Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

Teresa Winiarska, Tadeusz Winiarski

WYKŁADY Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Część I

Podręcznik dla studentów szkół wyższych

Kraków 2012

ISBN 978-83-7242-651-2

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax 12 628 37 60
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 10,00. Podpisano do druku 16.09.2010 r.

Zam. 185/2010 Nakład 300 egz. Cena zł 20,00

Spis treści

Wstęp

Wykład analizy matematycznej, zgodnie z obowiązującymi standardami nauczania, zawiera fragmenty innych działów matematyki, niezbędne do prawidłowego zrozumienia podstawowych pojęć. Do takich działów należą miedzy innymi topologia i analiza funkcjonalna. Niezbędne informacje dotyczące tych działów czytelnik znajdzie w końcowych rozdziałach tej książki.

Nasz kurs rozpoczynamy od przypomnienia podstawowych faktów dotyczących zbiorów liczbowych. Wyjątkowo ważne są tu zasada minimum, równoważna jej zasada indukcji matematycznej (obowiązujące w zbiorze liczb naturalnych) i zasada ciągłości w zbiorze liczb rzeczywistych.

W rozdziałach drugim i trzecim przypominamy czytelnikowi te wiadomości dotyczące ciągów i szeregów liczbowych oraz funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej, które są wykładane na kursie: „Wstęp do matematyki".

Podstawowymi dla podręcznika są rozdziały czwarty i piąty. Pierwszy z nich „Pochodne i różniczki funkcji jednej zmiennej" obejmuje rachunek różniczkowy wraz z jego zastosowaniami do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Drugi, tzn. rozdział piąty „Pierwotna i całka", prezentuje metody całkowania (wyznaczania pierwotnych) pewnych klas funkcji elementarnych oraz podstawowe fakty dotyczące całki Riemanna funkcji jednej zmiennej.

Całka oznaczona ma wiele zastosowań. W końcowych fragmentach rozdziału piątego podane są jej zastosowania w obliczaniu pól figur płaskich, objętości brył obrotowych, długości krzywych i w badaniu zbieżności szeregów liczbowych.

Rozdział ten kończymy krótkim wprowadzeniem do całki Riemanna–Stieltjesa.

Rozdział szósty „Topologia przestrzeni metrycznej" zawiera te fakty, które są wykorzystywane w analizie matematycznej. Poznajemy tu podstawowe przykłady przestrzeni metrycznych, topologię indukowaną przez metrykę i podstawowe pojęcia, jakimi są: ciągłość, granica, zupełność, zwartość i spójność.

W rozdziale siódmym „Analiza funkcjonalna” zostały przedstawione podstawowe fakty dotyczące przestrzeni Banacha i Hilberta, wraz z przykładami pojawiającymi się w analizie matematycznej. Część tego rozdziału, poświęcona odwzorowaniom liniowym i wieloliniowym ciągłym oraz identyfikacjom, przygotowuje czytelnika do prawidłowego rozumienia rachunku różniczkowego i całkowego, zwłaszcza funkcji wielu zmiennych.

Przedmiotem rozdziału ósmego „Szeregi w przestrzeniach Banacha” są szeregi o wyrazach w przestrzeni Banacha i szeregi funkcyjne. Prezentowane tu fakty w mniej ogólnym sformułowaniu są znane czytelnikowi z wykładów dotyczących szeregów liczbowych.

Obok twierdzeń, lematów, definicji, uwag, itp. znajdują się uwagi z indeksem górnym *, np. Uwaga* 3.7, str. 61. Tak oznaczone uwagi pojawiają się wtedy, gdy odsyłamy czytelnika do dalszych rozdziałów tej książki.

Wiele pojęć czy też twierdzeń pojawiających się w tej książce jest przypisywana ich twórcom, np. „definicja Cauchy’ego”, „przestrzeń Banacha”, „całka Riemanna” itd. Aby przybliżyć czytelnikowi zarówno twórców, jak też i okres, w którym powstawały poszczególne pojęcia, prezentujemy zdjęcia tych twórców wraz z towarzyszącymi im krótkim opisami ich działalności. Mamy nadzieję, że taki sposób prezentacji zachęci czytelnika do bardziej wnikliwego zapoznawania się z historią matematyki.

W naszym opracowaniu korzystaliśmy przede wszystkim ze strony internetowej Uniwersytetu St. Andrews (Szkocja): http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/, poświęconej historii matematyki; stamtąd też pochodzą prezentowane portrety.

Specjalne słowa podziękowania kierujemy do prof. Bolesława Szafirskiego za cenne uwagi dotyczące treści i układu tej książki i dr. Adama Winiarza za olbrzymi wysiłek włożony w lekturę opracowania, co pozwoliło usunąć wiele usterek.

Kraków, maj 2012 *Teresa i Tadeusz Winiarscy*

ROZDZIAŁ 1

Zbiory liczbowe

Zakładamy, że czytelnikowi znane są podstawowe fakty dotyczące zbiorów liczbowych. Mamy tu na myśli zbiory: liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Szczegółowo omówimy tylko te fakty, które sprawiają najwięcej kłopotów początkującym matematykom. Jednym z nich jest ZASADA MINIMUM (równoważna ZASADZIE INDUKCJI MATEMATYCZNEJ, zob. twierdzenie 1.1), która jest jednym z aksjomatów[1] przyjmowanych dla zbioru liczb naturalnych. Drugim jest AKSJOMAT CIĄGŁOŚCI (zob. aksjomat 2, str. 15) przyjmowany w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przez $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, oznaczać będziemy odpowiednio zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych[2]. Przez $\mathbb{N}_k$, $\mathbb{Z}_k$, $\mathbb{R}_k$, oznaczać będziemy odpowiednio zbiór liczb naturalnych, całkowitych i rzeczywistych większych lub równych k, natomiast przez $\mathbb{R}_+$ zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Przypomnijmy, że

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, \ldots\},\\
\mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, \ldots\},\\
\mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\},\\
\mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).
\end{aligned}$$

Liczby ze zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazywają się liczbami niewymiernymi.

Niech $\mathbb{K}$ będzie jednym z wymienionych wyżej zbiorów liczbowych. Przypomnijmy, że zbiór $A \subset \mathbb{K}$ ma *element najmniejszy* (*największy*), jeżeli istnieje $x_0 \in A$,

[1] Tzn. twierdzeń, których prawdziwość przyjmujemy bez dowodu.

[2] Zbiory te nazywamy zbiorami liczbowymi.

takie że dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $x_0 \leqslant x$ ($x_0 \geqslant x$).

Zauważmy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ najmniejszym elementem zbioru

$$\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N} : \ n \geqslant k\} \tag{1.1}$$

jest k.

Zasada minimum

Jednym z często wykorzystywanych aksjomatów w zbiorze liczb naturalnych jest tzw. zasada minimum.

Aksjomat 1 (zasada minimum). *Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy.*

Twierdzenie 1.1. *Następujące stwierdzenia są równoważne:*

(i) ZASADA MINIMUM: *Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy.*

(ii) ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ: *Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli A jest takim niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$, że*
   (a) $k \in A$ *i*
   (b) *dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_k$, z tego, że $n \in A$ wynika, że $(n+1) \in A$,*
   to $\mathbb{N}_k \subset A$.

Dowód. $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje takie $n_0 > k$, że n_0 nie należy do zbioru A. Wtedy zbiór

$$B := \{n \in \mathbb{N} \ : \ n > k \text{ i } n \notin A\}$$

jest niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$, bo $n_0 \in B$. Niech n_1 będzie najmniejszym elementem zbioru B. Jego istnienie wynika z założonej zasady minimum. Wiemy, że

$$k \leqslant n_1 - 1 \in A.$$

Zatem, na mocy założenia (b) zasady indukcji, $n_1 = (n_1 - 1) + 1 \in A$, co jest sprzeczne z określeniem zbioru B.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Przypuśćmy, że B jest niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$, który nie ma elementu najmniejszego i niech

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \ B \subset \mathbb{N}_n\}.$$

Wykorzystując zasadę indukcji, wykażemy, że $A = \mathbb{N}$, co da sprzeczność, ponieważ wtedy

$$B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}_n = \emptyset\,.$$

(1) Zauważmy, że $1 \in A$, gdyż $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$.
(2) Jeśli $n \in A$, to $n \notin B$. W przeciwnym przypadku n byłoby najmniejszym elementem zbioru B. Zatem $B \subset \mathbb{N}_{n+1}$. Wynika stąd, że $n+1 \in A$, gdyż w przeciwnym przypadku liczba $n+1$ byłaby najmniejszym elementem zbioru B.

Zatem na mocy zasady indukcji $A = \mathbb{N}$. □

Zasadę minimum można też stosować w zbiorze liczb całkowitych, gdy wiemy, że dany podzbiór (niepusty) jest ograniczony z dołu.

Twierdzenie 1.2. *Każdy niepusty, ograniczony z dołu podzbiór zbioru liczb całkowitych ma element najmniejszy.*

Dowód. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu i niech k_0 będzie jakimkolwiek jego ograniczeniem dolnym. Funkcja

$$\varphi:\ \mathbb{Z}_{k_0} \ni n \mapsto n + 1 - k_0 \in \mathbb{N}$$

jest silnie rosnąca bijekcją. Niech n_0 będzie najmniejszym elementem zbioru

$$B := \varphi(A) \subset \mathbb{N}.$$

Taki element istnieje na mocy zasady minimum.

Pokażemy, że $\varphi^{-1}(n_0)$ jest elementem najmniejszym zbioru A. Z definicji elementu najmniejszego mamy $n_0 \leqslant b$ dla dowolnego $b \in B$. Funkcja φ jest rosnąca, zatem $\varphi^{-1}(n_0) \leqslant \varphi^{-1}(b)$ dla dowolnego $b \in B$. Stąd $\varphi^{-1}(n_0) \leqslant a$ dla dowolnego $a \in A$, ponieważ φ jest bijekcją. Ponadto z definicji zbioru B wynika, że $\varphi^{-1}(n_0)$ jest elementem zbioru A, czyli $\varphi^{-1}(n_0)$ jest elementem najmniejszym zbioru A. □

Zasada minimum nie jest prawdziwa ani w zbiorze liczb wymiernych, ani w zbiorze liczb rzeczywistych, nawet przy dodatkowym założeniu, że rozważany niepusty zbiór A jest ograniczony z dołu. Dla przykładu zbiór

$$A := \{x \in \mathbb{Q} :\ x > 1\}$$

nie ma elementu najmniejszego.

Johann Bernoulli
Ur. 27 lipca 1667
Zm. 1 stycznia 1748

Profesor uniwersytetów w Groningen (Holandia) i Bazylei. Zajmował się rachunkiem różniczkowym, całkowym i wariacyjnym oraz liniami geodezyjnymi. Sformułował i rozwiązał niezależnie od brata Jakoba zagadnienie brachistochrony. Pochodził ze znanej rodziny matematyków Bernoullich.

Pokażemy, jak za pomocą zasady indukcji matematycznej można udowodnić nierówność Bernoulliego.

Twierdzenie 1.3 (nierówność Bernoullego). *Jeżeli* $x \in (-1, +\infty)$ *i* $n \geqslant 1$*, to*

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Dowód. Dla zastosowania indukcji matematycznej zauważmy, że nierówność Bernoulliego jest równoważna temu, że

$$\mathbb{N} \subset A := \{n \in \mathbb{N} : \ (1 + x)^n \geqslant 1 + nx \quad \text{dla } x \in (-1, +\infty)\}. \tag{1.2}$$

(1) Wykażemy, że $1 \in A$. Istotnie, $(1 + x) \geqslant 1 + 1x$, co oznacza, że $1 \in A$.
(2) Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ prawdziwa jest implikacja: jeśli $n \in A$, to $n + 1 \in A$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n \in A$. Wtedy dla $x \in (-1, +\infty)$ mamy

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x,$$

co oznacza, że $n + 1 \in A$.

Zatem na mocy zasady indukcji wnioskujemy, że $\mathbb{N} \subset A$, co kończy dowód nierówności Bernoulliego. $\square$

Kresy i zasada ciągłości

Do tej pory rozważaliśmy podzbiory zbioru liczb całkowitych. Teraz zajmiemy się podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych.

Definicja 1.4. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest:
(i) *ograniczony z góry*, gdy istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in A$ spełniona jest nierówność $x \leqslant M$. W takim przypadku o liczbie M mówimy, że ogranicza zbiór A z góry lub że M jest *ograniczeniem górnym* zbioru A;
(ii) *ograniczony z dołu*, gdy istnieje taka liczba $m \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in A$ spełniona jest nierówność $m \leqslant x$. W takim przypadku o liczbie m mówimy, że ogranicza zbiór A z dołu lub że m jest *ograniczeniem dolnym* zbioru A;
(iii) *ograniczony*, gdy jest ograniczony z dołu i z góry;
(iv) *nieograniczony (z góry) (z dołu)*, gdy nie jest ograniczony (z góry) (z dołu).

Wprost z powyższej definicji wynika następujące stwierdzenie, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Stwierdzenie 1.5. *Następujące warunki są równoważne:*
(i) *zbiór A jest ograniczony;*
(ii) *istnieją takie liczby rzeczywiste a i b, że dla dowolnego $x \in A$ spełnione są nierówności $a \leqslant x \leqslant b$;*
(iii) *istnieje taka liczba rzeczywista M, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi nierówność $|x| \leqslant M$.*

Definicja 1.6. Mówimy, że liczba $a \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* zbioru $A \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy
$$a = \sup A,$$
gdy spełnione są następujące dwa warunki:
(i) dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $x \leqslant a$ oraz
(ii) dla każdego $a' < a$ istnieje takie $x \in A$, że $x > a'$.
Mówimy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *kresem dolnym* zbioru $A \subset \mathbb{R}$, co zapisujemy
$$b = \inf A,$$
gdy spełnione są następujące dwa warunki:
(i) dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $x \geqslant b$ oraz
(ii) dla każdego $b' > b$ istnieje takie $x \in A$, że $x < b'$.

Zauważmy, że warunki (i), (ii) definicji kresu górnego (dolnego) oznaczają, że kres górny jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A. Podobnie kres dolny jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A.

Jeśli zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma element największy (najmniejszy), to jest on kresem górnym (dolnym) tego zbioru. Jednak nie każdy ograniczony z góry (ograniczony z dołu) podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma element największy (najmniejszy). Dla przykładu, w podzbiorze $A = [5, 7)$ jest element najmniejszy i nie ma elementu największego.

Pojawia się naturalne pytanie o istnienie kresu górnego (dolnego). Odpowiedź na to pytanie jest zawarta w przyjmowanej w $\mathbb{R}$ zasadzie (aksjomacie) ciągłości.

Aksjomat 2 (zasada ciągłości). *Każdy niepusty ograniczony z góry podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych ma w $\mathbb{R}$ kres górny, tzn.*

$$\textit{istnieje takie } a \in \mathbb{R}, \textit{ że } a = \sup A.$$

Założenie, że $A \neq \emptyset$ jest istotne w aksjomacie ciągłości. Aby to wyjaśnić, zauważmy, że każda liczba rzeczywista ogranicza zbiór pusty z góry. Zatem brak w aksjomacie ciągłości założenia, że A nie jest zbiorem pustym oznaczałby, że w zbiorze $\mathbb{R}$ istnieje liczba najmniejsza, a to nie jest prawdą.

Ćwiczenie **1.7.** Udowodnić, że każdy niepusty ograniczony z dołu podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych ma w $\mathbb{R}$ kres dolny, tzn. istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że $b = \inf A$.

Przykład **1.8.** Dla zbioru

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} : \; x = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

mamy: $\inf A = 0 \notin A$ oraz $\sup A = 1 \in A$.

Ćwiczenie **1.9.** W gazecie zamieszczono informację: Kres górny ludzkich możliwości w skoku wzwyż wynosi 3 metry.
(a) Czy oznacza to, że ktoś „przeskoczy" poprzeczkę zawieszoną na wysokości 3 m?
(b) Jak należy rozumieć to stwierdzenie w oparciu o definicję kresu górnego?

Ćwiczenie **1.10.** Udowodnić, że kres górny jest co najwyżej jeden. Sformułować i udowodnić analogiczne twierdzenie dla kresu dolnego.

Przykład **1.11.** $A := \{x : \; x = \sin \frac{1}{t}, \; t \in \mathbb{Q}\}$, $\inf A = -1$, $\sup A = 1$. Kres górny i kres dolny nie należą do zbioru A.

Przykład **1.12.** Zbiór $A := \{x \in \mathbb{R} : \; x = (-1)^n n, \; n \in \mathbb{N}\}$ nie ma w $\mathbb{R}$ ani kresu dolnego, ani kresu górnego. Gdy potraktujemy zbiór A jako podzbiór zbioru $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, który zdefiniujemy później (zob. str. 208), to $\inf A = -\infty$, $\sup A = +\infty$, bo dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności: $-\infty < x < +\infty$ i w związku z tym można wykazać, że $-\infty$ jest największym w $\overline{\mathbb{R}}$ elementem ograniczającym z dołu zbiór A. Podobnie $+\infty$ jest najmniejszym w $\overline{\mathbb{R}}$ elementem ograniczającym zbiór A z góry.

Zasada Archimedesa

Archimedes z Syrakuz
Ur. 287 p.n.e. w Syrakuzach na Sycylii
Zm. 212 p.n.e. w Syrakuzach na Sycylii

Grecki filozof przyrody i matematyk. Był autorem traktatu o kwadraturze odcinka paraboli, twórcą hydrostatyki i statyki, prekursorem rachunku całkowego. Stworzył też podstawy rachunku różniczkowego. Zajmował się również astronomią. Jest uznawany za najwybitniejszego matematyka swoich czasów.

Aksjomat 3 (zasada Archimedesa). *Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba naturalna n, że $x < n$.*

Wniosek 1.13. *Zbiór liczb naturalnych jest nieograniczony z góry.*

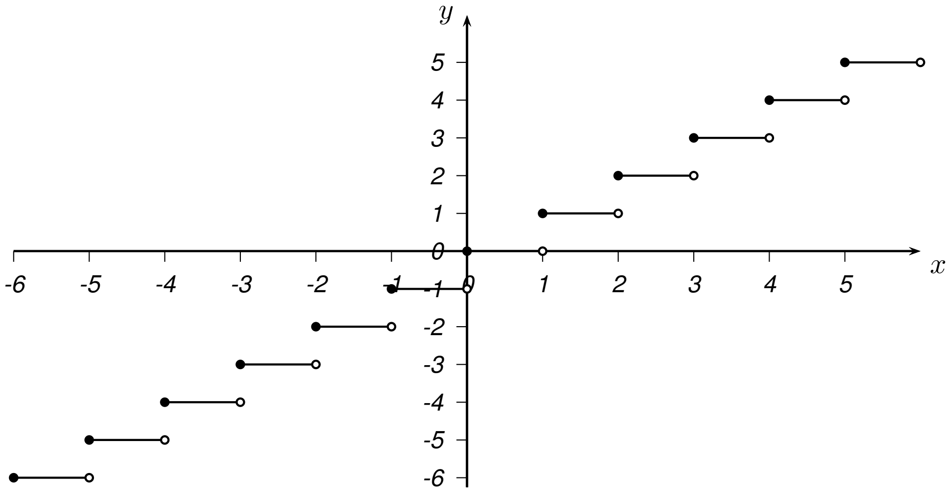
Twierdzenie 1.14. *Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jedna taka liczba całkowita n, że $n \leqslant x < n + 1$.*

Dowód. Dla $x \in \mathbb{Z}$ twierdzenie jest oczywiste; wystarczy przyjąć $n = x$. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą niecałkowitą. Zdefiniujmy zbiór $A := \{k \in \mathbb{Z} : k+1 > x\}$. Korzystając z twierdzenia 1.2, str. 12 pokażemy, że zbiór ten ma element najmniejszy. Zbiór A jest ograniczony z dołu, bo na mocy zasady Archimedesa istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $-x < n_0$, czyli $x \geqslant -n_0$ i $-n_0 \in \mathbb{Z}$ jest jego ograniczeniem dolnym. Ponadto zbiór A jest niepusty, co wykażemy metodą nie wprost. Gdyby zbiór A był pusty, to dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ spełniona byłaby nierówność $k \leqslant x$. Stąd dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $k \leqslant x$, co jest sprzeczne z zasadą Archimedesa. Zatem istnieje element najmniejszy zbioru A. Oznaczmy go przez $n + 1$. Stąd $n < x < n + 1$. □

Uwaga **1.15.** Zgodnie z twierdzeniem 1.14 dowolnej liczbie rzeczywistej x możemy przyporządkować dokładnie jedną taką liczbę całkowitą[3] $[x]$, że $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Wykres tak

[3]Nazywaną entier x.

zdefiniowanej funkcji został przedstawiony na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Wykres funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{R}$.

Metryka w $\mathbb{R}$

Do wyznaczenia odległości pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi używamy wartości bezwzględnej (modułu). Przypominamy, że

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Zdefiniowana za pomocą modułu funkcja odległości, tzn. funkcja

$$\rho: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto \rho(x, y) := |x - y|\,,$$

ma następujące, ważne dla naszych rozważań, własności:

(1) $\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) \geqslant 0$ *oraz* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – *dodatniość,*

(2) $\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ – *symetria,*

(3) $\forall\, x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ – *nierówność trójkąta.*

Te własności sprawiają, że funkcja ρ jest tzw. *metryką* w $\mathbb{R}$ (zob. definicja 6.1, str. 206).

ROZDZIAŁ 2

Ciągi i szeregi liczbowe

W tym rozdziale zajmiemy się ciągami i szeregami liczbowymi. Głównymi pojęciami są tu pojęcia granicy ciągu, zbieżności ciągu, sumy szeregu liczbowego i jego zbieżności.

Przez ciąg liczbowy rozumiemy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, zaś zbiorem wartości zbiór liczb rzeczywistych. Pisząc, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *ciągiem liczbowym*, lub krótko, że jest ciągiem, będziemy mieli na myśli funkcję $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$. Bardziej ogólne pojęcie ciągu czytelnik może znaleźć na str. 224.

Podamy teraz bardzo ważne pojęcie granicy ciągu liczbowego.

Definicja 2.1. Liczbę g nazywamy *granicą ciągu* (granicą właściwą) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba n_0, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon, \quad \text{co zapisujemy} \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \to g, \ \text{gdy } n \to \infty.$$

O ciągu, który ma granicę mówimy, że jest *zbieżny*. W przeciwnym przypadku mówimy, że jest *rozbieżny*. Używając kwantyfikatorów, definicja granicy przyjmuje postać

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, n_0 \,\forall\, n > n_0 \quad |a_n - g| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Nierówność (2.1) możemy zapisać w sposób równoważny, tzn.

$$|a_n - g| < \varepsilon \Longleftrightarrow g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon.$$

Wprost z definicji wynikają następujące własności:

Własność 2.2. *Dwa ciągi różniące się skończoną liczbą wyrazów są albo równocześnie zbieżne, albo równocześnie rozbieżne i jeśli są zbieżne, to mają tę samą granicę.*

Własność 2.3. *Dla ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mamy następujące warunki równoważne.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to a}|a_n - a| = 0.$$

Granicę ciągu można także określić, posługując się zwrotem „*prawie wszystkie* elementy zbioru”. Zwrotu tego używa się w odniesieniu do zbioru nieskończonego; oznacza on: wszystkie, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby elementów.

Do zdefiniowania tzw. granic niewłaściwych niezbędne jest rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych o dwa elementy: $-\infty$ i $+\infty$ (zob. str. 208). W tak otrzymanym zbiorze $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mamy nierówności: $-\infty < x < +\infty$, dla $x \in \mathbb{R}$. Po takim rozszerzeniu ma sens mówienie o przedziałach postaci $[-\infty, m)$ i $(M, +\infty]$.

Definicja 2.4. *Otoczeniem* punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ (lub krótko otoczeniem) nazywamy przedział $O_{x_0}(r) := (x_0 - r, x_0 + r)$. Zbiór $S_{x_0}(r) = O_{x_0}(r) \setminus \{x_0\}$ nazywamy *sąsiedztwem* punktu x_0 o promieniu r. Otoczeniem punktu $x_0 = +\infty$ nazywamy dowolny przedział postaci $(M, +\infty]$. Dowolny przedział postaci $[-\infty, m)$ nazywamy otoczeniem punktu $x_0 = -\infty$.

Definicja 2.5. Punkt x_0 nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru $D \subset \mathbb{R}$ jeżeli należy on do zbioru D wraz z pewnym jego otoczeniem.

Wykorzystując definicję otoczenia i terminu „prawie wszystkie”, możemy podać definicję granicy ciągu, równoważną definicji 2.1.

Definicja 2.6. Mówimy, że g jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli w dowolnym otoczeniu punktu g leżą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Definicja 2.6 wraz z definicją 2.4 dają możliwość wprowadzenia tzw. granic niewłaściwych.

Definicja 2.7 (granice niewłaściwe).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \quad a_n > M,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}\ \exists n_0\ \forall n > n_0 \quad a_n < m.$$

Przykład **2.8.** Ciąg $\{a_n = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę 0, bo w każdym przedziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (otoczeniu O_0 punktu 0) leżą wszystkie jego wyrazy o wskaźnikach $n > [\frac{1}{\varepsilon}]$.

Przykład **2.9.** Ciąg $\{a_n = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy w $\mathbb{R}$ (właściwej). Jego granicą w $\overline{\mathbb{R}}$ (niewłaściwą) jest $+\infty$, bo w każdym przedziale $(M, +\infty]$ (otoczeniu $O_{+\infty}$ punktu $+\infty$) leżą wszystkie jego wyrazy o wskaźnikach $n > [M]$.

Przykład **2.10.** Ciąg $\{a_n = (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny, bo nie ma takiego punktu w którego otoczeniu o promieniu mniejszym od 1 leżą prawie wszystkie jego wyrazy.

Podstawowe twierdzenia o granicach

Rozpoczniemy od odpowiedzi na pytanie: ile różnych granic może mieć dany ciąg liczbowy?

Twierdzenie 2.11 (o jednoznaczności granicy). *Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę (właściwą lub niewłaściwą).*

Dowód. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma dwie różne granice g i g' (właściwe lub nie). Z tego, że $g \neq g'$ wynika, że istnieją takie otoczenia O_g, $O_{g'}$, odpowiednio punktów g, g', że

$$O_g \cap O_{g'} = \emptyset.$$

Korzystając z definicji 2.6, w każdym z tych otoczeń leżałyby prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a to jest niemożliwe. □

Zbieżność a ograniczoność ciągu

Twierdzenie 2.12. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę właściwą, to jest ciągiem ograniczonym, tzn. istnieją takie liczby $m, M \in \mathbb{R}$, że*

$$m \leqslant a_n \leqslant M \quad \textit{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Dowód. Niech $g \in \mathbb{R}$ będzie granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zgodnie z definicją granicy do liczby $\varepsilon = 1$ możemy dobrać $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$g - 1 < a_n < g + 1 \quad \text{dla } n > n_0.$$

Przy tak dobranym n_0 mamy nierówności:

$$m = \min\{g-1, a_1, \ldots, a_{n_0}\} \leqslant a_n \leqslant \max\{g+1, a_1, \ldots, a_{n_0}\} = M \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

co kończy dowód ograniczoności ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Uwaga **2.13.** Ciąg ograniczony nie musi być ciągiem zbieżnym. Ciąg $\{(-1)^n\}$ jest jednym z przykładów ciągu ograniczonego i rozbieżnego.

Z twierdzenia 2.12 i z powyższej uwagi wynika, że ograniczoność ciągu nie jest warunkiem wystarczającym jego zbieżności. Okazuje się, że dla ciągów monotonicznych jest to warunek wystarczający. Przypomnijmy, że o ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mówimy, że jest *monotoniczny*, gdy jest ciągiem *rosnącym*, tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geqslant a_n$$

lub ciągiem *malejącym*, tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leqslant a_n.$$

Twierdzenie 2.14. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny, to ma granicę*
(a) *właściwą, gdy jest ograniczony i wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, & \textit{gdy } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ jest rosnący}, \\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, & \textit{gdy } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ jest malejący}, \end{cases}$$

(b) *niewłaściwą, gdy nie jest ograniczony i wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \textit{gdy } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ jest rosnący}, \\ -\infty, & \textit{gdy } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ jest malejący}. \end{cases}$$

Dowód. Rozpatrzymy tylko przypadek ciągu rosnącego. W przypadku ciągu malejącego dowód jest analogiczny i proponujemy go jako ćwiczenie.

Ad (a). Niech K będzie kresem górnym zbioru złożonego z wyrazów ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Z definicji kresu górnego (zob. definicja 1.6, str. 14) wynika, że

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 : \quad K - \varepsilon < a_{n_0}.$$

Ponieważ ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący, więc

$$a_{n_0} \leqslant a_n \quad \text{dla } n \geqslant n_0.$$

Stąd wynika, że

$$K - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant K < K + \varepsilon \quad \text{dla } n > n_0,$$

a to, dzięki dowolności wyboru $\varepsilon > 0$, oznacza, że $\lim_{n\to\infty} a_n = K$.

Ad (b). Stąd, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i nie jest ograniczony wynika, że nie jest ograniczony z góry. Zatem

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 : \quad a_{n_0} > M.$$

Z monotoniczności ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wynika, że

$$a_n \geqslant a_{n_0} > M \quad \text{dla } n > n_0,$$

stąd, dzięki dowolności wyboru M, wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

□

Korzystając z tego faktu, łatwo zauważamy, że (dla $k > 0$) granicą ciągu liczbowego $\{a_n = \frac{1}{n^k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest 0, bo jest to ciąg malejący i 0 jest kresem dolnym zbioru złożonego z jego wyrazów.

Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie o trzech ciągach jest jednym z najczęściej stosowanych twierdzeń. Prócz zastosowania w wyznaczaniu granic wielu konkretnych ciągów, stosuje się je przy dowodzeniu twierdzeń o granicach ciągów.

Twierdzenie 2.15 (o trzech ciągach). *Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczbowymi. Jeżeli istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \textit{dla } n > n_0 \quad \textit{i} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g, \tag{2.3}$$

to ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ też jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g.$$

Dowód. Niech O_g będzie dowolnym otoczeniem punktu g. Z założenia wynika, że w O_g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zatem, wobec nierówności (2.3) i faktu, że O_g jest przedziałem wynika, że leżą w nim prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Stąd, dzięki dowolności wyboru otoczenia O_g, wynika, że g jest granicą ciągu $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Dla granic niewłaściwych odpowiednikiem twierdzenia o trzech ciągach jest *twierdzenie o spychaniu*, którego dowód niczym istotnym nie różni sie od dowodu twierdzenia o trzech ciągach.

Twierdzenie 2.16 (o spychaniu). *Niech* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będą takimi ciągami liczbowymi, że* $a_n \leqslant b_n$ *dla prawie wszystkich* n. *Wtedy:*

(i) *jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

(ii) *jeżeli* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Przykład **2.17.** Korzystając z twierdzenia o spychaniu, możemy zbadać zbieżność ciągu $a_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}$, porównując go z ciągiem $b_n = n - 1$. Mamy nierówności:

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{n+1} = \frac{n^2}{n+1} + 1 \geqslant \frac{n^2}{n+1} \geqslant \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} = n - 1 = b_n.$$

Ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i nieograniczony, więc jego granicą jest $+\infty$. Zatem z twierdzenia o spychaniu wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n+1} = +\infty.$$

Podany w przykładzie 2.17 sposób wyznaczenia granicy ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest najprostszy. W przyszłości poznamy inne sposoby obliczania granic tego typu ciągów.

Twierdzenia o monotonii

Twierdzenia o monotonii dotyczą związków, jakie zachodzą pomiędzy nierównościami spełnianymi przez wyrazy dwóch danych ciągów a nierównościami zachodzącymi pomiędzy ich granicami.

Twierdzenie 2.18. *Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad i \quad a < b,$$

to istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, *że* $a_n < b_n$ *dla* $n > n_0$.

Dowód. Weźmy $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$. Z założenia, że a jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wynika istnienie takiego $n_1 \in \mathbb{N}$, że

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{dla } n > n_1. \tag{2.4}$$

Analogicznie z założenia, że b jest granicą ciągu $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wynika istnienie takiego $n_2 \in \mathbb{N}$, że

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \text{dla } n > n_2. \tag{2.5}$$

Niech $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Z nierówności (2.4) i (2.5) otrzymujemy

$$a_n < a + \frac{b-a}{3} < b - \frac{b-a}{3} < b_n \quad \text{dla } n > n_0. \tag{2.6}$$

Z przechodniości nierówności wynika, że $a_n < b_n \quad$ dla $n > n_0$, co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 2.19. *Jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \textit{i} \quad a_n \geqslant b_n \quad \textit{dla } n > n_0,$$

to $a \geqslant b$*.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $a < b$. Z twierdzenia 2.18 wynika, że istnieje takie $n_1 \in \mathbb{N}$, że dla $n > n_1$, $a_n < b_n$, a to jest sprzeczne z założeniem, że $a_n \geqslant b_n \quad$ dla $n > n_0$. □

Twierdzenia 2.18 i 2.19 noszą nazwę twierdzeń o *monotonii*. Twierdzenie 2.19 orzeka, że nierówność słaba zachowuje się w granicy. Nierówność mocna może się w granicy nie zachować. Na przykład dla każdego naturalnego n spełniona jest nierówność mocna

$$-\frac{1}{n} < \frac{1}{n},$$

natomiast

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Działania algebraiczne na ciągach

Rozpoczniemy od bardzo często stosowanego lematu.

Lemat 2.20. *Jeżeli ciąg* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny do zera oraz ciąg* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem ograniczonym, to ciąg* $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ma granicę równą* 0.

Dowód. Ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc istnieje takie $K > 0$, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy oszacowanie $|a_n| \leqslant K$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Zgodnie z założeniem do liczby $\frac{\varepsilon}{K}$ możemy dobrać n_0 tak, aby

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \quad \text{dla } n > n_0.$$

Przy tak dobranym n_0 mamy

$$|a_nb_n| \leqslant |a_n|\,|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{K}K = \varepsilon \quad \text{dla } n > n_0,$$

co dowodzi zbieżności ciągu $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do zera i kończy dowód lematu. □

Ciągi liczbowe są funkcjami o wartościach rzeczywistych, możemy więc je dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić przez siebie. Dla ciągów zbieżnych do granic właściwych mamy następujące twierdzenie, nazywane odpowiednio twierdzeniem o granicy *sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów* zbieżnych.

Twierdzenie 2.21. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *to*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(iii) *jeżeli* $b \neq 0$ *i* $b_n \neq 0$ *dla* $n = 1, 2, \ldots,$ *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Dowód. Dla wykazania punktu (i) załóżmy, że $a_n \to a$, $b_n \to b$ i weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z definicji granicy wynika, że istnieją wskaźniki n_1 i n_2 takie, że

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > n_1, \tag{2.7}$$

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > n_2. \tag{2.8}$$

Obie te nierówności zachodzą równocześnie dla wskaźników $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Dodając je stronami, otrzymamy

$$(a + b) - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon \quad \text{dla } n > n_0,$$

z czego wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Mnożąc stronami (2.8) przez -1 i dodając stronami do (2.7), otrzymamy, że

$$(a-b)-\varepsilon < a_n - b_n < a-b+\varepsilon \quad \text{dla } n > n_0,$$

z czego wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a-b.$$

Do wykazania (ii) skorzystamy z równości:

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a. \tag{2.9}$$

Ciąg $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę równą 0, bo $a_n \to a,$ gdy $n \to \infty$ (zob. własność 2.3, str. 19). Ciąg $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jako zbieżny jest ograniczony (zob. twierdzenie 2.12, str. 20). Zatem na mocy lematu 2.20, str. 25, ciąg $(a_n - a)b_n \to 0,$ gdy $n \to \infty$. Z takich samych powodów ciąg $(b_n - b)a_n \to 0,$ gdy $n \to \infty$. Korzystając z twierdzenia o granicy sumy ciągów (punkt (i)), otrzymamy, że $(a_n b_n - ab) \to 0,$ gdy $n \to \infty$. Stąd wnioskujemy (zob. własność 2.3, str. 19), że

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Aby wykazać (iii), wystarczy pokazać, że przy naszych założeniach

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

i skorzystać z twierdzenia o granicy iloczynu dwóch ciągów (punkt (ii)).

W myśl twierdzenia o granicy iloczynu (punkt (ii)) $bb_n \to b^2,$ gdy $n \to \infty$. Zatem istnieje takie n_0, że

$$b^2 - \frac{b^2}{2} < bb_n < b^2 + \frac{b^2}{2} \quad \text{dla } n > n_0.$$

Stąd wynika, że ciąg $\left\{\dfrac{1}{bb_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Zatem w myśl lematu 2.20

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right) = \lim_{n\to\infty}(b-b_n)\frac{1}{b_n b} = 0,$$

ponieważ jest to granica iloczynu ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego. Stąd wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b},$$

co kończy dowód. □

W $\overline{\mathbb{R}}$ nie wszystkie elementy umiemy dodawać, mnożyć czy też dzielić przez siebie. Jeśli przyjmiemy, że np. $a + \infty = +\infty$, będziemy mieli na myśli intuicyjnie jasne twierdzenie mówiące o tym, że jeśli jeden ciąg zmierza do $a \in \mathbb{R}$, drugi zaś do $+\infty$, to ich suma zmierza do $+\infty$. Również, z intuicyjnie jasnego powodu, nie zdefiniujemy iloczynu (symbolu) $0 \cdot \infty$, bo wynik mnożenia liczby „dowolnie małej” przez „dowolnie dużą” może być zarówno „dowolnie mały”, jak też i „dowolnie duży”.

Dla przykładu: liczba „dowolnie mała” $\frac{1}{n}$ pomnożona przez „dowolnie dużą” n daje w wyniku liczbę 1, ale pomnożona przez n^2 da dowolnie dużą, gdy n jest dostatecznie duże.

Przyjmujemy następującą umowę: symbol ∞ oznaczać będzie alternatywę $+\infty$ lub $-\infty$ i używać go będziemy tam, gdzie nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

Twierdzenie 2.22 (działania na granicach niewłaściwych).

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty,\ a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty \text{ gdy } a > 0 \\ -\infty \text{ gdy } a < 0 \end{cases}.$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} -\infty \text{ gdy } a > 0 \\ +\infty \text{ gdy } a < 0 \end{cases}.$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty.$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty, a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

Twierdzenie 2.22 nie obejmuje następujących symboli:

$$+\infty + (-\infty), \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0},$$

zwanych symbolami nieoznaczonymi. Nie są to jednak wszystkie symbole nieoznaczone. Pozostałe symbole nieoznaczone zostaną podane w dalszych rozważaniach. Znaczenie terminu „symbol nieoznaczony” wyjaśnimy dla symbolu $\frac{\infty}{\infty}$.

W poniższym przykładzie podamy kilka ilorazów ciągów o różnych granicach i tym samym „symbolu” $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład **2.23.** Policzmy następujące granice:

1. Niech $a_n = 2n^2 + 3n - 1$, $b_n = 5n^2 + 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2}{5}.$$

2. Niech $a_n = 3n + 1$, $b_n = 4n^2 + 2n - 3$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n + 1}{4n^2 + 2n - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0.$$

3. Niech $a_n = 4n^2 + 7$, $b_n = n + 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 7}{n + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty.$$

Z przykładu tego wynika, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, to tylko z tych informacji nic nie można wnioskować o granicy ilorazu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Analogiczna sytuacja jest w przypadku pozostałych symboli nieoznaczonych.

Ciągi liczbowe specjalne i ich granice

1. $a_n = \sqrt[n]{A}$, dla $n = 1, 2, \ldots, A > 0$.
Udowodnimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = 1.$$

Dowód. Rozpatrzmy dwa przypadki.
1. Jeżeli $A \geqslant 1$, to $\sqrt[n]{A} \geqslant 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$, czyli

$$\sqrt[n]{A} = 1 + a_n, \qquad \text{gdzie} \quad a_n \geqslant 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

Z nierówności Bernoullego (zob. twierdzenie 1.3, str. 13)

$$\forall x > -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

wynika, że

$$A = (1 + a_n)^n \geqslant 1 + na_n. \tag{2.11}$$

Z (2.11) i z tego, że $a_n \geqslant 0 \quad$ dla $n = 1, 2, \ldots,$ mamy

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{A-1}{n}. \tag{2.12}$$

Z nierówności (2.12) i na podstawie twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Stąd i z równości (2.10) wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = 1.$

2. Jeżeli $0 < A < 1$, to $B = \frac{1}{A}$ jest liczbą większą od jedności. Z pierwszej części dowodu otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B} = 1.$$

Z drugiej strony

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{B}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{B}} = 1,$$

co kończy dowód. □

2. $\quad a_n = \sqrt[n]{n}.$
Udowodnimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Ponieważ $n \geqslant 1$, więc

$$\sqrt[n]{n} \geqslant 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + d_n, \quad \text{gdzie} \quad d_n \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Zatem

$$n = (1+d_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} d_n + \binom{n}{2} d_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} d_n^n \geqslant \binom{n}{2} d_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} d_n^2.$$

Stąd dla $n > 1$

$$0 \leqslant d_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \tag{2.14}$$

Z nierówności (2.14) na podstawie twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Stąd i z (2.13) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3. $a_n = \sqrt[n]{b_n}$, gdzie $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $b > 0$ i $b_n \geqslant 0$, dla $n = 1, 2, \ldots$
Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Z założenia, że $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i $b > 0$ wynika, że istnieje taka liczba n_0, że dla $n > n_0$

$$\frac{b}{2} < b_n < \frac{3}{2}b,$$

więc dla $n > n_0$ otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\frac{b}{2}} < \sqrt[n]{b_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}b}. \tag{2.15}$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{b}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}b\right)} = 1$, więc z (2.15) i twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1.$$

Uwaga 2.24. Założenie, że $b > 0$ jest istotne, gdyż w przypadku ciągu $b_n = \frac{1}{n^n}$ mamy

$$a_n = (b_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \text{przy } n \to \infty.$$

Uwaga 2.25. Występujące powyżej założenia dotyczące ciągu $\{b_n\}$ można zastąpić założeniem słabszym

$$l \leqslant b_n \leqslant L \qquad \text{dla} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gdzie $l > 0$.

4. $a_n = q^n$.
Wykażemy, że:
a) jeżeli $q = 0$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$,
b) jeżeli $q = 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$,
c) jeżeli $|q| < 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$,
d) jeżeli $q > 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$,
e) jeżeli $q \leqslant -1$, to ciąg $\{q^n\}$ nie ma granicy.

Dowód. Przypadki a) i b) są oczywiste.
Ad c). Możemy założyć, że $q \neq 0$, bo przypadek $q = 0$ został już rozpatrzony w punkcie a). Ponieważ $|q| < 1$, więc

$$\frac{1}{|q|} > 1,$$

a zatem

$$\frac{1}{|q|} = 1 + d.$$

Stąd

$$\frac{1}{|q^n|} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+d)^n. \tag{2.16}$$

Z nierówności Bernoullego i z (2.16) otrzymujemy

$$\frac{1}{|q^n|} \geqslant 1 + nd,$$

czyli

$$0 < |q^n| \leqslant \frac{1}{1+nd},$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0.$$

Zatem (zob. własność 2.3, str. 19)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Ad d). W tym przypadku, jak łatwo zauważyć, ciąg $\{q^n\}$ jest rosnący i nie jest ograniczony z góry, a więc

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty.$$

Ad e). Dla $q = -1$, $q^n = (-1)^n$, a więc w tym przypadku ciąg $\{q^n\}$, jak wiemy, jest rozbieżny. Dla $q < -1$ łatwo zauważyć, że ciąg $\{q^n\}$ jest nieograniczony, wobec czego nie może mieć granicy właściwej. Ciąg $\{q^n\}$ nie może mieć również granicy niewłaściwej, ponieważ istnieje nieskończenie wiele wyrazów większych od zera i nieskończenie wiele wyrazów mniejszych od zera. □

5. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
O tym ciągu udowodnimy, że jest zbieżny. W tym celu wykażemy, że ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest
a) rosnący,
b) ograniczony z góry.

Ad a). Z nierówności Bernoulliego mamy

$$\left(1 + \left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \geqslant 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

więc

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Stąd dla $n > 1$ otrzymujemy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

czyli

$$a_n \geqslant a_{n-1} \qquad \text{dla} \quad n > 1.$$

Ad b). Ze wzoru Newtona

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)}{n!} \leqslant \\ &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3, \end{aligned}$$

a więc z powyższego i z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ otrzymujemy, że

$$2 \leqslant a_n < 3 \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Na podstawie udowodnionych własności a) i b) oraz twierdzenia 2.14 wynika istnienie granicy właściwej ciągu $\{a_n\}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

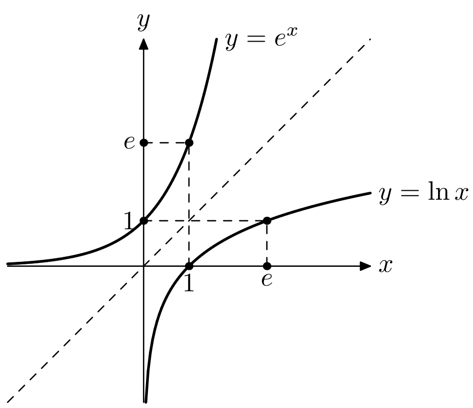
Liczbę będącą granicą tego ciągu oznacza się literą e i nazywa „liczbą e”.
A zatem

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z nierówności (2.17) i z twierdzenia o monotonii wynika, że liczba ta spełnia nierówność $2 \leqslant e \leqslant 3$. Dowodzi się, że e jest liczbą niewymierną i jej przybliżona wartość wynosi

$$e = 2,718281828\ldots$$

Liczne zastosowania teoretyczne i praktyczne znajdują przede wszystkim logarytmy przy podstawie e, zwane logarytmami naturalnymi. Zamiast $\log_e x$ pisze się zwykle $\ln x$ i czyta się: logarytm naturalny z x. Można również rozpatrywać funkcję wykładniczą o podstawie e. Na rysunku 2.1 przedstawiono wykresy funkcji logarytmicznej i wykładniczej o podstawie e.



Rys. 2.1. Funkcja logarytmiczna i wykładnicza

Rozważmy teraz ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}, \qquad \text{gdzie} \quad |\alpha_n| \to +\infty, \quad \text{gdy} \quad n \to +\infty.$$

Ciąg ten jest uogólnieniem ciągu rozważanego w punkcie 5 i dowodzi się, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e.$$

Przy obliczaniu granic ciągów liczbowych często korzysta się z następującego twierdzenia, które podamy bez dowodu.

Twierdzenie 2.26. *Niech* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *będą ciągami liczbowymi, gdzie* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = 0.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = +\infty.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{gdy} \quad a > 1, \\ 0 & \text{gdy}\ 0 \leqslant a < 1. \end{cases}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad a > 1, \\ +\infty & \text{gdy}\ 0 < a < 1. \end{cases}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{gdy}\ b > 0, \\ 0 & \text{gdy}\ b < 0. \end{cases}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = +\infty.$

Uwaga **2.27.** Twierdzenie 2.26 nie obejmuje następujących symboli: 0^0, 1^∞, ∞^0, zwanych *symbolami nieoznaczonymi*.

Po twierdzeniu 2.21 zostały podane cztery symbole nieoznaczone, a więc łącznie mamy siedem następujących symboli nieoznaczonych:

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad (+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Przykład **2.28.** Obliczyć następujące granice:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-2n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2n-1}}{\sqrt[4]{2n^3+n^2+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{3}{4}}}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[4]{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[4]{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}}=0.$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+4}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4+3-4}{2n^2+4}\right)^{n^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n^2+4}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+4}{-1}}\right)^{n^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+4}{-1}}\right)^{\frac{2n^2+4}{-1}}\right)^{\frac{-n^2}{2n^2+4}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Punkty skupienia ciągu

Niech będzie dany ciąg nieskończony $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}=f\colon\mathbb{N}\ni n\to a_n\in\mathbb{R}$ oraz niech $\varphi\colon\mathbb{N}\ni\nu\to n_\nu\in\mathbb{N}$ będzie odwzorowaniem injektywnym i rosnącym.

Definicja 2.29. Złożenie $f\circ\varphi=\{a_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ nazywa się podciągiem, ciągiem częściowym lub ciągiem wybranym z ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Przykład **2.30.** Niech $f=\{(-1)^n\}$ oraz $\varphi:\mathbb{N}\ni\nu\to 2\nu\in\mathbb{N}$.

$$(f\circ\varphi)(\nu)=f(\varphi(\nu))=(-1)^{2\nu}=1.$$

Czyli $f\circ\varphi=\{a_{2\nu}\}=\{1\}$ jest ciągiem stałym. Biorąc $\varphi\colon\mathbb{N}\ni\nu\to(2\nu-1)\in\mathbb{N}$, otrzymujemy podciąg złożony z nieparzystych wyrazów ciągu $\{(-1)^n\}$. Jest to również ciąg stały $\{-1\}$ i jest innym podciągiem ciągu $\{(-1)^n\}$.

Definicja 2.31. Niech $\{a_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ będzie podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Jeżeli istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa) ciągu $\{a_{n_\nu}\}$, to tę granicę nazywa się granicą częściową lub punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

Pojawia się naturalne pytanie: Czy każdy ciąg liczbowy ma przynajmniej jeden punkt skupienia? Odpowiedź na to pytanie jest zawarta w w twierdzeniu Bolzano–Weierstrassa.

Bernard Bolzano
Ur. 5 października 1781 w Pradze
Zm. 18 grudnia 1848

Był księdzem. Jego dzieła poświęcone były matematyce, teologii, ekonomii, dydaktyce, religii i logice. Był pierwszym, który podał w pełni ścisłą definicję granicy ciągu. Wykazał także, że każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych posiada podciąg zbieżny (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, obecnie formułowane w ogólnej postaci w przestrzeni $\mathbb{R}^n$).

Twierdzenie 2.32 (Bolzano–Weierstrassa). *Z każdego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da się wybrać podciąg zbieżny do granicy skończonej lub nie.*

Dowód. W zależności od tego, czy ciąg jest ograniczony, czy nieograniczony, rozważymy dwa przypadki.

1. Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, tzn. wszystkie jego wyrazy leżą w pewnym przedziale $[a_1, b_1]$. Podzielmy ten przedział na dwie równe części (podprzedziały domknięte) i zauważmy, że przynajmniej w jednej z nich leży nieskończenie wiele wyrazów naszego ciągu. Oznaczmy ten podprzedział przez $[a_2, b_2]$. Z kolei dzieląc $[a_2, b_2]$ na dwie równe części, oznaczmy przez $[a_3, b_3]$ ten z otrzymanych podprzedziałów, w którym jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Postępując tak dalej, otrzymamy zstępujący ciąg przedziałów

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_2, b_3] \supset \dots$$

Ciąg $\{a_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ lewych końców jest rosnący i ograniczony z góry, zaś ciąg $\{b_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ prawych końców jest malejący i ograniczony z dołu. Z twierdzenia 2.14 (o zbieżności ciągu monotonicznego) wynika, że ciągi te są zbieżne. Oznaczmy odpowiednio ich granice przez a, b. Granice te są równe, ponieważ

$$a - b = \lim_{\nu\to\infty}(a_\nu - b_\nu) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{b_1 - a_1}{2^{\nu-1}} = 0.$$

Pierwszy wyraz x_{n_1} szukanego podciągu $\{x_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ wybieramy dowolnie. Następnie $n_2 > n_1$ wybieramy tak, aby $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. Postępując tak dalej, otrzymamy podciąg $\{x_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ o wyrazach spełniających nierówności

$$a_\nu \leqslant x_{n_\nu} \leqslant b_\nu \quad \text{dla } \nu \in \mathbb{N}$$

i w myśl twierdzenia o trzech ciągach (zob. twierdzenie 2.15, str. 22)

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{n_\nu} = a.$$

2. Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ograniczony, tzn. nie jest ograniczony z dołu lub z góry. Rozważymy tylko przypadek ciągu nieograniczonego z góry. Pierwszy wyraz x_{n_1} szukanego podciągu wybierzmy tak, aby $x_{n_1} > 1$. Wyraz x_{n_2} wybierzmy tak, aby $n_2 > n_1$ oraz aby $x_{n_2} > 2$. Taki wybór jest możliwy, bo ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ograniczony z góry. Postępując tak dalej, otrzymamy podciąg $\{x_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ o wyrazach spełniających nierówności

$$x_{n_\nu} > \nu \quad \text{dla } \nu \in \mathbb{N}$$

i z twierdzenia o spychaniu (zob. twierdzenie 2.16, str. 23) otrzymamy, że

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{n_\nu} = +\infty.$$

□

Oznaczmy przez A zbiór złożony ze wszystkich granic częściowych ciągu $\{a_n\}$. $A \subset \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Oznaczmy przez[1]

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} +\infty, & \text{gdy} \quad +\infty \in A, \\ \sup A, & \text{gdy } +\infty \notin A \quad \text{i} \quad A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{gdy} \quad A = \{-\infty\}. \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \begin{cases} -\infty, & \text{gdy} \quad -\infty \in A, \\ \inf A, & \text{gdy } -\infty \notin A \quad \text{i} \quad A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{gdy} \quad A = \{+\infty\}. \end{cases} \tag{2.19}$$

[1] $\limsup$, $\liminf$ czytamy odpowiednio: limes superior, limes inferior.

Definicja 2.33. Zdefiniowane wielkości (2.18) i (2.19) nazywamy odpowiednio *granicą górną* i *granicą dolną* ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Uwaga **2.34.** Z określenia granicy górnej i dolnej ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wynika, że istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do granicy górnej i podciąg zbieżny do granicy dolnej.

Przykład **2.35.** Rozważmy ciąg $\{(-1)^n\}$. W tym przypadku $A = \{-1, 1\}$. Zatem

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1,$$

natomiast $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$.

Przykład **2.36.** Niech $a_n = (2 + (-1)^n)^n$, $A = \{1, +\infty\}$, więc

$$\limsup_{n\to\infty}(2 + (-1)^n)^n = +\infty, \qquad \liminf_{n\to\infty}(2 + (-1)^n)^n = 1.$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2.37. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby dany ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ miał granicę jest, aby granica górna ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ była równa granicy dolnej tego ciągu i wówczas*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dowód. Udowodnimy najpierw warunek konieczny, tzn. jeśli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Rozważymy dwa przypadki:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = g \in \mathbb{R}$,
b) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Ad a). Przypuśćmy, że

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n = \beta.$$

Istnieją więc takie dwa podciągi $\{a_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ i $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{a_n\}$, że

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = \alpha, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \beta.$$

Z definicji granicy ciągu wynika, że w dowolnym otoczeniu liczby α znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ i w dowolnym otoczeniu liczby β znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ponieważ $\alpha < \beta$, więc ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie może być zbieżny, a to jest sprzeczne z założeniem.

Ad b). Ponieważ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, więc również $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Niech $\beta = \liminf_{n\to\infty} a_n$ i przypuśćmy, że $\beta < +\infty$. Podobnie jak w przypadku a), wybierając podciąg zbieżny do β, dochodzimy do sprzeczności. Analogicznie rozumujemy, gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Udowodnimy teraz, że warunek ten jest również wystarczający. Niech

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = g$$

będzie liczbą skończoną. Wystarczy udowodnić, że w każdym otoczeniu liczby g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$. Przypuśćmy, że istnieje otoczenie $(g - \varepsilon_0, g + \varepsilon_0)$ liczby g takie, że poza tym otoczeniem znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Z twierdzeń 2.32 i 2.18 wynika, że z ciągu $\{a_n\}$ da się wybrać podciąg zbieżny do liczby $\alpha \notin (g - \varepsilon_0, g + \varepsilon_0)$, a to jest sprzeczne z tym, że $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = g$.

Jeżeli $g = +\infty$ lub $g = -\infty$, rozumowanie jest analogiczne. □

Z twierdzenia 2.37 wynika następujący

Wniosek 2.38. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym rozbieżności ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest, by istniały dwa podciągi tego ciągu zbieżne do dwóch różnych granic.*

Przykład **2.39.** Ciąg

$$a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2} n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ma dwa punkty skupienia. Podciąg złożony z wyrazów parzystych zmierza do $+\infty$, natomiast podciąg złożony z wyrazów nieparzystych zmierza do 0. Zatem, zgodnie z wnioskiem 2.38, ciąg ten nie jest zbieżny.

Warunek Cauchy'ego

Za pomocą warunku Cauchy'ego definiuje się tzw. przestrzenie metryczne zupełne, przestrzenie Banacha i przestrzenie Hilberta. Podstawowe informacje o tych przestrzeniach czytelnik może znaleźć np. w paragrafach 6.8 (str. 235), 7.2 (str. 246) i 7.3 (str. 252) tej książki.

Definicja 2.40. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall\, r, s > n_0 \quad |a_r - a_s| < \varepsilon.$$

Uwaga* **2.41.** Zastępując w powyższej definicji $|a_r - a_s|$ odległością $\rho(a_r, a_s)$ punktu a_r od punktu a_s, otrzymamy definicję warunku Cauchy'ego w przestrzeniach metrycznych (zob. definicja 6.70, str. 235).

Twierdzenie 2.42 (warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu). *Ciąg* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Podamy dowód warunku koniecznego, tzn. jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ jest zbieżny, to spełnia warunek Cauchy'ego.

Ze zbieżności ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ wynika, że

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall\, n > n_0 \quad |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jeżeli więc $r > n_0$ i $s > n_0$, to

$$|a_r - g| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |a_s - g| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.20}$$

Ponieważ

$$|a_r - a_s| = |(a_r - g) - (a_s - g)| \leqslant |a_r - g| + |a_s - g|\,,$$

więc wobec (2.20)

$$|a_r - a_s| < \varepsilon \quad \text{dla } r,\, s > n_0,$$

co wobec dowolności liczby ε oznacza, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Do wykazania warunku wystarczającego trzeba pokazać, że

1. każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ograniczony,

2. jeżeli ciąg spełniający warunek Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny, to cały ciąg też jest zbieżny i jego granicą jest granica tego podciągu.

Istotnie, gdy ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, to na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa da się z niego wybrać podciąg zbieżny. Stąd na mocy punktu **2.** otrzymamy zbieżność całego ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ad **1.** Ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc do liczby $\varepsilon = 1$ możemy tak dobrać n_0, aby

$$|a_n - a_{n_0}| < 1 \quad \text{dla } n > n_0,$$

co oznacza, że wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o numerach większych od n_0 leżą w przedziale $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Zatem przyjmując

$$a = \min\{a_{n_0} - 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}, \quad b = \max\{a_{n_0} - 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$$

otrzymamy, że wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ leżą w przedziale $[a, b]$.

Ad **2.** Niech ciąg$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc $N = N(\varepsilon)$, takie że

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{dla } n,\, m > N. \tag{2.21}$$

Niech $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnym do a. Ponieważ $n_k \geqslant k$ dla każdego k, więc z (2.21) wnosimy, że

$$|a_k - a_{n_k}| < \varepsilon \quad \text{dla } k > N,$$

co wobec dowolności wyboru ε oznacza, że

$$\lim_{k\to\infty} (a_k - a_{n_k}) = 0.$$

Z równości $a_k = (a_k - a_{n_k}) + a_{n_k}$ wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a,$$

co kończy dowód.

□

2.1. Szeregi liczbowe

Niech będzie dany ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Z wyrazów tego ciągu tworzymy nowy ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \tag{2.22}$$

Wyrazy tego ciągu są skończonymi sumami liczb rzeczywistych, więc potrafimy im nadać sens liczbowy. Naszym celem jest nadanie sensu liczbowego nieskończonej sumie: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ Takie nieskończone sumy nazywamy szeregami.

Definicja 2.43. Szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.23}$$

nazywamy parę ciągów $(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. Ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem wyrazów szeregu* (2.23), a_n nazywamy n*-tym wyrazem*, ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem sum częściowych*, zaś S_n nazywamy n*-tą sumą częściową* tego szeregu. O szeregu (2.23) mówimy, że jest zbieżny, gdy ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jego sum częściowych jest zbieżny w $\mathbb{R}$ (ma granicę właściwą). Gdy szereg (2.23) jest zbieżny, to liczbę

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n$$

nazywamy sumą szeregu (2.23) i pisząc

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \tag{2.24}$$

będziemy mieli na myśli jego sumę.

O szeregu, który nie jest zbieżny, mówimy, że jest *rozbieżny*.

Uwaga **2.44.** Należy pamiętać, że szereg i suma szeregu są to dwa różne pojęcia, więc równość (2.24) ma charakter umowny.

Przykład **2.45.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{2.25}$$

W tym celu n-ty wyraz szeregu (2.25) przedstawimy w postaci

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

gdzie A i B są stałymi, które należy wyliczyć. Przekształcimy ostatnią równość następująco:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \Leftrightarrow 1 = An + A + Bn \Leftrightarrow 1 = n(A+B) + A.$$

Stąd $A + B = 0$ i $A = 1$. Zatem $B = -1$, więc

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Szereg (2.25) przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \tag{2.26}$$

Ciąg sum częściowych szeregu (2.26), a tym samym (2.25), wyraża się wzorem

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

czyli szereg (2.25) jest zbieżny i jego suma wynosi 1, co zapisujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Uwaga **2.46.** Zwracamy uwagę czytelnika, że obliczenie sumy szeregu jest na ogół zadaniem trudnym albo nawet niewykonalnym. Okazuje się jednak, że w wielu zagadnieniach znajomość sumy szeregu nie jest istotna, natomiast jest istotna tylko informacja, czy szereg jest zbieżny, czy rozbieżny.

Jeżeli w szeregu (2.23) pominiemy n początkowych wyrazów, to otrzymamy nowy szereg

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}. \tag{2.27}$$

Szeregi (2.23) i (2.27) mają tę własność, że dla każdego ustalonego n są obydwa zbieżne albo obydwa rozbieżne. Aby tego dowieść, wystarczy wykazać, że jeżeli zbieżny jest szereg (2.23), to zbieżny jest również szereg (2.27) i na odwrót.

Przypuśćmy, że zbieżny jest szereg (2.23). Sumy częściowe S_n i S_{n+m} szeregu (2.23) oraz suma częściowa S'_m szeregu (2.27) związane są zależnością

$$S'_m = S_{m+n} - S_n. \tag{2.28}$$

Jeżeli więc szereg (2.23) jest zbieżny, to dla każdego ustalonego n oraz dla $m \to \infty$ istnieje granica właściwa

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = S - S_n,$$

gdzie S jest sumą szeregu (2.23). Ostatnia równość oznacza, że szereg (2.27) jest zbieżny. Na odwrót, jeżeli dla pewnego n jest zbieżny szereg (2.27), to przy $m \to \infty$ na podstawie równości (2.28) mamy

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S' + S_n,$$

gdzie S' jest sumą szeregu (2.27), a zatem szereg (2.23) jest zbieżny. Wynika stąd ważny

Wniosek 2.47. *Jeżeli w szeregu zbieżnym (albo rozbieżnym) pominiemy skończoną ilość wyrazów, to otrzymamy szereg zbieżny (albo odpowiednio – rozbieżny).*

Szeregi (2.23) i (2.27) mogą mieć różne sumy, lecz badanie zbieżności szeregu (2.23) można zawsze zastąpić badaniem zbieżności szeregu (2.27) i na odwrót.

Jeżeli szereg (2.23) jest zbieżny, to dla każdego naturalnego n można jego sumę przedstawić w postaci $S = S_n + R_n$, gdzie R_n oznacza sumę szeregu (2.27) i nazywa się ją krótko n-tą resztą zbieżnego szeregu (2.23). Ponieważ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, więc

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Wniosek 2.48. *Jeżeli szereg jest zbieżny, to ciąg $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jego n-tych reszt zmierza do zera, gdy n zmierza do nieskończoności.*

Definicja 2.49. Dwa szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

nazywa się równymi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n = b_n$, dla $n = 1, 2, \ldots$

Uwaga **2.50.** Jeżeli dwa szeregi są równe, to mają równe sumy, ale nie na odwrót.

