

Włodzimierz Ciesielczyk  
Krzysztof Kupiec

# Chemical Engineering Calculations

## Part II. Thermal Processes

Obliczenia w inżynierii chemicznej  
Część II. Procesy cieplne

*Człowiek – najlepsza inwestycja*



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000276622

**Włodzimierz Ciesielczyk  
Krzysztof Kupiec**

**Chemical Engineering Calculations**  
**Part II. Thermal Processes**

**Obliczenia w inżynierii chemicznej**  
**Część II. Procesy cieplne**



Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki  
Kraków 2013

CHAIRMAN OF THE CRACOW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY  
PRESS EDITORIAL BOARD/  
PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jan Kazior

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD/  
PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTW NAUKOWYCH

Maria Misiągiewicz

SERIES EDITOR/REDAKTOR SERII  
Wydział Inżynierii i Technologii Chemicznej/Faculty of Chemical Engineering and Technology

Witold Żukowski

REVIEWER/RECENZENT

Bogdan Ambrożek

SECTION EDITOR/SEKRETARZ SEKCJI

Agnieszka Filosek

EDITORIAL COMPILATION/OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Michał M. Stachowski

COVER DESIGN/PROJEKT OKŁADKI

Michał Graffstein



II - 340880

© Copyright by Politechnika Krakowska, Kraków 2013

ISBN 978-83-7242-7328

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax: 12 628 37 60  
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl □ www.wydawnictwo.pk.edu.pl  
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.  
Ark. wyd. 7,0. Podpisano do druku 16.09.2013 r.

Zam. 204/2013

Nakład 300 egz.

Egzemplarz bezpłatny

J-453 | 2013

## Contents

Preface.....	7
List of frequently used symbols.....	9
1. Heat balance.....	11
2. Heat conduction .....	25
2.1. Equations of heat conduction.....	25
2.2. Steady conduction through flat walls.....	26
2.3. Steady conduction through cylindrical walls.....	27
2.4. Thermal insulation .....	28
2.5. Transient heat conduction .....	29
2.5.1. Analytical solutions for an infinite slab, infinite cylinder and sphere.....	30
2.5.2. Analytical solutions for a semi-infinite body.....	36
2.5.3. Solutions for „derivative” solids .....	38
2.5.4. Lack of resistance to conduction in a body .....	38
3. Convection heat transfer and heat radiation .....	55
3.1. Convection heat transfer for forced flow of a fluid.....	56
3.2. Heat transfer by natural convection.....	59
3.3. Heat transfer during phase change.....	60
3.4. Heat radiation .....	62
3.4.1. Absorptivity and emissivity.....	62
3.4.2. Relations for grey bodies.....	62
3.4.3. Solar radiation .....	64
4. Heat transmission and heat exchangers .....	96
4.1. Heat transmission.....	96
4.2. Steady flow in heat exchangers.....	98
4.2.1. Heat transfer without phase changes .....	98
4.2.2. Phase change of one or both media .....	101
4.3. Heat exchangers’ heat transfer area calculations .....	101
4.4. Transient heat transfer.....	103
5. Evaporation.....	130
5.1. The enthalpy $i$ - $x$ diagram for solutions .....	130
5.1.1. Mixing on the $i$ - $x$ diagram .....	130

5.1.2. Heating and evaporation.....	132
5.1.3. Cooling and crystallization.....	132
5.1.4. Self-vaporization .....	133
5.1.5. Heat of vaporization of a solution .....	134
5.2. Physical properties of water solutions .....	134
5.3. Material balance in an evaporator.....	135
5.4. Heat balance in an evaporator.....	135
5.5. Multi-stage evaporation .....	136
5.6. Useful temperature difference .....	136
5.7. Heat transfer in evaporators .....	137
6. Polish texts.....	161
6.1. Bilans cieplny .....	161
6.2. Przewodzenie ciepła .....	165
6.2.1. Równania przewodzenia ciepła .....	165
6.2.2. Przewodzenie ustalone przez ściany płaskie .....	166
6.2.3. Przewodzenie ustalone przez ściany cylindryczne.....	166
6.2.4. Izolacje cieplne .....	167
6.2.5. Nieustalone przewodzenie ciepła .....	167
6.2.5.1. Rozwiązania analityczne dla płyty nieskończonej, cylindra nieskończonego i kuli.....	168
6.2.5.2. Rozwiązania analityczne dla ciała półnieskończonego...	169
6.2.5.3. Rozwiązania dla brył „pochodnych”.....	169
6.2.5.4. Brak oporu przewodzenia w bryle .....	170
6.3. Wnikanie i promieniowanie ciepła .....	173
6.3.1. Wnikanie ciepła przy wymuszonym ruchu czynnika .....	174
6.3.2. Wnikanie ciepła przy konwekcji naturalnej .....	176
6.3.3. Wnikanie ciepła przy zmianie stanu skupienia.....	176
6.3.4. Promieniowanie cieplne .....	177
6.3.4.1. Zdolność pochłaniania i zdolność emisji .....	177
6.3.4.2. Zależności dla ciał szarych.....	178
6.3.4.3. Promieniowanie słoneczne.....	179
6.4. Przenikanie ciepła i wymienniki.....	184
6.4.1. Przenikanie ciepła.....	184
6.4.2. Ustalony ruch ciepła w wymiennikach.....	186
6.4.2.1. Brak przemian fazowych obu czynników .....	186
6.4.2.2. Przemiana fazowa jednego lub obu czynników .....	186
6.4.3. Obliczanie powierzchni grzejnej wymienników ciepła.....	187
6.4.4. Nieustalony ruch ciepła .....	188
6.5. Odparowywanie.....	193
6.5.1. Wykres entalpowy $i-x$ dla roztworów .....	193
6.5.1.1. Mieszanie na wykresie $i-x$ .....	193
6.5.1.2. Podgrzewanie i odparowywanie .....	193

6.5.1.3. Chłodzenie i krystalizacja .....	194
6.5.1.4. Samoodparowanie .....	194
6.5.1.5. Ciepło parowania roztworu .....	194
6.5.2. Właściwości fizyczne wodnych roztworów .....	194
6.5.3. Bilans materiałowy wyparki .....	195
6.5.4. Bilans cieplny wyparki .....	195
6.5.5. Odparowywanie wielodziałowe .....	196
6.5.6. Podział użytecznej różnicy temperatur .....	196
6.5.7. Przenoszenie ciepła w wyparkach .....	196
Auxiliary tables .....	203
A list of recommended literature supporting .....	209





## Preface

This Handbook which concerns thermal processes in chemical engineering (the second part of the handbook entitled “Chemical engineering calculations”) was designed for students of the Department of Chemical Engineering and Technology of Cracow University of Technology.

Each chapter of the Handbook is comprised of three sections. In the descriptive section some theoretical information necessary to solve calculating problems is given. The second section contains a number of examples, which are solved and accompanied by explanations and comments. In the third section exercises to be solved unassisted are provided; answers are given for control. This edition is mainly written in English. However, the last chapter consists of a Polish text which covers the descriptive section and topics of the examples and exercises.

The kelvin [K] is a unit of measurement for temperature in the International System of Units (SI). However, in most thermal issues it is more convenient to use temperature in [°C]. In this Handbook temperature is denoted by the symbol  $T$  regardless of its unit ([°C] or [K]). If differences in temperature are used, it does not matter whether the individual components of these differences are expressed in [°C] or [K]. However, in some cases temperature must be expressed in [K] (e.g. for heat radiation); such necessity is clearly emphasized in the text.

Translation of the Handbook was done by Monika Gwadera; figures were made by Adam Bodura.

At the end of each part of the Handbook tables with selected data (usually physical and equilibrium properties), which are needed to solve the presented examples and exercises, are included.



### List of frequently used symbols

$a$	–	heat diffusivity dyfuzyjność cieplna
$A$	–	surface area pole powierzchni
$c$	–	specific heat ciepło właściwe
$d, D$	–	diameter średnica
$g$	–	acceleration of gravity przyśpieszenie ziemskie
$h$	–	heat transfer coefficient współczynnik wnikania ciepła
$H$	–	height wysokość
$i$	–	enthalpy entalpia
$k$	–	heat conduction coefficient współczynnik przewodzenia ciepła
$L$	–	length długość
$m$	–	mass masa
$\dot{m}$	–	mass flow rate masowe natężenie przepływu
Nu	–	Nusselt number liczba Nusselta

$p, P$	–	pressure ciśnienie
Pr	–	Prandtl number liczba Prandtla
$Q$	–	ammount of heat ilość ciepła
$\dot{Q}$	–	heat flow rate (power) natężenie przepływu ciepła (moc cieplna)
$r$	–	heat of vaporation (condensation) ciepło parowania (skraplania)
Re	–	Reynolds number liczba Reynoldsa
$s$	–	thickness grubość
$S$	–	area of cross section pole powierzchni przekroju
$t$	–	time czas
$T$	–	temperature temperatura
$u$	–	velocity of fluid prędkość płynu
$U$	–	overall heat transfer coefficient współczynnik przenikania ciepła
$V$	–	volume objętość
$\dot{V}$	–	volume flow rate objętościowe natężenie przepływu
$\rho$	–	density gęstość
$\mu$	–	viscosity współczynnik lepkości

## 1. HEAT BALANCE

Heat balance is based on the energy conservation principle. When there no other form of energy beyond heat changes in a system, the following equation is valid

$$\begin{aligned} [\text{ initial amount of heat in a system}] + [\text{heat input}] = \\ = [\text{ heat output}] + [\text{heat remaining in a system}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Because it is known that

$$\begin{aligned} [\text{heat remaining in a system}] - [\text{ initial amount of heat in a system}] = \\ = [\text{heat accumulation}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

the equivalent form of equation (1.1) is

$$[\text{heat accumulation}] = [\text{ heat input}] - [\text{ heat output}] \quad (1.3)$$

Each summand in this balance is related to time for continuous processes (and has the same unit as power,  $J/s = W$ ). In the case of such processes heat accumulation can be expressed in the form

$$[\text{heat accumulation}] = m \cdot \frac{di}{dt} \quad (1.4)$$

where:

- $i$  – (specific) enthalpy of medium in a system,  $J/kg$ ,
- $m$  – mass of medium in a system,  $kg$ .

The difference between the amount of heat delivered to a system and removed from it (right side of eq. (1.3)) results from two items for continuous processes. The first one concerns heat carried by material stream (heat carried by medium flowing through a system). It can be expressed in the following way

$$\begin{aligned} [\text{heat delivered with material stream}] - [\text{heat removed with material stream}] = \\ = \dot{m}_in i_{in} - \dot{m}_out i_{out} \end{aligned} \quad (1.5)$$

where:

- $\dot{m}$  – mass flow rate of flowing medium, kg/s,
- $i_{in}, i_{out}$  – (specific) enthalpy of medium at the inlet and outlet of a system, respectively, J/kg.

The second item is connected with the amount of heat (per unit time)  $\pm \dot{Q}$  transferred between a system and the surroundings (the sign „+” relates to the case when the system receives heat; „-” is used when it gives off heat). It can be applied e.g. for heating or cooling through a wall.

Hence, the equation of heat balance for continuous processes has the form

$$m \cdot \frac{di}{dt} = \pm \dot{Q} + \dot{m} (i_{in} - i_{out}) \quad (1.6)$$

Accumulation is equal to 0 for steady-state processes; in this case, the following relationship is valid

$$\pm \dot{Q} = \dot{m} \cdot \Delta i \quad (1.7)$$

Using the above formula, one can state that variation of enthalpy of medium is equivalent to heat supplied (removed) to unit mass of medium. It is the basis for calculations of relative values of enthalpy (in relation to reference temperature 0°C is the most common value).

Steady heat transfer usually occurs between two media in heat exchangers. If heat losses to the surroundings are not taken into account, heat balance of a heat exchanger has the form

$$\dot{m}_1 \cdot \Delta i_1 = \dot{m}_2 \cdot \Delta i_2 \quad (1.8)$$

Values of water and water vapor enthalpies are given in table AT-3.

Precise determination of enthalpy for media other than water is usually troublesome. If a phase change of medium (boiling, condensation) does not occur in a heat exchanger, the difference between enthalpies can be calculated in the following way

$$\Delta i = c \cdot \Delta T \quad (1.9)$$

where  $\Delta T$  is the difference between medium temperature at the inlet and outlet (or the opposite way round) and  $c$  is the average heat capacity under constant pressure in a range of medium temperatures. For water the value  $c = 4190 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  is usually accepted.

If medium in a heat exchanger undergoes only a phase change, the difference between medium enthalpies is identical with heat of a phase change (evaporation)

$$\Delta i = r \quad (1.10)$$

This case relates e.g. to condensation of water vapor without condensate subcooling or boiling of liquid (supplied to the system at boiling point) without superheating of vapor.

#### EXAMPLE 1.1

Calculate enthalpy of saturated water vapor at temperature  $120^\circ\text{C}$ . The relationship between molar heat capacity of water vapor and absolute temperature  $T$  [K] has the following form

$$C_g = 32.2 + 1.92 \cdot 10^{-3} \cdot T + 10.6 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 3.60 \cdot 10^{-9} \cdot T^3 \quad \text{kJ}/(\text{kmol}\cdot\text{K}) \quad (\text{a})$$

In this case, enthalpy (relative enthalpy) of vapor is the amount of heat that must be delivered to 1 kg of water at temperature  $0^\circ\text{C}$  to obtain 1 kg of vapor at temperature  $120^\circ\text{C}$  under saturation pressure for this temperature. Because value of enthalpy does not depend on the way the vapor has been produced, calculations can be done in various ways. Two different cases of vapor production will be considered

a. heating of water from temperature  $0^\circ\text{C}$  to  $120^\circ\text{C}$  and evaporation at this temperature,

b. evaporation of water at temperature  $0^\circ\text{C}$  and heating of the resultant vapor up to  $120^\circ\text{C}$ .

The following data will be used in calculations (table AT-3)

- heat of evaporation of water at temperature  $0^\circ\text{C}$ ,  $r_0 = i'' - i' = 2500.8 \text{ kJ/kg}$ ,
- heat of evaporation of water at temperature  $120^\circ\text{C}$ ,  $r = 2706.4 - 503.7 = 2202.7 \text{ kJ/kg}$ .

**Ad a.** Enthalpy was calculated using the equation

$$i'' = c_{lm}(T - T_0) + r = 4.19 \cdot (120 - 0) + 2202.7 = 2705.5 \text{ kJ/kg}$$

The value  $4.19 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  was substituted as the average heat capacity of water. Therefore, calculations are very easy, however, the value of heat of evaporation at temperature imposed by the conditions given in the example was used. For substances

different than water there are no tables that can be used to find heat of evaporation at different temperatures, what disqualifies this method of calculations.

**Ad b.** Enthalpy was calculated using the formula

$$i'' = r_0 + c_{gm}(T - T_0) - (\Delta i)_p$$

where  $(\Delta i)_p$  is a correction taking into account the influence of vapor pressure. Changes of heat capacity of gases and vapors with temperature are usually greater than for liquids, so this correction must be included in calculations.

The relationship between molar heat capacity and temperature has the form

$$C_g = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (\text{b})$$

The average molar heat capacity of water vapor  $C_{gm}$  in a temperature range from  $T_0$  to  $T$  is calculated using the formula

$$C_{gm} = \frac{\int_{T_0}^T C_g dT}{T - T_0}$$

Taking equation (b) into account and integrating, one obtains

$$C_{gm} = \frac{1}{T - T_0} \left[ a(T - T_0) + \frac{b}{2}(T^2 - T_0^2) + \frac{c}{3}(T^3 - T_0^3) + \frac{d}{4}(T^4 - T_0^4) \right]$$

where:  $a, b, c, d$  denote constants for a given substance.

Because numerical constants in relationship (a) refer to temperature in [K], it was calculated that:  $T = 120^\circ\text{C} = 393 \text{ K}$ ,  $T_0 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ . It was obtained that

$$C_{gm} = \frac{1}{393 - 273} \cdot \left\{ 32.2 \cdot [393 - 273] + \frac{1.92 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot [(393)^2 - (273)^2] + \right. \\ \left. + \frac{10.6 \cdot 10^{-6}}{3} \cdot [(393)^3 - (273)^3] + \frac{-3.60 \cdot 10^{-9}}{4} \cdot [(393)^4 - (273)^4] \right\}$$

$$C_{gm} = 33.9 \quad \text{kJ}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$$

The average heat capacity  $c_{gm}$  equals

$$c_{gm} = \frac{C_{gm}}{M} = \frac{33.9}{18} = 1.88 \quad \text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$



The above value refers to low pressures ( $P \rightarrow 0$ ). Enthalpy calculated on this basis will also refer to such pressures, while saturation pressure of water vapor at  $120^\circ\text{C}$  is  $1.985 \cdot 10^5$  Pa (table AT-3). Therefore a correction for enthalpy  $(\Delta i)_p$  must be included. Values of these corrections as functions of reduced parameters can be read from charts which are often presented in literature (e.g. T. Hobler, *Ruch ciepła i wymienniki*). It is  $(\Delta i)_p = 20.8$  kJ/kg for conditions of the example. Hence

$$i'' = 2500.8 + 1.88 \cdot (120 - 0) - 20.8 = 2706.2 \text{ kJ/kg}$$

According to tables, the value of enthalpy of saturated water vapor at  $120^\circ\text{C}$  is  $i'' = 2706.3$  kJ/kg (table AT-3) what is consistent with the result of calculations.

### EXAMPLE 1.2

Water which inlet temperature is  $T_0 = 42^\circ\text{C}$  is flowing through a perfect mixing tank equipped with four electric heaters of power 3000 W each. Water level in the tank is fixed and corresponds to the volume of liquid  $V = 0.1$  m<sup>3</sup>. Assuming that water density is  $\rho = 980$  kg/m<sup>3</sup> and its heat capacity is  $c = 4190$  J/(kg·K) in a range of tank temperature and neglecting heat losses to the surroundings, calculate:

1. Maximum temperature that can be reached in the tank when only one of four heaters is switched on and water flow rate is 0.04 kg/s.
2. Time that is required to heat water up to this temperature when two heaters are working and flow rate is the same as in point (1).
3. How many heaters should be turned on to boil water in the tank if the flow rate is the same as before? How long will it take for water to start boiling?
4. If three heaters are working, what should be the flow rate to boil water after 1 hour?

---

The process is transient, so heat balance equation (1.6) is used. Substituting  $i = cT$ , one gets

$$\dot{m}c(T - T_0) + mc \frac{dT}{dt} = \dot{Q} \quad (\text{a})$$

where  $T_0$  denotes inlet temperature and  $\dot{Q}$  is positive. Temperature in the tank and outlet temperature  $T$  are treated as identical, what is associated with perfect mixing in the tank. After separation of variables and integration, it was obtained that

$$t = -\frac{m}{\dot{m}} \cdot \ln \left| \dot{Q} - mc(T - T_0) \right| + C$$

In order to determine the constant  $C$ , the following initial condition must be used: for  $t = 0$  it is  $T = T_0$ , what gives  $C = (m/\dot{m}) \cdot \ln \dot{Q}$ . Therefore, it is assumed that at the beginning of the process the tank is filled with liquid at temperature  $T_0$ . Substituting the value of  $C$ , the relationship for time required to reach temperature  $T$  in the tank (and also at the outlet of the tank) is obtained

$$t = -\frac{m}{\dot{m}} \cdot \ln \frac{\dot{Q} - \dot{m}c(T - T_0)}{\dot{Q}} \quad (\text{b})$$

The quantity  $\dot{Q}$  denotes the amount of heat per time unit (thermal power) supplied to the system.

**Ad 1.** Temperature in the tank changes within time according to the following equation resulting from formula (b)

$$T = T_0 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right) \right]$$

Therefore, temperature increases continuously and tends to the maximum value corresponding to  $t \rightarrow \infty$ . The maximum temperature is equal to

$$T_{\max} = T_0 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c} \quad (\text{c})$$

Substituting numerical values, one obtains

$$T_{\max} = 42 + \frac{3000}{0.04 \cdot 4190} = 59.9^\circ\text{C}$$

**Ad 2.** Mass of liquid contained in the tank is

$$m = V\rho = 0.1 \cdot 980 = 98 \text{ kg}$$

Time after which liquid will reach temperature  $59.9^\circ\text{C}$  if  $\dot{Q} = 2 \cdot 3000 = 6000 \text{ W}$ , is calculated using formula (b)

$$t = -\frac{98}{0.04} \cdot \ln \frac{6000 - 0.04 \cdot 4190 \cdot (59.9 - 42)}{6000} = 1698 \text{ s}$$

**Ad 3.** Water boiling point (under normal pressure) is  $100^\circ\text{C}$ . At first, the power needed to heat water up to  $100^\circ\text{C}$  within infinitely long time will be calculated. Transforming relationship (c) and substituting numerical values, one gets

$$\dot{Q} = \dot{m} c (T_{\max} - T_0) = 0.04 \cdot 4190 \cdot (100 - 42) = 9720 \text{ W}$$

Because  $3 \cdot 3000 < \dot{Q} < 4 \cdot 3000 \text{ W}$ , four heaters must be turned on to boil water. As their thermal power is  $12\,000 \text{ W}$ , formula (b), which will be used to calculate time after which water starts to boil, has the form

$$t = -\frac{98}{0.04} \cdot \ln \frac{12\,000 - 0.04 \cdot 4190 \cdot (100 - 42)}{12\,000} = 4070 \text{ s}$$

**Ad 4.** Water flow rate required to reach temperature  $100^\circ\text{C}$  within an hour when three heaters are working i.e. when thermal power is  $9000 \text{ W}$ , is calculated with the use of equation (b). Substitution of numerical values yields

$$3600 = -\frac{98}{0.04} \cdot \ln \left[ \frac{9000 - \dot{m} \cdot 4190 \cdot (100 - 42)}{9000} \right]$$

After transformation, one obtains the nonlinear equation

$$36.7 \cdot \dot{m} + \ln(1 - 27.0 \cdot \dot{m}) = 0$$

On the basis of the above equation it can be concluded that the value of  $\dot{m}$  must be lower than  $0.037 \text{ kg/s}$ , because  $1 - 27.0 \cdot \dot{m} > 0$ . Solving this nonlinear equation, one gets the result:  $\dot{m} = 0.0177 \text{ kg/s}$ .

### EXAMPLE 1.3

Two perfect-mixing tanks (fig. 1.1) connected with each other, each of volume  $V = 2 \text{ m}^3$  are filled with water. Water temperature in the first tank is  $T_{1i} = 10^\circ\text{C}$  and in the second one  $T_{2i} = 50^\circ\text{C}$ . Water of temperature  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  was started to be supplied to the first tank at flow rate  $\dot{V} = 0.002 \text{ m}^3/\text{s}$ . Water leaving this tank is flowing into the second tank and then it is discharged outside. Water levels in the tanks do not change within time. Assuming that the tanks are perfectly insulated and neglecting changes of liquid density with temperature, determine relationships between outlet temperatures and time for both tanks.

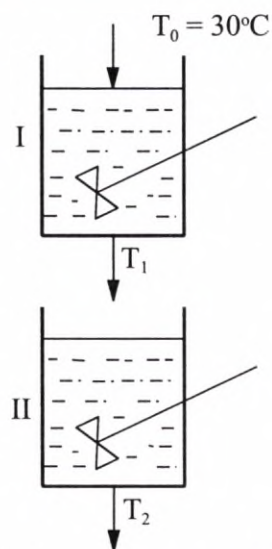


Fig. 1.1. Two perfect-mixing tanks



Because the tanks have a perfect thermal insulation and there are no heating elements, heat is not exchanged with the surroundings. The following nomenclature will be used (fig. 1.1):  $T_0$  – temperature of inlet stream of the I<sup>st</sup> tank,  $T_1$  – temperature between tanks,  $T_2$  – temperature of outlet stream of the II<sup>nd</sup> tank. Substituting  $\dot{Q} = 0$  and  $i = cT$  into formula (1.6), one gets the following equation of heat balance for the I<sup>st</sup> tank

$$\dot{m} (T_1 - T_0) + m \cdot \frac{dT_1}{dt} = 0 \quad (a)$$

Heat balance equation for the II<sup>nd</sup> tank is analogical (the same mass flow rate  $\dot{m}$  and the same mass of liquid in the tank  $m$ )

$$\dot{m} (T_2 - T_1) + m \cdot \frac{dT_2}{dt} = 0 \quad (b)$$

In the case of both tanks temperature in a tank and outlet temperature are treated as identical because of perfect mixing. The difference between the above equations should be noticed. The quantity  $T_0$  (inlet temperature) in equation (a) is constant in time, while the analogical quantity  $T_1$  in (b) is variable.

Equation (a) is solved using separation of variables. Integration yields

$$t = -\frac{m}{\dot{m}} \cdot \ln|T_0 - T_1| + C_1$$

It is  $T_1 = T_{1i}$  for  $t = 0$  (initial temperature in tank I); it allows one to determine the value of constant  $C_1$ ; the relationship after transformation has the form

$$T_1 = T_0 - (T_0 - T_{1i}) \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right) \quad (c)$$

Temperature  $T_1$  is the inlet temperature for tank II. Substitution of formula (c) into (b) and transformation yields

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{\dot{m}}{m} T_2 = \frac{\dot{m}}{m} \cdot \left[ T_0 - (T_0 - T_{1i}) \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right) \right] \quad (d)$$

This is also an ordinary differential equation (linear, inhomogenous). In order to solve this equation, firstly the following homogenous equation must be considered

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{\dot{m}}{m} T_2 = 0$$

After separation of variables and integration, one gets

$$T_2 = C \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right) \quad (e)$$

Treating  $C$  as a variable  $C = C(t)$  (method of variation of parameters), one gets the value of the derivative  $dT_2/dt$

$$\frac{dT_2}{dt} = \left(\frac{dC}{dt} - C \frac{\dot{m}}{m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right) \quad (f)$$

Substitution of (e) and (f) into (d) yields

$$dC = \frac{\dot{m}}{m} \cdot \left[ T_0 \exp\left(\frac{\dot{m}}{m} t\right) - (T - T_{li}) \right] dt$$

After integration

$$C = T_0 \exp\left(\frac{\dot{m}}{m} t\right) - \frac{\dot{m}}{m} \cdot t \cdot (T_0 - T_{li}) + C_2 \quad (g)$$

Substituting equation (g) into (e), one gets

$$T_2 = T_0 - \left[ \frac{\dot{m}}{m} \cdot t \cdot (T_0 - T_{li}) + C_2 \right] \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right)$$

It is  $T_2 = T_{2i}$  for  $t = 0$  (initial temperature in tank II); the value of constant  $C_2$  can be determined and the final form of the unknown function can be found on this basis

$$T_2 = T_0 - \left[ \frac{\dot{m}}{m} t \cdot (T_0 - T_{li}) + (T_0 - T_{2i}) \right] \cdot \exp\left(-\frac{\dot{m}}{m} t\right) \quad (h)$$

Equations (c) and (h) give the relationships between outlet temperatures and time for tanks I and II, respectively. Substituting constant numerical values, one gets

$$T_1 = 30 - 20 \cdot \exp(-0.001 \cdot t) \quad (i)$$

$$T_2 = 30 - (0.02 \cdot t - 20) \cdot \exp(-0.001 \cdot t) \quad (j)$$

It was substituted that

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{\dot{V}}{V} = \frac{0.002}{2} = 0.001 \text{ s}^{-1}$$

and  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_{1i} = 10^\circ\text{C}$ ,  $T_{2i} = 50^\circ\text{C}$ . Substituting a series of values of  $t$  into formulas (i) and (j), one can determine functions  $T_1(t)$  and  $T_2(t)$ . Results of calculations are presented in the table and chart (fig. 1.2).

$t$ [s]	0	100	1000	2000	100 000
$T_1$ [ $^\circ\text{C}$ ]	10.00	11.90	22.64	27.29	29.999
$T_2$ [ $^\circ\text{C}$ ]	50.00	46.29	30.00	27.29	29.992

Logarithmic scale was used on the horizontal axis in fig. 1.2 because if the range of time is wide, functions can be seen more clearly with the use of such scale.

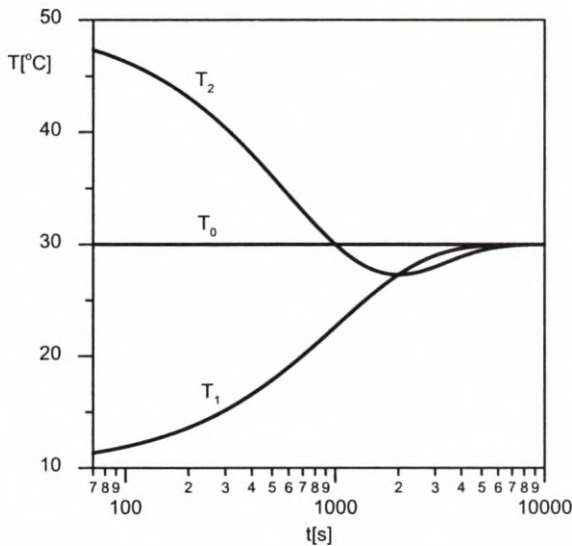


Fig. 1.2. Time dependencies of liquids temperatures in the vessels

As could have been predicted, temperature  $T_1$  increases monotonously; moreover  $T_1 \rightarrow T_0$  and  $T_2 \rightarrow T_0$  for  $t \rightarrow \infty$ . A little harder to predict is the fact that temperature  $T_2$  falls below  $T_0$  after some time, then equalizes  $T_1$  and finally  $T_2 < T_1$ .

#### EXAMPLE 1.4

3 kg/s of water solution of heat capacity 3980 J/(kg·K) will be heated from  $10^\circ\text{C}$  to  $95^\circ\text{C}$  in a heat exchanger. Calculate flow rate of water vapor and its pressure if

the minimal temperature difference between media in the exchanger equals 35 K. Assume that condensate at the outlet has the same temperature as vapor, vapor contents 5% of moisture and heat losses are 7% of heat delivered to the solution.

The amount of heat received by the solution (medium 2) is

$$\dot{Q}_2 = \dot{m}_2 c_2 (T_{2out} - T_{2in}) = 3 \cdot 3980 \cdot (95 - 10) = 1.015 \cdot 10^6 \text{ W}$$

Heat losses constitute 7% of this value so vapor (medium 1) must deliver the following amount of heat

$$\dot{Q}_1 = 1.07 \cdot \dot{Q}_2 = 1.07 \cdot 1.015 \cdot 10^6 = 1.086 \cdot 10^6 \text{ W} = 1086 \text{ kW}$$

Temperature of the heating medium is constant so the minimal difference between temperatures of media is the difference between vapor temperature and maximum temperature of the solution. Therefore, vapor temperature under conditions of the example must be equal to

$$T_1 = 95 + 35 = 130^\circ\text{C}$$

Vapor under pressure  $2.701 \cdot 10^5$  Pa (table AT-3) has such temperature. Vapor enthalpy  $i'' = i_{1in} = 2720.6$  kJ/kg and condensate enthalpy  $i' = i_{1out} = 546.4$  kJ/kg (heat of condensation is the difference between these two quantities) correspond to these pressure.

Flow rate of dry vapor equals

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}_1}{i_{1in} - i_{1out}} = \frac{1086}{2720.6 - 546.4} = 0.499 \text{ kg/s}$$

Because vapor has 5% of moisture, 5% of overall amount of this vapor does not participate in the heat transfer process. Flow rate of moist vapor required for the process is  $0.499/(1 - 0.05) = 0.525$  kg/s.

#### EXAMPLE 1.5

Exhaust gases are being cooled in a heat exchanger from  $650^\circ\text{C}$  to  $400^\circ\text{C}$  by the means of water vapor of initial temperature  $120^\circ\text{C}$ . Volumetric flow rate of gases at the inlet to the exchanger is  $0.518$  m<sup>3</sup>/s and mass flow rate of water vapor equals  $0.15$  kg/s. Pressures of both media are equal to  $0.980 \cdot 10^5$  Pa. Calculate outlet temperature of vapor, assuming that there are no heat losses to the surroundings.

Average heat capacity of exhaust gases is 33.8 kJ/(kmol·K). The relationship between molar heat capacity of water vapor and temperature in [K] is

$$C = 32.2 + 1.92 \cdot 10^{-3} T + 10.6 \cdot 10^{-6} T^2 - 3.60 \cdot 10^{-9} T^3 \text{ kJ}/(\text{kmol} \cdot \text{K}) \quad (\text{a})$$

Molar volume of exhaust gases at the outlet is

$$\left( \frac{M}{\rho} \right) = \frac{RT}{P} = \frac{8314 \cdot (650 + 273)}{0.980 \cdot 10^5} = 78.3 \text{ m}^3/\text{kmol}$$

Molar flow rate of exhaust is calculated in the following way

$$\dot{n}_1 = \frac{\dot{V}_1}{(M/\rho)} = \frac{0.518}{78.3} = 0.00661 \text{ kmol/s}$$

The amount of heat released by the exhaust gases is

$$\dot{Q}_1 = \dot{n}_1 C_{1m} (T_{1in} - T_{1out}) = 0.00661 \cdot 33.8 \cdot (650 - 400) = 55.9 \text{ kW}$$

This amount is received by water vapor what causes its enthalpy to rise from  $i_{2in}$  to  $i_{2out}$ . The difference between these enthalpies can be determined in the following way

$$i_{2out} - i_{2in} = \frac{\dot{Q}_2}{\dot{m}_2} = \frac{55.9}{0.15} = 372.6 \text{ kJ/kg} \quad (\text{b})$$

Specific enthalpy defines the amount of heat delivered to 1 kg of substance during heating from contractual reference temperature to given temperature. Hence

$$i = \int_{T_0}^T c \cdot dT = \frac{1}{M} \int_{T_0}^T C \cdot dT \quad (\text{c})$$

Molar heat capacity  $C$  ( $M$  – molecular mass) occurs in the second term of the equality. Changes of molar heat capacity with temperature are characterized by relationship (d).

$$C = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (\text{d})$$



Connecting formulas (c) and (d) and integrating, one gets

$$i = \frac{1}{M} \left[ a(T - T_0) + \frac{b}{2}(T^2 - T_0^2) + \frac{c}{3}(T^3 - T_0^3) + \frac{d}{4}(T^4 - T_0^4) \right] \quad (e)$$

In this case it is convenient to choose  $T_0 = 120^\circ\text{C} = 393 \text{ K}$  as the reference temperature because then enthalpy of water vapor at the inlet to the exchanger is  $i_{2in} = 0$  and according to (b) enthalpy at the outlet is

$$i_{2out} = 372.6 \text{ kJ/kg}$$

Substituting the numerical values to equation (e):  $a = 32.2$ ,  $b = 1.92 \cdot 10^{-3}$ ,  $c = 10.6 \cdot 10^{-6}$ ,  $d = -3.60 \cdot 10^{-9}$  (according to (a)) and  $i (= i_{2out}) = 372.6 \text{ kJ/kg}$ ,  $M = 18 \text{ kg/kmol}$ ,  $T_0 = 393 \text{ K}$ , one obtains the fourth degree equation

$$T^4 - 3913 \cdot T^3 - 1.070 \cdot 10^6 \cdot T^2 - 3.587 \cdot 10^{10} \cdot T + 2.194 \cdot 10^{13} = 0$$

where  $T$  is absolute temperature [K]. This equation is satisfied for  $T = 583 \text{ K}$ ; this is the temperature of water vapor at the outlet from the exchanger ( $T = T_{2out}$ ). Hence

$$T_{2out} = 583 - 273 = 310^\circ\text{C}$$

Calculations can be simplified when tentative value of the average heat capacity of water vapor is taken. When the value  $c_{2m} = 1.88 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$  (for the range from 0 to  $120^\circ\text{C}$ ) is taken from Example 1.1, the outlet temperature of water vapor can be calculated from the balance equation

$$\dot{Q}_2 = \dot{m}_2 c_2 (T_{2out} - T_{2in})$$

Hence

$$T_{2out} \cong T_{2in} + \frac{\dot{Q}_2}{\dot{m}_2 c_2} = 130 + \frac{55.9}{0.15 \cdot 1.88} = 328^\circ\text{C}$$

However, simplification of calculations significantly affects the accuracy of the result. The obtained temperature is higher by 18 K than the value calculated with the use of the accurate method.

## EXERCISE 1.1

201 500 kJ of heat was delivered to 82.6 kg of water at temperature 62°C under constant pressure 201 500 kJ. Calculate temperature of water vapor which was formed during the process.

Answer: 115°C.

## EXERCISE 1.2

A perfect mixing tank of volume 0.05 m<sup>3</sup> is filled with water solution at temperature 80°C. At some point the same solution but of temperature 12°C was started to be supplied into the tank in the amount of  $1 \cdot 10^{-4}$  m<sup>3</sup>/s. At the same time the same amount of solution was being drained outside. Calculate temperature in the tank after 5 minutes. What time is required to obtain the same temperature if flow rate of liquid is doubled.

Answer: 49.3°C, 2.5 min.

## EXERCISE 1.3

Considering conditions given in example 1.3, calculate:

- time after which temperature at the outlet of tank II will be equal with feed temperature of tank I (30°C),
- time after which outlet temperatures of tanks I and II will become equal,
- time after which outlet temperature of tank II will reach its minimum; determine the minimal temperature.

Answer: a) 1000 s, b) 2000 s, c) 2000 s, 27.3°C.

## EXERCISE 1.4

A tank contains 30 kg of water of initial temperature 20°C. Contents of the tank is being heated directly by saturated water vapor which temperature is 125°C. Vapor mass flow rate is 0.0042 kg/s. Assuming that there are no heat losses, calculate:

- temperature of water in the tank after 10 minutes of heating,
- time after which temperature in the tank will be 95°C and what will be the mass of the contents of the tank.

Answer: a) 68.7°C, b) 969 s, 34.07 kg.

## EXERCISE 1.5

Superheated ammonia vapor which pressure is 1.37 MPa (14 ata) is being condensed in a counter-current heat exchanger. Condensation temperature is 170°C, vapor flow rate – 0.05 kg/s. Water is the cooling medium. It is heated from 17°C to 35°C. Calculate water flow rate needed for complete condensation of ammonia. With the use of the *T-S* diagram it was found that enthalpy of ammonia vapor is 1831 kJ/kg at 170°C and under pressure of 1.37 MPa and enthalpy of ammonia which is boiling under this pressure equals 348 kJ/kg.

Answer: 0.983 kg/s.

## 2. HEAT CONDUCTION

### 2.1. EQUATIONS OF HEAT CONDUCTION

Heat conduction is a process which occurs mainly in solids i.e., in systems where particles cannot move. Heat is also conducted in fluids but in this case convection is the dominant mechanism of heat transfer.

Heat conduction is described by Fourier's equations. The following formula is valid for steady heat conduction in  $x$  axis direction

$$\dot{Q} = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

where:

- $\dot{Q}$  – rate of heat transfer (amount of heat per unit time), W,
- $k$  – thermal conductivity, W/(m·K),
- $T$  – temperature, °C,
- $A$  – area perpendicular to direction of heat transfer, m<sup>2</sup>.

Thermal conductivity  $k$  characterizes the ability of a material to conduct heat; it varies only slightly with temperature.

Exemplary values of  $k$  for several substances at temperature of 0°C are given in table 2.1.

Table 2.1

Thermal conductivities

Substance	Copper	Steel	Glass wool	Water	Air
$k$ [W/(m·K)]	386	17.5–46.5	0.04–0.06	0.592	0.0241

A concept of heat flux  $q$  is often used in the case of thermal processes. It is defined as

$$q = \frac{\dot{Q}}{A} \quad (2.2)$$

The unit of  $q$  is  $\text{W/m}^2$ ; this quantity is used for example for determination of heat losses per unit area.

The following formula is used for transient conduction in  $x$  axis direction

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{x^\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\zeta \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

where:

$t$  – time, s,

$a$  – thermal diffusivity,  $\text{m}^2/\text{s}$ .

$\zeta$  – shape factor (= 0, 1 or 2 for an infinite plate, infinite cylinder and sphere, respectively).

Thermal diffusivity is defined as follows

$$a = \frac{k}{c\rho} \quad (2.4)$$

where:

$c$  – heat capacity,  $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,

$\rho$  – density,  $\text{kg}/\text{m}^3$ .

The coefficient  $a$  characterizes the ability of a body to change its temperature; the higher  $a$ , the faster the body changes its temperature (heats up or cools down).

## 2.2. STEADY CONDUCTION THROUGH FLAT WALLS

When the heat transfer area  $A$  is constant (flat walls), integrated equation (2.1) has the form

$$\dot{Q} = \frac{k}{s} \cdot \Delta T_w \cdot A \quad (2.5)$$

where  $\Delta T_w$  denotes the difference between temperature on both sides of walls and  $s$  – wall thickness. When heat is conducted through  $N$  layers (walls) arranged in series, the following relation is valid

$$\dot{Q} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta T_{wi}}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{k_i}} \cdot A \quad (2.6)$$

where  $i = 1, 2, \dots, N$ . The expression  $\Sigma \Delta T_{wi}$  is a sum of the differences between temperatures on individual walls, so it is the total temperature difference. The expression in the denominator represents a resistance to heat conduction ( $R$ ), which unit is  $\text{m}^2\text{K}/\text{W}$ .

### 2.3. STEADY CONDUCTION THROUGH CYLINDRICAL WALLS

When heat is transferred through cylindrical walls (e.g through pipes walls), the quantity  $A$  in equation (2.1) is a variable. Taking this fact into account and integrating, one gets

$$\dot{Q} = \frac{2\pi k L}{\ln(d_2/d_1)} \cdot \Delta T_w \quad (2.7)$$

where:

- $L$  – length of a cylindrical pipe, m,
- $d_1$  – internal diameter, m,
- $d_2$  – external diameter, m.

Relation (2.7) can be presented in a more convenient form which is similar to (2.5). Taking into consideration that  $d_2 - d_1 = 2s$  and introducing the logarithmic average of the internal  $A_1 = \pi d_1 L$  and external  $A_2 = \pi d_2 L$  areas

$$A_m = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} \quad (2.8)$$

one obtains

$$\dot{Q} = \frac{k}{s} \cdot \Delta T_w \cdot A_m \quad (2.9)$$

When heat is transferred through  $N$  cylindrical walls arranged in series, the formula for the rate of heat transfer has the form

$$\dot{Q} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta T_{wi}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2k_i} \cdot \ln(d_{2i}/d_{1i})} \cdot \pi L \quad (2.10)$$

or

$$\dot{Q} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta T_{wi}}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{k_i A_{mi}}} \quad (2.11)$$

Symbols  $d_{2i}$  and  $d_{1i}$  in formula (2.10) denote, respectively, the external and internal diameter of the  $i$ -th cylindrical wall.

## 2.4. THERMAL INSULATION

Pipelines or devices which contain fluids at temperature that is much different from the ambient one are often covered by a layer of insulation i.e., a material which has very low thermal conductivity. Fluids which are on both sides of single- or multi-layer insulation usually have temperatures much different from surface temperatures. Heat is transported between fluid and a wall by convection heat transfer (Chapter 3); this process is described by equation (3.1). The reciprocals of convection heat transfer coefficients  $1/h$  should be treated as resistances to heat transfer  $R$ . When this resistance contains not only the resistance to heat conduction  $\Sigma(s_i/k_i)$  but also to convection heat transfer, the difference between fluid temperatures  $\Delta T$  is present in equations (2.6) and (2.11) instead of  $\Sigma \Delta T_{wi}$ . The following relation is valid for multi-layer flat insulation

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{k_i} + \frac{1}{h_2}} \cdot A \quad (2.12)$$

The formula for multi-layer cylindrical insulation has the form

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_1 A_1} + \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{k_i A_{mi}} + \frac{1}{h_2 A_2}} \quad (2.13)$$

where:

$h_1, h_2$  – convection heat transfer coefficients, respectively, for internal and external surface of insulation,  $W/(m^2K)$ ,

$A_1, A_2$  – internal and external surface area of insulation,  $m^2$ .

Insulation on cylindrical surfaces results in larger external surface area of a system. The case when increase of this surface area is not compensated by appropriate increase of thermal resistance to heat conduction is possible. In this case, the limit (critical) thickness of insulation, which corresponds to the highest heat loss, exists. When equation (2.13) for single-layer insulation ( $N=1$ ) is differentiated with respect to  $d_2$  and the derivative is equated to zero, the formula for the critical external diameter of insulation  $d_{2cr}$  is obtained

$$d_{2cr} = \frac{2k}{h_2} \quad (2.14)$$

## 2.5. TRANSIENT HEAT CONDUCTION

The problem refers to heating and cooling of solids. Determination of temperatures at a given point in a solid in relation to heating (cooling) time is one of the calculation issues. The systems where the initial temperature of a body  $T_i$  is homogeneous will be considered. Moreover, it is assumed that temperature  $T_b$  of fluid in which a body is immersed is constant in time. Three ranges referring to the relation between thermal resistance in a solid and fluid can be recognized:

I. Thermal resistance only in a solid; surface temperature of a solid is equal to fluid temperature; in this case a coefficient of convection heat transfer between the solid and fluid has infinitely high value.

II. Thermal resistance is both in a solid and fluid.

III. Thermal resistance is only in fluid, temperature of a solid is homogeneous; in this case thermal conductivity of the solid is infinitely high; this case is considered in Chapter 2.5.4.

The following dimensionless variables will be introduced for further consideration:

– dimensionless temperature

$$Y = \frac{T - T_b}{T_i - T_b} \quad (2.15)$$

– dimensionless time

$$\tau = \frac{at}{s^2} \quad (2.16)$$

– dimensionless space coordinate (does not refer to semi-infinite bodies)

$$\eta = \frac{x}{s} \quad (2.17)$$

The Biot number, that characterizes the ratio between thermal resistance of a body to thermal resistance of fluid, is introduced

$$\text{Bi} = \frac{hs}{k} \quad (2.18)$$

Symbols in the above definitions:

$x$  – space coordinate (distance from the axis of a body), m,

$t$  – time, s,

$T$  – temperature at distance  $x$  after time  $t$ , °C,

$s$  – characteristic linear dimension of a body (half of thickness for an infinite plate, radius – for an infinite cylinder and sphere), m,

$k$  – thermal conductivity of a body, W/(m·K),

$h$  – coefficient of convection heat transfer between body surface and fluid, W/(m<sup>2</sup>K).

The relationships that are presented in further considerations can be expressed in the general form

$$Y = f(\tau, \eta, \text{Bi}) \quad (2.19)$$

All the discussed solutions of the equations of transient heat conduction refer to the following initial condition

$$t = 0 \quad T = T_i \quad (2.20)$$

Moreover, the following boundary condition is valid for axes of symmetrical bodies

$$x = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

### 2.5.1. Analytical solutions for an infinite slab, infinite cylinder and sphere

When thermal resistance is present only in a body ( $\text{Bi} \rightarrow \infty$ , practically  $\text{Bi} > 100$ ) which is being heated (cooled), a boundary condition for the surface of a body has the following form

$$x = s \quad T = T_b \quad (2.22)$$

When equation (2.3) is being solved with initial condition (2.20) and boundary conditions (2.21) and (2.22), an expression in the form of an infinite series is obtained. In the case of an infinite slab which thickness is  $2s$  the solution has the form



$$Y = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \exp \left[ -(2i-1)^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \tau \right] \cdot \cos \left[ (2i-1) \frac{\pi}{2} \eta \right] \quad (2.23)$$

The following expression is valid for a cylinder with radius  $s$

$$Y = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta \alpha_i)}{J_1(\alpha_i)} \cdot \exp(-\alpha_i^2 \tau) \quad (2.24)$$

where  $\alpha_i$  are the roots of the equation

$$J_0(\alpha) = 0 \quad (2.24a)$$

The symbol  $J_0$  denotes the Bessel function of the first kind of order zero. The solution for a sphere which radius is  $s$  has the form

$$Y = -\frac{2}{\pi \eta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \cdot \sin(i\pi \eta) \cdot \exp(-i^2 \pi^2 \tau) \quad (2.25)$$

When thermal resistance occurs both in a body and the surrounding fluid ( $0.1 < Bi < 100$ ), the following boundary condition for the surface of the body is valid

$$x = s \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} (T - T_b) \quad (2.26)$$

When equation (2.3) is solved with initial condition (2.20) and boundary conditions (2.21) and (2.26), the following relations are obtained. For an infinite slab (plate)

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin \beta_i \cdot \cos(\beta_i \eta)}{\beta_i + \sin \beta_i \cdot \cos \beta_i} \cdot \exp(-\beta_i^2 \tau) \quad (2.27)$$

where  $\beta_i$  are the consecutive positive roots of the transcendental equation

$$\text{ctg} \beta = \frac{\beta}{Bi} \quad (2.27a)$$

The following solution is valid for an infinite cylinder

$$Y = 2 \cdot \text{Bi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\eta\beta_i)}{(\beta_i^2 + \text{Bi}^2) \cdot J_0(\beta_i)} \cdot \exp(-\beta_i^2\tau) \quad (2.28)$$

where  $\beta_i$  are the roots of the equation

$$\beta J_1(\beta) - \text{Bi} \cdot J_0(\beta) = 0 \quad (2.28a)$$

and  $J_1$  is the Bessel function of the first kind of order one.

In the case of a sphere, it can be written that

$$Y = \frac{2 \cdot \text{Bi}}{\eta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\eta\beta_i)}{[\beta_i^2 + \text{Bi} \cdot (\text{Bi} - 1)] \cdot \sin\beta_i} \cdot \exp(-\beta_i^2\tau) \quad (2.29)$$

where  $\beta_i$  are the roots of the equation

$$\beta \cdot \text{ctg}(\beta) + \text{Bi} - 1 = 0 \quad (2.29a)$$

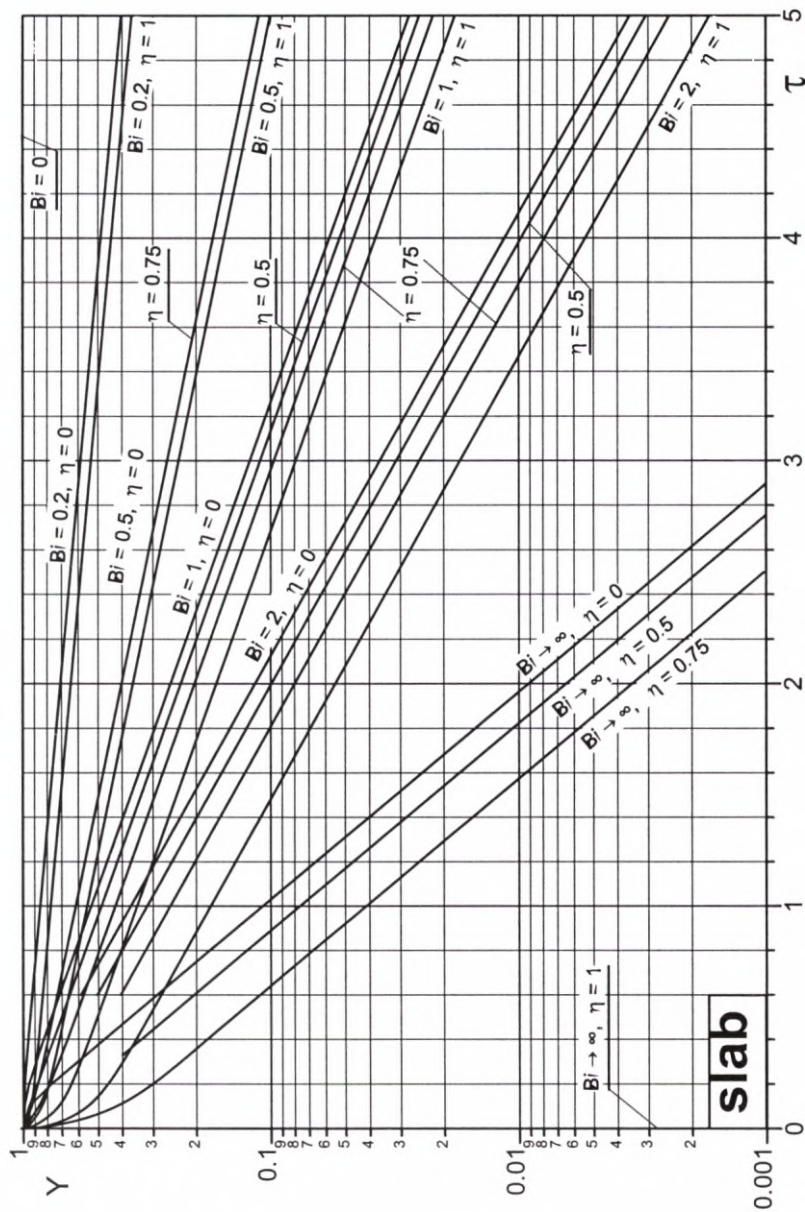
Equations (2.27a), (2.28a) and (2.29a) have infinitely many solutions. Values of the first six roots of these equations for several values of the Biot number are presented in tables 2.2, 2.3 and 2.4.

Table 2.2

Roots of equation (2.27a) for an infinite plate

Bi	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10	100	$\infty$
$\beta_1$	0.3111	0.4328	0.6533	0.8603	1.0769	1.3138	1.4289	1.5552	1.5708
$\beta_2$	3.1731	3.2039	3.2923	3.4256	3.6436	4.0336	4.3058	4.6658	4.7124
$\beta_3$	6.2991	6.3148	6.3616	6.4373	6.5783	6.9096	7.2281	7.7764	7.8540
$\beta_4$	9.4354	9.4459	9.4775	9.5293	9.6296	9.8928	10.2003	10.8871	10.9956
$\beta_5$	12.5743	12.5823	12.6060	12.6453	12.7223	12.9352	13.2142	13.9981	14.1372
$\beta_6$	15.7143	15.7207	15.7397	15.7713	15.8336	16.0107	16.2594	17.1093	17.2788

Some problems occur during calculations, especially when time for a given temperature and position is to be determined. The problem is easier when  $\tau > 0.5$ ; in this case only the first term must be taken into account. Diagrams on which the dimensionless temperature  $Y$  can be read for given values of  $\tau$ ,  $\eta$  and  $\text{Bi}$  for an infinite slab, infinite cylinder and sphere are presented in figs. 2.1, 2.2 and 2.3.

