mojej M.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

JAN BIELSKI

WPROWADZENIE DO INŻYNIERSKICH ZASTOSOWAŃ METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

POMOC DYDAKTYCZNA

Kraków 2010

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jan Kazior

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW DYDAKTYCZNYCH

Maria Misiągiewicz

REDAKTOR SERII Antoni Gondek
Wydział Mechaniki

RECENZENT Piotr Duda

SEKRETARZ SEKCJI Agnieszka Filosek

OPRACOWANIE REDAKCYJNE Michał Stachowski

PROJEKT OKŁADKI Bogdan Bochenek

© Copyright by Politechnika Krakowska, Kraków 2010

ISBN 978-83-7242-552-2

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel.: 12 628 37 25, fax: 12 628 37 60
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl ▢ www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 6,00. Podpisano do druku 13.08.2010 r.

Zam. 156/2010 Nakład 300 egz. Cena zł 19,00

SPIS TREŚCI

Wprowadzenie 7
Literatura 8
Dlaczego MES 9
Główne korzyści 10
Zagrożenia 11
Model 11
Ilustracja metody na przykładzie analizy płaskiej kratownicy 15
Macierz geometryczna 18
Macierz sił wewnętrznych 19
Macierz sztywności 20
Agregacja i podstawowy układ równań MES 21
Rozwiązanie układu równań 25
Uwzględnienie efektów zginania 27
Funkcje kształtu 28
Przykład doboru funkcji kształtu 31
Transformacja do układu globalnego 33
Transformacja powrotna do układów lokalnych 37
Stan płaski 37
Element stałego odkształcenia 38
Ogólne zasady postępowania przy rozwiązywaniu zadań MES 42
Przemieszczeniowa MES 43
Punkt po punkcie 44
Dokładność rozwiązania 45
Jeszcze o dyskretyzacji modelu 45
Dyskretyzacja obciążeń 45
Dyskretyzacja warunków brzegowych 46
Zbieżność i dokładność rozwiązania 47
Testowanie rozwiązania dyskretnego 50
Podział zadań między projektantem i systemem komputerowym 50
MES jako przybliżona metoda rozwiązywania równań różniczkowych 52
Dostępne pakiety 56
ANSYS – ogólnie o środowisku pracy 58
Sposoby modelowania geometrii obiektów w ANSYSie 60
Modelowanie pośrednie 60
Modelowanie bezpośrednie 61
Import modelu 62

Pierwsze ćwiczenia z ANSYSem 62
Belka wspornikowa 63
Rama przestrzenna 84
Płytka z otworem 92
Uchwyt w płaskim stanie naprężenia 102
Tekstowy zapis modelu 108
Belka 109
Rama 110
Płytka z otworem 111
Uchwyt w płaskim stanie naprężenia 112
Modelowanie konstrukcji belkowych 114
Dobór typu elementu 115
Właściwości przekroju 115
Dyskretyzacja 118
Obciążenia 121
Przegląd wyników 122
Słowniczek 122

Wprowadzenie

Metoda elementów skończonych MES (ang. *finite element method FEM*) jest obecnie podstawowym narzędziem obliczeniowym inżyniera. Zastosowana w profesjonalnych pakietach, sprzężona z programami komputerowego wspomagania projektowania *CAD* (*Computer Aided Design*), daje możliwość rozwiązywania coraz bardziej złożonych problemów mechaniki konstrukcji, mechaniki płynów, przepływu i wymiany ciepła, pól magnetycznych czy zagadnień pól sprzężonych. Dzięki zamianie, w drodze dyskretyzacji, problemów analizy matematycznej opisywanych układem równań różniczkowych ze złożonymi warunkami brzegowymi na zadania algebraiczne, MES pozwala rozwiązywać problemy inżynierskie, dla których rozwiązania analitycznego nie da się uzyskać. Jednocześnie rozwój współczesnego sprzętu komputerowego – zarówno w zakresie szybkości obliczeń, wielkości pamięci operacyjnej, jak też możliwości grafiki – umożliwia każdemu inżynierowi korzystanie z tego narzędzia „na biurku", bez potrzeby zlecania zadań wyspecjalizowanym centrom komputerowym.

Praktyczne zastosowanie MES wymaga jednak od inżyniera specjalnego przygotowania, aby z jednej strony potrafił używać tego narzędzia sprawnie i efektywnie, a z drugiej – rozumiał je na tyle, by podejmować zadania nowoczesne, dotąd nie rozwiązane, i wreszcie, by krytycznie oceniając uzyskiwane wyniki, poszerzał rozumienie i poznanie analizowanych zjawisk czy procesów.

Przedmiot *Wprowadzenie do inżynierskich zastosowań MES* ma przybliżyć teoretyczne podstawy metody elementów skończonych (wykład) oraz zaznajomić z praktycznym zastosowaniem profesjonalnego pakietu ANSYS (laboratorium komputerowe) do rozwiązywania problemów mechaniki konstrukcji. Wprowadzenie teoretyczne jest ograniczone do uznanego za niezbędne kompendium, a przykłady praktyczne pokazują podstawowe działania konieczne do przejścia drogi od budowy modelu konstrukcji, przez dyskretyzację i rozwiązanie zadania MES do analizy wyników i wyciągnięcia inżynierskich wniosków. Zakłada się, że studenci mają podstawowe przygotowanie z *Mechaniki ogólnej*, *Wytrzymałości materiałów* oraz *Algebry macierzy*. Pogłębione zapoznanie się z metodą wymaga dodatkowo większej wiedzy z *Mechaniki ciał odkształcalnych*, *Metod numerycznych mechaniki*, *Rachunku wariacyjnego*, a także *Stateczności konstrukcji*, *Metod optymalizacji* czy *Podstaw programowania*. Te działy wymagają jednak samodzielnego przestudiowania, gdyż na studiach pierwszego stopnia, dla których studentów przeznaczony jest głównie ten skrypt, nie występują

wcale lub w bardzo ograniczonym zakresie. Skrypt ma służyć pomocą w nauce praktycznego stosowania metody, a nie projektowania elementów, algorytmów, programów. Nie ma w nim mowy na przykład o problemach budowy i testowania elementów skończonych, badania wartości własnych macierzy sztywności pod kątem odpowiedniej liczby form związanych z ruchem sztywnym bez generacji odkształceń czy też o problemie przesztywniania elementu (*element locking*) dla materiału nieściśliwego. Nie omawiamy też zagadnienia całkowania numerycznego, problemów aproksymacji ani metod rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych.

Skrypt może być też przydatny wszystkim początkującym adeptom MES, choć nie jest ani pełnym wykładem, ani kursem z ANSYSa.

Literatura

W celu głębszego poznania zarówno samej metody, jak i problemów z jej praktycznym stosowaniem, należy sięgnąć do niezwykle bogatej literatury z tego zakresu. Spośród bardzo wielu pozycji w tym miejscu wymieniam tylko niektóre, przede wszystkim te dostępne w języku polskim, odnoszące się do podstaw MES czy podstaw metod numerycznych, ale też ujmujące włączenie analizy konstrukcji tą metodą do podręczników wytrzymałości materiałów. Należy jednak podkreślić, że duże monograficzne opracowania oraz prace publikowane w międzynarodowych czy krajowych wydawnictwach ukazują się przede wszystkim w języku angielskim, jego znajomość jest więc dla osób pragnących poszerzyć swą wiedzę w tym zakresie nie do przecenienia. Podobnie dokumentacja i systemy pomocy w profesjonalnych programach do analizy konstrukcji metodą elementów skończonych pisane są po angielsku.

[1] Zienkiewicz O.C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

[2] Szmelter J., *Metoda elementów skończonych w mechanice*, PWN, Warszawa 1980.

[3] Kleiber M., *Wprowadzenie do metody elementów skończonych*, PWN, Warszawa 1989.

[4] Dacko M., Borkowski W., Dobrociński S., Niezgoda T., Wieczorek M., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1994.

[5] Kleiber M., *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, Mechanika techniczna, tom XI, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.

[6] Waszczyszyn Z., Cichoń C., Radwańska M., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1990.

[7] Bąk R., Burczyński T., *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
[8] Łaczek S., *Wprowadzenie do systemu elementów skończonych ANSYS*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.
[9] Ralston A., *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975.
[10] Zienkiewicz O.C., Taylor L.R., *The finite element method, 6th edition*, Vol. 1 – Its Basis and Fundamentals, Vol. 2 – Solid and Structural Mechanics, Vol. 3 – Fluid Dynamics, Elsevier 2005.
[11] Hughes T.J.R., *The Finite Element Method: Linear Static And Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, 2000.

Dlaczego MES?

Metoda elementów skończonych do analizy konstrukcji została stworzona przez naukowców i inżynierów w latach 50. i 60. XX wieku. Teoria leżąca u jej podstaw ma ponad 100 lat i stanowiła już w XIX wieku bazę do obliczeń podwieszonych mostów i kotłów parowych, prowadzonych bez użycia maszyn liczących. Od tego czasu jej rozwój odbywał się dzięki matematykom i inżynierom (mechanikom). Co roku publikowano wiele prac teoretycznych i organizowano konferencje naukowe dotyczące podstaw matematycznych oraz zastosowań praktycznych metody. Obecnie literatura tematu obejmuje tysiące pozycji, w których wykazano poprawność sformułowania, zbieżność rozwiązań do wartości ścisłych, podano metody szacowania błędu, możliwości rozwiązywania zagadnień nieliniowych itd., a także przedstawiono bardzo wiele rozwiązań praktycznych zadań inżynierskich wdrożonych po analizie tą metodą. Dzięki temu współczesny inżynier może z dużym zaufaniem stosować MES, nawet na zasadzie „czarnej skrzynki", tj. bez dokładnej znajomości samej metody oraz oprogramowania, które ją realizuje. Dla większości praktyków analiza metodą elementów skończonych to sposób symulacji warunków obciążeniowych dla (modelu) konstrukcji i określania odpowiedzi konstrukcji na te warunki. Z całą pewnością współczesny rynek pracy dla inżynierów mechaników oczekuje co najmniej umiejętności posługiwania się profesjonalnym oprogramowaniem bazującym na MES, jako współczesnym narzędziem projektanta i konstruktora. Potwierdzają to coraz częstsze przypadki, kiedy absolwenci zatrudnieni w wyuczonym zawodzie powracają na uczelnię po konsultacje w tej dziedzinie. W wielu instytucjach (autor ma doświadczenia z wieloletniej współpracy z CERN w Genewie) przyjmuje się za standard projektowania wykonywanie obliczeń wytrzymałościowych konstrukcji za

pomocą uznanego oprogramowania. Bez tego obliczenia nie są zatwierdzane przez dozór techniczny.

Główne korzyści

Podstawowe korzyści, jakie niesie stosowanie odpowiednich pakietów obliczeniowych MES to:

- projektant jest zwolniony z zadań rachunkowych; wszelkie obliczenia wykonuje sprawdzony program, co minimalizuje możliwości pomyłki i pozwala skupić się na samym problemie, a nie na żmudnych, czasochłonnych obliczeniach;
- przy projektowaniu i analizie konstrukcji można podejmować coraz bardziej złożone problemy, dla których nie są dostępne rozwiązania analityczne;
- można zrezygnować z licznych uproszczeń zwykle wprowadzanych do obliczeń metodami analitycznymi z uwagi na stopień komplikacji, jakie wprowadzają detale (np. otwory, drobne zmiany kształtu, sposób obciążenia itp.);
- można stosować dokładniejszy opis własności materiałowych, jak na przykład wzmocnienie plastyczne, ortotropia, zależność stałych materiałowych od temperatury i inne;
- można łatwo uwzględniać w obliczeniach wiele wariantów obciążenia, warunków brzegowych, kształtu poszczególnych części czy połączeń fragmentów konstrukcji;
- nowoczesne systemy wyposażone są w bogate narzędzia do tzw. przygotowania modelu i danych (preprocessingu) oraz szczegółowej analizy wyników (postprocessingu), często wraz z możliwością automatycznej generacji raportów.

Mając wysokie zaufanie do MES, modelowanie i obliczenia prowadzone tą metodą wykonuje się w celu redukcji liczby kosztownych i czasochłonnych testów prototypowych. Czas obliczeń komputerowych jest dzisiaj nieporównanie tańszy i jego koszt (poza opłatą licencyjną za program) jest pomijalny w porównaniu z wytworzeniem i testowaniem prototypu. Do tego niektóre konstrukcje (np. implanty chirurgiczne) nie nadają się do prototypowania i dąży się do ich optymalizacji już na etapie modelu. Ponadto symulacja (modelowanie) komputerowa umożliwia szybkie i efektywne testowanie licznych scenariuszy „co-jeśli (*what-if*)?", czyli szybkie udzielanie odpowiedzi na pytania o zmianę zachowania konstrukcji przy zmianie parametrów jej pracy (obciążenie, warunki brzegowe, materiał, rozkład masy, temperatura). Producenci oprogramowania podkreślają oszczędność kosztów, oszczędność czasu poprzez skrócenie okresu od pomysłu do jego

realizacji (*time to market*) oraz możliwość tworzenia projektów bardziej niezawodnych i o lepszej jakości.

Zagrożenia

Pomimo niezaprzeczalnych zalet i korzyści wynikających ze stosowania profesjonalnych pakietów MES, należy też na początku uświadomić sobie możliwe zagrożenia, zwłaszcza dla początkujących użytkowników. Aplikacja takiego systemu związana jest z koniecznością posiadania zaufania do sprzętu i oprogramowania. To ostatnie można łatwo osiągnąć, używając licencjonowanych wersji dostępnych na rynku, przetestowanych przez wielu użytkowników, stale ulepszanych i rozbudowywanych przez producenta. Zaufanie do sprzętu (komputera) dzisiaj również nie wydaje się problemem, ale ewentualne przekłamania pamięci operacyjnej czy zewnętrznej mogą się przecież zdarzać. Znacznie większym „zagrożeniem" jest skłonność, przede wszystkim początkujących użytkowników, do bezkrytycznego przyjmowania uzyskiwanych wyników komputerowych, które mogą być niepoprawne z winy nie sprzętu czy programu, ale samego projektanta popełniającego czasem trudne do wykrycia błędy. Tworząc model komputerowy konstrukcji, wprowadza się rozmaite informacje i podejmuje różne decyzje. Im większa świadomość i znajomość problemu, tym mniejsza szansa popełnienia przy tym błędu. Użytkownik programu decyduje o tym, jaki typ elementu ma zostać zastosowany, co wiąże się m.in. z wyborem jedno-, dwu- lub trójwymiarowego opisu ciała odkształcalnego, określa gęstość oraz jakość dyskretyzacji (podziału modelu na elementy skończone), podaje wszystkie wymiary i dane materiałowe w ustalonym przez siebie układzie jednostek, na ogół niekontrolowane przez program, wprowadza dane o obciążeniach (wartość, kierunek, miejsce działania) oraz warunkach brzegowych. Wszystkie te decyzje stanowią potencjalne źródło pomyłki i błędu, mimo że program zwykle udziela użytkownikowi podpowiedzi, komunikując się z nim przez okienka dialogowe.

Model

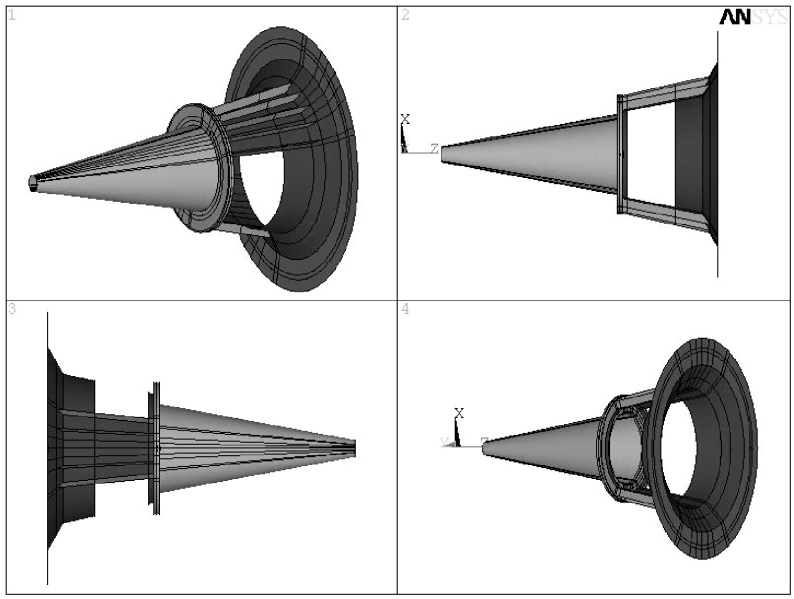
Należy mocno podkreślić, że MES jest **metodą przybliżoną** rozwiązywania złożonych problemów, jakimi są zadania analizy odkształcalnych konstrukcji. To oznacza, że uzyskiwane wyniki liczbowe, nawet przy braku pomyłek użytkownika, na ogół nie są identyczne ze ścisłym rozwiązaniem analitycznym, a ono z kolei, nawet gdyby było znane, nie oddaje pełnej rzeczywistości fizycznej problemu. Przypomnijmy, że w ogólnym przypadku analiza deformacji ciała odkształcalnego polega na rozwiązaniu układu

równań różniczkowo-algebraicznych, z których 3 to różniczkowe cząstkowe równania równowagi wewnętrznej (Naviera), 6 to równania różniczkowe cząstkowe związków geometrycznych (Cauchy'ego) oraz 6 – w przypadku liniowej sprężystości – to algebraiczne równania konstytutywne opisujące własności materiału (Hooka). Układ jest uzupełniony warunkami brzegowymi, na ogół częściowo przemieszczeniowymi, a częściowo naprężeniowymi, oraz dla procesów zmiennych w czasie – warunkami początkowymi. Niewiadomymi w tym układzie są 3 funkcje składowych wektora przemieszczenia oraz 6 funkcji składowych naprężenia i 6 funkcji składowych odkształcenia dla każdego punktu ciała. Problem dodatkowo się komplikuje, kiedy proces deformacji jest nieustalony, czyli wymienione funkcje zależą nie tylko od punktu materialnego, ale i czasu albo, gdy z uwagi na własności materiału lub duże deformacje, należy stosować opis nieliniowy, odpowiednio fizycznie lub geometrycznie. To ścisłe sformułowanie bardzo rzadko daje się rozwiązać w zamkniętej analitycznej formie i dlatego stajemy przed koniecznością stosowania metod przybliżonych, jak na przykład MES.

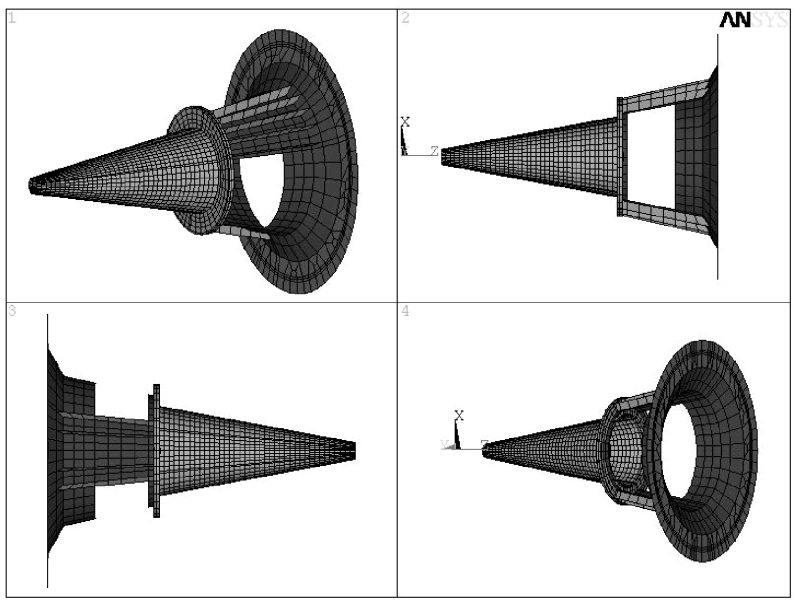
Zanim dokładniej przybliżymy metodę elementów skończonych wyobraźmy sobie konstrukcję, której deformację analizujemy (rysunek 1). Gdyby zamiast rozwiązywania opisanego wyżej układu równań zastosować podejście przybliżone, polegające na podzieleniu konstrukcji na małe fragmenty (rysunek 2), a następnie wyznaczeniu przemieszczenia każdego wierzchołka tych fragmentów (węzła dyskretyzacji), to obraz deformacji konstrukcji byłby tym dokładniejszy, im mniejsze byłyby te fragmenty. Można powiedzieć, że cała konstrukcja jest modelowana przy użyciu zbioru fragmentów zwanych *elementami skończonymi*. Każdy element posiada dokładne równania, które opisują jego odpowiedź na zadane obciążenie. Elementy ograniczone są węzłami, których przemieszczenia są poszukiwanymi niewiadomymi. Połączenie odpowiedzi wszystkich elementów modelu stanowi całkowitą odpowiedź układu. Elementy mają *skończone* rozmiary zamiast nieskończenie małych, jak w matematycznym opisie różniczkowym, oraz *skończoną* liczbę niewiadomych dyskretnych wartości przemieszczeń węzłów zamiast funkcji przemieszczeń o nieskończonej liczbie stopni swobody. Takie sformułowanie zadania jest wynikiem przybliżonego podejścia, w którym układ równań różniczkowych zostaje zastąpiony układem (często bardzo dużym) równań algebraicznych. Omawiane poniżej podstawy MES mają na celu wyjaśnienie algorytmu budowy tego układu równań. Rozwiązywanie coraz trudniejszych problemów algebraicznych nie stanowi współcześnie kłopotu dzięki rozwojowi i dostępności sprzętu komputerowego.

Warto w tym miejscu zauważyć, że tego typu podejście może być (i faktycznie jest) rozszerzone na zastosowania w innych niż mechanika dzia-

łach fizyki, gdyż na metodę można spojrzeć jako na przybliżony sposób rozwiązywania równań różniczkowo-algebraicznych bez względu na to, jakie zjawisko czy proces fizyczny opisują.

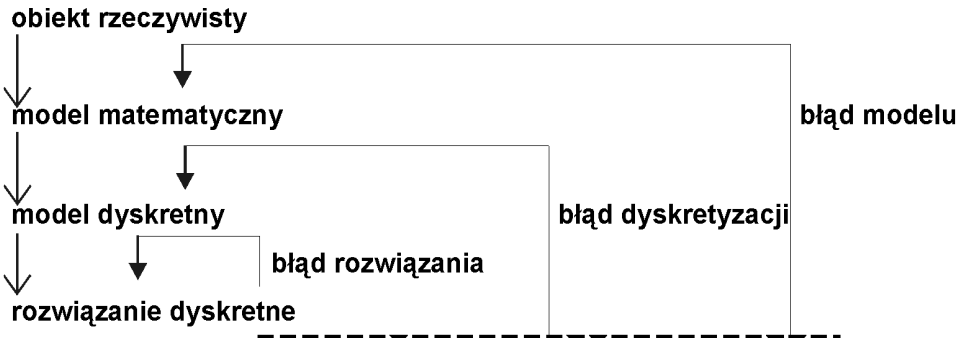


Rys. 1. Konstrukcja powłokowa użebrowana



Rys. 2. Konstrukcja powłokowa z żebrami podzielona na elementy skończone

Podsumowując powyższe uwagi, uświadamiamy sobie, że stosując MES, operować będziemy na modelach, a nie rzeczywistych obiektach. Drogę uproszczeń od rzeczywistego obiektu do dyskretnego rozwiązania pokazuje poniższy schemat.



Schemat 1

Najpierw, mając do przeprowadzenia analizę rzeczywistej konstrukcji, musimy odpowiednio dobrać jej model matematyczny. Rozumiemy przez to wybór sposobu jej opisu jako obiektu jednowymiarowego (belki, pręty, kratownice, ramy, liny) lub dwuwymiarowego (tarcze, płyty, powłoki) czy w najbardziej ogólnym przypadku trójwymiarowego. Wybór ten determinuje cały szereg założeń i hipotez znanych z wytrzymałości materiałów, jak hipoteza Bernoullego czy hipoteza Kirchhoffa–Love'a, oraz zestaw parametrów opisujących dany typ obiektu (charakterystyki geometryczne przekroju pręta, grubość powłoki itp.). Dodatkowo decydujemy, czy problem jest liniowy geometrycznie – wtedy stosujemy teorię małych przemieszczeń i małych odkształceń, czy też nieliniowy z dużymi przemieszczeniami lub odkształceniami. Podobnie jest z własnościami materiału, które mogą być liniowe (sprężystość z prawem Hooka) lub nieliniowe (na przykład sprężysto-plastyczność). Wszystkie takie decyzje prowadzą do odpowiedniego zestawu równań, czyli modelu matematycznego analizowanego obiektu. W następnej kolejności, w celu rozwiązania tego układu równań stosujemy MES, a więc dokonujemy dyskretyzacji, czyli podziału obiektu na elementy skończone, co jak napisano wyżej, prowadzi do zamiany układu równań różniczkowych na układ równań algebraicznych. Na końcowym etapie rozwiązujemy ten układ, uzyskując zbiór wartości poszukiwanych funkcji w przyjętych węzłach układu dyskretyzowanego. W podstawowej wersji MES są to zwykle uogólnione przemieszczenia, na podstawie których oblicza się odkształcenia, a następnie poprzez prawo fizyczne – naprężenia. Na podstawie uzyskanych dyskretnych wyników wnioskujemy o zachowaniu rzeczywistego obiektu, zakładając, że różnice między wartościami przybliżonymi i realnymi są pomijalne.

Zwróćmy uwagę, że modelowanie i rozwiązywanie może być, i w praktyce często jest, procesem iteracyjnym, tak jak na schemacie. Jeśli w rozwiązaniu pojawią się błędy, procedurę należy powtórzyć. Przy współczesnym oprogramowaniu poważne błędy raczej nie występują, ale możemy napotkać na przykład problem złego uwarunkowania układu równań albo konieczność zmiany metody jego rozwiązywania. Rozwiązanie może w ogóle nie zostać uzyskane lub być niezadowalające, jeśli popełnimy błędy dyskretyzacji. Mogą one polegać na złym doborze typu elementów, niewystarczająco gęstej siatce elementów czy nieuwzględnieniu odpowiednich stopni swobody (niewiadomych). Wreszcie uzyskane rezultaty mogą znacznie odbiegać od rzeczywistości, gdy popełnimy błędy modelowania. Jeśli na przykład długość obiektu nie jest dominująco większa od jego wymiarów poprzecznych, a zastosujemy model prętowy, to rozwiązanie nie będzie dokładne. Podobnie, jeśli założymy liniowo sprężyste zachowanie materiału, a naprężenia przekroczą granicę plastyczności, to wyniki obliczeń będą dalekie od prawdziwych. Gdy w modelu matematycznym lub w typie elementu nie uwzględnimy pewnych efektów (na przykład przemieszczenia i naprężenia od ścinania w zginanej belce), to w wynikach dyskretnych również nie znajdziemy informacji na ich temat. Należy również pamiętać, że rozwiązanie dyskretne, które otrzymujemy, jest obarczone błędami numerycznymi, wynikającymi z ograniczonej długości słowa maszynowego komputera (co wpływa na dokładność operacji zmiennopozycyjnych) oraz z konieczności stosowania procedur numerycznego całkowania przy wyznaczaniu macierzy sztywności i obciążeń węzłowych. Z tego względu rozwiązanie numeryczne, które otrzymujemy, jest inne niż ścisłe rozwiązanie zadania dyskretnego, które z kolei jest inne niż rozwiązanie analityczne zestawu równań, które wreszcie, będąc jedynie modelem matematycznym obiektu, i tak nie opisują pełnej rzeczywistości i dałyby inne wyniki niż (hipotetyczne, idealnie dokładne) pomiary eksperymentalne.

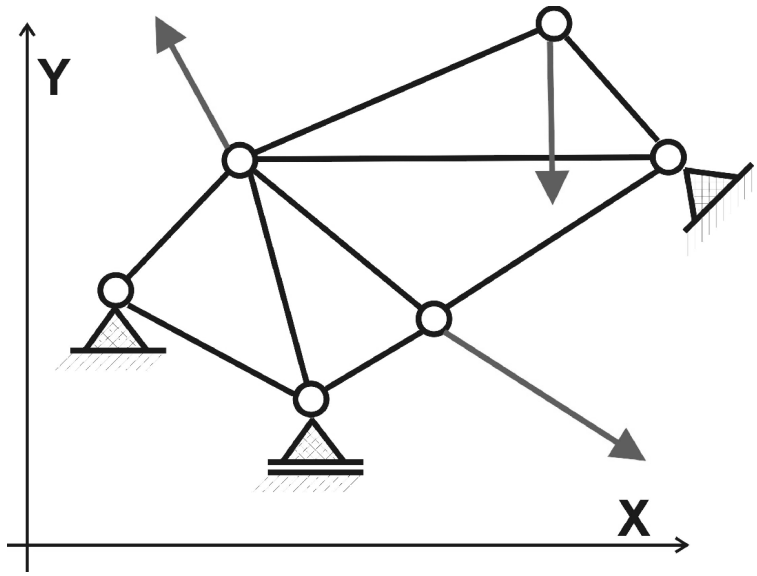
Dobre efekty stosowania metody zależą zatem od zrozumienia poszczególnych etapów powyższego modelowania, wynikającego ze znajomości mechaniki ciał odkształcalnych, teorii metody elementów skończonych oraz algebraicznych i numerycznych operacji macierzowych.

Ilustracja metody na przykładzie analizy płaskiej kratownicy

Podstawowe pojęcia metody elementów skończonych wygodnie jest wprowadzić na przykładzie konstrukcji kratownicy. W tym przypadku po-

dział całości na fragmenty zwane elementami skończonymi narzuca się w naturalny sposób – jeden pręt kratownicy to jeden element skończony. Przyjmiemy założenie, że kratownica jest płaska, tzn. wszystkie jej pręty leżą w jednej płaszczyźnie, w której też działają przyłożone siły. Ponadto pręty połączone są idealnymi przegubami, a siły przyłożone są tylko w węzłach będących końcami elementów (rysunek 3). Pojedynczy pręt posiada stałe pole powierzchni przekroju poprzecznego, ale każdy z prętów może mieć je inne. Rozważymy jedynie małe, sprężyste deformacje takiej konstrukcji. Wobec przyjętych założeń pręty kratownicy doznają jedynie wydłużeń lub skróceń (brak zginania), jedyną siłą wewnętrzną w każdym pręcie jest siła normalna, a odkształcenie i naprężenie stałe w przekroju i wzdłuż długości pojedynczego elementu zawierają jedynie składowe normalne o kierunku osi pręta.

Położenie poszczególnych węzłów określimy, zadając ich współrzędne w **globalnym układzie współrzędnych**, tj. jednym przyjętym dla całej konstrukcji, wspólnym dla wszystkich jej elementów.



Rys. 3. Kratownica płaska w globalnym układzie współrzędnych

Rozpatrujemy jeden element. Zgodnie z zasygnalizowaną wyżej koncepcją, tworzymy ścisłe związki między obciążeniami działającymi na niego a wielkościami opisującymi jego deformację, która jest poszukiwaną odpowiedzią na obciążenie. Później dokonamy złożenia tych informacji od wszystkich elementów, otrzymując odpowiedź całej kratownicy. Dla każdego elementu znamy na mocy założeń jego geometrię (położenie węzłów w globalnym układzie), sztywność (pole powierzchni przekroju poprzecz-

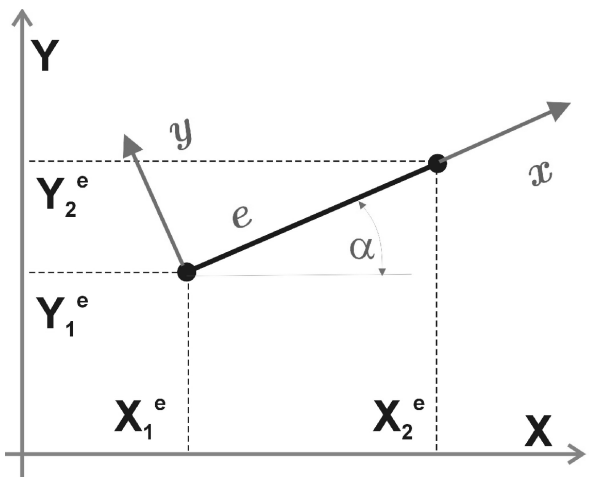
nego) oraz materiał, z jakiego jest wykonany (moduł sprężystości Younga). Łatwo wyliczymy też inne potrzebne wielkości (indeks *e* odnosi się do wybranego elementu):

długość elementu

$$l^e = \sqrt{\left(X_2^e - X_1^e\right)^2 + \left(Y_2^e - Y_1^e\right)^2} \tag{1}$$

cosinus i sinus kąta nachylenia elementu względem osi układu współrzędnych

$$c^e = \cos\alpha^e = \frac{X_2^e - X_1^e}{l^e}, \quad s^e = \sin\alpha^e = \frac{Y_2^e - Y_1^e}{l^e} \tag{2}$$



Rys. 4. Pojedynczy element w układzie globalnym (XY) i lokalnym (xy)

Wskutek działania obciążeń węzły elementu doznają przemieszczeń, przy czym wobec braku zginania element pozostaje prosty (rysunek 5). Przemieszczenia poszczególnych węzłów (u_1^e, u_2^e), (u_3^e, u_4^e) zapisane jako jednokolumnowy wektor

$$\mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} u_1^e & u_2^e & u_3^e & u_4^e \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

nazywamy **stopniami swobody** (*degrees of freedom*) tego elementu. Wykażemy, że wyznaczenie tych wielkości jednoznacznie i w pełni określa stan deformacji elementu skończonego i pozwala na obliczenie wszystkich pozostałych wielkości, tzn. siły wewnętrznej, odkształcenia i naprężenia, a także sił węzłowych. Wprowadzając powyższe określenie, możemy mówić albo o węzłowych stopniach swobody (*nodal degrees of freedom*), albo elementowych stopniach swobody (*element dof*). Te ostatnie tworzone są z wszystkich stopni węzłowych kolejno ponumerowanych.

Macierz geometryczna

Wyznaczamy zmianę długości elementu jako różnicę długości końcowej i początkowej

$$\Delta l^e = \sqrt{\left(X_2^e + u_3^e - X_1^e - u_1^e\right)^2 + \left(Y_2^e + u_4^e - Y_1^e - u_2^e\right)^2} - \sqrt{\left(X_2^e - X_1^e\right)^2 + \left(Y_2^e - Y_1^e\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(X_2^e - X_1^e\right)^2 \left(1 + \frac{u_3^e - u_1^e}{X_2^e - X_1^e}\right)^2 + \left(Y_2^e - Y_1^e\right)^2 \left(1 + \frac{u_4^e - u_2^e}{Y_2^e - Y_1^e}\right)^2} +$$

$$- \sqrt{\left(X_2^e - X_1^e\right)^2 + \left(Y_2^e - Y_1^e\right)^2} =$$

$$= l^e \left(\sqrt{\frac{\left(X_2^e - X_1^e\right)^2 \left(1 + \frac{u_3^e - u_1^e}{X_2^e - X_1^e}\right)^2}{\left(l^e\right)^2} + \frac{\left(Y_2^e - Y_1^e\right)^2 \left(1 + \frac{u_4^e - u_2^e}{Y_2^e - Y_1^e}\right)^2}{\left(l^e\right)^2}} - 1 \right) \tag{4}$$

Dokonując algebraicznych przekształceń z wykorzystaniem wzoru (2), pomijając iloczyny kwadratów ułamków pod pierwiastkiem jako wielkości małe wobec założenia małych przemieszczeń, i wreszcie dokonując rozwinięcia pierwiastka w szereg potęgowy według wzoru

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \Big| - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \tag{5}$$

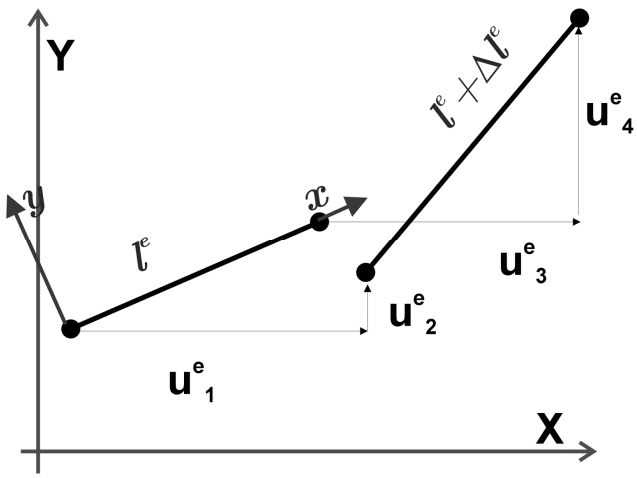
z zachowaniem tylko liniowej części, uzyskujemy ostatecznie

$$\Delta l^e = c^e \left(u_3^e - u_1^e\right) + s^e \left(u_4^e - u_2^e\right) \tag{6}$$

czyli wyrażamy zmianę długości elementu przez znane opisujące go parametry oraz stopnie swobody. W dalszej kolejności, wykorzystując wzór (6), wyznaczamy odkształcenie Cauchy'ego

$$\varepsilon^e = \frac{\Delta l^e}{l^e} = \frac{u_3^e - u_1^e}{l^e} c^e + \frac{u_4^e - u_2^e}{l^e} s^e = \frac{1}{l^e}\left(-u_1^e c^e - u_2^e s^e + u_3^4 c^e + u_4^e s^e\right) =$$

$$= \frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} -c^e & -s^e & c^e & s^e \end{bmatrix}_{1\times 4} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix}_{4\times 1} \tag{7}$$



Rys. 5. Pojedynczy element i jego stopnie swobody – przemieszczenia węzłów

co w formie macierzowej można zapisać

$$\varepsilon^e = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e, \qquad \mathbf{B}^e = \frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} -c^e & -s^e & c^e & s^e \end{bmatrix}_{1\times 4} \tag{8}$$

$\mathbf{B}^e$ nazywa się macierzą geometryczną (zgodności geometrycznej) danego elementu, a wszystkie jej wyrazy zależą od znanych parametrów. Dla każdego elementu skończonego można ją wyznaczyć na początku wszelkich obliczeń. Jeśli w wyniku rozwiązania wyliczymy stopnie swobody elementu, to związek (8) pozwoli obliczyć jego odkształcenie.

Macierz sił wewnętrznych

Teraz możemy wyznaczyć siłę wewnętrzną występującą w elemencie

$$N^e = \sigma^e A^e = E^e A^e \varepsilon^e = E^e A^e \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{U}^e \tag{9}$$

gdzie wykorzystane zostało prawo Hooka i związek (8) oraz oznaczono przez

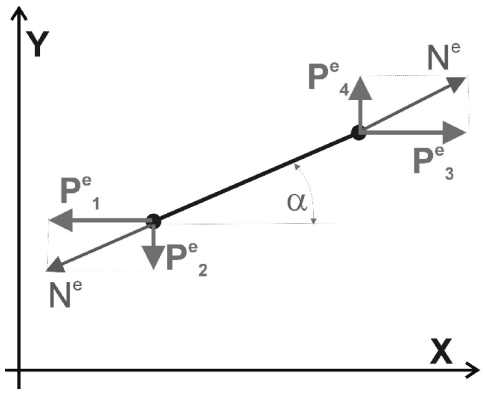
$$\mathbf{C}^e = E^e A^e \mathbf{B}^e \tag{10}$$

macierz sił wewnętrznych. Dodatkowo σ^e oznacza naprężenie, E^e – moduł sprężystości, natomiast A^e – pole powierzchni przekroju poprzecznego.

Wzór (9) pozwala określić siłę wewnętrzną (i naprężenie), jeśli znane są wartości stopni swobody elementu, a macierz sił wewnętrznych jest stała i zależy od znanych parametrów układu.

Macierz sztywności

Na koniec zajmiemy się wyznaczeniem relacji między stopniami swobody a siłami węzłowymi, których znakowanie i numerację przyjmujemy zgodnie z odpowiednimi stopniami swobody (rysunek 6).



Rys. 6. Siły węzłowe elementu w układzie globalnym

Siły węzłowe można przedstawić w formie jednokolumnowego wektora

$$\mathbf{P^e} = \left[P_1^e \quad P_2^e \quad P_3^e \quad P_4^e \right]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

który po uwzględnieniu związków

$$P_1^e = -N^e c^e,\ P_2^e = -N^e s^e,\ P_3^e = N^e c^e,\ P_4^e = N^e s^e \tag{12}$$

i z wykorzystaniem wcześniejszych zależności można przedstawić w postaci

$$\mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} -c^e \\ -s^e \\ c^e \\ s^e \end{bmatrix} N^e = l^e \mathbf{B}^{e\mathrm{T}} \mathbf{C}^e \mathbf{U}^e = l^e \mathbf{B}^{e\mathrm{T}} E^e A^e \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \tag{13}$$

Ostatecznie po wykonaniu mnożeń macierzy w (13) otrzymujemy

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e, \quad \mathbf{K}^e = l^e \mathbf{B}^{e\mathrm{T}} E^e A^e \mathbf{B}^e = \frac{E^e A^e}{l^e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}_e \tag{14}$$

gdzie $\mathbf{K^e}$ nazywa się macierzą sztywności elementu.

Elementy macierzy są znane, gdyż zależą od parametrów układu, a znajomość stopni swobody elementu pozwala wyznaczyć siły węzłowe.

Łatwo zauważyć, że elementowa macierz sztywności jest symetryczna i osobliwa (jej wyznacznik wynosi zero). Interpretacja mechaniczna tego faktu oznacza, że o ile dla zadanych przemieszczeń węzłów można wprost doliczyć siły węzłowe konieczne do ich zaistnienia, wykonując mnożenie (14), to dla zadanych sił jednoznaczne wyliczenie przemieszczeń nie jest możliwe, gdyż macierzy $\mathbf{K}^{\mathbf{e}}$ nie da się odwrócić. Łatwo to zrozumieć, wiedząc, że ruch sztywny ciała może się odbywać bez zmiany sił, a położeń węzłów może być w nim nieskończenie wiele. I odwrotnie, jeśli przyjmiemy stopnie swobody elementu odpowiadające przemieszczeniu jak ciało sztywne (na przykład $\mathbf{U}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$), to nie wygenerujemy ani odkształceń, ani sił węzłowych.

Agregacja i podstawowy układ równań MES

Potrafimy zatem wyliczyć wszystkie wielkości opisujące deformację pojedynczego elementu, mając zadane macierze elementowe oraz znając jego stopnie swobody.

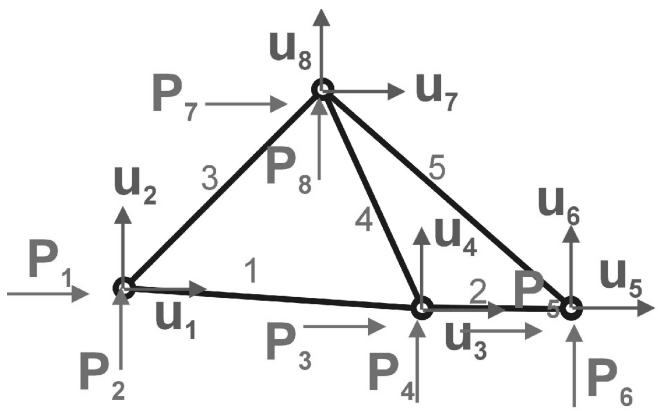
Pozostaje do wykonania **agregacja**, czyli złożenie pojedynczych elementów w całą strukturę. Proces ten omówimy na przykładzie kratownicy złożonej z pięciu prętów (rysunek 7), przyjmując oczywiste reguły: a) spełnione są **warunki nierozdzielności**, czyli wspólne węzły łączących się elementów doznają wspólnych przemieszczeń, a więc wartości węzłowych stopni swobody są takie same we wszystkich łączących się w tym węźle elementach, oraz b) w każdym węźle spełnione są **warunki statycznej równowagi sił**, czyli całkowita siła węzłowa jest wektorową sumą sił węzłowych pochodzących od wszystkich elementów łączących się w tym węźle.

Dodatkowo zastosujemy **globalną numerację** od *1* do *N* (w przykładzie *N* = 8) zarówno dla stopni swobody, jak i stowarzyszonych z nimi sił węzłowych, w miejsce stosowanej dotąd lokalnej numeracji od 1 do 4 w każdym elemencie z osobna. Istotę przyjętych reguł agregacji pokazują rysunki 8 i 9. Widać, że pierwszy stopień swobody elementu pierwszego i pierwszy elementu trzeciego to jedno i to samo przemieszczenie, przyjęte w globalnej numeracji jako pierwsze. Podobnie, czwarty stopień swobody elementu trzeciego równy jest drugiemu stopniowi swobody elementu czwartego oraz drugiemu elementu piątego, a w numeracji globalnej ma numer ósmy. Rozumowanie to powtarzamy dla wszystkich stopni swobody we wspólnych węzłach łączących się elementów. Zauważmy, że dzięki tej zasadzie cał-

kowita liczba stopni swobody układu (niewiadomych) jest mniejsza niż iloczyn liczby elementów przez liczbę stopni swobody jednego elementu. Wymóg spełnienia warunków równowagi poszczególnych węzłów możemy zapisać jako

$$P_1 = P_1^{(1)} + P_1^{(3)}, \quad P_8 = P_8^{(3)} + P_8^{(4)} + P_8^{(5)}, \quad \ldots \text{itd.} \tag{15}$$

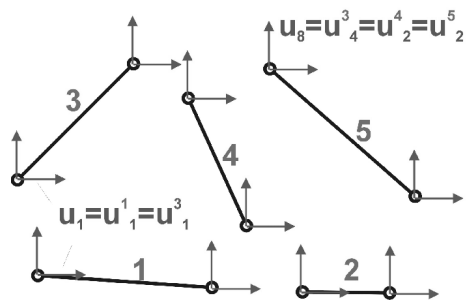
czyli siła o globalnym numerze jeden jest sumą tych sił, które w kierunku globalnego stopnia swobody numer jeden przeniesie węzeł pierwszy elementu nr 1 i węzeł pierwszy elementu nr 3; siła o numerze globalnym osiem jest sumą sił o kierunku ósmego globalnego stopnia swobody, wziętych ze wspólnego węzła elementów 3, 4 i 5 itd.



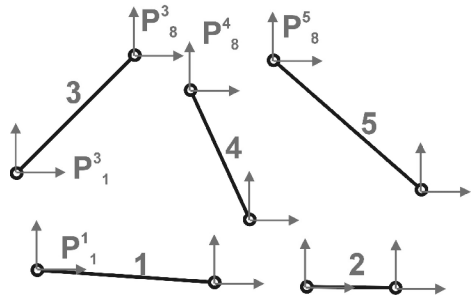
Rys. 7. Kratownica, wynik agregacji pięciu prętów – elementów skończonych z globalną numeracją stopni swobody i sił węzłowych

Tworzymy *N*-elementowy wektor sił węzłowych całej struktury i zapisujemy, że jest on sumą wektorów sił węzłowych poszczególnych elementów, ale numerowanych globalnie, czyli też *N*-elementowych.

$$\mathbf{P} = \sum_{e} \mathbf{P}^{e} \tag{16}$$



Rys. 8. Nierozdzielność przemieszczeń



Rys. 9. Równowaga sił węzłowych

Zauważmy, że w tej notacji wektor sił węzłowych każdego elementu zostaje rozszerzony z wymiaru 4 do wymiaru *N*, zawierając w sobie wiele zer. Na przykład

$$\mathbf{P^3} = \begin{bmatrix} P_1^3 & P_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_7^3 & P_8^3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

bo tylko wymienione różne od zera składowe dotyczą elementu nr 3 (rysunek 9). Dzięki temu zabiegowi możemy wykonywać sumowanie w równaniu (16) wprost, bez renumeracji. Podobnie rozszerzamy wektor stopni swobody każdego elementu, utożsamiając go z wektorem stopni swobody całej struktury, otrzymując

$$\mathbf{U^e} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U} \tag{18}$$

Po odpowiednim powiększeniu rozmiarów elementowych macierzy sztywności możemy zapisać równanie (14) w zmienionej postaci (indeksy oznaczają rozmiary wektorów i macierzy)

$$\mathbf{P}^e_{N\times 1} = \mathbf{K}^e_{N\times N}\mathbf{U}_{N\times 1} \tag{19}$$

a następnie powtarzając operację (16) otrzymamy

$$\mathbf{P}_{N\times 1} = \sum_e \mathbf{P}^e_{N\times 1} = \sum_e \mathbf{K}^e_{N\times 1}\mathbf{U}_{N\times 1} = \mathbf{K}_{N\times N}\mathbf{U}_{N\times 1} \tag{20}$$

gdzie kwadratowa macierz

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e \tag{21}$$

jest zagregowaną macierzą sztywności całego układu, a proces dodawania rozszerzonych elementowych macierzy sztywności nazywa się **agregacją**.

Należy jeszcze wyjaśnić, jak wygląda ta rozszerzona zerowymi wyrazami elementowa macierz sztywności, która zapewnia poprawność zależności (19). Poprawność ta oznacza, że związki (14) pozostaną nie-

zmienione dla każdego elementu pomimo zastąpienia w nich $\mathbf{P}^e_{4\times1}$ przez $\mathbf{P}^e_{N\times1}$ oraz $\mathbf{U}^e_{4\times1}$ przez $\mathbf{U}_{N\times1}$.

Przykładowo, dla elementu numer jeden macierz ta ma postać

$$\mathbf{K}^1=\frac{E^1A^1}{l^1}\begin{bmatrix} \left(c^1\right)^2 & c^1s^1 & -\left(c^1\right)^2 & -c^1s^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^1s^1 & \left(s^1\right)^2 & -c^1s^1 & -\left(s^1\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(c^1\right)^2 & -c^1s^1 & \left(c^1\right)^2 & c^1s^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^1s^1 & -\left(s^1\right)^2 & c^1s^1 & \left(s^1\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

a dla elementu numer cztery

$$\mathbf{K}^4=\frac{E^4A^4}{l^4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(c^4\right)^2 & c^4s^4 & 0 & 0 & -\left(c^4\right)^2 & -c^4s^4 \\ 0 & 0 & c^4s^4 & \left(s^4\right)^2 & 0 & 0 & -c^4s^4 & -\left(s^4\right)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(c^4\right)^2 & -c^4s^4 & 0 & 0 & \left(c^4\right)^2 & c^4s^4 \\ 0 & 0 & -c^4s^4 & -\left(s^4\right)^2 & 0 & 0 & c^4s^4 & \left(s^4\right)^2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Taki zapis zapewnia, że pomnożenie macierzy $\mathbf{K}^1$ przez powiększony wektor stopni swobody $\mathbf{U}$ da niezerowy efekt jedynie dla pierwszych czterech wyrazów tego wektora, czyli dokładnie to, co otrzymaliśmy dla elementu numer 1. Z kolei dla elementu numer 4 mnożenie $\mathbf{K}^4$ przez $\mathbf{U}$ będzie efektywne dla stopni swobody o numerach 3, 4 oraz 7 i 8, bo tylko te numery w globalnej numeracji dotyczą tego elementu. Podobnie będzie dla pozostałych elementów omawianej struktury.

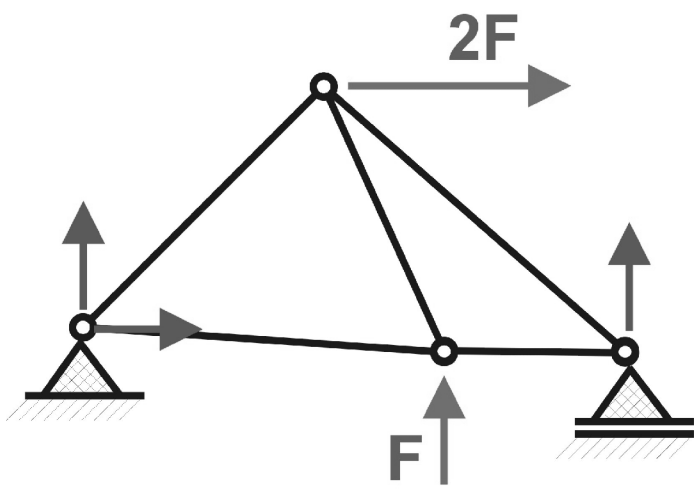
Układ (20) zapisany w zwięzłej postaci

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \tag{24}$$

określający związek między wszystkimi siłami węzłowymi wyrażonymi w globalnym układzie odniesienia i wszystkimi stopniami swobody struktury zapisanymi w tym samym układzie poprzez globalną macierz sztywności, której elementy wyznaczono w tymże układzie, nazywa się **podstawowym układem równań metody elementów skończonych**. Pamiętając, że elementowe macierze sztywności są symetryczne i osobliwe, wnioskujemy, że macierz zagregowana ma te same własności. Interpretacja mechaniczna tego faktu jest identyczna jak dla pojedynczego elementu.

Rozwiązanie układu równań

Rozwiązanie układu (24) możliwe jest dopiero po usunięciu osobliwości macierzy $\mathbf{K}$, co w praktyce oznacza nałożenie odpowiednich więzów eliminujących ruch sztywny struktury jako całości. Przyjmijmy w naszym przykładzie, że kratownica jest podparta i obciążona jak na rysunku 10, co oznacza, że w wektorze sił węzłowych znane są siły $P_4 = F$, $P_7 = 2F$, $P_3 = P_5 = P_8 = 0$ oraz nieznane P_1, P_2, P_6, które stanowią reakcje więzów.



Rys. 10. Warunki podparcia i obciążenia kratownicy

Z kolei w wektorze stopni swobody znamy przemieszczenia $u_1 = u_2 = = u_6 = 0$, a poszukiwane są u_3, u_4, u_5, u_7, u_8. Wprowadzenie tych informacji do układu równań (24) można robić na różne sposoby, ale jednym

z naturalnych podejść jest zastąpienie odpowiednich wierszy znanymi równaniami więzów. Schematycznie zaznaczymy to jak w równaniu (25), gdzie kropki oznaczają oryginalne wartości wyrazów macierzy sztywności otrzymane w wyniku procesu agregacji, a wiersze 1, 2 i 6 stanowią zapis, że odpowiednie stopnie swobody są równe zeru.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ 0 \\ P_7 \\ P_8 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Taki układ równań nie jest już osobliwy i może być rozwiązany z uwagi na niewiadome stopnie swobody. Z kolei brakujące reakcje P_1, P_2, P_6, które w (25) nie występują, doliczymy, wstawiając wszystkie już znane stopnie swobody do równania (24). Zauważmy, co bardzo ważne z praktycznego punktu widzenia, że w całej procedurze rozwiązywania nie ma żadnego znaczenia **stopień hiperstatyczności układu**. Zarówno układ izostatyczny, jak i hiperstatyczny dowolnego stopnia rozwiążemy tą samą metodą, a jedynie w końcowym etapie (25) liczba znanych stopni swobody będzie różna.

Znając wszystkie stopnie swobody, możemy teraz powrócić do każdego elementu skończonego naszej struktury i za pomocą przygotowanych wcześniej macierzy elementowych wyznaczyć dla niego wszystkie wielkości opisujące deformację: odkształcenia, siły wewnętrzne (naprężenia), elementowe siły węzłowe, co kończy analizę kratownicy metodą elementów skończonych.

Na koniec tego rozdziału zwrócimy uwagę na inny sposób otrzymania elementowej macierzy sztywności, fundamentalnej dla całej metody. W przypadku kratownicy zbudowaliśmy ją, uzyskując wszystkie wyrazy w globalnym układzie współrzędnych, drogą wyrażenia sił węzłowych jako składowych siły wewnętrznej w tym układzie. Przy wyprowadzeniu wykorzystaliśmy wcześniej zdefiniowane macierz geometryczną i macierz sił wewnętrznych. Taki sposób zawodzi jednak w analizie innych konstrukcji i zastępuje się go rozważaniami energetycznymi. W dalszej części skryptu wykorzystamy do wyprowadzenia postaci macierzy sztywności zasadę zachowania energii, którą formułujemy tak, że praca wykonana przez siły węzłowe na związanych z nimi przemieszczeniach (stopniach swobody)

równa jest energii odkształcenia zgromadzonej w elemencie. Tę samą zasadę, jako bardziej ogólną, można zastosować również do kratownicy, zapisując pracę sił węzłowych w elemencie jako

$$L_{\mathrm{z}}^{e}=\frac{1}{2}\mathbf{P}^{e\mathrm{T}}\mathbf{U}^{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{K}^{e}\mathbf{U}^{e}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{e}=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{e\mathrm{T}}\mathbf{K}^{e\mathrm{T}}\mathbf{U}^{e}=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{e\mathrm{T}}\mathbf{K}^{e}\mathbf{U}^{e} \tag{26}$$

po wykorzystaniu związku (14) oraz symetrii macierzy sztywności. Następnie pracę siły wewnętrznej (energię wewnętrzną odkształcenia) zapiszemy

$$L_{\mathrm{w}}^{e}=\frac{1}{2}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\left(\varepsilon^{e}l^{e}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{e\mathrm{T}}\mathbf{C}^{e\mathrm{T}}\mathbf{B}^{e}\mathbf{U}^{e}l^{e}=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{e\mathrm{T}}\left(\left(\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}E^{e}A^{e}\right)l^{e}\mathbf{B}^{e}\right)\mathbf{U}^{e} \tag{27}$$

wiedząc, że siła normalna wykonuje pracę na zmianie długości równej iloczynowi odkształcenia i długości początkowej oraz wykorzystując związki (8), (9) i (10). Po porównaniu (26) i (27) dostajemy przepis na elementową macierz sztywności identyczny z definicją w równaniu (14).

Uwzględnienie efektów zginania

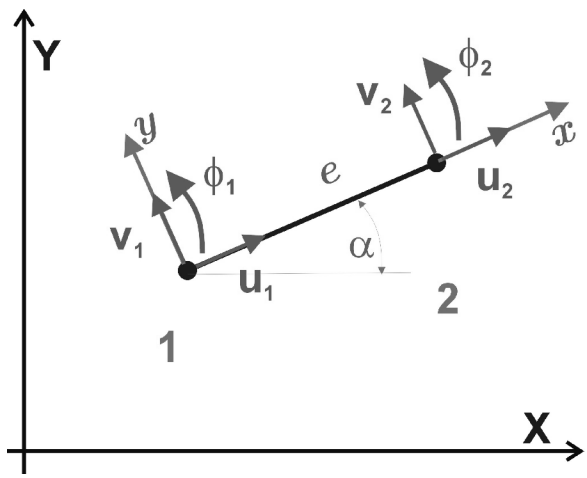
Analiza metodą elementów skończonych konstrukcji bardziej złożonych niż kratownica, z większą liczbą sił wewnętrznych, z większą liczbą składowych odkształcenia i naprężenia, może być rozumiana jak uogólnienie przedstawionego ujęcia przy zachowaniu zasadniczych kroków algorytmu postępowania. Uogólnienie takie wymaga podjęcia nowych zadań obliczeniowych i wprowadzenia nowych pojęć. Przedstawimy je na przykładzie elementu prętowego poddanego, oprócz rozciągania/ściskania, płaskiemu zginaniu prostemu. Takie belkowe elementy mają zastosowanie na przykład w konstrukcjach ramowych. Mamy w nich do czynienia z przynajmniej dwiema siłami wewnętrznymi (siła normalna, moment zginający), a deformację określają odkształcenie wzdłużne i krzywizna osi. Analizę wygodnie jest przeprowadzić w **lokalnym układzie współrzędnych**, w którym oś *x* pokrywa się z osią belki, płaszczyzna *xy* jest płaszczyzną zginania, a oś *z* jest główną, centralną osią bezwładności i osią obojętną zginania dla przekrojów belki (rysunek 11). Końcowe przekroje belki doznają przemieszczeń wzdłuż osi wskutek rozciągania/ściskania, zginanie natomiast powoduje powstanie przemieszczeń prostopadłych do osi belki oraz obrotów wokół osi obojętnej. Wszystkie te uogólnione przemieszczenia końców elementu, podobnie jak poprzednio, nazwiemy stopniami swobody (węzłowymi, elementowymi) i zapiszemy w postaci jednokolumnowego wektora

$$\mathbf{q}^{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

Przyjmując hipotezę płaskich przekrojów Bernoullego, odkształcenie Cauchy'ego w dowolnym punkcie belki zapiszemy

$$\varepsilon_x^e = \varepsilon_0^e + \kappa^e y = \frac{\mathrm{d}u^e}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2 v^e}{\mathrm{d}x^2} y \tag{29}$$

gdzie pierwszy człon pochodzi od siły osiowej, a drugi od momentu zginającego, a pochodne funkcji składowych przemieszczeń definiują odpowiednio odkształcenie wzdłużne i krzywiznę osi. Tak policzone odkształcenie nie jest stałe ani w przekroju, ani wzdłuż osi belki, co istotnie różni tę analizę od przypadku kratownicy.



Rys. 11. Stopnie swobody elementu belkowego w lokalnym (elementowym) układzie współrzędnych

Funkcje kształtu

Chcąc wyrazić składniki wzoru (29) przez przyjęte stopnie swobody (28), musimy za ich pomocą określić wartości funkcji $u^e(x)$ i $v^e(x)$ dla dowolnego $x \in \left[0, l^e\right]$. Jest to zadanie aproksymacji (interpolacji), tzn. wyliczania wartości funkcji wewnątrz przedziału na podstawie znanych jej wartości na końcach. W celu zapoznania się z problematyką aproksymacji (przybliżania zmienności funkcji) odsyłam do podręczników analizy numerycznej i metod numerycznych. Przyjmijmy, że da się dobrać taki zestaw znanych funkcji aproksymacyjnych, dla których zachodzi związek

$$\begin{bmatrix} u^e(x) \\ v^e(x) \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(x) & \Phi_{12}(x) & \Phi_{13}(x) & \Phi_{14}(x) & \Phi_{15}(x) & \Phi_{16}(x) \\ \Phi_{21}(x) & \Phi_{22}(x) & \Phi_{23}(x) & \Phi_{24}(x) & \Phi_{25}(x) & \Phi_{26}(x) \end{bmatrix}^e_{2x6} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}_{6\times 1} \tag{30}$$

(przykładowy sposób wyznaczenia tych funkcji pokazany zostanie w dalszej części tego rozdziału), czyli funkcje przemieszczeń dla elementu wyrażone są przez tzw. funkcje kształtu i elementowe stopnie swobody.

$$\begin{bmatrix} u^e(x) \\ v^e(x) \end{bmatrix} = \mathbf{U}^e(x) = \mathbf{\Phi}^e(x)\mathbf{q}^e \tag{31}$$

Funkcje kształtu (*shape functions*), które – powtórzmy – służą wyznaczaniu wartości funkcji wewnątrz elementu skończonego na podstawie znanych stopni swobody, czyli ich wartości w węzłach, są bardzo ważnym pojęciem MES.

Teraz wektor uogólnionych odkształceń (a nie jedno odkształcenie, jak w kratownicy) możemy zapisać

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ -\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e(x) \\ v^e(x) \end{bmatrix} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{U}^e(x) = \mathbf{D}\cdot\mathbf{\Phi}^e(x)\cdot\mathbf{q}^e \tag{32}$$

oznaczając przez $\mathbf{D}$ macierz operatorów różniczkowych i wykorzystując związek (31). Jeśli dalej oznaczymy

$$\mathbf{B^e} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{\Phi}^e(\mathrm{x}) \tag{33}$$

to związek (32) przyjmie postać

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e\cdot\mathbf{q}^e \tag{34}$$

formalnie identyczną z (8), ale odkształcenie jest dwuelementowym wektorem, a wyrazy macierzy geometrycznej nie są stałe, jednak znane jako odpowiednie pochodne znanych funkcji kształtu. Wektor sił wewnętrznych, też w ogólności zmiennych wzdłuż osi pręta, możemy przedstawić jako

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N^e \\ M_g^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^e E^e & 0 \\ 0 & I_z^e E^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \mathbf{E}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E}^e\cdot\mathbf{B}^e\cdot\mathbf{q}^e = \mathbf{C}^e\cdot\mathbf{q}^e \tag{35}$$

co prowadzi do związku analogicznego z (9) z $\mathbf{C}^e = \mathbf{E}^e\mathbf{B}^e$ jako macierzą sił wewnętrznych. W równaniu (35) uwzględniamy (34) oraz prawo Hooka. Dodatkowo oznaczamy przez $\mathbf{E}^e$ diagonalną macierz zawierającą sztywności rozciągania i zginania, a E^e, A^e, I_z^e. oznaczają odpowiednio moduł sprężystości, pole powierzchni przekroju poprzecznego oraz moment bezwładności tego przekroju względem osi obojętnej zginania.

Wyprowadzenie wzoru na macierz sztywności opiera się na analizie energetycznej. Wprowadzamy wektor sił węzłowych ze składowymi w układzie lokalnym elementu, o kierunkach odpowiednio zgodnych ze stopniami swobody. Są to siły wewnętrzne określone na końcach belki – siła normalna, siła tnąca (poprzeczna) i moment zginający

$$\mathbf{p}^{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} n_1 & t_1 & m_1 & n_2 & t_2 & m_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{36}$$

Każda ze składowych tego wektora wykonuje pracę na uogólnionym przemieszczeniu, będącym stopniem swobody o zgodnym z nią numerze. Całkowita praca wykonana przez nie wynosi więc

$$L_Z = \frac{1}{2}\mathbf{p}^{e\mathrm{T}}\mathbf{q}^e \tag{37}$$

a jeśli przyjmiemy związek między siłami węzłowymi i stopniami swobody poprzez elementową macierz sztywności

$$\mathbf{k}^e\mathbf{q}^e = \mathbf{p}^e \tag{38}$$

to otrzymamy

$$L_Z = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{e\mathrm{T}}\mathbf{k}^e\mathbf{q}^e \tag{39}$$

Energię wewnętrzną obliczamy, całkując gęstość energii odkształcenia po objętości elementu, co można zamienić na całkowanie po długości i polu przekroju

$$L_w = \frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)} \varepsilon\sigma \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int\limits_{(l)} \mathrm{d}l \iint\limits_{(A)} \varepsilon\sigma \,\mathrm{d}A \tag{40}$$

Ponieważ zachodzi

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa y \;\; \text{oraz} \;\; \sigma = E\varepsilon = E\left(\varepsilon_0 + \kappa y\right) \tag{41}$$

więc

$$\iint\limits_{(A)} \varepsilon\sigma \,\mathrm{d}A = E\iint\limits_{(A)} \left(\varepsilon_0^2 + \kappa^2 y^2 + 2\varepsilon_0\kappa y\right)\mathrm{d}A = E\left(\varepsilon_0^2 A^e + \kappa^2 I_z^e\right) \tag{42}$$

gdyż po wyłączeniu przed całki stałych czynników rozpoznajemy definicje pola powierzchni, momentu bezwładności względem osi obojętnej *z* oraz momentu statycznego względem tej osi. W tym przypadku moment statyczny jest równy zeru, gdyż jest to oś centralna przekroju.

Przedstawiając ostatni człon w (42) w postaci macierzowej, rozpoznamy wektor uogólnionych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ oraz macierz $\mathbf{E}^e$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_0 & \kappa\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E^eA^e & 0\\ 0 & E^eI_z^e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\ \kappa\end{bmatrix}=\boldsymbol{\varepsilon}^{eT}\mathbf{E}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{43}$$

Na koniec wynik (43) wstawiamy do (40), przywołując związek (34) i otrzymamy

$$L_w=\frac{1}{2}\mathbf{q}^{e\mathrm{T}}\left(\int_{(l)}\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{E}^e\,\mathbf{B}^e\ \mathrm{d}l\right)\mathbf{q}^e \tag{44}$$

Pozostaje porównać (44) z (39), żeby otrzymać wyrażenie na elementową macierz sztywności w postaci

$$\mathbf{k}^e=\int_{(l)}\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{E}^e\,\mathbf{B}^e\ \mathrm{d}l \tag{45}$$

Tym razem, w celu zbudowania macierzy sztywności elementu należy wykonać całkowanie po jego długości. Wyrazy macierzy geometrycznej $\mathbf{B}^e$ są funkcją zmiennej *x* (wzór (33)), a jeśli belka ma zmienny przekrój (w tym zadaniu nie zakładano pryzmatyczności), to sztywność rozciągania i sztywność zginania (wyrazy macierzy $\mathbf{E}^e$) też zależą od *x*. Wymagane całkowanie można wykonać analitycznie lub numerycznie. Metody numerycznego całkowania nie są omawiane w tym skrypcie, zatem odsyłam czytelnika do podręczników analizy numerycznej. W tym miejscu przyjmiemy, że profesjonalny program MES potrafi przeprowadzić takie całkowanie.

Przykład doboru funkcji kształtu

W równaniu (30) przyjęliśmy, że istnieją funkcje kształtu służące wyliczeniu wartości funkcji wewnątrz elementu na podstawie ich wartości w węzłach. Teraz pokażemy przykładowy sposób wyznaczenia takich funkcji dla rozważanego elementu belkowego. Jako pierwsze rozważamy przemieszczenie $u^e(x)$ wzdłuż osi pręta, które przybliżymy wielomianem pierwszego stopnia

$$u^e(x) = a_u + b_u x \tag{46}$$

Odwołując się do wiadomości z elementarnej wytrzymałości materiałów, zauważamy, że dla pręta o stałej sztywności rozciągania przekroju $A^e E^e$, obciążonego rozciągającymi (lub ściskającymi) siłami przyłożonymi na końcach, jest to rozwiązanie ścisłe. W przypadku gdy sztywność rozciągania nie jest stała i zmienia się wraz z *x*, związek (46) jest jedynie przybliżeniem, na ogół tym lepszym, im krótszy jest przedział $\left[0, l^e\right]$, czyli im mniejszy jest element skończony. Współczynniki w równaniu (46) wyznaczamy, wykorzystując znane wartości funkcji na końcach

$$u^e(0) = u_1 = q_1,\ u^e(l) = u_2 = q_4 \tag{47}$$

co prowadzi do

$$a_u = q_1,\ b_u = \frac{q_4 - q_1}{l} \tag{48}$$

i oznacza, że poszukiwaną funkcję przemieszczenia można zapisać w postaci

$$u^e(x) = q_1 + \frac{q_4 - q_1}{l} x = \left(1 - \frac{x}{l}\right) q_1 + \frac{x}{l} q_4 \tag{49}$$

W drugiej kolejności rozważamy przemieszczenie $v^e(x)$ prostopadłe do osi belki, wywołane zginaniem. W tym przypadku przyjmujemy aproksymację wielomianem trzeciego stopnia

$$v^e(x) = a_v + b_v x + c_v x^2 + d_v x^3 \tag{50}$$

uzasadniając taki wybór tym, że dla belki o stałej sztywności zginania obciążonej siłami na końcach jest to rozwiązanie ścisłe (moment gnący jest funkcją liniową, więc linia ugięcia jest wielomianem trzeciego stopnia). Podobnie jak wyżej, jeśli sztywność giętna $E^e I_z^e$ nie jest stała wzdłuż osi belki, to (50) jest tylko przybliżeniem – tym lepszym, im krótszy jest element skończony. Do wyznaczenia współczynników wielomianu (50) wykorzystujemy cztery warunki brzegowe

$$\begin{aligned} v^e(0) &= v_1 = q_2 \quad v^{e\,\prime}(0) = \varphi_1 = q_3 \\ v^e(l) &= v_2 = q_5 \quad v^{e\,\prime}(l) = \varphi_2 = q_6 \end{aligned} \tag{51}$$

pamiętając, że kąt obrotu przekroju jest pochodną funkcji ugięcia (prim ′ oznacza różniczkowanie względem zmiennej *x*), a po rozwiązaniu układu otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_v &= q_2 \\ b_v &= q_3 \\ c_v &= \frac{-3q_2 - 2q_3 l + 3q_5 - q_6 l}{l^2} \\ d_v &= \frac{2q_2 + q_3 l - 2q_5 + q_6 l}{l^2} \end{aligned} \tag{52}$$

a funkcję ugięcia zapisujemy

$$v^e = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) q_2 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) q_3 + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) q_5 + \left(\frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) q_6 \tag{53}$$

Łącząc zapis (30) oraz zależności (49) i (53), możemy macierz funkcji kształtu zapisać

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \tag{54}$$

a po wykonaniu odpowiedniego różniczkowania (33) otrzymujemy macierz geometryczną

$$\mathbf{B}^e(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} \tag{55}$$

Teraz można wykonać odpowiednie mnożenie macierzy i wyznaczyć elementową macierz sztywności według wzoru (45), co pozostawiam czytelnikowi do samodzielnego wyprowadzenia.

Transformacja do układu globalnego

Kolejnym punktem algorytmu jest agregacja pojedynczych elementów w całą strukturę, a zwłaszcza agregacja macierzy sztywności i wektora sił węzłowych. Żeby jednak przeprowadzić ten proces, przyjmując zasady nierozdzielności przemieszczeń i statycznej równowagi węzłów, należy dokonać transformacji wszystkich wielkości do układu globalnego, wspólnego dla wszystkich elementów, gdyż zależności opisujące element belkowy zapisaliśmy w jego układzie lokalnym. Rysunek 12 ilustruje problem: w węźle,

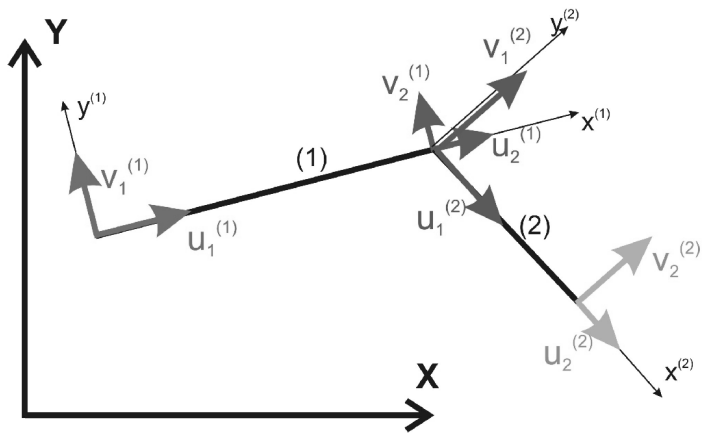
gdzie łączą się elementy (1) i (2), nie można wymagać równości przemieszczeń węzłowych, gdyż są one wyrażone w różnych układach współrzędnych. Ten sam problem dotyczy składania sił węzłowych oraz wyrazów macierzy sztywności. Ponieważ zagadnienie to jest związane nie tylko z elementami belkowymi, ale w zasadzie wszystkimi innymi, a jego zapis nie wybiega poza podstawowe wiadomości z geometrii analitycznej, przedstawiamy je bliżej. Rysunek 13 przedstawia dowolny wektor umieszczony w dwóch układach współrzędnych obróconych względem siebie. Jeden to układ globalny *XOY* o wersorach osi **i**, **j**, a drugi lokalny z wersorami **i'**, **j'**. Wektory, z których jeden jest zapisany w układzie globalnym

$$\mathbf{r} = r_X \mathbf{i} + r_Y \mathbf{j} \tag{56}$$

a drugi w układzie lokalnym

$$\mathbf{r'} = r_x \mathbf{i'} + r_y \mathbf{j'} \tag{57}$$

są sobie równe, co pozwala zapisać



Rys. 12. Elementy belkowe ze wspólnym węzłem w swoich lokalnych oraz globalnych układach współrzędnych

$$r_X \mathbf{i} + r_Y \mathbf{j} = r_x \mathbf{i'} + r_y \mathbf{j'} \tag{58}$$

Zależność (58) mnożymy skalarnie stronami kolejno przez wersowy **i**, **j**, pamiętając, że

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \;\text{ oraz }\; \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0 \tag{59}$$

oraz oznaczając

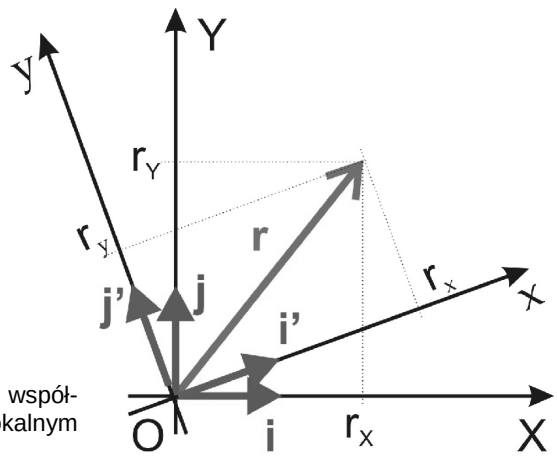
$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i'} &= \cos(X, x) = t_{11},\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j'} = \cos(X, y) = t_{12} \\ \mathbf{i'} \cdot \mathbf{j} &= \cos(Y, x) = t_{21},\ \mathbf{j'} \cdot \mathbf{j} = \cos(Y, y) = t_{22} \end{aligned} \tag{60}$$

zapiszemy związki między współrzędnymi wektora w obu układach w postaci

$$\begin{bmatrix} r_X \\ r_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \tag{61}$$

albo macierzowo

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}\mathbf{r}' \tag{62}$$



Rys. 13. Wektor r w dwóch układach współrzędnych globalnym *XOY* i lokalnym *xOy*

Zauważając, że macierz $\mathbf{T}$ transformująca z układu lokalnego do globalnego jest ortogonalna, co oznacza, że jej transpozycja jest tożsama z macierzą do niej odwrotną $\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}^{-1}$, łatwo odwrócimy związek (62), uzyskując możliwość transformacji „powrotnej" z układu globalnego do lokalnego

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{r} \tag{63}$$

Podstawiając w miejsce dowolnego wektora wektory uogólnionych przemieszczeń (stopni swobody) na obu końcach naszego elementu – przy umowie, że litera mała oznacza wielkość w układzie lokalnym, a duża w globalnym – otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \tag{64}$$

Trzeci wiersz i trzecia kolumna w poszerzonej macierzy transformacji odnoszą się do kąta obrotu, który niezależnie od układu współrzędnych ma tę samą wartość. Łącząc oba zapisy (64) w jeden, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \Phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \tag{65}$$

albo w skróconej notacji macierzowej z użyciem definicji (28)

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{Q}^e \tag{66}$$

również z ortogonalną macierzą $\mathbf{R}^e$, którą potrafimy wyznaczyć dla każdego elementu w oparciu o położenie (obrót) jego układu lokalnego względem układu globalnego. Powtórzenie tej samej procedury dla wektora sił węzłowych (36) pozwala zapisać

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{P}^e \tag{67}$$

Następnie przekształcamy związek (38), wstawiając do niego (66) i (67) i mnożąc stronami lewostronnie przez macierz $(\mathbf{R}^e)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{R}^e)^{-1}$, co prowadzi do

$$\mathbf{R}^{e\mathrm{T}} \mathbf{k}^e \mathbf{R}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}} \mathbf{R}^e \mathbf{P}^e \tag{68}$$

Ostatecznie otrzymujemy relację między stopniami swobody a siłami węzłowymi elementu wyrażonymi w globalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{K}^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{P}^e \tag{69}$$

gdzie macierz sztywności elementu po transformacji do tego układu przyjmuje postać

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}} \mathbf{k}^e \mathbf{R}^e \tag{70}$$

Podsumowując: wszystkie relacje opisujące deformację pojedynczego elementu zapisujemy w jego układzie lokalnym, a za pomocą (66), (67) i (70) oraz macierzy transformacji $\mathbf{R}^e$ potrafimy przetransformować je do układu globalnego, wspólnego dla wszystkich elementów struktury. W tym układzie możemy już wprowadzić globalną numerację stopni swobody i sił węzłowych, zastosować zasadę nierozdzielności we wspólnych węzłach łączących się elementów, zastosować zasadę równowagi statycznej uogólnionych sił węzłowych i dokonać agregacji elementowych macierzy sztywności. Prowadzi to do układu równań typu (24), przy czym cały schemat postępowania jest identyczny z omówionym wcześniej dla układu kratowego.

Transformacja powrotna do układów lokalnych

Rozwiązując podstawowy układ MES, po uprzednim wprowadzeniu odpowiednich warunków brzegowych co najmniej eliminujących ruch sztywny, otrzymujemy stopnie swobody i siły węzłowe w globalnym układzie współrzędnych. W celu określenia sił węzłowych w układzie lokalnym każdego z elementów należy za pomocą relacji (67) dokonać transformacji powrotnej, co jest już tylko operacją algebraiczną mnożenia macierzy przez wektor. Po zastosowaniu (66) otrzymujemy stopnie swobody w układzie lokalnym każdego elementu, a to pozwala na obliczenie ich odkształceń (34) i sił wewnętrznych (35) oraz, co za tym idzie, naprężeń.

Stan płaski

Cały algorytm postępowania, począwszy od dyskretyzacji konstrukcji (podziału na elementy skończone), wyboru elementowych stopni swobody, poprzez budowę macierzy elementowych, odpowiednie transformacje do układu globalnego i agregację do rozwiązania układu równań MES i transformacje powrotne do układów lokalnych elementów można zastosować dla konstrukcji innych niż prętowe, w których element skończony nie jest odcinkiem, lecz figurą dwuwymiarową lub bryłą trójwymiarową. Różnice pojawią się w definicji stopni swobody oraz funkcji kształtu, a także w zadaniu całkowania po elemencie, ale poszczególne kroki algorytmu pozostają niezmienione. Prześledzimy te różnice na przykładzie trójkątnego elementu płaskiego. Można nim dyskretyzować płaski obszar ciała odkształcalnego (rysunek 14), zdając sobie sprawę z koniecznych przybliżeń, jak na przykład widocznych na rysunku trudności z pokryciem brzegu. Im więcej mniejszych elementów użyjemy, tym mniejszy jest błąd tej dyskretyzacji. W zapisach pomijamy indeks *e*, gdyż wszystkie rozważania dotyczą pojedynczego elementu. Wydzielając z całości jeden element (rysunek 15), zaznaczamy w nim węzły będące wierzchołkami trójkąta oraz węzłowe stopnie swobody będące przemieszczeniami w płaszczyźnie

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{71}$$

Z każdym elementem związane są również elementowe siły wykonujące pracę na powyższych stopniach swobody

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 & S_1 & P_2 & S_2 & P_3 & S_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{72}$$

przy czym zachodzi związek

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\,\mathbf{U} \tag{73}$$

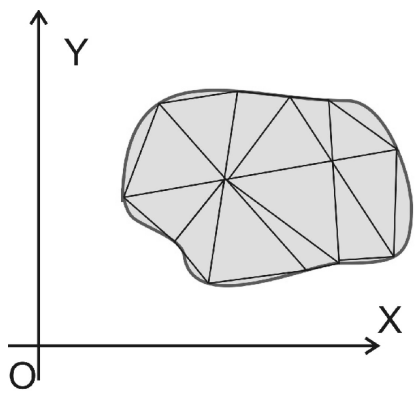
a przepis na elementową macierz sztywności $\mathbf{K}$ wyprowadzimy poniżej.

Przemieszczenia $u(x,y)$ oraz $v(x,y)$ punktu wewnątrz elementu są funkcjami dwóch zmiennych. Odkształcenia dowolnego punktu zapiszemy jako wektor

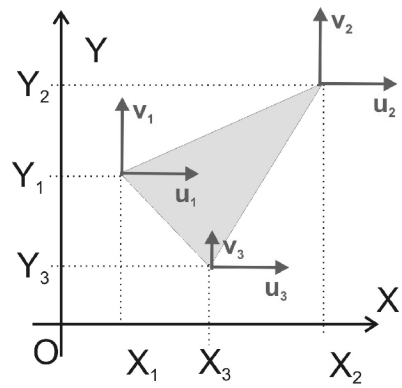
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\right]^{\mathrm{T}} \tag{74}$$

a naprężenia jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\right]^{\mathrm{T}} \tag{75}$$



Rys. 14. Płaski obszar dyskretyzowany elementami trójkątnymi



Rys. 15. Stopnie swobody płaskiego elementu trójkątnego

Przypomnijmy, że dla elementu płaskiego możemy mieć do czynienia albo z płaskim stanem odkształcenia $(\varepsilon_Z = 0)$ i wtedy $\sigma_Z = \nu\left(\sigma_X + \sigma_\gamma\right)$, albo z płaskim stanem naprężenia $(\sigma_Z = 0)$ i wtedy $\varepsilon_Z = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_X + \varepsilon_Y\right)$, gdzie ν oznacza współczynnik odkształceń poprzecznych Poissona. W każdym przypadku jedną z tych niezerowych wielkości obliczamy, znając składowe (74) lub (75) i dlatego nie wliczamy ich do niezależnych niewiadomych.

Element stałego odkształcenia

W celu dokonania aproksymacji funkcji składowych wektora przemieszczeń stosujemy wielomiany pierwszego stopnia

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$
$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \tag{76}$$

co jest typowe dla elementów z węzłami jedynie w wierzchołkach. Mając do dyspozycji po trzy znane wartości każdej z funkcji w (76) jako odpowiednie stopnie swobody, możemy jednoznacznie wyznaczyć współczynniki tych wielomianów. Układ

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \quad i = 1, 2, 3$$
$$v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{77}$$

prowadzi do

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}\left[u_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right]$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}\left[u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)\right] \tag{78}$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}\left[u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)\right]$$

i identycznej postaci dla pozostałych trzech, jeśli stopnie swobody u_1, u_2, u_3 zamienimy na v_1, v_2, v_3. We wzorach (78) A oznacza pole powierzchni trójkątnego elementu. Po wstawieniu powyższych współczynników do (76) możemy zapisać

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x,y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\mathbf{U} \tag{79}$$

gdzie funkcje kształtu mają postać

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right]$$
$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[(x_3 y_1 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \tag{80}$$
$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right]$$

Po zastosowaniu związków geometrycznych Cauchy'ego, zapisanych z użyciem macierzy operatorów różniczkowych $\mathbf{D}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x,y) \tag{81}$$

i użyciu zwięzłego zapisu wektorowo-macierzowego z wykorzystaniem (79), otrzymujemy

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = (\mathbf{DN})\mathbf{U} = \mathbf{BU} \tag{82}$$

Rozpoznajemy tu znaną relację typu (8) i (34), z tym, że macierz geometryczna $\mathbf{B}$ ma formę

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} \tag{83}$$

(indeks po przecinku oznacza zmienną, względem której różniczkujemy). Zwróćmy uwagę, że dla przyjętych funkcji kształtu (80) jako wielomianów pierwszego stopnia wszystkie pochodne występujące w (83) są stałymi niezależnymi od zmiennych (x, y) i, co za tym idzie, składowe wektora odkształceń są stałe na obszarze całego elementu. Dlatego płaski liniowy element trójkątny nazywany jest **elementem stałego odkształcenia**. Biorąc pod uwagę liniowe prawo konstytutywne (Hooka) oraz (82), co prowadzi do

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{EBU} \tag{84}$$

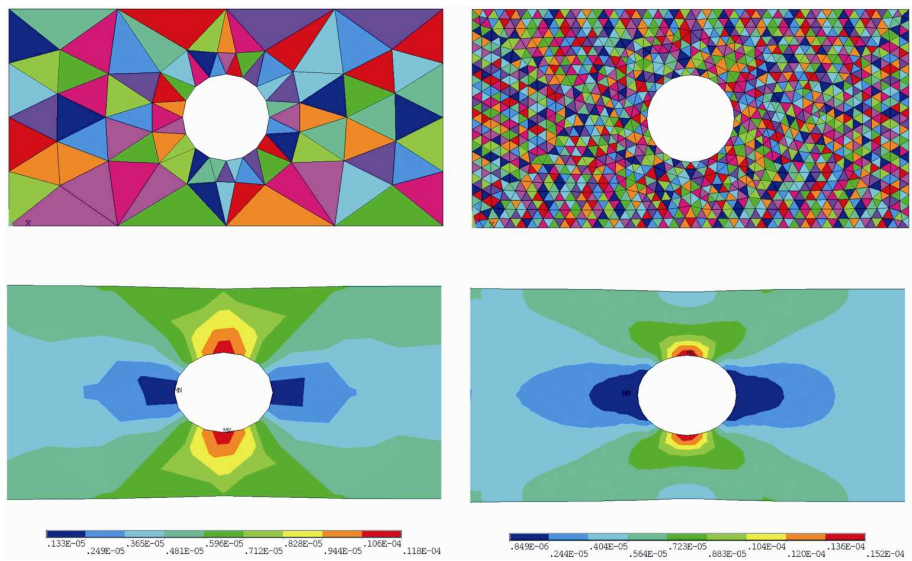
możemy też mówić o stałym naprężeniu. Dla płaskiego stanu naprężenia macierz sprężystości $\mathbf{E}$ ma postać

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{85}$$

Stałość odkształcenia w elemencie jest oczywiście przybliżeniem wynikającym z zastosowanej aproksymacji, a najdokładniejsza (najbliższa rzeczywistej) jego wartość występuje w środku ciężkości elementu.

Znów łatwo zaobserwować, że im więcej mniejszych elementów skończonych się zastosuje, tym mniejszy jest błąd w uzyskanym rozkładzie

odkształceń i naprężeń. Rysunek 16 pokazuje dwa różne podziały oraz porównanie uzyskanych rozkładów odkształceń w pewnej tarczy przy rzadkiej i gęstej dyskretyzacji. Zwróćmy uwagę na „niefizyczny”, niegładki rozkład przy zbyt zgrubnym podziale na elementy oraz na to, że nieciągła zmiana odkształceń (i naprężeń) od elementu do elementu wynika z istoty sformułowania.



Rys. 16. Różna gęstość dyskretyzacji i rozkłady odkształceń przy zastosowaniu elementów stałego odkształcenia

Pozostaje do wyznaczenia macierz $\mathbf{K}$ sztywności elementu trójkątnego zasygnalizowana w (73). Pracę sił węzłowych, po wykorzystaniu (73), obliczamy według wzoru

$$L_Z = \frac{1}{2}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} \tag{86}$$

Energię wewnętrzną odkształcenia wyznaczamy, całkując po polu powierzchni elementu jej gęstość

$$\Phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} \tag{87}$$

mnożoną przez grubość h

$$L_W = \frac{1}{2}\iint_{(A)} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\, h\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{88}$$

Po wykorzystaniu związków (82) i (84) oraz wyłączeniu poza całkę wektora stopni swobody niezależnego od zmiennych (x, y) zapisujemy

$$L_W = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\left(\iint_{(A)} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{E}\mathbf{B}\,h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathbf{U} \tag{89}$$

Na koniec porównanie (89) i (86) oraz wykorzystanie symetrii macierzy sztywności prowadzi do

$$\mathbf{K} = \iint_{(A)} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{B}\,h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{90}$$

Jeśli grubość elementu jest stała, to elementowa macierz sztywności również zawiera stałe wyrazy, a powyższa całka przyjmuje wartość

$$\mathbf{K} = hA\;\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{B} \tag{91}$$

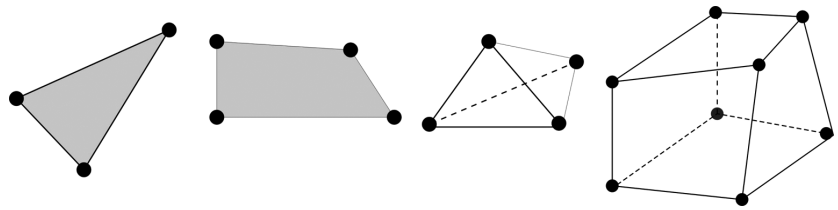
dla pojedynczego elementu trójkątnego o stałym odkształceniu.

Teraz można przejść do transformacji do układu globalnego, agregacji macierzy elementowych do macierzy całej struktury i kontynuować poznany wcześniej algorytm MES.

Ogólne zasady postępowania przy rozwiązywaniu zadań MES

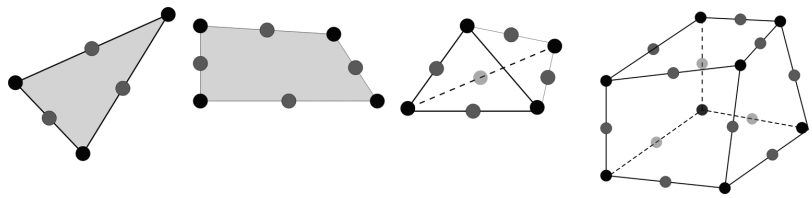
Powyższe rozdziały miały na celu przybliżyć algorytm postępowania przy analizie konstrukcji metodą elementów skończonych. Aby dogłębnie poznać problem, należy jeszcze wiele uwagi poświęcić zagadnieniu modelowania, dyskretyzacji, aproksymacji, analizy i kontroli zbieżności rozwiązania, ale na tym etapie można już dokonać pewnych podsumowań i uogólnień wszystkich wprowadzonych pojęć i kroków algorytmu. **Element skończony** jest prostą figurą geometryczną (liniową, płaską lub przestrzenną), dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane **węzłami** oraz pewne funkcje interpolacyjne służące do opisu rozkładu analizowanej wielkości w jego wnętrzu i na jego bokach. Funkcje te nazywa się funkcjami węzłowymi bądź **funkcjami kształtu**. Dziedzina (nośnik) każdej funkcji kształtu jest ograniczona do obszaru elementu, co oznacza, że poza nim wartość funkcji jest tożsamościowo równa zeru. Węzły znajdują się w wierzchołkach elementu skończonego, ale mogą być również umieszczone na jego bokach i w jego wnętrzu (rysunek 17 i 18). Jeżeli węzły

znajdują się tylko w wierzchołkach, to element skończony jest nazywany **elementem liniowym**, ponieważ funkcje interpolacyjne są wtedy wielomianami pierwszego stopnia. W pozostałych przypadkach mamy do czynienia z **elementami wyższych rzędów**. Rząd elementu jest zawsze równy rzędowi funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu). Liczba funkcji kształtu w pojedynczym elemencie skończonym jest równa liczbie jego węzłów. Funkcje kształtu są zawsze tak zbudowane, aby w węzłach, których dotyczą, były równe jeden, a w pozostałych węzłach przyjmowały wartość zero.



Rys. 17. Elementy liniowe trójkątny, czworokątny, czworościenny, sześciościenny z węzłami tylko w wierzchołkach

W omawianych liniowych elementach trójkątnych (stałego odkształcenia) daje się zapewnić ciągłość przemieszczeń na granicach między elementami, ale nie zachodzi ciągłość ich pochodnych. Używając elementów wyższych rzędów z węzłami także poza wierzchołkami, można tę ciągłość uzyskać, co poprawia jakość rozwiązania, a elementy, które ją zapewniają nazywa się **dostosowanymi**. W ogólnym przypadku, jeśli sąsiadujące elementy są różnych rzędów, zapewnienie ciągłości przemieszczeń w węzłach nie gwarantuje ich ciągłości wzdłuż wspólnego boku, co nabiera znaczenia, jeśli do dyskretyzacji różnych części modelu zastosujemy różne elementy.



Rys. 18. Elementy drugiego stopnia trójkątny, czworokątny, czworościenny, sześciościenny z węzłami w wierzchołkach i w środkach boków

Przemieszczeniowa MES

Wybór stopni swobody w węźle elementu zależy od typu zadania, jakie mamy do analizy. Często w jednym projekcie wystąpią elementy różnych typów i o różnych stopniach swobody.

- kratownica płaska – dwa przemieszczenia
- kratownica przestrzenna – trzy przemieszczenia
- rama płaska (zginanie) – dwa przemieszczenia i kąt obrotu
- rama przestrzenna – trzy przemieszczenia i trzy kąty obrotu
- płaska tarcza – dwa przemieszczenia
- płyta (zginanie) – jedno przemieszczenie i dwa obroty
- powłoka (płyta + stan tarczowy) – trzy przemieszczenia i dwa obroty
- blok trójwymiarowy – trzy przemieszczenia

Ponieważ wymienione stopnie swobody to uogólnione przemieszczenia, mówimy o **przemieszczeniowej MES**. Jest ona stosowana najczęściej, a pochodzi w najbardziej ogólnym ujęciu od wariacyjnego sformułowania zadania mechaniki ciała odkształcalnego, polegającego na minimalizacji funkcjonału Lagrange'a, w którym niewiadomymi są funkcje przemieszczeń. Warto wiedzieć, że możliwe są i inne sformułowania, gdzie stopniami swobody są też naprężenia czy odkształcenia, a ich pochodzenie związane jest z zastosowaniem innych funkcjonałów jak na przykład Hellingera–Reissnera czy Hu–Washizu.

Punkt po punkcie

Zadania, jakie należy wykonać w celu przeprowadzenia analizy metodą elementów skończonych, można wypunktować następująco:

- wybrać kształt elementu, jego rząd i stopnie swobody (przykład: (3), (28) lub (71)) i za jego pomocą zdyskretyzować konstrukcję,
- wyznaczyć funkcje kształtu do aproksymacji przemieszczeń wewnątrz elementu za pomocą stopni swobody (przykład: (54) lub (80)),
- zbudować macierz operatorów różniczkowych (przykład: (32) lub (81)) i macierz odkształceń (przykład: (8), (33) lub (83)),
- zbudować macierz związków konstytutywnych (przykład: (9), (35) lub (85)) i macierz naprężeń (przykład: (10), (35) lub (84)),
- dokonując (na ogół) odpowiedniego całkowania po elemencie, obliczyć jego macierz sztywności (przykład: (14), (45) lub (90)),
- zbudować macierz transformacji (jak w (66)) i dokonać transformacji do układu globalnego (70),
- dokonać agregacji macierzy sztywności całego układu (wszystkich elementów),
- zadać odpowiednie warunki brzegowe co najmniej eliminujące ruch sztywny struktury i przyłożyć obciążenia,
- rozwiązać układ równań MES (wyznaczyć stopnie swobody wszystkich elementów),

- powrócić do elementu przez transformację do układów lokalnych i wyznaczyć odkształcenia i naprężenia za pomocą znanych już macierzy elementowych.

Dokładność rozwiązania

Jeszcze o dyskretyzacji modelu

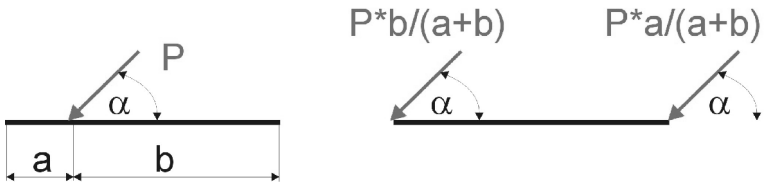
Przypominamy, że analiza konstrukcji metodą elementów skończonych dotyczy (schemat 1) dyskretnego modelu umożliwiającego przybliżone, dyskretne rozwiązanie modelu matematycznego konstrukcji rzeczywistej. Nawet bez matematycznych dowodów rozumiemy (na co już zwracaliśmy uwagę), że od jakości tej dyskretyzacji zależy jakość rozwiązania, a co za tym idzie, zbieżność uzyskiwanych wartości dyskretnych do ścisłych rozwiązań równań różniczkowych. Dyskretyzacji podlega po pierwsze sama konstrukcja (ściślej jej model geometryczny), co oznacza, że zamiast ciągłego obszaru o nieskończonej liczbie punktów materialnych, operujemy skończoną liczbą elementów o skończonych rozmiarach, a zamiast poszukiwać ciągłych funkcji o nieskończonej liczbie stopni swobody, wyznaczamy wartości dyskretne dla skończonej liczby węzłów.

Dyskretyzacja obciążeń

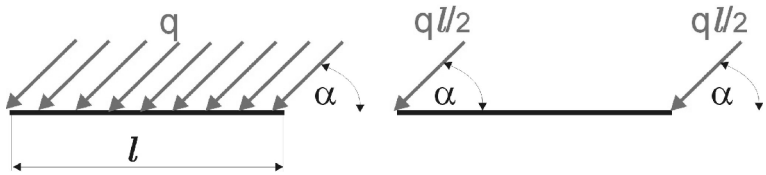
Dyskretyzacji podlegają też przyłożone do konstrukcji obciążenia. Oznacza to, że wszelkie **siły** przyłożone są **tylko w węzłach**, a nie rozłożone w sposób rzeczywisty. Założenie to wykorzystywaliśmy w każdym z omawianych przykładów elementów. Jeśli prawdziwe obciążenia nie spełniają takich warunków, to na potrzeby MES należy je zastąpić układami statycznie im równoważnymi, ale z siłami skupionymi w węzłach elementu. Dotyczy to zwłaszcza wszelkich obciążeń rozłożonych w sposób ciągły wzdłuż linii, na powierzchniach czy w objętościach, a więc ciśnień, ciężaru własnego, sił bezwładności. Przykładowo, jeśli na element belkowy ma działać siła przyłożona w jego wnętrzu (rysunek 19), to zastąpimy ją dwiema siłami węzłowymi, które zredukowane do dowolnego punktu dają tę samą dwójkę siła-moment co obciążenie oryginalne.

Oczywiście ten problem rozwiązałby też podział elementu belkowego na dwie części, tak że jednym z węzłów byłby punkt przyłożenia obciążenia.

Nie da się jednak tego zrobić, jeśli na belkę działa obciążenie rozłożone w sposób ciągły (rysunek 20), natomiast dobór statycznie mu równoważnych sił węzłowych jest możliwy i należy go zastosować.

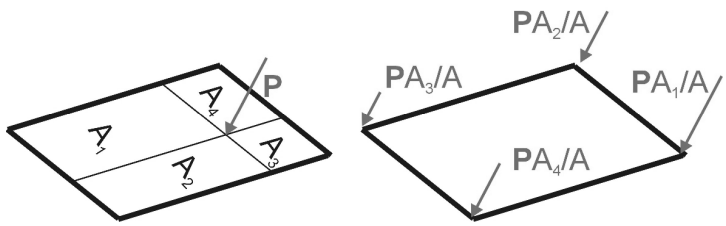


Rys. 19. Siła wewnątrz belki i zastępczy układ sił węzłowych



Rys. 20. Obciążenie ciągłe o stałej intensywności i zastępczy układ sił węzłowych

Ostatni przykład dostarcza też argumentu za możliwie gęstym podziałem rzeczywistej belki na małe elementy. Na bardzo krótkim odcinku różnice między ścisłym ugięciem belki, które jest w tym wypadku wielomianem czwartego stopnia, a przybliżonym, które (funkcja kształtu) jest wielomianem trzeciego stopnia, są niewielkie, podczas gdy dla długiego odcinka będą istotnie duże.



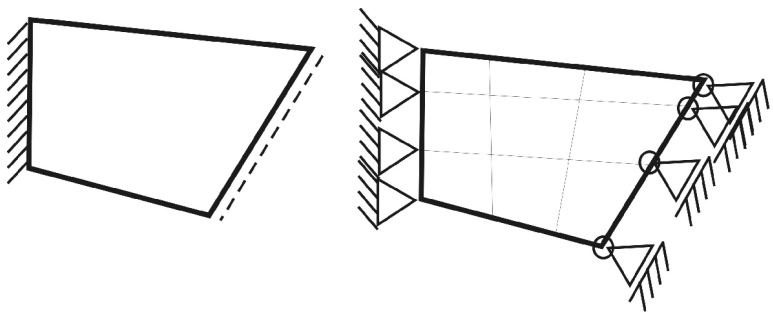
Rys. 21. Siła wewnątrz elementu prostokątnego i równoważny układ sił węzłowych

Rysunek 21 pokazuje przykład statycznie równoważnego rozłożenia między węzły siły skupionej przyłożonej do elementu prostokątnego o całkowitym polu powierzchni równym A.

Dyskretyzacja warunków brzegowych

Dyskretyzacji podlegają również nakładane na konstrukcję przemieszczeniowe warunki brzegowe. Jeśli na przykład (rysunek 22) brzeg rzeczy-

wistej płyty ma być utwierdzony, a drugi swobodnie podparty, to po dyskretyzacji jej obszaru stosowne warunki możemy postawić jedynie w węzłach, gdzie jako siły węzłowe pojawią się reakcje więzów. Spełnienie warunków między węzłami dyskretyzacji może już nie być ścisłe, jednak należy pamiętać, że w modelu dyskretnym rozwiązanie poza węzłami istnieje jedynie w sensie aproksymacji, a struktura składa się z samych węzłów doznających przemieszczeń. Ta obserwacja też jest argumentem za możliwie gęstym podziałem obiektu na elementy.



Rys. 22. Warunki brzegowe w modelu rzeczywistym i dyskretnym

Zbieżność i dokładność rozwiązania

Jak zostało wyjaśnione, model MES, który operuje na skończonej liczbie niewiadomych, może jedynie przybliżać odpowiedź rzeczywistego układu fizycznego o nieskończonej liczbie stopni swobody. Nasuwa się zatem bardzo ważne pytanie: Jak dobre jest to przybliżenie? Niestety, nie ma na nie jednoznacznej i łatwej odpowiedzi, bo wszystko zależy od tego, co modelujemy i jakich narzędzi używamy. Dla konstrukcji o mniejszym stopniu złożoności, pracujących w zakresie liniowym, modelowanych adekwatnie dobranymi elementami, otrzymywane rozwiązania cechuje duża dokładność. W innych przypadkach dokładność może być mniejsza albo jej uzyskanie wymaga większego nakładu obliczeniowego. Można jednak powiedzieć, że doświadczenia wielu już lat, wielu inżynierów i teoretyków metody oraz wielu zrealizowanych projektów dają ogólnie zadowalający poziom zaufania do wyników uzyskiwanych za pomocą MES. Chcąc racjonalnie podjąć decyzję w kwestii akceptowalnego poziomu dokładności, musimy stosować pewne miary błędu rozwiązania. Nakładamy je na wielkości takie jak naprężenia czy energia, pamiętając, że są one obarczone większymi niedokładnościami. O ile przemieszczenia otrzymujemy wprost jako wynik rozwiązania podstawowego układu MES, to odkształcenia (a z nich naprężenia) dopiero po zastosowaniu macierzy geometrycznych,

w których użyto aproksymujących funkcji kształtu, a więc z natury rzeczy przybliżone, nawet jeśli przemieszczenia byłyby dokładne. Wprowadza się pojęcie wektora średniego naprężenia w węźle

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{\mathrm{a}} = \frac{\sum_{j=1}^{N_e^n} \boldsymbol{\sigma}_n^j}{N_e^n} \tag{92}$$

Dotyczy to sytuacji, kiedy w jednym węźle o numerze n łączy się N_e^n elementów i z każdego z nich otrzymujemy różną wartość naprężenia (na przykład elementy o stałym naprężeniu). Następnie tworzymy wektor błędu naprężenia w węźle n elementu j jako różnicę wektora średniego naprężenia (92) i wektora naprężenia, jakie w danym węźle uzyskamy od tego elementu

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n^j = \boldsymbol{\sigma}_n^{\mathrm{a}} - \boldsymbol{\sigma}_n^j \tag{93}$$

Oczywiście dla rozwiązania ścisłego naprężenie w danym punkcie liczone od strony dowolnego elementu jest takie samo, więc wektor błędu (93) jest zerowy, a w rozwiązaniu przybliżonym nie. Po zastosowaniu prawa fizycznego typu (84), odwróconego w celu wyliczenia błędu odkształceń, wyznaczamy błąd energii elementu j

$$e_j = \frac{1}{2} \int_{(\mathrm{elem})} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{j\,\mathrm{T}} \mathbf{E}^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma}^j \,\mathrm{dvol} \tag{94}$$

Wyznaczamy tę wielkość dla wszystkich elementów struktury i stosujemy m.in. do oceny jakości dokonanej dyskretyzacji. Wartość tego błędu jest wykorzystywana do tzw. adaptacji siatki elementów: w rejonach, gdzie jest znacząca, należy dokonać zagęszczenia, czyli wprowadzić więcej mniejszych elementów. Przyjmuje się też, że cechą najlepszej dyskretyzacji byłoby wyrównanie wielkości błędu energii we wszystkich elementach (*error equilibration*). Wreszcie, dokonując sumowania błędu energii po wszystkich elementach, otrzymujemy błąd energii struktury

$$e = \sum_{j=1}^{N} e_j \tag{95}$$

oraz błąd procentowy w normie energetycznej (zobacz (86))

$$E = \left(\frac{e}{L_Z + e} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 100\% \tag{96}$$

Przyjmuje się, że wartość tego błędu w granicach 5% oznacza wystarczająco dokładne rozwiązanie dyskretne.

Inną możliwością oceny jakości rozwiązania jest sprawdzenie różnicy między górnym i dolnym oszacowaniem poszczególnych składowych naprężenia, przy czym „składową" może być też naprężenie zastępcze. Najpierw wyznaczamy błąd średniokwadratowy (*root mean square*) wybranej składowej i w węźle n

$$\Delta\sigma_{i,n} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_e^n} \left(\Delta\sigma_{i,n}^{j}\right)^2}{N_e^n}} \tag{97}$$

gdzie $\Delta\sigma_{i,n}^{j}$ jest składową numer i wektora błędu naprężenia (93), a pozostałe oznaczenia jak wyżej. Następnie wyliczamy dolne i górne oszacowanie tej składowej

$$\begin{aligned} \sigma_{i,n}^{\mathrm{minb}} &= \sigma_{i,n}^{\mathrm{a}} - \Delta\sigma_{i,n} \\ \sigma_{i,n}^{\mathrm{maxb}} &= \sigma_{i,n}^{\mathrm{a}} + \Delta\sigma_{i,n} \end{aligned} \tag{98}$$

przy czym symbol $\Delta\sigma_{i,n}^{\mathrm{a}}$ oznacza składową numer i wektora średniego naprężenia w węźle zdefiniowanego w (92). Ponieważ dla rozwiązania ścisłego błąd średniokwadratowy wynosi zero, więc dolne i górne oszacowanie równe są wartości średniej. Dla rozwiązania przybliżonego różnice między oszacowaniami i średnią są miarą jego dokładności w danym węźle. Jeśli jeszcze weźmiemy najmniejszą i największą wartość (98) spośród wszystkich węzłów całej struktury

$$\begin{aligned} \sigma_{i}^{\mathrm{minb}} &= \min_{n}\left(\sigma_{i,n}^{\mathrm{a}} - \Delta\sigma_{i,n}\right) \\ \sigma_{i}^{\mathrm{maxb}} &= \max_{n}\left(\sigma_{i,n}^{\mathrm{a}} + \Delta\sigma_{i,n}\right) \end{aligned} \tag{99}$$

oraz najmniejszą i największą wartość spośród średnich $\sigma_{i,n}^{\mathrm{a}}$

$$\begin{aligned} \sigma_{i}^{\mathrm{amin}} &= \min_{n}\sigma_{i,n}^{\mathrm{a}} \\ \sigma_{i}^{\mathrm{amax}} &= \max_{n}\sigma_{i,n}^{\mathrm{a}} \end{aligned} \tag{100}$$

to dla dobrego rozwiązania błąd policzony jako

$$\delta = \frac{\left|\sigma_{i}^{a\max} - \sigma_{i}^{\max b}\right|}{\sigma_{i}^{\max b}} \tag{101}$$

(i podobnie dla minimów) powinien być wystarczająco mały i nie przekraczać kilku procent.

Testowanie rozwiązania dyskretnego

W praktycznych zastosowaniach MES, kiedy używamy metody do rozwiązania złożonych zadań, nie mamy możliwości porównania otrzymywanych wyników z rozwiązaniami analitycznymi. Chcąc uzyskać zaufanie co do zbieżności i dokładności rozwiązania dyskretnego, wykonujemy zwykle kilka testów. Po pierwsze porównujemy wyniki uzyskane przy **różnych gęstościach siatki** elementów. Ewentualna duża czułość wyników na zmianę siatki (czyli istotna zmiana wartości przemieszczeń, naprężeń wraz z rozmiarami elementów) oznacza, że rozwiązanie jeszcze nie jest zbieżne i należy je nadal poprawiać. Mówimy wtedy o zbieżności ***typu h***, co znaczy, że nie zmieniając typu elementów skończonych, zmieniamy (zmniejszamy) ich wymiary (*h* symbolizuje rozmiar elementu). Drugi sposób testowania może polegać na **zmianie rzędu elementów** z pierwszego na drugi albo wyższy. Mówimy wtedy o zbieżności ***typu p***, gdzie *p* (*power*) oznacza stopień wielomianu aproksymującego (funkcji kształtu). I znowu, jeśli różnice w rozwiązaniach są istotne dla różnych aproksymacji, zbieżność należy nadal poprawiać. Oczywiście, możliwe jest też łączenie obu tych metod. Trzecią drogą walidacji rozwiązania jest **oszacowanie błędu energii** (96) dla całej struktury i poprawianie siatki, aż osiągnie on akceptowalny poziom, lub też wykorzystanie wartości elementowej błędu (94) jako wskazówki do ulepszania (adaptacji) siatki elementów. Wreszcie, po czwarte, możliwe jest **obliczanie błędu naprężeń** (101) i wykonywanie korekty dyskretyzacji, jeśli jest zbyt duży, przy czym kierować się można wartościami (98) i zagęszczać siatkę tam, gdzie różnica między nimi jest istotna.

Podział zadań między projektantem i systemem komputerowym

Przedstawiona metoda analizy wytrzymałościowej konstrukcji, od wyboru elementu skończonego aż do rozwiązania układu równań algebraicznych i oszacowania jakości uzyskanych wyników, wymaga dużego nakładu obliczeń. Są to przede wszystkim operacje algebraiczne na macierzach i wektorach. Zgodnie z wymienionymi korzyściami płynącymi ze stosowania profesjonalnych pakietów MES, wszelkie tego typu obliczenia są przerzu-

cone na komputer i realizowane według znanych i sprawdzonych algorytmów, stąd ich liczba i złożoność obliczeniowa ma dla inżyniera drugorzędne znaczenie. Z oczywistych względów program, zwalniając z prowadzenia obliczeń, nie zwalnia inżyniera z rozumienia i definiowania swojego zadania, podejmowania różnorakich decyzji, umiejętności oceny uzyskanych rezultatów, jak też wyciągnięcia inżynierskich wniosków.

W typowym systemie MES praca przebiega na trzech podstawowych etapach. Pierwszy to etap budowy modelu i przygotowania do obliczeń, tak zwany *preprocessing*, drugi, to etap rozwiązywania (*solution*), a trzeci to przegląd i analiza wyników, czyli *postprocessing*. Poniższa tabela przybliża podział zadań między projektanta i system MES, jakie należy wykonać.

Tabela 1

Zadania projektanta	**Zadania systemu MES**
Definicja zadania (Preprocessing)	
definicja geometrii: obszar, kształt, wymiary (lub bezpośrednio węzły i elementy); wybór typu elementu (stopnie swobody, funkcje kształtu); ustalenie gęstości dyskretyzacji lub rozmiarów elementów; dane materiałowe; dane sztywnościowe (przekrój, grubość); obciążenia; przemieszczeniowe warunki brzegowe	wykonanie podziału na elementy (dyskretyzacja); budowa macierzy: geometrycznych, sił, sztywności (w tym procedury całkowania po obszarze elementu) dla każdego elementu; transformacja elementowych macierzy sztywności i sił do układu globalnego; agregacja do globalnej macierzy sztywności; dyskretyzacja obciążenia; dyskretyzacja warunków brzegowych
Rozwiązanie (Solution)	
ustalenie opcji rozwiązania (rodzaj zadania, np. statyka czy stateczność)	rozwiązanie układu równań MES po uwzględnieniu warunków brzegowych; wyznaczenie wszystkich stopni swobody i reakcji; transformacja do układów lokalnych elementów; wyliczenie rezultatów w elementach: odkształcenia, naprężenia, siły elementowe…
Analiza wyników (Postprocessing)	
analiza otrzymanych wyników; krytyczna ocena rezultatów; opracowanie dokumentacji, raportu; wnioski…	wydruk i/lub rysunek wyników, w tym: konstrukcja zdeformowana, mapy warstwicowe i wykresy: naprężeń, odkształceń, przemieszczeń, błędów energii itd.; postprocesor graficzny (różne widoki, rzuty, przekroje, elementy…); animacja obrazu deformacji; eksport wyników tekstowych lub graficznych do plików zewnętrznych

System wspiera inżyniera odpowiednimi narzędziami już na etapie przygotowania zadania, a żąda jedynie takich informacji, bez których nie da się go zdefiniować. Na etapie rozwiązania użytkownik systemu nie jest angażowany, poza ewentualnym ustaleniem opcji, które mogą zależeć od konkretnego programu. Na etapie końcowym inżynier jest wspierany bogatymi narzędziami graficznymi i tekstowymi do analizy wyników, sam jednak musi podjąć decyzje w kwestii akceptowalności rozwiązania oraz wyciągnąć inżynierskie wnioski (warunki bezpieczeństwa, sztywności, stateczności itp.).

MES jako przybliżona metoda rozwiązywania równań różniczkowych

Przedstawione zostało *inżynierskie* ujęcie metody elementów skończonych, w którym sama metoda jest traktowana jako narzędzie rozwiązywania problemów mechaniki, dla których nie daje się znaleźć rozwiązania analitycznego lub też jego uzyskanie jest zbyt pracochłonne (np. w układach hiperstatycznych o wysokim stopniu niewyznaczalności). Warto jednak pamiętać, a co w takim ujęciu jest niezauważane, że MES to przede wszystkim metoda przybliżonego rozwiązywania dowolnych równań różniczkowych i jako taka znalazła zastosowanie inżynierskie.

Pozostając przy mechanice ciała odkształcalnego, ograniczając się do liniowej sprężystości, zwróćmy uwagę na inną drogę uzyskania pokazanych wcześniej podstawowych zależności. W teorii sprężystości możemy zapisać **funkcjonał energii potencjalnej** jako

$$J = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \right) \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \, \mathrm{d}(\partial\Omega) \tag{102}$$

We wzorze tym Ω to obszar ciała odkształcalnego, w punktach którego określone są wielkości podcałkowe, $\partial\Omega$ to jego brzeg, a $\partial\Omega_{\sigma}$ to ta część brzegu, na której zadano warunki naprężeniowe, dalej $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ to (w ogólności) sześciowyrazowe wektory – odpowiednio odkształcenia i naprężenia, $\mathbf{u}$ to wektor przemieszczenia, $\mathbf{f}$ – wektor sił masowych i $\mathbf{t}$ – wektor sił brzegowych, wszystkie o trzech składowych. Jeśli dalej przyjmiemy prawo Hooka (jak np. (84))

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{103}$$

i związki geometryczne za pomocą macierzy operatorów różniczkowych (na przykład (81), z tym, że w ogólności macierze $\mathbf{E}$ i $\mathbf{D}$ są inne niż dla stanu płaskiego)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{104}$$

oraz że na części brzegu $\partial\Omega_u$ zadane są warunki przemieszczeniowe

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}\big|_{\partial\Omega_u} \tag{105}$$

to funkcjonał (102) możemy zapisać jako zależny tylko od wektora przemieszczenia $\mathbf{u}$, który spełnia kinematyczne warunki brzegowe (105)

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{D}\mathbf{u})^{\mathrm{T}} \mathbf{E} (\mathbf{D}\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \right) \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \, \mathrm{d}(\partial\Omega) \tag{106}$$

(w tej postaci funkcjonał energii potencjalnej nazywa się **funkcjonałem Lagrange'a**).

Twierdzenie mówi, że spośród wszystkich pól wektora $\mathbf{u}$ **polem rzeczywistym** jest to, które **minimalizuje funkcjonał** (106) – twierdzenie o minimum energii potencjalnej. Zadanie rozwiązania problemu zostało sprowadzone zatem do odpowiedniego doboru funkcji przemieszczeń punktów ciała Ω (sformułowanie przemieszczeniowe, tak jak przemieszczeniowa MES powyżej). Można powiedzieć (wymaga to znajomości podstaw rachunku wariacyjnego), że po znalezieniu $\mathbf{u}$ warunki (103) i (105) są *a priori* spełnione, a nie występujące w funkcjonale odkształcenie oblicza się ze (104), oraz to, że równania równowagi wewnętrznej

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \tag{107}$$

są tzw. równaniami Eulera–Lagrange'a stanowiącymi **warunek stacjonarności** funkcjonału (106). Oczywiście, rozwiązanie problemu minimalizacji funkcjonału w sposób ścisły jest na ogół niemożliwe do osiągnięcia i dlatego stosujemy podejście przybliżone. Jedno z nich oparte jest na tzw. **metodzie Ritza**. Zakładamy w niej postać poszukiwanego rozwiązania jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}_{3\times N}(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{N\times 1} \tag{108}$$

gdzie dobieramy funkcje testowe (próbne) $\boldsymbol{\varphi}_{3\times N}(\mathbf{x})$ tak, żeby spełniały kinematyczne warunki (105) tożsamościowo, niezależnie od wartości nieznanych stałych parametrów $\mathbf{q}_{N\times 1}$. Teraz minimalizacja funkcjonału (106) sprowadza się do odpowiedniego doboru N stałych współczynników i w ten sposób zadanie **staje się problemem algebraicznym** (skalarnym). Oczywiste jest, że znalezione rozwiązanie jest przybliżone, gdyż minimalizuje funkcjonał jedynie w klasie przyjętych funkcji próbnych. Jakość

tego przybliżenia zależy od doboru tych funkcji, co wcale nie jest prostym zadaniem, zwłaszcza dla złożonych kształtów obszaru oraz złożonych warunków (105).

Po podstawieniu (108) do (106) otrzymamy

$$J(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{q})^{\mathrm{T}} \mathbf{E} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}) - \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}\mathbf{q} \right) \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}\, \mathrm{d}(\partial\Omega) \tag{109}$$

a wyrażenie po prawej stronie należy zminimalizować z uwagi na $\mathbf{q}$. Wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{T}} \mathbf{E} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}\Omega \tag{110}$$

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \mathbf{t}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}(\partial\Omega) \tag{111}$$

Zapiszemy

$$J(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \mathbf{q} \tag{112}$$

Ponieważ wyrazy w wektorze $\mathbf{q}$ są niezależne, więc warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji (112) jest, aby jej pochodne względem każdego q_i, $i = 1 \ldots N$ się zerowały, czyli

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} - \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{113}$$

co po wykorzystaniu symetrii macierzy $\mathbf{K}$ oznacza

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{R} \tag{114}$$

Zauważmy, że jest to znany nam zapis typu (24), jeśli utożsamimy $\mathbf{K}$ z macierzą sztywności, $\mathbf{q}$ ze stopniami swobody, a $\mathbf{R}$ z wektorem sił węzłowych. Stopnie swobody mają w tym ujęciu interpretację współczynników funkcji próbnych (funkcji kształtu). Przepis (110) na wyznaczenie macierzy sztywności jest uogólnieniem postaci (45) czy (90).

Opisana metoda minimalizacji funkcjonału jest silnym narzędziem numerycznego rozwiązania problemu. Znalezienie funkcji minimalizującej funkcjonał jest równoważne rozwiązaniu równania różniczkowego, które dla funkcjonału jest równaniem Eulera–Lagrange'a. Funkcja ta, poza spełnieniem równania, spełnia też zadane warunki brzegowe. Ponadto rząd pochodnych pod całką (w funkcjonale) jest niższy niż rząd pochodnych w równaniu. Stąd sformułowanie wariacyjne nazywane jest *słabym*, a fakt

ten pozwala na zastosowanie do aproksymacji funkcji kształtu o mniejszej klasie regularności. Skuteczność i zalety tego podejścia sugerują zamianę przybliżonego rozwiązywania równania różniczkowego na zadanie minimalizacji funkcjonału o odpowiednim (identycznym z równaniem wyjściowym) równaniu Eulera–Lagrange'a.

Przedstawione podejście wariacyjne daje możliwość poszukiwania rozwiązania przybliżonego poprzez zamianę układu o nieskończonej liczbie stopni swobody (przemieszczeń w punktach ciała) układem o liczbie skończonej (przemieszczeń w węzłach). Podstawową trudnością ograniczającą stosowanie tej metody w zagadnieniach praktycznych jest dobór funkcji aproksymujących rozwiązanie w całym obszarze ciała. Funkcje te, poza spełnieniem kinematycznych warunków brzegowych, nie mogą naruszać fizyki problemu, to znaczy muszą umożliwiać poprawny opis geometrii obszaru, własności materiałowych i innych charakterystyk zadania, więc znalezienie ich w przypadku złożonej konstrukcji jest praktycznie niemożliwe. Jeżeli jednak obszar Ω podzieli się na skończoną liczbę rozłącznych podobszarów o prostych kształtach geometrycznych spełniających warunki

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega \wedge \forall_{i \neq j} \; \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \tag{115}$$

to możliwe jest dobranie prostych funkcji aproksymujących rozwiązanie w ich wnętrzu. Te podobszary to właśnie **elementy skończone**, a odpowiednio gęsta dyskretyzacja (podział na podobszary) zapewnia prawidłowy, wystarczająco dokładny opis problemu rzeczywistego. Gęsty podział na małe elementy powoduje, że zmiany poszukiwanych funkcji wewnątrz elementów są małe, a to umożliwia stosowanie prostych analitycznie, gładkich funkcji próbnych i aproksymację rozwiązania za pomocą tychże funkcji oraz wartości węzłowych. Zwiększanie całkowitej liczby stopni swobody układu (współczynników funkcji próbnych) – poprzez wzrost liczby elementów i/lub liczby elementowych stopni swobody – na ogół prowadzi do poprawy dokładności rozwiązania. Elementowe funkcje kształtu przyjmują wartości niezerowe jedynie na obszarze elementu, którego dotyczą, a wszędzie poza nim znikają, czyli nośnik (dziedzina) każdej z nich jest ograniczony do jednego elementu.

Zapis funkcjonału energii (109) dotyczy każdego ciała odkształcalnego. Jeśli jednak zastosujemy go do elementu skończonego, to zauważymy, że człon z siłami masowymi zniknie, bo w elemencie wszystkie obciążenia działają jedynie w węzłach, więc jeśli nawet siły masowe istnieją, to należy je zastąpić statycznie równoważnymi siłami węzłowymi. Podobnie całka brzegowa (druga w (109)) zmieni się, gdyż wszelkie obciążenia brzegu również muszą zostać zastąpione odpowiednimi siłami węzłowymi.

W ten sposób, wychodząc z ogólnych twierdzeń, dochodzi się do znanego już formalizmu i algorytmu na poziomie elementu skończonego; proces agregacji pojedynczych elementów w całą strukturę został omówiony wcześniej.

Dostępne pakiety

Na rynku istnieje wiele profesjonalnych pakietów służących modelowaniu i prowadzeniu obliczeń inżynierskich metodą elementów skończonych. Coraz częściej programy, do niedawna osobne do modelowania, osobne do dyskretyzacji, osobne do rozwiązywania i wreszcie postprocessingu, łączone są w duże pakiety i przy różnych licencjach oferowane jako całość. Można zauważyć, że firmy konkurujące ze sobą na rynku oprogramowania tworzą aplikacje coraz bardziej do siebie zbliżone, przynajmniej pod względem filozofii modelowania problemów inżynierskich, coraz lepiej wyposażone w graficzny interfejs użytkownika ułatwiający pracę z programem, wreszcie coraz bardziej przystosowane do wymiany danych pomiędzy innymi aplikacjami do inżynierskiego projektowania czy innymi aplikacjami MES. Warto wspomnieć o pakietach dostępnych w krakowskim środowiskowym akademickim centrum obliczeniowym CYFRONET przy AGH.

ABAQUS (za http://www.cyf-kr.edu.pl/uslugi_obliczeniowe/?a=abaqus) jest pakietem programów służących do rozwiązywania skomplikowanych problemów inżynierskich. Jest powszechnie używany na świecie w przemyśle maszynowym i samochodowym, hutniczym i wydobywczym, stoczniowym i lotniczym, wszędzie tam, gdzie konieczna jest rzetelna ocena wytrzymałościowa elementów maszyn lub konstrukcji inżynierskich. ABAQUS powstał i jest rozwijany przez amerykańską firmę Hibbitt, Karlsson & Sorensen. To, co go wyróżnia spośród innych programów, to jego modularna budowa. Architektura programu oparta jest na koncepcji bibliotek. Pozwoliło to na stworzenie możliwości łączenia dowolnych ich elementów. Użytkownik może tworzyć dowolne kombinacje elementów skończonych, materiałów, procedur analizy i sekwencji obciążeń. Biblioteka elementów skończonych pozwala na modelowanie dowolnie skomplikowanych geometrii układów i zawiera sprawdzone w praktyce i przetestowane elementy skończone. Biblioteka modeli materiałów pozwala na modelowanie izotropowych i anizotropowych metali w procesach adiabatycznych i izotermicznych, dla małych i dużych prędkości odkształceń, dla skończonych deformacji. Biblioteka materiałów zawiera także modele

przeznaczone do analizy gum, plastyków, kompozytów, zbrojonych betonów, pianek i materiałów geotechnicznych, takich jak grunty czy skały. Biblioteka procedur analizy oferuje możliwości analizy stanu naprężeń, odkształceń i przemieszczeń dowolnie nieliniowych procesów i również ustalonego i nieustalonego przepływu ciepła, transportu masy, analizy akustyczne i piezoelektryczne. Analizy te mogą być przeprowadzone niezależnie, sekwencyjnie lub jako całkowicie sprzężone z analizą naprężeń. Warto zajrzeć na stronę http://www.simulia.com/ po dalsze szczegóły, a na stronę ACK Cyfronet po możliwość użytkowania tego pakietu w Krakowskim Akademickim Centrum Komputerowym.

Pakiet **MSC NASTRAN** (używający do pre- i postprocessingu programu PATRAN) jest kolejnym dostępnym w CYFRONECIE (http://www.cyf-kr.edu.pl/uslugi_obliczeniowe/?a=nastran).

Strona firmy http://www.mscsoftware.com/products/msc_nastran.cfm dostarcza dalszego opisu i informacji o licencjach. Czytamy tam między innymi, że MSC NASTRAN to pakiet rozwiązujący metodą elementów skończonych zarówno problemy małe, jak i złożone. Będąc sprawdzonym narzędziem do analizy konstrukcji, od ponad czterdziestu lat NASTRAN oferuje szeroki zakres możliwości modelowania i analizy liniowej statyki, przemieszczeń, odkształceń, naprężeń, drgań, przepływu ciepła. Co więcej, jest przystosowany do dowolnego typu materiału – od tworzyw sztucznych i metali do kompozytów i materiałów hipersprężystych. Ponieważ program jest rodziną ściśle zintegrowanych modułów, można je poznawać (i używać) stopniowo, zaczynając od pakietu do analizy liniowej i stateczności, a potem przechodząc do transferu ciepła, dynamiki, problemu spawania, aerosprężystości czy analizy nieliniowej aż po moduły do optymalizacji.

ANSYS (http://www.cyf-kr.edu.pl/uslugi_obliczeniowe/?a=anysys) jest wiodącym na świecie pakietem do obliczeń MES, umożliwiającym kompleksową symulację w każdej niemal dziedzinie nauki i przemysłu. Licencje Academic Teaching Advanced oraz Research systematycznie kupuje Wydział Mechaniczny do prowadzenia ćwiczeń laboratoryjnych i badań naukowych. Łatwość obsługi programu i komfortowy interfejs graficzny umożliwia po krótkim wprowadzeniu nawet niedoświadczonemu użytkownikowi dokonywanie pierwszych analiz. ANSYS składa się z wielu narzędzi. Umożliwia to optymalne dobieranie wymaganych opcji do własnych potrzeb. Stosowanie metody elementów skończonych przynosi już po krótkim czasie korzyści znacznie przewyższające poniesione koszty. Możliwe staje się projektowanie optymalnych pod wieloma względami konstrukcji (np. o minimalnym ciężarze, energooszczędnych itd.), drastycznie maleje liczba kosztownych prototypów, skrócony znacznie zostaje czas wprowadzania produktu na rynek.

Za pomocą tego pakietu można rozwiązywać problemy z zakresu mechaniki konstrukcji, mechaniki płynów, analizy termicznej, elektromag-

netyzmu czy pól sprzężonych. W ramach interesującej nas przede wszystkim mechaniki konstrukcji ANSYS pozwala na podejmowanie zadań ze statyki, dynamiki, stateczności i optymalizacji. Statyka może być liniowa lub nieliniowa (np. zagadnienia kontaktowe, duże przemieszczenia czy odkształcenia), a rozważane procesy ustalone lub zmienne w czasie. Dostępne modele materiału obejmują sprężystość, różne modele plastyczności i reologię, wszystko izotropowe, ortotropowe lub anizotropowe. Dodatkowo można uwzględnić wpływ temperatury na własności materiału. Można też wprowadzić własny model materiału poprzez dołączenie odpowiedniej procedury użytkownika w języku FORTRAN.

Od wersji 12.0 ANSYS udostępnia platformę **Workbench** integrującą cały proces symulacji zagadnień *multiphysics*, z parametrycznym modelowaniem wspieranym dwukierunkowym połączeniem z aplikacją CAD. Jest to z pewnością przyszłościowe narzędzie usprawniające projektowanie inżynierskie, którego jednak w tym skrypcie nie przedstawiamy.

ANSYS – ogólnie o środowisku pracy

Po uruchomieniu programu ANSYS pokazuje się jego podstawowy ekran zawierający wiele elementów. Bez omawiania wszystkich szczegółów zwrócimy uwagę na podstawowe kwestie, aby w dalszym ciągu omawiania ćwiczeń odwoływać się do nazw i obiektów, z których typowo korzystamy.

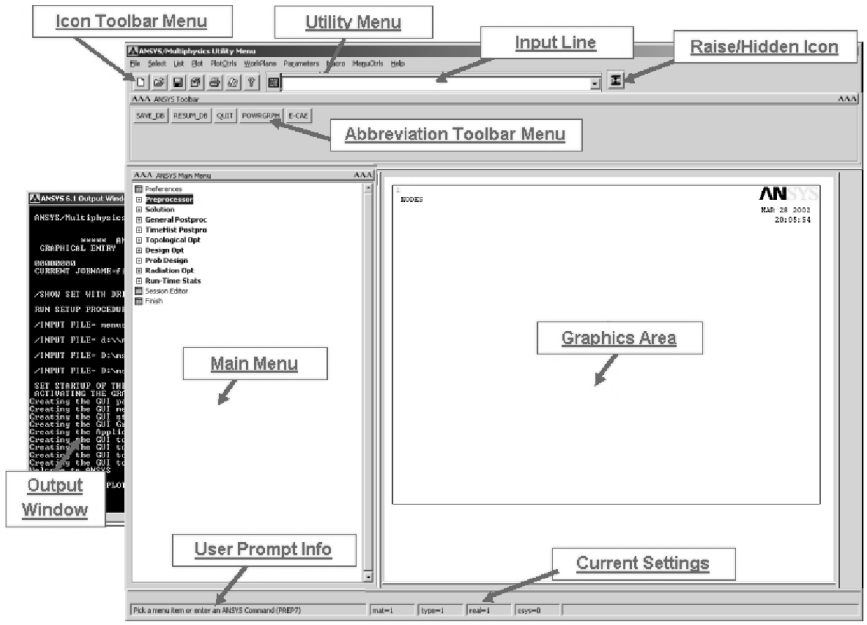
Nazwy na rysunku są takie, jak w angielskojęzycznej dokumentacji i oznaczają:

Output Window – główne tekstowe okno programu, na ogół przykryte graficznym; jest niezależne od menu ANSYSa; daje podgląd, w jaki sposób program interpretuje wydawane komendy i polecenia; UWAGA! jego zamknięcie zamyka całą sesję i natychmiastowo kończy działanie programu.

ANSYS Main Menu – podstawowe okno GUI (*Graphics User Interface* – graficzny interfejs użytkownika), z którego rozwijamy polecenia głównych procesorów programu (m.in. preprocesora, solvera i postprocesora).

Graphics Area – okno grafiki, w którym sukcesywnie pokazują się wszystkie budowane elementy modelu oraz rysunki obiektów, wyników czy wykresy sporządzane na żądanie użytkownika.

Utility Menu – menu użytkowe, zawierające wiele rozwijalnych komend do obsługi sesji, działania na plikach, rysowania, listowania, sterowania parametrami (np. grafiki), narzędzia selekcji obiektów, dostęp do plików pomocy (help) i inne.



Input Line – obszar, w którym można wydawać komendy w trybie tekstowym zamiast używania rozwijalnych menu graficznych; wymaga to znajomości nazw i składni komend, a program w czasie ich wprowadzania stosuje dynamiczny sposób podpowiedzi (prompt); wydane w czasie sesji komendy są zapamiętywane i mogą być powtarzane (z ewentualną edycją) po wybraniu z listy za pomocą przycisku po prawej stronie linii komend.
Pewne typowe komendy można wydawać za pomocą przycisków w ***Icon Toolbar Menu*** lub ***Abbreviation Toolbar Menu*** oba te menu mogą być zmieniane przez użytkownika według potrzeb.
W informacyjnych polach ***Current Settings*** (bieżące ustawienia) program podaje aktualne (aktywne) ustawienia m.in. co do układu współrzędnych, numeru typu używanego elementu, numeru modelu materiału czy zestawu liczb rzeczywistych zawierających parametry modelu, a ***User Prompt Info*** umieszcza podpowiedź dotyczącą uruchomionego procesora i zestawu, z którego oczekuje kolejnej komendy.

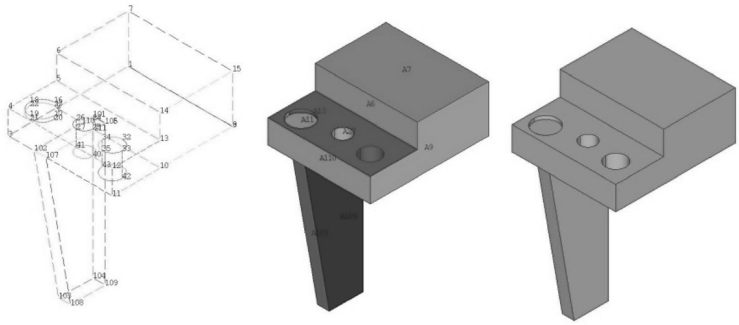
Zdarza się, że w czasie rozwijania kolejnych ścieżek menu i przywoływania na ekran kolejnych okien dialogowych niektóre z nich „znikną” z ekranu, chociaż są potrzebne do prawidłowego wydania polecenia (czasem nawet można odnieść wrażenie, że program się zawiesił, bo nie reaguje na inne przyciski); przycisk ***Raise/Hidden Icon*** służy do wyciągnięcia na wierzch (odsłonięcia) tych przysłoniętych obiektów.

Sposoby modelowania geometrii obiektów w ANSYSie

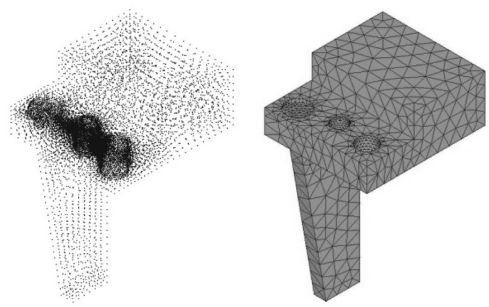
W każdym zadaniu obliczeń inżynierskich pierwszym punktem pracy jest przygotowanie geometrii analizowanej konstrukcji. Im bardziej jest ona złożona, tym większy jest nakład pracy na jej stworzenie. Dopiero jednak ten geometryczny model podlega dyskretyzacji, czyli podziałowi na elementy skończone, na których z kolei pracuje omawiana metoda obliczeniowa. W programie ANSYS mamy trzy sposoby uzyskania geometrii obiektu.

Modelowanie pośrednie

Pierwsza to tzw. **modelowanie pośrednie** (*indirect*, *solid modeling*). Polega ono na tworzeniu obszaru konstrukcji (rysunek 23) za pomocą hierarchicznych obiektów nazywanych punktami bazowymi (*keypoints*), liniami (*lines*), powierzchniami (*areas*) i objętościami (*volumes*). Punkty bazowe, w hierarchii najniższe, to w praktyce przede wszystkim końce prętów, naroża płyt czy powłok, środki łuków, wierzchołki brył itp. punkty wyróżniające zarys konstrukcji lub orientujące ustawienie jej części składowych w przestrzeni. Dzięki nim można tworzyć linie, w hierarchii wyżej niż keypointy, które są prostymi lub zakrzywionymi osiami prętów, bokami powierzchni dwuwymiarowych, krawędziami brył. Linie mogą też służyć do wskazywania kierunku w przestrzeni, ustalania cech symetrii itp. Za pomocą punktów bazowych lub linii można tworzyć *powierzchnie,* kolejny poziom w hierarchii. Są one powierzchniami środkowymi dźwigarów powierzchniowych lub ścianami (powierzchniami) bocznymi brył. Wreszcie najwyżej w hierarchii znajdują się *objętości* będące obrazami obiektów trójwymiarowych, a tworzone są za pomocą powierzchni, linii lub punktów bazowych. Niezależnie od metody tworzenia każdy obiekt wyższego rzędu zawiera wszystkie obiekty niższe w hierarchii. Objętość zawiera powierzchnie, linie i keypointy, powierzchnia zawiera linie i keypointy, a linia zawiera punkty bazowe. Program dostarcza wielu narzędzi służących operacjom na takich obiektach. Przykładowo są to m.in. tworzenie, powielanie przez kopiowanie do nowej pozycji przez odbicie względem linii czy powierzchni, tworzenie powierzchni przez przeciąganie linii i objętości przez przeciąganie powierzchni, operacje mnogościowe (*Boolean*) na zbiorach punktów, takie jak dodawanie czy odejmowanie, wyznaczanie wspólnej części (przenikanie) i wiele innych. Narzędzia te pozwalają na bardzo zaawansowane i wygodne modelowanie obiektów do analizy.



Rys. 23. Punkty bazowe i linie, powierzchnie, objętość obiektu do obliczeń



Rys. 24. Węzły i elementy skończone po dyskretyzacji

Po stworzeniu geometrii modelu konstrukcji drogą *solid modeling* podział na elementy skończone wykonywany jest przez program po wybraniu odpowiednich parametrów dyskretyzacji.

Modelowanie bezpośrednie

Drugim możliwym sposobem przygotowania geometrii modelu jest **bezpośrednia** (*direct*) **generacja** elementów skończonych poprzez podanie ich węzłów. Metoda ma mniejsze praktyczne zastosowanie, gdyż w złożonych konstrukcjach byłaby bardzo czasochłonna i w razie prawdopodobnej pomyłki prowadziłaby do trudnych do wykrycia błędów. Można ją jednak z powodzeniem stosować do konstrukcji prętowych, gdzie każdy pręt może być elementem (a nie linią), a każdy koniec pręta węzłem (a nie punktem bazowym), a pracochłonność modelowania jest identyczna jak w *solid modeling*. Podejście to może też być użyte dla bardzo prostych modeli nieprętowych, gdzie generujemy niewielką liczbę elementów o prostych kształtach w celach studialnych (np. testowanie modelu materiału).

Import modelu

Trzecim sposobem uzyskania modelu konstrukcji do dyskretyzacji jest jego import z zewnętrznej aplikacji. Kolejne wersje ANSYSa wyposażane są w interfejsy umożliwiające taki import w niezależnym od sprzętu formacie IGES lub w formatach zapisu CATIA, ProEngineer i innych. Zwykle taki import odpowiada stworzeniu objętości, czyli obiektów 3D, co w zależności od problemu może stwarzać trudności w dyskretyzacji i obliczeniach. Poza tym model importowany może zawierać zbyt wiele szczegółów istotnych na rysunkach wykonawczych, a nieistotnych z punktu widzenia obliczeń i komplikujących rozwiązanie metodą elementów skończonych. Jednak zarówno ANSYS (w swoich opcjach importu), jak i programy inżynierskiego projektowania dokładają coraz więcej funkcji umożliwiających uproszczenia na etapie przesyłania danych i należy oczekiwać, że ta droga pozyskiwania geometrii modelu do obliczeń będzie coraz sprawniejsza i chętniej stosowana.

Pierwsze ćwiczenia z ANSYSem

Możliwie pełne zapoznanie się z systemem ANSYS wymaga dużego doświadczenia, które można zdobyć jedynie podczas realizacji różnorodnych projektów. Z kolei wiele podstawowych zadań można rozwiązywać bez znajomości wszystkich opcji, możliwości i narzędzi tego złożonego pakietu. Proponujemy *zadaniowe* wejście w temat, co oznacza, że stawiając zadania do wykonania, poznawać będziemy tylko te komendy czy ścieżki rozwijalnego menu, które są niezbędne do jego rozwiązania. Rezygnujemy natomiast z prezentacji zestawu komend (obszerny ich wykaz można zaleźć w pracy [8]), wykazu elementów z biblioteki programu oraz omawiania wszystkich ścieżek rozwijalnych menu. Zakładamy, że po zapoznaniu się z użytkowaniem ANSYSa na poziomie podstawowym można, w razie potrzeby, wgłębiać się w dalsze jego możliwości, bazując na bardzo bogatym i rozbudowanym systemie *help* wbudowanym w program. W przykładach będziemy konsekwentnie stosować format ***Nazwa Okna*** na oznaczenie nazwy otwierającego się okna dialogowego lub grupy komend programu; **Menu-->Menu1-->Menu2** na oznaczanie ścieżek rozwijalnych menu, wywoływanych klikaniem myszką; zapis przycisk będzie zawsze oznaczał ikonę na pasku ***Icon Toolbar Menu*** lub ***Abbreviation Toolbar Menu***, albo przycisk w otwartym oknie dialogowym, na który należy kliknąć, albo klawisz klawiatury; wreszcie format **tekst** będzie oznaczał tekstowy

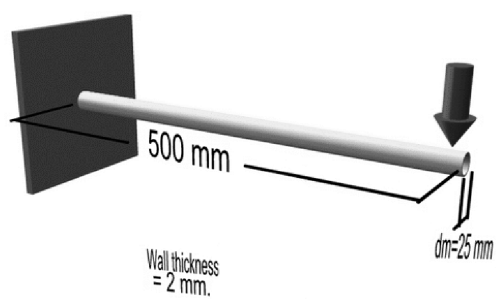
odpowiednik omawianego polecenia. Podstawowe ćwiczenia wprowadzające przygotowane zostały z wykorzystaniem materiałów z University of Alberta w Kanadzie.

Belka wspornikowa

Rozpoczniemy od zadania bardzo prostego z punktu widzenia wytrzymałości materiałów. Dla prostej aluminiowej belki długości 500 mm, o przekroju rurowym, ze średnicą zewnętrzną 25 mm i grubością ścianki 2 mm, utwierdzonej na jednym końcu i obciążonej pionową siłą skupioną 100 N na drugim (rysunek 25), potrafimy w zakresie sprężystym bez trudu znaleźć rozwiązanie analityczne. Wykorzystamy je do weryfikacji wyników uzyskanych za pomocą ANSYSa poprzez porównanie maksymalnych przemieszczeń i naprężeń ze znanymi z rozwiązania analitycznego. Weryfikacja w tym przypadku dotyczy nie tyle programu, który na takim etapie możemy uznać za bezbłędny, co raczej naszej drogi postępowania przy budowie modelu, wprowadzaniu danych oraz umiejętności odczytu i analizy rozwiązania. Można zasugerować, że sporządzanie możliwie prostego modelu weryfikacyjnego, dla którego znamy rozwiązanie ścisłe (analityczne) bądź przybliżone albo posiadamy dane eksperymentalne, powinno poprzedzać każdą złożoną analizę przeprowadzaną za pomocą pakietu, a to w celu nabrania zaufania w kwestii wybranego elementu, sposobu dyskretyzacji, typu analizy itd.

Przeprowadzimy modelowanie w ANSYSie, przechodząc etapy wymienione w tabeli 1. Rysunki są zrzutami ekranu z wersji 12.0, co pozwala na łatwą orientację podczas samodzielnego przeprowadzania ćwiczenia. Pierwszy przykład przeprowadzimy za pomocą graficznego interfejsu użytkownika (GUI – *Graphics User Interface*), co zwalnia z konieczności poznawania tekstowych komend pakietu.

Poza czynnościami koniecznymi do wykonania konkretnego zadania umieszczamy też komentarze i uwagi natury bardziej ogólnej, przydatne w zrozumieniu działania pakietu i sposobu postępowania w innych przypadkach.



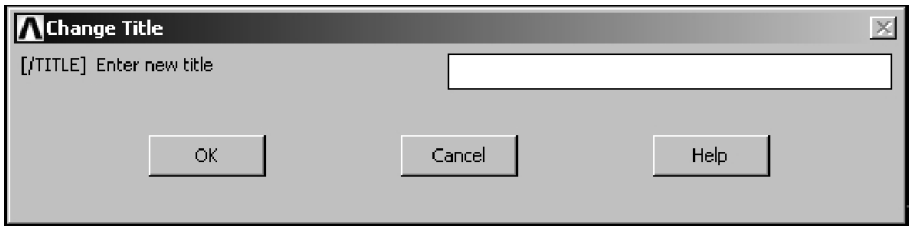
Rys. 25. Belka wspornikowa

I. Preprocessing: Definiowanie zadania

1. Nadajemy tytuł naszemu zadaniu

Na pasku ***Utility menu***

wybieramy: **File-->Change Title** i w oknie dialogowym ***Change Title***



wpisujemy dowolny tytuł. Ten tytuł pojawi się jako podpis w lewym dolnym rogu okna ***Graphics***, kiedy zaczniemy modelować. Po wpisaniu naciskamy OK.

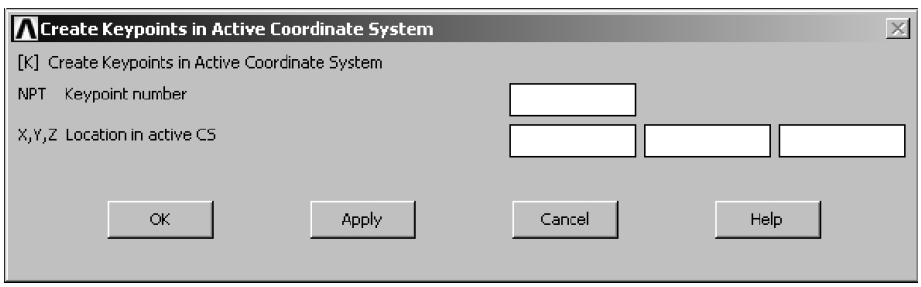
2. Wprowadzamy keypoints (punkty bazowe)

Geometria struktury może w ANSYSie być definiowana przy użyciu punktów bazowych (*keypoints*), które po prostu określają różne podstawowe wymiary definiowanego ciała. W tym prostym przykładzie keypointy są końcami belki o współrzędnych (0, 0, 0) i (500, 0, 0).

Z głównego menu ***ANSYS Main Menu*** wybieramy:

Preprocessor-->Modeling-->Create-->Keypoints-->In Active CS

Pojawi się okno ***Create Keypoints In Active Coordinate System***



W celu zdefiniowania pierwszego keypointa o współrzędnych x = 0, y = 0 i z = 0, wprowadzamy keypoint number 1 w odpowiednim miejscu i współrzędne x, y, z: 0, 0, 0 w kolejnych kratkach dla nich przeznaczonych.

Klikamy Apply, aby zaakceptować to, co napisaliśmy. Zauważamy, że w oknie ***Graphics*** pojawił się mały punkt oznaczający położenie tego keypointu. Wprowadzamy drugi keypoint, pisząc 2 w polu „Keypoint number" i współrzędne 500, 0, 0 w odpowiednich polach.

W tego typu oknach dialogowych przycisk Apply oznacza polecenie wykonania wybranej akcji i pozostawienie tego okna do następnej czynności tego typu. Przycisk OK oznacza rozkaz wykonania akcji i zamknięcie okna dialogowego

Aktywny układ współrzędnych (*active coordinate system*) jest teraz globalnym układem kartezjańskim, bo takie jest domyślne ustawienie. W ANSYSie istnieje możliwość zmiany układu na innego typu (cylindryczny, sferyczny, toroidalny) oraz zmiany jego punktu początkowego i orientacji.

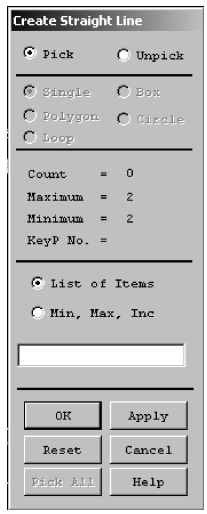
Uwaga: Wprowadzając ostatni keypoint, klikamy OK, aby wskazać, że to koniec ich wprowadzania. Jeśli klikniemy najpierw Apply, a potem OK przy ostatnim keypoincie, zostanie on podwójnie zdefiniowany!

Jednostki (*wymiary*): Zauważmy, że jednostki miary (np. mm) nie są podawane. Pozostaje więc odpowiedzialnością użytkownika stosowanie spójnego układu jednostek.

Korygowanie pomyłek: Definiując keypointy, linie, powierzchnie, objętości, elementy, więzy i obciążenia, możemy się pomylić. Na szczęście takie pomyłki można łatwo poprawić, tak że nie ma obaw zaczynania wszystkiego od początku za każdym razem, kiedy przytrafi się błąd. Każde menu ***Create***, które tworzy obiekty, posiada też uzupełniające ***Delete*** umożliwiające usuwanie niepotrzebnych (błędnych) obiektów.

3.Tworzymy linie

Dwa keypointy muszą zostać połączone, aby utworzyć linię (oś belki). Użyjemy myszki w celu wybrania punktów do stworzenia linii. Po pierwsze zamykamy ostatnie menu, używane do tworzenia keypointów, wracając do ***Create menu*** i wybieramy: **Lines-->Straight Line**. Pojawi się okno ***Create Straight Line***

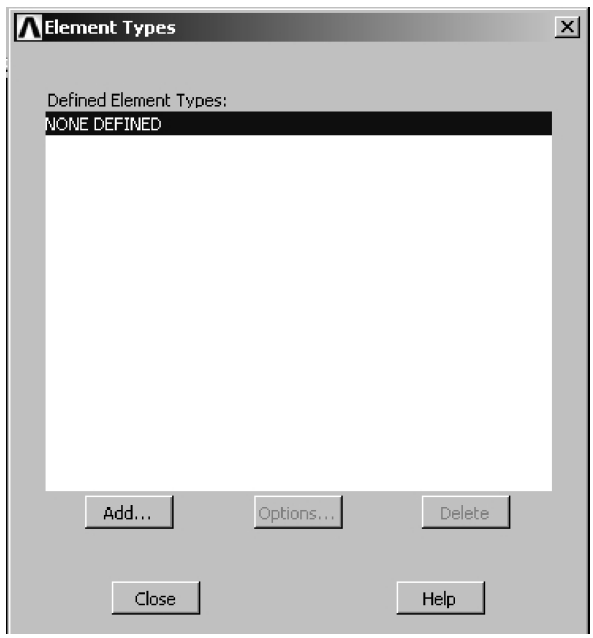


Można je przesuwać po ekranie, aby widzieć wybierane keypointy, z których stworzymy linie.
Używamy myszki, aby wskazać keypoint #1 (klikamy na nim). Będzie on teraz zaznaczony małym żółtym kwadratem. Teraz przesuwamy myszkę w kierunku keypointa #2. Na ekranie pokaże się linia łącząca te dwa punkty. Klikamy (lewym klawiszem) i linia pojawi się na stałe.
Kiedy skończymy, klikamy OK w oknie ***Create Straight Line***, zamykamy okno z menu ***Lines*** i z menu ***Create***. W oknie ***Graphics*** widzimy już rysunek naszej belki (jej oś).

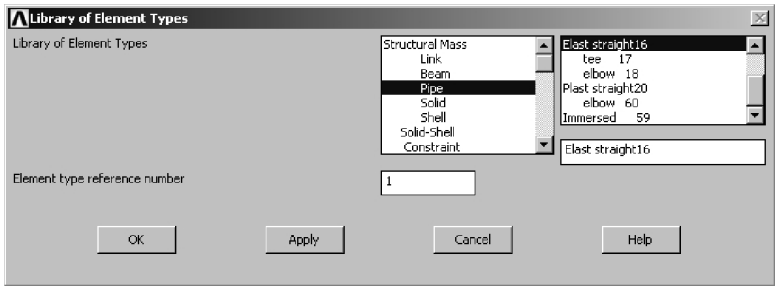
Znikające linie: Gdyby trzeba było stworzyć w ten sposób więcej linii, to niektóre z nich mogą „zniknąć" w czasie tego procesu. Jednakże, najprawdopodobniej, NIE zostają one usunięte z modelu, a jedynie z okna grafiki. Jeśli coś takiego się zdarzy, to w każdej chwili można wybrać z ***Utility Menu:*** **Plot-->Lines**.

4. Określamy typ elementu

Teraz zachodzi konieczność stworzenia elementów na liniach. Proces ten nazywa się „meshowaniem" (dyskretyzacją). ANSYS przede wszystkim musi wiedzieć, jakiego typu elementu ma użyć w danym zadaniu.
Z menu ***Preprocessor*** wybieramy **Element Type--> Add/Edit/Delete**. Pojawi się kolejne okno ***Element Types*** z informacją, że jeszcze nie zdefiniowaliśmy żadnych typów (*none defined*).



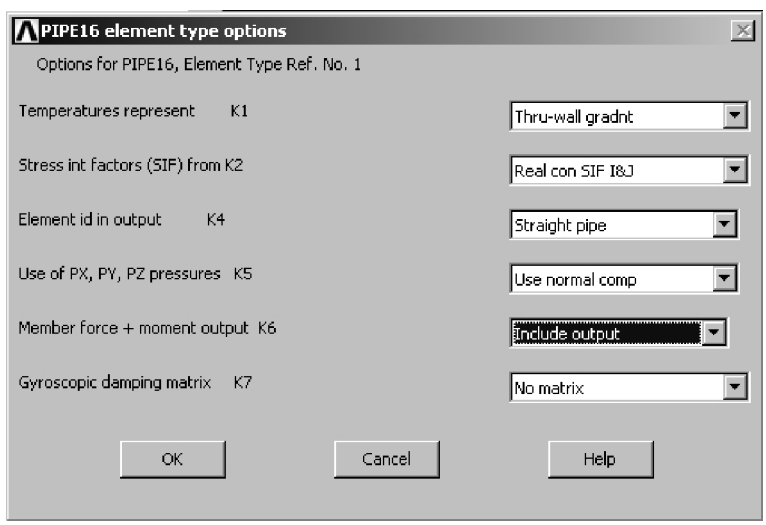
Klikamy przycisk Add... i zobaczymy następne okno ***Library of Element Types*** ułatwiające wybór typu elementu z biblioteki ANSYSa:



W tym przykładzie użyjemy sprężystych (*elastic*) elementów dla prostej rury (*straight pipe*). Wybieramy wskazany element i klikamy OK. W oknie **Element Types** zobaczymy „Type 1 PIPE16". „1" to numer użytego przez nas typu elementu – w jednym projekcie możemy mieć ich wiele (rura, kolanko, belka, płyta) i numeracja jest konieczna do rozróżnienia. „16" to kolejny numer w bibliotece programu, będący synonimem nazwy używanego elementu.

Przy okazji zwróćmy uwagę, że mamy do dyspozycji inne elementy „rurowe" do modelowania kolan (*elbow*), rozgałęzień (*tee*), a także możliwość modelowania w zakresie plastycznym. Zaglądając do opisu elementu PIPE16, zauważamy, że ma on w każdym węźle 6 stopni swobody: 3 przemieszczenia i 3 kąty obrotów. Oznacza to, że nadaje się do modelowania belek poddanych zginaniu w dwóch płaszczyznach (zginane złożone), rozciąganiu/ściskaniu oraz skręcaniu. Element nie uwzględnia natomiast efektów ścinania, a więc nie nadawałby się do modelowania belek bardzo krótkich o dużym udziale siły poprzecznej w deformacji (belka Timoshenki)

W oknie ***Element Types*** klikamy przycisk Options... i mamy kolejne okno:

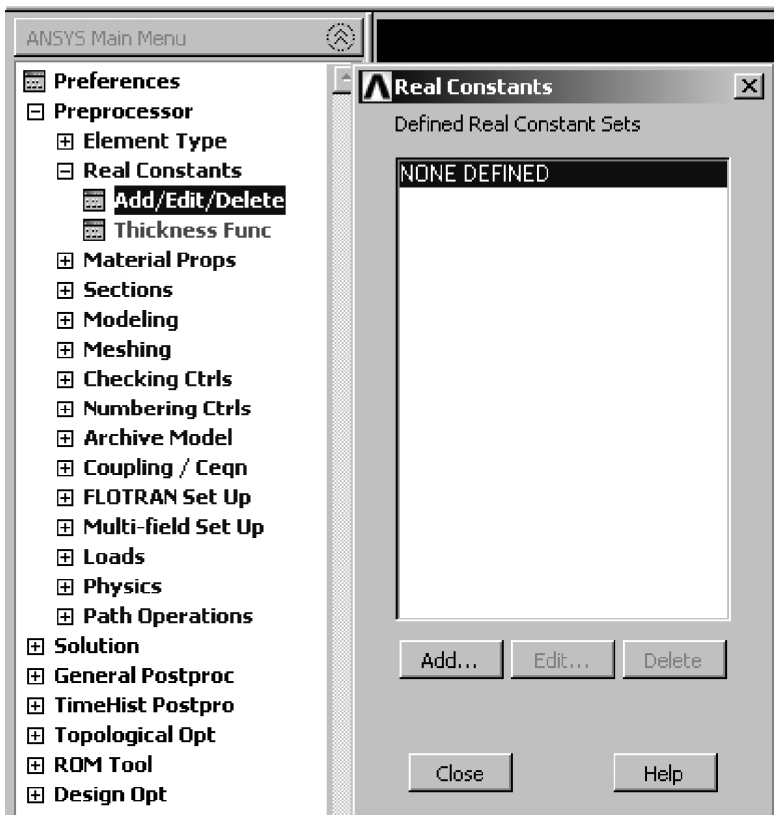


Klikamy i przytrzymujemy przycisk K6 (drugi od dołu), wybieramy **Include Output** i klikamy OK. Ta opcja da nam dodatkowe informacje wyjściowe o siłach i momentach w każdym elemencie. Jest to „opcja", bo te informacje nie są standardowym efektem rozwiązania układu MES i jeśli chcemy je otrzymać, musimy z góry przygotować program do wykonania dodatkowych obliczeń po rozwiązaniu.
Klikamy Close w oknie dialogowym ***Element Types*** i zamykamy menu ***Element Type***.

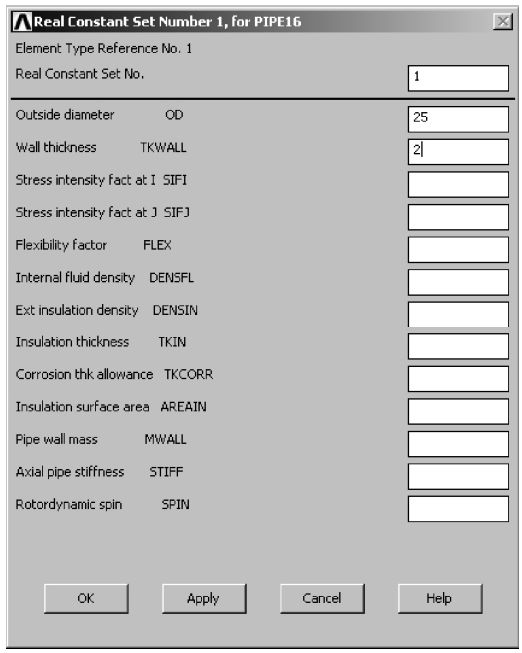
Nie omawiając wszystkich możliwych opcji, zwróćmy uwagę, że są one modyfikatorami domyślnego zachowania elementu oraz, co ważne, są inne dla każdego elementu z biblioteki. Dlatego każdorazowo należy zapoznać się z opisem używanego typu, aby poznać jego możliwe warianty. Z drugiej strony, używając GUI, mamy podpowiedziane tylko te opcje, które dotyczą wybranego typu (menu kontekstowe).

5. Definiujemy własności geometryczne

Teraz musimy określić własności geometryczne naszych elementów: w menu ***Preprocessor*** wybieramy **Real Constants--> Add/Edit/Delete**



Klikamy Add... i wybieramy „Type 1 PIPE16” (tak na prawdę jest już wybrany, bo innych nie zdefiniowaliśmy). Klikamy OK i pojawia się następujące okno



w którym wprowadzamy parametry geometryczne:

(Średnica zewnętrzna) Outside diameter OD: 25

(Grubość ścianki) Wall thickness TKWALL: 2

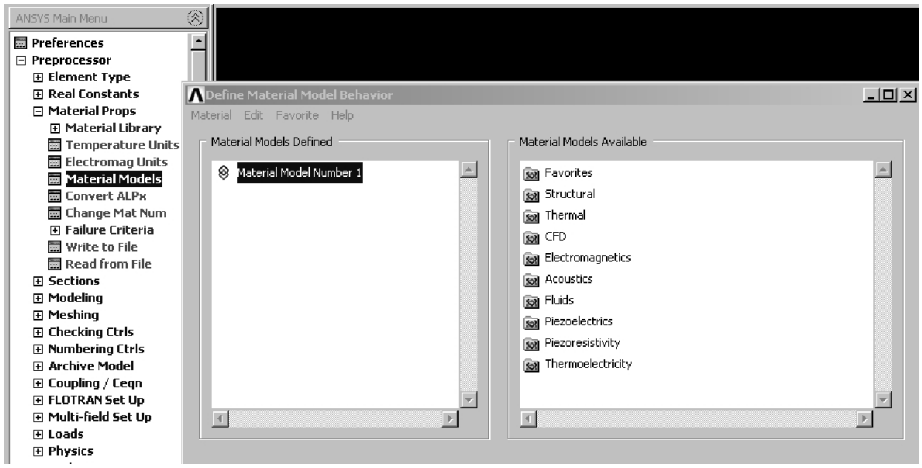
i klikamy OK.

W oknie dialogowym ***Real Constants*** pojawia się „Set 1”. Klikamy Close i zamykamy je.

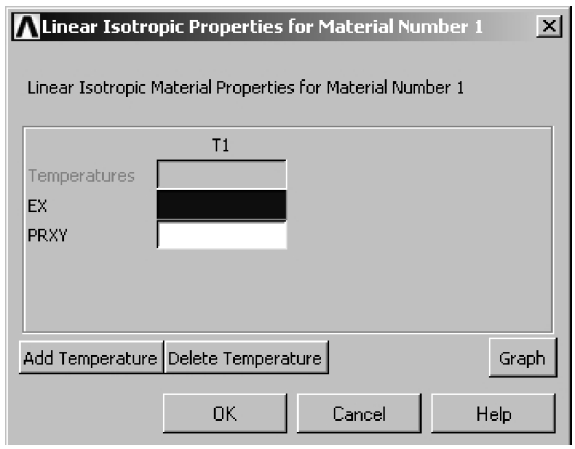
Zestawy stałych liczb rzeczywistych (*set of real constants*) służą do definiowania parametrów sztywnościowych. W zależności od typu elementu są to na przykład grubość (płyty, powłoki), momenty bezwładności przekroju, pole powierzchni przekroju, sztywność ścinania itp. Wykaz i znaczenie stałych są zawsze podane w opisie elementu, a jeśli korzystamy z GUI, to otrzymujemy kontekstową tabelkę z takimi parametrami, jakie danego elementu dotyczą. Zwróćmy uwagę, że w naszym przykładzie podaliśmy tylko średnicę i grubość (to wystarczy do wyliczenia wszystkich charakterystyk przekrojowych przy zginaniu), ale można też wprowadzić wiele innych, jak na przykład gęstość płynu wewnątrz rurki, grubość i gęstość izolacji, prędkość wirowania, współczynnik korozji i inne, co wskazuje na możliwości zastosowań tego elementu do analizy układów napędu, systemów hydraulicznych, systemów transportu płynu. Pozostawienie w tabelce niewypełnionego pola oznacza zastosowanie wartości domyślnej (zwykle zera) lub pominięcie danego efektu.

6. Własności materiału elementu

W następnej kolejności musimy podać własności materiału, z jakiego wykonamy belkę. W menu ***Preprocessor*** wybieramy **Material Props--> Material Models...**



podwójnie klikamy na lewo od **Structural-->Linear-->Elastic** i wybieramy **Isotropic** (podwójnie klikając). Zamykamy okno ***Define Material Model Behavior***.



Wprowadzamy następujące stałe materiałowe aluminium: EX 70000, PRXY 0.33 (kropka, a nie przecinek dziesiętny!) i klikamy OK. Zamykamy menu ***Material Props***.

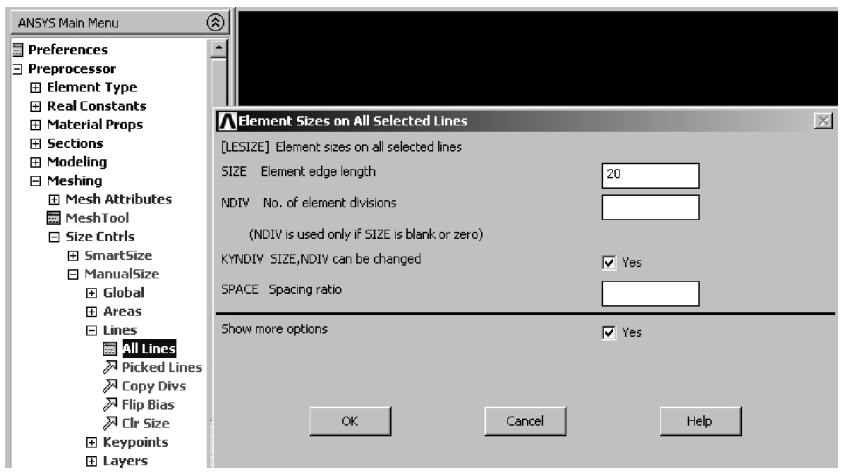
Zwracamy uwagę na fizyczny wymiar wielkości EX (PRXY jest bezwymiarowe). Podajemy tylko liczbę, bez jednostek, które musimy kontrolować. Ponieważ wymiary (długość, średnica, grubość) zostały podane w milimetrach [mm], a siłę podamy w niutonach [N], to moduł sprężystości

jest w mega paskalach [MPa]. Również wszelkie wyniki przemieszczeniowe będą wyrażone w [mm], reakcje w [N], a naprężeniowe w [MPa].

Znowu program zachowuje się kontekstowo: ponieważ wybraliśmy materiał liniowo sprężysty izotropowy (typowy materiał Hooka), wystarczą więc dwie stałe do jego zdefiniowania – EX moduł Younga (*elasticity modulus*) w kierunku osi *x* oraz PRXY współczynnik odkształceń poprzecznych Poissona (*Poisson ratio*) w płaszczyźnie *xy*. Gdyby jednak zastosować inny model materiału, to stałych byłoby więcej. Na przykład przy ortotropii należy jeszcze podać moduły sprężystości w pozostałych dwóch kierunkach *y* i *z* oraz współczynniki Poissona w płaszczyznach *yz* i *zx*; przy modelu plastycznym potrzebna będzie m.in. granica plastyczności itd., a program, w zależności od wybranego modelu materiału, zapytuje o potrzebne stałe. Dodatkowo zauważamy, że istnieje możliwość wprowadzenia zależności stałych materiałowych od temperatury, co może być istotne przy modelowaniu instalacji pracujących w warunkach kriogenicznych lub w temperaturach podwyższonych.

7. Rozmiar siatki

W ostatnim etapie przed „meshowaniem” trzeba wskazać ANSYSowi, jak duże mają być elementy. Istnieje kilka sposobów, aby to zrobić, ale na razie skupimy się tylko na jednym. W menu ***Preprocessor*** wybieramy **Meshing-->Size Cntrls-->ManualSize-->Lines-->All Lines**



W polu SIZE okna ***Element Sizes on All Selected Lines*** wprowadzamy zadaną długość elementu. W naszym przykładzie chcemy mieć elementy o długości 2 cm, więc wprowadzamy „20” (tzn. 20 mm) i klikamy OK. Alternatywnie, moglibyśmy wprowadzić liczbę podziałów linii. Aby uzyskać długość elementu 2 cm, wprowadzilibyśmy 25 (tzn. 25 podziałów).

UWAGA: Dla elementów belkowych nie ma konieczności „meshowania”, aby uzyskać poprawne rozwiązanie w sensie wartości ugięcia na końcach. Są to tzw. elementy dokładne, czyli ich funkcje kształtu dają ścisłe rozwiązanie analityczne.

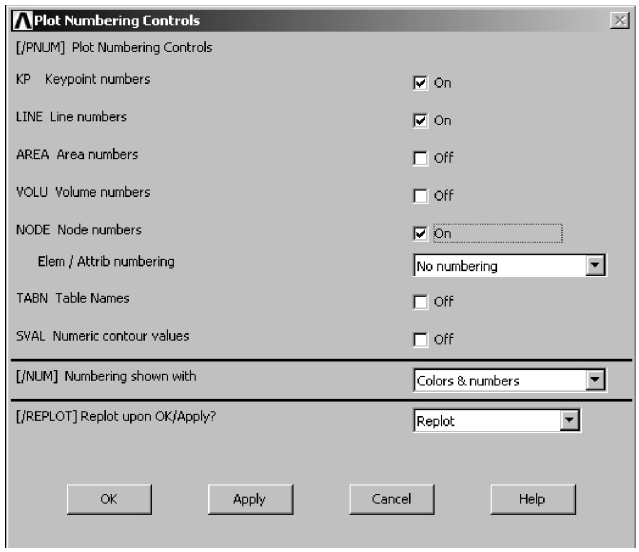
Jednakże w tym przykładzie „meshowanie” jest robione w celu odczytu wyników (naprężenia, przemieszczenia, moment zginający) w punktach pośrednich między końcami belki.

8. „Meshowanie”, czyli tworzenie siatki elementów

Na obiektach *solid modeling* nie wykonuje się żadnych obliczeń, a służą one jedynie do stworzenia geometrii modelu. Dopiero elementy, ze swoimi węzłami i stopniami swobody, stanowią przedmiot obliczeń MES.

Teraz już można „zmeshować” belkę. W menu **Preprocessor** wybieramy **Meshing-->Mesh-->Lines** i klikamy Pick All w oknie ***Mesh Lines*** i otrzymujemy belkę zdyskretyzowaną wybranymi elementami.

Numeracja obiektów na rysunkach: aby zobaczyć numery linii, keypointów, węzłów, elementów... z *Utility Menu* wybieramy **PlotCtrls-->Numbering...**, wypełniamy okno ***Plot Numbering Controls***, jak na przykład na rysunku poniżej, i klikamy OK



Numerację możemy włączać i wyłączać według uznania, używając do tego albo liczb, albo kolorów, albo obu naraz.

9. Zachowywanie pracy

Zachowamy nasz model, żeby w sytuacji, gdy zrobimy błędy w późniejszej fazie, można było wrócić do tego punktu. Aby to zrobić, wybieramy z ***Utility Menu*** **File-->Save as...** i wskazujemy nazwę i miejsce, gdzie ma zostać zachowany plik.

Dobrym nawykiem jest zachowywanie pracy na różnych etapach budowy i analizy modelu na wypadek awarii systemu czy popełnienia poważnych błędów. Ponieważ ANSYS nie ma akcji „undo” (cofnięcia poprzednio wykonanej

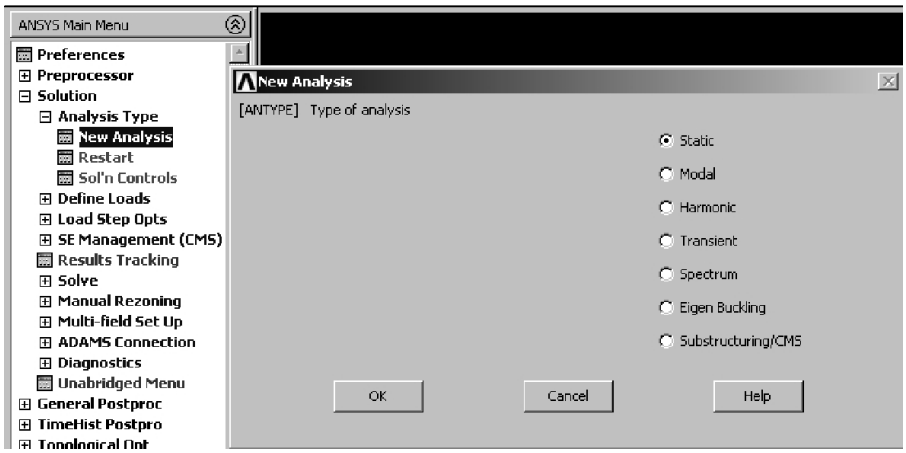
czynności), więc przed każdą testową dużą zmianą w modelu warto zachować dotychczasowy stan, aby w razie potrzeby łatwo do niego wrócić.

II. Faza rozwiązania (*Solution*): zadanie więzów, obciążeń i rozwiązanie

Zdefiniowaliśmy model. Teraz pora zadać obciążenia oraz więzy i rozwiązać wynikowy układ równań. Zamykamy menu ***Preprocessor*** i otwieramy ***Solution*** (z tego samego ***ANSYS Main Menu***).

1. Określamy typ analizy

Na początku trzeba wskazać ANSYSowi, jakie zadanie ma rozwiązywać. Z menu ***Solution*** wybieramy **Analysis Type-->New Analysis**



upewniamy się, że jest wybrana opcja **Static**, co oznacza, że chcemy przeprowadzić analizę statyczną naszej belki. Klikamy OK.

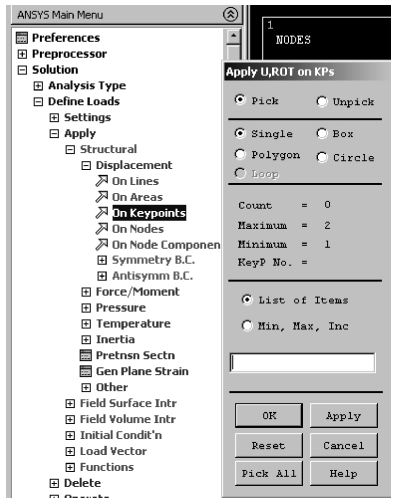
Analiza statyczna interesuje nas najbardziej, bo to po prostu rozwiązanie zadania z wytrzymałości: policzenie przemieszczeń, naprężeń, sił wewnętrznych. Zauważmy jednak, że można przeprowadzić inne typy analizy, jak na przykład utraty stateczności (*eigen buckling*), modalną wyznaczającą częstości własne, harmoniczną wyznaczającą odpowiedź układu na wymuszenie zmienne w czasie i inne.

2. Nakładamy więzy (można to zrobić też w ***Preprocesorze***)

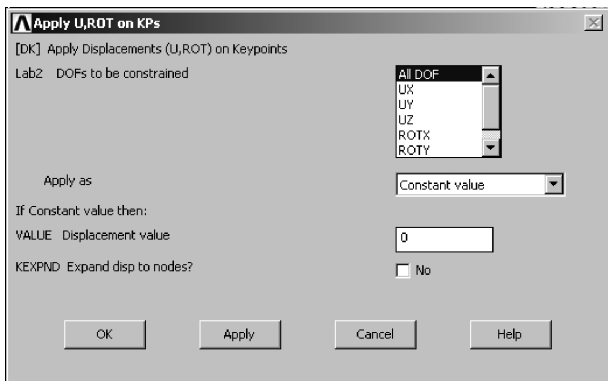
Musimy koniecznie nałożyć więzy na model, gdyż w przeciwnym razie okaże się on *nieuwiązany* i otrzymamy osobliwość układu równań. W praktyce chodzi o wyeliminowanie możliwości ruchu sztywnego konstrukcji jako całości. Obowiązuje założenie o równowadze statycznej. W układach mechanicznych tymi więzami będzie zwykle utwierdzenie, przegubowe podparcie czy podparcie z możliwym przesuwem.

W naszym modelu lewy koniec belki jest utwierdzony.

W menu ***Solution*** wybieramy **Define Loads-->Apply-->Structural--> Displacement-->On Keypoints**



Wybieramy lewy koniec pręta (Keypoint 1), klikając na nim w oknie graficznym i klikamy OK w oknie ***Apply U,ROT on KPs***.



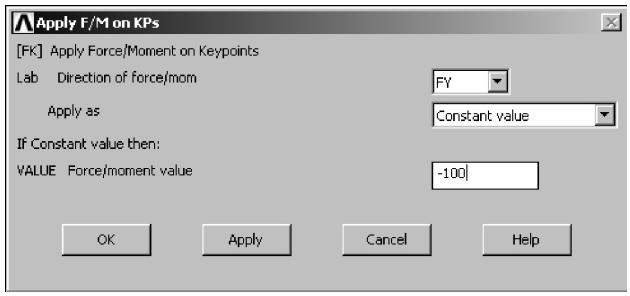
Utwierdzenie tego miejsca oznacza, że wszystkie translacyjne i rotacyjne stopnie swobody (DOFs) są zablokowane. Wobec tego wybieramy klikając All DOF i wprowadzamy „0” w polu „Value”, po czym klikamy OK. W oknie graficznym zauważymy niebieskie trójkąciki wskazujące na zablokowanie przemieszczeń oraz pomarańczowe oznaczające zablokowanie obrotów.

Znów zaważmy, że okno jest kontekstowe – wyświetla w celu umożliwienia wyboru tylko te stopnie swobody (U przemieszczenia, ROT obroty), które dotyczą wybranego typu elementu. Gdybyśmy zamiast utwierdzenia chcieli zastosować swobodne przesuwne podparcie, to w polu „DOFs to be constrained” wybierzemy **UZ** i nadamy mu wartość zero.

3. Przykładamy siły (można to zrobić też w ***Preprocesorze***)

Na rysunku zaznaczyliśmy pionową siłę 100 N działającą w dół na końcu belki. W menu ***Solution*** wybieramy **Define Loads-->Apply-->Struc-**

tural-->Force/Moment-->On Keypoints, wybieramy drugi Keypoint (prawy koniec belki) i klikamy OK w oknie ***Apply F/M***



W polu „Direction of force/mom" wybieramy **FY**. Oznacza to, że przykładamy siłę pionową w kierunku osi „y". Wprowadzamy wartość –100 w polu „Force/moment value" i klikamy OK. Znak minus oznacza zwrot siły niezgodny z osią. Siła pojawia się w oknie graficznym jako czerwona strzałka.
Zamykamy menu *Force/Moment* i *Apply*.

Gdybyśmy potrzebowali przyłożyć siły w innych kierunkach lub skupione momenty o dowolnych zwrotach, to powyższą procedurę należy powtórzyć.

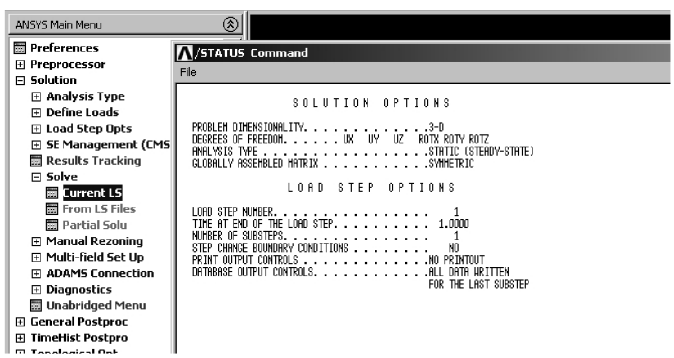
W ANSYSie więzy i obciążenia możemy przykładać zarówno do takich obiektów jak punkty bazowe (keypoints), linie, powierzchnie, jak też bezpośrednio do węzłów elementów. W pierwszym przypadku, na ogół wygodniejszym, program sam dokona dyskretyzacji obciążenia i przeniesienia odpowiednich wartości na węzły.

4. Rozwiązanie układu równań

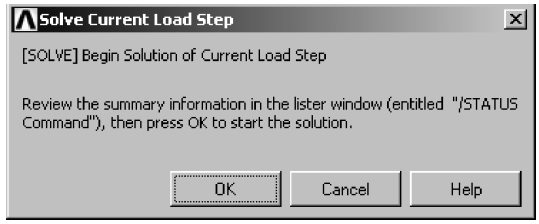
Teraz polecamy ANSYSowi znalezienie rozwiązania:

W menu ***Solution*** wybieramy **Solve-->Current LS**. Oznacza to, że chcemy otrzymać rozwiązanie dla bieżącego kroku obciążenia [Load Step (LS)].

Ogólnie, obciążenie możemy realizować na wielu etapach, analizując stan konstrukcji na każdym z nich.

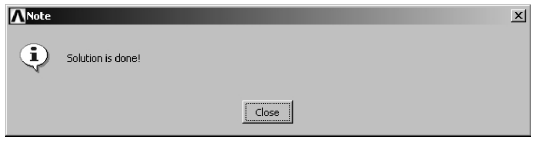


Sprawdzamy, że opcje, jakie się pojawią w oknie, odpowiadają naszemu zadaniu (wymiar, stopnie swobody, typ analizy), a w oknie ***Solve Current Load Step*...**



...klikamy OK

Kiedy rozwiązanie zostanie uzyskane, pojawi się kolejne okno (informacyjne). Klikamy Close, a potem zamykamy menu ***Solution***.



III. Postprocessing: przegląd i analiza wyników

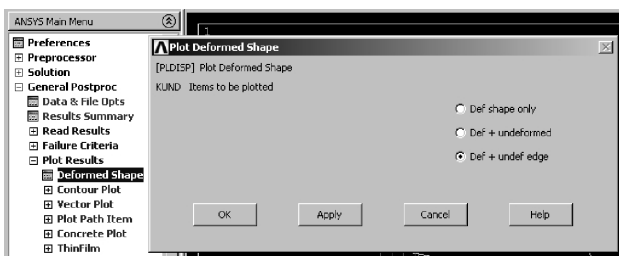
1. Rozwiązanie analityczne

Ponieważ celem tego ćwiczenia jest weryfikacja wyników, a przez nie sprawdzenie drogi postępowania od modelu do rozwiązania, wyliczamy, co powinno wyjść. Zwykle nie znamy rozwiązania ścisłego, ale w tym przypadku prostej belki wyznaczymy je bez trudu: największe ugięcie wystąpi na końcu belki i wynosi 6,2 mm; największe naprężenie występuje w utwierdzonym przekroju i wynosi 64,9 MPa (naprężenie od czystego zginania policzone jako iloraz momentu zginającego i wskaźnika zginania).

2. Wyniki z ANSYSa

2a. Deformacja

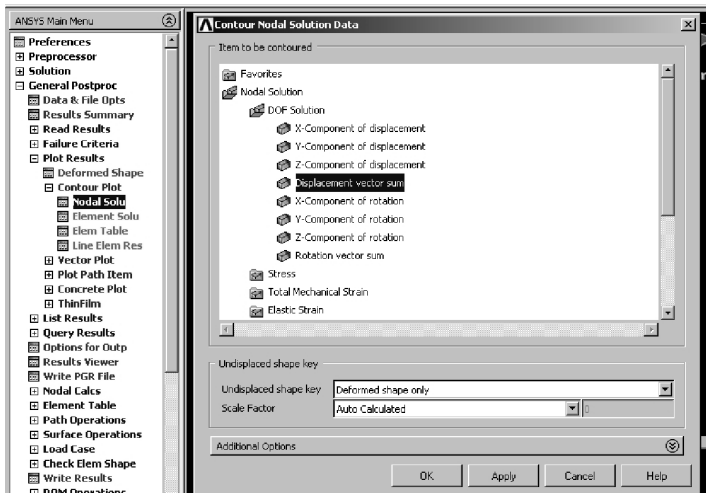
Z ANSYS Main Menu wybieramy **General Postproc**. Znajdziemy tam wiele różnych opcji, spośród których interesują nas dwie: **Plot Results** do graficznej prezentacji wyników i **List Results** do przedstawiania wyników w formie liczbowej. Wybieramy **Plot Results-->Deformed Shape**. Pojawi się okno dialogowe ***Plot Deformed Shape***



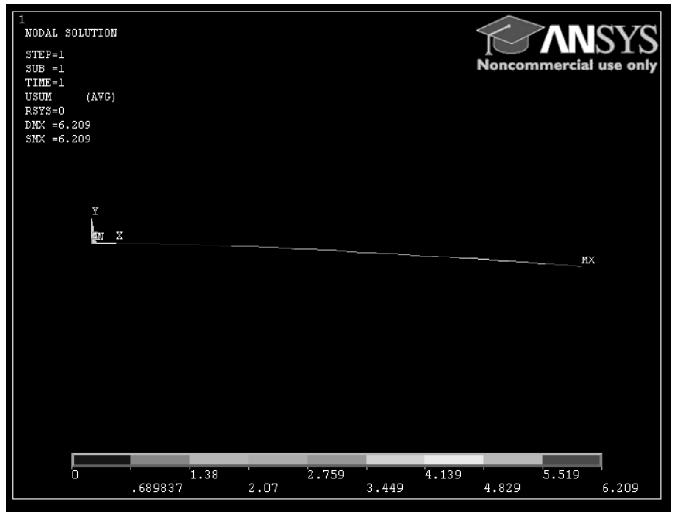
Wybieramy „Def + under edge” i klikamy OK, aby zobaczyć zarówno kształt wyjściowy, jak i zdeformowany.
Zwróćmy uwagę na wartość maksymalnego ugięcia podaną w lewym górnym rogu okna *Graphics*. Jest ona identyczna z otrzymaną z ręcznych obliczeń.

2b. Ugięcie

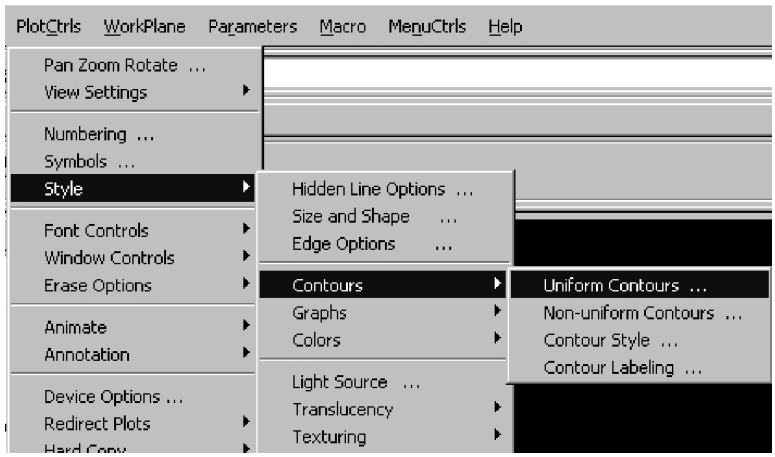
Aby uzyskać bardziej szczegółowy obraz ugięcia tej belki, z menu ***General Postproc*** wybierzmy **Plot results-->Contour Plot--> Nodal Solu** i pojawi się okno ***Contour Nodal Solution Data***



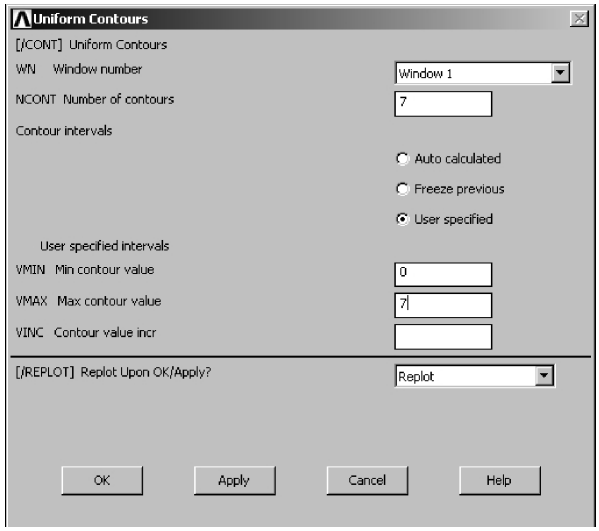
wybierzmy **DOF Solution-->Displacement vector sum** (jak na obrazku), pozostawiając inne opcje niezmienione (default). Klikamy OK.



W oknie grafiki zobaczymy poziomicowy wykres ugięcia belki z zaznaczonymi w legendzie przedziałami. Jak widać z rozwijalnego menu, można rysować poszczególne składowe przemieszczeń lub obrotów, a także wartości całkowite – sumy wektorowe.
Patrząc na skalę, możemy chcieć zastosować bardziej czytelne przedziały. Użytkownik ma pełną możliwość kontroli nad takimi wykresami. Z ***Utility Menu*** wybieramy **Plot Controls-->Style-->Contours-->Uniform Contours**



wypełniamy okienko ***Uniform Contours***, na przykład jak poniżej, i klikamy OK.



W ten sposób podzieliliśmy skalę przemieszczeń na siedem przedziałów [0, 1], [1, 2], ... [6, 7] i w każdej chwili możemy to dowolnie zmienić. Zwróćmy uwagę na podaną liczbę przedziałów (7), zaznaczone pole „User

specified" przy zadawaniu przedziałów zmienności oraz na wpisane przez użytkownika wartości minimalną (0) i maksymalną (7).

Każdy rysunek znajdujący się w oknie ***Graphics*** można zapisać na zewnętrznym pliku graficznym. W tym celu z ***Utility Menu*** wybieramy **Plot Controls -->Redirect Plots**, a następnie wybieramy format zapisu grafiki (gif, jpg, bmp, postscript itp.). Po ustaleniu dalszych opcji w kolejnym oknie dialogowym, jak na przykład wymuszenie białego tła albo wydruku monochromatycznego czy ustalenie skali, otrzymamy odpowiedni plik, który może być wykorzystany przy sporządzaniu raportu, pisaniu dokumentacji czy przygotowaniu prezentacji.

Ugięcie można również otrzymać jako wydruk: **General Postproc--> List Results-->Nodal Solution...** wybieramy **DOF Solution--> Displacement vector sum** z listy w oknie ***List Nodal Solution*** i klikamy OK. Znaczy to, że chcemy zobaczyć wydruk wszystkich translacyjnych stopni swobody z naszego rozwiązania. Jeśli chodziłoby nam o obroty (rotacyjne stopnie swobody), wtedy wybralibyśmy **Rotation vector sum**.

PRNSOL Command

File

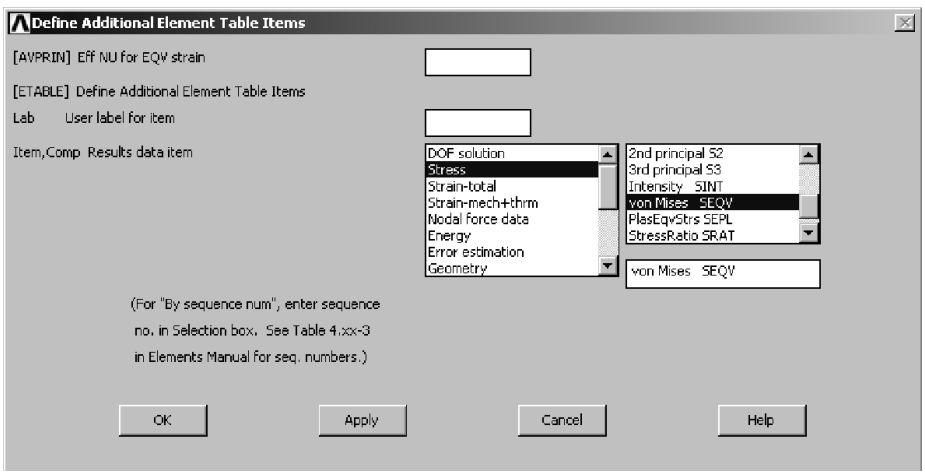
```
PRINT U    NODAL SOLUTION PER NODE

 ***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

 LOAD STEP=     1  SUBSTEP=     1
  TIME=    1.0000      LOAD CASE=   0

 THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

   NODE      UX          UY          UZ          USUM
      1   0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
      2   0.0000     -6.2085      0.0000      6.2085
      3   0.0000    -0.15691E-01  0.0000     0.15691E-01
      4   0.0000    -0.59870E-01  0.0000     0.59870E-01
      5   0.0000     -0.13135     0.0000      0.13135
      6   0.0000     -0.22894     0.0000      0.22894
      7   0.0000     -0.35146     0.0000      0.35146
      8   0.0000     -0.49772     0.0000      0.49772
      9   0.0000     -0.66654     0.0000      0.66654
     10   0.0000     -0.85672     0.0000      0.85672
     11   0.0000      -1.0671     0.0000       1.0671
     12   0.0000      -1.2964     0.0000       1.2964
     13   0.0000      -1.5436     0.0000       1.5436
     14   0.0000      -1.8074     0.0000       1.8074
     15   0.0000      -2.0866     0.0000       2.0866
     16   0.0000      -2.3800     0.0000       2.3800
     17   0.0000      -2.6865     0.0000       2.6865
     18   0.0000      -3.0049     0.0000       3.0049
     19   0.0000      -3.3339     0.0000       3.3339
     20   0.0000      -3.6725     0.0000       3.6725
     21   0.0000      -4.0193     0.0000       4.0193
     22   0.0000      -4.3733     0.0000       4.3733
     23   0.0000      -4.7333     0.0000       4.7333
     24   0.0000      -5.0979     0.0000       5.0979
     25   0.0000      -5.4661     0.0000       5.4661
     26   0.0000      -5.8367     0.0000       5.8367

 MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
 NODE        0           2           0           2
 VALUE    0.0000     -6.2085      0.0000      6.2085
```

Uzyskamy tabelę liczb – składowych przemieszczeń i całkowitego ugięcia. Największe ugięcie jest w węźle 2, prawym końcu belki. Zauważmy też, że translacyjne stopnie swobody w węźle 1 wynoszą zero. Ta forma prezentacji wyników będzie zdecydowanie bardziej przydatna, jeśli zajdzie potrzeba podania wartości ugięcia w wybranym punkcie belki, a informacja o przedziale będzie niewystarczająca. Gdybyśmy chcieli zapisać te wyniki

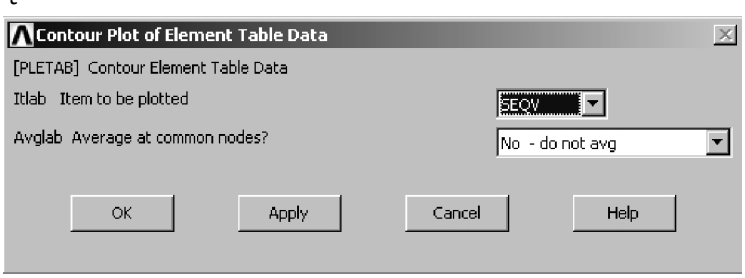
w pliku, to w menu ***File*** (lewy górny róg okna z wydrukiem) wybierzemy **Save as**. Taki zapis w postaci pliku tekstowego może być potem importowany w innych aplikacjach (Word, Excel, PowerPoint, Grapher itd.) oraz przesłany do drukarki.

2c. Naprężenia

Dla elementów liniowych, jak belki (*beams*), ruszty (*spars*) i rury (*pipes*), zachodzi konieczność użycia tzw. *Element Table* (tablica elementowa) w celu uzyskania „wyliczanych" danych (tzn. naprężeń, odkształceń), gdyż nie są one bezpośrednio dostępne.
Zamykamy menu ***List Results***. Z menu ***General Postproc*** wybieramy **Element Table-->Define Table...** i klikamy Add..., otrzymując nowe okno.



Jak pokazano powyżej, w polu „Item,Comp" okna dialogowego wybieramy „Stress" oraz „von Mises SEQV", klikamy OK i zamykamy okno ***Element Table Data***.
Rysujemy naprężenia, wybierając **Plot Elem Table** w menu ***Element Table***.
Pojawi się kolejne okno ***Contour Plot of Element Table Data***. Upewniamy się, że jest wybrane „SEQV" i klikamy OK aby uzyskać warstwicowy wykres naprężeń.



Ponieważ wcześniej zmieniliśmy przedziały zakresów rysowania dla rysunku przemieszczeń na „User Specified", teraz trzeba je przywrócić na „Auto calculated", aby uzyskać nowe wartości VMIN/VMAX **Utility Menu -->PlotCtrls-->Style-->Contours-->Uniform Contours…** a potem znowu wybierzemy wygodniejsze zakresy skalowania rysunku warstwicowego.

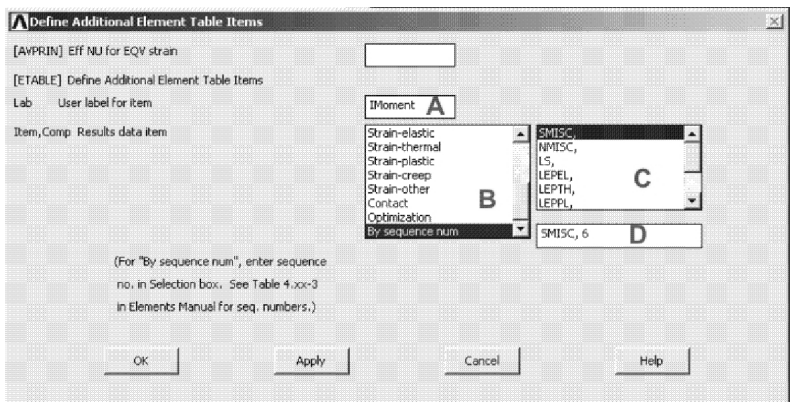
Naprężenia, jak poprzednio przemieszczenia, możemy też drukować. Z menu ***Element Table*** wybieramy **List Elem Table**, upewniamy się, że w oknie ***List Element Table Data***, które się pojawi, podświetlone jest „SEQV" i klikamy OK. Zauważmy, że największa wartość naprężenia 64,914 MPa występuje w utwierdzonym końcu belki, tak jak przewidzieliśmy analitycznie.

Na liście składowych naprężenia mamy do wyboru poszczególne składowe albo naprężenia główne, albo zastępcze (zredukowane). SEQV von Mises oznacza naprężenie zastępcze według hipotezy wytężeniowej Hubera–Misesa–Hencky'ego (HMH), a SINT intensity oznacza naprężenie zastępcze według hipotezy Tresci–Guesta (TG).

2d. Wykres momentu zginającego

Stworzymy teraz wykres momentu zginającego w celu dalszej weryfikacji tego uproszczonego modelu. Ponieważ proces rysowania jest nieco skomplikowany, wyjaśnimy go szczegółowo. Znów musimy stworzyć tabele elementowe (przypominamy, że odpowiednią opcją elementu kazaliśmy zapamiętać siły wewnętrzne).

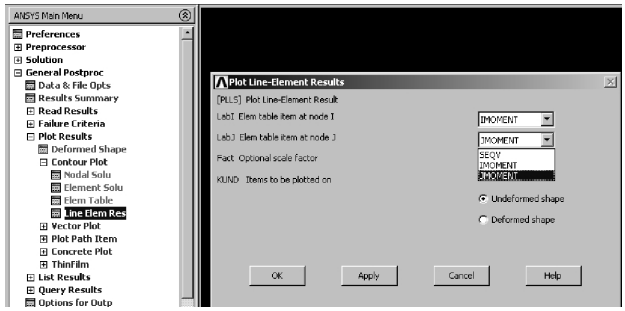
Element Table-->Define Table... Klikamy Add...



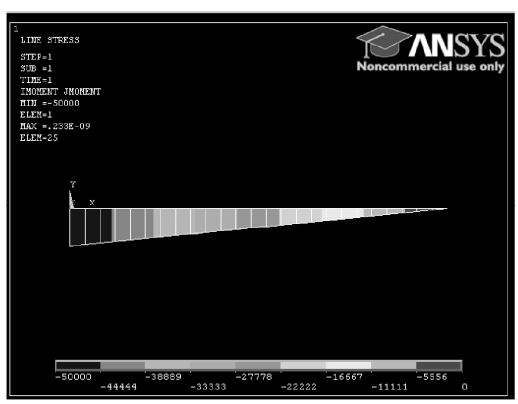
W oknie ***Define Additional Element Table Items***

A. wprowadzamy `IMoment` jako „User label for item" (nazwa wielkości nadana przez użytkownika)
B. wybieramy „By sequence num" w polu Item
C. wybieramy „SMISC" w pierwszym oknie Comp

D. wprowadzamy `SMISC,6` w drugim oknie Comp
E. klikamy Apply
Ta operacja spowoduje zapamiętanie danych o momencie zginającym w lewym końcu (strona I) każdego elementu. Podobnie musimy zapamiętać dane o momencie zginającym w prawym (J) końcu każdego elementu.
A. wprowadzamy `JMoment` jako „User label for item”
B. jak wyżej
C. jak wyżej
D. wprowadzamy `SMISC,12` w drugim oknie Comp
E. klikamy OK
Klikamy Close w oknie ***Element Table Data*** i zamykamy menu ***Element Table***. Wybieramy **Plot Results-->Contour Plot-->Line Elem Res...** a w oknie ***Plot Line-Element Results*** z rozwijalnego menu, w którym są wszystkie zdefiniowane przez nas tabele elementowe, wybieramy „IMOMENT” dla LabI oraz „JMOMENT” dla LabJ. Klikamy OK i otrzymujemy wykres.

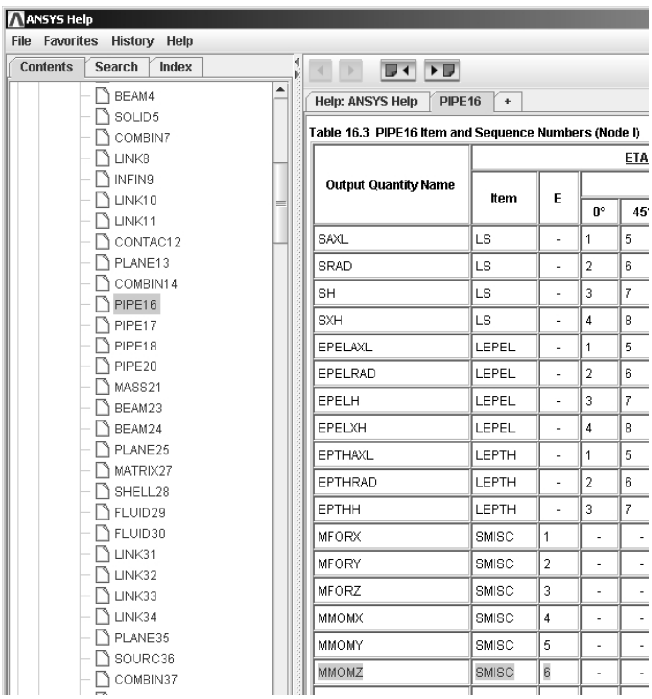


Zwracamy uwagę, że linia wykresu pomiędzy punktem I oraz punktem J jest liniową interpolacją funkcji momentu zginającego na długości tego elementu. Przypominamy, że można zmienić przedziały wykresu warstwicowego.



W celu wyjaśnienia powyższych etapów, wprowadźmy polecenie **help pipe16** w linii komend (jak pokazano poniżej) i naciśnijmy Enter. Pokaże się opis używanego przez nas elementu pipe16.

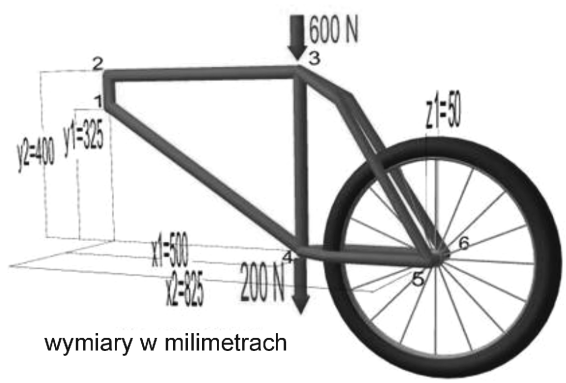
Pod koniec tego dokumentu pojawią się interesujące nas teraz tabele wyjaśniające, jaka sekwencja numeryczna koduje jaką wielkość. Zauważmy, że SMISC 6 (którego użyliśmy, aby uzyskać wartość w węźle I) odpowiada MMOMZ momentowi w węźle I, a SMISC 12 w węźle J elementu. Wartość „E" jest różna dla różnych typów elementów, tak więc musimy przeglądać pliki z dokumentacją ANSYSa dla każdego stosowanego elementu, aby wskazać właściwe „SMISC", odpowiadające interesującej nas wielkości. Opis używanych skrótów znajduje się w pliku pomocy, ale niektóre łatwo wyjaśnimy: MMOMZ (*member moment Z*) oznacza elementowy moment, którego wektor działa wzdłuż osi Z (podobnie inne osie); MFORX (*member force X*) oznacza elementową siłę o kierunku osi X (siła normalna), MFORZ – siła tnąca itd.



Chcąc zakończyć pracę z ANSYSem, klikamy QUIT w ***Abbreviation Toolbar Menu*** albo rozwijamy **File-->Exit...**, po czym w oknie ***Exit from ANSYS*** wybieramy odpowiednią opcję częściowego lub pełnego zapisu opracowywanego modelu. „Save Everything" powoduje zapisanie modelu, wszystkich danych materiałowych, elementowych, sztywnościowych, zmiennych, parametrów dyskretyzacji, a także otrzymanych wyników i stworzonych tabel elementowych. Dzięki temu można łatwo powrócić do zadania, naciskając przycisk RESUM_DB albo rozwijając **File-->Resume from...**

Rama przestrzenna

Po przećwiczeniu elementarnych kroków, prowadzących od stworzenia modelu belki do uzyskania wyników analizy statycznej, powtórzymy je dla bardziej złożonego problemu przestrzennej ramy, której wymiary i schemat obciążenia pokazuje rysunek 26. Pierścieniowy przekrój rurek ma średnicę 25 mm i grubość 2 mm. Celem analizy jest wyznaczenie przemieszczeń (w tym maksymalnego) i naprężeń zastępczych, które porównane z wartościami dopuszczalnymi dla przyjętego materiału (aluminium) pozwalają sprawdzić warunek bezpieczeństwa. Schemat działania będzie podobny, z tym, że liczba prętów jest większa, co wymaga większej liczby punktów bazowych i linii. Komendy opisane powyżej, a wykonywane również w tym przykładzie, nie będą już szczegółowo omawiane – w razie potrzeby przypomnienia należy wrócić do zadania z belką.



Rys. 26. Rama przestrzenna z wymiarami i obciążeniami

Nowym elementem w tym ćwiczeniu będzie poznanie możliwości wydawania programowi poleceń w trybie komend tekstowych. Z jednej strony

tworzenie modelu przez klikanie myszką może być uciążliwe i kłopotliwe, kiedy model będzie bardziej złożony, a z drugiej – znajomość poleceń tekstowych jest potrzebna do stworzenia parametrycznego zapisu modelu w pliku tekstowym. Przy każdej ścieżce rozwijalnego menu podamy postać jej tekstowego odpowiednika.

Każda z podstawowych akcji ANSYSa, wykonywana przez rozwijalne menu w GUI, ma swój tekstowy odpowiednik. Komenda składa się z jedno- lub kilkuliterowej nazwy, po której po przecinkach podawane są jej parametry. Liczba parametrów oraz ich znaczenie jest oczywiście różne dla różnych komend, a pełny opis znajduje się w systemie *help*. Należy też wiedzieć, że niepodanie jakiegoś parametru (pozostawienie pustego pola między przecinkami) powoduje przyjęcie przez niego wartości domyślnej: często, ale nie zawsze, zera. Wartość domyślna (*default*) i jej znaczenie są wyjaśnione w opisie każdej komendy.

Wymazujemy wszystkie stare pliki ANSYSa i zaczynamy nowe zadanie **Utility Menu-->File-->Clear and Start New** (`/clear`)
Przed tą operacją warto zachować poprzednie zadanie, gdyż powoduje ona wyzerowanie bazy programu.

I. Preprocessing

1. Nadajemy nowy tytuł

Utility menu-->File-->Change Title (`/title, 3D Bicycle Space Frame`)

2. Zdefiniujemy kilka zmiennych

Określimy położenie wierzchołków ramy, używając zmiennych. Zmienne te zawierają różne długości elementów ramy (wymiary odczytane z rysunku).

Użycie takich zmiennych ułatwia stworzenie parametrycznego opisu modelu. To z kolei umożliwi łatwe wprowadzanie ewentualnych zmian. Jeśli jakaś wartość liczbowa ma być użyta w modelu wielokrotnie, to wygodniej jest ją zapisać do zmiennej i używać zamiast stałej, co zmniejsza możliwość pomyłki i czyni model czytelniejszym. Zmienna ma znaczenie podobne jak w językach programowania – ma swoją nazwę i wartość, nadawaną analogicznie jak w instrukcji podstawienia za pomocą stałych, zmiennych, funkcji i wyrażeń arytmetycznych.

Najszybsza droga wprowadzania tych zmiennych prowadzi przez ***Input Line***. Wstukujemy każdą z poniższych linii z Enter na końcu.

```
x1 = 500
x2 = 825
y1 = 325
y2 = 400
z1 =  50
```

Domyślnie przyjęliśmy jednostkę długości w [mm].

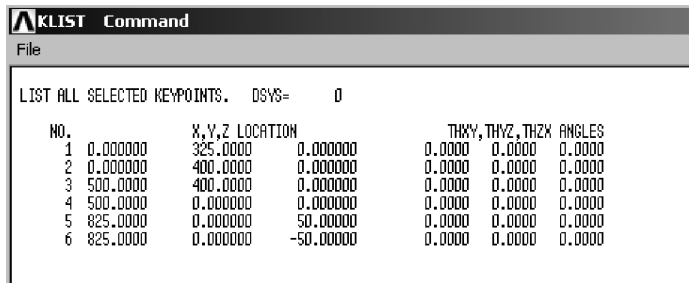
3. Wprowadzamy keypoints

Dla tego przykładu keypointy są wierzchołkami ramy. Zdefiniujemy 6 keypointów o współrzędnych w układzie xyz – odpowiednio: 1 (0, y1, 0), 2 (0, y2, 0), 3 (x1, y2, 0), 4 (x1, 0, 0), 5 (x2, 0, z1), 6 (x2, 0, –z1) – poprzez linię komend. Najpierw otwieramy ***Preprocessor*** z ***ANSYS Main Menu***, aby program rozpoznawał polecenia preprocesora, jakie będziemy wydawać. Alternatywnie można napisać `/PREP7` w linii komend. Polecenie do wprowadzenia keypointa ma postać `K, NPT, X, Y, Z`, gdzie po nazwie komendy **`(K)`** `NPT` oznacza numer tworzonego punktu bazowego, a kolejne parametry to współrzędne w aktywnym układzie współrzędnych. W celu stworzenia pierwszych dwóch punktów wprowadzamy więc w linii komend:

`K, 1, 0, y1, 0` Enter
`K, 2, 0, y2, 0` Enter

a pozostałe podobnie według podanego wykazu.

Tworzone punkty sukcesywnie pojawiają się w oknie **Graphics**, a sprawdzenia dokonujemy przez **Utility Menu-->List-->Keypoints-->Coordinates only** (albo `KLIST` w linii komend), uzyskując wydruk zawierający numery i współrzędne keypointów w postaci wartości, a nie nazw zmiennych, których użyliśmy.



Jeśli po sprawdzeniu potrzeba zmienić któryś punkt, to wydajemy komendę ponownie, zachowując numer i zmieniając współrzędne. Jeśli chcemy usunąć keypoint, to używamy komendy `KDELE, NPT`, podając jako parametr numer usuwanego.

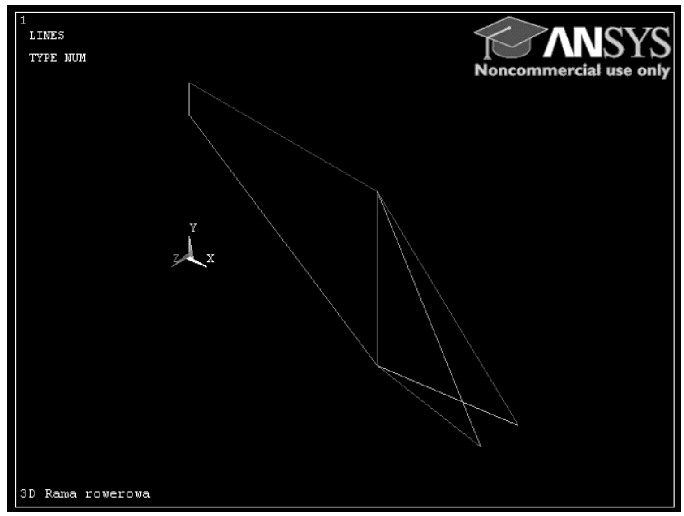
4. Sterujemy grafiką

Ponieważ tworzony obiekt jest trójwymiarowy, zachodzi potrzeba obejrzenia go w różnych rzutach i widokach. Zwróćmy uwagę, że po prawej stronie okna grafiki mamy przyciski do sterowania obrazem: widok izometryczny, widok ukośny, rzuty w różnych kierunkach (z przodu, z prawej, z góry, z tyłu, z lewej, z dołu), powiększanie i pomniejszanie, obroty wokół każdej z osi, przesuwanie w czterech kierunkach czy „zoomowanie”, czyli powiększanie fragmentu. Opcjonalnie można przez menu **Utility menu**

-->PlotCtrls-->Pan, **Zoom**, **Rotate...** przywołać na ekran osobnego pilota, którego przyciski pełnią te same funkcje. Wydając polecenie rysowania punktów bazowych **Utility menu-->Plot--> Keypoints** (tekstowo: KPLOT), a następnie przyciskając odpowiedni przycisk pilota, otrzymamy dowolny (np. izometryczny) przestrzenny widok ich wszystkich.

5. Tworzymy linie

Kolejne linie powstaną po połączeniu następujących par punktów bazowych: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (3, 5), (4, 5), (3, 6), (4, 6). Komenda służąca utworzeniu linii ma postać L, P1, P2, gdzie parametry oznaczają numery początkowego i końcowego punktu bazowego. W odróżnieniu od tworzenia punktów bazowych teraz nie podajemy numerów generowanych linii. Program nada im numery automatycznie, zaczynając od pierwszego wolnego (w naszym przykładzie 1). Wprowadzamy kolejne komendy
L, 1, 2 Enter L, 2, 3 Enter ... L, 4, 6 Enter
aż otrzymamy nastepujący rysunek.



Znowu sprawdzamy, czy linie są wprowadzone poprawnie: piszemy LLIST w linii komend. Na wydruku zobaczymy przyjętą numerację. Jeśli jakaś linia jest do zmiany, usuwamy ją, pisząc: LDELE, LNR, gdzie LNR jest numerem referencyjnym, a potem wprowadzamy jeszcze raz, przy czym dostanie ona nowy, inny numer referencyjny.

6. Definiujemy typ elementu

Preprocessor-->Element Type-->Add/Edit/Delete-->Add

i tak jak poprzednio wybierzmy „pipe16”. Nie zapomnijmy zmienić opcji K6 „Include Output”, aby uzyskać dodatkową informację wyjściową (*output*) o siłach i momentach w elemencie.

(tekstowo: `ET, 1, pipe16`
`KEYOPT, 1, 6, 1`)

7. Definiujemy własności geometryczne

Preprocessor-->Real Constants-->Add/Edit/Delete -->Add...
i specyfikujemy geometrię elementu, podając wymiary w milimetrach
średnica zewnętrzna (*Outside diameter*) OD: 25
grubość ścianki (*Wall thickness*) TKWALL: 2
(tekstowo: `R, 1, 25, 2`)

8. Własności materiału

W celu wprowadzenia modułu Younga i współczynnika Poissona znowu użyjemy linii komend. Postać polecenia jest następująca: `MP, LAB, MAT, VAL`
`MP` to komenda (*Material Property*), `LAB` (*label*) to etykieta odpowiedniej stałej materiałowej, `MAT` to numer referencyjny materiału, który definiujemy, `VAL` to wartość liczbowa stałej. Moduł Younga (LAB = EX) równy dla aluminium 70 000 MPa nadamy wpisując `MP, EX,1,70000`, a współczynnik Poissona (LAB=PRXY) `MP, PRXY, 1, 0.33`

9. Rozmiar siatki

Jak poprzednio, ustalmy na 20 mm: **Preprocessor-->Meshing-->Size Cntrls--> ManualSize -->Lines-->All Lines** (tekstowo: `LESIZE, ALL, 20, , , ,1, , ,1`)

10. Meshowanie

Teraz można ramę zmeshować – wszystkie dane są dostarczone. **Preprocessor-->Meshing-->Mesh-->Lines** i klikamy Pick All w okienku ***Mesh Line*** (tekstowo: `LMESH, ALL`)

11. Zachowujemy pracę

Utility Menu-->File-->Save as...
mając już model gotowy i po dyskretyzacji (tekstowo: `SAVE, NAZWA`)

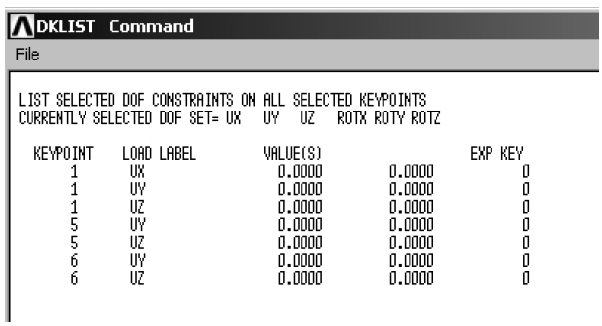
II. Faza Solution: zadawanie więzów, obciążeń i rozwiązanie

1. Zamykamy menu ***Preprocessor*** (`finish`) a otwieramy menu ***Solution*** z tego samego ***ANSYS Main Menu*** (`/SOLU`) i określamy typ analizy **Solution-->Analysis Type-->New Analysis...-->Static** (`ANTYPE, 0`)

2. Nakładamy więzy

Ponownie użyjemy linii komend. Chcemy podeprzeć pierwszy keypoint (czyli zablokować translacyjne DOFs, a rotacyjne nie). Następnie w keypointach modelujących zamocowanie tylnego koła blokujemy przemieszczenia w kierunkach y i z. Taki sposób podparcia wyeliminuje ruch sztywny

zarówno translacyjny przez zablokowanie jednego punktu, jak i rotacyjny przez boczne podparcie. Format komendy nakładającej więzy na punkty bazowe (*Displacements of Keypoints*) jest następujący:
`DK, KP, Lab, VALUE, VALUE2, KEXPND, Lab2, Lab3, Lab4, Lab5, Lab6`
W naszym przykładzie nie wszystkie pola komendy są konieczne, dlatego wprowadzając kod, niektóre z nich zostawimy puste. Na przykład podparcie pierwszego keypointa zrealizujemy dzięki `DK, 1, UX, 0, , , UY, UZ`
`UX, UY, UZ` to symbole translacyjnych stopni swobody. Zauważmy, że 5. i 6. pola są puste. To znaczy „value2" i „Expansion key" są dla tego typu więzu nieużywane. Zauważmy też, że wszystkie trzy translacyjne stopnie swobody są wyzerowane. Więzy na stopnie swobody w keypointach mogą być nakładane tylko w jednej komendzie, jeśli ich wartość (tutaj zero) jest ta sama. Aby przyłożyć więzy w keypointcie 5, piszemy: `DK, 5, UY, 0, , , UZ` Ograniczyliśmy tylko UY i UZ do zera. UX nie jest ograniczane (podpora przesuwna). Znów zwróćmy uwagę na puste, bo nie używane, pola 5. i 6.
Przyłóżmy w ten sam sposób więzy do drugiego z punktów podparcia tylnego koła (Keypoint 6. – UY i UZ), a potem wylistujmy nałożone więzy (**DKLIST**) i starannie je sprawdźmy:


DKLIST Command

File

LIST SELECTED DOF CONSTRAINTS ON ALL SELECTED KEYPOINTS
CURRENTLY SELECTED DOF SET= UX UY UZ ROTX ROTY ROTZ

KEYPOINT	LOAD LABEL	VALUE(S)		EXP KEY
1	UX	0.0000	0.0000	0
1	UY	0.0000	0.0000	0
1	UZ	0.0000	0.0000	0
5	UY	0.0000	0.0000	0
5	UZ	0.0000	0.0000	0
6	UY	0.0000	0.0000	0
6	UZ	0.0000	0.0000	0

Jeśli chcemy usunąć któryś z więzów, używamy komendy: `DKDELE, K, Lab` (np. `DKDELE, 1, UZ` usunie więz translacyjny w kierunku '*z*' dla keypointa 1)

3. Przykładamy obciążenia

Przyłożymy pionowe siły działające w dół. Pierwsza 600 N na siodełku (keypoint 3), druga 200 N w miejscu korby pedałów (keypoint 4). Użyjemy komendy FK (*Force at Keypoint*) `FK, KP, LAB, value, value2`
KP to numer punktu, LAB to symbol siły (FX, FY, FZ). W celu przyłożenia siły 600 N na dół w punkcie 3 napiszemy: `FK, 3, FY, -600` Przyłóżmy podobnie drugą z sił i wylistujmy je, aby sprawdzić, czy wprowadziliśmy je poprawnie (`FKLIST`). Jeśli trzeba by usunąć siłę, to polecenie wyglądałoby:

FKDELE, K, Lab (np. FKDELE, 3, FY usunie siłę o kierunku „*y*" w punkcie 3).
Przyłożone siły i więzy powinny być widoczne na rysunku modelu.

4. Rozwiązanie układu równań jak zawsze **Solution-->Solve--> Current LS** (tekstowo SOLVE)

III. Postprocessing: Przegląd wyników

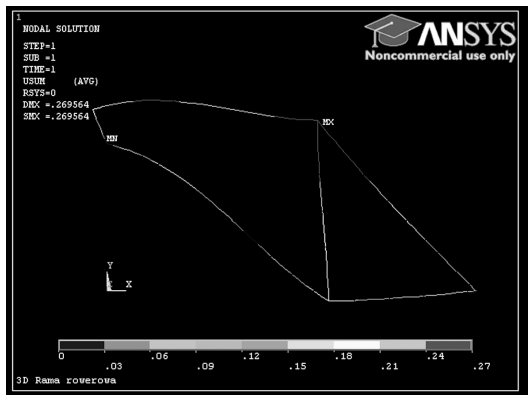
W celu rozpoczęcia postprocessingu otwieramy menu ***General Postproc*** (/POST1)

1. Oglądamy zdeformowany kształt **Plot Results-->Deformed Shape... Def + undef edge** (tekstowo: PLDISP, 2)

Możemy spróbować rysowania pod różnym kątem widzenia, aby lepiej zrozumieć, co się stało z układem. Użyjemy do tego pilota grafiki (lub menu **Pan-Zoom-Rotate**) omówionego wcześniej.

2. Ugięcia

Teraz przyglądnijmy się niektórym ugięciom ramy. Ugięcia są policzone w węzłach modelu (a nie w keypointach!), najpierw więc wyrysujemy węzły wraz z ich numeracją. Przechodzimy do **Utility menu-->PlotCtrls--> Numbering...** i włączamy „Node numbers" (/PNUM, NODE, 1). Numerację wszystkich innych wielkości wyłączamy. Zapamiętajmy numery, gdzie przyłożyliśmy więzy, aby sprawdzić, czy ich przemieszczenia wynoszą faktycznie zero. Zapamiętajmy również numery węzłów siodełka i korby. Po wylistowaniu przemieszczeń węzłowych **General Postproc-->List Results -->Nodal Solution...** „DOF Solution" i „Displacement vector sum" (PRNSOL, U, COMP) upewnijmy się, że zgadzają się one w zapamiętanych węzłach. Możemy zrobić rysunek warstwicowy **General Postproc-->Plot Results -->Contour Plot-->Nodal Solution**, wybierając w oknie „DOF solution" i „Displacement vector sum" (PLNSOL, U, SUM, 0, 1.0) i pamiętając o możliwości ustawienia bardziej użytecznych przedziałów skalowania.

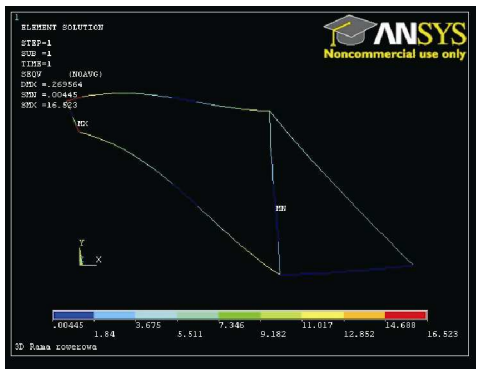


3. Siły w elementach

W bardzo podobny sposób możemy przeglądnąć siły w elementach: wybieramy **Element Solution...** z menu ***List Results***, potem „All Available force items" z wyświetlonej listy wyboru, klikamy OK (tekstowo: PRESOL, FORC). Zostanie wyświetlona informacja o siłach/momentach w każdych dwóch węzłach każdego elementu. Po przejrzeniu wyników zamykamy to okno i zamykamy również menu ***List Results***

4. Naprężenia

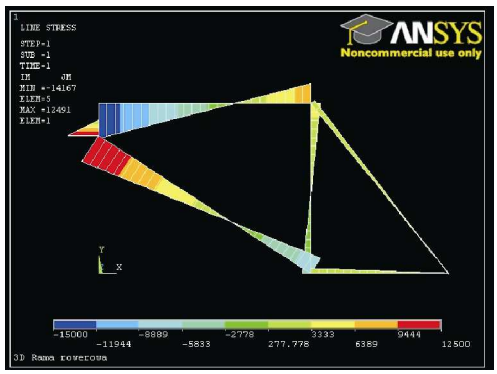
Jak pokazaliśmy na przykładzie z belką, należy użyć Element Table, aby uzyskać dostęp do naprężeń. **General Postproc-->Element Table--> Define Table...**
wybieramy Add, potem „Stress" i „von Mises" (tekstowo: ETABLE, , S, EQV), a po utworzeniu tabeli robimy wykres **General Postproc--> Element Table-->Plot Elem Table** (tekstowo: PLETAB, SEQV)



I znowu zmieniamy skalę, aby przedziały mapowania były wygodniejsze.

5. Wykresy momentów zginających

Proponuję samodzielnie uzyskać wykresy momentów zginających, tak jak pokazaliśmy na przykładzie belki. Wynik powinien być następujący:

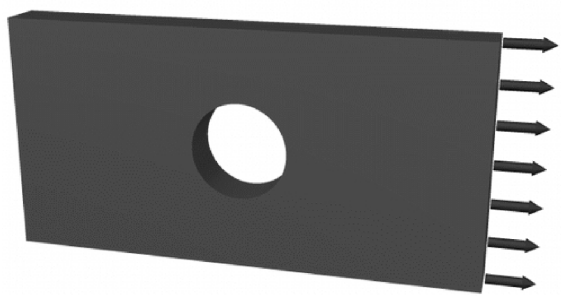


(tekstowo: `ETABLE, IMOM, SMISC, 6`
`ETABLE, JMOM, SMISC, 12`
`PLLS, IMOM, JMOM`)

Płytka z otworem

Kolejny przykład ma na celu modelowanie prostego układu niepręto-wego, wprowadzenie operacji typu *Boolean* na tworzonych obiektach *solid modeling* oraz prezentację jednej z metod testowania zbieżności otrzy-mywanego rozwiązania.

Rozpatrzmy prostokątną stalową płytkę z otworem (rysunek 27). Jej sze-rokość to 200 mm, wysokość 100 mm, grubość 20 mm, otwór wykonany w środku ma średnicę 40 mm. Na lewym końcu płytka jest utwierdzona, na prawym obciążona obciążeniem ciągłym o intensywności 20 N/mm. Wyni-kiem analizy ma być rozkład przemieszczeń i naprężeń w płytce.



Rys. 27. Płaska płytka z otworem

I. Preprocesing – definiowanie zadania

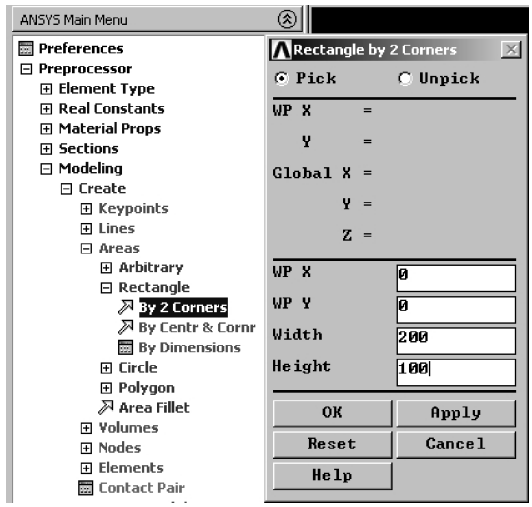
1. Nadajemy tytuł **Utility Menu-->File-->Change Title**

2. Tworzymy geometrię

Geometria modelowanej płytki może zostać utworzona poprzez mno-gościowe odjęcie koła od prostokąta. Najpierw więc tworzymy te dwie podstawowe figury.

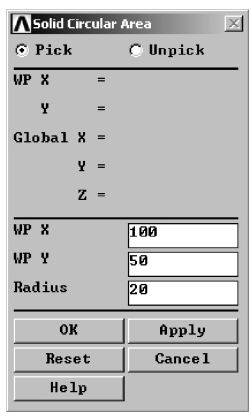
a) główny kształt prostokąta

Zamiast budować prostokąt za pomocą keypointów, stworzymy po-wierzchnię (*area*)
Preprocessor-->Modeling-->Create-->Areas-->Rectangle-->By 2 Corners i wypełnimy okienko ***Rectangle by 2 Corners***, jak poniżej, wpisując współ-rzędne lewego dolnego narożnika (0, 0), szerokość 200, wysokość 100 i klikając OK. (tekstowo: `BLC4, 0, 0, 200, 100`)



b) koło w środku prostokąta

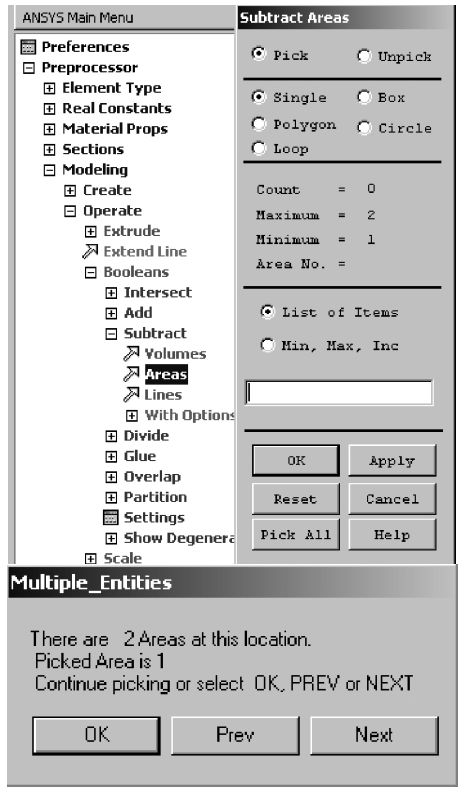
Preprocessor-->Modeling-->Create-->Areas-->Circle-->Solid Circle



Wypełniamy okno ***Solid Circular Area*** według wzoru i w ten sposób tworzymy koło o środku w punkcie o współrzędnych (100,50) (środek prostokąta) i promieniu 20 (tekstowo: `CYL4, 100, 50, 20`).

c) odejmujemy powierzchnie

W celu przeprowadzenia operacji *Boolean* (mnogościowej) wybieramy z menu **Preprocessor-->Modeling-->Operate-->Booleans-->Subtract--> Areas**
Pojawi się okno ***Subtract Areas***, po czym mamy wskazać najpierw tzw. *base area*, czyli powierzchnię (prostokąt), od której odejmujemy, a potem powierzchnie, które są odejmowane (u nas tylko jedna – koło). Klikamy więc w oknie grafiki na prostokącie, który powinien zrobić się różowy. Może jednak pojawić się informacja w postaci kolejnego okna o dwóch powierzchniach w miejscu wskazania:



Upewniamy się, że wybrana jest cała powierzchnia prostokąta, a jak nie, to klikamy Next, a potem OK w ***Multple_Entities*** i znowu OK w oknie ***Subtract Areas***.

Teraz mamy wybrać powierzchnie, które będą odejmowane. Wybieramy koło klikając na nie, i znów musimy się upewnić, że wybrana jest odpowiednia powierzchnia. Jak nie jest, to w okienku ***Multiple_Entities*** klikamy NEXT, aż koło zrobi się różowe, a potem klikamy OK i otrzymujemy żądany płaski kształt. Zamykamy menu ***Subtract*** i ***Operate***. Tekstowa wersja komendy do tej operacji to ASBA, 1, 2

Zauważmy, że oprócz odejmowania możliwe są inne operacje na obiektach, takie jak na przykład dodawanie (add) czy wyznaczenie wspólnej części (*intersect*). Ponadto widać, że operacje takie można przeprowadzać nie tylko na powierzchniach (*areas*), ale też innych obiektach modelowania pośredniego (*solid modeling*), jak objętości (*volumes*) i linie (*lines*).

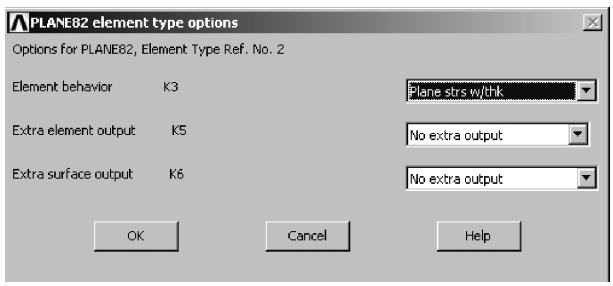
Zwróćmy też uwagę, że tworzyliśmy dwie powierzchnie, a powstały też linie i punkty bazowe z nimi związane jako obiekty niższe w hierarchii. Wszystkie one zostały automatycznie ponumerowane przez program w kolejności powstawania, stąd na przykład komenda ASBA, 1, 2 (*area subtract area*) oznacza odejmowanie od powierzchni numer 1 (prostokąt) powierzchni numer 2 (koło).

3. Określamy typ elementu do dyskretyzacji

Teraz trzeba wybrać typ elementu właściwy dla naszego zadania: **Preprocessor-->Element Type-->Add/Edit/Delete** Dodajemy (Add), wybierając „Solid" (pod nagłówkiem Structural) i element „Quad 8node 82" w znanym już oknie *Library of* ***Element Types***.

PLANE82 jest wersją wyższego rzędu dwuwymiarowego, czterowęzłowego elementu PLANE42. Jest ośmiowęzłowym elementem czworokątnym, lepiej nadającym się do modelowania zakrzywionych brzegów z uwagi na wyższy stopień funkcji kształtu. Element może mieć wersję płaskiego stanu odkształcenia, płaskiego stanu naprężenia oraz płaskiego stanu naprężenia z grubością. Stopnie swobody tego elementu to dwa przemieszczenia w płaszczyźnie UX i UY. Nadaje się on więc do modelowania zadania tarczowego, ale nie będzie już przydatny przy zginaniu płyty.

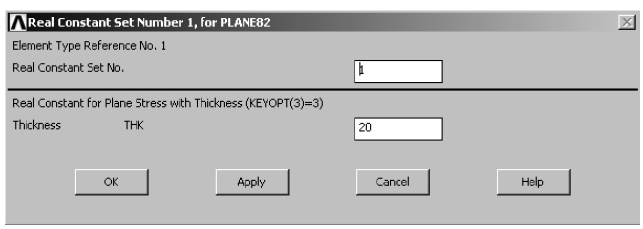
W naszym przykładzie potrzebujemy elementu z płaskim stanem naprężenia, w którym możemy zadać grubość. Klikamy więc na przycisk Options..., rozwijamy listę wyboru obok pola K3 i wybieramy z niej „Plane strs w/thk", tak jak poniżej.



Potem OK, Close i zamykamy menu ***Element Type***
(komendy tekstowe dla zrobienia tego kroku: `ET,1,PLANE82`, a potem `KEYOPT,1,3,3`).

4. Określamy własności geometryczne (sztywnościowe)

Tak jak poprzednio: **Preprocessor-->Real Constants--> Add/Edit/Delete** i w znanym oknie ***Real Constant Set***, w którym działający kontekstowo program pyta tylko o jedną stałą oznaczającą grubość – wprowadzamy wartość 20 w polu Thickness (alternatywnie z linii komend: `R, 1, 20`).

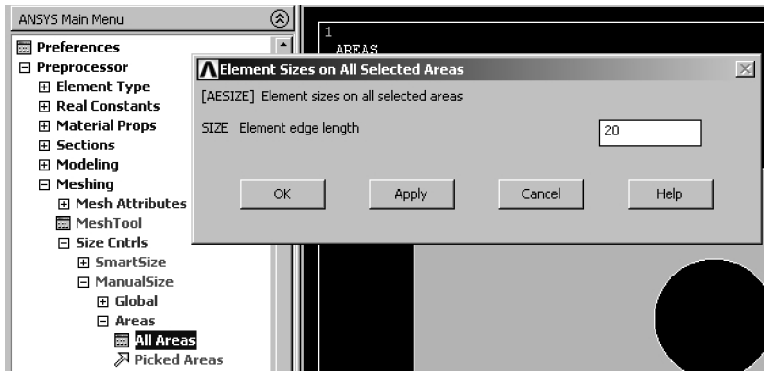


5. Własności materiałowe

Znaną już ścieżką wybieramy **Preprocessor-->Material Props--> Material Models**, a następnie **Structural-->Linear-->Elastic--> Isotropic** w oknie ***Define Material Model Behavior***. Zapytani o stałe materiałowe, wprowadzimy własności dla stali: EX 200000 oraz PRXY 0.3 (alternatywnie z linii komend: `MP, EX, 1, 200000`, a potem `MP, PRXY, 1, 0.3`)

6. Rozmiar siatki elementów

Aby wprowadzić do ANSYSa dane dotyczące wielkości elementów, rozwijamy **Preprocessor-->Meshing-->Size Cntrls-->Manual Size--> Areas-->All Areas**



Wybierzmy długość brzegu elementu jako 25. Potem wrócimy do tego punktu, aby stwierdzić, czy jest to podział właściwy dla naszego zadania.

Dla elementów powierzchniowych i objętościowych program nie daje opcji podania liczby elementów, na jakie chcemy dzielić obszar, gdyż nie byłaby to informacja jednoznaczna – tę samą liczbę można uzyskać dla wielu sposobów podziału. Podaną długość traktuje się jako „nie więcej niż", a przy dyskretyzacji niektóre elementy mogą mieć boki krótsze w zależności od kształtu i wymiarów obiektu.

(alternatywnie z linii komend piszemy: `AESIZE, ALL, 25`)

7. Meshowanie (dyskretyzacja)

Teraz możemy zmeshować płytkę. W menu ***Preprocessor*** wybieramy **Mesh-->Areas-->Free** i zapytani wskazujemy naszą powierzchnię (klikając na niej, a potem OK). Alternatywnie z linii komend każemy: `AMESH, ALL`
W oknie grafiki widzimy podział płytki na elementy skończone. Zauważmy, że kształt otworu odbiega od okręgu, a liczba elementów jest niewielka. Przewidujemy, że rozwiązanie może być mało dokładne i trzeba będzie dokonać korekty siatki. Na razie zachowujemy pracę (gotowy model) **Utility Menu-->File-->Save as...**

II. Faza Solution: Przykładanie obciążeń i więzów oraz rozwiązanie

Mając zdefiniowany model, należy zadać obciążenia i więzy blokujące ruch sztywny, a potem rozwiązać wynikowy układ równań.

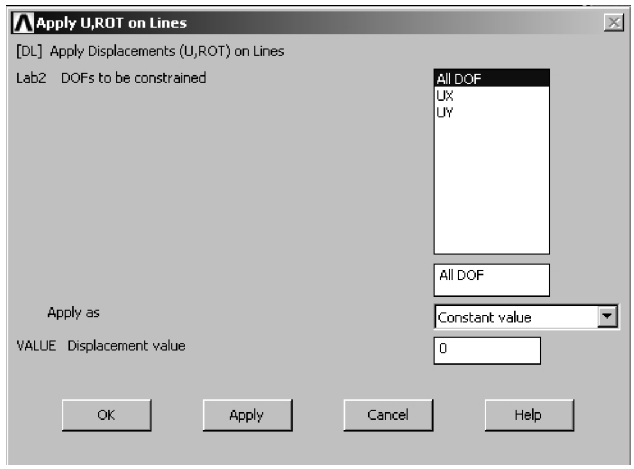
1. Określamy typ analizy

Upewniamy się, że będzie to analiza statyczna **Solution-->Analysis Type-->New Analysis**, a potem wybieramy „Static" i OK (tekstowo: `ANTYPE, 0`).

2. Przykładamy więzy

Założyliśmy, że lewy koniec płytki jest utwierdzony. Po wskazaniu **Solution-->Define Loads-->Apply-->Structural-->Displacement-->On Lines** wybieramy lewy koniec płytki i klikamy Apply w oknie ***Apply U,ROT on Lines***.

Wypełniamy okno dialogowe następująco:



Utwierdzenie oznacza, że wszystkie stopnie swobody są zablokowane. Dlatego wybieramy (klikając) „All DOF" i wpisujemy „0" w polu wartość (*Value*). W oknie graficznym zobaczymy niebieskie trójkąty, wskazujące na ograniczenia przemieszczeniowe (tekstowo: `DL, 4, , ALL, 0`).

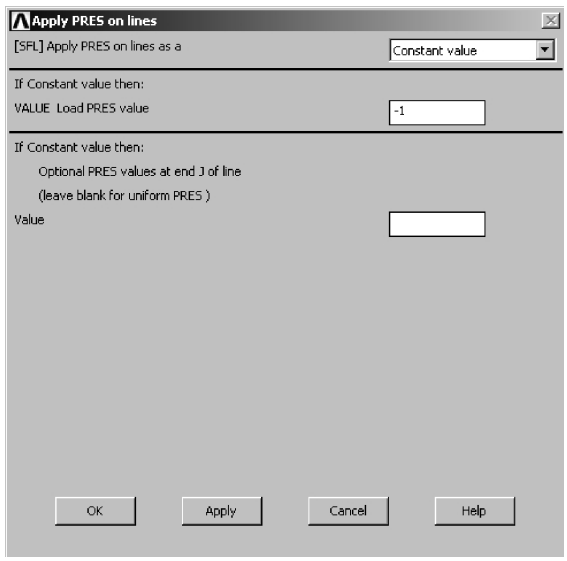
Korzystamy tutaj z faktu, że program automatycznie wygenerował i ponumerował linie, na których możemy stawiać warunki brzegowe. Stąd wiemy, że *displacements on line* (`DL`) należy zadać na linii numer 4, nadając wszystkim stopniom swobody (`ALL`) wartość zero. Dyskretyzacja tych warunków, to znaczy blokada odpowiednich stopni swobody we wszystkich węzłach leżących na linii, dokonana zostanie automatycznie.

3. Przykładamy obciążenie

Na prawym brzegu płyty przyłożone jest obciążenie ciągłe o wartości 20 N/mm. Aby zadać takie obciążenie, w programie wybieramy **Solution**

-->Define Loads-->Apply-->Structural-->Pressure-->On Lines. Kiedy pojawi się okno dialogowe, wybieramy linię wzdłuż prawego brzegu płyty i klikamy OK.

Ponieważ przykładamy ciśnienie (*pressure*), a chodzi nam o obciążenie rozłożone wzdłuż linii, musimy dokonać przeliczenia. Obliczamy ciśnienie działające na płytę, dzieląc intesywność obciążenia liniowego (20 N/mm) przez grubość (20 mm), co daje 1 MPa. Albo odwrotnie, chcąc uzyskać intensywność liniową 20 N/mm przy grubości 20 mm, musimy przyłożyć do bocznej ścianki ciśnienie 1 MPa. Wypełniamy okno ***Apply PRES on lines*** tak jak poniżej. Ciśnienie jest jednorodne na powierzchni bocznej (brzegu) tarczy, ostatnie więc pole zostawiamy puste. Zauważmy jednak, że mogłoby ono mieć liniową zmienność. Ciśnienie działa na zewnątrz płytki i dlatego jest definiowane jako **ujemne**. Zwykle ciśnienie działa ściskająco i domyślnie ma wartość dodatnią.



W oknie grafiki zauważymy odpowiednie symbole więzów i obciążenia.

4. Rozwiązujemy układ równań **Solution-->Solve-->Current LS** i potem OK.

III. Postprocessing: Przegląd wyników

1. Obliczenia ręczne

W celu weryfikacji, dla której między innymi robimy to ćwiczenie, potrzebne jest rozwiązanie analityczne, abyśmy mogli się zorientować, jakich wyników należy oczekiwać. Największe przemieszczenie występuje na prawym końcu płytki i wynosi 0,001 mm – z pominięciem wpływu otworu w płycie (czyli po prostu dla prostokątnej, pełnej tarczy). W związku z tym oczekujemy, że faktyczne przemieszczenie powinno być nieco większe, ale tego

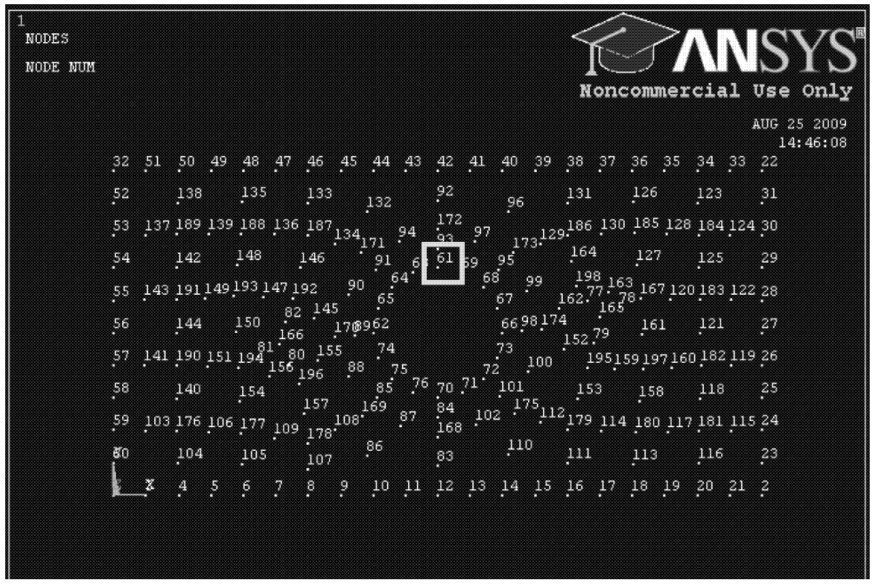
samego rzędu. Największe naprężenie występuje na szczycie i dnie otworu i wynosi 3,9 MPa.

2. Zbieżność rozwiązania

W tym przykładzie znamy w przybliżeniu rozwiązania analityczne i chcemy się przekonać, czy wyniki otrzymane są zbieżne z poprawną wartością. W większości przypadków jednak rozwiązań analitycznych nie znamy, a zbieżność testujemy za pomocą omówionych wcześniej metod. Tutaj zastosujemy metodę *typu h*, czyli sprawdzimy otrzymane przemieszczenia i naprężenia w wybranych punktach przy zmniejszanych rozmiarach siatki elementów.

Najpierw musimy wiedzieć, który węzeł odpowiada szczytowemu punktowi otworu w płycie, gdyż wyliczona analitycznie wartość naprężenia dotyczy tego miejsca. A więc rysujemy i numerujemy węzły **Utility Menu-->Plot -->Nodes** i jeszcze **Utility Menu-->PlotCtrls-->Numbering...** z zaznaczeniem „On" przy polu „Nodes".

Rysunek powinien wyglądać podobnie do tego



Zanotujmy numer węzła najbliższego górnemu punktowi koła (czyli #61).

Wylistujmy naprężenia **General Postproc-->List Results-->Nodal Solution**, a następnie **Stress-->von Mises stress** i sprawdźmy wartość SEQV (*Equivalent Stress*/*von Mises Stress*) w interesującym nas punkcie. Osiąga ono wartość 3,6215 MPa, a więc dość istotnie odbiega od wartości wyliczonej 3,9 MPa.

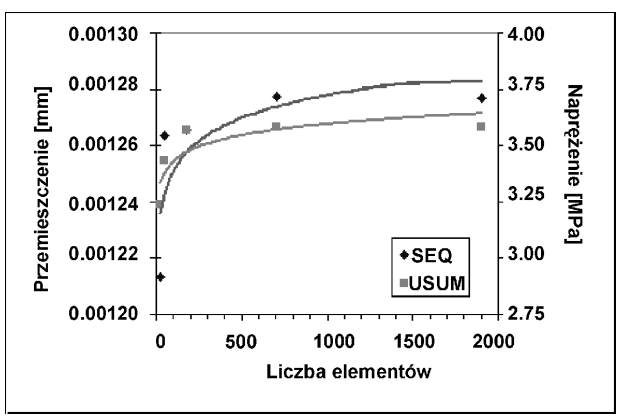
Teraz zastosujemy mniejsze elementy, aby uzyskać dokładniejsze rozwiązanie.

Aby zmienić rozmiar elementów, musimy wrócić do menu *preprocessora* **Preprocessor-->Meshing-->Size Cntrls-->ManualSize-->Areas-->All Areas** i zmniejszamy długość brzegu elementu na 20.
Teraz remeshujemy nasz model: **Preprocessor-->Meshing-->Mesh--> Areas-->Free**, a kiedy wybierzemy powierzchnię i klikniemy OK, ukaże się kolejne okno ***Remesh Entities*** przypominające, że wskazana powierzchnia jest już po dyskretyzacji. Potwierdzamy chęć zmiany, klikając OK, co spowoduje ponowne meshowanie modelu przy użyciu nowej długości brzegu elementu.

Ponownie rozwiązujemy układ **Solution-->Solve-->Current LS**

Zwróćmy uwagę, że nie trzeba ponownie definiować ani więzów, ani obciążeń. A to dzięki temu, że przyłożyliśmy je do linii (ogólnie obiektów *solid modeling*), a nie bezpośrednio do węzłów. To jedna z zalet modelowania pośredniego, którego twory nie zmieniają się podczas zmiany gęstości siatki, w odróżnieniu od elementów i ich węzłów.

Powtarzamy powyższe kroki aż do osiągnięcia zbieżności. Pamiętamy, że numer węzła na szczycie otworu zmienia się, dlatego więc należy go każdorazowo ustalać.
Gdyby narysować zależności naprężenia w szczycie otworu oraz maksymalnego przemieszczenia od liczby elementów, to otrzymalibyśmy wykres tego typu



Zaobserwujmy kształty obu krzywych, sugerujące asymptoty, czyli zbieżność do ustalonego poziomu. Wraz ze wzrostem liczby elementów, czyli zmniejszaniem długości boku pojedynczego elementu, obserwowane wartości zbiegają się do końcowego rozwiązania, a ewentualne dalsze zagęszczanie nie wprowadza już zauważalnych zmian wyników. I chociaż nie jest to dowód na poprawność uzyskanych rezultatów, to najczęściej takie właśnie podejście jest stosowane i zadowalające z inżynierskiego punktu widzenia wobec braku rozwiązania analitycznego.

Naprężenie zastępcze Hubera–Misesa wynosi ostatecznie około 3,8 MPa, co stanowi zaledwie 2,5% różnicy między rozwiązaniem analitycznym i tym, co uzyskaliśmy z ANSYSa. Największe przemieszczenie wynosi około 0,00124 mm, czyli jest o 20% większe od „analitycznego". Jednakże rozwiązanie analityczne nie uwzględniało dużego otworu w środku tarczy, a to z pewnością powoduje istotny wzrost przemieszczenia brzegu. Tak więc możemy uznać, że rozwiązania z ANSYSa są właściwe dla tego weryfikacyjnego modelu. Przy okazji zauważmy, że wystarczająco dobrym rozmiarem elementu okazało się dopiero 5 mm.

3. Deformacja

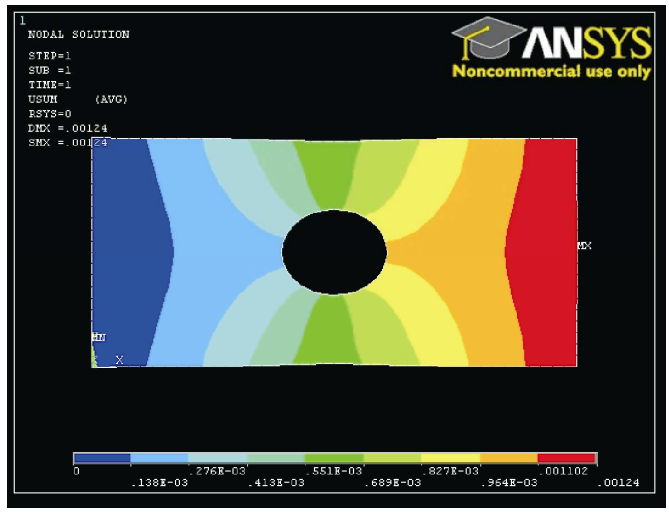
General Postproc-->Plot Results-->Deformed Shape, a potem wybieramy „Def + undeformed", aby zobaczyć kształt przed i po deformacji.

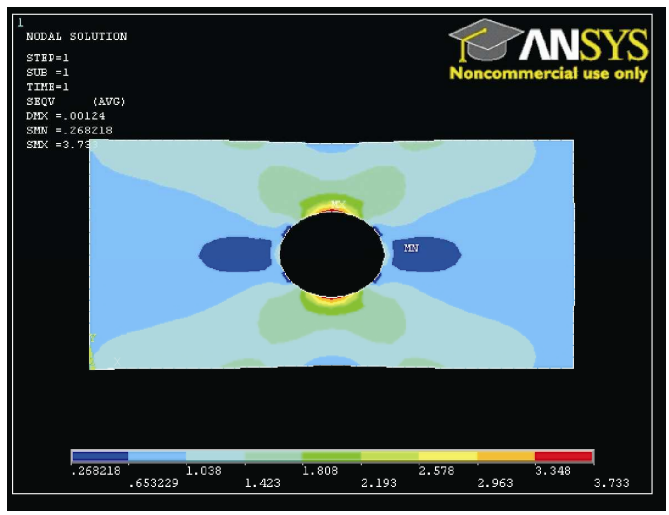
4. Przemieszczenia

General Postproc-->Plot Results-->Contour Plot-->Nodal Solution..., a następnie wybieramy **DOF solution-->Displacement vector sum**
Zaobserwujmy, że gdyby nie otwór, to poziomice przemieszczeń byłyby równoległymi pasami, tak jak dla rozciąganego pręta, a tę jednorodność widać przy brzegach, z daleka od otworu. Z rysunku odczytamy również miejsce (symbol MX) i wartość największego przemieszczenia.

5. Na koniec obserwujemy rozkład naprężeń zastępczych.

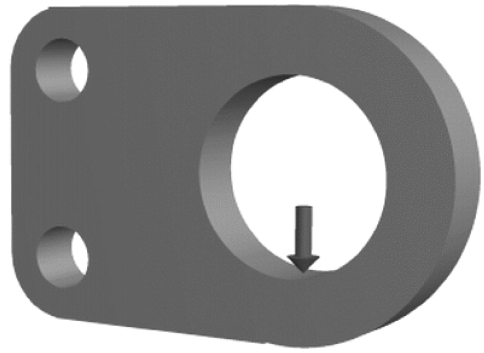
Możemy je zarówno wyrysować **General Postproc-->Plot Results--> Contour Plot-->Nodal Solution** i w okienku wybieramy wówczas **Stress -->von Mises stress**, jak i wylistować w celu sprawdzenia ich wartości w poszczególnych węzłach **General Postproc-->List Results-->Nodal Solution**, wybierając **Stress-->von Mises stress**
Zauważamy miejsca maksymalnych wartości na szczycie i dnie otworu (czerwone warstwice), jak też obszary, gdzie materiał jest bardzo słabo wytężony (warstwice granatowe).





Uchwyt w płaskim stanie naprężenia

Doświadczenie nabyte przy prostym przykładzie płytki wykorzystamy w analizie płaskiego uchwytu (rysunek 28). Jak we wszystkich zadaniach, poszukujemy rozkładu przemieszczeń oraz naprężeń w uchwycie. Dodatkowo uzyskamy rozkłady miar błędu rozwiązania (energetycznej i naprężeniowej) w celu oceny jakości siatki elementów i dyskretnych wyników. Ponownie będziemy przemiennie stosować albo znane rozwijalne menu z GUI, albo komendy wydawane w trybie tekstowym.



Rys. 28. Uchwyt w płaskim stanie naprężenia

Użyty materiał to stal, grubość 20 mm, małe otwory po lewej służą do zamocowania uchwytu w korpusie, siła 1000 N jest przyłożona w dolnym punkcie dużego otworu. Wymiary podamy w miarę tworzenia modelu.

I. Preprocessing: Definicja zadania

1. Nadajemy tytuł **Utility Menu-->File-->Change Title**

2. Tworzymy geometrię

a) główny kształt prostokąta

Główny prostokąt ma szerokość 80 mm, wysokość 100 mm, a jego lewy dolny narożnik umieszczamy w punkcie o współrzędnych (0, 0). Sprawdzamy, że mamy otwarte menu ***Preprocessor*** (albo wydajemy polecenie z linii komend **/**PREP7).

Teraz, zamiast używać GUI, wpiszemy do linii komend polecenie tworzące prostokąt według ogólnego przepisu:

```
BLC4, XCORNER, YCORNER, WIDTH, HEIGHT
BLC4, wsp. X (lewy dolny), wsp. Y (lewy dolny), szerokość, wysokość
```

Tak więc nasze polecenie to `BLC4, 0, 0, 80, 100` Enter, po którym powstanie powierzchnia numer 1 – prostokąt.

b) kołowy kształt prawego brzegu

Środek koła leży w punkcie (80,50), a jego promień wynosi 50 mm.

Do tworzenia koła używa się następującej komendy:

```
CYL4, XCENTER, YCENTER, RAD
CYL4, wsp. X środka, wsp. Y środka, promień
```

Tak więc piszemy `CYL4, 80, 50, 50`, tworząc powierzchnię numer 2 – koło.

c) zaokrąglenia po lewej stronie

Za pomocą tej samej komendy tworzymy dwa koła na dole i na górze po lewej stronie. Ich parametry to `0, 20, 20` oraz `0, 80, 20`. Powstaną powierzchnie numer 3 i numer 4.

d) Aby wypełnić przerwy między ostatnimi kołami, tworzymy prostokąt o parametrach `-20, 20, 20, 60`, czyli powierzchnię numer 5.

Na ekranie widać wszystkie powierzchnie częściowo na siebie zachodzące.

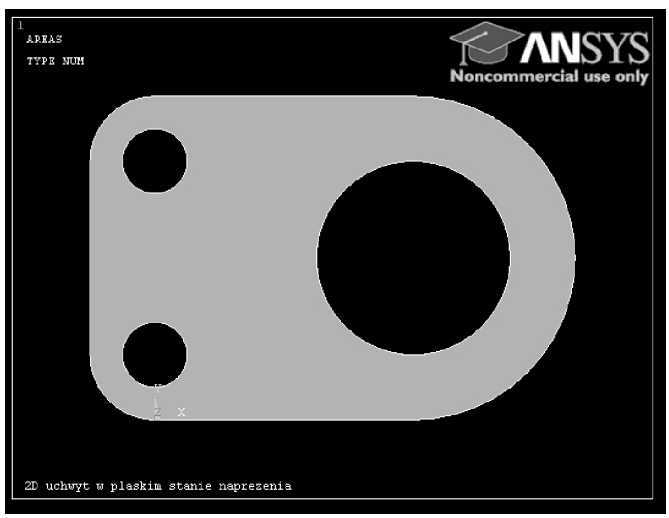
e) Dodajemy te powierzchnie, żeby z pięciu otrzymać jedną o złożonym kształcie. Otrzyma ona numer 6.

Preprocessor-->Modeling-->Operate-->Booleans-->Add--> Areas

i w oknie ***Add Areas*** klikamy Pick All (alternatywnie z linii komend: `AADD, ALL`).

f) Jeszcze trzeba zamodelować otwory na sworznie oraz duży otwór na uchwyt. W tym celu tworzymy trzy koła, które potem zostaną odjęte od powierzchni szóstej. Parametry tych kół to kolejno: `80, 50, 50` (duże), `0, 20, 10` oraz `0, 80, 10`. Można je stworzyć przez menu GUI albo komendą `CYL4`. Otrzymają one kolejno numery 1, 2 i 3, czyli „pierwsze wolne", gdyż te numery zostały zwolnione po operacji dodawania. Wreszcie wykonujemy znaną już operację odejmowania powierzchni: **Preprocessor-->Modeling-->Operate-->Booleans-->Subtract--> Areas**, po czym wskazujemy powierzchnię bazową, od której odejmujemy, i klikamy OK, a za drugim razem wskazujemy trzy ostatnio utworzone koła, klikając na nie, i znów OK, żeby w końcu otrzymać żądany kształt. Odejmowaliśmy powierzchnie 1, 2 i 3 od powierzchni numer 6. Wynikowa, mocno nieelementarna powierzchnia dostanie numer 4 („pierwszy wolny") i w tym wypadku będzie jedynym obiektem *area* w naszym modelu. Warto sobie wyrysować układy keypointów oraz linii, które powstały wraz z nią automatycznie i obejrzeć ich numerację.

Pozostałe kroki preprocessingu zrobimy już bez szerszego omawiania, gdyż znamy zarówno funkcje GUI, jak i odpowiednie komendy tekstowe.



3. Wybieramy typ elementu

Użyjemy tego samego elementu co w przykładzie weryfikacyjnym, czyli PLANE82.

Preprocessor-->Element Type-->Add/Edit/Delete, używamy przycisku Options..., aby dostać element z płaskim stanem naprężenia przy zadawanej grubości oraz pod pozycją „Extra Element Output" K5 wybieramy Nodal stress (każemy zapamiętać jako 'output' naprężenia w węzłach). Alternatywnie w linii komend: `ET, 1, PLANE82`, a potem `KEYOPT, 1, 3, 3` oraz `KEYOPT, 1, 5, 2`.

4. Określamy stałe geometryczne (sztywnościowe)

Preprocessor-->Real Constants-->Add/Edit/Delete
i wprowadzamy grubość (*thickness*) 20 mm (tekstowo `R, 1, 20`).

5. Własności materiałowe

Preprocessor-->Material Props-->Material Models, a potem **Structural -->Linear-->Elastic-->Isotropic** i zadajemy własności jak dla stali: EX 200000 i PRXY 0.3 (tekstowo: `MP,EX,1,200000` oraz `MP,PRXY,1,0.3`)

6. Rozmiary siatki

Preprocessor-->Meshing-->Size Cntrls-->ManualSize-->Areas-->All Areas. Na podstawie analizy zbieżności dla obiektu o podobnych rozmiarach w poprzednim przykładzie wybierzmy długość brzegu elementu (*element edge length*) jako 5. Znowu będzie trzeba sprawdzić, czy rozwiązanie dobrze się zbiega (tekstowo: `AESIZE, ALL, 5`).

7. Meshowanie (dyskretyzacja)

Preprocessor-->Meshing-->Mesh-->Areas-->Free i wskazujemy powierzchnię (albo Pick All, bo jest tylko jedna) (tekstowo: `AMESH,ALL`).

8. Zachowujemy pracę **Utility Menu-->File-->Save as...**

II. Faza Solution: Przyłożenie obciążeń i więzów oraz rozwiązanie

1. Określamy typ analizy

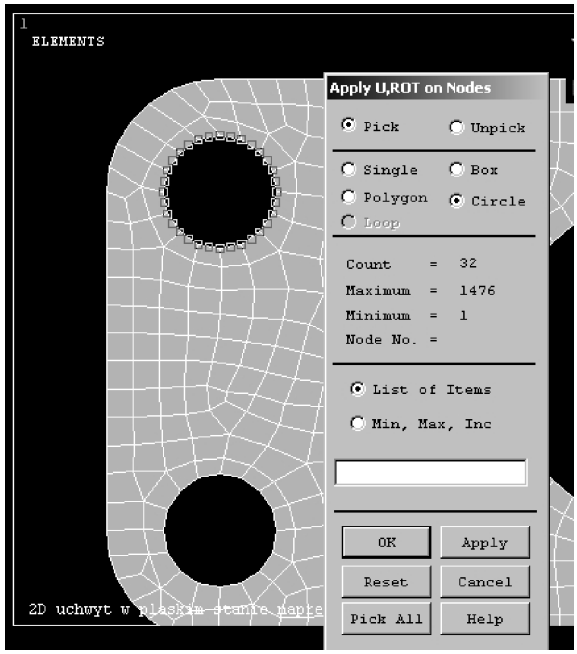
Solution-->New Analysis i wybieramy **Static** (`ANTYPE,0`).

2. Nakładamy więzy

Tarcza jest zamocowana w korpusie na obu mniejszych otworach po lewej stronie. Utwierdzimy wszystkie węzły na ich obwodach, tym razem przykładając więzy do węzłów, a nie linii czy punktów bazowych.

Solution-->Define Loads-->Apply-->Structural-->Displacement-->On Nodes
Zamiast wybierać pojedyncze (*Single*) węzły, mamy do dyspozycji opcję polegającą na stworzeniu obszaru prostokąta (*Box*), wielokąta (*Polygon*) lub okręgu (*Circle*) i wybraniu wszystkich węzłów wewnątrz. W naszym przypadku wybieramy „Circle", tak jak pokazano poniżej. Możemy po-

trzebować zrobić powiększenie (*Zoom Model* wśród przycisków sterujących grafiką) w celu łatwiejszego wybrania punktów. Klikamy na środek otworu na sworzeń i ciągnąc myszką rozciągamy okrąg, aż obejmie wszystkie węzły na brzegu otworu i równocześnie nie obejmie innych.
Klikamy Apply w oknie ***Apply U,ROT on Nodes*** i blokujemy wszystkie stopnie swobody w kolejnym oknie ***Apply U,ROT on Nodes***. Powtarzamy to samo dla drugiego otworu.



3. Przykładamy obciążenia

Pamiętamy, że do obiektu w dolnym punkcie większego otworu przyłożona jest jedna pionowa siła o wartości 1000 N. Przyłożymy ją w odpowiednim węźle **Solution-->Define Loads-->Apply-->Structural-->Force/ /Moment-->On Nodes**, wybierając siłę o kierunku *y* i wartości 1000.
Na rysunku węzłów (**Utility Menu-->Plot-->Nodes**) widzimy symbole nałożonych więzów oraz strzałkę siły.

4. Rozwiązanie układu równań **Solution-->Solve-->Current LS**

III. Postprocessing

1. Badanie zbieżności za pomocą ANSYSa

Nie znamy tym razem rozwiązania analitycznego. Spróbujemy zbadać poprawność rozwiązania, szacując jego zmiany wraz ze zmianą (zmniejszeniem) rozmiaru elementu. Przypomnienie: **Preprocessor-->Meshing--> Size Cntrls-->ManualSize-->Areas-->All Areas** i zmniejszamy długość

brzegu elementu na przykład na 3, a potem wykonujemy remeshowanie modelu **Preprocessor-->Meshing-->Mesh-->Areas-->Free**.

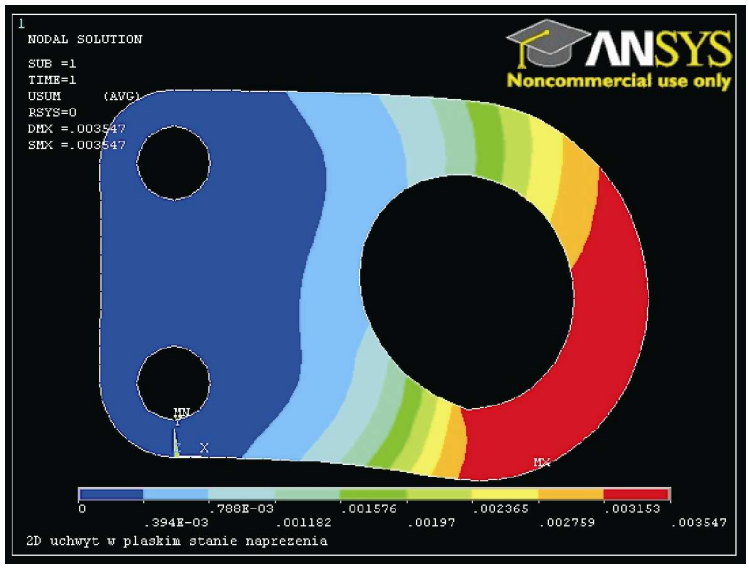
UWAGA: Jeżeli (jak tym razem) więzy przykładamy na węzły, których położenie, liczba i numeracja uległy zmianie po modyfikacji siatki (remeshing) w przeciwieństwie do obiektów *solid modelling:* kepoint, line, area, volume, to musimy powtórzyć zadawanie więzów i obciążeń!

2. Deformacja

General Postproc-->Plot Results-->Deformed Shape
i np. „Def + undeformed", aby zobaczyć zarówno zdeformowany, jak i wyjściowy kształt.

3. Przemieszczenia

General Postproc-->Plot Results-->Contour Plot-->Nodal Solution..., a następnie wybieramy **DOF solution-->Displacement vector sum**



albo **General Postproc-->List Results-->Nodal Solution...**
i sprawdźmy zwłaszcza wartości maksymalne i zerowe w miejscach zadanych warunków brzegowych.

4. Naprężenia

General Postproc-->Plot Results-->Contour Plot-->Nodal Solution. Następnie wybieramy **Stress-->von Mises Stress** albo też **General Postproc-->List Results-->Nodal Solution**, jeśli chcemy odczytać wartości w wybranym węźle.

Zwróćmy uwagę na obszar koncentracji naprężenia w miejscu przyłożenia siły. Jest to jednak efekt bardziej numeryczny niż fizyczny, biorący się z faktu

punktowego, a więc osobliwego przyłożenia obciążenia. W rzeczywistości obciążenie zawsze jest rozłożone choćby na niewielkim obszarze i osobliwości nie występują. W praktyce tego rodzaju osobliwe efekty należy pominąć.

5. Oszacowanie błędu rozwiązania

W części teoretycznej skryptu omówiono sposoby oceny jakości uzyskanego rozwiązania dyskretnego. Program ANSYS udostępnia informacje o tzw. błędzie energetycznym (równanie 96) oraz o maksymalnej wariacji naprężenia (równanie 101). Możemy te wartości poznać przez **General Postproc-->Plot Results-->Contour Plot--> Element Solution** i wybranie **Error Estimation-->Structural Error Energy** albo **Error Estimation--> Absolute Maximum Stress Variation**. W obu przypadkach zobaczymy, że rozwiązanie jest bardzo dobre, poza lokalnymi efektami związanymi z omówioną osobliwością. Jeśli w powyższych ścieżkach menu zastąpimy **Plot Results-->Contour Plot** przez **List Results**, to będziemy mogli odczytać konkretne wartości każdej z miar jakości rozwiązania dyskretnego w węzłach modelu.

Tekstowy zapis modelu

Tworzenie modelu konstrukcji w sposób omówiony w zaprezentowanych przykładach jest dość łatwe i wygodne, ale dla konstrukcji stosunkowo prostych. Przy bardziej złożonych staje się żmudne i łatwo może prowadzić do pomyłek. Ponadto tak budowany model nie daje możliwości szybkiego odpowiadania na pytania „co jeśli", to znaczy szybkiego poznania odpowiedzi układu przy zmianie niektórych parametrów. Mogą to być wymiary, przekroje, materiał, położenie poszczególnych części, usunięcie (na przykład wskutek zniszczenia) jakiegoś fragmentu i wiele innych. Używając interfejsu graficznego, gdzie wszystkie parametry wprowadzamy jako stałe liczby, często będziemy musieli budować model od początku. Dodatkowo ANSYS, poprzez wbudowany moduł, daje możliwość optymalnego dobierania parametrów, o ile jednak nie są one wprowadzone „na sztywno". Rozwiązaniem jest zapisanie modelu oraz całego procesu w pliku tekstowym, edytowanym w najprostszym tekstowym edytorze (np. Notatniku), który następnie jest wczytywany przez program przez **File--> Read Input from...** Zawartość tego pliku stanowią tekstowe komendy, które są czytane i wykonywane w zapisanej kolejności. Mogą to być przede wszystkim instrukcje podstawiania wartości do zmiennych, które są parametrami modelu. Jak pokazaliśmy w przykładzie z ramą, możemy budować model, używając zmiennych zamiast stałych – nazywa się to modelem parametrycznym –

a w przypadku zmiany jakiejś wartości wprowadzamy ją jedynie w jednym miejscu pliku i ponawiamy rozkaz wczytania go przez program. Sposób ten wymaga znajomości tekstowej formy każdej komendy wraz z jej parametrami. Podpowiemy, że każde wykonywane przez program polecenie jest zapisywane w tekstowej formie na tekstowym pliku o rozszerzeniu .log, co umożliwia jego odczyt po uprzednim wykonaniu jakiejś czynności przez GUI, a ścieżka **File-->Write DB log file...** umożliwia zapis wszystkich poleceń wydanych graficznie i tekstowo w czasie sesji z programem na zewnętrznym tekstowym pliku o rozszerzeniu .lgw. Bardzo przydatna jest też znajomość APDL (*Ansys Parametric Design Language*), czyli języka do takiego parametrycznego modelowania. W tym skrypcie nie będziemy go omawiać, zachęcając do zapoznania się z nim choćby przez system pomocy. APDL ma cechy języka programowania pracującego w trybie interpretera, wyposażonego w takie techniki jak pętle czy instrukcje warunkowe, takie struktury danych jak tablice oraz liczne funkcje dotyczące modelu, pozwalające odczytywać i zmieniać jego parametry czy odczytywać uzyskane wyniki, zapisywać na plik albo współpracować z systemem operacyjnym.

Poniżej zamieszczamy tekstowe wersje zadań wykonanych jako pierwsze ćwiczenia. Wydaje się, że większość będzie rozpoznana, ale dodane zostały komentarze. W plikach tych znak ! (wykrzyknik) oznacza komentarz, czyli początek tej części linii, która jest ignorowana przez program, a przydatna projektantowi do opisywania poszczególnych poleceń czy wstawiania uwag. Polecenia postprocesora umieszczone są tylko w ostatnim przykładzie, w którym pokazano też elementarne użycie pętli w APDL, zastosowanej do obsługi okienek graficznych, na jakie można podzielić okno ***Graphics***.

Belka

```
! plik komend do rozwiązania belki wspornikowej
/PREP7                  ! wejdź do preprocessora
K, 1, 0, 0, 0           ! utwórz keypoint, 1, x, y, z
K, 2, 500, 0, 0         ! keypoint, 2, x, y, z
L, 1, 2                 ! utwórz linię od keypoint 1 do 2
!*
ET, 1, PIPE16           ! typ elementu = pipe 16
KEYOPT, 1, 6, 1         ! opcja zmieniająca output – dodatkowe informacje wyjściowe o
                        ! siłach i momentach
!*
R, 1, 25, 2,            ! zestaw stałych rzeczywistych (sztywność) elementu, zestaw 1,
                        ! średnica zewnętrzna, grubość ścianki
```

```
!*
MP, EX, 1, 70000          ! własności materiału, moduł Younga, materiał 1, 70000 MPa
MP, PRXY, 1, 0.33         ! własności materiału, wsp. Poissona, materiał 1, 0.33
!*
LESIZE, ALL, 20, , , , 1, , , 1    ! rozmiary elementu, wszystkie linie, 20 mm
LMESH, 1                           ! meshowanie linii
FINISH                             ! zakończ preprocessor
/SOLU                              ! przejdź do Solution
ANTYPE, 0                          ! wybierz typ analizy (statyczna)
!*
DK, 1, , 0, , 0, ALL      ! wyzeruj przemieszczenia w keypiontcie 1 dla wszystkich DOF
FK, 2, FY, -100           ! przyłóż siłę w keypointcie 2 o wartości -100 N w kierunku
                          ! osi y
/STATUS, SOLU             ! pokaż podsumowanie przed rozwiązaniem
SOLVE                     ! rozwiąż zadanie
FINISH                    ! zamknij Solution
```

Rama

```
! plik komend do rozwiązania ramy rowerowej
/title, 3D Rama rowerowa          ! nadaj tytuł
/prep7                            ! rozpocznij preprocessor

! zdefiniuj kilka parametrów
x1 = 500          ! parametry nie są konieczne (wymagane); tzn. można je
x2 = 825          ! wprowadzić bezpośrednio w postaci współrzędnych do
y1 = 325          ! poniższych definicji keypointów. Jednakże użycie
y2 = 400          ! parametrów znakomicie upraszcza i przyspiesza
z1 = 50           ! wprowadzanie zmian w geometrii modelu.

! zdefiniuj Keypointy
! znak $ (dolar) oznacza kontynuację linii, czyli możliwość pisania wielu komend
! w jednym wierszu
K, 1, 0, y1, 0      ! K, numer keypointu, x-coord, y-coord, z-coord
K, 2, 0, y2, 0      $       K, 3, x1, y2, 0     $K, 4, x1, 0, 0
K, 5, x2, 0, z1     $       K, 6, x2, 0,-z1

! zdefiniuj linie łączące keypointy
L, 1, 2                     ! L, keypoint1, keypoint2
L, 2, 3   $       L, 3, 4   $       L, 4, 1   $       L, 3, 6
L, 3, 5   $       L, 4, 6   $       L, 4, 5

! wybierz typ elementu
ET, 1, pipe16               ! typ numerowany jako „1” to pipe16
KEYOPT, 1, 6, 1             ! i jego opcję
```

```
! określ stałe rzeczywiste
! (zależne od typu elementu: np element pipe16 wymaga podania średnicy  zewnętrznej i
! grubości ścianki)
! (Uwaga: obliczana wewnętrzna średnica musi być dodatnia)
R, 1, 25, 2              ! R, numer zestawu real, średnica zewnętrzna, grubość ścianki

! określ własności materiału Aluminium
MP, EX, 1, 70000         ! mp, moduł Younga, numer materiału, wartość
MP, PRXY, 1, 0.33        ! mp, wsp. Poissona, numer materiału, wartość

! określ na ile elementów ma być podzielona każda linia
LESIZE, ALL, 20, , , , 1, , , 1        ! lesize, nr linii (all: wszystkie), rozmiar elementu, , , ,
                                       ! Modyfikuj wszystkie wybrane linie dopuszczając
                                       ! zmiany przez SmartSizing
! 'meshing' czyli dyskretyzacja linii
LMESH, ALL                             ! lmesh, numer linii

FINISH          ! zakończ pre-processing

/SOLU           ! rozpocznij solution processor (blok rozwiązywania)
ANTYPE, 0       ! analiza statyczna (0==static)

! podaj ograniczenia przemieszczeń (więzy) keypointów   (komenda dk)
DK, 1, UX, 0, , , UY, UZ  ! dk, keypoint, kierunek,przemieszczenie, , , kierunek, kierunek
DK, 5, UY, 0, , , UZ
DK, 6, UY, 0, , , UZ

! zadaj siły przyłożone w keypointach (komenda fk)
FK, 3, FY, -600          !fk, keypoint, kierunek, siła
FK, 4, FY, -200

SOLVE           ! rozwiąż zadanie  tzn. zbuduj macierze, zrób agregacje, rozwiąż układ
                ! równań...
FINISH          ! zakończ procesor Solution
SAVE            ! zachowaj wyniki pracy na dysku
```

Płytka z otworem

```
! plik komend do rozwiązania zadania płaskiej płytki z otworem
/PREP7                          ! preprocesor
BLC4, 0, 0, 200, 100            ! prostokąt, lewy dolny narożnik (x, y), wysokość,
                                ! szerokość
CYL4, 100, 50, 20               ! koło, środek(x, y), promień
ASBA, 1, 2                      ! odejmij powierzchnię 2 od powierzchni 1
!*
```

```
ET, 1, PLANE82                  ! typ elementu = plane82
KEYOPT, 1, 3, 3                 ! opcja zmiany własności: plaski stan naprężenia
                                ! z podaniem grubości
!*
R, 1, 20                        ! stałe rzeczywiste, zestaw 1, grubość tarczy
!*
MP, EX, 1, 200000               ! własności materiału, moduł Younga,   Materiał 1,
                                ! 200000 MPa
MP, PRXY, 1, 0.3                ! własności materiału, stała Poissona, Materiał 1, 0.3
!*
AESIZE, ALL, 20, , , , 1, , , 1 ! rozmiar elementu powierzchniowego, na wszystkich
                                ! powierzchniach ! 20 mm
AMESH, ALL                      ! meshowanie powierzchni
FINISH                          ! zamknij preprocesor
/SOLU                           ! Solution
ANTYPE, 0                       ! typ analizy (statyczna)
!*
DL, 4, , ALL, 0                 ! zerowe wszystkie stopnie swobody na linii nr 4
SFL, 2, pres, -1                ! ciśnienie na linii nr 2, wartość 1 MPa na zewnątrz

/STATUS,SOLU
SOLVE                           ! rozwiązanie
FINISH                          ! zamknij Solution
```

Uchwyt w płaskim stanie naprężenia

```
! plik komend do rozwiązania uchwytu w płaskim stanie naprężenia
/title, 2D uchwyt w płaskim stanie naprężenia
/prep7          ! preprocesor

! tworzenie geometrii
BLC4, 0, 0, 80, 100         ! prostokąt
CYL4, 80, 50, 50        $       CYL4, 0, 20, 20         $       CYL4, 0, 80, 20
                                                                ! 3 koła
BLC4, -20, 20, 20, 60
AADD, ALL       ! Boolowskie dodawanie - dodaj do siebie wszystkie
                ! powierzchnie
CYL4, 80, 50, 30        $       CYL4, 0, 20, 10  $      CYL4, 0, 80, 10
                ! otwory na uchwyt i sworznie
ASBA, 6, ALL            ! boolowskie odejmowanie – odejmij od bazowej powierzchni
                        ! nr 6 wszystkie inne
! Definiujemy typ elementu
ET, 1, PLANE82          $       KEYOPT, 1, 3, 3         ! element w płaskim stanie
                                                        ! naprężenia z grubością
```

```
! stałe rzeczywiste
R, 1, 20            ! R, numer zestawu real, grubość

! Definiujemy własności materiału
MP, EX, 1, 200000       ! mp, moduł Younga, nr materiału, wartość
MP, PRXY, 1, 0.3        ! mp, stała Poissona, nr materiału, wartość

! rozmiary elementów
AESIZE, ALL, 5          ! aesize, wszystkie powierzchnie, rozmiar

! meshowanie powierzchni
AMESH, ALL              ! amesh, wszystkie powierzchnie
FINISH                  ! zakończ preprocesing

/SOLU                   ! zacznij solution
ANTYPE, 0               ! typ analizy

! więzy na liniach (komenda dl)
! trzeba znać numery linii zakrzywionych wzdłuż okręgów – otworów
DL, 7, ,ALL, 0   $      DL, 8, ,ALL, 0   $      DL, 9, ,ALL, 0
DL, 10, ,ALL, 0  $      DL, 11, ,ALL, 0  $      DL, 12, , ALL, 0
DL, 13, , ALL, 0 $      DL, 14, , ALL, 0

! Siła w węźle (komenda f)
F, 222, FY, -1000       ! siła w węźle !!trzeba znać jego numer
                        ! wygodniej mogłoby być FK, 9, FY, -1000
                        !                       fk, keypoint, kierunek, wartość siły
SOLVE           ! rozwiązanie
FINISH          ! zakończ solution
SAVE            ! zachowaj bazę danych dla tego zadania pod domyślną nazwą

/post1          ! zacznij postprocesor

/WIND, ALL, OFF         ! zdefiniuj okna, dzieląc ekran na 4 pola: lewe-górne (1),
                        ! prawe-górne (2), lewe-dolne (3), prawe-dolne (4)
/WIND, 1, LTOP          $       /WIND, 2, RTOP
/WIND, 3, LBOT          $       /WIND, 4, RBOT
GPLOT                   ! włącz sterowanie oknem grafiki

*DO, k, 1, 4    ! pętla po wszystkich oknach k=1, 2, 3, 4
        /GTYPE, k, KEYP, 0      $       /GTYPE, k, LINE, 0
        /GTYPE, k, AREA, 0      $       /GTYPE, k, VOLU, 0
        /GTYPE, k, NODE, 0
        /CONT, k, 9, AUTO
*ENDDO          ! wyłącz w każdym oknie rysowanie obiektów solid modeling
                ! i ustaw automatyczne skalowanie wykresów poziomicowych
```

```
/GCMD, 1, PLDISP, 2                ! narysuj w oknie 1. kształt zdeformowany i
                                   ! zarys wyjściowego
/GCMD, 2, PLNSOL, U, SUM, 0, 1     ! narysuj w oknie 2. mapę przemieszczeń
/GCMD, 3, PLNS, S, EQV, 0, 1       ! narysuj w oknie 3. rozkład węzłowych
                                   ! naprężeń Hubera–Misesa
/GCMD, 4, PLES, SERR, ,0           ! narysuj w oknie 4. rozkład elementowego
                                   ! błędu energii
/REPLOT          ! odśwież zawartość okien
PRNSOL, DOF      ! wydrukuj wartości stopni swobody w węzłach
```

Modelowanie konstrukcji belkowych

W grupie podstawowych zadań, jakie znamy z elementarnej *Wytrzymałości materiałów*, znajduje się obliczanie belek i konstrukcji belkowych. Są one ważnym i często używanym modelem konstrukcji, stosowanym do obliczeń ram nośnych samochodów, pojazdów szynowych, elementów maszyn roboczych i robotów, dźwigów, suwnic, obrabiarek, konstrukcji budowlanych, stropów, dachów, mostów, rusztowań i wielu innych. Z tego powodu warto zapoznać się z możliwościami ANSYSa w tym zakresie.

Przypomnijmy, że podstawowym założeniem upoważniającym zastąpienie trójwymiarowego ciała modelem jednowymiarowym jest dominacja jednego wymiaru (długości) nad pozostałymi wymiarami poprzecznymi. Obliczenia sprowadzane są do osi pręta, a trójwymiarowość jest uwzględniana przez geometryczne charakterystyki przekroju poprzecznego, takie jak pole powierzchni, położenie środka ciężkości, główne centralne momenty i osie bezwładności czy położenie środka ścinania. Funkcje momentu zginającego oraz ugięcia belki zależą od jednej zmiennej mierzonej wzdłuż długości, co czyni równania różniczkowe zwyczajnymi. Rozkład odkształceń i naprężeń wyznaczany jest na bazie przyjętej hipotezy geometrycznej, którą najczęściej jest hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego.

Modelując konstrukcje belkowe, w programie ANSYS tworzymy ich kształt – układ belek, za pomocą punktów bazowych i linii. Miejsca, gdzie belki się łączą, modelujemy wspólnymi keypointami. Linie mogą być proste lub zakrzywione. Ponieważ tworzenie tych obiektów już omówiono, nie powtarzamy w tym miejscu ani komend, ani ścieżek menu. Podobnie, nie będziemy tu omawiać definiowania modelu materiału, które znamy z powyższych ćwiczeń, dodając jednak, że oprócz najprostszego modelu Hooka w praktyce można stosować wiele innych. W tym miejscu skupimy się na dwóch aspektach modelowania belek: doborze typu elementu oraz definiowaniu geometrii przekroju poprzecznego.

Dobór typu elementu

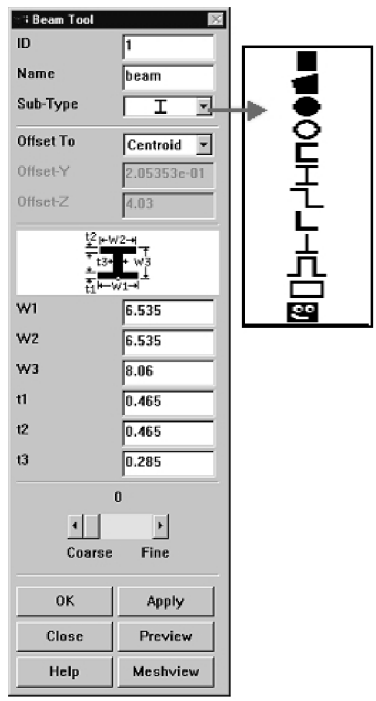
Program ANSYS posiada w swej bibliotece wiele elementów skończonych przygotowanych do obliczeń belek (*beam*). O możliwościach ich zastosowania należy każdorazowo dowiedzieć się z opisu, gdyż niektóre nadają się do modelowania belek płaskich, a niektóre przestrzennych, jedne dopuszczają materiał niesprężysty, a inne ograniczone są tylko do prawa Hooka, są takie gdzie przekrój może być zmienny, i takie gdzie musi być stały, wreszcie w niektórych uwzględniony jest wpływ ścinania na ugięcia i naprężenia, a w niektórych nie. Użycie większości z nich wymaga między innymi podania całego szeregu stałych liczbowych o wartościach odpowiednich charakterystyk przekroju, które należy wyliczyć poza programem i umieścić w zestawie stałych rzeczywistych (*real*) albo, przy modelowaniu tekstowym, zbudować odpowiednie wyrażenie parametryczne na ich wyznaczenie.

W najnowszych wersjach programu zaleca się stosowanie elementów **BEAM188** lub **BEAM189** jako najbardziej uniwersalnych. Różnią się one tylko stopniem aproksymacji (funkcji kształtu). Pierwszy jest elementem liniowym dwuwęzłowym, a drugi elementem drugiego stopnia z wprowadzonym trzecim węzłem w środku długości, co jest przydatne przy belkach zakrzywionych. Ponadto oba elementy umożliwiają zarówno analizę liniową, jak i nieliniową, włącznie z plastycznością, lepkoplastycznością, dużymi deformacjami i nieliniowym zniszczeniem (*collapse*). Mają możliwość włączenia różnorodnych materiałów w celu symulacji materiałów warstwowych, kompozytów, przekrojów wzmocnionych itp., uwzględniając deformacje sprężyste, plastyczne i pełzania. Pozwalają na stworzenie geometrii przekroju „user defined" określonej przez użytkownika oraz umożliwiają modelowanie belki o (liniowo) zmiennym przekroju (*tapered*). Ciekawą i przydatną własnością jest też możliwość określenia położenia węzła dyskretyzacji w stosunku do środka ciężkości przekroju, co umożliwia na przykład uwzględnienie efektu skręcania przez przyłożenie siły poprzecznej z offsetem czy efektu wzajemnego przesunięcia osi łączących się belek. Wreszcie, co też istotne, elementy te są łatwe w użyciu zarówno na etapie preprocesora, jak i postprocesora.

Właściwości przekroju

W celu pełnego zdefiniowania elementu BEAM188 lub 189 należy dokonać specyfikacji własności jego przekroju poprzecznego. Łatwo można to zrobić za pomocą ***BeamTool***. Rozwijamy **Preprocessor--> Sections--> Beams-->Common Sectns...** i w otwartym oknie wybieramy w polu

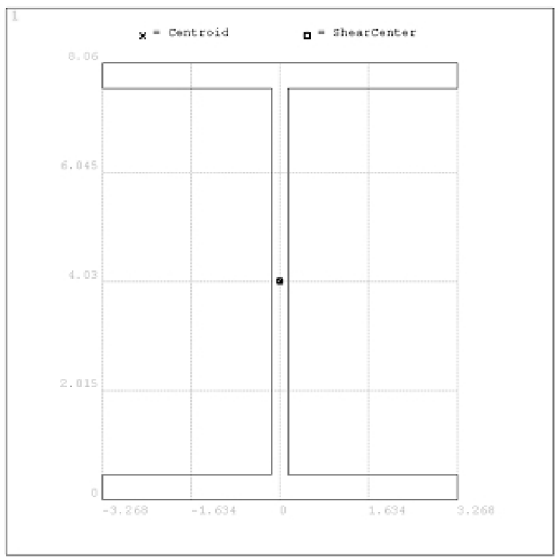
„Sub-Type” żądany kształt, a następnie wprowadzamy jego wymiary. Zauważmy znane nam już kontekstowe działanie, polegające na pytaniu tylko o wymiary związane bezposrednio z wybranym kształtem i zaznaczone na rysunku.



Jeśli w modelu konstrukcji stosujemy różne typy przekrojów, to w polu „ID” nadajemy każdemu z nich inny numer referencyjny i opcjonalnie w polu „NAME” nazywamy go „po swojemu”. Pole „Offset TO” i dwa kolejne pod nim służą do wspomnianego już ustalenia położenia węzła elementu na przekroju. I tak, opcja „Centroid” oznacza, że węzeł pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju, „Shear Cen” (*shear center*) umieszcza węzeł w środku ścinania, „Origin” daje możliwość umieszczenia węzła w początku układu współrzędnych związanego z przekrojem, którego położenie ilustruje mała kropka na rysunku, wreszcie przez opcję „Location” i podanie dwóch współrzędnych możemy ulokować węzeł w dowolnym miejscu. Dodatkowo możemy ustalić poziom podziału przekroju na komórki, w których znajdują się tzw. punkty Gaussa do numerycznego całkowania po powierzchni. Poziom ten dla przekrojów cienkościennych zmienia się od 0 (*Coarse*, zgrubny) do 5 (*Fine*, świetny), a dla przekrojów pełnych i pierścieniowego przez podanie liczby podziałów po odpowiednich wymiarach (wysokości i szerokości, promieniu i obwodzie, obwodzie). Podział ten jest istotny, jeśli rozważamy materiał sprężysto-plastyczny, kiedy rozkład na-

prężenia po przekroju nie jest liniowy i konieczne jest przeprowadzanie całkowania naprężeń po powierzchni w celu wyznaczenia sił wewnętrznych. Dla zadania sprężystości problem jest nieistotny.

Po określeniu wszystkich parametrów możemy klawiszem Preview przywołać podgląd zdefiniowanego kształtu i odczytać wszystkie charakterystyki geometryczne, które wyliczył program, oraz zobaczyć położenie środka ciężkości i środka ścinania, a przez Meshview dodatkowo zobaczyć podział przekroju na komórki do całkowania.



Zatwierdzenie przekroju następuje przez OK i staje się on dostępny w dalszym modelowaniu.

Tekstowe komendy służące do analogicznej definicji przekroju wydawane są sekwencyjnie. Najpierw komenda SECTYPE określa numer referencyjny, typ (kształt) przekroju poprzez odpowiednie słowo-kod oraz nazwę i poziom podziału przekroju na komórki. Słowa-kody należy odczytać z systemu pomocy na temat tej komendy. Przykładowo RECT oznacza prostokąt, CSOLID pełne koło, CTUBE przekrój pierścieniowy, CHAN ceownik, I dwuteownik, a T teownik. Następnie SECDATA służy do wprowadzenia wymiarów wybranego przekroju, a dla przekrojów pełnych i pierścieniowego również liczb podziału na komórki. Wreszcie – w razie potrzeby – komenda SECOFFSET ustala położenie węzła względem definiowanego przekroju. Dla przykładu zdefiniowanie przekroju niesymetrycznego ceownika z dolną półką 100, górną 80, wysokością 120, o stałej grubości ścianki 10, przy żądaniu najlepszego podziału na komórki i z węzłem umieszczonym w środku ścinania, zrealizujemy sekwencją trzech komend:

```
SECTYPE, 1, BEAM, CHAN, ceownik, 5
SECOFFSET, SHRC
SECDATA, 100, 80, 120, 10, 10, 10
```

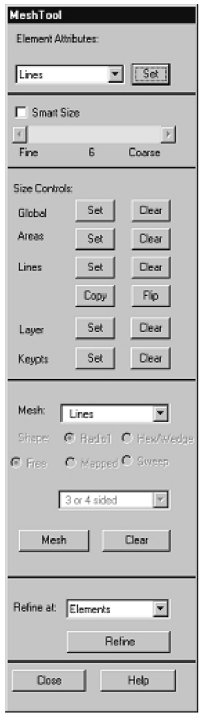
a pełny przekrój kołowy o promieniu 100 z podziałem na 20 odcinków po obwodzie i 10 po promieniu z węzłem ulokowanym w środku przekroju utworzy sekwencja

```
SECTYPE, 2, BEAM, CSOLID, kolo
SECOFFSET, CENT
SECDATA, 100, 20, 10
```

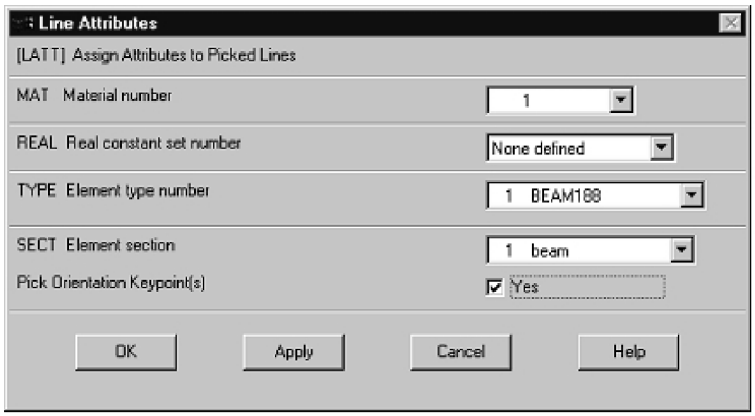
Podgląd zdefiniowanego przekroju można zlecić komendą `SECPLOT`, `ID`, gdzie `ID` to numer referencyjny użyty w `SECTYPE`.

Dyskretyzacja

Mając model konstrukcji belkowej, zbudowany za pomocą linii oznaczających osie, najwygodniej jest dokonać podziału na elementy skończone przy użyciu narzędzia ***Mesh Tool***, dostępnego po rozwinięciu **Preprocesor-->Meshing-->Mesh Tool**. Wykonujemy trzy kroki: przypisujemy liniom atrybuty, ustalamy gęstość podziału i generujemy siatkę elementów.



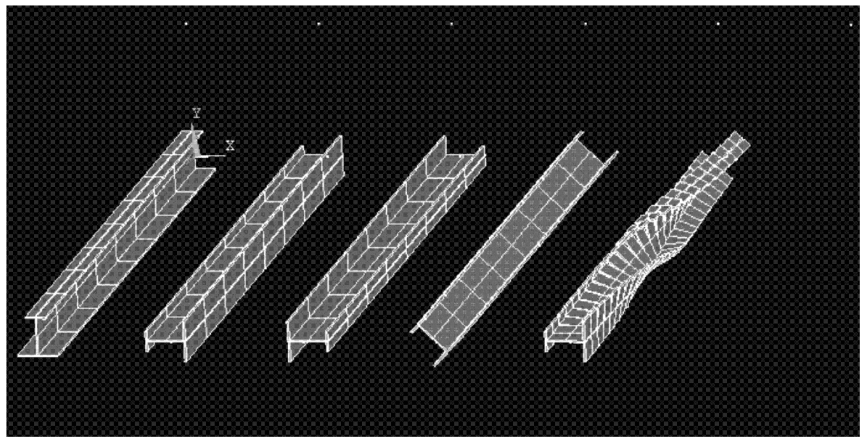
Po kliknięciu Set obok pola „Element Attribute”, w którym ustawione jest ‘Lines’, pokaże się znane okienko dialogowe, w którym wskażemy, o jakie linie chodzi. Możemy na przykład kliknąć Pick All, jeśli wszystkie linie mają mieć te same atrybuty. Następnie w kolejnym oknie ***Line Attributes*** nadajemy kolejne atrybuty: 1) numer referencyjny materiału, z którego wykonane są belki; materiał musi być wcześniej zdefiniowany przez *Materials Models* lub zestaw komend `MP`; 2) zestaw odnośnych stałych liczbowych, przy czym, jeśli używamy elementu BEAM188 lub BEAM189, pole to jest nieistotne i może zostać „None defined”; 3) typ elementu, jakim linie mają zostać zdyskretyzowane – w naszym przypadku BEAM188 lub BEAM189, które wcześniej muszą zostać dołączone do modelu przez *Add* lub komendę `ET, 1, BEAM188`; 4) identyfikator przekroju, który chcemy przypisać belkom i który wcześniej zdefiniowaliśmy w polu „ID” okienka ***Beam Tool***; 5) decyzję, czy będzie wskazywany punkt bazowy do przestrzennego orientowania przekroju.



Jeśli w polu „Pick Orientation Keypoint(s)” zaznaczymy „Yes”, to po wybraniu OK lub Apply w kolejnym oknie dialogowym wskażemy położenie odpowiednich punktów bazowych. Punkty *Orientation Keypoints* wyznaczają ustawienie przekroju względem osi belki. Jeśli ich nie podamy, to główne osie przekroju będą ustawione zgodnie z osiami aktywnego globalnego układu współrzędnych, tzn. oś *y* układu elementowego będzie równoległa do płaszczyzny *X*-*Y* układu globalnego. Jeżeli jednak przekrój ma być ustawiony inaczej, to punkt przestrzennego orientowania musi zostać zdefiniowany i wskazany, aby wraz z osią belki wyznaczyć główną płaszczyznę bezwładności tego przekroju. Oś *x* układu elementowego wyznaczona jest przez węzły *I-początek* i *J-koniec*, które wraz z punktem orientowania wyznaczają płaszczyznę zawierającą oś *z*. Punkt orientowania może być już używany do innych obiektów albo nowo zdefiniowany, byle nie był współliniowy z punktami osi belki. Każdy typ przekroju, o ile używamy w modelu

więcej niż jednego, musi posiadać osobny *Orientation Keypoint*, ale nie ma potrzeby podawać osobnego dla każdej linii, gdyż wiele linii może używać wspólnego. Gdy podamy jeden punkt orientowania dla linii, to wszystkie przekroje będą ustawione identycznie, ale też każdy koniec linii może mieć inny taki punkt, co pozwala na modelowanie belek zwitych wokół osi. Różne zorientowanie przekrojów dla belek o tej samej osi i tym samym typie przekroju niesymetrycznego dwuteownika pokazuje rysunek 29.

Po kliknięciu Set obok „Lines" w środkowej części ***Mesh Tool*** podpisanej „Size Controls" zobaczymy znane okno do wypełnienia gęstości podziałów lub długości pojedynczego elementu. Trzeba pamiętać, że dla omawianych elementów belkowych zdecydowanie nie zaleca się stosowania pojedynczego elementu pokrywającego całą długość belki (tekstowo komenda LESIZE).



Rys. 29. Zastosowanie *Orientation Keypoints* dla belki

Na końcowym etapie dyskretyzacji, po uprzednim zachowaniu modelu, przyciskamy Mesh w dolnej części okna ***Mesh Tool*** podpisanej „Mesh", sprawdzając wcześniej, że z rozwijalnej listy obok podpisu wybrane są „Lines" (tekstowo komenda LMESH).

Chcąc narysować nie tylko podzielone linie, ale i przekroje w ich rzeczywistym kształcie i wymiarach, należy najpierw rozwinąć **Utility Menu-->PlotCtrls-->Style-->Size and Shape…** i w polu podpisanym „Display of element shapes based on real constant description" zaznaczyć opcję „On", zostawiając „Scale" równe 1. Tylko te dwa elementy belkowe (188 i 189) mają taką własność. Inne są rysowane zawsze jako prostokąty o skrajnych wymiarach przekroju, bez względu na ich kształt, gdyż kształt nie jest parametrem, a tylko jego liczbowe charakterystyki. Tekstowym odpowiednikiem tej opcji jest /ESHAPE, 1.

Obciążenia

Obciążenia skupione, siły lub momenty mogą być przykładane do konstrukcji belkowych czy to w punktach bazowych, czy w węzłach elementów. Dotyczy to również kinematycznych warunków podporowych. Tutaj wskażemy również możliwość przykładania obciążeń rozłożonych w sposób ciągły na powierzchni belki, zadawanych w jednostkach siły na długość, oraz obciążeń masowych działających na całą objętość.

Obciążenia ciągłe, traktowane w programie jak ciśnienia, przykładamy przez menu **Solution-->Apply-->Pressures-->On Beams** lub komendą SFBEAM i ustalamy przez odpowiedni numer „ściany" belki kierunek działania tego obciążenia, a także jego wartość. Pamiętamy, że węzły początku i końca *I, J* wyznaczają kierunek i zwrot osi *x* elementowego układu współrzędnych, a kierunki innych osi wyznacza np. punkt orientowania przestrzennego. Przy tych założeniach kierunki obciążeń oznaczają numery: „1" – obciążenie prostopadłe do osi belki o kierunku osi *z* rozłożone od *I* do *J*; wartość dodatnia – obciążenie niezgodne z osią; „2" – obciążenie prostopadłe do osi belki o kierunku osi *y* rozłożone od *I* do *J*; wartość dodatnia – obciążenie niezgodne z osią; „3" – obciążenie styczne do osi *x* belki rozłożone od *I* do *J*; wartość dodatnia – obciążenie zgodne z osią; „4" – obciążenie normalne do przekroju belki na początku *I* elementu (denku); wartość dodatnia – obciążenie zgodne z osią *x*; „5" – obciążenie normalne do przekroju belki na końcu *J* elementu; wartość dodatnia – obciążenie niezgodne z osią *x*. Wartość ujemna obciążenia oznacza zwrot przeciwny niż w definicji.

Jeśli zachodzi potrzeba uwzględnienia w obliczeniach ciężaru własnego konstrukcji albo działają na nią siły bezwładności związane z przyspieszeniem liniowym lub kątowym, przykładamy do niej obciążenia masowe. Obciążenie grawitacyjne siłą ciężkości przykładamy z menu **Solution-->Define Loads-->Apply-->Inertia-->Gravity-->Global** albo komendą ACEL, podając potem składowe przyspieszenia w trzech kierunkach. Zwykle tylko pionowe będzie niezerowe, ale jeśli rozważamy ruch przyspieszony, gdy konstrukcja jest na przykład transportowana, albo gdy obliczamy ją na zachowanie w warunkach sejsmicznych, to również i poziome składowe przyspieszenia mogą być różne od zera. Podobnie siły bezwładności pochodzące od ruchu obrotowego zamodelujemy, zastępując w ostatnim menu **Gravity** przez **Angular Veloc** (prędkość kątowa) albo **Angular Accel** (przyspieszenie kątowe) i podając odpowiednie składowe względem osi układu. W tekstowych wersjach używamy odpowiednio komend OMEGA lub DOMEGA z trzema parametrami. Należy pamiętać, że efektywne przyłożenie obciążeń masowych wymaga podania gęstości materiału wśród stałych materiałowych (komenda MP, DENS, MAT_NR, wartość).

Przegląd wyników nie różni się od innych konstrukcji. Na ogół analizujemy kształt zdeformowany, mapy przemieszczeń całkowitych albo składowych, wartości reakcji więzów, rozkłady sił wewnętrznych oraz rozkłady naprężeń. Zwracamy uwagę, że dzięki opcji `/eshape, 1` w elementach BEAM188 i BEAM189 możemy rysować rozkład naprężeń po powierzchni przekroju, co przy innych typach elementu belkowego nie jest możliwe. Możemy też tworzyć tablice elementowe, na przykład w celu sporządzenia wykresów sił wewnętrznych (momentów zginających, momentu skręcającego, sił poprzecznych i normalnych) czy odkształceń. Po odpowiednie sekwencje numeryczne (SMISC) należy sięgnąć do opisu elementu w systemie pomocy. Aby otrzymać wykres sił wewnętrznych metodą omówioną powyżej w skrypcie, należy odpowiednią opcją w definicji elementu wymusić ich interpolację na końce elementu. Po zdefiniowaniu elementu typu BEAM188 lub BEAM189 wybieramy Options... i w polu „Section force/strain output K6" wybieramy z listy „At element nodes". Tekstowo to samo zrobimy komendami `ET, 1, BEAM189` i `KEYOPT, 1, 6, 3`, po czym w znany już sposób tworzymy tablice elementowe z wartościami na jednym i drugim końcu, by przez **Plot Results--> Contour Plots-->Line Elem Res** otrzymać ich graficzne rozkłady (komenda `PLLS`).

Słowniczek

Z uwagi na angielskojęzyczne polecenia programu ANSYS oraz na przeważającą angielskojęzyczną literaturę przedmiotu i różny poziom znajomości tego języka, zamieszczamy krótki słowniczek, który może być pomocny w zrozumieniu używanych w tekście zwrotów i pojęć.

English	**polski**
abbreviation	skrót
acceleration	przyspieszenie
add	dodać (np. powierzchnie); dołożyć (np. kolejny materiał)
aggregation	agregacja, scalanie
angular acceleration	przyspieszenie kątowe
angular velocity	prędkość kątowa
apply	przyłożyć, zadać (siłę, warunki brzegowe); zastosować (ustawienia)
approximation	aproksymacja
area	powierzchnia
axial force	siła osiowa
beam	belka
bending moment	moment zginający

body load	obciążenie masowe (objętościowe)
boundary	brzeg obszaru
boundary conditions	warunki brzegowe
bracket	uchwyt
buckling	wyboczenie, utrata stateczności
CAD Computer Aided Design	projektowanie wspomagane komputerowo
circle	okrąg, koło
clear	wyczyścić, usunąć (np. wcześniej utworzoną siatkę elementów albo całą bazę)
component	składowa (wektora)
consistency conditions	warunki nierozdzielności
constant strain element	element stałego odkształcenia
constraint	ograniczenie, więz
contour plot	wykres warstwowy, poziomicowy
convergence	zbieżność (metody, rozwiązania)
coordinate system	układ współrzędnych
creep	pełzanie (materiału)
cross sectional area	pole powierzchni przekroju poprzecznego
deflection	ugięcie
deformed shape	kształt zdeformowany
degree of freedom	stopień swobody
delete	usunąć (np. wcześniej stworzony obiekt, przyłożoną siłę)
density	gęstość
derivative	pochodna
design	projekt; projektować
diameter	średnica
differentiate	różniczkować
direct	bezpośredni; wprost
displacement	przemieszczenie
division	podział (np. linii na elementy)
edge	krawędź, brzeg (elementu)
eigen value	wartość własna (macierzy)
elasticity	sprężystość
elasticity modulus	moduł sprężystości (Younga)
equivalent stress	naprężenie zastępcze; w ANSYSie oznacza naprężenie Hubera–Misesa–Hencky'ego
finite element	element skończony
finite element method	metoda elementów skończonych (elementu skończonego)
force	siła
fraction	ułamek, część
frame	rama
functional	funkcjonał
gravity	grawitacja
gravity acceleration	przyspieszenie grawitacyjne
harmonic	harmoniczna (np. analiza wyznaczająca odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne)
include	włączyć, dołączyć (np. opcję działania elementu)
indirect	pośredni; pośrednio, nie wprost
inertia	bezwładność

integral	całka
integration	całkowanie; scalanie
internal equilibrium equations	równania równowagi wewnętrznej (Naviera)
interpolation	interpolacja
intersect	przecięcie, przenikanie, wspólna część
inverse matrix	macierz odwrotna
key point	punkt bazowy
label	etykieta, oznaczenie
length	długość
line	linia
list	listować, wypisać
load	obciążenie
matrix	macierz
mesh	siatka (elementów); dyskretyzować (budować siatkę)
modal	modalna (np. analiza wyznaczająca częstości drgań własnych)
moment of inertia	moment bezwładności
multiple	wielokrotny
natural frequency	częstość drgań własnych
nodal force	siła węzłowa
node	węzeł
origin	początek (np. układu współrzędnych)
partial derivative	pochodna cząstkowa
plane strain	płaski stan odkształcenia
plane stress	płaski stan naprężenia
plasticity	plastyczność
plate	płyta (płaski dźwigar powierzchniowy)
plot	rysunek, wykres; rysować
Poisson ratio	współczynnik Poissona odkształceń poprzecznych
pressure	ciśnienie
principal stress	naprężenia główne
prompt	podpowiedź
property	własność, właściwość (np. materiału)
rectangle	prostokąt
redirect	przekierować (np. rysowanie z ekranu na plik)
resume	wznowić, rozpocząć ponownie (zadanie)
root mean square	średniokwadratowy (np. błąd)
rotation	obrót
section	przekrój
set	zestaw, zbiór; przyjąć, ustawić (np. parametry)
shape	kształt
shape function	funkcja kształtu
shear center	środek ścinania przekroju
shear modulus	moduł ścinania (moduł Kirchhoffa)
shearing force	siła tnąca
shell	powłoka (dźwigar dwuwymiarowy o zakrzywionej powierzchni środkowej)
singular	osobliwy
size	rozmiar
solution	rozwiązanie
solve	rozwiązać (równanie)

space frame	rama przestrzenna, trójwymiarowa
spectral	spektralna (np. analiza odpowiedzi układu na zmienne wymuszenie przemieszczeniowe lub siłowe)
square	kwadrat (figura i potęga)
square root	pierwiastek kwadratowy
static	statyczny
stationarity conditions	warunki stacjonarności
stiffness matrix	macierz sztywności
straight line	linia prosta
strain	odkształcenie
strain energy	energia odkształcenia
stress	naprężenie
stress intensity	intensywność naprężenia; w ANSYSie oznacza naprężenie Tresci–Guesta
subtract	odejmować
surface	powierzchnia (np. górna płyty)
thickness	grubość
torque	moment skręcający
transformation	transformacja
transient	przejściowy, nieustalony (proces)
transposition	transpozycja
triangle	trójkąt
truss	kratownica
volume	objętość