnie byłby błędny.

Prosty rachunek okazuje, że nasza całka podwójna maleje bardzo szybko w miarę tego jak t rośnie.

Tak tedy nie wiedzieliśmy, jakie zrobić założenie co do prawdopodobieństwa takiego lub innego rozmieszczenia początkowego; ale jakimkolwiek będzie to założenie, dojdziemy zawsze do tego samego wyniku, i to nas wybawia z kłopotu.

Jakąkolwiek będzie funkcya φ, wartość przeciętna zdąża do zera, gdy t rośnie, że zaś małe planety dokonały z pewnością bardzo wielkiej ilości obiegów, możemy twierdzić, że wartość ta przeciętna jest bardzo mała.

Możemy wybrać φ, jak nam się podoba, z jednym tylko ograniczeniem: funkcya ta musi być ciągła; i w rzeczy samej z punktu widzenia prawdopodobieństwa subjektywnego wybór funkcyi nieciągłej byłby nierozumny; jakąż bowiem racyą miałbym np. przypuścić, że długość początkowa może się równać dokładnie 0^0 a nie może być zawarta między 0^0 i 1^0?

Ale trudność zjawia się znowu, skoro stajemy na stanowisku prawdopodobieństwa objektywnego; skoro przechodzimy od naszego rozmieszczenia urojonego, w którym przypuściliśmy, że materya fikcyjna jest ciągła, do rozmieszczenia rzeczywistego, w którym nasze punkty reprezentacyjne tworzą jakby odosobnione atomy.

Wartość przeciętna $\sin(at + b)$ wyrazi się poprostu przez

$$\frac{1}{n} \Sigma \sin(at + b),$$

gdzie n oznacza liczbę małych planet. Zamiast całki podwójnej, odnoszącej się do funkcyi ciągłej, mamy sumę odrębnych wyrazów. A przecież nikt nie będzie poważnie wątpił o tym, że ta wartość przeciętna jest bardzo mała.

Dlatego mianowicie, że ponieważ nasze punkty reprezentacyjne rozsiane są bardzo gęsto, owa suma wyrazów odrębnych bardzo mało będzie się naogół różniła od całki. Całka jest granicą, do której zdąża suma wyrazów, gdy liczba tych wyrazów rośnie nieograniczenie. Skoro wyrazy są bardzo liczne, suma różnić się będzie bardzo mało od swej granicy, to jest od całki, i to, co powiedzieliśmy o tej całce, będzie się również stosowało do owej sumy.

Istnieją przecież wypadki wyjątkowe. Gdyby np. dla wszystkich małych planet zachodziła równość

$$b = \frac{\pi}{2} - at,$$

wszystkie planety miałyby w chwili t długość $\frac{\pi}{2}$, i wartość średnia byłaby oczywiście równa 1. W tym celu trzebaby było, by w chwili o wszystkie małe planety były umieszczone na pewnego rodzaju linii wężowej (spiralnej) o bardzo gęstych zwojach. Każdy uzna, że takie rozmieszczenie początkowe jest wysoce nieprawdopodobne (a gdyby nawet tak było rzeczywiście, to rozmieszczenie nie byłoby jednostajne w chwili obecnej, np. 1 stycznia r. 1900-go, lecz stałoby się nim kilka lat później).

Atoli, dlaczego uważamy takie rozmieszczenie początkowe za nieprawdopodobne? Koniecznie należy to wytłumaczyć, albowiem gdybyśmy nie mieli podstawy do odrzucenia, jako nieprawdopodobnego, tego niedogodnego przypuszczenia, wszystko zapadłoby się i nie moglibyśmy już nic twierdzić o prawdopodobieństwie takiego lub innego obecnego rozmieszczenia.

Odwołamy się i tutaj do zasady dostatecznego powodu, do której zawsze wypada nam powracać. Moglibyśmy przypuścić, że na początku planety były rozmieszczone w przybliżeniu na linii prostej; moglibyśmy przypuścić, że były one rozmieszczone nieprawidłowo; ale zdaje nam się, że niema dostatecznej racyi, by nieznana przyczyna, która je utworzyła, kazała im rozmieścić się wzdłuż krzywej tak prawidłowej a zarazem tak skomplikowanej, krzywej, która zdawałaby się być specyalnie wybraną po to, by rozmieszczenie obecne nie było jednostajne.

IV. — „*Rouge et noir*". — Zagadnienia, związane z grami hazardowemi, jak gra w ruletę, są w gruncie rzeczy zupełnie analogiczne do powyższych.

Weźmy np. okrągłą tarczę, podzieloną na wielką liczbę równych wycinków, kolejno zabarwionych na czerwono i czarno; strzałkę, obracającą się na osi umocowanej w środku tarczy, wprawia się ją w ruch obrotowy; po dokonaniu wielkiej liczby obrotów zatrzymuje się ona przed jedną z podziałek. Prawdopodobieństwo, by podziałka ta była czerwona, wynosi oczywiście $\frac{1}{2}$.

Strzałka obróci się o kąt θ, zawierający kilka okręgów; nie wiemy, jakie jest prawdopodobieństwo, że siła, z jaką puszczona będzie strzałka, będzie taka, iż kąt ten będzie zawarty między θ i $\theta + d\theta$; możemy przecież zrobić w tym przedmiocie pewną umowę; możemy przypuścić, że prawdopodobieństwo to wyniesie $\varphi(\theta)\,d\theta$; co do funkcyi $\varphi(\theta)$, możemy obrać ją w sposób zupełnie dowolny; nic nie może nami kierować przy tym wyborze; naturalnym jest wszakże, iż przypuścimy, że funkcya ta jest ciągła.

Niechaj ε będzie długością (liczoną na okręgu o promieniu 1) każdej podziałki czerwonej lub czarnej.

Mamy obliczyć całkę $\varphi(\theta)\,d\theta$, rozciągając ją z jednej strony na wszystkie podziałki czerwone, z drugiej zaś, na wszystkie podziałki czarne, i porównać ze sobą oba wyniki.

Rozważmy odstęp 2ε, zawierający jedną podziałkę czerwoną i następującą po niej podziałkę czarną. Niechaj M i m będą największą i najmniejszą wartością funkcyi $\varphi(\theta)$ w tym odstępie. Całka, rozciągnięta na podziałki czerwone, będzie mniejsza niż $\Sigma M \varepsilon$; całka rozciągnięta na przedziałki czarne, będzie większa niż $\Sigma m \varepsilon$; różnica zatym będzie mniejsza niż $\Sigma (M-m) \varepsilon$. Jeżeli funkcya φ jest ciągła a odstęp ε bardzo mały w stosunku do całkowitego kąta, przebieżonego przez strzałkę, różnica $M-m$ będzie bardzo mała i prawdopodobieństwo będzie bardzo zbliżone do $\frac{1}{2}$.

Rozumiemy przeto, że nie wiedząc nic o funkcyi φ, musimy postępować tak, jakgdyby prawdopodobieństwo równało się $\frac{1}{2}$. Rozumiemy również z drugiej strony, dlaczego jeśli, stając na punkcie widzenia objektywnym, zaobserwujemy pewną liczbę rzutów, obserwacya da nam przybliżenie taką samą liczbę rzutów czarnych jak rzutów czerwonych.

Wszyscy gracze znają to prawo objektywne; popełniają oni wszakże na jego podstawie osobliwy błąd, niejednokrotnie już podnoszony, a przecież niedający się wyplenić. Gdy np. na czerwone padło sześć razy z rzędu, stawiają oni na czarne, i mniemają, że grają niemal na pewne; albowiem, mówią, rzadko bardzo się trafia, by czerwone wyszło siedm razy z rzędu.

W rzeczywistości prawdopodobieństwo ich wygranej pozostaje zawsze równe $\frac{1}{2}$. Obserwacya wykazuje wprawdzie, że serye siedmiu kolejnych czerwonych są bardzo rzadkie; lecz serye sześciu czerwonych i po nich jednego czarnego są zupełnie tak samo rzadkie. Zauważyli oni rzadkość seryi siedmiu czerwonych; jeśli nie zauważyli rzadkości seryi sześciu czerwonych i jednego czarnego, to jedynie dlatego, że serye takie mniej uderzają naszą uwagę.

V. — Prawdopodobieństwo przyczyn. — Dochodzimy do zagadnień o prawdopodobieństwie przyczyn, najważniejszych ze stanowiska zastosowań naukowych. Dwie gwiazdy np. są bardzo bliskie siebie na kuli niebieskiej; czy pozorne to zbliżenie jest wynikiem prostego przypadku i czy gwiazdy te, lubo leżące na jednym prawie promieniu widzenia, znajdują się na bardzo różnych odległościach od ziemi, a przeto są również bardzo oddalone od siebie? Czy też zbliżenie to odpowiada bliskości rzeczywistej? Mamy tu zagadnienie o prawdopodobieństwie przyczyn.

Przypomnijmy sobie przedewszystkim, że na początku każdego zagadnienia o prawdopodobieństwie skutków z pośród tych, które rozpatrywaliśmy wyżej, zmuszeni byliśmy formułować pewną umowę mniej lub bardziej usprawiedliwioną. I jeśli wynik był najczęściej niezależny w pewnej mierze od tej umowy, to działo się to pod warunkiem wychodzenia z pewnych założeń, pozwalających nam na odrzucanie *a priori* funkcyi nieciągłych np., lub pewnych umów dziwacznych.

Podobne nieco zjawiska nasuwają się przy rozważaniu zagadnień o prawdopodobieństwach przyczyn. Dany skutek może być wywołany przez przyczynę A lub przez przyczynę B. Zaobserwowany został ów skutek; jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi on od przyczyny A? Jest to prawdopodobieństwo przyczyny *a posteriori*. Lecz nie moglibyśmy go wyliczyć, gdyby pewna mniej lub więcej uzasadniona umowa nie pozwalała nam wiedzieć z góry, jakie jest prawdopodobieństwo *a priori*, że przyczyna A wejdzie w grę, to znaczy prawdopodobieństwo tego ostatniego faktu dla kogoś, kto nie zaobserwował danego skutku.