Fig. 2.1.1. Dependence of  $Y$  on  $\tau$ ,  $\eta$  and  $Bi$  for an infinite slab

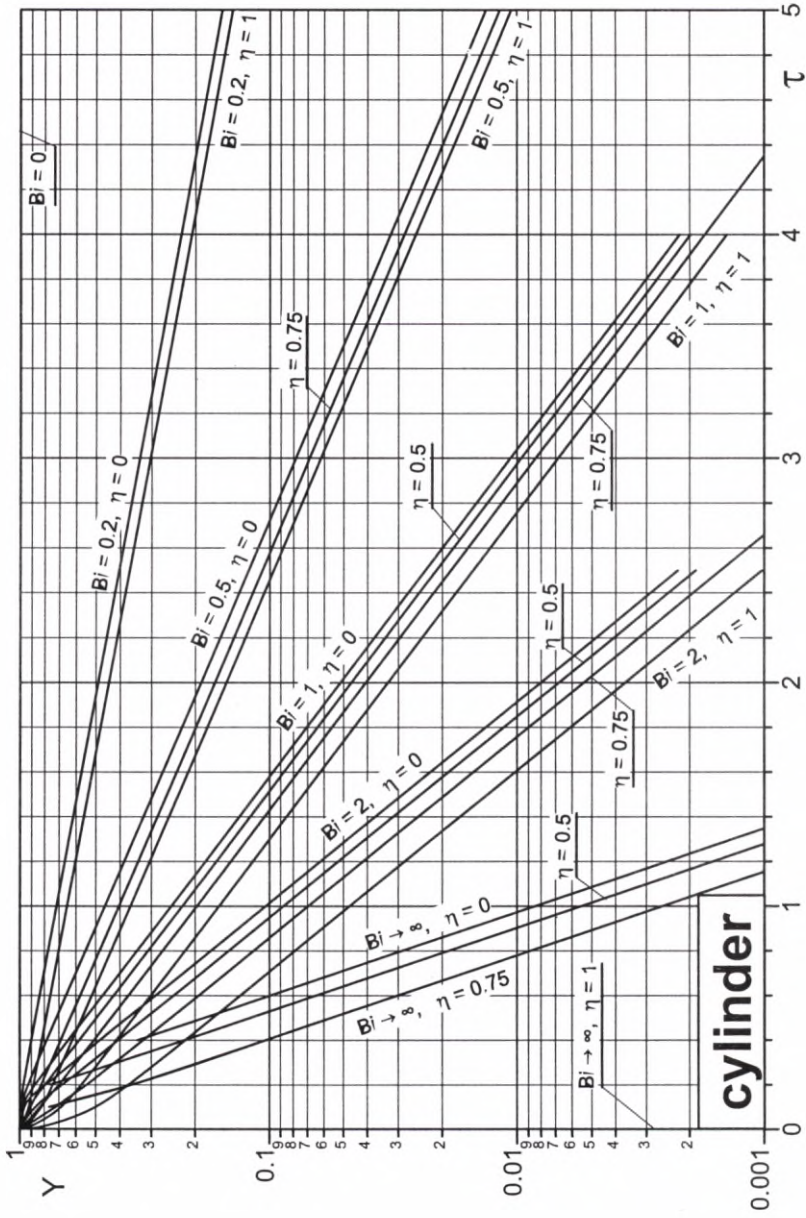


Fig. 2.2. Dependence of Y on  $\tau$ ,  $\eta$  and Bi for an infinite cylinder

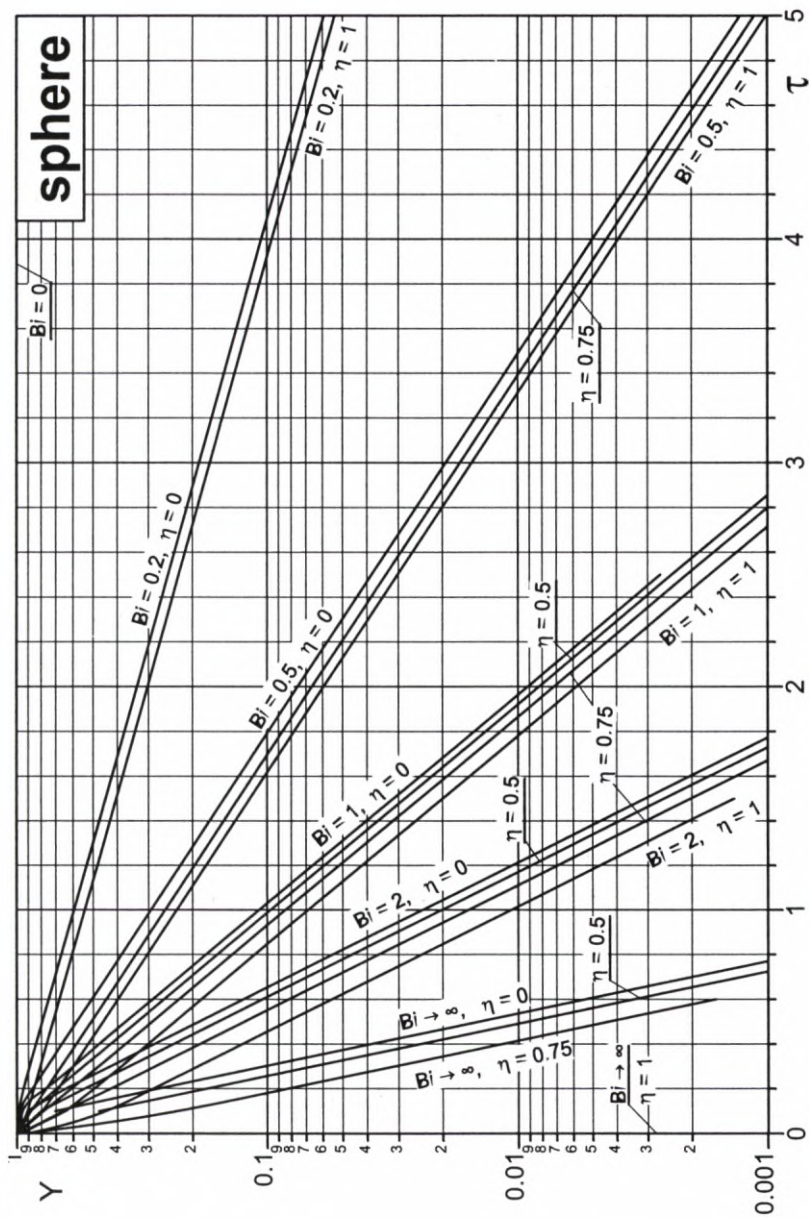
Fig. 2.3. Dependence of  $Y$  on  $\tau$ ,  $\eta$  and  $Bi$  for a sphere

Table 2.3

Roots of equation (2.28a) for an infinite cylinder

Bi	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10	100	$\infty$
$\beta_1$	0.4417	0.6170	0.9408	1.2558	1.5994	1.9898	2.1795	2.3809	2.4808
$\beta_2$	3.8577	3.8855	3.9594	4.0795	4.2910	4.7131	5.0332	5.4652	5.5201
$\beta_3$	7.0298	7.0440	7.0864	7.1558	7.2884	7.6177	7.9569	8.5678	8.6537
$\beta_4$	10.1833	10.1931	10.2225	10.2710	10.3658	10.6223	10.9363	11.6747	11.7915
$\beta_5$	13.3312	13.3387	13.3611	13.3984	13.4719	13.6786	13.9580	14.7834	14.9309
$\beta_6$	16.4767	16.4828	16.5010	16.5312	16.5910	16.7630	17.0099	17.8931	18.0711

Table 2.4

Roots of equation (2.29a) for a sphere

Bi	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10	100	$\infty$
$\beta_1$	0.5423	0.7593	1.1656	1.5708	2.0288	2.5704	2.8363	3.1102	3.1416
$\beta_2$	4.5157	4.5379	4.6042	4.7124	4.9132	5.3540	5.7172	6.2204	6.2832
$\beta_3$	7.7382	7.7511	7.7899	7.8540	7.9787	8.3029	8.6587	9.3309	9.4248
$\beta_4$	10.9133	10.9225	10.9499	10.9956	11.0856	11.3349	11.6532	12.4414	12.5664
$\beta_5$	14.0733	14.0804	14.1017	14.1372	14.2075	14.4080	14.6870	15.5522	15.7080
$\beta_6$	17.2266	17.2324	17.2498	17.2788	17.3364	17.5034	17.7481	18.6633	18.8496

### 2.5.2. Analytical solutions for a semi-infinite body

A semi-infinite body is a solid bounded only by one surface; it extends to infinity in other directions. A semi-infinite body does not have a linear dimension and the space variable  $x$  is treated as a distance from the surface. If  $\text{Bi} \rightarrow \infty$ , the initial conditions are as follows

$$x = 0 \quad T = T_b \quad (2.30)$$

$$x \rightarrow \infty \quad T = T_i \quad (2.31)$$

The solution has the form

$$Y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz \quad (2.32)$$

where

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\tau_x}}$$

Dimensionless time for a semi-infinite body is defined in the following way

$$\tau_x = \frac{at}{x^2} \quad (2.33)$$

So, a space coordinate  $x$  plays the role of the linear dimension in  $\tau_x$ . The right side of formula (2.32) is called the error function (*erf*)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz = \text{erf}(z) \quad (2.34)$$

So

$$Y = \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau_x}}\right) \quad (2.35)$$

The error function is presented in fig. 2.4.

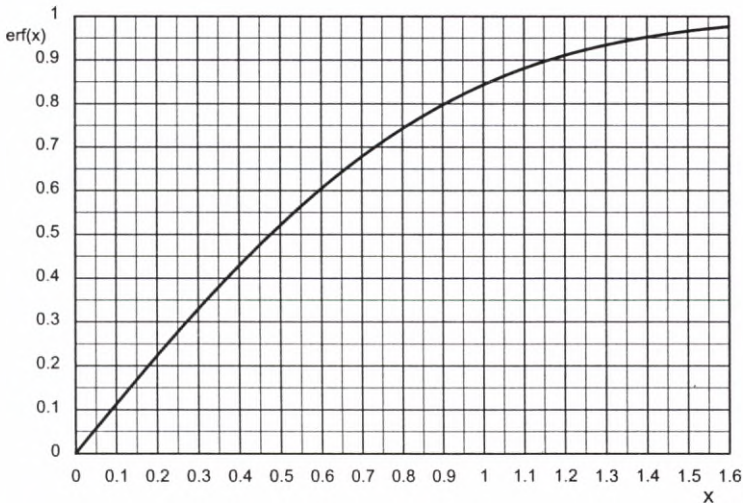


Fig. 2.4. Error function

When heat conduction occurs in a semi-infinite body and thermal resistance is both in a body and in fluid, the boundary condition for the surface has the form

$$x = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} (T - T_b) \quad (2.36)$$

In this case the solution is

$$Y = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau_x}}\right) + \exp(\operatorname{Bi}_x + \operatorname{Bi}_x^2 \tau_x) \cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau_x}} + \operatorname{Bi}_x \sqrt{\tau_x}\right)\right] \quad (2.37)$$

A space coordinate  $x$  (instead of  $s$ ) plays the role of the linear dimension in the Biot number  $\operatorname{Bi}_x$  in this case.

### 2.5.3. Solution for „derivative” solids

Analytical relations for basic solids are not sufficient to solve typical problems of cooling or heating of solids that have real shapes. A method for calculations of temporal distribution of temperature for bodies that are a geometric combination (i.e. they are formed as a result of intersection) of basic shapes is based on the following rule: dimensionless size of a “derivative” body  $Y$  is a product of appropriate dimensionless quantities  $Y_x, Y_y, Y_z$  for basic shapes. For example the following relationship is valid for a combination of three basic bodies

$$Y = Y_x Y_y Y_z \quad (2.38)$$

For example a rectangular prism (a brick) is formed as a result of interpenetration of three infinite plates which thicknesses result from lengths of sides positioned in accordance with directions of the  $x, y, z$  axes. Similarly, a cylinder which length is finite is formed as a result of interpenetration of an infinite cylinder and a plate which thickness is equal to the length of the cylinder.

### 2.5.4. Lack of resistance to conduction in a body

Theoretically, this case refers to heating or cooling of bodies which have infinitely high thermal conductivity, but practically it can be assumed that it refers to the cases when  $\operatorname{Bi} < 0.1$ . If a body has homogeneous temperature  $T$  in the whole volume, its cooling in time  $dt$  makes its temperature to change by  $-dT$  and the amount of



heat given by it is  $-c\rho V \cdot dT$  ( $V$  – body volume). This heat, which is transferred to the surroundings by convection heat transfer, can also be described by the formula  $hA(T - T_b) \cdot dt$  (see formula (3.1)), where  $A$  is a surface area of the body. After these expressions had been compared and after integration, it was obtained that

$$Y = \exp\left(-\frac{hA}{c\rho V} \cdot t\right) \quad (2.39)$$

The expression in the brackets can also be presented with the use of dimensionless quantities. Then, the relation has the form

$$Y = \exp\left[(\zeta + 1) \cdot \text{Bi} \cdot \tau\right] \quad (2.39a)$$

where  $\zeta$  is a shape factor.

### EXAMPLE 2.1

Wall of a furnace has three layers. The internal layer is made of fireproof brick; its thickness is  $s_1 = 0.10$  m and thermal conductivity equals  $k_1 = 0.95$  W/(m·K). The middle layer is made of regular bricks; its thickness is  $s_2 = 0.20$  m and  $k_2 = 0.65$  W/(m·K). Insulation is the external layer for which it is:  $s_3 = 0.06$  m and  $k_3 = 0.10$  W/(m·K). Temperature measurements showed that temperature of the internal wall is  $T_1 = 750^\circ\text{C}$ , and temperature of the external wall (insulation) equals  $T_2 = 80^\circ\text{C}$ . Calculate heat losses per 1 m<sup>2</sup> of the wall surface and temperature range for the regular brick.

Connecting equations (2.6 and 2.2) and including that  $\sum_{i=1}^3 \Delta T_w = T_1 - T_2$  (fig. 2.5), one obtains

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{s_3}{k_3}}$$

Substitution of numerical values allows one to calculate the heat losses per 1 m<sup>2</sup> of wall surface

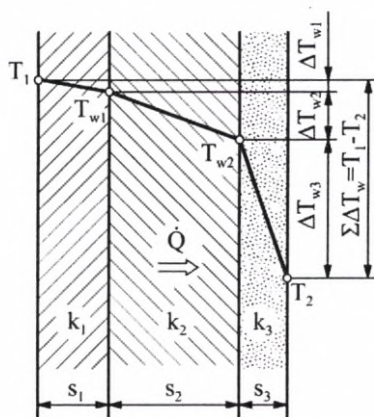


Fig. 2.5. Heat conduction through three flat walls

$$q = \frac{750 - 80}{\frac{0.10}{0.95} + \frac{0.20}{0.65} + \frac{0.06}{0.10}} = 661 \text{ W/m}^2$$

The following relationship is true for each wall

$$q = \frac{k_i}{s_i} \cdot \Delta T_{wi}$$

Temperature drop in the layer made of fireproof brick ( $i = 1$ ) is

$$\Delta T_{w1} = T_1 - T_{w1}$$

hence

$$T_{w1} = T_1 - q \cdot \frac{s_1}{k_1} = 750 - 661 \cdot \frac{0.10}{0.95} = 680^\circ\text{C}$$

This is temperature at the boundary of the two types of bricks. Temperature drop in the insulation layer ( $i = 3$ ) equals

$$\Delta T_{w3} = T_{w2} - T_2$$

so

$$T_{w2} = T_2 + q \cdot \frac{s_3}{k_3} = 80 + 661 \cdot \frac{0.06}{0.10} = 477^\circ\text{C}$$

This is temperature on the boundary: regular brick – insulation. Therefore, the regular brick is in the temperature range between  $477^\circ\text{C}$  and  $680^\circ\text{C}$ .

### EXAMPLE 2.2

Insulation is to be put on a steel pipe which internal diameter is  $d_1 = 33$  mm and the external one equals  $D = 38$  mm. Thermal conductivity of the pipe is  $k_1 = 41$  W/(m·K). Gas with the average temperature  $T_1 = 200^\circ\text{C}$  is flowing in the pipe; a coefficient of convection heat transfer between the flowing gas and the internal surface of the pipe is  $h_1 = 40$  W/(m<sup>2</sup>K). Assuming that a coefficient of convection heat transfer between the pipe and the surroundings equals  $h_2 = 10$  W/(m<sup>2</sup>K) and the ambient temperature is  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ , calculate heat loss per 1 running meter of the pipe for the

following combinations between insulation thickness  $s_2$  and thermal conductivity of the insulation  $k_2$ :

- $s_2 = 0$ , (without insulation),
- $s_2 = 5$  mm,  $k_2 = 0.10$  W/(m·K),
- $s_2 = 5$  mm,  $k_2 = 0.25$  W/(m·K),
- $s_2 = 10$  mm,  $k_2 = 0.10$  W/(m·K),
- $s_2 = 10$  mm,  $k_2 = 0.25$  W/(m·K).

The following symbols will be used:

$d_2$  – external diameter of the insulation,

$d_{1m}$  – average diameter of the pipe (logarithmic average)

$$d_{1m} = \frac{D - d_1}{\ln(D/d_1)} = \frac{0.038 - 0.033}{\ln(0.038/0.033)} = 0.0354 \text{ m}$$

$s_1$  – pipe wall thickness (= 0.0025 m),

$d_{2m}$  – average diameter of the insulation (logarithmic average)

$$d_{2m} = \frac{d_2 - D}{\ln(d_2/D)} \quad (\text{a})$$

In order to make calculations, formula (2.13) will be used after rearrangement to the following form

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{\Delta T \cdot \pi}{\frac{1}{h_1 d_1} + \frac{s_1}{k_1 d_{m1}} + \frac{s_2}{k_2 d_{m2}} + \frac{1}{h_2 d_2}}$$

where:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 200 - 15 = 185 \text{ K,}$$

$L$  – pipe thickness.

- For the pipe without insulation:  $s_2 = 0$  and  $d_2 = D = 0.038$  m. Heat loss per 1 running meter of the pipe is

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{185 \cdot \pi}{\frac{1}{40 \cdot 0.033} + \frac{0.0025}{41 \cdot 0.0354} + \frac{1}{10 \cdot 0.038}} = 171.4 \text{ W/m}$$

- b. When insulation with thickness of 5 mm is used, external diameter of the insulation equals  $d_2 = 0.048$  m and the average diameter (according to relation (a))

$$d_{2m} = \frac{0.048 - 0.038}{\ln(0.048/0.038)} = 0.0428 \text{ m}$$

When  $k_2 = 0.1$  W/(m·K), heat loss is

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{185 \cdot \pi}{\frac{1}{40 \cdot 0.033} + \frac{0.0025}{41 \cdot 0.0354} + \frac{0.005}{0.1 \cdot 0.0428} + \frac{1}{10 \cdot 0.048}} = 144.9 \text{ W/m}$$

- c. When  $s_2 = 5$  mm and  $k_2 = 0.25$  W/(m·K), the heat loss is as follows

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{185 \cdot \pi}{\frac{1}{40 \cdot 0.033} + \frac{0.0025}{41 \cdot 0.0354} + \frac{0.005}{0.25 \cdot 0.0428} + \frac{1}{10 \cdot 0.048}} = 175.6 \text{ W/m}$$

- d. When insulation with thickness of 10 mm is used, its external diameter of the insulation is  $d_2 = 0.058$  m and the average diameter equals

$$d_{2m} = \frac{0.058 - 0.038}{\ln(0.058/0.038)} = 0.0473 \text{ m}$$

When  $k_2 = 0.1$  W/(m·K), the heat loss is equal to

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{185 \cdot \pi}{\frac{1}{40 \cdot 0.033} + \frac{0.0025}{41 \cdot 0.0354} + \frac{0.010}{0.1 \cdot 0.0473} + \frac{1}{10 \cdot 0.058}} = 126.4 \text{ W/m}$$

- e. When  $s_2 = 10$  mm and  $k_2 = 0.25$  W/(m·K), the heat loss is

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{185 \cdot \pi}{\frac{1}{40 \cdot 0.033} + \frac{0.0025}{41 \cdot 0.0354} + \frac{0.010}{0.25 \cdot 0.0473} + \frac{1}{10 \cdot 0.058}} = 174.6 \text{ W/m}$$

Analysis of the obtained results leads to a conclusion that using insulation with thermal conductivity  $k_2 = 0.25$  W/(m·K) is aimless or even harmless, while insulation

with  $k_2 = 0.10 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  fulfills its role. Moreover, it can be seen that the heat loss for  $k_2 = 0.25 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  firstly increases with insulation thickness and then decreases; heat loss for  $s_2 = 0$  is  $171.4 \text{ W}/\text{m}$ , for  $s_2 = 5 \text{ mm}$  –  $175.6 \text{ W}/\text{m}$ , for  $s_2 = 10 \text{ mm}$  –  $174.6 \text{ W}/\text{m}$ . When insulation with  $k_2 = 0.10 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  is used, heat loss decreases with the increase of  $s_2$ . The reason for this is the existence of the critical insulation diameter (formula (2.14)). If  $k_2 = 0.25 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , this diameter is

$$d_{2cr} = \frac{2k_2}{h_2} = \frac{2 \cdot 0.25}{10} = 0.05 \text{ m}$$

The maximum heat loss is observed for this value of the insulation external diameter i.e. for insulation thickness of  $6 \text{ mm}$ . When  $k_2 = 0.10 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , the critical insulation diameter is  $d_{2cr} = 0.02 \text{ m}$ , so it is lower than the pipe diameter; in this case the maximum of heat losses does not occur and even thinner insulation layer causes heat losses to decrease.

It should also be noted that thermal resistance of the steel pipe could have been neglected because this value was much lower than the other thermal resistances.

### EXAMPLE 2.3

Some process will be realized at temperature  $T_1 = 500^\circ\text{C}$  in a cylindrical laboratory reactor which internal diameter is  $d_1 = 0.15 \text{ m}$ . The carrying steel wall of the reactor has thickness of  $s_2 = 5 \text{ mm}$ . The permissible operating temperature of this wall equals  $400^\circ\text{C}$ . Due to safety reasons, it is required that temperature of the external wall of the reactor was not higher than  $70^\circ\text{C}$ ; the coefficient of convection heat transfer to the surrounding for this temperature is  $h_2 = 13 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Considering a chamotte brick (as internal lining for the reactor) with thermal conductivity  $k_1 = 1.16 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  and glass wool (as external insulation) with  $k_3 = 0.104 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , select thicknesses of both layers with accuracy of  $1 \text{ cm}$  that assure the demanded temperature conditions and the minimal external diameter of the reactor. Neglect resistances to convection heat transfer inside the reactor and thermal resistance to conduction through the carrying wall. The ambient temperature is  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ .

---

Since there are two unknowns:  $s_1$  and  $s_3$ , and the system of nonlinear equations describing the process is quite hard to solve, the problem was solved with the trial and error method. The following algorithm was used.

1. Values of thicknesses of brick and insulation layers i.e.,  $s_1$  and  $s_3$ , are assumed.
2. The internal and external diameters of the carrying wall i.e.,  $D_w$  and  $D_z$ , and the external diameter of the insulation  $d_2$  (fig. 2.6) are calculated with the use of the following formulas

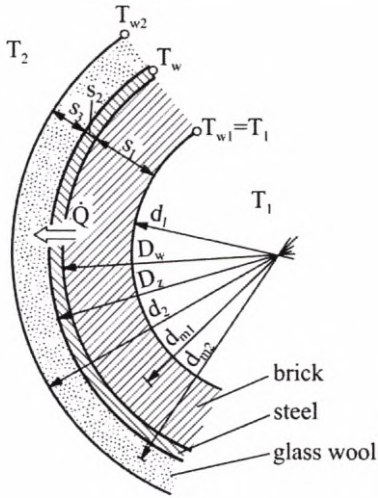


Fig. 2.6. Heat conduction through three cylindrical walls

$$D_w = d_1 + 2s_1 = 0.15 + 2s_1 \quad (a)$$

$$D_z = D_w + 2s_2 = D_w + 0.01 \quad (b)$$

$$d_2 = D_z + 2s_3 \quad (c)$$

3. The (logarithmic) average diameters of brick and insulation layers i.e.,  $d_{m1}$  and  $d_{m3}$ , are calculated with the formulas

$$d_{m1} = \frac{D_w - d_1}{\ln(D_w/d_1)} = \frac{2s_1}{\ln(D_w/0.15)} \quad (d)$$

$$d_{m3} = \frac{d_2 - D_z}{\ln(d_2/D_z)} = \frac{2s_3}{\ln(d_2/D_z)} \quad (e)$$

4. The heat loss per 1 running meter of reactor height is calculated according to the following formula resulting from relation (2.13)

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{\Delta T \cdot \pi}{\frac{1}{h_1 d_1} + \frac{s_1}{k_1 d_{m1}} + \frac{s_2}{k_2 d_{m2}} + \frac{s_3}{k_3 d_{m3}} + \frac{1}{h_2 d_2}}$$

For the conditions of the Example:  $\Delta T = T_1 - T_2 = 500 - 20 = 480$  K. Moreover, the first and third term in the denominator are equal to zero (there is no resistance to convection heat transfer inside the reactor and resistance to conduction in the steel pipe). After substitution of the numerical values:  $k_1 = 1.16$  W/(m·K),  $k_3 = 0.104$  W/(m·K),  $h_2 = 13$  W/(m<sup>2</sup>K), the formula takes the form

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{480 \cdot \pi}{\frac{s_1}{1.16 \cdot d_{m1}} + \frac{s_3}{0.104 \cdot d_{m3}} + \frac{1}{13 \cdot d_2}} \quad (f)$$

5. On the basis of the value  $(\dot{Q}/L)$ , temperature of the steel wall  $T_w$  (as thermal resistance inside this wall is small, temperatures on both sides of the wall are almost indistinguishable) and temperature of the external insulation layer  $T_{w2}$  are calculated. In order to calculate  $T_w$ , formula (2.9) for a single-layer cylindrical wall is used

$$\dot{Q} = \frac{k_1}{s_1} (T_{w1} - T_w) \cdot \pi d_{m1} L$$

After substitution of numerical values

$$T_w = 500 - \frac{(\dot{Q}/L) s_1}{\pi k_1 d_{m1}} \quad (\text{g})$$

Equation (3.1) is used to calculate  $T_{w2}$

$$\dot{Q} = h_2 (T_{w2} - T_2) \pi d_2 L$$

Substitution of numerical values yields

$$T_{w2} = T_2 + \frac{(\dot{Q}/L)}{13 \pi d_2} \quad (\text{h})$$

6. It must be checked if the following temperature conditions are fulfilled:  $T_w < 400^\circ\text{C}$  and  $T_{w2} < 70^\circ\text{C}$ . For example for  $s_1 = 0.09$  m and  $s_3 = 0.06$  m, it was obtained that

$$D_w = 0.15 + 2 \cdot 0.09 = 0.33 \text{ m}$$

$$D_z = 0.33 + 0.01 = 0.34 \text{ m}$$

$$D_2 = 0.34 + 2 \cdot 0.06 = 0.46 \text{ m}$$

$$d_{m1} = \frac{2 \cdot 0.09}{\ln(0.33/0.15)} = 0.228 \text{ m}$$

$$d_{m3} = \frac{2 \cdot 0.06}{\ln(0.46/0.34)} = 0.397 \text{ m}$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{480 \cdot \pi}{\frac{0.09}{1.16 \cdot 0.228} + \frac{0.06}{0.104 \cdot 0.397} + \frac{1}{13 \cdot 0.46}} = 769 \text{ W/m}$$

$$T_w = 500 - \frac{769 \cdot 0.09}{\pi \cdot 1.16 \cdot 0.228} = 417^\circ\text{C} > 400^\circ\text{C}$$

$$T_{w2} = 20 + \frac{769}{13 \cdot \pi \cdot 0.46} = 60.9^\circ\text{C} < 70^\circ\text{C}$$

Table 2.5

Lp.	$s_1$ [m]	$s_3$ [m]	$s_1+s_3$ [m]	$(\dot{Q}/L)$ [W/m]	$T_w$ [°C]	$T_{w2}$ [°C]
1	0.09	0.04	0.13	980	394	77.1
2	0.09	0.05	0.14	860	407	67.8
3	0.09	0.06	0.15	769	417	60.9
4	0.10	0.04	0.14	1002	384	75.8
5	0.10	0.05	0.15	881	398	66.9
6	0.10	0.06	0.16	790	408	60.3
7	0.11	0.04	0.15	1022	247	74.4
8	0.11	0.05	0.16	902	277	66.0
9	0.11	0.06	0.17	670	334	52.8
10	0.36	0	0.36	1784	70	69.6

As can be seen, the condition for  $T_w$  is not fulfilled. Results of calculations for different sets of values of  $s_1$  and  $s_3$  conducted according to the presented scheme are shown in table 2.5. The last position in the table refers to the lack of the external glass wool insulation layer; it is very disadvantageous, as in this case the very thick brick layer is required. Among the other solutions that meet the temperature requirements (position 5, 8 and 9), number 5 is the best because the total insulation thickness is minimal.

#### EXAMPLE 2.4

A large steel plate (infinite plate) which thickness is 70 mm and temperature (homogeneous) equals  $T_i = 360^\circ\text{C}$  was emerged in a tank with oil in order to harden the plate. The average temperature of oil is  $T_b = 30^\circ\text{C}$  and it can be assumed that it is constant. Calculate temperature in the axis of the plate after 440 s from the moment of emerging if:

- temperature of the plate's surface is equal to temperature of oil,
- a coefficient of convection heat transfer between the plate and oil is  $743 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ .

In the case b), calculate also temperature of the surface of the plate after the given time interval. Thermal conductivity of the plate is  $k = 25.5 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , density  $\rho = 7850 \text{ kg}/\text{m}^3$ , heat capacity  $c = 498 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ .

Thermal diffusivity is

$$a = \frac{k}{c\rho} = \frac{25.5}{498 \cdot 7850} = 6.52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

The quantity  $s$  is half of thickness of the plate:  $s = 0.07/2 = 0.035 \text{ m}$ . Dimensionless time and the Biot number was calculated



$$\tau = \frac{at}{s^2} = \frac{6.52 \cdot 10^{-6} \cdot 440}{(0.035)^2} = 2.34$$

$$\text{Bi} = \frac{hs}{k} = \frac{743 \cdot 0.035}{25.5} = 1.02$$

- a. When temperature of a surface of an infinite plate is equal to temperature of fluid (thermal resistance is only in the body,  $\text{Bi} \rightarrow \infty$ ), solution (2.23) is valid; taking into account the first two summands, one gets

$$Y = \frac{4}{\pi} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau\right] \cdot \cos \frac{\pi \eta}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \exp\left[-9\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \tau\right] \cdot \cos \frac{3\pi \eta}{2} \quad (\text{a})$$

For the axis of the plate, it can be written that  $x = 0$ , so  $\eta = x/s = 0$ ; substituting numerical values, one obtains

$$Y = \frac{4}{\pi} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 2.34\right] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \exp\left[-9\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 2.34\right] \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} \cdot 0\right) = \\ = 0.00393 - 1.1 \cdot 10^{-23} = 0.00393$$

As can be seen, the second term in the series is much smaller than the first one and it practically does not influence the calculations; it is easy to check that further terms are even less significant. The value of  $Y$  can now be determined with the use of fig. 2.1. It was obtained that  $Y \cong 0.004$  for  $\tau = 2.34$ ,  $\eta = 0$  and  $\text{Bi} \rightarrow \infty$ . Temperature inside the plate after 440 of cooling is (formula (2.15))

$$T = T_b + Y (T_i - T_b) = 30 + 0.00393 \cdot (360 - 30) = 31.3^\circ\text{C}$$

This value corresponds to the lack of thermal resistance inside the fluid (it can be partially obtained by intensive mixing of oil).

- b. When thermal resistance of the fluid cannot be neglected ( $\text{Bi} < 100$ ), formula (2.27) must be used in calculations; taking into account the first two summands, one gets

$$Y = \frac{2 \sin \beta_1 \cdot \cos(\beta_1 \eta)}{\beta_1 + \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1} \cdot \exp(-\beta_1^2 \tau) + \frac{2 \sin \beta_2 \cdot \cos(\beta_2 \eta)}{\beta_2 + \sin \beta_2 \cdot \cos \beta_2} \cdot \exp(-\beta_2^2 \tau) \quad (\text{b})$$

Values of  $\beta$  are consecutive positive roots of equation (2.27a)

$$\beta_i = 1.02 \cdot \text{ctg} \beta_i$$

The value  $\beta_1$  is in the interval  $(0, \pi/2)$ , and  $\beta_2$  – in the interval  $(\pi, 3\pi/2)$  etc. The first two roots of the equation were found in table 2.2 (it was assumed that  $\text{Bi} = 1$ ):  $\beta_1 = 0.8603$ ;  $\beta_2 = 3.4256$ .

Value of dimensionless temperature  $A$  for the axis of the plate ( $\eta = 0$ ) is

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2 \cdot \sin(0.8603) \cdot \cos(0.8603 \cdot 0)}{0.8603 + \sin(0.8603) \cdot \cos(0.8603)} \cdot \exp\left[-(0.8603)^2 \cdot 2.34\right] + \\ &+ \frac{2 \cdot \sin(3.4256) \cdot \cos(3.4256 \cdot 0)}{3.4256 + \sin(3.4256) \cdot \cos(3.4256)} \cdot \exp\left[-(3.4256)^2 \cdot 2.34\right] + \dots = \\ &= 0.198 - 1.7 \cdot 10^{-13} + \dots = 0.198 \end{aligned}$$

As before, only the first summand is significant what is typical for  $\tau > 0.5$ . With the use of the chart in fig. 2.1, it was obtained that  $Y \cong 0.20$  for  $\tau \cong 2.34$ ,  $\eta = 0$  and  $\text{Bi} \cong 1.0$ . Temperature in the axis of the plate is

$$T = 30 + 0.198 \cdot (360 - 30) = 95.3^\circ\text{C}$$

so it is much higher than the one calculated in point a). It is  $x = s$ , so  $\eta = 1$ , for the surface of the plate; substitution to relation (b) yields

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2 \cdot \sin(0.8603) \cdot \cos(0.8603 \cdot 1)}{0.8603 + \sin(0.8603) \cdot \cos(0.8603)} \cdot \exp\left[-(0.8603)^2 \cdot 2.34\right] + \\ &+ \frac{2 \cdot \sin(3.4256) \cdot \cos(3.4256 \cdot 1)}{3.4256 + \sin(3.4256) \cdot \cos(3.4256)} \cdot \exp\left[-(3.4256)^2 \cdot 2.34\right] + \dots = \\ &= 0.129 - 1.6 \cdot 10^{-13} + \dots = 0.129 \end{aligned}$$

It was read from the chart (fig. 2.1) that  $Y \cong 0.13$  for  $\tau \cong 2.34$ ,  $\eta = 1$  and  $\text{Bi} \cong 1.0$ . Surface temperature of the plate is

$$T = 30 + 0.129 \cdot (360 - 30) = 72.6^\circ\text{C}$$

Temperature of the surface is much higher than temperature of oil because thermal resistance is quite significant. When solids are being cooled or heated, thermal resistance in the surrounding fluid can be neglected only in exceptional cases.

## EXAMPLE 2.5

A ceramic block with dimensions  $100 \times 100 \times 50$  mm is being cooled down by the surrounded air with temperature  $20^\circ\text{C}$  after it has been burnt at temperature  $900^\circ\text{C}$ . Assuming that cooling temperature of the block is homogeneous at the beginning, calculate the time required for temperature to drop to  $30^\circ\text{C}$ . Thermal conductivity of the block is  $k = 0.71$  W/(m·K), its density  $\rho = 1650$  kg/m<sup>3</sup>, heat capacity  $c = 774$  J/(kg·K), a coefficient of convection heat transfer between the block and the air (radiation included)  $h = 30$  W/(m<sup>2</sup>K).

Thermal diffusivity

$$a = \frac{k}{c\rho} = \frac{0.71}{774 \cdot 1650} = 5.56 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Because dimensions of the considered body are commensurable, it cannot be treated as an infinite slab. Quantities  $\tau$ , Bi and  $Y$  referred to individual axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  of the coordinate system must be used in calculations. The block (rectangular prism) should be treated as a solid formed as a result of intersection of three infinite plates that are perpendicular to each other and their thicknesses are:  $s_x = 0.1/2 = 0.05$  m,  $s_y = 0.1/2 = 0.05$  m and  $s_z = 0.05/2 = 0.025$  m. The Biot numbers are as follows

$$\text{Bi}_x = \frac{h s_x}{k} = \frac{30 \cdot 0.05}{0.71} = 2.11$$

$$\text{Bi}_y = \frac{h s_y}{k} = \frac{30 \cdot 0.05}{0.71} = 2.11$$

$$\text{Bi}_z = \frac{h s_z}{k} = \frac{30 \cdot 0.025}{0.71} = 1.06$$

The problem will be solved with the trial and error method: value of time  $t$  is assumed, values of time  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  and  $\tau_z$  are calculated, dimensionless quantities  $Y_x$ ,  $Y_y$  and  $Y_z$  are determined, finally  $Y$  is calculated according to formula (2.38) and the consistency of this value with the value resulting from the conditions of the Example is checked. The value of  $Y$  should be equal to

$$Y = \frac{T - T_b}{T_i - T_b} = \frac{30 - 20}{900 - 20} = 0.0114 \quad (\text{a})$$

Preliminary calculations were conducted for the values of time equal to 1800 s, 2700 s and 3600 s. The values of dimensionless time for  $t = 1800$  s are

$$\tau_x = \frac{at}{s_x} = \frac{5.56 \cdot 10^{-7} \cdot 1800}{(0.05)^2} = 0.400$$

$$\tau_y = \frac{at}{s_y} = \frac{5.56 \cdot 10^{-7} \cdot 1800}{(0.05)^2} = 0.400$$

$$\tau_z = \frac{at}{s_z} = \frac{5.56 \cdot 10^{-7} \cdot 1800}{(0.025)^2} = 1.60$$

Values of  $Y_x$ ,  $Y_y$  and  $Y_z$  were read on the chart (fig. 2.1) for particular Biot numbers, values of dimensionless time and  $\eta = 1$ . It was obtained that  $Y_x = Y_y \cong 0.35$  and  $Y_z \cong 0.22$ . The value of  $Y$  is

$$Y = Y_x Y_y Y_z = 0.35 \cdot 0.35 \cdot 0.22 = 0.027$$

This value is lower than the real one, which was calculated according to relation (a). Temperature of the block's surface (after 1800 s), corresponding to  $Y = 0.027$ , is

$$T = T_b + Y (T_i - T_b) = 20 + 0.027 \cdot (900 - 20) = 43.8^\circ\text{C}$$

Similar calculations were conducted for  $t = 2700$  s and  $t = 3600$  s. Results are presented in table 2.6.

Table 2.6

$t$ [s]	1800	2700	3600
$\tau_x, \tau_y$	0.40	0.60	0.80
$\tau_z$	1.60	2.40	3.20
$Y_x = Y_y$	0.35	0.28	0.22
$Y_z$	0.23	0.12	0.07
$Y$	0.028	0.0094	0.0034
$T$ [°C]	43.8	28.3	23.0

It can be seen from the table that the cooling time after which surface temperature is  $30^\circ\text{C}$ , is slightly lower than 2700 s.

The assumption that  $t = 2400$  s was taken and exact calculations were conducted. The values of dimensionless time are as follows

$$\tau_x = \tau_y = \frac{5.56 \cdot 10^{-7} \cdot 2400}{(0.05)^2} = 0.534$$

$$\tau_z = \frac{5.56 \cdot 10^{-7} \cdot 2400}{(0.025)^2} = 2.14$$

Then equation (2.27a) was solved for  $Bi_x = Bi_y = 2.113$  and  $Bi_z = 1.056$ . In the first case

$$\beta = 2.11 \cdot \text{ctg } \beta$$

The lowest positive root of this equation is  $\beta_{1x} = \beta_{1y} = 1.093$ . Equation (2.27a) for  $Bi_z = 1.06$  has the form

$$\beta = 1.06 \cdot \text{ctg } \beta$$

It was obtained that  $\beta_{1z} = 0.877$ .

Since  $\tau > 0.5$ , only the first summands in (2.27) were used to calculate the dimensionless temperatures. For  $\eta = 1$  (surface of the block) it was obtained that

$$Y_x = \frac{2 \sin \beta_{1x} \cdot \cos(\beta_{1x} \eta)}{\beta_{1x} + \sin \beta_{1x} \cdot \cos \beta_{1x}} \cdot \exp[-\beta_{1x}^2 \tau_{sx}]$$

$$Y_x = \frac{2 \sin(1.093) \cdot \cos(1.093 \cdot 1)}{1.093 + \sin(1.093) \cdot \cos(1.093)} \cdot \exp[-(1.093)^2 \cdot 0.534] = 0.288$$

$$Y_x = Y_y = 0.288$$

$$Y_z = \frac{2 \sin \beta_{1z} \cdot \cos(\beta_{1z} \eta)}{\beta_z + \sin \beta_{1z} \cdot \cos \mu \beta_{1z}} \cdot \exp[-\beta_{1z}^2 \tau_{sz}]$$

$$Y_z = \frac{2 \sin(0.877) \cdot \cos(0.877 \cdot 1)}{0.877 + \sin(0.877) \cdot \cos(0.877)} \cdot \exp[-(0.877)^2 \cdot 2.14] = 0.139$$

Using relation (2.38), one gets

$$Y = Y_x Y_y Y_z = (0.288)^2 \cdot 0.139 = 0.0115$$

This result is quite consistent with the value calculated according to relation (a); after 2400 s, temperature of the surface of the block equals

$$T = 20 + 0.0115 \cdot (900 - 20) = 30.1^\circ\text{C}$$

#### EXERCISE 2.1

The internal surface of a flat wall of a furnace has temperature of  $600^\circ\text{C}$ , and temperature of the external one is equal to  $150^\circ\text{C}$ . Heat losses per  $1\text{ m}^2$  of the wall surface are equal to  $1660\text{ W/m}^2$ . How many times will heat losses decrease if the external surface of the wall is covered with an additional insulation layer which thickness is 5 cm and thermal conductivity equals  $0.08\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ? It is known that after the cover has been added, temperature of the external surface of insulation is  $73^\circ\text{C}$ . Assume that temperature of the internal surface of the furnace's wall does not change.

A n s w e r: 2.82 times.

#### EXERCISE 2.2

A 40 mm thick layer of insulation was put on a 100 mm diameter pipeline. Temperature of the internal surface of the insulation is  $150^\circ\text{C}$ , and temperature of the external one equals  $50^\circ\text{C}$ . At what distance from the external surface of the insulation temperature equals  $100^\circ\text{C}$ ? Take into account curvature of the walls.

A n s w e r: 22.9 mm.

#### EXERCISE 2.3

A pipe is to be insulated with two layers of insulation which have the same thickness and different thermal conductivities. Give the more economical (with regard to heat losses) order of layers. Include curvature of the walls.

A n s w e r: Insulation with the lower coefficient  $k$  should be used as the internal layer.

#### EXERCISE 2.4

For the conditions of the Example 2.2, calculate thickness of the insulation with thermal conductivity  $0.25\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  which ensures that heat losses will be the same as for a pipe without insulation.

A n s w e r: 14.8 mm.

#### EXERCISE 2.5

Lateral surface of a copper rod is perfectly insulated. The end of the rod was put into a furnace where temperature is  $800^\circ\text{C}$ . Calculate temperature at the distance of 0.8 m from the hot end of the rod after 1 hour of heating if:

- a) the rod is very long and temperature of its hot end is  $800^{\circ}\text{C}$  (lack of resistance to convection heat transfer to the surface of rod's end),
- b) temperature of the hot end of the rod is  $800^{\circ}\text{C}$  as in point a) but length of the rod is 0.8 m,
- c) the rod is very long and a coefficient of convection heat transfer to the end of the rod is  $240 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

Make the calculations, assuming that the initial temperature of the rod is equal to  $20^{\circ}\text{C}$ . Assume that for copper:  $k = 385 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $c = 400 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $\rho = 8930 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Advice: An infinitely long rod having the lateral surface insulated should be treated as a semi-infinite body and a rod with finite length and insulated lateral surface – as a half of an infinite plate.

Answer: a)  $306^{\circ}\text{C}$ , b)  $550^{\circ}\text{C}$ , c)  $87.3^{\circ}\text{C}$

#### EXERCISE 2.6

An aluminium 6 cm diameter ball which temperature is  $300^{\circ}\text{C}$  was thrown into large volume of oil at temperature  $20^{\circ}\text{C}$ . Assuming that a coefficient of convection heat transfer between the ball and oil is  $1100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , calculate temperature in the centre of the ball after 20 s from the moment it was put into oil. Compare the obtained value with the result of calculations made under the assumption that there is no resistance to conduction in the ball. Assume that for aluminium:  $k = 201 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $c = 686 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

Answer:  $218.8^{\circ}\text{C}$ .

$214.6^{\circ}\text{C}$  (lack of resistance to conduction).

#### EXERCISE 2.7

A cylindrical tin containing meat was pasteurized with the use of saturated water vapor which pressure equals 0.143 MPa. The initial temperature of the tin and its content was  $20^{\circ}\text{C}$ . Diameter of the tin is 100 mm and its height – 60 mm. Calculate temperature in the geometric centre of the tin after 1 hour of pasteurization. Assume that temperature of its surface is equal to saturation temperature of vapor, and thermal diffusivity of the content of the tin is  $1.56 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Neglect thermal resistance of the container (metal tin).

Answer:  $97.8^{\circ}\text{C}$ .





### 3. CONVECTION HEAT TRANSFER AND HEAT RADIATION

The amount of heat transferred from a wall to fluid (or inversely) in a unit of time is defined by the Newton's law

$$d\dot{Q} = h \cdot \Delta T_w \cdot dA \quad (3.1)$$

where

$$\Delta T_w = |T_w - T| \quad (3.2)$$

$\dot{Q}$  – rate of heat transfer, W,

$T_w$  – wall temperature, °C,

$T$  – temperature of fluid in a point appropriately distant from the wall, it is so called fluid bulk temperature, °C,

$h$  – convection heat transfer coefficient, W/(m<sup>2</sup>K),

$A$  – heat transfer area (surface area of a wall), m<sup>2</sup>.

Values of convection heat transfer coefficients usually depend on fluid temperature. In practice, convection heat transfer coefficients for a whole apparatus (not local coefficients defined by the formula (3.1)) are calculated. Because temperatures of fluid usually change between an inlet and outlet, values of convection heat transfer coefficients are determined for average temperatures in a whole apparatus or its chosen part.

It is usually not possible to determine values of convection heat transfer coefficients theoretically so many empirical correlations have been developed. These formulas are valid only for these conditions of heat transfer between bulk of a fluid and a wall (or inversely) for which they were developed and most often they have the form of a relation between dimensionless numbers. A convection heat transfer coefficient occurs in the Nusselt number which characterizes the ratio of thermal resistance to conduction in a fluid to resistance to heat transfer between fluid bulk and a wall

$$\text{Nu} = \frac{hL}{k} \quad (3.3)$$

Symbol  $L$  in the above definition denotes a characteristic linear dimension and  $k$  – a thermal conductivity of fluid. All physical properties of a medium from (to) which heat is transferred (i.e.  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c$  and  $k$ ) must be determined for the average temperature of a boundary layer i.e. for the temperature  $0.5 \cdot (T + T_w)$ . When simplified calculations are done, these properties can be determined for temperature of a medium  $T$ .

Conditions under which heat transfer occurs can be divided into two types: heat transfer with forced and free flow of fluid. The free flow is when natural convection, falling film of liquid over vertical walls, condensation of vapors and boiling of liquids occurs. Ranges of convection heat transfer coefficients for the most common cases are presented in table 3.1. The lower values for heating and cooling refer to natural convection.

Table 3.1

Ranges of convection heat transfer coefficients for typical cases

Process	$h$ [W/(m <sup>2</sup> K)]
Heating or cooling of air	3÷100
Heating or cooling of oils	60÷1600
Heating or cooling of water	300÷10000
Condensation of organic vapors	1000÷2000
Condensation of water vapor (film-condensation)	6000÷15 000
Boiling of water (bubble boiling)	1500÷25 000

Heat radiation is an another kind of heat transfer. It is particularly important at high temperatures.

### 3.1. CONVECTION HEAT TRANSFER FOR FORCED FLOW OF A FLUID

A convection heat transfer coefficient for forced, highly turbulent flow of a fluid with low coefficient of viscosity in a long pipe of diameter  $d$  is calculated with the McAdams formula

$$\text{Nu} = 0.023 \cdot \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4} \quad (3.4)$$

where  $\text{Re}$  is the Reynolds number which characterizes hydrodynamic conditions of flow

$$\text{Re} = \frac{u d \rho}{\mu} \quad (3.5)$$

and Pr – the Prandtl number which characterizes physical properties of fluid

$$\text{Pr} = \frac{c \mu}{k} \quad (3.6)$$

A pipe diameter is substituted as the linear dimension in Nu. This formula is valid for  $\text{Re} > 10\,000$ ,  $l/d > 50$  ( $l$  – pipe length) and  $\mu < 2 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s). More accurate results, especially for liquids with high coefficients of viscosity, can be obtained by the means of the Sieder and Tate formula, which takes into account the influence of a direction of heat transfer on a convection heat transfer coefficient

$$\text{Nu} = 0.027 \cdot \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.33} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (3.7)$$

Symbol  $\mu_w$  in this formula is the coefficient of fluid viscosity at wall temperature.

A convection heat transfer coefficient for short pipes ( $l/d < 50$ ) should be calculated with formulas (3.4) or (3.7) and the obtained result must be multiplied by the correction  $\varepsilon_l$

$$\varepsilon_l = 1 + \left( \frac{l}{d} \right)^{-0.7} \quad (3.8)$$

A hydraulic diameter of a pipe should be taken as a characteristic linear dimension (in the Re and Nu numbers) for non-circular pipes. When a fluid is flowing in a coil pipe, the convection heat transfer coefficient is calculated as for straight pipes and the result is multiplied by the correction  $\varepsilon_{coil}$

$$\varepsilon_{coil} = 1 + 3.54 \frac{d}{D_{coil}} \quad (3.9)$$

where  $D_{coil}$  is diameter of a coil.

The following formula is valid for laminar flow

$$\text{Nu} = 1.86 \left( \text{Re} \text{Pr} \frac{d}{l} \right)^{1/3} \cdot \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (3.10)$$

This formula is valid for  $\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot d/l > 13$ . Natural convection is of high or even crucial importance for heat transfer between bulk of a fluid and a wall when

temperature differences between a medium and wall are high and flow is laminar. In such cases, the convection heat transfer coefficient should be calculated with a formula appropriate for the dominant mechanism of heat transfer.

The convection heat transfer coefficient for laminar flow on the shell side of an exchanger with baffles directing a medium perpendicularly to the pipes (fig. 3.1) is calculated with the formula

$$\text{Nu} = A \cdot \text{Re}_{\max}^{0.6} \text{Pr}^{0.33} \quad (3.11)$$

This formula is valid for  $\text{Re}_{\max} > 2000$  and for at least 10 rows of pipes arranged in a chessboard configuration ( $A = 0.33$ ) or arranged in series ( $A = 0.26$ ). The external diameter of pipes must be substituted as the linear dimension in  $\text{Re}_{\max}$  and Nu, and the maximum velocity (in gaps between pipes) – as the fluid velocity in  $\text{Re}_{\max}$ .

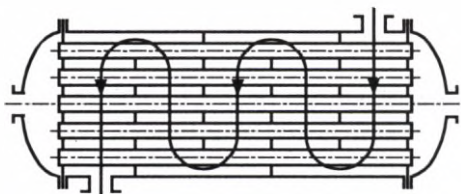


Fig. 3.1. Flow of a fluid on the shell side with baffles

Fins are often added on the external surface of pipes in order to increase the heat transfer area (fig. 3.3). The following formula may be used for heat transfer to (from) the finned surface from (to) fluid

$$\text{Nu} = 1.0 \cdot \text{Re}_{\max}^{0.5} \text{Pr}^{0.33} \quad (3.12)$$

In order to determine  $\text{Re}_{\max}$ , the maximum velocity of a fluid (air) in gaps between finned pipes must be determined; the quantity  $z_p$  defined by the equation (3.13) is the linear dimension in Nu and  $\text{Re}_{\max}$

$$z_p = \sqrt{2A_i} \quad (3.13)$$

where  $A_i$  is the heat transfer area for one fin. Formula (3.12) can be used for a wide range of the Reynolds numbers and refers to the value of the convection heat transfer coefficient corresponding to the finned surface ( $h$ ). In order to obtain value of the coefficient corresponding to the surface of a pipe  $h_\varphi$ , value of  $h$  must be multiplied by the coefficient  $\varphi$  that is the ratio of the area of finned surface to external surface area of a pipe.

Except from heat transfer in pipes and shell sides of heat exchangers, heat transfer in mixing vessels has high significance. When heat is being transferred between a liquid and a wall of a mixing vessel, the following formula is valid

$$\text{Nu} = A \cdot \text{Re}_m^{2/3} \text{Pr}^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (3.14)$$

where

$$\text{Re}_m = \frac{n d_m^2 \rho}{\mu} \quad (3.15)$$

The quantity  $\text{Re}_m$  is the Reynolds number for mixing,  $n$  – agitator revolutions frequency,  $d_m$  – agitator diameter; mixing vessel diameter is substituted as the linear dimension in Nu. The form of formula (3.14) and exponents are the same but values of the constant  $A$  are different for different types of agitators. It is  $A = 0.37$  for the paddle agitator. This formula is valid for the range of  $\text{Re}_m$  between 286 and 3 150 000.

The convection heat transfer coefficient for heat transfer between a liquid in a mixing vessel and an internal horizontal coil pipe is calculated with the formula

$$\text{Nu} = 0.87 \cdot \text{Re}_m^{0.62} \text{Pr}^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (3.16)$$

This formula is valid for paddle agitators and the range of its applicability ( $\text{Re}_m$ ) is the same as for (3.14).

### 3.2. HEAT TRANSFER BY NATURAL CONVECTION

Natural (free) convection occurs when flow of a fluid is the result of fluid density differences in a boundary layer. Density differences result from temperature difference between a wall and fluid ( $\Delta T_w$ ). The Grashof number Gr occur in relations for natural convection instead of Re. This number is a measure of the ratio of the buoyant force causing flow of the medium to the viscous force

$$\text{Gr} = \frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \beta \cdot \Delta T_w \quad (3.17)$$

where  $\beta$  is the coefficient of thermal expansion [ $K^{-1}$ ]. The convection heat transfer coefficients are determined on the basis of the general relation (for not confined space)

$$Nu = C (Gr \cdot Pr)^i \quad (3.18)$$

Values of  $C$  and  $i$  depend on the value of the product  $Gr \cdot Pr$ ; they are presented in table 3.2.

The characteristic linear dimension  $L$  (in  $Nu$  and  $Gr$ ) depends on the shape and orientation of a heat transfer area. Pipe diameter is substituted for  $L$  for horizontal pipes, while height – for vertical pipes and walls.

Table 3.2

Value of constants  $C$  and  $i$  for natural convection

Gr·Pr	$C$	$i$
$< 10^{-3}$ (conduction)	0.45	0
$10^{-3} \div 500$ (laminar flow)	1.18	1/8
$500 \div 2 \cdot 10^7$ (transient flow)	0.54	1/4
$> 2 \cdot 10^7$ (turbulent flow)	0.135	1/3

### 3.3. HEAT TRANSFER DURING PHASE CHANGE

When vapor that does not contain inert gases is condensing on a surface of a wall, the convection heat transfer coefficient is calculated with the theoretical relation derived by Nusselt. The following formula is valid for the most common laminar ( $Re_f < 1600$ ) film flow of condensate on the external surface of pipes

$$Nu_z = C' \cdot Re_{f/\max}^{-1/3} \quad (3.19)$$

The equivalent Nusselt number  $Nu_z$  is based on the equivalent linear dimension  $\vartheta_z$

$$Nu_z = \frac{h\vartheta_z}{k} = \frac{h \cdot \left( \frac{\mu^2}{\rho^2 g} \right)^{1/3}}{k} \quad (3.20)$$

Physical properties ( $\mu$ ,  $\rho$ ,  $k$ ) refer to condensate (not vapor) because when condensate contacts with a wall, it gives heat to this wall. Values of the Reynolds

number for film flow –  $Re_l$  can take different values for a given pipe; its maximum value is substituted to expression (3.19). This maximum value corresponds to flow rate of condensate in the bottom cross-section of vertical pipes and the bottom of horizontal pipes.

The maximum value of the Reynolds number  $Re_{l_{\max}}$  can be calculated on the basis of the definition of this number for film flow; moreover it must be taken into account that flow rate of the condensate is

$$\dot{m}_l = \frac{\dot{Q}}{r} = \frac{h \cdot \Delta T_w A}{r} \quad (3.21)$$

Formula for  $Re_{l_{\max}}$  for vertical pipes has the form

$$Re_{l_{\max}} = \frac{4h \cdot \Delta T_w H}{\mu r} \quad (3.22)$$

$Re_{l_{\max}}$  for horizontal pipes can be presented in the form

$$Re_{l_{\max}} = \frac{2\pi h \cdot \Delta T_w d}{\mu r} \quad (3.23)$$

The following symbols were used in the above formulas:

- $\Delta T_w$  – difference between temperature of condensation and temperature of a pipe wall, K,
- $r$  – heat of condensation (evaporation), J/kg,
- $H$  – pipes height, m,
- $d$  – pipes external diameter, m.