Dla szeregów liczbowych przyjmuje się następujące określenia:

$$k\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} k a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Korzystając z twierdzeń o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych, możemy udowodnić następujące

Twierdzenie 2.51. *Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

i $k \in \mathbb{R}$, *to*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = kA.$$

Warunek konieczny i warunek Cauchy'ego

Warunek konieczny da nam jedynie możliwość stwierdzenia, czy należy kontynuować badanie zbieżności danego szeregu.

Twierdzenie 2.52 (warunek konieczny zbieżności szeregu). *Jeżeli szereg* (2.23) *jest zbieżny, to* $a_n \to 0$, *gdy* $n \to \infty$.

Dowód. Ze zbieżności szeregu (2.23) wiemy, że istnieje takie $S \in \mathbb{R}$, że

$$S_n \to S, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Dla ciągu

$$\widetilde{S}_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, \\ S_{n-1} & \text{dla } n > 0 \end{cases}$$

mamy $\widetilde{S}_n \to S$, gdy $n \to \infty$. Ze względu na ciągłość działań mamy

$$S_n - \widetilde{S}_n = a_n \to S - S = 0, \text{ gdy } n \to \infty,$$

co kończy dowód. □

Warunek Cauchy'ego jest bezpośrednim przeniesieniem tego warunku z ciągów liczbowych na ciągi sum częściowych szeregów.

Twierdzenie 2.53 (warunek Cauchy'ego). *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0\, \forall\, r > n_0\, \forall\, s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \left| \sum_{n=r}^{r+s} a_n \right| < \varepsilon. \tag{2.29}$$

Szereg geometryczny

Zbadamy teraz zbieżność szeregu geometrycznego, tzn. szeregu postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots, \tag{2.30}$$

znanego czytelnikowi z programu szkoły średniej.

Jeżeli $a = 0$, to szereg (2.30) jest zbieżny i jego suma wynosi 0. Jeżeli $a \neq 0$, to zbieżność szeregu (2.30) zależy od ilorazu szeregu, tzn. od q. Zależność tę wyraża następujące

Twierdzenie 2.54. *Szereg* (2.30) *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy* $|q| < 1$. *Wówczas suma* S *szeregu* (2.30) *wyraża się wzorem*

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Dowód. Jeżeli $|q| < 1$, to z własności ciągu geometrycznego $\{q^n\}$ wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Jeżeli natomiast $|q| \geqslant 1$, to dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$

$$|a_n| = |aq^n| \geqslant |a| > 0.$$

Nierówność ta oznacza, że szereg (2.30) nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, a zatem jest rozbieżny. $\square$

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Zajmiemy się teraz badaniem zbieżności szeregów, których wyrazy są nieujemne, tzn.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{gdzie} \quad a_n \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.31}$$

Rozważmy dla szeregu (2.31) ciąg sum częściowych $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1,\\
&S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \geqslant S_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n \geqslant S_{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Oznacza to, że ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla szeregu (2.31) jest rosnący.

Z twierdzenia 2.14 o ciągu monotonicznym wynika, że warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych jest, by ciąg sum częściowych tego szeregu był ograniczony z góry.

Rozpatrzmy następujący szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

zwany *szeregiem harmonicznym*. Udowodnimy, że jest on szeregiem rozbieżnym. Ponieważ jest to szereg postaci (2.31), więc wystarczy pokazać, że ciąg sum częściowych tego szeregu nie jest ograniczony z góry, a więc wystarczy wykazać, że ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ zawiera podciąg zbieżny do $+\infty$. Takim podciągiem jest podciąg $\{S_{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Istotnie,

$$\begin{array}{l}
S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1,\\
S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\cdot 2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\cdot n,
\end{array}$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty.$$

Uwaga **2.55.** Szereg harmoniczny jest przykładem szeregu, który spełnia warunek konieczny zbieżności, a mimo to jest rozbieżny, co wskazuje, że warunek ten nie wystarcza do zbieżności szeregu.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2.56 (Cauchy'ego). *Jeżeli wyrazy szeregu* (2.31) *spełniają warunek* $a_n \geqslant a_{n+1}$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$, *to szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny szereg postaci*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}. \tag{2.32}$$

Dowód. Niech $\{S_n\}$ oznacza ciąg sum częściowych szeregu (2.31) oraz $\{t_k\}$ oznacza ciąg sum częściowych szeregu (2.32).

Jeżeli $n < 2^k$, to

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k, \end{aligned}$$

czyli

$$S_n \leqslant t_k. \tag{2.33}$$

Jeżeli $n \geqslant 2^k$, to

$$\begin{aligned} S_n &\geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k, \end{aligned}$$

więc

$$2S_n \geqslant t_k. \tag{2.34}$$

Zatem, jeżeli szereg (2.31) jest zbieżny, to z nierówności (2.34) wynika ograniczoność ciągu $\{t_k\}$, a więc zbieżność szeregu (2.32). Odwrotnie, jeżeli szereg (2.32) jest zbieżny, to analogicznie, z nierówności (2.33), otrzymujemy zbieżność szeregu (2.31), a to kończy dowód twierdzenia Cauchy'ego. □

Zastosujemy teraz twierdzenie Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu Dirichleta, tzn. szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha \in R. \tag{2.35}$$

Jeżeli $\alpha \leqslant 0$, to ciąg $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ nie dąży do zera, a więc szereg (2.35) jest rozbieżny. Jeżeli natomiast $\alpha > 0$, to szereg (2.35) spełnia założenia twierdzenia Cauchy'ego. Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego szereg (2.35) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k}. \tag{2.36}$$

Szereg (2.36) jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = 2^{1-\alpha}$. Z własności szeregu geometrycznego wynika, że szereg (2.36), a więc i szereg (2.35), jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| = 2^{1-\alpha} < 1$. Ostatnia nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Reasumując, otrzymujemy następujący

Wniosek 2.57. *Szereg* (2.35) *jest zbieżny, gdy* $\alpha > 1$ *i rozbieżny, gdy* $\alpha \leqslant 1$.

Do badania zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych stosuje się tzw. kryteria zbieżności szeregów. Kryteria zbieżności są pewnymi warunkami wystarczającymi zbieżności szeregów. W literaturze matematycznej znanych jest wiele kryteriów zbieżności szeregów, my jednak ograniczymy się tutaj do podania kilku z nich, najprostszych i najczęściej stosowanych.

Niech będą dane dwa szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_n \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.37}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{gdzie} \quad b_n \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.38}$$

Definicja 2.58. Jeżeli istnieje takie n_0, że

$$a_n \leqslant b_n \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0, \tag{2.39}$$

to szereg (2.37) nazywa się minorantą szeregu (2.38), natomiast szereg (2.38) nazywa się majorantą szeregu (2.37).

Posługując się pojęciem majoranty i minoranty szeregu liczbowego, sformułujemy następujące

Twierdzenie 2.59 (kryterium porównawcze). *Ze zbieżności majoranty wynika zbieżność minoranty, z rozbieżności minoranty wynika rozbieżność majoranty.*

Dowód. 1. Załóżmy, że szereg (2.38) jest zbieżny i oznaczmy przez $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ ciąg jego sum częściowych, a przez B jego sumę.

Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu (2.37). Z nierówności (2.39) dla $n > n_0$ mamy

$$A_n = A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leqslant A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \leqslant A_{n_0} + B.$$

Nierówność ta oznacza, że ciąg $\{A_n\}$ jest ograniczony od góry (i rosnący), a stąd już wynika zbieżność szeregu (2.37).

2. Załóżmy, że szereg (2.37) jest rozbieżny. Stąd i z warunku

$$a_n \geqslant 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty. \tag{2.40}$$

Dla $n > n_0$ z nierówności (2.39) otrzymujemy

$$B_n = B_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \geqslant B_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = B_{n_0} + A_n - A_{n_0},$$

czyli

$$B_n \geqslant A_n + B_{n_0} - A_{n_0}.$$

Stąd na podstawie (2.40) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} B_n = +\infty,$$

co oznacza, że szereg (2.38) jest rozbieżny. □

Kryterium porównawcze stosuje się więc zarówno do badania zbieżności, jak i rozbieżności szeregu. Posługiwanie się tym kryterium wymaga wprawy, ponieważ trzeba się *a priori* zdecydować, czy dowodzić zbieżności danego szeregu, czy rozbieżności, a następnie dobrać odpowiednio szereg porównawczy. Dlatego też podamy inną wersję kryterium porównawczego, tzw. *kryterium porównawcze w wersji limesowej*.

Twierdzenie 2.60. *Jeżeli* $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \tag{2.41}$$

i jeżeli

$$0 < g < +\infty, \tag{2.42}$$

to szeregi (2.37) *i* (2.38) *są równocześnie zbieżne albo równocześnie rozbieżne.*

Dowód. Z (2.41) wynika, że istnieje takie n_0, że dla $n > n_0$

$$\frac{1}{2}g < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}g.$$

Stąd

$$\frac{1}{2}b_n g < a_n < \frac{3}{2}b_n g.$$

Z ostatniej nierówności, na podstawie kryterium porównawczego, wynika teza twierdzenia 2.60. □

Uwaga **2.61.** Szereg (2.35) odgrywa ważną rolę, jako szereg porównawczy, przy posługiwaniu się kryterium porównawczym.

Przykład **2.62.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}. \tag{2.43}$$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Porównamy go z szeregiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{2.44}$$

który jest szeregiem zbieżnym. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

więc z twierdzenia 2.60 szereg (2.43) jest zbieżny.

Uwaga **2.63.** Do badania sum szeregów możemy użyć programów komputerowych. W programie „Maple" wpisując

$$evalf\Big(Sum\Big(sin\Big(\frac{1}{n}\Big)tan\Big(\frac{1}{n}\Big), n = 1..infinity\Big)\Big);$$

i wciskając „Enter" otrzymamy 1,970816796, tzn. przybliżoną wartość sumy szeregu (2.43).

Twierdzenie 2.64 (kryterium Cauchy'ego). *Oznaczmy dla szeregu* (2.31) *(o wyrazach nieujemnych)*

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \tag{2.45}$$

Jeżeli
1) $q < 1$, *to szereg jest zbieżny,*
2) $q > 1$, *to szereg jest rozbieżny,*
3) $q = 1$, *to szereg może być zbieżny albo rozbieżny.*

Dowód. Ad 1). Weźmy takie $p \in \mathbb{R}$, że
$$q < p < 1. \tag{2.46}$$
Z (2.45) i (2.46) wynika, że istnieje taka liczba n_0, że dla $n > n_0$
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant p.$$
Stąd
$$a_n \leqslant p^n \qquad \text{dla} \quad n > n_0. \tag{2.47}$$
Z (2.47) wynika, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \tag{2.48}$$
jest majorantą szeregu (2.31).

Z postaci szeregu (2.48) i nierówności (2.46) wynika, że jest to szereg zbieżny, a więc z kryterium porównawczego szereg (2.31) jest również zbieżny.

Ad 2). Z (2.45) wynika istnienie takiego podciągu $\{a_{n_k}\}$, że
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q > 1.$$
Zatem istnieje takie k_0, że
$$a_{n_k} > 1 \qquad \text{dla} \quad k > k_0. \tag{2.49}$$
Nierówność (2.49) oznacza, że ciąg $\{a_n\}$ nie może mieć granicy równej zeru. Szereg (2.31) nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, a zatem jest szeregiem rozbieżnym.

Ad 3). Łatwo sprawdzić, że dla szeregu zbieżnego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i rozbieżnego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$
Tymczasem pierwszy z szeregów jest zbieżny, drugi zaś jest rozbieżny. $\square$

Twierdzenie 2.65 (kryterium d'Alemberta). *Załóżmy, że wyrazy szeregu* (2.31) *są dodatnie i oznaczmy*
$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{2.50}$$

Jeżeli
1) $q < 1$*, to szereg jest zbieżny,*
2) $q > 1$*, to szereg jest rozbieżny,*
3) $q = 1$*, to szereg może być zbieżny albo rozbieżny.*

Dowód. Ad 1). Weźmy takie $h \in \mathbb{R}$, że

$$q < h < 1. \tag{2.51}$$

Z (2.51) i (2.50) wynika, że istnieje taka liczba m, że dla $n \geqslant m$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant h. \tag{2.52}$$

Z nierówności (2.52) dla $n = m$ mamy

$$a_{m+1} \leqslant ha_m,$$

dla $n = m + 1$

$$a_{m+2} \leqslant ha_{m+1} \leqslant h^2 a_m.$$

Postępując tak dalej, otrzymujemy:

$$a_{m+k} \leqslant h^k a_m, \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.53}$$

Nierówność (2.53) oznacza, że szereg

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m(1 + h + h^2 + \ldots)$$

jest majorantą zbieżną dla szeregu (2.31), czyli z kryterium porównawczego szereg (2.31) jest zbieżny.

Dowód 2) i 3) jest analogiczny jak w przypadku kryterium Cauchy'ego. □

Przykład **2.66.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Do zbadania zbieżności tego szeregu zastosujemy kryterium d'Alemberta.

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Oznacza to, że nie istnieje granica ciągu $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, a więc na podstawie kryterium d'Alemberta nic nie można powiedzieć o zbieżności tego szeregu.

Zastosujemy teraz kryterium Cauchy'ego

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

więc na podstawie kryterium Cauchy'ego szereg ten jest zbieżny.

Uwaga **2.67.** Przykład powyższy pokazuje, że kryterium Cauchy'ego jest silniejsze, tzn. w niektórych przypadkach kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności danego szeregu, natomiast kryterium Cauchy'ego rozstrzyga tę zbieżność.

Przykład **2.68.** Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

   Zauważmy, że szereg ten spełnia założenia twierdzenia 2.56 (Cauchy'ego), tzn.

$$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} \geqslant \frac{1}{(\ln\ln(n+1))^{\ln(n+1)}} > 0, \quad n = 3, 4, \ldots$$

   Zatem, stosując to twierdzenie, wystarczy zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(\ln\ln 2^k)^{\ln 2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(\ln k \ln 2)^{k\ln 2}}.$$

   Stosując do ostatniego szeregu kryterium Cauchy'ego, mamy

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{(\ln k\ln 2)^{k\ln 2}}} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2}{(\ln k \ln 2)^{\ln 2}} = 0.$$

   Oznacza to, że szereg jest zbieżny.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}+2^n}$

   Stosując do szeregu 2 kryterium porównawcze, otrzymujemy

$$\frac{(2n)!}{n^{2n}+2^n} < \frac{(2n)!}{n^{2n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

   czyli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ jest majorantą szeregu 2. Do zbadania zbieżności majoranty stosujemy kryterium d'Alemberta.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n^{2n}}{(2n)!(n+1)^{2n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{(n+1)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} = \frac{4}{e^2} < 1.$$

Oznacza to, że szereg 2 jest zbieżny.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!+2^n}{n^3-n}$

Analogicznie jak w przykładzie 2 do szeregu 3 stosujemy kryterium porównawcze i otrzymujemy

$$\frac{n!+2^n}{n^3-n} > \frac{2^n}{2n^3}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Oznacza to, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2n^3}$ jest minorantą szeregu 3.

Do zbadania zbieżności minoranty stosujemy kryterium Cauchy'ego

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{2n^3}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{2n^3}} = 2 > 1,$$

a to oznacza, że szereg 3 jest rozbieżny.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Zajmiemy się teraz badaniem zbieżności szeregów liczbowych, których wyrazy są dowolnymi liczbami rzeczywistymi (niekoniecznie nieujemnymi). Do takich szeregów nie stosuje się żadne z podanych wyżej kryteriów zbieżności oprócz warunku koniecznego.

Rozważmy obok szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.54}$$

szereg utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów szeregu (2.54), czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2.55}$$

Wyrazy szeregu (2.55) są nieujemne, a więc do badania zbieżności tego szeregu można stosować poznane kryteria zbieżności.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2.69. *Jeżeli szereg liczbowy* (2.55) *jest zbieżny, to szereg* (2.54) *też jest zbieżny.*

Dowód. Skorzystamy z warunku Cauchy'ego zbieżności szeregu. W tym celu zauważmy, że

$$\left|\sum_{n=r}^{r+s} a_n\right| \leqslant \sum_{n=r}^{r+s} |a_n|. \tag{2.56}$$

Ze zbieżności szeregu (2.55) wynika, na podstawie warunku Cauchy'ego zbieżności szeregu, że jeżeli tylko r jest dostatecznie duże, to prawa strona nierówności (2.56) jest dowolnie mała. Zatem

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall r > n_0\ \forall s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \left|\sum_{n=r}^{r+s} a_n\right| < \varepsilon,$$

a to pociąga zbieżność szeregu (2.54). □

Definicja 2.70. Jeżeli szereg (2.55) jest zbieżny, to szereg (2.54) nazywa się *bezwzględnie zbieżnym*.

Definicja 2.71. Jeżeli szereg (2.55) jest rozbieżny, ale szereg (2.54) jest zbieżny, to szereg (2.54) nazywa się szeregiem *warunkowo zbieżnym*.

W dalszym ciągu będziemy korzystać z pewnego wzoru zwanego wzorem sumowania częściowego. Niech będą dane dwa dowolne ciągi liczbowe: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Oznaczmy przez

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0, \quad A_{-1} := 0.$$

Niech p i q będą danymi liczbami całkowitymi spełniającymi nierówność

$$0 \leqslant p \leqslant q.$$

Rozważmy

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n = \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_q - A_{p-1} b_p.\end{aligned}$$

Zatem otrzymaliśmy następujący wzór

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p, \tag{2.57}$$

zwany wzorem sumowania częściowego. Wzór ten stosuje się przy badaniu zbieżności szeregów postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Korzystając ze wzoru (2.57), udowodnimy następujące

Twierdzenie 2.72. *Jeżeli*
1) *ciąg sum częściowych* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *jest ciągiem ograniczonym,*
2) *ciąg* $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem malejącym,*
3) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$*,*
to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \tag{2.58}$$

jest zbieżny.

Dowód. Z 1) wynika, że

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |A_n| \leqslant M.$$

Z 3) wynika, że

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \quad \beta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Jeżeli $n_0 < p < q$, to na podstawie wzoru (2.57) oraz powyższych nierówności otrzymujemy

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \alpha_n \beta_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(\beta_n - \beta_{n+1}) + A_q\beta_q - A_{p-1}\beta_p\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sum_{n=p}^{q-1}(\beta_n - \beta_{n+1}) + \beta_q + \beta_p\right) = 2M\beta_p \leqslant \varepsilon.$$

Ostatnia nierówność oznacza, że szereg (2.58) spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. □

Definicja 2.73. Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_n > 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.59}$$

nazywa się szeregiem *znakozmiennym*.

Definicja 2.74. Szereg postaci (2.59) nazywa się szeregiem *przemiennym*, jeżeli $a_{n+1} \leqslant a_n$, dla $n = 1, 2, \dots$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z twierdzenia 2.72 jako wniosek wynika następujące

Twierdzenie 2.75 (Leibniza). *Każdy szereg przemienny jest zbieżny.*

Dowód. Szereg przemienny jest szeregiem postaci (2.58), gdzie $\alpha_n = (-1)^n$, zaś $\beta_n = a_n$. Ponieważ ciągi $\{\alpha_n\}$ i $\{\beta_n\}$ spełniają założenia twierdzenia 2.72, więc szereg (2.59) jest zbieżny. □

Przykładem szeregu przemiennego jest *szereg anharmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots \tag{2.60}$$

Z twierdzenia Leibniza (zob. twierdzenie 2.75) wiemy, że ten szereg jest zbieżny.

Uwaga **2.76.** Dowodzi się, że jeżeli szereg (2.59) jest szeregiem przemiennym, to prawdziwa jest nierówność

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.61}$$

Nierówność (2.61) podaje oszacowanie błędu, jaki popełniamy, zastępując sumę szeregu przemiennego jego n-tą sumą częściową.

Na zakończenie podamy określenie iloczynu szeregów i odpowiednie twierdzenie dotyczące zbieżności tego iloczynu.

Iloczyn Cauchy'ego szeregów

Niech będą dane szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.62}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{2.63}$$

Definicja 2.77. Iloczynem Cauchy'ego szeregów liczbowych (2.62) i (2.63) nazywa się szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{gdzie} \quad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \tag{2.64}$$

Twierdzenie 2.78. *Jeżeli szereg* (2.62) *jest bezwzględnie zbieżny, natomiast szereg* (2.63) *jest zbieżny, to szereg* (2.64) *jest zbieżny i jego suma równa się iloczynowi sum szeregów* (2.62) *i* (2.63).

Dowód. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k, \quad \beta_n = B - B_n, \quad \alpha = \sum_{n=1}^{n} |a_n|.$$

Przy tych oznaczeniach mamy

$$\begin{aligned} C_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots + a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \\ &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = \\ &= a_1 (B - \beta_n) + a_2 (B - \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B - \beta_1) = \\ &= A_n B - a_1 \beta_n - a_2 \beta_{n-1} - \cdots - a_n \beta_1. \end{aligned}$$

Niech $\gamma_n = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1$. Ustalmy dowolnie małe $\varepsilon > 0$ i obierzmy n_0 tak, aby $|\beta_n| < \varepsilon$ dla $n > n_0$. Wystarczy wykazać, że $\gamma_n \to 0$, przy $n \to \infty$. W tym celu oszacujemy

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= |a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1| \leqslant \\ &\leqslant |\beta_1 a_n + \cdots + \beta_{n_0} a_{n-n_0}| + |\beta_{n_0+1} a_{n-n_0-1} + \cdots + \beta_n a_1| \leqslant \\ &\leqslant |\beta_1 a_n + \cdots + \beta_{n_0} a_{n-n_0}| + \alpha\varepsilon. \end{aligned}$$

Niech n_0 będzie ustalone, zaś $n \to \infty$. Wówczas

$$\limsup_{n \to \infty} |\gamma_n| \leqslant \alpha\varepsilon.$$

Stąd $\gamma_n \to 0$, przy $n \to \infty$, a to kończy dowód twierdzenia 2.78. □

ROZDZIAŁ 3

Funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej

W tym rozdziale zajmiemy się bardziej szczegółowo funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej, tzn. takimi, których dziedziny i przeciwdziedziny zawierają się w zbiorze liczb rzeczywistych. Przed podaniem definicji granicy podamy definicję punktu skupienia i punktu izolowanego zbioru $X \subset \mathbb{R}$. Pojęcia te omówimy dokładniej w rozdziale 6 (zob. definicja 6.27, str. 215).

Definicja 3.1. Punkt $x \in \mathbb{R}$ nazywa się *punktem skupienia* zbioru $X \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje taki ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, że
1. $x_n \in X \setminus \{x_0\} \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Mówimy, że $+\infty$ $(-\infty)$ jest punktem skupienia zbioru $X \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do zbioru X zbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$.

Uwaga **3.2.** Z definicji tej wynika, że punkt skupienia zbioru może należeć lub nie należeć do tego zbioru.

Definicja 3.3. Punkt $x \in X \subset \mathbb{R}$ nazywa się *punktem izolowanym* zbioru X, jeżeli punkt x_0 nie jest punktem skupienia zbioru X.

Uwaga **3.4.** Często na oznaczenie funkcji $f\colon \mathbb{R} \supset X \to Y \subset \mathbb{R}$ będziemy używać symbolu $y = f(x)$.

Granice i ciągłość funkcji

Podamy teraz pochodząca od Heinego i równoważną definicję Cauchy'ego granicy funkcji. Ogólne sformułowania tych definicji czytelnik znajdzie w rozdziale 6 (zob. definicja 6.50, str. 225).

Definicja 3.5 (Heinego). Niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru $X \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 granicę g (skończoną lub nie), jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla $n = 1, 2, \dots,$ zbieżnego do x_0, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do g, co zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \qquad \text{lub} \qquad f(x) \to g, \quad \text{przy} \quad x \to x_0.$$

Inną jest definicja Cauchy'ego (wersja ogólna: zob. definicja 6.44, str. 222).

Definicja 3.6 (Cauchy'ego). Niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru $X \subset \mathbb{R}$. Funkcja $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 granicę g (skończoną lub nie), jeżeli dla każdego otoczenia V punktu g istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że jeżeli $x \in U \cap (X \setminus \{x_0\})$, to $f(x) \in V$.

Posługując sie nierównościami, definicję 3.6 można zapisać:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = g \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x\ (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - g| < \varepsilon).$$

Zauważmy, że podane powyżej definicje granicy funkcji obejmują zarówno przypadek granicy właściwej, jak i niewłaściwej, w punktach właściwych i w punktach niewłaściwych. Posługując się nierównościami, wypiszemy definicję 3.6 w przypadku, gdy $x_0 = +\infty$, $g \in \mathbb{R}$. Wówczas $U = (M, +\infty)$, $V = (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$, a więc

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,M: \quad \forall x > M \quad (x \in X \to |f(x) - g| < \varepsilon).$$

Uwaga* **3.7.** Okazuje się, że podane tu dwie definicje granicy funkcji są równoważne (zob. twierdzenie 6.51, str. 226).

Uwaga **3.8.** Przy obliczaniu granic funkcji w punkcie x_0 wygodniejsze jest nieraz stosowanie równoważnego zapisu, tzn.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h).$$

Przykład **3.9.** Obliczyć granicę

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$
2. $\lim\limits_{x\to 3}2^x=\lim\limits_{h\to 0}2^{3+h}=\lim\limits_{h\to 0}2^3\cdot 2^h=2^3\lim\limits_{h\to 0}2^h=8,$ ponieważ $\lim\limits_{h\to 0}2^h=1.$

Poprawność wykonanych tu rachunków wynika z definicji Heinego i stosownych twierdzeń o granicach ciągów liczbowych.

Definicja 3.10. Funkcja $f\colon X\to Y$ ma w punkcie x_0 *granicę lewostronną* (*granicę prawostronną*) równą g, gdy funkcja f rozważana w zbiorze $X\cap(-\infty,x_0)$ (odpowiednio w $X\cap(x_0,+\infty)$) ma w punkcie x_0 granicę równą g, co zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=g \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to x_0, x<x_0}f(x)=g,$$

i odpowiednio

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=g \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to x_0, x>x_0}f(x)=g.$$

Przykład **3.11.** Funkcja „entier” (zob. rysunek 1.1, str. 17), tzn. funkcja

$$[\cdot]:\ \mathbb{R}\ni x\mapsto [x]\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$$

ma w każdym punkcie $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ granicę równą $[x]$, natomiast w punkcie $x_0\in\mathbb{Z}$ granica prawostronna jest równa $[x_0]$, zaś granica lewostronna jest równa $[x_0]-1$.

Można wykazać następujące

Twierdzenie 3.12. *Jeżeli funkcja $f\colon(a,b)\to Y\subset\mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0\in(a,b)$ granice jednostronne równe, tzn.*

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=g,$$

to funkcja ta posiada w tym punkcie granicę i

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=g.$$

Na odwrót, istnienie granicy w punkcie $x_0\in(a,b)$ zapewnia istnienie i równość granic jednostronnych w rozważanym punkcie.

Z definicji Heinego granicy funkcji oraz twierdzeń o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych wynika następujące twierdzenie, nazywane odpowiednio twierdzeniem o granicy *sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji*.

Twierdzenie 3.13 (działania arytmetyczne na granicach funkcji). *Jeżeli*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \qquad i \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = p,$$

to

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm h(x)) = g \pm p$,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot h(x)) = g \cdot p$,

(iii) *jeżeli* $h(x) \neq 0$ *i* $p \neq 0$, *to* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{g}{p}$.

Analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w punktach niewłaściwych.

Jeżeli któraś z granic jest niewłaściwa, to dla granic funkcji zachodzą takie same twierdzenia jak dla granic ciągów (zob. twierdzenie 2.26, str. 34).

Korzystając z pojęcia granicy funkcji w punkcie x_0, podamy następującą definicję:

Definicja 3.14. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest *ciągła w punkcie* x_0, jeżeli x_0 jest punktem izolowanym jej dziedziny albo jest punktem skupienia dziedziny oraz
1. jest określona w punkcie x_0,
2. ma w punkcie x_0 granicę,
3. granica funkcji w punkcie x_0 jest równa wartości funkcji w punkcie x_0.

Podobnie jak dla granic mamy dwie równoważne definicje ciągłości funkcji w punkcie $x_0 \in X$.

Definicja 3.15 (Heinego). Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$, gdy

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \text{ takiego że } \left\{ \begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in X \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \end{array} \right\} \text{ zachodzi: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definicja 3.16 (Cauchy'ego). Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Jeżeli w definicji ciągłości funkcji w punkcie x_0 granicę w punkcie x_0 zastąpimy granicą jednostronną, to otrzymamy definicję *ciągłości jednostronnej*, tzn. *ciągłości lewostronnej* i *ciągłości prawostronnej*.

Definicja 3.17. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *funkcją ciągłą w zbiorze* X, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja 3.18. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ nie jest w punkcie x_0 ciągła, to x_0 nazywa się *punktem nieciągłości* tej funkcji.

Jeżeli x_0 jest punktem nieciągłości funkcji $y = f(x)$ ciągłej w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to x_0 nazywamy *izolowanym punktem nieciągłości* tej funkcji.

Izolowane punkty nieciągłości dzielimy na dwa rodzaje: takie, w których istnieją jednostronne granice właściwe, tzw. *punkty nieciągłości pierwszego rodzaju*, oraz pozostałe, tzw. *punkty nieciągłości drugiego rodzaju*.

Uwaga **3.19.** Jeżeli x_0 jest takim punktem nieciągłości pierwszego rodzaju, że

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

to mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 *nieciągłość usuwalną* (*pozorną*). Wówczas funkcja $y = f(x)$ nie jest określona w punkcie x_0 albo jest określona tak, że $f(x_0) \neq g$. Wtedy funkcja f_1 określona następująco:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \neq x_0, \\ g & \text{dla } x = x_0, \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie x_0.

Z twierdzenia 3.13 wynika następujące

Twierdzenie 3.20 (działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych). *Suma, różnica oraz iloczyn funkcji ciągłych w pewnym punkcie jest funkcją ciągłą w tym punkcie. Ponadto, jeżeli funkcje $y = f(x)$ i $y = h(x)$ są ciągłe w punkcie x_0 i $h(x_0) \neq 0$, to iloraz $\frac{f}{h}$ jest także funkcją ciągłą w tym punkcie.*

Udowodnimy następujące twierdzenie o ciągłości funkcji elementarnych:

Twierdzenie 3.21. *Funkcje*

1. $y = C$,
2. $y = x$,
3. $y = \sin x$,
4. $y = \cos x$,
5. $y = a^x$

są funkcjami ciągłymi w zbiorze liczb rzeczywistych.

Dowód. Niech x_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

Aby wykazać ciągłość funkcji f w punkcie x_0, zgodnie z uwagą 3.8 (str. 61) wystarczy pokazać, że
$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0). \tag{3.1}$$

Ad 1. W tym przypadku $f(x) = C$, więc
$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} C = C = f(x_0).$$

Ad 2. W tym przypadku $f(x) = x$. Zatem
$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(x_0 + h) = x_0 = f(x_0).$$

Ad 3. W tym przypadku $f(x) = \sin x$, więc
$$f(x_0 + h) = \sin(x_0 + h).$$

Zatem
$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0) = \sin x_0.$$

Ad 4. W tym przypadku $f(x) = \cos x$, więc
$$f(x_0 + h) = \cos(x_0 + h).$$

Zatem
$$\lim_{h\to 0} \cos(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h) = \cos x_0.$$

Ad 5. W tym przypadku $f(x_0 + h) = a^{(x_0+h)}$. Zatem
$$\lim_{h\to 0} a^{(x_0+h)} = \lim_{h\to 0} a^{x_0} \cdot a^h = a^{x_0}.$$

$\square$

Uwaga 3.22. W dowodzie twierdzenia 3.21 skorzystaliśmy z następujących równości:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \qquad \lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

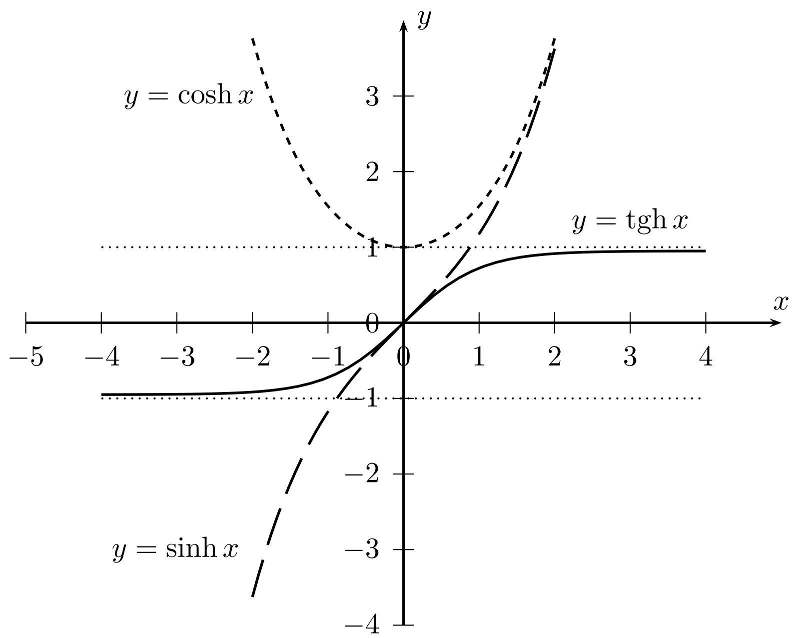
Równości te oznaczają, że funkcje

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = a^x$$

są ciągłe w punkcie $x = 0$.

Z twierdzenia 3.21 oraz z twierdzenia 3.20 o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych wynika, że każdy wielomian, funkcja wymierna, funkcje $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ są funkcjami ciągłymi w swoich dziedzinach. Ciągłe są też *funkcje hiperboliczne*: *sinus hiperboliczny*, *cosinus hiperboliczny* i *tangens hiperboliczny*. Funkcje te definiujemy za pomocą wzorów:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \qquad (3.2)$$



Rys. 3.1. Wykresy funkcji hiperbolicznych

Zauważmy, że dziedziną każdej z przedstawionych tu funkcji hiperbolicznych jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zbiorem wartości (przeciwdziedziną) funkcji $\sinh$ jest $\mathbb{R}$, funkcji $\cosh$ – przedział $[1, +, \infty]$, zaś funkcji tgh – przedział $[-1, 1]$.

Z twierdzenia 3.20 (str. 64) wynika, że odwrotności funkcji hiperbolicznych, tzn. funkcje dane wzorami:

$$\mathrm{cosech}\ x := \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \textit{cosecans hiperboliczny}, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{sech}\ x := \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \textit{secans hiperboliczny}, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{ctgh}\ x := \frac{1}{\mathrm{tgh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \textit{cotangens hiperboliczny} \tag{3.5}$$

też są ciągłe w swoich dziedzinach.

Twierdzenie 3.23 (o lokalnym zachowaniu znaku). *Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $f(x_0) > 0 \quad (f(x_0) < 0)$, to istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego x z tego otoczenia spełniona jest nierówność*

$$f(x) > 0 \qquad (f(x) < 0).$$

Dowód twierdzenia 3.23 wynika bezpośrednio z definicji Cauchy'ego granicy funkcji i z tego, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicja 3.24. Funkcja $f\colon X \to Y$ nazywa się *jednostajnie ciągła* w zbiorze X, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ \forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Do wyjaśnienia związku, jaki zachodzi między ciągłością funkcji w zbiorze X a zdefiniowaną powyżej jednostajną ciągłością, zapiszemy definicję ciągłości funkcji w zbiorze X.

Funkcja $f\ :\ X \to Y$ nazywa się funkcją ciągłą w zbiorze X, jeżeli

$$\forall x_1 \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ \forall x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Z porównania definicji ciągłości i jednostajnej ciągłości widzimy, że w definicji jednostajnej ciągłości wybór δ jest zależny tylko od ε, czyli δ jest takie samo dla wszystkich punktów zbioru X (mówimy, że δ jest uniwersalne), natomiast w definicji ciągłości wybór δ jest zależny nie tylko od ε, ale również od punktu x_1; δ jest na ogół różne dla różnych punktów zbioru X.

Uwaga **3.25.** Z definicji 3.24 oraz z powyższych rozważań wynika, że funkcja jednostajnie ciągła w zbiorze X jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru, ale nie na odwrót. Przykładem funkcji ciągłej, która nie jest jednostajnie ciągła jest funkcja

$$f\,:\,(0,1]\ni x\mapsto\frac{1}{x}\in\mathbb{R}.$$

Podamy teraz, bez dowodu, trzy twierdzenia dotyczące własności funkcji ciągłych w przedziale domkniętym. Szczegóły czytelnik może znaleźć w rozdziale 6.

Twierdzenie 3.26. *(zob. twierdzenie 6.69, str. 234) Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest jednostajnie ciągła.*

Twierdzenie 3.27. *(zob. wniosek 6.66, str. 233) Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$, to jest w nim ograniczona i istnieją w tym przedziale takie punkty x_1 i x_2, że*

$$\begin{aligned}f(x_1)&=\inf_{x\in[a,b]}f(x):=\inf f([a,b]),\\ f(x_2)&=\sup_{x\in[a,b]}f(x):=\sup f([a,b]),\end{aligned}$$

czyli funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale kres dolny i kres górny zbioru swoich wartości.

Twierdzenie 3.28 (Darboux). *(zob. własność 6.85, str. 240) Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$, gdzie $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ oraz liczba q leży pomiędzy $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, to istnieje taki punkt $c\in(\alpha,\beta)$, że $f(c)=q$.*

Twierdzenie to nazywa się twierdzeniem o przyjmowaniu wartości pośrednich, mając na myśli fakt, że funkcja $y=f(x)$ w przedziale $[a,b]$ przyjmuje każdą wartość pośrednią między kresem górnym i dolnym zbioru swoich wartości. Jednym z praktycznych jego zastosowań jest możliwość wyznaczania miejsc zerowych funkcji ciągłych ze z góry zadaną dokładnością.

Jeśli funkcja funkcja $f\,:\,[c,d]\to\mathbb{R}$ ma w każdym przedziale $[a,b]\subset[c,d]$ własność przyjmowania wartości pośrednich (tzn. spełnia warunek opisany w tezie twierdzenia 3.28), to mówimy, że ma *własność Darboux*. Z twierdzenia 3.28 wynika, że każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym ma własność Darboux. Przykładem funkcji nieciągłej, która ma własność Darboux jest funkcja

$$f\,:\,[0.1]\ni x\mapsto\begin{cases}0, & \text{gdy } x=0,\\ \sin\frac{1}{x}, & \text{gdy } x\in(0,1].\end{cases}$$

Z twierdzeń 3.27 i 3.28 wynika następujący

Wniosek 3.29. *Obrazem przez funkcję ciągłą przedziału jest przedział, natomiast obrazem przedziału domkniętego jest przedział domknięty.*

Jean Gaston Darboux
Ur. 14 sierpnia 1842 w Nines, Francja
Zm. 23 lutego 1917 w Paryżu

Francuski matematyk. Główne jego osiągnięcia dotyczą geometrii różniczkowej i analizy matematycznej. Jest powszechnie znany dzięki wykazanej przez niego własności Darboux i wprowadzonemu w jednej z prac z geometrii różniczkowej pojęciu całki Darboux.

Funkcja złożona i jej ciągłość

Niech $h\colon X \to U$ będzie funkcją, którą oznaczamy $u = h(x)$ i niech $g\colon U \to Y$ będzie funkcją, którą oznaczamy $y = g(u)$.

Definicja 3.30. Funkcję $f\colon X \to Y$ określoną wzorem

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$$

nazywa się funkcją złożoną. Funkcja ta składa się z funkcji $y = g(u)$, zwanej *funkcją zewnętrzną* oraz z funkcji $u = h(x)$, zwanej *funkcją wewnętrzną*.

Przykład **3.31.** Rozkład na funkcje zewnętrzną i wewnętrzną.

1. $y = (2x+3)^3, \qquad y = g(u) = u^3, \qquad u = h(x) = 2x + 3,$
2. $y = \sqrt{\sin x}, \qquad y = \sqrt{u}, \qquad u = \sin x,$
3. $y = \operatorname{tg}^2 x, \qquad y = u^2, \qquad u = \operatorname{tg} x.$

Uwaga **3.32.** Funkcja złożona może być złożeniem więcej niż dwóch funkcji, np.

$$y = \cos^2 x^2, \qquad y = v^2, \qquad v = \cos u, \qquad u = x^2.$$

Uwaga **3.33.** Kolejność składania funkcji jest istotna. Świadczy o tym następujący przykład. Niech będą dane funkcje $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2^x$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin 2^x,$$

natomiast
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{\sin x}.$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 3.34. *Jeżeli funkcja $y = g(u)$ jest ciągła w punkcie u_0 oraz funkcja $u = h(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, przy czym $u_0 = h(x_0)$, to funkcja $f = g \circ h$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Dowód. Należy udowodnić, że
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie takim ciągiem, że $x_n \in X$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $x_n \to x_0$, przy $n \to \infty$. Ponieważ funkcja $u = h(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, zatem
$$u_n = h(x_n) \to h(x_0) = u_0, \qquad \text{przy} \quad n \to \infty.$$
Z ciągłości funkcji $y = g(u)$ w punkcie u_0 wynika, że
$$g(u_n) \to g(u_0), \quad \text{przy} \quad n \to \infty,$$
czyli
$$f(x_n) = g(h(x_n)) \to g(h(x_0)) = f(x_0), \quad \text{przy} \quad n \to \infty,$$
a to oznacza, że funkcja $f = g \circ h$ jest ciągła w punkcie x_0. □

Funkcja odwrotna i jej własności

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, którą oznaczamy $y = f(x)$ oraz $\varphi : Y \to X$ będzie funkcją, którą oznaczamy $x = \varphi(y)$.

Definicja 3.35. Funkcję $x = \varphi(y)$ nazywać będziemy *funkcją odwrotną* do funkcji $y = f(x)$, jeżeli dla każdego $x \in X$
$$\varphi(f(x)) = x$$
i dla każdego $y \in Y$
$$f(\varphi(y)) = y,$$
tzn.
$$\varphi \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{X}} \qquad \text{i} \qquad f \circ \varphi = \mathrm{id}_Y.$$

Twierdzenie 3.36. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby istniała funkcja odwrotna do funkcji $y = f(x)$ jest, aby funkcja ta była różnowartościowa w zbiorze X i $f(X) = Y$, tzn. aby odwzorowanie $f\colon X \to Y$ było odwzorowaniem bijektywnym.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że warunek jest konieczny, tzn. jeśli istnieje funkcja $x = \varphi(y)$ odwrotna do funkcji $y = f(x)$, to funkcja $y = f(x)$ jest bijekcją. Niech $f(x_1) = f(x_2)$. Z definicji funkcji odwrotnej $\varphi(f(x_1)) = x_1$ i $\varphi(f(x_2)) = x_2$. Zatem $x_1 = x_2$, czyli f jest odwzorowaniem injektywnym.

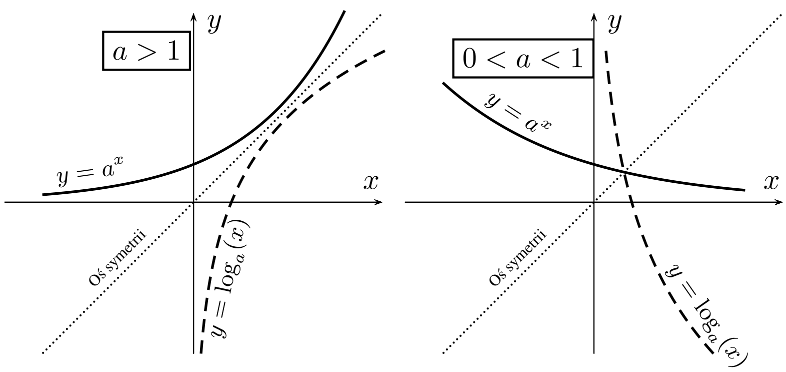
Wykażemy, że f jest również surjekcją. W tym celu weźmy dowolne $y \in Y$ i połóżmy $x = \varphi(y)$. Z definicji funkcji φ wynika, że $y = f(x)$, a to oznacza surjektywność odwzorowania f.

Udowodnimy teraz, że warunek ten jest również warunkiem wystarczającym. Z bijektywności odwzorowania f wynika, że dla każdego $y \in Y$ istnieje dokładnie jedno $x \in X$, takie że $y = f(x)$. Dzięki temu możemy zdefiniować funkcję $\varphi : Y \to X$ w następujący sposób:

$$\varphi(y) := x \iff f(x) = y. \tag{3.6}$$

Jest to funkcja odwrotna do funkcji f, ponieważ z (3.6) mamy $\varphi(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$ i $f(\varphi(y)) = y$ dla każdego $y \in Y$. $\square$

Wykresy funkcji danej i odwrotnej są identyczne. Jeżeli w funkcji odwrotnej zamienimy role zmiennych x i y, to otrzymamy funkcję $y = \varphi(x)$, której wykres powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetryczne odbicie względem prostej $y = x$.



Rys. 3.2. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Przykład **3.37.** Niech $f\colon \mathbb{R} \ni x \to y = a^x \in \mathbb{R}_+$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Przy tych założeniach f jest odwzorowaniem bijektywnym, a zatem istnieje odwzorowanie odwrotne $\varphi : \mathbb{R} \ni y \to x = \log_a y \in \mathbb{R}$.

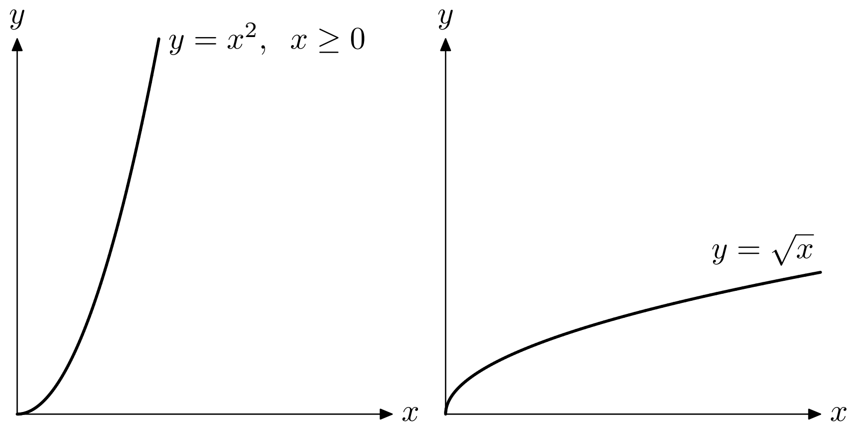
Rysunek 3.2 przedstawia wykresy funkcji wykładniczych $y = a^x$ oraz odwrotnych (po zmianie oznaczeń) do funkcji wykładniczych, czyli funkcji logarytmicznych $y = \log_a x$.

Przykład **3.38.** Niech $f\colon \mathbb{R} \ni x \to y = x^2 \in \mathbb{R}$. Funkcja f jako funkcja parzysta nie jest odwzorowaniem bijektywnym, a więc f nie ma funkcji odwrotnej. Rozpatrywać będziemy zatem funkcję

$$f_1 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ni x \to y = x^2 \in \mathbb{R}.$$

Tak określona funkcja jest odwzorowaniem bijektywnym zbioru $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ na zbiór $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Funkcją odwrotną do funkcji f_1 jest funkcja

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ni x \to y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$



Rys. 3.3. Funkcja kwadratowa i pierwiastkowa

Uwaga **3.39.** Funkcję odwrotną do funkcji f często oznacza się symbolem f^{-1}.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 3.40. *Niech X będzie przedziałem. Jeśli $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ jest ciągłą bijekcją, to*

1. *f jest funkcją silnie monotoniczną,*
2. *f^{-1} jest funkcją silnie monotoniczną (silnie rosnącą, gdy f jest silnie rosnąca; silnie malejącą, gdy f jest silnie malejąca),*

3. f^{-1} *jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Ad 1. Przypuśćmy, że funkcja f nie jest silnie monotoniczna. Stąd i z ciągłości funkcji f wynika istnienie takich punktów $x_1, x_2 \in X$, że $x_1 \neq x_2$ i $f(x_1) = f(x_2)$, a to jest sprzeczne z bijektywnością odwzorowania f.

Ad 2. Poprowadzimy dowód przy założeniu, że funkcja f jest silnie rosnąca. Przypuśćmy, że f^{-1} nie jest silnie rosnąca, tzn. istnieją takie $y_1, y_2 \in Y$, że $y_1 < y_2$ i $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. Ponieważ $f^{-1}(y_1) = x_1$ i $f^{-1}(y_2) = x_2$, więc $x_1 \geqslant x_2$ i $x_1, x_2 \in X$. Funkcja f jest silnie rosnąca w X. Zatem $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Wobec tego, że $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$, mamy $y_1 \geqslant y_2$, a to jest sprzeczne z założeniem.

Ad 3. Niech y będzie dowolnym, ustalonym punktem zbioru Y.

Należy pokazać, że

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0). \tag{3.7}$$

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że granica (3.7) nie istnieje, tzn. można wybrać takie dwa ciągi $\{y_n\}$ i $\{\overline{y}_n\}$, że

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n \to \infty} \overline{y}_n = y_0, \tag{3.8}$$

natomiast

$$\lim_{n \to \infty} f^{-1}(y_n) = g_1, \qquad \lim_{n \to \infty} f^{-1}(\overline{y}_n) = g_2 \qquad \text{i} \qquad g_1 \neq g_2. \tag{3.9}$$

Oznaczmy przez

$$x_n = f^{-1}(y_n) \qquad \text{i} \qquad \overline{x}_n = f^{-1}(\overline{y}_n), \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Z (3.9) wynika, że

$$\lim_{n \to \infty} x_n = g_1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n \to \infty} \overline{x}_n = g_2. \tag{3.11}$$

Z ciągłości funkcji f i z (3.11) mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(g_1) = y_0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n \to \infty} f(\overline{x}_n) = f(g_2) = y_0. \tag{3.12}$$

Z (3.12)

$$f(g_1) = f(g_2).$$

Ponieważ f jest odwzorowaniem bijektywnym, więc

$$g_1 = g_2 = g,$$

a to jest sprzeczne z (3.9). Sprzeczność ta oznacza, że funkcja f^{-1} posiada granicę w punkcie y_0.

Niech

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = g.$$

Z (3.12) $f(g) = y_0 = f(x_0)$, stąd $g = x_0$. Ale $x_0 = f^{-1}(y_0)$, czyli $g = f^{-1}(y_0)$, a to kończy dowód twierdzenia 3.40. $\square$

Odwracalność funkcji trygonometrycznych. Funkcje cyklometryczne

Z twierdzenia 3.36, str. 71, wynika, że „pełne" funkcje trygonometryczne nie są odwracalne, bo jako okresowe nie są różnowartościowe. Aby móc utworzyć funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych, należy zawęzić przedziały ich określoności oraz zbiory ich wartości tak, aby zawężone funkcje trygonometryczne były odwzorowaniami bijektywnymi. Omówimy to kolejno dla wszystkich funkcji trygonometrycznych. Rozpoczniemy od funkcji $\arcsin$. (czyt. *arcus sinus*)

$$\boxed{\arcsin\, : \; [-1,1] \ni x \mapsto \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

Arcus sinus jest funkcja odwrotną do funkcji

$$f = \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \mapsto y = \sin x \in [-1,1],$$

która jest odwzorowaniem bijektywnym. Z twierdzenia 3.36 wynika istnienie funkcji f^{-1}, odwrotnej do funkcji f, określonej wzorem (3.3). Wartość $f^{-1}(y)$ oznacza się przez $\arcsin y$, tzn.

$$f^{-1} : [-1,1] \ni y \to x = \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Z definicji funkcji odwrotnej wynika, że

$$\begin{cases} \arcsin(\sin x) = x & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin(\arcsin y) = y & \forall y \in [-1,1]. \end{cases}$$

Funkcja $\arccos$ (czyt. *arcus cosinus*):

$$\boxed{\arccos\, : \; [-1,1] \ni x \mapsto \arccos x \in [0,\pi]}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji

$$f = \cos|_{[0,\pi]} : \; [0,\pi] \ni x \mapsto y = \cos x \in [-1,1].$$

Analogicznie jak dla funkcji $y = \sin x$ mamy

$$\begin{cases} \arccos(\cos x) = x & \forall x \in [0, \pi], \\ \cos(\arccos y) = y & \forall y \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Funkcja arctg (czyt. *arcus tangens*):

$$\boxed{\operatorname{arctg} : \ (-\infty, +\infty) \ni x \mapsto \operatorname{arctg} x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})}$$

jest odwrotną do funkcji

$$f = \operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : \ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni x \mapsto y = \operatorname{tg} x \in (-\infty, +\infty).$$

Zgodnie z definicją funkcji wzajemnie odwrotnych mamy równości:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x & \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y & \forall y \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Funkcja arcctg (czyt. *arcus cotangens*):

$$\boxed{\operatorname{arcctg} : \ (-\infty, +\infty) \ni x \mapsto \operatorname{arcctg} x \in (0, \pi)}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji

$$f = \operatorname{ctg}|_{(0,\pi)} : \ (0, \pi) \ni x \mapsto y = \operatorname{ctg} x \in (-\infty, +\infty).$$

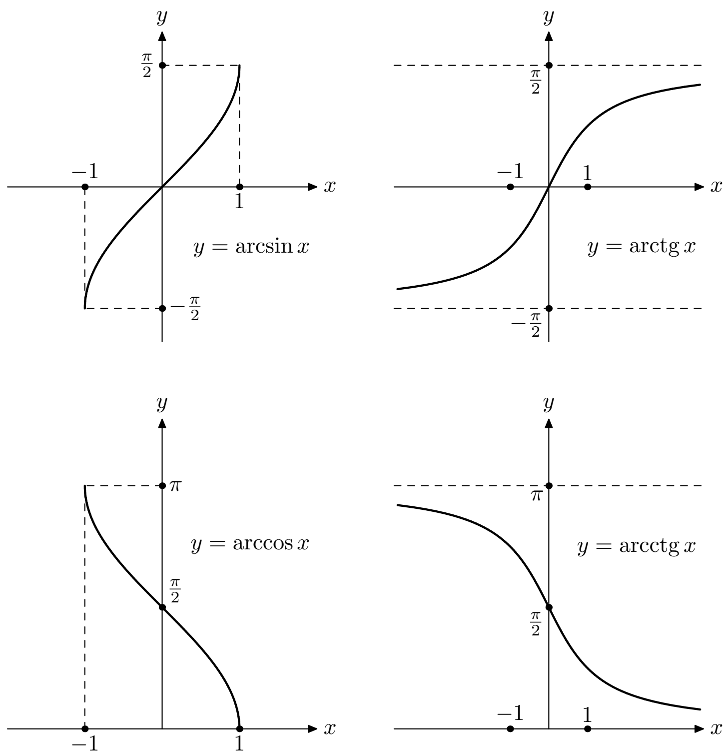
Tym razem mamy związki

$$\begin{cases} \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x & \forall x \in (0, \pi) \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y & \forall y \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Funkcje $\arcsin$, $\arccos$, arctg, arcctg noszą nazwę funkcji cyklometrycznych.

Z twierdzenia 3.40 wynika, że funkcje cyklometryczne są funkcjami ciągłymi i silnie monotonicznymi, funkcje $\arcsin$ i arctg są silnie rosnące, natomiast $\arccos$ i arcctg są silnie malejące.

Wykresy tych funkcji przedstawiamy na rysunku 3.4.



Rys. 3.4. Funkcje cyklometryczne

Odwracalność funkcji hiperbolicznych

Zakładając, że czytelnik pamięta definicje oraz wykresy funkcji hiperbolicznych (zob. wzory (3.2) oraz rysunek 3.1, str. 66). rozpoczniemy od funkcji arsinh (czyt. *area sinus hiperboliczny*).

$$\boxed{\operatorname{arsinh}: (-\infty, +\infty) \ni x \mapsto y = \operatorname{arsinh} x \in (-\infty, +\infty)}$$

Funkcja ta jest odwrotną do funkcji

$$\sinh: (-\infty, +\infty) \ni x \to y = \sinh x \in (-\infty, +\infty),$$

która jest odwzorowaniem bijektywnym. Z zależności pomiędzy daną funkcją i funkcją do niej odwrotną otrzymamy

$$y = \operatorname{arsinh} x \Longleftrightarrow \sinh y = x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Stąd, wyliczając y otrzymamy

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Funkcja *area cosinus hiperboliczny*:

$$\boxed{\operatorname{arcosh}: \ [1,+\infty) \ni x \mapsto \operatorname{arcosh} x \in [0,+\infty)}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji

$$\cosh|_{[0,+\infty)}: \ [0,+\infty) \mapsto y = \cosh x \in [1+\infty).$$

Postępując podobnie jak w przypadku funkcji area sinus hiperboliczny otrzymamy

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{dla } x \geqslant 1. \tag{3.14}$$

Funkcja *area tangens hiperboliczny*:

$$\boxed{\operatorname{artgh}: \ (-1,1) \ni x \mapsto \operatorname{artgh} x \in (-\infty,+\infty)}$$

jest funkcją odwrotną do funkcji

$$\operatorname{tgh}: \ (-\infty,+\infty) \mapsto y = \operatorname{tgh} x \in (-1,1).$$

W tym przypadku można wykazać, że

$$\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{dla } |x| < 1. \tag{3.15}$$

Funkcja *area cotangens hiperboliczny*:

$$\boxed{\operatorname{arctgh}: \ \mathbb{R}\setminus[-1,1] \ni x \mapsto \operatorname{artgh} x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

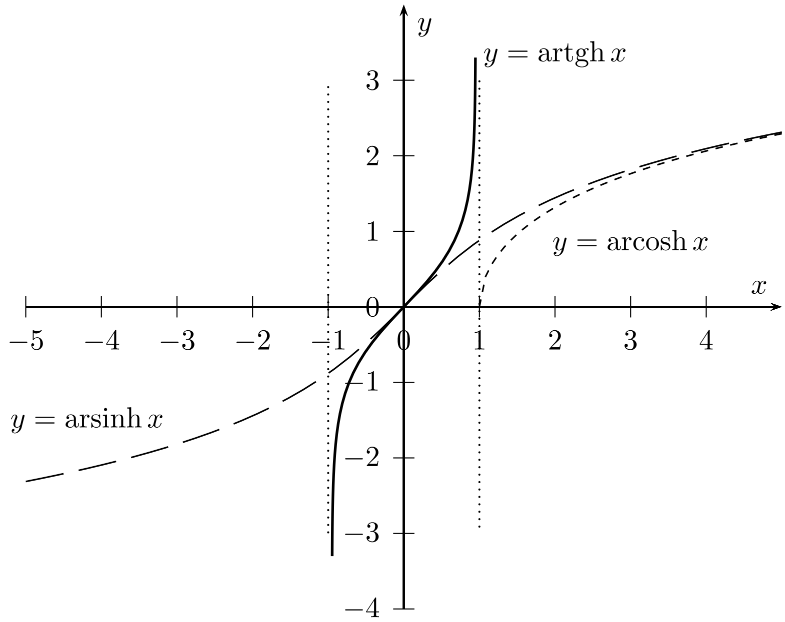
jest funkcją odwrotną do funkcji

$$\operatorname{ctgh}: \ \mathbb{R}\setminus\{0\} \mapsto y = \operatorname{ctgh} x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1].$$

Dla funkcji arctgh mamy wzór:

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad \text{dla } |x| > 1. \tag{3.16}$$

Wykresy funkcji arsinh, arcosh, artgh zostały przedstawione na rysunku 3.5. Czytelnikowi proponujemy porównanie tych wykresów z wykresami funkcji hiperbolicznych przedstawionymi na rysunku 3.1, str. 66.



Rys. 3.5. Funkcje odwrotne do hiperbolicznych

Funkcje specjalne i ich granice

Podamy teraz, wraz z uzasadnieniem, granice pewnych funkcji specjalnych. Granice te stosuje się między innymi przy wyprowadzaniu wzorów na pochodne niektórych funkcji.

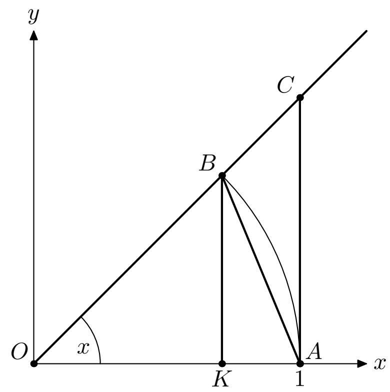
I.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ponieważ funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ jest funkcją parzystą, zatem na podstawie twierdzenia 3.12 wystarczy dowieść, że

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ponieważ $x \to 0^+$, więc możemy założyć, że $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.



Rys. 3.6. Wyprowadzenie granicy I

Z rysunku 3.6 odczytujemy, że

$$P_{\Delta OAB} \leqslant P_W \leqslant P_{\Delta OAC},$$

gdzie P_W oznacza pole wycinka OAB.

$$\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \qquad \text{dla} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Stąd

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sin x} \qquad | \cdot \sin x,$$

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1. \tag{3.17}$$

Z (3.17), definicji Heinego (zob. deinicja 3.5, str. 61) i twierdzenia o trzech ciągach (zob. twierdzenie 2.15, str. 22) wynika, że

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

II. $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

Istotnie oznaczmy $\arcsin x = y \to x = \sin y$. Gdy $x \to 0$, to z ciągłości funkcji $\arcsin x$ wynika, że $y \to 0$, więc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

III.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1.$$

IV.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

Dowód jest analogiczny jak w II.

V.
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $+\infty$ lub do $-\infty$. Z definicji Heinego granicy funkcji wynika, że V jest równoważne

$$\lim_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e, \tag{3.18}$$

natomiast (3.18) jest znaną granicą w teorii ciągów liczbowych (zob. str. 34).

VI.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\frac{1}{\ln a}\quad \text{dla } a>0,\ a\neq 1$$

Istotnie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(x+1)=\lim_{x\to 0}\log_a(x+1)^{\frac{1}{x}}.$$

Ponieważ $\left|\frac{1}{x}\right|\to+\infty$, gdy $x\to 0$, więc na podstawie V

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

czyli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

W szczególności, gdy $a=e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1. \tag{3.19}$$

VII.
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad \text{dla } a>0}$$

Niech $a^x-1=z$. Stąd $x=\log_a(1+z)$. Jeżeli $x\to 0$, to z ciągłości funkcji logarytmicznej $z\to 0$. Więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+z)}{z}}=\ln a.$$

Kładąc $a=e$, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{3.20}$$

VIII.
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad \text{dla } \alpha\in\mathbb{R}}$$

Oznaczmy $(1+x)^\alpha-1=u$. Stąd $\alpha\ln(1+x)=\ln(1+u)$.
Jeżeli $x\to 0$, to $u\to 0$, więc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{u}{\ln(1+u)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\alpha\cdot 1=\alpha.\end{aligned}$$

W omówionych powyżej granicach specjalnych I, II, III, IV, VI, VII i VIII występującą zmienną niezależną x możemy zastąpić dowolną funkcją g zmiennej x, taką że $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ (w granicy **V**, $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$) i wówczas otrzymamy

I′. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\sin g(x)}{g(x)}=1,$

II′. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin g(x)}{g(x)}=1,$

III′. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg} g(x)}{g(x)}=1,$

IV′. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{arctg} g(x)}{g(x)}=1,$

V′. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e,$

VI′. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a(g(x)+1)}{g(x)}=\frac{1}{\ln a}, \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln(g(x)+1)}{g(x)}=1,$

VII′. $$\lim_{x\to x_0}\frac{a^{g(x)}-1}{g(x)}=\ln a,\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)}=1,$$

VIII′. $$\lim_{x\to x_0}\frac{(1+g(x))^{\alpha}-1}{g(x)}=\alpha.$$

Przykład **3.41.** Obliczyć następujące granice:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\sin 4x}{1+x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\left(\sqrt{1+x}+1\right)=8,$$

b) $$\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\arcsin(x+2)}{x(x+2)}=-\frac{1}{2},$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+3x)}{3x}\cdot 3=\frac{3}{\ln 2},$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x+1}-3}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3(3^x-1)}{2x}=\frac{3}{2}\ln 3.$$

ROZDZIAŁ 4

Pochodne i różniczki funkcji jednej zmiennej

Zakładamy, że czytelnik umie obliczać granice ciągów liczbowych, granice funkcji elementarnych oraz badać ich ciągłość.