Aby lepiej wytłumaczyć o co tu chodzi, powróćmy do przytoczonego wyżej przykładu gry w écarté; przeciwnik nasz daje poraz pierwszy i odwraca króla; jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to szuler? Wzory, zaczerpnięte ze zwykłych wykładów rachunku, dają $\frac{8}{9}$, co jest oczywiście rezultatem wielce niespodzianym. Bliższe atoli zbadanie tych wzorów powiada nam, że w rachunku takim zakłada się domyślnie, że, zanim usiedliśmy do gry, uważaliśmy, że jedna szansa na dwie przemawia za tym, że przeciwnik nasz nie jest uczciwy. Założenie niedorzeczne, boć w takim razie napewnobyśmy z nim nie grali; tłumaczy to zarazem niedorzeczność wniosku.

Umowa co do prawdopodobieństwa *a priori* była nieuzasadniona; dlatego też rachunek prawdopodobieństwa *a po-*

steriori doprowadził nas do wniosku niedopuszczalnego. Rozumiemy więc znaczenie owej umowy uprzedniej; dodałbym nawet, że gdybyśmy umowy takiej nie robili zupełnie, zagadnienie prawdopodobieństwa *a posteriori* nie miałoby żadnego sensu; robić ją przeto musimy zawsze, już to wyraźnie, już domyślnie.

Przejdźmy do przykładu o charakterze bardziej naukowym. Chcemy ustanowić pewne prawo doświadczalne; prawo to, skoro je poznamy, będzie można przedstawić zapomocą pewnej krzywej; wykonaliśmy pewną liczbę oddzielnych obserwacyi; każdej z nich odpowiada pewien punkt. Otrzymawszy różne te punkty, przeprowadzamy między niemi krzywą, starając się możliwie najmniej się od nich odchylić, a jednak nadać tej krzywej kształt prawidłowy, bez załamań, bez zbyt wyraźnych przegięć, bez raptownych zmian promienia krzywizny. Krzywa ta przedstawiać dla nas będzie prawdopodobne prawo: przypuszczamy, że da nam ona nietylko wartości funkcyi, pośrednie między temi, które zaobserwowaliśmy, ale pozwoli nam nadto poznać wartości zaobserwowane dokładniej niż obserwacya bezpośrednia (w tym też celu kazaliśmy jej przechodzić w pobliżu naszych punktów nie zaś przez same te punkty).

Jest to zagadnienie prawdopodobieństwa przyczyn. — Skutki — to pomiary przez nas zanotowane; zależą one od kombinacyi dwu przyczyn: od prawdziwego prawa, rządzącego danym zjawiskiem, i od błędów obserwacyi. Chodzi o to, aby znając skutki, obliczyć prawdopodobieństwo, że zjawisko ulega takiemu a takiemu prawu i że obserwacye były obciążone takiemi a takiemi błędami. Najprawdopodobniejsze prawo odpowiada wówczas nakreślonej krzywej a najprawdopodobniejszy błąd jednej obserwacyi wyobrażony jest przez odległość odpowiadającego jej punktu od tej krzywej.

Ale zagadnienie to nie miałoby żadnego sensu, gdybyśmy przed wszelką obserwacyą nie mieli pewnego pojęcia *a priori* o prawdopodobieństwie tego lub innego prawa oraz szans błędów, na które się narażamy.

Jeśli narzędzia nasze są dobre (co wiedzieliśmy, zanim dokonaliśmy obserwacyi) nie pozwolimy naszej krzywej odchylać się znacznie od punktów, przedstawiających surowe pomiary. Jeśli są złe, będziemy mogli oddalić się od nich nieco więcej, ażeby otrzymać mniej pozakrzywianą krzywą; poświęcimy więcej dla prawidłowości krzywej.

Czemuż to staramy się nakreślić krzywą bez wielu zgięć? Dlatego, że uważamy *a priori* prawo, przedstawione przez funkcyę ciągłą (lub przez funkcyę, której pochodne wysokiego rządu są bardzo małe) za bardziej prawdopodobne, niż prawo nie czyniące zadość tym warunkom. — Bez tego założenia omawiane zagadnienie nie miałoby sensu, interpolacya byłaby niemożliwa; niepodobna byłoby wyprowadzić prawa ze skończonej liczby obserwacyi; nauka nie istniałaby. Pięćdziesiąt lat temu fizycy uważali, że prawo proste, przy wszystkich innych jednakowych okolicznościach, bardziej jest prawdopodobne niż prawo skomplikowane. Odwoływali się oni nawet do tej zasady na korzyść prawa Mariotte'a wbrew eksperymentom Regnaulta. Dzisiaj wyrzekli się już oni tej wiary; jakże często przecież zmuszeni są postępować tak, jak gdyby ją zachowali! Jakkolwiekbądź, z dążności tej pozostała wiara w ciągłość, i widzieliśmy powyżej, że gdyby i ona z kolei miała zniknąć, nauka doświadczalna stałaby się niemożliwą.

VI. — Teorya Błędów. — Naprowadza nas to na rozważenie teoryi błędów, związanej bezpośrednio z zagadnieniem o prawdopodobieństwie przyczyn. I tutaj stwierdzamy skutki, mianowicie pewną liczbę rozbieżnych obserwacyi i staramy się odgadnąć przyczyny, które stanowią: z jednej strony prawdziwa wartość ilości, o której zmierzenie chodzi, z drugiej — błąd popełniony przy każdej oddzielnej obserwacyi. Trzebaby obliczyć, jaka jest *a posteriori* wielkość prawdopodobna każdego błędu, a przeto i wielkość prawdopodobna ilości, którą mamy zmierzyć.

Ale w myśl tego, cośmy wyżej wyjaśnili, niepodobna przeprowadzić tego rachunku, nie przyjmując *a priori*, to znaczy przed wszelką obserwacyą, pewnego prawa o prawdopodobieństwie błędów. Czy istnieje prawo błędów?

Prawem błędów, przyjętym przez wszystkich rachmistrzów, jest prawo Gaussa, które wyobraża pewna krzywa przestępna, znana pod nazwą »krzywej o postaci dzwonu«.

Lecz przypomnijmy sobie przedewszystkim klasyczne rozróżnienie błędów systematycznych i błędów przypadkowych. Jeśli mierzymy pewną długość zbyt długim »metrem«, otrzymamy zawsze rezultat pomiaru za mały, i kilkakrotne powtórzenie pomiaru w niczym tego błędu nie naprawi; mamy tu błąd systematyczny. Jeśli ją mierzymy metrem dokładnym, możemy również się omylić, ale omylimy się to w jedną stronę, to znów w drugą, kiedy więc obliczymy przeciętną z wielkiej liczby pomiarów, błąd będzie zdążał do zaniku. Są to błędy przypadkowe.

Błędy systematyczne nie mogą oczywiście czynić zadość prawu Gaussa; lecz czy czynią mu zadość błędy przypadkowe? Podjęto bardzo wiele prób przeprowadzenia dowodu tego prawa; wszystkie niemal są pospolitemi paralogizmami. Można wszakże dowieść prawa Gaussa, wychodząc z następujących założeń: błąd popełniony jest wypadkową bardzo wielkiej liczby błędów częściowych i niezależnych; każdy z błędów częściowych jest bardzo mały i ulega pozatym jakiemukolwiek prawu prawdopodobieństwa, o którym wiemy to tylko, że prawdopodobieństwo błędu dodatniego jest takie samo, jak prawdopodobieństwo błędu równego lecz o znaku przeciwnym. Warunki te będą oczywiście spełnione często, lubo nie zawsze, i nazwę błędów wypadkowych zachowamy dla tych, które czynią im zadość.

Widzimy, że metoda najmniejszych kwadratów nie we wszystkich wypadkach jest uprawniona, naogół fizycy odnoszą się do niej z większą nieufnością niż astronomowie. Pochodzi to zapewne stąd, że ci ostatni, prócz błędów systematycznych, które napotykają na równi z fizykami, muszą walczyć z pewną przyczyną błędów niezmiernie ważną, a zupełnie wypadkową; mam na myśli falowania atmosferyczne. To też bardzo jest ciekawe słyszeć, jak jakiś fizyk dyskutuje z astronomem w sprawie jakiejś metody obserwacyi: fizyk, przeświadczony, że jeden dobry pomiar więcej jest wart niż wiele złych, zaprząta się przedewszystkim wyrugowaniem przez zastosowanie wszelkich możliwych ostrożności resztek błędów systematycznych, astronom zaś odpowiada mu: »Ależ w taki sposób będziecie mogli obserwować tylko bardzo małą liczbę gwiazd; błędy przypadkowe przez to nie znikną«.

Cóż powinniśmy stąd wywnioskować? Czy należy nadal stosować metodę najmniejszych kwadratów? Trzeba tu zrobić pewne rozróżnienie: wyrugowaliśmy wszystkie błędy systematyczne, których istnienie podejrzewaliśmy; wiemy dobrze, że pozostały jeszcze inne, których nie potrafiliśmy wykryć; jednakowoż trzeba się zdecydować i przyjąć jakąś wartość ostateczną, którą będziemy uważali za wartość prawdopodobną; oczywiste jest, że najlepszym co mamy natenczas do zrobienia, będzie zastosowanie metody Gaussa. Będzie to tylko zastosowanie reguły praktycznej, dotyczącej prawdopodobieństwa subjektywnego. Nic nie da się temu zarzucić.

Niektórzy atoli chcą iść dalej i twierdzą, że nietylko wartość prawdopodobna wynosi tyle a tyle, ale nadto, że błąd prawdopodobny osiągniętego wyniku w stosunku do wartości prawdziwej wynosi tyle a tyle. J e s t t o s t a n o w i s k o c a ł k o w i c i e n i e u p r a w n i o n e; byłoby ono słuszne, gdybyśmy byli pewni, że wszystkie błędy systematyczne zostały wyrugowane, a o tym nie wiemy nic. Mamy dwie serye obserwacyi; stosując prawidło najmniejszych kwadratów, znajdujemy, że błąd prawdopodobny pierwszej seryi jest dwa razy mniejszy niż błąd prawdopodobny drugiej. — A jednak druga serya może być lepszą od pierwszej, albowiem pierwsza jest, być może, obciążona dużym błędem systematycznym. Nie możemy powiedzieć nic ponad to, że pierwszy szereg jest p r a w d o p o d o b n i e lepszy od drugiego, ponieważ jego błąd przypadkowy jest mniejszy, a nie mamy żadnej racyi twierdzić, że błąd systematyczny jednej seryi jest większy niż drugiej, albowiem jesteśmy w tej mierze co do obu w zupełnej nieświadomości.