Substituting relations (3.22) or (3.23) into (3.19), one gets the formula for direct calculations of the convection heat transfer coefficient

$$h = C \left( \frac{r \rho^2 k^3 g}{\mu \cdot \Delta T_w L} \right)^{1/4} \quad (3.24)$$

It is  $C = 1.13$  for vertical pipes,  $C = 0.725$  – for a single horizontal pipe and  $C = 0.725/N^{1/4}$  – for  $N$  horizontal pipes placed one above another. Height  $H$  of vertical pipes and external diameter  $d$  of horizontal pipes is treated as their linear dimension  $L$ .

Generally accepted formula for convection heat transfer coefficients for boiling of liquid does not exist. Convection heat transfer coefficients for the most common and the most effective range of boiling e.g., bubble boiling, is calculated with formulas of the following type

$$h = \Phi C P^A \Delta T_w^B \quad \text{W}/(\text{m}^2\text{K}) \quad (3.25)$$

where:

- $P$  – pressure, Pa,
- $\Delta T_w$  – difference between wall temperature and boiling point of liquid, K,
- $A, B, C$  – constants,
- $\Phi$  – constant for a given substance.

For example values of constants  $A, B$  and  $C$  for boiling of large volume of liquid are as follows:  $C = 0.0326, A = 0.58, B = 2.33$ . The quantity  $\Phi$  in relation (3.25) is equal to one for water. For other substances  $\Phi$  is calculated according to formulas given in Chapter 5.7.

Bubble boiling occurs only in some ranges of temperature differences  $\Delta T_w$  and heat fluxes  $q = \dot{Q}/A$ . In the case of water, these ranges are as follows: the range of  $\Delta T_w$  is from 5 to 25 K, the range of  $q$  is from 5800 to 1 160 000 W/m<sup>2</sup>.

### 3.4. HEAT RADIATION

#### 3.4.1. Absorptivity and emissivity

Absorptivity of a body  $\alpha$  is a ratio between the amount of the absorbed radiation energy and energy falling on a body. Absorptivity depends mainly on temperature and wave length of incident radiation.

Emissivity  $\varepsilon$  is a ratio between the radiation intensity of a body and intensity of black body radiation at the same temperature.

A black body is a perfect body which completely absorbs the incident radiation. The Kirchhoff's law presents a relationship between absorptivity and emissivity of a body for a given wave length  $\lambda$  and at specific temperature (we assume that temperature of a radiation source and a body is the same).

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \quad (3.26)$$

Radiation intensity for real bodies and given wave length  $E_\lambda$  is lower than for a black body  $E_{0\lambda}$ . If the ratio  $E_\lambda/E_{0\lambda}$  is constant, such a body is called a grey body. Most objects used in technology are (perfectly) grey bodies.

#### 3.4.2. Relations for grey bodies

When larger area (2) is closed around a smaller one (1) which has higher temperature, the amount of heat transferred by radiation (from (1) to (2)) is defined by the Stefan-Boltzmann equation



$$\dot{Q} = \varepsilon_z C_0 (T_1^4 - T_2^4) A_1 \quad (3.27)$$

where

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (3.28)$$

where:

- $T_1, T_2$  – absolute temperatures of the surface (1) and (2), respectively, K,
- $C_0$  – Stefan-Boltzmann constant ( $= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ ),
- $\varepsilon_z$  – equivalent emissivity,
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – emissivity of surfaces (1) and (2),
- $A_1, A_2$  – area of the surface (1) and (2), respectively,  $\text{m}^2$ .

When  $A_2 \rightarrow \infty$  (radiation to the surroundings), then  $\varepsilon_z = \varepsilon_1$ . Formula (3.27) is valid also in the case when heat is transferred as a result of radiation between two parallel slabs and no heat is transferred outside the system. Then  $A_1 = A_2 \equiv A$ .

Values of emissivity for several types of surfaces are presented in table 3.3.

Table 3.3

Exemplary values of emmissivity

Type of surface	$\varepsilon$
Black body	1
Soot	0.95
Brick, steel	$\approx 0.8$
Polished silver	0.02÷0.03
White body	0

The amount of heat transferred by radiation may also be expressed by the equation analogical to the Newton's law. The so called equivalent coefficient of radiation results from comparison of the integrated form of relation (3.1) and formula (3.27) for  $A_1 \equiv A$ . It is obtained that

$$h_{\text{rad}} = \frac{\varepsilon_z C_0 (T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2} \quad (3.29)$$

### 3.4.3. Solar radiation

The equality between absorbing capacity and emissivity is fulfilled in most cases, however, one must be aware of its significant restriction. This restriction refers to the case when a body does not meet the requirements for a grey body and temperatures of a body and radiation source are much different. In this case absorptivity and emissivity are not equal and the difference between them is used for example in solar collectors. Values of the coefficients:  $\alpha$  and  $\varepsilon$  for different surfaces are presented in table 3.4.

Table 3.4

Solar absorptivity and emissivity of some surfaces  
at room temperature

Surface	Absorptivity $\alpha$	Emissivity $\varepsilon$
Aluminium polished	0.09	0.03
Stainless steel dull	0.50	0.21
Black chrome	0.92	0.08
Concrete	0.60	0.88
Asphalt	0.90	0.90
White paint	0.14	0.93
Black paint	0.97	0.97
Snow	0.28	0.97

The total incident solar energy per unit area of Earth's surface  $q_{solar}$  is comprised of energy of the direct solar radiation  $q_D$  and energy of the diffuse solar radiation  $q_d$ . The second type of radiation is connected with interaction in the Earth's atmosphere and causes heating of the Earth also during an overcast day. Magnitude of the term connected with the direct energy depends on orientation of a surface in reference to the direction of incident solar radiation. Hence

$$q_{solar} = q_D \cdot \cos \theta + q_d \quad (3.30)$$

where  $\theta$  is an angle between the direction of incident solar radiation and the direction perpendicular to the surface of a body.

The components of the atmosphere absorb and also emit radiation. In order to include the radiation of the atmosphere in a heat balance, a concept of the effective temperature of the atmosphere  $T_{sky}$  was introduced. It is fictional temperature that should be used in calculations which corresponds to the equivalent effect of black body radiation. Value of these temperature varies from 230 K for bright sky to 285 K for overcast sky.

Thus, net heat flux taken by a surface equals

$$q_{netto} = \alpha q_{solar} + \varepsilon \sigma (T_{sky}^4 - T_s^4) \quad (3.31)$$

The first term results from solar radiation and the second term from radiation of the atmosphere. The second term can be positive or negative what depends on the relationship between surface temperature  $T_s$  and the effective temperature of the atmosphere. Therefore, the material of a surface subjected to solar radiation must be chosen properly. If a surface of a solar collector is this surface, the material should have high absorptivity  $\alpha$  and low emissivity  $\varepsilon$ . When for example a surface of a fuel tank or a cold storage vehicle is considered, their material should have low value of  $\alpha$  and high value of  $\varepsilon$ .

### EXAMPLE 3.1

Water is flowing with velocity  $u = 0.475$  m/s in a long pipe which internal diameter is  $d = 16$  mm. Calculate the convection heat transfer coefficient for the following cases:

- the average temperature of the internal wall of the pipe is  $55^\circ\text{C}$  and the average temperature of water equals  $25^\circ\text{C}$ ,
- the average temperature of the internal wall of the pipe is  $25^\circ\text{C}$  and the average temperature of water equals  $55^\circ\text{C}$ .

In the case a), heat is transferred from the wall to water, while in the case b) heat is transferred in the opposite direction. The average temperature of a boundary layer is

$$T = \frac{25 + 55}{2} = 40^\circ\text{C}$$

The following properties of water are required for calculations:  $\rho$ ,  $c$ ,  $k$  and  $\mu$  (on the basis of table AT-1):

- coefficient of viscosity at  $25^\circ\text{C}$ :  $\mu_w = 0.8806 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s),
- coefficient of viscosity at  $40^\circ\text{C}$ :  $\mu = 0.6580 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s),
- coefficient of viscosity at  $55^\circ\text{C}$ :  $\mu_w = 0.5099 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s),
- density at  $40^\circ\text{C}$ :  $\rho = 992.2$  kg/m<sup>3</sup>,
- heat capacity at  $40^\circ\text{C}$ :  $c = 4175$  J/(kg·K),
- thermal conductivity at  $40^\circ\text{C}$ :  $k = 0.633$  W/(m·K).

The Reynolds number equals

$$\text{Re} = \frac{u d \rho}{\mu} = \frac{0.475 \cdot 0.016 \cdot 992.2}{0.6580 \cdot 10^{-3}} = 11460$$

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{c\mu}{k} = \frac{4175 \cdot 0.6580 \cdot 10^{-3}}{0.633} = 4.34$$

The numbers Re and Pr were calculated for the average temperature of a boundary layer. Further calculations were firstly conducted with the Sieder-Tate formula.

*Ad a.* The Nusselt number for heat transfer from the wall of the pipe to water (heating of water) is

$$\text{Nu} = 0.027 \cdot \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.33} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

$$\text{Nu} = 0.027 \cdot (11460)^{0.8} \cdot (4.34)^{0.33} \cdot \left( \frac{0.8806 \cdot 10^{-3}}{0.5099 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.14} = 83.6$$

The convection heat transfer coefficient equals

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{d} = \frac{83.6 \cdot 0.633}{0.016} = 3310 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

*Ad b.* Analogical calculations for heat transfer from water to the wall of the pipe (cooling of water) led to the results

$$\text{Nu} = 0.027 \cdot (11460)^{0.8} \cdot (4.34)^{0.33} \cdot \left( \frac{0.5099 \cdot 10^{-3}}{0.8806 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.14} = 71.8$$

$$h = \frac{71.8 \cdot 0.633}{0.016} = 2840 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Therefore, the convection heat transfer coefficient for cooling is lower than for heating.

Calculations with the use of the McAdams formula give the same result for both cases because formula (3.4) does not have the term  $\mu/\mu_w$  which is required to take into account the direction of heat transfer. Substitution of Re and Pr into relation (3.4) yields

$$\text{Nu} = 0.023 \cdot \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4}$$

$$\text{Nu} = 0.023 \cdot (11460)^{0.8} \cdot (4.34)^{0.33} = 73.1$$

$$h = \frac{73.1 \cdot 0.633}{0.016} = 2890 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

### EXAMPLE 3.2

0.0355 kg/s of hot air is flowing in a pipe which internal diameter equals 50 mm and length is 0.5 m. Temperature of the internal wall of the pipe is constant and equal to 114°C. How much temperature of air will decrease during flow through the pipe if air temperature at the inlet to the pipe is 126°C.

Physical properties of air at the average temperature of the boundary layer are needed to calculate the Reynolds and Prandtl numbers. Initially, it was assumed that the average temperature of air in the pipe was 126°C (i.e., its cooling was neglected) and the average temperature of the boundary layer was calculated; it is equal to:  $0.5 \cdot (114 + 126) = 120^\circ\text{C}$ . The following values were taken from table AT-2:  $c = 1025 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $k = 0.0320 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\mu = 2.256 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ .

The mass velocity of air is

$$g_m = (u\rho) = \frac{\dot{m}}{S} = \frac{4 \cdot 0.0355}{\pi \cdot (0.05)^2} = 18.1 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$$

The Reynolds number

$$\text{Re} = \frac{(u\rho) d}{\mu} = \frac{18.1 \cdot 0.05}{2.256 \cdot 10^{-5}} = 40\,070$$

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{c\mu}{k} = \frac{1025 \cdot 2.256 \cdot 10^{-5}}{0.0320} = 0.723$$

The Nusselt number is calculated with the McAdams formula, in which the correction  $\epsilon_f$  must be included

$$\varepsilon_l = 1 + \left(\frac{l}{d}\right)^{-0.7} = 1 + \left(\frac{0.5}{0.05}\right)^{-0.7} = 1.20$$

$$\text{Nu} = \varepsilon_l \cdot 0.023 \cdot \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4}$$

$$\text{Nu} = 1.20 \cdot 0.023 \cdot (40070)^{0.8} \cdot (0.723)^{0.4} = 117$$

The coefficient of heat transfer between hot air and the wall of the pipe equals

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{d} = \frac{117 \cdot 0.0320}{0.05} = 74.6 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The amount of heat transferred from air to the pipe wall through a unit area of the pipe per unit of time (according to (3.1)) can now be calculated

$$\left(\frac{d\dot{Q}}{dA}\right)_{in} = h \cdot (T_{in} - T_w) = 74.6 \cdot (126 - 114) = 895 \text{ W}/\text{m}^2$$

The above value of heat stream is of local character and refers to the inlet of the pipe (*in*). The heat transfer area is

$$A = \pi \cdot d \cdot l = \pi \cdot 0.05 \cdot 0.5 = 0.0785 \text{ m}^2$$

If it is initially assumed that  $d\dot{Q}/dA = \text{const}$  for the whole pipe, the amount of heat transferred from air to the pipe will be equal to

$$\dot{Q} \cong \left(\frac{d\dot{Q}}{dA}\right)_{in} \cdot A = 895 \cdot 0.0785 = 70.3 \text{ W}$$

so the difference between temperature of air at the inlet (*in*) and outlet (*out*) can be tentatively calculated

$$T_{in} - T_{out} = \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c} = \frac{70.3}{0.0355 \cdot 1025} = 1.9 \text{ K}$$

Temperature  $T_{out}$  is approximately equal to  $126 - 1.9 = 124.1^\circ\text{C}$  and the heat stream at the outlet of the pipe is

$$\left(\frac{d\dot{Q}}{dA}\right)_{out} = h \cdot (T_{out} - T_w) = 74.6 \cdot (124.1 - 114) = 753 \text{ W/m}^2$$

As the difference between heat streams at the inlet and outlet is not high, the average stream (for a whole pipe) can be calculated in the following way

$$\left(\frac{d\dot{Q}}{dA}\right)_m = \frac{895 + 753}{2} = 824 \text{ W/m}^2$$

The corrected value of  $\dot{Q}$  is as follows

$$\dot{Q} \cong \left(\frac{d\dot{Q}}{dA}\right)_m \cdot A = 824 \cdot 0.0785 = 64.7 \text{ W}$$

so the corrected value of air temperature at the outlet equals

$$T_{out} = T_{in} - \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c} = 126 - \frac{64.7}{0.0355 \cdot 1025} = 124.2^\circ\text{C}$$

Calculations of  $(d\dot{Q}/dA)_{out}$  can be done again on the basis of this value, however, it is not necessary because the results practically do not change. It is also not necessary to correct the assumption that the average temperature of the air is  $126^\circ\text{C}$  (the assumption taken at the beginning of calculations) because there is only a slight decrease in temperature of the air.

### EXAMPLE 3.3

Calculate the convection heat transfer coefficient for petrol which is cooled on the shell side of a heat exchanger. Petrol flow rate is 20 kg/s, its temperature equals  $40^\circ\text{C}$ . 110 pipes with external diameter 38 mm are arranged hexagonally. Baffles are installed on the shell side at intervals 0.3 m. Physical properties of petrol are as follows:  $c = 1840 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $k = 0.129 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\mu = 0.333 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{m}$ .

In the considered case, the convection heat transfer coefficient is calculated with formula (3.11). The Reynolds number is determined on the basis of velocity of fluid in the gaps between pipes (maximum velocity). Determination of this velocity is complicated because velocity of the medium which is flowing through a given segment (fig. 3.1) perpendicularly to the pencil of pipes is changing.

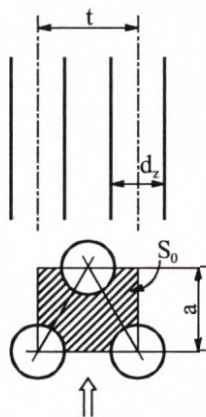


Fig. 3.2. To example (3.3)

Considering the segment of the exchanger which has baffles at intervals  $H$ , one can treat the shell in the segment as composed of volume elements which height is  $H$  and areas of their bases are  $S_0$  (fig. 3.2 – shaded area). Each fluid stream has different cross-sectional area (width). The average cross-sectional area equals

$$S = \frac{S_0 H}{a}$$

The cross-sectional area between pipes (the minimal area) is equal to

$$S_{\min} = (t - d_z) H$$

Hence

$$\frac{S_{\min}}{S} = \frac{(t - d_z) a}{S_0}$$

The above ratio of cross-sectional areas refers to the whole segment (and also to the exchanger). Since the velocity of flow is inversely proportional to the cross-sectional area of a flowing stream, the following relation is valid

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{(t - d_z) a}{S_0} \quad (a)$$

where:

$u$  – average velocity of flow on the shell side,

$u_{\max}$  – velocity of flow between pipes (the maximum velocity).

The average cross-sectional area of the shell side (where the fluid is flowing) can be expressed as the quotient of the shell side volume in a segment  $V_{mr}$  divided by the distance covered by the medium flowing in the segment, which is approximately equal to the internal diameter of the exchanger  $D$ . So the average velocity of a fluid flowing on the shell side is

$$u \cong \frac{\dot{V}}{V_{mr}/D} \quad (b)$$

It can be seen in fig. 3.2 that the following proportion is true

$$\frac{V_{mr}}{V} = \frac{S_0}{a t} \quad (c)$$



where  $V$  is the total volume of the segment. Combination of relations (a), (b) and (c) yields

$$u_{\max} = \frac{\dot{V} D}{V(1-d_z/t)} \quad (\text{d})$$

Because

$$V = \frac{\pi D^2}{4} H$$

formula (d) can be transformed to the form

$$u_{\max} = \frac{4\dot{V}}{\pi D H (1-d_z/t)} \quad (\text{e})$$

Diameter of the shell of the exchanger depends on the number of pipes and the distance between them. If 110 pipes are arranged hexagonally at intervals 50 mm, the minimal diameter of a circle containing them is about 530 mm and the number of rows of pipes equals  $10 \div 11$ .

Multiplying formula (e) by density of the medium and substituting numerical values, one gets the value of mass velocity of fluid in the gaps

$$(u_{\max} \rho) = g_{l_{\max}} = \frac{4\dot{m}}{\pi D H (1-d_z/t)} = \frac{4 \cdot 20}{\pi \cdot 0.530 \cdot 0.3 \cdot (1-38/50)} = 667 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$$

The Reynolds number is

$$\text{Re}_{\max} = \frac{g_{l_{\max}} d_z}{\mu} = \frac{667 \cdot 0.038}{0.333 \cdot 10^{-3}} = 76\,100$$

The Prandtl number equals

$$\text{Pr} = \frac{c\mu}{k} = \frac{1840 \cdot 0.333 \cdot 10^{-3}}{0.129} = 4.75$$

The Nusselt number was calculated with formula (3.11), in which it was substituted that  $A = 0.33$

$$\text{Nu} = 0.33 \cdot \text{Re}_{\max}^{0.6} \text{Pr}^{0.33} = 0.33 \cdot (76\,100)^{0.6} \cdot (4.75)^{0.33} = 469$$

Finally the convection heat transfer coefficient is calculated

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{d_z} = \frac{469 \cdot 0.129}{0.038} = 1590 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

#### EXAMPLE 3.4

The air cooler is built of finned pipes which length is 1 m. Hot liquid at average temperature 70°C is flowing in the pipes. Air with the flow rate of 18 700 m<sup>3</sup>/h at average temperature 40°C is flowing perpendicularly to the pencil of pipes which are arranged in chessboard configuration; there is 16 pipes in one row. Diameter of the fins, equal to the interval between axes of pipes in one row, is 60 mm; the external diameter of pipes – 30 mm, distance between axes of two successive fins – 10 mm, and fins thickness – 1 mm. Calculate the coefficient of heat transfer between the finned surface and air.

---

Area of the gap between finned pipes in one row i.e., area available for flowing air, equals

$$S = N i S_i = 16 \cdot 100 \cdot (0.009 \cdot 0.030) = 0.432 \text{ m}^2$$

where:

$N$  – number of pipes in one row (16),

$i$  – number of fins per pipe length ( $1/0.01 = 100$ ),

$S_i$  – area of the gap bounded by neighboring pipes and neighboring fins (fig. 3.3b).

Velocity of air in the gap between finned pipes is as follows

$$u_{\max} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{18\,700}{3600 \cdot 0.432} = 12.0 \text{ m/s}$$

Heat transfer area per one fin is (two areas of a side of a fin + frontal area of a fin + area of this part of a pipe which is between fins)

$$A_i = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[ (0.06)^2 - (0.03)^2 \right] + \pi \cdot 0.06 \cdot 0.001 + \pi \cdot 0.03 \cdot (0.01 - 0.001) = 0.00528 \text{ m}^2$$

Equivalent linear dimension for fins is calculated with formula (3.13)

$$z_p = \sqrt{2 A_i} = \sqrt{2 \cdot 0.00528} = 0.103 \text{ m}$$

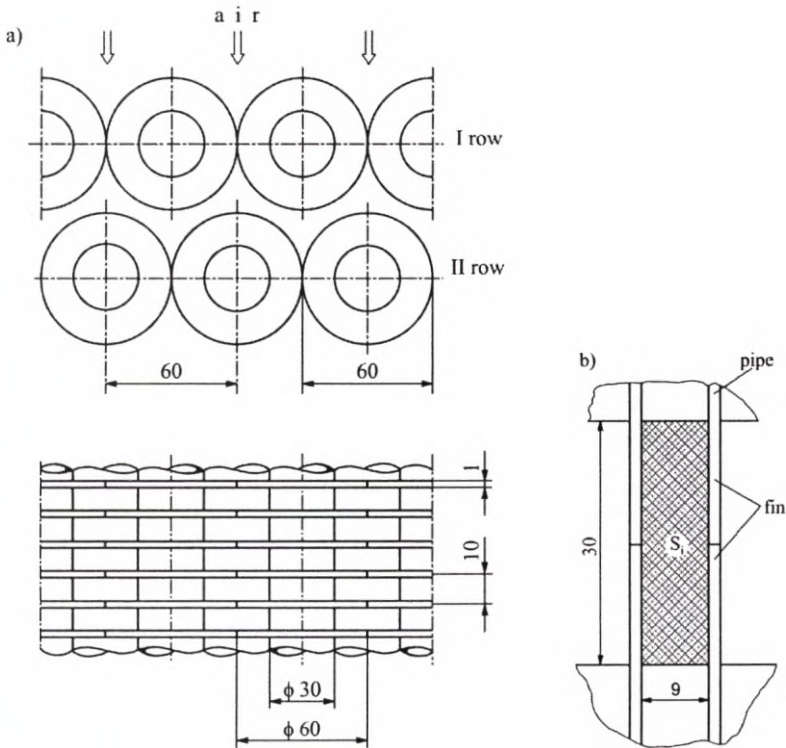


Fig. 3.3. Finned pipes: a) fragment of a pencil of finned pipes, b) gap between finned pipes

Physical properties of air at temperature  $40^{\circ}\text{C}$  were taken from table AT-2:  $\rho = 1.092 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 1014 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $k = 0.0265 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $\mu = 1.912 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ . The Reynolds number equals

$$\text{Re}_{\max} = \frac{u_{\max} z_p \rho}{\mu} = \frac{12.0 \cdot 0.103 \cdot 1.092}{1.912 \cdot 10^{-5}} = 70\,600$$

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{c \mu}{k} = \frac{1014 \cdot 1.912 \cdot 10^{-5}}{0.0265} = 0.732$$

The Nusselt number was calculated according to formula (3.12)

$$\text{Nu} = 1.0 \cdot \text{Re}_{\max}^{0.5} \text{Pr}^{0.33} = 1.0 \cdot (70\,600)^{0.5} \cdot (0.732)^{0.33} = 240$$

The convection heat transfer coefficient equals

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{z_p} = \frac{240 \cdot 0.0265}{0.103} = 61.7 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

This coefficient refers to the finned surface. Sometimes it is more convenient to use a coefficient corresponding to the external surface of the pipe. The coefficient  $\varphi$  is the ratio between the finned surface area and surface area of a pipe

$$\varphi = \frac{0.0528}{\pi \cdot 0.03 \cdot 0.1} = 5.60$$

The convection heat transfer coefficient which refers to the surface area of a pipe is the product  $h \cdot \varphi$

$$h_\varphi = h \varphi = 61.7 \cdot 5.60 = 345 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

### EXAMPLE 3.5

A cylindrical vessel (a mixing vessel) with the external diameter  $D = 300$  mm is equipped with a paddle agitator of diameter 100 mm, heating jacket and a coil pipe. Diameter of the coil is  $D_{\text{coil}} = 250$  mm and the internal diameter of its pipe equals  $d = 11$  mm.

If the revolutions frequency is  $n = 10$  1/s, calculate:

- the coefficient of heat transfer from the heating jacket to water contained in the vessel if water is being heated from  $30^\circ\text{C}$  to  $60^\circ\text{C}$  by saturated vapor which pressure is  $1.013 \cdot 10^5$  Pa,
- the coefficient of heat transfer from water to the surface of the coil pipe if water is being cooled from  $60^\circ\text{C}$  to  $40^\circ\text{C}$  and water at temperature  $20^\circ\text{C}$  is flowing in the coil pipe,
- the coefficient of heat transfer from the wall of the coil pipe to water flowing in the coil pipe at flow rate of  $0.30$   $\text{m}^3/\text{h}$  and at the average temperature  $20^\circ\text{C}$ .

*Ad a.* Because of high convection heat transfer coefficient during condensation of vapor and low thermal resistance of the wall, it can be assumed that temperature of the internal surface of the heating jacket is approximately equal to condensation temperature i.e., to  $100^\circ\text{C}$ . Temperature of the boundary layer is  $65^\circ\text{C}$  for the initial temperature of water ( $30^\circ\text{C}$ ). The following properties of water were taken from table AT-1:  $\rho = 980.6$   $\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 4184$   $\text{J}/(\text{kgK})$ ,  $k = 0.663$   $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\mu = 0.4354 \cdot 10^{-3}$   $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ . The Reynolds number for mixing was calculated on the basis of relation (3.15)

$$\text{Re}_m = \frac{n d_m^2 \rho}{\mu} = \frac{10 \cdot (0.100)^2 \cdot 980.6}{0.4354 \cdot 10^{-3}} = 225\,200$$

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{c\mu}{k} = \frac{4184 \cdot 0.4354 \cdot 10^{-3}}{0.663} = 2.75$$

The Nusselt number was calculated with formula (3.14)

$$\text{Nu} = 0.37 \cdot \text{Re}_m^{2/3} \cdot \text{Pr}^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

$$\text{Nu} = 0.37 \cdot (225200)^{2/3} \cdot (2.75)^{1/3} \cdot \left( \frac{0.7924 \cdot 10^{-3}}{0.2775 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.14} = 2220$$

Values read from table AT-1 were substituted for viscosity coefficients at wall temperature (100°C) and fluid bulk temperature (30°C):  $\mu_w = 0.2775 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s) and  $\mu = 0.7924 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s), respectively. In the case of mixing vessels, diameter  $D$  of a vessel is taken as the linear dimension in the Nusselt number. The convection heat transfer coefficient equals

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{D} = \frac{2220 \cdot 0.663}{0.3} = 4910 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

This value refers to water temperature 30°C. At the end of the heating process this temperature is equal to 60°C and the average temperature of the boundary layer is 80°C. This causes all physical properties of water to change what results in the change of values of the dimensionless numbers Re, Pr, Nu and value of the convection heat transfer coefficient. Analogical calculations as presented above but for the average temperature of the boundary layer 80°C gave: Re = 276 000, Pr = 2.19, Nu = 2190 and

$$h = 4850 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Because of the small difference, the average value of the convection heat transfer coefficient can be expressed in the form

$$h = \frac{4910 + 4850}{2} = 4880 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

*Ad b.* When the content of the vessel is being cooled by water flowing in the coil pipe, relation (3.16) is valid. Temperature of the vessel's content at the beginning of the process equals 60°C. Temperature of the external wall of the coil pipe can be assumed to be approximately equal to the average of temperatures of the media at both sides of the wall (60°C and 20°C); therefore, temperature of the wall is 40°C and temperature of the boundary layer equals 50°C.

Physical properties of water at temperature 50°C are as follows:  $\rho = 988.1 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 4178 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $k = 0.647 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $\mu = 0.5551 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ .

The Reynolds number for mixing equals

$$\text{Re}_m = \frac{10 \cdot (0.100)^2 \cdot 988.1}{0.5551 \cdot 10^{-3}} = 178\,000$$

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{4178 \cdot 0.5551 \cdot 10^{-3}}{0.647} = 3.58$$

In order to determine the Nusselt number according to formula (3.16), viscosity coefficient for water at wall temperature (40°C) and fluid bulk temperature (60°C) must be known. According to table AT-1 these coefficients are:  $\mu_w = 0.6580 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$  and  $\mu = 0.4717 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ , respectively.

$$\text{Nu} = 0.87 \cdot \text{Re}_m^{0.62} \cdot \text{Pr}^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

$$\text{Nu} = 0.87 \cdot (178\,000)^{0.62} \cdot (3.58)^{1/3} \cdot \left( \frac{0.4717 \cdot 10^{-3}}{0.6580 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.14} = 2290$$

The convection heat transfer coefficient equals

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{D} = \frac{2290 \cdot 0.647}{0.3} = 4940 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

This value refers to the initial stage of cooling of the mixing vessel's content.

At the end of cooling water in the vessel has temperature 40°C, the wall is equal to 30°C; so temperature of the boundary layer is approximately equal to 35°C. In this case the convection heat transfer coefficient is

$$h = 4580 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

so it is lower than the coefficient calculated for the process. The average value is

$$h = \frac{4940 + 4580}{2} = 4760 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

*Ad c.* In order to calculate the convection heat transfer coefficient inside the coil pipe (heat transfer from the wall to the flowing fluid), formula as for a straight pipe (3.4) with the correction (3.9) is used; in this case, mixing of fluid in the vessel plays no role. The average temperature of water in the coil pipe is 20°C. Taking the appropriate average temperatures as wall temperatures, one can calculate the average temperature of the boundary layer. At the beginning of cooling wall temperature is about 40°C and boundary layer temperature equals 30°C. Physical properties of water at 30°C are as follows:  $\rho = 995.7 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 4176 \text{ J}/(\text{kgK})$ ,  $k = 0.615 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\mu = 0.7924 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ .

Velocity of water in the coil pipe is

$$u = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{0.30/3600}{\pi(0.011)^2/4} = 0.877 \text{ m/s}$$

The Reynolds number for flow in a pipe

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{0.877 \cdot 0.011 \cdot 995.7}{0.7924 \cdot 10^{-3}} = 12120$$

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{4176 \cdot 0.7924 \cdot 10^{-3}}{0.615} = 5.38$$

The Nusselt number for a straight pipe and turbulent flow (relation (3.4))

$$\text{Nu} = 0.023 \cdot \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.4} = 0.023 \cdot (12120)^{0.8} \cdot (5.38)^{0.4} = 83.3$$

The coefficient of heat transfer in the coil pipe equals (including correction (3.9))

$$h = \left(1 + 3.54 \frac{d}{D_{\text{coil}}}\right) \frac{\text{Nu} \cdot k}{D} = \left(1 + 3.54 \cdot \frac{0.011}{0.25}\right) \cdot \frac{83.3 \cdot 0.615}{0.011} = 5380 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

At the end of heating wall temperature is approximately equal to 30°C and boundary layer temperature is 25°C; the convection heat transfer coefficient for such conditions has been calculated. Its value is

$$h = 5120 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The average value equals

$$h = \frac{5380 + 5120}{2} = 5250 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

It can be concluded on the basis of the result of calculations that approximate evaluation of wall temperatures is a good method because convection heat transfer coefficients do not change much when temperatures of walls change only slightly.

#### EXAMPLE 3.6

Cooling water which temperature is 25°C and flow rate equals 4.0 m<sup>3</sup>/h is flowing through a heating jacket of the external diameter  $d = 900$  mm. The internal diameter of the heating jacket is 1000 mm and its height is 1100 mm. Assuming that temperature of the external wall of the tank is 65°C, determine the coefficient of heat transfer from the wall of the tank to cooling water.

---

Water is flowing across the cross-section in the shape of a ring which area is

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \cdot [(1.0)^2 - (0.9)^2] = 0.149 \text{ m}^2$$

Velocity of water equals

$$u = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{4/3600}{0.149} = 0.00745 \text{ m/s}$$

Equivalent (hydraulic) diameter of the ring is calculated with the following relation

$$d_e = \frac{4S}{O} = 4 \frac{\pi(D^2 - d^2)/4}{\pi(D + d)} = D - d = 1.0 - 0.9 = 0.1 \text{ m}$$

The average temperature of the boundary layer is  $0.5 \cdot (25 + 65) = 45^\circ\text{C}$ . Physical properties of water at this temperature were determined (table AT-1):  $\rho = 990.2 \text{ kg/m}^3$ ,



$c = 4176 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $k = 0.640 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $\mu = 0.6051 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ . The Reynolds number equals

$$\text{Re} = \frac{u d_e \rho}{\mu} = \frac{0.00745 \cdot 0.1 \cdot 990.2}{0.6051 \cdot 10^{-3}} = 1220$$

Thus, flow of water is laminar. The Prandtl number equals

$$\text{Pr} = \frac{c \mu}{k} = \frac{4176 \cdot 0.6051 \cdot 10^{-3}}{0.640} = 3.95$$

In order to determine the convection heat transfer coefficient according to the relations valid for forced flow, the product  $\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot d_e/L$  is calculated

$$\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{d_e}{L} = 1220 \cdot 3.95 \cdot \frac{0.1}{1.1} = 437$$

where height of the jacket was substituted for  $L$ . The Nusselt number is calculated with formula (3.10)

$$\text{Nu} = 1.86 \cdot \left( \text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{d_e}{L} \right)^{1/3} \cdot \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

$$\text{Nu} = 1.86 \cdot (437)^{1/3} \cdot \left( \frac{0.8806 \cdot 10^{-3}}{0.4354 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.14} = 15.6$$

Symbol  $\mu_w$  in the above formula denotes viscosity coefficient at temperature  $65^\circ\text{C}$  and  $\mu$  – viscosity coefficient at temperature  $25^\circ\text{C}$  (according to table AT-1). The convection heat transfer coefficient for forced laminar flow is

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{d_e} = \frac{15.6 \cdot 0.640}{0.1} = 99.8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

A very low value of convection heat transfer coefficient was obtained. It can be seen in table 3.1 that convection heat transfer coefficients for cooling of water have values higher than  $300 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Such a low value of the coefficient results from the fact that velocity of forced flow of water is very low. However, there is an overlap between this low velocity and flow connected with natural convection. In the considered case convection currents can be of great importance for heat transport.

Thus, the convection heat transfer coefficient for natural convection i.e., in case when water is not flowing through the jacket, must be calculated.

The coefficient of thermal expansion  $\beta$  is calculated on the basis of changes of fluid density with temperature. It was found in table AT-1 that density of water at temperature 45°C is 990.2 kg/m<sup>3</sup> and at 50°C – 988.1 kg/m<sup>3</sup>. As  $\beta$  is the ratio between the relative change of volume to the change of temperature, so (indexes 0 refer to temperature 45°C)

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta T} = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}}{\frac{\Delta T}{\rho_0}} = \frac{1}{988.1} - \frac{1}{990.2} = 4.25 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

The Grashof number equals

$$\text{Gr} = \frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \cdot \beta \cdot \Delta T$$

$$\text{Gr} = \frac{(1.1)^3 \cdot (990.2)^2 \cdot 9.81}{(0.6051 \cdot 10^{-3})^2} \cdot 4.25 \cdot 10^{-4} \cdot (65 - 25) = 5.94 \cdot 10^{11}$$

The product Gr·Pr defines the character of free flow of fluid

$$\text{Gr} \cdot \text{Pr} = 5.94 \cdot 10^{11} \cdot 3.95 = 2.35 \cdot 10^{12} > 2 \cdot 10^7$$

Thus, free flow is turbulent (forced flow without convection currents would be laminar as was previously proved). The Nusselt number is calculated with relation (3.18) where the following values  $C = 0.135$ ,  $i = 1/3$  were substituted

$$\text{Nu} = 0.135 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/3} = 0.135 \cdot (2.35 \cdot 10^{12})^{1/3} = 1790$$

The convection heat transfer coefficient for natural convection equals

$$h = \frac{\text{Nu} \cdot k}{L} = \frac{1790 \cdot 0.640}{1.1} = 1040 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

This value is about 10 times higher than the value calculated with the relation for the forced flow. Thus, the natural convection is the dominant mechanism of heat transfer. The real value of the convection heat transfer coefficient should be slightly higher than 1040 W/(m<sup>2</sup>K) because the forced flow should give an additional effect of heat transfer.

It should be remarked that the forced flow of water through the heating jacket is necessary to “take” heat from the system and keep the cooling water temperature at a constant level.

### EXAMPLE 3.7

Saturated dry water vapor is the heating medium in a vertical shell and tube heat exchanger which has  $n = 500$  pipes of the external diameter  $d = 89$  mm. Vapor temperature is  $130^\circ\text{C}$ , its flow rate equals  $8$  kg/s. Vapor condenses completely. The medium which is being heated is flowing in pipes. Its average temperature is  $110^\circ\text{C}$ . Calculate the convection heat transfer coefficient for the condensing vapor.

---

Heat of vaporization  $r (= i'' - i')$  of saturated water vapor at temperature  $130^\circ\text{C}$  was read from table AT-3; it is equal to  $r = 2\,720\,600 - 546\,400 = 2\,174\,200$  J/kg. Formula for calculations of the convection heat transfer coefficient for vapor condensing on vertical pipes has the form (3.24)

$$h = 1.13 \cdot \left( \frac{r \rho^2 k^3 g}{\mu \cdot \Delta T_w \cdot H} \right)^{1/4} \quad (\text{a})$$

The following substitutions:  $C = 1.13$  and  $L = H$  (pipes height) were made.

Values  $\rho$ ,  $k$  and  $\mu$  refer to the average temperature of condensate  $T_m$ ; it is convenient to separate the expression  $B = f(T_m)$  containing these quantities

$$B = \left( \frac{\rho^2 k^3 g}{\mu} \right)^{1/4} \quad (\text{b})$$

Combining relations (a) and (b), one gets

$$h = 1.13 \cdot B \cdot \left( \frac{r}{\Delta T_w \cdot H} \right)^{1/4} \quad (\text{c})$$

The above formula cannot be directly used for calculations, as both temperature of the wall on the side of condensate  $T_w$  and pipes height  $H$  are unknown. In order to transform relation (c), the formula for the heat transfer area

$$A = n \pi d \cdot H \quad (\text{d})$$

and relation that refers to the amount of transferred heat

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 r \quad (\text{e})$$

must be used. Symbol  $\dot{m}_l$  denotes flow rate of condensate which is equal to flow rate of vapor. Including relations (c), (d) and (e) and the definition of the convection heat transfer coefficient, one gets

$$(\Delta T_w \cdot H) = \frac{\dot{m}_l r}{\pi h n d} \quad (f)$$

If it is assumed tentatively that  $h = 10\,000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , value of the expression  $\Delta T_w \cdot H$  may be evaluated

$$(\Delta T_w \cdot H) \cong \frac{8 \cdot 2\,174\,200}{\pi \cdot 10\,000 \cdot 500 \cdot 0.089} = 12.5 \text{ m} \cdot \text{K}$$

The average temperature of a layer of condensate depends on temperature of the wall  $T_w$ , which is unknown. However, it is known that value of  $T_w$  is in the range between  $110^\circ\text{C}$  and  $130^\circ\text{C}$ . It is  $T_m = 120^\circ\text{C}$  for the minimal possible wall temperature and  $T_m = 130^\circ\text{C}$  for the maximum one. Values of  $\rho$ ,  $k$ ,  $\mu$  and  $B$  for temperatures  $120^\circ\text{C}$  and  $130^\circ\text{C}$  are presented in table 3.5.

Table 3.5

$T_m$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	$k$ [ $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ]	$\mu$ [ $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ]	$B$ [ $\text{J}^{3/4}\text{kg}^{1/4}\cdot\text{m}^{-7/4}\text{s}^{-1}\text{K}^{-3/4}$ ]
120	943.5	0.685	$0.2354 \cdot 10^{-3}$	331
130	934.5	0.686	$0.2118 \cdot 10^{-3}$	338

Approximate values of the convection heat transfer coefficient were calculated:  
for  $T_m = 120^\circ\text{C}$

$$h = 1.13 \cdot 331 \cdot \left( \frac{2\,174\,200}{12.5} \right)^{1/4} \cong 7640 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

for  $T_m = 130^\circ\text{C}$

$$h = 1.13 \cdot 338 \cdot \left( \frac{2\,174\,200}{12.5} \right)^{1/4} \cong 7800 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Such values are not very consistent with the assumption. Good consistency was obtained when it was substituted that  $h = 7100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Then

$$(\Delta T_w \cdot H) \cong \frac{8 \cdot 2\,174\,200}{\pi \cdot 7100 \cdot 500 \cdot 0.089} = 17.6 \text{ K}$$

The convection heat transfer coefficients are for  $T_m = 120^\circ\text{C}$

$$h = 1.13 \cdot 331 \cdot \left( \frac{2174200}{17.6} \right)^{1/4} \cong 7010 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

for  $T_m = 130^\circ\text{C}$

$$h = 1.13 \cdot 338 \cdot \left( \frac{2174200}{17.6} \right)^{1/4} \cong 7160 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The above values are in good consistency with the assumption.

Thus, in spite of the fact that wall temperature is unknown, the convection heat transfer coefficient for condensing vapor can be approximately determined. It is equal to  $h \approx 7100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . The convection heat transfer coefficient can also be determined without the trial-and-error method if it is assumed that temperature of condensate is equal to condensation temperature  $T_m = T$  (this assumption does not lead to the equality  $T = T_w$  because this equality would be true if the convection heat transfer coefficient was infinitely high). Substituting relation (f) into (a), after transformation, one gets

$$h = 1.724 \cdot k \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho^2 g n d}{\mu \dot{m}_l}} \quad (\text{g})$$

Substituting physical properties ( $\rho$ ,  $k$ ,  $\mu$ ) taken from table 3.5 for  $T_m = 130^\circ\text{C}$ , one gets the value quite consistent with the previous calculation

$$h = 1.724 \cdot 0.686 \cdot \sqrt[3]{\frac{(934.5)^2 \cdot 9.81 \cdot 500 \cdot 0.089}{0.2118 \cdot 10^{-3} \cdot 8}} = 7190 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Exact determination of the convection heat transfer coefficient for condensing vapor requires knowing temperature of the wall. This temperature can be calculated if a convection heat transfer coefficient for the medium which is heated up is known; but most often such accurate determination of a heat transfer coefficient during condensation is not needed.

Formula (a) refers to laminar flow of a condensate ( $\text{Re}_l < 1600$ ). Calculations which allow one to check the character of flow for a bottom cross-section of pipes are presented below. The maximum flow rate per unit of wetted circumference equals

$$\Gamma_{\max} = \frac{\dot{m}_l}{\pi d n} = \frac{8}{\pi \cdot 0.089 \cdot 500} = 0.0572 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$$

The Reynolds number for falling film of liquid has the following value

$$\text{Re}_{l_{\max}} = \frac{4\Gamma_{\max}}{\mu} = \frac{4 \cdot 0.0572}{0.2118 \cdot 10^{-3}} = 1080$$

The above quantity can be also calculated with formula (3.22)

$$\text{Re}_{l_{\max}} = \frac{4h \cdot (\Delta T_w \cdot H)}{\mu r} = \frac{4 \cdot 7100 \cdot 17.6}{0.2118 \cdot 10^{-3} \cdot 2174200} = 1080$$

### EXAMPLE 3.8

Water is boiling under pressure 0.143 MPa in a boiler, which heating area is 2 m<sup>2</sup>. Calculate what temperature the internal wall of the boiler must have so that the rate of water evaporation is 0.04 kg/s. What will be the value of the convection heat transfer coefficient in this case?

---

Formula (3.25) in which the value  $\Phi = 1$  was substituted will be used for calculations of the convection heat transfer coefficient for boiling water

$$h = 0.0326 \cdot P^{0.58} \cdot \Delta T_w^{2.33} \quad (\text{a})$$

Using the definition of a convection heat transfer coefficient and of the heat flux  $q (= \dot{Q}/A)$ , one obtained

$$h = \frac{q}{\Delta T_w} \quad (\text{b})$$

The following relationship between  $\Delta T_w$ ,  $P$  and  $q$  is obtained after elimination of a convection heat transfer coefficient from relations (a) and (b)

$$\Delta T_w = 2.80 \cdot P^{-0.17} q^{0.30} \quad (\text{c})$$

Boiling point of water  $T = 110^\circ\text{C}$  and heat of vaporization  $r = 2\,691\,300 - 461\,300 = 2\,230\,000$  J/kg for pressure 0.143 MPa were found in table AT-3. The amount of heat transferred from the wall to the boiling liquid in unit of time equals

$$\dot{Q} = \dot{m} \cdot r = 0.04 \cdot 2\,230\,000 = 89\,200 \text{ W}$$

The thermal stream is

$$q = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{89\,200}{2} = 44\,600 \text{ W/m}^2$$

The difference between wall temperature and boiling point of water is

$$\Delta T_w = T_w - T = 2.80 \cdot (143\,000)^{-0.17} \cdot (44\,600)^{0.30} = 9.2 \text{ K}$$

Thus, wall temperature equals

$$T_w = T + \Delta T_w = 110 + 9.2 = 119.2^\circ\text{C}$$

Finally the convection heat transfer coefficient is calculated

$$h = 0.0326 \cdot (143\,000)^{0.58} \cdot (9.2)^{2.33} = 5610 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

Both the value  $\Delta T_w$  and  $q$  refer to the bubble boiling of water.

### EXAMPLE 3.9

Saturated water vapor which pressure equals 1.12 MPa is flowing in a pipe of the external diameter  $d = 102 \text{ mm}$  and length  $l = 20 \text{ m}$ . Assuming that the ambient temperature is  $T = 15^\circ\text{C}$ , calculate heat losses to the surroundings for the following cases:

- a pipeline does not have insulation (assume that emissivity of the wall is 0.8),
- 15 mm glass-wool insulation of thermal conductivity  $0.06 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  and emissivity 0.8 is used,
- a roll of a sheet metal is used as a shield; emissivity of the sheet is 0.5 and diameter of the roll equals  $d_e = 150 \text{ mm}$ .

---

Heat transferred from the wall of the pipe to the surroundings results from natural convection and radiation. Because the convection heat transfer coefficient inside the pipe (condensing vapor) is high and its wall also gives low thermal resistance, it can be assumed with a small error that temperature of the external wall of the pipe  $T_w$  is equal to vapor temperature i.e., saturation temperature for pressure 1.12 MPa. This temperature is  $185^\circ\text{C}$  according to table AT-3.

#### *Ad a. Pipeline without insulation*

The average temperature of the boundary layer is  $0.5 \cdot (185 + 15) = 100^\circ\text{C}$ . Physical properties of air at this temperature were found in table AT-2:  $\rho = 0.916 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 1022 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $k = 0.0307 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $\mu = 2.16710^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ . The Grashof number equals

$$\text{Gr} = \frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \beta (T_w - T)$$

$$\text{Gr} = \frac{(0.102)^3 \cdot (0.916)^2 \cdot 9.81}{(2.167 \cdot 10^{-5})^2} \cdot \frac{1}{273} \cdot (185 - 15) = 1.16 \cdot 10^7$$

It was substituted that  $L = d = 0.102$  m and  $\beta = 1/273$  K (the coefficient of thermal expansion of ideal gases).

The Prandtl number

$$\text{Pr} = \frac{c\mu}{k} = \frac{1022 \cdot 2.167 \cdot 10^{-5}}{0.0307} = 0.722$$

Because  $\text{Gr} \cdot \text{Pr} = 1.16 \cdot 10^7 \cdot 0.722 = 8.38 \cdot 10^6$  (transient flow) formula (3.18) with the following constants  $C = 0.54$  and  $i = 0.25$  must be used for the Nusselt number calculations

$$\text{Nu} = 0.54 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{0.25} = 0.54 \cdot (8.38 \cdot 10^6)^{0.25} = 29.0$$

The convection heat transfer coefficient for natural convection equals

$$h_{\text{conv}} = \frac{\text{Nu} \cdot k}{L} = \frac{29.0 \cdot 0.0307}{0.102} = 8.7 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Equivalent coefficient of radiation is calculated with relation (3.29)

$$h_{\text{rad}} = \frac{C_0 \varepsilon (T_w^4 - T^4)}{T_w - T}$$

$$h_{\text{rad}} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.8 \cdot [(185 + 273)^4 - (15 + 273)^4]}{185 - 15} = 9.9 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

It should be remarked that temperatures in the nominator must be in [K].

The total coefficient, which includes parallel transport of heat as a result of two simultaneous mechanisms, equals

$$h = h_{\text{conv}} + h_{\text{rad}} = 8.7 + 9.9 = 18.6 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$



The heat transfer area (surface area of the pipe) is

$$A = \pi d \cdot L = \pi \cdot 0.102 \cdot 20 = 6.41 \text{ m}^2$$

Finally, heat loss is calculated with the Newton formula

$$\dot{Q} = h \cdot (T_w - T) A = 18.6 \cdot (185 - 15) \cdot 6.41 = 20\,300 \text{ W}$$

#### *Ad b. Insulated pipeline*

When the pipe is covered with insulation, its external temperature  $T_i$  is lower than wall temperature; thus, heat loss is reduced. According to relation (2.9), the amount of heat conducted in a cylindrical layer (insulation) is

$$\dot{Q} = \frac{k}{s} (T_w - T_i) A_m \quad (\text{a})$$

where:

- $k$  – thermal conductivity of insulation,
- $s$  – thickness of insulation,
- $A_m$  – average (logarithmic average) surface area of insulation.

The same amount of heat  $\dot{Q}$  is then transferred from the insulation to the surroundings, as a result of convective heat transfer and radiation

$$\dot{Q} = (h_{\text{conv}} + h_{\text{rad}}) (T_i - T) A_i \quad (\text{b})$$

where  $A_i$  is the external surface area of the insulation. Therefore, in the considered case all the three mechanisms of heat transfer exist. Heat is firstly transferred by conduction and then convective transport (natural convection) occurs parallelly with radiation.

The external diameter of the insulation is

$$d_i = d + 2s = 0.102 + 2 \cdot 0.015 = 0.132 \text{ m}$$

and its surface area

$$A_i = \pi d_i L = \pi \cdot 0.132 \cdot 20 = 8.29 \text{ m}^2 \quad (\text{c})$$

The average area is calculated as a logarithmic average of the external  $A_i$  and internal  $A$  areas

$$A_m = \frac{A_i - A}{\ln(A_i/A)} = \frac{8.29 - 6.41}{\ln(8.29/6.41)} = 7.31 \text{ m}^2$$

After substitution of relation (a), one gets

$$\dot{Q} = \frac{0.06}{0.015} (185 - T_i) \cdot 7.31 = 29.2 \cdot (185 - T_i) \quad (\text{d})$$

Calculations of the convection heat transfer coefficient  $h_{conv}$  require knowing physical properties of air, which depend on the unknown temperature of a boundary layer. After the assumption that this temperature was in the range  $30 \div 50^\circ\text{C}$  was taken, the average kinematic viscosity coefficient  $(\mu/\rho) = 1.70 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  and the average thermal conductivity  $k = 0.026 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  for this temperature range were determined using table AT-2. If it is assumed that  $\text{Pr} = 0.722$  (this value of the Prandtl number is valid for biatomic gases), the product  $\text{Gr}\cdot\text{Pr}$  can be expressed as follows

$$(\text{Gr} \cdot \text{Pr}) = \frac{L^3 g \beta \cdot \text{Pr}}{(\mu/\rho)^2} (T_i - T)$$

$$(\text{Gr} \cdot \text{Pr}) = \frac{(0.132)^3 \cdot 9.81 \cdot 0.722}{273 \cdot (1.70 \cdot 10^{-5})^2} \cdot (T_i - 15) = 2.06 \cdot 10^5 \cdot (T_i - 15)$$

The convection heat transfer coefficient  $h_{conv}$  (for transient flow)

$$h_{conv} = \frac{0.026}{0.132} \cdot 0.54 \cdot [2.06 \cdot 10^5 \cdot (T_i - 15)]^{0.25} = 2.27 \cdot (T_i - 15)^{0.25} \quad (\text{e})$$

The equivalent coefficient for radiation is

$$h_{rad} = \frac{C_0 \varepsilon (T_i^4 - T^4)}{T_i - T} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.8 \cdot [(T_i + 273)^4 - (15 + 273)^4]}{T_i - 15}$$

$$h_{rad} = \frac{4.54 \cdot 10^{-8} \cdot (T_i + 273)^4 - 313}{T_i - 15} \quad (\text{f})$$

Substituting relations (c), (e) and (f) into (b), comparing the obtained expression with formula (d) and making transformations, one gets

$$T_i = 274 - 0.643 \cdot (T_i - 15)^{1.25} - 1.29 \cdot 10^{-8} \cdot (T_i + 273)^4$$

where  $T_i$  is in [°C]. This equation is implicit and a numerical method must be used to solve it. The value  $T_i = 56^\circ\text{C}$  fulfills the equation. When the external temperature of the insulation is known, the boundary layer temperature can be calculated: it is  $0.5 \cdot (56 + 15) = 35.5^\circ\text{C}$ , what is consistent with the assumption. Value of the product  $\text{Gr} \cdot \text{Pr}$  must be checked

$$(\text{Gr} \cdot \text{Pr}) = 2.06 \cdot 10^5 \cdot (56 - 15) = 8.44 \cdot 10^6$$

On the basis of this product the assumption that natural convection is transient:  $500 < \text{Gr} \cdot \text{Pr} < 2 \cdot 10^7$  was confirmed. The amount of heat lost through an insulated pipeline can be calculated with relation (b) or (d). Substitution to formula (d) yields

$$\dot{Q} = 29.2 \cdot (185 - 56) = 3770 \text{ W}$$

This value is about 5 times lower than for the pipeline without insulation.

#### *Ad c. Shielded pipeline*

If a shield is used, flow of heat from the pipe to the surroundings occurs in the following way. Heat is taken by the shield from the wall of the pipe as a result of natural convection and radiation; temperature of the shield is lower than temperature of the wall. The taken heat is transferred to the surroundings also by natural convection and radiation (resistance of heat conduction through a sheet metal of the shield can be neglected).

Heat taken by the shield from the pipe is

$$\dot{Q} = (h_{conv} + h_{rad}) (T_w - T_e) A \quad (\text{g})$$

where  $T_e$  is the temperature of the shield. It was assumed that temperature of the boundary layer (in the immediate vicinity of the pipe wall) is in the range  $120 \div 140^\circ\text{C}$ . It was evaluated (on the basis of the data from table AT-2) that the average value of the kinematic viscosity coefficient ( $\mu/\rho$ ) for air is  $2.70 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  and the average thermal conductivity equals  $k = 0.033 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . Moreover, it was assumed that  $\text{Pr} = 0.722$ . Hence

$$(\text{Gr} \cdot \text{Pr}) = \frac{(0.102)^3 \cdot 9.81 \cdot 0.722}{273 \cdot (2.70 \cdot 10^{-5})^2} \cdot (185 - T_e) = 0.378 \cdot 10^5 \cdot (185 - T_e)$$

The following formula for the heat transfer coefficient for natural convection results from the above expression

$$h_{conv} = \frac{0.033}{0.102} \cdot 0.54 \cdot [0.378 \cdot 10^5 \cdot (185 - T_e)]^{0.25} = 2.44 \cdot (185 - T_e)^{0.25} \quad (\text{h})$$

Surface area of the shield is

$$A_e = \pi d_e L = \pi \cdot 0.15 \cdot 20 = 9.42 \text{ m}^2 \quad (\text{i})$$

The equivalent emissivity for radiation from the pipe to the shield is calculated with relation (3.28)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{A}{A_e} \left( \frac{1}{\varepsilon_e} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{0.8} + \frac{6.41}{9.42} \cdot \left( \frac{1}{0.5} - 1 \right)} = 0.518$$

The equivalent coefficient for radiation is

$$h_{rad} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 0.8 \cdot 0.518 \cdot \left[ (185 + 273)^4 - (T_e + 273)^4 \right]}{185 - T_e}$$

$$h_{rad} = \frac{1038 - 2.35 \cdot 10^{-8} \cdot (T_e + 273)^4}{185 - T_e} \quad (\text{j})$$

Heat transferred from the shield to the surrounding is equal to

$$\dot{Q} = (h'_{conv} + h'_{rad}) (T_e - T) A_e \quad (\text{k})$$

If it is assumed that temperature of the boundary layer (in the immediate vicinity of the shield) is in the range 30÷50°C (as in point b), the heat transfer coefficient for natural convection is

$$h'_{conv} = \frac{0.026}{0.15} \cdot 0.54 \cdot [2.06 \cdot 10^5 \cdot (T_e - 15)]^{0.25} = 2.00 \cdot (T_e - 15)^{0.25} \quad (\text{l})$$

The difference between formulas (e) and (l) is in the value of diameter  $d$  (here  $d = d_e = 0.15 \text{ m}$  – diameter of the shield).