Rachunek różniczkowy ma szerokie zastosowanie w naukach technicznych. Już w początkowym kursie fizyki dowiadujemy się, że prędkość jest pochodną drogi, zaś przyśpieszenie pochodną prędkości względem czasu. Pochodna nabiera tu intuicyjnie jasnego sensu jako granica, do której dąży prędkość średnia odpowiadająca przyrostowi czasu Δt, gdy Δt dąży do zera.

Innym problemem, który przyczynił się do rozwoju rachunku różniczkowego, jest wyznaczanie stycznych do krzywych. W kursie szkolnym styczną do okręgu definiujemy jako prostą, która ma z krzywą tylko jeden punkt wspólny. Definicja ta ma charakter bardzo szczególny i nie ujawnia istoty rzeczy. Z takiej definicji wynikałoby, że obie osie układu współrzędnych są styczne do paraboli $y = x^2$ w punkcie $(0, 0)$. Tymczasem intuicja podpowiada, że tylko oś Ox jest styczna. Nasze rozważania rozpoczniemy od wyjaśnienia pojęcia styczności.

Stożek styczny

Pojęcie styczności miało znaczący wpływ na rozwój rachunku różniczkowego. W szczególności chodzi tu o styczne do wykresu funkcji jednej zmiennej. W naszych rozważaniach wykorzystamy jedną z definicji styczności podanych przez H. Whitneya.

Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni unormowanej E. Definicję przestrzeni unormowanej może czytelnik znaleźć na str. 242. Interesującą dla naszych rozważań jest przestrzeń $E = \mathbb{R}^2$ z normą euklidesową, tzn. określoną wzorem $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definicja 4.1. Mówimy, że wektor $v \in E$ jest *styczny* do A w punkcie $a \in E$, gdy $v = 0$ albo $v \neq 0$ i istnieje taki ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktów zbioru A o wyrazach różnych od a, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a}{\|a_n - a\|} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Występująca tu $\|v\|$ oznacza długość wektora v, zaś zbieżność $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do a oznacza, że $\lim_{n\to\infty}\|a_n - a\| = 0$.

Z definicji tej wynika, że jeżeli wektor v jest styczny do zbioru A w punkcie a, to dla każdej liczby $t \geqslant 0$ wektor tv też jest styczny do A w tym samym punkcie A. Tak więc zbiór wektorów stycznych tworzy stożek o wierzchołku w punkcie 0. Stożek ten nazywać będziemy *stożkiem wektorów stycznych*. Oznaczmy ten stożek przez $SW(A, a)$.

Hassler Whitney
Ur. 23 marca 1907 w Nowym Jorku, USA
Zm. 10 maja 1989 w Mount Dents Blanches, Szwajcaria

Zajmował się między innymi topologią algebraiczną, geometrią różniczkową i topologią różniczkową. Z jego nazwiskiem związane jest pojęcie stożka stycznego. Badając osobliwości przestrzeni analitycznych, wprowadził 5 różnych stożków stycznych.

Definicja 4.2. Jeśli $\emptyset \neq A \subset E$ oraz a jest punktem skupienia zbioru A, to zbiór

$$S_a(A) := \{x \in E : \ x - a \in SW(A, a)\} \tag{4.1}$$

nazywamy *stożkiem stycznym* do zbioru A w punkcie a. Gdy stożek styczny jest prostą, to nazywamy go *prostą styczną* lub krótko *styczną*. Gdy jest płaszczyzną, to nazywamy go *płaszczyzną styczną*.

Zauważmy, że stożek styczny jest stożkiem o wierzchołku a, bo wraz z dowolnym punktem $x \neq a$ zawiera całą półprostą wychodzącą z punktu a i przechodzącą przez punkt x.

Przedmiotem naszych zainteresowań będą wyłącznie stożki styczne do wykresów funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej.

Ćwiczenie **4.3.** Wykazać, że

(a) stożkiem stycznym w punkcie $(1, 3)$ do wykresu funkcji $y = |x-1|+3$ jest ten wykres,

(b) stożkiem stycznym w punkcie $(0, 0)$ do wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$ jest dodatnia półoś osi Oy,

(c) stożkiem stycznym w punkcie $(0, \frac{1}{2})$ do wykresu funkcji $y = \sin(\frac{1}{x})$ (zob. rys. 6.5, str. 220) jest półpłaszczyzna $\{(x, y) :\ x \geqslant 0\}$, zaś w punkcie $(0, 1)$ część wspólna półpłaszczyzny $\{(x, y) :\ x \geqslant 0\}$ z półpłaszczyzną $\{(x, y) :\ y \leqslant 1\}$.

4.1. Pochodne i różniczki

Niech D będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$ i niech x_0 będzie punktem wewnętrznym zbioru D. Dla funkcji $f :\ D \to \mathbb{R}$ definiujemy nową funkcję:

$$D \setminus \{x_0\} \ni x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

którą nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 4.4. (i) Mówimy, że funkcja $f :\ \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna w punkcie* x_0, gdy istnieje granica $f'(x_0)$ *ilorazu różnicowego* funkcji f w punkcie x_0, tj. granica

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{4.2}$$

(ii) Liczbę $f'(x_0)$ (o ile istnieje) nazywamy *pochodną funkcji* f *w punkcie* x_0.

(iii) Mówimy, że funkcja $f :\ \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna* w D (lub krótko, że jest różniczkowalna), gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru D.

Korzystając z identyfikacji (7.36) (str. 267), pochodną $f'(x_0)$ możemy identyfikować z odwzorowaniem liniowym

$$d_{x_0} f :\ \mathbb{R} \ni h \mapsto f'(x_0)h \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

które będziemy nazywać *różniczką* funkcji f w punkcie x_0.

Często $x - x_0$ nazywać będziemy przyrostem zmiennej x i oznaczać przez Δx lub krócej, np. przez h. Przy takim oznaczeniu (4.2) ma postać

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

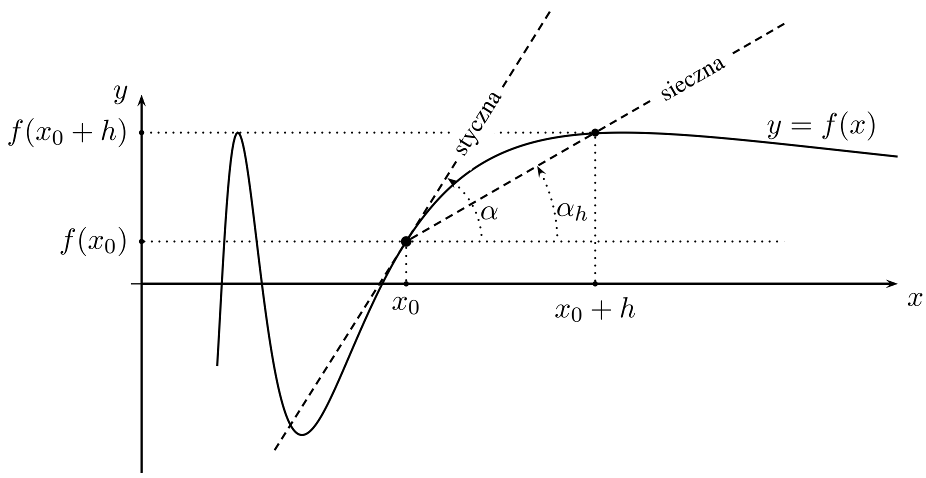
Na pochodną i różniczkę stosuje się też inne oznaczenia. Dla przykładu:

$$\begin{array}{llll} \text{zamiast} & f'(x_0) & \text{często piszemy} & \dfrac{df}{dx}(x_0), \\ \text{zamiast} & d_{x_0} f & \text{często piszemy} & f'(x_0)dx. \end{array}$$

Przy zapisie różniczki w postaci $f'(x_0)dx$ znak dx oznacza odwzorowanie tożsamościowe z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tzn. $dx: \ \mathbb{R} \ni h \mapsto dx(h) := h \in \mathbb{R}$.

Jak już wspomnieliśmy, pochodną można interpretować na kilka sposobów. Rozpoczniemy od interpretacji geometrycznej.

Interpretacja geometryczna pochodnej



Rys. 4.1. Interpretacja geometryczna pochodnej

Iloraz różnicowy odpowiadający przyrostowi h zmiennej x jest tangensem kąta α_h, jaki tworzy półprosta (sieczna) o początku $(x_0, f(x_0))$, przechodząca przez punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ z dodatnim kierunkiem osi $0x$ (zob. rys. 4.1). Gdy $h \to 0$, to sieczna zmierza do stycznej, co w naszym przypadku oznacza, że $\alpha_h \to \alpha$, gdy $h \to 0$, gdzie α jest kątem, jaki tworzy styczna do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ z dodatnim kierunkiem osi $0x$. Stąd wynika, że

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{tg} \alpha_h = \operatorname{tg} \alpha.$$

Zatem pochodna jest tangensem kąta, jaki tworzy styczna do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ z dodatnim kierunkiem osi $0x$.

Sieczna jest prostą przechodzącą przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Zatem jej równanie ma postać

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Ponieważ sieczna zmierza do stycznej, gdy $h \to 0$, więc przechodząc z h do zera, otrzymamy równanie

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

które jest równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Związek różniczkowalności z ciągłością

Przypuśćmy, że dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ i punkt $x_0 \in D$. Różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 jest równoważna temu, że funkcja

$$\delta_f : D \ni x \mapsto \delta_f(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{, gdy } x \neq x_0, \\ f'(x_0) & \text{, gdy } x = x_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$. Stąd wynika, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $\delta_f : D \to \mathbb{R}$ ciągła w punkcie x_0, że

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D \tag{4.5}$$

i wówczas $f'(x_0) = \delta_f(x_0)$.

Kładąc

$$h := x - x_0,$$
$$\Delta(h) = \Delta_f(h) := \delta_f(x_0 + h),$$

równość (4.5) przyjmie postać

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\Delta_f(h) \tag{4.6}$$

i funkcja $h \to \Delta_f(h) \in \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i wtedy $\Delta(0) = f'(x_0)$.

Twierdzenie 4.5. *Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. Ciągłość f w punkcie x_0 wynika z równości (4.5), gdyż prawa strona tej równości jest funkcją ciągłą w x_0. □

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 4.5 nie jest prawdziwe.

Przykład **4.6.** Dla przykładu: funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna. Istotnie, gdyby była różniczkowalna, to istniałaby taka funkcja δ_f ciągła w punkcie 0, że

$$|x| = x\delta_f(x) \quad \text{dla } x \neq 0.$$

Stąd wynikałoby, że istnieje funkcja ciągła w punkcie 0, równa 1 dla $x > 0$ i równa -1 dla $x < 0$. Wiemy jednak, że taka funkcja nie istnieje.

Operacje wymierne na pochodnych

Niech D będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$. Przypominamy, że

> mówiąc o funkcji $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$, że jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$, zakładamy, że istnieje taki niezdegenerowany przedział $I \subset D$, że $x_0 \in I$.

Twierdzenie 4.7 (o pochodnej sumy funkcji). *Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$ są obie różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$, to ich suma $f + g$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dowód. Zgodnie z założeniami istnieją, ciągłe w x_0 funkcje $\delta_f, \delta_g : D \to \mathbb{R}$, takie że

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D,$$
$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\delta_g(x) \quad \text{dla } x \in D.$$

Stąd wynika, że

$$(f+g)(x) = (f+g)(x_0) + (x-x_0)\delta_{f+g}(x) \quad \text{dla } x \in D,$$

gdzie $\delta_{f+g} := \delta_f + \delta_g$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0. Zatem funkcja $(f+g)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i ponieważ

$$\delta_{f+g}(x_0) = \delta_f(x_0) + \delta_g(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

więc $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. □

Twierdzenie 4.8. *Jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$ i funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to funkcja λf jest różniczkowalna w x_0 i*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Dowód. Z równości

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D$$

i ciągłości δ_f w punkcie x_0 wynika, że funkcja $\delta_{\lambda f} := \lambda\delta_f$ jest ciągła w x_0 i zachodzi równość

$$(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x_0) + (x-x_0)\lambda\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D,$$

co kończy dowód. □

Jako wniosek z twierdzeń 4.7 (str. 88) i 4.8 (str. 89), otrzymujemy, że zbiór funkcji określonych w D, które są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$, z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia funkcji przez liczby, jest przestrzenią wektorową. Ponadto operacja różniczkowania jest operatorem (odwzorowaniem) liniowym (zob. definicja 7.26, str. 255)[1].

Twierdzenie 4.9 (o pochodnej iloczynu funkcji). *Jeśli $f,\ g:\ D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$, to ich iloczyn fg jest różniczkowalny w punkcie x_0 i mamy równość:*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

[1]Zakładamy, że czytelnik poznał definicję odwzorowania liniowego na wykładach z algebry liniowej.

Dowód. Zgodnie z założeniami istnieją, ciągłe w x_0, funkcje δ_f, $\delta_g : D \to \mathbb{R}$, takie że

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D,$$
$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\delta_g(x) \quad \text{dla } x \in D.$$

Zatem dla iloczynu fg mamy

$$(fg)(x) = (fg)(x_0) + (x - x_0)\delta_{fg}(x) \quad \text{dla } x \in D,$$

gdzie

$$\delta_{fg}(x) = f(x_0)\delta_g(x) + g(x_0)\delta_f(x) + \delta_f(x)\delta_g(x)(x - x_0)$$

jest funkcją ciągłą w punkcie x_0 i taką, że

$$\delta_{fg}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.10. *Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D$ i jest taka, że $f(x_0) \neq 0$, to funkcja $1/f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

Dowód. Dziedziną funkcji $1/f$ jest zbiór $\tilde{D} := D \setminus Z(f)$, gdzie

$$Z(f) := \{x \in D : \ f(x) = 0\}$$

jest zbiorem zer mianownika. Funkcja f, jako ciągła i nieznikająca w x_0, nie znika w pewnym otoczeniu punktu x_0 (zob. twierdzenie 3.23, str. 67). Stąd wynika, że zbiór $\tilde{D}$ zawiera przedział, do którego należy x_0, bo w D zawarty jest taki przedział. Możemy więc mówić o pochodnej funkcji $1/f$, której dziedziną jest $\tilde{D}$.

Z równości

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D$$

i tego, że

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} = \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)} \quad \text{dla } x \in \tilde{D}$$

wynika, że

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)} + (x - x_0)\frac{-\delta_f(x)}{f(x)f(x_0)} \quad \text{dla } x \in \tilde{D}.$$

Funkcja
$$\tilde{D} \ni x \mapsto \frac{-\delta_f(x)}{f(x)f(x_0)} \in \mathbb{R}$$
jest ciągła w punkcie x_0 i jej wartość w tym punkcie wynosi
$$-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2},$$
co należało udowodnić. □

Twierdzenie 4.11 (o pochodnej ilorazu). *Jeżeli funkcje f, g : $\mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in D$ oraz $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i mamy równość:*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Dowód. Stosując twierdzenie 4.10, str. 90, o pochodnej funkcji $\frac{1}{f}$ i twierdzenia 4.9, str. 89, o pochodnej iloczynu, otrzymamy
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} =$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
□

Twierdzenie 4.12 (o pochodnej funkcji złożonej). *Niech D, G będą niepustymi podzbiorami $\mathbb{R}$. Jeżeli f : $D \to G$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $a \in D$ oraz g : $G \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie $b = f(a)$, to $g \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie a oraz*
$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Dowód. Zgodnie z założeniami istnieją: ciągła w a funkcja δ_f : $D \to \mathbb{R}$ oraz ciągła w b funkcja δ_g : $G \to \mathbb{R}$, takie że
$$f(x) = f(a) + (x-a)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in D,$$
$$g(y) = g(b) + (y-b)\delta_g(y) \quad \text{dla } y \in D.$$

Stąd otrzymujemy

$$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))\delta_g(f(x)) = g(f(a)) + (x-a)\delta_g(f(x))\delta_f(x).$$

Kładąc $\delta_{g\circ f}(x) := \delta_g(f(x))\delta_f(x)$, otrzymamy funkcję ciągłą w punkcie a spełniającą warunek

$$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(a) + (x-a)\delta_{g\circ f}(x) \quad \text{dla } x \in D$$

i taką, że

$$\delta_{g\circ f}(a) = g'(f(a))f'(a),$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 4.13 (o pochodnej funkcji odwrotnej). *Niech $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różnowartościową ciągłą. Wtedy*

(a) *obraz $J := f(I)$ przedziału I jest przedziałem domkniętym,*
(b) *funkcja $f^{-1} : J \to I$ odwrotna do f jest ciągła,*
(c) *jeśli f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in I$ i $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ oraz*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dowód. Punkt (a) jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego faktu (zob. wniosek 6.85, str. 240).

Punkt (b) to szczególny przypadek sytuacji omówionej w twierdzeniu 6.68, str. 234.

Pozostał do wykazania punkt (c). Wiemy, że istnieje taka funkcja $\delta_f : I \to \mathbb{R}$ ciągła w punkcie x_0, że

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in I. \tag{4.7}$$

Zgodnie z założeniem $\delta_f(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Funkcja f jest różnowartościowa, więc δ_f nie znika w żadnym punkcie przedziału I. Zatem możemy z równości (4.7) „wyliczyć” x. Po „wyliczeniu” otrzymamy

$$x = x_0 + \frac{f(x) - f(x_0)}{\delta_f(x)}.$$

Teraz, przyjmując, że $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, otrzymamy $x = f^{-1}(y)$ oraz

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0)\frac{1}{\delta_f(f^{-1}(y))}.$$

Funkcja

$$\delta_{f^{-1}} := \frac{1}{\delta_f \circ f^{-1}}$$

jest ciągła w y_0 jako złożenie funkcji ciągłych. Stąd wynika, że

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\delta_f(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\delta_f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Pochodne funkcji elementarnych

Podamy teraz podstawowe wzory na pochodne funkcji elementarnych.

1. $(C)' = 0,$ $\quad d(C) = 0,$
2. $(x^n)' = nx^{n-1},$ $\quad d(x^n) = nx^{n-1}dx, \quad n \in \mathbb{N},$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$ $\quad d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx, \quad x \neq 0,$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$ $\quad d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx, \quad x > 0,$
5. $(\sin x)' = \cos x,$ $\quad d(\sin x) = \cos x dx,$
6. $(\cos x)' = -\sin x,$ $\quad d(\cos x) = -\sin x dx,$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$ $\quad d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$ $\quad d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx, \quad x \neq k\pi,$
9. $(a^x)' = a^x \ln a,$ $\quad d(a^x) = a^x \ln a\, dx, \quad a > 0,$
10. $(e^x)' = e^x,$ $\quad d(e^x) = e^x\, dx,$
11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$ $\quad d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}dx,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,$
12. $(\ln x)' = \frac{1}{x},$ $\quad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx, \quad x > 0,$
13. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$ $\quad d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0,$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\quad d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad |x| < 1,$
15. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\quad d(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad |x| < 1,$
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$ $\quad d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}dx,$
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},$ $\quad d(\operatorname{arcctg} x) = \frac{-1}{1+x^2}dx,$
18. $(\sinh x)' = \cosh x,$ $\quad d(\sinh x) = \cosh x dx,$
19. $(\cosh x)' = \sinh x,$ $\quad d(\cosh x) = \sinh x dx,$
20. $(\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x,$ $\quad d(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x dx,$
21. $(\operatorname{ctgh} x)' = \operatorname{cosech}^2 x,$ $\quad d(\operatorname{ctgh}\ \mathrm{x}) = \operatorname{cosech}^2 x dx, \quad x \neq 0,$
22. $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$ $\quad d(\operatorname{arsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,$
23. $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$ $\quad d(\operatorname{arcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx, \quad |x| > 1,$
24. $(\operatorname{artgh} x)' = \frac{1}{1-x^2},$ $\quad d(\operatorname{artgh} x) = \frac{1}{1-x^2}dx, \quad |x| < 1.$

Dowód. W dowodach wypisanych wzorów na pochodne funkcji elementarnych wykorzystywać będziemy, poznane wcześniej, granice specjalne. Zakładamy tu znajomość tych granic i nie będziemy podawać odsyłaczy.

Ad 1. Gdy $f(x) = C = \text{const}$, to $f(x+h) - f(x) = 0$, niezależnie od x i h. Stąd wynika, że $f'(x) = 0$.

Ad 2. Gdy $f(x) = x^n$, to

$$f(x+h) - f(x) = h\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + h\binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + h^{n-1}\binom{n}{n}\right).$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Ad 3. Ten wzór wynika z poprzedniego wzoru i twierdzenia 4.10, str. 90, o różniczkowaniu funkcji $1/f$, zastosowanego do funkcji $f(x) = x$.

Ad 4. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ad 5. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$

Ad 6. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = -\sin x.$

Ad 7. Wzór 7 wynika ze wzorów 5, 6 i twierdzenia 4.11, str. 91, o pochodnej ilorazu.

Ad 8. Wzór 8 wynika ze wzorów 5, 6 i twierdzenia 4.11 o pochodnej ilorazu.

Ad 9. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h} = a^x\ln a.$

Ad 10. Wzór 10 wynika ze wzoru 9, wstawiając $a = e$.

Ad 11. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{(x+h)}{x}}{h} =$

$\displaystyle = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$

lub z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej

$\displaystyle(\log_a x)' = \frac{1}{\left(a^y\right)'} = \frac{1}{a^y\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.$

Ad 12. Wzór 12 wynika ze wzoru 11, podstawiając $a = e$.

Ad 13. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^\alpha\left[(\frac{x+h}{x})^\alpha - 1\right]}{h} =$

$\displaystyle = x^\alpha\lim_{h\to 0}\frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = x^\alpha\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$

Ad 14. Z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej mamy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ad 15. $(\arccos x)' = \dfrac{1}{(\cos y)'} = \dfrac{-1}{\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Ad 16. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Ad 17. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \dfrac{-1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = \dfrac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \dfrac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \dfrac{-1}{1+x^2}.$

Aby otrzymać wzory 18 – 24 wystarczy skorzystać z definicji funkcji hiperbolicznych (zob. (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), str. 66 – 67) oraz ze wzorów: (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), str. 77 – 77. □

Pochodna logarytmiczna

Niech funkcja $f: D \to \mathbb{R}_+$ będzie różniczkowalna w D. Pochodna funkcji złożonej $y = \ln f(x)$ wyraża się wzorem

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{4.8}$$

Ponieważ czasem łatwiej jest obliczyć pochodną logarytmu funkcji f niż pochodną zwykłą funkcji f, więc z (4.8) otrzymujemy

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'. \tag{4.9}$$

Pochodna funkcji f, wyrażona wzorem (4.9), nosi nazwę *pochodnej logarytmicznej* funkcji f.

Wzorem (4.9) posługujemy się zwykle przy obliczaniu pochodnej funkcji postaci

$$y = (f(x))^{g(x)}, \qquad \text{gdzie} \quad f(x) > 0. \tag{4.10}$$

Uwaga **4.14.** Pochodną funkcji postaci (4.10) można również obliczyć, korzystając ze wzoru

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \tag{4.11}$$

wynikającego bezpośrednio z definicji logarytmu. Zatem

$$\left((f(x))^{g(x)}\right)' = (f(x))^{g(x)}(g(x)\ln f(x))'.$$

Przykład **4.15.** Aby obliczyć pochodną funkcji

$$y = (x^2 + 2x)^{\cos x},$$

zastosujemy wzór (4.9). Zgodnie z tym wzorem mamy

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 2x)^{\cos x}(\ln(x^2 + 2x)^{\cos x})' = (x^2 + 2x)^{\cos x}(\cos x \ln(x^2 + 2x))' = \\ &= (x^2 + 2x)^{\cos x}\Big(- \sin x \ln(x^2 + 2x) + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} \cos x\Big). \end{aligned}$$

4.2. Pochodne wyższych rzędów

Gdy funkcja $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna (w każdym punkcie), to możemy utworzyć nową funkcję

$$f' : \ D \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R},$$

którą nazywamy *funkcją pochodną* lub pochodną funkcji f. Gdy f' jest funkcją ciągłą, to o f mówimy, że jest klasy $\mathcal{C}^1$. O funkcjach ciągłych mówimy, że są klasy $\mathcal{C}^0$.

Jeśli funkcja f' okaże się różniczkowalną, to jej pochodną $(f')'$ oznaczać będziemy przez f'' lub przez $f^{(2)}$. Kontynuując, otrzymamy kolejne pochodne funkcji f. Przyjmujemy przy tym oznaczenia:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f, \\ f^{(1)} &= f' = \frac{df}{dx}, \\ f^{(2)} &= f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} := (f')', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f^{(n)} &= (f^{(n-1)})' = \frac{d^n f}{dx^n} := \left(\frac{df^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\right)'. \end{aligned}$$

Przykład **4.16.** Wyliczymy teraz kolejne pochodne funkcji $f(x) = x^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Mamy kolejno

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^n, \\ f^{(1)}(x) &= nx^{n-1}, \\ f^{(2)}(x) &= n(n-1)x^{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(k)}(x) &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))x^{n-k} = k!\tbinom{n}{k}x^{n-k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) &= n!, \\ f^{(n+1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że jeśli f jest wielomianem stopnia n, tzn. jest funkcją postaci

$$f:\ \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R},$$

gdzie $a_j \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$, to jego pochodne do rzędu n są niezerowymi wielomianami i wszystkie pochodne rzędów wyższych od n są równe zero.

Definicja 4.17. Mówimy, że funkcja $f:\ \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ jest

(i) *n-krotnie różniczkowalna* w punkcie $x_0 \in D$, jeżeli jest $n-1$-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 i istnieje $(f^{(n-1)})'(x_0)$,

(ii) *klasy $\mathcal{C}^n$*, gdy jest n-krotnie różniczkowalna i jej n-ta pochodna $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą w D,

(iii) klasy $\mathcal{C}^\infty$, gdy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest klasy $\mathcal{C}^n$.

Zauważmy, że każda funkcja n-krotnie różniczkowalna jest klasy $\mathcal{C}^{(n-1)}$. Wynika to z twierdzenia 4.5, str. 88, gdyż n-ta pochodna jest pierwszą pochodną $(n-1)$-szej pochodnej. Zatem, jako funkcja różniczkowalna, jest ciągła. Istnieją też funkcje, które są n-krotnie różniczkowalne i nie są $(n+1)$-krotnie różniczkowalne. Podamy teraz przykład takiej funkcji dla $n = 2$, 3 i 4.

Przykład **4.18.** Funkcja $f(x) = |x|^3$ jest klasy $\mathcal{C}^2$ w $\mathbb{R}$ i nie jest 3-krotnie różniczkowalna w punkcie 0.

Ponieważ $|x|^3 = 0 + (x-0)x\,|x|$, więc $f'(0) = 0$. Zatem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{gdy } x > 0, \\ -3x^2, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

Druga pochodna tej funkcji też istnieje i wynosi: $f''(x) = 6\,|x|$. Ale ta funkcja nie jest już różniczkowalna w $\mathbb{R}$ (zob. przykład 4.6, str. 88).

Zauważmy, że pochodna funkcji g, danej wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4}, & \text{gdy } x > 0, \\ -\dfrac{x^4}{4}, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$$

jest równa f, tzn. $g'(x) = f(x) = |x|^3$. Zatem funkcja g jest klasy $\mathcal{C}^3$ i nie jest 4-krotnie różniczkowalna w punkcie 0. Z kolei funkcja

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{20}, & \text{gdy } x > 0, \\ -\dfrac{x^5}{20}, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} = \frac{|x|^5}{20}$$

ma pochodną równą g. Stąd wynika, że jest klasy $\mathcal{C}^4$ i nie jest 5-krotnie różniczkowalna w punkcie 0.

Postępując podobnie, można podać przykłady funkcji dowolnie wysokiej klasy $\mathcal{C}^n$, które nie sa $(n+1)$-krotnie różniczkowalne.

Gottfried Wilhelm von Leibniz
Ur. 1 lipca 1646 w Lipsku
Zm. 14 listopada 1716 w Hanowerze

Filozof, matematyk, fizyk, inżynier i prawnik. Jako matematyk należy do twórców rachunku różniczkowego. Zdefiniował pojęcie całki jako nieskończonej sumy różniczek i wprowadził jej symbol. Zbudował też jedną z pierwszych mechanicznych maszyn liczących. W fizyce stworzył pojęcie momentu siły i momentu pędu.

Twierdzenie 4.19. *Jeżeli funkcje f, g : $\mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ są n-krotnie różniczkowalne, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to $f+g$, λf oraz fg są n-krotnie różniczkowalne i*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \tag{4.12}$$

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}, \tag{4.13}$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \quad \text{(wzór Leibniza).} \tag{4.14}$$

Dowód. Wzory (4.12), (4.13) są proste do wykazania. Do ich wykazania wystarczy skorzystać z tego, że operacja różniczkowania jest liniowa. Wykażemy teraz wzór Leibniza (4.14). Zastosujemy indukcję matematyczną.

Dla $n = 1$ jest to wzór na pochodną iloczynu (zob. twierdzenie 4.9, str. 89). Jeśli wzór Leibniza jest prawdziwy dla jakiejś liczby naturalnej n, to

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) = \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} = \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} = \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)}.
\end{aligned}$$

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej, wzór Leibniza (4.14) jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n. □

Wniosek 4.20. *Zbiory funkcji n-krotnie różniczkowalnych oraz funkcji klasy $\mathcal{C}^n$, z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia funkcji przez liczby, są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$. Przestrzeń funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^n$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{C}^n(D;\mathbb{R})$ lub krótko przez $\mathcal{C}^n(D)$. Gdy $n = 0$, to zwykle zamiast pisać $\mathcal{C}^0(D;\mathbb{R})$ ($\mathcal{C}^0(D)$) piszemy $\mathcal{C}(D;\mathbb{R})$ ($\mathcal{C}(D)$).*

Równości (4.12), (4.13) *oznaczają, że odwzorowanie*

$$\frac{d^n}{dx^n} : \mathcal{C}^n(D;\mathbb{R}) \ni f \mapsto f^{(n)} \in \mathcal{C}(D;\mathbb{R})$$

jest liniowe.

4.3. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego

Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego są podstawowymi twierdzeniami dla rachunku różniczkowego. Pierwsze z nich ma prostą interpretację fizyczną. Mówi ono, że jeśli punkt materialny, poruszający się po linii prostej, wystartował z punktu A i po pewnym czasie powrócił do tego punktu, to gdzieś musiał się zatrzymać.

Twierdzenia Lagrange'a i Cauchy'ego noszą nazwę twierdzeń o przyrostach.

Twierdzenie Rolle'a

Michel Rolle
Ur. 21 kwietnia 1652 w Ambert, Francja
Zm. 8 listopada 1719 w Paryżu

Rolle był samoukiem. Zajmował się algebrą, analizą diofantyczną i geometrią. Wprowadził obecnie stosowany zapis $\sqrt[n]{a}$. Powszechnie znane jest jego twierdzenie (twierdzenie Rolle'a) o istnieniu poziomej stycznej pomiędzy punktami a, b, gdy f jest różniczkowalna i $f(a) = f(b) = 0$.

Twierdzenie 4.21 (Rolle'a). *Jeżeli funkcja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest*
(a) *ciągła w przedziale domkniętym* $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$*,*
(b) *ma pierwszą pochodną wewnątrz tego przedziału,*
(c) $f(a) = f(b)$*,*
to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$*, że* $f'(c) = 0$.

Dowód. Jeżeli funkcja f jest stała w przedziale $[a, b]$, to dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f'(x) = 0$ i twierdzenie jest prawdziwe. Przypuśćmy więc, że funkcja f nie jest stała. Co najmniej jedna z nierówności

$$\inf_{[a,b]} f(x) < f(a), \qquad \sup_{[a,b]} f(x) > f(a) \tag{4.15}$$

jest wówczas prawdziwa. Przypuśćmy, że prawdziwa jest druga z tych nierówności (jak na rys. 4.2). Jeżeli tak nie jest, a więc gdy tylko pierwsza z nierówności (4.15) jest prawdziwa, to dowód przebiega podobnie. Z wniosku 6.66 wynika, że istnieje w przedziale $[a, b]$ taki punkt c, że

$$f(c) = \sup_{[a,b]} f(x).$$

Ponieważ $f(a) = f(b)$, więc wobec nierówności (4.15) punkt c nie jest ani punktem a, ani punktem b. Stąd $c \in (a, b)$.

Ponieważ

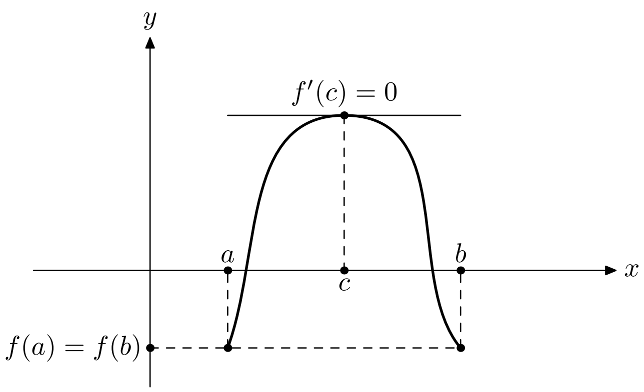
$$\begin{cases} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 & \text{dla } h < 0,\ (c+h) \in [a,b], \\ \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0 & \text{dla } h > 0,\ (c+h) \in [a,b], \end{cases} \tag{4.16}$$

i z założenia wiemy, że istnieje pochodna $f'(c)$, gdyż c należy do przedziału (a, b), więc

$$0 \leqslant f'(c) \leqslant 0,$$

czyli $f'(c) = 0$. □

Na rys. 4.2 przedstawiono interpretację geometryczną tego twierdzenia.



Rys. 4.2. Interpretacja twierdzenia Rolle'a

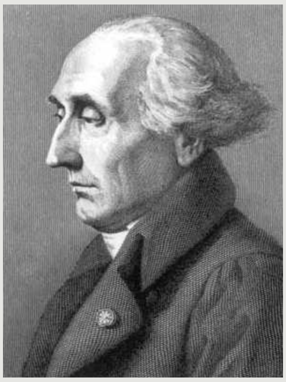
Uwaga **4.22.** W dowodzie twierdzenia Rolle'a udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 4.23. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in (a, b)$ oraz w punkcie tym osiąga kres górny lub kres dolny swoich wartości, to*

$$f'(c) = 0.$$

Twierdzenie Lagrange'a

Bardziej ogólnym twierdzeniem od twierdzenia Rolle'a jest twierdzenie Lagrange'a, zwane także *twierdzeniem o wartości średniej* lub *twierdzeniem o przyrostach skończonych*.



Joseph Louis Lagrange
Ur. 25 stycznia 1736 w Turynie
Zm. 10 kwietnia 1813 w Paryżu

Matematyk i astronom włoskiego pochodzenia, który uzyskał istotne wyniki z zakresu analizy matematycznej, rachunku prawdopodobieństwa, równań różniczkowych, rachunku wariacyjnego i algebry. Znaczące są też jego osiągnięcia z zakresu mechaniki i astronomii. W uznaniu jego zasług jedna z planetoid otrzymała nazwę 1006 Lagrange'a.

Twierdzenie 4.24 (Lagrange'a o wartości średniej). *Jeżeli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest*
(a) *funkcją ciągłą w przedziale domkniętym* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*,*
(b) *różniczkowalną w przedziale otwartym* (a, b)*,*
to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$*, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.17}$$

Dowód. Wprowadzimy funkcję pomocniczą $y = h(x)$ określoną wzorem

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{4.18}$$

Funkcja h określona wzorem (4.18) spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, więc istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$h'(c) = 0.$$

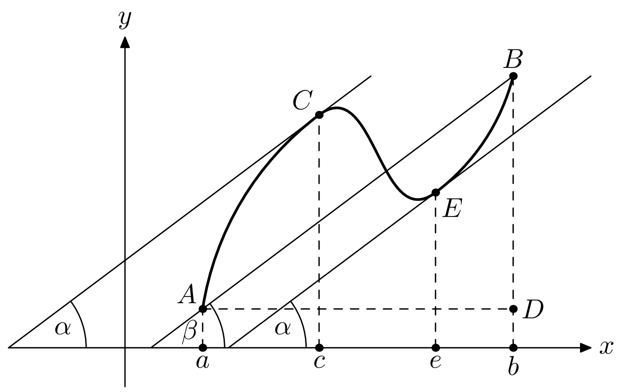
Ponieważ

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

oraz $h'(c) = 0$, więc

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□



Rys. 4.3. Interpretacja twierdzenia Lagrange'a

Geometrycznie twierdzenie Lagrange'a orzeka, że na łuku AB, który jest wykresem funkcji f, znajduje się przynajmniej jeden punkt C (rys. 4.3), w którym styczna jest równoległa do siecznej AB. Jeżeli bowiem oznaczymy przez α kąt nachylenia stycznej do łuku AB w punkcie C o odciętej $x = c$, a przez β kąt nachylenia siecznej AB do osi OX, to

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{DB}{AD} = \operatorname{tg}\beta, \qquad f'(c) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Równość (4.17) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

skąd

$$\alpha = \beta.$$

Zatem styczna jest równoległa do siecznej AB.

Wzór (4.17) można zapisać w postaci

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a). \tag{4.19}$$

Niech $a = x_0$, $b = x_0 + h$. Wówczas (4.19) przyjmie postać

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(c)h. \tag{4.20}$$

Oznaczmy $\Delta x = h$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$. Po tych oznaczeniach wzór (4.20) przyjmuje postać

$$\Delta f = f'(c)\Delta x. \tag{4.21}$$

We wzorze (4.21) Δx można traktować jako przyrost (dodatni albo ujemny) zmiennej niezależnej x; Δf oznacza wówczas odpowiadający mu przyrost wartości funkcji f. Taka interpretacja wyjaśnia nazwę: twierdzenie o przyrostach.

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Wniosek 4.25. *Funkcja f, której pochodna w całym przedziale (a, b) równa się zeru, jest stała w tym przedziale.*

Dowód. Istotnie, niech $x_1, x_2 \in (a, b)$ i $x_1 < x_2$. Stosując twierdzenie Lagrange'a do przedziału $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ i funkcji f, otrzymujemy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

□

Ważnym wnioskiem z twierdzenia Lagrange'a jest twierdzenie o związku monotoniczności funkcji ze znakiem jej pochodnej.

Twierdzenie 4.26. *Funkcja f o pochodnej stale dodatniej (ujemnej) w przedziale (a, b) jest silnie rosnąca (silnie malejąca) w tym przedziale. Jeżeli pochodna jest stale nieujemna (niedodatnia), to funkcja jest rosnąca (malejąca).*

Dowód. Istotnie, niech x_1, x_2 będą dowolnymi punktami przedziału (a, b), takimi że $x_1 < x_2$. Wówczas, w myśl twierdzenia Lagrange'a zastosowanego do przedziału $[x_1, x_2]$, mamy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad \text{dla pewnego } c \in (x_1, x_2).$$

Jeżeli $f'(c) > 0$, to $f(x_2) > f(x_1)$. Podobnie, jeżeli $f'(c) < 0$, to $f(x_2) < f(x_1)$. Stąd wynika, że jeśli pochodna jest stale dodatnia (stale ujemna), to funkcja f jest silnie rosnąca (silnie malejąca).

Jeżeli $f'(c) \geqslant 0$, to $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Podobnie, jeżeli $f'(c) \leqslant 0$, to $f(x_2) \leqslant f(x_1)$. Stąd wynika, że jeśli pochodna jest stale nieujemna (stale niedodatnia), to funkcja f jest rosnąca (malejąca). □

Uwaga **4.27.** Z twierdzenia 4.26 wynika, że warunek $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) dla każdego $x \in (a, b)$ jest wystarczający, aby funkcja f była silnie rosnąca (silnie malejąca) w przedziale (a, b). Warunek ten nie jest jednak konieczny, na co wskazuje przykład funkcji $f(x) = x^3$, która jest silnie rosnąca w każdym przedziale, natomiast $f'(0) = 0$.

Twierdzenie 4.28. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest rosnąca (lub malejąca) i jest w tym przedziale różniczkowalna, to*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \textit{dla } x \in (a, b) \quad (\textit{i odpowiednio } f'(x) \leqslant 0 \quad \textit{dla } x \in (a, b)).$$

Jeżeli funkcja f jest rosnąca (malejąca), to iloraz różnicowy

$$\frac{f(x + h) - f(x_0)}{h}$$

jest też nieujemny (niedodatni), a więc i pochodna jest nieujemna (niedodatnia).

Uwaga **4.29.** Wnioski wypowiedziane wyżej dla przedziału (a, b) pozostają słuszne dla przedziałów nieskończonych $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ i $(-\infty, +\infty)$.

Twierdzenie Cauchy'ego

Podamy teraz uogólnienie twierdzenia o wartości średniej.

Twierdzenie 4.30 (Cauchy'ego). *Niech funkcje f i $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe w przedziale $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ i różniczkowalne w przedziale (a, b). Jeżeli $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, to istnieje w (a, b) taki punkt c, że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.22}$$

Dowód. Zauważmy, że lewa strona wzoru (4.22) ma sens, gdyż $g(a) \neq g(b)$. Gdyby bowiem $g(a) = g(b)$, to na podstawie twierdzenia Rolle'a otrzymalibyśmy, że g' znika w jakimś punkcie przedziału (a, b), co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Weźmy funkcję pomocniczą $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right). \tag{4.23}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja (4.23) spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. Zatem istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

a to kończy dowód twierdzenia Cauchy'ego. $\square$

Reguła de l'Hospitala

Często przy obliczaniu granic ilorazów dwóch funkcji pojawia się symbol nieoznaczony typu „$\frac{0}{0}$" lub typu „$\frac{\infty}{\infty}$".

Definicja 4.31. Mówimy, że iloraz f/g jest w punkcie x_0 *symbolem nieoznaczonym typu* $\frac{0}{0}$, jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Podobnie iloraz f/g jest *symbolem nieoznaczonym typu* $\frac{\infty}{\infty}$, gdy

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Do tego typu symboli nie możemy stosować twierdzenia o granicy ilorazu. Nową szansę na skuteczne wyznaczenie granicy w przypadku funkcji różniczkowalnych daje następująca reguła de l'Hospitala:

Twierdzenie 4.32 (reguła de l'Hospitala). *Niech $x_0 \in [a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ i niech funkcje $f,\ g\ :\ (a,b)\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że*

$$g(x)g'(x) \neq 0 \quad \textit{dla } x \in (a,b)\setminus x_0.$$

Jeżeli iloraz f/g jest w punkcie x_0 symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ albo symbolem typu $\frac{\infty}{\infty}$ oraz

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \textit{gdzie } A \in \overline{\mathbb{R}},$$

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dowód. Rozpoczniemy dowód reguły de l'Hospitala dla symbolu typu $\frac{0}{0}$. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbieżnym do x_0, o wyrazach różnych od x_0. Jeśli punkt $x_0 \in (a,b)$, to $f(x_0) = g(x_0) = 0$, bo funkcja f, jako różniczkowalna, jest ciągła w punkcie x_0. Jeśli $x_0 = a$ lub $x_0 = b$, to kładziemy $f(x_0) = g(x_0) := 0$. Funkcje f, g są ciągłe w przedziale domkniętym o końcach x_n, x_0 i różniczkowalne wewnątrz tego przedziału. Zatem na mocy twierdzenia Cauchy'ego istnieje takie c_n leżące pomiędzy x_n i x_0, że

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}. \tag{4.24}$$

Ponieważ $x_n \to x_0$, więc ciąg $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ też ma granicę równą x_0. W konsekwencji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = A,$$

co było do wykazania.

Zauważmy, że dla dowodu twierdzenia dla symbolu typu $\frac{\infty}{\infty}$ wystarczy wykazać, że z każdego ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do x_0, o wyrazach $x_n < x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ (albo o wyrazach $x_n > x_0$, $n = 1, 2, \ldots$), da się wybrać taki podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})} = A.$$

Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zbieżnym do x_0, o wyrazach mniejszych od x_0 (większych od x_0) i niech $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie innym ciągiem zbieżnym do x_0, też o wyrazach mniejszych od x_0 (większych od x_0). Z założenia (b) wynika, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_k \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{|f(y_k)|}{|g(x_{n_k})|} \leqslant \frac{1}{k}, \tag{4.25}$$

$$\frac{|g(y_k)|}{|g(x_{n_k})|} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{4.26}$$

Z nierówności (4.25), (4.26) wynika, że $y_k \neq x_{n_k}$, $g(y_k) \neq g(x_{n_k})$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_{n_k})} = \lim_{k\to\infty} \frac{g(y_k)}{g(x_{n_k})} = 0. \tag{4.27}$$

Z twierdzenia Cauchy'ego (zob. twierdzenie 4.30, str. 105) wynika, że istnieje takie c_k leżące pomiędzy x_{n_k} i y_k, że

$$\frac{f(x_{n_k}) - f(y_k)}{g(x_{n_k}) - g(y_k)} = \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)}$$

i zgodnie z założeniem (b)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} = A, \quad \text{bo} \quad c_k \to x_0, \text{ gdy } k \to \infty.$$

Stąd i z (4.27) otrzymamy

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})} &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})}-\frac{f(y_k)}{g(x_{n_k})}\right)=\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{f(x_{n_k})-f(y_k)}{g(x_{n_k})-g(y_k)}\cdot\frac{g(x_{n_k})-g(y_k)}{g(x_{n_k})}\right)=\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{f'(c_k)}{g'(c_k)}\left(1-\frac{g(y_k)}{g(x_{n_k})}\right)=A.\end{aligned}$$

□

Uwaga **4.33.** Zauważmy, że (zgodnie z przyjętymi założeniami) regułę de l'Hospitala możemy również stosować, gdy $x_0 = a = -\infty$ oraz gdy $x_0 = b = +\infty$.

Uwaga **4.34.** Jeżeli iloraz pochodnych jest symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ i funkcje f i g posiadają w sąsiedztwie punktu x_0 pochodne wyższego rzędu, to do ilorazu pochodnych można ponownie stosować regułę de l'Hospitala.

Przykład **4.35.** Obliczyć granice

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln 3x}{\operatorname{ctg} x}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin x\cos x}{1}=0.$

Pozostałe symbole nieoznaczone, do których bezpośrednio nie stosuje się reguły de l'Hospitala, przez stosowne przekształcenia sprowadza się do symboli $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, do których można stosować regułę de l'Hospitala.

Omówimy teraz sposoby postępowania przy sprowadzaniu symboli $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ do symbolu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ i zilustrujemy to odpowiednimi przykładami.

Symbol $0\cdot\infty$

Symbol ten może się pojawić np. przy obliczaniu granicy iloczynu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x). \tag{4.28}$$

W tym przypadku stosujemy przekształcenie

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

lub

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

które prowadzi do symbolu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Przykład **4.36.** Obliczyć granice

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = 0,$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$

Symbole 0^0, 1^∞, ∞^0

Symbole te mogą się pojawić przy obliczaniu granicy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}. \tag{4.29}$$

Korzystając z własności logarytmu, funkcję $f(x)^{g(x)}$ występującą w (4.29) przekształcamy następująco

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Z ciągłości funkcji $y = e^x$ wynika, że na to, aby obliczyć granicę (4.29), wystarczy obliczyć granicę

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x), \tag{4.30}$$

bo funkcja wykładnicza jest funkcją ciągłą. Łatwo zauważyć, że $g(x)\ln f(x)$ jest w punkcie $x = x_0$ symbolem nieoznaczonym typu $0\cdot\infty$. Po wyliczeniu granicy (4.30) granica (4.29) jest równa

$$e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}.$$

Przykład **4.37.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} \overset{0^0}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x \ln x}.$

Ponieważ

$$\lim_{x\to 0} \sin x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x = 0,$$

więc

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

Przykład **4.38.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$.

Ponieważ
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1,$$
więc
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Przykład **4.39.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} \overset{\infty^0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}$.

Ponieważ
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}$$
oraz
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0,$$
więc
$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Symbol $\infty - \infty$

Symbol ten może się pojawić przy obliczaniu granicy
$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x) - g(x)\right). \tag{4.31}$$

W tym przypadku również można podać ogólną metodę sprowadzania tego symbolu do symbolu $\frac{0}{0}$, praktycznie jednak symbol ten przekształca się w zależności od funkcji f i g. Zilustrujemy to na przykładach.

Przykład **4.40.** Obliczyć granice

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} =$
$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x + 1 + 1} = \dfrac{1}{2},$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 - e^x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - \dfrac{e^x}{x^2}\right).$

   Obliczamy najpierw
   $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2} = +\infty,$

   więc
   $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 - e^x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - \dfrac{e^x}{x^2}\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$

4.4. Twierdzenie Taylora

Twierdzenie Taylora jest też nazywane *wzorem Taylora*. Chodzi w nim o lokalną aproksymację (przybliżanie) funkcji wielomianami. Przedstawimy teraz jedno z możliwych sformułowań problemu takiej aproksymacji.

Brook Taylor
Ur. 18 sierpnia 1685 w Edmonton
Zm. 29 grudnia 1731 w Londynie
Angielski matematyk znany jako odkrywca pojęcia zwanego dziś szeregiem Taylora. Z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora matematycy korzystali już wcześniej, znali go na przykład Newton,Leibniz, de Moivre i Johann Bernoulli. Jednak zasługą Taylora jest, że podał go w ogólnej postaci.

Niech I będzie przedziałem w $\mathbb{R}$, $a \in I$ i niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w punkcie a. Chcemy

1. znaleźć taki wielomian p_n stopnia co najwyżej n, aby

$$p_n^{(\nu)}(a) = f^{\nu}(a) \quad \text{dla } \nu = 0, \ldots, n, \tag{4.32}$$

2. oszacować różnicę $f(x) - p_n(x)$ dla $x \neq x_0$.

Definicja 4.41. Wielomian

$$p_n(x) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.33}$$

nazywamy *n-tym wielomianem Taylora o środku a funkcji f*.

Wielomian Taylora (4.33) jest jedynym wielomianem stopnia co najwyżej n spełniającym warunki (4.32).

Funkcję f, n-krotnie różniczkowalną w punkcie a, możemy zapisać w postaci

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{4.34}$$

gdzie

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Tę postać nazywać będziemy *wzorem Taylora*.

Przy dodatkowych założeniach można powiedzieć znacznie więcej o zachowaniu się reszty R_n.

Twierdzenie 4.42 (o wzorze Taylora). *Niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną i niech R_n będzie resztą we wzorze Taylora* (4.34). *Wtedy*

(a) **(twierdzenie Taylora z resztą Peana)** *Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a, to istnieje ciągła w punkcie a funkcja $\Delta(x)$, określona dla $x \in I$, taka że*

$$\Delta(a) = 0,$$
$$R_n(x) = (x-a)^n \Delta(x).$$

(b) **(twierdzenie Taylora z resztą Lagrange'a)** *Jeśli $f : I \to \mathbb{R}$ jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w I, to istnieje taka $\theta \in (0,1)$ (zależna od x), że*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(c) *Jeśli f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w I oraz istnieje taka stała $K \geqslant 0$, że*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant K \quad \textit{dla } x \in I,$$

to dla reszty R_n mamy oszacowanie

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \quad \textit{dla } x \in I. \tag{4.35}$$

Dowód. Dla uproszczenia zapisu zamiast R_n będziemy pisać R. Zgodnie z konstrukcją wielomianu Taylora p_n mamy

$$R(a) = R'(a) = \cdots = R^{(n-1)}(a) = 0, \tag{4.36}$$

$$R^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a). \tag{4.37}$$

Z drugiej strony, dla funkcji $W(x) := (x-a)^n$ mamy

$$W(a) = W'(a) = \ldots = W^{(n-2)}(a) = 0 \quad \text{oraz} \quad W^{(n-1)}(a) = n!(x-a).$$

Zatem do ilorazu R/W możemy $(n-1)$-krotnie zastosować regułę de l'Hospitala. W efekcie otrzymamy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{W(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{R'(x)}{W'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a}\frac{R^{(n-1)}(x)}{W^{(n-1)}(x)} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a)\right) = 0,\end{aligned}$$

bo f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie a. Kładąc

$$\Delta(x) := \begin{cases} \dfrac{R(x)}{W(x)} & \text{dla } x \neq a, \\ 0 & \text{dla } x = a \end{cases}$$

otrzymamy funkcję Δ spełniającą warunek (a).

Z (4.36) i z twierdzenia Cauchy'ego 4.30 wynika, że istnieje takie $\theta_1 \in (0,1)$ (zależne od x), że dla $\xi_1 := a + \theta_1(x-a)$ mamy

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{(n+1)}} = \frac{R(x)-R(a)}{(x-a)^{(n+1)} - (a-a)^{(n+1)}} = \frac{R'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-a)^n}.$$

Kontynuując, dzięki równościom (4.36) otrzymamy takie punkty $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, że

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{(x-a)^{(n+1)}} &= \frac{R'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-a)^n} = \frac{R'(\xi_1)-R'(a)}{(n+1)((\xi_1-a)^n-(a-a)^n)} = \\ &= \frac{R''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-a)^{n-1}} = \\ &= \ldots\ldots\ldots = \\ &= \frac{R^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-a)},\end{aligned}$$

gdzie $\xi_n = a + \theta_n(x-a)$ z pewnym $\theta_n \in (0,1)$.

Do wykazania części (b) załóżmy, że funkcja f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale I. Wtedy jeszcze raz zastosowane twierdzenie Cauchy'ego[2] o wartości średniej daje, że istnieje takie $\xi = a + \theta(\xi_n - a)$ z pewnym $\theta \in (0, 1)$, że

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{(n+1)}} = \frac{R^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n - a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

co daje tezę punktu (b).

Punkt (c) jest prostą konsekwencją punktu (b). □

Giuseppe Peano
Ur. 27 sierpnia 1858 w Spinetta
Zm. 20 kwietnia 1932 w Turynie

Matematyk i logik. Opracował stosowaną powszechnie aksjomatykę arytmetyki liczb naturalnych (tzw. aksjomaty Peana). Skonstruował też przykład funkcji ciągłej przekształcającej odcinek domknięty na kwadrat domknięty, co jest sprzeczne z powszechną intuicją. Odwzorowanie to jest nazywane krzywą Peana.

Podstawmy we wzorze Taylora $a = 0$. Wówczas

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \tag{4.38}$$

gdzie

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n, \qquad c \in (0, x).$$

Wzór (4.38) nazywa się *wzorem Maclaurina*.

Reszta występująca we wzorze Taylora może mieć różne postacie. Wiele zależy tu od przyjętych założeń. Reszta Peana wymaga najsłabszych założeń i może mieć zastosowanie wyłącznie do teoretycznych rozważań, gdyż nic tu nie wiadomo o szybkości jej zbieżności do zera, gdy x zmierza do a.

[2] Tu wystarczy zastosować twierdzenie Lagrange'a 4.24.

Zastosowania i przykłady

Wzory Taylora i Maclaurina znajdują zastosowanie w przybliżonych obliczeniach. Korzystając z tych wzorów, pomija się resztę R_n i otrzymuje równość przybliżoną. Jeżeli reszta R_n jest mała, to popełnia się mały błąd, opuszczając ją. W ten sposób można ze wzorów (4.34) i (4.38) obliczać wartości funkcji z dowolną dokładnością, o ile reszta R_n dąży do zera, gdy $n \to \infty$.

Przykład **4.43.** Aby obliczyć przybliżoną wartość liczby $\sqrt[5]{1,02}$, z dokładnością do $0,0001$, do funkcji $y = \sqrt[5]{x}$ zastosujemy wzór Taylora (4.34) w przedziale $I = [1; 1,02]$. Biorąc $a = 1$, $x = 1,02$ otrzymamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{x} && \Rightarrow f(1) = 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} && \Rightarrow f'(1) = 0,2, \\ f''(x) &= -\frac{4}{25}\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} && \Rightarrow |f''(x)| \leqslant 0,16. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\sqrt[5]{1,02} = f(1,02) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot 0,02 + R_1(1,02) = 1,004 + R_1(1,02).$$

Do oszacowania reszty $R_1(0,02)$ skorzystamy z (4.35) i otrzymamy

$$|R_1(1,02)| \leqslant \frac{0,16}{2!}(0,02)^2 = 0,000032.$$

Zatem, przyjmując, że przybliżona wartość $\sqrt[5]{1,02}$ wynosi $1,004$, popełnimy błąd nieprzekraczający $0,000032$. Z oszacowania tego widać, że wybraliśmy odpowiednie n. Gdybyśmy nie otrzymali żądanej dokładności, należałoby zwiększyć n, czyli ilość wyrazów we wzorze Taylora.

Przykład **4.44.** Obliczyć przybliżoną wartość liczby $\sin 1$, korzystając ze wzoru Maclaurina dla $n = 3$.

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{120 - 20 + 1}{120} = \frac{101}{120},$$
$$\sin 1 \approx 0,8416.$$

Jako ćwiczenie proponujemy oszacowanie błędu otrzymanego przybliżenia.

4.5. Badanie funkcji

Niech funkcja $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją i niech $x_0 \in D$.

Definicja 4.45. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *maksimum lokalne* (*minimum lokalne*) lub krótko *maksimum* (*minimum*), jeżeli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D$ oraz dla każdego $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ spełniona jest nierówność

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (f(x) \geqslant f(x_0)). \tag{4.39}$$

Jeżeli zamiast słabych nierówności (4.39) spełnione są odpowiednio nierówności mocne

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)) \quad \text{dla } x \neq x_0, \tag{4.40}$$

to maksimum (minimum) lokalne nazywa się *właściwym* albo *silnym*. Maksima i minima nazywa się *ekstremami*.

Warto tu odnotować, że jeżeli $f(x_0)$ jest największą lub najmniejszą wartością danej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, to f ma ekstremum w punkcie x_0 tylko wtedy, gdy $x_0 \in (a, b)$. Przykładem może tu być funkcja

$$f : [0.1] \ni x \to x \in \mathbb{R},$$

która w punkcie 0 przyjmuje wartość najmniejszą i w punkcie 1 wartość największą i w żadnym punkcie nie ma ekstremum.

Wniosek 4.46. *Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w (a, b), to f może przyjąć wartość największą (najmniejszą) tylko w takim punkcie x_0, który jest końcem przedziału lub takim, w którym $f'(x_0) = 0$.*

Wiemy, że każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje w tym przedziale zarówno wartość największą, jak też i najmniejszą. Zatem, aby znaleźć największą (najmniejszą) wartość funkcji różniczkowalnej f, obliczamy jej wartości na końcach przedziału i w miejscach zerowych pochodnej i porównujemy otrzymane liczby. Liczba największa jest największą wartością funkcji, liczba najmniejsza zaś jest najmniejszą wartością tej funkcji.

Funkcja przedstawiona na rysunku 4.4, str. 117 ma dwa ekstrema lokalne, przy czym minimum lokalne nie jest najmniejszą wartością tej funkcji i podobnie maksimum lokalne nie jest jej największa wartością.

Twierdzenie 4.47 (warunek konieczny na ekstremum lokalne). *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ i ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że f ma maksimum lokalne w punkcie x_0. Wtedy istnieje takie $r > 0$, że $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$ oraz

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{4.41}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, więc funkcja

$$\delta_f : (a, b) \ni x \mapsto \delta_f(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{, gdy } x \neq x_0, \\ f'(x_0) & \text{, gdy } x = x_0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie x_0 oraz

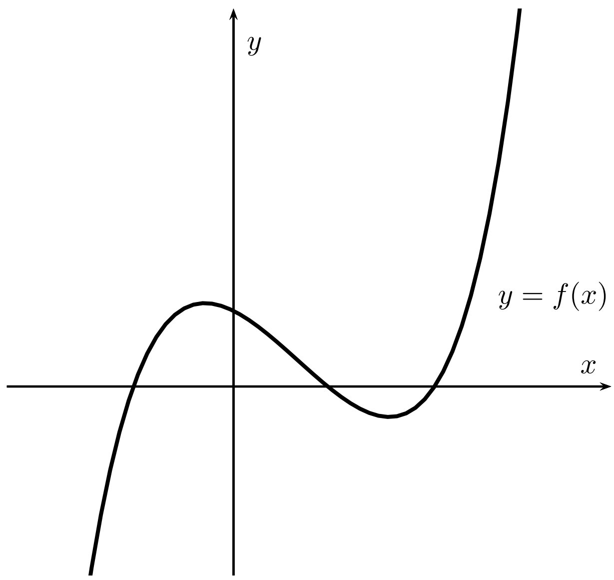
$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\delta_f(x) \quad \text{dla } x \in (a, b).$$

Z nierówności (4.41) wynika, że

$$\begin{aligned} \delta_f(x) \leqslant 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0), \\ \delta_f(x) \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in (x_0, x_0 + r), \end{aligned}$$

a to jest możliwe tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = \delta(x_0) = 0$.

W sytuacji gdy funkcja f ma minimum lokalne w punkcie x_0, dowód przebiega analogicznie. □



Rys. 4.4. Dwa ekstrema lokalne

Przykład funkcji $y = x^3$, która w punkcie $x_0 = 0$ ma pochodną równą zero i w żadnym punkcie nie ma ekstremum, wskazuje na to, że znikanie pochodnej w jakimś punkcie nie jest warunkiem wystarczającym na to, aby w tym punkcie funkcja miała ekstremum lokalne.

Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ może mieć ekstrema lokalne tylko w takich punktach, w których nie jest różniczkowalna lub w takich, w których pochodna istnieje i jest równa zero.

Warunki wystarczające istnienia ekstremum

Podamy tu dwa warunki wystarczające, często używane przy badaniu przebiegu zmienności funkcji. W pierwszym z tych warunków wystąpi, intuicyjnie jasne, pojecie zmiany znaku danej funkcji w punkcie x_0.

Definicja 4.48. Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zmienia znak z „+” na „-” (albo z „-” na „+”) w punkcie $x_0 \in (a, b)$, gdy istnieje takie $r > 0$, że $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$ oraz

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0), \\ f(x) < 0 & \text{dla } x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} f(x) < 0 & \text{dla } x \in (x_0 - r, x_0), \\ f(x) > 0 & \text{dla } x \in (x_0, x_0 + r). \end{cases}$$

Ze związku między znakiem pochodnej i monotonicznością funkcji wynika

Twierdzenie 4.49. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0, różniczkowalna w sąsiedztwie tego punktu i jej pochodna f' zmienia znak w punkcie x_0, to f ma ekstremum (silne) w punkcie x_0. Maksimum, gdy w punkcie x_0 pochodna zmienia znak z „$+$” na „$-$”, zaś minimum, gdy z „$-$” na „$+$”.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy skorzystać z twierdzenia 4.26 i definicji ekstremów lokalnych. □

Twierdzenie 4.49 obejmuje również te przypadki, gdy w punkcie x_0 funkcja nie jest różniczkowalna.

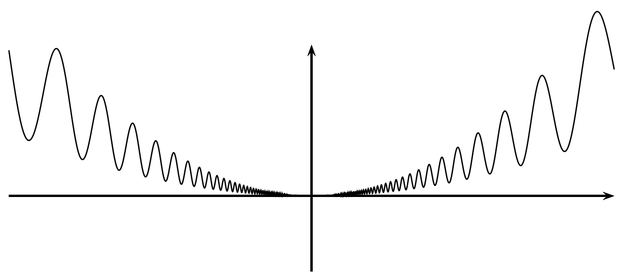
Warunek „zmiany znaku” nie jest warunkiem koniecznym na ekstremum w punkcie x_0.

Przykład **4.50.** Na rysunku 4.5 przedstawiony jest wykres funkcji

$$f : \mathbb{R} \ni x \to f(x) = \begin{cases} x^2\left(15 + 8 \sin \dfrac{5}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \tag{4.42}$$

Wykażemy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ minimum silne, jest różniczkowalna i jej pochodna nie zmienia znaku w tym punkcie.