VII. — Wnioski. — W powyższych rozważaniach rzuciłem dużo zagadnień, a żadnego z nich nie rozwiązałem. Nie żałuję przecież żem je wyłożył, albowiem pobudzą one, być może, czytelnika do rozmyślań nad temi subtelnemi kwestyami.

Jakkolwiekbądź, niektóre punkty wydają się ustalonemi. Ażeby przystąpić do jakiegokolwiek obrachowania prawdopodobieństwa, a nawet ażeby rachunek ten miał sens, należy przyjąć, jako punkt wyjścia, pewne założenie czy umowę, w której tkwi zawsze pewien stopień dowolności. W wyborze tej umowy jedynym naszym kierownikiem może być zasada dostatecznego powodu. Na nieszczęście zasada ta jest wielce nieokreślona i elastyczna: widzieliśmy też w pobieżnym naszym przeglądzie, że przybierała ona wiele rozmaitych postaci. Postacią, w jakiej napotykaliśmy ją najczęściej, jest wiara w ciągłość, wiara, którą trudnoby było uzasadnić przez rozumowanie apodyktyczne, bez której jednak wszelka nauka byłaby niemożliwa. Wreszcie zagadnieniami, do których rachunek prawdopodobieństwa może być skutecznie stosowany, są te, w których wynik jest niezależny od założenia, zrobionego na początku, byle tylko to założenie czyniło zadość warunkowi ciągłości.

Rozdział Dwunasty.

Optyka i Elektryczność.

Teorya Fresnela. — Najlepszym przykładem [1]), jaki możemy obrać, jest teorya światła i jej związek z teoryą

---

[1]) Rozdział ten jest częściowym odtworzeniem przedmów do dwu moich prac: Théorie mathématique de la lumière (Paryż, Naud, 1889) i Électricité et optique (Paryż, Naud, 1901).

elektryczności. Dzięki Fresnelowi optyka jest najbardziej wykończoną częścią fizyki; tak zw. teorya undulacyjna stanowi zaprawdę zespół zadawalający umysł; nie należy wszakżę od niej wymagać tego, czego dać nie może.

Przedmiotem teoryi matematycznych nie jest objawianie nam prawdziwej natury rzeczy; byłoby to nierozumną pretensyą. Jedynym ich celem jest wprowadzenie ładu do praw fizycznych, które poznajemy drogą doświadczenia, a których wysłowić nawet nie potrafilibyśmy bez pomocy matematyki.

Mało nas obchodzi, czy eter istnieje rzeczywiście: jest to rzeczą metafizyków; istotną wagę posiada dla nas to, że wszystko odbywa się tak, jak gdyby istniał i że hypoteza ta jest dogodna dla tłumaczenia zjawisk. Zresztą, czyż mamy inne podstawy do wiary w istnienie przedmiotów materyalnych? Jest to również jedynie dogodna hypoteza; tylko że nie przestanie ona nigdy być dogodną, gdy natomiast nadejdzie zapewne dzień, kiedy eter zostanie porzucony jako bezpożyteczny.

Ale po tym nawet dniu prawa optyki i równania wyrażające je analitycznie pozostaną prawdziwe, przynajmniej jako pierwsze przybliżenie. Dlatego też teorya, wiążąca ze sobą wszystkie te równania zachowa zawsze pewne znaczenie.

Teorya falowa opiera się na pewnej hypotezie molekularnej; dla jednych, którzy sądzą, że odsłaniają w ten sposób przyczynę kryjącą się pod prawem, stanowi to zaletę; dla innych jest to okoliczność, budząca nieufność; nieufność ta wydaje mi się równie niesłuszną jak łudzenie się tamtych.

Hypotezy te odgrywają tylko rolę drugorzędną. Możnaby się ich wyrzec; nie czyni się tego zazwyczaj, albowiem wyszłoby to na szkodę jasności wykładu — ale też tylko dla tej racyi.

Jakoż, przy bliższym wniknięciu przekonać się można, że się od hypotez molekularnych zapożycza dwie tylko rzeczy: zasadę zachowania energii i formę liniową równań, która jest prawem ogólnym małych ruchów zarówno jak wszystkich małych zmian.

Tłumaczy to też, dlaczego większość wniosków Fresnela pozostaje bez zmiany, gdy staje się na stanowisku elektromagnetycznej teoryi światła.

Teorya Maxwella. — Maxwella, jak wiadomo, jest zasługą połączenie ścisłym węzłem dwu części fizyki poprzednio zupełnie sobie obcych: optyki i elektryczności. Roztapiając się w ten sposób w szerszym zespole, w wyższej harmonii, optyka Fresnela nie dokonała bynajmniej swego żywota. Poszczególne jej części trwają dalej, wzajemne ich stosunki pozostały te same. Zmienił się tylko język, jakim je wyrażamy, nadto zaś Maxwell ujawnił nam inne jeszcze przedtym nieprzewidywane stosunki między różnemi częściami optyki a dziedziną elektryczności.

Gdy czytelnik francuski otwiera po raz pierwszy książkę Maxwella, pewne uczucie nieswojskości, niekiedy nawet nieufności, mąci zrazu jego zachwyt. Po dłuższym dopiero z nią obcowaniu i to za cenę wielu wysiłków uczucie to się rozprasza. Niektóre wybitne umysły nigdy nawet nie potrafiły się zeń wyzwolić.

Dlaczegoż pomysły angielskiego badacza aklimatyzują się u nas z taką trudnością? Zapewne dlatego, że wykształcenie, jakie otrzymuje większość oświeconych Francuzów usposabia ich do smakowania raczej w ścisłości i logice niż w jakiejkolwiek innej zalecie.

Dawne teorye, fizyki matematycznej budziły w nas pod tym względem zupełne zadowolenie. Wszyscy nasi mistrze od Laplace'a do Cauchy'ego postępowali w ten sam sposób. Wychodząc z wyraźnie sformułowanych założeń, wyprowadzili oni z nich wszystkie wyniki z ścisłością matematyczną, następnie zaś zestawiali je z doświadczeniem. Zdaje się, jakgdyby chcieli oni nadać każdej gałęzi fizyki tę samą ścisłość, jaka cechuje mechanikę niebieską.

Umysł, przyzwyczajony do podziwiania takich wzorów, niełatwo zadowoli się jakąś teoryą. Nietylko nie będzie on w niej pobłażał najmniejszemu pozorowi sprzeczności, ale będzie nadto wymagał, żeby poszczególne jej części były logicznie ze sobą powiązane, a liczba odrębnych założeń sprowadzona do minimum.

Nie poprzestanie wszakże na tym: będzie miał inne jeszcze wymagania, zdaniem moim, mniej usprawiedliwione. Poza materyą, dostępną dla naszych umysłów i znaną nam z doświadczenia, zechce on dopatrywać się innej materyi, jedynej w jego oczach prawdziwej, posiadającej jedynie własności czysto geometryczne, materyi, której atomy będą punktami matematycznemi podlegającemi jedynie prawom dynamiki. A przecież, kosztem nieświadomej sprzeczności, będzie on usiłował wyobrazić sobie te niewidzialne i bezbarwne atomy a więc zbliżyć je jak najbardziej do materyi pospolitej. Wówczas dopiero zadowolenie jego będzie zupełne, będzie mu się zdawało, że przeniknął on tajemnicę wszechświata. Jeśli zadowolenie to jest ułudne, to niemniej przykro jest się go zrzekać.

Tak więc, otwierając Maxwella, francuz spodziewa się, że znajdzie w nim zespół teoretyczny równie logiczny i równie ścisły, jak optyka fizyczna, zbudowana na hypotezie eteru; gotuje on sobie w ten sposób rozczarowanie, którego chcielibyśmy oszczędzić naszemu czytelnikowi, uprzedzając go z góry, czego ma szukać w Maxwellu, a czego nie zdoła w nim znaleść.

Maxwell nie daje mechanicznego wytłumaczenia elektryczności i magnetyzmu; ogranicza się on dowiedzeniem, że wytłumaczenie takie jest możliwe.

Wykazuje on również, że zjawiska optyczne są tylko wypadkiem szczególnym zjawisk elektro-magnetycznych. — Z każdej teoryi elektryczności można więc będzie wyprowadzić natychmiast pewną teoryę światła.

Twierdzenie odwrotne nie jest niestety prawdziwe; z zupełnego wytłumaczenia światła niezawsze jest łatwo wyprowadzić zupełne wytłumaczenie zjawisk elektrycznych. Nie jest to np. łatwe, gdy wziąć za punkt wyjścia teoryę Fresnela; nie byłoby to zapewne niemożliwe; niemniej nasuwa się pytanie, czy nie zajdzie konieczność zrzeczenia się wspaniałych wyników, które wydawały się ostatecznym nabytkiem nauki. Wydaje to się krokiem wstecz; i wiele dzielnych umysłów nie chce się z tym pogodzić.

Gdy czytelnik przystanie na zakreślenie granic swym nadziejom, napotka on inne jeszcze trudności; badacz angielski nie usiłuje zbudować jednego gmachu, ostatecznego i uporządkowanego — raczej wznosi wiele budowli prowizorycznych i niezależnych, między któremi komunikacye są trudne a niekiedy niemożliwe.

Weźmy jako przykład rozdział, w którym tłumaczy się przyciągania elektrostatyczne przez ciśnienia i ciągnienia, panujące w środowisku dielektrycznym. Rozdział ten możnaby usunąć, nie zmniejszając w niczym jasności i zupełności reszty książki, sam zaś rozdział zawiera teoryę, stanowiącą zamkniętą całość, którą możnaby zrozumieć, nie czytając ani jednego wiersza z rozdziałów poprzedzających i następujących. Cowięcej: jest on nietylko niezależny od reszty dzieła, ale nawet trudno byłoby go pogodzić z myślami podstawowemi książki; jakoż Maxwell nie probuje nawet przeprowadzić to pogodzenie, ogranicza się on powiedzeniem: *„I have not been able to make the next etep, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric“*.