The equivalent coefficient for heat radiation from the shield to the surroundings is ( $\varepsilon_z = \varepsilon$ )

$$h'_{rad} = \frac{4.54 \cdot 10^{-8} \cdot (T_e + 273)^4 - 313}{T_e - 15} \quad (\text{m})$$

The above formula has analogical form as expression (f). Combining formulas (g) and (k), including relations (h), (i), (j), (l) and (m) and making the appropriate transformations, one gets

$$T_e = \sqrt[4]{0.270 \cdot (185 - T_e)^{1.25} - 0.326 \cdot (T_e - 15)^{1.25} + 166 - 273}$$

where  $T_e$  is expressed in [ $^{\circ}\text{C}$ ]. The value  $T_e = 90^{\circ}\text{C}$  is the solution of this equation. Temperatures of the boundary layers are as follows: in the vicinity of the pipe  $0.5 \cdot (185 + 90) = 137.5^{\circ}\text{C}$  (what is consistent with the assumption), in the vicinity of the shield  $0.5(90 + 15) = 52.5^{\circ}\text{C}$  (what is almost consistent with the assumption). It is easy to prove that the product  $\text{GrPr}$  corresponds to the transient range of convection.

Heat losses can be calculated with formula (g) or (k). Firstly it is necessary to calculate convection heat transfer coefficients. Coefficients for heat transfer from the pipe to the shield are as follows (according to relations (h) and (j))

$$h_{conv} = 2.44 \cdot (185 - 90)^{0.25} = 7.6 \quad \text{W}/(\text{m}^2\text{K})$$

$$h_{rad} = \frac{1038 - 2.35 \cdot 10^{-8} \cdot (90 + 273)^4}{185 - 90} = 6.6 \quad \text{W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Finally, the heat loss because of heat transfer from the shielded pipe to the surroundings is (according to formula (g))

$$\dot{Q} = (7.6 + 6.6) \cdot (185 - 90) \cdot 6.41 = 8650 \quad \text{W}$$

It is less than half the value of heat loss for the pipe without the shield and insulation.

### EXAMPLE 3.10

Intensity of direct solar radiation is  $500 \text{ W}/\text{m}^2$  and intensity of diffuse solar radiation equals  $250 \text{ W}/\text{m}^2$ . The angle between a body surface and solar radiation is  $30^{\circ}$ . Temperature of the surface has set at the level of  $40^{\circ}\text{C}$ . Assuming that the effective temperature of the atmosphere is  $240 \text{ K}$ , calculate the net heat flux absorbed by  $1 \text{ m}^2$  of the body surface. Consider the following combinations of absorptivity and emissivity:

- $\alpha = 0.85$ ;  $\varepsilon = 0.85$  (grey absorption surface),
  - $\alpha = 0.85$ ;  $\varepsilon = 0.20$  (selective absorption surface),
  - $\alpha = 0.30$ ;  $\varepsilon = 0.85$  (selective reflecting surface).
-

Solar radiation and radiation of the sky is falling on the surface. The total solar energy falling on the surface is

$$q_{solar} = q_D \cdot \cos \theta + q_d = 500 \cdot \cos 30^\circ + 250 = 683 \text{ W/m}^2$$

The net radiation must be calculated according to the formula

$$q_{netto} = \alpha q_{solar} + \varepsilon \sigma (T_{sky}^4 - T_s^4)$$

a. Absorber is a perfect grey body

$$\begin{aligned} q_{netto} &= 0.85 \cdot 683 + 0.85 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left[ (240)^4 - (40 + 273)^4 \right] = \\ &= 580.6 - 0.85 \cdot 356.1 = 277.9 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

b. Absorber is a body with selectively absorbing surface

$$\begin{aligned} q_{netto} &= 0.85 \cdot 683 + 0.20 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left[ (240)^4 - (40 + 273)^4 \right] = \\ &= 580.6 - 0.20 \cdot 356.1 = 509.4 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

So, the heat yield can be increased by covering the surface with selective material which has the same absorptivity for solar radiation as a grey body (point a) but with low emissivity for thermal radiation (infrared radiation).

c. Absorber is a body with a selectively reflecting surface

$$\begin{aligned} q_{netto} &= 0.30 \cdot 683 + 0.85 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left[ (240)^4 - (40 + 273)^4 \right] = \\ &= 204.9 - 0.85 \cdot 356.1 = -97.8 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Therefore, if the surface is covered by selective material with high reflection coefficient for solar radiation and high emissivity for thermal radiation, this surface will lose heat to the surroundings.

### EXAMPLE 3.11.

Hot gas is flowing through a pipe. A thermocouple placed inside the pipe indicates temperature  $T = 280^\circ\text{C}$ . A second thermocouple measures wall pipe temperature; its indication is  $T_w = 350^\circ\text{C}$ . Calculate:

- Real temperature of the gas in the pipe if emissivity of a thermocouple's sensor is  $\varepsilon = 0.65$ .
- What temperature would be indicated by the first thermocouple if emissivity of the sensor was  $\varepsilon = 0.2$ .

In both cases assume that a coefficient of convection heat transfer between the sensor of the first thermocouple and the flowing gas is  $h = 60 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

The thermocouple does not indicate the real temperature of the gas but the sensor temperature, while the sensor has different temperature than the flowing gas because of energy transfer between the sensor and pipe wall. The sensor has higher temperature than the gas. The sensor in thermal equilibrium takes heat carried by wall radiation and gives heat to the gas as a result of convection heat transfer. So, the higher the wall temperature is, the higher difference between the sensor temperature and gas temperature is observed. The heat balance equation has the form

$$\varepsilon\sigma(T_w^4 - T^4) = h(T - T_g) \quad (\text{a})$$

where  $T_g$  is temperature of the gas. The difference between temperature of the sensor and gas (reading error for the thermocouple) equals

$$T - T_g = \frac{\varepsilon\sigma(T_w^4 - T^4)}{h}$$

a. After substitution of numerical values, it was obtained that

$$T - T_g = \frac{0.65 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} [(350 + 273)^4 - (280 + 273)^4]}{60} = 35 \text{ K}$$

Hence, the real temperature of the gas is  $T_g = T - (T - T_g) = 280 - 35 = 245^\circ\text{C}$ .

b. If emissivity of the thermocouple's sensor was reduced to the value  $\varepsilon = 0.2$ , the reading error for the thermocouple would be lower and equal to

$$T - T_g = \frac{0.2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} [(350 + 273)^4 - (280 + 273)^4]}{60} = 11 \text{ K}$$

In this case the temperature indicated by the sensor is  $T = T_g + (T - T_g) = 255 + 11 = 266^\circ\text{C}$ .

### EXERCISE 3.1

Calculate the convection heat transfer coefficient for the conditions from Example 3.3 if there are no baffles on the shell side i.e., there is the medium is flowing parallelly to the pipes. Assume that the internal diameter of the shell is 530 mm.

Answer:  $h = 498 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

## EXERCISE 3.2

Calculate the convection heat transfer coefficient for conditions from Example 3.5a if content of the vessel is heated by vapor and the agitator does not rotate. Assume that height of the jacket is 0.3 m.

Answer: beginning of heating:  $h = 1530 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ,  
 end of heating:  $h = 1470 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

## EXERCISE 3.3

Water vapor which temperature is  $150^\circ\text{C}$  and the flow rate equals  $2.5 \text{ kg/s}$  is flowing in a vertical steel pipe of the external diameter  $200 \text{ mm}$  and length  $10 \text{ m}$ . As a result of heat loss to the surroundings, partial condensation of vapor occurs. Calculate moisture content of vapor at the outlet of the pipe, assuming that it is dry and saturated at the inlet. The ambient temperature is  $10^\circ\text{C}$ , emissivity of the external surface of the pipe is  $0.8$ . Assume that the external temperature of the pipe wall is equal to condensation temperature.

Answer: moisture content of vapor is  $2.7\%$ .

## EXERCISE 3.4

Vapor is condensing outside pipes of a heat exchanger with square cross-section. The external diameter of each pipe is  $57 \text{ mm}$ . Pipes are arranged alternately (they are arranged in chessboard configuration) in 12 rows with 12 pipes in each row. On the basis of analysis of convection heat transfer coefficients, suggest the most advantageous arrangement of the exchanger (horizontal or vertical) for the following lengths of pipes: a)  $1 \text{ m}$ , b)  $2 \text{ m}$ , c)  $3 \text{ m}$ . Assume that flow of condensate is laminar.

Answer: Denoting  $\varepsilon = h_{\text{vertical}}/h_{\text{horizontal}}$ , one gets

- a)  $\varepsilon = 1.19$ ,
- b)  $\varepsilon = 1.00$ ,
- c)  $\varepsilon = 0.905$ .

The most advantageous arrangements are as follows: a) vertical, b) it makes no difference, c) horizontal.

## EXERCISE 3.5

Water solution of a non-volatile substance is being evaporated (is boiling) under atmospheric pressure ( $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ) in a tank with a heating jacket which heating area is  $1.5 \text{ m}^2$ . It can be assumed that boiling point and physical properties of the solution are constant because its concentration does not change much. Boiling point of the solution is  $105^\circ\text{C}$  and the coefficient  $\Phi$  in formula (3.25) is equal to  $0.95$ . Saturated water vapor at temperature  $126^\circ\text{C}$  is the heating medium. Thickness of the wall of the tank equals  $5 \text{ mm}$  and its thermal conductivity is  $40 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ . Assuming that the convection heat transfer coefficient for condensing vapor is  $6700 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ,



calculate time of vaporization from the initial amount 200 kg to the final one 180 kg. Assume that heat of vaporization of the solution is as for clear water.

A n s w e r: 721 seconds.

### EXERCISE 3.6

A metal sheet (a shield) was placed between two parallel walls of different temperatures. Dimensions of the shield and walls are the same. Calculate how many times the amount of heat transferred between the walls by radiation is reduced as a result of installation of the shield in relation to the amount transferred directly (without the shield). Assume that the emissivity of the walls and shield are the same and temperatures on the both sides of the shield are equal. Neglect flow of heat due to natural convection.

A n s w e r: the amount of heat is reduced twice.

### EXERCISE 3.7

Hot water was poured into a vacuum bottle with double walls that are distant by 8 mm one from another. Height of the bottle is 200 mm, its external diameter equals 80 mm. Walls of the vacuum bottle are silver-plated from the side of vacuum (inside the double-wall); their emissivity is 0.15. Assuming that the ambient temperature is 25°C, calculate water temperature drop after 1 hour. Because of vacuum between the walls, radiation is the only possible mechanism of heat transfer.

A n s w e r: 2.3 K.

## 4. HEAT TRANSMISSION AND HEAT EXCHANGERS

### 4.1. HEAT TRANSMISSION

Heat transfer between two fluid phases is called heat transmission. Heat transmission can be evaluated with the equation

$$d\dot{Q} = U (T_1 - T_2) dA \quad (4.1)$$

where:

- $U$  – overall heat transfer coefficient,  $W/(m^2K)$ ,
- $T_1, T_2$  – fluids temperature,  $^{\circ}C$ ,
- $A$  – total area available for heat transfer (heating area),  $m^2$ ,
- $\dot{Q}$  – rate of heat transfer,  $W$ .

In this chapter index „1” refers to fluid giving off heat (hot fluid) and index „2” refers to fluid taking heat (cold fluid).

When fluids are separated by a flat wall, the overall heat transfer coefficient is described by the relation

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \sum_i \frac{s_i}{k_i} + \frac{1}{h_2}} \quad (4.2)$$

where:

- $h_1, h_2$  – convection heat transfer coefficient,  $W/(m^2K)$ ,
- $s_i$  – thickness of  $i^{\text{th}}$  layer of a wall,  $m$ ,
- $k_i$  – thermal conductivity of  $i^{\text{th}}$  layer of a wall,  $W/(m \cdot K)$ .

For a single-layer wall with deposit of contaminants on both sides

$$\sum_i \frac{s_i}{k_i} = R_1 + \frac{s}{k} + R_2 \quad (4.3)$$

where:  $R = (s/k)_{\text{deposit}}$  – thermal resistance of a deposit,  $m^2K/W$ .

Average, typical values of thermal resistances of deposits arising during flow of several chosen mediums are shown in table 4.1.

When heat is transferred through cylindrical walls, the equation describing heat transmission has the form

$$d\dot{Q} = U_L (T_1 - T_2) dL \quad (4.4)$$

where:

- $U_L$  – overall heat transfer coefficient related to length of a cylindrical wall (pipe), W/(m·K),
- $L$  – wall (pipe) length, m.

Table 4.1

Thermal resistance of deposits

Medium	Thermal resistance $R$ [m <sup>2</sup> K/W]
Distilled water	0.0001
Water vapor	0.0001
Water from cooling tower or water line	0.0003
River water	0.0011
Petroleum	0.0004÷0.0012
Organic liquids	0.0002
Air	0.0004

Coefficient  $U_L$  is given by the equation (see Eq. (2.13))

$$U_L = \frac{\pi}{\frac{1}{h_1 d_1} + \sum_i \frac{s_i}{k_i d_{mi}} + \frac{1}{h_2 d_2}} \quad (4.5)$$

where:

- $d_1, d_2$  – diameters of pipes at the side of the medium 1 and 2, respectively,
- $d_m$  – average pipe diameter (logarithmic diameter).

Overall heat transfer coefficients  $U$  (related to heat transfer area) are much more often used in calculations; ranges of these coefficients for different cases are presented in table 4.2.

Ranges of overall heat transfer coefficients

Mediums transferring heat	Coefficient $U$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	
	Free flow	Forced flow
Gas – gas	4÷12	10÷40
Gas – liquid or boiling liquid	6÷20	10÷60
Gas – condensing water vapor	6÷20	30÷90
Organic liquid – organic liquid	30÷60	120÷270
Organic liquid – condensing water vapor	60÷170	120÷340
Boiling organic liquid – condensing water vapor	300÷850	–
Water – water	140÷340	800÷1700
Water – condensing organic vapor	230÷460	340÷1700
Water – condensing water vapor	300÷1200	800÷4500
Boiling water – condensing water vapor	1700÷4500	–

## 4.2. STEADY FLOW IN HEAT EXCHANGERS

### 4.2.1. Heat transfer without phase changes

Fig. 4.1 presenting a double pipe (or concentric tube) heat exchanger exemplifies denotations that will be used. A medium that gives off heat (1) flows into the exchanger through the cross-section I (hot end of the exchanger) at temperature  $T_{1in}$  and leaves it through the cross-section II (cold end) at temperature  $T_{1out}$ . The medium which takes heat (2) flows counter-currently to the medium (1) i.e., enters through the cross-section II at temperature  $T_{2in}$  and after it has been heated up, flows out through the cross-section I at temperature  $T_{2out}$ . Quantities  $\Delta T_I$  and  $\Delta T_{II}$  denote temperature differences between the media at the two ends of the exchanger.

$$\Delta T_I = T_{1in} - T_{2out} \quad (4.6)$$

$$\Delta T_{II} = T_{1out} - T_{2in} \quad (4.7)$$

The quantity  $A_x$  on the abscissa (fig. 4.1) denotes heat transfer area of the exchanger treated as a variable such that for the cross-section I it is  $A_x = 0$  and for the cross-section II:  $A_x = A$ , where  $A$  – total heat transfer area of the exchanger. The quantity  $A_x$  is proportional to a position variable in a double pipe heat exchanger. The

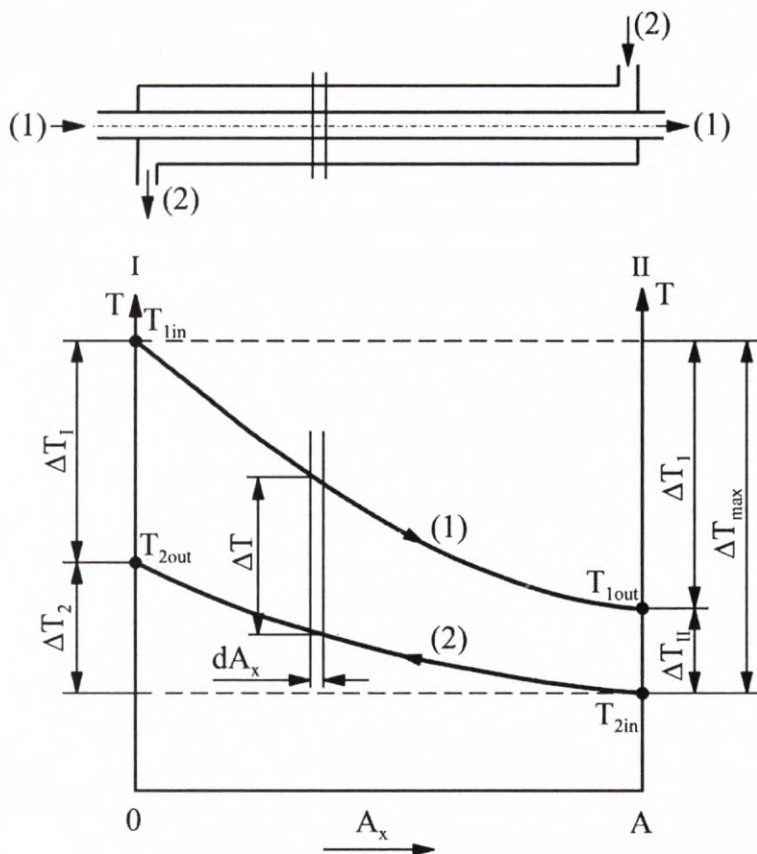


Fig. 4.1. Simple counter-current double pipe heat exchanger arrangement and temperature profile

local temperature difference between the media  $\Delta T = T_1 - T_2$  is variable and depends on position ( $A_x$ ). When  $U = \text{const}$ , this variability can be expressed by the formula

$$\Delta T = \Delta T_1 \cdot \exp(-PU A_x) \quad (4.8)$$

where

$$P = \frac{1}{\dot{m}_1 c_1} - \frac{1}{\dot{m}_2 c_2} \quad (4.9)$$

where:

$\dot{m}_1, \dot{m}_2$  – mass flow rates of the media,  
 $c_1, c_2$  – average heat capacities of the media.

Dependence between temperatures of the media  $T_1$  and  $T_2$  results from the heat balance and has the form

$$T_2 = T_{2out} - R_q (T_{1in} - T_1) \quad (4.10)$$

where

$$R_q = \frac{\dot{m}_1 c_1}{\dot{m}_2 c_2} \quad (4.11)$$

The average temperature difference between the media  $\Delta T_m$  is given by the equation

$$\Delta T_m = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta T \, dA_x \quad (4.12)$$

When  $U = \text{const}$ , combination of formulas (4.12) and (4.8) gives

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_I - \Delta T_{II}}{\ln \frac{\Delta T_I}{\Delta T_{II}}} \quad (4.13)$$

Therefore, the average temperature difference between the media is the logarithmic average of differences at exchanger's ends; indexes I and II in the above equation can be exchanged reciprocally. In a particular case there is  $P = 0$ ,  $\Delta T = \text{const}$ , that is  $\Delta T_m = \Delta T_I = \Delta T_{II}$ .

As a result of heat transmission through a differential element of a heat exchanger which surface area is  $dA_x$ , the differential change in temperatures occurs

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_1 c_1 dT_1 = -\dot{m}_2 c_2 dT_2 \quad (4.14)$$

Combining relations (4.1) and (4.14), one obtains two equivalent formulas for the exchanger's heat transfer area calculations

$$A = \dot{m}_1 c_1 \int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{U(T_1 - T_2)} = \dot{m}_2 c_2 \int_{T_{2in}}^{T_{2out}} \frac{dT_2}{U(T_1 - T_2)} \quad (4.15)$$

When  $U = \text{const}$ , this formula takes the simplified form

$$A = \frac{\dot{Q}}{U \cdot \Delta T_m} \quad (4.16)$$

#### 4.2.2. Phase change of one or both media

If condensing vapor or boiling liquid is one of the media in a heat exchanger, temperature of this medium does not change. Some relations presented in Chapter 4.2.1 are not valid in this case. However relations for the average temperature difference (4.13) and for the heat transfer area (4.16) are still current. Considering relations (4.15), the only current relation is this for which  $dT \neq 0$ .

When both media has constant temperatures,  $P = 0$ ,  $\Delta T = \text{const}$ ,  $U = \text{const}$  and the heat transfer area is calculated according to formula (4.16), in which the substitution  $\Delta T_m = \Delta T$  must be included.

### 4.3. HEAT EXCHANGERS' HEAT TRANSFER AREA CALCULATIONS

Flow of the media in heat exchangers often is not counter-current. The cross flow, combination of counter-current and co-current (parallel) flow, sometimes co-current flow is also possible. When temperature of one medium is constant (because of a phase change), arrangement of media flow directions does not have influence on the average temperature difference  $\Delta T_m$ ; in this case this quantity is calculated as for the counter-current flow.

When none of the media undergoes a phase change and flow is co-current (fig. 4.2), the quantities  $\Delta T_I$  and  $\Delta T_{II}$  denote (as for counter-current flow) temperature differences between the media at the exchanger's ends but in this case  $\Delta T_I$  refer to inlet conditions (*in*) and  $\Delta T_{II}$  - outlet conditions (*out*) (hot and cold ends does not exist for co-current flow). Instead of formulas (4.6) and (4.7), the following expressions:  $\Delta T_I = T_{1in} - T_{2in}$ ,  $\Delta T_{II} = T_{1out} - T_{2out}$  are valid for co-current flow. The quantity  $\Delta T_m$  is the logarithmic average of  $\Delta T_I$  and  $\Delta T_{II}$ .

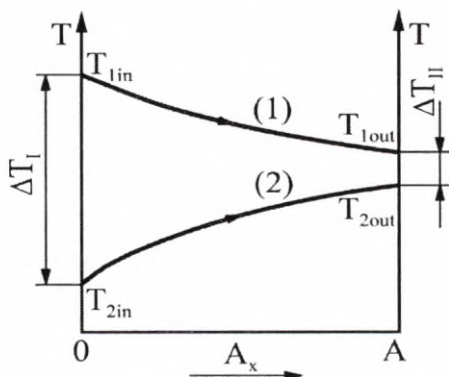


Fig. 4.2. Temperature profile for a co-current heat exchanger

If reciprocal direction of flow of both media is different than co- and counter-current,  $\Delta T_m$  is calculated as follows: temperature differences  $\Delta T_I$  and  $\Delta T_{II}$  are determined as for counter-current flow with formulas (4.6) and (4.7), then the average logarithmic temperature difference is calculated with the equation (4.13). This value corresponds to counter-current flow ( $\Delta T_{m0}$ ). The real temperature difference is calculated according to the formula

$$\Delta T_m = Y \cdot \Delta T_{m0} \tag{4.17}$$

Values of the correction  $Y$  are smaller than or equal to 1 ( $Y = 1$  for counter-current flow) and are functions of  $X$  and  $Z$  parameters, which are defined in the following way

$$X = \frac{\Delta T_I}{\Delta T_{max}} = \frac{T_{1in} - T_{1out}}{T_{1in} - T_{2in}} < 1 \tag{4.18}$$

$$Z = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_I} = \frac{T_{2out} - T_{2in}}{T_{1in} - T_{1out}} \tag{4.19}$$

Function  $Y = f(X, Z)$  for cross flow i.e., for the case when one medium flows in pipes and the other flows perpendicularly to these pipes, is shown in fig. 4.3. Such flow occurs e.g. when pipes are short or when there are baffles in a shell.

Function  $Y = f(X, Z)$  for an exchanger with even number of courses of the pipes what is equivalent to a combination of co-current and counter-current flow is shown in fig. 4.4.

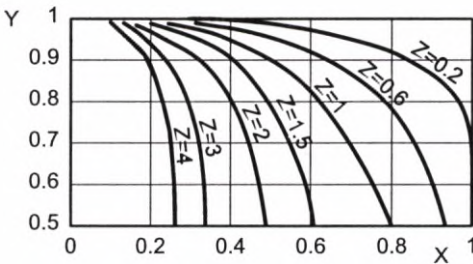


Fig. 4.3. Dependence of the correction  $Y$  on  $X$  and  $Z$  for cross-flow

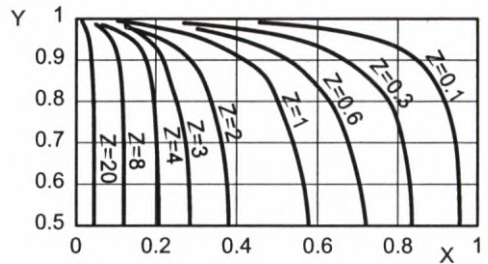


Fig. 4.4. Dependence of the correction  $Y$  on  $X$  and  $Z$  for an exchanger with even number of passes

It should be noticed that the same values of  $Y$  will be obtained from the diagrams if  $X$  and  $Z$  values are calculated from the formulas:  $X = \Delta T_2 / T_{max}$  and  $Z = \Delta T_I / \Delta T_2$ .



Heat transfer area of a thin-walled exchanger is calculated with formula (4.15) or (4.16) and the total length of exchanger's pipes – according to the equation

$$\sum L = \frac{A}{\pi d} \quad (4.20)$$

When convection heat transfer coefficients on both sides of pipes are comparable, it is assumed that the average (arithmetic average) of internal and external pipes surface area is the heating area of the exchanger, that is  $A = 0.5 \cdot (A_{external} + A_{internal})$ . If convection heat transfer coefficients are not comparable, the heat transfer area is referred to this side of pipes which contacts with the medium that has lower convection heat transfer coefficient so  $A = A_{external}$  or  $A = A_{internal}$ .

The total length of a thick-walled exchanger is calculated with formula (4.4) in the integrated form

$$\sum L = \frac{\dot{Q}}{U_L \cdot \Delta T_m} \quad (4.21)$$

Length of each pipe results from division of  $\sum L$  by the total number of pipes. Number of pipes should be chosen properly to their length to ensure proper geometric proportions of the exchanger's shell. In order to keep these proportions and moreover to keep proper flow velocities of the media, heat exchangers with multiple flow of a medium through the tubes are often used (multipass heat exchangers).

#### 4.4. TRANSIENT HEAT TRANSFER

Heating or cooling of liquid through a partition in a tank by the means of a medium with constant temperature deserves special attention; e.g. saturated water vapor (heating) or ambient air (cooling) can be this medium.

The amount of heat transferred from liquid contained in the tank through the heat transfer area  $A$  (surface area of walls or a coil) is defined by the formula

$$dQ = UA (T_A - T) \cdot dt \quad (4.22)$$

where:

- $T_A$  – heating medium temperature (constant over time), °C,
- $T$  – temperature of liquid in a tank (variable over time), °C,
- $Q$  – heat amount, J,
- $t$  – time, s.

It is assumed that temperature of liquid in the tank is constant in the whole volume. When the liquid contained in the tank takes the differential amount of heat  $dQ$ , differential change in temperature  $dT$  occurs

$$dQ = mc \cdot dT \quad (4.23)$$

The symbol  $m$  denotes mass of a medium contained in a tank. Combining relations (4.22) and (4.23), one gets the formula for time of heating of liquid in the tank from the initial temperature  $T_{init}$  to the final one  $T_{final}$

$$t = \frac{mc}{A} \cdot \int_{T_{init}}^{T_{final}} \frac{dT}{U(T_A - T)} \quad (4.24)$$

The formula for cooling of a medium in the tank ( $T_A < T$ ) is identical.

#### EXAMPLE 4.1

Hot gas is being cooled in a shell-and-tube heat exchanger with cooling water flowing in pipes. The exchanger is made of steel pipes which thermal conductivity is  $k = 46.5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  and thickness equals 2.5 mm. The convection heat transfer coefficient for the considered gas is  $h_1 = 32 \text{ W/(m}^2\text{K)}$  and for water –  $h_2 = 1510 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . The pipes' walls can be treated as flat. Calculate the overall heat transfer coefficient for the pipes without contaminants deposit and the percent change in the coefficient in the following cases:

- 1) steel pipes are replaced with copper pipes ( $k = 385 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ),
- 2) baffles are used in the shell side so the convection heat transfer coefficient for gas reaches the value  $h_1 = 73 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ,
- 3) flow rate increases so the convection heat transfer coefficient for water has the value  $h_2 = 2350 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ,
- 4) both sides of pipes are contaminated with deposits which have the following heat transfer resistances: at gas side  $R_1 = 0.0004 \text{ m}^2\text{K/W}$ , at water side  $R_2 = 0.0011 \text{ m}^2\text{K/W}$ ,
- 5) as above but for  $h_1 = 73 \text{ W/(m}^2\text{K)}$  (as in point 2).

The overall heat transfer coefficient for a flat wall is calculated with the formula

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + R_1 + \frac{s}{k} + R_2 + \frac{1}{h_2}}$$

*Ad 0.* The overall heat transfer coefficient for the case from the beginning of the example equals

$$U_0 = \frac{1}{\frac{1}{32} + \frac{0.0025}{46.5} + \frac{1}{1510}} = 31.28 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

so it is not much lower than the convection coefficient  $h_1$ .

*Ad 1.* When steel pipes are replaced with copper pipes which has the same thickness but more than 8 times higher thermal conductivity, the overall heat transfer coefficient will be equal to

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{32} + \frac{0.0025}{385} + \frac{1}{1510}} = 31.33 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The increase with relation to  $U_0$  is only 0.16%.

*Ad 2.* When the convection heat transfer coefficient for gas equals  $h_1 = 73 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , the overall heat transfer coefficient is

$$U_2 = \frac{1}{\frac{1}{73} + \frac{0.0025}{46.5} + \frac{1}{1510}} = 69.4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The increase in the coefficient with relation to  $U_0$  is 122%, what is almost the same as the increase in the convection heat transfer coefficient  $h_1$ .

*Ad 3.* If the convection heat transfer coefficient for water increases to the value  $h_2 = 2350 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , the overall heat transfer coefficient will be

$$U_3 = \frac{1}{\frac{1}{32} + \frac{0.0025}{46.5} + \frac{1}{2350}} = 31.52 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

This value is higher only by 0.76% than  $U_0$ .

*Ad 4.* When the resistance of contaminants deposit is included, the overall heat transfer coefficient decreases

$$U_4 = \frac{1}{\frac{1}{32} + 0.0004 + \frac{0.0025}{46.5} + 0.0011 + \frac{1}{1510}} = 29.88 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The calculated value is lower by 4.5% than  $U_0$ .

Ad 5. When the resistance of contaminants deposit is included and values of the convection heat transfer coefficients are the same as in point 2 ( $h_1 = 73 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ,  $h_2 = 1510 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ), one gets

$$U_5 = \frac{1}{\frac{1}{73} + 0.0004 + \frac{0.0025}{46.5} + 0.0011 + \frac{1}{1510}} = 62.83 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

In this case two comparisons are possible:

- The above value is lower by 9.5% than the value obtained in point 2.
- Contaminants have higher influence on the overall heat transfer coefficient when the sum of the other heat resistances is lower. It can be noticed when values of the overall heat transfer coefficients in relation to coefficients determined for pipes without contaminants are compared: it was obtained 4.5% in point 4 and 9.5% in point 5.

#### EXAMPLE 4.2

Combustion gases are flowing perpendicularly to pipes on the shell side of a heater. The inlet temperature of gases is  $T_{1in} = 450^\circ\text{C}$  and the outlet temperature of water equals  $T_{2out} = 120^\circ\text{C}$ . The convection heat transfer coefficient for the combustion gases is  $h_1 = 60 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , for water is equal to  $h_2 = 800 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Thickness of steel walls is  $s = 6 \text{ mm}$  and thermal conductivity of steel equals  $46.5 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ . Calculate the maximum temperature of pipes' walls:

- for new pipes (without a contaminants deposit),
- for pipes with a deposit on the internal side; thermal resistance of the deposit is  $R_2 = 0.006 \text{ m}^2\text{K}/\text{W}$ .

The maximum temperature of pipes' wall will be at the hot end of the heater i.e., in this cross section where gas of temperature  $T_{1in} = 450^\circ\text{C}$  gives heat to liquid of temperature  $T_{2out} = 120^\circ\text{C}$ .

Ad a. The overall heat transfer coefficient is

$$U = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{0.006}{46.5} + \frac{1}{800}} = 55.4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Heat flux at the hot end of the exchanger equals

$$\frac{\dot{Q}}{A} = q = U \cdot \Delta T = 55.4 \cdot (450 - 120) = 18290 \text{ W}/\text{m}^2$$

Walls temperatures result from equation (3.1)

$$q = h \cdot |T - T_w|$$

Temperature of the wall at the side of combustion gases is

$$T_{w1} = T_1 - \frac{q}{h_1} = 450 - \frac{18290}{60} = 145.2^\circ\text{C}$$

Temperature of the wall at the side of water is equal to

$$T_{w2} = T_2 + \frac{q}{h_2} = 120 + \frac{18290}{800} = 142.9^\circ\text{C}$$

so the wall is in the temperature range:  $142.9^\circ\text{C} < T_w < 145.2^\circ\text{C}$ . When resistance of the wall is small, its average temperature can be calculated with the simplified formula

$$T_w = \frac{T_1 h_1 + T_2 h_2}{h_1 + h_2} = \frac{450 \cdot 60 + 120 \cdot 800}{60 + 800} = 143^\circ\text{C}$$

*Ad b.* When the thermal resistance  $R_2 = 0.006 \text{ m}^2\text{K/W}$  occurs at the side of liquid, the convection heat transfer coefficient is

$$U = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{0.006}{46.5} + 0.006 + \frac{1}{800}} = 41.6 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

and the heat flux

$$q = 41.6 \cdot (450 - 120) = 13720 \text{ W}/\text{m}^2$$

Temperature at the side of the combustion gases equals

$$T_{w1} = T_1 - \frac{q}{h_1} = 450 - \frac{13720}{60} = 221.3^\circ\text{C}$$

When temperature at the other side of the wall is calculated, the formula must be modified because the aim is to calculate temperature of the steel wall not the deposit

$$T_{w2} = T_2 + q \left( \frac{1}{h_2} + R_2 \right) = 120 + 13720 \cdot \left( \frac{1}{800} + 0.006 \right) = 219.5^\circ\text{C}$$

The steel wall is in the temperature range:  $219.5^\circ\text{C} < T_w < 221.3^\circ\text{C}$  i.e., on the average, 77 K above the corresponding temperature of the wall without the deposit.

#### EXAMPLE 4.3

Air flowing through a heater is being heated from  $T_{2in} = 8^\circ\text{C}$  to  $T_{2out} = 52^\circ\text{C}$ . Saturated water vapor condensing inside pipes at temperature  $T_1 = 115^\circ\text{C}$  is a heating medium. What temperature can air be heated up to if the pipes have fins on their outside surface. How many times should flow rate be increased in reference to the value without fins? Neglect convective thermal resistance during condensation and thermal resistance to conduction through metal elements of pipes and fins. Assume that convection heat transfer coefficients for gas before and after the fins have been installed are the same. Do the calculations for the following values of coefficients of finning:  $\phi = 2$ ,  $\phi = 3$  and  $\phi = 4$ .

The average temperature difference between the media is

$$\Delta T_m = \frac{(T_1 - T_{2in}) - (T_1 - T_{2out})}{\ln \frac{T_1 - T_{2in}}{T_1 - T_{2out}}} = \frac{T_{2out} - T_{2in}}{\ln \frac{T_1 - T_{2in}}{T_1 - T_{2out}}} \quad (\text{a})$$

Despite the fact that there is cross-flow of the media, the correction  $Y$  is equal to 1 because temperature of one of the media is constant ( $T_1 = \text{const}$ ).

Comparison of the amount of heat transferred through walls of the pipes with the amount taken by gas leads to the relationship

$$U A \cdot \Delta T_m = \dot{m}_2 c_2 (T_{2out} - T_{2in}) \quad (\text{b})$$

After expression (a) has been taken into account, one obtains

$$\left( \frac{U A}{\dot{m}_2 c_2} \right) = \ln \frac{T_1 - T_{2in}}{T_1 - T_{2out}} \quad (\text{c})$$

Substitution of numerical values, yields

$$\left( \frac{U A}{\dot{m}_2 c_2} \right) = \ln \frac{115 - 8}{115 - 52} = 0.530$$

If resistance to convective heat transfer inside the pipes and resistance to conduction through pipe walls are neglected, the overall heat transfer coefficient  $U$  is identical with the convection heat transfer coefficient  $h_2$  and the external surface is the heat transfer area  $A$ . In connection with that fact, after fins have been installed, the heat transfer area increases  $\varphi$  – times, the quantities  $U = h_2$ ,  $\dot{m}_2$ ,  $T_1$ ,  $T_{2in}$  remain the same and change in the heat capacity  $c_2$  caused by increase of the average gas temperature can be neglected. Denoting the final temperature of air after installation of fins as  $T'_{2out}$ , one gets (analogically to equation (c))

$$\left( \frac{U A}{\dot{m}_2 c_2} \right) \varphi = \ln \frac{T_1 - T_{2in}}{T_1 - T'_{2out}} \quad (d)$$

Substitution of numerical values and transformation yields

$$T'_{2out} = 115 - 107 \cdot \exp(-0.530 \cdot \varphi) \quad (e)$$

Analysis of equations (c) and (d) leads to the conclusion that for  $\varphi > 1$  it is  $T'_{2out} > T_{2out}$ . Increase in the final temperature of air results from not only higher amount of transferred heat but also increased demand for vapor. The relative increase in the demand for vapor for finned pipes equals

$$\varepsilon = \frac{\Delta \dot{m}_1}{\dot{m}_1} = \frac{\Delta \dot{Q}}{\dot{Q}} = \frac{(T'_{2out} - T_{2in}) - (T_{2out} - T_{2in})}{T_{2out} - T_{2in}} = \frac{T'_{2out} - T_{2out}}{T_{2out} - T_{2in}}$$

If the substitution  $T_{2in} = 8^\circ\text{C}$ ,  $T_{2out} = 52^\circ\text{C}$  is done, it can be written that

$$\varepsilon = \frac{\Delta \dot{m}_1}{\dot{m}_1} = \frac{T'_{2out} - 52}{44} \quad (f)$$

Results of calculations of the final air temperature for finned pipes  $T'_{2out}$  (according to (e)) and the relative increase in the demand for vapor (according to (f)) in relation to  $\varphi$ , are presented in table 4.3.

Table 4.3

Coefficient of finning $\varphi$	Final air temperature $T'_{2k}$	Relative increase in vapor flow rate [%]
1	52.0	0
2	77.9	58.9
3	93.2	93.5
4	102.1	114.0

## EXAMPLE 4.4

Solution of sodium hydroxide at flow rate of  $\dot{m}_2 = 50\,000$  kg/h must be heated from  $T_{2in} = 40^\circ\text{C}$  to  $T_{2out} = 95^\circ\text{C}$  with water (under pressure) at temperature  $T_{1in} = 140^\circ\text{C}$ . Because of technical reasons, outlet temperature of water must be  $T_{1out} = 120^\circ\text{C}$ . A six-pass heat exchanger with  $n_j = 53$  pipes of dimensions 25/21 mm for each pass is used in the process. The diameter of exchangers' shell is  $D = 0.7$  m. Water will be flowing on the shell side. Calculate flow rate of water and length of pipes that ensure the required temperature conditions.

Physical properties of the solution at its average temperature are as follows:  $c_2 = 3860$  J/(kg·K),  $\mu_2 = 0.715 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s),  $k_2 = 0.578$  W/(m·K),  $\rho_2 = 1010$  kg/m<sup>3</sup>. Include in calculations the resistance of contaminants: at the side of water  $R_1 = 0.0001$  m<sup>2</sup>K/W, at the side of solution  $R_2 = 0.0002$  m<sup>2</sup>K/W. Thermal conductivity of steel pipes is  $k_s = 46.5$  W/(m·K).

Solution of the example will be obtained with the following scheme, which is used in thermal calculations of heat exchangers:

- Balance calculations.
- Average temperature difference calculations.
- Calculations for the convection heat transfer coefficient for a medium that gives off heat.
- Calculations for the convection heat transfer coefficient for a medium that takes heat.
- Overall heat transfer coefficient calculations.
- Heat transfer area and pipe length calculations.

*Ad a. Balance calculations*

The rate at which heat is taken by medium (2), i.e. to NaOH solution, equals

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 c_2 (T_{2out} - T_{2in}) = \frac{50000}{3600} \cdot 3860 \cdot (95 - 40) = 2.95 \cdot 10^6 \text{ W}$$

The average temperature of the medium (1), i.e. water, is  $130^\circ\text{C}$ ; physical properties of water at this temperature are as follows (table AT-1):  $c_1 = 4250$  J/(kg·K),  $\mu_1 = 0.2118 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s),  $k_1 = 0.686$  W/(m·K),  $\rho = 934.5$  kg/m<sup>3</sup>. Mass flow rate of water  $\dot{m}_1$  was calculated on the basis of the heat balance without including the heat losses

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}}{c_1 (T_{1in} - T_{1out})} = \frac{2.95 \cdot 10^6}{4250 \cdot (140 - 120)} = 34.7 \text{ kg/s} = 125\,000 \text{ kg/h}$$



Volumetric flow rate of water equals (at the average temperature)

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1} = \frac{34.7}{934.5} = 0.0371 \text{ m}^3/\text{s}$$

*Ad b. Average temperature difference  $\Delta T_m$  calculations*

Temperatures at the hot end of the exchanger are as follows:  $T_{1in} = 140^\circ\text{C}$ ,  $T_{2out} = 95^\circ\text{C}$ , and their difference equals

$$\Delta T_I = T_{1in} - T_{2out} = 140 - 95 = 45 \text{ K}$$

At the cold end of the exchanger:  $T_{1out} = 120^\circ\text{C}$ ,  $T_{2in} = 40^\circ\text{C}$ , so

$$\Delta T_{II} = T_{1out} - T_{2in} = 120 - 40 = 80 \text{ K}$$

If flow is counter-current, the average temperature difference is

$$\Delta T_{m0} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_{II}}{\ln \frac{\Delta T_I}{\Delta T_{II}}} = \frac{45 - 80}{\ln \frac{45}{80}} = 60.8 \text{ K}$$

In fact, flow of the media is both co-current and counter-current because the multipass exchanger is considered. The  $X$  and  $Z$  parameters must be calculated

$$X = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_{\max}} = \frac{T_{2out} - T_{2in}}{T_{1in} - T_{2in}} = \frac{95 - 40}{140 - 40} = 0.55$$

$$Z = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{T_{1in} - T_{1out}}{T_{2out} - T_{2in}} = \frac{140 - 120}{95 - 40} = 0.36$$

The value of function  $Y$  for the above parameters was found with the diagram (fig. 4.4); it was obtained that  $Y = 0.94$ . The average temperature difference between the media (1) and (2) equals

$$\Delta T_m = Y \cdot \Delta T_{m0} = 0.94 \cdot 60.8 = 57.2 \text{ K}$$

*Ad c. Calculations for the convection heat transfer coefficient for the medium that gives off heat (water)*

The cross-sectional area of the shell side is

$$S_1 = \frac{\pi}{4} (D^2 - n d_z^2) = \frac{\pi}{4} \cdot [(0.7)^2 - 318 \cdot (0.025)^2] = 0.229 \text{ m}^2$$

The value  $n = j \cdot n_j = 6 \cdot 53 = 318$  was substituted as the overall number of pipes. The hydraulic diameter of the shell side was calculated

$$d_e = 4 \frac{S_1}{O_1} = 4 \cdot \frac{\frac{\pi}{4} (D^2 - n d_z^2)}{\pi (D + n d_z)} = \frac{D^2 - n d_z^2}{D + n d_z}$$

$$d_e = \frac{(0.7)^2 - 318 \cdot (0.025)^2}{0.7 + 318 \cdot 0.025} = 0.0337 \text{ m}$$

Velocity of water on the shell side is (flow parallel to the pipe axis)

$$u_1 = \frac{\dot{V}_1}{S_1} = \frac{0.0371}{0.229} = 0.162 \text{ m/s}$$

The Reynolds number

$$\text{Re}_1 = \frac{u_1 d_e \rho_1}{\mu_1} = \frac{0.162 \cdot 0.0337 \cdot 934.5}{0.2118 \cdot 10^{-3}} = 24100$$

The Prandtl number

$$\text{Pr}_1 = \frac{c_1 \mu_1}{k_1} = \frac{4250 \cdot 0.2118 \cdot 10^{-3}}{0.686} = 1.31$$

The convection heat transfer coefficient was calculated using the McAdams formula (3.4)

$$\text{Nu}_1 = 0.023 \cdot \text{Re}_1^{0.8} \text{Pr}_1^{0.4} = 0.023 \cdot (24100)^{0.8} \cdot (1.31)^{0.4} = 82.2$$

$$h_1 = \frac{\text{Nu}_1 k_1}{d_e} = \frac{82.2 \cdot 0.686}{0.0337} = 1670 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

*Ad d. Calculations for the convection heat transfer coefficient for the medium that takes heat (the solution)*

The internal cross-sectional area of the pipes for one pass is

$$S_2 = n_j \frac{\pi d_w^2}{4} = 53 \cdot \frac{\pi \cdot (0.021)^2}{4} = 0.0184 \text{ m}^2$$

Velocity of the solution in the pipes equals

$$u_2 = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2 S_2} = \frac{50\,000/3600}{1010 \cdot 0.0184} = 0.749 \text{ m/s}$$

The numbers Re and Pr are calculated

$$\text{Re}_2 = \frac{u_2 d_w \rho_2}{\mu_2} = \frac{0.749 \cdot 0.021 \cdot 1010}{0.715 \cdot 10^{-3}} = 22\,200$$

$$\text{Pr}_2 = \frac{c_2 \mu_2}{k_2} = \frac{3860 \cdot 0.715 \cdot 10^{-3}}{0.578} = 4.78$$

The Nusselt number is calculated according to (3.4)

$$\text{Nu}_2 = 0.023 \cdot \text{Re}_2^{0.8} \text{Pr}_2^{0.4} = 0.023 \cdot (22200)^{0.8} \cdot (4.78)^{0.4} = 129$$

Using the above value, one calculates the convection heat transfer coefficient

$$h_2 = \frac{\text{Nu}_2 k_2}{d_w} = \frac{129 \cdot 0.578}{0.021} = 3550 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

*Ad e. Overall heat transfer coefficient calculations*

The following substitutions were included in formula (4.5):  $d_1 = d_z$ ,  $d_2 = d_w$  and

$$\sum_i \frac{s_i}{k_i d_{mi}} = \frac{R_1}{d_z} + \frac{s}{k_s d_m} + \frac{R_2}{d_w}$$

where  $s$  denotes thickness of the pipe wall ( $= 0.002 \text{ m}$ ) and  $d_m$  it the average (logarithmic) diameter

$$d_m = \frac{d_z - d_w}{\ln \frac{d_z}{d_w}} = \frac{0.025 - 0.021}{\ln \frac{0.025}{0.021}} = 0.0229 \text{ m}$$

The overall heat transfer coefficient with reference to the total length of pipes in the exchanger was calculated

$$U_L = \frac{\pi}{\frac{1}{h_1 d_z} + \frac{R_1}{d_z} + \frac{s}{k_s d_m} + \frac{R_2}{d_w} + \frac{1}{h_2 d_w}}$$

$$U_L = \frac{\pi}{\frac{1}{1670 \cdot 0.025} + \frac{0.0001}{0.025} + \frac{0.002}{46.5 \cdot 0.0229} + \frac{0.0002}{0.021} + \frac{1}{3550 \cdot 0.021}} = 59.6 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$$

It is much more convenient to use the overall heat transfer coefficient with reference to the surface area. If such coefficients are used, it must be assumed that wall of pipes are flat. In the cases when thermal resistance to conduction does not play a significant role and thickness of walls is small (in relation to the diameter), this assumption is permissible. The overall heat transfer coefficient (with reference to the surface area) equals

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + R_1 + \frac{s}{k_s} + R_2 + \frac{1}{h_2}}$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{1670} + 0.0001 + \frac{0.002}{46.5} + 0.0002 + \frac{1}{3550}} = 818 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

#### *Ad f. Heat transfer area and pipe length calculations*

According to relation (4.21), the total length of all the pipes in the exchanger is

$$\sum L = \frac{\dot{Q}}{U_L \cdot \Delta T_m} = \frac{2.95 \cdot 10^6}{59.6 \cdot 57.2} = 865 \text{ m}$$

Length of a single pipe equals

$$L = \frac{\sum L}{n} = \frac{865}{318} = 2.72 \text{ m}$$

One can also calculate length of the pipes with a simplified method, using the coefficient  $U$  i.e., treating pipe's walls as if they were flat. According to relation (4.16), the heating surface area of the exchanger is

$$A = \frac{\dot{Q}}{U \cdot \Delta T_m} = \frac{2.95 \cdot 10^6}{818 \cdot 57.2} = 63 \text{ m}^2$$

Treating this area as an (arithmetic) average of external and internal area, one can write that

$$A = n \pi d_m L$$

where:  $d_m = 0.5 \cdot (0.021 + 0.025) = 0.023$  m. Length of a single pipe is

$$L = \frac{A}{n \pi d_m} = \frac{63}{318 \cdot \pi \cdot 0.023} = 2.74 \text{ m}$$

The obtained result is almost identical with the exact result what indicates that formulas valid for flat walls can also be used for thin-walled pipes. In practice, the computational pipes length is usually increased to the normalized value (in this case  $L = 3$  m).

#### EXAMPLE 4.5

Oil is going to be cooled from  $T_{1in} = 110^\circ\text{C}$  to  $T_{1out} = 50^\circ\text{C}$  in a heat exchanger. Water is the cooling medium. Its initial temperature is  $T_{2in} = 30^\circ\text{C}$ . Flow rate of oil equals  $\dot{m}_1 = 3500$  kg/h, of water –  $\dot{m}_2 = 8000$  kg/h. Average heat capacity of oil is  $c_1 = 2100$  J/(kg·K). The convection heat transfer coefficient for oil is variable: it equals  $h_{1in} = 1100$  W/(m<sup>2</sup>K) (110°C) for inlet conditions and  $h_{1out} = 800$  W/(m<sup>2</sup>K) for outlet conditions (50°C). The convection heat transfer coefficient for water is approximately constant and equal to  $h_2 = 1400$  W/(m<sup>2</sup>K). Thermal resistance of the wall with a contaminants deposit is  $\Sigma(s_i/k_i) = 0.0002$  m<sup>2</sup>K/W. Treating walls of the exchanger as flat, calculate the necessary heat transfer area.

---

When the overall heat transfer coefficient is not constant, the heat transfer area can be calculated with relation (4.15)

$$A = \dot{m}_1 c_1 \int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{U(T_1 - T_2)}$$

Substituting expression (4.2) in place of  $U$ , if  $h_2 = \text{const}$  and  $(s_i/k_i) = \text{const}$ , one gets

$$A = \dot{m}_1 c_1 \left[ \int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{h_1(T_1 - T_2)} + \left( \sum_i \frac{s_i}{k_i} + \frac{1}{h_2} \right) \int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{T_1 - T_2} \right] \quad (\text{a})$$

The amount of heat per unit time given by oil equals

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_1 (T_{1in} - T_{1out}) = \frac{3500}{3600} \cdot 2100 \cdot (110 - 50) = 122\,500 \text{ W}$$

Outlet temperature of water ( $c_2 = 4190 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ) is

$$T_{2out} = T_{2in} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_2 c_2} = 30 + \frac{122\,500}{\frac{8000}{3600} \cdot 4190} = 43.2^\circ\text{C}$$

The local temperature difference between the media  $T_1 - T_2 = \Delta T$  can be presented in the following form resulting from relation (4.10)

$$T_1 - T_2 = (1 - R_q) T_1 - T_{2out} + R_q T_{1in}$$

where

$$R_q = \frac{\dot{m}_1 c_1}{\dot{m}_2 c_2} = \frac{3500 \cdot 2100}{8000 \cdot 4190} = 0.219$$

Substitution of numerical values yields

$$T_1 - T_2 = 0.781 \cdot T_1 - 19.1 \quad (\text{b})$$

The above relation allows one to calculate the second integer in formula (a)

$$\int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{T_1 - T_2} = \int_{50}^{110} \frac{dT_1}{0.781 \cdot T_1 - 19.1} = \frac{1}{0.781} \cdot \ln \frac{0.781 \cdot 110 - 19.1}{0.781 \cdot 50 - 19.1} = 1.55$$

In order to calculate the first integer in (a), relation between the convective heat transfer coefficient for oil and oil temperature is needed:  $h_1 = f(T_1)$ . It was assumed that this function has a linear form. Equation of a straight line going through points

which coordinates are  $(h_{1out} = 800, T_{1out} = 50)$  and  $(h_{1in} = 1100, T_{1in} = 110)$  were determined. The equation has the form

$$h_1 = 5 T_1 + 550 \quad (c)$$

Substituting relations (b) and (c) into the first integer in equation (a), one gets

$$\int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{h_1(T_1 - T_2)} = 0.256 \cdot \int_{50}^{110} \frac{dT_1}{(T_1 + 110) \cdot (T_1 - 24.4)} \quad (d)$$

Because

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \ln \frac{x+b}{x+a} + C$$

so value of integer (d) is

$$\int_{T_{1out}}^{T_{1in}} \frac{dT_1}{h_1(T_1 - T_2)} = 0.256 \cdot \frac{1}{110 + 24.4} \cdot \ln \frac{(110 - 24.4) \cdot (50 + 110)}{(110 + 110) \cdot (50 - 24.4)} = 0.00170$$

Substitution of values of the integers into (a), yields

$$A = \frac{3500}{3600} \cdot 2100 \cdot \left[ 0.00170 + \left( 0.0002 + \frac{1}{1400} \right) \cdot 1.55 \right] = 6.35 \text{ m}^2$$

The heat transfer area can be also calculated with the simplified method, in which values of  $h_1$  or (better) values of  $U$  are averaged. It is  $h_{1in} = 1100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  for the hot end of the exchanger and the overall heat transfer coefficient equals

$$U_I = \frac{1}{\frac{1}{1100} + 0.0002 + \frac{1}{1400}} = 548 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

It is  $h_{1out} = 800 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  for the cold end. The overall heat transfer coefficient is calculated analogically

$$U_{II} = \frac{1}{\frac{1}{800} + 0.0002 + \frac{1}{1400}} = 462 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The average value is

$$U = 0.5 \cdot (548 + 462) = 505 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

The average temperature difference between the media in a counter-current heat exchanger is equal to

$$\Delta T_m = \frac{(110 - 43.2) - (50 - 30)}{\ln \frac{110 - 43.2}{50 - 30}} = 38.8 \text{ K}$$

Finally the heat transfer area is calculated

$$A = \frac{\dot{Q}}{U \cdot \Delta T_m} = \frac{122\,500}{505 \cdot 38.8} = 6.25 \text{ m}^2$$

This value is lower only by 1.6% than the exact one.