Skoro
$$f(x) = x^2\Big(15 + 8\sin\frac{5}{x}\Big) \geqslant 7x^2 > 0 \quad \text{dla } x \neq 0,$$
więc $f(0) = 0$ jest najmniejszą wartością funkcji f. Zatem (zob. definicja 4.45, str. 116) funkcja f ma minimum silne w punkcie $x_0 = 0$. Z bezpośredniego rachunku wynika różniczkowalność funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Istotnie,
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\Big(15 + 8\sin\frac{5}{h}\Big)}{h} = 0.$$
Zatem f jest różniczkowalna i jej pochodna
$$f'(x) = \begin{cases} x\Big(30 + 16\sin\frac{5}{x}\Big) - 40\cos\frac{5}{x} & \text{dla } x \neq 0,\\ 0 & \text{dla } x = 0\end{cases}$$
w punktach zbieżnego do zera ciągu
$$x_k = \frac{5}{2k\pi},\ k = 1, 2, \ldots$$
przyjmuje wartości ujemne, zaś w punktach zbieżnego do zera ciągu
$$\tilde{x}_k = \frac{5}{(2k+1)\pi},\ k = 1, 2, \ldots$$
wartości dodatnie, co oznacza, że nie zmienia znaku w punkcie $x_0 = 0$, bo w dowolnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 0$ pochodna przyjmuje wartości zarówno ujemne, jak i dodatnie.



Rys. 4.5. Ekstremum silne bez zmiany znaku pochodnej

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 4.51. *Jeżeli funkcja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in (a, b)$ *oraz* $f'(x_0) = 0$*, to*
(a) *jeżeli* $f''(x_0) < 0$*, to* f *ma maksimum (lokalne silne) w punkcie* x_0*,*
(b) *jeżeli* $f''(x_0) > 0$*, to* f *ma minimum (lokalne silne) w punkcie* x_0*.*

Dowód. Korzystając z definicji ekstremum, dowód sprowadza się do pokazania, że różnica $f(x) - f(x_0)$ jest stałego znaku w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0, tzn. że albo

$$f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{dla } x \in S$$

i wtedy jest minimum w punkcie x_0, albo

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{dla } x \in S$$

i wtedy jest maksimum w punkcie x_0.

Ze wzoru Taylora z resztą Peana (zob. twierdzenie 4.42, str. 112) otrzymamy

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + (x - x_0)^2 \Delta(x) = \\ &= (x - x_0)^2 \Big(\frac{f''(x_0)}{2!} + \Delta(x) \Big). \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{x \to x_0} \Delta(x) = 0$, więc dla x z dostatecznie małego sąsiedztwa punktu x_0 różnica $f(x) - f(x_0)$ jest tego samego znaku co $f''(x_0)$, co kończy dowód. □

Z twierdzenia 4.51 wynika, że przy szukaniu ekstremum badanie znaku pierwszej pochodnej w pobliżu danego punktu x_0 (zob. twierdzenie 4.49, str. 118) możemy zastąpić przez badanie znaku drugiej pochodnej w tym punkcie.

Jeśli pierwsza z pochodnych różnych od zera w punkcie x_0 *jest rzędu nieparzystego, to funkcja nie ma ekstremum w punkcie* x_0*. Jeśli pierwszą taka pochodną jest pochodna rzędu parzystego, to funkcja ma w punkcie* x_0 *maksimum (minimum), gdy pochodna ta jest ujemna (dodatnia).*

Na przykład dla funkcji $f(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$ mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - e^{-x} - 2\sin x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2\cos x, & f''(0) &= 0, \\ f''' &= e^x - e^{-x} + 2\sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x, & f^4(0) &= 4, \end{aligned}$$

Ponieważ pierwszą pochodną różną od zera w punkcie $x_0 = 0$ jest pochodna rzędu parzystego, więc w punkcie $x_0 = 0$ funkcja f ma ekstremum. Jest to minimum, bo $f^{(4)}(0) = 4 > 0$.

Wypukłość i punkty przegięcia

Po klasie funkcji monotonicznych, tj. rosnących lub malejących, wyróżniamy klasę funkcji wypukłych lub wklęsłych.

Niech I będzie przedziałem w $\mathbb{R}$ i niech będzie dana funkcja $f:\ I \to \mathbb{R}$.

Definicja 4.52. Mówimy, że funkcja f jest

(i) *wypukła* (lub *wypukła ku dołowi*), jeżeli odcinek łączący dowolne dwa punkty $A = (x_1, f(x_1))$, $B = (x_2, f(x_2))$ wykresu funkcji f leży nad częścią jej wykresu odpowiadającą przedziałowi o końcach x_1, x_2. Korzystając z równania odcinka, można to zapisać w postaci nierówności

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.43}$$

(ii) *wklęsła* (lub *wypukła ku górze*), jeżeli odcinek łączący dowolne dwa punkty $A = (x_1, f(x_1))$, $B = (x_2, f(x_2))$ wykresu funkcji f leży pod częścią jej wykresu odpowiadającą przedziałowi o końcach x_1, x_2. Korzystając z równania odcinka, można to zapisać w postaci nierówności

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.44}$$

Fakt, że funkcja jest wypukła (wypukła ku dołowi) jest równoważny temu, że

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in I,\ y \geqslant f(x)\}$$

jest wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, zaś to, że funkcja jest wklęsła (wypukła ku górze) oznacza, że

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in I,\ y \leqslant f(x)\}$$

jest wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^2$.

Przykładem funkcji wypukłej (i jednocześnie wklęsłej) jest funkcja liniowa

$$f:\ \mathbb{R} \ni x \mapsto ax + b.$$

Jeśli funkcja f jest wypukła (wklęsła), to funkcja $-f$ jest wklęsła (wypukła).

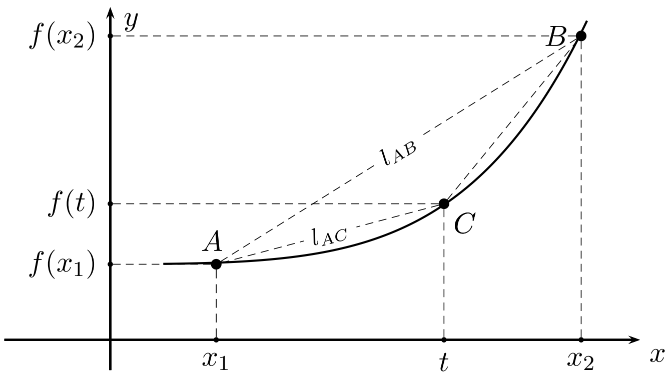
Twierdzenie 4.53. *Jeżeli funkcja $f:\ I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to następujące warunki są równoważne:*

(a) *funkcja f jest wypukła ku górze (wypukła ku dołowi),*

(b) *pochodna funkcji f jest funkcja malejącą (rosnącą).*
Ponadto, jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale I, to f jest wypukła ku górze (wypukła ku dołowi) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f''(x) \leqslant 0 \quad \text{dla } x \in I \qquad (f''(x) \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in I).$$

Dowód. $\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ Rozważymy tylko przypadek funkcji wypukłej ku dołowi.



Rys. 4.6.

Niech $x_1 < x_2 \in I$ i niech $x_1 < t < x_2$. Punkt $C = (t, f(t))$ leży pod odcinkiem $[(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))]$ łączącym punkt $A = (x_1, f(x_1))$ z punktem $B = (x_2, f(x_2))$ (zob. rys. 4.6). Stąd wynika, że prosta l_{AC}, przechodząca przez punkty A i C, tworzy z dodatnią półosią osi Ox kąt nie większy niż kąt, jaki tworzy prosta l_{AB} z dodatnią półosią osi Ox. Tę samą nierówność spełniają tangensy tych kątów

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Stąd, przechodząc do granicy, gdy $t \to x_1$, otrzymujemy

$$f'(x_1) = \lim_{t \to x_1} \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{4.45}$$

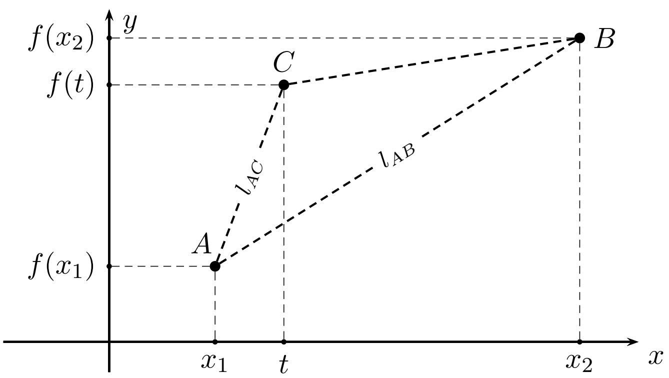
Z drugiej strony prosta l_{BA} tworzy z dodatnią półosią osi Ox kąt mniejszy niż prosta l_{BC}. Stąd

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \lim_{t \to x_2} \frac{f(t) - f(x_2)}{t - x_2} = f'(x_2),$$

co łącznie z nierównością (4.45) daje $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że pochodna jest rosnąca i funkcja f nie jest wypukła ku dołowi. Oznacza to, że istnieją punkty $x_1 < x_2$ należące do I i istnieje taki punkt $t \in (x_1, x_2)$, że punkt $C = (t, f(t))$ leży nad odcinkiem

$$[A, B] = [(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))] \quad \text{(zob. rys. 4.7).}$$



Rys. 4.7.

Funkcja f jest różniczkowalna, więc z twierdzenia Lagrange'a (zob. twierdzenie 4.24, str. 102) wynika, że istnieją takie punkty $t_1 \in (x_1, t)$, $t_2 \in (t, x_2)$, że

$$f'(t_1) = \frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$f'(t_2) = \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Stąd $f'(t_1) > f'(t_2)$, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem.

Druga część twierdzenia wynika z pierwszej i twierdzenia 4.28, str. 105. $\square$

Dla funkcji różniczkowalnej f można wykazać jeszcze jedną ważną charakterystykę jej wypukłości (wklęsłości). Zamiast cięciwy można rozważać styczne w dowolnym punkcie wykresu. Dowodzi się, że na to, aby f była wypukła (wklęsła), potrzeba i wystarcza, żeby wykres funkcji f leżał całkowicie nad (pod) dowolną styczną (zob. np. [5] rozdz. IV).

Punkty przegięcia

Punkty przegięcia to takie, w których funkcja zmienia rodzaj wypukłości. Z wypukłej przechodzi we wklęsłą albo odwrotnie. Sprecyzujemy to dokładniej.

Niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją określoną na przedziale I.

Definicja 4.54. Mówimy, że x_0 jest punktem przegięcia funkcji f, gdy istnieje takie $r > 0$, że
(i) $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$,
(ii) funkcja f jest wypukła w przedziale $(x_0 - r, x_0)$ i wklęsła w $(x_0, x_0 + r)$ lub odwrotnie: wklęsła w przedziale $(x_0 - r, x_0)$ i wypukła w $(x_0, x_0 + r)$.

Twierdzenie 4.55. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną i niech $x_0 \in (a, b)$. Wtedy*
(i) *jeżeli f ma w punkcie x_0 punkt przegięcia, to $f''(x_0) = 0$,*
(ii) *jeżeli f'' zmienia znak w punkcie x_0, to f ma punkt przegięcia w punkcie x_0. Przy zmianie znaku z „$-$” na „$+$” następuje zmiana z wypukłości ku górze na wypukłość ku dołowi, natomiast przy zmianie znaku z „$+$” na „$-$” następuje zmiana z wypukłości ku dołowi na wypukłość ku górze.*

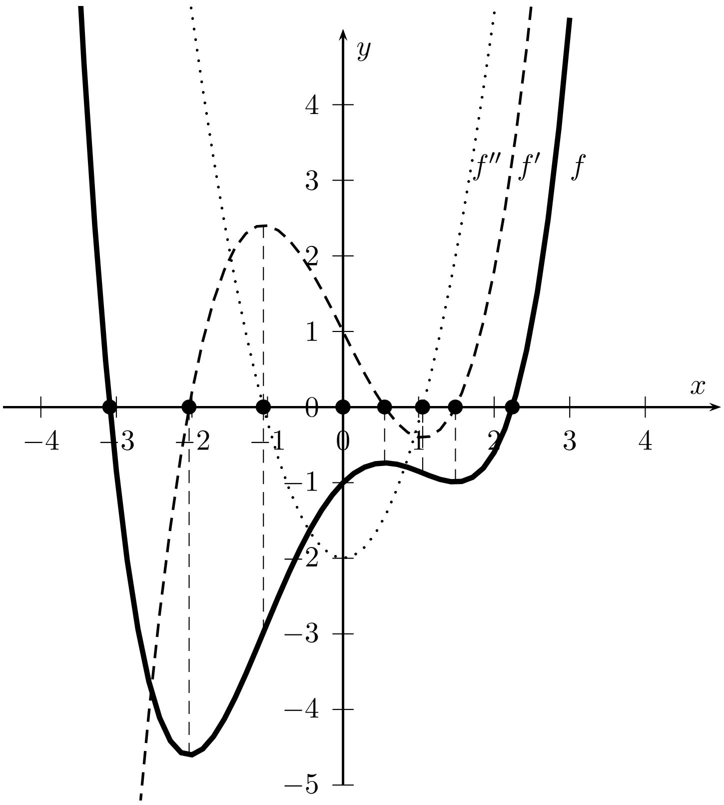
Dowód. Dla wykazania punktu (i) zauważmy, że jeżeli f ma punkt przegięcia w punkcie x_0, to z twierdzenia 4.53 (str. 121, punkt (b)) wynika, że f' ma ekstremum w punkcie x_0. Korzystając z warunku koniecznego na ekstremum funkcji różniczkowalnej, wnioskujemy, że $f''(x_0) = 0$.

Punkt (ii) wynika z drugiej części twierdzenia 4.53. □

Przykład **4.56.** Aby zilustrować to twierdzenie, rozważmy funkcję
$$f : \mathbb{R} \ni x \to x^3.$$
Ma ona punkt przegięcia w punkcie $x_0 = 0$. Łatwo sprawdzamy, że
$$f'(x) = 3x^2,$$
$$f''(x) = 6x.$$
Zatem, zgodnie z twierdzeniem 4.55 w punkcie $x_0 = 0$ jest punkt przegięcia, z wypukłości ku górze na wypukłość ku dołowi, bo druga pochodna zmienia znak z „$-$” na „$+$”.

Na rysunku 4.8 przedstawiony został wykres funkcji
$$f(x) = 0,15x^4 - x^2 + x - 1 \quad \text{dla } x \in (-4, 3)$$

oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej. Mamy nadzieję, że czytelnik, analizując wykres tej funkcji i jej pochodnych, zauważy wcześniej sformułowane zależności (zob. twierdzenia: 4.26 (str. 104), 4.47 (str. 116), 4.49 (str. 118), 4.51 (str. 120), 4.53 (str. 121)) pomiędzy monotonicznością i ekstremami a znakiem i zmianą znaku pierwszej pochodnej, rodzajem wypukłości a monotonicznością pierwszej i znakiem drugiej pochodnej, punktami przegięcia a zmianami monotoniczności pierwszej i zmianami znaku drugiej pochodnej.



Rys. 4.8. Funkcja f i jej pochodne

Asymptoty

Dana funkcja f może mieć trzy rodzaje asymptot: pionowe, poziome i ukośne. Asymptot poziomych lub ukośnych może mieć co najwyżej dwie. Można podać przykłady funkcji, które mają dowolną, z góry zadaną, liczbę asymptot pionowych.

Definicja 4.57. Mówimy, że

(i) prosta $x = x_0$ jest *asymptotą pionową* funkcji f, gdy jedna z granic

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{(x_0,x_0+r)}(x) \text{ lub } \lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{(x_0-r,x_0)}(x),$$

jest niewłaściwa;

(ii) prosta $y = b$ jest *asymptotą poziomą* funkcji f w $+\infty$ (w $-\infty$), jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu $+\infty$ ($-\infty$) i

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \big(\lim_{x\to-\infty} f(x) = b\big);$$

(iii) prosta $y = ax + b$ jest *asymptotą ukośną* funkcji f w $+\infty$ (w $-\infty$), jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu $+\infty$ ($-\infty$) i

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \big(\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0\big).$$

Twierdzenie 4.58. *Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ (w $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \tag{4.46}$$

$$\Big(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b\Big). \tag{4.47}$$

Dowód. Rozważymy tylko przypadek asymptoty w $+\infty$. Dowód dla asymptoty ukośnej w $-\infty$ jest analogiczny.

$\boxed{\Rightarrow}$ Przy założeniu, że prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$ otrzymamy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x}\right) = $$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + a + \frac{b}{x}\right) = a,$$

co oznacza, że a spełnia pierwszy ze wzorów (4.46). Z drugiej strony

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b + b) = b,$$

co oznacza, że b spełnia drugi ze wzorów (4.46).

$\boxed{\Leftarrow}$ Załóżmy, że istnieją granice (4.46). Wtedy

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b)) = \lim_{x\to+\infty} ((f(x) - ax) - b) = b - b = 0,$$

co kończy dowód, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$. □

Badanie funkcji

Przez badanie funkcji rozumiemy podanie (możliwie pełnej) informacji o funkcji, bez sporządzania jej wykresu „metodą wyznaczania kolejnych punktów". Wykresy komputerowe są sporządzane „metodą wyznaczania kolejnych punktów" i nie mogą zawierać informacji o pełnym przebiegu zmienności danej funkcji, gdy jej dziedzina lub zbiór wartości jest nieograniczony.

Mając zbadać funkcję f i narysować przybliżony jej wykres, praktycznie jest zastosować następującą metodę postępowania:

1. Znaleźć dziedzinę funkcji.
2. Wyznaczyć punkty nieciągłości.
3. Obliczyć granice na końcach przedziałów określoności i w punktach nieciągłości funkcji f.
4. Wyznaczyć punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
5. Zbadać parzystość i nieparzystość.
6. Zbadać ekstrema i przedziały monotoniczności. Jeżeli w punktach a_1, $a_2, \ldots$ funkcja ma ekstrema, wyznaczyć na płaszczyźnie punkty A_j o współrzędnych $(a_j, f(a_j))$, $j = 1, 2, \ldots$
7. Znaleźć punkty przegięcia i przedziały wypukłości (ku górze lub ku dołowi). Wyznaczyć na płaszczyźnie punkty $B_j = (b_j, f(b_j))$, $j = 1, 2, \ldots$, gdzie b_j są punktami przegięcia funkcji.
8. Wyznaczyć asymptoty.
9. Narysować wykres funkcji.

Metodę tę zilustrujemy na przykładach.

Przykład **4.59.** Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = (x+2)e^{\frac{x}{x+2}}$$

i narysować jej wykres.

Aby narysować wykres, wykonamy wszystkie kroki opisanego postępowania.

1. Dziedzina: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, a więc

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$

2. Punktem nieciągłości jest punkt $x = -2$.
3. Granice:
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)e^{\frac{x}{x+2}} = -\infty$,

(b) $\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)e^{\frac{x}{x+2}} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to-2^-}\frac{e^{\frac{x}{x+2}}}{\frac{1}{x+2}}$

$= \lim\limits_{x\to-2^-}\frac{e^{\frac{x}{x+2}}\frac{2}{(x+2)^2}}{\frac{-1}{(x+2)^2}} = \lim\limits_{x\to-2^-} -2e^{\frac{x}{x+2}} = -\infty,$

(c) $\lim\limits_{x\to-2^+}(x+2)e^{\frac{x}{x+2}} = 0,$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{\frac{x}{x+2}}$=+$\infty$.

4. Punkty przecięcia z osiami układu: wykres tej funkcji nie przecina osi x-ów, natomiast przecina oś y-ów w punkcie $P=(0,2)$.
5. Parzystość, nieparzystość: funkcja ta nie jest ani parzysta, ani nieparzysta, bo jej dziedzina nie jest symetryczna względem zera.
6. Ekstrema, monotoniczność:

- $y' = e^{\frac{x}{x+2}} + (x+2)e^{\frac{x}{x+2}}\dfrac{2}{(x+2)^2} = e^{\frac{x}{x+2}}\dfrac{x+4}{x+2}.$
- $y'=0 \iff x=-4$. Ponadto $f(-4)=-2e^2$.
- $y'>0$, gdy $\dfrac{x+4}{x+2}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(-2,+\infty)$ i w tych przedziałach funkcja jest rosnąca. To nie oznacza, że jest rosnąca na sumie mnogościowej tych przedziałów.
- $y'<0$, gdy $x\in(-4,-2)$ i w tym przedziale funkcja jest malejąca.
- Zatem w punkcie $x=-4$ funkcja ma maksimum lokalne równe $-2e^2$, bo w punkcie $x=-4$ pochodna zmienia znak z „+” na „–”.

7. Punkty przegięcia i wypukłość: możemy wyznaczyć, badając monotoniczność pierwszej pochodnej. Jednak w naszym przykładzie łatwiejsze jest zbadanie znaków drugiej pochodnej. Oczywiście, znając znaki drugiej pochodnej, znamy monotoniczność pierwszej pochodnej.

- $y'' = e^{\frac{x}{x+2}}\dfrac{2}{(x+2)^2}\dfrac{x+4}{x+2} + e^{\frac{x}{x+2}}\dfrac{-2}{(x+2)^2} = e^{\frac{x}{x+2}}\dfrac{4}{(x+2)^3}.$
- $y''>0 \Leftrightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$. Zatem w przedziale $(-2,+\infty)$ funkcja jest wypukła ku dołowi.
- $y''<0 \Leftrightarrow x+2<0 \Rightarrow x<-2$. Zatem w przedziale $(-\infty,-2)$ funkcja jest wypukła ku górze.
- $y''\neq 0$ dla $\forall x\in D$.

8. Asymptoty:
   (a) asymptota pionowa $x=-2$,
   (b) asymptota ukośna $y=ax+b$;

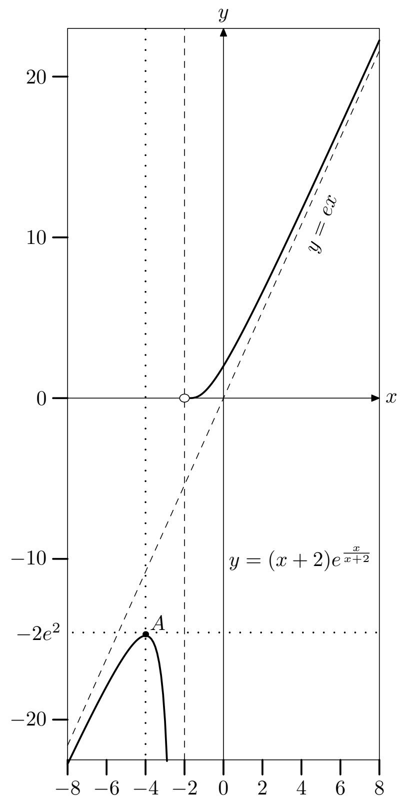
$a = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x+2)}{x}e^{\frac{x}{x+2}} = e,$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[(x+2)e^{\frac{x}{x+2}} - ex\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left[\dfrac{(x+2)}{x}e^{\frac{x}{x+2}} - e\right] =$

$$\overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{(x+2)}{x}e^{\frac{x}{x+2}} - e}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}e^{\frac{x}{x+2}} + \frac{x+2}{x}e^{\frac{x}{x+2}}\frac{2}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+2}}\left(2 - \frac{2x}{x+2}\right) = 0.$$

Zatem asymptota ukośna ma równanie $y = ex$.

9. Wykorzystując otrzymane wyniki, szkicujemy wykres. Rozpoczynamy od zaznaczenia tzw. punktów charakterystycznych i asymptot. Otrzymany wykres znajduje się na rysunku 4.9.



Rys. 4.9. Wykres funkcji z przykładu 4.59

Przykład **4.60.** Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$$

i narysować jej wykres.

1. Dziedzina: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, a więc
$$D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$
2. Punktem nieciągłości jest punkt $x = -1$.
3. Granice:
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty.$$
4. Punkty przecięcia z osiami układu: $x = 0, \quad y = 0$, a zatem wykres przecina osie układu w punkcie $O = (0, 0)$.
5. Parzystość, nieparzystość: funkcja ta nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.
6. Ekstrema i monotoniczność:
   - $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)}(x+1)}.$
   - Wynika stąd, że pochodna nie jest określona dla $x = 0$ i dla $x = -1$, a więc dziedzina pochodnej nie pokrywa się z dziedziną funkcji.
   - $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, \quad f(-2) = \sqrt[3]{-4}$. Funkcja ta może mieć ekstrema w punktach: $x = 0$ lub $x = -2$.
   - $y' > 0$, gdy $\dfrac{x+2}{x} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i w tych przedziałach funkcja jest rosnąca.
   - $y' < 0$, gdy $\dfrac{x+2}{x} < 0 \Rightarrow x \in (-2, 0)$ i w tych przedziałach funkcja jest malejąca.
   - Zatem w punkcie 0 jest minimum lokalne równe 0, natomiast w punkcie $x = -2$ jest maksimum lokalne równe $\sqrt[3]{-4}$.
7. Punkty przegięcia i wypukłość:
   - $y'' = \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x(x+1)}(x+1) - (x+2)\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}(x+1+x)(x+1) + \sqrt[3]{x(x+1)}\right]}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}(x+1)^2}.$

     Po przekształceniu otrzymujemy
$$y'' = \frac{(x+1)(-2x^2 - 8x - 2)}{9\left(\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}\right)^2 (x+1)^2} = \frac{-2(x^2 + 4x + 1)}{9\left(\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}\right)^2 (x+1)}.$$
   - $y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = -2 + \sqrt{3}$.
     Stąd wynika, że funkcja może mieć punkty przegięcia w punktach: $-2 - \sqrt{3}$, $-2 + \sqrt{3}$. Stwierdzimy to, badając znaki drugiej pochodnej.
   - $y'' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x+1} < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right) \cup \left(-1, -2 + \sqrt{3}\right)$, czyli funkcja w każdym z tych przedziałów jest wypukła ku dołowi.

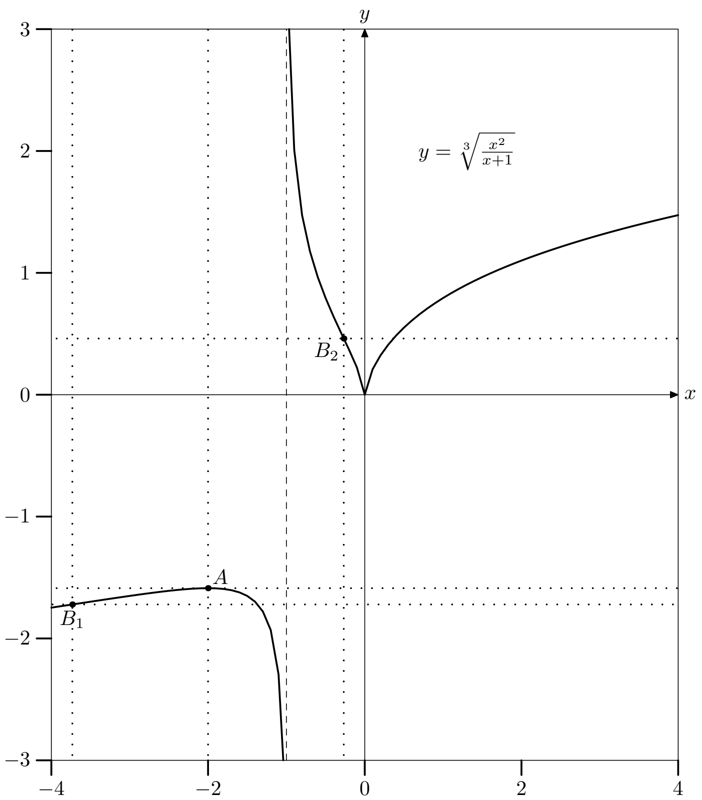
- $y'' < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-2-\sqrt{3}, -1\right) \cup \left(-2+\sqrt{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$,
  czyli funkcja w każdym z tych przedziałów jest wypukła ku górze.

8. Asymptoty
   (a) asymptota pionowa $x = -1$,
   (b) asymptota ukośna $y = ax + b$;

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x+1}x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} - 0\right) = \pm\infty,$$

   a zatem funkcja nie ma asymptot ukośnych.
9. Wykres znajduje się na rysunku 4.10.



Rys. 4.10. Wykres funkcji z przykładu 4.60

4.6. Ciągi i szeregi funkcyjne

Dla ciągów i szeregów funkcyjnych, tzn. ciągów i szeregów, których wyrazy są funkcjami, rozważane są różne rodzaje zbieżności. W tej części przedstawimy punktową i jednostajną ich zbieżność.

Ciągi funkcyjne

Niech I będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ i niech

$$f_n : I \to \mathbb{R},\ n = 1, 2, \dots$$

będzie ciągiem funkcyjnym. Każdemu punktowi $x \in I$ możemy przyporządkować ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych i badać jego zbieżność.

Definicja 4.61. Jeżeli dla każdego $x \in I$ ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to o ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mówimy, że jest *zbieżny punktowo* (lub krócej, że jest zbieżny) w I i wtedy funkcję

$$f : I \ni x \mapsto f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

nazywamy *granicą ciągu* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Używając bardziej formalnego zapisu (zob. 2.2, str. 18), zbieżność punktowa ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do funkcji f oznacza, że

$$\forall x \in I\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4.48}$$

Uniezależniając n_0 od $x \in I$, otrzymamy zbieżność jednostajną.

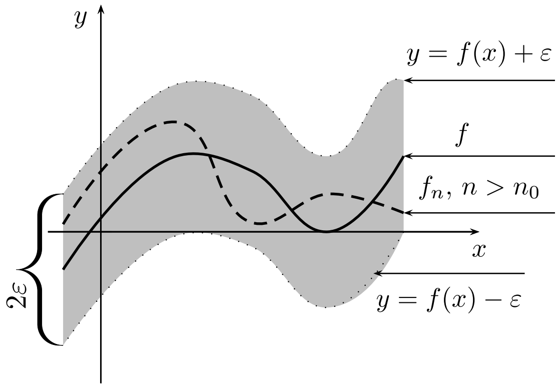
Definicja 4.62. Mówimy, że $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *jednostajnie zbieżny* w I do f, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\, \forall x \in I\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4.49}$$

Geometrycznie jednostajna zbieżność oznacza, że jakąkolwiek weźmiemy ε-otoczkę wykresu funkcji f (zob. rysunek 4.11, str. 133), tzn. zbiór

$$V_\varepsilon(f) := \{(x, y) \in X \times Y :\ x \in I,\ |f(x) - y| < \varepsilon\},$$

to w tej ε-otoczce leżą prawie wszystkie wykresy funkcji ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.



Rys. 4.11. ε-otoczka funkcji f

Zbieżność jednostajna jest ważnym pojęciem analizy matematycznej. Przyczyna tkwi w tym, że przenosi ona pewne własności funkcji tworzących ciąg funkcyjny na funkcję graniczną. Podstawowym jest tu twierdzenie o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4.63. *Niech $f_n : I \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym jednostajnie zbieżnym do $f : I \to \mathbb{R}$.*

(i) *Jeżeli wszystkie funkcje (wystarczy prawie wszystkie) f_n są ciągłe w punkcie $a \in I$, to f też jest ciągła w punkcie a.*

(ii) *Jeżeli f_n są ciągłe w I, to f jest ciągła w I.*

(iii) *Jeżeli f_n są jednostajnie ciągłe w I, to f jest jednostajnie ciągła w I.*

Dowód. Niech $a \in I$ będzie takim punktem, w którym wszystkie funkcje f_n są ciągłe. Z założonej jednostajnej zbieżności wynika, że dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczna naturalna m, że

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla } x \in I. \tag{4.50}$$

Wybrana funkcja f_m jest ciągła w punkcie a. Zatem możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, aby zachodziła nierówność

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla } x \in I,\ |x - a| < \delta.$$

Wobec tego dla dowolnego $x \in I \cap (a - \delta, a + \delta)$ mamy

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| < \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości f w punkcie a i kończy dowód punktów (i) oraz (ii).

Załóżmy teraz, że funkcje f_n są jednostajnie ciągłe i do ustalonego $\varepsilon > 0$ dobierzmy m, tak aby zachodził warunek (4.50). Funkcja f_m jest jednostajnie ciągła, więc istnieje taka $\eta > 0$, że

$$\text{jeżeli } \left|x' - x''\right| < \eta, \text{ to } \left|f_m(x') - f_m(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd, jeśli x', x'' są takie, że $|x' - x''| < \eta$, to

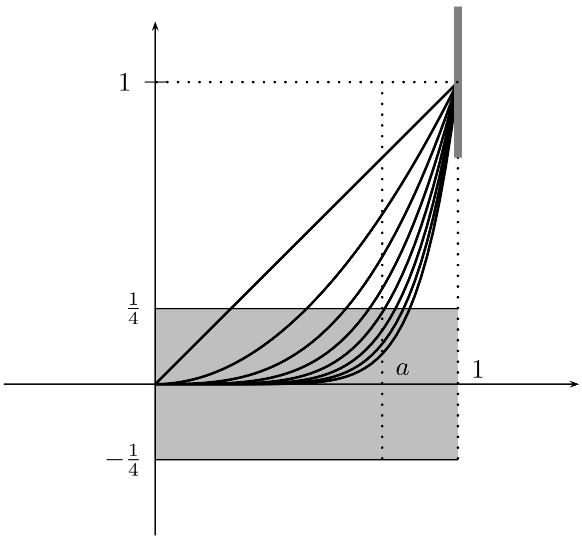
$$\begin{aligned}\left|f(x') - f(x'')\right| \leqslant \left|f(x') - f_m(x')\right| &+ \\ + \left|f_m(x') - f_m(x'')\right| + \left|f_m(x'') - f(x'')\right| &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi jednostajnej ciągłości f. □

Uwaga **4.64.** Bez założenia jednostajnej zbieżności twierdzenie o ciągłości granicy ciągu funkcji ciągłych nie jest prawdziwe. Na przykład ciąg $f_n(x) := x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ jest w przedziale $[0, 1]$ zbieżny (punktowo) do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

która nie jest ciągła.



Rys. 4.12. Ciąg niejednostajnie zbieżny

Wykresy początkowych ośmiu funkcji tego ciągu zostały przedstawione na rysunku 4.12. Biorąc (jak na rysunku) $\varepsilon = \frac{1}{4}$ otrzymamy, że żaden z wykresów ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie zawiera się w ε-otoczce

$$V_{\frac{1}{4}}(f) = \Big([0,1) \times \Big(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\Big)\Big) \cup \Big(\{1\} \times \Big(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\Big)\Big)$$

wykresu funkcji granicznej f, co przeczy jednostajnej jego zbieżności.

Zawężając funkcje tego ciągu do przedziału $[0, a] \subset [0, 1)$ otrzymamy ciąg jednostajnie zbieżny w przedziale $[0, a]$ do funkcji tożsamościowo równej zero, a więc ciągłej. Dla a zaznaczonego na rysunku 4.12 oraz $\varepsilon = \frac{1}{4}$ wszystkie wykresy funkcji ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, zawężonych do przedziału $[0, a]$, o numerach większych od 4 leżą w ε-otoczce funkcji tożsamościowo równej 0.

Pochodna granicy ciągu funkcyjnego

Granica f ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji różniczkowalnych może nie być funkcją ciągłą (zob. uwaga 4.64). Istnieją też jednostajnie zbieżne ciągi funkcji różniczkowalnych, których granice nie są funkcjami różniczkowalnymi. Ciąg funkcyjny

$$f_n : [-1, 1] \ni x \mapsto |x|^{1+\frac{1}{n}}, \; n = 1, 2, \ldots$$

jest przykładem takiego ciągu.

Do badania różniczkowalności granic ciągów funkcyjnych stosujemy następujące twierdzenie, którego bardziej ogólne sformułowanie i pełny dowód może czytelnik znaleźć w [7], rozdz. III.

Twierdzenie 4.65. *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech*

$$f_n : I \to \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \ldots$$

będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych. Jeżeli ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny[3] *do funkcji f, a ciąg pochodnych $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednostajnie zbieżny do f^*, to funkcja*

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n$$

jest różniczkowalna i

$$f'(x) = f^*(x) := \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{dla } x \in I. \tag{4.51}$$

Tezę (4.51) twierdzenia 4.65 często zapisujemy w postaci:

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx},$$

co odczytujemy jako przemienność różniczkowania z przechodzeniem do granicy.

[3] Wystarczy założyć zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tylko w jednym punkcie x przedziału I.

Szeregi funkcyjne

Twierdzenia i pojęcia dotyczące ciągów funkcyjnych bez większych problemów można przenieść na szeregi funkcyjne.

Do sformułowania definicji szeregu funkcyjnego i jego zbieżności załóżmy, że I jest podzbiorem $\mathbb{R}$, zaś $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji o wartościach w $\mathbb{R}$, określonych na zbiorze I.

Definicja 4.66. Szeregiem funkcyjnym

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{4.52}$$

nazywamy parę ciągów $(\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, gdzie

$$s_n : \ I \ni x \mapsto f_1(x) + \ldots + f_n(x) \in \mathbb{R}$$

jest sumą n początkowych wyrazów ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $n = 1, 2, \ldots$

Ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem wyrazów szeregu* (4.52), f_n nazywamy n*-tym wyrazem*, ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem sum częściowych*, zaś s_n nazywamy n*-tą sumą częściową* tego szeregu.

Definicja 4.67. O szeregu (4.52) mówimy, że jest

1. *zbieżny w punkcie* $x \in I$, gdy ciąg liczbowy $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę w $\mathbb{R}$,
2. *zbieżny w I (punktowo zbieżny)*, gdy ciąg $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w każdym punkcie $x \in I$,
3. *bezwzględnie zbieżny w punkcie* $x \in I$, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny,
4. *bezwzględnie zbieżny w zbiorze* I, gdy jest bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie $x \in I$,
5. *jednostajnie zbieżny w* I, gdy ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny w I.

Uwaga **4.68.** Niech będzie dany szereg (4.52), którego wyrazy f_n są funkcjami określonymi w zbiorze I.

(a) Jeżeli mówimy, że dany szereg jest zbieżny, to rozumiemy, że jest on zbieżny do jakiejś funkcji $s : \ I \to \mathbb{R}$, co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \quad \text{dla } x \in I.$$

Ponadto dla szeregu (4.52) zapis

$$\sum_{n=o}^{\infty} f_n = s$$

oznacza, że szereg jest zbieżny i jego suma wynosi s. Rodzaj zbieżności najczęściej wynika z kontekstu.

(b) Jeżeli szereg nie jest zbieżny, to mówimy, że jest *rozbieżny*.

Jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych

Twierdzenia dotyczące granic ciągów funkcyjnych bez większego trudu można przenieść na sumy szeregów funkcyjnych. Przykładem takim jest twierdzenie 4.63, str. 133. Dla szeregów funkcyjnych ma ono postać.

Twierdzenie 4.69. *Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie takim ciągiem funkcji określonych na I, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny w I do funkcji $s:\ I\to\mathbb{R}$.*

(i) *Jeżeli wszystkie funkcje f_n są ciągłe w $a\in I$, to s też jest ciągła w punkcie a.*

(ii) *Jeżeli f_n są ciągłe w I, to s jest ciągła w I.*

(iii) *Jeżeli f_n są jednostajnie ciągłe w I, to s jest jednostajnie ciągła w I.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeżeli wszystkie funkcje ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągłe (odpowiednio jednostajnie ciągłe), to sumy częściowe też są ciągłe (odpowiednio jednostajnie ciągłe) i skorzystać z twierdzenia 4.63, str. 133. □

Jednostajna zbieżność nie jest warunkiem koniecznym, aby suma szeregu funkcji ciągłych była funkcją ciągłą.

Przykład **4.70.** Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ na przedziale $I=(-1,1)$. Dla ustalonego $x\in I$ jest to szereg geometryczny o ilorazie $x\in(-1,1)$. Jest więc szeregiem zbieżnym do funkcji

$$s:\ I\ni x\mapsto \frac{1}{1-x}\in\mathbb{R}.$$

Funkcja s jest ciągła, pomimo że zbieżność szeregu nie jest jednostajna. Do pokazania, że zbieżność nie jest jednostajna weźmy $\varepsilon=\frac{1}{2}$ oraz dowolne $N\in\mathbb{N}$. Mamy teraz

$$\left|s-\sum_{n=0}^{N} x^n\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = x^{N+1}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^{N+1}\frac{1}{1-x}.$$

Jeśli weźmiemy

$$x_0 = 2^{-\frac{1}{N+1}},$$

to otrzymamy

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} x_0^n\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x_0} > \frac{1}{2}.$$

Zatem na przedziale $(-1,1)$ nie ma jednostajnej zbieżności. Sytuacja zmienia się całkowicie, gdy nasz szereg rozpatrzymy na przedziale $\tilde{I}=[-q,q]$, gdzie $0<q<1$. Wtedy dla dowolnego $N\in\mathbb{N}$ mamy

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n\right| = \frac{\left|x^{N+1}\right|}{|1-x|} \leqslant \frac{q^{N+1}}{1-q} \longrightarrow 0, \text{ gdy } N\to\infty.$$

Stąd wynika jednostajna zbieżność w $\tilde{I}$.

W wielu rozważaniach przydatny okazuje się warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego.

Twierdzenie 4.71. *Dla szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, o wyrazach $f_n : I\to\mathbb{R}$, następujące dwa warunki są równoważne:*
(i) *Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny w I.*
(ii) *Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności, tzn.*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall(q>p\geqslant N)\ \forall x\in I\ \ |f_{p+1}(x)+\ldots+f_q(x)|<\varepsilon.$$

Dowód. $\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Niech szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ będzie zbieżny do swojej sumy f oraz ε dowolną liczbą większą od zera. Wtedy istnieje takie $N_0\in\mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby $N\geqslant N_0$ i dowolnego $x\in I$

$$\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd dla $q>p\geqslant N_0$ oraz $x\in D$ mamy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{q} f_n(x)-\sum_{n=0}^{p} f_n(x)\right| \leqslant\\ &\leqslant \left|f(x)-\sum_{n=0}^{q} f_n(x)\right| + \left|f(x)-\sum_{n=0}^{p} f_n(x)\right| <\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Zatem nasz szereg spełnia warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności.

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(i)}}$ Gdy spełniony jest warunek Cauchy'ego, to szereg jest punktowo zbieżny do jakiejś funkcji $f : I\to\mathbb{R}$ (zob. twierdzenie 2.42, str. 40)[4]. Wykażemy, że jest

[4]Wykorzystujemy tu tzw. zupełność przestrzeni $\mathbb{R}$ (zob. definicja 6.71, str. 236).

on zbieżny jednostajnie. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zgodnie z założeniem, istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n \geqslant N$ oraz dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant 1$

$$h_k(x) := \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x),$$

więc korzystając z ciągłości modułu, otrzymamy

$$\lim_{k\to\infty} h_k(x) = \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{dla } n \geqslant N,$$

co należało wykazać. □

Badanie jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych nie jest łatwe. W wielu przypadkach użyteczne okazuje się kryterium Weierstrassa (jednostajnej zbieżności).

Karl Weierstrass
Ur. 31 października 1815 w Ostenfelde
Zm. 19 lutego 1897 w Berlinie

Zajmował się między innymi teorią funkcji analitycznych opartą na szeregach potęgowych. Dał nowe podstawy tej teorii. Powszechnie znane jest jego twierdzenie o jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych, nazywane „kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego”.

Kryterium Weierstrassa

Twierdzenie 4.72 (kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności). *Niech szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ będzie o takich wyrazach $f_n : I \to \mathbb{R}$, że*

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in I\} \leqslant a_n \quad \textit{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to szereg funkcyjny* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny w* I.

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że dla dowolnych $N \leqslant p < q$ oraz $n \geqslant N$ zachodzą nierówności

$$\sum_{j=p+1}^{q} a_j < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |f_n(x)| \leqslant a_n \quad \text{dla } x \in D.$$

Zatem dla $x \in I$ oraz $N \leqslant p < q$ mamy

$$\sum_{j=p+1}^{q} |f_j(x)| \leqslant \sum_{j=p+1}^{q} a_j < \varepsilon.$$

Stąd wynika, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności, a więc z twierdzenia 4.71, str. 138 wynika, że jest jednostajnie zbieżny w I. □

Różniczkowanie szeregów funkcyjnych

Dla szeregów funkcyjnych zachodzi następujące twierdzenie o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych:

Twierdzenie 4.73. *Niech* I *będzie przedziałem w* $\mathbb{R}$ *i niech* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *będzie szeregiem funkcyjnym, którego wyrazy* $f_n : \ I \to \mathbb{R}, \ n = 0, 1, \ldots$ *są funkcjami różniczkowalnymi. Jeżeli szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny w przedziale*[5] I *do funkcji* S *i szereg pochodny* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ *jest jednostajnie zbieżny do* S^*, *to* S *jest funkcją różniczkowalną i*

$$S'(x) = S^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \textit{dla } x \in I.$$

Innymi słowy,

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n', \ \text{ czyli } \ \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{dx},$$

co oznacza, że szereg funkcyjny można różniczkować wyraz po wyrazie (oczywiście, gdy spełnione są założenia twierdzenia 4.73).

[5]Wystarczy, aby był zbieżny w jednym punkcie $x \in I$.

4.7. szeregi potęgowe

Rozważać teraz będziemy szczególnie ważną klasę szeregów funkcyjnych. Są to szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots \tag{4.53}$$

w których a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, jest ciągiem liczbowym (*ciągiem współczynników szeregu potęgowego*) i x_0 ustaloną liczbą rzeczywistą (*środkiem szeregu potęgowego*). Zbieżność szeregu potęgowego w punkcie $x = x_0$ jest oczywista.

Twierdzenie 4.74. *Jeśli szereg potęgowy* (4.53) *jest zbieżny w punkcie* $x_1 \neq x_0$, *to jest zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie* x *spełniającym nierówność*

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|$$

oraz jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale

$$[x_0 - r, x_0 + r], \quad \textit{gdzie } 0 < r < |x_1 - x_0|.$$

Dowód. Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ wynika zbieżność do zera ciągu $\{a_n(x_1 - x_0)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (zob. twierdzenie 2.52), a stąd jego ograniczoność. Niech $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leqslant M$ dla $n = 0, 1, \ldots$ Dla $0 < r < |x_1 - x_0|$ i $|x - x_0| < r$ mamy

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(x_1-x_0)| \left| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right|^n \leqslant Mq^n,$$

gdzie

$$q = \frac{r}{|x_1 - x_0|} < 1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ jest zbieżny, więc stąd wynika zbieżność bezwzględna i zbieżność jednostajna (zob. twierdzenie 4.72, str. 139) szeregu (4.53) w przedziale $[x_0 - r, x_0 + r]$. Wobec tego, że r jest dowolną liczbą z przedziału $(0, |x_1 - x_0|)$, więc mamy zbieżność bezwzględną w każdym takim punkcie $x \in \mathbb{R}$, że

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|,$$

tzn. w każdym punkcie $x \in (x_0 - |x_1 - x_0|, x_0 + |x_1 - x_0|)$. □

Wniosek 4.75. *Jeśli szereg potęgowy* (4.53) *jest rozbieżny w punkcie $x_1 \neq x_0$, to jest rozbieżny w każdym punkcie x spełniającym nierówność*

$$|x - x_0| > |x_1 - x_0|\,,$$

tzn. w każdym punkcie $x \in (-\infty, x_0 - |x_1 - x_0|) \cup (x_0 + |x_1 - x_0|\,, +\infty)$.

Wniosek 4.76. *Środek x_0 szeregu potęgowego* (4.53) *jest środkiem maksymalnego przedziału otwartego, w którym ten szereg jest zbieżny.*

Dzięki temu wnioskowi możemy zdefiniować *promień R zbieżności szeregu potęgowego* (4.53) kładąc

$$R := \sup\{|x_1 - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n < +\infty\} \in [0, +\infty]. \tag{4.54}$$

Twierdzenie 4.77. *Jeśli $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, to szereg ten jest*
(i) *zbieżny bezwzględnie w przedziale $I = \{x : \ |x - x_0| < R\}$ i jednostajnie w każdym podprzedziale domkniętym tego przedziału,*
(ii) *rozbieżny w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \{x : \ |x - x_0| \leqslant R\}$.*
Jeśli $R = 0$, to szereg (4.53) *jest zbieżny tylko w punkcie x_0.*

Gdy $R > 0$, to przedział $I = \{x : \ |x - x_0| < R\}$ nazywamy *przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego (4.53).

Promień zbieżności szeregu potęgowego (4.53) jest ściśle związany z jego współczynnikami a_n. Sposób jego obliczania wyznacza następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.78 (Cauchy'ego-Hadamarda). *Promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ wyraża się wzorem*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & \textit{gdy } \lambda > 0, \\ 0, & \textit{gdy } \lambda = +\infty, \\ +\infty, & \textit{gdy } \lambda = 0, \end{cases} \qquad \textit{gdzie} \quad \lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{4.55}$$

Dowód. Z kryterium Cauchy'ego (zob. twierdzenie 2.64, str. 51) wiemy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny, gdy

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x - x_0|\,\lambda < 1,$$

rozbieżny, gdy $|x - x_0|\,\lambda > 1$, a stąd wynika wzór (4.55). □

Ze wzoru (4.55) wynika, ze promień zbieżności R szeregu potęgowego nie zależy od położenia jego środka x_0; zależy wyłącznie od jego współczynników a_n.

Na każdym z końców przedziału zbieżności szereg może być zbieżny albo rozbieżny.

Jacques Salomon Hadamard
Ur. 8 grudnia 1865 w Wersalu
Zm. 17 października 1963 w Paryżu

Zajmował się teorią liczb, mechaniką teoretyczną, geometrią, teorią poznania, teorią całkowitych funkcji analitycznych (funkcje harmoniczne), równaniami różniczkowymi i równaniami fizyki matematycznej (mieszane problemy brzegowe). Znany jest zwłaszcza ze swych prac z teorii liczb pierwszych.

Przykład **4.79.** a) Dla szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$$

promień zbieżności $R = 1$, bo

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Przedział $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ jest przedziałem zbieżności tego szeregu. Na lewym końcu tego przedziału (tzn. w punkcie x= $x_0 - 1$) jest szeregiem anharmonicznym $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, a więc zbieżnym, zaś na prawym końcu jest szeregiem harmonicznym $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, o którym wiemy, że jest rozbieżny.

b) Korzystając z kryterium d'Alemberta (zob. twierdzenie 2.65 , str. 52) pokażemy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.56}$$

jest zbieżny w $\mathbb{R}$. Załóżmy, że $x \neq 0$ i zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

co oznacza zbieżność szeregu (4.56) w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że jego promień zbieżności $R = +\infty$, lub równoważnie, że

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0. \tag{4.57}$$

Ponadto, z warunku koniecznego zbieżności szeregu liczbowego (zob. twierdzenie 2.52, str. 45) wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \tag{4.58}$$

c) Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \tag{4.59}$$

jest zbieżny tylko w punkcie $x = 0$. Istotnie, dla tego szeregu

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Oznacza to, że $R = 0$. co zgodnie z definicją (4.54) promienia zbieżności oznacza rozbieżność szeregu (4.59) w każdym punkcie $x \neq 0$, a więc jego zbieżność tylko w jednym punkcie $x = 0$.

Szereg potęgowy pochodny

Wyrazy $a_n(x - x_0)^n$ szeregu potęgowego (4.53) są funkcjami klasy $\mathcal{C}^\infty$. Zatem, gdy jego promień zbieżności $R > 0$, to pojawia się naturalne pytanie: czy funkcja

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \in \mathbb{R} \tag{4.60}$$

też jest klasy $\mathcal{C}^\infty$? Pokażemy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna[6].

Różniczkując szereg (4.53) wyraz po wyrazie otrzymamy nowy szereg potęgowy

$$a_1 + 2a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \tag{4.61}$$

który jest *szeregiem potęgowym pochodnym szeregu* (4.53).

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc

$$\limsup \sqrt[n-1]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

Stąd wynika

[6] Gdy $R = +\infty$, to przyjmujemy: $x_0 - \infty := -\infty$, $x_0 + \infty := +\infty$.

Wniosek 4.80. *Szereg pochodny* (4.61) *ma ten sam promień zbieżności co szereg potęgowy* (4.53).

Twierdzenie 4.81. *Niech* $R \in (0, +\infty]$ *będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego* (4.53)*. Wtedy funkcja*

$$f\,:\,(x_0 - R, x_0 + R) \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \in \mathbb{R} \tag{4.62}$$

jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ *oraz*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \textit{dla } x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

i ogólnie

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} (x - x_0)^{n-k} \quad \textit{dla } x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Dowód. To twierdzenie wynika z wniosku 4.80, twierdzenia 4.77, str. 142 i twierdzenia 4.73, str. 140, o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych. □

Szereg Tylora

Niech I będzie przedziałem otwartym w $\mathbb{R}$ i niech $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną w I.

Definicja 4.82. Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{4.63}$$

nazywamy *szeregiem Taylora* funkcji f o środku w punkcie x_0. Gdy $x_0 = 0$, to szereg ten jest nazywany *szeregiem Maclaurina*.

Uwaga **4.83.** W myśl wzoru Taylora (zob. (4.34), str. 112) mamy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Stąd wynika, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Funkcje $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ są klasy $\mathcal{C}^\infty$. Wszystkie pochodne tych funkcji są w każdym przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$ wspólnie ograniczone, bo np. n-ta pochodna e^x równa się e^x, $0 < e^x < K = e^{(x_0+R)}$, gdy $x_0 - R < x < x_0 + R$. Stosując twierdzenie o wzorze Taylora (zob. twierdzenie 4.42, oszacowanie (4.35), str. 112) otrzymamy

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{K}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Stąd wynika (zob. (4.58), str. 144), że

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{K}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$

a więc kładąc $x_0 = 0$ otrzymamy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \tag{4.64}$$

Postępując podobnie otrzymamy rozwinięcia funkcji $y = \sin x$ i funkcji $y = \cos x$ w szereg Maclaurina.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \tag{4.65}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \tag{4.66}$$

Funkcja $f : (-1, +\infty) \ni x \mapsto \ln(1 + x)$ ma pochodne wyrażone wzorami:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,\ x > -1.$$

Czytelnikowi proponujemy wykazanie, że

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{dla } -1 < x \leqslant 1, \tag{4.67}$$

stąd dla $x_0 > 0$ otrzymamy

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n x_0^n} (x - x_0)^n \quad \text{dla } 0 < x \leqslant 2x_0. \tag{4.68}$$

Weźmy dowolne $\alpha > 0$. Funkcja

$$g : (-1, +\infty) \ni x \mapsto (1+x)^\alpha \in \mathbb{R}$$

ma pochodne wyrażone wzorami:

$$g^{(n)}(x) = n! \binom{\alpha}{n} x^{\alpha - n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots, \; x > -1,$$

gdzie

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Rozwinięcie funkcji g w szereg Maclaurina ma postać

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{dla } \alpha > 0, \; |x| < 1. \tag{4.69}$$

Jeśli $\alpha = k \in \mathbb{N}$, to prawa strona równości (4.69) składa się ze skończonej liczby składników różnych od zera i w tym przypadku wzór (4.69) jest dobrze znany[7]. Zatem, będziemy zakładać, że $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Rozpoczniemy od wykazania zbieżności (bezwzględnej) szeregu

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{dla } \alpha > 0, \; |x| < 1. \tag{4.70}$$

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta (zob. twierdzenie 2.65, str. 52).

[7] $(a+b)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^n b^{k-n}$.

Dla $x \neq 0$ mamy

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n} = \frac{\alpha - n}{n+1}x = x\Big(\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\Big).$$

Jeśli $|x| < 1$, to istnieje taka liczba q, że $|x| < q < 1$ i wtedy dla prawie wszystkich n

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|} = |x| \cdot \left|\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right| \leqslant q,$$

co oznacza zbieżność (bezwzględną) szeregu $T(x)$.

Funkcja T jako suma szeregu potęgowego jest różniczkowalna w przedziale $|x| < 1$. W związku z twierdzeniem 4.81 otrzymamy:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n. \end{aligned}$$

Wobec tego dla dowolnego $|x| < 1$ mamy

$$\begin{aligned} (1+x)T'(x) &= \alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\right] = \\ &= \alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n\right] = \\ &= \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right\}x^n\right] = \\ &= \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\right] = \alpha T(x). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\left(\frac{T(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{(1+x)^\alpha T'(x) - T(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0,$$

co oznacza, że

$$T(x) = c(1+x)^\alpha.$$

Z określenia funkcji T(x) (zob. (4.70)) wynika, że $T(0) = 1$. Stąd

$$T(0) = c(1+0)^{\alpha} = 0,$$

więc $c = 1$. Tak więc wzór (4.69) został wykazany.

ROZDZIAŁ 5

Pierwotna i całka

Poszukiwanie funkcji pierwotnej danej funkcji f jest operacją odwrotną do różniczkowania. Nie podamy tu pełnej teorii, a jedynie tę jej część, która pozwala zrozumieć mechanizmy obliczania całek funkcji elementarnych. Znacznie głębsze podejście czytelnik może znaleźć w [4], rozdz. 8.

5.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Niech I będzie przedziałem w $\overline{\mathbb{R}}$ o końcach $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ i niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją.

Definicja 5.1. Mówimy, że funkcja $F : I \to \mathbb{R}$ jest *pierwotną* funkcji f, jeżeli F jest ciągła w przedziale I, różniczkowalna w $I \setminus \{a, b\}$ i

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in I \setminus \{a, b\}.$$

Nie każda funkcja ma pierwotną.

Przykład **5.2.** Pokażemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

nie ma pierwotnej w $\mathbb{R}$. Istotnie, zakładając, że f ma pierwotną F, mielibyśmy, że $F'(x) = 0$ na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Stąd wynika, że F jest stała na każdym z wymienionych przedziałów. Ponieważ też jako różniczkowalna jest ciągła, więc stąd wynika, że $F = \text{const}$ na $\mathbb{R}$. Zatem $F'(0) = 0 \neq 1 = f(0)$, co daje sprzeczność.

Funkcja pierwotna, o ile istnieje, nie jest wyznaczona jednoznacznie. Jeżeli F jest pierwotną funkcji f, to dla dowolnego $C \in \mathbb{R}$ funkcja $F + C$ też jest pierwotną funkcji f, bo pochodna funkcji stałej jest równa zero. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.3. *Jeżeli F_0 jest pierwotną funkcji f, to na to, aby funkcja F była pierwotną funkcji f, potrzeba i wystarcza, aby istniała taka stała $C \in \mathbb{R}$, że*

$$F = F_0 + C.$$

Dowód. Dla dowodu warunku koniecznego zauważmy, że jeżeli F, F_0 są pierwotnymi tej samej funkcji f, to

$$(F - F_0)' = F' - F_0' = f - f = 0.$$

Stąd wynika, że $F - F_0 = C = \text{const}$ (zob. twierdzenie 4.26, str. 104). Stąd $F = F_0 + C$.

Z drugiej strony, jeżeli $F = F_0 + C$, to $F' = (F_0 + C)' = F_0' = f$, co kończy dowód warunku wystarczającego. □

Całka nieoznaczona

Jak już wcześniej stwierdziliśmy, pierwotna nie jest wyznaczona jednoznacznie. Jest ona, o ile istnieje, wyznaczona z dokładnością do funkcji stałej.

Definicja 5.4. Jeżeli F jest pierwotną funkcji $f : I \to \mathbb{R}$, to $F+C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą, jest ogólną postacią pierwotnej funkcji f. Tę ogólną postać oznaczamy przez

$$\int f(x)dx \quad \text{lub} \quad \int f$$

i nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f.

Gdy znana jest jakaś pierwotna F funkcji f, to zapisujemy:

$$\int f = F + C \quad \text{lub} \quad \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Istnienie całki nieoznaczonej funkcji f jest równoważne temu, że istnieje jakaś pierwotna funkcji f. Poszukiwanie pierwotnej nazywamy *całkowaniem* funkcji f. Tak więc całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania. Jak wiemy, każdą funkcję elementarną potrafimy zróżniczkować. Niestety, z całkowaniem nie jest tak łatwo. Nie ma wzorów na całkowanie iloczynu, ilorazu i nie ma też wzoru na całkowanie funkcji złożonej. Istnieją też przykłady funkcji elementarnych, których pierwotne nie są funkcjami elementarnymi.

Wprost ze wzorów na pochodne wynikają wzory:

$$\begin{aligned}
&\int 0dx = C, && \int 1dx = x + C,\\
&\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\,(\alpha \neq -1), && \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\\
&\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,(a > 0,\ a \neq 1), && \int e^x dx = e^x + C,\\
&\int \sin x\,dx = -\cos x + C, && \int \cos x\,dx = \sin x + C,\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, && \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, && \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

Uwaga **5.5.** Podane tu wzory zachodzą w takich przedziałach, w których pierwotne (prawe strony) spełniają warunki wymienione w definicji 5.1, str. 150. W szczególności, funkcja $y = \operatorname{tg} x + C$ jest całką nieoznaczoną (pierwotną) funkcji $\frac{1}{\cos^2 x}$ w każdym przedziale domkniętym zawartym w $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ale nie jest pierwotną w przedziale $[0, \pi]$, bo w tym przedziale nie jest ciągła.

Podamy teraz twierdzenia o całkach nieoznaczonych, ułatwiające ich obliczanie. Pojawiające się symbole I, J oznaczać będą przedziały.

Twierdzenie 5.6 (o liniowości całki nieoznaczonej). *Jeżeli istnieją całki nieoznaczone funkcji $f, g : I \to \mathbb{R}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to w przedziale I istnieją całki nieoznaczone funkcji $f + g$, $f - g$, λf oraz*

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int (f-g)(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$$

$$\int (\lambda f)(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \text{ gdy } \lambda \neq 0.$$

Dowód. Jest to konsekwencja twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy i iloczynu funkcji przez liczbę. □

Twierdzenie 5.7 (o całkowaniu przez części). *Jeżeli $f, g : I \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi i istnieje całka nieoznaczona przynajmniej jednej z funkcji $f'g$, fg', to istnieje całka nieoznaczona drugiej z tych funkcji i*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \tag{5.1}$$

Dowód. Załóżmy, że istnieje całka z fg'. Ponieważ zgodnie z twierdzeniem o pochodnej iloczynu

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{i} \quad \left(\int f(x)g'(x)dx\right)' = f(x)g'(x),$$

więc

$$(f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx)' = f'(x)g(x),$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Przykład **5.8.** Pokażemy, jak można obliczyć $\int \ln x\, dx$, stosując metodę całkowania przez części.

$$\int \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} f'(x) = 1 \;\Rightarrow\; f(x) = x \\ g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + C.$$

Twierdzenie 5.9 (o całkowaniu przez podstawienie). *Jeżeli $f : I \to J$ jest funkcją różniczkowalną oraz dla funkcji $g : J \to \mathbb{R}$ istnieje całka nieoznaczona, to istnieje całka nieoznaczona funkcji $(g \circ f)f'$ oraz*

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(t)dt|_{t=f(x)}. \tag{5.2}$$

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem o pochodnej funkcji złożonej (zob. twierdzenie 4.12) mamy

$$\left(\int g(t)dt|_{t=f(x)}\right)' = \left(\left(\int g(t)dt\right)'|_{t=f(x)}\right) f'(x) = (g(f(x))f'(x),$$

co kończy dowód. □

Gdy założymy dodatkowo, że f jest funkcją odwracalną, to wzór (5.2) można przekształcić do postaci:

$$\int g(f(x))f'(x)dx_{|x=f^{-1}(t)} = \int g(t)dt, \tag{5.3}$$

którą nazywamy wzorem na całkowanie przez *zmianę zmiennej*.

Przykład **5.10.** Metodę podstawiania i metodę zmiany zmiennej zilustrujemy na przykładzie obliczania całki z funkcji

$$f\,:\,(-1,1) \ni x \mapsto f(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathbb{R}.$$

Rozpoczniemy od metody podstawiania.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{1-x^2} & = & t \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx & = & dt \end{array} \right\} = -\int 1dt_{|t=\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Teraz wyliczymy tę całkę, stosując metodę zmiany zmiennej. Zmienną x zastąpimy zmienną t, kładąc $x = \sin t$. Funkcja

$$\sin\,:\,\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$$

jest bijekcją. Odwrotną do niej jest funkcja $\arcsin$. Zatem możemy stosować taką zmianę zmiennej i mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \sin t \\ dx & = & \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sin t dt_{|t=\arcsin x} = \\ &= -\cos t_{|t=\arcsin x} + C = -\cos(\arcsin x) + C = \\ &= -\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie wynika bardzo przydatny wzór:

$$\int (f(x))^\alpha f'(x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln|f(x)| + C & \text{dla } \alpha = -1, \\ \dfrac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{dla } \alpha \neq -1. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Istotnie, podstawiając $f(x) = t$, otrzymamy

$$\int (f(x))^\alpha f'(x)dx = \int t^\alpha dt_{|t=f(x)},$$

a stąd wynika wzór (5.4).

Wzory rekurencyjne

Całki
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad \int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx$$
umiemy obliczyć w przypadku $n = 0$ i $n = 1$. Dla $n > 1$ można je obliczyć, stosując następujące wzory rekurencyjne:
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int (1+x^2)^{1-n} dx, \tag{5.5}$$
$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, \tag{5.6}$$
$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx. \tag{5.7}$$
Ograniczymy się do wykazania prawdziwości wzoru (5.5). Dowody prawdziwości pozostałych dwóch wzorów są podobne.

Dowód wzoru (5.5). Niech
$$I_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$
Dodając i odejmując x^2 w liczniku tej całki, otrzymamy
$$I_n = \int \frac{1-x^2+x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2xdx}{(1+x^2)^n} =$$
$$I_{n-1} - \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2xdx}{(1+x^2)^n}.$$
Do ostatniej całki zastosujemy metodę całkowania przez części i otrzymamy:
$$\int \frac{x}{2} \cdot \frac{-2xdx}{(1+x^2)^n} = \left\{ \begin{array}{ll} f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^n} & \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \\ g(x) = \dfrac{x}{2} & \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}.$$
Łącząc te wyniki i redukując wyrazy podobne, otrzymamy wzór (5.5).

5.2. Całkowanie funkcji elementarnych

O funkcji f mówimy, że jest *elementarna*, jeżeli da się otrzymać z funkcji stałej, potęgowej, wykładniczej, funkcji trygonometrycznych i funkcji odwrotnych do wymienionych przez wykonanie skończonej liczby działań dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i składania funkcji. Okazuje się, że z całkowaniem nie jest tak dobrze, jak z różniczkowaniem. Potrafimy obliczyć pochodną każdej funkcji elementarnej i łatwo zauważyć, że pochodna dowolnej funkcji elementarnej jest funkcją elementarną. Tymczasem istnieją funkcje elementarne, których całki nie są funkcjami elementarnymi. Udowodniono, że do takich całek należą:

$$\int e^{x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$
$$\int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx.$$

Następujące, tzw. *całki eliptyczne*

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}dx \quad \text{i} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}dx,$$

gdzie $0 < k < 1$, też nie są funkcjami elementarnymi.

Całkowanie funkcji wymiernych

Zajmiemy się teraz metodami obliczania całek postaci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

gdzie P, Q są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Całkowanie takich funkcji rozdzielimy na kilka etapów.

1. Sprawdzamy, czy stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Jeśli nie, to dzielimy wielomian P przez wielomian Q i jako wynik otrzymujemy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

gdzie W, R są wielomianami i $\deg R < \deg Q$ [1]. Wielomiany umiemy całkować, ograniczymy się więc do prezentacji metody całkowania takich funkcji wymiernych, których stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.

[1] Przypominamy, że $\deg F$ oznacza stopień wielomianu F.

2. Rozkładamy funkcję wymierną

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

na ułamki proste[2]. Są to funkcje wymierne postaci

$$\begin{array}{llll} \text{I.}\ \dfrac{A}{x-a}, & \text{II.}\ \dfrac{A}{(x-a)^k} & & (k=2,3,\ldots), \\ \text{III.}\ \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}, & \text{IV.}\ \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} & & (m=2,3,\ldots), \end{array}$$

gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Ułamki proste postaci I, II nazywać będziemy *ułamkami pierwszego rodzaju*, zaś ułamki postaci III, IV *ułamkami drugiego rodzaju*.

3. Całkujemy ułamki proste. **Ułamki postaci I, II** są łatwe do całkowania. Mamy

$$\int \frac{A}{x-a} = A\ln|x-a| + C, \qquad \int \frac{A}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Całkowanie ułamka postaci III przeprowadzamy następująco:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\left(\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \int \frac{r}{x^2+px+q}dx\right) =$$
$$= \frac{M}{2}\left(\ln\left|x^2+px+q\right| + r\int \frac{1}{x^2+px+q}dx\right),$$

gdzie

$$r = \frac{2N - Mp}{M}.$$

Aby obliczyć

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx,$$

sprowadzamy trójmian x^2+px+q do postaci kanonicznej

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} = \alpha((\beta x+\gamma)^2+1),$$

gdzie

$$\alpha = \frac{4q-p^2}{4}, \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}, \quad \gamma = \frac{p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

[2]Sposób rozkładania na ułamki proste omówimy, analizując przykłady.

Po tych przekształceniach

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{\alpha\beta}\int \frac{\beta dx}{(\beta x+\gamma)^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} \beta x+\gamma \;= t, \\ \beta dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg} t\big|_{t=\beta x+\gamma} + C = \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}(\beta x+\gamma) + C.$$

Całkowanie ułamka postaci IV rozpoczyna się podobnie jak w przypadku ułamków postaci III.

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M}{2}\left(\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}dx + \int \frac{r}{(x^2+px+q)^m}dx\right) =$$

$$= \frac{M}{2}\left(\frac{-1}{(m-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + r\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}dx\right),$$

gdzie

$$r = \frac{2N-Mp}{M}.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę, sprowadzamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{1}{4}p^2\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \alpha = \alpha\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+1\right)$$

i zastosujemy metodę podstawiania.

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}p = \sqrt{\alpha}t \\ \quad dx \;\;= \sqrt{\alpha}dt \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha^m}\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}dt\Big|_{t=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha}}}$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór rekurencyjny (5.5).

Rozkład na ułamki proste. Rozkład funkcji wymiernej $R(x)/Q(x)$, w której stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, rozpoczynamy od rozkładu mianownika $Q(x)$ na czynniki[3]. Z kursu algebry wiadomo, że wielomian Q ma jednoznaczny rozkład postaci

$$Q(x) = a(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{r_m},$$

gdzie a jest stałą, $a_1,\ldots,a_n$ są parami różne oraz $p_j^2-4q_j<0 \quad$ dla $j=1,\ldots,m$. Możemy przyjąć, że stała $a=1$, gdyż w przeciwnym przypadku $1/a$, jako stały czynnik, wyłączymy przed całkę.

[3]Rozkład na czynniki zawsze istnieje, ale nie zawsze potrafimy go wykonać.

Po dokonaniu rozkładu wielomianu $Q(x)$ na czynniki zapisujemy $R(x)/Q(x)$ w postaci sumy ułamków prostych, przypisując czynnikowi $(x-a_j)^{k_j}$ sumę

$$\frac{A_1}{x-a_j}+\frac{A_2}{(x-a_j)^2}+\ldots+\frac{A_{k_j}}{(x_j-a_j)^{k_j}}, \tag{5.8}$$

zaś czynnikowi $(x^2+p_j+q_j)^{r_j}$ sumę

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+p_j+q_j}+\frac{B_2x+D_2}{(x^2+p_j+q_j)^2}+\ldots+\frac{B_{r_j}x+D_{r_j}}{(x^2+p_j+q_j)^{r_j}}. \tag{5.9}$$

Łącznie w rozkładzie na ułamki proste otrzymamy n sum postaci (5.8) oraz m sum postaci (5.9). Sposób wyznaczania współczynników A_j, B_j, D_j omówimy na przykładach.

Przykład **5.11.**

$$\frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}.$$

Mnożąc obustronnie przez $(x+1)(x-1)(x+3)$, otrzymamy

$$\begin{aligned}7x^2+1 &= A(x-1)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-1)=\\ &=(A+B+C)x^2-(4A+2B)x+(3A-3B-C).\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiadających im potęgach zmiennej x, otrzymamy

$$\begin{cases} A+B+C &= 7,\\ 4A+2B &= 0,\\ 3A-3B-C &= 1.\end{cases}$$

Stąd otrzymamy: $A=1$, $B=-2$, $C=8$. Zatem

$$\frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{x-1}+\frac{8}{x-3}.$$

Przykład **5.12.**

$$\frac{2x^4-2x^3+3x^2+2x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Mnożąc obustronnie przez $(x-1)^3(x^2+1)$, otrzymamy

$$\begin{aligned}2x^4-2x^3+3x^2+2x+1 &= A(x-1)^2(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+\\ &\quad +C(x^2+1)+(Ex+F)(x-1)^3=\\ &=(A+E)x^4+(B-2A-3E+F)x^3+\\ &\quad +(2A-B+C+3E-F)x^2+(3F-E)x+A-B+C-F.\end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy odpowiadających im potęgach zmiennej x, otrzymamy układ pięciu równań liniowych o niewiadomych A, B, C, E, F. Po rozwiązaniu otrzymamy: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $E = F = 1$. Zatem

$$\frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych

Niech $\mathcal{W}(u, v)$ będzie funkcją wymierną[4] zmiennych u i v. Pokażemy, jak przez stosowne podstawienie całki

$$\int \mathcal{W}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad \text{gdzie } ad - bc \neq 0, \tag{5.10}$$

$$\int \mathcal{W}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}), \quad \text{gdzie } a \neq 0 \text{ i } b^2 - 4ac \neq 0, \tag{5.11}$$

można sprowadzić do całek z funkcji wymiernych.

1^o Do całki (5.10) stosujemy podstawienie

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t. \tag{5.12}$$

Stąd wyliczamy x i dostajemy

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt.$$

Ponieważ $\mathcal{W}$ jest funkcją wymierną, więc po podstawieniu (5.12) do całki (5.10) otrzymamy całkę z funkcji wymiernej zmiennej t.

2^o Dla całki (5.11) rozważamy dwa przypadki w zależności od znaku a.

Gdy $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ stosujemy podstawienie

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (t - x)\sqrt{a}, \tag{5.13}$$

zwane *pierwszym podstawieniem Eulera*.

Podnosząc obie strony równości (5.13) do kwadratu i rozwiązując względem x, otrzymamy

$$x = \frac{at^2 - c}{2at + b}, \quad dx = \frac{2a(at^2 + bt + c)}{(2at+b)^2} dt. \tag{5.14}$$

[4]Tzn. ilorazem dwóch wielomianów zmiennych u i v.

Podstawiając do prawej strony równości (5.13) wyliczoną wartość zmiennej x, otrzymamy

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\frac{at^2+bt+c}{2at+b}. \tag{5.15}$$

Podstawiając wyliczone wartości (5.14) (5.15) do całki (5.11) i korzystając z faktu, że złożenie funkcji wymiernych jest funkcją wymierną, otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej.

Leonard Euler
Ur. 15 kwietnia 1707 w Bazylei
Zm. 18 września 1783 w Petersburgu
Matematyk i fizyk. Jest uznawany za jednego z największych matematyków. Dokonał wielu odkryć w różnych działach matematyki, mechaniki, optyki i astronomii. Na jego cześć jedną z asteroid nazwano 2002 Euler.

Gdy a < 0, to $b^2-4ac>0$, gdyż w przeciwnym przypadku trójmian kwadratowy ax^2+bx+c, występujący w całce (5.11) pod znakiem pierwiastka, byłby stale ujemny, a to nie ma sensu. Stąd wynika, że trójmian ax^2+bx+c ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Oznaczmy je przez x_1, x_2. Przy tych założeniach mamy

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \tag{5.16}$$

i dla całki (5.11) stosujemy podstawienie

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1), \tag{5.17}$$

zwane *drugim podstawieniem Eulera*.

Podnosząc obie strony równości (5.17) do kwadratu i korzystając z (5.16), otrzymamy

$$x = \frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}, \quad dx = \frac{2ta(x_2-x_1)}{(a-t^2)^2}dt. \tag{5.18}$$

Podstawiając do prawej strony równości (5.17) wyliczoną wartość zmiennej x, otrzymamy

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{at(x_2-x_1)}{a-t^2}. \tag{5.19}$$

Wstawiając (5.18) i (5.19) do całki (5.11), otrzymamy całkę z funkcji wymiernej zmiennej t.

Przykład **5.13.**
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{x})^2}.$$
Po takim przekształceniu widzimy, że jest to całka postaci (5.10), a więc możemy stosować podstawienie (5.12). Teraz mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{x})^2} &= \left\{\begin{array}{rcl}\sqrt[6]{x} &=& t,\\ x &=& t^6,\\ dx &=& 6t^5dt\end{array}\right\} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}|_{t=\sqrt[6]{x}} = \\ &= 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \\ &= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(t+1)\right)|_{t=\sqrt[6]{x}}+C = \\ &= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.\end{aligned}$$

Przykład **5.14.** Całka
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x}}$$
jest postaci (5.11), w której $a = 1 > 0$. Zatem możemy zastosować I podstawienie Eulera (5.13), czyli
$$\sqrt{x^2-2x} = t-x.$$

Stąd
$$x = \frac{1}{2}\frac{t^2}{t-1}, \quad dx = \frac{1}{2}\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}dt.$$
Zatem
$$\sqrt{x^2-2x} = t-\frac{1}{2}\frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{2}\frac{t^2-2t}{t-1},$$
więc po podstawieniu mamy
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x}} = -2\int\frac{dt}{t^2} = \frac{2}{t}|_{t=x+\sqrt{x^2-2x}}+C = -\frac{2}{x+\sqrt{x^2-2x}}+C.$$

Przykład **5.15.** Całka
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}}$$
jest postaci (5.11), w której $a = -1 < 0$, natomiast $\Delta = 1 > 0$, a zatem
$$-x^2+3x-2 = (-1)(x-1)(x-2).$$

Stosując II podstawienie Eulera (zob. (5.17)), otrzymujemy

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = t(x-1) \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x &= \frac{t^2+2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt, \\ \sqrt{-x^2+3x-2} &= \frac{t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do całki mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+3x-2}} &= -2\int \frac{dt}{t^2+2} = -\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{t}{\sqrt{2}} &=& u, \\ dt &=& \sqrt{2}du. \end{array} \right\} = \\ &= -\sqrt{2}\operatorname{arctg} u\Big|_{u=\frac{t}{\sqrt{2}}} + C = \\ &= -\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{2x-2}} + C \quad \text{dla } x \in (1,2). \end{aligned}$$

Szczególne przypadki całki (5.11)

Gdy

$$\mathcal{W}(u,v) = \frac{1}{v},$$

to całka (5.11) jest postaci

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \text{gdzie } a \neq 0 \text{ i } \Delta = b^2-4ac \neq 0. \tag{5.20}$$

Jeżeli w całce (5.20) $a > 0$, to stosując I podstawienie Eulera (zob. (5.13)) i korzystając ze wzorów (5.14) i (5.15), otrzymamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{2a}{2at+b}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2at+b|\Big|_{t=x+\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{\sqrt{a}}} + C.$$

Stąd, gdy $a > 0$ i $\Delta \neq 0$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C. \tag{5.21}$$

Jeżeli w całce (5.20) $\mathbf{a < 0}$, to $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$ i w tym przypadku zamiast podstawienia (5.13) sprowadzamy trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej i całkę (5.20) przekształcamy następująco:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\big((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\big)}} = \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} = t, \\ \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}dx = dt \end{array} \right\} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin t\Big|_{t=\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}} + C =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C.$$

Uwaga **5.16.** Podana tu metoda obliczania całki (5.20) jest, w przypadku $a < 0$, prostsza od metody II podstawienia Eulera, tzn. podstawienia postaci (5.17). Należy jednak zaznaczyć, że tej metody nie da się zastosować, gdy funkcja $\mathcal{W}$ jest bardziej złożona.

W zastosowaniach występuje często całka postaci

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \quad \text{gdzie } a \neq 0 \text{ i } b^2 - 4ac \neq 0,$$

gdzie P_n jest wielomianem stopnia $n \geqslant 1$. Jest to całka postaci (5.11), w której

$$\mathcal{W}(u,v) = \frac{P_n(u)}{v}.$$

Do obliczenia tej całki warto skorzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.17. *Istnieje dokładnie jeden wielomian P_{n-1} stopnia $(n-1)$ i taka stała $K \in \mathbb{R}$, że*

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{5.22}$$

Dowód. Zakładając, że równość (5.22) jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$, takiego że $ax^2+bx+c > 0$, po zróżniczkowaniu stronami otrzymamy równość

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Stąd po obustronnym pomnożeniu przez $\sqrt{ax^2+bx+c}$ otrzymamy

$$P_n(x) = P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + K. \tag{5.23}$$

Równość (5.23) to równość dwóch wielomianów stopnia n. Porównując ich współczynniki, otrzymamy układ $(n+1)$ równań liniowych o niewiadomych n współczynnikach wielomianu P_n i niewiadomej stałej K. Rozwiązując ten układ, wyznaczymy wielomian P_n i stałą K. □

Przykład **5.18.**

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + K\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Po zróżniczkowaniu stronami otrzymamy

$$\frac{3x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = a\sqrt{x^2+x+1} + (ax+b)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + K\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Po pomnożeniu stronami przez $\sqrt{x^2+x+1}$ i uporządkowaniu

$$3x^2+2 = 2a^2 + \left(\frac{3}{2}a+b\right)x + a + \frac{1}{2}b + K.$$

Stąd układ równań:

$$\begin{cases} 2a & = 3 \implies a = \frac{3}{2}, \\ \dfrac{3}{2}a+b & = 0 \implies b = -\frac{9}{4}, \\ a+\dfrac{1}{2}b+K & = 2 \implies K = \frac{13}{8}. \end{cases}$$

Zatem uwzględniając (5.21),

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{3}{4}(2x-3)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{13}{8}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Obecnie zajmiemy się całkami postaci

$$\int \mathcal{W}(\sin x, \cos x)dx, \tag{5.24}$$

gdzie, jak poprzednio, $\mathcal{W}$ jest funkcja wymierną dwóch zmiennych. Uniwersalne dla tego typu całek jest podstawienie

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t. \tag{5.25}$$

Przy takim podstawieniu

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \tag{5.26}$$

Ponadto z trygonometrii wiadomo, że

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \tag{5.27}$$

Po podstawieniu (5.25) i uwzględnieniu (5.26) i (5.27) otrzymamy

$$\int \mathcal{W}(\sin x, \cos x) dx = \int \mathcal{W}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt|_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

Ostatnia całka jest całką z funkcji wymiernej, bo złożenie funkcji wymiernych jest funkcja wymierną.

Uwaga **5.19.** W wielu przypadkach korzystniej jest dla całki (5.24) użyć innego podstawienia. Dla przykładu stosujemy podstawienia:

1. $\cos x = t$, gdy funkcja $\mathcal{W}$ jest nieparzysta względem u, tzn. gdy $\mathcal{W}(-u, v) = -\mathcal{W}(u, v)$;
2. $\sin x = t$, gdy funkcja $\mathcal{W}$ jest nieparzysta względem v, tzn. gdy $\mathcal{W}(u, -v) = -\mathcal{W}(u, v)$;
3. $\operatorname{tg} x = t$, gdy funkcja $\mathcal{W}$ jest parzysta względem obu zmiennych u, v, tzn. gdy

$$\mathcal{W}(-u, -v) = \mathcal{W}(u, v).$$

Przykład **5.20.** Aby obliczyć całkę

$$\int \frac{2 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx,$$

zastosujemy podstawienie (5.25). Stosując wzory (5.26) i (5.27), otrzymamy

$$\int \frac{2 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx = \int \frac{2 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt|_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{t^2 + t + 1}{t} dt|_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Przykład **5.21.** Zgodnie z punktem 3 uwagi 5.19, do całki

$$\int \frac{dx}{1 + 2\cos^2 x}$$

możemy zastosować podstawienie $\operatorname{tg} x = t$, bo kładąc

$$\mathcal{W}(u,v) := \frac{1}{1+v^2},$$

otrzymamy

$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x} = \int \mathcal{W}(\sin x, \cos x) dx$$

i funkcja $\mathcal{W}$ jest parzysta względem obu zmiennych.

Niech więc $\operatorname{tg} x = t$. Wtedy

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \text{natomiast}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2+3}\Big|_{t=\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_{t=\operatorname{tg} x} + C = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

Uwaga **5.22.** Do obliczania całek warto skorzystać z programów komputerowych. Przykładowo, aby obliczyć całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{1}{7-5\sin x} dx$$

w programie „Maple” wpisujemy:

$$int\Big(\frac{1}{7-5\sin(x)}, x\Big);$$

wciskamy „Enter” i otrzymamy

$$\frac{1}{6}\sqrt{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{24}(14 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) - 10)\sqrt{6}\right) + C.$$

Zauważmy, że funkcja ta jest pierwotną w przedziale $[0,\pi)$, jest pierwotną w przedziale $(\pi, 2\pi]$, ale nie jest pierwotną w przedziale $[0, 2\pi]$, bo nie jest ciągła w punkcie π. Pierwotną w przedziale $[0, 2\pi]$ jest funkcja:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\sqrt{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{24}(14 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) - 10)\sqrt{6}\right) & \text{dla } x \in [0,\pi), \\ \frac{\pi}{12}\sqrt{6} & \text{dla } x = \pi, \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{24}(14 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) - 10)\sqrt{6}\right) + \frac{\pi}{6}\sqrt{6} & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases} + C.$$

5.3. Całka oznaczona

W tym paragrafie zajmiemy się jednowymiarową (jednokrotną) całką Riemanna (*całką oznaczoną*) z funkcji f po przedziale $[a, b]$.

Georg Friedrich Bernhard Riemann
Ur. 17 września 1826 w Breselenz, Niemcy
Zm. 20 lipca 1866 w Selesca, Włochy

Twórca wielowymiarowej geometrii Riemanna, której zasady stanowią podstawę ogólnej teorii względności. Jego prace z teorii liczb i teorii funkcji analitycznych wywarły duży wpływ na rozwój matematyki. Był autorem pracy o szeregach trygonometrycznych i teorii całki (w której wprowadził całkę nazywaną dziś całką Riemanna), zajmował się również fizyką teoretyczną.

Definicja całki oznaczonej (*całki Riemanna*) jest kilkuetapowa. Przed jej podaniem wprowadzimy kilka nowych pojęć.

O funkcji $f: \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$ zakładać będziemy, że jest ograniczona.

Podział przedziału i jego średnica

Dowolny układ punktów $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ nazywamy *podziałem przedziału* $[a, b]$ (na n części), gdy

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Liczbę

$$\delta = \delta(\mathcal{P}) := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \tag{5.28}$$

nazywamy *średnicą podziału* $\mathcal{P}$.

Punkty pośrednie i sumy całkowe

Układ punktów

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \subset [a, b]$$

nazywamy *układem punktów pośrednich* dla podziału $\mathcal{P}$, gdy

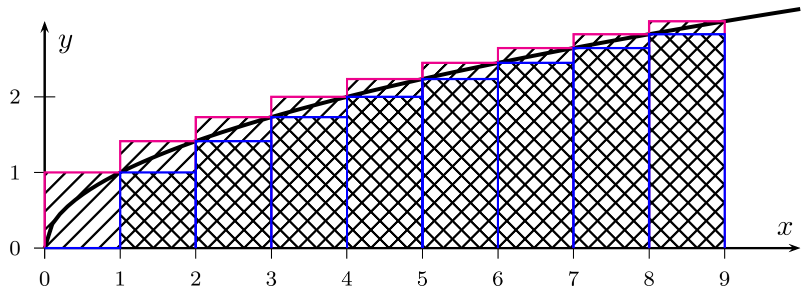
$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{dla } i = 1, \dots n.$$

Niech M_i będzie kresem górnym, m_i kresem dolnym funkcji f w przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ i niech $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Teraz możemy utworzyć trzy następujące sumy całkowe:

$$\begin{aligned} s = s(f, \mathcal{P}) &:= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n, \\ \sigma = \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi) &:= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n, \\ S = S(f, \mathcal{P}) &:= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n. \end{aligned}$$

Sumy te nazywamy odpowiednio *sumą dolną*, *sumą całkową* (lub *sumą Riemanna)* i *sumą górną*.

Na rysunku 5.1 przedstawiona jest interpretacja geometryczna sum całkowych dla funkcji nieujemnej. Suma dolna s jest tutaj sumą pól prostokątów zakreskowanych „w kratkę”. Suma górna S to suma pól prostokątów pokrywających łącznie trapez krzywoliniowy, ograniczony z dołu przez przedział $[a, b]$ (na rysunku jest to przedział $[0, 9]$), z góry zaś przez wykres funkcji f. Suma σ leży pomiędzy s i S.



Rys. 5.1. Interpretacja sum całkowych

Wprost z definicji kresów dolnego i górnego wynika, że

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Mnożąc stronami obie te nierówności przez Δx_i i sumując je względem i, otrzymamy

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi) \leqslant S(f, \mathcal{P}). \tag{5.29}$$

Z kolei przez odpowiedni wybór punktów pośrednich ξ_i można otrzymać wartości $f(\xi_i)$ dowolnie mało różniące się od m_i (albo od M_i), a tym samym $\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi)$ dowolnie mało różniące się od $s(f, \mathcal{P})$ (albo od $S(f, \mathcal{P})$. Zatem mamy następujący lemat.

Lemat 5.23. *Niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$*

(i) *istnieje taki układ Ξ punktów pośrednich, że*

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi) < s(f, \mathcal{P}) + \varepsilon,$$

(ii) *istnieje taki układ Ξ' punktów pośrednich, że*

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi') > S(f, \mathcal{P}) - \varepsilon.$$

W następnym lemacie podamy, wykorzystywane w dalszej części, proste własności sum całkowych.

Lemat 5.24. *Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ będą podziałami przedziału $[a, b]$.*

(i) *Jeżeli podział $\mathcal{P}'$ powstał z podziału $\mathcal{P}$ przez dodanie nowych punktów[5], tzn. jeżeli $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, to*

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P}') \quad \textit{oraz} \quad S(f, \mathcal{P}) \geqslant S(f, \mathcal{P}'). \tag{5.30}$$

(ii) *Każda suma dolna jest nie większa od każdej sumy górnej, tzn. niezależnie od tego, czy dany podział jest podpodziałem drugiego, czy też nie:*

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{P}'). \tag{5.31}$$

Dowód. W dowodzie punktu (i) wystarczy ograniczyć się do przypadku, w którym podział $\mathcal{P}'$ powstał z podziału $\mathcal{P}$ przez dodanie jednego punktu $x' \notin \mathcal{P}$.

Załóżmy, że $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i dodany punkt $x' \in (x_k, x_{k+1})$. Przy tych oznaczeniach suma górna $S(f, \mathcal{P}')$ różni sie od $S(f, \mathcal{P})$ tylko tym, że w sumie $S(f, \mathcal{P})$ przedziałowi $[x_k, x_{k+1}]$ odpowiada składnik

$$M_k(x_{k+1} - x_k),$$

a w sumie $S(f, \mathcal{P}')$ suma dwóch składników

$$M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x'),$$

gdzie M_k' i M_k'' oznaczają odpowiednio kresy górne funkcji f w przedziałach $[x_k, x']$ i $[x', x_{k+1}]$. Ponieważ są to podprzedziały przedziału $[x_k, x_{k+1}]$, więc

$$M_k' \leqslant M_k \quad \text{oraz} \quad M_k'' \leqslant M_k.$$

[5] O takim podziale mówimy, że jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.

Zatem

$$M_k'(x' - x_k) \leqslant M_k(x' - x_k),$$
$$M_k''(x_{k+1} - x') \leqslant M_k(x_{k+1} - x').$$

Po dodaniu stronami otrzymamy

$$M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x') \leqslant M_k(x_{k+1} - x_k).$$

Stąd już wynika, że $S(f, \mathcal{P}) \geqslant S(f, \mathcal{P}')$. Dowód nierówności $s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P}')$ przebiega podobnie.

Aby wykazać (ii), zauważmy, że $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ jest podpodziałem zarówno podziału $\mathcal{P}$, jak i podziału $\mathcal{P}'$. Zatem korzystając z (i) oraz (5.29), otrzymamy

$$s(f, \mathcal{P}) \leqslant s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}') \leqslant S(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{P}') \leqslant S(f, \mathcal{P}'),$$

co kończy dowód. □

Całka Riemanna

Niech $\{\mathcal{P}_\nu = \{x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{k_\nu}^{(\nu)}\}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$ i niech

$$\delta_\nu := \delta(\mathcal{P}_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

będzie odpowiadającym mu ciągiem średnic (zob. (5.28), str. 168) tych podziałów.

Definicja 5.25. Mówimy, że ciąg $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest *normalnym ciągiem podziałów* przedziału $[a, b]$, gdy

$$\lim_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0.$$

Ciągowi podziałów przedziału $[a, b]$ i ciągowi $\{\Xi_\nu = \{\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \ldots, \xi_{k_\nu}^{(\nu)}\}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ układów punktów pośrednich odpowiadających podziałom $\mathcal{P}_\nu$ odpowiadają trzy ciągi sum całkowych

$$s_\nu = s(f, \mathcal{P}_\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots \quad \text{– \textit{ciąg sum dolnych}},$$
$$\sigma_\nu = \sigma(f, \mathcal{P}_\nu, \Xi_\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots \quad \text{– \textit{ciąg sum pośrednich}},$$
$$S_\nu = S(f, \mathcal{P}_\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots \quad \text{– \textit{ciąg sum górnych}}.$$

Zauważmy, że gdy funkcja f jest nieujemna w całym przedziale $[a,b]$, to każdy z trzech wymienionych wyżej ciągów jest ciągiem „przybliżeń” pola figury ograniczonej od dołu przedziałem $[a,b]$ i od góry wykresem funkcji f (zob. rys. 5.1, str. 169). Zagęszczając punkty podziału, zwiększamy dokładność przybliżenia.

Definicja 5.26 (całki oznaczonej Riemanna). Mówimy, że funkcja[6] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna (w sensie Riemanna) w przedziale $[a,b]$, gdy dla dowolnego normalnego ciągu $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ podziałów przedziału $[a,b]$, niezależnie od wyboru ciągu $\{\Xi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ układów punktów pośrednich odpowiadających podziałom $\mathcal{P}_\nu$, ciąg $\{\sigma_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, i to zawsze do tej samej granicy. Jeśli tak jest, to liczbę

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{k_\nu} f(\xi_i^\nu)(x_i^{(\nu)} - x_{i-1}^{(\nu)})$$

nazywamy *całką oznaczoną Riemanna* (lub krótko *całką oznaczoną*) funkcji f w przedziale $[a,b]$.

Całka górna i całka dolna

Ponieważ funkcja f jest ograniczona, mamy więc nierówności:

$$-\infty < m := \inf\{f(x) : \ x \in [a,b]\} \leqslant M := \sup\{f(x) : \ x \in [a,b]\} < +\infty.$$

Stąd wynika, że dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$

$$m(b-a) \leqslant s(f,\mathcal{P}) \leqslant S(f,\mathcal{P}) \leqslant M(b-a). \tag{5.32}$$

Możemy więc zdefiniować dwie nowe całki.

Definicja 5.27. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy liczby

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{S(f,\mathcal{P}) : \ \mathcal{P} \text{ jest podziałem } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{s(f,\mathcal{P}) : \ \mathcal{P} \text{ jest podziałem } [a,b]\},$$

nazywamy odpowiednio *całką górną i całką dolną* funkcji f w przedziale $[a,b]$.

[6]Przypominamy, że rozważamy tylko funkcje ograniczone.

Można udowodnić (zob. np. [10], rozdz. X, lub [8], rozdz. 9) następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.28. *Jeżeli* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ograniczoną oraz* $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *jest normalnym ciągiem podziałów przedziału* $[a,b]$*, to*

$$\lim_{\nu\to\infty} S(f,\mathcal{P}_\nu) = \overline{\int_a^b} f(x)dx \quad \textit{oraz} \quad \lim_{\nu\to\infty} s(f,\mathcal{P}_\nu) = \underline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{5.33}$$

Przykład **5.29.** Niech $f : [a,b] \ni x \mapsto c \in \mathbb{R}$ będzie funkcją stałą. Wtedy dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ i dowolnego wyboru układu Ξ punktów pośrednich

$$s(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{P}) = \sigma(f,\mathcal{P},\Xi) = c(b-a).$$

Stąd wynika, że funkcje stałe są całkowalne i

$$\int_a^b c\,dx = \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a).$$

Przykład **5.30.** Dla funkcji Dirichleta

$$f : [a,b] \ni x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

niezależnie od wyboru podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$, mamy stałe $m_i = 0$, zaś stałe $M_i = 1$, więc

$$0 = s(f,\mathcal{P}) \neq S(f,\mathcal{P}) = (b-a).$$

Zatem

$$0 = \underline{\int_a^b} f(x)dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)dx = (b-a).$$

Funkcja Dirichleta nie jest całkowalna w sensie Riemanna. Biorąc bowiem normalny ciąg $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ podziałów przedziału $[a,b]$ i wybierając układy Ξ_ν punktów pośrednich w zbiorze liczb wymiernych, otrzymamy sumy całkowe równe 0, natomiast wybierając te układy w zbiorze liczb niewymiernych, otrzymamy sumy całkowe równe $b-a$. Zatem zbieżność ciągu $\{\sigma_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ zależy od wyboru punktów pośrednich, co przeczy całkowalności funkcji f.

Kiedy istnieje całka oznaczona?

Podamy teraz takie warunki istnienia całki oznaczonej (całkowalności), które umożliwiają zbadanie klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.

Twierdzenie 5.31. *Funkcja (ograniczona) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy całka górna jest równa całce dolnej i wówczas*

$$m(b-a)\leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant M(b-a), \tag{5.34}$$

gdzie m, M są odpowiednio kresem dolnym i kresem górnym funkcji f.

Dowód. Niech m, M będą odpowiednio kresem dolnym i kresem górnym funkcji f. Dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ i układu Ξ punktów pośrednich mamy nierówności:

$$m(b-a)\leqslant s(f,\mathcal{P})\leqslant \sigma(f,\mathcal{P},\Xi)\leqslant S(f,\mathcal{P})\leqslant M(b-a).$$

Stąd i z twierdzenia 5.28 wynika, że jeśli całka górna jest równa całce dolnej, to f jest całkowalna i zachodzą równości i nierówności (5.34).

Dla dowodu warunku koniecznego załóżmy, że f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$. W dowolnym przedziale $[x_{i-1},x_i]$ podziału $\mathcal{P}$ można wybrać punkt pośredni ξ_i tak, aby różnica $f(\xi_i)-m_i$ (podobnie różnica $M_i-f(\xi_i)$) była dowolnie mała. Wynika to z definicji kresu dolnego (kresu górnego). Zgodnie z tą obserwacją możemy tak dobrać układy Ξ_ν punktów pośrednich w ustalonym normalnym ciągu $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ podziałów przedziału $[a,b]$, aby

$$\sigma(f,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu)-s(f,\mathcal{P}_\nu)\leqslant\frac{1}{\nu}\quad\left(\text{odpowiednio } S(f,\mathcal{P}_\nu)-\sigma(f,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu)\leqslant\frac{1}{\nu}\right).$$

Przy pierwszym wyborze punktów pośrednich mamy

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\nu\to\infty}\sigma(f,\mathcal{P},\Xi_\nu)=\lim_{\nu\to\infty}s(f,\mathcal{P}_\nu)=\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

i podobnie przy drugim wyborze punktów pośrednich

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\nu\to\infty}\sigma(f,\mathcal{P},\Xi_\nu)=\lim_{\nu\to\infty}S(f,\mathcal{P}_\nu)=\overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

co daje równość całki górnej z całką dolną. □

Ćwiczenie **5.32.** Niech f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi. Zakładając, że $f\leqslant g$, wykazać, że
(a) jeśli f jest funkcją całkowalną, to $\int_a^b f(x)dx\leqslant \underline{\int_a^b} g(x)dx$,

(b) jeśli g jest całkowalna, to $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.
Wskazówka. Wystarczy skorzystać z twierdzenia 5.31 i twierdzenia 5.28.

Lemat 5.33. *Dla funkcji ograniczonej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna,*

(ii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$,

(iii) *dla każdego normalnego ciągu $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ podziałów przedziału $[a, b]$*

$$\lim_{\nu \to \infty} (S(f, \mathcal{P}_\nu) - s(f, \mathcal{P}_\nu)) = 0,$$

(iv) *dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$, że*

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Dowód. Równoważność warunku (i) z warunkiem (ii) została wykazana w twierdzeniu 5.31.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Ta implikacja wynika ze stwierdzenia 5.28.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)}}$ Dla dowodu tej implikacji wystarczy skorzystać z definicji granicy ciągu liczbowego.

$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Z warunku (iv) wynika, że całka górna jest równa całce dolnej, a to (zob. twierdzenie 5.31) implikuje istnienie całki oznaczonej, a zatem spełnienie warunku (i). □

Wniosek 5.34. *Jeżeli f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami takimi, że*

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leqslant \left|g(x') - g(x'')\right| \quad \textit{dla } x', x'' \in [a, b], \tag{5.35}$$

to z tego, że $g \in \mathcal{R}([a, b])$, wynika, że $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Dowód. Niech $\mathcal{P}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Z (5.35) wynika nierówność

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leqslant S(g, \mathcal{P}) - s(g, \mathcal{P}).$$

Zatem jeśli g spełnia warunek (iv) lematu 5.33 istnienia całki oznaczonej, to f też spełnia ten warunek. □

Lemat 5.35. *Jeśli f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi i $f \leqslant g$, to*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Dowód. Ponieważ dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ i dowolnego układu Ξ punktów pośrednich dla podziału $\mathcal{P}$ zachodzi nierówność

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(g, \mathcal{P}, \Xi),$$

więc biorąc normalny ciąg podziałów i przechodząc do granicy, otrzymamy tezę lematu. □

Lemat 5.36. *Jeżeli funkcja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest całkowalna, to funkcja* $|f|$ *też jest całkowalna w przedziale* $[a, b]$. *Ponadto*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{5.36}$$

Dowód. Dla dowodu całkowalności funkcji $|f|$ wystarczy zauważyć, że

$$\big| |f(x')| - |f(x'')| \big| \leqslant |f(x') - f(x'')| \quad \text{dla } x', x'' \in [a, b]$$

i skorzystać z wniosku 5.34.

Aby wykazać nierówność (5.36), zauważmy, że

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \text{dla } x \in [a, b]$$

i korzystając z lematu 5.35, otrzymamy

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Stąd wynika nierówność (5.36). □

Twierdzenie 5.37. *Niech* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ograniczoną. Wtedy*

(i) *jeśli* f *jest całkowalna w przedziale* $[a, b]$, *to dla dowolnego* $c \in (a, b)$ *funkcje* $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ *są całkowalne odpowiednio w przedziałach* $[a, c]$, $[c, b]$ *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x(dx), \tag{5.37}$$

(ii) *jeżeli funkcje* $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ *są całkowalne odpowiednio w przedziałach* $[a, c]$, $[c, b]$, *to* f *jest całkowalna w przedziale* $[a, b]$ *i zachodzi równość* (5.37),

(iii) *jeśli f jest całkowalna w przedziale $[a, b]$, to dla dowolnych punktów*

$$a \leqslant c < d \leqslant b$$

funkcja f jest całkowalna w przedziale $[c, d]$.

Dowód. **Aby wykazać punkt** (i), weźmy taki podział $\mathcal{P}$ przedziału $[a, b]$, że $c \in \mathcal{P}$. Wtedy

$$\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cap [a, c] \quad \text{oraz} \quad \mathcal{P}'' := \mathcal{P} \cap [c, b]$$

są podziałami odpowiednio przedziałów $[a, c]$ oraz $[c, b]$. Zachodzą też nierówności

$$S(f|_{[ac]}, \mathcal{P}') - s(f|_{[ac]}, \mathcal{P}') \leqslant S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}),$$
$$S(f|_{[ac]}, \mathcal{P}'') - s(f|_{[ac]}, \mathcal{P}'') \leqslant S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}).$$

Stąd, korzystając z punktu (iv) lematu (5.33) i faktu, że ewentualne dodanie jednego punktu podziału nie zwiększy różnicy $S - s$, wnioskujemy całkowalność funkcji $f|_{[a,c]}$ i funkcji $f|_{[c,b]}$.

Do wykazania równości (5.37) wystarczy teraz skorzystać z tego, że jeśli $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ jest takim normalnym ciągiem podziałów, że $c \in \mathcal{P}_\nu \quad$ dla $\nu = 1, 2, \ldots,$ to ciągi

$$\mathcal{P}_\nu' := \mathcal{P}_\nu \cap [a, c] \quad \text{oraz} \quad \mathcal{P}_\nu'' := \mathcal{P}_\nu \cap [c, b] \quad \text{dla } \nu = 1, 2, \ldots$$

są normalnymi ciągami podziałów odpowiednio przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$.

Do wykazania punktu (ii) wystarczy zauważyć, że jeśli ciągi

$$\{\mathcal{P}_\nu'\}_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad \{\mathcal{P}_\nu''\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

są odpowiednio normalnymi ciągami podziałów przedziałów $[a, c]$, $[c, b]$, to ich sklejenie

$$\mathcal{P}_\nu := \mathcal{P}_\nu' \cup \mathcal{P}_\nu'' \quad \text{dla } \nu = 1, 2, \ldots$$

jest normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a, b]$.

Dowód punktu (iii) jest taki sam, jak dowód punktu (i), z tą tylko różnicą, że podział $\mathcal{P}$ wybieramy tak, aby punkty c, d były punktami podziału. $\square$

Przestrzeń funkcji całkowalnych

Dotychczasowe rozważania wykorzystamy do zbadania klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.

Przez $\mathcal{R}([a, b])$ oznaczać będziemy zbiór (klasę) funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ całkowalnych w sensie Riemanna.

Twierdzenie 5.38. *Każda funkcja ciągła w przedziale $[a, b]$ jest w tym przedziale całkowalna. Oznacza to, że $\mathcal{C}([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$.*

Dowód. Przedział $[a, b]$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Zatem dana funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła (zob. twierdzenie 6.69, str. 234). Stąd wynika, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $\eta > 0$, że jeśli tylko jakiś podział $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ma średnicę $\delta = \delta(\mathcal{P}) < \eta$, to $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Dla takiego podziału $\mathcal{P}$ mamy

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Oznacza to, że dla funkcji f spełniony jest warunek (iv) lematu 5.33 istnienia całki oznaczonej. $\square$

Wykorzystując tę samą metodę dowodu, można wykazać następujące uogólnienie twierdzenia 5.38:

Twierdzenie 5.39. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną i niech*

$$\mathcal{A} = \{x \in [a, b] : \ f \textit{ nie jest ciągła w punkcie } x\}.$$

Jeżeli zbiór $\mathcal{A}$ (punktów nieciągłości funkcji f) da się pokryć skończoną liczbą przedziałów otwartych o dowolnie małej sumie ich długości[7], to $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Dowód. Możemy założyć, że $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Z założonej ograniczoności funkcji f wynika, że $M - m > 0$, gdzie M, m jest odpowiednio kresem górnym i kresem dolnym funkcji f.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i pokryjmy zbiór skończoną liczbą przedziałów otwartych o łącznej długości nieprzekraczającej $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Oznaczmy te przedziały przez $I_1, \dots, I_k$. Możemy założyć, że dwa różne przedziały tego pokrycia nie mają punktów wspólnych.

Zbiór

$$Z := [a, b] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k)$$

jest domknięty i ograniczony, a więc jest zwarty (zob. twierdzenie Borela–Lebesgue'a 6.63, str.232). Funkcja $f|_Z$ jest jednostajnie ciągła, bo jest ciągła na zbiorze zwartym

[7] Oznacza to, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje skończone pokrycie zbioru $\mathcal{A}$ przedziałami otwartymi, których suma długości nie przekracza δ.

Z (zob. twierdzenie 6.69, str. 234). Zatem istnieje taka liczba $\eta > 0$ (dobrana do $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$), że

$$\text{jeśli } x', x'' \in Z \text{ i } \left|x' - x''\right| < \eta, \text{ to } \left|f(x') - f(x'')\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Niech $\mathcal{P}$ będzie takim podziałem przedziału $[a, b]$, że

1^0 końce przedziałów $I_1, \dots, I_k$ są punktami podziału,

2^0 pozostałe punkty podziału leżą w zbiorze Z i są tak wybrane, że odległość dwóch sąsiednich nie jest większa od η.

Dla takiego podziału mamy

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}(M-m) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Oznacza to, że dla funkcji f spełniony jest warunek (iv) lematu 5.33 istnienia całki oznaczonej. □

Stwierdzenie 5.40. *Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną i ograniczoną, to $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Dowód. Załóżmy, że f jest funkcją rosnącą i $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ podziałem przedziału $[a, b]$ na n równych części. Wtedy

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n} \text{ oraz } M_i - m_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Zatem

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} = \\ &= \frac{b-a}{n}(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1}) = \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

i gdy n jest dostatecznie duże, to $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})$ jest dowolnie małe. Stąd, korzystając z warunku (iv) lematu 5.33, wnioskujemy, że f jest całkowalna.

Dla funkcji malejącej dowód przebiega analogicznie. □

Działania algebraiczne w $\mathcal{R}([a,b])$

Teraz jednym z naszych celów jest pokazanie, że $\mathcal{R}([a,b])$, z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia funkcji przez liczby, jest przestrzenią wektorową, zaś całkowanie jest funkcjonałem liniowym (zob. definicja 7.26, str. 255).

Twierdzenie 5.41. *Jeśli f, $g \in \mathcal{R}([a,b])$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to*

$$f + g \in \mathcal{R}([a,b]) \ \ i \ \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \tag{5.38}$$

$$\lambda f \in \mathcal{R}([a,b]) \ \ i \ \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \tag{5.39}$$

$$fg \in \mathcal{R}([a,b]). \tag{5.40}$$

Dowód. Niech $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ będzie normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$ i niech $\{\Xi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ będzie przypisanym ciągowi $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ciągiem układów punktów pośrednich. $\square$

Prawdziwość (5.38) i (5.39) wynika z równości:

$$\begin{aligned}\sigma(f+g,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu) &= \sigma(f,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu) + \sigma(g,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu),\\ \sigma(\lambda f,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu) &= \lambda\sigma(f,\mathcal{P}_\nu,\Xi_\nu)\end{aligned}$$

i twierdzenia o granicy sumy ciągów i granicy iloczynu ciągu przez liczbę.

Funkcje f i g, jako całkowalne, są ograniczone. Oznacza to, że istnieją takie dwie liczby A i B, że

$$|f(x)| \leqslant A \quad \text{i} \quad |g(x)| \leqslant B \quad \text{dla } x \in [a,b].$$

Stąd dla x', $x'' \in [a,b]$ mamy

$$\begin{aligned}\left|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')\right| &= \left|g(x'')(f(x'') - f(x')) + f(x')(g(x'') - g(x'))\right| \leqslant\\ &\leqslant B\left|f(x'') - f(x')\right| + A\left|g(x'') - g(x')\right|.\end{aligned}$$

Z tej nierówności wynika, że dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$

$$S(fg,\mathcal{P}) - s(fg,\mathcal{P}) \leqslant B\big(S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})\big) + A\big(S(g,\mathcal{P}) - s(g,\mathcal{P})\big).$$

Przy stosownych wyborach podziału $\mathcal{P}$ różnice, w nawiasach, po prawej stronie tej nierówności są dowolnie małe, bo funkcje f i g są całkowalne, więc lewa strona też jest dowolnie mała. Zatem (zob. warunek (iv) lematu 5.33, str. 175) funkcja fg jest całkowalna.

Wniosek 5.42. (a) *Przestrzeń* $\mathcal{R}([a,b])$ *z działaniami dodawania i mnożenia funkcji przez liczby jest przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbb{R}$.

(b) *Odwzorowanie*

$$\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie 5.43. *Niech* $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem w* $\mathcal{R}([a,b])$ *(funkcji całkowalnych) zbieżnym jednostajnie*[8] *do* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Wtedy*

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \quad i \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f_\nu(x)dx.$$

Dowód. Ograniczoność funkcji f wynika z tego, że jest to granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ograniczonych (zob. twierdzenie 7.16, str. 249). Niech

$$\varepsilon_\nu = \|f_\nu - f\|_{[a,b]} := \sup_{x\in[a,b]} |f_\nu(x) - f(x)|. \tag{5.41}$$

Zbieżność jednostajna ciągu $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ do f oznacza, że $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$. Korzystając z (5.41) otrzymamy

$$f_\nu(x) - \varepsilon_\nu \leqslant f(x) \leqslant f_\nu(x) + \varepsilon_\nu \quad \text{dla } x \in [a,b].$$

Zatem

$$\int_a^b (f_\nu(x) - \varepsilon_\nu)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_a^b (f_\nu(x) + \varepsilon_\nu)dx.$$

Po skorzystaniu z liniowości całki otrzymamy

$$\int_a^b f_\nu(x))dx - \varepsilon_\nu(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_a^b f_\nu(x)dx + \varepsilon_\nu(b-a).$$

Stąd

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_a^b f_\nu(x)dx + \varepsilon_\nu(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx + 2\varepsilon_\nu(b-a), \tag{5.42}$$

[8] Jest to równoważne temu, że $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do f w $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$.

czyli

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx + 2\varepsilon_\nu(b-a).$$

Przechodząc z ν do nieskończoności, otrzymamy

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

co wobec oczywistej nierówności przeciwnej oznacza, że

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Ponieważ $\varepsilon_\nu \to 0$, gdy $\nu \to \infty$, więc korzystając z (5.42), otrzymamy

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f_\nu(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Uwaga* **5.44.** Przestrzeń $\mathcal{R}([a,b])$ jest podprzestrzenią wektorową (zob. wniosek 5.42) przestrzeni Banacha $\mathcal{B}([a,b]) := \mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ (zob. 7.15, str. 248). Z twierdzenia 5.43 wynika, że jest to podprzestrzeń domknięta, ponieważ zbieżność w $\mathcal{B}([a,b];\mathbb{R})$ oznacza jednostajną zbieżność (zob. stwierdzenie 7.16, str. 249), a więc też jest przestrzenią Banacha (zob. twierdzenie 7.14, str. 247). Ponadto całka jako odwzorowanie

$$\int_a^b \; : \; \mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R} \tag{5.43}$$

jest ciągłym odwzorowaniem (funkcjonałem) liniowym.

Ćwiczenie **5.45.** Obliczyć normę (por. (7.28), str. 256) funkcjonału liniowego (5.43), tzn. liczbę

$$\left\| \int_a^b \right\| := \sup \left\{ \left| \int_a^b f(x)dx \right| \; : \; f \in \mathcal{R}([a,b]), |f(x)| \leqslant 1 \quad \text{dla } x \in [a,b] \right\}.$$

W twierdzeniu (5.43) istotne jest założenie o jednostajnej zbieżności ciągu $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. Bez tego założenia twierdzenie nie jest prawdziwe.

Przykład **5.46.** Wiadomo, że zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jest przeliczalny. Stąd wynika, że jego podzbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ też jest przeliczalny. Możemy więc utworzyć ciąg $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy są liczbami wymiernymi wypełniającymi cały zbiór $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Każda funkcja ciągu $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ danego wzorem

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_\nu\}, \\ 1, \text{ gdy } x \in [0,1] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_\nu\} \end{cases}$$

jest całkowalna. Wynika to np. z twierdzenia 5.39.

Ciąg $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji całkowalnych zbieżnym punktowo (ale nie jednostajnie) do funkcji Dirichleta, która nie jest całkowalna (zob. przykład 5.30).

Związek całki oznaczonej z nieoznaczoną

Wiemy, że jeśli funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to jest całkowalna w dowolnym podprzedziale $[c,d]$ przedziału $[a,b]$ (zob. punkt (iii) twierdzenia 5.37, str. 176). W przypadku gdy $c, d \in [a,b]$ i $c \geqslant d$, przyjmujemy

$$\int_c^d f(x)dx := \begin{cases} -\displaystyle\int_d^c f(x)dx, & \text{gdy } d < c, \\ 0, & \text{gdy } d = c. \end{cases}$$

Teraz sformułujemy i udowodnimy jedno z najważniejszych twierdzeń rachunku całkowego. Pozwala ono obliczyć całkę oznaczoną, gdy znamy całkę nieoznaczoną funkcji podcałkowej.

Twierdzenie 5.47. *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Wtedy funkcja*

$$F : [a,b] \ni x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R} \tag{5.44}$$

jest ciągła i jeżeli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$, to F jest różniczkowalna w punkcie x_0 i

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{5.45}$$

Dowód. Z założonej całkowalności wynika, że f jest funkcją ograniczoną. Zatem istnieje takie $M \geqslant 0$, że

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{dla } x \in [a,b].$$

Do wykazania ciągłości funkcji F skorzystamy z definicji Heinego (zob. definicja 3.15, str. 63). Niech $x_0 \in [a,b]$ i niech $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach w $[a,b]$

zbieżnym do x_0. Wtedy

$$|F(x_\nu) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_\nu} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_\nu} f(t)dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant M\,|x_\nu - x_0| \to 0, \text{ gdy } \nu \to \infty.$$

Stąd wynika, że F jest ciągła w punkcie x_0.

Niech x_0 będzie punktem ciągłości funkcji f. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzą nierówności

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Stąd, gdy $0 < |h| \leqslant \delta$,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \leqslant \frac{1}{|h|}\varepsilon\,|h| = \varepsilon.$$

Zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

co oznacza, że $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia jest twierdzenie łączące rachunek całkowy z rachunkiem różniczkowym.

Wniosek 5.48. (a) *Każda funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma pierwotną.*
(b) *Jeżeli Φ jest pierwotną funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{5.46}$$

Dowód. Do wykazania (a) wystarczy zauważyć, że gdy f jest ciągła, to funkcja (5.44) jest pierwotną funkcji f. Stąd wynika (zob. twierdzenie 5.3, str. 151), że istnieje taka stała C, że

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Ponieważ $F(a) = 0$, więc

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

co dowodzi własności (b). □

Dla danej funkcji pierwotnej F przyjmować będziemy oznaczenie

$$[F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Przy tym oznaczeniu podstawowy wzór rachunku całkowego, tzn. wzór (5.46), przyjmuje postać

$$\int_a^b f(x)dx = [\Phi]_a^b.$$

Całkowanie przez części

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy, zgodnie z twierdzeniem 5.38, funkcja

$$(fg)' = f'g + fg'$$

jest całkowalna, bo jest ciągła. Stąd, na mocy wniosku 5.48, str. 184,

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

co po przekształceniu daje

wzór na całkowanie przez części (por. z (5.1), str. 153)

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{5.47}$$

Przykład **5.49.** Stosując metodę całkowania przez części, mamy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)' dx = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} - 0 + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Całkowanie przez podstawienie

Niech $f:[a,b]\to[c,d]\subset\mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, której pochodna f' jest funkcją całkowalną. Jeśli $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to (por. z (5.2), str. 153) możemy stosować

wzór na całkowanie przez podstawienie

$$\int_a^b g(f(t))f'(t)dt=\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx. \tag{5.48}$$

Istotnie, z założenia, że f' jest całkowalna, wynika, że $(g\circ f)\cdot f'$ też jest całkowalna i jeżeli G jest pierwotną funkcji g, to $G\circ f$ jest pierwotną funkcji $(g\circ f)f'$. Stąd i z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego wynika, że

$$\int_a^b g(f(t))f'(t)dt=G(f(b))-G(f(a))=\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx.$$

Przykład **5.50.** Całkę $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt$ obliczymy za pomocą podstawienia $x=1+t^2=f(t)$. Wtedy $dx=2tdt$. Zatem

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{f(0)}^{f(1)}\sqrt{x}dx=\left[\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2=\frac{1}{3}(\sqrt{8}-1).$$

Uwaga **5.51.** Do obliczania całek oznaczonych można skorzystać z programów komputerowych. Przykładowo, aby obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{7-5\sin x}dx$$

w programie „Maple” wpisujemy:

$$int\Big(\frac{1}{7-5\sin(x)},x=0..2\pi\Big);$$

wciskamy „Enter” i otrzymamy

$$\frac{1}{6}\pi\sqrt{6}.$$

Zwracamy tu uwagę na to, że obliczając tę całkę jako różnicę wartości pierwotnej w punkcie 2π i wartości w punkcie 0, można łatwo popełnić błąd (zob. uwagę 5.22, str. 167).

5.4. Zastosowania całek

Całki oznaczone mają wiele zastosowań. Jednym z najprostszych jest zastosowanie do obliczania pól figur płaskich.

Obliczanie pól figur płaskich

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją całkowalną i niech $\mathcal{P} = \{x_0, \dots x_n\}$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy (zob. rys. 5.1, str. 169) suma dolna

$$s(f, \mathcal{P}) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n,$$

gdzie m_i jest kresem dolnym funkcji f w przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ oraz $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, jest sumą pól prostokątów zawartych w figurze (trapezie krzywoliniowym)

$$\mathcal{F} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

natomiast suma górna

$$S(f, \mathcal{P}) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n,$$

gdzie M_i jest kresem górnym funkcji f w przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, jest polem sumy prostokątów obejmujących figurę $\mathcal{F}$. Stąd wynika, że pole $|\mathcal{F}|$ (miara Jordana) figury $\mathcal{F}$ spełnia nierówności

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

co wobec założonej całkowalności funkcji f oznacza, że

$$|\mathcal{F}| = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.49}$$

Stąd wynika, że całka od a do b z funkcji całkowalnej nieujemnej f jest liczbowo równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi pionowymi $x = a$ oraz $x = b$.

Pokażemy teraz jak można obliczyć pole figury ograniczonej wykresami funkcji.

Twierdzenie 5.52. *Jeśli funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne i takie, że $g \leqslant f$, to pole figury*

$$\mathcal{F} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

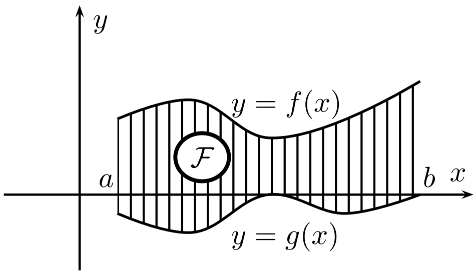
(zob. rys. 5.2) jest równe

$$|\mathcal{F}| = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Dowód. Gdy funkcje f, g są nieujemne, to stosując wzór (5.49), otrzymamy

$$|\mathcal{F}| = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

W ogólnym przypadku istnieje taka stała C, że funkcje $f + C$ i $g + C$ są nieujemne. Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że $f - g = (f + C) - (g + C)$. $\square$



Rys. 5.2. Figura ograniczona wykresami

Objętość bryły obrotowej

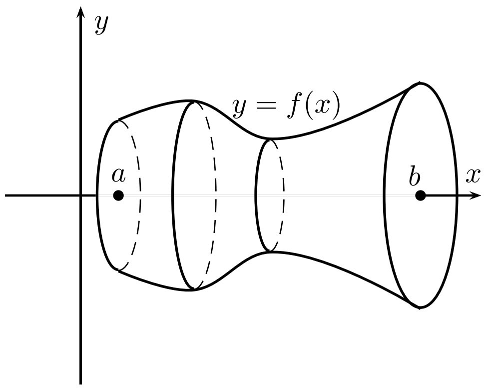
Będziemy obliczać objętości brył, które powstają przez obrót wykresu danej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wokół osi Ox (zob. rys. 5.3). O funkcji f będziemy zakładać, że jest nieujemna. To nie zmniejsza ogólności rozważań, ponieważ bryły wyznaczone przez obrót wykresu funkcji f i funkcji $|f|$ są takie same.

Twierdzenie 5.53. *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to objętość $|V|$ bryły obrotowej (zob. rys. 5.3)*

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \leqslant x \leqslant b, \ z^2 + y^2 \leqslant f^2(x)\},$$

tzn. bryły ograniczonej płaszczyznami $x = a$ i $x = b$ oraz powierzchnią powstałą przez obrót wykresu funkcji f wokół osi Ox, jest równa

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{5.50}$$



Rys. 5.3. Bryła obrotowa

Dowód. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją całkowalną i niech $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots x_n\}$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy

$$\pi s(f^2, \mathcal{P}) = \pi m_1^2 \Delta x_1 + \pi m_2^2 \Delta x_2 + \ldots + \pi m_n^2 \Delta x_n \tag{5.51}$$

jest sumą objętości walców zawartych w bryle V, natomiast

$$\pi S(f^2, \mathcal{P}) = \pi M_1^2 \Delta x_1 + \pi M_2^2 \Delta x_2 + \ldots + \pi M_n^2 \Delta x_n$$

jest objętością sumy walców obejmujących bryłę V. Stąd wynika, że objętość $|V|$ spełnia nierówności:

$$\pi \underline{\int_a^b} f^2(x)dx \leqslant |V| \leqslant \pi \overline{\int_a^b} f^2(x)dx. \tag{5.52}$$

Na mocy założenia funkcja f jest całkowalna, więc f^2 jako iloczyn $f \cdot f$ funkcji całkowalnych też jest funkcją całkowalną (zob. twierdzenie 5.41, str. 180). Zatem z (5.52) wynika równość (5.51). $\square$

Przykład **5.54.** Zastosujemy wzór (5.50) do obliczenia objętości elipsoidy obrotowej V, tzn. bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wokół osi Ox. Po prostym przekształceniu widać, że powierzchnia elipsoidy jest powierzchnią powstałą przez obrót wykresu funkcji

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

wokół osi Ox. Zatem objętość $|V|$ powstałej elipsoidy wynosi:

$$|V| = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(\int_{-a}^{a} dx - \frac{1}{a^2} \int_{-a}^{a} x^2 dx\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

W szczególnym przypadku, gdy $a = b = r > 0$, elipsoida jest kulą i (zgodnie z otrzymanym wzorem) jej objętość wynosi $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Pole powierzchni obrotowej

Będziemy obliczać pole powierzchni , która powstaje przez obrót wykresu danej funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0$ klasy $\mathcal{C}^1$ wokół osi Ox (zob. rys. 5.3).

Twierdzenie 5.55. *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, to pole $|\mathcal{S}|$ powierzchni obrotowej*

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \leqslant x \leqslant b, \ z^2 + y^2 = f^2(x)\},$$

tzn. powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi Ox, jest równe

$$|\mathcal{S}| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{5.53}$$

Dowód. Niech $\mathcal{P}_\nu = \{x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \dots, x_{k_\nu}^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, 2, \dots$ będzie normalnym ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$. Punkty

$$A_j^{(\nu)} := (x_j^{(\nu)}, f(x_j^{(\nu)})), \ j = 0, 1, \dots, k_\nu$$

leżą na wykresie funkcji f. Linia łamana $A_0^{(\nu)} A_1^{(\nu)} \dots A_{k_\nu}^{(\nu)}$ wpisana w wykres funkcji zatoczy po obrocie powierzchnię $\mathcal{S}_\nu$ złożoną z powierzchni bocznych k_ν stożków ściętych, której pole jest równe[9]

$$|\mathcal{S}_\nu| = \sum_{i=1}^{k_\nu} \Big(2\pi \frac{f(x_{i-1}^{(\nu)}) + f(x_i^{(\nu)})}{2} \sqrt{\big(\Delta x_i^{(\nu)}\big)^2 + \big(\Delta y_i^{(\nu)}\big)^2}\Big),$$

gdzie

$$\Delta x_i^{(\nu)} = x_i^{(\nu)} - x_{i-1}^{(\nu)}, \quad \Delta y_i^{(\nu)} = f(x_i^{(\nu)}) - f(x_{i-1}^{(\nu)}).$$

W myśl twierdzenia o wartości średniej (zob. twierdzenie 4.24, str. 102) istnieje takie $\xi_i^{(\nu)} \in (x_{i-1}^{(\nu)}, x_i^{(\nu)})$, że

$$\Delta y_i^{(\nu)} = f'(\xi_i^\nu)\Delta x_i^{(\nu)}.$$

□

Zatem

$$\sqrt{\big(\Delta x_i^{(\nu)}\big)^2 + \big(\Delta y_i^{(\nu)}\big)^2} = \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i^{(\nu)})\big)^2}\Delta x_i^{(\nu)}. \tag{5.54}$$

Przyjmując $\varepsilon_i^{(\nu)}$ tak aby

$$\frac{f(x_{i-1}^{(\nu)}) + f(x_i^{(\nu)})}{2} = f(\xi_i^{(\nu)}) + \varepsilon_i^{(\nu)}$$

oraz

$$\sigma_\nu := \sum_{i=1}^{k_\nu} 2\pi f(\xi_i^{(\nu)}) \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i^{(\nu)})\big)^2}\Delta x_i^{(\nu)},$$

$$r_\nu := \sum_{i=1}^{k_\nu} 2\pi \varepsilon_i^{(\nu)} \sqrt{1 + \big(f'(\xi_i^{(\nu)})\big)^2}\Delta x_i^{(\nu)}$$

otrzymamy

$$|\mathcal{S}_\nu| = \sigma_\nu + r_\nu \quad \text{dla } \nu = 1, 2, \ldots$$

Ciąg $\{\sigma_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ zmierza do całki (5.53). Całka ta istnieje, bo założyliśmy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$. Do zakończenia dowodu wystarczy więc wykazać, że ciąg $\{r_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ma granicę równą 0.

[9] Przypomnijmy, że pole powierzchni bocznej stożka ściętego jest równe połowie sumy obwodów obu podstaw pomnożonej przez jego tworząca.

Oznaczając przez δ_ν największą z liczb $\{\ \varepsilon_1^{(\nu)}, \varepsilon_2^{(\nu)}, \dots \varepsilon_{k_\nu}^{(\nu)}\}$ oraz przez M największą wartość funkcji $|f|$ w przedziale $[a, b]$, otrzymamy

$$|r_\nu| \leqslant 2\pi\delta_\nu(b-a)\sqrt{1+M^2}.$$

Z (5.54) wynika, że

$$2\varepsilon_\nu = \big(f(x_{i-1}^{(\nu)}) - f(\xi_i^{(\nu)})\big) + \big(f(x_i^{(\nu)}) - f(\xi_i^{(\nu)})\big).$$

Ponieważ funkcja f jako ciągła w przedziale domkniętym jest jednostajnie ciągła (zob. twierdzenie 3.26, str. 68) i największy z przedziałów $[x_{i-1}^{(\nu)}, x_i^{(\nu)}]$, $i = 1, 2, \dots, k_\nu$ zmierza do zera, gdy $\nu \to \infty$, więc $\delta_\nu \to 0$, gdy $\nu \to \infty$. Stąd wynika, że

$$\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = 0,$$

co kończy dowód twierdzenia.

Przykład **5.56.** Pole powierzchni S powstałej przez obrót wykresu funkcji

$$f\,:\ [0,3] \ni x \mapsto x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

wynosi

$$\begin{aligned}
|S| &= 2\pi\int_0^3 \Big(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big)\sqrt{1+\Big(\frac{1}{2}\big(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\big)\Big)^2}dx = \\
&= 2\pi\int_0^3 \Big(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big)\frac{1}{2}\big(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\big)dx = \pi\int_0^3 \Big(1+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}x^2\Big)dx = \\
&= \pi\left[x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3\right]_0^3 = 12\pi
\end{aligned}$$

Uwaga **5.57.** Gdy powierzchnia obrotowa S powstaje z obrotu wokół osi O_x krzywej C danej parametrycznie, tzn.

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}:\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha,\beta]\},$$

gdzie $\varphi,\ \psi\,:\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ są funkcjami klasy $\mathcal{C}^1$, funkcja φ jest różnowartościowa i ψ jest nieujemna, to

$$|S| = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt = 2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt. \tag{5.55}$$

Aby to wykazać wystarczy zauważyć, że S powstaje przez obrót wokół osi Ox wykresu funkcji

$$f\,:\ [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] \ni x \mapsto \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

skorzystać ze wzoru (5.53) i w otrzymanej całce wykonać podstawienie $x = \varphi(t)$.

Przykład **5.58.** Powierzchnia obrotowa S powstaje przez obrót krzywej o równaniach parametrycznych

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

W tym przypadku funkcja $\varphi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto t - \sin t \in \mathbb{R}$ jest silnie rosnąca, zaś funkcja $\psi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto 1 - \cos t \in \mathbb{R}$ jest nieujemna i obie są klasy $\mathcal{C}^\infty$. Możemy więc stosować wzór (5.55), zgodnie z którym

$$|S| = 2\pi \int_0^{2\pi} y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}dt =$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)2\sin\frac{t}{2}dt = 2\pi \int_0^{2\pi} 4\sin^3\frac{t}{2}dt = 8\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt =$$
$$= 8\pi \left[-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi.$$

Długość krzywej

Przez krzywą w $\mathbb{R}^n$ rozumieć będziemy dowolne odwzorowanie ciągłe

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Zbiór $\gamma([a, b])$ nazywać będziemy *obrazem krzywej* γ. Punkty $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ nazywamy *początkiem* i *końcem* krzywej γ. O funkcji γ mówimy też, że jest *opisem parametrycznym* krzywej. O krzywej γ mówimy, że jest *krzywą zamkniętą*, jeśli $\gamma(a) = \gamma(b)$. Jeśli γ jest odwzorowaniem różnowartościowym, to γ nazywamy *krzywą Jordana*.

Będziemy mówili, że krzywa $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, jeśli każda z funkcji

$$\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{R}, \; j = 1, \ldots, n$$

jest klasy $\mathcal{C}^1$. Przez $\gamma'(t)$ będziemy rozumieć wektor

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_n'(t)).$$

W $\mathbb{R}^n$ przyjmować będziemy normę euklidesową, tzn. dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Na krzywą γ możemy patrzeć jak na opis ruchu punktu P w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, w którym $\gamma(t)$ opisuje położenie tego punktu w chwili t. Obraz krzywej γ jest w tej sytuacji wektorem, po którym porusza się punkt P. Przy tej interpretacji długość krzywej γ należy tak zdefiniować, aby oznaczała drogę, jaką przebędzie punkt P poruszający się po torze $\gamma([a,b])$ od chwili a do chwili b.

Przykład **5.59.** 1. Odwzorowanie

$$\gamma:\ [0,2\pi]\ni t\mapsto (r\cos t, r\sin t)\in\mathbb{R}^2$$

jest krzywą zamkniętą. Obrazem tej krzywej jest okrąg o promieniu r. Długość tej krzywej jest równa długości okręgu.

2. Obrazem krzywej

$$\tilde{\gamma}:\ [0,4\pi]\ni t\mapsto (r\cos t, r\sin t)\in\mathbb{R}^2$$

też jest ten sam okrąg o promieniu r, ale długość tej krzywej jest dwa razy większa od długości okręgu. Krzywa $\tilde{\gamma}$ opisuje ruch punktu, który dwukrotnie obiega okrąg.

Niech $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $\mathcal{P}=\{t_0,t_1,\ldots,t_\nu\}$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$. Punkty $p_i:=\gamma(t_i)$, $i=0,1,\ldots,\nu$, są punktami krzywej γ. Liczba

$$D(\gamma,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{\nu}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$$

jest długością łamanej, wpisanej w krzywą γ, wyznaczonej przez punkty podziału $\mathcal{P}$.

Przez *długość* $d(\gamma)$ *krzywej* γ rozumiemy kres górny długości łamanych wpisanych w tę krzywą, tzn.

$$d(\gamma):=\sup\{D(\gamma,\mathcal{P}):\ \mathcal{P}\text{ jest podziałem przedziału }[a,b]\}.$$

Gdy $d(\gamma)<+\infty$, to o krzywej γ mówimy, że jest *prostowalna*.

Twierdzenie 5.60. *Jeśli krzywa*

$$\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n):\ [a,b]\ni t\mapsto\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\ldots,\gamma_n(t))\in\mathbb{R}^n$$

jest klasy $\mathcal{C}^1$*, to jest prostowalna i*

$$d(\gamma)=\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int_a^b\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+(\gamma_2'(t))^2+\ldots+(\gamma_n'(t))^2}dt. \tag{5.56}$$

Dowód. Niech $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_\nu\}$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$. Wtedy

$$D(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{\nu} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{\nu} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(t)\right\| dt = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt.$$

Stąd i z ciągłości funkcji $[a, b] \ni t \to \|\gamma'(t)\|$ wynika, że

$$d(\gamma) \leqslant \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt < +\infty,$$

co oznacza prostowalność krzywej γ i do zakończenia dowodu wystarczy wykazać nierówność

$$d(\gamma) \geqslant \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt.$$

Aby to wykazać, ustalmy $\varepsilon > 0$. Funkcja $t \to \gamma'(t)$ jest ciągła, więc jest jednostajnie ciągła w przedziale $[a, b]$. Zatem istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$\left\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\right\| < \tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{jeśli tylko } |t - s| < \delta.$$

Niech $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_\nu\}$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$ o średnicy $\delta(\mathcal{P}) < \delta$. Wtedy

$$\int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(t)\right\| dt = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(t) + \gamma'(t_i) - \gamma'(t_i)\right\| dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\left\|\gamma'(t_i)\right\| + \left\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\right\|) dt \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\left\|\gamma'(t_i)\right\| + \tilde{\varepsilon}) dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} (\left\|\gamma'(t_i)\right\| + \tilde{\varepsilon}) \Delta t_i = \sum_{i=1}^{\nu} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i) dt \right\| + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t) + \gamma'(t)) dt \right\| + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

Z kolei

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\nu}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma'(t_i)-\gamma'(t)+\gamma'(t))dt\right\|+\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{\nu}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma'(t_i)-\gamma'(t))dt\right\|+\sum_{i=1}^{\nu}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\gamma'(t))dt\right\|+\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{\nu}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(\gamma'(t_i)-\gamma'(t))dt\right\|+\sum_{i=1}^{\nu}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))\|+\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\leqslant\\
&\leqslant\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}+D(\gamma,\mathcal{P})+\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}=D(\gamma,\mathcal{P})+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Stąd, dzięki dowolności wyboru ε, wynika, że

$$d(\gamma)\geqslant\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt,$$

co kończy dowód równości (5.56). □

Na wykres funkcji ciągłej $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ możemy patrzeć jak na krzywą

$$\gamma:\ [a,b]\ni t\mapsto(t,f(t))\in\mathbb{R}^2.$$

Ten opis parametryczny nazywamy *parametryzacją naturalną* wykresu funkcji f. Gdy funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1$, to wzór (5.56) na długość $d(f)$ takiej krzywej γ przyjmuje postać

$$d(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Przykład **5.61.** Długość łuku sinusoidy, tzn. wykresu funkcji

$$f:\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ni x\mapsto\sin x\in\mathbb{R},$$

wynosi:

$$d(f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+((\sin x)')^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx\simeq 1,9100988945138560089.$$

Występująca tu całka jest tzw. całką eliptyczną II rodzaju i nie da się jej wyliczyć przy pomocy funkcji elementarnych. Przybliżoną jej wartość można znaleźć, np. używając programu „MAPLE". Wystarczy wpisać „$evalf[20](int(sqrt(1+cos^2(x)),x=0..\frac{\pi}{2}));$", wcisnąć „Enter" i otrzymamy wypisaną wyżej wartość.

Całki niewłaściwe

Definiując całkę oznaczoną (Riemanna), zakładaliśmy, że przedział całkowania jest ograniczony i że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona.

Z całkami niewłaściwych mamy do czynienia wtedy, gdy przedział, po którym całkujemy jest nieograniczony albo przedział jest ograniczony, ale funkcja całkowana nie jest ograniczona.

1. Rozpoczniemy od sytuacji, gdy funkcja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w każdym przedziale domkniętym $[a, \beta] \subset [a, b)$, co oznacza, że istnieje całka

$$I(\beta) = \int_a^\beta f(x)dx \quad \text{dla każdego } \beta \in [a, b).$$

W takim przypadku punkt b nazywać będziemy *punktem osobliwym* danej funkcji f, gdy $b = +\infty$ albo $b \in \mathbb{R}$ i funkcja f nie jest ograniczona w żadnym sąsiedztwie punktu b.

Jeżeli b jest punktem osobliwym funkcji f i istnieje granica skończona

$$\lim_{\beta \to b} I(\beta) = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx,$$

to tę granicę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $[a, b)$ i oznaczamy tak samo, jak całkę właściwą, tzn.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx. \tag{5.57}$$

Takie oznaczenie bierze się stąd, że dla funkcji całkowalnych w przedziale $[a, b]$ też zachodzi równość (5.57). Wynika to z twierdzenia 5.47, str. 183.

Gdy $I(\beta)$ nie ma granicy (gdy β zmierza do b) lub ma granicę, ale nieskończoną, to mówimy, że całka z funkcji f w przedziale $[a, b]$ jest rozbieżna.

Przykład **5.62.** Funkcja ctg jest nieograniczona w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ i jest całkowalna w każdym podprzedziale $[-\frac{\pi}{2}, \beta] \subset [-\frac{\pi}{2}, 0)$. Zatem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{ctg} x dx = \lim_{\beta \to 0_-} \int_{-\frac{\pi}{2}}^\beta \operatorname{ctg} x dx = \lim_{\beta \to 0_-} [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{2}}^\beta = -\infty,$$

co oznacza, że ta całka jest rozbieżna.

Przykład **5.63.** Pokażemy, że

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$.

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^\beta, & \text{gdy} \quad \alpha \neq 1, \\ [\ln|x|]_1^\beta, & \text{gdy} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Zatem

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{gdy} \quad \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{gdy} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.58}$$

2. Podobnie definiujemy całkę niewłaściwą w przedziale $(a, b]$. W tym przypadku zakładamy, że dla dowolnego $\beta \in (a, b]$ istnieje całka funkcji f w przedziale $[\beta, b]$, co oznacza, że istnieje całka

$$J(\beta) = \int_\beta^b f(x)dx \quad \text{dla każdego } \beta \in (a, b].$$

Podobnie jak poprzednio, punkt a nazywać będziemy *punktem osobliwym* danej funkcji $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, gdy $a = -\infty$ albo $a \in \mathbb{R}$ i funkcja f nie jest ograniczona w żadnym sąsiedztwie punktu a. Dla przykładu punkt 0 jest punktem osobliwym dla funkcji

$$f : (0, 1] \ni x \mapsto \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} \in \mathbb{R},$$

ale nie jest punktem osobliwym dla funkcji

$$g : (0, 1] \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R},$$

pomimo że funkcja ta nie jest określona w punkcie 0.

Definicja 5.64. Jeżeli a jest punktem osobliwym funkcji f i istnieje granica skończona

$$\lim_{\beta\to a} J(\beta) = \lim_{\beta\to a} \int_\beta^b f(x)dx,$$

to tę granicę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $(a, b]$ i oznaczamy tak samo jak całkę właściwą, tzn.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta\to b} \int_\beta^b f(x)dx. \tag{5.59}$$

Jeśli ta granica jest skończona, to mówimy, że *całka jest zbieżna*. W przeciwnym przypadku mówimy, że całka z funkcji f w przedziale $[a, b]$ jest *rozbieżna*.

Przykład **5.65.** Zbadamy teraz zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Całka ta jest niewłaściwa tylko wtedy, gdy $\alpha > 0$. Punkt 0 jest punktem osobliwym funkcji podcałkowej.

$$\int_\beta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_\beta^1, & \text{gdy} \quad \alpha \neq 1, \\ [\ln|x|]_\beta^1, & \text{gdy} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Stąd otrzymamy

$$\lim_{\beta\to 0_+} \int_\beta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{gdy} \quad \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{gdy} \quad \alpha \geqslant 1. \end{cases} \tag{5.60}$$

3. Aby zdefiniować całkę niewłaściwą w przedziale (a, b), zakładamy, że dla pewnego $c \in (a, b)$ istnieją całki niewłaściwe w przedziałach $(a, c]$ i $[c, b)$. Wtedy przyjmujemy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5.61}$$

W tej równości obie całki występujące po prawej stronie są niewłaściwe. Trzeba jeszcze wykazać, że ta definicja nie zależy od wyboru punktu c. Niech c' będzie innym punktem przedziału (a, b). Możemy przyjąć, że $a < c' < c < b$. Wtedy

$$\int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^b f(x)dx = \int_a^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$
$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Stąd wynika niezależność definicji od wyboru punktu c, a tym samym poprawność definicji.

Gdy obie całki występujących po prawej stronie równości (5.61) są zbieżne, to mówimy, że całka z funkcji f w przedziale (a, b) jest *zbieżna*. W przypadku przeciwnym mówimy, że całka jest *rozbieżna*. W tym przypadku punkty a, b są punktami osobliwymi.

Przykład **5.66.** W całce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \tag{5.62}$$

są dwa punkty osobliwe: $a = -\infty$ i $b = +\infty$. Do dalszych obliczeń przyjmiemy $c = 0$.

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{\beta \to +\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^{\beta} = \lim_{\beta \to +\infty} (\operatorname{arctg} \beta - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{\beta \to -\infty} [\operatorname{arctg} x]_{\beta}^{0} = \lim_{\beta \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \beta) = \frac{\pi}{2}.$$

Zatem całka (5.62) jest zbieżna i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Przykład **5.67.** Chcąc zbadać zbieżność całki

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx, \tag{5.63}$$

rozdzielimy przedział $(0, +\infty)$ na dwa podprzedziały: $(0, 1] \cup [1, +\infty)$. W każdym z tych przedziałów funkcja podcałkowa ma tylko jeden punkt osobliwy. Zatem

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

Ponieważ nie ma takiego α, aby obie całki (prawej strony powyższej równości) były równocześnie zbieżne (zob. (5.58) i (5.60)), więc całka (5.63) jest rozbieżna.

4. Jeżeli funkcja f ma w przedziale (a,b) więcej punktów osobliwych (lecz skończoną ich ilość), to dzielimy ten przedział na podprzedziały, w których tylko jeden z końców jest osobliwy dla funkcji f. Badamy, czy całki z funkcji f po tak otrzymanych przedziałach są zbieżne. Jeśli tak, to całka po przedziale (a, b) jest zbieżna i jest równa sumie całek po wszystkich wcześniej otrzymanych podprzedziałach. W przypadku przeciwnym, o całce z funkcji f mówimy, że jest rozbieżna.

Kryterium całkowe dla szeregów

Każdej funkcji $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ możemy przyporządkować szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{gdzie } a_n = f(n) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \tag{5.64}$$

Podamy teraz następujące ciekawe kryterium zbieżności szeregów liczbowych, które odkrył najpierw Maclaurin w postaci geometrycznej; następnie kryterium to zostało zapomniane i potem na nowo odkryte przez Cauchy'ego.

Twierdzenie 5.68 (kryterium całkowe). *Jeżeli funkcja f jest dodatnia i malejąca, to szereg* (5.64) *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \tag{5.65}$$

jest zbieżna.

Dowód. Funkcja f jest malejąca, więc jest całkowalna w każdym przedziale $[1, n]$ dla $n = 1, 2, \ldots$ (zob. stwierdzenie 5.40, str. 179). Niech

$$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad I_n = \int_1^n f(x)dx \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Funkcja f jest dodatnia, więc ciągi $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są rosnące i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$a_{k+1} = f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k) = a_k \quad \text{dla } x \in [k, k+1].$$

Stąd

$$\int_k^{k+1} a_{k+1}dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1} a_k dx,$$

co po scałkowaniu daje

$$a_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant a_k \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Sumując otrzymane nierówności od $k = 1$ do $k = n - 1$, otrzymamy

$$s_n - a_1 \leqslant I_n \leqslant s_{n-1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \tag{5.66}$$

1. Jeżeli szereg (5.64) jest zbieżny, to jego suma s ogranicza z góry każdą jego sumę częściową, bo wyrazy szeregu są dodatnie. Stąd i z nierówności (5.66) wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$I_n \leqslant s_n \leqslant s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Z kolei
$$F(\beta) := \int_1^\beta f(x)dx,$$
jako funkcja zmiennej β, jest rosnąca. Zatem
$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx \leqslant s.$$
Stąd wynika zbieżność całki (5.65) i kończy dowód warunku koniecznego.

2. Ze zbieżność całki (5.65) wynika (zob. nierówność (5.66)), że ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sum częściowych szeregu (5.64) jest ograniczony. Zatem jako ciąg rosnący i ograniczony jest zbieżny w $\mathbb{R}$, a to oznacza, że szereg (5.64) jest zbieżny. □

Przykład **5.69.** Zbadamy, dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \tag{5.67}$$
jest zbieżny, a dla jakich rozbieżny.

Jeśli $\alpha \leqslant 0$, to granica ciągu jego wyrazów nie jest równa zero. Zatem szereg ten nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, a więc jest rozbieżny.

Jeśli $\alpha > 0$, to funkcja
$$f:\ [1, +\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} \in \mathbb{R}$$
jest malejąca i na mocy kryterium całkowego (zob. twierdzenie 5.68) szereg (5.67) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna. Całka ta jest zbieżna (zob. (5.58)) wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$. Zatem

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ jest zbieżny} \iff \alpha > 1.$$

Całka Riemanna–Stieltjesa

Całka Riemanna–Stieltjesa jest uogólnieniem całki Riemanna. Jej definicja jest podobna do definicji całki Riemanna. Definiując tę całkę, przyjmować będziemy takie oznaczenia jak przy definiowaniu całki Riemanna (zob. rozdział 5.3, str. 168).

Niech $f, g:\ [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi. Dla danego podziału
$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

przedziału $[a, b]$ i układu $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ punktów pośrednich, tzn. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dla $i = i, \ldots, n$, utwórzmy sumę całkową

$$\Sigma = \Sigma(f, g, \mathcal{P}, \Xi) = f(\xi_1)(g(x_1) - g(x_2)) + \ldots + f(\xi_n)(g(x_n) - g(x_{n-1})).$$

Thomas Joannes Stieltjes
Ur. 29 grudnia 1856 w Zwolle, Holandia
Zm. 31 grudnia 1894 w Tuluzie, Francja

Stieltjes zajmował się niemal wszystkimi dziedzinami analizy matematycznej, ułamkami łańcuchowymi i teorią liczb. Badając tzw. problem momentów, zdefiniował całkę, która obecnie jest nazywana całką Stieltjesa lub Riemanna–Stieltjesa. Jego prace są także uznawane jako poważny krok w stronę teorii przestrzeni Hilberta.

Definicja 5.70 (całki oznaczonej (Riemanna–Stieltjesa)). Mówimy, że funkcja f jest całkowalna (w sensie Riemanna–Stieltjesa) na przedziale $[a, b]$ względem funkcji g, gdy dla dowolnego normalnego ciągu $\{\mathcal{P}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ podziałów przedziału $[a, b]$, niezależnie od wyboru ciągu $\{\Xi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ układów punktów pośrednich, ciąg

$$\Sigma_\nu = \Sigma(f, g, \mathcal{P}_\nu, \Xi_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny, i to zawsze do tej samej granicy. Jeśli tak jest, to liczbę

$$\int_a^b f(x) dg(x) := \lim_{\nu \to \infty} \Sigma_\nu$$

nazywamy *całką oznaczoną Riemanna–Stieltjesa* funkcji f po przedziale $[a, b]$ względem funkcji g.

Całka Riemanna–Stieltjesa jest uogólnieniem całki Riemanna i redukuje się do niej, gdy $g(x) = x \quad$ dla $x \in [a, b]$.

W literaturze matematycznej można znaleźć wiele twierdzeń o istnieniu całki Riemanna–Stieltjesa (zob. np. [11], rozdz. I). Ograniczymy się do wykazania tylko jednego, najczęściej stosowanego przy praktycznych obliczeniach.

Twierdzenie 5.71. *Jeżeli funkcja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest taką funkcją różniczkowalną, że jej pochodna* g' *jest całkowalna w sensie Riemanna, to funkcja* f *jest całkowalna na przedziale* $[a,b]$ *względem funkcji* g *i*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Dowód. Niech $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$ i niech $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ będzie układem punktów pośrednich dla podziału $\mathcal{P}$. Z twierdzenia Lagrange'a (zob. twierdzenie 4.24, str. 102) wynika, że w każdym z przedziałów (x_{i-1}, x_i) istnieje taki punkt θ_i, że

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\theta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Zauważmy, że układ $\Theta := \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ jest też układem punktów pośrednich dla podziału $\mathcal{P}$.

Przy tych oznaczeniach mamy

$$\begin{aligned}\Sigma(f,g,\mathcal{P},\Xi) &= f(\xi_1)(g(x_2) - g(x_1)) + \ldots + f(\xi_n)(g(x_n) - g(x_{n-1})) = \\ &= f(\xi_1)g'(\theta_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)g'(\theta_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \varepsilon(f,g,\mathcal{P},\Xi) + \sigma(fg',\mathcal{P},\Theta),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varepsilon(f,g,\mathcal{P},\Xi) &= \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\theta_i))g'(\theta_i)(x_i - x_{i-1}), \\ \sigma(fg',\mathcal{P},\Theta) &= \sum_{i=1}^n f(\theta_i)g'(\theta_i)(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Punkty ξ_i, θ_i leżą w przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, więc

$$|\xi_i - \theta_i| \leqslant \delta = \delta(\mathcal{P}),$$

gdzie $\delta(\mathcal{P})$ jest średnicą podziału $\mathcal{P}$ (zob. (5.28), str. 168). Zatem

$$\left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\theta_i))g'(\theta_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \omega_f(\delta)M(b-a), \tag{5.68}$$

gdzie $M = \sup\{|g'(x)|\}$, natomiast

$$\omega_f(\delta) := \sup\{\left|f(x') - f(x'')\right| : \ x',\, x'' \in [a,b],\ \left|x' - x''\right| \leqslant \delta\}$$

jest tzw. *modułem ciągłości* funkcji f. Funkcja f jako ciągła jest jednostajnie ciągła (zob. twierdzenie 3.26, str. 68). Stąd wynika, że

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0$$

i korzystając z oszacowania (5.68), wnioskujemy, że

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-f(\theta_i))g'(\theta_i)(x_i-x_{i-1})=0. \tag{5.69}$$

Z kolei

$$\sum_{i=1}^{n}f(\theta_i)g'(\theta_i)(x_i-x_{i-1})$$

jest sumą Riemanna dla całki $\int_a^b f(x)g'(x)dx$, odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ i układowi punktów pośrednich $\Theta=\{\theta_1,\dots,\theta_n\}$.

Funkcja fg', jako iloczyn funkcji całkowalnych, jest funkcją całkowalną, więc

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma(fg',\mathcal{P},\Theta)=\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Stąd i z (5.69) wynika, że

$$\lim_{\delta\to 0}\Sigma(f,g,\mathcal{P},\Xi)=\lim_{\delta\to 0}\varepsilon(f,g,\mathcal{P},\Xi)+\lim_{\delta\to 0}\sigma(fg',\mathcal{P},\Theta)=\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Zatem funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ względem funkcji g i

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

□

ROZDZIAŁ 6

Topologia przestrzeni metrycznej

W tym rozdziale przypomnimy tylko te fakty dotyczące topologii przestrzeni metrycznych, które są niezbędne do prawidłowego zrozumienia dalszych części tej książki. Zakładamy tu, że czytelnik zna podstawowe fakty dotyczące zbiorów liczbowych, jakimi są: zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych.

6.1. Przestrzenie metryczne

W tej części przypomnimy niezbędne do prawidłowego zrozumienia dalszych części podstawowe fakty z zakresu topologii.

Definicja 6.1 (metryka, przestrzeń metryczna). Niech X będzie niepustym zbiorem. Funkcję $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0$ spełniającą warunki:
(1) $\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) \geqslant 0$ i $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – *dodatniość*,
(2) $\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ – *symetria*,
(3) $\forall\, x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ – *nierówność trójkąta*,
nazywamy *metryką* w zbiorze X natomiast parę $(X, \rho\,)$ *przestrzenią metryczną*.

Pojęcie metryki lub odległości[1] występowało już w szkole średniej. Podamy tu kilka przykładów przestrzeni metrycznych. Sprawdzenie, że podane w poniższych przykładach funkcje są metrykami pozostawiamy czytelnikowi.

[1] $\rho(x, y)$ nazywamy odległością punktu x od punktu y.

Przykład **6.2** (metryka naturalna w $\mathbb{R}$)**.** Funkcja

$$\rho : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto |x - y| \in \mathbb{R}_0 \tag{6.1}$$

jest metryką w $\mathbb{R}$. Tę metrykę nazywamy *metryką naturalną* lub *metryką euklidesową*.

Przykład **6.3** (metryka zerojedynkowa)**.** W dowolnym niepustym zbiorze X funkcja

$$\rho : \ X \times X \ni (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ 1, & \text{gdy } x \neq y \end{cases} \in \mathbb{R}_0 \tag{6.2}$$

jest metryką. Metrykę (6.2) nazywamy *metryką zerojedynkową*.

Ćwiczenie **6.4.** Sprawdzić, czy funkcja

$$\rho : \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ni (x, y) \to \left| \log \frac{x}{y} \right| \in \mathbb{R}_0$$

jest metryką w $\mathbb{R}_+$.

Wprost z definicji przestrzeni metrycznej wynika prawdziwość następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 6.5 (o zawężeniu metryki). *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną i A jest niepustym podzbiorem zbioru X, to (A, ρ_A), gdzie ρ_A oznacza zawężenie metryki ρ do zbioru $A \times A \subset X \times X$, jest również przestrzenią metryczną.*

Przypomnimy obecnie pojęcie kuli w przestrzeni metrycznej.

Definicja 6.6 (kuli, sfery i sąsiedztwa). Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $a \in X$ i $r > 0$.

(i) Zbiór

$$K(a, r) = K_X(a, r) := \{x \in X : \ \rho(a, x) < r\} \tag{6.3}$$

nazywamy *kulą otwartą* (lub krótko *kulą*) o środku a i promieniu r.

(ii) Zbiór

$$\overline{K}(a, r) = \overline{K}_X(a, r) := \{x \in X : \ \rho(a, x) \leqslant r\} \tag{6.4}$$

nazywamy *kulą domkniętą* o środku a i promieniu r.

(iii) Zbiór

$$K^*(a, r) = K^*_X(a, r) := \{x \in X : \ 0 < \rho(a, x) < r\} \tag{6.5}$$

nazywamy *sąsiedztwem* punktu a o promieniu r.

(iv) Zbiór
$$S(a,r) = S_X(a,r) := \{x \in X : \ \rho(a,x) = r\} \tag{6.6}$$
nazywamy *sferą* o środku a i promieniu r.

Przykład **6.7.** W przestrzeni $\mathbb{R}$, z metryką naturalną, kula o środku a i promieniu r jest przedziałem $K(a,r) = (a-r, a+r)$, $\overline{K}(a,r) = [a-r, a+r]$, $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$, $K^*(a,r) = (a-r, a) \cup (a, a+r)$.

Przykład **6.8.** W przestrzeni X, z metryką zerojedynkową, kula o środku w dowolnym punkcie przestrzeni i promieniu $r \leqslant 1$ jest zbiorem jednoelementowym złożonym tylko z tego punktu. Natomiast kulą o promieniu większym niż 1 jest cała przestrzeń X. Sfera o dowolnym środku i promieniu $r \neq 1$ jest zbiorem pustym, natomiast
$$S(a,1) = X \setminus \{a\} = K^*(a,r) := K(a,r) \setminus \{a\}, \quad \text{gdy } r > 1.$$
Gdy $r \leqslant 1$, to $K^*(a,r) = \emptyset$.

Niech $\rho_1,\ \rho_2$ będą metrykami w X.

Definicja 6.9. Mówimy, że metryki $\rho_1,\ \rho_2$ są *równoważne*, gdy istnieją takie stałe dodatnie $m,\ M$, że
$$m\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y) \leqslant M\rho_1(x,y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in X. \tag{6.7}$$
Zauważmy, że jeśli metryki $\rho_1,\ \rho_2$ są równoważne, to w dowolnej kuli wyznaczonej przez metrykę ρ_1 zawarta jest kula, o tym samym środku[2], wyznaczona przez metrykę ρ_2 i na odwrót.

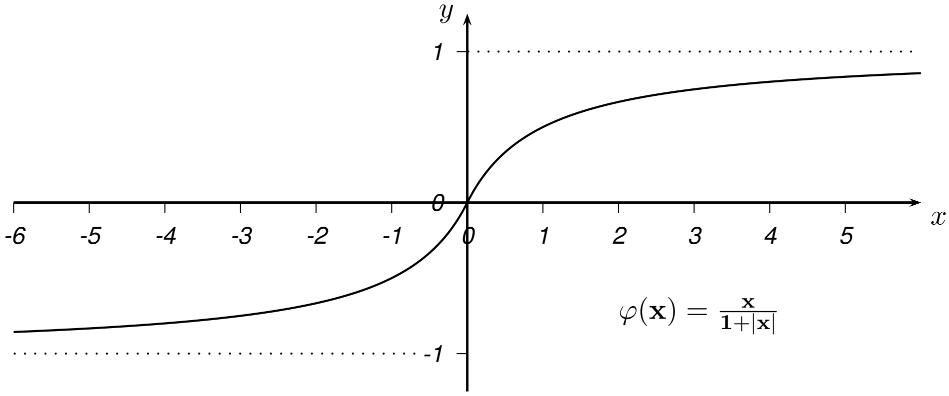
Przestrzeń $\overline{\mathbb{R}}$

Pisząc $\mathbb{R}$, mamy zazwyczaj na myśli zbiór liczb rzeczywistych z metryką naturalną 6.1, str. 207. Przez $\overline{\mathbb{R}}$ oznaczać będziemy tzw. *dwupunktowe domknięcie* (*dwupunktowe uzwarcenie*) zbioru $\mathbb{R}$. Takie domknięcie zawiera zbiór $\mathbb{R}$ i dwa nienależące do $\mathbb{R}$ punkty, które oznacza się odpowiednio przez $-\infty$ i $+\infty$. Tak więc $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Do zdefiniowania porządku i metryki w $\overline{\mathbb{R}}$ rozważmy funkcję $\varphi :\ \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ określoną następująco:
$$\varphi(x) := \begin{cases} -1 \ , & \text{gdy } x = -\infty, \\ \dfrac{x}{1+|x|} \ , & \text{gdy } x \in \mathbb{R}, \\ 1 \ , & \text{gdy } x = +\infty. \end{cases} \tag{6.8}$$

[2]Na ogół o innym promieniu.

Wykres funkcji φ przedstawia rys. 6.1.



Rys. 6.1. Funkcja definiująca metrykę w $\overline{\mathbb{R}}$

Funkcja φ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór $\overline{\mathbb{R}}$ na przedział $[-1, 1]$. Za jej pomocą definiujemy porządek w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$, kładąc

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b) \quad \text{dla } a, b \in \overline{\mathbb{R}},$$

co w szczególności daje

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja

$$\psi : [-1, 1] \ni y \to \psi(y) := \begin{cases} -\infty, & \text{gdy } y = -1, \\ \dfrac{y}{1 - |y|}, & \text{gdy } y \in (-1, 1), \\ +\infty, & \text{gdy } y = 1, \end{cases} \tag{6.9}$$

jest odwrotna do funkcji φ. Możemy to wykazać np. wyliczając, że

1. $\varphi(\psi(y)) = y$ dla $y \in [-1, 1]$ oraz
2. $\psi(\varphi(x)) = x$ dla $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Stąd wynika, że za pomocą funkcji φ możemy zdefiniować metrykę w $\overline{\mathbb{R}}$.

Jako ćwiczenie proponujemy wykazanie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 6.10. *Funkcja*

$$\rho: \ \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \ni (x, y) \mapsto \rho(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)| \in \mathbb{R}_0 \tag{6.10}$$

jest metryką w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$.

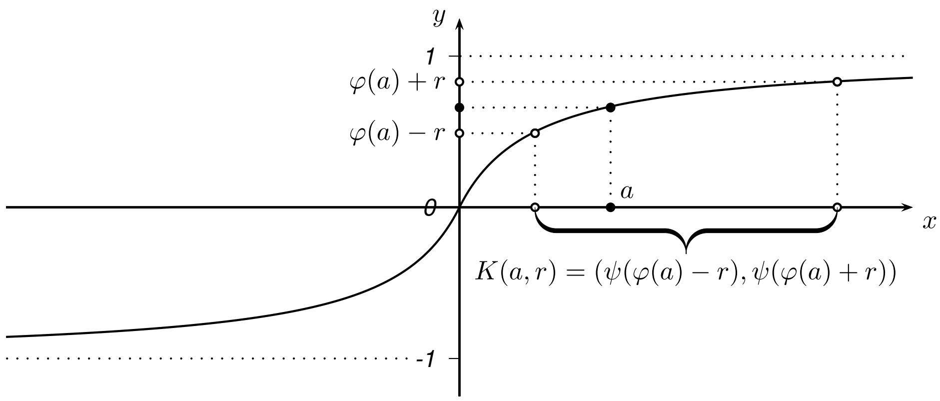
Przykład **6.11.** Podobnie jak w $\mathbb{R}$ kule w $\overline{\mathbb{R}}$ o środku a są przedziałami, ale na ogół a nie jest ich środkiem symetrii. W zależności od środka $a \in \overline{\mathbb{R}}$ i promienia $r > 0$ kule są postaci

$$K(a,r) = \begin{cases} [-\infty, \psi(\varphi(a)+r)) \ , \text{ gdy } \varphi(a) - r < -1 < \varphi(a) + r \leqslant 1, \\ (\psi(\varphi(a)-r), +\infty] \ , \text{ gdy } \ -1 \leqslant \varphi(a) - r < 1 < \varphi(a) + r, \\ [-\infty, +\infty] \ , \text{ gdy } \varphi(a) - r < -1, \ 1 < \varphi(a) + r, \\ (\psi(\varphi(a)-r), \psi(\varphi(a)+r)) \ , \text{ gdy } \ -1 \leqslant \varphi(a) - r < \varphi(a) + r \leqslant 1. \end{cases} \tag{6.11}$$

1. Kule w $\overline{\mathbb{R}}$ o środku $a \in \mathbb{R}$ i „małym" promieniu r, tzn. promieniu r spełniającym układ nierówności:

   $$-1 \leqslant \varphi(a) - r < \varphi(a) + r \leqslant 1,$$

   przedstawia rysunek 6.2.



Rys. 6.2. Kula w $\overline{\mathbb{R}}$ o środku $a \in \mathbb{R}$ i „małym" promieniu r.

2. Kulami w $\overline{\mathbb{R}}$ o środku $a = +\infty$ i promieniach $r \in (0, 2]$ są przedziały postaci $(M, +\infty]$. Istotnie, $K(+\infty, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \ \rho(+\infty, x) < r\}$. W naszym przypadku oznacza to, że

   $$K(+\infty, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \ |\varphi(+\infty) - \varphi(x)| < r\}.$$

   Ponieważ φ jest rosnąca i ψ jest funkcją do niej odwrotną, więc

   $$K(+\infty, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \ |1 - \varphi(x)| < r\} = (\psi(1 - r), +\infty]\}.$$

Wynika stąd, że kulami w $\overline{\mathbb{R}}$ o środku $a = +\infty$ i promieniach $r \in (0, 2]$ są przedziały postaci $(M, +\infty]$, gdzie

$$M = \psi(1 - r) = \begin{cases} \dfrac{1 - r}{r}, & \text{gdy } r \in (0, 1], \\ \dfrac{1 - r}{2 - r}, & \text{gdy } r \in (1, 2), \\ -\infty, & \text{gdy } r = 2. \end{cases} \tag{6.12}$$

Gdy $r > 2$, to $K(-\infty, r) = [-\infty, +\infty]$.
Analogiczne rozważania prowadzą do wniosku, że

$$K(-\infty, r) = \begin{cases} [-\infty, \psi(-1 + r)), & \text{gdy } r \in (0, 2], \\ [-\infty, +\infty], & \text{gdy } r > 2. \end{cases} \tag{6.13}$$

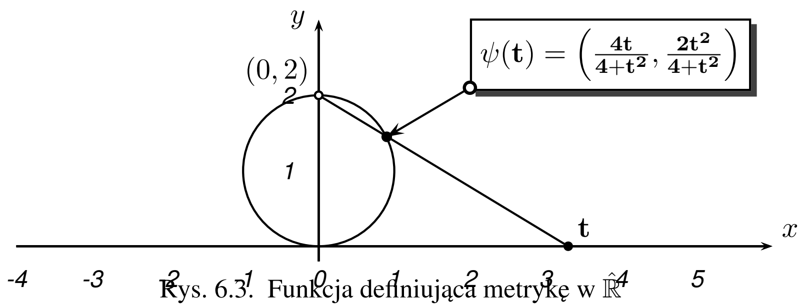
Przestrzeń $\hat{\mathbb{R}}$

Przez $\hat{\mathbb{R}}$ oznaczać będziemy tzw. *domknięciem jednopunktowym* (*uzwarcenie jednopunktowe*) zbioru $\mathbb{R}$. Takie domknięcie zawiera zbiór $\mathbb{R}$ i jeden nienależący do $\mathbb{R}$ punkt, który oznacza się przez ∞. Tak więc $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Do zdefiniowania metryki w $\hat{\mathbb{R}}$ rozważmy funkcję $\psi : \hat{\mathbb{R}} \to S((0, 1), 1) \subset \mathbb{R}^2$ określoną w wzorem

$$\psi : \hat{\mathbb{R}} \ni t \mapsto \psi(t) := \begin{cases} (0, 2), & \text{gdy } t = \infty, \\ \left(\dfrac{4t}{4 + t^2}, \dfrac{2t^2}{4 + t^2} \right), & \text{gdy } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.14}$$

Interpretację geometryczną funkcji ψ przedstawia rysunek 6.3.



Rys. 6.3. Funkcja definiująca metrykę w $\hat{\mathbb{R}}$

Za pomocą funkcji ψ definiujemy w $\hat{\mathbb{R}}$ metrykę ρ, kładąc

$$\rho(t_1, t_2) := \text{ długość łuku okręgu}^3 \text{o końcach } \psi(t_1),\ \psi(t_2).$$

[3] Tego z łuków, który jest „krótszy”.

W naszych rozważaniach nie będziemy używać tej metryki. Chcemy jednak zwrócić uwagę na fakt, że błędne jest identyfikowanie $+\infty$ z ∞.

6.2. Produkt przestrzeni metrycznych

Niech $(X_1, \rho_1),\ (X_2, \rho_2), \ldots, (X_n, \rho_n)$ będą przestrzeniami metrycznymi. W iloczynie kartezjańskim (produkcie)

$$X := X_1 \times \ldots \times X_n$$

można na wiele sposobów zdefiniować metrykę. Należy jednak pamiętać, aby każda kula o środku $a = (a_1, \ldots, a_n)$ zawierała iloczyn kartezjański stosownie dobranych kul w X_j o środkach a_j, $j = 1, \ldots, n$ i na odwrót. Warunek ten spełniają następujące, najczęściej używane, metryki:

$$\rho_\circ : \ X \times X \ni (x, y) \to \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \ldots + \rho_n^2(x_n, y_n)} \in \mathbb{R}_0, \tag{6.15}$$

$$\rho_\diamond : \ X \times X \ni (x, y) \to \rho_1(x_1, y_1) + \ldots + \rho_n(x_n, y_n) \in \mathbb{R}_0, \tag{6.16}$$

$$\rho_\Box : \ X \times X \ni (x, y) \to \max\{\rho_i(x_i, y_i) : \ i = 1, \ldots, n\} \in \mathbb{R}_0, \tag{6.17}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Do zbadania zależności między metrykami (równoważności) $\rho_\circ, \rho_\diamond, \rho_\Box$ korzysta się z tego, że dla liczb nieujemnych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzą nierówności:

$$\max\{a_1, \ldots, a_n\} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant \sqrt{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \leqslant n \max\{a_1, \ldots, a_n\}. \tag{6.18}$$

Do wykazania nierówności „środkowej” zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej λ zachodzi nierówność $\sum_{j=1}^{n}(a_j + \lambda)^2 \geqslant 0$, co po przekształceniu daje

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j + n\lambda^2 \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

a to jest możliwe tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu (zmiennej λ) jest niedodatni. Oznacza to, że

$$(\sum_{j=1}^{n} a_j)^2 \leqslant n \sum_{j=1}^{n} a_j^2,$$

co kończy dowód. Pozostałe nierówności (6.18) są proste do wykazania.

Z nierówności (6.18) wynikają następujące nierówności dla metryk $\rho_\circ, \rho_\diamond, \rho_\Box$

$$\rho_\Box(x,y) \leqslant \rho_\diamond(x,y) \leqslant \sqrt{n}\rho_\circ(x,y) \leqslant n\rho_\Box(x,y), \tag{6.19}$$

co oznacza, że metryki $\rho_\circ, \rho_\diamond, \rho_\Box$ są równoważne.

Definicja 6.12. Przestrzeń $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ z metryką $\rho_\circ$ (lub jakąkolwiek jej równoważną) nazywana jest *produktem lub iloczynem kartezjańskim przestrzeni metrycznych* $X_1, \ldots, X_n$, zaś metrykę $\rho_\circ$ (lub metrykę jej równoważną) *metryką produktową*.

Ćwiczenie **6.13.** Oznaczmy przez $K_\circ(a,r), K_\diamond(a,r), K_\Box(a,r)$ kule, odpowiednio w przestrzeniach $(X,\rho_\circ)$, $(X,\rho_\diamond)$, $(X,\rho_\Box)$. Wykorzystując nierówności (6.19), udowodnić, że

$$K_\Box(a,\frac{r}{n}) \subset K_\circ(a,\frac{r}{\sqrt{n}}) \subset K_\diamond(a,r) \subset K_\Box(a,r). \tag{6.20}$$

Przykład **6.14** (przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$**).** Przestrzeń

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1,\ldots,x_n) :\ x_j \in \mathbb{R} \quad \text{dla } j = 1,\ldots,n\} \tag{6.21}$$

jest n-krotnym iloczynem kartezjańskim przestrzeni $\mathbb{R}$. Dla $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiujemy

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{6.22}$$
$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{6.23}$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ (z tak określonymi działaniami) jest n-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Funkcje $\rho_\circ$, $\rho_\diamond$, $\rho_\Box :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0$ dane wzorami

$$\rho_\circ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}, \tag{6.24}$$
$$\rho_\diamond((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|, \tag{6.25}$$
$$\rho_\Box((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{|x_i-y_i| :\ i=1,\ldots,n\} \tag{6.26}$$

są metrykami w $\mathbb{R}^n$. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z metryką (6.24) nazywana jest *przestrzenią euklidesową* (n-wymiarową).

Przykład **6.15.** W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z metryką $\rho_\circ$, dla $n = 2$, kula o środku w punkcie a i promieniu r jest kołem, a dla $n = 3$ jest kulą (rozumianą w sensie bryły geometrycznej).

6.3. Topologia przestrzeni metrycznej

Za pomocą pojęcia kuli wyróżnimy dwie ważne klasy zbiorów w przestrzeni metrycznej.

Definicja 6.16 (zbiorów: otwartego, domkniętego i domknięcia). Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i A dowolnym podzbiorem zbioru X.

1. Zbiór A nazywamy *zbiorem otwartym*, gdy
$$\forall a \in A \ \exists \ r > 0 : \ K(a, r) \subset A\,.$$
2. Zbiór A nazywamy *zbiorem domkniętym*, gdy jego dopełnienie jest zbiorem otwartym.
3. Zbiór $\overline{A}$ nazywamy *domknięciem* zbioru $A \subset X$, gdy jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem domkniętym zawierającym A.

Uwaga **6.17.** W dowolnej przestrzeni metrycznej zbiór pusty i cała przestrzeń są równocześnie zbiorami otwartymi i domkniętymi.

Uwaga **6.18.** Kule są zbiorami otwartymi, zaś kule domknięte zbiorami domkniętymi.

Przykład **6.19.** W przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką naturalną każdy przedział otwarty jest zbiorem otwartym, a każdy przedział domknięty jest zbiorem domkniętym.

Ćwiczenie **6.20.** Udowodnić, że przedział $[a, b]$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}$ zawierającym zbiór $\mathbb{Q} \cap (a, b)$, co oznacza, że $\overline{\mathbb{Q} \cap (a, b)} = [a, b]$.

Ćwiczenie **6.21.** Wykazać, że jeżeli $X \supset A \neq \emptyset$, to $x \in \overline{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje taki punkt $y \in A$, że $\rho(x, y) < \delta$.

Przykład **6.22.** Przedział $(2, 6]$ nie jest ani zbiorem otwartym, ani domkniętym. Istotnie, nie jest to zbiór otwarty, bo $6 \in A$ i dla dowolnego $r > 0$ przedział[4] $(6 - r, 6 + r)$ zawiera zarówno punkty należące do A, jak też i punkty nienależące do A. Wynika stąd, że A nie jest zbiorem otwartym. Liczba $2 \in \mathbb{R} \setminus A$ i żaden przedział $(2 - r, 2 + r)$ nie jest podzbiorem $\mathbb{R} \setminus A$, co oznacza, że $\mathbb{R} \setminus A$ nie jest zbiorem otwartym. Zatem A nie jest zbiorem domkniętym.

Przykład **6.23.** W przestrzeni X z metryką zerojedynkową każdy podzbiór jest domknięty i otwarty. Takie zbiory nazywają się otwarto-domkniętymi lub domknięto-otwartymi.

Przykład **6.24.** W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zbiór $A = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1],\ y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$ nie jest ani otwarty, ani domknięty.

[4] W metryce naturalnej w $\mathbb{R}$ kula $K(6, r)$ jest przedziałem $(6 - r, 6 + r)$.

Ćwiczenie **6.25.** Udowodnić, że kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zawierającym zbiór A z przykładu 6.24.

Twierdzenie 6.26. *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, to rodzina zbiorów otwartych (domkniętych) przestrzeni X spełnia następujące warunki:*

(i) *Zbiór pusty i cała przestrzeń są zbiorami otwartymi (domkniętymi)*[5].

(ii) *Iloczyn skończonej (dowolnej) ilości zbiorów otwartych (domkniętych) jest zbiorem otwartym (domkniętym).*

(iii) *Suma dowolnej (skończonej) ilości zbiorów otwartych (domkniętych) jest zbiorem otwartym (domkniętym).*

Dowód. Pozostawiamy czytelnikowi do samodzielnego wykonania. □

Odnotujmy, że rodzinę τ podzbiorów zbioru X spełniających warunki twierdzenia 6.26, nazywamy *topologią*, a parę (X, τ) *przestrzenią topologiczną*. Gdy rodzina zbiorów otwartych jest taka, jak w definicji 6.16, str. 214, to nazywamy ją topologią wyznaczoną przez metrykę ρ. Inkluzje (6.20) oznaczają, że metryki $\rho_\circ, \rho_\diamond, \rho_\Box$ wyznaczają tę samą topologię w przestrzeni $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Podamy teraz klasyfikację punktów zależną od tego, jak są położone względem zbioru D.

Definicja 6.27. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i $D \subset X$ niepustym podzbiorem X.

1. Punkt $a \in D$ nazywamy punktem *wewnętrznym* zbioru D, gdy istnieje takie $r > 0$, że $K(a, r) \subset D$. Zbiór punktów wewnętrznych nazywamy *wnętrzem* zbioru D. Wnętrze zbioru D oznaczać będziemy przez $\mathrm{Int}(D)$.
2. Punkt $b \in X \setminus D$ nazywamy punktem *zewnętrznym* zbioru D, gdy istnieje kula o środku w punkcie a zawierająca się w dopełnieniu zbioru D. Zbiór punktów zewnętrznych nazywamy *zewnętrzem* zbioru D.
3. Punkt $a \in X$ nazywamy punktem *brzegowym* zbioru D, gdy w każdej kuli o środku w punkcie a znajdują się punkty należące do zbioru D i punkty należące do dopełnienia tego zbioru. Zbiór punktów brzegowych nazywamy *brzegiem* zbioru D. Brzeg zbioru D oznaczać będziemy przez ∂D.
4. Punkt $a \in X$ nazywamy punktem *skupienia* zbioru D, gdy dla dowolnego $r > 0$ zbiór $K(a, r) \cap D$ jest nieskończony. Zbiór punktów skupienia zbioru D oznaczać będziemy przez ${}^{sk}D$.

[5] Pomijając wyrazy w nawiasach, otrzymamy twierdzenie o rodzinie zbiorów otwartych. Bez wyrazów bezpośrednio poprzedzających wyrazy w nawiasach otrzymamy twierdzenie o rodzinie zbiorów domkniętych.

5. Punkt $a \in D$ nazywamy punktem *izolowanym* zbioru D, gdy istnieje takie $r > 0$, że $D \cap K(a, r) = \{a\}$.

Ćwiczenie **6.28.** Udowodnić, że w $\overline{\mathbb{R}}$

(a) $+\infty$ jest jedynym punktem skupienia zbioru $\mathbb{N}$,

(b) $-\infty$, $+\infty$ są jedynymi punktami skupienia zbioru $\mathbb{Z}$.

Ćwiczenie **6.29.** Udowodnić, że topologia (rodzina zbiorów otwartych) w $\mathbb{R}$ wyznaczona przez metrykę naturalną jest taka sama, jak topologia wyznaczona przez metrykę (6.10) zawężoną do $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie **6.30.** Znaleźć punkty wewnętrzne, zewnętrzne, brzegowe, skupienia i izolowane zbiorów

$$D = [a, b) \cup \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{R}}.$$

Definicja 6.31 (otoczenia i sąsiedztwa). Mówimy, że otwarty podzbiór $U \neq \emptyset$ przestrzeni metrycznej X jest

(i) *otoczeniem* punktu $a \in X$, gdy $a \in U$,

(ii) *otoczeniem o promieniu* r, gdy $U = K(a, r)$,

(iii) *sąsiedztwem*, gdy $a \notin U$ i $U \cup \{a\}$ jest otoczeniem punktu a,

(iv) *sąsiedztwem o promieniu* r, gdy $U = K(a, r) \setminus \{a\}$.

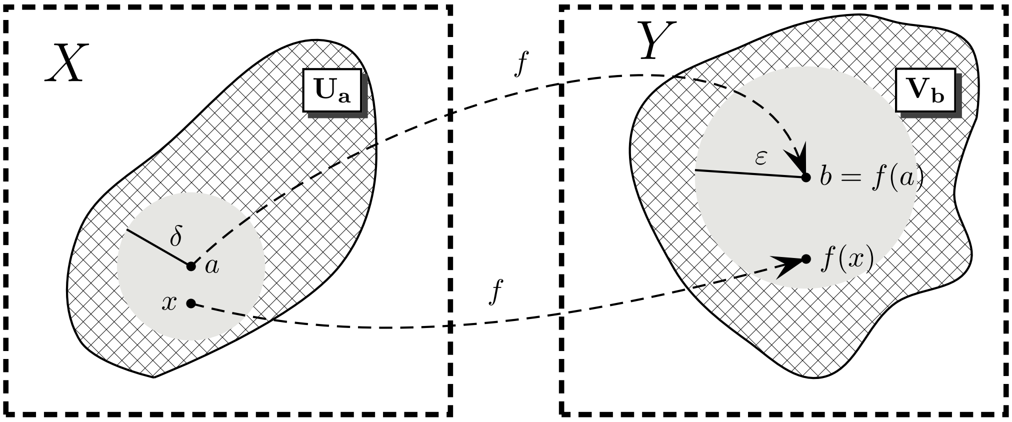
6.4. Ciągłość i granica

Niech (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją (odwzorowaniem). Gdy $a \in X$, to przez $\mathcal{N}_{a,X}$ (lub krótko przez $\mathcal{N}_a$) oznaczać będziemy zbiór złożony ze wszystkich otoczeń punktu a.

Definicja 6.32 (ciągłości). Mówimy, że f jest *ciągła w punkcie* $a \in X$, gdy dla dowolnego otoczenia $V_b \in \mathcal{N}_{b,Y}$ punktu $b = f(a)$ istnieje takie otoczenie $U_a \in \mathcal{N}_{a,X}$ punktu a, że $f(U_a) \subset V_b$, co w „symbolicznym zapisie” ma postać:

$$\forall\, V_b \in \mathcal{N}_{b,Y}\ \exists\, U_a \in \mathcal{N}_{a,X}\ \forall\, x \in U_a \ \ f(x) \in V_b.$$

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła* (*ciągła w zbiorze* X), gdy jest ciągła w każdym punkcie zbioru X.



Rys. 6.4. Ilustracja definicji ciągłości w punkcie.

Twierdzenie 6.33. *Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest ciągła w punkcie a.*

(ii) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że $f(K_X(a, \delta)) \subset K_Y(f(a), \varepsilon)$. W symbolicznym zapisie warunek ten ma postać*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \ f(K_X(a, \delta)) \subset K_Y(f(a), \varepsilon).$$

(iii) *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in X$, jeśli $\rho_X(a, x) < \delta$, to $\rho_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$. W symbolicznym zapisie warunek ten ma postać*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in X\ (\rho_X(a, x) < \delta \Longrightarrow \rho_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

Dowód. $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Skoro dla dowolnego otoczenia V_b punktu $b = f(a)$ istnieje takie otoczenie U_a punktu a, że $f(U_a) \subset V_b$, to w szczególności dla $U_a = K_Y(b, \varepsilon)$ też takie otoczenie V_a istnieje. Ale a jest punktem wewnętrznym otoczenia V_a, więc istnieje taka $\delta > 0$, że $K_X(a, \delta) \subset V_a$. Stąd mamy

$$f(K_X(a, \delta)) \subset f(U_a) \subset V_b = K_Y(b, \varepsilon).$$

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Punkt (iii) otrzymujemy z punktu (ii) po skorzystaniu z definicji kuli i z definicji inkluzji.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Ta implikacja jest podobnie oczywista jak implikacja poprzednia. Zatem warunki (ii), (iii) są równoważne i, aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że z (ii) wynika (i).

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(i)}}$ Niech V_b będzie otoczeniem punktu b. Wtedy istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $K_Y(b, \varepsilon) \subset V_b$. Zgodnie z (ii) istnieje taka $\delta > 0$, że $f(K_X(a, \delta) \subset K_Y(b, \varepsilon)$. Zatem, przyjmując $U_a = K_X(a, \delta)$, otrzymamy

$$f(U_a) = f(K_X(a, \delta)) \subset K_Y(b, \varepsilon) \subset V_b,$$

co kończy dowód tej implikacji i całego twierdzenia. $\square$

Warunki równoważne, wymienione w twierdzeniu 6.33, str. 217, ilustruje rysunek 6.4, str. 217. Przy badaniu ciągłości funkcji jednej zmiennej najczęściej używany jest, pochodzący od Cauchy'ego, warunek (iii).

Augustin Louis Cauchy
Ur. 21 sierpnia 1789 w Paryżu
Zm. 23 maja 1857 w Sceaux, Francja

Cauchy zapoczątkował badania w zakresie analizy rzeczywistej i zespolonej oraz grup permutacji. Zajmował się też badaniem zbieżności szeregów, równaniami różniczkowymi, wyznacznikami, prawdopodobieństwem i fizyką matematyczną.

Każdy z warunków równoważnych twierdzenia 6.33, str. 217, może być odczytany jako definicja ciągłości funkcji f w punkcie a. Warunek (iii) nosi nazwę definicji Cauchy'ego. Mamy więc następującą definicję Cauchy'ego:

Definicja 6.34 (Cauchy'ego ciągłości funkcji f w punkcje a). Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła w punkcie $a \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X \text{ jeśli } \rho_X(a, x) < \delta, \text{ to } \rho_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Zauważmy, że jeżeli punkt a jest punktem izolowanym dziedziny, to zgodnie z definicją 6.34, funkcja f jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie 6.35. *Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$ następujące trzy warunki są równoważne:*

(i) *f jest ciągła.*
(ii) *Dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty w X.*
(iii) *Dla dowolnego zbioru domkniętego $K \subset Y$ zbiór $f^{-1}(K)$ jest domknięty w X.*

Dowód. $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Jeśli V jest otwarty w Y, to dla dowolnego $a \in f^{-1}(V)$ zbiór V jest otoczeniem punktu $f(a)$. Z założonej ciągłości f w każdym punkcie, w szczególności w punkcie a, wnioskujemy, że istnieje taka $\delta > 0$, że $f(K(a,\delta)) \subset V$. Stąd $K(a,\delta) \subset f^{-1}(V)$, co oznacza, że $f^{-1}(V)$ jest zbiorem otwartym.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Ta implikacja jest prostą konsekwencją definicji ciągłości f w danym punkcie $a \in X$.

$\boxed{\text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}}$ Niech K będzie zbiorem domkniętym w Y. Wtedy $V := Y \setminus K$ jest otwarty i na odwrót. Zbiory K i V są rozłączne i ich suma jest całą przestrzenią Y. Stąd wynika, że

$$X \setminus f^{-1}(K) = f^{-1}(V) \quad \text{i} \quad X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(K).$$

Teraz łatwo wnioskujemy, że warunki (ii), (iii) są równoważne, co kończy dowód równoważności i całego twierdzenia. □

Przykład **6.36.** Funkcja stała, tzn. funkcja

$$f: \; X \ni x \mapsto b \in Y, \quad \text{gdzie } b \in Y \text{ jest ustalone},$$

jest funkcją ciągłą.

Przykład **6.37.** Funkcja tożsamościowa, tzn. funkcja

$$\mathrm{Id}_X: \; X \ni x \mapsto x \in X,$$

jest ciągła.

Dla funkcji $f: \; X \to Y$ definiujemy jej *zawężenie* $f|_A$ (nazywane też *zacieśnieniem* lub *restrykcją*) do podzbioru $A \subset X$, kładąc:

$$(f|_A)(x) = f(x) \quad \text{dla } x \in A.$$

Funkcję $\tilde{f}: \; \tilde{D} \to Y$ nazywamy *rozszerzeniem* funkcji $f: \; X \supset D \to Y$, gdy $D \subset \tilde{D}$ oraz $f = \tilde{f}|_D$.

Twierdzenie 6.38 (o ciągłości zawężenia). *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi i niech A będzie podzbiorem X. Jeśli $f: \; X \to Y$ jest funkcją ciągłą (ciągłą w punkcie $a \in A$), to jej zawężenie do A, tzn. funkcja*

$$f|_A: \; A \ni x \to f(x) \in Y,$$

jest funkcją ciągłą[6] *(ciągłą w punkcie a) .*

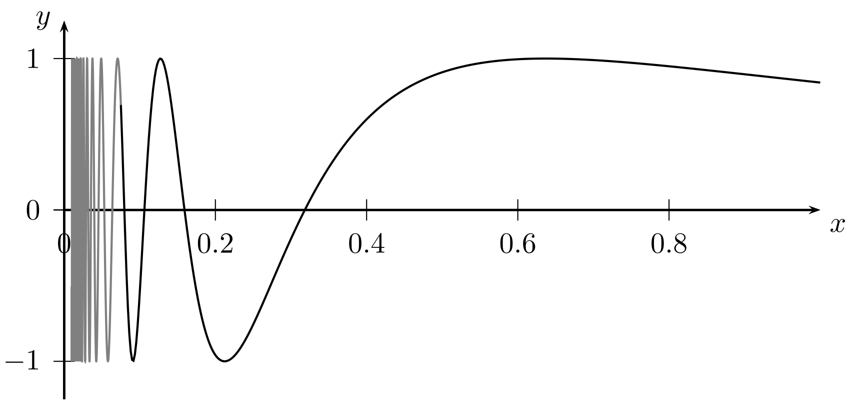
Dowód. Należy wykazać ciągłość $f|_A$ w dowolnym punkcie $a \in A$. Ustalmy więc $a \in A$ i $\varepsilon > 0$. Z ciągłości f w punkcie a wynika, że istnieje taka $\delta > 0$, że, jeśli $x \in X$ jest takie, że $\rho_X(a, x) < \delta$, to $\rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Wynika stąd, że jeśli $x \in A$ jest takie, że $\rho_A(a, x) < \delta$, to $\rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$, gdyż $\rho_A(a, x) = \rho_X(a, x)$, co kończy dowód. $\square$

Ćwiczenie **6.39.** Zbadać, czy dla funkcji

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} = D \ni x \to \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} \in \mathbb{R}$$

istnieje taka funkcja ciągła $\tilde{f}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $\tilde{f}|_D = f$.

Mamy nadzieję, że czytelnik wykazał, że funkcję z ćwiczenia 6.39, można rozszerzyć na całe $\mathbb{R}$ do funkcji ciągłej oraz że tą rozszerzoną funkcją jest funkcja $\tilde{f}: \mathbb{R} \ni x \to x \in \mathbb{R}$.



Rys. 6.5. Wykres funkcji $\sin \frac{1}{x}$

Pojawia się naturalne pytanie: Czy każdą funkcję ciągłą $f: D \to \mathbb{R}$ można rozszerzyć do funkcji ciągłej na z góry zadanym zbiorze $\tilde{D} \supsetneq D$? Odpowiedź na tak postawione pytanie jest negatywna. Świadczy o tym następujący przykład:

---

[6] A jest tu przestrzenią metryczną z metryką indukowaną z X.

Przykład **6.40.** Funkcja

$$f\,:\,(0,+\infty)\ni x\to\sin\frac{1}{x}\in\mathbb{R}\,,$$

której wykres przedstawia rysunek 6.5, str. 220, nie jest zawężeniem do przedziału $(0,+\infty)$ żadnej funkcji ciągłej $\tilde{f}\,:\,[0,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$. Dla dowodu zauważmy, że
1. kulą w $[0,+\infty)$ o środku 0 i promieniu $\delta>0$ jest przedział $[0,\delta)$,
2. funkcja f w przedziale $(0,\delta)$ przyjmuje każdą wartość $y\in[-1,1]$, niezależnie od wyboru liczby $\delta>0$.

Z powyższych wynika, że jakąkolwiek przyjmiemy wartość $b=\tilde{f}(0)$, to w dowolnym otoczeniu punktu 0 znajdziemy taki punkt x, że $|f(x)-b|\geqslant\frac{1}{4}$. Zatem (zob. definicja 6.34, str. 218) f nie da się przedłużyć do funkcji ciągłej w punkcie 0.

Ciągłość zestawienia funkcji

Niech (X,ρ), (Y_1,ρ_1), $(Y_2,\rho_2),\ldots,(Y_m,\rho_m)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wtedy funkcja

$$f=(f_1,\ldots,f_m):\ X\ni x\mapsto f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))\in Y:=Y_1\times\ldots\times Y_m$$

jest zestawieniem m funkcji $f_j:\ X\to Y_j$, $j=1,\ldots,m$.

Twierdzenie 6.41. *Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0\in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji f_j, $j=1,\ldots,m$, jest ciągła w x_0.*

Dowód. Do wykazania warunku koniecznego ustalmy $\varepsilon>0$. Wobec ciągłości funkcji f istnieje takie $\delta>0$, że jeżeli $\rho(x,x_0)<\delta$, to $\rho_\diamond(f(x),f(x_0))<\varepsilon$, gdzie $\rho_\diamond$ jest metryką produktową (6.16), str. 212. Stąd wynika, że $\rho_j(f(x),f(x_0))<\varepsilon$, bo

$$\rho_j(f(x),f(x_0))\leqslant\rho_\diamond(f(x),f(x_0))\quad\text{dla } j=1,\ldots,m,$$

co kończy dowód warunku koniecznego.

Załóżmy teraz, że każda z funkcji f_j, $j=1,\ldots,m$, jest ciągła w punkcie x_0 i do $\varepsilon>0$ dobierzmy tak $\delta>0$, aby

$$\rho_j(f_j(x),f_j(x_0))<\frac{\varepsilon}{m},\quad\text{gdy } \rho(x,x_0)<\delta.$$

Stąd, wobec nierówności

$$\rho_\diamond(f(x),f(x_0))=\sum_{j=1}^{m}\rho_j(f_j(x),f_j(x_0))<\varepsilon,\quad\text{gdy } \rho(x,x_0)<\delta,$$

otrzymujemy ciągłość f w punkcie x_0. □

Wygodną w dowodzie twierdzenia 6.41, str. 221, okazała się metryka $\rho_\diamond$. Korzystamy tu z prostego do wykazania faktu, że zamiana jednej metryki na inną, jej równoważną, nie ma wpływu na ciągłość funkcji.

Wniosek 6.42. *Funkcja* $f = (f_1, \ldots, f_m) : \ X \to Y = Y_1 \times \ldots \times Y_m$ *jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji* f_j*,* $j = 1, \ldots, m$*, jest ciągła.*

Granica funkcji

Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $a \in X$ i niech $\mathcal{D} \subset X$.

Definicja 6.43 (granicy funkcji). Mówimy, że punkt $g \in Y$ jest *granicą funkcji* $f : \ \mathcal{D} \to Y$ w punkcie a (przy x zmierzającym do a), co zapisujemy

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \text{lub} \quad f(x) \to g, \ \text{gdy } x \to a,$$

gdy spełnia dwa warunki:
(a) a jest punktem skupienia zbioru $\mathcal{D}$ i
(b) funkcja

$$F : \ \mathcal{D} \cup \{a\} \ni x \mapsto F(x) := \begin{cases} f(x), \text{ gdy } x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}, \\ g, \text{ gdy } x = a, \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie a (jako funkcja z $\mathcal{D} \cup \{a\}$ do Y).

Wykorzystując definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji f w punkcie a, podamy definicję Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie a.

Definicja 6.44 (Cauchy'ego granicy funkcji). Mówimy, że $g \in Y$ jest *granicą funkcji* $f : \ X \supset \mathcal{D} \to Y$ w punkcie $a \in^{sk} \mathcal{D}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to a} f(x) = g,$$

gdy

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : \ \forall \, x \in \mathcal{D} \ \ (0 < \rho_X(a, x) < \delta) \Rightarrow (\rho_Y(g, f(x)) < \varepsilon).$$

Pojawia się naturalne pytanie: Czy granica funkcji (o ile istnieje) jest wyznaczona jednoznacznie? Zanim odpowiemy na to pytanie, zauważmy, że nie definiujemy granicy funkcji w punktach, które nie są punktami skupienia jej dziedziny. Sama funkcja może, ale nie musi, być określona w punkcie a. Gdy funkcja jest określona w punkcie a, jest w tym punkcie ciągła i a jest punktem skupienia jej dziedziny, to $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Ten fakt jest często wykorzystywany przy obliczaniu granic funkcji.

Stwierdzenie 6.45. *Jeśli funkcja f ma granicę w punkcie a, to ta granica jest jedyna.*

Dowód. Przypuśćmy, że g_1, g_2 są różnymi granicami funkcji f w punkcie a. Skoro są różne, to ich odległość $d := \rho_Y(g_1, g_2) > 0$. Wynika stąd, że

$$K_Y(g_1, \frac{d}{4}) \cap K_Y(g_2, \frac{d}{4}) = \emptyset\,. \tag{6.27}$$

Z faktu, że g_1 jest granicą i $\frac{d}{4} > 0$ wynika, że istnieje taka $\delta_1 > 0$, że

$$\forall\, x \in K_X(a, \delta_1) \setminus \{a\} \quad f(x) \in K_Y(g_1, \frac{d}{4})$$

i analogicznie dla g_2

$$\forall\, x \in K_X(a, \delta_2) \setminus \{a\}\ f(x) \in K_Y(g_2, \frac{d}{4}).$$

Wynikałoby stąd, że $K_Y(g_1, \frac{d}{4}) \cap K_Y(g_2, \frac{d}{4}) \neq \emptyset$, co przeczy (6.27). $\square$

Uwaga **6.46.** Zauważmy, że dla dowolnej funkcji $f:\ X \to Y$ następujące warunki są równoważne:

(i) f jest ciągła w punkcie $a \in X$,

(ii) a jest punktem izolowanym albo a jest punktem skupienia i wtedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Niech (X, ρ), (Y_1, ρ_1), $(Y_2, \rho_2), \ldots (Y_m, \rho_m)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $a \in X$, $\mathcal{D} \subset X$ i niech

$$f = (f_1, \ldots, f_m):\ D \to Y := Y_1 \times \ldots \times Y_m$$

będzie zestawieniem funkcji $f_j:\ X \to Y_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie 6.47. *Funkcja f ma granicę w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji f_j, $j = 1, \ldots, m$, ma granicę w punkcie a. Ponadto, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ jest granicą funkcji f w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy g_j jest granicą f_j w punkcie a, dla $j = 1, \ldots, m$.*

Dowód. Jest prostą konsekwencją definicji granicy i twierdzenia 6.41, str. 221. □

6.5. Ciągi i ich granice

Funkcje, których dziedziną jest zbiór liczb naturalnych są nazywane ciągami. W zależności od zbioru X wartości funkcji $f: \mathbb{N} \to X$ zależy nazwa ciągu f. Gdy $X = \mathbb{R}$, to ciąg $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywany jest ciągiem liczbowym. Zakładamy, że czytelnikowi znane są podstawowe fakty dotyczące ciągów liczbowych (przedstawiono je w rozdziale drugim).

Pisząc, że $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem w X, będziemy mieli na myśli funkcję

$$f: \mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) = a_n \in X.$$

Przy takim zapisie a_n, nazywane n–tym wyrazem ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jest wartością tego ciągu w punkcie n.

Zgodnie z ćwiczeniem 6.28, str. 216, $+\infty$ jest jedynym w $\overline{\mathbb{R}}$ punktem skupienia dziedziny ciągu, tzn. zbioru $\mathbb{N}$. Wynika stąd, że ciąg może mieć granicę tylko w punkcie $+\infty$.

Uwaga **6.48.** Niech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, ρ) i niech $g \in X$. Wtedy zapis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

oznacza, że g jest jego granicą w punkcie $+\infty$, tzn. że

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n > n_0\;\; \rho(a_n, g) < \varepsilon\,. \tag{6.28}$$

Gdy $X = \mathbb{R}$, to występująca w (6.28) nierówność $\rho(a_n, g) = |a_n - g| < \varepsilon$ jest równoważna koniunkcji nierówności: $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Każdy ciąg liczbowy (ciąg w $\mathbb{R}$) jest też ciągiem w $\overline{\mathbb{R}}$. Zatem jego granicą może być zarówno $+\infty$, jak i też $-\infty$, a więc zgodnie z poprzednimi rozważaniami

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}\; \exists\, n_0\, \forall n > n_0\;\; a_n < m, \tag{6.29}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\; \exists\, n_0\, \forall n > n_0\;\; a_n > M. \tag{6.30}$$

Niech $(Y_1, \rho_1),\ (Y_2, \rho_2), \ldots (Y_m, \rho_m)$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech

$$a_n = (a_{1n}, \ldots, a_{mn}),\;\; n = 1, 2, \ldots$$

będzie ciągiem punktów przestrzeni $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_m$.

Twierdzenie 6.49. *Ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę w Y wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z ciągów $\{a_{jn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę w Y_j, $j = 1, \dots, m$. Ponadto, $g = (g_1, \dots, g_m)$ jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy g_j jest granicą $\{a_{jn}\}_{n\in\mathbb{N}}$, dla $j = 1, \dots, m$.*

Dowód. Jest prostą konsekwencją definicji granicy ciągu i twierdzenia 6.47, str. 223. □

Definicja Heinego i Cauchy'ego

Używając pojęcia granicy ciągu, można podać, równoważną definicji Cauchy'ego, definicję Heinego granicy funkcji.

Heinrich Eduard Heine
Ur. 16 marca 1821 w Berlinie
Zm. 21 października 1881 w Halle

Najbardziej znaczącym jego wynikiem jest (znane jako twierdzenie Borela–Heinego) twierdzenie, że: ... podzbiór $\mathbb{R}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. Wprowadził pojęcie jednostajnej ciągłości.

Definicja 6.50 (Heinego). Niech (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $\mathcal{D} \subset X$ i niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru $\mathcal{D}$.

Mówimy, że $g \in Y$ jest granicą funkcji $f : \mathcal{D} \to Y$ w punkcie $x_0 \in^{sk} \mathcal{D}$ w sensie Heinego, gdy

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \text{ takiego że } \left\{ \begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \end{array} \right\} \text{ zachodzi: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Pojawia się naturalne pytanie: Czy definicja Heinego 6.50 jest równoważna definicji Cauchy'ego (zob. definicja 6.44, str. 222)? Podobnie, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, odpowiedź na to pytanie jest pozytywna.

Twierdzenie 6.51 (o równoważności definicji Cauchy'ego i Heinego). *Niech (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $\mathcal{D} \subset X$, $x_0 \in X$ punktem skupienia zbioru $\mathcal{D}$ i niech $g \in Y$.*

Dla dowolnej funkcji $f: \mathcal{D} \to Y$ następujące warunki są równoważne:

(C) *g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Cauchy'ego,*

(H) *g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 w sensie definicji Heinego.*

Dowód. $\boxed{\text{(C)} \Rightarrow \text{(H)}}$ Weźmy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki jak w definicji Heinego, tzn. taki, że $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}$ i $x_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$, i ustalmy $\varepsilon > 0$. Wobec spełniania warunku (C) istnieje taka $\delta > 0$, że

$$\rho_Y(f(x), g) < \varepsilon, \quad \text{o ile } x \in \mathcal{D} \text{ i } 0 < \rho_X(x, x_0) < \delta. \tag{6.31}$$

Z założonej zbieżności ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do x_0 wnosimy, że istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $0 < \rho_X(x_n, x_0) < \delta$ dla $n > N$, co wobec (6.31) i dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ oznacza, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

$\boxed{\text{(H)} \Rightarrow \text{(C)}}$ Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla jakiejś funkcji f zachodzi warunek (H) i nie zachodzi (C), tzn.

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in \mathcal{D}: \ 0 < \rho_X(x, x_0) < \delta,\ \rho_Y(f(x), g) \geqslant \varepsilon\,.$$

W szczególności, biorąc $\delta = \frac{1}{n} > 0$ z $n = 1, 2, \ldots$, znajdziemy takie $x_n \in \mathcal{D}$, że

$$0 < \rho_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n},\ \rho_Y(f(x_n), g) \geqslant \varepsilon.$$

Tak otrzymany ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zmierza do x_0 i g nie jest granicą odpowiadającego mu ciągu $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, co jest sprzeczne z założonym warunkiem (H). $\square$

Z twierdzenia 6.51 wynika, że definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji w danym punkcie jest równoważna następującej definicji Heinego:

Definicja 6.52 (Heinego ciągłości w punkcie). Niech, jak poprzednio, (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $\mathcal{D} \subset X$ i niech $x_0 \in \mathcal{D}$. Wówczas $f: \mathcal{D} \to Y$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in \mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \text{takiego że} \left\{ \begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \mathcal{D} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \end{matrix} \right\} \text{zachodzi: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Twierdzenie 6.53. *Jeżeli funkcje $f, g : X \to Y$ są ciągłe, to*

(a) *zbiór $\{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ jest domkniętym podzbiorem $X \times X$,*

(b) *zbiór $\{x : f(x) = g(x)\}$ jest domkniętym podzbiorem X.*

Dowód. Niech $A = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$. Dla dowodu, że A jest domknięty trzeba wykazać, że $B := (X \times X) \setminus A$ jest zbiorem otwartym. Wiemy, że jeśli $(x_1, x_2) \in B$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zatem istnieje taka $\delta > 0$, np. $\delta = \frac{\rho_Y(f(x_1), f(x_2))}{4}$, że

$$K_Y(f(x_1), \delta) \cap K_Y(f(x_2), \delta) = \emptyset.$$

Z ciągłości f wynika (zob. twierdzenie 6.35, str. 218), że zbiory

$$U := f^{-1}(K_Y(f(x_1), \delta)) \quad \text{i} \quad V := f^{-1}(K_Y(f(x_2), \delta))$$

są otwarte i są otoczeniami odpowiednio punktu x_1 i punktu x_2. Widać też, że $U \times V$ jest, rozłącznym z A, otoczeniem punktu (x_1, x_2), co kończy dowód punktu (a).

Niech $C = \{x : f(x) = g(x)\}$ i niech $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem punktów zbioru C zbieżnym do $x_0 \in X$. Mamy wykazać, że $x_0 \in C$. Funkcje f i g są ciągłe, więc na mocy definicji Heinego mamy

$$\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = f(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{\nu \to \infty} g(x_\nu) = g(x_0).$$

Z tego, że $f(x_\nu) = g(x_\nu)$ dla każdego $\nu \in \mathbb{N}$ i tego, że ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę wynika, że $f(x_0) = g(x_0)$, co oznacza, że $x_0 \in C$ i kończy dowód punktu (b). □

6.6. Ciągi funkcyjne

Dla ciągów funkcyjnych, tzn. ciągów, których wyrazy są funkcjami, rozważane są różne rodzaje zbieżności. W tej części przedstawimy punktową i jednostajną ich zbieżność.

Niech (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $\mathcal{D} \subset X$ i niech

$$f_n : X \supset \mathcal{D} \to Y, \; n = 1, 2, \ldots$$

będzie danym ciągiem funkcyjnym. Każdemu punktowi $x \in \mathcal{D}$ możemy przyporządkować ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktów przestrzeni Y i badać jego zbieżność.

Definicja 6.54. Jeżeli dla każdego $x \in \mathcal{D}$ ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to o ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mówimy, że jest *zbieżny punktowo* (lub krócej, że jest zbieżny) w $\mathcal{D}$ i wtedy funkcję

$$f : \mathcal{D} \ni x \mapsto f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$$

nazywamy *granicą ciągu* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Używając bardziej formalnego zapisu (zob. uwaga 6.48, str. 224), zbieżność punktowa ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do funkcji f oznacza, że

$$\forall x \in \mathcal{D}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \tag{6.32}$$

Uniezależniając n_0 od $x \in \mathcal{D}$, otrzymamy zbieżność jednostajną.

Definicja 6.55. Mówimy, że $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *jednostajnie zbieżny* w $\mathcal{D}$ do f, gdy

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\, \forall x \in \mathcal{D}\, \rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon. \tag{6.33}$$

Geometrycznie jednostajna zbieżność oznacza, że jakąkolwiek weźmiemy ε-otoczkę wykresu funkcji f (zob. rysunek 4.11, str. 133), tzn. zbiór

$$V_\varepsilon(f) := \{(x, y) \in X \times Y :\ x \in \mathcal{D},\ \rho_Y(f(x), y) < \varepsilon\},$$

to w tej ε-otoczce leżą prawie wszystkie wykresy funkcji ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Zbieżność jednostajna jest ważnym pojęciem analizy matematycznej. Przenosi ona pewne własności funkcji tworzących ciąg funkcyjny na funkcję graniczną. Podstawowym jest tu twierdzenie o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.

Twierdzenie 6.56. *Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji (odwzorowań) z przestrzeni X do Y, jednostajnie zbieżnym do $f :\ X \to Y$.*

(i) *Jeżeli wszystkie funkcje (wystarczy prawie wszystkie) f_n są ciągłe w $a \in X$, to f też jest ciągła w punkcie a.*

(ii) *Jeżeli f_n są ciągłe wszędzie, to f jest ciągła wszędzie.*
(iii) *Jeżeli f_n są jednostajnie ciągłe, to f jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Niech $a \in X$ będzie takim punktem, w którym wszystkie funkcje f_n są ciągłe. Z założonej jednostajnej zbieżności wynika, że dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczna naturalna m, że

$$\rho_Y(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla } \forall\, x \in X. \tag{6.34}$$

Wybrana funkcja f_m jest ciągła w punkcie a. Zatem możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, aby zachodziła nierówność

$$\rho_Y(f_m(x), f_m(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla } x \in K_X(a, \delta).$$

Wobec tego dla dowolnego $x \in K_X(a, \delta)$ mamy

$$\rho_Y(f(x), f(a)) \leqslant \rho_Y(f(x), f_m(x)) + \rho_Y(f_m(x), f_m(a)) + \rho_Y(f_m(a), f(a)) < \varepsilon,$$

co dowodzi ciągłości f w punkcie a i kończy dowód punktów (i) oraz (ii).

Załóżmy teraz, że funkcje f_n są jednostajnie ciągłe i do ustalonego $\varepsilon > 0$ dobierzmy m, tak aby zachodził warunek (6.34). Funkcja f_m jest jednostajnie ciągła, więc istnieje taka $\eta > 0$, że

$$\text{jeżeli } \rho_X(x', x'') < \eta, \text{ to } \rho_Y(f_m(x'), f_m(x'')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd, jeśli x', x'' są takie, że $\rho_X(x', x'') < \eta$, to

$$\begin{aligned}\rho_Y(f(x'), f(x'')) \leqslant{}& \rho_Y(f(x'), f_m(x')) + \\ &+\rho_Y(f_m(x'), f_m(x'')) + \rho_Y(f_m(x''), f(x'')) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

co dowodzi jednostajnej ciągłości f. □

Uwaga **6.57.** Bez założenia jednostajnej zbieżności twierdzenie o ciągłości granicy ciągu funkcji ciągłych nie jest prawdziwe (zob. uwaga 4.64, str. 134).

6.7. Przestrzenie metryczne zwarte

Zwartość jest bardzo ważnym pojęciem topologicznym wykorzystywanym w analizie matematycznej. Bardzo często w zagadnieniach technicznych zachodzi potrzeba wyznaczenia maksymalnej lub minimalnej wartości danej funkcji, na przykład funkcji mierzącej naprężenia.

Definicja 6.58. (i) Mówimy, że przestrzeń metryczna (topologiczna) X jest *przestrzenią zwartą*, gdy z każdego jej pokrycia otwartego można wybrać pokrycie skończone, tzn. wtedy, gdy z każdej rodziny $\mathscr{U}$ zbiorów otwartych, takiej że

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U = X$$

można wybrać taką skończoną podrodzinę $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$, że

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U = X.$$

.

(ii) Mówimy, że zbiór $K \subset X$ jest zwarty, gdy K jako przestrzeń z metryką (topologią) indukowaną z X jest przestrzenią zwartą.

Przykład **6.59.** a) $\mathbb{R}$ nie jest przestrzenią zwartą. Istotnie, pokrycie $\mathbb{R}$ przedziałami otwartymi $(-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$ nie zawiera podpokrycia skończonego.

b) Przedział domknięty $I = [a, b]$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Niech $\mathscr{U}$ będzie pokryciem otwartym przedziału I i niech K będzie zbiorem takich punktów $x \in I$, że z rodziny $\mathscr{U}$ da się wybrać skończoną podrodzinę pokrywającą przedział $[a, x]$. Zbiór K nie jest pusty, bo $a \in K$. Z tego, że każdy ze zbiorów rodziny $\mathscr{U}$ jest otwarty wynika, że jeśli jakaś skończona podrodzina rodziny $\mathscr{U}$ pokrywa przedział $[a, c]$, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że ta podrodzina pokrywa przedział $[a, c + \varepsilon]$. Stąd wynika, że albo istnieje takie $c \in (a, b)$, że $K = [a, c)$, albo $K = [a, b]$. Łatwo jednak zauważyć, że jeśli $[a, c) \subset K$, to $c \in K$. Istotnie, w rodzinie $\mathscr{U}$ istnieje taki zbiór otwarty U, że $c \in U$. Zatem istnieje taka $\delta > 0$, że $[c - \delta, c] \subset U$. Dodając U do skończonej podrodziny rodziny $\mathscr{U}$, która pokrywa $[a, c - \delta]$, otrzymamy skończoną podrodzinę rodziny $\mathscr{U}$, która pokrywa $[a, c]$, co przeczy założeniu, że $K = [a, c)$ i kończy dowód.

c) Przestrzeń $\overline{\mathbb{R}}$ jest zwarta. Aby to wykazać, wystarczy, z niewielkimi zmianami, powtórzyć dowód zwartości przedziału $[a, b]$.

Twierdzenie 6.60 (Borela). *Dla przestrzeni metrycznej X następujące dwa warunki są równoważne:*

(a) *X jest przestrzenią zwartą,*

(b) *każdy ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktów przestrzeni X zawiera podciąg zbieżny do pewnego*

$x \in X$.

Dowód. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem punktów przestrzeni zwartej X i niech

$$A_n := \overline{\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}, \quad V_n := X \setminus A_n, \; n = 1, 2, \ldots$$

Zbiory V_n, $n = 1, 2, \ldots$ są otwarte i albo $\cup_{n=1}^{\infty} V_n = X$, albo $\cup_{n=1}^{\infty} V_n \subsetneq X$. Gdyby $\cup_{n=1}^{\infty} V_n = X$, to wobec założonej zwartości przestrzeni X istniałoby takie $N \in \mathbb{N}$, że $\cup_{n=1}^{N} V_n = X$, co nie jest możliwe, bo $V_1 \cup \ldots \cup V_N = V_N$ i $A_N \neq \emptyset$. Stąd

$$X \supsetneq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zatem istnieje $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, co oznacza, że x należy do każdego ze zbiorów A_n. Z tego, że $x \in A_1$ wynika, że istnieje takie $n_1 \geqslant 2$, że $\rho(x_{n_1}, x) < 1$ (zob. ćwicz. 6.21, str. 214). Z kolei $x \in A_{n_1}$, więc istnieje takie $n_2 > n_1$, że $\rho(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$. Kontynuując postępowanie, dostaniemy taki ciąg liczb naturalnych $n_1 < n_2 < \ldots$, że $\rho(x_{n_k}, x) \leqslant \frac{1}{k}$, dla $k = 1, 2, \ldots$ Tak otrzymany ciąg jest podciągiem ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnym do x.

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$ Dowód warunku dostatecznego jest bardziej złożony i nie będziemy go tu przedstawiać. Podamy jedynie bardzo krótki szkic. Szczegóły można znaleźć np. w ([7], rozdz. I).

W pierwszym etapie dowodzi się, że jeśli każdy ciąg punktów przestrzeni X zawiera podciąg zbieżny do jakiegoś $x \in X$, to z każdego pokrycia otwartego przestrzeni X można wybrać pokrycie przeliczalne. W etapie drugim dowodzi się, że z każdego pokrycia przeliczalnego zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone. □

Wniosek 6.61. (a) *Każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty.*
(b) *Każdy zwarty podzbiór przestrzeni metrycznej jest domknięty i ograniczony*[7].

Pojawia się naturalne pytanie: Czy każdy domknięty i ograniczony podzbiór przestrzeni metrycznej X jest zwarty? Odpowiedź na tak ogólnie postawione pytanie jest negatywna[8]. W ważnej dla nas przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ odpowiedź na to pytanie jest pozytywna.

Przed podaniem twierdzenia Borela–Lebesgue'a przypomnimy twierdzenie Bolzano–Weierstrassa (zob. twierdzenie 2.32, str. 36).

[7]Ograniczoność oznacza, że istnieje kula, w której ten zbiór się zawiera.
[8]Dla przykładu, kule domknięte w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych nie są zwarte.

Twierdzenie 6.62 (Bolzano–Weierstrassa). *Z każdego ograniczonego ciągu liczbowego można wybrać podciąg zbieżny.*

Emil Borel
Ur. 7 stycznia 1871 w Saint Affrique, Francja
Zm. 3 lutego 1956 w Saint Affrique
Matematyk francuski. W swych pracach zajmował się głównie teorią gier, rachunkiem prawdopodobieństwa, analizą matematyczną i fizyką matematyczną. Wraz z Bairem oraz Lebegiem był pionierem w zakresie teorii miary i jej zastosowania w teorii prawdopodobieństwa.

Twierdzenie 6.63 (Borela–Lebesgue'a). *Na to, aby podzbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ był zwarty potrzeba i wystarczy, aby był domknięty i ograniczony.*

Dowód. Warunek konieczny zachodzi w dowolnej przestrzeni metrycznej (zob. wniosek 6.61, str. 231).

Do wykazania warunku wystarczającego skorzystamy z twierdzenia 6.60, str. 230, i z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa.

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym i niech

$$x_\nu = (x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{n\nu}),\ \nu = 1, 2, \ldots$$

będzie ciągiem punktów zbioru K. Z założonej ograniczoności zbioru K wynika, że każdy z ciągów $\{x_{j\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$, jest ograniczonym ciągiem liczbowym. Możemy więc z każdego jego podciągu wybrać podciąg zbieżny. W pierwszym etapie wybierzmy taki podciąg ciągu $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, w którym pierwsze współrzędne tworzą ciąg zbieżny. Z tak otrzymanego podciągu wybierzmy podciąg, w którym drugie współrzędne tworzą ciąg zbieżny itd. Po n krokach otrzymamy taki podciąg ciągu $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, w którym każda współrzędna jest ciągiem zbieżnym. Stąd, na mocy twierdzenia 6.49, str. 225, wybrany podciąg ciągu $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do jakiegoś elementu $x \in \mathbb{R}^n$. Punkt $x \in K$, bo K jest zbiorem domkniętym. Zatem wykazaliśmy, że z każdego ciągu punktów zbioru K można wybrać podciąg zbieżny do jakiegoś elementu zbioru K, a to było do wykazania. $\square$

Wniosek 6.64. *Każdy zwarty, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma element największy i element najmniejszy.*

Dowód. Niech $K \neq \emptyset$ będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Wykażemy, że ma on element największy, tzn. że istnieje takie $M \in K$, że $x \leqslant M$ dla dowolnego $x \in K$. Zbiór K jest zwarty, więc jest ograniczony i z zasady ciągłości wynika, że ma w $\mathbb{R}$ kres górny. Oznaczmy go przez M. Z definicji kresu górnego wynika istnienie ciągu $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ punktów zbioru K, którego granicą jest M. Stąd, na mocy twierdzenia 6.60, str. 230, $M \in K$, ponieważ zbiór K jest zwarty.

Dowód istnienia w K elementu najmniejszego ma podobną konstrukcję. $\square$

Funkcje ciągłe na przestrzeniach zwartych

Niech (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi.

Twierdzenie 6.65. *Niech K będzie zwartym podzbiorem przestrzeni X.*
Jeśli $f : K \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, to $f(K)$ jest zwartym podzbiorem przestrzeni Y. Innymi słowy, obraz ciągły zbioru zwartego jest zbiorem zwartym.

Dowód. Niech $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem punktów obrazu $f(K)$. Zgodnie z twierdzeniem Borela (zob. twierdzenie 6.60, str. 230) wystarczy wykazać, że ciąg ten zawiera podciąg zbieżny w $f(K)$.

Z definicji obrazu wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje taki punkt $x_n \in K$, że $f(x_n) = y_n$. Zbiór K jest zwarty, więc istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do pewnego $x_0 \in K$. Temu podciągowi odpowiada podciąg $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ ciągu $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Z założonej ciągłości funkcji $f : K \to Y$, definicji Heinego i faktu, że $x_0 \in K$ wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

co oznacza, że z ciągu $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg zbieżny do $f(x_0) \in f(K)$, a to należało udowodnić. $\square$

Wniosek 6.66. *Jeżeli K jest zwartym podzbiorem X i $f : K \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieją takie dwa punkty a i b należące do K, że*

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \quad \text{dla } x \in K. \tag{6.35}$$

Wniosek ten jest też formułowany w postaci: funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy (górny i dolny).

Dowód. Zbiór $A := f(K)$ jako ciągły obraz zbioru zwartego jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$. Zatem (zob. wniosek 6.64, str. 233) w zbiorze A istnieją takie liczby m, M, że $A \subset [m, M]$. Liczby m, $M \in A = f(K)$, więc istnieją takie punkty a, $b \in K$, że $m = f(a)$ i $M = f(b)$, co kończy dowód. $\square$

Ważną rolę w topologii spełniają odwzorowania, które nazywają się homeomorfizmami.

Definicja 6.67. Mówimy, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest *homeomorfizmem*, gdy jest bijekcją i odwzorowania f i $f^{-1} : Y \to X$ są ciągłe.

Twierdzenie 6.68. *Jeżeli X jest przestrzenią metryczną zwartą, $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym i bijektywnym, to f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Mamy wykazać, że $g := f^{-1} : Y \to X$ jest ciągłe. Aby to zrobić, pokażemy, że przeciwobraz, tzn. $g^{-1}(K)$, dowolnego domkniętego w X zbioru K jest zbiorem domkniętym w Y (zob. twierdzenie 6.35, p. (iii), str. 218). Zbiór K jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty (zob. wniosek 6.61, str. 231) i jego obraz $f(K)$ jest zwartym podzbiorem Y, bo f jest ciągłe (zob. twierdzenie 6.65). Dzięki założonej bijektywności f mamy równość $g^{-1}(K) = f(K)$. Zatem $g^{-1}(K)$ jest zwarty, a więc jest domknięty w Y (zob. wniosek 6.61, str. 231), co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 6.69. *Jeśli K jest zwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej X oraz $f : K \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, to f jest jednostajnie ciągłe.*

Dowód. Przypuśćmy, że spełnione są założenia i f nie jest jednostajnie ciągłe. Oznaczałoby to, że istnieje $\varepsilon > 0$ i takie ciągi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktów zbioru K, że

$$\rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots \tag{6.36}$$

Zbiór K jest zwarty, więc możemy znaleźć taki podciąg $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu liczb naturalnych, że ciągi x_{n_k} i y_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$ są zbieżne w K. Mają one tę samą granicę, gdyż

$$\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}.$$

Z uwagi na ciągłość metryki i założoną ciągłość funkcji f mamy

$$\lim_{k\to\infty} \rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0,$$

co przeczy (6.36) i kończy dowód. □

6.8. Przestrzenie metryczne zupełne

Na stronie 222 podana została definicja Cauchy'ego granicy funkcji w danym punkcie i w uwadze 6.48, str. 224, definicja Cauchy'ego granicy ciągu. Przypomnimy teraz warunek Cauchy'ego i definicję ciągu Cauchy'ego.

Definicja 6.70 (warunek Cauchy'ego). Mówimy, że ciąg $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *spełnia warunek Cauchy'ego* (jest *ciągiem Cauchy'ego*) w przestrzeni metrycznej (X, ρ), gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\nu_0 \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych liczb naturalnych $\nu, \mu > \nu_0$ zachodzi nierówność $\rho(x_\nu, x_\mu) < \varepsilon$. W skróconym zapisie definicja ta ma postać:

$$\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ spełnia warunek Cauchy'ego} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\nu_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall\nu, \mu > \nu_0 \quad \rho(x_\nu, x_\mu) < \varepsilon.$$

Przypomnijmy, że każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego. Wynika to z tego, że jeśli $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ i dla dowolnego $\nu > \nu_0$ zachodzi nierówność $\rho(x_\nu, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, to dla dowolnych $\nu, \mu > \nu_0$ zachodzą nierówności:

$$\rho(x_\nu, x_\mu) < \rho(x_\nu, x_0) + \rho(x_\mu, x_0) < \varepsilon.$$

Na ogół nie każdy ciąg Cauchy'ego w przestrzeni X ma granicę w tej przestrzeni. Dla przykładu ciąg $\{\frac{1}{\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $X = (0, 1)$, nie mającym w tej przestrzeni granicy. Innym przykładem jest $X = \mathbb{Q}$ z metryką daną wzorem $\rho(x, y) = |x - y|$. W tej przestrzeni ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

jako zbieżny w $\mathbb{R}$, spełnia warunek Cauchy'ego i nie jest zbieżny w $\mathbb{Q}$, bo jego granica e nie jest liczba wymierną.

Przykładem przestrzeni, w której każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę w tej przestrzeni jest $\mathbb{R}$. Aby to udowodnić, wystarczy zauważyć, że w dowolnej przestrzeni metrycznej ciągi Cauchy'ego mają dwie, proste do wykazania, własności:

Własność 1. każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony,

Własność 2. jeżeli ciąg Cauchy'ego ma punkt skupienia, to ten punkt skupienia jest jego granicą.

Z powyższych własności oraz twierdzenia Bolzano–Weierstrassa (zob. twierdzenie 6.62, str. 232) wynika, że w $\mathbb{R}$ ciągi Cauchy'ego są zbieżne.

Definicja 6.71. Mówimy, że przestrzeń metryczna (X, ρ) jest *zupełna*, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w X jest zbieżny w X (ma granicę w X).

Każda przestrzeń metryczna zwarta jest przestrzenią zupełną, bo w przestrzeni zwartej z każdego ciągu, w szczególności z ciągu Cauchy'ego, można wybrać podciąg zbieżny i gdy ciąg jest ciągiem Cauchy'ego, to granica wybranego podciągu zbieżnego jest jego granicą. Stąd wynika, że przestrzenie $\overline{\mathbb{R}}$ i $\hat{\mathbb{R}}$ są przestrzeniami zupełnymi. Zupełną jest też przestrzeń $\mathbb{R}^n$, bo np. z twierdzenia Borela–Lebesgue'a (zob. twierdzenie 6.63, str. 232) wynika, że z każdego ciągu ograniczonego w $\mathbb{R}^n$ da się wybrać podciąg zbieżny, a ten fakt wystarczy do tego, aby przestrzeń była zupełna. Zupełność $\mathbb{R}^n$ jest też natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia o zupełności iloczynu kartezjańskiego przestrzeni metrycznych zupełnych.

Twierdzenie 6.72. *Każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni zupełnej jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Niech $Y \subset X$ będzie domknięta podprzestrzenią przestrzeni zupełnej X i niech $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w Y. Ciąg ten jest też ciągiem Cauchy'ego w X. Zatem ma w X granicę, bo X jest przestrzenią zupełną. Oznaczmy tę granicę przez y. Z założonej domkniętości zbioru Y wynika, że $y \in Y$, a to należało wykazać. □

Twierdzenie 6.73. *Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych zupełnych jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Niech $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \ldots, (X_n, \rho_n)$ będą przestrzeniami metrycznymi zupełnymi. Dla dowolnych $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ mamy

$$\rho_\diamond(x, y) = \rho_1(x_1, y_1) + \ldots + \rho_n(x_n, y_n) \geqslant \rho_j(x_j, y_j) \quad \text{dla } j = 1, \ldots, n.$$

Stąd wynika, że jeśli $\{x^\nu = (x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X, to każdy z ciągów $\{x_j^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X_j, $j = 1, \ldots, n$, co implikuje jego zbieżność w X_j, ponieważ X_j jest przestrzenią zupełną. Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że na mocy twierdzenia 6.49, str. 225, zbieżność każdego z ciągów $\{x_j^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ w X_j, $j = 1, \ldots, n$, implikuje zbieżność ciągu $\{x^\nu = (x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. □

Punkty stałe odwzorowań

Wiele praktycznych problemów można sprowadzić do poszukiwania punktu stałego stosownego odwzorowania.

Definicja 6.74. Mówimy, że punkt $x \in X$ jest *punktem stałym* odwzorowania $f: X \to X$, gdy $f(x) = x$.

Dla przykładu, każde rozwiązanie równania $5x^3 + 2x^2 - x + 7 = 0$ jest punktem stałym odwzorowania $f: \mathbb{R} \ni x \to 5x^3 + 2x^2 + 7 \in \mathbb{R}$.

Definicja 6.75. Mówimy, że odwzorowanie $f: X \to X$ jest *zwężające*, gdy istnieje taka stała $\alpha \in [0, 1)$, że

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y) \quad \text{dla } x, y \in X. \tag{6.37}$$

Twierdzenie 6.76. *Każde odwzorowanie zwężające jest ciągłe.*

Dowód. Niech $f: X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym i niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w X zbieżnym do x_0. Odwzorowanie f jest zwężające, więc

$$0 \leqslant \rho(f(x_n), f(x_0)) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_0) \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Stąd, z twierdzenia o trzech ciągach i definicji Heinego wynika, że odwzorowanie f jest ciągłe. □

Zauważmy, że w dowodzie ciągłości nie korzystaliśmy z założenia, że $\alpha \in [0, 1)$. Można, bez żadnych zmian, powtórzyć ten dowód dla odwzorowań spełniających *warunek Lipshitza*, tzn. odwzorowań spełniających (6.37) z dowolną stałą $\alpha \in [0, +\infty)$.

Efektywna metoda poszukiwania punktu stałego jest zawarta w dowodzie następującego twierdzenia Banacha o odwzorowaniach zwężających:

Twierdzenie 6.77. *Niech $f: X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym. Jeżeli X jest przestrzenią zupełną, to f ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia, jak też inne twierdzenia o punkcie stałym, można znaleźć np. w monografii [6]. □

6.9. Przestrzenie metryczne spójne

Spójność jest bardzo ważnym pojęciem topologicznym wykorzystywanym w analizie matematycznej. Szczególnie ważne jest zastosowanie do wyznaczania, z dowolnie zadaną dokładnością, zer funkcji ciągłych.

Definicja 6.78. Mówimy, że przestrzeń X jest *niespójna* (nie jest spójna), gdy istnieją takie niepuste, rozłączne, otwarte zbiory U, V, że $X = U \cup V$. Gdy takie zbiory U, V nie istnieją, to o przestrzeni X mówimy, że jest *spójna*.

Zbiory U, V, występujące w definicji 6.78, są równocześnie otwarte i domknięte. Ich otwartość jest założona w definicji. Zbiór U jest też domknięty, bo $X \setminus U = V$ i z założenia V jest zbiorem otwartym. Z tego samego powodu V jest zbiorem domkniętym. Takie zbiory, które są równocześnie otwarte i domknięte są nazywane zbiorami *otwarto-domkniętymi*.

Zauważmy, że spójność przestrzeni X oznacza, że jeśli $X = U \cup V$ i U, V są otwarte i rozłączne, to $U = X$ lub $V = X$. Stąd wynika, że przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi jej podzbiorami otwarto-domkniętymi są zbiór pusty i cała przestrzeń X.

Gdy A jest podzbiorem przestrzeni X, to nazywamy go *spójnym* (zbiorem spójnym) (i analogicznie *niespójnym*), jeśli A, jako przestrzeń z topologią (metryką) indukowaną z X, jest przestrzenią spójną (niespójną).

Przykład **6.79.** Zbiór $\mathbb{Q}$ (liczb wymiernych) nie jest spójnym podzbiorem $\mathbb{R}$. Aby to udowodnić, zauważmy, że zbiory

$$U := \{x \in \mathbb{Q} : \ x < \sqrt{2}\}, \quad V := \{x \in \mathbb{Q} : \ x > \sqrt{2}\}$$

są niepuste, rozłączne, otwarte w $\mathbb{Q}$ i takie, że $U \cup V = \mathbb{Q}$.

Przykład **6.80.** Zbiory jednoelementowe są spójne.

Przykład **6.81.** Dowolny przedział I jest spójnym podzbiorem $\mathbb{R}$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $I = U \cup V$, gdzie U i V są rozłączne, niepuste i otwarte w I. Niech $a \in U$, $b \in V$. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $a < b$. Zbiór $A := U \cap (-\infty, b)$ nie jest pusty, bo $a \in A$. Niech $c = \sup A$. Zauważmy, że $a \leqslant c \leqslant b$. Stąd wynika, że $c \in I$, bo I jest przedziałem. Mamy też, że $a < c < b$, bo U, V są otwarte w I oraz $c \in U$ albo $c \in V$. Jeśli $c \in V$, to należy wraz z pewnym otoczeniem (lewostronnym), bo V jest zbiorem otwartym w I, co przeczy temu, że c jest kresem górnym zbioru A. Jeśli $c \in U$, to należy do U wraz z pewnym otoczeniem (prawostronnym), co przeczy temu, że c jest kresem górnym zbioru A.

Ważna w analizie matematycznej jest charakteryzacja spójnych podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.82. *Jedynymi podzbiorami spójnymi w $\mathbb{R}$ są przedziały. W szczególności $\mathbb{R}$ jako przedział $(-\infty, +\infty)$ jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Z przykładu 6.81, wynika, że przedziały są zbiorami spójnymi. Aby zakończyć dowód, wystarczy wykazać, że poza przedziałami nie ma w $\mathbb{R}$ innych zbiorów spójnych. Istotnie, niech A będzie niepustym podzbiorem spójnym w $\mathbb{R}$. Gdyby zbiór A nie był przedziałem, to istniałyby dwa punkty $a, b \in A$ i taki punkt $x \notin A$, że $a < x < b$. Zatem $U := A \cap (-\infty, x)$, $V := A \cap (x, +\infty)$ byłyby zbiorami niepustymi, otwartymi w A i takimi, że $A = U \cup V$, co przeczy założonej spójności zbioru A. $\square$

Ciekawe zastosowania praktyczne ma twierdzenie o spójności ciągłego obrazu zbioru spójnego (przestrzeni spójnej).

Twierdzenie 6.83. *Ciągły obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Niech $f : X \supset A \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym, A spójnym podzbiorem X i niech $B := f(A)$. Jeśli $B = U \cup V$, gdzie U, V są niepustymi, rozłącznymi i otwartymi w B zbiorami, to $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ są otwarte w A, bo f jest ciągłe. Zbiory te są niepuste, rozłączne i $A = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, co przeczy spójności zbioru A. $\square$

Przykład **6.84.** (i) Przestrzeń $\overline{\mathbb{R}}$ jako obraz ciągły przedziału $[-1, 1]$ jest przestrzenią spójną.
(ii) Okręgi jako ciągłe obrazy przedziału $[0, 2\pi]$ są spójnymi podzbiorami $\mathbb{R}^2$.

(iii) Przestrzeń $\hat{\mathbb{R}}$ jako ciągły obraz okręgu jest przestrzenią spójną.

Podamy teraz kilka bezpośrednich wniosków z twierdzeń 6.82, 6.83, str. 239, twierdzenia 6.65, str. 233, i wniosku 6.66, str. 233.

Wniosek 6.85. *Jeśli I jest przedziałem w $\mathbb{R}$ i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to*
(i) *obraz przedziału I, tzn. zbiór $J := f(I)$, jest przedziałem,*
(ii) *jeśli I jest przedziałem domkniętym, to przedział J też jest domknięty,*
(iii) *funkcja f ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich), tzn. dla dowolnych $x_1, x_2 \in I$ i dowolnego c leżącego pomiędzy $f(x_1)$ i $f(x_2)$ istnieje takie ξ leżące pomiędzy x_1 i x_2, że $f(\xi) = c$,*
(iv) *jeśli I jest przedziałem domkniętym, to f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie leżące między jej kresem dolnym i górnym,*
(v) *jeśli x_1, x_2 są takimi punktami przedziału I, że $f(x_1)f(x_2) < 0$, to istnieje takie ξ leżące pomiędzy x_1 i x_2, że $f(\xi) = 0$.*

Własność Darboux przyjmowania wartości pośrednich przez funkcję ciągłą jest wykorzystywana do przybliżonego rozwiązywania równań typu $f(x) = 0$, w których lewa strona jest funkcją ciągłą. Jeśli wskażemy takie dwa punkty x_1, x_2, że $f(x_1)f(x_2) < 0$, to z własności Darboux wiemy, że pomiędzy punktami x_1, x_2 jest co najmniej jedno miejsce zerowe funkcji f.

Przedstawimy teraz, pochodzący od Whitneya, przykład zastosowania własności Darboux.

Przykład **6.86.** *Na podłodze jednego z wagonów pociągu jadącego (torem prostoliniowym) od punktu (miejscowości) A do B zamocowano przegubowo pręt (materialny) l tworzący kąt $\alpha \in [0, \pi]$ z płaszczyzną podłogi. Zamocowanie jest takie, że pręt może poruszać się tylko w płaszczyźnie, która jest prostopadła do podłogi wagonu i równoległa do kierunku ruchu pociągu. Przyjmujemy też naturalne założenie, że jeśli w jakiejś chwili pręt spadnie na podłogę, to do końca jazdy pozostanie na podłodze.*

Chcemy teraz odpowiedzieć na następujące pytanie: Czy możliwe jest takie ustawienie pręta w punkcie A, aby w punkcie B nie leżał na podłodze?

Aby odpowiedzieć na tak postawione pytanie, weźmy funkcję

$$g : [0, \pi] \ni \alpha \mapsto g(\alpha) \in [0, \pi],$$

w której α jest kątem nachylenia pręta w punkcie A, zaś $g(\alpha)$ kątem, jaki tworzy pręt z płaszczyzną podłogi w końcowym punkcie trasy pociągu, tzn. w punkcie B. Naturalne jest założenie, że ruch pociągu jest „płynny” (przyśpieszenia nie zmieniają się skokowo), co w „języku analizy” oznacza, że funkcja opisująca ruch pociągu jest klasy $\mathcal{C}^2$. To założenie implikuje ciągłość funkcji g. Z przyjętych założeń wynika, że $g(0) = 0$ i $g(\pi) = \pi$. Stąd i z własności Darboux wynika, że dla dowolnego $\beta \in (0, \pi)$ istnieje takie $\alpha \in (0, \pi)$ (ustawienie początkowe pręta l), że $g(\alpha) = \beta$ (na końcu trasy pręt przyjmuje z góry zadanie położenie).

Przykład **6.87.** Każdy wielomian stopnia nieparzystego (o współczynnikach rzeczywistych) ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Do wykazania tego faktu zauważmy, że bez szkody dla ogólności możemy założyć, że wielomian f jest postaci

$$f(x) = x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ponieważ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

więc istnieją takie punkty x_1, x_2, że $f(x_1)f(x_2) < 0$. Z wniosku 6.85, pkt (v), str. 240, wynika, że między punktami x_1, x_2 wielomian f ma co najmniej jeden pierwiastek.

ROZDZIAŁ 7

Analiza funkcjonalna

W tym rozdziale poznamy tylko te fakty dotyczące analizy funkcjonalnej, których znajomość jest niezbędna do prawidłowego zrozumienia dalszych części tej książki. Zakładamy, że czytelnikowi znane są podstawowe fakty z algebry liniowej i topologii przestrzeni metrycznych.

Zakładać będziemy, że przestrzenie wektorowe są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$.

7.1. Przestrzenie unormowane

Niech E będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.

Definicja 7.1. Odwzorowanie

$$\|\cdot\| : E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

nazywamy *normą* w E, gdy spełnia trzy następujące warunki:

(i) $\forall\, x \in E\ \|x\| \geqslant 0$ i $(\|x\| = 0 \iff x = 0)$ – *dodatniość normy,*

(ii) $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ – *jednorodność normy,*

(iii) $\forall\, x, y \in E \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ – *nierówność trójkąta.*

Jeżeli odwzorowanie (7.1) jest normą, to parę $(E, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną* nad ciałem $\mathbb{R}$ lub krótko *przestrzenią unormowaną*. Zwykle zamiast pisać $(E, \|\cdot\|)$, piszemy krótko, że E jest przestrzenią unormowaną.

Zgodnie z nierównością trójkąta $\|x\| = \|x-y+y\| \leqslant \|x-y\|+\|y\|$. Stąd wynika, że $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$ i symetrycznie $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$, co daje

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \tag{7.2}$$

Przykład **7.2.** Moduł (wartość bezwzględna) jest normą w $\mathbb{R}$. Mówiąc, że $\mathbb{R}$ jest przestrzenią unormowaną, będziemy mieli na myśli parę $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, gdzie $|\cdot|$ jest odwzorowaniem $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$.

Przykład **7.3.** Niech $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E = E_1 \times \ldots \times E_n$ kładziemy

$$\|x\|_\circ := \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \ldots + \|x_n\|_n^2} \in \mathbb{R}_0, \tag{7.3}$$

$$\|x\|_\diamond := \|x_1\|_1 + \ldots + \|x_n\|_n \in \mathbb{R}_0, \tag{7.4}$$

$$\|x\|_\square := \max\{\|x_i\|_i : \ i = 1, \ldots, n\} \in \mathbb{R}_0. \tag{7.5}$$

W szczególności, gdy $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = \mathbb{R}$ oraz $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, to

$$\|x\|_\circ = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \tag{7.6}$$

$$\|x\|_\diamond = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \tag{7.7}$$

$$\|x\|_\square = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}. \tag{7.8}$$

Normę (7.6) nazywamy *normą euklidesową*.

Jako ćwiczenie proponujemy wykazanie, że każda z funkcji $\|\cdot\|_\circ$, $\|\cdot\|_\diamond$, $\|\cdot\|_\square$ jest normą w E. Najtrudniejsza do wykazania jest nierówność trójkąta dla normy: $\|\cdot\|_\circ$. Do jej wykazania proponujemy skorzystać z nierówności Minkowskiego, tzn. nierówności (7.22), która będzie zaprezentowana na str. 253. Każdą z tych norm nazywa się *normą produktową*.

Zawężenie normy

Jeśli $(E, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, F podprzestrzenią E, to

$$\|\cdot\||_F : F \ni x \mapsto \|x\| \in [0, +\infty)$$

jest normą na F i tę normę nazywamy *zawężeniem* lub *zacieśnieniem* normy do podprzestrzeni F.

Metryka wyznaczona przez normę

Pokażemy teraz, jak w naturalny sposób utworzyć z przestrzeni unormowanej przestrzeń metryczną.

Twierdzenie 7.4. *W przestrzeni unormowanej* $(E, \|\cdot\|)$ *funkcja*

$$\rho : E \times E \ni (x, y) \mapsto \rho(x, y) := \|x - y\| \in \mathbb{R}_0 \tag{7.9}$$

jest metryką w E.

Dowód. Dodatniość i symetria funkcji ρ wynikają wprost z definicji normy. Do wykazania nierówności trójkąta weźmy dowolne punkty $x,\ y,\ z \in E$ i zauważmy, że

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

co kończy dowód. □

Przykład **7.5.** Metryki $\rho_\circ$, $\rho_\diamond$, $\rho_\square$ (zob. (6.24), str. 213) są wyznaczone odpowiednio przez normy $\|\cdot\|_\circ$, $\|\cdot\|_\diamond$, $\|\cdot\|_\square$.

Metrykę ρ zdefiniowaną w (7.9) nazywamy *metryką wyznaczoną* lub *generowaną* przez normę. Z kolei metryka ρ wyznacza jedyną topologię τ_ρ w przestrzeni E. Mówiąc więc o metryce (topologii) w przestrzeni unormowanej, mamy zawsze na myśli tę jedyną metrykę (topologię). Zauważmy jeszcze, że:

(1) zacieśnienie normy indukuje metrykę i topologię indukowaną,
(2) norma produktowa indukuje metrykę i topologię produktową,
(3) w $\mathbb{R}$ przyjmujemy topologię naturalną, tzn. topologię wyznaczoną przez normę $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in [0, +\infty)$, zaś w $E \times E$, $\mathbb{R} \times E$ przyjmujemy zwykle normy produktowe.

Równoważność norm

Często okazuje się, że zastąpienie jednej normy inną, ale równoważną, znacznie upraszcza prowadzone rozważania. Przykłady takich rozważań pojawią się w dalszej części tej książki.

Niech $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ będą normami w przestrzeni wektorowej X.

Definicja 7.6 (równoważności norm). Mówimy, że normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ są równoważne, gdy istnieją takie stałe dodatnie m, M, że dla każdego $x \in X$ zachodzą nierówności:

$$m\,\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\,\|x\|_1. \tag{7.10}$$

Równoważność norm jest relacją równoważnościową. Metryki wyznaczone przez normy równoważne są metrykami równoważnymi i normy równoważne wyznaczają tę samą topologię w X. Zatem, jeśli jakieś odwzorowanie $f :\ X \to Y$ z przestrzeni unormowanej X do przestrzeni unormowanej Y jest ciągłe przy jednym wyborze norm (w X i Y), to po zmianie tych norm na normy równoważne też jest ciągłe.

Stwierdzenie 7.7. *Odwzorowania*

$$E \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}, \tag{7.11}$$

$$E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E, \tag{7.12}$$

$$\mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in E \tag{7.13}$$

są ciągłe.

Dowód. Ciągłość (i to jednostajna) odwzorowania (7.11) wynika natychmiast z nierówności (7.2), str. 243.

Dla $(x_0, y_0) \in E \times E$ i $(x, y) \in E$ jest

$$0 \leqslant \|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\|,$$

skąd wynika ciągłość odwzorowania (7.12).

Dla $\lambda,\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$0 \leqslant \rho(\lambda x, \lambda_0 x_0) = \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leqslant |\lambda| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\|,$$

a stąd wynika ciągłość odwzorowania (7.13). □

Twierdzenie 7.8. *W przestrzeni $\mathbb{R}^k$ wszystkie normy są równoważne.*

Dowód. Niech $\|\cdot\|$ będzie dowolną normą w $\mathbb{R}^k$. Wykażemy, że jest ona równoważna normie $\|\cdot\|_\diamond$.

Niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Dla dowolnego wektora $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ mamy $x = x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k$. Zatem

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_k\| \leqslant |x_1| \|e_1\| + \ldots + |x_n| \|e_k\| \leqslant T \|x\|_\diamond,$$

gdzie $T = \max\{\|e_1\|, \cdots, \|e_k\|\}$. Stąd wynika ciągłość funkcji

$$f : \ \mathbb{R}_k \ni x \mapsto f(x) := \|x\| \in \mathbb{R},$$

ponieważ

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant T \|x - y\|_\diamond.$$

Funkcja f osiąga kres górny $M > 0$ i kres dolny $m > 0$ na zbiorze

$$S := \{x \in \mathbb{R}^k : \ \|x\|_\diamond = 1\},$$

bo jest ciągła, przyjmuje tylko dodatnie wartości na zbiorze S i zbiór S, jako domknięty i ograniczony, jest zwarty. Zatem dla $x \neq 0$ mamy

$$(m \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_\diamond} \right\| \leqslant M) \Rightarrow (m \|x\|_\diamond \leqslant \|x\| \leqslant M \|x\|_\diamond ,$$

co kończy dowód. □

Wniosek 7.9. *W dowolnej, skończenie wymiarowej, przestrzeni wektorowej wszystkie normy są równoważne.*

Dowód. Niech $(E, \|\cdot\|)$ będzie unormowaną, k-wymiarową przestrzenią wektorową i niech $e_1, \ldots, e_k$ będzie bazą tej przestrzeni. Wtedy odwzorowanie

$$I : \ \mathbb{R}^k \ni x = I(x) := (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k \in E$$

jest izomorfizmem (zob. definicja 7.26, str. 255) przestrzeni skończenie wymiarowych. Pozwala ono identyfikować k-wymiarową przestrzeń E z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^k$. Do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że odwzorowanie

$$\|\cdot\|_E : \ \mathbb{R}^k \ni x \mapsto \|I(x)\| \in \mathbb{R}_0 \tag{7.14}$$

jest normą w $\mathbb{R}^k$ i skorzystać z twierdzenia 7.8, str. 245, o równoważności norm w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. □

7.2. Przestrzenie Banacha

Przestrzenie Banacha to bardzo szeroka klasa przestrzeni, w których „można uprawiać” analizę matematyczną. Istotną rolę odgrywają tu trzy podstawowe cechy przestrzeni Banacha:

1. na ich elementach można wykonywać podstawowe operacje algebraiczne, jakimi są dodawanie (odejmowanie) i mnożenie przez liczby (skalary), bo są przestrzeniami wektorowymi,
2. działania dodawania i mnożenia przez liczby są działaniami ciągłymi, bo topologia jest wyznaczona przez normę,

3. postulowana w definicji (zob. definicja 7.10) zupełność umożliwia wykazanie ważnych dla zastosowań twierdzeń.

Definicja 7.10. Przestrzeń unormowaną $(E, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią Banacha*, gdy jako przestrzeń metryczna (E, ρ), z metryką ρ wyznaczoną przez normę (zob. (7.9), twierdzenie 7.4, str. 244), jest przestrzenią metryczną zupełną.

Stefan Banach
Ur. 30 marca 1892 w Krakowie
Zm. 31 sierpnia 1945 we Lwowie

Banacha zaliczamy do twórców współczesnej analizy funkcjonalnej. Uzyskał też znaczące wyniki z teorii przestrzeni wektorowych topologicznych, teorii miary i całki oraz szeregów ortogonalnych. Zaliczany jest do grona najwybitniejszych matematyków polskich.

Przykład **7.11** (przestrzeń trywialna)**.** Na przestrzeni trywialnej $E = \{0\}$ można określić tylko jedną normę – jest nią norma zerowa. Przestrzeń E z metryką wyznaczoną przez tę normę jest zupełna. Zatem przestrzeń trywialna jest przestrzenią Banacha.

Przykład **7.12.** Przestrzeń $\mathbb{R}^n$, niezależnie od wyboru normy, jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 7.13. *Iloczyn kartezjański przestrzeni Banacha jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ będą przestrzeniami Banacha. Oznacza to, że każda z przestrzeni E_j z metryką ρ_j wyznaczoną przez normę $\|\cdot\|_j$ jest przestrzenią zupełną. Stąd, zgodnie z twierdzeniem 6.73, str. 236, przestrzeń $E := E_1 \times \ldots \times E_n$, jako iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych zupełnych, jest przestrzenią zupełną, a więc jest przestrzenią Banacha. $\square$

Twierdzenie 7.14. *Każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha E jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech F będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Bancha E. Na mocy twierdzenia 6.72, str. 236 F jest przestrzenią zupełną, co kończy dowód. $\square$

Bardzo ważnymi przykładami przestrzeni Banacha są przestrzenie, w których wektorami są funkcje. W szczególności, gdy dziedziną rozważanych funkcji jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, to takie przestrzenie nazywane są *przestrzeniami ciągów*.

Klasyczne przestrzenie funkcyjne

Niech $X \neq \emptyset$ będzie dowolnym zbiorem i $(E, \|\cdot\|)$ przestrzenią unormowaną. Przestrzeń

$$\mathcal{B}(X;E) := \{f : X \to E : \ f \text{ jest ograniczona}\} \tag{7.15}$$

z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia przez liczby[1] jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.

Każdej funkcji $f \in \mathcal{B}(X;E)$ możemy przypisać nieujemną liczbę rzeczywistą

$$\|f\|_X := \sup\{\|f(x)\| : \ x \in X\} \quad \text{dla } f \in \mathcal{B}(X;E). \tag{7.16}$$

Stwierdzenie 7.15. *Odwzorowanie*

$$\|\cdot\|_X : \ \mathcal{B}(X;E) \ni f \mapsto \|f\|_X \in [0, +\infty)$$

jest normą w $\mathcal{B}(X;E)$.

Dowód. Dodatniość odwzorowania $\|\cdot\|_X$ jest oczywista. Do sprawdzenia jednorodności ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}$ i $f \in \mathcal{B}(X;E)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_X &= \sup\{\|\lambda f(x)\| : \ x \in X\} = \sup\{|\lambda|\,\|f(x)\| : \ x \in X\} = \\ &= |\lambda| \sup\{\|f(x)\| : \ x \in X\} = |\lambda|\,\|f(x)\|_X.\end{aligned}$$

Wykażemy teraz nierówność trójkąta. Dla $f, g \in \mathcal{B}(X;E)$ mamy

$$\begin{aligned}\|f+g\|_X &= \sup\{\|f(x)+g(x)\| : \ x \in X\} \leqslant \sup\{\|f(x)\| + \|g(x)\| : \ x \in X\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\|f(x)\| : \ x \in X\} + \sup\{\|g(x)\| : \ x \in X\} = \\ &= \|f\|_X + \|g\|_X,\end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

[1] Tzn. dla $f, g \in \mathcal{B}(X;E)$, $x \in X$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy $f+g$ oraz λf, kładąc $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

Pisząc $\mathcal{B}(X;E)$, będziemy mieli na myśli przestrzeń unormowaną $\mathcal{B}(X;E)$ z normą daną wzorem (7.16), którą nazywa się *normą supremową.*

Stwierdzenie 7.16. *Niech $X \neq \emptyset$ i niech $(E, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią wektorową unormowaną. Jeśli $f_n : X \to E$, $n = 1, 2, \ldots$, jest ciągiem funkcji ograniczonych i $f : X \to E$ daną funkcją, to następujące warunki są równoważne:*
(a) *f_n zmierza jednostajnie*[2] *do f, gdy $n \to \infty$*
(b) *f jest funkcją ograniczoną oraz $f_n \to f$, gdy $n \to \infty$, w przestrzeni $\mathcal{B}(X;E)$.*

Dowód. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Zgodnie z definicją zbieżności jednostajnej istnieje taka liczba naturalna n_0, że

$$\|f_{n_0}(x) - f(x)\| < 1 \quad \text{dla } x \in X.$$

Zatem

$$\|f(x)\| \leqslant \|f_{n_0}(x) - f(x)\| + \|f_{n_0}(x)\| \leqslant 1 + \|f_{n_0}\|$$

dla wszelkich $x \in X$, co daje ograniczoność f.

Jednostajna zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > N,\ x \in X.$$

Zatem $\|f_n - f\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dla $n > N$, co daje (b).

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$ Zgodnie z definicją (7.16) normy w $\mathcal{B}(X;E)$ zachodzi nierówność:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \|f_n - f\|_X \quad \text{dla } x \in X,$$

z której wynika jednostajna zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Stwierdzenie 7.17. *Następujące warunki są równoważne:*
(a) *E jest przestrzenią Banacha,*
(b) *$\mathcal{B}(X;E)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(X;E)$, tzn. ciągiem spełniającym warunek:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall p, q \in \mathbb{N}_N\ \|f_p - f_q\|_X < \varepsilon.$$

Stąd wynika, że dla dowolnego $x \in X$ ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w E, gdyż

$$\forall x \in X\ \forall p, q \in \mathbb{N}_N\ \ \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \|f_p - f_q\|_X < \varepsilon. \tag{7.17}$$

[2] Jednostajną zbieżność będziemy często zapisywać tak: $f_n \rightrightarrows f$, gdy $n \to \infty$.

Na mocy (a) ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę w E. Niech

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

Przechodząc w (7.2) z q do nieskończoności, otrzymamy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall p > N\ \forall x \in X.\ \|f_p(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Stąd wynika, że $f_n \rightrightarrows f$, gdy $n \to \infty$, co zgodnie ze stwierdzeniem 7.16, str. 249, oznacza, że $f_n \to f$, gdy $n \to \infty$, w przestrzeni $\mathcal{B}(X; E)$.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Dla dowodu zauważmy, że punkty przestrzeni E możemy utożsamiać (identyfikować) z takimi funkcjami $f \in \mathcal{B}(X; E)$, które są stałe[3]. Mówiąc bardziej precyzyjnie, takie utożsamienie (oznaczmy je przez I) jest odwzorowaniem

$$I: \ E \ni a \mapsto (f: \ X \ni x \mapsto a) \in \mathcal{B}(X; E).$$

Odwzorowanie I zachowuje normę, tzn.

$$\|I(a)\|_X = \|a\| \quad \text{dla } a \in E. \tag{7.18}$$

Jego obrazem jest domknięta podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{B}(X; E)$, bo tylko funkcje stałe mogą być granicami ciągów funkcji stałych. Domknięte podprzestrzenie przestrzeni Banacha są przestrzeniami Banacha, więc $I(E)$ jest przestrzenią Banacha. Stąd i z (7.18) wynika, że E też jest przestrzenią Banacha. □

Definicja 7.18. Niech $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ będą przestrzeniami unormowanymi.

Będziemy mówili, że odwzorowanie liniowe $f: \ E \to F$ jest *izometrią*, gdy zachowuje normę, tzn. gdy

$$\forall\, x \in E \ \ \|f(x)\|_F = \|x\|_E\,.$$

Uwaga **7.19.** Izometrie przestrzeni unormowanych zachowują odległości między punktami. Istotnie, dla $x, y \in E$ mamy

$$\rho_F(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F = \|x-y\|_E = \rho_E(x, y).$$

Z tego przeliczenia wynika, że dla odwzorowań liniowych zachowywanie normy jest równoważne zachowywaniu odległości pomiędzy punktami i ich obrazami.

[3] Funkcja $f: \ X \to E$ jest stała, tzn. w każdym punkcie $x \in X$ przyjmuje tę samą wartość $a \in E$.

Bardzo ważną podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{B}(X;E)$ jest przestrzeń

$$\mathcal{CB}(X;E) := \{f \in \mathcal{B}(X;E) : \quad f \text{ jest ciągła}\}.$$

Zanotujmy teraz kilka uwag dotyczących stosowanych oznaczeń.

(a) W dalszym ciągu pisząc $\mathcal{CB}(X;E)$, będziemy mieli na myśli tę przestrzeń z normą supremową, tzn. z normą indukowaną z $\mathcal{B}(X;E)$.

(b) Gdy X jest przestrzenią topologiczną zwartą, to $\mathcal{CB}(X;E) = \mathcal{C}(X;E)$, gdyż na przestrzeni zwartej każda funkcja ciągła jest ograniczona.

(c) Gdy $E = \mathbb{R}$, to zamiast $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, $\mathcal{CB}(X;\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ piszemy odpowiednio $\mathcal{B}(X), \mathcal{CB}(X), \mathcal{C}(X)$.

Stwierdzenie 7.20. *Niech $X \neq \emptyset$ będzie przestrzenią topologiczną i E przestrzenią unormowaną.*

Następujące warunki są równoważne:

(a) *E jest przestrzenią Banacha,*

(b) *$\mathcal{C}(X;E)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Na mocy poprzedniej propozycji $\mathcal{B}(X;E)$ jest przestrzenią Banacha. Z faktu, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą wynika, że $\mathcal{CB}(X;E)$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{B}(X;E)$, a więc przestrzenią Banacha.

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$ Jest taki sam jak w stwierdzeniu 7.17, str. 249. □

Przestrzenie ciągów

Przy ustalonym ciele $\mathbb{K}$ definiujemy następujące przestrzenie ciągów:

$$\begin{aligned}
l^\infty &:= \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\\
c &:= \{\{x_n\} \in l^\infty : \ \{x_n\} \text{ ma granicę w } \mathbb{R}\},\\
c_0 &:= \{\{x_n\} \in l^\infty : \ x_n \to 0, \text{ gdy } n \to \infty\},\\
\widetilde{c}_0 &:= \{\{x_n\} \in l^\infty : \ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ x_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Wszystkie te przestrzenie są podprzestrzeniami $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, a więc działania i norma są jednoznacznie określone.

Przestrzeń l^∞ jest przestrzenią Banacha, bo $\mathbb{R}$ jest przestrzenią Banacha. Ten fakt wynika ze stwierdzenia 7.17, str. 249.

Przestrzenie c, c_0 jako domknięte podprzestrzenie przestrzeni Banacha l^∞ są przestrzeniami Banacha.

Przestrzeń $\widetilde{c}_0$ nie jest przestrzenią Banacha, bo nie jest przestrzenią zupełną. Istotnie, ciąg

$$x_n = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots),\ n = 1, 2, \ldots$$

jest w l^∞ zbieżny do $(0, 1, \frac{1}{2}, \ldots)$, zatem jest ciągiem Cauchy'ego w l^∞, a więc i w $\widetilde{c}_0$. Jednak w $\widetilde{c}_0$ ciąg ten nie jest zbieżny, co oznacza, że $\widetilde{c}_0$ nie jest przestrzenią zupełną. Nie jest więc przestrzenią Banacha.

Bardziej złożonym przykładem przestrzeni ciągów jest przestrzeń

$$l^p := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} :\ x_n \in \mathbb{R} \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ i } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}, \quad p \in [0, +\infty)$$

z normą

$$\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\| := (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

jest przestrzenią Banacha.

Rozważania dotyczące tej przestrzeni wykraczają poza zakres tego podręcznika. Podamy jedynie bardziej sformalizowaną jej definicję.

7.3. Przestrzenie Hilberta

Niech E będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

Definicja 7.21. Odwzorowanie

$$(\cdot|\cdot) : E \times E \ni (x, y) \mapsto (x|y) \in \mathbb{R} \tag{7.19}$$

nazywamy *iloczynem skalarnym* w E, gdy
(i) $\forall\, x, y \in E \quad (x|y) = (y|x)$ – *symetria*,
(ii) $\forall\, x, y, z \in E \quad (x + y|z) = (x|z) + (y|z)$ – *addytywność*,
(iii) $\forall\, x, y \in E\, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ – *jednorodność*,
(iv) $\forall\, x \in E \quad x \neq 0 \Longrightarrow (x|x) > 0$ – *dodatniość*.
Gdy odwzorowanie (7.19) jest iloczynem skalarnym, to parę $(E, (\cdot|\cdot))$ nazywamy *przestrzenią unitarną*. Mówiąc o przestrzeni unitarnej, często pomijamy drugi element pary i piszemy krótko, E jest przestrzenią unitarną.

Lemat 7.22. *Jeśli $E, (\cdot|\cdot)$ jest przestrzenią unitarną i*

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)} \quad dla\ x \in E, \tag{7.20}$$

to dla dowolnych $x, y \in E$ zachodzą nierówności:

$$|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\| \qquad \text{– nierówność Schwarza,} \tag{7.21}$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \text{– nierówność Minkowskiego.} \tag{7.22}$$

Dowód. Ustalmy $x, y \in E$. Jeśli $y = 0$, obie nierówności są oczywiste. Załóżmy, że $y \neq 0$ i weźmy

$$v := x - \frac{(x|y)y}{\|y\|^2} \in E.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (v|v) &= (x|x) - \left(x|\frac{(x|y)y}{\|y\|^2}\right) - \left(\frac{(x|y)y}{\|y\|^2}|x\right) + \left(\frac{(x|y)y}{\|y\|^2}|\frac{(x|y)y}{\|y\|^2}\right) \\ &= \|x\|^2 - 2\frac{(x|y)}{\|y\|^2}(x|y) + \frac{(x|y)(x|y)}{\|y\|^4}(y|y) = \|x\|^2 - \frac{(x|y)^2}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

co daje nierówność Schwarza. Teraz mamy

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leqslant^{4} \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

co daje nierówność Minkowskiego. □

Stwierdzenie 7.23. *Jeśli E jest przestrzenią unitarną, to odwzorowanie*

$$E \ni x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x|x)} \in \mathbb{R}_0 \tag{7.23}$$

jest normą na E.

Dowód. Dodatniość i jednorodność normy (7.23) wynika z dodatniości i jednorodności iloczynu skalarnego.

Nierówność trójkąta wynika z nierówności Minkowskiego. □

[4] Tu korzystamy z nierówności Schwarza.

Mówiąc o normie w przestrzeni unitarnej, mamy zwykle na myśli normę (7.23). Z kolei, tak samo jak w przypadku przestrzeni unormowanej (por. str. 244), mówiąc o metryce (topologii), mamy na myśli metrykę (topologię) wyznaczoną przez tę normę. O normie (7.23) (metryce i topologii przez nią wyznaczonej) mówimy, że została wyznaczona przez iloczyn skalarny. Tak więc każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną, a więc i metryczną, i topologiczną. Bardzo ważną rolę odgrywają te przestrzenie unitarne, które jako przestrzenie unormowane są przestrzeniami Banacha. Nazywamy je przestrzeniami Hilberta.

David Hilbert
Ur. 23 stycznia 1862 w Królewcu
Zm. 14 lutego 1943 w Getyndze

Matematyk niemiecki. Zajmował się algebraiczną teorią liczb, teorią równań całkowych, zagadnieniami rachunku wariacyjnego, podstawami geometrii i logiki matematycznej oraz problemami fizyki matematycznej. W roku 1900 Hilbert przedstawił 23 problemy dotyczące podstawowych, według niego, kierunków badań matematycznych.

Definicja 7.24 (przestrzeni Hilberta). Mówimy, że przestrzeń unitarna E jest *przestrzenią Hilberta*, gdy E jako przestrzeń unormowana, z normą wyznaczoną przez iloczyn skalarny (7.23), jest przestrzenią Banacha.

Przykład **7.25.** Niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym

$$(\cdot|\cdot)_\circ : \ \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto (x|y)_\circ := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \in \mathbb{R} \tag{7.24}$$

jest przestrzenią Hilberta. Przy takim iloczynie skalarnym nierówności (7.21), (7.22) z lematu 7.22, str. 253, mają postać

$$|x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}, \tag{7.25}$$

$$\|x + y\|_\circ \leqslant \|x\|_\circ + \|y\|_\circ\,, \tag{7.26}$$

gdzie $\|\cdot\|_\circ$ jest normą w $\mathbb{R}^n$ zdefiniowaną przez (7.6). Nierówność Minkowskiego jest nierównością trójkąta dla tej normy.

7.4. Odwzorowania liniowe i wieloliniowe ciągłe

Niech E, F będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi.

Definicja 7.26. Odwzorowanie $f : E \to F$ nazywamy *odwzorowaniem liniowym* (*funkcjonałem liniowym*, gdy $F = \mathbb{R}$), gdy dla dowolnych $x, y \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ – *addytywność*,

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ – *jednorodność*.

Odwzorowanie liniowe $f : E \to F$ nazywamy *izomorfizmem*, gdy jest wzajemnie jednoznaczne.

Stwierdzenie 7.27. *Dla dowolnego odwzorowania liniowego $f : E \to F$ następujące warunki są równoważne:*

(a) f jest odwzorowaniem ciągłym (w każdym punkcie),

(b) f jest ciągłe w jakimś punkcie $a \in E$,

(c) f jest ciągłe w punkcie 0,

(d) f jest ograniczone w pewnym otoczeniu punktu 0,

(e) istnieje taka stała $M \geqslant 0$, że dla dowolnego $x \in E$, takiego że $\|x\| \leqslant 1$, zachodzi nierówność $\|f(x)\| \leqslant M$,

(f) istnieje taka stała $M \geqslant 0$, że $\|f(x)\| \leqslant M\,\|x\|$, dla $x \in E$,

(g) f jest jednostajnie ciągłe.

Dowód. $\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$ Ta implikacja jest oczywista.

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(c)}}$ Dla dowodu weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny do punktu 0 i zauważmy, że $x_n + a \to a$. Z ciągłości f w punkcie a i liniowości f wynika, że $f(x_n) + f(a) = f(x_n + a) \to f(a)$. Stąd wynika, że $f(x_n) \to 0 = f(0)$, bo każde odwzorowanie liniowe przyjmuje w zerze wartość zero.

$\boxed{\text{(c)}\Rightarrow\text{(d)}}$ Dla dowodu tej implikacji wystarczy zastosować definicję Cauchy'ego ciągłości f w punkcie 0.

$\boxed{\text{(d)}\Rightarrow\text{(e)}}$ Warunek (d) oznacza, że istnieją takie stałe $\widetilde{M} \geqslant 0$, $r > 0$, że

$$\|x\| \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\| \leqslant \widetilde{M}. \tag{7.27}$$

Jeśli $\|x\| \leqslant 1$, to $\|rx\| \leqslant r$. Zatem z (7.27) i jednorodności wynika, że $\|f(rx)\| \leqslant \widetilde{M}$, więc $\|f(x)\| \leqslant M := \frac{\widetilde{M}}{r}$.

$\boxed{\text{(e)}\Rightarrow\text{(f)}}$ Dla dowodu tej implikacji weźmy dowolne $x \in E$. Jeśli $x = 0$, to nierówność jest oczywista. Jeśli $x \neq 0$, to

$$\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1\right) \Longrightarrow \left(\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M\right) \Longrightarrow (\|f(x)\| \leqslant M\,\|x\|)\,,$$

gdzie M jest stałą postulowaną w punkcie (e).

$\boxed{\text{(f)}\Rightarrow\text{(g)}}$ Wobec liniowości f i założonego warunku (f) mamy

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leqslant M\,\|x-y\|\,.$$

Stąd jednostajna ciągłość f jest prostym wnioskiem.

$\boxed{\text{(g)}\Rightarrow\text{(a)}}$ Ta oczywista implikacja kończy dowód. □

Przestrzeń odwzorowań liniowych ciągłych

Niech E, F będą przestrzeniami wektorowymi unormowanymi nad ciałem $\mathbb{R}$. Celem naszych najbliższych rozważań będzie przestrzeń $\mathcal{L}(E;F)$, której elementami są odwzorowania liniowe ciągłe, tzn.

$$\mathcal{L}(E;F) := \{f:\ f \text{ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym z } E \text{ do } F\}.$$

Przestrzeń ta, wraz z naturalnymi działaniami dodawania odwzorowań i ich mnożeniem przez liczby, jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$, bo zarówno w wyniku dodawania, jak też i mnożenia odwzorowań liniowych ciągłych przez liczby otrzymamy odwzorowanie liniowe ciągłe. Aby zdefiniować normę, dla dowolnego $f \in \mathcal{L}(E;F)$ kładziemy

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\|:\ \|x\| \leqslant 1\}. \tag{7.28}$$

Stwierdzenie 7.28. *Odwzorowanie*

$$\mathcal{L}(E;F) \ni f \mapsto \|f\| \in [0,+\infty), \tag{7.29}$$

gdzie $\|f\|$ *dane jest wzorem* (7.28)*, jest normą.*

Dowód. Dodatniość odwzorowania (7.29) jest prostą konsekwencją definicji (7.28). Do sprawdzenia jednorodności ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}$ i $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Wtedy

$$\|\lambda f\| = \sup\{\|\lambda f(x)\|:\ \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda| \sup\{\|f(x)\|:\ \|x\| \leqslant 1\} = |\lambda|\,\|f\|\,.$$

Wykażemy teraz nierówność trójkąta. Dla $f, g \in \mathcal{L}(E; F)$ mamy

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \sup\{\|f(x)+g(x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\|f(x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\} + \sup\{\|g(x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\} = \|f\| + \|g\|,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Zatem $\mathcal{L}(E; F)$ posiada naturalną strukturę przestrzeni unormowanej.

Przykład **7.29.** Niech $E = \mathbb{R}^k$, $F = \mathbb{R}$. Wówczas odwzorowania liniowe $f : \ E \to F$ są postaci

$$f(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_n = (a|x)_\circ \quad \text{dla } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^k,$$

gdzie $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^k$. Norma f zależy od tego, jaką normę przyjmiemy w $\mathbb{R}^k$. Gdy w $\mathbb{R}^k$ przyjmiemy normę euklidesową, to

$$\|f\| = \|a\|_\circ = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2}.$$

Istotnie, stosując nierówność Schwarza (zob. (7.21)), otrzymamy

$$\begin{aligned}\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\} &= \sup\{\|(a|x)\| : \ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \\ &\leqslant \sup\{\|a\| \, \|x\| : \ \|x\| \leqslant 1\} \leqslant \|a\|.\end{aligned}$$

Stąd $\|f\| \leqslant \|a\|$.

Punkt

$$x := \frac{a}{\|a\|_\circ}$$

jest punktem sfery jednostkowej, w którym

$$f(x) = f\left(\frac{a}{\|a\|_\circ}\right) = \frac{1}{\|a\|_\circ} f(a) = \frac{1}{\|a\|_\circ}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = \|a\|_\circ.$$

Stąd wynika, że $\|f\| \geqslant \|a\|_\circ$, co wobec zachodzenia nierówności przeciwnej oznacza, że $\|f\| = \|a\|_\circ$.

Twierdzenie 7.30. *Jeśli wymiar przestrzeni $(E, \|\cdot\|)$ jest skończony i odwzorowanie $f : \ E \to F$ jest liniowe, to $f \in \mathcal{L}(E; F)$.*

Dowód. Dla dowodu wystarczy wykazać, że f jest ciągłe.

Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie wymiarem przestrzeni E i niech $e_1, \ldots, e_k$ będzie jakąkolwiek jej bazą. Postępując podobnie jak w dowodzie wniosku 7.9, str. 246, o równoważności norm w przestrzeniach skończenie wymiarowych, zauważmy, że odwzorowanie

$$I : \ \mathbb{R}^k \ni x = (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k \in E$$

jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^k$ i E i że odwzorowanie (7.14) pozwala identyfikować normę $\|\cdot\|$ w przestrzeni E z normą

$$\mathbb{R}^k \ni x \to \|I(x)\| \in \mathbb{R}_0 \quad \text{w przestrzeni } \mathbb{R}^k.$$

Stąd wynika, że możemy ograniczyć dowód do przypadku $E = \mathbb{R}^k$.

Jeśli $e_1, \ldots, e_k$ jest bazą kanoniczną $\mathbb{R}^k$, to dla $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ mamy

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_k f(e_k).$$

Stąd

$$\|f(x)\| \leqslant |x_1| \, \|f(e_1)\| + \ldots + |x_k| \, \|f(e_k)\| \leqslant M \, \|x\|_\diamond ,$$

gdzie $M = \sup\{\|f(e_1)\|, \ldots, \|f(e_k)\|\}$. Zatem odwzorowanie f, jako odwzorowanie z $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\diamond)$ do E, jest ciągłe, co wobec równoważności norm w $\mathbb{R}^k$ oznacza ciągłość f, niezależnie od wyboru normy[5]. □

Gdy $E = \mathbb{R}^k$, $F = \mathbb{R}^l$, to odwzorowanie liniowe f jest jednoznacznie wyznaczone przez $l \times k$ wymiarową macierz i zgodnie z twierdzeniem 7.30, str. 257, jest ciągłe. Jednak znalezienie efektywnych wzorów na normę f jest zadaniem znacznie trudniejszym niż w przypadku gdy $l = 1$.

W przeciwieństwie do przestrzeni skończenie-wymiarowych może sie zdarzyć, że wartość normy odwzorowania liniowego ciągłego nie jest przyjmowana w żadnym punkcie sfery jednostkowej.

Przykład **7.31.** Odwzorowanie

$$f : \widetilde{c}_0 \ni \{x_n\} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \in \mathbb{R}$$

jest ciągłą formą liniową, $\|f\| = 2$, ale $\|f(x)\|$ nie przyjmuje wartości 2 w żadnym punkcie x sfery jednostkowej.

Stwierdzenie 7.32. *Dla dowolnego $f \in \mathcal{L}(E; F)$ mamy*

(a) $\|f(x)\| \leqslant \|f\| \, \|x\| \quad$ *dla $x \in E$,*

(b) $\|f\| = \inf\{M \geqslant 0 : \ \|f(x)\| \leqslant M \, \|x\| \quad \text{dla } x \in E\}$,

(c) $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \ \|x\| = 1\}$*, o ile E nie jest przestrzenią trywialną.*

[5]Dla porównania proponujemy zapoznanie się z innym dowodem tego twierdzenia (zob. dowód pierwszej części twierdzenia 7.45, str. 264).

Dowód. Do sprawdzenia nierówności (a) weźmy $E \ni x \neq 0$. Wtedy

$$\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant 1\right) \Longrightarrow \left(\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|f\|\right) \Longrightarrow (\|f(x)\| \leqslant \|f\|\,\|x\|).$$

Niech

$$A := \inf\{M \geqslant 0 : \ \|f(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \text{dla } x \in E\}.$$

Z wykazanego warunku (a) wynika, że $A \leqslant \|f\|$. Przypuśćmy, że $A < \|f\|$ i weźmy jakiekolwiek $\widetilde{A}$, takie że $A < \widetilde{A} < \|f\|$. Dla tak wybranego $\widetilde{A}$ mamy

$$(\|f(x)\| \leqslant \widetilde{A}\,\|x\| \quad \text{dla } x \in E) \Longrightarrow (\|f\| \leqslant \widetilde{A} < \|f\|),$$

co daje sprzeczność.

Do wykazania równości (c) zauważmy, że gdy $0 < \|x\| \leqslant 1$, to

$$\|f(x)\| \leqslant \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|.$$

Stąd $\|f\| \leqslant \sup\{\|f(x)\| : \ \|x\| = 1\}$. Nierówność przeciwna jest oczywista. □

Twierdzenie 7.33. *Jeśli F jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E;F)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{L}(E;F)$. Biorąc $\varepsilon > 0$ oraz $p, q \in \mathbb{N}$, zauważmy, że

$$\|f_p - f_q\| < \varepsilon \Longleftrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|x\| \quad \text{dla } x \in E. \tag{7.30}$$

Stąd wynika, że przy ustalonym $x \in E$ ciąg $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Wobec zupełności F ma on granicę $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $x \in E$.

Z uwagi na to, że

$$f(\alpha x, \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

odwzorowanie f jest liniowe.

Z równoważności (7.30) i warunku Cauchy'ego otrzymujemy lokalnie jednostajną zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zatem f jest ciągłym[6] odwzorowaniem liniowym.

Wobec równoważności (7.30) założony warunek Cauchy'ego ma postać

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall p, q \geqslant N : \ \forall x \in E \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|x\|.$$

Przechodząc z q do $+\infty$ i ponownie korzystając z równoważności (7.30), wykazujemy zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do f w przestrzeni $\mathcal{L}(E;F)$. □

[6] Korzystamy tu z twierdzenia o ciągłości granicy lokalnie jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.

7.5. Izomorfizmy przestrzeni unormowanych

Niech, jak poprzednio, E,F będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem. W naszych rozważaniach zakładamy, że tym ciałem jest $\mathbb{R}$.

Definicja 7.34. Odwzorowanie liniowe $f: E \to F$ nazywamy *izomorfizmem przestrzeni unormowanych* (*izomorfizmem topologicznym*) E i F, gdy spełnia następujące dwa warunki:
1. f jest bijektywne,
2. $f \in \mathcal{L}(E; F)$ i $f^{-1} \in \mathcal{L}(F; E)$.

Zbiór izomorfizmów przestrzeni E i F oznaczamy przez $\mathrm{Isom}(E; F)$. Gdy E, F są przestrzeniami Banacha (Hilberta), to elementy przestrzeni $\mathrm{Isom}(E; F)$ nazywamy izomorfizmami przestrzeni Banacha (Hilberta).

Stwierdzenie 7.35. *Dla odwzorowania liniowego bijektywnego $f: E \to F$ następujące warunki są równoważne:*
(i) *f jest izomorfizmem przestrzeni unormowanych,*
(ii) $\exists\, m > 0,\ M > 0 \ :\quad m\,\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant M\,\|x\|$ *dla* $x \in E$.

Dowód. $\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Stała M istnieje, bo $f \in \mathcal{L}(E; F)$ (zob. stwierdzenie 7.27, pkt. (f), str. 255). Z kolei f^{-1} jest ciągłe, więc istnieje taka stała $k > 0$, że

$$\left\|f^{-1}(y)\right\| \leqslant k\,\|y\| \quad \text{dla } y \in F. \tag{7.31}$$

Stąd, biorąc $x = f^{-1}(y)$, otrzymamy $\|x\| \leqslant k\,\|f(x)\|$ i dla $m = \frac{1}{k}$ nierówność:

$$m\,\|x\| \leqslant \|f(x)\| \quad \text{dla } x \in E.$$

$\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(i)}}$ Ciągłość f wynika z założonej w (ii) nierówności:

$$\|f(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \text{dla } x \in E.$$

Biorąc $y = f(x)$, otrzymamy $m\left\|f^{-1}(y)\right\| \leqslant \|y\|$, co dla $k = \frac{1}{m}$ daje

$$\left\|f^{-1}(y)\right\| \leqslant k\,\|y\| \quad \text{dla } y \in F$$

i kończy dowód.

□

Przypomnijmy, że gdy przestrzenie E, F są skończenie wymiarowe, to każde odwzorowanie liniowe $f: E \to F$ jest ciągłe. Stąd wynika, że jeśli odwzorowanie liniowe f jest wzajemnie jednoznaczne, to f jest izomorfizmem topologicznym.

Gdy wymiary przestrzeni E, F są nieskończone, to nie każde odwzorowanie liniowe $f: E \to F$ jest ciągłe. Istnieją też przykłady odwzorowań liniowych ciągłych i wzajemnie jednoznacznych, które nie są izomorfizmami topologicznymi.

Przykład **7.36.** Odwzorowanie

$$f : \widetilde{c}_0 \ni \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\frac{1}{n+7}x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{c}_0$$

jest liniowe, ciągłe i wzajemnie jednoznaczne; $\|f\| = \frac{1}{7}$ i f^{-1} nie jest ciągłe.

W tym przykładzie przestrzeń $E = F = \widetilde{c}_0$ jest przestrzenią unormowaną, ale nie jest przestrzenią Banacha.

Twierdzenie 7.37 (Banacha). *Jeśli E, F są przestrzeniami Banacha i i odwzorowanie liniowe $f: E \to F$ jest ciągłe i wzajemnie jednoznaczne, to $f^{-1} \in \mathcal{L}(F; E)$.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia można znaleźć np. w [2], str. 126. □

7.6. Odwzorowania wieloliniowe ciągłe

Niech $E_1, \dots, E_k$, F będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem. W naszych rozważaniach będzie to ciało $\mathbb{R}$. Dla przypomnienia podamy teraz definicję odwzorowania k-liniowego.

Definicja 7.38. Mówimy, że odwzorowanie $f: E := E_1 \times \dots \times E_k \to F$ jest *k-liniowe*, jeśli jest liniowe ze względu na każdą ze swoich zmiennych, tzn. wtedy, gdy dla dowolnego $(a_1, \dots, a_k) \in E$ każde z odwzorowań

$$E_i \ni x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_k), \quad i = 1, \dots, k$$

jest liniowe.

Aby mówić o ciągłości odwzorowań wieloliniowych, zakładać będziemy, że przestrzenie $E_1, \dots, E_k$, F są unormowane i w iloczynie kartezjańskim przyjmować będziemy normę produktową, tzn. jedną z równoważnych norm zdefiniowanych w przykładzie 7.3, str. 243.

Stwierdzenie 7.39. *Niech $E_1, \ldots, E_k$, F będą przestrzeniami wektorowymi unormowanymi. Dla dowolnego odwzorowania k-liniowego $f : E_1 \times \ldots \times E_k \to F$ następujące warunki są równoważne:*
(a) *f jest ciągłe (w każdym punkcie),*
(b) *f jest ciągłe w jakimś punkcie $a \in E_1 \times \ldots \times E_k$,*
(c) *f jest ciągłe w punkcie 0,*
(d) *f jest ograniczone w pewnym otoczeniu punktu 0,*
(e) *istnieje takie $M \geqslant 0$, że*

$$(x_i \in E_i,\ \|x_i\| \leqslant 1 \quad \textit{dla } i = 1, \ldots, k) \Rightarrow (\|f(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant M),$$

(f) *istnieje takie $M \geqslant 0$, że*

$$\|f(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant M \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\| \quad \textit{dla } (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \ldots \times E_k.$$

Dowód. Dowody implikacji $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f)$, z niewielkimi zmianami, są takie same jak analogicznych implikacji występujących w stwierdzeniu 7.27, str. 255.

$\boxed{\text{(f)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Ta implikacja jest nieco trudniejsza do udowodnienia. Do jej wykazania ustalmy $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E := E_1 \times \ldots \times E_k$ i ciąg $x^\nu = (x_1^\nu, \ldots, x_k^\nu) \in E$ zbieżny do x. Odejmując i dodając odpowiednie składniki, otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\|f(x^\nu) - f(x)\| = \|f(x_1^\nu, \ldots, x_k^\nu) - f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \\
&\leqslant \|f(x_1^\nu, \ldots, x_k^\nu) - f(x_1, x_2^\nu \ldots, x_k^\nu)\| + \\
&+ \|f(x_1, x_2^\nu, \ldots, x_k^\nu) - f(x_1, x_2, x_3^\nu, \ldots, x_k^\nu)\| + \\
&+ \ldots + \|f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^\nu) - f(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant \\
&\leqslant M \, \|x_1^\nu - x_1\| \, \|x_1^\nu\| \cdot \ldots \cdot \|x_k^\nu\| + \ldots + M\| \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_{n-1}\| \, \|x_k^\nu - x_k\| \, .
\end{aligned}$$

Stąd dostajemy zbieżność $\|f(x^\nu) - f(x)\|$ do 0, gdy $\nu \to \infty$, a to oznacza, że

$$f(x^\nu) \to f(x), \text{ gdy } x^\nu \to x.$$

Zatem odwzorowanie f jest ciągłe w punkcie x, co wobec dowolności wyboru punktu x oznacza ciągłość f w każdym punkcie przestrzeni E. $\square$

Przestrzeń odwzorowań wieloliniowych ciągłych

Niech, jak poprzednio, $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni wektorowych unormowanych. Wraz z naturalnymi działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia ich przez skalary (liczby) przestrzeń

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F) := \{f : \ f \text{ jest } k\text{-liniowe, ciągłe}\}$$

jest przestrzenią wektorową.

Gdy $E_1 = \ldots = E_k$, to przestrzeń $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ oznaczana jest przez $\mathcal{L}_k(E; F)$.

Podobnie jak w przypadku przestrzeni $\mathcal{L}(E; F)$, dla $f \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ definiujemy normę:

$$\|f\| := \sup\{\|f(x_1, \ldots, x_n)\| : \ x_i \in E_i, \ \|x_i\| \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}. \tag{7.32}$$

Uwaga **7.40.** Gdy każda z przestrzeni $E_1, \ldots, E_k$ jest nietrywialna, to w definicji normy (7.32) kule jednostkowe $\{\|x_j\| \leqslant 1\}$ możemy zastąpić sferami $\{\|x_j\| = 1\}$, $j = 1, \ldots, k$.

Stwierdzenie 7.41. *Jeśli $f \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$, to*

(a) $\|f(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant \|f\| \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\|$ *dla* $x_i \in E_i, \ i = 1, \ldots, k$,

(b) $\|f\| = \inf\{M \geqslant 0 : \ \|f(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant M \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\|$ *dla* $x_i \in E_i, i = 1, \ldots, k$.

Twierdzenie 7.42. *Jeśli F jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ też jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest, z niewielkimi zmianami, taki sam jak dowód analogicznego twierdzenia dla przestrzeni $\mathcal{L}(E; F)$ (zob. twierdzenie 7.33, str. 259). $\square$

Przykład **7.43.** Niech $(E, (\cdot|\cdot))$ będzie przestrzenią unitarną. Wtedy odwzorowanie

$$(\cdot|\cdot) : \ E \times E \ni (x, y) \mapsto (x|y) \in \mathbb{R}$$

jest dwuliniowe i jego norma jest równa 1. Istotnie, z nierówności Schwarza otrzymujemy nierówność $\|(\cdot|\cdot)\| \leqslant 1$. Z drugiej strony

$$|(x|x)| = 1 \|x\| \|x\| \quad \text{dla } x \in E.$$

Stąd $\|(\cdot|\cdot)\| \geqslant 1$, co wobec zachodzenia nierówności przeciwnej oznacza, że $\|(\cdot|\cdot)\| = 1$.

Przykład **7.44.** Niech E, F, G będą przestrzeniami unormowanymi. Wtedy składanie odwzorowań liniowych, tzn. odwzorowanie

$$\circ : \mathcal{L}(E; G) \times \mathcal{L}(E; F) \ni (f, g) \mapsto g \circ f \in \mathcal{L}(E; G),$$

jest dwuliniowe ciągłe.

Dwuliniowość jest prosta do wykazania. Do wykazania ciągłości zauważmy, że dla $x \in E$ zachodzą nierówności:

$$\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| \leqslant \|g\| \|f(x)\| \leqslant \|g\| \|f\| \|x\|.$$

Stąd wynika, że

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \, \|f\| \quad \text{dla } (f, g) \in \mathcal{L}(E; G) \times \mathcal{L}(E; F),$$

co kończy dowód ciągłości odwzorowania „$\circ$” (zob. stwierdzenie 7.39, pkt. f, str. 262).

Podobnie jak dla odwzorowań liniowych (zob. twierdzenie 7.30, str. 257) prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 7.45. *Niech $E_1, \ldots, E_k$, F będą przestrzeniami unormowanymi i niech $f : E_1 \times \ldots \times E_k \to F$ odwzorowaniem k-liniowym.*
Jeśli $E_1, \ldots, E_k$ są skończenie wymiarowe, to $f \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem k.

$\boxed{\text{k=1}}$ Dla ustalonego odwzorowania liniowego $f : E_1 \to F$ definiujemy na E_1 normę[7]

$$\|x\|_f := \|x\| + \|f(x)\| \quad \text{dla } x \in E_1, \tag{7.33}$$

którą nazywamy *normą wykresu*. Przestrzeń E_1 jest skończenie wymiarowa, więc norma (7.33) jest równoważna normie wyjściowej na E_1. Zatem istnieje takie $M > 0$, że

$$\|x\|_f = \|x\| + \|f(x)\| \leqslant \|x\| + \|f\| \, \|x\| \leqslant M \, \|x\| \quad \text{dla } x \in E_1.$$

Stąd wynika, że $\|f(x)\| \leqslant (M-1) \|x\|$. Zatem f jest ciągłe[8], co oznacza, że dla $k = 1$ twierdzenie jest prawdziwe.

$\boxed{\text{(k-1)} \Rightarrow \text{k}}$ Dla $x_1 \in E_1$ definiujemy $(k-1)$-liniowe odwzorowanie

$$g(x_1) : E_2 \times \ldots \times E_k \ni (x_2, \ldots, x_k) \to f(x_1, \ldots, x_k) \in F.$$

Na mocy założenia indukcyjnego $g(x_1) \in \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_k; F)$ i otrzymujemy odwzorowanie

$$g : E_1 \ni x_1 \to g(x_1) \in \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_k; F),$$

które jest liniowe. Korzystając teraz z pierwszego kroku indukcji, otrzymujemy

$$\|g(x_1)\| \leqslant \|g\| \, \|x_1\| \quad \text{dla } x_1 \in E_1, \tag{7.34}$$

co w połączeniu z założeniem indukcyjnym daje nierówność:

$$\|g(x_1)(x_2, \ldots, x_k)\| \leqslant \|g(x_1)\| \, \|x_2\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\|$$

[7] Sprawdzenie, że jest to norma, pozostawiamy czytelnikowi.
[8] Tu można było skorzystać z twierdzenia 7.30, str. 257.

Stąd i z (7.34) mamy

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \|g\| \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_k\| \, .$$

Zatem f jest odwzorowaniem k-liniowym ciągłym (zob. stwierdzenie 7.39, str. 262). □

7.7. Podstawowe identyfikacje

Identyfikacje są też nazywane *utożsamieniami*. Kilka identyfikacji pojawiło się w algebrze liniowej. Między innymi identyfikuje się odwzorowania liniowe przestrzeni skończenie wymiarowych E, F ze stosownymi macierzami. Ta identyfikacja zależy od wyboru baz w tych przestrzeniach. Jest ona, przy zadanych bazach, liniowym izomorfizmem przestrzeni odwzorowań liniowych z E do F z przestrzenią macierzy wymiaru $l \times k$, gdzie k jest wymiarem przestrzeni E, zaś l wymiarem przestrzeni F.

Interesującymi w analizie matematycznej są takie identyfikacje, które są izomorfizmami przestrzeni unormowanych. Najczęściej te, które są izometriami (zob. definicja 7.18, str. 250).

Mówiąc, że dane odwzorowanie liniowe jest identyfikacją (utożsamieniem), będziemy mieli na myśli izometrię. Przedstawiane w dalszej części identyfikacje będziemy też nazywać *izometriami kanonicznymi*.

Do wykazania, że pewne odwzorowania są identyfikacjami, użyteczny jest następujący lemat:

Lemat 7.46. *Jeśli E, F są przestrzeniami unormowanymi, $\varphi \in \mathcal{L}(E; F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F; E)$, $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\|\psi\| \leqslant 1$ oraz $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$, to φ (i symetrycznie ψ) jest izometrią.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że φ nie jest izometrią. Wtedy istniałoby takie $a \in E$, że $\|\varphi(a)\| < \|a\|$, bo założyliśmy, że $\|\varphi\| \leqslant 1$, co jest równoważne temu, że $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\| \quad$ dla $x \in E$. Stąd wynikałoby, że

$$\|a\| = \|(\psi \circ \varphi)(a)\| \leqslant \|\psi\| \, \|\varphi(a)\| < \|a\| \, ,$$

a to nie jest niemożliwe. □

Identyfikacja $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ z F

Niech F będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy każdemu elementowi $x \in F$ możemy w naturalny sposób przyporządkować odwzorowanie

$$\varphi_x : \ \mathbb{R} \ni t \mapsto tx \in F,$$

które jest liniowe, ciągłe[9] i wzajemnie jednoznaczne. To przyporządkowanie pozwala nam identyfikować elementy (wektory) przestrzeni F z odwzorowaniami liniowymi ciągłymi z $\mathbb{R}$ do F.

> Gdy f jest odwzorowaniem liniowym lub wieloliniowym, to
>
> zamiast pisać $f(x_1, \ldots, x_k)$, będziemy często pisać $f_\bullet(x_1, \ldots, x_k)$.

Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.47. *Odwzorowanie*

$$\Phi : \ F \ni x \mapsto \varphi_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; F) \tag{7.35}$$

jest identyfikacją.

Dowód. Dla dowolnego $x \in F$ mamy

$$\|\Phi(x)\| = \sup\{\|tx\| : \ |t| = 1\} = \|x\| .$$

Zatem Φ jest izometrią. □

Identyfikacja $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}; F)$ z F

Niech F będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy każdemu elementowi $x \in F$ możemy w naturalny sposób przyporządkować odwzorowanie

$$\psi_x : \ \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{k\text{-razy}} \ni t = (t_1, \ldots, t_k) \mapsto t_1 \cdot \ldots \cdot t_k x \in F,$$

[9] Liniowość φ_x jest oczywista, ciągłość zaś możemy wykazać bezpośrednio lub skorzystać ze stwierdzenia 7.30, str. 257.

które jest k-liniowe, ciągłe[10] i wzajemnie jednoznaczne. To przyporządkowanie pozwala nam identyfikować elementy (wektory) przestrzeni F z odwzorowaniami k-liniowymi ciągłymi z $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ do F. Mamy bowiem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7.48. *Odwzorowanie*

$$\Psi : \ F \ni x \mapsto \psi_x \in \mathcal{L}(E; F) \tag{7.36}$$

jest identyfikacją.

Dowód. Dla dowolnego $x \in F$ mamy (zob. stwierdzenie 7.41, str. 263)

$$\|\Psi(x)\| = \sup\{\|t_1 \cdot \ldots \cdot t_k x\| : \ |t_1| = |t_2| = \ldots = |t_k| = 1\} = \|x\| .$$

Zatem Φ jest izometrią. □

Identyfikacja $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; \mathcal{L}(E_{n-k}, \ldots, E_n; F))$ z $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$

Niech $E_1, \ldots, E_n$, F będą przestrzeniami unormowanymi i niech $k \in \mathbb{N}$ będzie liczbą z przedziału $[1, n)$. Przestrzenie

$$E := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; \mathcal{L}(E_{n-k}, \ldots, E_n; F)), \quad F := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

są przestrzeniami wektorowymi unormowanymi. Każdemu odwzorowaniu $f \in E$ możemy przyporządkować odwzorowanie $\Phi(f) \in F$, kładąc

$$\Phi(f)_\bullet(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_k)_\bullet(x_{n-k}, \ldots, x_n). \tag{7.37}$$

Twierdzenie 7.49. *Odwzorowanie*

$$\Phi : \ \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; \mathcal{L}(E_{n-k}, \ldots, E_n; F)) \ni f \mapsto \Phi(f) \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F),$$

gdzie $\Phi(f)$ *jest zdefiniowane przez* (7.37)*, jest identyfikacją.*

Dowód. Skorzystamy z lematu 7.46, str. 265. W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)_\bullet(x_1, \ldots, x_n)\| &= \|f(x_1, \ldots, x_k)_\bullet(x_{n-k}, \ldots, x_n)\| \leqslant \\ &\leqslant \|f(x_1, \ldots, x_k)\| \, \|x_{n-k}\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| \leqslant \|f\| \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| .\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy, że $\|\Phi\| \leqslant 1$.

[10] k-liniowość ψ_x jest oczywista, ciągłość zaś możemy wykazać bezpośrednio lub skorzystać ze stwierdzenia 7.39, str. 262.

Do skonstruowania odwzorowania odwrotnego do Φ zauważmy, że odwzorowanie Ψ, które danemu $h \in F$ przyporządkowuje

$$\Psi(h): \ E_1 \times \ldots \times E_k \ni (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \Psi(h)_\bullet(x_{n-k}, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}(E_{n-k}, \ldots, E_n; F)$$

dane wzorem

$$\Psi(h)_\bullet(x_1, \ldots, x_k)_\bullet(x_{n-k}, \ldots, x_n) := h(x_1, \ldots, x_n),$$

jest odwrotne do Φ. Z kolei

$$\|\Psi(h)_\bullet(x_1, \ldots, x_k)_\bullet(x_{n-k}, \ldots, x_n)\| \leqslant \|h(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \|h\| \, \|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\| \, .$$

Stąd wnioskujemy, że $\|\Psi\| \leqslant 1$. Zatem wobec nierówności $\|\Phi\| \leqslant 1$ spełnione są założenia lematu 7.46, str. 265, co oznacza, że zarówno Φ, jak też i Ψ są identyfikacjami. $\square$

ROZDZIAŁ 8

Szeregi w przestrzeniach Banacha

Pojęcie szeregu pojawiło się wtedy, gdy zaistniała konieczność wyznaczenia sumy o nieskończonej ilości składników.

8.1. Podstawowe fakty dotyczące szeregów

Do sformułowania definicji szeregu i jego zbieżności załóżmy, że E jest przestrzenią wektorową unormowaną, zaś $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem jej elementów.

Definicja 8.1. Szeregiem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \tag{8.1}$$

nazywamy parę ciągów $(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, gdzie

$$s_n = x_0 + \ldots + x_n \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots$$

Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem wyrazów szeregu* (8.1), x_n nazywamy *n-tym wyrazem*, ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem sum częściowych*, zaś s_n nazywamy *n-tą sumą częściową* tego szeregu.

O szeregu (8.1) mówimy, że jest zbieżny, gdy ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jego sum częściowych jest zbieżny w E.

Uwaga **8.2.** Niech będzie dany szereg (8.1) o wyrazach w przestrzeni E.

(a) Jeżeli mówimy, że dany szereg jest zbieżny, to rozumiemy, że jest on zbieżny do jakiegoś $s \in E$, co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Ponadto dla szeregu (8.1) zapis

$$\sum_{n=o}^{\infty} x_n = s$$

oznacza, że szereg jest zbieżny i jego suma wynosi s (suma szeregu jest równa s).

(b) Jeżeli szereg nie jest zbieżny, to mówimy, że jest *rozbieżny*. Pewien wyjątek stanowią szeregi rzeczywiste[1]. Gdy ciąg sum częściowych zmierza do $\pm\infty$, to czasami mówimy, że szereg jest zbieżny do $\pm\infty$ albo że jest rozbieżny. Dla przykładu zapis

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$$

oznacza, że ciąg $s_n \to +\infty$, gdy $n \to \infty$.

(c) Zmiana normy w E na normę równoważną nie wpływa na zbieżność szeregu.

Warunek konieczny zbieżności

Warunek konieczny da nam jedynie możliwość stwierdzenia, czy należy kontynuować badanie zbieżności danego szeregu.

Twierdzenie 8.3 (warunek konieczny zbieżności szeregu). *Jeżeli szereg* (8.1) *jest zbieżny, to* $x_n \to 0$, *gdy* $n \to \infty$.

Dowód. Dowód jest taki sam jak dowód warunku koniecznego dla szeregów liczbowych (zob. twierdzenie 2.52, str. 45). $\square$

Działania algebraiczne na szeregach

Na szeregach możemy wykonywać pewne działania algebraiczne. Po wykonaniu takich działań chcemy wiedzieć, czy otrzymany nowy szereg jest zbieżny i jaka jest jego suma.

Stwierdzenie 8.4. *Niech* E, F *będą przestrzeniami wektorowymi unormowanymi. Jeśli* $f \in \mathcal{L}(E; F)$ *i szereg* (8.1) *jest zbieżny w* E, *to*

(i) *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)$ *jest zbieżny,*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n) = f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n)$.

[1] Tzn. szeregi o wyrazach rzeczywistych.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dzięki liniowości i ciągłości f mamy

$$\begin{array}{ccc} f(s_n) & = & f(x_0) + \ldots + f(x_n) \\ {\scriptstyle n\to\infty}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n) & = & \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n), \end{array}$$

co kończy dowód. □

Wniosek 8.5. *Jeśli szeregi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *są zbieżne w* E *oraz* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *to*

(a) *szereg* $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n)$ *jest zbieżny w* E *oraz*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \beta\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)$.

Dowód. Niech $z_n = (x_n, y_n) \in E \times E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wtedy

$$S_n := \sum_{j=0}^{n} z_j = \left(\sum_{j=0}^{n} x_j, \sum_{j=0}^{n} y_j\right) \in E \times E \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Zgodnie z twierdzeniem 6.49, str. 225, ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, bo szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ są zbieżne.

Stosując teraz stwierdzenie 8.4, str. 270, z odwzorowaniem $f \in \mathcal{L}(E \times E; F)$ danym wzorem

$$f : E \times E \ni (x, y) \mapsto \alpha x + \beta y \in E,$$

otrzymujemy tezę. □

Ćwiczenie **8.6.** Wykazać, że zbiór szeregów zbieżnych jest przestrzenią wektorową oraz że odwzorowanie, które szeregowi zbieżnemu przypisuje jego sumę jest liniowe. Jeśli tak, to czy jest ciągłe?

Stwierdzenie 8.7. *Jeżeli ciągi* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *mają prawie wszystkie wyrazy odpowiednio równe*[2], *to*

$$\textit{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \textit{ jest zbieżny} \iff \textit{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ jest zbieżny}.$$

[2]Tzn. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ x_n = y_n$.

Dowód. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \sum_{n=0}^{\infty} (y_n - x_n)$$

jest zbieżny, gdyż prawie wszystkie jego wyrazy są równe 0. Zakładając więc, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, otrzymamy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, gdyż

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + z_n)$$

i symetrycznie dowodzimy implikacji przeciwnej. □

Prawo łączności dla szeregów zbieżnych

Niech jak poprzednio E będzie przestrzenią unormowaną, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem w E, $0 = k_0 < k_1 < \ldots$ silnie malejącym ciągiem liczb naturalnych i niech

$$y_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} x_j \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots$$

Tworzymy teraz szereg $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, tzn. szereg

$$(x_0 + \ldots + x_{k_1-1}) + (x_{k_1} + \ldots + x_{k_2-1}) + \ldots,$$

w którym wyrazy zostały pogrupowane, i pytamy, czy tak utworzony szereg jest zbieżny i jaka jest jego suma?

Twierdzenie 8.8 (łączność sumowania szeregu). *Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ też jest zbieżny i*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dowód. Ciąg

$$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, natomiast jego podciąg

$$s_{k_{n+1}-1} = y_0 + y_1 + \ldots + y_n$$

jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Zatem jako podciąg ciągu zbieżnego jest też zbieżny i ma tę samą granicę. □

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 8.8, bez dodatkowych założeń, nie jest prawdziwe.

Przykład **8.9.** Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ nie jest zbieżny (jest rozbieżny), bo ciąg $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, jego wyrazów, nie jest zbieżny do zera, a więc nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregu (zob. twierdzenie 8.3, str. 270). Tymczasem, łącząc po dwa wyrazy, tzn. biorąc $k_n = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$, otrzymamy szereg

$$(1-1) + (1-1) + \ldots,$$

którego każdy wyraz jest równy 0, a więc jest to szereg zbieżny.

Warunek Cauchy'ego dla szeregów

Warunek Cauchy'ego dla ciągów w przestrzeniach metrycznych został sformułowany na str. 235 (zob. definicja 6.70, str. 235).

Definicja 8.10. Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o wyrazach w przestrzeni unormowanej E spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : (q > p \geqslant N) \Longrightarrow (\|x_{p+1} + \ldots + x_q\| < \varepsilon).$$

Zauważmy, że szereg spełnia warunek Cauchy'ego, gdy ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jego sum częściowych spełnia warunek Cauchy'ego. Istotnie, wynika to z równości:

$$\rho(s_p, s_q) := \|s_q - s_p\| = \|x_{p+1} + \ldots + x_q\|.$$

Twierdzenie 8.11. *Niech E będzie przestrzenią unormowaną i niech $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem o wyrazach w E. Wtedy*

(i) *jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, to spełnia warunek Cauchy'ego,*

(ii) *jeżeli E jest przestrzenią Banacha i szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, to jest zbieżny w E.*

Dowód. Dla dowodu punktu (i) wystarczy do ciągu $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sum częściowych zastosować twierdzenie mówiące o tym, że każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego.

Dla wykazania (ii) wystarczy skorzystać z faktu, że przestrzeń Banacha jest zupełna. □

W przestrzeniach, które nie są zupełne warunek Cauchy'ego jest jedynie warunkiem koniecznym zbieżności szeregu.

Przykład **8.12.** Niech E będzie przestrzenią unormowaną niezupełną[3] i niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w E, który nie jest zbieżny. Biorąc $y_n := x_n - x_{n-1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $y_0 := x_0$ otrzymamy szereg $\sum_{n=o}^{\infty} y_n$ rozbieżny w E spełniający warunek Cauchy'ego.

Szeregi bezwzględnie zbieżne

Niech E będzie przestrzenią unormowaną, zaś $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem jej elementów.

Definicja 8.13. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$. Szeregi zbieżne, które nie są bezwzględnie zbieżne, nazywamy *warunkowo zbieżnymi*.

Twierdzenie 8.14. *Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym w przestrzeni Banacha E, to jest szeregiem zbieżnym i zachodzi nierówność:*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|. \tag{8.2}$$

Dowód. Z założonej bezwzględnej zbieżności wynika, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ dla $0 < p < q$ zachodzi nierówność

$$\|s_q - s_p\| = \|x_{p+1} + \ldots + x_q\| \leqslant \|x_{p+1}\| + \ldots + \|x_q\|,$$

więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ też spełnia warunek Cauchy'ego. Stąd wynika, że jest zbieżny, bo E jest przestrzenią zupełną.

Dla dowodu nierówności (8.2) połóżmy

$$s_n = x_0 + \ldots + x_n, \quad \widetilde{s}_n = \|x_0\| + \ldots + \|x_n\|.$$

Wykorzystując nierówność trójkąta dla normy i to, że ciąg $\{\widetilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, otrzymamy nierówności

$$\|s_n\| \leqslant \widetilde{s}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \widetilde{s}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|,$$

co kończy dowód. □

Ćwiczenie **8.15.** Niech E będzie przestrzenią Banacha. Wykazać, że

[3] Np. $E = \widetilde{c}_0$ zdefiniowaną na str. 251.

1. zbiór $\mathscr{S}$ szeregów bezwzględnie zbieżnych, z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia szeregów przez liczby, jest przestrzenią wektorową,

2. odwzorowanie

$$\mathscr{S} \ni \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \in \mathbb{R}_0$$

jest normą w $\mathscr{S}$,

3. odwzorowanie[4]

$$\mathscr{S} \ni \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in E$$

jest liniowe ciągłe.

Szeregi przemiennie zbieżne

Sumowanie skończonej liczby elementów przestrzeni wektorowej jest przemienne. Często mówimy, że „potasowanie” skończonej liczby składników nie wpływa na ich sumę. Tymczasem sumy nieskończone (sumy szeregów) mogą zależeć od sposobu „potasowania” ich wyrazów.

Uwaga **8.16.** Szereg anharmoniczny (2.60), str. 58, ma tę własność, że dla dowolnego $s \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieje takie jego potasowanie, że potasowany szereg ma sumę równą s. Warto tu dodać, że każdy szereg liczbowy warunkowo zbieżny ma tę własność.

Niech E będzie przestrzenią unormowaną oraz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem w E.

Definicja 8.17. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nazywamy szeregiem *przemiennie zbieżnym*, gdy dla dowolnej bijekcji (permutacji) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ jest zbieżny i jego suma nie zależy[5] od wyboru permutacji σ (nie zależy od potasowania jego wyrazów).

Aby zaznaczyć, że zbiór J jest skończony, będziemy pisać J_{sk}.

[4]Pisząc $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathscr{S}$, mamy na myśli szereg bezwzględnie zbieżny w E, natomiast pisząc $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in E$ – sumę tego szeregu.

[5]Często w definicji przemiennej zbieżności nie zakłada się niezależności sumy szeregu od wyboru permutacji σ.

Lemat 8.18. *Jeżeli szereg $f = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym, to*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J_{sk} \subset \mathbb{N}\ \forall H_{sk} \subset \mathbb{N} : (H \cap J = \emptyset) \Longrightarrow \sum_{n \in H} \|x_n\| < \varepsilon \tag{8.3}$$

oraz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J_{sk} \subset \mathbb{N}\ \forall H_{sk} \subset \mathbb{N} : (H \cap J = \emptyset) \Longrightarrow \left\| \sum_{n \in H} x_n \right\| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Dowód. Warunek (8.3) wynika bezpośrednio z warunku Cauchy'ego bezwzględnej zbieżności szeregu f.

Warunek (8.4) wynika z (8.3) ponieważ

$$\left\| \sum_{n \in H} x_n \right\| \leqslant \sum_{n \in H} \|x_n\| .$$

□

Twierdzenie 8.19 (o tasowaniu szeregu). *Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest przemiennie zbieżny.*

Dowód. Niech $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ i niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną permutacją $\mathbb{N}$. Dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mamy nierówności

$$\left\| \sum_{n=0}^{\nu} x_{\sigma(n)} - s \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{\nu} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\mu} x_n \right\| + \left\| \sum_{n=\mu+1}^{\infty} x_n \right\| .$$

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ dobierzmy do $\varepsilon/3$ zbiór skończony J z warunku (8.4). Wtedy dla $\mu := \max J$ otrzymamy

$$\left\| \sum_{n=0}^{\nu} x_{\sigma(n)} - s \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{n=0}^{\nu} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\mu} x_n \right\| .$$

Biorąc $\nu \geqslant \max \sigma^{-1}(\{1, \ldots, M\})$, otrzymujemy z (8.4)

$$\left\| \sum_{n=0}^{\nu} x_{\sigma(n)} - s \right\| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon,$$

czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = s,$$

co kończy dowód. □

Uwaga **8.20.** Można wykazać, że w $\mathbb{R}$ zbieżność przemienna jest równoważna bezwzględnej i że ta równoważność przenosi się na przestrzenie skończenie wymiarowe. Można też wykazać, że równoważność przemiennej zbieżności z bezwzględną charakteryzuje przestrzenie skończenie wymiarowe.

Podamy teraz przykład przestrzeni i szeregu przemiennie zbieżnego w tej przestrzeni, który nie jest bezwzględnie zbieżny.

Przykład **8.21.** Niech $E = l^{\infty}$ i niech

$$\begin{aligned} x_0 &= (0, 0, \ldots), \\ x_1 &= (0, 1, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots) \quad \text{dla } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest jest przemiennie zbieżny w l^{∞} do ciągu harmonicznego $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$. Nie jest on bezwzględnie zbieżny, bo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

a ten szereg jest rozbieżny.

Szeregi funkcyjne w przestrzeni Banacha

Twierdzenia z rozdziału 4.6, dotyczące szeregów funkcyjnych, bez większych problemów można przenieść na szeregi funkcyjne w przestrzeniach Banacha.

Do sformułowania definicji szeregu funkcyjnego w przestrzeni Banacha i jego zbieżności załóżmy, że E jest przestrzenią Banacha, zaś $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji o wartościach w E, określonych na zbiorze D. O zbiorze D będziemy zakładać, że jest niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej X.

Definicja 8.22. Szeregiem funkcyjnym

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \tag{8.5}$$

nazywamy parę ciągów $(\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, gdzie

$$s_n : \ D \ni x \mapsto f_0(x) + \ldots + f_n(x) \in E \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots$$

Ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem wyrazów szeregu* (8.5), f_n nazywamy n*-tym wyrazem*, ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *ciągiem sum częściowych*, zaś s_n nazywamy n*-tą sumą częściową* tego szeregu.

Definicja 8.23. O szeregu (8.5) mówimy, że jest

1. *zbieżny w punkcie* $x \in D$, gdy ciąg $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w E,
2. *zbieżny w* D *(punktowo zbieżny)*, gdy ciąg $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w każdym punkcie $x \in D$,
3. *bezwzględnie zbieżny w punkcie* $x \in D$, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\|$ jest zbieżny,
4. *bezwzględnie zbieżny w* D, gdy jest bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie $x \in D$,
5. *jednostajnie zbieżny w* D, gdy ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny w D.

Uwaga **8.24.** Niech będzie dany szereg (8.5), którego wyrazy f_n są funkcjami określonymi w zbiorze D.

(a) Jeżeli mówimy, że dany szereg jest zbieżny, to rozumiemy, że jest on zbieżny do jakiejś funkcji $s : \ D \to E$, co oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \quad \text{dla } x \in D.$$

Ponadto dla szeregu (8.5) zapis

$$\sum_{n=o}^{\infty} f_n = s$$

oznacza, że szereg jest zbieżny i jego suma wynosi s. Rodzaj zbieżności najczęściej wynika z kontekstu.

(b) Jeżeli szereg nie jest zbieżny, to mówimy, że jest *rozbieżny*.

(c) Zmiana metryki w D na metrykę równoważną lub normy w E na normę równoważną nie wpływa na zbieżność szeregu funkcyjnego.

Jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych

Twierdzenia dotyczące granic ciągów funkcyjnych bez większego trudu można przenieść na sumy szeregów funkcyjnych. Przykładem takim jest twierdzenie 6.56, str. 228. Dla szeregów funkcyjnych ma ono postać.

Twierdzenie 8.25. *Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji (odwzorowań) z przestrzeni D do E i niech szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ będzie jednostajnie zbieżny w D do funkcji $s : \ D \to E$.*

(i) *Jeżeli wszystkie funkcje f_n są ciągłe w $a \in D$, to s też jest ciągła w punkcie a.*
(ii) *Jeżeli f_n są ciągłe w D, to s jest ciągła w D.*
(iii) *Jeżeli f_n są jednostajnie ciągłe w D, to s jest jednostajnie ciągła w D.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeżeli wszystkie funkcje ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągłe (odpowiednio jednostajnie ciągłe), to sumy częściowe też są ciągłe (odpowiednio jednostajnie ciągłe) i skorzystać z twierdzenia 6.56, str. 228. □

Jednostajna zbieżność nie jest warunkiem koniecznym, aby suma szeregu funkcji ciągłych była funkcją ciągłą (zob. przykład 4.70, str. 137).

W wielu rozważaniach przydatny okazuje się warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego.

Twierdzenie 8.26. *Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to dla szeregu funkcyjnego $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, o wyrazach $f_n : D \to E$, następujące dwa warunki są równoważne:*
(i) *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny w D,*
(ii) *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ spełnia warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności, tzn.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall (q > p \geqslant N)\ \forall x \in D\ \ \|f_{p+1}(x) + \ldots + f_q(x)\| < \varepsilon.$$

Badanie jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych nie jest łatwe. W wielu przypadkach użyteczne okazuje się kryterium Weierstrassa (jednostajnej zbieżności).

Twierdzenie 8.27 (kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności). *Niech E będzie przestrzenią Banacha, D dowolnym zbiorem, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szeregiem liczbowym zbieżnym i niech $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ będzie szeregiem funkcyjnym o wyrazach $f_n : D \to E$, takich że*

$$\sup\{\|f(x)\| :\ x \in D\} \leqslant a_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny w D.

Dowody twierdzeń 8.25, 8.26 i 8.27 są odpowiednio takie same jak dowody twierdzeń 4.69, str. 137, 4.71, str. 138 i 4.72, str. 139.

Bibliografia

[1] H. Cartan, *Calcul differentiel, Formes differentiel*, Hermann, Paris 1971.

[2] J. Chmieliński, *Analiza funkcjonalna, notatki do wykładu*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2004.

[3] L. M. Drużkowski, *Analiza matematyczna. Podstawy*, Wydawnictwo UJ, Kraków 1998.

[4] J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Acad. Press, New York and London 1960.

[5] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom I* PWN, Warszawa 1962.

[6] J. Dugundi, A. Granas, *Fixed Point Theory*, PWN, Warszawa 1982.

[7] W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1978.

[8] T. Krasiński, *Analiza matematyczna. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Uniw. Łódzkiego, Łódź 2001.

[9] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1979.

[10] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1959.

[11] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1973.

[12] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1969.

[13] R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Wykaz oznaczeń

$\mathbb{N}$	liczby naturalne, 9
$\mathbb{N}_k$	liczby naturalne większe lub równe k, 9
$\mathbb{Q}$	liczby wymierne, 9
$\mathbb{R}$	liczby rzeczywiste, 9
$\mathbb{R}_+$	liczby rzeczywiste dodatnie, 9
$\mathbb{R}_k$	liczby rzeczywiste większe lub równe k, 9
$\mathbb{Z}$	liczby całkowite, 9
$\mathbb{Z}_k$	liczby całkowite większe lub równe k, 9
$\inf A$	kres dolny, 13
$\sup A$	kres górny, 13
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	szereg o wyrazach a_n, 40
sinh	sinus hiperboliczny, 65
cosh	cosinus hiperboliczny, 65
tanh	tangens hiperboliczny, 65
cosech	cosecans hiperboliczny, 66
sech	secans hiperboliczny, 66
ctgh	cotangens hiperboliczny, 66
id_{X}	funkcja tożsamościowa na X, 69
f^{-1}	funkcja odwrotna, 71
$\operatorname{arc}\sin$	arcus sinus, 73
$\operatorname{arc}\cos$	arcus cosinus, 73
arctg	arcus tangens, 74
arcctg	arcus cotangens, 74
arsinh	area sinus hiperboliczny, 75
arcosh	area cosinus hiperboliczny, 76

Indeks