Przykład ten wystarczy do wyjaśnienia naszej myśli; moglibyśmy przytoczyć ich wiele jeszcze innych. Któż np. przypuszczałby, czytając stronice, poświęcone obrotowej polaryzacyi magnetycznej, że zachodzi tożsamość między zjawiskami optycznemi a magnetycznemi?

Nie należy tedy pochlebiać sobie, że się uniknęło wszelkiej sprzeczności; ale należy się do tego przystosować. Dwie sprzeczne ze sobą teorye mogą być współcześnie pożytecznemi narzędziami badania, pod warunkiem, by je ze sobą nie mieszano i nie doszukiwano się w nich istoty rzeczy — i być może, że czytanie Maxwella byłoby mniej pobudzające, gdyby nie otwierało przed nami tylu nowych rozbieżnych dróg.

Niestety sprawia to, że myśl podstawowa zostaje nieco przesłonięta. Dlatego to w większości książek popularyzatorskich ona właśnie jest jedynym punktem, w zupełności pominiętym przez autorów.

Pożytecznem tedy wydaje się nam, dla lepszego jej uwydatnienia, wyjaśnić na czym polega ta myśl podstawowa. Wymaga to przedewszystkim krótkiej dygresyi.

O tłumaczeniu mechanicznym zjawisk fizycznych. — W każdym zjawisku fizycznym znajdujemy pewną liczbę parametrów bezpośrednio dostępnych dla doświadczenia i nadających się do pomiaru. Nazwiemy je parametrami q.

Obserwacya pozwala nam następnie na poznanie praw, rządzących zmianami tych parametrów, i prawom tym można naogół nadać postać równań różniczkowych, wiążących ze sobą parametry q i czas.

W jakiż sposób znaleźć można mechaniczną interpretacyę takiego zjawiska?

Trzeba spróbować je wytłumaczyć bądź przez ruchy materyi zwykłej, bądź przez ruchy jednego lub kilku fluidów hypotetycznych.

Fluidy te będą rozważane, jako składające się z wielkiej bardzo ilości odrębnych cząsteczek m.

Czegóż tedy trzeba, by zdobyć zupełne wytłumaczenie mechaniczne zjawiska? Z jednej strony należy znać równania różniczkowe, którym czynią zadość spółrzędne hypotetycznych tych cząsteczek m, równania, które zresztą będą musiały stosować się do zasad dynamiki; z drugiej zaś — znać trzeba związki, określające spółrzędne cząsteczek m w funkcyi parametrów q, dostępnych dla doświadczenia.

Równania te, jak powiedzieliśmy, muszą czynić zadość wymaganiom zasad dynamiki a w szczególności zasady zachowania energii i zasady najmniejszego działania.

Pierwsza z tych dwu zasad powiada nam, że energia całkowita jest stała i że rozpada się ona na dwie części:

1^0 Energię kinetyczną czyli siłę żywą, zależną od mas cząsteczek hypotetycznych m i od ich prędkości; nazwiemy ją T;

2^0 Energię potencyalną, zależną jedynie od spółrzędnych tych cząsteczek — nazwiemy ją U. — Suma tych dwu energii T i U jest stała.

Czegóż z kolei uczy nas zasada najmniejszego działania? Powiada nam, że układ, aby przejść od położenia początkowego, jakie zajmuje w chwili t_0, do położenia końcowego, jakie zajmuje w chwili t_0, musi przebyć drogę taką, iżby w ciągu odstępu czasu między chwilami t_0 i t_1 wartość przeciętna »działania« (tj. różnica między energiami T i U) była możliwie najmniejsza. Pierwsza z tych dwu zasad jest zresztą konsekwencyą drugiej.

Jeśli znamy funkcye T i U, zasada ta wystarcza do wyznaczenia równań ruchu.

Wśród wszystkich dróg, pozwalających na przejście od jednego położenia do drugiego istnieje oczywiście jedna, dla której wartość przeciętna działania jest mniejsza niż dla wszystkich innych. Dróg takich jest zresztą nie więcej niż jedna, i dlatego zasada najmniejszego działania wystarcza do wyznaczenia tej drogi, a więc i równań ruchu.

Otrzymuje się w ten sposób tak zwane równania Lagrange'a.

W równaniach tych zmiennemi niezależnemi są spółrzędne hypotetycznych cząsteczek m; przypuśćmy teraz, że bierze się jako zmienne parametry q bezpośrednio dostępne dla doświadczenia.

Obie części energii będą musiały natenczas wyrazić się w funkcyi parametrów q i ich pochodnych; w tej oczywiście postaci określi je eksperymentator. Będzie on naturalnie starał się określić energię potencyalną i energię kinetyczną za pomocą wielkości, które wprost może obserwować[1]).

---

[1]) Dodajmy, że U zależeć będzie jedynie od parametrów q, że T zależeć będzie od q oraz od ich pochodnych względem czasu, i będzie wielomianem jednorodnym drugiego stopnia w stosunku do tych pochodnych.

Przy tych założeniach układ przechodzić będzie zawsze od jednego położenia do drugiego drogą taką, iżby działanie przeciętne było najmniejsze.

Nie stanowi to nic, że T i U są obecnie wyrażone zapomocą parametrów q i ich pochodnych; nic, że położenie początkowe i końcowe określamy również zapomocą tych parametrów; zasada najmniejszego działania pozostaje zawsze prawdziwą.

Otóż i tutaj ze wszystkich dróg, prowadzących od jednego położenia do drugiego, istnieje jedna, dla której działanie przeciętne jest najmniejsze, i tylko jedna. Zasada najmniejszego działania wystarcza więc do wyznaczenia równań różniczkowych, określających zmiany parametrów q.

Otrzymane w ten sposób równania są inną postacią równań Lagrange'a.

Dla napisania tych równań nie potrzebujemy znać związków łączących parametry q ze spółrzędnemi cząsteczek hypotetycznych, ani mas tych cząsteczek, ani też wyrazu U jako funkcyi spółrzędnych tych cząsteczek. Musimy znać jedynie wyraz U w funkcyi parametrów q oraz wyraz T w funkcyi q i ich pochodnych, to znaczy wyrazy energii kinetycznej i energii potencyalnej w funkcyi danych doświadczalnych.

Naówczas jedno zdwojga: albo przy odpowiednim wyborze funkcyi T i U równania Lagrange'a, zbudowane jak wyłuszczyliśmy powyżej, będą tożsame z równaniami różniczkowemi, wyprowadzonemi z doświadczeń; albo też nie będą istniały funkcye T i U, dla których zgodność ta będzie zachodziła. W ostatnim, oczywiście, wypadku żadne tłumaczenie mechaniczne nie jest możliwe.

Warunkiem niezbędnym możliwości wytłumaczenia mechanicznego jest tedy możność wyboru funkcyi T i U, tak iżby działo się zadość zasadzie najmniejszego działania, z której wypływa zasada zachowania energii.

Warunek ten jest zresztą dostateczny; w rzeczy samej, przypuśćmy, że znaleziono funkcyę U parametrów q, reprezentującą jedną część energii, że inna część energii, którą wyobrazimy przez T, jest funkcyą q i ich pochodnych i że jest wielomianem jednorodnym drugiego stopnia względem tych pochodnych; że wreszcie równania Lagrange'a zbudowane zapomocą tych dwu funkcyi T i U zgodne są z danemi doświadczeniami.

Czegóż trzeba, by wyprowadzić stąd mechaniczne wytłumaczenie? Trzeba, by U można było uważać za energię potencyalną pewnego układu a T za siłę żywą tegoż układu.

W stosunku do U nie nasuwa to trudności; lecz czyż można będzie uważać T za siłę żywą układu materyalnego?

Łatwo jest okazać, że jest to zawsze możliwe, i to na nieskończoną ilość sposobów. Po więcej szczegółów odeślemy do przedmowy do naszego dzieła: Elektryczność i optyka.

Tak więc, jeśli nie można uczynić zadość zasadzie najmniejszego działania, tedy wytłumaczenie mechaniczne nie jest możliwe; jeśli można jej uczynić zadość, istnieje nietylko jedno takie wytłumaczenie lecz nieskończona ilość, skąd wnosi się, że skoro istnieje jedno, istnieje również nieskończenie wiele innych.

Jedna jeszcze uwaga.

Pośród wielkości dostępnych wprost dla doświadczenia, jedne będziemy uważali za funkcye spółrzędnych naszych hypotetycznych cząsteczek; te właśnie będą naszemi parametrami q; pozostałe uważać będziemy za zależne nietylko od spółrzędnych lecz również od prędkości, albo, co wychodzi na jedno, za pochodne parametrów q lub za kombinacye tych parametrów i ich pochodnych.

Natenczas nasuwa się następujące pytanie: które ze wszystkich tych eksperymentalnie zmierzonych wielkości obierzemy jako wyobrażające parametry q? które będziemy woleli uważać za pochodne tych parametrów? Wybór ten jest w znacznej bardzo mierze dowolny, lecz wystarczy, by można go było dokonać w sposób niezakłócający zgodności z zasadą najmniejszego działania, a wytłumaczenie mechaniczne będzie zawsze możliwe.

Otóż Maxwell zadał sobie pytanie, czy można dokonać tego wyboru oraz wyboru dwu energii T i U w sposób taki, iżby zjawiska elektryczne czyniły zadość tej zasadzie. Doświadczenie wykazuje, że energia pola elektromagnetycznego rozkłada się na dwie części, na energię elektrostatyczną i energię elektrodynamiczną. Maxwell przeświadczył się, że jeśli uważa się pierwszą za przedstawiającą energię potencyalną U, drugą za przedstawiającą energię kinetyczną T; jeśli z drugiej strony ładunki elektrostatyczne przewodników uważane są za parametry q a napięcia prądów za pochodne innych parametrów q; — tedy zjawiska elektryczne czynią zadość zasadzie najmniejszego działania. Stąd wyniósł on pewność, że wytłumaczenie mechaniczne jest możliwe.

Gdyby myśl tę wyłożył na czele swej książki, nie zaś pomieścił ją w jakimś zakątku drugiego tomu, nie uszłaby ona uwagi większości czytelników.

Jeśli zatym pewne zjawisko dopuszcza wytłumaczenie mechaniczne zupełne, dopuszcza ono nieskończenie wiele innych, które zdadzą równie dobrze sprawę ze wszystkich szczegółów ujawnionych przez doświadczenie.

Potwierdza to historya wszystkich działów fizyki; w optyce np. Fresnel przypuszcza, że drganie jest prostopadłe do płaszczyzny polaryzacyi; Neumann uważa je za równoległe do tej płaszczyzny. Przez długi czas szukano *„experimentum crucis"*, któreby rozstrzygnęło sprawę na korzyść jednej z tych dwu teoryi, ale bez powodzenia.

Podobnież, nie wychodząc poza obszary elektryczności, możemy stwierdzić, że zarówno teorya dwu fluidów jak teorya jednego fluidu zdają w jednakowo zadawalający sposób sprawę ze wszystkich praw zaobserwowanych w elektrostatyce.

Wszystkie te fakty łacno się dają wytłumaczyć dzięki wspomnianym powyżej własnościom równań Lagrange'a.

Łatwo jest teraz zrozumieć myśl podstawową Maxwella.

Żeby dowieść możliwości wytłumaczenia mechanicznego zjawisk elektrycznych nie potrzebujemy się troszczyć o znalezienie samego takiego wytłumaczenia, wystarcza, abyśmy znali wyrazy dwu funkcyi T i U, które są dwiema częściami energii, uformowali przy pomocy tych funkcyi równania Lagrange'a i następnie zestawili te równania z prawami doświadczalnemi.

Któreż ze wszystkich tych wytłumaczeń należy wybrać, skoro doświadczenie nie narzuca nam żadnego określonego wyboru? Nadejdzie, być może, dzień, gdy fizycy przestaną się interesować temi pytaniami, niedostępnemi dla metod pozytywnych, i pozostawią je metafizykom. Dzień ten nie nadszedł jeszcze; człowiek nie godzi się tak łatwo z myślą, że nigdy nie pozna istoty rzeczy.

Wybór nasz kierować się tedy może jedynie rozważaniami opartemi w znacznej bardzo mierze na ocenie osobistej; niektóre przecież rozwiązania odrzuci każdy z powodu ich dziwaczności, inne znów odpowiadać będą wymaganiom wszystkich ze względu na swą prostotę.

Co dotyczy elektryczności i magnetyzmu, Maxwell powstrzymuje się od jakiegokolwiek wyboru. Nie dlatego, by systematycznie gardził wszystkim, co nie jest dostępne dla metod pozytywnych; czas, który poświęcił on teoryi kinetycznej gazów, dostatecznie dowodzi, że tak nie jest. Dodamy, że jeśli w wielkim swoim dziele nie rozwija on żadnego zupełnego wytłumaczenia, to przedtym już spróbował je dać w artykule umieszczonym w *Philosophical Magazine*. Osobliwość i komplikacya hypotez, które zmuszony był uczynić, pobudziły go później do zarzucenia tej próby.

Ten sam duch napełnia całe dzieło. Uwydatnia się to, co jest istotne, to znaczy to, co musi pozostać wspólne wszystkim teoryom; pomija zawsze prawie milczeniem wszystko, co odpowiadałoby tylko jednej, specyalnej teoryi. Czytelnik ma zatym przed sobą jak gdyby formę prawie zupełnie pozbawioną materyi, która z razu wydaje mu się mknącym i nieuchwytnym cieniem. Lecz wysiłki, do których daje to pochop, zmuszają go do myślenia i wkońcu zaczyna on rozumieć, ile pierwiastku sztucznego tkwiło często w konstrukcyach teoretycznych, które niegdyś podziwiał.

Rozdział Trzynasty.

Elektrodynamika.

Dzieje elektrodynamiki są z naszego stanowiska szczególnie pouczające.

Ampère nadał nieśmiertelnemu swemu dziełu tytuł: »Teorya zjawisk elektrodynamicznych, oparta jedynie na doświadczeniu«. Wyobrażał więc sobie, że nie wprowadził żadnej hypotezy; w rzeczywistości przecież wprowadził on hypotezy, jak to niebawem zobaczymy; tylko robił to, nie zdając sobie z tego sprawy.

Ci atoli, co przyszli po nim, dostrzegli te hypotezy, albowiem uwaga ich zwrócona została na punkty słabe poglądów Ampère'a. Uczynili oni nowe hypotezy, których byli najzupełniej świadomi; te zaś musiały być niejednokrotnie zmieniane i zastępowane innemi, zanim nauka osiągnęła klasyczny system obecny, który, być może, nie jest jeszcze ostatecznym; przejdźmy do skreślenia ich kolei.

I. — Teorya Ampère'a. — Kiedy Ampère badał doświadczalnie wzajemne działania prądów, operował on jedynie, i mógł jedynie operować prądami zamkniętemi.

Nie dlatego, by zaprzeczał możliwości prądów otwartych. Skoro dwa przewodniki, naładowane elektrycznościami różnoimiennemi, połączymy zapomocą drutu, powstaje prąd, płynący od jednego do drugiego i trwający póty, póki nie wyrównają się ich potencyały. Ze stanowiska poglądów panujących za czasów Ampère'a, prąd ten jest otwarty; widziano bowiem prąd, płynący od pierwszego przewodnika do drugiego, a nie widziano, by powracał on od drugiego do pierwszego.

Tak więc Ampère uważał prądy takie, np. prądy wyładowania kondensatorów, za otwarte; nie mógł wszakże zrobić z nich przedmiotu swych badań, gdyż trwanie ich było zbyt krótkie.

Można pomyśleć inny jeszcze rodzaj otwartych prądów. Weźmy dwa przewodniki, A i B, połączone drutem AMB. Małe przewodzące masy, ożywione pewnym ruchem, dotykają naprzód przewodnika B, czerpią odeń ładunek elektryczny, opuszczają B, biegną wzdłuż drogi BNA i przenosząc swój ładunek dotykają przedmiotu A, oddają mu swój ładunek, który następnie powraca do B po drucie AMB.

Mamy tu poniekąd obwód zamknięty, albowiem elektryczność przebiega zamknięty obwód $BNAMB$; lecz dwie części tego obwodu bardzo się od siebie różnią: w drucie AMB elektryczność przesuwa sią p o p r z e z stały przewodnik, na podobieństwo prądu woltaicznego, pokonywając opór ohmiczny, i wytwarzając ciepło; mówi się, że rozchodzi się ona p r z e z p r z e w o d n i c t w o; w części BNA elektryczność zostaje p r z e n i e s i o n a zapomocą ruchomego przewodnika; mówi się, że się porusza p r z e z k o n w e k c y ę.

Jeśli tedy prąd konwekcyjny uważać będziemy za zupełnie analogiczny do prądu przewodzonego, obwód $BNAMB$ będzie zamknięty; jeśli natomiast prąd konwekcyjny nie jest dla nas »prawdziwym prądem«, bo nie działa np. na magnesy, pozostaje jedynie prąd przewodzony AMB, który jest o t w a r t y.

Gdy np. połączymy drutem dwa bieguny maszyny Holtza, obracająca się tarcza przenosi elektryczność od jednego bieguna do drugiego konwekcyjnie, a elektryczność ta wraca do pierwszego bieguna przez przewodnictwo po drucie.

Bardzo przecież jest trudno urzeczywistnić prądy tego rodzaju o napięciu dostrzegalnym. Wobec środków doświadczalnych, jakiemi rozporządzał Ampère, było to, rzec można, wręcz niemożliwe.

Słowem, Ampère mógł wyobrażać sobie istnienie dwu rodzajów prądów otwartych, lecz nie mógł operować ani jednemi ani drugiemi, gdyż napięcie ich było zbyt słabe albo też trwanie zbyt krótkie.

Doświadczenie mogło mu więc wykazać jedynie działanie jednego prądu zamkniętego na inny prąd zamknięty albo działanie prądu zamkniętego na część prądu, albowiem prąd może przebiegać obwód z a m k n i ę t y, złożony z części ruchomej i z części stałej. Można więc wówczas badać przesunięcia części ruchomej pod działaniem innego prądu zamkniętego. Nie miał natomiast Ampère żadnej możności badania działania prądu otwartego bądź na prąd zamknięty bądź na inny prąd otwarty.

1. W y p a d e k p r ą d ó w z a m k n i ę t y c h. — W wypadku wzajemnego działania dwu prądów zamkniętych, doświadczenie ujawniło Ampère'owi prawa na podziw proste.

Przypomnijmy tutaj pokrótce te z nich, które będą nam pożyteczne w dalszym ciągu:

1° J e ś l i z a c h o w u j e s i ę s t a ł e n a p i ę c i e p r ą d ó w i jeśli oba obwody, uległszy jakimkolwiek przesunięciom i odkształceniom, powracają w końcu do początkowych swych położeń, praca całkowita działań elektrodynamicznych będzie równa zeru.

Innemi słowy, istnieje p o t e n c y a ł e l e k t r o d y n a m i c z n y dwu obwodów proporcyonalny do iloczynu napięć i zależny od kształtu i względnego położenia obwodów; praca działań elektrodynamicznych równa się zmianie tego potencyału;

2° Działanie zamkniętego solenoidu równa się zeru;

3° Działanie obwodu C na inny obwód woltaiczny C' zależy jedynie od »pola magnetycznego« wytworzonego przez obwód C. Albowiem w każdym punkcie przestrzeni można oznaczyć co do wielkości i kierunku pewną siłę, zwaną s i ł ą m a g n e t y c z n ą, posiadającą następujące własności:

a) Siła, z jaką C działa na biegun magnetyczny przyłożona jest do tego bieguna; równa się ona sile magnetycznej, pomnożonej przez masę magnetyczną bieguna;

b) Bardzo krótka igła magnetyczna dąży do nabrania kierunku siły magnetycznej, i para sił, zdążająca do nadania jej tego kierunku jest proporcyonalna do iloczynu siły magnetycznej, momentu magnetycznego igły i wstawy kąta odchylenia;

c) Jeśli obwód C' porusza się, praca działania elektrodynamicznego wywieranego przez C na C' równa się przyrostowi »indukcyi magnetycznej«, przez ten obwód.

2. Działanie prądu zamkniętego na część prądu. — Ampère, nie mogąc urzeczywistnić prądu otwartego w znaczeniu właściwym, posiadał jeden tylko sposób zbadania działania prądu zamkniętego na część prądu.

Sposób ten polegał mianowicie na operowaniu z obwodem C', złożonym z dwu części, jednej niezmiennej, drugiej ruchomej. Część ruchomą stanowił np. ruchomy drut $\alpha\beta$, którego końce α i β mogły ślizgać się wzdłuż nieruchomego drutu. Przy jednym z położeń drutu ruchomego, koniec α opierał się na punkcie A drutu nieruchomego, koniec β na punkcie B drutu nieruchomego. Prąd obiegał od α do β, to jest od A do B wzdłuż drutu ruchomego i następnie powracał od B do A po drucie nieruchomym. Prąd ten był tedy zamkniętym.

Przy drugim położeniu koniec α ślizgającego się drutu dotykał innego punktu A' drutu nieruchomego, a koniec β — innego punktu B' drutu nieruchomego. Prąd obiegał natenczas od α do β to jest od A' do B' po drucie ruchomym, następnie powracał od B' do B, dalej od B do A, wreszcie od A do A', idąc zawsze po drucie nieruchomym. Prąd był więc i w tym razie zamkniętym.

Jeśli obwód taki poddany jest działaniu zamkniętego prądu C, część ruchoma przesuwać się będzie, jak gdyby ulegała działaniu pewnej siły. Ampère zakłada, że siła pozorna, której zdaje się w ten sposób ulegać część ruchoma AB, przedstawiająca działanie C na część $\alpha\beta$ prądu, jest taka sama, jak gdyby przez $\alpha\beta$ przebiegał prąd otwarty, któryby zatrzymywał się w α i β, nie zaś prąd zamknięty, który dosięgnąwszy β wraca do α przez część nieruchomą obwodu.

Hypoteza ta może się wydawać dość naturalną i Ampère wprowadza ją, nie zdając sobie z tego sprawy; niemniej wszakże *nie jest ona bynajmniej konieczną*, albowiem, jak zobaczymy niżej, Helmholtz ją odrzucił. Jakkolwiekbądź, pozwoliła ona Ampère'owi, pomimo, że nie mógł on nigdy urzeczywistnić prądu otwartego, sformułować prawa działania prądu zamkniętego na prąd otwarty a nawet na element prądu.

Prawa te są nader proste.

1⁰ Siła, działająca na element prądu, przyłożona jest do tego elementu; jest ona normalna do elementu i do siły magnetycznej i proporcyonalna do składowej tej siły magnetycznej wzdłuż normalnej do elementu;

2⁰ Działanie zamkniętego solenoidu na element prądu jest równe zeru.

Lecz niema już potencyału elektrodynamicznego, to znaczy, że gdy prąd zamknięty i prąd otwarty, których napięcia pozostawały niezmiennemi, powracają do swych położeń początkowych, praca całkowita nie jest równa zeru.

3. *Obroty ciągłe.* — Wśród eksperymentów elektrodynamicznych najciekawsze są te, które pozwoliły na urzeczywistnienie obrotów ciągłych i które nazywa się niekiedy eksperymentami *indukcyi jednobiegunowej*. Weźmy magnes, który może się obracać naokoło swej osi; prąd przebiega naprzód nieruchomy drut, wchodzi w magnes np. przez biegun N, przebiega połowę magnesu, wychodzi zeń przez kontakt ruchomy i wraca do drutu nieruchomego.

Magnes nabiera natenczas obrotu ciągłego, nie dochodząc do żadnego położenia równowagi. Jest to eksperyment Faradaya.

Jakże jest to możliwe? Gdybyśmy mieli do czynienia z dwu obwodami o kształcie niezmiennym, jednym nieruchomym C, drugim C' ruchomym dokoła osi, ten ostatni nie mógłby nigdy nabrać obrotu ciągłego; jakoż, istnieje potencyał elektrodynamiczny; przeto zawsze będzie istniało pewne położenie równowagi, to mianowicie, dla którego potencyał ten dosięga wartości największej.

Obroty ciągłe są tedy możliwe jedynie pod warunkiem, że obwód C' składa się, z dwu części: jednej nieruchomej, drugiej ruchomej dokoła osi, jak to ma miejsce w doświadczeniu Faradaya. Wypada przecież nadto rozróżnić dwa wypadki. Przejście od części nieruchomej do części ruchomej lub odwrotnie może się odbywać albo przez zetknięcie proste (jeden i ten sam punkt części ruchomej pozostaje ustawicznie w zetknięciu z jednym i tym samym punktem części nieruchomej) albo też przez zetknięcie ruchome (jeden i ten sam punkt części ruchomej styka się kolejno z różnemi punktami części nieruchomej).

W drugim tylko z tych wypadków może się odbywać obrót ciągły. Oto, co zachodzi wówczas: układ zdąża wprawdzie do pewnego położenia równowagi; lecz skoro położenia tego ma dosięgnąć, ślizgająca się część ruchoma wchodzi w zetknięcie z nowym punktem części nieruchomej; zmienia to połączenia, a przeto też warunki równowagi, naskutek czego położenie równowagi jak gdyby umykało przed zdążającym doń układem, i obrót może trwać nieograniczenie.

Ampère zakłada, że działanie obwodu na część ruchomą C' jest takie same, jak gdyby część nieruchoma obwodu C' nie istniała wcale a więc prąd krążący po części ruchomej był otwartym.

Wnosi on tedy, że działanie prądu zamkniętego na prąd otwarty lub odwrotnie, prądu otwartego na prąd zamknięty, może wywołać obrót ciągły.

Lecz wniosek ten zależy od sformułowanej powyżej hypotezy, którą, jak już wspomnieliśmy, Helmholtz odrzuca.

4. Działanie wzajemne dwu prądów otwartych. — Niema żadnego doświadczenia, któreby pozwoliło bezpośrednio badać działanie wzajemne dwu prądów otwartych wogóle a w szczególności dwu elementów prądu. Ampère odwołuje się tu do hypotezy. Zakłada on: 1^0 że działanie wzajemne dwu elementów sprowadza się do siły czynnej wzdłuż prostej, która łączy te elementy; 2^0 że działanie dwu prądów zamkniętych jest wypadkową działań wzajemnych ich poszczególnych elementów, przyczym działania te są takie same, jak gdyby każdy z tych elementów istniał z osobna. Rzecz godna zaznaczenia, że i te dwie hypotezy wprowadza Ampère zupełnie bezwiednie.

Jakkolwiekbądź, hypotezy te łącznie z doświadczeniami nad prądami zamkniętemi wystarczają dla zupełnego oznaczenia prawa wzajemnego działania dwu elementów.

Lecz skoro tak, tedy większość prostych praw, które napotkaliśmy w wypadku prądów zamkniętych, przestaje być prawdziwa.

Naprzód, niema potencyału elektrodynamicznego; nie było go zresztą również, jak widzieliśmy, w wypadku prądu zamkniętego, działającego na prąd otwarty.

Następnie niema już siły magnetycznej, w znaczeniu właściwym.

W rzeczy bowiem samej daliśmy wyżej trzy różne określenia tej siły:

1^0 Zapomocą działania na biegun magnetyczny;

2^0 Zapomocą pary kierowniczej, ustanawiającej oryentacyę igły magnetycznej;

3^0 Zapomocą działania na element prądu.

Otóż w wypadku, który nas obecnie zajmuje, trzy te określenia nietylko nie są ze sobą w zgodzie, lecz każda z nich pozbawiona jest sensu; jakoż:

1^0 Biegun magnetyczny nie ulega już poprostu jedynej przyłożonej doń sile. Widzieliśmy bowiem, że siła, pochodząca od działania elementu prądu na biegun nie jest przyłożona do bieguna lecz do elementu; można ją zresztą zastąpić przez siłę przyłożoną do bieguna i przez parę sił;

2° Para sił, działająca na igłę magnesową, nie jest już prostą parą kierowniczą; gdyż moment jej w stosunku do osi igły nie jest równy zeru. Rozkłada się ona na parę kierowniczą w znaczeniu właściwym i na parę dopełniającą, zdążającą do wywołania obrotu ciągłego, o której mówiliśmy wyżej;

3° Wreszcie siła jakiej ulega element prądu, nie jest normalna do tego elementu.

Innemi słowy, jedność siły magnetycznej znikła.

Powiedzmy, na czym polega ta jedność. Dwa układy, wywierające to samo działanie na biegun magnetyczny, wywierać również będą to samo działanie na igłę magnesową nieskończenie małą, albo na element prądu, umieszczone w tym samym punkcie przestrzeni, który poprzednio zajmował ten biegun.

Otóż tak jest, gdy oba te układy zawierają jedynie prądy zamknięte; przestałoby tak być, zdaniem Ampère'a, skoroby te układy zawierały prądy otwarte.

Wystarczy np. zauważyć, że jeśli biegun magnetyczny umieszczony jest w A a element w B, tak iż kierunek elementu stanowi przedłużenie prostej AB, element ten, nie wywierający żadnego działania na ten biegun, wywierać natomiast będzie pewne działanie bądź na igłę magnesową, umieszczoną w punkcie A, bądź na element prądu umieszczony w punkcie A.

5. Indukcya. — Wiadomo, że odkrycie indukcyi elektrodynamicznej nastąpiło rychło po nieśmiertelnych pracach Ampère'a.

Dopóki chodzi jedynie o prądy zamknięte, nie nastręczają się żadne trudności, — Helmholtz zauważył nawet, że zasada zachowania energii mogłaby wystarczyć do wyprowadzenia praw indukcyi z praw elektrodynamicznych Ampère'a, z tym wszakże zawarowaniem, jak to dowodnie okazał Bertrand, że założy się nadto pewną liczbę hypotez.

Ta sama zasada pozwala również na dedukcyę taką w wypadku prądów otwartych, jakkolwiek rozumie się, że niepodobna poddać wyniku kontroli doświadczenia, bo nie można urzeczywistnić takich prądów.

Zastosowanie tego trybu analizy do teoryi Ampère'a prądów otwartych prowadzi do wyników doprawdy niespodziewanych.

Przedewszystkim indukcyi niepodobna wyprowadzić ze zmian pola magnetycznego według wzoru, dobrze znanego badaczom i praktykom, albowiem, jak widzieliśmy, niema tu już pola magnetycznego w znaczeniu właściwym.

Nie na tym przecież koniec. Jeśli obwód C ulega indukcyi zmiennego układu woltaicznego S; jeśli ten układ S porusza i odkształca się w sposób dowolny, jeśli napięcie prądów tego układu zmienia się według jakiegokolwiek prawa, tak wszakże, iż po tych zmianach układ wraca w końcu do początkowego swego położenia — naturalnym się zdaje przypuszczenie, że przeciętna siła elektrobodźcza indukowana w obwodzie C równa się zeru.

Jest to prawdziwe, gdy obwód C jest zamknięty a układ S zawiera jedynie prądy zamknięte. Nie jest natomiast prawdziwe, jeśli przyjąć teoryę Ampère'a, skoro tylko układ S zawiera prądy otwarte. Tak iż wzbudzona siła elektrobodźcza nietylko nie będzie już zmianą indukcyi magnetycznej w żadnym z pospolitych znaczeń tego wyrazu, lecz nie będzie mogła być wyrażoną przez zmianę żadnej wogóle wielkości.

II. — Teorya Helmholtza. — Zatrzymaliśmy się nieco dłużej nad konsekwencyami teoryi Ampère'a i jego sposobu pojmowania działania prądów otwartych.

Trudno jest nie zauważyć charakteru paradoksalnego i sztucznego twierdzeń, do których w ten sposób się dochodzi; nasuwa to myśl, że »musi to nie być to«.

Rozumiemy przeto, że Helmholtz zapragnął znaleść coś innego.

Helmholtz odrzuca hypotezę podstawową Ampère'a, głoszącą, że działanie wzajemne dwu elementów prądu sprowadza się do siły skierowanej wzdłuż prostej, która je łączy. Przypuszcza on, że element prądu nie ulega działaniu jednej siły, lecz siły oraz pary sił. Przypuszczenie to było przedmiotem słynnej polemiki pomiędzy Bertrandem a Helmholtzem.

Helmholtz zastępuje hypotezę Ampère'a przez następującą: dla dwu elementów prądu istnieje zawsze potencyał elektrodynamiczny, zależny jedynie od ich położenia i oryentacyi, i praca sił, z jakiemi elementy te działają wzajemnie na siebie, równa się zmianie tego potencyalu. Tak więc Helmholtz w takim samym stopniu, jak Ampère, nie może się obyć bez hypotezy; tym się wszakże różni od swego poprzednika, że swoją hypotezę formułuje wyraźnie i jawnie.

W wypadku prądów zamkniętych, jedynym dostępnym dla doświadczenia, obie teorye zgadzają się ze sobą; we wszystkich innych wypadkach zachodzi między niemi różnica.

Naprzód, wbrew temu co przypuszczał Ampère, siła, której zdaje się ulegać część ruchoma prądu zamkniętego nie taka sama, jaką byłaby siła, działająca na tę część ruchomą, gdyby była ona odosobniona i stanowiła prąd otwarty.

Powróćmy do obwodu C', o którym mówiliśmy wyżej i który składa się z drutu ruchomego $\alpha\beta$, ślizgającego się po drucie nieruchomym; w jedynie urzeczywistnialnym eksperymencie część ruchoma $\alpha\beta$ nie jest odosobniona, lecz wchodzi w układ obwodu zamkniętego. Gdy przenosi się ona od AB do $A'B'$, potencyał elektrodynamiczny całkowity zmienia się dla dwu przyczyn: 1^0 otrzymuje on pewien przyrost, dlatego, że potencyał $A'B'$ względem obwodu C nie jest taki sam jak potencyał AB; 2^0 otrzymuje drugi przyrost, dlatego, że trzeba go zwiększyć o potencyały elementów AA' i $B'B$ względem C.

P o d w ó j n y ten przyrost przedstawia dopiero pracę sił, której zdaje się ulegać część AB.

Gdyby natomiast $\alpha\beta$ było odosobnione, potencyał otrzymałby jedynie pierwszy przyrost, i jedynie pierwszy ten przyrost byłby miarą pracy siły, działającej na AB.

Powtóre nie może być obrotu ciągłego, jeśli niema ślizgającego się zetknięcia; albowiem, jak widzieliśmy, omawiając prądy zamknięte, jest to bezpośredni wynik istnienia potencyału elektrodynamicznego.

Jeśli w doświadczeniu Faradaya magnes jest nieruchomy i część prądu zewnętrzna względem magnesu przebiega drut ruchomy, ta część ruchoma będzie mogła przyjąć obrót ciągły. Nie znaczy to wszakże, że gdyby znieść zetknięcia drutu z magnesem i kazać przebiegać przez drut prądowi o t w a r t e m u, to i w tym razie drut przyjąłby ciągły ruch obrotowy. Powiedzieliśmy bowiem powyżej, że o d o s o b n i o n y element nie ulega takiemu samemu działaniu, jak element ruchomy, stanowiący część obwodu zamkniętego.

Oto inna jeszcze różnica: Działanie solenoidu zamkniętego na zamknięty prąd równa się zeru na mocy doświadczenia oraz zgodnie z obu teoryami; działanie jego na prąd otwarty równałoby się zeru według Ampère'a; nie równałoby się zeru według Helmholtza.

Wypływa stąd doniosła konsekwencya. Daliśmy wyżej trzy określenia siły magnetycznej; trzecie nie ma tutaj żadnego sensu, gdyż element prądu nie ulega tu działaniu jakiejś jednej siły. Nie ma go również określenie pierwsze. Cóż to bowiem jest biegun magnetyczny? Jest to punkt końcowy nieograniczonego liniowego magnesu. Magnes ten można zastąpić przez nieograniczony solenoid. Żeby określenie siły magnetycznej miało sens, trzeba aby działanie, jakie wywiera prąd otwarty na nieograniczony solenoid zależało jedynie od położenia końca tego solenoidu, czyli aby działanie na solenoid zamknięty równało się zeru. Otóż widzieliśmy powyżej, że tak nie jest.

Nic natomiast nie stoi na przeszkodzie przyjęciu drugiego określenia, opartego na pomiarze pary kierowniczej, zdążającej do nadania oryentacyi igle magnesowej.

Atoli jeśli ją przyjąć, tedy ani przejawy indukcyi ani przejawy elektrodynamiczne nie będą zależały jedynie od rozmieszczenia linii siły tego pola magnetycznego.

III. — Trudności nastręczające się w tych teoryach. — Teorya Helmholtza stanowi postęp w stosunku do teoryi Ampère'a; daleko jej wszakże do zupełnego pokonania wszystkich trudności. Tak w jednej jak w drugiej wyrażenie »pole magnetyczne« nie ma sensu, albo też jeśli nadamy mu pewien sens mocą jakiejś mniej lub więcej sztucznej umowy, tedy zwykłe prawa, tak dobrze znane wszystkim elektrykom, utracą swą stosowalność; tak np. miarą siły elektrobodźczej, wzbudzonej w drucie, nie jest już liczba linii siły, napotykanych przez ten drut.

Lecz niechęć nasza do tych teoryi nie jest oparta jedynie na tym, że trudno jest zrzec się zakorzenionych nawyknień języka i myśli. Jest tu jeszcze coś więcej. Jeżeli nie wierzymy w działania na odległość, należy wytłumaczyć zjawiska elektrodynamiczne przez zmianę w środowisku. Tę to właśnie zmianę nazywa się polem magnetycznym, przejawy elektromagnetyczne powinnyby przeto zależeć jedynie od tego pola.

Wszystkie te trudności wynikają z hypotezy prądów otwartych.

IV. — Teorya Maxwella. — Takie były trudności, wynikłe na gruncie teoryi panujących, gdy zjawił się Maxwell i jednym pociągnięciem pióra wszystkie je usunął. Albowiem ze stanowiska jego poglądów istnieją jedynie prądy zamknięte.

Maxwell zakłada, że jeśli w dielektryku pole magnetyczne ulega zmianie, dielektryk ten staje się siedliskiem osobliwego zjawiska, działającego na galwanometr tak jak prąd; zjawisko to nazywa on prądem przesunięcia.

Jeżeli więc dwa przewodniki, dźwigające różnoimienne ładunki, połączymy drutem, w drucie tym panuje podczas wyładowywania prąd przewodzony otwarty; lecz w otaczającym dielektryku powstają jednocześnie prądy przesunięcia, zamykające ów prąd przewodzony.

Wiadomo, że teorya Maxwella prowadzi do wytłumaczenia zjawisk optycznych, przypisując je niezmiernie szybkim drganiom elektrycznym.

Za jego czasów koncepcya taka była jedynie śmiałą hypotezą, nie mającą za sobą żadnego oparcia doświadczalnego.

Po upływie lat dwudziestu doświadczenie potwierdziło poglądy Maxwella. Hertzowi powiodło się zrealizować układy drgań elektrycznych, odtwarzające wszystkie własności światła i różniące się odeń jedynie długością fali, to jest tak jak barwa fioletowa różni się od czerwonej. Dokonał on poniekąd syntezy światła.

Możnaby powiedzieć, że Hertz nie dowiódł bezpośrednio podstawowego poglądu Maxwella, działania prądu przesunięcia na galwanowetr. Jest to słuszne poniekąd, albowiem bezpośrednio okazał on tylko, że indukcya elektromagnetyczna nie rozchodzi się momentalnie, jak mniemano dawniej, lecz z prędkością równą prędkości światła.

Wszelako przypuścić, że niema prądu przesunięcia i że indukcya rozchodzi się z prędkością światła; albo też przypuścić, że prądy przesunięcia wywołują przejawy indukcyi i że indukcya rozchodzi się momentalnie — jest to jedno i to samo.

Że tak jest, nie jest widocznym na pierwsze wejrzenie: — dowodzi się tego drogą rachunku analitycznego, o którego streszczeniu na tym miejscu nie może nawet być mowy.

V. — Dokończenia Rowlanda. — Powiedzieliśmy już wyżej, że istnieją dwa rodzaje prądów przewodzonych otwartych: po pierwsze prądy wyładowania kondensatora lub jakiegokolwiek przewodnika.

Drugi rodzaj stanowią wypadki, w których ładunki elektryczne zakreślają kontur zamknięty, przenosząc się przez przewodnictwo w pewnej części obwodu, a przez konwekcyę w drugiej.

Dla prądów otwartych pierwszego rodzaju można było uważać zagadnienie za rozwiązane: prądy przesunięcia przekształcały je w prądy zamknięte.

Dla prądów otwartych rodzaju drugiego rozwiązanie zdawało się jeszcze prostszym; gdyby prąd był zamknięty, to jak się zdawało, zamykać go mógł jedynie sam prąd konwekcyjny. W tym celu wystarczało przypuścić, że »prąd konwekcyjny« to jest naładowany poruszający się przewodnik może działać na galwanometr.

Atoli brak było doświadczalnego potwierdzenia tych przypuszczeń. Zdawało się trudnym osiągnięcie dostatecznie wielkiego napięcia, nawet przez zwiększanie aż do krańców możliwości ładunku i prędkości przewodników.

Pierwszym, który faktycznie czy pozornie pokonał te trudności, był Rowland, eksperymentator niezwykłej zręczności. Nadał on krążkowi znaczny ładunek elektryczny i bardzo wielką prędkość obrotową. Astatyczny układ magnetyczny, umieszczony obok tego krążka, ulegał odchyleniom.

Eksperyment ten przeprowadzony został dwukrotnie przez Rowlanda: raz w Berlinie, i raz w Baltimore; podjął go później ponownie Himstedt. Fizycy ci ogłosili nawet, że powiodło im się dokonać pomiarów ilościowych.

Jakoż od dwudziestu mniej więcej lat prawo Rowlanda uznane zostało przez wszystkich fizyków jako ustanowione bez kwestyi.

Wszystko zresztą zdawało się je potwierdzać. Iskra wywołuje niezaprzeczenie przejaw magnetyczny; otóż, czy nie zdaje się prawdopodobnym, że wyładowanie przez iskrę polega poprostu na tym, że cząstki odrywają się od jednej elektrody i przenoszą się ze swym ładunkiem na drugą? Czyż dowodem tego nie jest same chociażby widmo iskry, w którym poznajemy promienie metalu tworzącego elektrodę? Iskra byłaby więc prawdziwym prądem konwekcyjnym.

Z drugiej strony przypuszcza się również, że w elektrolitach elektryczność przenoszą poruszające się jony. Prąd w elektrolicie byłby więc również prądem konwekcyjnym; otóż prąd taki działa na igłę magnesową.

Podobnież rzecz się ma dla promieni katodowych; Crookes przypisywał te promienie działaniu bardzo subtelnej materyi, naładowanej elektrycznością ujemną i ożywionej bardzo wielką prędkością; uważał on je, innemi słowy, za prądy konwekcyjne. Otóż prądy te katodowe odchylają się pod wpływem magnesu. Na mocy zasady działania i oddziaływania powinny one ze swej strony odchylać igłę magnesową.

Wprawdzie Hertzowi zdawało się, że okazał, iż promienie katodowe nie przenoszą elektryczności ujemnej i nie działają na igłę magnesową. Lecz Hertz mylił się; przedewszystkim Perrin zdołał zebrać elektryczność, przenoszoną przez te promienie, gdy Hertz zaprzeczał jej istnieniu; badacza niemieckiego wprowadziły zapewne w błąd wpływy promieni *X*, które wówczas nie były jeszcze odkryte. Następnie, i to całkiem świeżo, ujawnione zostało działanie promieni katodowych na igłę magnesową.

Tak więc wszystkie te zjawiska, rozważane jako prądy konwekcyjne, iskry, prądy elektrolityczne, promienie katodowe, działają w jednakowy sposób na galwanometr stosownie do prawa Rowlanda!

VI. — Teorya Lorentza. — Rychło posunięto się jeszcze dalej. Według teoryi Lorentza i same prądy przewodzone są prawdziwemi prądami konwekcyjnemi: elektryczność ma być związana w sposób nierozerwalny z pewnemi cząstkami materyalnemi, zwanemi elektronami; krążenie tych elektronów poprzez ciała wywołuje prądy woltaiczne, a przewodniki różnią się od izolatorów tym, że pierwsze są przenikliwe dla elektronów, drugie natomiast wstrzymują je w ich ruchu.

Teorya Lorentza jest bardzo pociągająca; daje ona bardzo proste wytłumaczenie pewnych zjawisk, z których nie umiały zdać sprawy teorye dawniejsze, nawet Maxwellowska w pierwotnym swym kształcie, jak np. aberacya światła, częściowe unoszenie fal świetlnych przez ruchome środowiska, polaryzacya magnetyczna, zjawisko Zeemana.

Co do kilku punktów wszakże nasunęła ona fizykom spółczesnym pewne wątpliwości. Zjawiska, których siedliskiem jest pewien układ, powinnyby według tej teoryi zależeć od prędkości bezwzględnej ruchu postępowego środka ciężkości tego układu, co sprzeciwia się naszemu pojęciu względności przestrzeni. W dyskusyi, powstałej przy obronie rozprawy doktorskiej Crémieu, Lippmann nadał temu zarzutowi uderzającą postać. Weźmy dwa naładowane przewodniki, ożywione jednakową prędkością postępową. Znajdują się one w stanie spoczynku względnego; jednakowoż, skoro każdy z nich równoważny jest prądowi konwekcyjnemu, powinny one się przyciągać, możnaby przeto przez pomiar tego przyciągania zmierzyć ich prędkość bezwzględną.

Nie — brzmiała odpowiedź zwolenników Lorentza — nie ich prędkość bezwzględną zmierzonoby w ten sposób, lecz ich prędkość względną w o d n i e s i e n i u do e t e r u, tak iż zasada względności byłaby ocalona.

Cokolwiek sądzonoby o tych ostatnich zarzutach, gmach elektrodynamiki w głównych przynajmniej zarysach zdawał się ostatecznie zbudowany, wszystko przedstawiało się jaknajlepiej; teorye Ampère'a i Helmholtza, skonstruowane dla prądów otwartych, które przestały istnieć, zdawały się mieć już tylko znaczenie czysto historyczne a niedające się rozwikłać komplikacye, do których teorye te prowadziły, poszły niemal w zapomnienie.

Spokój ten został świeżo zakłócony przez doświadczenia Crémieu, które przez chwilę zdawały się zaprzeczać wynikom, osiągniętym niegdyś przez Rowlanda. Atoli nowsze badania nie potwierdziły ich i teorya Lorentza wyszła zwycięsko z tej próby.

Niemniej historya tych wahań wielce jest pouczającą; mówi nam ona, jakie sidła napotyka badacz na swej drodze i w jaki sposób może ich uniknąć.

SPIS RZECZY.

Fryderyk Nietzsche. — Dytyramby dyonizyjskie, przełożył Stanisław Wyrzykowski, wydanie zwykłe rub. —'60, w oprawie 1'10, wytworne w 10 num. egz. 1'35.

Fryderyk Nietzsche. — Zmierzch Bożyszcz, przełożył Stanisław Wyrzykowski, wydanie zwykłe rub. 1'20, w oprawie 1'70, wytworne w 15 num. egz. 2'75.

Fryderyk Nietzsche. — Wiedza radosna przełożył Leopold Staff, wydanie zwykłe rub. 2'50, w oprawie 3'—, wytworne w 15 num. egz. 6'—.

Fryderyk Nietzsche. — Jutrzenka, przełożył Stanisław Wyrzykowski, wydanie zwvkłe rub. 2'50, w oprawie rub. 3'—, wytworne w 15 num. egz. 6'—.

Fryderyk Nietzsche. — Antychryst, przełożył Leopold Staff, wyd. zwykłe rub. 1'—, w oprawie 1'50, wytworne w 15 num. egz. 2'50.

Fryderyk Nietzsche. — Narodziny Tragedyi, przełożył Leopold Staff, wydanie zwykłe rub. 1'60, w oprawie 2'10, wytworne w 15 num. egz. 4'—.

Fryderyk Nietzsche. — Ludzkie, arcyludzkie, przełożył Konrad Drzewiecki, wydanie zwykłe rub. 2'50, w oprawie 3'—, wytworne w 15 num. egz. 6'—.

Portret Fryderyka Nietzschego, akwaforta oryginalna Franciszka Siedleckiego na papierze grubym 1'—, japońskim 3'—.

Wacław Berent. — Źródła i ujścia Nietzscheanizmu, broszur. rub. —'80, oprawn. 1'30.

Romuald Minkiewicz. — O pełni życia i o komunie duchowej, broszur. rub. —'60. oprawn. 1'—.

Żywot chłopa polskiego w pierwszej połowie XIX stul. broszur. rub. —'60. oprawn. 1'—.

St. Karpowicz. — Ideały i metoda wychowania współczesnego, rub. —'60.

Sombart W. Socyalizm i ruch społeczny rub. 1'60

J. Schlaf. — Wiosna. Przekład Stanisława Przybyszewskiego, broszur. rub. 1'—, oprawn. 1'50.

F. Brodowski. — Drzewa, broszur. rub. 1'—, w opr. 1'50.

Mortkowiczowa Janina — Wychowanie estetyczne rub. —'60.

H. Poincaré. — Nauka i Hypoteza, broszur. rub. 1'50.

H. Poincaré. — Wartość nauki, brosz. rub. 1'50.