#### EXAMPLE 4.6

The oil product is flowing at flow rate of  $\dot{m}_1 = 1.28 \text{ kg/s}$  into a counter-current heat exchanger of length 1 m and heat transfer area  $A = 15 \text{ m}^2$ . Initial temperature of the product is  $T_{1in} = 90^\circ\text{C}$ , its average heat capacity equals  $c_1 = 2300 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Water at flow rate of  $\dot{m}_2 = 2.70 \text{ kg/s}$ , at initial temperature  $T_{2in} = 32^\circ\text{C}$  is the cooling medium. Assuming that the overall heat transfer coefficient is  $U = 468 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , find outlet temperatures and temperature profile for both media along the exchanger. Exchanger's wall treat as flat.

The rate at which heat is lost by the medium (1) i.e., the oil product, equals

$$\dot{Q}_1 = \dot{m}_1 c_1 (T_{1in} - T_{1out}) \quad (\text{a})$$

The rate at which heat is taken by the medium (2) i.e., cooling water, is as follows

$$\dot{Q}_2 = \dot{m}_2 c_2 (T_{2out} - T_{2in}) \quad (\text{b})$$

The rate at which heat is transferred through the heat transfer area of the exchanger is given by the relation



$$\dot{Q} = k A \frac{(T_{1in} - T_{2out}) - (T_{1out} - T_{2in})}{\ln \frac{T_{1in} - T_{2out}}{T_{1out} - T_{2in}}} \quad (c)$$

The following relation is valid for left sides of the above three equations:  $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}$ . Therefore two independent equations with two unknowns  $T_{1out}$  and  $T_{2out}$  can be formed from equations (a), (b) and (c)

$$\frac{T_{2out} - T_{2in}}{T_{1in} - T_{1out}} = R_q \quad (d)$$

Hence, the relationship between  $T_{1out}$  and  $T_{2out}$  can be written as

$$T_{2out} = T_{2in} + R_q (T_{1in} - T_{1out}) \quad (e)$$

Combining relations (a) and (c), after transformations, one gets the following formula

$$\frac{\dot{m}_1 c_1}{U A} = \frac{1 - \frac{T_{2out} - T_{2in}}{T_{1in} - T_{1out}}}{\ln \frac{T_{1in} - T_{2out}}{T_{1out} - T_{2in}}} \quad (f)$$

Including relation (d) in the above formula and using definition of the quantity  $P$  (formula (4.9)), one gets

$$\ln \frac{T_{1in} - T_{2out}}{T_{1out} - T_{2in}} = PUA \quad (g)$$

Substituting relation (e) into (g), one got an equation with one unknown ( $T_{1out}$ )

$$\ln \frac{(T_{1in} - T_{2in}) - R_q (T_{1in} - T_{1out})}{T_{1out} - T_{2in}} = PUA \quad (h)$$

Hence

$$T_{1out} = \frac{T_{1in} (1 - R_q) + T_{2in} [\exp(PUA) - 1]}{\exp(PUA) - R_q} \quad (i)$$

Equations (e) and (i) are the solution of the problem of outlet temperatures calculations.

Because the average value of water heat capacity is  $c_2 = 4190 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , after substitution of numerical values, one obtained that

$$P = \frac{1}{\dot{m}_1 c_1} - \frac{1}{\dot{m}_2 c_2} = \frac{1}{1.28 \cdot 2300} - \frac{1}{2.70 \cdot 4190} = 2.51 \cdot 10^{-4} \text{ K}\cdot\text{s/J}$$

$$R_q = \frac{\dot{m}_1 c_1}{\dot{m}_2 c_2} = \frac{1.28 \cdot 2300}{2.70 \cdot 4190} = 0.260$$

$$\exp(PUA) = \exp(2.51 \cdot 10^{-4} \cdot 468 \cdot 15) = 5.84$$

$$T_{1out} = \frac{90 \cdot (1 - 0.260) + 32 \cdot (5.84 - 1)}{5.84 - 0.260} = 39.7^\circ\text{C}$$

$$T_{2out} = 32 + 0.260 \cdot (90 - 39.7) = 45.1^\circ\text{C}$$

Temperatures of both media at three points of the exchanger, at the following distances from the hot end: 0.25; 0.50 and 0.75 m will be determined. The following heat transfer areas (calculated from the hot end to the considered cross section):  $A_x = 3.75$ ; 7.50 and 11.25  $\text{m}^2$  correspond to these distances. Formula (4.8) was used in calculations

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \Delta T_1 \cdot \exp(-PUA_x) \quad (\text{j})$$

where:  $A_x$  is a variable and  $\Delta T_1$  – temperature difference between the media at the hot end of the exchanger:  $\Delta T_1 = T_{1in} - T_{2out} = 90 - 45.1 = 44.9 \text{ K}$ . If the relation  $PU = 2.51 \cdot 10^{-4} \cdot 468 = 0.118$  is included, the formula takes the form

$$\Delta T = 44.9 \cdot \exp(-0.118 \cdot A_x) \quad (\text{k})$$

It results from expression (4.10) that

$$T_1 = \frac{T_{2out} - R_q T_{1in} + \Delta T}{1 - R_q} \quad (\text{l})$$

and after substitution of numerical values

$$T_1 = \frac{21.7 + \Delta T}{0.740} \quad (\text{m})$$

Table 4.4

$A_x$ [m <sup>2</sup> ]	$\Delta T$ [K]	$T_1$ [°C]	$T_2$ [°C]
0	44.9	90.0	45.1
3.75	28.9	68.3	39.4
7.50	18.6	54.4	35.8
11.25	12.0	45.5	33.5
15	7.7	39.7	32.0

The algorithm of calculations is as follows:

- $\Delta T$  is calculated with relation (k) for a given  $A_x$ ,
- $T_1$  is calculated with relation (m),
- $T_2$  is calculated with relation  $T_2 = T_1 - \Delta T$ .

Results of calculations are presented in table 4.4 and in chart (fig. 4.5).

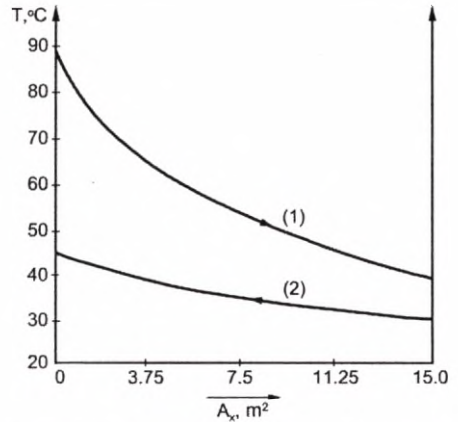


Fig. 4.5. Temperature profile in a counter-current heat exchanger

#### EXAMPLE 4.7

1 kg/s of an aqueous solution is flowing through a coil pipe placed in a perfect mixing tank (fig. 4.6). Its inlet temperature  $T_{2in} = 17^\circ\text{C}$ . Hot water is flowing through the tank. Its outlet temperature is  $T_1 = 90^\circ\text{C}$ . Heat transfer area of the coil pipe is  $A = 2\text{ m}^2$ , the overall heat transfer coefficient equals  $U = 900\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  and heat capacity of the solution is  $c_2 = 3900\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Calculate outlet temperature of the solution.

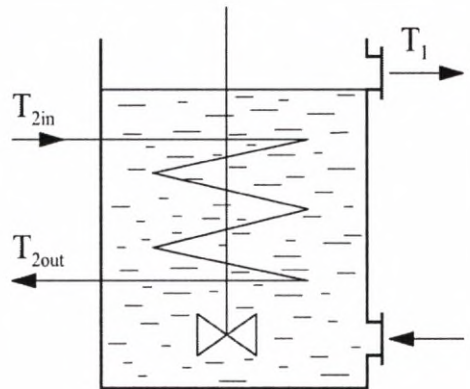


Fig. 4.6. Tank with a coil pipe

The rate at which heat is taken by the solution is

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 c_2 (T_{2out} - T_{2in}) \quad (\text{a})$$

Because of perfect mixing of the tank contents, temperature of water is the same in the whole volume and equal to outlet temperature  $T_1$ . The average temperature difference between the media is

$$\Delta T_m = \frac{(T_1 - T_{2in}) - (T_1 - T_{2out})}{\ln \frac{T_1 - T_{2in}}{T_1 - T_{2out}}} = \frac{T_{2out} - T_{2in}}{\ln \frac{T_1 - T_{2in}}{T_1 - T_{2out}}} \quad (\text{b})$$

The rate of heat transferred through the wall of the coil pipe is given by the relation

$$\dot{Q} = U \cdot \Delta T_m \cdot A \quad (c)$$

Connecting relations (a), (b) and (c) and transforming, one gets

$$T_{2out} = T_1 - (T_1 - T_{2in}) \cdot \exp\left(-\frac{U A}{\dot{m}_2 c_2}\right)$$

Substitution of numerical values allows one to get the outlet temperature of the solution

$$T_{2out} = 90 - (90 - 17) \cdot \exp\left(-\frac{900 \cdot 2}{1 \cdot 3900}\right) = 44.0^\circ\text{C}$$

#### EXAMPLE 4.8

A cylindrical metal vessel (a pot) of diameter  $d = 110$  mm was filled with  $m = 1$  kg of water at temperature  $T_{init} = 100^\circ\text{C}$ . Calculate temperature of water after 10 min for the following cases:

- contents of the vessel is being cooled by the ambient air which temperature is  $20^\circ\text{C}$ ,
- as above but the air temperature is  $0^\circ\text{C}$ ,
- contents of the vessel is being cooled by putting the vessel in large amount of water which temperature is  $20^\circ\text{C}$ .

Assume for all the cases that the vessel is closed and its bottom, lid and upper part of side walls (above the level of water contained in the vessel) are perfectly insulated. Neglect thermal resistance and heat capacity of vessel's walls. Emissivity of the walls is  $\varepsilon = 0.8$ .

The overall heat transfer coefficient under the conditions of the example is variable over time because convection heat transfer coefficients for natural convection change when media temperatures change. Combining relations (4.24) and (4.2) and neglecting thermal resistance to conduction through the wall, one gets

$$t = \frac{m c}{A} \left[ \int_{T_{init}}^{T_{final}} \frac{dT}{h (T_A - T)} + \int_{T_{init}}^{T_{final}} \frac{dT}{h_A (T_A - T)} \right] \quad (a)$$

where:

- $h$  – convection heat transfer coefficient for water in the vessel,
- $h_A$  – convection heat transfer coefficient for cooling fluid at constant temperature  $T_A$ .

The convection heat transfer coefficient for natural convection is given by the relation (3.18), which can be transformed into the form:

– for liquid in the vessel

$$h = B \cdot \Delta T^i \quad (b)$$

– for cooling fluid

$$h_A = B_A \cdot \Delta T_A^{i_A} \quad (c)$$

Physical properties of fluids at the average temperature of the boundary layer and appropriate constants occur in the relations for  $B$  and  $B_A$ ; moreover, when air is the cooling medium, radiation must be taken into account in calculations of  $B_A$ . Exponents  $i, i_A$  are usually equal to 1/3 or 1/4 depending on the value of the product  $GrPr$  (table 3.2). Final formulas become simplified, when it is assumed that  $i = i_A$ . Such an assumption is acceptable, if value of the exponent  $i$  appropriate for the medium with higher thermal resistance is taken for calculations. As a consequence of the assumption:  $i = i_A$ , of course, the same constant for both media is taken i.e.,  $C = 0.135$  for  $i = 1/3$  or  $C = 0.54$  for  $i = 1/4$ .

Temperature differences  $\Delta T$  and  $\Delta T_A$  are given by the relations

$$\Delta T = T - T_w \quad (d)$$

$$\Delta T_A = T_w - T_A \quad (e)$$

where  $T_w$  is walls temperature (which changes over time). Comparison of temporary heat streams on both sides of walls leads to the formula

$$h \cdot \Delta T = h_A \cdot \Delta T_A \quad (f)$$

Denoting the temporal ratio of the convection heat transfer coefficients as  $S$

$$S = \frac{h_A}{h} = \frac{\Delta T}{\Delta T_A} \quad (g)$$

one can express the temperature differences in the following form

$$\Delta T = \frac{S(T - T_A)}{1 + S} \quad (\text{h})$$

$$\Delta T_A = \frac{T - T_A}{1 + S} \quad (\text{i})$$

and the convection coefficients – in the form

$$h = B \left[ \frac{S(T - T_A)}{1 + S} \right]^i \quad (\text{j})$$

$$h_A = B_A \left[ \frac{T - T_A}{1 + S} \right] \quad (\text{k})$$

Dividing equation (c) by (b) and comparing the result with (g), one gets

$$\frac{B}{B_A} = S^{i+1} \quad (\text{l})$$

If quantities  $B$ ,  $B_A$  and  $S$  are treated as constants (i.e., averaged over initial and final conditions of the process), values of integers in expression (a) can be calculated with the use of relations (j) and (k)

$$\int_{T_{init}}^{T_{final}} \frac{dT}{h(T_A - T)} = \frac{(1+S)^i}{i S^i B} \left[ \frac{1}{(T_{final} - T_A)^i} - \frac{1}{(T_{init} - T_A)^i} \right] \quad (\text{m})$$

$$\int_{T_{init}}^{T_{final}} \frac{dT}{h_A(T_A - T)} = \frac{(1+S)^i}{i B_A} \left[ \frac{1}{(T_{final} - T_A)^i} - \frac{1}{(T_{init} - T_A)^i} \right] \quad (\text{n})$$

Substitution of formulas (m) and (n) into (a) with taking (l) into consideration, yields

$$t = \frac{m c}{A} \frac{(1+S)^{i+1}}{i B_A} \left[ \frac{1}{(T_{final} - T_A)^i} - \frac{1}{(T_{init} - T_A)^i} \right] \quad (\text{o})$$

Hence

$$T_{final} = T_A + \left[ \frac{A B_A i \cdot t}{m c (1+S)^{i+1}} + \frac{1}{(T_{init} - T_A)^i} \right]^{-1/i} \quad (\text{p})$$

The heat transfer area (cooling area)  $A$  and the average heat capacity of container's contents  $c$  must be determined for the conditions of the example. The assumption that the average temperature of water in each case (a, b, c) is equal to  $80^\circ\text{C}$ , allowed one to read from table AT-1 that  $c = 4194 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  and  $\rho = 971.8 \text{ kg}/\text{m}^3$ . The average volume of water is

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{971.8} = 0.00103 \text{ m}^3$$

and water height in the vessel

$$H = \frac{4V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0.00103}{\pi \cdot (0.11)^2} = 0.108 \text{ m}$$

The cooling area equals

$$A = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 0.11 \cdot 0.108 = 0.0374 \text{ m}^2$$

Table 4.5

Expressions for  $B$  in relation to temperature  $T_m$

$T_m$ [ $^\circ\text{C}$ ]	Air, $i = 1/4$	Water, $i = 1/4$	Water, $i = 1/3$
20	$1.374 \cdot H^{-0.25}$	$113.2 \cdot H^{-0.25}$	199.7
40	$1.373 \cdot H^{-0.25}$	$152.0 \cdot H^{-0.25}$	290.1
60	$1.372 \cdot H^{-0.25}$	$181.3 \cdot H^{-0.25}$	362.1
80		$206.8 \cdot H^{-0.25}$	428.5
100		$231.4 \cdot H^{-0.25}$	495.6

On the basis of relations for the convection heat transfer coefficients for natural convection (Chapter 3.2) and table AT-1, quantities  $B$  in formulas (b) and (c) were determined; they depend on the average temperature of a boundary layer in fluid  $T_m$ . The coefficient of thermal expansion for water was determined analogically as in Example 3.6.

Results of calculations are presented in table 4.5. Values of  $B$  should be determined by substitution of the linear dimension  $H$  expressed in meters. After substitution of the determined values of  $B$  into formulas (b) and (c), the convection heat transfer coefficients  $h$  expressed in  $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$  are obtained.

When air is the cooling medium, heat radiation must be included as a parallel (beside natural convection) mechanism of heat transfer. If heat radiation from a wall

at temperature  $T_w$  to the surroundings at temperature  $T_A$  is considered, combination of formula (3.29) with the following relation

$$h_{\text{rad}} = B_{A\text{rad}} (T_w - T_A)^{0.25} \quad (\text{q})$$

leads to the expression

$$B_{A\text{rad}} = \frac{C_0 \varepsilon \left[ (T_w + 273)^4 - (T_A + 273)^4 \right]}{(T_w - T_A)^{1.25}} \quad (\text{r})$$

where  $C = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ ,  $T_w$  and  $T_A$  are in  $^{\circ}\text{C}$ . Hence, when air is the cooling medium, the value of  $B_{A\text{rad}}$  must be added to  $B_A$  found from the table.

*Ad a.* In order to do calculations according to relation (p), the result must be firstly approximately evaluated to determine values of  $B$ ,  $B_A$  and  $S$ . Assuming that water will be cooled to  $T \cong 90^{\circ}\text{C}$  and knowing that in this case  $h_A \ll h$ , one assumed that the average temperature of the vessel contents and at the same time temperature of the wall and the boundary layer was  $T = T_w = T_m = 95^{\circ}\text{C}$ . Hence, the average temperature of the boundary layer in air is  $T_{Am} = 0.5 \cdot (95 + 20) = 57.5^{\circ}\text{C}$ . Assuming that  $i = 1/4$ , substituting  $H = 0.108 \text{ m}$  and interpolating the data from table 4.5, one found that  $B = 393$  (for  $95^{\circ}\text{C}$ ) and  $B_{A\text{conv}} = 2.39$  (for  $57.5^{\circ}\text{C}$ ). The value of  $B_{A\text{rad}}$  was calculated for  $T_w = 95^{\circ}\text{C}$  and  $T_A = 20^{\circ}\text{C}$

$$B_{A\text{rad}} = \frac{5.76 \cdot 10^{-8} \cdot 0.8 \left[ (95 + 273)^4 - (20 + 273)^4 \right]}{(95 - 20)^{1.25}} = 2.29$$

Hence  $B_A = 2.39 + 2.29 = 4.68$ . The quantity  $S$  was calculated on the basis of relation (i)

$$S = \left( \frac{B_A}{B} \right)^{\frac{1}{i+1}} = \left( \frac{4.68}{393} \right)^{0.8} = 0.0289$$

Temperature of water in the vessel after 10 minutes (600 s) is

$$T_{\text{final}} = 20 + \left[ \frac{0.0374 \cdot 4.68 \cdot 0.25 \cdot 600}{1.4194 \cdot (1 + 0.0289)^{1.25}} + \frac{1}{(100 - 20)^{0.25}} \right]^{-4} = 94.5^{\circ}\text{C}$$

Control calculations gave the following results: average temperature of water in the vessel  $T \cong 97^{\circ}\text{C}$ , average temperature difference between the media  $T - T_A = 97 - 20 = 77 \text{ K}$ , so



$$\Delta T + \Delta T_A = 77$$

$$\Delta T / \Delta T_A = 0.0289$$

Hence  $\Delta T_A = 74.8$  K,  $\Delta T = 2.2$  K. Average (over time) wall temperature  $T_w = T_A + \Delta T_A = 20 + 74.8 = 94.8^\circ\text{C}$  and average temperature of the boundary layer in air  $T_{Am} = 57.4^\circ\text{C}$ ; this value is sufficiently consistent with the assumption. Value of the product Gr·Pr for air, which gives the main resistance to heat transfer, was also checked. It is Gr·Pr =  $6.7 \cdot 10^6$  for  $T_{Am} = 60^\circ\text{C}$  and  $\Delta T_A = 76.7$  K; for this value  $i = 1/4$ .

*Ad b.* Values of  $B_A$  and  $S$  were calculated similarly as in point a. It was obtained that  $B_A = 4.38$ ;  $S = 0.0274$ . Final temperature of water in the vessel is

$$T_{final} = 0 + \left[ \frac{0.0374 \cdot 4.38 \cdot 0.25 \cdot 600}{1 \cdot 4194 \cdot (1 + 0.274)^{1.25}} + \frac{1}{(100 - 0)^{0.25}} \right]^{-4} = 93.1^\circ\text{C}$$

When cooling is conducted by the means of air at temperature  $T_A = 0^\circ\text{C}$ , liquid temperature drop is only slightly higher than when temperature of cooling air is  $20^\circ\text{C}$ .

*Ad c.* It was assumed that contents of the vessel is cooled to  $T \cong 40^\circ\text{C}$  and the convection heat transfer coefficients on both sides of the wall are comparable, what gives  $\Delta T \cong \Delta T_A$ . In this case the average temperature of vessel's contents is  $70^\circ\text{C}$  and average (over time) temperature of the wall is  $T_w = 0.5 \cdot (70 + 20) = 45^\circ\text{C}$ . Hence,  $T_m \cong 58^\circ\text{C}$  and  $T_{Am} \cong 32^\circ\text{C}$ . Assuming that  $i = 1/3$ , values  $B = 355$ ,  $B_A = 253$  were found on the basis of table 4.5. Value of  $S$ , calculated with relation (1), equals

$$S = \left( \frac{253}{355} \right)^{\frac{1}{1+1/3}} = 0.777$$

When water is used as the cooling medium, temperature of the contents of the vessel after 10 minutes is

$$T_{final} = 20 + \left[ \frac{0.0374 \cdot 253 \cdot 0.3333 \cdot 600}{1 \cdot 4194 \cdot (1 + 0.777)^{1.333}} + \frac{1}{(100 - 20)^{0.333}} \right]^{-4} = 31.6^\circ\text{C}$$

Cooling by the means of water is much more intensive than cooling with air. Control calculations give results slightly consistent with the assumptions:  $\Delta T_A = 26$  K,  $\Delta T = 20$  K,  $T_w = 46^\circ\text{C}$ ,  $T_m = 56^\circ\text{C}$ ,  $T_{Am} = 33^\circ\text{C}$ , (Gr·Pr)  $\cong 1.6 \cdot 10^9$  ( $i = 1/3$ ).

## EXERCISE 4.1

1500 kg/h of oil is being cooled from 110°C to 60°C in a counter-current heat exchanger by the means of water which heats up from 15°C to 30°C. What outlet temperatures will both media have if flow rate of water is increased twice and inlet temperatures and flow rate of oil stay the same? Assume that the overall heat transfer coefficient will increase by 20%. Heat capacity of oil is 2090 J/(kg·K).

Answer:  $T_{1out} = 52.3^\circ\text{C}$ ,  $T_{2out} = 23.6^\circ\text{C}$ .

## EXERCISE 4.2

Saturated isobutane vapor is to be condensed in a tube and shell heat exchanger. Pressure of the vapor is 0.7 MPa, its flow rate equals 10 000 kg/h. Water flowing in tubes is used as the cooling medium. Its initial temperature is 25°C. It heats up to 35°C. It is recommended that water velocity in tubes should be about 0.5 m/s; in this case the overall heat transfer coefficient is 930 W/(m<sup>2</sup>K). Calculate the required number of tubes with dimensions 38/33 mm and length 2 m and the number of passes. Boiling point of isobutane under the given pressure is 52°C and its heat of vaporization equals 318 000 J/kg.

Answer: 200 tubes, 4 passes.

## EXERCISE 4.3

A solution is being cooled from 123°C to 89°C in a counter-current heat exchanger by means of another solution which heats up from 18°C to 52°C. As a result of technological changes, inlet temperature of the medium being heated fell to 10°C. Calculate outlet temperatures of the media under the new conditions. Assume that the overall heat transfer coefficient has not changed. How much has the rate of heat transferred in the exchanger changed?

Answer:  $T_{2out} = 46.6^\circ\text{C}$ ,  $T_{1out} = 86.4^\circ\text{C}$ , the amount of heat will increase by 7.6%.

## EXERCISE 4.4

A post-reaction mixture is being cooled from 88°C to 51°C in a cross-flow heat exchanger by the means of water heating up from 8°C to 46°C. Calculate outlet temperatures of the media assuming that their flow is counter-current. Assume that the overall heat transfer coefficient and heat capacities are constant.

Answer:  $T_{1out} = 49.4^\circ\text{C}$ ,  $T_{2out} = 47.7^\circ\text{C}$ .

## EXERCISE 4.5

6000 kg/h of an oil product is being cooled from 180°C to 80°C in a heat exchanger with the heat transfer area 10 m<sup>2</sup>. Water flowing counter-currently with the flow rate of 7000 kg/h is the cooling medium. Inlet temperature of water is 20°C. There is a contaminants deposit on the internal surface of the pipes. Thermal conductivity of

the deposit is  $1.94 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , its thickness – 1 mm. What would the outlet temperatures of the media be if there was no deposit on the surface of the pipes? Assume that heat capacity of the oil product is  $2510 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ .

A n s w e r:  $T_{1out} = 65.1^\circ\text{C}$ ,  $T_{2out} = 79.0^\circ\text{C}$ .

#### EXERCISE 4.6

A system of two heat exchangers is used for heating 10 t/h of diluted soda lye. Concentrated lye at temperature  $100^\circ\text{C}$  flowing counter-currently, in the amount of 5 t/h is the heating medium in the first exchanger, which heat transfer area is  $13 \text{ m}^2$ . After heating in the first exchanger, diluted lye is flowing to the second exchanger, where saturated water vapor at temperature  $132.9^\circ\text{C}$ , at flow rate of 0.90 t/h is the heating medium. The overall heat transfer coefficient for diluted lye in both exchangers is  $1500 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$  and the convection heat transfer coefficient for condensing vapor equals  $4000 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ . Heat capacity of diluted lye is  $3860 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ , of concentrated lye –  $3300 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ , heat of condensation of vapor is  $2.168 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg}$ . The exchangers are build of steel pipes ( $k = 45 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) of dimensions 38/33 mm and length 2 m. Calculate the heat transfer area of the second exchanger and the convection heat transfer coefficient for concentrated lye.

A n s w e r:  $A = 8.12 \text{ m}^2$ ,  $h = 1220 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ .

#### EXERCISE 4.7

Milk is being pasteurized in a vessel with double walls. Water is boiling in the space between walls. Boiling is sustained by external heating. Assume that the heat transfer area equals  $0.073 \text{ m}^2$ , the overall heat transfer coefficient –  $300 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ , mass of milk – 2 kg, heat capacity –  $3490 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . If temperature of the heating medium is  $99^\circ\text{C}$ , what time is needed to heat milk up to  $80^\circ\text{C}$ ? Assume that the initial temperature of milk is  $20^\circ\text{C}$  and that temperature inside the vessel is the same in each point.

A n s w e r: 454 s.

## 5. EVAPORATION

### 5.1. THE ENTHALPY $i$ - $x$ DIAGRAM FOR SOLUTIONS

It is convenient to show thermal transitions of non-volatile substances on a diagram which is presented for the system  $\text{H}_2\text{O}-\text{CaCl}_2$  in fig. 5.1. In order to determine a reference point, it was assumed that enthalpy of water at temperature  $0^\circ\text{C}$  and enthalpy of anhydrous crystals of  $\text{CaCl}_2$  at temperature  $0^\circ\text{C}$  are equal to  $0 \text{ kJ/kg}$ . The bold line starting in the point  $x = 0, i = 0$ , which is called the liquidus, determines solubility of  $\text{CaCl}_2$  in water. Only liquid and vapor phases exist above this line. The broken line which connects vertexes that do not contact with the liquidus i.e. vertexes of the so called isothermal triangles (shaded triangles) is called the solidus. Only solids exists under this line.

Isotherms are denoted by solid lines and isobars (boiling lines) – by dotted lines. Calcium chloride is a salt which forms several hydrates which compositions have been marked.

#### 5.1.1. Mixing on the $i$ - $x$ diagram

After mixing of  $L_1 \text{ kg}$  of a solution at state 1 (fig. 5.2) with  $L_2 \text{ kg}$  of a solution at state 2, a solution at state 3 which is lying on the straight line that connects points 1 and 2 is obtained. Position of point 3 results from the balance

$$x_3 = l x_1 + (1-l)x_2 \quad (5.1)$$

$$i_3 = l i_1 + (1-l)i_2 \quad (5.2)$$

where

$$l = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad (5.3)$$

what corresponds to the lever-arm principle

$$L_1 \cdot \overline{1-3} = L_2 \cdot \overline{3-2} \quad (5.4)$$

where  $\overline{1-3}$  and  $\overline{3-2}$  are the lengths of the appropriate sections on the diagram.

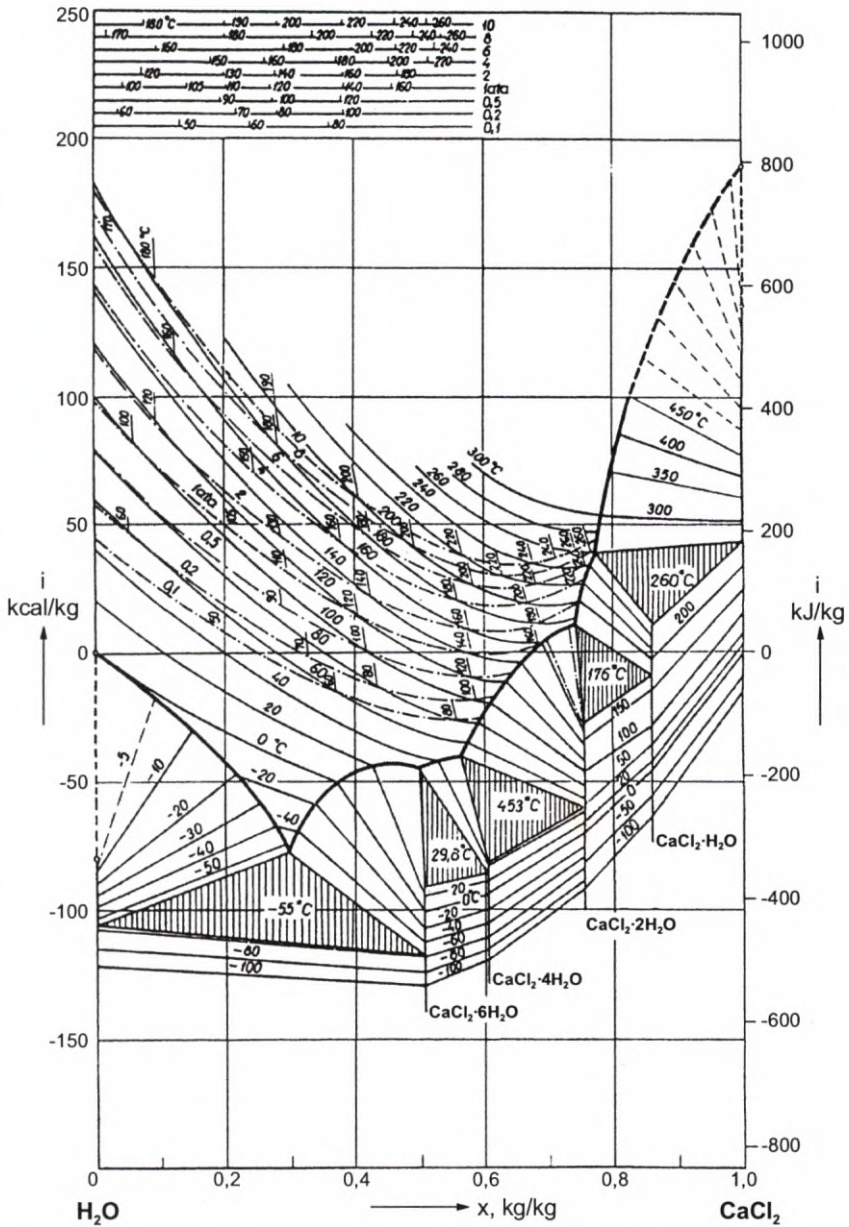


Fig. 5.1. Diagram of the  $i = f(x)$  function for a H<sub>2</sub>O-CaCl<sub>2</sub> system

In the special case, clear water ( $x = 0$ ) at appropriate temperature can be one of the mixed solutions. It should be noted that the point on the axis which coordinates are  $x = 0$ ,  $i = -332$  kJ/kg (fig. 5.1) marks a position for ice at temperature 0°C and the section marked with a broken line corresponds to heat of solidification of water.

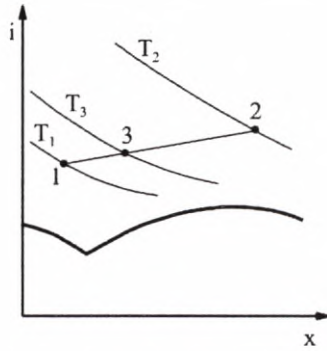


Fig. 5.2. Mixing of two solutions

### 5.1.2. Heating and evaporation

Heating of a solution from state 1 to 2 (fig. 5.3) requires to deliver heat in the amount of  $q_1$ . A solution is boiling at state 2 under pressure  $p$  and further heat delivery leads to evaporation along the isobar to point 3. Vapor in state 5 is in equilibrium with the solution at state 3 and the section 3–5 is called a vapor isotherm. The amount of heat required for evaporation from state 2 to 3 is represented by the section 2–4. The lever-arm principle has the form:

$$\frac{W}{L_3} = \frac{4-3}{5-4} \quad (5.5)$$

where:

- $W$  – amount of vapor, kg/h,
- $L_3$  – amount of a solution at state 3, kg/h.

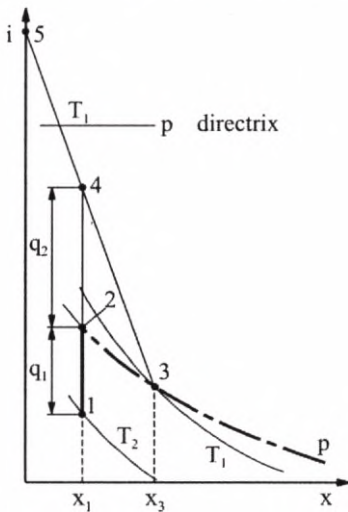


Fig. 5.3. Heating and evaporation of a solution

### 5.1.3. Cooling and cristallization

If a solution at state 1 (fig. 5.4) is being cooled, this change can be shown in the  $i-x$  diagram with a section drawn in a vertical downward direction. Saturation occurs at point 2 at temperature  $T_2$ . If the removal of heat is continued, point 3 located under the liquidus, in the region of the solid-liquid equilibrium is reached. After equilibrium at temperature  $T_3$  is reached, crystals of  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  (point 8) and a saturated solution (point 7) are in the system. The amount of crystals is proportional to the length

of the section  $\overline{7-3}$ , and the amount of the post-crystallization solution – to the length of the section  $\overline{3-8}$ . As a result of further heat removal, the region of an isothermal triangle which represents equilibrium for ice,  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  crystals and an eutectic solution (vertexes of the triangle) at certain temperature  $T_4$  can be reached. For example equilibrium between a solution (point 6) and a mixture of crystals (point 5) in the quantitative proportion corresponding to lengths of the sections  $\overline{4-5}$  and  $\overline{6-4}$  is represented by point 4. A mixture of crystals (point 5) is in turn comprised of ice in the amount proportional to the length of the section  $\overline{5-10}$  and crystals  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  in the amount corresponding to the length of the section  $\overline{9-5}$ .

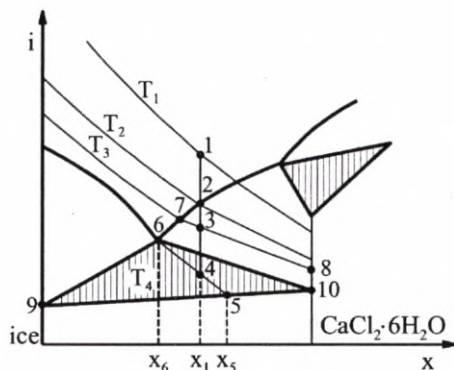


Fig. 5.4. Cooling of a solution and crystallization

#### 5.1.4. Self-vaporization

If pressure under a solution which state is defined by point 1 (fig. 5.5) is reduced to the value  $p_2$ , the solution starts to boil using heat contained in it. This process ends at point 2 at isobar  $p_2$ . In order to determine the final temperature of self-vaporization, such a vapor isotherm for point 2 must be found which is going through point 1 and determines in point 3 enthalpy of vapor corresponding to pressure  $p_2$  and temperature  $T_2$ .

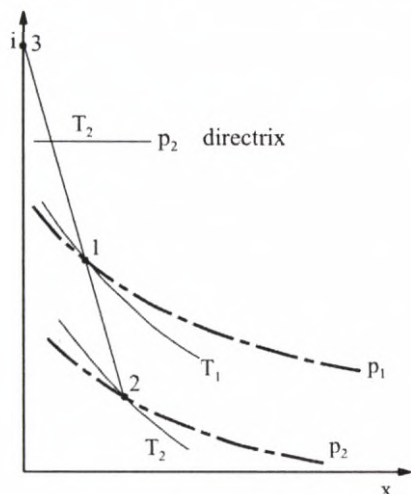


Fig. 5.5. Self-vaporization of a solution

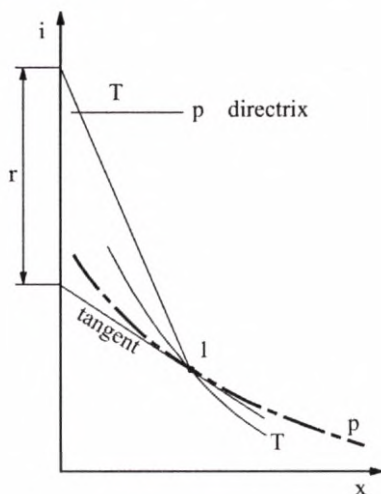


Fig. 5.6. Determination of heat of vaporization of a solution

So called directrices corresponding to individual pressures and temperatures, through which isotherms are drawn (compare fig. 5.3 and 5.5) are put on the diagram in order to simplify vapor isotherms determination.

### 5.1.5. Heat of vaporization of a solution

Heat of vaporization of a solution of particular concentration can be found on the diagram if a vapor isotherm and a tangent to the isobar at point 1 are drawn from point 1 (fig. 5.6), which characterizes the state of a solution. The distance between the point of intersection of these two straight lines with the enthalpy axis corresponds to the heat of vaporization of a solution  $r$ .

## 5.2. PHYSICAL PROPERTIES OF WATER SOLUTIONS

Physical properties such as density, heat capacity, viscosity coefficient, thermal conductivity, and surface tension as functions of concentration at particular temperature can be found for many solutions in the form of tables or graphs. If only one piece of data is known and tables of physical properties of water are available, the following expression can be used

$$A_{T_2} = A_{T_1} \frac{B_{T_2}}{B_{T_1}} \quad (5.6)$$

where:

- $A$  – properties of a solution (e.g.  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $\sigma$ ),
- $B$  – properties of water,
- indexes  $T_1$ ,  $T_2$  refer to temperatures.

When at least two values of  $A$  at different temperatures are known, interpolation or extrapolation e.g., with the Duhring method, can be used.

Boiling point of a solution for a particular concentration and different pressures can also be calculated with relation (5.6) (in this case pressures must be substituted instead of temperatures) or with the Babo rule

$$\frac{p_1}{p_{Tr1}} = \frac{p_2}{p_{Tr2}} \quad (5.7)$$

where:

- $p_1$  – pressure for which the boiling point of a solution is  $T_{r1}$ , Pa,
- $p_{Tr1}$  – pressure of saturated water vapor at temperature  $T_{r1}$ , Pa,



- $p_2$  – pressure for which the boiling point is unknown, Pa,  
 $p_{T_2}$  – pressure of saturated water vapor at temperature  $T_{r2}$ , Pa.

Pressure  $p_{T_2}$  is calculated with equation (5.7) and vapor temperature  $T_{r2}$  corresponding to this pressure is found in tables. This temperature is approximately equal to the boiling point of a solution under pressure  $p_2$ .

### 5.3. MATERIAL BALANCE IN AN EVAPORATOR

If  $L$  kg/h of a water solution of a non-volatile substance is being evaporated so that its concentration changes from  $x_{in}$  to  $x_{out}$ , the amount of evaporated water is

$$W = L \left( 1 - \frac{x_{in}}{x_{out}} \right) \quad (5.8)$$

The proportion of water evaporated in each stage of a triple-effect (three-stage) evaporator is often assumed to be as follows

$$W_1 : W_2 : W_3 = 1 : 1.1 : 1.2$$

### 5.4. HEAT BALANCE IN AN EVAPORATOR

If heat losses are not included and symbols as in fig. 5.7 are used, the heat balance can be written in the form

$$L i_0 + D i'' = W i_w + D i' + (L - W) i_1 \quad (5.9)$$

where:

- $D$  – amount of heating steam (also the amount of condensate), kg/s,  
 $W$  – amount of vapor (superheated water vapor), kg/s,  
 $L$  – amount of a delivered solution, kg/s,  
 $i_0, i_1$  – enthalpies of a delivered and concentrated solution, kJ/kg,  
 $i''$  – water vapor enthalpy, kJ/kg,  
 $i'$  – condensate enthalpy, kJ/kg,  
 $i_w$  – vapor enthalpy, kJ/kg.

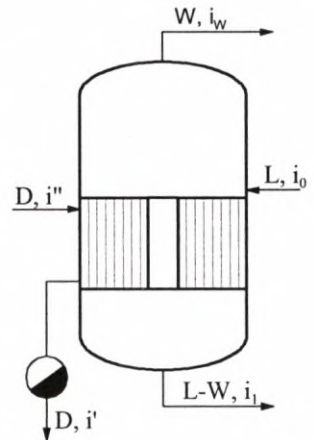


Fig. 5.7. Balance for an evaporator

## 5.5. MULTI-STAGE EVAPORATION

Evaporators can be connected in multi-stage co- or counter-current systems, where a solution is being concentrated subsequently in each stage and vapor from a given stage serves as heating steam in the next stage. It requires to use different pressure in each stage. The total temperature difference in the system is the difference between temperature of heating steam supplied to the first stage and temperature of vapor from the last stage. A part of this difference is “used” to deliver heat to the solution (evaporation) and the rest contributes to temperature losses:

- concentration temperature losses; this is the difference between boiling point of a solution and clear water under given pressure,
- pressure temperature losses; this is the difference between boiling point of a solution in the upper and bottom part of the pipes which results from pressure exerted by a column of liquid,
- hydraulic temperature losses; they result from the resistance to flow of a pumped liquid and usually are assumed to be 1÷1.5 K in each stage.

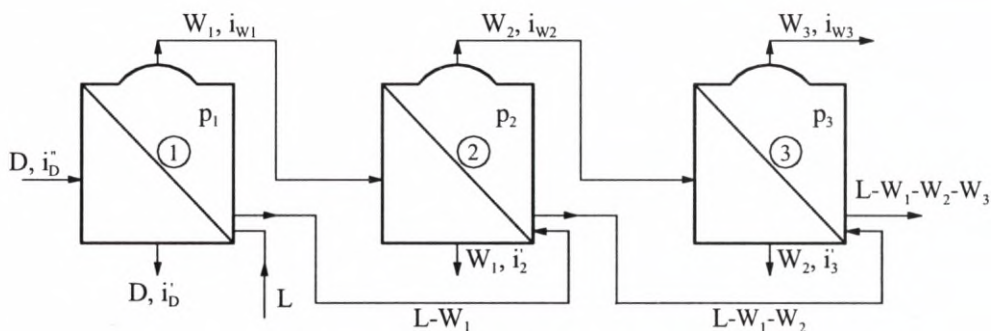


Fig. 5.8. Co-current triple-effect system of evaporators

An exemplary system and symbols for a co-current triple-effect evaporation are presented in fig. 5.8.

## 5.6. USEFUL TEMPERATURE DIFFERENCE

The total useful temperature difference which can be used to evaporate a solution is equal to

$$\sum_{i=1}^n \Delta T_{ui} = T_D - T_n - \sum_{i=1}^n \Delta T_{loss,i} \quad (5.10)$$

where:

- $T_D$  – heating steam temperature, °C,  
 $T_n$  – temperature of vapor from the last stage, °C.

It can be shown that distribution of  $\Sigma \Delta T_{ui}$  for all stages according to equation (5.11) is a condition which must be fulfilled to assure equal heat transfer areas in all stages

$$\Delta T_{ui} = \frac{\frac{\dot{Q}_i}{U_i} \sum_{i=1}^n \Delta T_{ui}}{\sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{U_i}} \quad (5.11)$$

The symbol  $\Delta T_{ui}$  denote the useful temperature difference in the  $i$ -th stage i.e., the difference between temperature of heating steam flowing into this stage and temperature of a solution boiling in it.

## 5.7. HEAT TRANSFER IN EVAPORATORS

Heat transfer between condensing water vapor and a boiling solution occurs in an evaporation apparatus. A convection heat transfer coefficient for condensation of vapor  $h_{cond}$  is calculated with equation (3.24) (usually laminar flow of condensate is assumed).

In the case of free boiling in evaporators, the Kirschbaum-Merkel formula is recommended for calculations of a convection heat transfer coefficient from the side of the boiling solution

$$h_{boil} = h_w \Phi \quad (5.12)$$

The symbol  $h_w$  denotes a convection heat transfer coefficient for boiling water which is calculated with the following empirical relation

$$h_w = 0.0308 \cdot q^{0.612} p^{0.48} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \quad (5.13)$$

where:

- $q$  – heat flux, W/m<sup>2</sup>,  
 $p$  – pressure, Pa.

The correction coefficient  $\Phi$  for a solution is calculated with the use of the relation

$$\Phi = \frac{\rho_r}{\rho_w} \left( \frac{k_r c_{pr}}{k_w c_{pw}} \frac{\sigma_r r_r}{\sigma_w r_w} \right)^{0.5} \cdot \left( \frac{\rho_r'' \mu_r}{\rho_w'' \mu_w} \right)^{-0.25} \quad (5.14)$$

where:

index  $r$  refers to a solution and  $w$  – water under the same conditions,

$\rho$  – liquid density,  $\text{kg/m}^3$ ,

$\rho''$  – vapor density,  $\text{kg/m}^3$ ,

$k$  – thermal conductivity,  $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,

$c$  – heat capacity,  $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,

$\sigma$  – surface tension,  $\text{N/m}$ ,

$r$  – heat of vaporization,  $\text{J/kg}$ ,

$\mu$  – viscosity coefficient,  $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ .

Since both  $h_{\text{boil}}$  and  $h_{\text{cond}}$  depend on the heat load, these quantities cannot be determined directly. Numerical or graphical methods (see Example 5.5) can be used for the known useful temperature difference.

#### EXAMPLE 5.1

Using the  $i$ - $x$  diagram (fig. 5.1), find temperatures obtained after adiabatic mixing of:

- 1 kg of  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  crystals with 1 kg of liquid water,
- 1 kg of  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  crystals with 1 kg of ice,
- 1 kg of anhydrous  $\text{CaCl}_2$  crystals with 1 kg liquid water,
- 1 kg of anhydrous  $\text{CaCl}_2$  crystals with 1 kg of ice.

Before mixing, all components had temperature of  $0^\circ\text{C}$ .

On the basis of the mixing rules, which were discussed in Chapter 5.1.1, points representing the mixed components (all the points are located on the  $0^\circ\text{C}$  isotherm) were being connected with straight lines and the following temperatures were read in the middle (the components are mixed at a ratio 1:1) of the sections connecting these points:

- $-20^\circ\text{C}$ , b)  $-55^\circ\text{C}$ , c)  $120^\circ\text{C}$ , d)  $38^\circ\text{C}$ .

#### EXAMPLE 5.2

What amount of heat must be delivered to vaporize 1 kg of a  $\text{CaCl}_2$  solution under pressure of 0.1 MPa ( $\cong 1$  ata) in order to change its concentration from  $x_{\text{in}} = 0.3$  to  $x_{\text{out}} = 0.4$ ? What amount of vapor will be obtained?

It results from the diagram in fig. 5.1 that the initial solution is boiling at temperature 114°C and its enthalpy is 113 kJ/kg. The boiling point of the solution after vaporization is 120°C. A construction is made in the way described in the Chapter 5.1.2 (fig. 5.3). Drawing a vapor isotherm 120°C from point 3, one can use the directrix on the diagram or (what is more precise) calculate enthalpy of the superheated vapor of the following parameters:  $p = 1 \text{ ata}$ ,  $T = 120^\circ\text{C}$ . This enthalpy is 2720 kJ/kg. This value is being plotted as point 5 on the  $i$  axis. Enthalpy corresponding to point 4 is 712 kJ/kg under the conditions of the example. Hence  $q_2 = 712 - 113 = 599 \text{ kJ/kg}$ . The amount of vapor results from the balance (equation (5.8))

$$W = L \left( 1 - \frac{x_{in}}{x_{out}} \right)$$

$$W = 1 \cdot \left( 1 - \frac{0.3}{0.4} \right) = 0.25 \text{ kg}$$

It should be noted that the determined amount of heat  $q_2$  refers to 1 kg of the solution before vaporization.

### EXAMPLE 5.3

$L = 170\,000 \text{ kg/h}$  of a sugar solution is being evaporated in a four-stages evaporation system from the concentration  $x_{in} = 0.15$  to  $x_{out} = 0.6$ . If equal amounts of water are evaporated in each stage, calculate concentration after each evaporation stage.

---

The total amount of evaporated water results from equation (5.8)

$$W = L \left( 1 - \frac{x_{in}}{x_{out}} \right)$$

$$W = 170000 \cdot \left( 1 - \frac{0.15}{0.6} \right) = 127500 \text{ kg/h}$$

Therefore, in each stage the following amount of water is being evaporated

$$W_n = \frac{W}{4} = \frac{127500}{4} = 31875 \text{ kg/h}$$

Concentrations of the solution are as follows:  
after the first stage

$$x_1 = \frac{L x_{in}}{L - W_n} = \frac{170\,000 \cdot 0.15}{170\,000 - 31\,875} = 0.185$$

after the second stage

$$x_2 = \frac{L x_{in}}{L - 2W_n} = \frac{170\,000 \cdot 0.15}{170\,000 - 2 \cdot 31\,875} = 0.240$$

after the third stage

$$x_3 = \frac{L x_{in}}{L - 3W_n} = \frac{170\,000 \cdot 0.15}{170\,000 - 3 \cdot 31\,875} = 0.343$$

#### EXAMPLE 5.4

A  $\text{CaCl}_2$  solution of concentration 0.4 kg/kg is boiling under pressure 102 kPa, at temperature  $120^\circ\text{C}$ . At what temperature the solution will boiling if pressure is 51 kPa. Conduct calculations, using the following methods:

- 1) with the use of equation (5.6),
- 2) with the use of the Babo rule (5.7),
- 3) with the use of the Duhring rule,
- 4) with the use of the enthalpy diagram.

In order to do interpolation according to the Duhring rule, use the additional piece of data that the boiling point of this solution under pressure of 10.2 kPa is  $62^\circ\text{C}$ .

*Ad 1.* With the use of interpolation of the data from table AT-3, it was found that boiling point of water under pressure of 102 kPa is  $100.2^\circ\text{C}$  and under pressure of 51 kPa it equals  $81.8^\circ\text{C}$ . Using equation (5.6), one gets

$$T_{r2} = T_{r1} \cdot \frac{T_{w2}}{T_{w1}}$$

$$T_{r2} = 120 \cdot \frac{81.8}{100.2} = 98.0^\circ\text{C}$$

*Ad 2.* In order to use the Babo rule (equation (5.7)), pressure of water vapor corresponding to temperature 120°C is found in table AT-3:  $p_{Tr1} = 198.5$  kPa and with the use of the equation

$$\frac{P_1}{P_{Tr1}} = \frac{P_2}{P_{Tr2}}$$

it is calculated that

$$p_{Tr2} = p_{Tr1} \cdot \frac{P_2}{P_1} = 198.5 \cdot \frac{51}{102} = 99.2 \text{ kPa}$$

According to table AT-3 temperature of saturated water vapor  $T_{r2} = 99.4^\circ\text{C}$  (found with the use of linear interpolation) corresponds to this pressure and this is the approximate boiling point of the solution under pressure of 51 kPa.

*Ad 3.* In order to use the Duhring rule, boiling point of water under pressure of 10.2 kPa must be found. This temperature is equal to 46.2°C (it was found with the use of linear interpolation on the basis of data from table AT-3). With the use of a proportion (fig. 5.9) it can be calculated that

$$\frac{100.2 - 46.2}{120 - 62} = \frac{100.2 - 81.8}{120 - T_{r2}}$$

$$T_{r2} = 100.2^\circ\text{C}$$

*Ad 4.* It can be read from the enthalpy diagram (fig. 5.1) that the boiling point of the solution of concentration  $x = 0.4$  under pressure 51 kPa (0.5 at) is about 100°C.

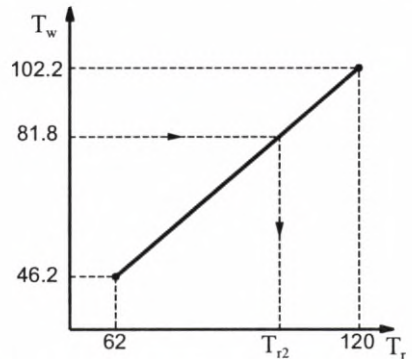


Fig. 5.9. Application of the Duhring rule

### EXAMPLE 5.5

Calculate an overall heat transfer coefficient for an evaporation process occurring in an evaporator with natural circulation of a water solution of NaOH. The solution is being concentrated in a continuous manner from  $x_{in} = 0.1$  to  $x_{out} = 0.3$  under pressure of 102 kPa. Heat is being supplied by heating steam which pressure is 392.4 kPa (4 ata). Liquid is circulating in pipes of diameter  $d_z/d_w = 36/30$  mm and length  $H = 2.5$  m which are made of steel of thermal conductivity  $k = 50$  W/(m·K). The boiling point of a solution of concentration 30% under pressure 102 kPa which is equal to 116°C and the data presented in table 5.1 were found in tables and charts.

Table 5.1

	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Heat capacity $c_p$ [J/(kg·K)]	Viscosity coefficient $\mu$ [kg/(m·s)]	Thermal conductivity $k$ [W/(m·K)]	Surface tension $\sigma$ [N/m]	Heat of vaporization $r$ [kJ/kg]
Solution 116°C	1265	3690	$1.18 \cdot 10^{-3}$	0.612	0.073	2450
Water 116°C	946	4230	$0.243 \cdot 10^{-3}$	0.685	0.054	2213.6

Heat transfer between vapor condensing outside the pipes and the solution boiling in the pipes occurs in an evaporator with natural circulation. Either heat load or temperature difference between a medium and a wall are present in equations (3.24) and (5.13). These quantities are unknown. Therefore, the following method for calculations is proposed:

- 1) Several values of heat flux per 1 m<sup>2</sup> of the internal surface of the pipes are assumed.
- 2) Values of these heat flux per 1m<sup>2</sup> of the external (condensation) and average (conduction through a wall) surface are calculated.
- 3) A convection heat transfer coefficient for condensing vapor depending on the heat loads is calculated.
- 4) A convection heat transfer coefficient for boiling water is calculated (equation (5.13)).
- 5) Coefficients for boiling water are used to calculate coefficients for the solution (equation (5.12)).
- 6) The total temperature drop for convection heat transfer during condensation, for conduction and for convection heat transfer during boiling are calculated.
- 7) The real heat load is determined on the basis of the known temperature difference between heating steam and the solution.
- 8) An overall heat transfer coefficient is calculated.

The following data for water vapor and its condensate at temperature 142.9°C were found in tables AT-1 and AT-3:

- heat of vaporization  $r = 2136100$  J/kg = 2136.1 kJ/kg,
- heat capacity  $c_p = 4260$  J/(kg·K),
- thermal conductivity  $k = 0.684$  W/(m·K),
- viscosity coefficient  $\mu = 0.1965 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s),
- density  $\rho = 923.5$  kg/m<sup>3</sup>.

*Ad 1.* The following values of heat loads were used:  $q_w = 20\ 000$ ;  $40\ 000$ ;  $60\ 000$  and  $80\ 000$  W/m<sup>2</sup>. Calculations according to the above scheme were conducted for each of them. Calculation procedure for  $20\ 000$  W/m<sup>2</sup> will be presented as an example.



Ad 2. The heat flux for the external surface is

$$q_z = q_w \frac{\pi d_w H}{\pi d_z H} = 20\,000 \cdot \frac{30}{36} = 16\,670 \text{ W/m}^2$$

The average diameter of pipes

$$d_m = \frac{d_z - d_w}{\ln \frac{d_z}{d_w}} = \frac{36 - 30}{\ln \frac{36}{30}} = 32.9 \text{ mm}$$

The heat flux for the average surface equals

$$q_m = q_w \frac{\pi d_w H}{\pi d_m H} = 20\,000 \cdot \frac{30}{32.9} = 18\,240 \text{ W/m}^2$$

Ad 3. Substituting the following relation into equation (3.24)

$$\Delta T_{cond} = \frac{q_z}{h_{cond}}$$

and after transformation, one gets

$$h_{cond} = 1.177 \cdot \left( \frac{r \rho^2 k^3 g}{\mu q_z H} \right)^{1/3}$$

After substitution of numerical values, one obtains

$$h_{cond} = 1.177 \cdot \left[ \frac{2\,136\,100 \cdot (923.5)^2 \cdot (0.684)^3 \cdot 9.81}{0.1965 \cdot 10^{-3} \cdot 16\,670 \cdot 2.5} \right]^{1/3} = 10\,460 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

Ad 4. Equation (5.13) is used

$$h_w = 0.0308 \cdot q_w^{0.612} p^{0.48}$$

$$h_w = 0.0308 \cdot (20\,000)^{0.612} \cdot (102\,000)^{0.48} = 3350 \text{ W/(m}^2\text{K)}$$

Ad 5. Value of  $\Phi$  was calculated with formula (5.14)

$$\Phi = \frac{\rho_r}{\rho_w} \left( \frac{k_r c_{pr}}{k_w c_{pw}} \right)^{0.5} \cdot \left( \frac{\rho_r'' \mu_r}{\rho_w'' \mu_w} \right)^{-0.25}$$

Taking data from table 5.1 and assuming that  $\rho_r'' = \rho_w''$ , one gets

$$\Phi = \frac{1265}{946} \cdot \left( \frac{0.612 \cdot 3690}{0.073 \cdot 2450} \right)^{0.5} \cdot \left( \frac{1.18 \cdot 10^{-3}}{0.243 \cdot 10^{-3}} \right)^{-0.25} = 0.650$$

The convection heat transfer coefficient for the boiling solution is

$$h_{boil} = 3350 \cdot 0.650 = 2180 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

Ad 6. Temperature differences corresponding to resistances to heat transfer are as follows:

for convection heat transfer on the side of the condensate

$$\Delta T_{cond} = \frac{q_z}{h_{cond}} = \frac{16\,670}{10\,460} = 1.59 \text{ K}$$

for conduction through the steel wall

$$\Delta T_k = \frac{q_m s}{k_{steel}} = \frac{18\,240 \cdot 0.003}{50} = 1.09 \text{ K}$$

for convection heat transfer coefficient on the side of the boiling solution

$$\Delta T_{boil} = \frac{q_w}{h_{boil}} = \frac{20\,000}{2180} = 9.17 \text{ K}$$

The total temperature difference is

$$\sum \Delta T = \Delta T_{cond} + \Delta T_k + \Delta T_{boil} = 1.59 + 1.09 + 9.17 = 11.86 \text{ K}$$

The rest of calculations is presented in table 5.2

Table 5.2

$q_w$ [W/m <sup>2</sup> ]	20 000	40 000	60 000	80 000
$q_z$ [W/m <sup>2</sup> ]	16 670	33 330	50 000	66 670
$q_m$ [W/m <sup>2</sup> ]	18 240	36 470	54 710	72 950
$h_{cond}$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	10 460	8300	7250	6590
$h_w$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	3350	5120	6570	7830
$h_{boil}$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	2180	3330	4270	5090
$\Delta T_{cond}$ [K]	1.59	4.01	6.89	10.12
$\Delta T_{boil}$ [K]	9.17	12.00	14.05	15.71
$\Delta T_k$ [K]	1.09	2.19	3.28	4.38
$\Sigma \Delta T$ [K]	11.86	18.20	24.22	30.20

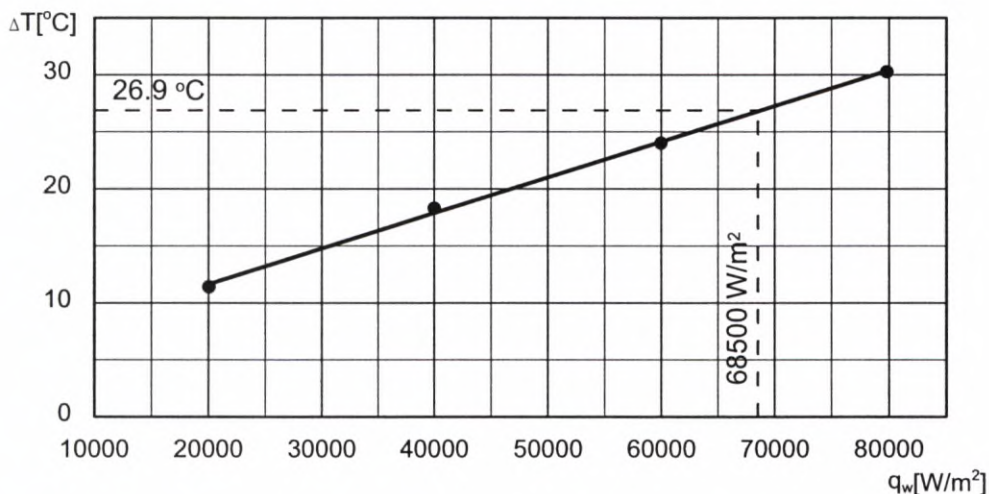


Fig. 5.10. Determination of a real heat load in an evaporator

Ad 7. Temperature difference between the heating steam and the solution is

$$\Delta T_u = 142.9 - 116 = 26.9 \text{ K}$$

Heat load for this temperature can be found with the use of the chart (fig. 5.10):

$$q_w = 68500 \text{ W/m}^2$$

Ad 8. When the heat load is known, the overall heat transfer coefficient related to the internal surface of the pipes is calculated

$$U = \frac{q_w}{\Delta T_u} = \frac{68\,500}{26.9} = 2550 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

### EXAMPLE 5.6

A solution of salt in water which concentration is  $x_0 = 0.2$  is flowing at temperature  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  and in the amount of  $L = 8000 \text{ kg/h}$  into a triple-effect evaporator battery. It was proposed to heat this solution in counter-current heat exchangers 1, 2 and 3 (fig. 5.11) with the use of condensate from each stage of the battery and then to reheat it to the boiling point  $T_b = 145.1^\circ\text{C}$  under pressure of  $0.33 \text{ MPa}$  by the means of heating steam which temperature is  $T_D = 151.2^\circ\text{C}$  ( $0.49 \text{ MPa}$ ). It is assumed that temperature of the condensate that leaves each exchanger is equal to temperature of the condensate flowing out of a consecutive evaporation stage. It is also assumed that heat capacity of the solution is  $c_r = 3230 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  and temperature of the condensate that was cooled  $T_{s3}$  is higher by  $5 \text{ K}$  than the inlet temperature of the solution  $T_0$ . The amounts and temperatures of the condensates from individual stages are as follows:

$$W_D = 961.8 \text{ kg/h} \quad T_D = 151.2^\circ\text{C}$$

$$W_1 = 929.8 \text{ kg/h} \quad T_{s1} = 136.8^\circ\text{C}$$

$$W_2 = 1081.2 \text{ kg/h} \quad T_{s2} = 115.9^\circ\text{C}$$

Assuming that the overall heat transfer coefficients for the exchangers are  $U_1 = U_2 = U_3 = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  and that the coefficient for the steam reheater is  $U_D = 2500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , find:

- 1) average temperatures  $T_1, T_2, T_3$ ,
- 2) amount of reheating vapor  $D_2$ ,
- 3) heating areas of the exchangers 1, 2, 3 and  $P$ .

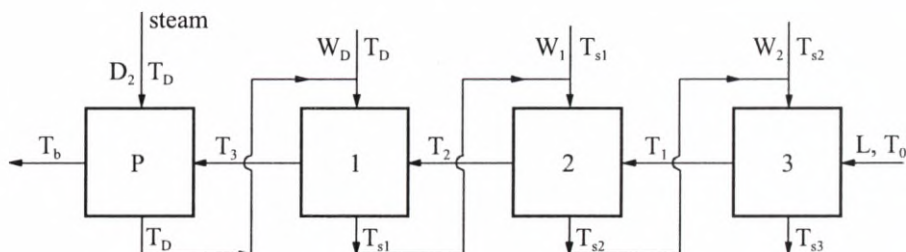


Fig. 5.11. System of heat exchangers for heating of a solution

Heat of condensation of water vapor  $r = 2\,094\,000$  J/kg and heat capacities of water  $c_{TD} = 4300$  J/(kg·K),  $c_{Ts1} = 4260$  J/(kg·K),  $c_{Ts2} = 4180$  J/(kg·K),  $c_{Ts3} = 4180$  J/(kg·K) were taken from tables AT-1 and AT-3 which contain properties of water.

The exchangers are balanced consecutively so that the equations are obtained

$$\begin{cases} D_2 r = L c_r (T_{wrz} - T_3) \\ (D_2 + W_D)(c_{TD} T_D - c_{Ts1} T_{s1}) = L c_r (T_3 - T_2) \\ (D_2 + W_D + W_1)(c_{Ts1} T_{s1} - c_{Ts2} T_{s2}) = L c_r (T_2 - T_1) \\ (D_2 + W_D + W_1 + W_2)(c_{Ts2} T_{s2} - c_{Ts3} T_{s3}) = L c_r (T_1 - T_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,094\,000 D_2 = 8000 \cdot 3230 \cdot (145.1 - T_3) \\ (D_2 + 961.8) \cdot (4300 \cdot 151.2 - 4260 \cdot 136.8) = 8000 \cdot 3230 \cdot (T_3 - T_2) \\ (D_2 + 961.8 + 929.8) \cdot (4260 \cdot 136.8 - 4180 \cdot 115.9) = 8000 \cdot 3230 \cdot (T_2 - T_1) \\ (D_2 + 961.8 + 929.8 + 1081.2) \cdot (4180 \cdot 115.9 - 4180 \cdot 25) = 8000 \cdot 3230 \cdot (T_1 - 20) \end{cases}$$

The system was arranged and solved. It was obtained that

$$D_2 = 700.1 \text{ kg/h}$$

$$T_1 = 74.0^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 83.9^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 88.2^\circ\text{C}$$

The driving temperature differences in particular stages were as follows

$$\Delta T_{mp} = \frac{(151.2 - 145.1) - (151.2 - 88.2)}{\ln \frac{151.2 - 145.1}{151.2 - 88.2}} = 24.4 \text{ K}$$

$$\Delta T_{m1} = \frac{(151.2 - 88.2) - (136.8 - 83.9)}{\ln \frac{151.2 - 88.2}{136.8 - 83.9}} = 57.8 \text{ K}$$

$$\Delta T_{m2} = \frac{(136.8 - 83.9) - (115.9 - 74.0)}{\ln \frac{136.8 - 83.9}{115.9 - 74.0}} = 47.2 \text{ K}$$

$$\Delta T_{m3} = \frac{(115.9 - 74.0) - (25 - 20)}{\ln \frac{115.9 - 74.0}{25 - 20}} = 17.4 \text{ K}$$

Therefore, the heating areas in the exchangers are equal to

$$A_p = \frac{L c_r (T_b - T_3)}{U_D \cdot \Delta T_{mp}} = \frac{8000 \cdot 3230 \cdot (145.1 - 88.2)}{3600 \cdot 2500 \cdot 24.4} = 6.7 \text{ m}^2$$

$$A_1 = \frac{L c_r (T_3 - T_2)}{U_1 \cdot \Delta T_{m1}} = \frac{8000 \cdot 3230 \cdot (88.2 - 83.9)}{3600 \cdot 1000 \cdot 57.8} = 0.53 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{L c_r (T_2 - T_1)}{U_2 \cdot \Delta T_{m2}} = \frac{8000 \cdot 3230 \cdot (83.9 - 74.0)}{3600 \cdot 1000 \cdot 47.2} = 1.51 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{L c_r (T_1 - T_0)}{U_3 \cdot \Delta T_{m3}} = \frac{8000 \cdot 3230 \cdot (74.0 - 20)}{3600 \cdot 1000 \cdot 17.4} = 22.3 \text{ m}^2$$

Since the exchangers' surfaces are very different as the result of the temperature assumptions, different variants of heating by the means of condensate should be considered (see Exercise (5.12)).

#### EXAMPLE 5.7

Design a three-stage co-current evaporation battery if  $L = 5000 \text{ kg/h}$  of a solution of  $\text{CaCl}_2$  in water which concentration is  $x_0 = 0.05$  is flowing into it at the boiling point and concentration of the solution that leaves the battery is  $x_3 = 0.35$ . Saturated water vapor is a heating medium in the first stage. Its pressure is  $p_D = 784.5 \text{ kPa}$  (8 ata). Pressure in the third stage, which is maintained by a barometric condenser, equals  $p_3 = 49 \text{ kPa}$  (0.5 ata). The evaporators that are used have natural circulation, their pipes are of diameters  $d_z/d_w = 48/40 \text{ mm}$  and length  $H = 2 \text{ m}$ . Thermal conductivity of steel that the pipes is made of is  $k_s = 45 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ . It is required that the evaporators have equal heat transfer areas.

---

The example was solved with the use of the following scheme:

1. Mass balance.
2. Assumption of pressures in all stages.
3. Determination of physical properties of water vapor.
4. Calculations of temperature losses.
5. Calculations of boiling points of solutions.
6. Calculations of total useful temperature difference.
7. Heat balance.
8. Calculations of the amount of heat transferred in all stages.
9. Calculations of an overall heat transfer coefficients.

10. Distribution of the useful temperature difference.
11. Verification of temperatures of vapor and pressures.
12. Verification of compatibility of areas calculated on the basis of real useful temperature differences.
13. Revision of calculations.

*Ad 1. Mass balance*

The total amount of the evaporated water (equation (5.8)) is

$$W = L \left( 1 - \frac{x_0}{x_3} \right)$$

$$W = 5000 \cdot \left( 1 - \frac{0.05}{0.35} \right) = 4286 \text{ kg/h}$$

Dividing the amount of the evaporated water in the way proposed in Chapter 5.3, one gets the preliminary amount of water in each stage of the battery

$$W_1 = \frac{W}{1+1.1+1.2} = \frac{4286}{3.3} = 1299 \text{ kg/h}$$

$$W_2 = 1.1 \cdot W_1 = 1.1 \cdot 1299 = 1429 \text{ kg/h}$$

$$W_3 = 1.2 \cdot W_1 = 1.2 \cdot 1299 = 1558 \text{ kg/h}$$

Therefore, concentrations of solutions in the stages are as follows

$$x_1 = \frac{L x_0}{L - W_1} = \frac{5000 \cdot 0.05}{5000 - 1299} = 0.068$$

$$x_2 = \frac{L x_0}{L - W_1 - W_2} = \frac{5000 \cdot 0.05}{5000 - 1299 - 1429} = 0.110$$

$$x_3 = 0.35 \text{ (this value was given)}$$

*Ad 2. Assumption of pressures in all stages*

It can be tentatively assumed that the difference between pressure of heating steam and pressure in the last stage is equally divided at all stages. Hence

$$p_1 = p_D - \frac{p_D - p_3}{3} = 784.5 - \frac{784.5 - 49}{3} = 539 \text{ kPa}$$

$$p_2 = p_D - \frac{2(p_D - p_3)}{3} = 784.5 - \frac{2 \cdot (784.5 - 49)}{3} = 294 \text{ kPa}$$

$$p_3 = 49 \text{ kPa (this value was given)}$$

*Ad 3. Determination of water vapor properties*

Condensing temperatures and enthalpies of saturated water vapor were determined on the basis of table AT-3. The results are presented in table 5.3.

Table 5.3

Stage	Pressure [kPa]	Condensation temperature $T$ [°C]	Enthalpy $i''$ [kJ/kg]
Heating steam	784.5	169.6	2768.3
1	539	154.7	2751.6
2	294	132.9	2724.2
3	49	80.9	2644.6

*Ad 4. Calculations of temperature losses (see Chapter 5.5)*

a. *Concentration losses.* The following concentration losses  $\delta_{Tx}$  for  $\text{CaCl}_2$  solutions under atmospheric pressure can be taken from charts or tables given in literature

Table 5.4

Stage	Concentration $x$	$\delta_{Tx}$ [K]
1	0.068	0.6
2	0.110	1.5
3	0.35	15.2

It can be assumed that these losses depend only slightly on pressure.

b. *Pressure losses.* In order to calculate pressure losses, density of the solution must be found for the given concentrations and boiling point under specified pressure. In the first approximation condensation temperature of water vapor is taken from the table and substituted for the boiling point. Densities of solutions for 20°C were found in charts presented in literature.



Table 5.5

Stage	Concentration $x$	$\rho_{r20}$ [kg/m <sup>3</sup> ]
1	0.068	1068
2	0.110	1110
3	0.35	1350

Calculations for other temperatures are made on the basis of equation (5.6). The results are presented in table 5.6.

Table 5.6

Stage	$T$ [°C]	$\rho_w$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_r$ [kg/m <sup>3</sup> ]
1	154.7	913	977
2	132.9	932	1037
3	80.9	971	1313
–	20.0	998	–

On the basis of advices found in literature it is assumed that liquid circulating in pipes contains 25% by volume of vapor bubbles; therefore, the liquid column has the reduced height

$$(1 - 0.25) \cdot H = 0.75 \cdot 2 = 1.5 \text{ m}$$

Pressure in the middle of this column is taken, so

$$\Delta p_h = \rho_r g \frac{H_{\text{red}}}{2}$$

Pressure exerted by the liquid column is

$$\text{stage 1} \quad \Delta p_h = 977 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.5}{2} = 7190 \text{ Pa}$$

$$\text{stage 2} \quad \Delta p_h = 1037 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.5}{2} = 7630 \text{ Pa}$$

$$\text{stage 3} \quad \Delta p_h = 1313 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.5}{2} = 9660 \text{ Pa}$$

It is assumed that increase in the boiling point of the solution resulting from this pressure difference will be the same as for water. It can be found in table AT-3 that:

*stage 1:* the boiling point for pressure 539 kPa is 154.7°C,

the boiling point for pressure  $539 + 7 = 546$  kPa equals 155.2°C,

so the temperature loss is  $\delta_{Tp1} = 155.2 - 154.7 = 0.5$  K;

*stage 2:*  $\delta_{Tp2} = 0.8$  K;

*stage 3:*  $\delta_{Tp3} = 4.5$  K.

c. *Hydraulic losses.* Hydraulic losses in temperature are assumed to be equal to  $\delta_{Th} = 1$  K per each stage.

*Ad 5. Calculations of the boiling points of the solutions*

Boiling points of the solutions are calculated as the sum of the boiling point of water and the individual temperature losses. Hence

$$T_R = T + \delta_{Tx} + \delta_{Tp} + \delta_{Th}$$

Substitution of numerical values for each stage yields

$$T_{R1} = 154.7 + 0.6 + 0.5 + 1 = 156.8^\circ\text{C}$$

$$T_{R2} = 132.9 + 1.5 + 0.8 + 1 = 136.2^\circ\text{C}$$

$$T_{R3} = 80.9 + 15.2 + 4.5 + 1 = 101.6^\circ\text{C}$$

*Ad 6. Calculations of the total useful temperature difference*

The total useful temperature difference is calculated with equation (5.10)

$$\sum \Delta T_u = T_D - T_3 - \sum \delta_T$$

The total temperature losses in all stages are

$$\sum \delta_T = 0.6 + 1.5 + 15.2 + 0.5 + 0.8 + 4.5 + 3 \cdot 1 = 26.1 \text{ K}$$

Hence

$$\sum \Delta T_u = 169.6 - 80.9 - 26.1 = 62.6^\circ\text{C}$$

*Ad 7. Heat balance*

Heat balance equation analogical to equation (5.9) is written for each stage of the evaporator. The following value of heat capacity:  $c_p'' = 2.02 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  is taken for superheated water vapor enthalpy calculations.

*Stage 1*

$$L i_{R0} + D i_D'' = W_1 i_{W1} + D i_1' + (L - W_1) i_{R1}$$

Heat capacity of the solution can be found in charts

$$c_{R0} = 4.04 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$c_{R1} = 3.95 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

so enthalpies of the solution are equal to

$$i_{R0} = c_{R0} T_{R1} = 4.04 \cdot 156.8 = 633.5 \text{ kJ/kg}$$

$$i_{R1} = c_{R1} T_{R1} = 3.95 \cdot 156.8 = 619.4 \text{ kJ/kg}$$

To simplify the calculations it was assumed that inlet temperature of the raw material is also equal to  $T_{R1}$ , what means that the solution is slightly superheated. Enthalpy of vapor is calculated with the equation

$$i_{W1} = i_1'' + c_p'' (\delta_{Tx1} + \delta_{Tp1} + \delta_{Th1}) = 2751 + 2.02 \cdot (0.6 + 0.5 + 1) = 2755.3 \text{ kJ/kg}$$

According to table AT-3 enthalpy of condensate leaving the first stage is  $i_1' = 717.6 \text{ kJ/kg}$ . After substitution, one gets

$$5000 \cdot 633.5 + 2768.3 D = 2755.3 W_1 + 717.6 D + (5000 - W_1) \cdot 619.4$$

Arranging, one obtains

$$2050.7 D - 2135.9 W_1 = -70\,560$$

*Stage 2*

$$(L - W_1) i_{R1} + W_1 i_{W1} = W_2 i_{W2} + W_1 i_2' + (L - W_1 - W_2) i_{R2}$$

Analogical calculations of enthalpy allow one to obtain the equation

$$1985.5 W_1 - 2229.0 W_2 = -588\,800$$

Stage 3

$$(L - W_1 - W_2) i_{R2} + W_2 i_{W2} = W_3 i_{W3} + W_2 i'_3 + (L - W_1 - W_2 - W_3) i_{R3}$$

When substitution was made and the equation was arranged, one got

$$-226.6 W_1 + 1945.7 W_2 - 2411.3 W_3 = -1\,133\,200$$

So the system of equations can be written

$$\begin{array}{rcl} 2050.7 D - & 2136.4 W_1 & = -70\,560 \\ & 1985.5 W_1 - & 2229.0 W_2 & = -588\,800 \\ & -226.6 W_1 + & 1945.7 W_2 - & 2411.3 W_3 & = -1\,133\,200 \\ & & W_1 + & & W_2 + & & W_3 & = 4286 \end{array}$$

The solution of this system is as follows

$$D = 1348 \text{ kg/h}$$

$$W_1 = 1327 \text{ kg/h}$$

$$W_2 = 1446 \text{ kg/h}$$

$$W_3 = 1513 \text{ kg/h}$$

According to the results obtained on the basis of a heat balance, the new values of concentrations of the solution calculated as in point 1 are

$$x_1 = \frac{5000 \cdot 0.05}{5000 - 1327} = 0.068$$

$$x_2 = \frac{5000 \cdot 0.05}{5000 - 1327 - 1446} = 0.112$$

Therefore, they are close to the assumed values.

*Ad 8. Calculations of the individual rates of heat transferred in the stages*

$$\dot{Q}_1 = D(i_D'' - i_1') = \frac{1348}{3600} \cdot (2768.3 - 717.6) = 768 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_2 = W_1(i_{W1} - i_2') = \frac{1327}{3600} \cdot (2755.8 - 652.8) = 775 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_3 = W_2(i_{W2} - i_3') = \frac{1446}{3600} \cdot (2730.8 - 558.5) = 872 \text{ kW}$$

*Ad 9. Calculations of the overall heat transfer coefficients*

The procedure is the same as in example 5.5. Convection heat transfer coefficients and temperature drops corresponding to them were calculated with equations (3.24) and (5.12)–(5.14) for several assumed values of heat loads. Temperature drops at the side of condensing vapor, at the wall thickness and at the side of the boiling solution were then summed up and a chart  $\Sigma\Delta T = f(q_w)$  was made. On the basis of the known useful temperature difference (equal to the difference between vapor temperature and the boiling point of the solution) the real heat load was determined with the use of the chart and the overall heat transfer coefficient  $U = q/\Sigma\Delta T$  corresponding to it and the internal heat transfer area was determined. As a result the following values for all the three stages were obtained

$$U_1 = 3860 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}),$$

$$U_2 = 3510 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}),$$

$$U_3 = 1730 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}).$$

*Ad 10. Distribution of the useful temperature difference*

Equation (5.11) is used in order to find the useful temperature differences in the battery's stages which should occur to assure the equality of areas of the evaporators

$$\Delta T_{ui} = \frac{\frac{\dot{Q}_i}{U_i} \sum_{i=1}^n \Delta T_{ui}}{\sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{U_i}} \quad i = 1, 2, 3$$

It is convenient to calculate separately the denominator of this expression

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\dot{Q}_i}{U_i} = \frac{768}{3860} + \frac{775}{3510} + \frac{872}{1730} = 0.924 \text{ m}^2\text{K}$$

Substitution of numerical values yields

$$\Delta T_{u1} = \frac{\frac{768}{3860} \cdot 62.6}{0.924} = 13.5 \text{ K}$$

$$\Delta T_{u2} = \frac{\frac{775}{3510} \cdot 62.6}{0.924} = 14.9 \text{ K}$$

$$\Delta T_{u3} = \frac{\frac{872}{1730} \cdot 62.6}{0.924} = 34.1 \text{ K}$$

*Ad 11. Verification of temperatures of vapor and pressures*

Subtracting temperature losses and the useful temperature difference which results from calculations in point 10 from temperature of the heating steam in each stage, one gets temperatures of condensation of vapor and the corresponding pressures in all stages for which such a distribution of temperature would be fulfilled.

Table 5.7

Stage	Vapor temperature [°C]	Vapor pressure [kPa]	Assumed pressure [kPa]
1	$169.6 - 0.6 - 0.5 - 1 - 13.5 = 154.0$	528	539
2	$154.0 - 1.5 - 0.8 - 1 - 14.9 = 135.8$	319	294
3	$135.8 - 15.2 - 4.5 - 1 - 34.1 = 81.0$	49.3	49

It can be seen that there is a discrepancy between obtained pressures and pressures assumed at the beginning of calculations.

*Ad 12. Verification of compatibility of areas calculated on the basis of the real useful temperature differences  $\Delta T_u$*

The real  $\Delta T_u$  are the differences between temperatures of vapor and the solution and they are equal to

$$\Delta T_{u1} = 169.6 - 156.8 = 12.8 \text{ K}$$

$$\Delta T_{u2} = 154.7 - 136.2 = 18.5 \text{ K}$$

$$\Delta T_{u3} = 132.9 - 101.6 = 31.3 \text{ K}$$

for the assumed pressures distribution in all stages. Areas corresponding to the above temperature differences are

$$A'_1 = \frac{768}{3860 \cdot 12.8} = 15.5 \text{ m}^2$$

$$A'_2 = \frac{775}{3510 \cdot 18.5} = 11.9 \text{ m}^2$$

$$A'_3 = \frac{872}{1730 \cdot 31.3} = 16.1 \text{ m}^2$$

### Ad 13. Revision of calculations

Calculations must be repeated from point 1 for the new distribution of pressures and the new concentrations resulting from the balance. In order to reduce the number of iterations, a special procedure is used. In this procedure the arithmetic average of previously assumed pressures and pressures obtained in point 11 is used in consecutive calculations. The consistency between the assumed and obtained pressures and the equality between the areas  $A'_i$  is the stop criterion. Results of calculations are presented in table 5.8.

Table 5.8

Iteration	1	2	3	4
$x_1$	0.0675	0.0680	0.0681	0.0681
$x_2$	0.110	0.112	0.112	0.112
$p_1$ [kPa]	539	534	530	528
$p_2$ [kPa]	294	307	311	313
$U_1$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	3860	3860	3860	3860
$U_2$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	3510	3500	3500	3490
$U_3$ [W/(m <sup>2</sup> K)]	1730	1770	1790	1790
$A'_1$ [m <sup>2</sup> ]	15.5	15.1	14.8	14.6
$A'_2$ [m <sup>2</sup> ]	11.9	13.2	13.8	14.1
$A'_3$ [m <sup>2</sup> ]	16.1	14.8	14.5	14.4
$p_{1calc}$ [kPa]	528	526	525	525
$p_{2calc}$ [kPa]	319	316	314	313

The consistency of the calculations in the fourth iteration can be regarded as sufficient.

*Remark: Exercises 5.1–5.10 are solved with the use of the diagram (fig. 5.1).*

### EXERCISE 5.1

Using the diagram, determine temperature, boiling point under pressure of 1 ata and composition of a solution which was formed as a result of adiabatic mixing of 100 kg of water at temperature  $0^{\circ}\text{C}$  with 50 kg of anhydrous crystals of  $\text{CaCl}_2$  at temperature  $20^{\circ}\text{C}$ .

Answer:  $T = 79^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\text{boil}} = 115^{\circ}\text{C}$ ,  $x = 0.33$ .

### EXERCISE 5.2

What temperature will the solution from the previous exercise have if 100 kg of ice at temperature  $0^{\circ}\text{C}$  is used instead of liquid water?

Answer:  $T = -11^{\circ}\text{C}$ .

### EXERCISE 5.3

What amount of heat will be emitted during isothermal mixing of 1 kg of a  $\text{CaCl}_2$  solution which concentration is  $x = 0.5$  and temperature equals  $60^{\circ}\text{C}$  with 1 kg of water at the same temperature? What temperature would the mixture have if heat of dilution was not removed?

Answer:  $q = 80 \text{ kJ}$ ,  $T = 75^{\circ}\text{C}$ .

### EXERCISE 5.4

At what temperature a  $\text{CaCl}_2$  solution will stop to boil if pressure above the boiling solution of concentration  $x = 0.4$  was reduced from 98.1 kPa (1 ata) to 9.81 kPa (0.1 ata)?

Answer:  $65^{\circ}\text{C}$ .

### EXERCISE 5.5

What crystals will be precipitated firstly and in what amount when a  $\text{CaCl}_2$  solution is being cooled from temperature  $100^{\circ}\text{C}$  to  $-20^{\circ}\text{C}$  and concentration of the solution is:

a)  $x = 0.2$

b)  $x = 0.4$ ?

Answer: a) ice; 0.073 kg/kg of the initial solution,

b)  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ; 0.37 kg/kg of the initial solution.

### EXERCISE 5.6

What lowest temperature can be reached if water at temperature  $0^{\circ}\text{C}$  is mixed adiabatically with a tetrahydrate  $\text{CaCl}_2$  which has the same temperature? What amount of water should be added to 1 kg of crystals to obtain such a mixture?

Answer:  $-13^{\circ}\text{C}$ ; 0.74 kg of water.



## EXERCISE 5.7

In what proportion should crystals of  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  at temperature  $0^\circ\text{C}$  be mixed with water at the same temperature in order to obtain a mixture with the highest possible ability to absorb heat? What concentration does the obtained freezing mixture have? What amount of heat should be delivered to 1 kg of such a mixture to return to temperature of  $0^\circ\text{C}$ ?

Answer: 0.34 kg of water;  $x = 0.38$ ; 103 kJ.

## EXERCISE 5.8

A  $\text{CaCl}_2$  solution boiling under pressure 98.1 kPa (1 ata) and at temperature  $120^\circ\text{C}$  was cooled down to  $0^\circ\text{C}$  and this temperature was maintained. What concentration will the obtained crystals and post-crystallization solution have after the equilibrium was reached?

Answer: crystals  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , a solution of concentration  $x = 0.37$ .

## EXERCISE 5.9

100 kJ of heat was delivered to 1 kg of  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  crystals at temperature  $20^\circ\text{C}$ . What temperature was reached? What phases will occur after the equilibrium was reached and what will be the amount of these phases?

Answer:  $T = 45.3^\circ\text{C}$ ; 0.44 kg  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , 0.12 kg  $\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , 0.44 kg of solution of concentration  $x = 0.56$ .

## EXERCISE 5.10

1 kg of a  $\text{CaCl}_2$  solution of concentration  $x = 0.1$  was cooled down to  $-20^\circ\text{C}$ . How much and what kind of crystals will precipitate after the equilibrium was reached?

Answer: 0.52 kg crystals of ice.

## EXERCISE 5.11

Using the data and results from Example 5.5, calculate the heating area and demand for heating steam in an evaporator if the amount of a raw material is 10000 kg/h. The raw material is flowing into the evaporator at its boiling point which is equal to  $103^\circ\text{C}$ . Heat capacity of a NaOH solution which concentration equals  $x = 0.1$  is  $3880 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  at temperature  $103^\circ\text{C}$ . In the case of concentration  $x = 0.3$  and temperature  $116^\circ\text{C}$  it is equal to  $3670 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . It can be assumed that heat capacity of superheated steam is  $2020 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Assume that the whole amount of heat released by condensing vapor is used for evaporation at temperature  $116^\circ\text{C}$ .

Answer:  $A = 86 \text{ m}^2$ ,  $D = 2.01 \text{ kg/s}$ .

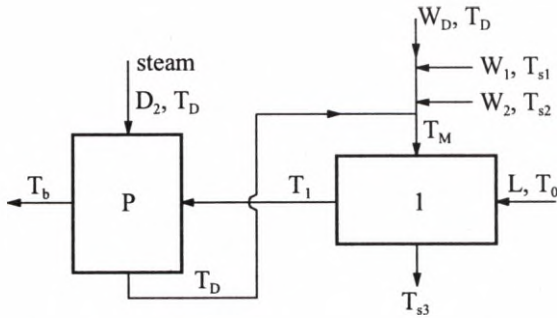


Fig. 5.12. System of exchangers for heating of a solution

### EXERCISE 5.12

Compare the results obtained in Example 5.6 with the case when the solution is heated up by condensate mixed in one heat exchanger (fig. 5.12). All the data for the solution and the condensate are the same as in Example 5.6; assume also that  $T_3 = T_0 + 5$  and heat capacity of the mixed condensate is  $4210 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Calculate temperature of the condensate after mixing, temperature of the solution after the exchanger 1, the amount of reheating steam and areas of the exchangers  $P$  and 1.  
 Answer:  $T_{sM} = 139.7^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 88.6^\circ\text{C}$ ;  $D_2 = 697 \text{ kg/h}$ ,  $A_p = 6.7 \text{ m}^2$ ,  $A_1 = 24.8 \text{ m}^2$ .

## 6. POLISH TEXTS

### 6.1. BILANS CIEPLNY

Bilans cieplny opiera się na prawie zachowania energii. Gdy nie występują zmiany innych rodzajów energii poza cieplną, dla dowolnego układu słuszny jest związek

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{znajdująca się} \\ \text{początkowo} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{doprowadzona} \\ \text{do układu} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{odprowadzona} \\ \text{z układu} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{pozostająca} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] \quad (1.1)$$

Ponieważ wiadomo, że

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{pozostająca} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{znajdująca się} \\ \text{początkowo} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{akumulacja} \\ \text{ciepła} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] \quad (1.2)$$

zatem równoważną postacią zapisu równania (1.1) jest

$$\left[ \begin{array}{l} \text{akumulacja} \\ \text{ciepła} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{doprowadzona} \\ \text{do układu} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła} \\ \text{odprowadzona} \\ \text{z układu} \end{array} \right] \quad (1.3)$$

Dla procesów ciągłych poszczególne składniki bilansu są wielkościami odniesionymi do czasu (o wymiarze mocy,  $J/s = W$ ). Dla takich procesów akumulację ciepła można wyrazić w postaci

$$\left[ \begin{array}{l} \text{akumulacja} \\ \text{ciepła} \\ \text{w układzie} \end{array} \right] = m \frac{di}{dt} \quad (1.4)$$

gdzie:

- $i$  – entalpia (właściwa) czynnika w układzie, J/kg,  
 $m$  – masa czynnika w układzie, kg.

Dla procesów ciągłych na różnicę między ilością ciepła doprowadzoną i odprowadzoną z układu (prawa strona wzoru (1.3)) składają się dwie pozycje. Pierwsza z nich dotyczy ciepła „związanego” ze strumieniem materiałowym (ciepło „niesione” przez czynnik przepływający przez układ). Tę pozycję można wyrazić następująco

$$\left[ \begin{array}{c} \text{ilość ciepła} \\ \text{doprowadzona} \\ \text{ze strumieniem} \\ \text{materiałowym} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{ilość ciepła} \\ \text{odprowadzona} \\ \text{ze strumieniem} \\ \text{materiałowym} \end{array} \right] = \dot{m} i_{in} - \dot{m} i_{out} \quad (1.5)$$

gdzie:

- $\dot{m}$  – masowe natężenie przepływu czynnika, kg/s,  
 $i_{in}, i_{out}$  – odpowiednio entalpie (właściwe) czynnika na wlocie i wylocie z układu, J/kg.

Druga pozycja jest związana z ilością ciepła (w jednostce czasu)  $\pm \dot{Q}$  przenoszoną między układem a otoczeniem („+” dotyczy przypadku, gdy układ pobiera ciepło, zaś „-”, gdy oddaje ciepło). Może to dotyczyć np. ogrzewania lub chłodzenia przez ścianę.

Dla procesów ciągłych równanie bilansu cieplnego ma postać (1.6).

Gdy proces jest ustalony w czasie, akumulacja jest równa zero; obowiązuje wtedy zależność (1.7). Zgodnie z tą zależnością zmiana entalpii czynnika jest równoważna z ciepłem doprowadzonym (odprowadzonym) do jednostki masy czynnika. Stanowi to podstawę do obliczania względnych wartości entalpii (względem temperatury odniesienia – najczęściej 0°C).

W wymiennikach ciepła zachodzi na ogół ustalony ruch ciepła między dwoma czynnikami (1) i (2). Bilans cieplny wymiennika, bez uwzględnienia strat do otoczenia, jest określony wzorem (1.8).

Wartości entalpii wody i pary wodnej podano w tabeli AT-3.

Dla czynników innych niż woda dokładne określenie entalpii jest na ogół kłopotliwe. Jeżeli w wymienniku ciepła nie zachodzi przemiana fazowa czynnika (wrzenie, skraplanie), różnicę entalpii można obliczyć ze wzoru (1.9), gdzie  $\Delta T$  jest różnicą temperatur czynnika między wlotem i wylotem (lub odwrotnie), a  $c$  – średnim ciepłem właściwym pod stałym ciśnieniem w zakresie zmian temperatur czynnika. Dla wody przyjmuje się średnio  $c = 4190 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

Jeżeli w wymienniku ciepła czynnik podlega tylko przemianie fazowej, różnica entalpii czynnika jest identyczna z ciepłem przemiany fazowej (parowania) i dana

zależnością (1.10). Przypadek taki dotyczy np. skraplania pary nasyconej bez dochładzania kondensatu lub wrzenia cieczy (doprowadzanej w temperaturze wrzenia) bez przegrzewania pary.

#### PRZYKŁAD 1.1

Obliczyć entalpię pary wodnej nasyconej w temperaturze 120°C. Zależność ciepła molowego pary wodnej od temperatury bezwzględnej  $T$  [K] jest następująca

$$C_g = 32,2 + 1,92 \cdot 10^{-3} \cdot T + 10,6 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 3,60 \cdot 10^{-9} \cdot T^3 \quad \text{kJ}/(\text{kmol} \cdot \text{K}) \quad (\text{a})$$

#### PRZYKŁAD 1.2

Przez zbiornik z idealnym mieszanym, wyposażony w cztery grzałki elektryczne o mocy 3000 W każda, przepływa woda o temperaturze wlotowej  $T_0 = 42^\circ\text{C}$ . Poziom wody w zbiorniku jest niezmienny i odpowiada objętości cieczy  $V = 0,1 \text{ m}^3$ . Przyjmując, że w zakresie temperatur występujących w zbiorniku gęstość wody wynosi  $\rho = 980 \text{ kg/m}^3$ , a ciepło właściwe  $c = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , oraz że nie występują straty ciepłne do otoczenia, obliczyć:

1. Jaką maksymalną temperaturę można osiągnąć w zbiorniku przy włączonej jednej grzałce przy natężeniu przepływu wody 0,04 kg/s?
2. Czas nagrzewania wody w zbiorniku do tej temperatury przy załączonych dwóch grzałkach i natężeniu przepływu jak wyżej.
3. Ile co najmniej grzałek należy włączyć, ażeby nastąpiło wrzenie wody w zbiorniku przy natężeniu przepływu jak wyżej, oraz po jakim czasie nastąpi wrzenie.
4. Jakie należy zastosować natężenie przepływu wody, aby przy trzech włączonych grzałkach woda zagotowała się po upływie 1 godziny.

#### PRZYKŁAD 1.3

Dwa połączone zbiorniki z idealnym mieszanym (rys. 1.1) o pojemności  $V = 2 \text{ m}^3$  każdy napełnione są wodą; w pierwszym temperatura wody wynosi  $T_{1i} = 10^\circ\text{C}$ , w drugim zaś  $T_{2i} = 50^\circ\text{C}$ . W pewnej chwili do pierwszego zbiornika rozpoczęto doprowadzanie wody o temperaturze  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  w ilości  $\dot{V} = 0,002 \text{ m}^3/\text{s}$ . Woda odpływająca z tego zbiornika wpływa do drugiego, a z drugiego odprowadzana jest na zewnątrz. Poziomy cieczy w zbiornikach są niezmiennie w czasie. Zakładając, że zbiorniki są doskonale zaizolowane oraz zaniedbując zmiany gęstości cieczy z temperaturą wyznaczyć zależność temperatur wylotowych z obu zbiorników od czasu.

#### PRZYKŁAD 1.4

W wymienniku ciepła należy ogrzać wodny roztwór o ciepłe właściwym 3980 J/(kg·K) w ilości 3 kg/s od 10°C do 95°C. Obliczyć niezbędne natężenie prze-

plywu pary wodnej oraz jej ciśnienie dla warunków, w których minimalna różnica temperatur między czynnikami w wymienniku będzie wynosić 35 K. Przyjąć, że skropliny na wylocie mają temperaturę taką samą jak para, a ponadto, że para jest zawilgocona w 5%, a straty ciepłe stanowią 7% ilości ciepła dostarczanego do roztworu.

### PRZYKŁAD 1.5

Gazy spalinowe są chłodzone w wymienniku ciepła od 650°C do 400°C za pomocą pary wodnej o temperaturze początkowej 120°C. Objętościowe natężenie przepływu gazów na wlocie do wymiennika wynosi 0,518 m<sup>3</sup>/s, a masowe natężenie przepływu pary wodnej 0,15 kg/s. Ciśnienia obu czynników wynoszą 0,980·10<sup>5</sup> Pa. Obliczyć końcową temperaturę pary przy założeniu braku strat ciepłych do otoczenia. Średnie ciepło molowe gazów spalinowych wynosi 33,8 kJ/(kmol·K), a zależność ciepła molowego pary wodnej od temperatury wyrażonej w [K] jest następująca

$$C = 32,2 + 1,92 \cdot 10^{-3} T + 10,6 \cdot 10^{-6} T^2 - 3,60 \cdot 10^{-9} T^3 \text{ kJ}/(\text{kmol} \cdot \text{K}) \quad (\text{a})$$

### ZADANIE 1.1

Do 82,6 kg wody o temperaturze 62°C dostarczono pod stałym ciśnieniem 201 500 kJ ciepła. Obliczyć temperaturę powstałej nasyconej pary wodnej.

Odpowiedź: 115°C.

### ZADANIE 1.2

W zbiorniku z idealnym mieszanym o objętości 0,05 m<sup>3</sup> znajduje się wodny roztwór o temperaturze 80°C. W pewnym momencie rozpoczęto doprowadzanie do zbiornika tego samego roztworu w ilości 1·10<sup>-4</sup> m<sup>3</sup>/s o temperaturze 12°C z jednoczesnym odprowadzaniem tej samej ilości na zewnątrz. Obliczyć temperaturę w zbiorniku po 5 minutach. Jaki czas byłby potrzebny do osiągnięcia tej temperatury, gdyby natężenie przepływu cieczy wzrosło dwukrotnie? Założyć, że gęstość i ciepło właściwe roztworu nie zmieniają się z temperaturą.

Odpowiedź: 49,3°C; 2,5 min.

### ZADANIE 1.3

Dla warunków przykładu 10.3 obliczyć:

- po jakim czasie temperatura na wylocie ze zbiornika II zrówna się z temperaturą strumienia zasilającego zbiornik I (30°C),
- po jakim czasie temperatury wylotowe ze zbiorników I i II staną się identyczne,
- po jakim czasie temperatura na wylocie ze zbiornika II osiągnie minimum oraz ile wynosi temperatura minimalna.

Odpowiedź: a) 1000 s, b) 2000 s, c) 2000 s, 27,3°C.

**ZADANIE 1.4**

W zbiorniku znajduje się woda w ilości 30 kg i temperaturze początkowej 20°C. Zawartość zbiornika ogrzewano bezprzeponowo parą wodną nasyconą o temperaturze 125°C, przepływającą w ilości 0,0042 kg/s. Zakładając brak strat cieplnych, obliczyć:

- jaka będzie temperatura wody w zbiorniku po 10 minutach ogrzewania,
- po jakim czasie temperatura wody w zbiorniku wyniesie 95°C i jaka będzie wtedy masa zawartości zbiornika.

Odpowiedź: a) 68,7°C, b) 969 s, 34,07 kg.

**ZADANIE 1.5**

W przeciwprądowym wymienniku ciepła ulega skropleniu przegrzana para amoniaku, dopływająca pod ciśnieniem 1,37 MPa (1,4 ata) w temperaturze 170°C w ilości 0,05 kg/s. Czynnikiem chłodzącym jest woda ogrzewająca się od temperatury 17°C do 35°C. Obliczyć natężenie przepływu wody niezbędne do całkowitego skropleniu amoniaku. Z wykresu  $T-S$  dla amoniaku odczytano, że przy ciśnieniu 1,37 MPa entalpia pary amoniaku w temperaturze 170°C wynosi 1831 kJ/kg, a entalpia amoniaku wrzącego pod tym ciśnieniem 348 kJ/kg.

Odpowiedź: 0,983 kg/s.

## **6.2. PRZEWODZENIE CIEPŁA**

### **6.2.1. Równania przewodzenia ciepła**

Przewodzenie ciepła jest procesem dotyczącym przede wszystkim ciał stałych, tj. układów, w których nie istnieje możliwość przemieszczania cząsteczek. W płynach ciepło jest również przewodzone, ale dominującym mechanizmem transportu jest konwekcja.

Przewodzenie ciepła opisują równania Fouriera. Dla ustalonego przewodzenia ciepła w kierunku osi  $x$  obowiązuje wzór (2.1), w którym:

$\dot{Q}$  – natężenie przepływu ciepła (ilość ciepła w jednostce czasu), W,

$k$  – współczynnik przewodzenia ciepła, W/(mK),

$T$  – temperatura, °C,

$A$  – pole powierzchni prostopadłej do kierunku ruchu ciepła, m<sup>2</sup>.

Współczynnik przewodzenia ciepła  $k$  charakteryzuje zdolność materiału do przewodzenia ciepła; jest wielkością stosunkowo mało zmienną z temperaturą.

Przykładowe wartości  $k$  dla kilku substancji w temperaturze 0°C podano w tabeli 2.1.

Współczynniki przewodzenia ciepła

Substancja	Miedź	Stal	Wata szklana	Woda	Powietrze
$k$ [W/(m·K)]	386	17,5–46,5	0,04–0,06	0,592	0,0241

W procesach cieplnych często operuje się pojęciem gęstości strumienia cieplnego (obciążenia cieplnego)  $q$ , zdefiniowanego zależnością (2.2). Wymiarem  $q$  jest  $W/m^2$ ; wielkości tej używa się np. do określenia strat ciepła z jednostki powierzchni.

Dla nieustalonego przewodzenia w kierunku osi  $x$  obowiązuje wzór (2.3), gdzie:

- $t$  – czas, s,
- $a$  – współczynnik dyfuzyjności cieplnej,  $m^2/s$ ,
- $\zeta$  – współczynnik kształtu bryły (= 0, 1 lub 2 odpowiednio dla płyty nieskończonej, cylindra nieskończonego i kuli).

Współczynnik dyfuzyjności cieplnej jest definiowany zależnością (2.4), w której:

- $c$  – ciepło właściwe,  $J/(kg \cdot K)$ ,
- $\rho$  – gęstość,  $kg/m^3$ ,

Współczynnik  $a$  charakteryzuje zdolność ciała do zmian temperatury; im większe  $a$ , tym ciało szybciej zmienia temperaturę (ogrzewa się lub ostyga).

### 6.2.2. Przewodzenie ustalone przez ściany płaskie

Gdy pole powierzchni  $A$  ma wartość stałą (ściany płaskie), to równanie (2.1) po scałkowaniu ma postać (2.5), przy czym  $\Delta T_w$  oznacza różnicę temperatur obu stron ściany, a  $s$  – grubość ściany. Gdy przewodzenie odbywa się przez  $N$  szeregowo ustawionych warstw (ścian), obowiązuje zależność (2.6), przy czym  $i = 1, 2, \dots, N$ . Wyrażenie  $\Sigma \Delta T_{wi}$  jest sumą różnic temperatur na poszczególnych ścianach, a więc całkowitą różnicą temperatur; wyrażenie w mianowniku przedstawia opór cieplny przewodzenia ( $R$ ) o wymiarze  $m^2K/W$ .

### 6.2.3. Przewodzenie ustalone przez ściany cylindryczne

Przy przewodzeniu ciepła przez ściany cylindryczne (np. ściany rur) wielkość  $A$  w równaniu (2.1) jest zmienna. Uwzględniając to przy całkowaniu, otrzymuje się zależność (2.7), w której:

- $L$  – długość ściany cylindrycznej, m,
- $d_1$  – średnica wewnętrzna, m,
- $d_2$  – średnica zewnętrzna, m.

Zależność (2.7) można przedstawić w dogodniejszej postaci, podobnej do (2.5). Uwzględniając, że  $d_2 - d_1 = 2s$  oraz wprowadzając średnią logarytmiczną z pól po-



wierzchni wewnętrznej  $A_1 = \pi d_1 L$  i zewnętrznej  $A_2 = \pi d_2 L$ , określoną wzorem (2.8), otrzymuje się wzór (2.9).

Gdy przewodzenie odbywa się przez  $N$  szeregowo ustawionych ścian cylindrycznych, odpowiedni jest wzór (2.10) lub (2.11). We wzorze (2.10) wielkości  $d_{2i}$  i  $d_{1i}$  oznaczają odpowiednio średnicę zewnętrzną i wewnętrzną  $i$ -tej ściany cylindrycznej.

#### 6.2.4. Izolacje cieplne

Rurociągi lub aparaty, w których znajdują się płyny o temperaturze znacznie różniącej się od temperatury otoczenia, pokrywa się często warstwą izolacji, tj. materiału o małym współczynniku przewodnictwa cieplnego. Po obu stronach izolacji jedno- lub wielowarstwowej znajdują się płyny, których temperatury są na ogół różne od temperatur powierzchni. Ruch ciepła między płynem a ścianą odbywa się przez wnikanie (rozdział 6.3); proces ten opisany jest równaniem (3.1). Odwrotności współczynników wnikania ciepła  $1/h$  należy traktować jako składniki oporu cieplnego układu  $R$ . Gdy opór cieplny zawiera w sobie obok oporów przewodzenia  $\Sigma(s_i/k_i)$  również opory wnikania, wtedy w równaniach (2.6) i (2.11) zamiast  $\Delta T_{wi}$  pojawia się różnica temperatur płynów  $\Delta T$ . Dla izolacji wielowarstwowej płaskiej obowiązuje zależność (2.12), natomiast dla izolacji wielowarstwowej cylindrycznej – zależność (2.13), przy czym:

$h_1, h_2$  – współczynniki wnikania ciepła odpowiednio dla wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni izolacji,  $W/(m^2K)$ ,

$A_1, A_2$  – odpowiednio wewnętrzne i zewnętrzne pole powierzchni izolacji,  $m^2$ .

Przy stosowaniu izolacji na powierzchniach cylindrycznych zostaje powiększone pole powierzchni zewnętrznej układu. Możliwy jest przypadek, gdy zwiększenie pola tej powierzchni nie jest kompensowane odpowiednim wzrostem oporu cieplnego przewodzenia. Istnieje wtedy graniczna (krytyczna) wartość grubości izolacji, dla której strata ciepła osiąga maksimum. Różniczkując zależność (2.13) dla izolacji jednowarstwowej ( $N = 1$ ) względem  $d_2$  i przyrównując pochodną do zera, otrzymuje się wzór (2.14) na krytyczną średnicę zewnętrzną izolacji  $d_{2cr}$ .

#### 6.2.5. Nieustalone przewodzenie ciepła

Problem dotyczy ogrzewania i chłodzenia brył. Jednym z problemów obliczeniowych jest wyznaczanie temperatur w danym punkcie bryły w zależności od czasu ogrzewania (chłodzenia). Przedstawione rozważania dotyczą układów, w których w momencie początkowym temperatura bryły  $T_i$  jest jednorodna; ponadto zakłada się, że temperatura ośrodka (tj. płynu, w środowisku którego znajduje się bryła)  $T_b$  jest stała w czasie. Rozróżnia się trzy zakresy dotyczące relacji między oporami cieplnymi w bryle i w ośrodku.

I. Opór cieplny występuje wyłącznie w bryle; temperatura powierzchni bryły jest wtedy równa temperaturze ośrodka; odpowiada temu nieskończenie wielka wartość współczynnika wnikania ciepła między bryłą a płynem.

II. Opór cieplny występuje w bryle i ośrodku.

III. Opór cieplny występuje wyłącznie w ośrodku; temperatura w bryle jest wtedy jednorodna; odpowiada temu nieskończenie wielka wartość współczynnika przewodzenia ciepła bryły; przypadek ten rozważono w rozdziale 6.2.5.4.

Do dalszych rozważań wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe:

- bezwymiarową temperaturę zdefiniowaną wzorem (2.15),
- bezwymiarowy czas zdefiniowany wzorem (2.16),
- bezwymiarową współrzędną położenia zdefiniowaną wzorem (2.17) (nie dotyczy ciała półnieskończonego).

Ponadto wprowadza się liczbę Biota (wzór (2.18)), charakteryzującą stosunek oporu cieplnego bryły do oporu cieplnego ośrodka.

W tych definicjach symbole oznaczają:

- $x$  – współrzędna położenia (odległość od osi bryły), m,
- $t$  – czas, s,
- $T$  – temperatura w odległości  $x$  po czasie  $t$ , °C,
- $s$  – charakterystyczny wymiar liniowy bryły (dla płyty nieskończonej – połowa grubości, dla cylindra nieskończonego i kuli – promień), m,
- $k$  – współczynnik przewodzenia ciepła bryły, W/(m·K),
- $h$  – współczynnik wnikania ciepła między powierzchnią bryły a płynem, W/(m<sup>2</sup>·K).

Podane dalej zależności można przedstawić w formie ogólnej (2.19).

Wszystkie omówione rozwiązania równań nieustalonego przewodzenia ciepła dotyczą warunku początkowego (2.20). Ponadto w osi brył symetrycznych obowiązuje warunek brzegowy (2.21).

#### 6.2.5.1. Rozwiązania analityczne dla płyty nieskończonej, cylindra nieskończonego i kuli

Przy ogrzewaniu (chłodzeniu), gdy opór cieplny występuje wyłącznie w bryle ( $Bi \rightarrow \infty$ , praktycznie  $Bi > 100$ ), warunek brzegowy dla powierzchni bryły jest określony zależnością (2.22).

Rozwiązanie równania (2.3) przy warunku początkowym (2.20) oraz warunkach brzegowych (2.21) i (2.22) prowadzi do zależności w postaci szeregów nieskończonych. Dla płyty nieskończonej o grubości  $2s$  rozwiązaniem jest zależność (2.23).

Dla cylindra nieskończonego o promieniu  $s$  obowiązuje zależność (2.24), gdzie  $\alpha_i$  są pierwiastkami równania (2.24a), przy czym  $J_0$  jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

Dla kuli o promieniu  $s$  rozwiązanie ma postać (2.25).

Gdy opór cieplny występuje w bryle oraz w otaczającym płynie ( $0,1 < Bi < 100$ ), to dla powierzchni bryły obowiązuje warunek brzegowy (2.26). Rozwiązanie równania (2.3) przy warunku początkowym (2.20) oraz warunkach brzegowych (2.21) i (2.26) prowadzi do następujących zależności. Dla płyty nieskończonej obowiązuje zależność (2.27), przy czym  $\beta_i$  są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równania przestępnego (2.27a).

Dla cylindra nieskończonego rozwiązanie jest dane wzorem (2.28), przy czym  $\beta_i$  są pierwiastkami równania (2.28a), zaś  $J_1$  jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu pierwszego.

Dla kuli obowiązuje zależność (2.29), przy czym  $\beta_i$  są pierwiastkami równania (2.29a).

Równania (2.27a), (2.28a) i (2.29a) mają nieskończenie wiele rozwiązań. W tabelach 2.2–2.4 podano wartości sześciu pierwszych pierwiastków tych równań dla kilku wartości liczby Biota.

Obliczenia sprawiają pewne problemy, zwłaszcza przy poszukiwaniu czasu dla zadanej temperatury i położenia. Problem upraszcza się, gdy  $\tau > 0,5$ ; wtedy w szeregach niekończonych wystarczy uwzględnić tylko pierwszy człon. Na rysunkach 2.1–2.3 przedstawiono wykresy, z których dla danych wartości  $\tau$ ,  $\eta$  oraz  $Bi$  można odczytać bezwymiarową temperaturę  $A$  dla płyty nieskończonej, cylindra nieskończonego i kuli.

#### 6.2.5.2. Rozwiązania analityczne dla ciała półnieskończonego

Ciało półnieskończone jest to bryła ograniczona tylko jedną powierzchnią; w pozostałych kierunkach rozciąga się do nieskończoności. Ciało półnieskończone nie ma wymiaru liniowego, a zmienną położenia  $x$  traktuje się jako odległość od powierzchni. Jeżeli  $Bi \rightarrow \infty$ , warunki brzegowe są określone zależnościami (2.30) i (2.31). Rozwiązaniem jest zależność (2.32), przy czym  $z = 1 / (2\sqrt{\tau_x})$ . Wymiarem liniowym w  $\tau_x$  jest zmienna położenia  $x$  (2.33). Prawa strona wzoru (2.32) nosi nazwę funkcji błędu (erf) – wzór (2.34). Ostatecznie rozwiązanie ma postać (2.35). Funkcję błędu przedstawiono na rys. 2.4.

Gdy przy przewodzeniu ciepła w ciele półnieskończonym opór cieplny występuje zarówno w bryle, jak i w płynie, to warunek brzegowy dla powierzchni jest określony zależnością (2.36). Rozwiązanie ma wtedy postać (2.37), przy czym wymiarem liniowym w liczbie  $Bi_x$  jest współrzędna położenia  $x$  (zamiast  $s$ ).

#### 6.2.5.3. Rozwiązanie dla brył „pochodnych”

Znane zależności analityczne dla brył podstawowych nie są wystarczające do rozwiązania typowych problemów chłodzenia lub ogrzewania brył o realnych kształtach. Dla brył będących kombinacją geometryczną (tj. utworzonych w wyniku przenikania) brył podstawowych metoda obliczeń rozkładu temperatur w czasie

opiera się na następującej regule: bezwymiarowa wielkość dla bryły „pochodnej”  $Y$  jest iloczynem odpowiednich bezwymiarowych wielkości  $Y_x, Y_y, Y_z$  dla brył podstawowych. Dla kombinacji np. trzech brył podstawowych obowiązuje zależność (2.38).

Przykładowo prostopadłościan (cegła) powstaje z przenikania trzech płyt nieskończonych o grubościach wynikających z długości boków, ustawionych zgodnie z kierunkami osi współrzędnych  $x, y, z$ . Podobnie cylinder o skończonej długości powstaje w wyniku przenikania cylindra nieskończonego z płytą o grubości równej długości cylindra.

#### 6.2.5.4. Brak oporu przewodzenia w bryle

Przypadek ten teoretycznie dotyczy ogrzewania lub chłodzenia bryły o nieskończenie wielkim współczynniku przewodnictwa cieplnego; praktycznie zaś można uznać, że zachodzi on dla  $Bi < 0,1$ . Jeżeli bryła ma jednolitą temperaturę w całej objętości  $T$ , to przy chłodzeniu tej bryły w czasie  $dt$  jej temperatura zmienia się o  $dT$  i bryła oddaje ciepło  $c\rho V \cdot dT$  ( $V$  – objętość bryły). To ciepło, przekazane do otoczenia przez wnikanie, można wyrazić wzorem  $hA(T - T_b) \cdot dt$  (por. zależność (3.1)), gdzie  $A$  jest polem powierzchni bryły. Po porównaniu tych wyrażen i scałkowaniu otrzymuje się wzór (2.39).

Wyrażenie w nawiasie można też przedstawić w postaci wielkości bezwymiarowych. Wtedy zależność ma postać (2.39a), przy czym  $\zeta$  jest współczynnikiem kształtu bryły.

#### PRZYKŁAD 2.1

Ściana pieca składa się z trzech warstw. Wewnętrzną warstwę stanowi cegła ognioodporna o grubości  $s_1 = 0,10$  m i współczynniku przewodzenia ciepła  $k_1 = 0,95$  W/(m·K). Środkową warstwą jest cegła zwykła o  $s_2 = 0,20$  m i  $k_2 = 0,65$  W/(m·K), zewnętrzną natomiast izolacja o  $s_3 = 0,06$  m i  $k_3 = 0,10$  W/(m·K). Pomiary temperatur wykazały, że temperatura wewnętrznej ściany pieca wynosi  $T_1 = 750^\circ\text{C}$ , a ściany zewnętrznej (izolacji)  $T_2 = 80^\circ\text{C}$ . Obliczyć straty ciepłe pieca z  $1$  m<sup>2</sup> powierzchni ściany oraz zakres temperatur, w jakim znajduje się warstwa cegły zwykłej.

#### PRZYKŁAD 2.2

Na rurę stalową o współczynniku przewodzenia ciepła  $k_1 = 41$  W/(m·K), średnicy wewnętrznej  $d_1 = 33$  mm i średnicy zewnętrznej  $D = 38$  mm ma być nałożona warstwa izolacji. Przez rurę przepływa gaz o średniej temperaturze  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ ; współczynnik wnikania ciepła od przepływającego gazu do wewnętrznej powierzchni rury wynosi  $h_1 = 40$  W/(m<sup>2</sup>K). Przyjmując, że współczynnik wnikania ciepła od rury do otoczenia wynosi  $h_2 = 10$  W/(m<sup>2</sup>K), a temperatura otoczenia  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ , obliczyć

stratę ciepła z 1 mb rury dla następujących zestawów grubości warstwy izolacji  $s_2$  i współczynnika przewodzenia ciepła izolacji  $k_2$ :

- $s_2 = 0$ , (brak izolacji),
- $s_2 = 5$  mm,  $k_2 = 0,10$  W/(m·K),
- $s_2 = 5$  mm,  $k_2 = 0,25$  W/(m·K),
- $s_2 = 10$  mm,  $k_2 = 0,10$  W/(m·K),
- $s_2 = 10$  mm,  $k_2 = 0,25$  W/(m·K).

### PRZYKŁAD 2.3

W laboratoryjnym reaktorze cylindrycznym o średnicy wewnętrznej  $d_1 = 0,15$  m ma przebiegać pewien proces w temperaturze  $T_1 = 500^\circ\text{C}$ . Stalowa ściana nośna reaktora o grubości  $s_2 = 5$  mm ma dopuszczalną temperaturę pracy  $400^\circ\text{C}$ . Ze względów bezpieczeństwa wymagane jest ponadto, aby temperatura zewnętrznej ściany reaktora nie przekraczała  $70^\circ\text{C}$ ; dla tej temperatury współczynnik wnikania ciepła do otoczenia wynosi  $h_2 = 13$  W/(m<sup>2</sup>K). Mając do dyspozycji cegłę szamotową (jako wewnętrzną wykładzinę reaktora) o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_1 = 1,16$  W/(m·K) oraz watę szklaną (izolacja zewnętrzna) o  $\lambda_3 = 0,104$  W/(m·K), dobrać z dokładnością do 1 cm grubości obu warstw zapewniające żądane warunki temperaturowe oraz minimalną zewnętrzną średnicę reaktora. Zaniedbać opory wnikania ciepła wewnątrz reaktora oraz opór cieplny przewodzenia przez ścianę nośną. Temperatura otoczenia wynosi  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ .

### PRZYKŁAD 2.4

Dużą stalową płytę (nieskończoną) o grubości 70 mm i równomiernej temperaturze  $T_i = 360^\circ\text{C}$  zanurzono w zbiorniku z olejem w celu zahartowania. Średnia temperatura oleju wynosi  $T_b = 30^\circ\text{C}$  i może być uznawana za niezmienną w czasie. Obliczyć temperaturę w osi płyty po upływie 440 s od chwili zanurzenia przy następujących założeniach:

- temperatura powierzchni płyty jest równa temperaturze oleju,
- współczynnik wnikania ciepła od powierzchni płyty do oleju wynosi  $743$  W/(m<sup>2</sup>K).

Dla przypadku b) obliczyć też temperaturę powierzchni płyty po podanym czasie. Współczynnik przewodzenia ciepła płyty wynosi  $k = 25,5$  W/(m·K), gęstość  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, a ciepło właściwe  $c = 498$  J/(kg·K).

### PRZYKŁAD 2.5

Kostka ceramiczna o wymiarach  $100 \times 100 \times 50$  mm stygnie w powietrzu o temperaturze  $20^\circ\text{C}$  po uprzednim wypalaniu w temperaturze  $900^\circ\text{C}$ . Przyjmując, że temperatura kostki na początku chłodzenia jest jednorodna, obliczyć, po jakim czasie temperatura jej powierzchni spadnie do  $30^\circ\text{C}$ . Współczynnik przewodzenia ciepła kostki wynosi  $k = 0,71$  W/(m·K), gęstość  $\rho = 1650$  kg/m<sup>3</sup>, ciepło właściwe  $c = 774$  J/(kg·K), a współczynnik wnikania ciepła od kostki do powietrza (z uwzględnieniem promieniowania)  $h = 30$  W/(m<sup>2</sup>K).

## ZADANIE 2.1

Wewnętrzna powierzchnia płaskiej ściany pieca ma temperaturę  $600^{\circ}\text{C}$ , a zewnętrzna  $150^{\circ}\text{C}$ . Straty ciepła z  $1\text{ m}^2$  powierzchni ściany wynoszą  $1660\text{ W/m}^2$ . Ile razy zmniejszą się straty ciepłe, jeżeli zewnętrzną powierzchnię ściany pieca pokryje się dodatkową warstwą izolacji o grubości  $5\text{ cm}$  i współczynnikiem przewodzenia ciepła  $0,08\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ? Wiadomo, że po tym pokryciu temperatura zewnętrznej powierzchni izolacji wynosiła  $73^{\circ}\text{C}$ . Założyć, że temperatura wewnętrznej powierzchni ściany pieca nie uległa zmianie.

O d p o w i e d ź: 2,82 razy.

## ZADANIE 2.2

Na rurociąg o średnicy  $100\text{ mm}$  nałożono warstwę izolacji o grubości  $40\text{ mm}$ . Temperatura wewnętrznej powierzchni izolacji wynosi  $150^{\circ}\text{C}$ , a zewnętrznej  $50^{\circ}\text{C}$ . W jakiej odległości od zewnętrznej powierzchni izolacji temperatura wynosi  $100^{\circ}\text{C}$ ? Uwzględnić krzywiznę ścian.

O d p o w i e d ź:  $22,9\text{ mm}$ .

## ZADANIE 2.3

Przewód ma być zaizolowany dwiema warstwami izolacji o tej samej grubości i różnych współczynnikach przewodzenia ciepła. Podać bardziej ekonomiczną (ze względu na straty ciepłe) kolejność ułożenia warstw. Uwzględnić krzywiznę ścian.

O d p o w i e d ź: Izolacja o mniejszym współczynniku  $k$  powinna stanowić warstwę wewnętrzną.

## ZADANIE 2.4

W warunkach przykładu 2.2 obliczyć, dla jakiej grubości izolacji o współczynniku przewodzenia ciepła  $0,25\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  straty ciepła będą identyczne jak dla rury nieizolowanej.

O d p o w i e d ź:  $14,8\text{ mm}$ .

## ZADANIE 2.5

Pręt miedziany ma powierzchnię boczną doskonale zaizolowaną. Koniec tego pręta umieszczono w piecu o temperaturze  $800^{\circ}\text{C}$ . Obliczyć temperaturę w odległości  $0,8\text{ m}$  od gorącego końca pręta po  $1\text{ godzinie}$  ogrzewania w następujących przypadkach:

- pręt jest bardzo długi, a temperatura jego gorącego końca wynosi  $800^{\circ}\text{C}$  (brak oporu wnikania ciepła do powierzchni końcówki pręta),
- temperatura gorącego końca pręta wynosi jak wyżej, ale pręt ma długość  $0,8\text{ m}$ ,
- pręt jest bardzo długi, a współczynnik wnikania ciepła do końcówki pręta wynosi  $240\text{ W/(m}^2\text{K)}$ .

Obliczenia przeprowadzić dla początkowej temperatury pręta  $20^{\circ}\text{C}$ . Przyjąć dla miedzi:  $k = 385 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $c = 400 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $\rho = 8930 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

W s k a z ó w k a: Nieskończenie długi pręt o izolowanych bokach należy traktować jako ciało półnieskończone, natomiast pręt o skończonej długości i izolowanych bokach – jako połówkę płyty nieskończonej.

O d p o w i e d ź: a)  $306^{\circ}\text{C}$ , b)  $550^{\circ}\text{C}$ , c)  $87,3^{\circ}\text{C}$ .

#### ZADANIE 2.6

Aluminiową kulę o średnicy 6 cm i temperaturze  $300^{\circ}\text{C}$  wrzucono do dużej objętości oleju o temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$ . Przyjmując, że współczynnik wnikania ciepła od kuli do oleju wynosi  $1100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , obliczyć temperaturę w środku kuli po upływie 20 sekund od chwili wrzucenia. Porównać otrzymaną wartość z wynikiem uzyskanym przy założeniu braku oporu przewodzenia w kuli. Przyjąć dla aluminium:  $k = 201 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $c = 686 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

O d p o w i e d ź:  $218,8^{\circ}\text{C}$ .

$214,6^{\circ}\text{C}$  (przy braku oporu przewodzenia).

#### ZADANIE 2.7

Puszkę konserwy o temperaturze początkowej  $20^{\circ}\text{C}$  pasteryzuje się przy użyciu pary wodnej nasyconej o ciśnieniu  $0,143 \text{ MPa}$ . Średnica puszki wynosi 100 mm, a wysokość 60 mm. Obliczyć temperaturę w środku geometrycznym puszki po 1 godzinie pasteryzacji. Przyjąć, że temperatura jej powierzchni jest równa temperaturze nasycenia pary, a współczynnik dyfuzyjności cieplnej dla zawartości puszki wynosi  $1,56 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Opór cieplny opakowania (blachy) zaniedbać.

O d p o w i e d ź:  $97,8^{\circ}\text{C}$ .

### 6.3. WNIKANIE I PROMIENIOWANIE CIEPŁA

Ilość ciepła w jednostce czasu, przechodzącego od ściany do płynu (lub odwrotnie), jest określona przez prawo Newtona (wzór (3.1)), gdzie  $\Delta T_w$  jest zdefiniowane wzorem (3.2), przy czym:

$\dot{Q}$  – natężenie przepływu ciepła, W,

$T_w$  – temperatura ściany,  $^{\circ}\text{C}$ ,

$T$  – temperatura płynu w miejscu odpowiednio odległym od ściany; jest to tzw. temperatura rdzenia płynu,  $^{\circ}\text{C}$ ,

$h$  – współczynnik wnikania ciepła,  $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ,

$A$  – pole powierzchni wnikania ciepła (ściany),  $\text{m}^2$ .

Wartości współczynników wnikania ciepła są na ogół zależne od temperatury płynu. W praktyce oblicza się współczynniki wnikania ciepła dla całego aparatu (a nie lokalne, zdefiniowane wzorem (3.1)). Ponieważ temperatury płynów są na ogół

zmienne między wlotem a wylotem z aparatu, wartości współczynników wnikania ciepła określa się dla temperatur średnich w całym aparacie bądź w jego umownej części.

Wartości współczynników wnikania ciepła są na ogół niemożliwe do teoretycznego określenia; opracowano zatem cały szereg wzorów empirycznych. Wzory te są słuszne tylko dla tych warunków wnikania ciepła, dla których je opracowano, i są najczęściej podawane w postaci zależności między wielkościami bezwymiarowymi. Współczynnik wnikania ciepła występuje w liczbie Nusselta, charakteryzującej stosunek oporu cieplnego przewodzenia ciepła przez płyn do oporu wnikania ciepła i zdefiniowanej zależnością (3.3).

W tej definicji  $L$  oznacza charakterystyczny wymiar liniowy, a  $k$  – współczynnik przewodzenia ciepła płynu. Wszystkie właściwości fizyczne czynnika, od (do) którego wnika ciepło (tj.  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c$  i  $k$ ), należy określać dla średniej temperatury warstwy przyściennej, tj. dla temperatury  $0,5 \cdot (T + T_w)$ . W obliczeniach uproszczonych można określać te własności dla temperatury czynnika  $T$ .

Tabela 3.1

Zakresy wartości współczynników wnikania ciepła w typowych przypadkach

Rodzaj procesu	$h$ [W/(m <sup>2</sup> K)]
Ogrzewanie lub chłodzenie powietrza	3÷100
Ogrzewanie lub chłodzenie olejów	60÷1600
Ogrzewanie lub chłodzenie wody	300÷10 000
Skraplanie par organicznych	1000÷2000
Skraplanie pary wodnej (warstewkowe)	6000÷15 000
Wrzenie wody (pęcherzykowe)	1500÷25 000

Warunki, w jakich odbywa się wnikanie ciepła, można najogólniej podzielić na dwa rodzaje: z wymuszonym i niewymuszonym (swobodnym) przepływem płynu. Przepływ swobodny występuje przy konwekcji naturalnej, spływie cieczy oraz przy skraplaniu par i wrzeniu cieczy. W tabeli 3.1 przedstawiono zakresy wartości współczynników wnikania ciepła dla najczęstszych przypadków. Dla ogrzewania i chłodzenia wartości niższe dotyczą konwekcji naturalnej.

Promieniowanie cieplne jest odrębnym rodzajem ruchu ciepła, mającym szczególne znaczenie w wysokich temperaturach.

### 6.3.1. Wnikanie ciepła przy wymuszonym ruchu czynnika

Przy wymuszonym, silnie burzliwym przepływie płynu o małym współczynniku lepkości, w długiej rurze o średnicy  $d$ , współczynnik wnikania ciepła oblicza się według wzoru Mc Adamsa (3.4), gdzie  $Re$  jest liczbą Reynoldsa charakteryzującą



warunki hydrodynamiczne przepływu (wzór (3.5)), zaś  $Pr$  – liczbą Prandtla charakteryzującą właściwości fizyczne płynu (wzór (3.6)). Wymiarem liniowym w  $Nu$  jest średnica rury. Wzór jest słuszny dla  $Re > 10\,000$ ,  $l/d > 50$  ( $l$  – długość rury) oraz  $\mu < 2 \cdot 10^{-3}$  kg/(m·s). Dla cieczy, zwłaszcza o dużych współczynnikach lepkości, dokładniejsze wyniki daje wzór Siedera i Tate'a (3.7), który uwzględnia wpływ kierunku ruchu ciepła na współczynnik wnikania. W tym wzorze  $\mu_w$  jest współczynnikiem lepkości płynu w temperaturze ściany.

Dla przewodów krótkich ( $l/d < 50$ ) należy współczynnik wnikania ciepła obliczać według wzorów (3.4) lub (3.7), a otrzymany wynik pomnożyć przez poprawkę  $\varepsilon_l$  określoną wzorem (3.8).

Dla przewodów niekołowych należy jako charakterystyczny wymiar liniowy (w liczbach  $Re$  i  $Nu$ ) podstawić średnicę hydrauliczną przewodu. Przy przepływie przez wężownicę współczynnik wnikania ciepła oblicza się jak dla rur prostych, a otrzymany wynik mnoży przez poprawkę  $\varepsilon_{coil}$  określoną wzorem (3.9), gdzie  $D_{coil}$  jest średnicą zwojów wężownicy.

Przy przepływie laminarnym obowiązuje wzór (3.10). Wzór jest słuszny dla  $Re \cdot Pr \cdot d/l > 13$ . Przy znacznych różnicach temperatur między czynnikiem a ścianą w przepływie laminarnym, duże lub nawet decydujące znaczenie w procesie wnikania ciepła może mieć konwekcja naturalna. Współczynnik wnikania należy wtedy obliczać według wzoru odpowiedniego dla dominującego mechanizmu ruchu ciepła.

Przy przepływie płynu przez przestrzeń międzyrurową wymiennika ciepła, przy istniejących w niej przegrodach kierujących czynnik prostopadle do rurek (rys. 3.1), współczynnik wnikania ciepła oblicza się według wzoru (3.11). Wzór jest słuszny dla  $Re_{max} > 2000$  oraz dla co najmniej 10 rzędów rur ułożonych w szachownicę ( $A = 0,33$ ) lub szeregowo ( $A = 0,26$ ). Wymiarem liniowym w  $Re_{max}$  i  $Nu$  jest średnica zewnętrzna rur, a za prędkość przepływu płynu w  $Re_{max}$  należy podstawić prędkość maksymalną (w szczelinach między rurkami).

Często w celu zwiększenia powierzchni wymiany ciepła zewnętrzną powierzchnię rur zaopatruje się w żebra (rys. 3.3). Przy wnikaniu ciepła od (do) powierzchni ożebrowanej można stosować wzór (3.12). W celu określenia  $Re_{max}$  należy wyznaczyć maksymalną prędkość przepływu płynu (powietrza) w szczelinach między rurkami ożebrowanymi; wymiarem liniowym w  $Nu$  i  $Re_{max}$  jest wielkość  $z_p$  definiowana wzorem (3.13), gdzie  $A_i$  jest powierzchnią przenoszenia ciepła przypadającą na jedno żebro. Wzór (3.12) obowiązuje w szerokim zakresie liczb Reynoldsa i dotyczy wartości współczynnika wnikania ciepła odniesionej do powierzchni ożebrowanej ( $h$ ). W celu otrzymania wartości współczynnika odniesionego do powierzchni rury  $h_\varphi$  należy pomnożyć wartość  $h$  przez tzw. współczynnik ożebrowania  $\varphi$ , będący stosunkiem pola powierzchni ożebrowanej do pola powierzchni zewnętrznej rury.

Oprócz wnikania ciepła w rurach i przestrzeniach międzyrurowych duże znaczenie ma wnikanie ciepła w mieszalnikach. Przy ruchu ciepła między cieczą a ścianą mieszalnika dla mieszadeł łopowych obowiązuje wzór (3.14), gdzie  $Re_m$  jest okre-

ślone wzorem (3.15). Wielkość  $Re_m$  jest liczbą Reynoldsa dla mieszania,  $n$  – częstością obrotów mieszadła,  $d_m$  – średnicą mieszadła; wymiarem liniowym w  $Nu$  jest średnica mieszalnika. Dla różnych typów mieszadeł postać wzoru (3.14) i wykładniki potęg są takie same, natomiast różne są wartości stałej  $A$ . Dla mieszadeł łapowych  $A = 0,37$ . Wzór obowiązuje dla zakresu  $Re_m$  od 286 do 3 150 000.

Dla ruchu ciepła między cieczą w mieszalniku a wewnętrzną węzownicą o poziomych zwojach współczynnik wnikania ciepła oblicza się według wzoru (3.16). Wzór obowiązuje dla mieszadeł łapowych, a zakres jego stosowalności ( $Re_m$ ) jest identyczny jak dla (3.14).

### 6.3.2. Wnikanie ciepła przy konwekcji naturalnej

Tabela 3.2

Wartości stałych  $C$  i  $i$  dla konwekcji naturalnej

Gr·Pr	$C$	$i$
$<10^{-3}$ (przewodzenie)	0,45	0
$10^{-3} \div 500$ (ruch laminarny)	1,18	1/8
$500 \div 2 \cdot 10^7$ (ruch przejściowy)	0,54	1/4
$>2 \cdot 10^7$ (ruch burzliwy)	0,135	1/3

Konwekcja naturalna (swobodna) występuje w wyniku przemieszczania się płynu wskutek różnic jego gęstości w warstwie przyściennej. Różnice gęstości wynikają przy tym z różnic temperatur ściany i płynu ( $\Delta T_w$ ). W zależnościach empirycznych dla konwekcji naturalnej zamiast  $Re$  występuje liczba Grashofa  $Gr$ , będąca miarą stosunku siły wyporu powodującej ruch czynnika do siły lepkości i zdefiniowana wzorem (3.17), przy czym  $\beta$  jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej płynu [ $K^{-1}$ ]. Współczynniki wnikania ciepła są określane na podstawie zależności ogólnej (3.18) (dla przestrzeni nieograniczonej). Wartości  $C$  oraz  $i$  zależą od wartości iloczynu  $Gr \cdot Pr$ ; przedstawiono je w tabeli 3.2.

Charakterystyczny wymiar liniowy  $L$  (występujący w  $Nu$  i  $Gr$ ) zależy od kształtu oraz orientacji powierzchni wymiany ciepła. Dla rur poziomych  $L$  jest średnicą rury, a dla rur i ścian pionowych – wysokością.

### 6.3.3. Wnikanie ciepła przy zmianie stanu skupienia

Gdy para nie zawierająca obojętnych gazów skrapla się na powierzchni ściany, to współczynnik wnikania ciepła oblicza się według teoretycznej zależności wypracowanej przez Nusselta. Dla najczęściej występującego warstewkowego, laminarnego ( $Re_f < 1600$ ) spływu kropli po zewnętrznej powierzchni rur obowiązuje wzór (3.19).

Zastępcza liczba Nusselta  $Nu_z$  oparta jest na zastępczym wymiarze liniowym  $\vartheta_z$  dla warstwowego spływu cieczy. Wielkość  $Nu_z$  jest określona wzorem (3.20).

Właściwości fizyczne ( $\mu$ ,  $\rho$ ,  $k$ ) dotyczą skroplin (a nie pary), ponieważ skropliny, kontaktując się ze ścianą, przekazują jej ciepło. Liczba Reynoldsa dla spływu warstwowego  $Re_l$  jest wielkością zmienną dla danej rury; w zależności (3.19) występuje jej maksymalna wartość, która dla rur pionowych odnosi się do natężenia przepływu skroplin w dolnym przekroju rur, a dla rury poziomej dotyczy spodu rury.

Bazując na definicji liczby Reynoldsa dla spływu warstwowego oraz uwzględniając, że natężenie przepływu skroplin jest określone wzorem (3.21), można obliczyć maksymalną wartość liczby Reynoldsa. Dla rur pionowych jest ona dana wzorem (3.22), zaś dla rur poziomych  $Re_{l,max}$  – wzorem (3.23). W tych wzorach:

$\Delta T_w$  – różnica między temperaturą skraplania a temperaturą ściany rury, K,

$r$  – ciepło skraplania (parowania), J/kg,

$H$  – wysokość rur, m,

$d$  – średnica zewnętrzna rur, m.

Podstawiając zależności (3.22) lub (3.23) do (3.19), otrzymuje się wzór służący do bezpośredniego obliczania współczynnika wnikania ciepła o postaci (3.24).

Dla rur pionowych  $C = 1,13$ , dla pojedynczej rury poziomej  $C = 0,725$ , natomiast dla  $N$  rur poziomych umieszczonych jedna nad drugą  $C = 0,725/N^{1/4}$ . Wymiarem liniowym  $L$  jest dla rur pionowych ich wysokość  $H$ , a dla rury poziomej średnica zewnętrzna  $d$ .

Dla wrzenia cieczy nie istnieje ogólnie przyjęty, uogólniony wzór do obliczeń współczynników wnikania ciepła. Dla najczęściej występującego i najbardziej efektywnego zakresu wrzenia, tzw. pęcherzykowego, współczynniki wnikania ciepła oblicza się według wzorów typu (3.25), w którym:

$P$  – ciśnienie, Pa,

$\Delta T_w$  – różnica między temperaturą ściany a temperaturą wrzenia cieczy, K,

$A, B, C$  – stałe,

$\Phi$  – stała dla danej substancji.

Przykładowo dla wrzenia w dużej objętości  $C = 0,0326$ ,  $A = 0,58$ ,  $B = 2,33$ . Wielkość  $\Phi$  w zależności (3.25) dla wody jest równa jedności, dla innych substancji  $\Phi$  oblicza się według wzorów podanych w rozdziale 5.7.

Wrzenie pęcherzykowe zachodzi tylko w pewnych zakresach różnic temperatur  $\Delta T_w$  i obciążeń cieplnych (gęstości strumieni cieplnych)  $q = \dot{Q}/A$ . Dla wody zakresy te wynoszą dla  $\Delta T_w$ : od 5 do 25 K, dla  $q$ : od 5800 do 1 160 000 W/m<sup>2</sup>.

### 6.3.4. Promieniowanie ciepłe

#### 6.3.4.1. Zdolność pochłaniania i zdolność emisji

Zdolność pochłaniania (absorpcyjność) energii promieniowania przez ciało  $\alpha$  jest to stosunek pochłoniętej energii promieniowania do energii padającej na ciało. Zdol-

ność pochłaniania ciała zależy od jego temperatury oraz od długości fali padającego promieniowania.

Zdolność emisji (emisyjność)  $\epsilon$  jest to stosunek natężenia promieniowania danego ciała do natężenia promieniowania ciała doskonale czarnego w tej samej temperaturze.

Ciało doskonale czarne to ciało modelowe, które całkowicie pochłania padające na nie promieniowanie.

Prawo Kirchhoffa (3.26) przedstawia związek między zdolnością pochłaniania i emisyjnością ciała dla danej długości fali  $\lambda$  i w tej samej temperaturze źródła promieniowania i ciała.

Dla ciał rzeczywistych natężenie promieniowania przy danej długości fali  $E_\lambda$  jest mniejsze niż dla ciała doskonale czarnego  $E_{0\lambda}$ . Jeżeli stosunek  $E_\lambda/E_{0\lambda}$  jest stały, to ciało nazywamy (doskonale) szarym. Większość ciał spotykanych w technice ma cechy ciała szarego.

#### 6.3.4.2. Zależności dla ciał szarych

Gdy powierzchnia większa (2) jest zamknięta wokół mniejszej (1) o wyższej temperaturze, wtedy ilość ciepła przekazywana przez promieniowanie (od (1) do (2)) jest określona zależnością Stefana–Boltzmana (3.27), przy czym  $\epsilon_z$  jest określone wzorem (3.28).

Poszczególne symbole oznaczają:

$T_1, T_2$  – bezwzględne temperatury powierzchni (1) i (2), K,

$C_0$  – stała promieniowania ( $= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ ),

$\epsilon_z$  – zastępcza zdolność emisji,

$\epsilon_1, \epsilon_2$  – emisyjność (zdolność emisji) powierzchni (1) i (2),

$A_1, A_2$  – odpowiednie pola powierzchni,  $\text{m}^2$ .

Gdy  $A_2 \rightarrow \infty$  (promieniowanie do otoczenia), to  $\epsilon_z = \epsilon_1$ . Wzór (3.27) obowiązuje również dla przypadku, gdy ciepło przenoszone jest w wyniku promieniowania między dwiema równoległymi płytami, bez rozchodzenia się ciepła poza układ. Wtedy  $A_1 = A_2 \equiv A$ .

Wartości emisyjności dla kilku rodzajów powierzchni przedstawiono w tabeli 3.3.

Tabela 3.3

Przykładowe wartości emisyjności dla ciał szarych

Rodzaj powierzchni	$\epsilon$
Ciało doskonale czarne	1
Sadza	0,95
Cegła, stal	$\approx 0,8$
Srebro polerowane	0,02÷0,03
Ciało doskonale białe	0

Ilość ciepła przekazywaną przez promieniowanie można też wyrazić równaniem analogicznym do prawa Newtona. Zastępczy współczynnik promieniowania wynika z porównania zależności (3.1) w postaci scałkowanej i (3.27) dla  $A_1 \equiv A$ . Otrzymuje się wzór (3.29).

#### 6.3.4.3. Promieniowanie słoneczne

Należy pamiętać o istotnym ograniczeniu równości zdolności pochłaniania i emisyjności, chociaż jest ona spełniona w wielu przypadkach. To ograniczenie dotyczy przypadku, gdy ciało nie spełnia warunków ciała szarego, a temperatury ciała i źródła promieniowania są znacząco różne. Wtedy zdolności pochłaniania i emisji nie są równe, a różnica między nimi jest wykorzystywana m.in. w kolektorach słonecznych. Wartości współczynników  $\alpha$  i  $\epsilon$  dla różnych powierzchni przedstawiono w tabeli 3.4.

Całkowita energia słoneczna padająca na jednostkę powierzchni Ziemi  $q_{solar}$  składa się z energii bezpośredniego promieniowania  $q_D$  oraz z energii promieniowania rozproszonego  $q_r$ . To drugie jest związane z oddziaływaniami atmosfery ziemskiej i powoduje ogrzewanie Ziemi również przy całkowitym zachmurzeniu. Wielkość członu związanego z energią bezpośrednią jest zależna od orientacji powierzchni względem kierunku padania promieni słonecznych. Zatem obowiązuje zależność (3.30), gdzie  $\theta$  jest kątem zawartym między kierunkiem padania promieni słonecznych a kierunkiem prostopadłym do powierzchni ciała.

Tabela 3.4

Wartości absorpcyjności i emisyjności dla różnych powierzchni

Materiał powierzchni	Absorpcyjność $\alpha$	Emisyjność $\epsilon$
Aluminium polerowane	0,09	0,03
Stal nierdzewna matowa	0,50	0,21
Czarny chrom	0,92	0,08
Beton	0,60	0,88
Asfalt	0,90	0,90
Biała farba	0,14	0,93
Czarna farba	0,97	0,97
Śnieg	0,28	0,97

Składniki atmosfery ziemskiej pochłaniają, ale również emitują promieniowanie. Aby uwzględnić promieniowanie atmosfery w bilansie cieplnym, wprowadzono pojęcie efektywnej temperatury atmosfery  $T_{sky}$ . Jest to fikcyjna temperatura, którą należy używać w obliczeniach, odpowiadająca równoważnemu efektowi promieniowania ciała doskonale czarnego. Wartość tej temperatury wynosi od 230 K dla pogodnego nieba do 285 K dla całkowitego zachmurzenia.

Zatem strumień ciepła netto przejmowany przez powierzchnię dany jest wzorem (3.31). Pierwszy człon tego wzoru wynika z promieniowania słonecznego, drugi zaś z promieniowania atmosfery. Drugi człon może mieć znak dodatni lub ujemny w zależności od relacji między temperaturą powierzchni a efektywną temperaturą atmosfery. W związku z tym należy odpowiednio dobierać materiał powierzchni poddawanej działaniu promieni słonecznych. Jeżeli tą powierzchnią jest kolektor słoneczny, to materiał powinien mieć wysoki współczynnik absorpcji  $\alpha$  i niski współczynnik emisji  $\epsilon$ . Jeżeli natomiast powierzchnia dotyczy np. zbiornika paliwa lub samochodu-chłodni, to materiał powierzchni powinien się charakteryzować niską wartością  $\alpha$  i wysoką wartością  $\epsilon$ .

### PRZYKŁAD 3.1

Woda przepływa przez długą rurkę o średnicy wewnętrznej  $d = 16$  mm z prędkością  $u = 0,475$  m/s. Obliczyć współczynnik wnikania ciepła w następujących przypadkach:

- średnia temperatura wewnętrznej ściany rurki wynosi  $55^\circ\text{C}$ , a średnia temperatura wody  $25^\circ\text{C}$ ,
- średnia temperatura wewnętrznej ściany rurki wynosi  $25^\circ\text{C}$ , a średnia temperatura wody  $55^\circ\text{C}$ .

### PRZYKŁAD 3.2

Rurą o średnicy wewnętrznej 50 mm i długości 0,5 m przepływa gorące powietrze w ilości 0,0355 kg/s. Temperatura wewnętrznej ściany rury jest stała i wynosi  $114^\circ\text{C}$ . O ile obniży się temperatura powietrza podczas przepływu, jeżeli na wlocie do rury temperatura wynosi  $126^\circ\text{C}$ .

### PRZYKŁAD 3.3

Obliczyć współczynnik wnikania ciepła dla benzyny ochładzanej w ilości 20 kg/s w przestrzeni międzyrurowej wymiennika ciepła. Średnia temperatura benzyny wynosi  $40^\circ\text{C}$ . Rurki w ilości 110, o średnicy zewnętrznej 38 mm, są ułożone w układzie heksagonalnym co 50 mm. W przestrzeni międzyrurowej zainstalowano przegrody segmentowe co 0,3 m. Właściwości fizyczne benzyny w temperaturze  $40^\circ\text{C}$  są następujące:  $c = 1840$  J/(kg·K),  $k = 0,129$  W/(m·K),  $\mu = 0,333 \cdot 10^{-3}$  kg(m·s).

### PRZYKŁAD 3.4

Chłodnica powietrzna zbudowana jest z rur ożebrowanych o długości 1 m, w których płynie gorąca ciecz o średniej temperaturze  $70^\circ\text{C}$ . Powietrze w ilości  $18\,700$  m<sup>3</sup>/h, o średniej temperaturze  $40^\circ\text{C}$ , przepływa prostopadle do pęku rur ułożonych w szachownicę, przy czym w jednym rzędzie znajduje się 16 rur. Średnica żeber, równa odległości między osiami rur w rzędzie, wynosi 60 mm, zewnętrzna

średnica rur – 30 mm, odległość pomiędzy osiami kolejnych żeber – 10 mm, a ich grubość – 1 mm. Obliczyć współczynnik wnikania ciepła od powierzchni ożebrowanej do powietrza.

### PRZYKŁAD 3.5

Zbiornik cylindryczny (mieszalnik) o średnicy wewnętrznej  $D = 300$  mm zaopatrzone jest w mieszadło łopowe o średnicy 100 mm, płaszcz grzejny oraz węzownicę. Średnica zwojów węzownicy wynosi  $D_{coil} = 250$  mm, a średnica wewnętrzna rury węzownicy  $d = 11$  mm. Dla częstotliwości obrotów mieszadła  $n = 10$  obr./s obliczyć:

- współczynnik wnikania ciepła od płaszcza do wody zawartej w zbiorniku, ogrzewającej się od  $30^{\circ}\text{C}$  do  $60^{\circ}\text{C}$  parą nasyconą o ciśnieniu  $1,013 \cdot 10^5$  Pa,
- współczynnik wnikania ciepła od wody w zbiorniku, chłodzącej się od  $60^{\circ}\text{C}$  do  $40^{\circ}\text{C}$ , do powierzchni węzownicy, w której płynie woda o średniej temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$ ,
- współczynnik wnikania ciepła od ściany węzownicy do wody przepływającej przez węzownicę w ilości  $0,30$  m<sup>3</sup>/h o temperaturze średniej  $20^{\circ}\text{C}$ .

### PRZYKŁAD 3.6

Przez płaszcz wodny zbiornika o średnicy zewnętrznej  $d = 900$  mm przepływa woda chłodząca o średniej temperaturze  $25^{\circ}\text{C}$  w ilości  $4,0$  m<sup>3</sup>/h. Średnica wewnętrzna płaszcza wynosi 1000 mm, a wysokość 1100 mm. Przyjmując, że temperatura zewnętrznej ściany zbiornika wynosi  $65^{\circ}\text{C}$ , określić współczynnik wnikania ciepła od ściany zbiornika do wody chłodzącej.

### PRZYKŁAD 3.7

W pionowym płaszczowo-rurkowym wymienniku ciepła, składającym się z  $n = 500$  rur o średnicy zewnętrznej  $d = 89$  mm, czynnikiem grzewczym jest nasycona sucha para wodna o temperaturze  $130^{\circ}\text{C}$ , przepływająca w ilości  $8$  kg/s i ulegająca całkowitemu skropleniu. Czynnik ogrzewany o średniej temperaturze  $110^{\circ}\text{C}$  płynie w rurkach. Obliczyć współczynnik wnikania ciepła dla kondensującej pary.

### PRZYKŁAD 3.8

W kotle o powierzchni grzejnej  $2$  m<sup>2</sup> wrze woda pod ciśnieniem  $0,143$  MPa. Obliczyć, jaka musi być temperatura wewnętrznej ściany kotła, aby szybkość odparowania wody wynosiła  $0,04$  kg/s. Ile wyniesie wtedy współczynnik wnikania ciepła?

### PRZYKŁAD 3.9

Przez rurociąg o średnicy zewnętrznej  $d = 102$  mm i długości  $l = 20$  m przepływa nasycona para wodna o ciśnieniu  $1,12$  MPa. Przyjmując, że temperatura otoczenia wynosi  $T = 15^{\circ}\text{C}$ , obliczyć straty ciepłne do otoczenia w następujących przypadkach:

- dla nieizolowanego rurociągu (przyjąć emisyjność ściany 0,8),
- przy nałożonej 15 mm warstwie izolacji z waty szklanej o współczynniku przewodzenia ciepła  $0,06 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  i emisyjności 0,8,
- przy zastosowaniu ekranu z cienkiej blachy o emisyjności 0,5, zwiniętej w rulon o średnicy  $d_e = 150 \text{ mm}$ .

### PRZYKŁAD 3.10

Natężenie bezpośredniego promieniowania słonecznego wynosi  $500 \text{ W}/\text{m}^2$ , zaś natężenie promieniowania rozproszonego wynosi  $250 \text{ W}/\text{m}^2$ . Powierzchnia ciała jest usytuowana pod kątem  $30^\circ$  w stosunku do promieni słonecznych. Temperatura powierzchni ciała ustaliła się na poziomie  $40^\circ\text{C}$ . Zakładając efektywną temperaturę atmosfery 240 K, obliczyć ilość ciepła netto przejmowanego przez  $1 \text{ m}^2$  powierzchni ciała. Rozważyć następujące kombinacje współczynników pochłaniania i emisji:

- $\alpha = 0,85$ ;  $\varepsilon = 0,85$  (szara powierzchnia absorbująca),
- $\alpha = 0,85$ ;  $\varepsilon = 0,20$  (selektywna powierzchnia absorbująca),
- $\alpha = 0,30$ ;  $\varepsilon = 0,85$  (selektywna powierzchnia odbijająca).

### PRZYKŁAD 3.11

Przez rurę przepływa gorący gaz. Termopara umieszczona wewnątrz rury wskazuje temperaturę  $T = 280^\circ\text{C}$ . Druga termopara mierzy temperaturę ściany rury; jej wskazania to  $T_w = 350^\circ\text{C}$ . Obliczyć:

- rzeczywistą temperaturę gazu w rurze jeżeli emisyjność czujnika termopary wynosi  $\varepsilon = 0,65$ ,
- jaką temperaturę wskazywałaby pierwsza termopara, gdyby emisyjność czujnika termopary wynosiła  $\varepsilon = 0,2$ .

W obu przypadkach przyjąć wartość współczynnika wnikania ciepła między czujnikiem pierwszej termopary a przepływającym gazem  $h = 60 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

### ZADANIE 3.1

Obliczyć współczynnik wnikania ciepła dla warunków jak w przykładzie 3.3, jeżeli w przestrzeni międzyrurowej nie ma przegród segmentowych, tj. zachodzi przepływ równoległy do rur. Średnicę wewnętrzną płaszczka przyjąć jako 530 mm. **O d p o w i e d ź:**  $h = 498 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

### ZADANIE 3.2

Dla warunków przykładu 3.5a obliczyć współczynnik wnikania ciepła przy ogrzewaniu zawartości zbiornika parą przy nieobrcającym się mieszadle. Przyjąć wysokość płaszczka równą 0,3 m.

**O d p o w i e d ź:** początek ogrzewania:  $h = 1530 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ,  
koniec ogrzewania:  $h = 1470 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .



## ZADANIE 3.3

Przez pionowy przewód stalowy o średnicy zewnętrznej 200 mm i długości 10 m przepływa para wodna o temperaturze 150°C w ilości 2,5 kg/s. Wskutek strat ciepłych do otoczenia para ta ulega częściowej kondensacji. Obliczyć stopień jej zawilgocenia na końcu przewodu, przy założeniu, że na wlocie jest ona nasycona i sucha. Temperatura otoczenia wynosi 10°C, emisyjność powierzchni zewnętrznej przewodu przyjąć jako 0,8. Założyć, że temperatura zewnętrzna ściany rury jest równa temperaturze skraplania pary.

Odpowiedź: zawilgocenie pary wyniesie 2,7%.

## ZADANIE 3.4

W wymienniku ciepła o przekroju kwadratowym na zewnątrz rur skrapla się para. Rury o średnicy zewnętrznej 57 mm są ułożone przemienne (w szachownicę) w 12 rzędach po 12 sztuk. Na podstawie analizy współczynników wnikania ciepła podać korzystniejsze ustawienie wymiennika (pionowe czy poziome) dla długości rur: a) 1 m, b) 2 m, c) 3 m. Przyjąć laminarny spływ kropli.

Odpowiedź: Oznaczając  $\varepsilon = h_{\text{vertical}}/h_{\text{horizontal}}$  otrzymuje się:

- a)  $\varepsilon = 1,19$ ,
- b)  $\varepsilon = 1,00$ ,
- c)  $\varepsilon = 0,905$ .

Korzystniejsze ustawienia są zatem następujące: a) pionowe, b) dowolne, c) poziome.

## ZADANIE 3.5

W zbiorniku z płaszczem o powierzchni grzejnej 1,5 m<sup>2</sup> odparowuje (wrze) rozcieńczony wodny roztwór substancji nielotnej pod ciśnieniem atmosferycznym (1,013·10<sup>5</sup> Pa). Ze względu na niewielkie zmiany stężenia roztworu można przyjąć stałość jego temperatury wrzenia i właściwości fizycznych. Temperatura wrzenia roztworu wynosi 105°C, a współczynnik  $\Phi$  we wzorze (3.25) jest równy 0,95. Czynnikiem grzewczym jest nasycona para wodna o temperaturze 126°C. Grubość ściany zbiornika wynosi 5 mm, a współczynnik przewodzenia ciepła tej ściany – 40 W/(m·K). Przyjmując, że współczynnik wnikania ciepła dla pary wynosi 6700 W/(m<sup>2</sup>K), obliczyć czas odparowywania roztworu od początkowej ilości 200 kg do końcowej 180 kg. Przyjąć ciepło parowania roztworu jak dla czystej wody.

Odpowiedź: 721 sekund.

## ZADANIE 3.6

Pomiędzy dwie równoległe ściany o różnych temperaturach wstawiono cienką płytę metalową (ekran). Wymiary ścian i ekranu są identyczne. Obliczyć, ile razy zmniejszy się ilość ciepła przenieszonego między ścianami w wyniku promieniowania przy zainstalowanym ekranie w stosunku do ilości przekazy-

wanej bezpośrednio (bez ekranu). Przyjąć równość emisyjności ścian i ekranu, równość temperatur obu stron ekranu oraz zaniedbać ruch ciepła w wyniku konwekcji naturalnej.

Odpowiedź: 2 razy.

### ZADANIE 3.7

Do termosu o wysokości 200 mm i średnicy wewnętrznej 80 mm o podwójnych ściankach, odległych o 8 mm, wiano gorącą wodę. Ścianki termosu są posrebrzone od strony próżni (wewnątrz); ich emisyjność wynosi 0,15. Przyjmując, że temperatura otoczenia wynosi 25°C, obliczyć spadek temperatury wody po upływie 1 godziny. W związku z próżnią między ścianami jedynym mechanizmem przepływu ciepła jest promieniowanie.

Odpowiedź: 2,3 K.

## 6.4. PRZENIKANIE CIEPŁA I WYMIENNIKI

### 6.4.1. Przenikanie ciepła

Ruch ciepła między dwiema fazami płynnymi nazywa się przenikaniem ciepła. Równanie przenikania ciepła ma postać (4.1), gdzie:

$U$  – współczynnik przenikania ciepła,  $W/(m^2K)$ ,

$T_1, T_2$  – temperatury płynów, °C,

$A$  – powierzchnia przenikania ciepła (powierzchnia grzejna),  $m^2$ .

W tym rozdziale indeks „1” dotyczy płynu oddającego ciepło (gorącego), zaś indeks „2” płynu przejmującego ciepło (zimnego).

Gdy płyny są oddzielone ścianą płaską, współczynnik przenikania ciepła jest określony zależnością (4.2), gdzie:

$h_1, h_2$  – współczynniki wnikania ciepła,  $W/(m^2K)$ ,

$s_i$  – grubość  $i$ -tej warstwy ściany, m,

$k_i$  – współczynnik przewodzenia ciepła  $i$ -tej warstwy ściany,  $W/(m \cdot K)$ .

Dla jednowarstwowej ściany zanieczyszczonej osadami z obu stron obowiązuje zależność (4.3), gdzie:  $R = (s/k)_{\text{osadu}}$  – opór cieplny osadu,  $m^2K/W$ .

Uśrednione, typowe wartości oporów cieplnych osadów, tworzących się przy przepływie kilku wybranych czynników, podano w tabeli 4.1.

Przy przenikaniu ciepła przez ściany cylindryczne równanie przenikania ciepła ma postać (4.4), gdzie:

$U_L$  – współczynnik przenikania ciepła odniesiony do długości ściany cylindrycznej (rury),  $W/(m \cdot K)$ ,

$L$  – długość ściany (rury), m.

Tabela 4.1

## Opory cieplne osadów

Czynnik	Opór cieplny $R$ [ $m^2K/W$ ]
Woda destylowana	0,0001
Para wodna	0,0001
Woda z chłodni kominowej lub wodociągu	0,0003
Woda rzeczna	0,0011
Ropa naftowa	0,0004÷0,0012
Ciecze organiczne	0,0002
Powietrze	0,0004

Współczynnik  $U_L$  jest określony zależnością (4.5) (por. wzór (2.13)), gdzie:

$d_1, d_2$  – średnice rury odpowiednio po stronie czynnika 1 i 2,

$d_m$  – średnia (logarytmiczna) średnica rury.

Współczynniki przenikania ciepła  $U$  (odniesione do powierzchni) są znacznie częściej używane w obliczeniach; zakresy wartości tych współczynników w różnych przypadkach podano w tabeli 4.2.

Tabela 4.2

## Zakresy wartości współczynników przenikania ciepła

Czynniki wymieniające ciepło	Współczynnik $U$ [ $W/(m^2K)$ ]	
	ruch swobodny	ruch wymuszony
Gaz – gaz	4÷12	10÷40
Gaz – ciecz lub ciecz wrząca	6÷20	10÷60
Gaz – skraplająca się para	6÷20	30÷90
Ciecz organiczna – ciecz organiczna	30÷60	120÷270
Ciecz organiczna – skraplająca się para wodna	60÷170	120÷340
Wrząca ciecz organiczna – skraplająca się para wodna	300÷850	–
Woda – woda	140÷340	800÷1700
Woda – skraplająca się para organiczna	230÷460	340÷1700
Woda – skraplająca się para wodna	300÷1200	800÷4500
Wrząca woda – skraplająca się para wodna	1700÷4500	–

## 6.4.2. Ustalony ruch ciepła w wymiennikach

### 6.4.2.1. Brak przemian fazowych obu czynników

Na rys. 4.1 na przykładzie przeciwprądowego wymiennika ciepła typu „rura w rurze” przedstawiono stosowane oznaczenia. Czynnik oddający ciepło (1) wpływa do wymiennika przekrojem I (gorący koniec wymiennika) w temperaturze  $T_{1in}$ , a opuszcza go przekrojem II (zimny koniec wymiennika) w temperaturze  $T_{1out}$ . Czynnik przejmujący ciepło (2) płynie przeciwprądowo do czynnika (1), tj. dopływa przekrojem II w temperaturze  $T_{2in}$  i po ogrzaniu odpływa przekrojem I w temperaturze  $T_{2out}$ . Wielkości  $\Delta T_I$  i  $\Delta T_{II}$  oznaczają różnice temperatur między czynnikami na obu końcach wymiennika i są określone wzorami (4.6) i (4.7).

Zmienna  $A_x$  na osi odciętych (rys. 4.1) oznacza powierzchnię grzejną wymiennika, traktowaną jako wielkość zmienną, taką że dla przekroju I jest  $A_x = 0$ , a dla przekroju II:  $A_x = A$ , gdzie  $A$  – powierzchnia grzejna całego wymiennika. Wielkość  $A_x$  jest proporcjonalna do zmiennej położenia w wymienniku ciepła typu „rura w rurze”. Lokalna różnica temperatur między czynnikami  $\Delta T = T_1 - T_2$  jest zmienna i zależy od położenia ( $A_x$ ). Gdy  $U = \text{const}$ , zmienność tę wyraża wzór (4.8), gdzie wielkość  $P$  jest określona przez (4.9), przy czym:

$\dot{m}_1, \dot{m}_2$  – masowe natężenia przepływu czynników,

$c_1, c_2$  – średnie ciepła właściwe czynników.

Zależność między temperaturami czynników  $T_1$  i  $T_2$  wynika z bilansu cieplnego i jest dana zależnością (4.10), gdzie wielkość  $R$  określa wzór (4.11).

Średnia różnica temperatur między czynnikami  $\Delta T_m$  jest określona zależnością (4.12). Gdy  $U = \text{const}$ , połączenie zależności (4.12) i (4.8) daje wzór (4.13). Średnia różnica temperatur między czynnikami jest zatem średnią logarymiczną z odpowiednich różnic na końcach wymiennika; w powyższym wzorze indeksy I i II mogą zostać wzajemnie zamienione. W szczególnym przypadku  $P = 0$ ,  $\Delta T = \text{const}$ , czyli  $\Delta T_m = \Delta T_I = \Delta T_{II}$ .

W wyniku przenikania ciepła przez różniczkowy element wymiennika o powierzchni  $dA_x$  powstaje różniczkowa zmiana temperatur obu czynników dana wzorem (4.14). Łącząc zależności (4.1) i (4.14), otrzymuje się dwie równoważne zależności do obliczania powierzchni grzejnej wymiennika. Gdy  $U$  jest zmienne, obowiązuje wzór (4.15), natomiast gdy  $U = \text{const}$ , wzór upraszcza się do postaci (4.16).

### 6.4.2.2. Przemiana fazowa jednego lub obu czynników

Jeżeli jednym z czynników jest kondensująca para lub wrząca ciecz, to temperatura tego czynnika nie zmienia się. Część zależności podanych w rozdziale 4.2.1 w tym przypadku nie obowiązuje. Aktualna jest jednak zależność na średnią różnicę temperatur (4.13) oraz zależność do obliczania powierzchni grzejnej (4.16). Z zależności (4.15) aktualna jest tylko ta, dla której  $dT \neq 0$ .

Gdy oba czynniki w wymienniku mają niezmiennie temperatury, wtedy  $P = 0$ ,  $\Delta T = \text{const}$  i  $U = \text{const}$ , powierzchnię grzejną oblicza się według zależności (4.16), podstawiając  $\Delta T_m = \Delta T$ .

### 6.4.3. Obliczanie powierzchni grzejnej wymienników ciepła

W wymiennikach ciepła ruch czynników często nie jest przeciwny; czynniki przepływają w prądzie skrzyżowanym, w odpowiedniej kombinacji przeciw- i współprądu, czasem zaś we współprądzie. Gdy temperatura jednego z czynników jest niezmienna (na skutek przemiany fazowej), wzajemny kierunek ruchu czynników nie ma wpływu na średnią różnicę temperatur  $\Delta T_m$ ; wielkość tę oblicza się wtedy jak dla przeciwnyprądu.

Gdy żaden z czynników nie ulega przemianie fazowej, a przepływ jest współprądowy (rys. 4.2), wielkości  $\Delta T_I$  i  $T_{II}$  oznaczają (podobnie jak dla przeciwnyprądu) różnice temperatur między czynnikami na obu końcach wymiennika, ale w tym przypadku  $\Delta T_I$  dotyczy warunków wlotowych (*in*), a  $\Delta T_{II}$  – wylotowych (*out*) (dla współprądu gorący i zimny koniec wymiennika nie istnieją). Zamiast wzorów (4.6) i (4.7) dla współprądu obowiązują:  $\Delta T_I = T_{1in} - T_{2in}$ ,  $\Delta T_{II} = T_{1out} - T_{2out}$ . Wielkość  $\Delta T_m$  dla współprądu jest średnią logarytmiczną z wielkości  $\Delta T_I$  i  $\Delta T_{II}$ .

Gdy wzajemny kierunek ruchu czynników jest inny niż współ- lub przeciwnyprądowy,  $\Delta T_m$  oblicza się następująco: wyznacza się różnice temperatur  $\Delta T_I$  i  $\Delta T_{II}$  jak dla przeciwnyprądu, tj. według wzorów (4.6) i (4.7), a następnie oblicza średnią logarytmiczną według zależności (4.13). Jest to wartość odpowiadająca przepływowi przeciwnyprądowemu ( $\Delta T_{m0}$ ). Rzeczywistą średnią różnicę temperatur oblicza się według wzoru (4.17). Wartości poprawek  $Y$  są mniejsze lub równe jedności ( $Y = 1$  dla przeciwnyprądu) i są funkcjami parametrów  $X$  i  $Z$ , które są zdefiniowane zależnościami (4.18) i (4.19).

Na rys. 4.3 przedstawiono funkcję  $Y = f(X, Z)$  dla prądu krzyżowego, tj. dla przypadku, gdy jeden czynnik płynie w rurkach, a drugi prostopadłe do rur; taki przepływ występuje np. gdy rury są krótkie lub w przypadku istnienia przegród segmentowych w przestrzeni międzyrurkowej.

Na rys. 4.4 przedstawiono funkcję  $Y = f(X, Z)$  dla wymiennika o parzystej liczbie biegów w rurkach, co odpowiada kombinacji współprądu z przeciwnyprądem.

Należy zaznaczyć, że z wykresów otrzyma się te same wartości  $Y$ , gdy parametry  $X$  i  $Z$  obliczy się według wzorów:  $X = \Delta T_2 / \Delta T_{\max}$  oraz  $Z = \Delta T_1 / \Delta T_2$ .

Powierzchnię grzejną wymiennika z rurami cienkościennymi oblicza się według wzorów (4.15) lub (4.16), a sumaryczną długość rur wymiennika z zależności (4.20).

Gdy współczynniki wnikania po obu stronach rur są współmierne, przyjmuje się, że powierzchnią grzejną jest średnia (arytmetyczna) z powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej rur, czyli  $A = 0,5 \cdot (A_{\text{external}} + A_{\text{internal}})$ . Gdy współczynniki wnikania są

niewspółmierne, powierzchnię grzejną odnosi się do tej strony rur, z którą styka się czynnik o mniejszym współczynniku wnikania, a więc  $A = A_{external}$  lub  $A = A_{internal}$ .

Dla wymiennika z rurami grubościennymi całkowitą długość rur oblicza się według wzoru (4.4) w postaci scałkowanej, tj. według wzoru (4.21).

Długość poszczególnych rur wynika z podzielenia  $\Sigma L$  przez ogólną ich liczbę. Liczba rur powinna być odpowiednio dobrana do ich długości w celu zapewnienia odpowiednich proporcji geometrycznych płaszcza wymiennika. W celu zachowania tych proporcji, a ponadto odpowiednich prędkości przepływów obu czynników, często stosuje się wymienniki o wielokrotnej drodze przepływu czynnika w rurkach (wielobiegowe).

#### 6.4.4. Nieustalony ruch ciepła

Spośród wielu możliwych przypadków nieustalonego ruchu ciepła na szczególną uwagę zasługuje przeponowe ogrzewanie lub chłodzenie cieczy znajdującej się w zbiorniku za pomocą czynnika o stałej temperaturze. Czynnikiem tym może być np. nasycona para wodna (ogrzewanie) lub otaczające powietrze (chłodzenie).

Ilość ciepła przechodzącą do cieczy zawartej w zbiorniku przez powierzchnię grzejną  $A$  (powierzchnia ścian lub węzownicy) określa wzór (4.22), gdzie:

$T_A$  – temperatura czynnika ogrzewającego (stała w czasie), °C,

$T$  – temperatura cieczy w zbiorniku (zmienna w czasie), °C,

$Q$  – ilość ciepła, J,

$t$  – czas, s.

Zakłada się, że temperatura cieczy w zbiorniku jest zawsze wyrównana w całej objętości. Przejęcie przez ciecz zawartą w zbiorniku różniczkowej ilości ciepła  $dQ$  powoduje różniczkową zmianę temperatury  $dT$  (wzór (4.23)), przy czym  $m$  oznacza masę zawartości zbiornika. Łącząc zależności (4.22) i (4.23), otrzymuje się wzór (4.24) na czas ogrzewania cieczy w zbiorniku od temperatury początkowej  $T_{init}$  do końcowej  $T_{final}$ . Wzór dla przypadku chłodzenia zawartości zbiornika ( $T_A < T$ ) jest identyczny.

#### PRZYKŁAD 4.1

W wymienniku ciepła, wykonanym z rur stalowych o współczynniku przewodzenia ciepła  $k = 46,5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  i grubości 2,5 mm, gorący gaz jest chłodzony wodą płynącą w rurkach. Współczynnik wnikania ciepła dla gazu wynosi  $h_1 = 32 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , a dla wody  $h_2 = 1510 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Ścianę rury można traktować jako płaską. Obliczyć współczynnik przenikania ciepła, gdy powierzchnia rury nie jest zanieczyszczona, oraz jego procentową zmianę w następujących przypadkach:

- 1) gdy rury stalowe zastąpi się miedzianymi ( $k = 385 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ),
- 2) gdy przez zastosowanie przegród segmentowych w przestrzeni międzyrurowej współczynnik wnikania ciepła dla powietrza wzrośnie do wartości  $h_1 = 73 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ,

- 3) gdy przez zwiększenie natężenia przepływu współczynnik wnikania ciepła dla wody wzrośnie do wartości  $h_2 = 2350 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ,
- 4) gdy powierzchnie rur są z obu stron zanieczyszczone osadami o następujących oporach cieplnych: po stronie powietrza  $R_1 = 0,0004 \text{ m}^2\text{K}/\text{W}$ , a po stronie wody  $R_2 = 0,0011 \text{ m}^2\text{K}/\text{W}$ ,
- 5) jak wyżej, ale dla  $h_1 = 73 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  (jak w punkcie 2).

#### PRZYKŁAD 4.2

Przez przestrzeń międzyrurową ciśnieniowego podgrzewacza wody przepływają prostopadle do osi rur gazy spalinowe o temperaturze wlotowej  $T_{1in} = 450^\circ\text{C}$ . Temperatura wody na wylocie wynosi  $T_{2out} = 120^\circ\text{C}$ . Współczynnik wnikania ciepła dla spalin wynosi  $h_1 = 60 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , a dla wody  $h_2 = 800 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Grubość ścian rur stalowych  $s = 6 \text{ mm}$ , zaś współczynnik przewodzenia ciepła stali wynosi  $46,5 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ . Obliczyć maksymalną temperaturę ścian rur:

- a) dla rur nowych (bez osadu),
- b) dla rur zanieczyszczonych od wewnątrz osadem o oporze cieplnym  $R_2 = 0,006 \text{ m}^2\text{K}/\text{W}$ .

#### PRZYKŁAD 4.3

Powietrze, przepływając przez nagrzewnicę, ogrzewa się od temperatury  $T_{2in} = 8^\circ\text{C}$  do  $T_{2out} = 52^\circ\text{C}$ . Czynnikiem grzewczym jest nasycona para wodna o temperaturze  $T_1 = 115^\circ\text{C}$ , skraplająca się wewnątrz rur. Do jakiej temperatury można ogrzać powietrze, jeżeli rury zainstalowane w nagrzewnicy zostaną od zewnątrz ożebrowane? Ile razy trzeba powiększyć wtedy niezbędne natężenie przepływu pary w stosunku do wartości stosowanej przed ożebrowaniem? Pominąć opór cieplny wnikania przy kondensacji pary oraz opory cieplne przewodzenia przez metalowe elementy ścian i żeber. Założyć, że zainstalowanie żeber nie powoduje zmiany współczynnika wnikania ciepła dla gazu. Obliczenia przeprowadzić dla współczynników ożebrowania  $\varphi = 2$ ,  $\varphi = 3$  i  $\varphi = 4$ .

#### PRZYKŁAD 4.4

Należy podgrzać roztwór wodorotlenku sodu w ilości  $\dot{m}_2 = 50\,000 \text{ kg/h}$  od  $T_{2in} = 40^\circ\text{C}$  do  $T_{2out} = 95^\circ\text{C}$  za pomocą wody (pod ciśnieniem) o temperaturze  $T_{1in} = 140^\circ\text{C}$ . Ze względów technologicznych temperatura końcowa wody winna wynosić  $T_{1out} = 120^\circ\text{C}$ . Do realizacji procesu należy zastosować wymiennik sześciobiegowy o  $n_j = 53$  rurkach 25/21 mm w każdym biegu oraz wewnętrznej średnicy płaszcza  $D = 0,7 \text{ m}$ . Przez przestrzeń międzyrurową ma przepływać woda. Obliczyć natężenie przepływu wody oraz długość rur zapewniającą żądane warunki temperaturowe.

Dla średniej temperatury roztworu ( $67,5^\circ\text{C}$ ) jego własności fizyczne są następujące:  $c_2 = 3860 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $\mu_2 = 0,715 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ,  $k_2 = 0,578 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\rho_2 = 1010 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

W obliczeniach uwzględnić opory termiczne zanieczyszczeń: po stronie wody  $R_1 = 0,0001 \text{ m}^2\text{K/W}$ , a po stronie roztworu  $R_2 = 0,0002 \text{ m}^2\text{K/W}$ . Współczynnik przewodzenia ciepła rur stalowych wynosi  $k_s = 46,5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

#### PRZYKŁAD 4.5

W przeciwprądowym wymienniku ciepła ma chłodzić się olej od  $T_{1in} = 110^\circ\text{C}$  do  $T_{1out} = 50^\circ\text{C}$  za pomocą wody o temperaturze początkowej  $T_{2in} = 30^\circ\text{C}$ . Natężenie przepływu oleju wynosi  $\dot{m}_1 = 3500 \text{ kg/h}$ , a natężenie przepływu wody  $\dot{m}_2 = 8000 \text{ kg/h}$ . Dla oleju średnie ciepło właściwe  $c_1 = 2100 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , a współczynnik wnikania ciepła jest zmienny: dla warunków wlotowych ( $110^\circ\text{C}$ ) wynosi on  $h_{1in} = 1100 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , zaś dla wylotowych ( $50^\circ\text{C}$ ) jest  $h_{1out} = 800 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ .

Dla wody współczynnik wnikania ciepła ma wartość w przybliżeniu stałą  $h_2 = 1400 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Opór cieplny ściany z uwzględnieniem zanieczyszczeń wynosi  $\Sigma(s/k_i) = 0,0002 \text{ m}^2\text{K/W}$ . Traktując ściany rur wymiennika jak płaskie, obliczyć niezbędną powierzchnię grzejną wymiennika.

#### PRZYKŁAD 4.6

Do przeciwprądowego wymiennika ciepła o długości 1 m i powierzchni wymiany ciepła  $A = 15 \text{ m}^2$  dopływa produkt naftowy o temperaturze początkowej  $T_{1in} = 90^\circ\text{C}$ , średnim cieple właściwym  $c_1 = 2300 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , w ilości  $\dot{m}_1 = 1,28 \text{ kg/s}$ . Chłodzenie odbywa się za pomocą wody dopływającej w ilości  $\dot{m}_2 = 2,70 \text{ kg/s}$  o temperaturze początkowej  $T_{2in} = 32^\circ\text{C}$ . Zakładając stałą wartość współczynnika przenikania ciepła  $U = 468 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , znaleźć temperatury końcowe oraz rozkład temperatur obu czynników wzdłuż wymiennika. Ściany wymiennika należy traktować jak płaskie.

#### PRZYKŁAD 4.7

Wodny roztwór o temperaturze wlotowej  $T_{2in} = 17^\circ\text{C}$  w ilości 1 kg/s ogrzewa się, przepływając przez wężownicę (rys. 4.6) umieszczoną w zbiorniku z idealnym mieszanym. Przez zbiornik przepływa gorąca woda, której temperatura na wylocie wynosi  $T_1 = 90^\circ\text{C}$ . Powierzchnia grzejna wężownicy wynosi  $A = 2 \text{ m}^2$ , współczynnik przenikania ciepła  $U = 900 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , a ciepło właściwe roztworu  $c_2 = 3900 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ . Obliczyć temperaturę roztworu na wylocie.

#### PRZYKŁAD 4.8

Cylindryczne naczynie blaszane (garnek) o średnicy  $d = 110 \text{ mm}$  napełniono  $m = 1 \text{ kg}$  wody o temperaturze  $T_{init} = 100^\circ\text{C}$ . Obliczyć temperaturę wody po upływie 10 minut w następujących przypadkach:

- zawartość naczynia chłodzi się „na wolnym powietrzu” o temperaturze  $20^\circ\text{C}$ ,
- jak wyżej, ale w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ ,
- zawartość naczynia chłodzi się w dużej objętości wody o temperaturze  $20^\circ\text{C}$ .



Dla wszystkich przypadków przyjąć, że naczynie jest zamknięte, a dno naczynia, pokrywa oraz część górna ścian bocznych (nienapełniona) są doskonale zaizolowane. Ponadto zaniedbać opór termiczny oraz pojemność cieplną ścian naczynia. Przyjąć emisyjność ścian  $\varepsilon = 0,8$ .

#### ZADANIE 4.1

W przeciwprądowym wymienniku ciepła chłodzi się 1500 kg/h oleju od 110°C do 60°C za pomocą wody ogrzewającej się od 15°C do 30°C. Jakie wartości przyjmą temperatury końcowe obu czynników, jeżeli natężenie przepływu wody wzrośnie dwukrotnie, a temperatury początkowe i natężenie przepływu oleju pozostaną bez zmian? Przyjąć, że współczynnik przenikania ciepła wzrośnie przy tym o 20%. Ciepło właściwe oleju wynosi 2090 J/(kg·K).

O d p o w i e d ź:  $T_{1out} = 52,3^\circ\text{C}$ ,  $T_{2out} = 23,6^\circ\text{C}$ .

#### ZADANIE 4.2

W płaszczowo-rurkowym wymienniku ciepła ma być skraplana nasycona para izobutanu o ciśnieniu 0,7 MPa w ilości 10 000 kg/h. Jako czynnik chłodzący stosuje się wodę o temperaturze początkowej 25°C, płynącą w rurkach i ogrzewającą się do 35°C. Zalecane jest, aby prędkość wody w rurkach wynosiła około 0,5 m/s; współczynnik przenikania ciepła wynosi wtedy 930 W/(m<sup>2</sup>K). Obliczyć wymaganą liczbę rur o wymiarach poprzecznych 38/33 mm i długości 2 m oraz liczbę biegów. Temperatura wrzenia izobutanu pod stosowanym ciśnieniem wynosi 52°C, a ciepło parowania 318 000 J/kg.

O d p o w i e d ź: 200 rurek, 4 biegi.

#### ZADANIE 4.3

W przeciwprądowym wymienniku ciepła chłodzi się pewien roztwór od 123°C do 89°C za pomocą innego roztworu ogrzewającego się od 18°C do 52°C. Wskutek zmian technologicznych temperatura początkowa czynnika ogrzewanego spadła do 10°C. Obliczyć temperatury końcowe czynników w nowych warunkach przy założeniu, że współczynnik przenikania ciepła pozostał niezmienny. O ile zmieniła się ilość ciepła przenoszona w wymienniku?

O d p o w i e d ź:  $T_{2out} = 46,6^\circ\text{C}$ ,  $T_{1out} = 86,4^\circ\text{C}$ , ilość ciepła zwiększy się o 7,6%.

#### ZADANIE 4.4

Mieszanina poreaekcyjna jest chłodzona od 88°C do 51°C w wymienniku o krzyżowym przepływie czynników za pomocą wody ogrzewającej się od 8°C do 46°C. Obliczyć końcowe temperatury czynników w przypadku, gdyby ich przepływ był

przeciwprądowy. Założyć niezmiennosc współczynnika przenikania ciepła oraz ciepła właściwych.

Odpowiedź:  $T_{1out} = 49,4^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{2out} = 47,7^{\circ}\text{C}$ .

#### ZADANIE 4.5

W wymienniku ciepła o powierzchni  $10\text{ m}^2$  chłodzi się produkt naftowy w ilości  $6000\text{ kg/h}$  od  $180^{\circ}\text{C}$  do  $80^{\circ}\text{C}$ . Czynnikiem chłodzącym jest woda płynąca w przeciwprądzie w ilości  $7000\text{ kg/h}$  o temperaturze początkowej  $20^{\circ}\text{C}$ . Powierzchnia rurek jest zanieczyszczona od strony wody osadem o współczynniku przewodzenia ciepła  $1,94\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  i grubości  $1\text{ mm}$ . Jakie byłyby końcowe temperatury czynników, gdyby powierzchnia rurek nie była zanieczyszczona? Ciepło właściwe produktu naftowego przyjąć  $2510\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

Odpowiedź:  $T_{1out} = 65,1^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{2out} = 79,0^{\circ}\text{C}$ .

#### ZADANIE 4.6

Do ogrzewania  $10\text{ t/h}$  rozcieńczonego ługu sodowego od  $10^{\circ}\text{C}$  do  $90^{\circ}\text{C}$  stosuje się układ dwóch wymienników ciepła. W pierwszym z nich, o powierzchni  $13\text{ m}^2$ , czynnikiem grzewczym jest stężony roztwór ługu o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$ , płynący w przeciwprądzie w ilości  $5\text{ t/h}$ . Po ogrzaniu w pierwszym wymienniku rozcieńczony ług wpływa do drugiego, w którym czynnikiem grzewczym jest nasycona para wodna o temperaturze  $132,9^{\circ}\text{C}$  w ilości  $0,90\text{ t/h}$ . Współczynnik wnikania ciepła dla rozcieńczonego ługu w obu wymiennikach wynosi  $1500\text{ W/(m}^2\text{K)}$ , a współczynnik wnikania dla kondensującej pary  $4000\text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Ciepło właściwe rozcieńczonego ługu wynosi  $3860\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , stężonego –  $3300\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , a ciepło kondensacji pary  $2,168\cdot 10^6\text{ J/kg}$ . Wymienniki są zbudowane z rur stalowych ( $k = 45\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ) o wymiarach poprzecznych  $38/33\text{ mm}$  i długości  $2\text{ m}$ . Obliczyć powierzchnię grzejną drugiego wymiennika oraz współczynnik wnikania ciepła dla stężonego roztworu ługu.

Odpowiedź:  $A = 8,12\text{ m}^2$ ,  $h = 1220\text{ W/(m}^2\text{K)}$ .

#### ZADANIE 4.7

W naczyniu z podwójnymi ścianami pasteryzowane jest mleko. Między ściankami znajduje się woda, której wrzenie podtrzymywane jest ogrzewaniem zewnętrznym. Przyjąć, że powierzchnia grzejna wynosi  $0,073\text{ m}^2$ , współczynnik przenikania ciepła –  $300\text{ W/(m}^2\text{K)}$ , masa mleka –  $2\text{ kg}$ , a ciepło właściwe –  $3490\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ . Jeżeli temperatura czynnika ogrzewającego wynosi  $99^{\circ}\text{C}$ , to po jakim czasie mleko osiągnie temperaturę  $80^{\circ}\text{C}$ ? Przyjąć początkową temperaturę mleka  $20^{\circ}\text{C}$  oraz że temperatura wewnątrz naczynia jest wyrównana.

Odpowiedź:  $454\text{ s}$ .

## 6.5. ODPAROWYWANIE

### 6.5.1. Wykres entalpowy $i$ - $x$ dla roztworów

Przemiany cieplne roztworów nielotnych substancji dogodnie jest przedstawiać na wykresie, który dla układu  $H_2O$ - $CaCl_2$  zamieszczono na rys. 5.1. Przyjęto jako punkt odniesienia, że entalpię 0 kJ/kg mają: woda ciekła w temperaturze  $0^\circ C$  oraz bezwodne kryształy  $CaCl_2$  w temperaturze  $0^\circ C$ . Pogrubiona linia wychodząca z punktu  $x = 0$ ,  $i = 0$ , zwana likwidusem, określa rozpuszczalność  $CaCl_2$  w wodzie. Powyżej tej linii występuje wyłącznie faza ciekła i parowa. Linia łamana, łącząca wierzchołki niestykające się z likwidusem, tzw. trójkątów izotermicznych (zakreskowanych), zwana jest solidusem. Poniżej tej linii występuje wyłącznie ciało stałe.

Przebieg izoterm zaznaczono liniami ciągłymi, a izobar (linii wrzenia) liniami punktowymi. Chlorek wapnia jest solą tworzącą kilka hydratów o zaznaczonych składach.

#### 6.5.1.1. Mieszanie na wykresie $i$ - $x$

Po zmieszaniu  $L_1$  kg roztworu o stanie 1 (rys. 5.2) z  $L_2$  kg roztworu o stanie 2 uzyskuje się roztwór o stanie 3, leżącym na prostej łączącej 1 i 2. Położenie punktu 3 wynika z bilansu określonego zależnościami (5.1) i (5.2), gdzie wielkość  $l$  wynika ze wzoru (5.3). Odpowiada to regule dźwigni danej wzorem (5.4), gdzie  $\overline{1-3}$  i  $\overline{3-2}$  odpowiadają długościom odpowiednich odcinków na wykresie.

W szczególnym przypadku jednym z roztworów mieszanych może być czysta woda ( $x = 0$ ) w odpowiedniej temperaturze. Należy zwrócić uwagę, że położenie na wykresie (rys. 5.1) dla lodu w temperaturze  $0^\circ C$  zaznaczone jest na osi punktem o współrzędnych  $x = 0$ ,  $i = -332$  kJ/kg, a ciepłu krzepnięcia wody odpowiada odcinek zaznaczony linią kreskową.

#### 6.5.1.2. Podgrzewanie i odparowywanie

Podgrzanie roztworu od stanu 1 do 2 (rys. 5.3) wymaga dostarczenia  $q_1$  ciepła. W stanie 2 roztwór wrze pod ciśnieniem  $p$  i przy dalszym dostarczaniu ciepła następuje odparowywanie wzdłuż izobary do punktu 3. W równowadze z roztworem o stanie 3 są opary o stanie 5, a odcinek 3-5 nazywa się izotermą oparów. Ilość ciepła na odparowanie od stanu 2 do 3 przedstawia odcinek 2-4. Regułę dźwigni dla odparowywania określa wzór (5.5), gdzie:

$W$  – ilość oparów, kg/h,

$L_3$  – ilość roztworu o stanie 3, kg/h.

### 6.5.1.3. Chłodzenie i krystalizacja

Chłodzeniu roztworu o stanie 1 (rys. 5.4) odpowiada przemieszczanie się na wykresie  $i-x$  pionowo w dół. W punkcie 2 osiągnięte jest nasylenie w temperaturze  $T_2$ . Odbierając nadal ciepło, dochodzi się do punktu 3, leżącego pod likwidusem w zakresie równowagi ciec-ciało stałe. Po ustaleniu się równowagi w temperaturze  $T_3$  otrzymuje się kryształy  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  (punkt 8) i roztwór nasycony (punkt 7). Ilość kryształów jest proporcjonalna do długości odcinka  $\overline{7-3}$ , a ilość roztworu pokryształizacyjnego – do długości odcinka  $\overline{3-8}$ . Dalsze odbieranie ciepła może spowodować wejście w obszar trójkąta izotermicznego, obrazującego równowagę w określonej temperaturze  $T_4$  dla lodu, kryształów  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  i roztworu eutektycznego (wierzchołki trójkąta). Na przykład punktowi 4 odpowiada równowaga roztworu (punkt 6) i mieszaniny kryształów (punkt 5) w proporcji ilościowej odpowiadającej długościom odcinków  $\overline{4-5}$  do  $\overline{6-4}$ . Z kolei mieszanina kryształów (punkt 5) składa się z lodu w ilości proporcjonalnej do długości odcinka  $\overline{5-10}$  i kryształów  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  w ilości odpowiadającej długości odcinka  $\overline{9-5}$ .

### 6.5.1.4. Samoodparowanie

Jeżeli nad roztworem znajdującym się w punkcie 1 (rys. 5.5) zostanie obniżone ciśnienie do wartości  $p_2$ , to roztwór zacznie wrzeć kosztem ciepła zawartego w sobie i proces zakończy się w punkcie 2 na izobarze  $p_2$ . Temperaturę końcową samoodparowania określa się, znajdując taką izotermę oparów dla punktu 2, aby przechodząc przez punkt 1 wyznaczała w punkcie 3 entalpię oparów odpowiadającą ciśnieniu  $p_2$  i temperaturze  $T_2$ .

W celu ułatwienia znajdowania izoterm oparów na wykresie umieszczone są tzw. kierownice, odpowiadające poszczególnym ciśnieniom i temperaturom, przez które prowadzi się izotermy (por. rys. 5.3 i 5.5).

### 6.5.1.5. Ciepło parowania roztworu

Ciepło parowania roztworu dla danego stężenia odczytuje się z wykresu, prowadząc z punktu 1 (rys. 5.6), obrazującego stan roztworu, izotermę oparów oraz styczną do izobary w punkcie 1. Odległość między punktami przecięcia obu tych prostych z osią entalpii odpowiada ciepłu parowania roztworu  $r$ .

## 6.5.2. Właściwości fizyczne wodnych roztworów

Dla wielu roztworów można znaleźć w literaturze w formie tabel lub wykresów właściwości takie jak gęstość, ciepło właściwe, współczynnik lepkości, współczynnik przewodzenia ciepła, napięcie powierzchniowe w funkcji stężenia dla określonej

temperatury. Jeśli dysponuje się tylko jedną daną oraz tablicami właściwości wody, można w przybliżeniu stosować wzór (5.6), gdzie:

$A$  – właściwość roztworu (np.  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $\sigma$ ),

$B$  – właściwość wody,

indeksy  $T_1$ ,  $T_2$  dotyczą odpowiednio temperatur.

Gdy znane są co najmniej dwie wartości  $A$  w różnych temperaturach, można stosować interpolację lub ekstrapolację, np. metodą Duhringa.

Temperaturę wrzenia roztworu przy danym stężeniu dla różnych ciśnień można także przeliczać według zależności (5.6) (odpowiednikiem temperatury jest wówczas ciśnienie) lub z reguły Babo (wzór (5.7)), gdzie:

$p_1$  – ciśnienie, dla którego temperatura wrzenia roztworu wynosi  $T_{r1}$ , Pa,

$p_{Tr1}$  – ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze  $T_{r1}$ , Pa,

$p_2$  – ciśnienie, dla którego poszukuje się temperatury wrzenia, Pa,

$p_{Tr2}$  – ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze  $T_{r2}$ , Pa.

Z równania (5.7) oblicza się  $p_{Tr2}$  i z tablic znajduje odpowiadającą mu temperaturę pary  $T_{r2}$ , która jest w przybliżeniu równa temperaturze wrzenia roztworu pod ciśnieniem  $p_2$ .

### 6.5.3. Bilans materiałowy wyparki

Jeżeli odparowaniu poddaje się  $L$  kg/h roztworu wodnego substancji nielotnej od stężenia  $x_1$  do stężenia  $x_2$ , to ilość odparowanej wody jest określona zależnością (5.8).

Dla odparowania trójdziałowego przyjmuje się często stosunek ilości wody odparowanej w poszczególnych działach jako  $W_1 : W_2 : W_3 = 1 : 1,1 : 1,2$ .

### 6.5.4. Bilans cieplny wyparki

Dla oznaczeń jak na rys. 5.7 można napisać bilans ciepła bez uwzględniania strat. Ten bilans przedstawia wzór (5.9), gdzie:

$D$  – ilość pary grzejnej (również kondensatu), kg/s,

$W$  – ilość oparów (przegrzanej pary wodnej), kg/s,

$L$  – ilość roztworu doprowadzanego, kg/s,

$i_0, i_1$  – entalpie roztworów doprowadzanego i zatężonego, kJ/kg,

$i''$  – entalpia pary wodnej, kJ/kg,

$i'$  – entalpia kondensatu, kJ/kg,

$i_w$  – entalpia oparów, kJ/kg.

### 6.5.5. Odparowywanie wielodziałowe

Wyparki łączy się w układy wielodziałowe współ- i przeciwprądowe, w których roztwór zatęża się kolejno w poszczególnych działach, a opary z danego działu stanowią parę grzejną w następnym dziale. Wymaga to stosowania różnych ciśnień w poszczególnych działach. Całkowita różnica temperatur w układzie jest to różnica między temperaturą pary grzejącej doprowadzanej do pierwszego działu a temperaturą oparów z ostatniego działu. Część tej różnicy temperatur jest „zużywana” na przekazanie ciepła do roztworu (odparowanie), a resztę stanowią straty:

- stężeniowe; jest to różnica między temperaturą wrzenia roztworu i czystej wody pod danym ciśnieniem,
- ciśnieniowe; jest to różnica temperatury wrzenia roztworu w górnej i dolnej części rurek, która wynika z ciśnienia wytworzonego przez słup cieczy,
- hydrauliczne; wynikające z oporów przepływu przetłaczanej cieczy – są zwykle przyjmowane  $1 \div 1,5$  K w każdym dziale.

Na rys. 5.8 przedstawiono przykładowo układ i oznaczenia dla trójdziałowego współprądowego odparowywania roztworu.

### 6.5.6. Podział użytecznej różnicy temperatur

Sumaryczna użyteczna różnica temperatur, która może być wykorzystana do odparowywania roztworu, jest określona zależnością (5.10), gdzie:

$T_D$  – temperatura pary grzejącej, °C,

$T_n$  – temperatura oparów z ostatniego działu, °C.

Można wykazać, że warunkiem równych powierzchni wymiany ciepła we wszystkich działach jest rozdział  $\Sigma \Delta T_{ui}$  na poszczególne działy według równania (5.11).

Wielkość  $\Delta T_{ui}$  oznacza użyteczną różnicę temperatur w  $i$ -tym dziale, tzn. różnicę między temperaturą pary grzejącej dopływającej do tego działu i temperaturą roztworu wrzącego w tym dziale.

### 6.5.7. Przenoszenie ciepła w wyparkach

W aparatach wyparnych zachodzi przenoszenie (wymiana) ciepła między skraplającą się parą wodną a wrzącym roztworem. Współczynnik wnikania ciepła dla kondensacji pary  $h_{cond}$  oblicza się z równania (3.24) (na ogół występuje ruch laminarny skroplin).

Do obliczenia współczynnika wnikania ciepła od strony wrzącego roztworu zalecany jest dla wrzenia swobodnego w wyparkach wzór Kirschbauma–Merkela (5.12), w którym  $h_w$  oznacza współczynnik wnikania ciepła dla wrzącej wody, obliczany z zależności empirycznej (5.13), gdzie:

$q$  – obciążenie cieplne,  $W/m^2$ ,

$p$  – ciśnienie, Pa.

Współczynnik poprawkowy  $\Phi$  dla roztworu oblicza się z zależności (5.14), gdzie: indeks  $r$  dotyczy roztworu, a  $w$  – wody w tych samych warunkach,

$\rho$  – gęstość cieczy,  $kg/m^3$ ,

$\rho''$  – gęstość pary,  $kg/m^3$ ,

$k$  – współczynnik przewodzenia ciepła,  $W/(m \cdot K)$ ,

$c$  – ciepło właściwe,  $J/(kg \cdot K)$ ,

$\sigma$  – napięcie powierzchniowe,  $N/m$ ,

$r$  – ciepło parowania,  $J/kg$ ,

$\mu$  – współczynnik lepkości,  $kg/(m \cdot s)$ .

Ponieważ zarówno  $h_{boil}$ , jak i  $h_{cond}$  zależą od obciążenia cieplnego, nie można tych wielkości obliczyć wprost. Dla znanej użytecznej różnicy temperatur można stosować metody numeryczne lub graficzne (por. przykład 5.5).

#### PRZYKŁAD 5.1

Odczytać z wykresu  $i$ - $x$  (rys. 5.1), jakie temperatury uzyska się po adiabatycznym zmieszaniu:

- a) 1 kg kryształów  $CaCl_2 \cdot 6H_2O$  z 1 kg wody ciekłej,
- b) 1 kg kryształów  $CaCl_2 \cdot 6H_2O$  z 1 kg lodu,
- c) 1 kg bezwodnych kryształów  $CaCl_2$  z 1 kg wody ciekłej,
- d) 1 kg bezwodnych kryształów  $CaCl_2$  z 1 kg lodu.

Wszystkie składniki przed zmieszaniem mają temperaturę  $0^\circ C$ .

#### PRZYKŁAD 5.2

Ile ciepła wymaga odparowanie pod ciśnieniem  $0,1 \text{ MPa}$  ( $\cong 1 \text{ ata}$ ) jednego kilograma roztworu  $CaCl_2$  od stężenia  $x_1 = 0,3$ , do  $x_2 = 0,4$ ? Ile uzyska się oparów?

#### PRZYKŁAD 5.3

W czterodziałowym układzie wyparnym odparowuje  $L = 170\,000 \text{ kg/h}$  roztworu cukru od stężenia początkowego  $x_i = 0,15$  do końcowego  $x_f = 0,6$ . Jeżeli w każdym dziale odparowuje jednakowa ilość wody, obliczyć stężenie po każdym dziale wyparnym.

#### PRZYKŁAD 5.4

Roztwór  $CaCl_2$  o stężeniu  $0,4 \text{ kg/m}^3$  pod ciśnieniem  $102 \text{ kPa}$  wrze w temperaturze  $120^\circ C$ . W jakiej temperaturze wrze ten roztwór pod ciśnieniem  $51 \text{ kPa}$ . Obliczenia wykonać następującymi sposobami:

- 1) na podstawie równania (5.6),
- 2) na podstawie reguły Babo (5.7),

- 3) na podstawie reguły Duhringa,  
 4) na podstawie wykresu entalpowego.

Do interpolacji według reguły Duhringa wykorzystać dodatkową daną, że temperatura wrzenia tego roztworu pod ciśnieniem 10,2 kPa wynosi 62°C.

### PRZYKŁAD 5.5

Obliczyć współczynnik przenikania ciepła dla procesu odparowania w wyparce z obiegiem naturalnym wodnego roztworu NaOH, który zateęza się od stężenia  $x_1 = 0,1$  do  $x_2 = 0,3$  w sposób ciągły pod ciśnieniem 102 kPa. Ciepło doprowadzone jest przez parę grzejną o ciśnieniu 392,4 kPa (4 ata). Ciecz cyrkuluje w rurkach o średnicy  $d_z/d_w = 36/30$  mm i długości  $H = 2,5$  m ze stali o współczynniku przewodzenia ciepła  $k = 50$  W/(m·K). Z tablic i wykresów dla roztworu o stężeniu 30% można znaleźć temperaturę wrzenia pod ciśnieniem 102 kPa równą 116°C i następujące dane:

Tabela 5.1

	Gęstość $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Ciepło właściwe $c_p$ [J/(kg·K)]	Współczynnik lepkości $\mu$ [kg/(m·s)]	Współczynnik przewodzenia ciepła $k$ [W/(m·K)]	Napięcie powierzchniowe $\sigma$ [N/m]	Ciepło parowania $r$ [kJ/kg]
Roztwór 116°C	1265	3690	$1,18 \cdot 10^{-3}$	0,612	0,073	2450
Woda 116°C	946	4230	$0,243 \cdot 10^{-3}$	0,685	0,054	2213,6

### PRZYKŁAD 5.6

Do trójdziałowej baterii wyparnej dopływa  $L = 8000$  kg/h roztworu wodnego soli o stężeniu  $x_0 = 0,2$  w temperaturze  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Zaproponowano podgrzewanie tego roztworu w przeciwprądowych wymiennikach ciepła 1, 2 i 3 (rys. 5.11) za pomocą skroplin z poszczególnych działów wyparnych i dogrzanie do temperatury wrzenia pod ciśnieniem 0,33 MPa, wynoszącej  $T_{\text{boil}} = 145,1^\circ\text{C}$ , za pomocą pary grzejnej o temperaturze  $T_D = 151,2^\circ\text{C}$  (0,49 MPa). Zakłada się, że temperatura skroplin wpływających z każdego wymiennika jest równa temperaturze skroplin opuszczających kolejny dział wyparny. Przyjmuje się, że średnie ciepło właściwe roztworu wynosi  $c_r = 3230$  J/(kg·K), a temperatura schłodzonych skroplin  $T_{s,3}$  jest o 5 K wyższa od temperatury zasilania roztworu  $T_0$ . Ilości i temperatura skroplin z poszczególnych działów są następujące:



$$W_D = 961,8 \text{ kg/h} \quad T_D = 151,2^\circ\text{C}$$

$$W_1 = 929,8 \text{ kg/h} \quad T_{s1} = 136,8^\circ\text{C}$$

$$W_2 = 1081,2 \text{ kg/h} \quad T_{s2} = 115,9^\circ\text{C}$$

Przyjmując, że współczynniki przenikania ciepła dla wymienników wynoszą  $U_1 = U_2 = U_3 = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  oraz dla dogrzewacza parowego  $U_D = 2500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , znaleźć:

- 1) temperatury pośrednie  $T_1, T_2, T_3$ ,
- 2) ilość pary dogrzewającej  $D_2$ ,
- 3) powierzchnie grzejne wymienników 1, 2, 3 i  $P$ .

#### PRZYKŁAD 5.7

Zaprojektować trójstopniową współprądową baterię wyparną, do której dopływa  $L = 5000 \text{ kg/h}$  wodnego roztworu  $\text{CaCl}_2$  o stężeniu  $x_0 = 0,05$  w temperaturze wrzenia. Stężenie roztworu opuszczającego baterię wynosi  $x_3 = 0,35$ . Czynnikiem grzewczym w pierwszym dziale jest nasycona para wodna o ciśnieniu  $p_D = 784,5 \text{ kPa}$  (8 ata), a ciśnienie w trzecim dziale, utrzymywane przez skraplacz barometryczny, wynosi  $p_3 = 49 \text{ kPa}$  (0,5 ata). Stosowane są wyparki z obiegiem naturalnym z rurkami stalowymi o średnicach  $d_z/d_w = 48/40 \text{ mm}$  i długości  $H = 2 \text{ m}$ , dla których współczynnik przewodzenia ciepła stali wynosi  $k_s = 45 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ . Wymaga się, aby powierzchnie wszystkich wyparek były równe.

*Uwaga: Zadania 5.1–5.10 rozwiązuje się na podstawie wykresu (rys. 5.1).*

#### ZADANIE 5.1

Na podstawie wykresu znaleźć temperaturę, temperaturę wrzenia pod ciśnieniem 1 ata oraz skład roztworu powstałego z adiabatycznego zmieszania 100 kg wody w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  z 50 kg bezwodnych kryształów  $\text{CaCl}_2$  o temperaturze  $20^\circ\text{C}$ .  
Odpowiedź:  $T = 79^\circ\text{C}$ ,  $T_{\text{wrz}} = 115^\circ\text{C}$ ,  $x = 0,33$ .

#### ZADANIE 5.2

Ile wyniesie temperatura roztworu z poprzedniego zadania, jeśli zamiast wody ciekłej użyje się 100 kg lodu w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ ?  
Odpowiedź:  $T = -11^\circ\text{C}$ .

#### ZADANIE 5.3

Ile ciepła wydzieli się przy izotermicznym zmieszaniu 1 kg roztworu  $\text{CaCl}_2$  o stężeniu  $x = 0,5$  w temperaturze  $60^\circ\text{C}$  z 1 kg wody o tej samej temperaturze? Jaką temperaturę osiągnęłyby mieszanina, gdyby nie odprowadzać ciepła rozcieńczenia?  
Odpowiedź:  $q = 80 \text{ kJ}$ ,  $T = 75^\circ\text{C}$ .

## ZADANIE 5.4

W jakiej temperaturze przestanie wrzeć roztwór  $\text{CaCl}_2$ , nad którym w stanie wrzenia pod ciśnieniem 98,1 kPa (1 ata) przy stężeniu  $x = 0,4$  obniżono ciśnienie do 9,81 kPa (0,1 ata)?

Odpowiedź: 65°C.

## ZADANIE 5.5

Jakie kryształy wytrąca się jako pierwsze i w jakiej ilości, gdy schłodzi się roztwór  $\text{CaCl}_2$  od temperatury 100°C do -20°C, jeżeli stężenie roztworu wynosi:

a)  $x = 0,2$ ,

b)  $x = 0,4$ ?

Odpowiedź: a) lód; 0,073 kg/kg roztworu wyjściowego,

b)  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ; 0,37 kg/kg roztworu wyjściowego.

## ZADANIE 5.6

Jaką najniższą temperaturę można uzyskać przez adiabatyczne zmieszanie wody o temperaturze 0°C z hydratami czterowodnym  $\text{CaCl}_2$  o tej samej temperaturze? Ile wody należy dodać do 1 kg kryształów, aby uzyskać taką mieszaninę?

Odpowiedź: -13°C; 0,74 kg wody.

## ZADANIE 5.7

W jakiej proporcji należy mieszać kryształy  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  w temperaturze 0°C z wodą o tej samej temperaturze, aby uzyskać mieszaninę o największej zdolności pochłaniania ciepła? Jakie stężenie ma uzyskana mieszanina mrozująca? Ile ciepła należy dostarczyć 1 kg takiej mieszaniny, aby powrócić do temperatury 0°C?

Odpowiedź: 0,34 kg wody;  $x = 0,38$ ; 103 kJ.

## ZADANIE 5.8

Roztwór  $\text{CaCl}_2$ , wrzący pod ciśnieniem 98,1 kPa (1 ata) w temperaturze 120°C, schłodzono do 0°C i utrzymywano tę temperaturę. Jaki będzie, po ustaleniu się równowagi, skład otrzymanych kryształów i roztworu pokryształacyjnego?

Odpowiedź: kryształy  $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , roztwór  $x = 0,37$ .

## ZADANIE 5.9

Jednemu kilogramowi kryształów  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  o temperaturze 20°C dostarczono 100 kJ ciepła. Jaką temperaturę osiągnięto, jakie fazy wystąpią po ustaleniu się równowagi i w jakiej ilości?

Odpowiedź:  $T = 45,3^\circ\text{C}$ ; 0,44 kg  $\text{CaCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ , 0,12 kg  $\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , 0,44 kg roztworu o stężeniu  $x = 0,56$ .

## ZADANIE 5.10

Schłodzono 1 kg roztworu  $\text{CaCl}_2$  o stężeniu  $x = 0,1$  do temperatury  $-20^\circ\text{C}$ . Ile i jakich kryształów wytrąci się po osiągnięciu równowagi?

Odpowiedź: 0,52 kg kryształów lodu.

## ZADANIE 5.11

Wykorzystując dane i wyniki z przykładu 5.5, obliczyć, jaka powinna być powierzchnia grzejna i zapotrzebowanie na parę grzejną w wyparce, jeśli ilość dopływającego surowca w temperaturze wrzenia wynoszącej  $103^\circ\text{C}$  jest równa 10 000 kg/h? Ciepło właściwe roztworu NaOH w temperaturze  $103^\circ\text{C}$  o stężeniu 0,1 wynosi  $3880 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ , a dla stężenia 0,3 i temperatury  $116^\circ\text{C}$  jest równe  $3670 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Ciepło właściwe pary przegrzanej można przyjąć  $2020 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Założyć, że całe ciepło kondensującej pary jest zużyte na odparowanie w temperaturze  $116^\circ\text{C}$ .

Odpowiedź:  $A = 86 \text{ m}^2$ ,  $D = 2,01 \text{ kg/s}$ .

## ZADANIE 5.12

Porównać rozwiązanie przykładu 5.6 z przypadkiem, w którym roztwór podgrzewany jest skroplinami zmieszanyymi w jednym wymienniku ciepła (rys. 5.12). Wszystkie dane dotyczące roztworu i skroplin są takie jak w przykładzie 5.6; założyć również, że  $T_3 = T_0 + 5$ , a ciepło właściwe zmieszanych skroplin wynosi  $4210 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Obliczyć temperaturę skroplin po zmieszaniu, temperaturę roztworu po wymienniku 1, ilość pary dogrzewającej oraz powierzchnie wymienników  $P$  i 1.

Odpowiedź:  $T_{sM} = 139,7^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 88,6^\circ\text{C}$ ;  $D_2 = 697 \text{ kg/h}$ ,  $A_p = 6,7 \text{ m}^2$ ,  $A_1 = 24,8 \text{ m}^2$ .



## AUXILIARY TABLES

Table AT-1

### Properties of water

Temperature $T$ [°C]	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Heat capacity $c_p$ [J/(kg·K)]	Heat conduction coefficient $k$ [W/(m·K)]	Viscosity $\mu \cdot 10^3$ [kg/(m·s)]
0	999.9	4226	0.558	1.7936
5	1000.0	4206	0.568	1.5347
10	999.7	4195	0.577	1.2964
15	999.1	4187	0.587	1.1356
20	998.2	4182	0.597	0.9934
25	997.1	4178	0.606	0.8806
30	995.7	4176	0.615	0.7924
35	994.1	4175	0.624	0.7198
40	992.2	4175	0.633	0.6580
45	990.2	4176	0.640	0.6051
50	988.1	4178	0.647	0.5551
55	985.7	4179	0.652	0.5099
60	983.2	4181	0.658	0.4717
65	980.6	4184	0.663	0.4354
70	977.8	4187	0.668	0.4040
75	974.9	4190	0.671	0.3766
80	971.8	4194	0.673	0.3521
85	968.7	4198	0.676	0.3285
90	965.3	4202	0.678	0.3089
95	961.9	4206	0.680	0.2922
100	958.4	4211	0.682	0.2775
110	951.0	4224	0.684	0.2550
120	943.5	4232	0.685	0.2354
130	934.5	4250	0.686	0.2118
140	926.3	4257	0.684	0.2010
150	916.9	4270	0.680	0.1853
160	907.6	4285	0.679	0.1716

Properties of dry air at 98.1 kPa (1 at)

Temperature $T$ [°C]	Density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	Heat capacity $c_p$ [J/(kg·K)]	Heat conduction coefficient $k$ [W/(m·K)]	Viscosity $\mu \cdot 10^5$ [kg/(m·s)]
-100	1.948	1022	0.0163	1.187
-50	1.534	1013	0.0198	1.481
-20	1.365	1005	0.0226	1.628
0	1.252	1011	0.0237	1.746
10	1.206	1010	0.0244	1.785
20	1.164	1012	0.0251	1.824
30	1.127	1013	0.0258	1.868
40	1.092	1014	0.0265	1.912
50	1.057	1016	0.0272	1.952
60	1.025	1017	0.0279	1.991
70	0.996	1018	0.0286	2.040
80	0.968	1019	0.0293	2.079
90	0.942	1021	0.0300	2.123
100	0.916	1022	0.0307	2.167
120	0.870	1025	0.0320	2.256
140	0.827	1027	0.0333	2.334
150	0.810	1028	0.0336	2.373
160	0.789	1030	0.0344	2.412
180	0.755	1032	0.0357	2.491
200	0.723	1035	0.0370	2.569
250	0.653	1043	0.0400	2.756
300	0.596	1047	0.0429	2.932
350	0.549	1055	0.0457	3.099
400	0.508	1059	0.0485	3.275

Properties of saturated water vapour

Temperature $T$ [°C]	Pressure $p$ [kPa]	Enthalpy of vapour $i''$ [kJ/kg]	Enthalpy of condensate $i'$ [kJ/kg]
0	0.611	2500.8	0.0
1	0.656	2502.4	4.2
2	0.705	2504.5	8.4
3	0.757	2506.2	12.6
4	0.813	2508.3	16.8
5	0.872	2510.0	21.1
6	0.935	2511.7	25.2
7	1.001	2513.8	29.4
8	1.072	2515.4	33.7
9	1.147	2517.5	37.8
10	1.227	2519.2	42.0
11	1.312	2521.3	46.2
12	1.402	2523.0	50.4
13	1.497	2525.0	54.6
14	1.597	2526.7	58.8
15	1.704	2528.4	63.0
16	1.817	2530.1	67.2
17	1.936	2531.8	71.3
18	2.062	2533.4	75.5
19	2.196	2535.5	79.7
20	2.337	2537.2	83.9
21	2.486	2538.9	88.1
22	2.643	2541.0	92.3
23	2.808	2542.6	96.5
24	2.982	2544.7	100.6
25	3.166	2546.4	104.8
26	3.360	2548.1	109.0
27	3.564	2550.2	113.2
28	3.778	2551.8	117.4
29	4.004	2553.9	121.5
30	4.241	2555.6	125.7
31	4.491	2557.7	129.9
32	4.753	2559.4	134.1
33	5.029	2561.1	138.2
34	5.318	2563.2	142.4
35	5.622	2564.8	146.6

Table AT-3 (continued)

Temperature $T$ [°C]	Pressure $p$ [kPa]	Enthalpy of vapour $i''$ [kJ/kg]	Enthalpy of condensate $i'$ [kJ/kg]
36	5.940	2566.5	150.8
37	6.274	2568.6	155.0
38	6.624	2570.3	159.1
39	6.991	2572.0	163.3
40	7.375	2573.6	167.5
41	7.778	2575.3	171.6
42	8.198	2577.0	175.8
43	8.639	2578.6	180.0
44	9.100	2580.7	184.2
45	9.582	2582.4	188.4
46	10.08	2584.5	192.6
47	10.61	2586.2	196.8
48	11.16	2587.7	200.9
49	11.74	2590.0	205.1
50	12.33	2591.6	209.3
51	12.96	2593.3	213.5
52	13.61	2595.0	217.7
53	14.29	2597.1	221.8
54	15.00	2598.7	226.0
55	15.74	2600.4	230.2
56	16.51	2602.1	234.4
57	17.31	2604.2	238.6
58	18.15	2605.9	242.8
59	19.02	2607.5	246.9
60	19.92	2609.2	251.1
61	20.86	2610.9	255.3
62	21.84	2612.6	259.5
63	22.85	2614.2	263.7
64	23.91	2615.9	267.9
65	25.01	2618.0	272.0
66	26.14	2619.3	276.2
67	27.33	2621.4	280.4
68	28.56	2623.0	284.6
69	29.84	2624.7	288.8
70	31.16	2626.4	293.0
71	32.54	2628.0	297.2
72	33.96	2629.7	301.4
73	35.43	2631.4	305.6



Table AT-3 (continued)

Temperature $T$ [°C]	Pressure $p$ [kPa]	Enthalpy of vapour $i''$ [kJ/kg]	Enthalpy of condensate $i'$ [kJ/kg]
74	36.96	2633.1	309.8
75	38.55	2634.8	314.0
76	40.19	2636.4	318.2
77	41.89	2638.1	322.3
78	43.65	2639.8	326.6
79	45.47	2641.4	330.8
80	47.36	2643.1	334.9
81	49.31	2644.8	339.1
82	51.32	2646.5	343.4
83	53.42	2648.2	347.5
84	55.57	2649.8	351.7
85	57.80	2651.5	356.0
86	60.10	2653.2	360.1
87	62.49	2654.8	364.4
88	64.95	2656.1	368.6
89	67.49	2657.8	372.8
90	70.11	2659.4	377.0
91	72.80	2661.1	381.2
92	75.61	2662.4	385.4
93	78.43	2664.1	389.6
94	81.46	2666.2	393.8
95	84.52	2667.8	398.0
96	87.69	2669.5	402.2
97	90.95	2671.2	406.4
98	94.30	2672.8	410.7
99	97.78	2674.1	414.9
99.1	98.07 (1 at)	2674.5	415.3
100	101.3	2675.8	419.1
105	120.8	2683.3	440.2
110	143.3	2691.3	461.3
115	169.0	2698.8	482.5
119.6	196.1 (2 at)	2705.9	502.2
120	198.5	2706.4	503.7
125	232.1	2713.5	525.0
130	270.1	2720.6	546.4
132.9	294.2 (3 at)	2724.4	558.5
135	313.0	2727.3	567.7
140	361.4	2734.0	589.1

Table AT-3 (continued)

Temperature $T$ [°C]	Pressure $p$ [kPa]	Enthalpy of vapour $i''$ [kJ/kg]	Enthalpy of condensate $i'$ [kJ/kg]
142.9	392.3 (4 at)	2737.7	601.6
145	415.5	2740.3	610.4
150	476.0	2746.5	632.2
151.1	490.3 (5 at)	2747.8	636.8
155	543.3	2752.8	654.0
158.1	588.4 (6 at)	2756.2	667.0
160	618.0	2757.8	675.3
164.2	686.5 (7 at)	2762.9	693.8
165	700.8	2763.3	697.1
169.6	784.5 (8 at)	2768.3	717.6
170	792.0	2768.7	719.3
175	892.5	2773.3	741.1
180	1002	2778.4	763.2
185	1123	2782.5	785.4
190	1255	2786.3	807.6
195	1399	2789.7	829.8
200	1555	2793.0	852.4

## A LIST OF RECOMMENDED LITERATURE SUPPORTING

- [1] H.D. Baehr, K. Stephan, *Heat and mass transfer*, Springer, New York 2011.
- [2] C.O. Bennet, J.E. Myers, *Przenoszenie pędu, ciepła i masy*, WNT, Warszawa 1966.
- [3] J. Ciborowski, *Inżynieria chemiczna – inżynieria procesowa*, WNT, Warszawa 1973.
- [4] T. Hobler, *Ruch ciepła i wymienniki*, WNT, Warszawa 1986.
- [5] Z. Kembłowski, S. Michałowski, C. Strumiłło, R. Zarzycki, *Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa 1985.
- [6] A. Kmieć, *Procesy cieplne i aparaty*, OWPWr, Wrocław 2005.
- [7] T. Kudra (Ed.), *Zbiór zadań z podstaw teoretycznych inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa 1985.
- [8] Z. Pakowski, M. Głębowski, *Symulacja procesów inżynierii chemicznej*, Politechnika Łódzka, Łódź 2001.
- [9] K.G. Pawłow, P.G. Romankow, A.A. Noskow, *Przykłady i zadania z zakresu aparatury i inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1974.
- [10] R.H. Perry, C.H. Chilton, *Chemical engineers' handbook*, McGraw Hill, New York 1995.
- [11] R. Pohorecki, S. Wroński, *Kinetyka i termodynamika procesów inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1979.
- [12] M. Serwiński, *Zasady inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa 1999.
- [13] S. Wroński, R. Pohorecki, J. Siwiński, *Przykłady obliczeń z termodynamiki i kinetyki procesów inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1979.
- [14] R. Zarzycki, *Wymiana ciepła i ruch masy w inżynierii środowiska*, WNT, Warszawa 2005.
- [15] R. Zarzycki (Ed.), *Zadania rachunkowe z inżynierii chemicznej*, Politechnika Łódzka, Łódź 1974.
- [16] Z. Ziołkowski (Ed.), *Podstawowe procesy inżynierii chemicznej*, PWN, Warszawa 1982.



20,00



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-340880

Wydział Inżynierii i Technologii Chemicznej  
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki  
ul. Warszawska 24  
31-155 Kraków  
tel.: +48 12 628 27 01  
fax: +48 12 628 20 35

e-mail: [wiiitch@chemia.pk.edu.pl](mailto:wiiitch@chemia.pk.edu.pl)  
<http://www.chemia.pk.edu.pl>

ISBN 978-83-7242-7328

Publikacja bezpłatna

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000276622

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego