

Włodzimierz Ciesielczyk
Krzysztof Kupiec

Chemical Engineering Calculations

Part I. Flow processes

Obliczenia w inżynierii chemicznej
Część I. Procesy przepływowe

Człowiek – najlepsza inwestycja



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000271120

**Włodzimierz Ciesielczyk
Krzysztof Kupiec**

Chemical Engineering Calculations
Part I. Flow processes

Obliczenia w inżynierii chemicznej
Część I. Procesy przepływowe



Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
Kraków 2012

CHAIRMAN OF THE CRACOW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
PRESS EDITORIAL BOARD/
PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jan Kazior

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD/
PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW NAUKOWYCH

Maria Misiągiewicz

SERIES EDITOR/REDAKTOR SERII
Wydział Inżynierii i Technologii Chemicznej/Faculty of Chemical Engineering and Technology
Witold Żukowski

REVIEWER/RECENZENT

Bogdan Ambrozek

SECTION EDITOR/SEKRETARZ SEKCJI

Agnieszka Filosek

EDITORIAL COMPILATION/OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Michał M. Stachowski

COVER DESIGN/PROJEKT OKŁADKI

Michał Graffstein

II-339548

© Copyright by Politechnika Krakowska, Kraków 2012

ISBN 978-83-7242-677-2

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; tel. 12 628 37 25, fax: 12 628 37 60
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl www.wydawnictwo.pk.edu.pl
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Politechniki Krakowskiej.
Ark. wyd. 8,5. Podpisano do druku 14.12.2012 r.

Zam. 265/2012

Nakład 300 egz.

Egzemplarz bezpłatny

Q-135/2013

Contents

Preface.....	7
List of frequently used symbols.....	9
1. Fluid flow in pipes	11
1.1. Types of fluid flow	11
1.2. Flow rate	12
1.3. Bernoulli equation	13
1.4. Hydraulic resistance.....	14
1.5. Fluid flow rate measurements	17
1.5.1. Impact tubes.....	17
1.5.2. Orifice meters	17
1.5.3. Rotameters.....	18
2. Liquid outflow from tanks	41
2.1. Outflow velocity	41
2.2. Time of liquid outflow	43
2.3. Liquid level equalizing in communicating vessels.....	44
2.4. Mariotte vessel.....	44
2.5. Outflow pipe	45
3. Fluid transportation.....	69
3.1. Pumping power.....	69
3.2. Pump and piping system characteristic curves	71
3.3. Co-operation between pumps	72
3.4. Cavitation.....	72
4. Settling of particles in fluids	85
4.1. Fluid resistance (drag)	85
4.2. Free settling of spherical particles	88
4.2.1. Trial and error method.....	89
4.2.2. Graphical method	90
4.2.3. Analytical method.....	91
4.3. Dust-settling chambers	92
4.4. Cyclones	93
4.5. Hydraulic classifiers.....	94
4.6. Sedimentation	96

5. Methods for two-phase contact.....	119
5.1. Parameters characterizing packing	119
5.2. Pressure drop of fluid flowing through packed bed	121
5.3. Flow through wetted packing	123
5.4. Fluidization	126
5.5. Gas bubbling through liquid	127
5.6. Falling film of liquid.....	130
5.7. Mixing.....	131
5.8. Phase contact area.....	132
6. Filtration	151
6.1. Isobaric filtration.....	152
6.2. Filtration at constant flow rate of filtrate	154
6.3. Two-stage filtration	154
6.4. Filter-cake washing.....	155
6.5. Optimal time of isobaric filtration	157
6.6. Optimal time of two-stage filtration	157
6.7. Filtration through layer of constant thickness	158
7. Polish texts.....	195
7.1. Przepływ płynów przez przewody.....	195
7.1.1. Rodzaje ruchu płynów	195
7.1.2. Natężenie przepływu	196
7.1.3. Równanie Bernoulliego	196
7.1.4. Opory przepływu	196
7.1.5. Pomiar natężenia przepływu płynu	198
7.1.5.1. Rurki spiętrzające.....	198
7.1.5.2. Zwężki.....	198
7.1.5.3. Rotametry.....	199
7.2. Wypływ cieczy ze zbiorników	204
7.2.1. Prędkość wypływu.....	204
7.2.2. Czas wypływu cieczy	205
7.2.3. Wyrównanie poziomów w naczyniach połączonych.....	206
7.2.4. Naczynie Mariotte'a	206
7.2.5. Rura wypływowa.....	206
7.3. Przesyłanie płynów	212
7.3.1. Moc pompowania	212
7.3.2. Charakterystyka pompy i sieci	213
7.3.3. Współpraca pomp	213
7.3.4. Kawitacja.....	214
7.4. Opadanie cząstek w płynach.....	218
7.4.1. Opór ośrodka (płynu)	218

7.4.2. Opadanie swobodne cząstek kulistych	219
7.4.2.1. Metoda prób i błędów	219
7.4.2.2. Metoda graficzna.....	220
7.4.2.3. Metoda analityczna	220
7.4.3. Komory odpylające	221
7.4.4. Cyklony	221
7.4.5. Klasyfikatory hydrauliczne.....	222
7.4.6. Sedymentacja.....	223
7.5. Sposoby kontaktowania faz	226
7.5.1. Parametry charakteryzujące wypełnienie	227
7.5.2. Strata ciśnienia płynu przy przepływie przez warstwę wypełnienia	227
7.5.3. Przepływ przez wypełnienie zraszane	228
7.5.4. Fluidyzacja	230
7.5.5. Barbotaż.....	230
7.5.6. Spływ cieczy po ścianie pionowej.....	232
7.5.7. Mieszanie.....	232
7.5.8. Pole powierzchni kontaktu międzyfazowego.....	233
7.6. Filtracja	237
7.6.1. Filtracja izobaryczna	238
7.6.2. Filtracja ze stałym natężeniem przepływu filtratu.....	238
7.6.3. Filtracja dwustopniowa	238
7.6.4. Przemycanie osadu	239
7.6.5. Optymalny czas filtracji izobarycznej	239
7.6.6. Optymalny czas filtracji dwustopniowej	240
7.6.7. Filtracja przez warstwę o stałej grubości.....	240
Auxiliary tables.....	249
List of recommended literature supporting.....	251

Preface

The ability to solve problems by theory-based calculations is of fundamental importance in chemical and process engineering. In order to acquire and improve this skill the authors recommend this Handbook. It is intended primarily as a teaching aid for the students of the Department of Chemical Engineering and Technology at Cracow University of Technology.

Each chapter of the Handbook is comprised of three sections. In the descriptive section some theoretical information necessary to solve calculating problems is given. The second section contains a number of examples, which are solved and accompanied by explanations and comments. In the third section exercises to be solved unassisted are provided; answers are given for control. This edition is mainly written in English. However, the last chapter consists of a text written in Polish, which covers the descriptive section and topics of the examples and exercises.

This handbook was written on the basis of a two-part textbook „Przykłady i zadania z inżynierii chemicznej i procesowej” by Włodzimierz Ciesielczyk, Krzysztof Kupiec and Andrzej Wiechowski. The material was subjected to changes which consisted in i.a. eliminating several chapters and some examples. Moreover, figures and a part of the text was adapted to current publishing requirements.

Translation was done by Monika Gwadera; the figures were made by Adam Bodura. The Handbook was divided into four parts:

- I. Flow processes,
- II. Thermal processes,
- III. Theory of mass transfer,
- IV. Process calculations for mass exchangers.

At the end of each part of the Handbook tables with selected data (usually physical and equilibrium properties), which are needed to solve the presented examples and exercises, are included.

List of frequently used symbols

a	–	specific area powierzchnia właściwa
A	–	area of surface pole powierzchni
Ar	–	Archimedes number liczba Archimedesesa
d, D	–	diameter średnica
g	–	acceleration of gravity przyśpieszenie ziemskie
h, H	–	height wysokość
L	–	length długość
m	–	mass masa
M	–	molecular mass masa molowa
\dot{m}	–	mass flow rate masowe natężenie przepływu
N	–	power moc
p, P	–	pressure ciśnienie
Re	–	Reynolds number liczba Reynoldsa

s, S	–	area of cross section pole powierzchni przekroju
t	–	time czas
T	–	temperature temperatura
u	–	velocity of fluid prędkość płynu
V	–	volume objętość
\dot{V}	–	volume flow rate objętościowe natężenie przepływu
w	–	falling velocity prędkość opadania
λ	–	resistance coefficient, drag coefficient współczynnik oporu
μ	–	viscosity współczynnik lepkości
ε	–	porosity (external) porowatość (zewnętrzna)
ρ	–	density gęstość

1. FLUID FLOW IN PIPES

1.1. TYPES OF FLUID FLOW

Fluid flow through a pipe can be:

- laminar: the velocity profile is parabolic; the average flow velocity u can be calculated using the formula

$$u = 0.5 \cdot u_{\max} \quad (1.1)$$

- turbulent: the velocity profile is flattened; the average flow velocity u is equal to $(0.8 \div 0.9) \cdot u_{\max}$; it is usually assumed that

$$u \cong 0.816 \cdot u_{\max} \quad (1.2)$$

The maximal velocity u_{\max} is in the axis of a pipe.

The dimensionless Reynolds number Re is the flow type criterion. It is a measure of a ratio of inertia forces to viscosity forces in the fluid. It is defined as follows

$$Re = \frac{u d_e \rho}{\mu} \quad (1.3)$$

where:

- u – average velocity of the fluid, m/s,
- d_e – equivalent diameter of a pipe, m,
- ρ – fluid density, kg/m³,
- μ – coefficient of fluid viscosity, kg/(m·s).

Laminar flow is when the value of the Reynolds number is lower than the critical value which equals about 2100.

Turbulent flow is when the Reynolds number has the value higher than 10 000. If values of Re are in the range: $2100 < Re < 10\,000$, the flow is transient.

For pipes with a circular cross-section it is $d_e = d$; the hydraulic diameter (equivalent) for pipes with cross-section in different shapes is calculated as follows:

$$d_e = \frac{4S}{O} \quad (1.4)$$

where:

- S – the cross-sectional area of a pipe (fluid stream), m^2 ,
- O – a pipe circumference flowed round by the fluid, m .

The flow types can be divided into: isothermal, when temperatures of the pipe wall and the stream are the same and non-isothermal, when there is a temperature gradient in the stream, because of which fluid viscosity varies across the cross-section, what causes deformation of the velocity profile.

In this chapter the steady flow, i.e. the flow in which velocity does not depend on time, will be taken into consideration.

1.2. FLOW RATE

If fluid mass is equal to m and the flowing time is t , the mass flow rate \dot{m} for the steady flow is

$$\dot{m} = \frac{m}{t} \quad (1.5)$$

The volumetric flow rate is defined analogically

$$\dot{V} = \frac{V}{t} = \frac{\dot{m}}{\rho} \quad (1.6)$$

where:

- V – the volume of the fluid which flowing time is t , m^3 ,
- \dot{V} – the volumetric flow rate, m^3/s .

The average velocity is a ratio of the volumetric flow rate and the pipe cross-sectional area

$$u = \frac{\dot{V}}{S} \quad (1.7)$$

The mass velocity g_m can also be used in calculations

$$g_m = \frac{\dot{m}}{S} = u\rho \quad (1.8)$$

In order to evaluate a pipe diameter it is often necessary to assume the average velocity of the flowing fluid. The following values are usually taken for calculations:

- for liquid: up to 2 m/s,
- for gases: up to 30 m/s,
- for saturated vapor: from 15 to 40 m/s,
- for superheated vapor: up to 50 m/s.

Applying the rule of substance amount conservation for the fluid which flow is stationary, one can derive the equation of continuity

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dots = \text{const}$$

Hence, if $\rho = \text{const}$, the following equation is valid for two different pipe cross-sections

$$S_1 u_1 = S_2 u_2 \quad (1.9)$$

So for circular cross-sections

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad (1.10)$$

1.3. BERNOULLI EQUATION

According to the Bernoulli equation for steady motion of ideal liquid, for any two cross-sections in the system in which the flow takes place, the sum of kinetic energy, pressure energy and potential energy is constant. The Bernoulli equation is usually written in the form

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad (1.11)$$

where:

- $u^2/(2g)$ – height corresponding to dynamic pressure, m,
- $p/(\rho g)$ – height corresponding to static pressure (piezometric height), m,
- z – reference height (geometric height), m.

The Bernoulli equation for real fluids has the form

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h_f \quad (1.12)$$

where Δh_f – height corresponding to the pressure loss between a cross-section 1 and 2, which is caused by the resistance of flow (hydraulic resistance), m.

1.4. HYDRAULIC RESISTANCE

Resistance of flow, which expresses the pressure loss due to flow of the fluid through a straight pipe of length L and a constant diameter d_e , can be calculated using the relation

$$\Delta p_{fl} = \lambda \frac{L}{d_e} \frac{\rho u^2}{2} \quad (1.13)$$

where λ – the resistance coefficient, which depends on the Reynolds number and pipe roughness.

The resistance coefficient for laminar motion depends only on the Reynolds number

$$\lambda = \frac{a}{\text{Re}} \quad (1.14)$$

Values of a constant a for particular shapes of a pipe cross-section are as follows: for a circle $a = 64$, for a ring $a = 95$, for a square $a = 57$.

Substitution of Eq. (1.14) for a circular cross-section to Eq. (1.13) leads to the Poiseuille equation, which can also be derived theoretically

$$\Delta p_{fl} = \frac{32\mu u L}{d^2} \quad (1.15)$$

The empirical Blasius correlation (1.16) can be used for resistance coefficient calculations for turbulent flow in smooth pipes

$$\lambda = 0.3164 \cdot \text{Re}^{-0.25} \quad (1.16)$$

The relation (1.16) is valid for $3000 < \text{Re} < 100\,000$.

When there is turbulent flow in a rough pipe, the resistance coefficient is much higher than for smooth one and what is more it depends on a relative roughness of a pipe ε_s

$$\varepsilon_s = \frac{e}{d_e} \quad (1.17)$$

where e – an absolute roughness (average height of roughness).

Values of an absolute roughness are as follows: for cast iron pipes 0.3÷1.5 mm, for pipes made of ceramic materials 0.8÷1 mm, for steel pipes: 0.1÷0.2 mm (new pipes), 0.3÷0.9 mm (corroded pipes).

If condition (1.18) for turbulent flow is fulfilled

$$\varepsilon_s \geq 30 \cdot \text{Re}^{-0.875} \quad (1.18)$$

the resistance coefficient practically does not depend on the Reynolds number and is equal to

$$\lambda = \left(2 \cdot \lg \frac{1}{\varepsilon_s} + 1.138 \right)^{-2} \quad (1.19)$$

whereas, if

$$\varepsilon_s < 30 \cdot \text{Re}^{-0.875} \quad (1.20)$$

the pipe can be treated as a smooth one and Eq. (1.16) can be used.

The resistance coefficient λ' for non-isothermal flow can be obtained using the relation

$$\lambda' = \frac{\lambda}{b \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^n} \quad (1.21)$$

where:

- μ – coefficient of viscosity for an average stream temperature,
- μ_s – coefficient of viscosity for a pipe wall temperature,
- λ – resistance coefficient for isothermal flow in an average stream temperature.

Constants in Eq. (1.21) for laminar motion are as follows: $b = 1.1$, $n = 0.25$, and for turbulent motion: $b = 1.0$, $n = 0.14$.

The pressure loss caused by local resistance due to fluid flow through profiled parts of a pipe (e.g. an elbow, a branching, a diffuser, an orifice plate, a closing device) can be expressed by the formula

$$\Delta p_{fm} = \zeta \frac{u^2 \rho}{2} \quad (1.22)$$

where: ζ – the local resistance coefficient. Example values of this coefficient are presented in Tab. 1.1.

Table 1.1

Type of a local hydraulic resistance	ζ
Tap (fully-opened)	0.05
Normal valve (fully-opened)	3÷4
Gate valve (fully-opened)	0.05
Sharp-edged pipe inlet	0.5
Tank inlet for fluid flowing from a pipe	1.0

The pressure loss caused by a local resistance can be also expressed by a so-called equivalent length L_e . It is a length of a straight pipe of diameter d_e , which causes the same pressure loss as a given local resistance. Relation between the local resistance coefficient and an equivalent length is given by Eq. (1.23)

$$L_e = \frac{\zeta}{\lambda} d_e = n d_e \quad (1.23)$$

In this case a measure of a local resistance is the coefficient n . Values of this coefficient for selected fitting elements are presented in Tab. 1.2.

Table 1.2

Type of a local resistance	n
Fully-opened gate valve	7
Half-opened gate valve	190
Elbow 45°	15
Elbow 90°	31
Standard T-pipe	65

The total pressure loss for a pipe and for local resistances is equal to

$$\Delta p_f = \Delta p_{fL} + \Delta p_{fm} = \left(\lambda \frac{L}{d_e} + \sum_i \zeta_i \right) \frac{u^2 \rho}{2} \quad (1.24)$$

or if (1.23) is taken into account

$$\Delta p_f = \lambda \frac{L + \sum_i L_{ei}}{d_e} \frac{u^2 \rho}{2} \quad (1.25)$$

1.5. FLUID FLOW RATE MEASUREMENTS

1.5.1. Impact tubes

Impact tubes (Pitot and Prandtl tubes) serve for measurements of local fluid velocity. A principle of their operation is illustrated in Fig. 1.1. Application of the Bernoulli's equation leads to the relation

$$u_{loc} \cong \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho) \Delta h_m g}{\rho}} \quad (1.26)$$

When an impact tube is placed in the axis of a pipe, a measurement refers to the maximal velocity. In order to determine the volumetric flow rate, the maximal velocity has to be converted into average velocity using a relation (1.1) or (1.2), and then Eq. (1.7) has to be applied.

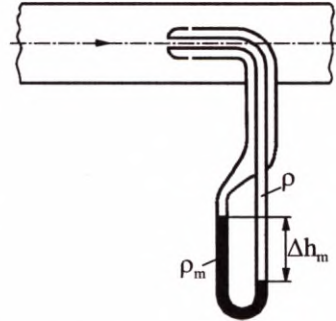


Fig. 1.1. Schematic diagram of impact tube

1.5.2. Orifice meters

Orifice plates serve for fluid flow rate measurements (Fig. 1.2).

Using the Bernoulli's equation and the equation of continuity one can obtain the formula

$$\dot{m} = \alpha \varepsilon S_0 \sqrt{2\rho \cdot \Delta h_m (\rho_m - \rho) g} \quad (1.27)$$

where α is the coefficient of flow



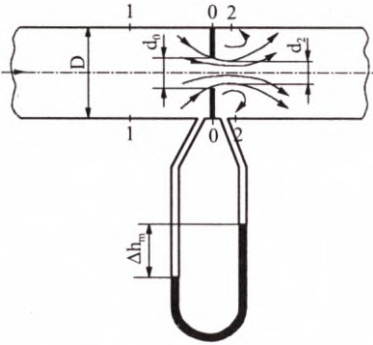


Fig. 1.2. Orifice flowmeter

$$\alpha = \frac{\mu_z}{\sqrt{1 - m^2 \mu_z^2}} = f(\text{Re}, m) \quad (1.28)$$

A quantity μ_z is the coefficient of stream contraction

$$\mu_z = \frac{S_2}{S_0} = \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 \quad (1.29)$$

A quantity S_2 denotes a stream cross-section in a point where the stream is the narrowest.

An orifice plate modulus is defined as follows

$$m = \frac{S_0}{S_1} = \left(\frac{d_0}{D}\right)^2 \quad (1.30)$$

It is a ratio of the orifice plate cross-sectional area S_0 to the pipe cross-sectional area S_1 . Geometric quantities D , d_0 and d_2 are explained in Fig. 1.2.

The coefficient of expansion ε for liquids is equal to 1, and for gases it depends on an orifice flowmeter modulus and the pressure loss caused by the orifice flowmeter.

1.5.3. Rotameters

The main part of a rotameter is a glass pipe which extends in the flow direction (Fig. 1.3) and which contains a float. Pressure difference which arises when fluid is flowing through the gap between the float and a pipe wall compensates float weight and keeps it at the level specified for the given flow rate. Relationship between the flow rate \dot{V} and the gap area S_2 has the form

$$\dot{V} = \alpha S_2 \sqrt{\frac{2V_{fl} g (\rho_{fl} - \rho)}{S_{fl} \rho}} \quad (1.31)$$

where:

- α – the coefficient of flow,
- V_{fl} – float volume, m^3 ,
- ρ_{fl} – float density, kg/m^3 ,
- ρ – fluid density, kg/m^3 ,
- S_{fl} – the cross-sectional area of a float, m^2 ,
- S_2 – the annular cross-sectional area determined by the float position, m^2 .



Fig. 1.3. Rotameter

Conversion of a rotameter indication for fluid which has different density than the model fluid can be done using the formula

$$\dot{V} = \dot{V}_0 \frac{\alpha}{\alpha_0} \sqrt{\frac{(\rho_f - \rho)\rho_0}{(\rho_f - \rho_0)\rho}} \quad (1.32)$$

Symbols with index 0 refer to model conditions. It can be assumed that $\alpha/\alpha_0 = 1$ for flange-type floats. In a case of gas flow rate measurements if float material density is much higher than gas density, Eq. (1.32) can be simplified to the form

$$\dot{V} = \dot{V}_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \quad (1.33)$$

EXAMPLE 1.1

Liquid is flowing in a horizontal pipe with a smooth surface, which cross-section is:

- circular and has an internal diameter of $d = 0.032$ m,
- square and has a side length (inside the pipe) of $a = 0.30$ m,
- rectangular and has sides lengths (inside the pipe) of $a = 0.02$ m, $b = 0.03$ m,
- annular with the following dimensions: internal diameter of an external pipe $D_w = 0.100$ m, external diameter of an internal pipe $d_z = 0.076$ m, average liquid velocity is equal to 0.7 m/s. Liquid density is $\rho = 800$ kg/m³, and the coefficient of viscosity is $\mu = 0.60 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s).

Evaluate the mass and volumetric flow rate and the mass flow velocity for each case (a, b, c, d). Determine the flow character. What should a limit equivalent pipe diameter be to make the flow laminar if the average liquid velocity stays the same?

Because in cases b, c, d a pipe cross-section is not a circle, an equivalent diameter must be used in calculations. According to (1.4), one can obtain

a)

$$d_e = \frac{4S}{O} = \frac{4 \frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = d = 0.032 \text{ m}$$

b)

$$S = a^2, \quad O = 4a, \quad d_e = \frac{4a^2}{4a} = a = 0.30 \text{ m}$$

c)

$$S = a \cdot b \quad O = 2(a + b)$$

$$d_e = \frac{4a \cdot b}{2(a + b)} = \frac{4 \cdot 0.02 \cdot 0.03}{2(0.02 + 0.03)} = 0.024 \text{ m}$$

d)

$$S = \frac{\pi D_w^2}{4} - \frac{\pi d_z^2}{4}; \quad O = \pi D_w + \pi d_z$$

$$d_e = \frac{4 \frac{\pi}{4} (D_w^2 - d_z^2)}{\pi (D_w + d_z)} = D_w - d_z$$

$$d_e = 0.100 - 0.076 = 0.024 \text{ m}$$

The volumetric flow rate is calculated using the formula (1.7)

$$\dot{V} = Su$$

while the mass flow rate – using the expression (1.6)

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

The mass flow velocity is evaluated with the use of Eq. (1.8)

$$g_m = u\rho$$

The Reynolds number, on the basis of which the flow character can be determined, is calculated using its definition (1.3)

$$\text{Re} = \frac{u d_e \rho}{\mu} = \frac{g_m d_e}{\mu}$$

Results obtained for each case are presented in the following table:

Case	a	b	c	d
\dot{V} [m ³ /s]	0.000563	0.0630	0.000420	0.00232
\dot{m} [kg/s]	0.450	50.4	0.336	1.86
g_m [kg/(m ² s)]	560	560	560	560
Re	29 870	280 000	22 400	22 400

So, the flow is turbulent in each case.

In order that the flow can be laminar, the Reynolds number must have the value $\text{Re}_{\text{cr}} = 2100$ for the limit case. So, if fluid flow velocity is given, the limit equivalent pipe diameter must be lower than

$$d_{e,limit} = \frac{\mu \text{Re}_{cr}}{\rho u} = \frac{0.60 \cdot 10^{-3} \cdot 2100}{0.7 \cdot 800}$$

$$d_{e,limit} = 2.25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

This result suggests that laminar flow occurs mainly in pipes with small diameters.

EXAMPLE 1.2

Water is flowing through the pipe shown in Fig. 1.4 at a temperature 20°C . An internal diameter of the pipe is $d_A = 112 \text{ mm}$ (in a cross-section A), and its slope is $\alpha = 30^\circ$. From some point the pipe start to converge. An internal diameter of its narrow part is $d_B = 40 \text{ mm}$ (in a cross-section B). Static pressure of water before the pipe contraction is $p_A = 1.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. The saturated vapor pressure at a temperature 20°C is $p_{sat} = 2337 \text{ Pa}$.

Evaluate:

- 1) the mass and volumetric flow rate if water velocity is equal to 90% of velocity at which cavitation phenomenon occurs (see Chapter 3.4),
- 2) pressure in a cross-section B for water velocity calculated above,
- 3) velocity in a cross-section A necessary to obtain the Reynolds number equal to 10 000.

Neglect the resistance to flow.

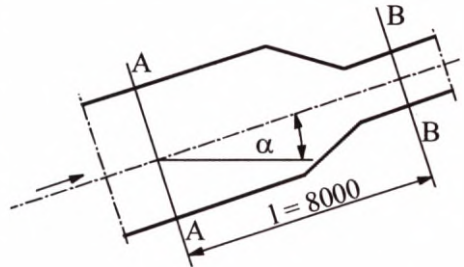


Fig. 1.4. For the Example (1.2)

Cavitation occurs if static pressure p_B drops to the level of the saturated vapor pressure for a given liquid at a given temperature. A condition for cavitation can be written in the form: $p_B = p_{sat}$.

Water velocity for which cavitation will occur $u_{A,cav}$ can be calculated using the Bernoulli's equation for cross-sections A and B (Fig. 1.4).

$$\frac{u_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{u_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + z_B$$

Taking into consideration that

$$z_A = 0, \quad z_B = l \cdot \sin \alpha, \quad p_B = p_{sat}$$

and according to the equation of continuity

$$u_B = u_{A,cav} \left(\frac{d_A}{d_B} \right)^2$$

one can obtain the expression

$$u_{A,cav} = \sqrt{\frac{2(p_{sat} - p_A) + 2\rho g l \cdot \sin \alpha}{\rho \left[1 - \left(\frac{d_A}{d_B} \right)^4 \right]}}$$

The water density at a temperature 20°C is $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$ (Table AT-1). After numerical values substitution, one can get

$$u_{A,cav} = \sqrt{\frac{2(2337 - 150000) + 2 \cdot 998.2 \cdot 9.81 \cdot 8 \cdot 0.5}{998.2 \left[1 - \left(\frac{112}{40} \right)^4 \right]}}$$

$$u_{A,cav} = 1.89 \text{ m/s}$$

So cavitation takes place when water velocity is higher than 1.89 m/s (velocity in the wider part of the pipe). The real water velocity is lower

$$u_A = 0.9 \cdot u_{A,cav} = 0.9 \cdot 1.89 = 1.70 \text{ m/s}$$

According to the formulas (1.6) and (1.7), the mass flow rate is

$$\dot{m} = S_A u_A \rho = \frac{\pi d_A^2}{4} u_A \rho = \frac{\pi (0.112)^2}{4} \cdot 1.70 \cdot 998.2$$

$$\dot{m} = 16.7 \text{ kg/s}$$

The volumetric flow rate is calculated using the relation (1.6)

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{16.7}{998.2} = 0.017 \text{ m}^3/\text{s}$$

If the mass flow rate is \dot{m} , pressure in the cross-section B is (from the Bernoulli equation)

$$p_B = p_A - \rho g l \cdot \sin \alpha + \frac{\rho}{2} u_A^2 \left[1 - \left(\frac{d_A}{d_B} \right)^4 \right]$$

$$p_B = 150\,000 - 998.2 \cdot 9.81 \cdot 8 \cdot 0.5 + \frac{998.2}{2} \cdot (1.70)^2 \left[1 - \left(\frac{112}{40} \right)^4 \right]$$

$$p_B = 23\,387 \text{ Pa}$$

so this pressure is much higher than the saturated vapor pressure.

To obtain $Re = 10\,000$ in the cross-section A water velocity u_{Ax} should be equal to

$$u_{Ax} = \frac{\mu Re}{d_A \rho}$$

$$u_{Ax} = \frac{0.9934 \cdot 10^{-3} \cdot 10\,000}{0.112 \cdot 998.2}$$

$$u_{Ax} = 0.0889 \text{ m/s}$$

EXAMPLE 1.3

Water is flowing through a tube of an external diameter 40 mm, thickness 4 mm and length 12 m. The velocity of water is 1.70 m/s at a temperature 20°C. Calculate the resistance to flow for the following cases:

- the tube surface is smooth,
- the tube surface is rough and its absolute roughness is $e = 0.3$ mm,
- the tube (b) is being heated, while the tube wall temperature is 45°C.

Resistance for a straight tube is calculated with the use of Eq. (1.13). Firstly, it is necessary to determine the flow character on the basis of the Reynolds number calculation. Using the formula (1.3) one can get

$$Re = \frac{u d_e \rho}{\mu} = \frac{1.70 \cdot 0.032 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}}$$

$$Re = 54\,663$$

The flow is turbulent because $Re > 10\,000$.

- The coefficient of resistance for the tube with smooth surface can be calculated using the formula (1.16)

$$\lambda = 0.3164 \operatorname{Re}^{-0.25} = 0.3164 \cdot (54\,663)^{-0.25}$$

$$\lambda = 0.021$$

The pressure loss in the tube with smooth surface equals

$$\Delta p_{fL} = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{u^2 \rho}{2} = 0.021 \cdot \frac{12}{0.032} \cdot \frac{(1.70)^2 \cdot 998.2}{2}$$

$$\Delta p_{fL} = 11359 \text{ Pa}$$

b) For the tube with a rough surface, a relative roughness must be calculated. For this purpose Eq. (1.17) must be used

$$\varepsilon_s = \frac{e}{d_e} = \frac{0.3 \cdot 10^{-3}}{0.032} = 0.00938$$

It is necessary to check which one of conditions: (1.18) or (1.20) is fulfilled. In this example the condition (1.18) is fulfilled because value of the expression

$$30 \cdot \operatorname{Re}^{-0.875} = 30 \cdot (54663)^{-0.875} = 0.00216$$

is lower than ε_s . Hence, the coefficient of resistance should be calculated using the formula (1.19)

$$\lambda = \left(2 \cdot \lg \frac{1}{\varepsilon_s} + 1.138 \right)^{-2}$$

$$\lambda = \left(2 \cdot \lg \frac{1}{0.00938} + 1.138 \right)^{-2}$$

$$\lambda = 0.037$$

The pressure loss in the rough tube is equal to

$$\Delta p_{fL} = 0.037 \cdot \frac{12}{0.032} \cdot \frac{(1.70)^2 \cdot 998.2}{2}$$

$$\Delta p_{fL} = 20013 \text{ Pa}$$

When compared with the smooth tube, the resistance of flow is higher by

$$\frac{20\,013 - 11\,359}{11\,359} \cdot 100\% = 76.2\%$$

c) The coefficient of resistance λ' for non-isothermal flow is calculated using the relation (1.21)

$$\lambda' = \frac{\lambda}{b \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^n}$$

The flow is turbulent, so $b = 1.0$ and $n = 0.14$. According to Table AT-1 the coefficient of viscosity for water at a temperature 45°C equals $0.6051 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$. The coefficient of resistance is equal to

$$\lambda' = \frac{0.037}{1.0 \cdot \left(\frac{0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.6051 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.14}}$$

$$\lambda' = 0.034$$

In this case the pressure loss is

$$\Delta p_{fL} = 0.034 \cdot \frac{12}{0.032} \cdot \frac{(1.70)^2 \cdot 998.2}{2}$$

$$\Delta p_{fL} = 18391 \text{ Pa}$$

When the tube is being heated, i.e. for non-isothermal flow, the resistance of flow is lower by

$$\frac{20\,013 - 18\,391}{20\,013} \cdot 100\% = 8.1\%$$

than in the case of the flow under isothermal conditions.

EXAMPLE 1.4

What the pressure loss will be if 2.5 kg/s of methyl alcohol is flowing through a horizontal pipe of length 20 m , an internal diameter 70 mm , and an absolute roughness 0.8 mm . Assume $\rho = 791 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\mu = 0.60 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$. How much higher

will the resistance be if 2 test taps and a normal valve are installed on the pipe? What is the length of this pipe which causes the same resistance as the given fittings?

If fluid is flowing through a pipe, the pressure loss is calculated using the formula (1.13). In order to evaluate the coefficient of resistance it is necessary to determine the flow character, i.e. calculate the Reynolds number (1.3). Alcohol velocity can be calculated using the relations (1.6) and (1.7). Because $S = \pi d^2/4$ average velocity is equal to

$$u = \frac{4\dot{m}}{\pi d^2 \rho} = \frac{4 \cdot 2.5}{\pi (0.070)^2 \cdot 791} = 0.82 \text{ m/s}$$

The value of the Reynolds number is

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{0.82 \cdot 0.070 \cdot 791}{0.60 \cdot 10^{-3}} = 75\,670$$

so the flow is turbulent. A relative roughness of the pipe surface is calculated using the relation (1.17)

$$\varepsilon_s = \frac{e}{d} = \frac{0.8}{70} = 0.0114$$

It is necessary to check which of inequalities: (1.18) or (1.20) is fulfilled. Because

$$30 \cdot \text{Re}^{-0.875} = 30 \cdot (75\,670)^{-0.875} = 0.0016$$

so inequality (1.18) is right

$$\varepsilon_s \geq 30 \cdot \text{Re}^{-0.875}$$

The coefficient of resistance λ is evaluated using the formula (1.19)

$$\lambda = \left(2 \cdot \lg \frac{1}{\varepsilon_s} + 1.138 \right)^{-2}$$

$$\lambda = \left(2 \cdot \lg \frac{1}{0.0114} + 1.138 \right)^{-2}$$

$$\lambda = 0.0396$$

When the alcohol is flowing through the pipe without any fittings, the pressure loss is equal to

$$\Delta p_{fL} = \lambda \frac{L}{d} \frac{u^2 \rho}{2} = 0.0396 \cdot \frac{20}{0.070} \cdot \frac{(0.82)^2 \cdot 791}{2}$$

$$\Delta p_{fL} = 3009 \text{ Pa}$$

The pressure loss due to overcoming a local resistance is calculated with the use of the formula (1.22). Coefficients of local resistance are as follows: for a tap $\zeta_1 = 0.05$, for a valve $\zeta_2 = 3$, so

$$\Delta p_{fm} = \sum_i \zeta_i \frac{u^2 \rho}{2} = (2\zeta_1 + \zeta_2) \frac{u^2 \rho}{2}$$

$$\Delta p_{fm} = (2 \cdot 0.05 + 3) \cdot \frac{(0.82)^2 \cdot 791}{2}$$

$$\Delta p_{fm} = 824 \text{ Pa}$$

When the alcohol is flowing through the pipe with fittings, the pressure loss is

$$\Delta p_f = \Delta p_{fL} + \Delta p_{fm} = 3009 + 824 = 3833 \text{ Pa}$$

After the fittings was installed, the resistance of flow rose by

$$\frac{3833 - 3009}{3009} \cdot 100\% = 27.4\%$$

The pressure loss caused by the resistance due to fittings is the same as the pressure loss in a straight section of the pipe of length given by Eq. (1.23)

$$\sum_i L_{ei} = \frac{\sum_i \zeta_i}{\lambda} d = \frac{3.1}{0.0396} \cdot 0.07 = 5.48 \text{ m}$$

EXAMPLE 1.5

An impact tube (Fig. 1.1), which is connected with a differential manometer filled with mercury ($\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$), is placed in a 120 mm diameter pipe so that the end of the device is in the axis of the pipe. Difference between mercury levels is

$\Delta h_m = 35$ mm. Evaluate the average water velocity in this pipe at a temperature 20°C and the mass flow velocity. What a deflection of the manometer for the average water velocity would be?

If the end of an impact tube is placed in the axis of a pipe, a deflection of the device refers to the maximal liquid velocity ($u_{\text{loc}} = u_{\text{max}}$). According to Eq. (1.26), this velocity is equal to

$$u_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)\Delta h_m g}{\rho}}$$

$$u_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (13\,600 - 998.2) \cdot 0.035 \cdot 9.81}{998.2}}$$

$$u_{\text{max}} = 2.94 \text{ m/s}$$

Assuming that the flow is turbulent, one can calculate average velocity using the expression (1.2)

$$u = 0.816u_{\text{max}} = 0.816 \cdot 2.94 = 2.40 \text{ m/s}$$

Verification of the assumption consists in the Reynolds number evaluation

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{2.40 \cdot 0.120 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 289\,390$$

Thus, the assumption is correct. The mass flow velocity was calculated using the formula (1.8)

$$g_m = u\rho = 2.40 \cdot 998.2 = 2396 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

The indication of the differential manometer for the average velocity is evaluated with the use of the rearranged formula (1.26)

$$\Delta h_m = \frac{u^2 \rho}{2g(\rho_m - \rho)} = \frac{(2.40)^2 \cdot 998.2}{2 \cdot 9.81 \cdot (13\,600 - 998.2)}$$

$$\Delta h_m = 0.023 \text{ m}$$

EXAMPLE 1.6

A rotameter for ethyl alcohol flow rate measurements installed in a test stand, shows the flow rate equal to 3.95 kg/s when its float position is $H = 0.30$ m in relation to the zero level on the scale. The ethyl alcohol temperature is 20°C ($\rho = 790$ kg/m³). Determine the maximum possible range of the rotameter and find the relationship between the position of the float and the volumetric flow rate. What the volumetric flow rate of ethyl alcohol at a temperature 40°C ($\rho = 772$ kg/m³) will be if the float position is $H = 0.30$ m? Assume that the coefficient of flow α is constant.

Parameters which characterize the rotameter are as follows: the internal diameter, which corresponds to the zero level on the scale, $D_0 = 0.03$ m, the angle of flare for the rotameter tube $\varphi = 20'$, length of the rotameter scale $H_c = 0.5$ m, the scale interval: 0.1 m. The float is made of stainless steel ($\rho_{fl} = 8000$ kg/m³). The weight of the float is $m_{fl} = 0.24$ kg, and its diameter: $D_{fl} = D_0$.

A diameter of the rotameter pipe increases with height H according to the relation

$$D_r = D_0 + 2H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

so the annular cross-sectional area between the float and the tube S_2 depends on the position of the float and is given by the formula

$$S_2 = \frac{\pi D_r^2}{4} - S_{fl} = \frac{\pi}{4} \left(D_0 + 2H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 - S_{fl} \quad (\text{a})$$

where S_{fl} is the cross-sectional area of the float. Taking into account the relation (a) and the formula

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho}, \quad V_{fl} = \frac{m_{fl}}{\rho_{fl}}, \quad S_{fl} = \frac{\pi D_{fl}^2}{4}$$

and rearranging Eq. (1.31), one can obtain the expression for the coefficient of flow

$$\alpha = \frac{\dot{m}/\rho}{\left[\frac{\pi}{4} \left(D_0 + 2H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 - \frac{\pi D_{fl}^2}{4} \right] \sqrt{\frac{2 \frac{m_{fl}}{\rho_{fl}} g (\rho_{fl} - \rho)}{\pi D_{fl}^2 / 4}}}$$

For small angles values of tangent function are equal to argument of the function (in arc measure), so

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \left(\pi \cdot \frac{1/3}{2 \cdot 180} \right) \cong \pi \cdot \frac{1/3}{2 \cdot 180} = 0.00291$$

The coefficient of flow is

$$\alpha = \frac{3.95/790}{\left[\frac{\pi}{4} (0.03 + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.00291)^2 - \frac{\pi}{4} (0.03)^2 \right] \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{0.24}{8000} \cdot 9.81 \cdot (8000 - 790)}{\pi (0.03)^2 / 4}}}$$

$$\alpha = 0.77$$

Assuming that α is constant, on the basis of formulas (1.31) and (a) one can obtain a relation between volumetric flow rate \dot{V} and the float position H

$$\dot{V} = \alpha \left[\frac{\pi}{4} \left(D_0 + 2H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^2 - \frac{\pi D_{fl}^2}{4} \right] \sqrt{\frac{2 \frac{m_{fl}}{\rho_{fl}} g (\rho_{fl} - \rho)}{\pi D_{fl}^2 / 4}}$$

$$\dot{V} = 0.77 \cdot \left[\frac{\pi}{4} \cdot (0.03 + 2H \cdot 0.0291)^2 - \frac{\pi \cdot (0.03)^2}{4} \right] \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{0.24}{8000} \cdot 9.81 \cdot (8000 - 790)}{\pi (0.03)^2 / 4}}$$

$$\dot{V} = 46.83 \cdot (0.03 + 0.0058 \cdot H)^2 - 0.0421 \quad (b)$$

The maximal volumetric flow rate is when the float position is $H = 0.5$ m. Substituting this value into (b), one obtains

$$\dot{V} = 8.59 \text{ m}^3/\text{s}$$

Substituting the subsequent values

H [m]	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\dot{V} \cdot 10^3$ [m ³ /s]	0	1.69	3.37	5.00	6.82	8.59

for H to Eq. (b), one can plot the rotameter calibration curve (Fig. 1.5).

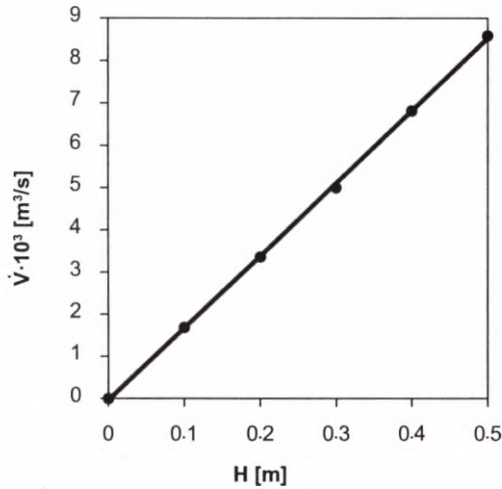


Fig. 1.5. Rotameter calibration curve

The expression (1.32) can be used for determination of alcohol flow rate at 40°C

$$\dot{V} = \dot{V}_0 \sqrt{\frac{(\rho_f - \rho) \rho_0}{(\rho_f - \rho_0) \rho}}$$

$$\dot{V} = 5 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{(8000 - 772) \cdot 790}{(8000 - 790) \cdot 772}}$$

$$\dot{V} = 5.06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

EXAMPLE 1.7

Water was flowing at the rate of 1.1 kg/s (20°C) through a pipe which dimensions are 76 × 3 mm (an external diameter × wall thickness). An orifice flowmeter of diameter $d_0 = 28$ mm was installed on the pipe (Fig. 1.2). The coefficient of contraction is $\mu_z = 0.615$. Calculate a deflection of a mercury manometer ($\rho_m = 13\,600 \text{ kg/m}^3$) connected with the orifice flowmeter. What is the flow rate of water if the manometer deflection is $\Delta h_m = 5 \text{ mm}$?

The value of manometer deflection can be calculated using the rearranged formula (1.27), in which relations (1.28) and (1.30) were taken into account

$$\Delta h_m = \frac{8\dot{m}^2 \left[1 - \left(\frac{d_0}{D} \right)^4 \mu_z^2 \right]}{\pi^2 \mu_z^2 d_0^4 g \rho (\rho_m - \rho)}$$

$$\Delta h_m = \frac{8 \cdot (1.1)^2 \left[1 - \left(\frac{0.028}{0.070} \right)^4 \cdot (0.615)^2 \right]}{\pi^2 (0.615)^2 \cdot (0.028)^4 \cdot 9.81 \cdot 998.2 \cdot (13\,600 - 998.2)}$$

$$\Delta h_m = 0.034 \text{ m}$$

When $\Delta h_m = 5 \text{ mm}$ (such deflection is considered to be the smallest one when the accuracy of measurement is taken into account), the flow rate of water is

$$\dot{m} = \alpha \varepsilon \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{2\rho \cdot \Delta h_m (\rho_m - \rho) g}$$

Substituting the expression (1.28) for the coefficient of flow, one gets

$$\dot{m} = \frac{0.615}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.028}{0.07} \right)^4 \cdot (0.615)^2}} \cdot 1 \cdot \frac{\pi (0.028)^2}{4} \sqrt{2 \cdot 998.2 \cdot 0.005 \cdot (13\,600 - 998.2) \cdot 9.81}$$

$$\dot{m} = 0.42 \text{ kg/s}$$

EXAMPLE 1.8

Water is flowing through a 130 mm diameter horizontal pipeline at the rate of $0.017 \text{ m}^3/\text{s}$ at 10°C . The pressure loss for 50 m of the pipeline is being measured using a U-tube manometer and is equal to 58 mm Hg. Calculate the resistance coefficient λ , assuming that the flow is isothermal. What is the maximal volumetric flow rate at which the flow is still laminar? What is the resistance coefficient and the pressure loss in this case?

Physical properties of water at a temperature 10°C , according to Table AT-1, are as follows: $\rho = 999.7 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.2964 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. In order to determine the flow character, it is necessary to find the Reynolds number with the use of the relation (1.3) but firstly water velocity must be found using the formula (1.7). It was obtained that

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{4\dot{V}\rho}{\pi d\mu}$$

$$\text{Re} = \frac{4 \cdot 0.017 \cdot 999.7}{\pi \cdot 0.130 \cdot 1.2964 \cdot 10^{-3}}$$

$$\text{Re} = 128\,390$$

The resistance to flow calculation is based on Eq. (1.13). The left side of this formula can be replaced by the expression

$$\Delta p_{fL} = \Delta h_m (\rho_m - \rho) g$$

Hence, taking the formula (1.7) into account, and after some transformations, one can obtain the following expression

$$\lambda = \frac{\pi^2 \Delta h_m (\rho_m - \rho) g d^5}{8L\dot{V}^2 \rho}$$

$$\lambda = \frac{\pi^2 \cdot 0.058 \cdot (13\,600 - 999.7) \cdot 9.81 \cdot (0.130)^5}{8 \cdot 50 \cdot (0.017)^2 \cdot 999.7}$$

$$\lambda = 0.0227$$

The limit flow rate for laminar flow is

$$\dot{V}_{cr} = \frac{\text{Re}_{cr} \pi d \mu}{4\rho}$$

$$\dot{V}_{cr} = \frac{2100 \cdot \pi \cdot 0.130 \cdot 1.2964 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 999.7}$$

$$\dot{V}_{cr} = 0.278 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

The pressure losses for laminar flow can be calculated using the Poiseuille formula (1.15)

$$\Delta p_{fL} = \frac{32\mu u L}{d^2}$$

Hence, taking the relation (1.7) into account, one can obtain the following expression

$$\Delta p_{fL} = \frac{128\mu L \dot{V}}{\pi d^4}$$

$$\Delta p_{fL} = \frac{128 \cdot 1.2964 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 0.278 \cdot 10^{-3}}{\pi (0.130)^4}$$

$$\Delta p_{fL} = 2.57 \text{ Pa}$$

Calculations of the resistance coefficient λ for the maximal flow rate in the laminar flow range are made by substituting the values: $a = 64$ and $Re_{cr} = 2100$ into the formula (1.14)

$$\lambda = \frac{64}{Re_{cr}} = \frac{64}{2100} = 0.030$$

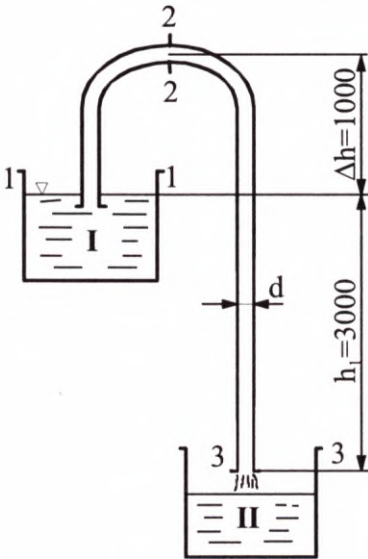


Fig. 1.6. Tanks with siphon

EXAMPLE 1.9

Water at a temperature 20°C is transferred with the use of a siphon from an open tank I (Fig. 1.6) with a constant liquid level to an open tank II. The ambient pressure is $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1. What must the diameter of the siphon pipe be so that the volumetric flow rate is $0.20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$?
2. What pressure is in the elbow of the siphon (the cross-section 2-2)?
3. Determine the flow character in the siphon pipe.

Neglect the resistance to flow.

The diameter of the siphon pipe for the given volumetric flow rate can be calculated using the rearranged Eq.(1.7); water velocity is calculated using the Bernoulli equation for the cross-sections (1-1) and (3-3) (Fig. 1.6)

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3$$

Under the conditions given in the example, it can be written that: $u_1 = 0$ (constant level), $z_1 = h_1$, $z_3 = 0$, $p_1 = p_3 = p_0$. So the Bernoulli equation can be simplified

$$u_3 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 3}$$

$$u_3 = 7.67 \text{ m/s}$$

$$d = \sqrt{\frac{4\dot{V}}{\pi u_3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 7.67}}$$

$$d = 5.76 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

To calculate pressure p_2 in the elbow of the siphon it is necessary to write the Bernoulli equation for the cross-sections (1-1) and (2-2)

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Taking into account the conditions: $z_1 = 0$, $z_2 = \Delta h$, $p_1 = p_0$, $u_1 = 0$ and the equation of continuity, of which it comes out that $u_2 = u_3$, one can get the expression

$$p_2 = p_1 - \Delta h \rho g - \frac{u_3^2 \rho}{2}$$

$$p_2 = 1.013 \cdot 10^5 - 1 \cdot 998.2 \cdot 9.81 - \frac{(7.67)^2 \cdot 998.2}{2}$$

$$p_2 = 0.621 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Determination of the flow character in the pipe requires calculation of the Reynolds number

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{7.67 \cdot 5.76 \cdot 10^{-3} \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}}$$

$$\text{Re} = 44352$$

So the flow is turbulent.

EXAMPLE 1.10

Calculate the height to which water is being lifted by the fountain shown in Fig. 1.7. Find pressure at the bottom of the conical fountain nozzle. The volumetric flow rate of water is $0.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ at 20°C . The barometric pressure is $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Conduct the calculations for: $D = 0.04 \text{ m}$, $d = 0.01 \text{ m}$, $h = 0.1 \text{ m}$. Neglect the resistance to flow.

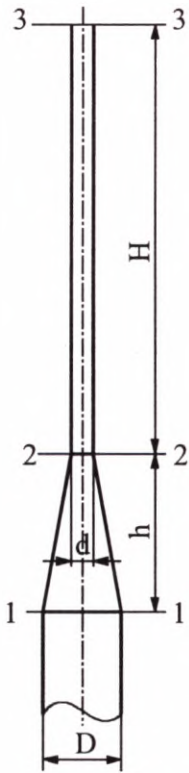


Fig. 1.7. Fountain

The height to which water is being lifted can be calculated using the Bernoulli equation for the cross-sections (2-2) and (3-3) (Fig.1.7)

$$\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{u_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3$$

Under the conditions given in this example, it can be written that

$$p_2 = p_3 = p_0, \quad z_3 - z_2 = H, \quad u_3 = 0$$

so

$$H = \frac{u_2^2}{2g}$$

Velocity u_2 was determined using the formula (1.7)

$$u_2 = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2}$$

Substituting the numerical data, one obtained

$$u_2 = \frac{4 \cdot 0.8 \cdot 10^{-3}}{\pi (0.01)^2} = 10.19 \text{ m/s}$$

$$H = \frac{(10.19)^2}{2 \cdot 9.81} = 5.29 \text{ m}$$

To calculate pressure at the bottom of the nozzle the Bernoulli equation for the cross-sections (1-1) and (3-3) must be implemented

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3$$

Taking into account that $p_3 = p_0$, $u_3 = 0$, $z_3 - z_1 = h + H$ and using the relation (1.10)

$$u_1 = u_2 \left(\frac{d}{D} \right)^2$$

one can get the expression

$$p_1 = \rho g \left(\frac{p_0}{\rho g} + H + h - \frac{u_2^2 d^4}{2gD^4} \right)$$

$$p_1 = 998.2 \cdot 9.81 \cdot \left(\frac{10^5}{998.2 \cdot 9.81} + 5.29 + 0.1 - \frac{(10.19)^2 \cdot (0.01)^4}{2 \cdot 9.81 \cdot (0.04)^4} \right)$$

$$p_1 = 1.522 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

EXERCISE 1.1

Calculate the limit velocity between laminar and transient flow for the case in which liquid of density 963 kg/m^3 and the coefficient of viscosity $35 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ is flowing in a straight, smooth, rectangular pipe, which dimensions are as follows: $a = 0.03 \text{ m}$, $b = 0.02 \text{ m}$.

Answer: $u = 3.18 \text{ m/s}$.

EXERCISE 1.2

Water is flowing through a hydraulically smooth, 0.30 m diameter pipeline at the velocity of 2.5 m/s at 20°C . Calculate the pressure loss through a 300 m section of the pipeline.

Answer: $\Delta p_{\mu} = 3.36 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

EXERCISE 1.3

Some liquid is flowing through a 50 mm diameter pipeline at the rate of $7 \text{ m}^3/\text{h}$. What will the pressure loss change be if:

- the flow rate rises twice,
 - a different pipe, which diameter is twice the diameter of the given pipeline, is installed.
- Assume that liquid velocity change does not cause the resistance coefficient change.

Answer: a) the pressure loss will be 4 times higher,
b) the pressure loss will be 2^5 times lower.

EXERCISE 1.4

A "pipe in pipe" type apparatus (Fig. 1.8) consists of two concentric pipes. The dimensions of its external pipe are: an internal diameter 79 mm , thickness 5 mm . The internal pipe has the following dimensions: an internal diameter 44.5 mm , thickness 3.5 mm .

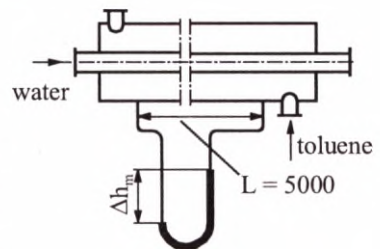


Fig. 1.8. "Pipe in pipe" type apparatus

The pipes are hydraulically smooth. Toluene at the rate of 1900 kg/h ($\rho = 870 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.448 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$) is flowing through the annular space between them, while water is flowing in the internal pipe at velocity of 0.815 m/s at a temperature 20°C. Calculate:

- 1) the pressure losses through 1 m of the pipe in which toluene and water is flowing,
- 2) a deflection of a differential water manometer (Fig. 1.8) if the distance between the impulse taps is 5 m.

Answer:

- 1) $\Delta p_{fl}/L = 170.9 \text{ Pa/m}$ – for water,
 $\Delta p_{fl}/L = 22.7 \text{ Pa/m}$ – for toluene,
- 2) $\Delta h_m = 0.089 \text{ m}$.

EXERCISE 1.5

Liquid ($\rho = 905 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 7.24 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$) is flowing through a hydraulically smooth pipe of diameter 0,1 m and length 140 m. The volumetric flow rate of the liquid is 0.01 m³/s. The resistance to flow is 3.35 m of the liquid column. Calculate the value of the resistance coefficient λ and compare it with the value obtained using the formula (1.16).

Answer: $\lambda = 0.0290$ (obtained by the measurement), $\lambda = 0.0282$ (obtained using the formula (1.16)).

EXERCISE 1.6

Calculate the minimal diameter of a 200 m-long pipe in which water is flowing at velocity 1.5 m/s at a temperature 20°C. The admissible value of the hydraulic resistance is 10 m of the water column. Assume that the pipe is hydraulically smooth.

Tip: Use the trail-and-error method, assuming initially that the resistance coefficient value is $\lambda = 0.02$.

Answer: $d = 0.045 \text{ m}$.

EXERCISE 1.7

Water is flowing at the rate of 2.16 kg/s in a straight, hydraulically smooth pipe, which diameter in the cross-section A–A is 50 mm (Fig. 1.4). A temperature is 20°C. The pipe is at $\alpha = 30^\circ$ angle to the ground. The pipe starts to converge from some point. The cross-section B–B diameter is 30 mm. Pressure in the cross-section A–A is $p_A = 2.45 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. The distance between the cross-sections A–A and B–B is 8 m. Neglect the resistance to flow. Calculate:

- 1) pressure in the cross-section B–B,
- 2) velocity of water in the cross-section A–A which is necessary to obtain the Reynolds number equal to 2100.

Answer: $p_B = 2.017 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $u = 0.042 \text{ m/s}$.

EXERCISE 1.8

1200 m³/h of water is to be transported through a pipeline of a diameter 0.5 m and length 3 km. A temperature of water is 10°C. An absolute roughness of the pipeline is equal to $e = 0,6$ mm. What pressure must a pump generate if pressure at the water abstraction point is to be $8 \cdot 10^5$ Pa?

Answer: $9.8 \cdot 10^5$ Pa.

EXERCISE 1.9

Air is flowing at 40°C through a straight, horizontal, hydraulically smooth pipeline of an internal diameter 147 mm. An impact tube connected with a water differential manometer was placed in the axis of the pipeline (Fig. 1.1) in order to determine the flow rate of air. The deflection of the manometer is 13 mm H₂O. Calculate the volumetric flow rate of air if pressure in the pipeline is approximately equal to the atmospheric pressure.

Answer: $\dot{V} = 0.211$ m³/s.

EXERCISE 1.10

Calculate velocity and the resistance to flow in a coiled tube in which water is flowing at the rate of 1.135 kg/s at a temperature 30°C. The device is made of a steel tube, which external diameter is 43 mm and thickness is 2.5 mm. The absolute roughness of the tube surface is $e = 0.2$ mm. The device diameter is 1 m; it consists of 10 coils.

Tip: The resistance coefficient λ_w for a coiled tube is calculated using the equation

$$\lambda_w = \lambda_{straight\ tube} \left(1 + 3.54 \frac{d}{D} \right)$$

where:

d – tube diameter, m,

D – diameter of coils, m.

Answer: $u = 1$ m/s, $\Delta p_{fl} = 0.144 \cdot 10^5$ Pa.

EXERCISE 1.11

Air is flowing at a temperature 50°C through a hydraulically smooth pipe of diameter 90 mm. An orifice flowmeter of diameter $d_0 = 49.3$ mm was installed on the pipe (Fig. 1.2). The deflection of a water differential manometer connected with the orifice is 400 mm. Calculate average air velocity, assuming that $\varepsilon \cong 1$ and $\alpha = 0.64$.

Answer: $u = 16.3$ m/s.

2. LIQUID OUTFLOW FROM TANKS

2.1. OUTFLOW VELOCITY

The Bernoulli equation for real liquid flowing from a tank can be expressed as

$$p_1 + \frac{u_1^2 \rho}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{u_2^2 \rho}{2} + \rho g z_2 + \Delta p_f \quad (2.1)$$

where index 1 refers to a liquid surface and index 2 – to an outflow orifice (Fig. 2.1).

Taking into consideration the equation of continuity $Su_1 = su_2$, where S denotes a cross-sectional area at level 1, while s – a cross-sectional area of liquid stream flowing from the tank, one can obtain

$$u = u_2 = \sqrt{\frac{2gh + \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2 - \Delta p_f)}{1 - \left(\frac{s}{S}\right)^2}} \quad (2.2)$$

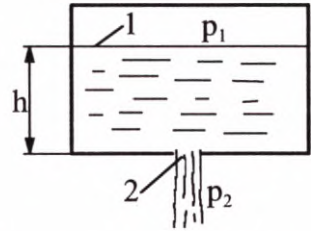


Fig. 2.1. Liquid outflow from tank

The above equation takes into account only local resistance due to the outflow, which is given as Δp_f . A velocity u_1 is small compared with u_2 , so frictional resistance is not taken into consideration.

Because s is usually much smaller than S , it is often assumed that $1 - (s/S)^2 \cong 1$. When pressure above the liquid surface is the same as ambient pressure (e.g. outflow from an open tank), then $p_1 = p_2$. Under the above assumptions and if the frictional resistance is not taken into account, Eq. (2.2) takes the form

$$u = \sqrt{2gh} \quad (2.3)$$

which for ideal liquid is the same as the Torricelli's law for bodies falling freely from height h .

The real outflow velocity can be calculated by multiplying the velocity given by Eq. (2.2) by the velocity coefficient, which takes into account a local resistance of outflow

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \quad (2.4)$$

where: ζ – the coefficient of local resistance (which is approximately equal to 0.06 for a small sharp-edged orifice and for high Reynolds numbers).

A cross-sectional area of outflowing stream is usually smaller than an orifice's cross-sectional area and the ratio of these areas is called the contraction coefficient

$$\alpha = \frac{S_{\text{stream}}}{S_{\text{orifice}}} \quad (2.5)$$

So the volumetric flow rate of liquid flowing from an open tank can be written as

$$\dot{V} = S_{\text{stream}} u_{\text{real}} = \alpha \varphi S_{\text{orifice}} \sqrt{2gh} \quad (2.6)$$

or

$$\dot{V} = S_{\text{orifice}} \psi \sqrt{2gh} \quad (2.7)$$

where: $\psi = \alpha \cdot \varphi$ is the discharge coefficient.

Relations between the above coefficients and the Reynolds number for outflow through a small circular sharp-edged orifice are presented in Fig. 2.2. Values of the coefficients for $Re > 10^5$ can be assumed to be constant and equal to: $\varphi \cong 0.97$; $\alpha \cong 0.62$; $\psi \cong 0.60$.

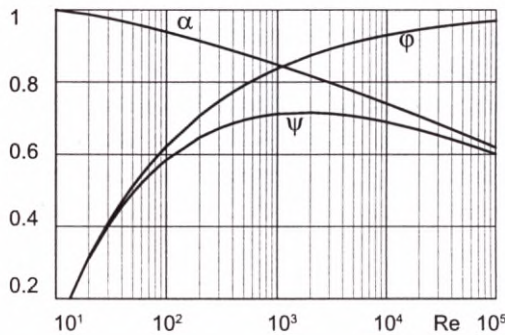


Fig. 2.2. Relation between coefficients: φ , α i ψ and the Reynolds number

If liquid is flowing through additional local losses, they must be taken into account by substituting $\Sigma\zeta$ instead of ζ in Eq. (2.4). Value of the coefficient ψ ,

which is read from the chart 2.2, can be divided by $\sqrt{1 + \sum \zeta}$. The influence of velocity changes on values of φ , α and ψ is usually not taken into account; values for an initial velocity are assumed to be constant.

The contraction coefficient α for sharp-edged orifices and high Reynolds values can be calculated using the equation

$$\alpha = 0.62 + 0.38 \left(\frac{s}{S} \right)^2 \quad (2.8)$$

For smooth-edged orifices it can be assumed that $\alpha \cong 1$.

The volumetric flow rate through a rectangular thin-walled weir (Fig. 2.3) is calculated with the use of the Poleni's equation

$$\dot{V} = 0.67 \varphi b H \sqrt{2gH} \quad (2.9)$$

where

$$0.60 < \varphi < 0.65$$

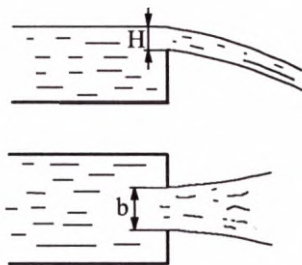


Fig. 2.3. Rectangular weir

2.2. TIME OF LIQUID OUTFLOW

Because an outflow velocity varies with time due to height of a liquid column change, time of outflow is calculated by solving the differential equation

$$dV = -S \cdot dh = \dot{V} \cdot dt \quad (2.10)$$

Substituting the relation (2.7) into the formula (2.10) and integrating, one can get

$$t = \frac{1}{s\psi\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{S \cdot dh}{\sqrt{h}} \quad (2.11)$$

If it comes from geometry, that S is constant, it may be written before the integral sign. Otherwise, a relation between S and h must be found and taken into account during integration. The relation between liquid levels in Eq. (2.11) is as follows: $H_1 > H_2$, because liquid level is going down.

When liquid is flowing into a tank at the constant rate \dot{V}_{inlet} , and at the same time gravitational outflow takes place, Eq. (2.10) will take the form

$$dV = S \cdot dh = (\dot{V}_{\text{inlet}} - \dot{V}_{\text{outlet}}) \cdot dt \quad (2.12)$$

or after substitution of Eq. (2.7) and integration

$$t = \int_{H_1}^{H_2} \frac{S \cdot dh}{\dot{V}_{\text{inlet}} - s\psi\sqrt{2gh}} \quad (2.13)$$

If a denominator of the above expression is positive for each h in the range (H_1, H_2) , where $H_2 > H_1$, liquid level will be rising from H_1 to H_2 during time t .

2.3. LIQUID LEVEL EQUALIZING IN COMMUNICATING VESSELS

The following argumentation can be conducted in order to calculate time necessary to make the liquid level equalize in communicating (connected) vessels of cross-sectional areas S_1 and S_2 (Fig. 2.4).

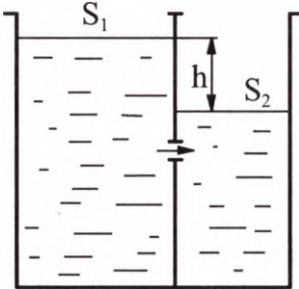


Fig. 2.4. Communicating vessels

Flow is caused by level difference h ; during time Δt liquid of volume ΔV is flowing from the left vessel to the right one; as a result level in the left vessel drops by $\Delta V/S_1$, while level in the right vessel increases by $\Delta V/S_2$. The total level difference changes by

$$h = -\Delta V \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) = -\Delta V \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \quad (2.14)$$

Introducing differentials, one can write

$$dV = -\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \cdot dh \quad (2.15)$$

Similarly to Eq. (2.10), it can be written that

$$dV = -\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \cdot dh = \dot{V} \cdot dt \quad (2.16)$$

2.4. MARIOTTE VESSEL

The so-called Mariotte vessel is used for gravitational outflow of liquid at the constant volumetric flow rate. It is a closed vessel with a pipe communicating

with atmosphere, which is submerged to some depth (Fig. 2.5). Liquid is flowing from the vessel through an orifice in its bottom at a constant velocity $u = \varphi\sqrt{2gh}$, where h is not dependent on liquid level height but depends only on depth of pipe submergence. Air is flowing into the vessel in place of the liquid that is flowing from it and as a result pressure at level h is equal to the atmospheric pressure.

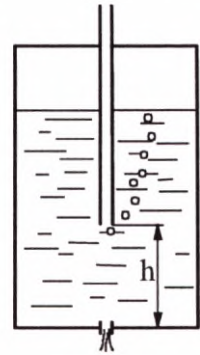


Fig. 2.5. Mariotte vessel

2.5. OUTFLOW PIPE

Liquid is flowing from a tank through an outflow pipe at a velocity corresponding to a liquid column of height h (Fig. 2.6a). The same outflow velocity ($u = \varphi\sqrt{2gh}$) would be reached by liquid flowing from a tank with an orifice in the bottom, in which a liquid column would have height h (Fig. 2.6b). Difference in the distribution of pressure at different levels in these two cases is illustrated by graphs in Fig. 2.6, where Δp means gauge pressure i.e. pressure above atmospheric.

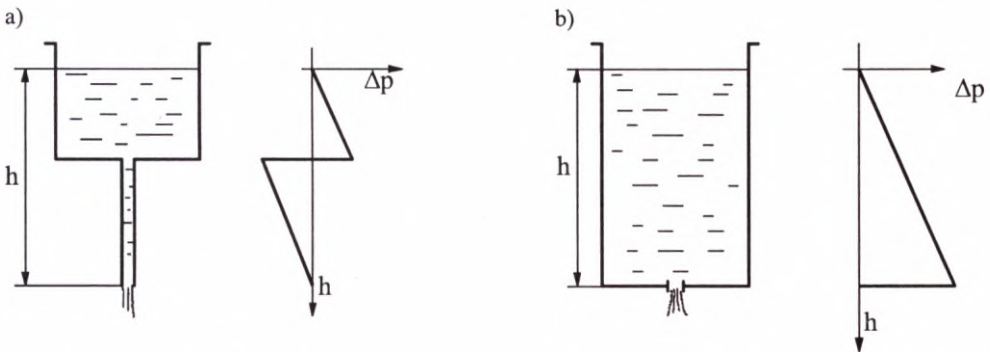


Fig. 2.6. Liquid pressure distribution: a) in tank with outflow pipe, b) in tank without outflow pipe

EXAMPLE 2.1

Water at the rate of $\dot{V} = 80 \text{ dm}^3/\text{s}$ is flowing into a tank divided into two sections by a partition with an orifice. The orifice diameter is $d = 100 \text{ mm}$. Water is flowing from each section through orifices in the bottom, which diameters are the same as a diameter of the orifice in the partition. The discharge coefficients are as follows: $\psi_1 = 0.6$ for the orifice in the partition and $\psi_2 = 0.82$ for the orifices in the bottom. Calculate flow rate in each of the orifices in case of a stationary flow, assuming that the orifice in the bottom is submerged in water (Fig. 2.7).

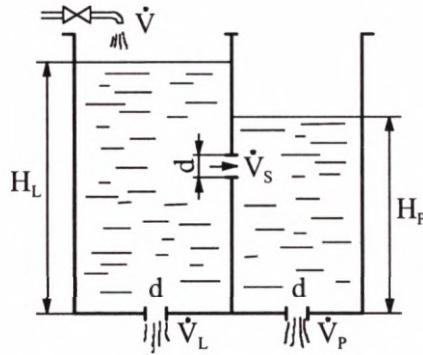


Fig. 2.7. Tank with partition

For a stationary state it can be written that

$$\dot{V} = \dot{V}_L + \dot{V}_P$$

and

$$\dot{V}_S = \dot{V}_P$$

Flow rates are equal to

$$\dot{V}_L = \psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH_L}$$

$$\dot{V}_P = \psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH_P}$$

$$\dot{V}_S = \psi_1 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(H_L - H_P)}$$

Substituting into the stationary-state equations, one can obtain

$$\dot{V} = \psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g} (\sqrt{H_L} + \sqrt{H_P})$$

$$\psi_1 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g(H_L - H_P)} = \psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH_P}$$

After transformation of the last equation, it can be written that

$$H_L = H_P \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{\psi_1^2}$$

Substituting to the previous equation, one can get the relation

$$\dot{V} = \psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g} \left(\sqrt{H_p} \sqrt{\frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{\psi_1^2}} + \sqrt{H_p} \right)$$

It can be calculated from the above expression that

$$\sqrt{H_p} = \frac{\dot{V}}{\psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g} \left(1 + \sqrt{\frac{\psi_1^2 + \psi_2^2}{\psi_1^2}} \right)}$$

$$\sqrt{H_p} = \frac{0.080}{0.82 \cdot \frac{\pi \cdot (0.1)^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9.81} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{(0.6)^2 + (0.82)^2}{(0.6)^2}} \right)} = 1.041 \text{ m}^{1/2}$$

$$\dot{V}_p = 0.82 \cdot \frac{\pi (0.1)^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9.81} \cdot 1.041 = 0.0297 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{V}_L = \dot{V} - \dot{V}_p = 0.080 - 0.0297 = 0.0503 \text{ m}^3/\text{s}$$

EXAMPLE 2.2

Liquid which density is $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$ is flowing gravitationally through a $d = 50 \text{ mm}$ diameter pipe from an open $D = 0.5 \text{ m}$ diameter tank, which is $H_0 = 8 \text{ m}$ above the outflow level, to a tank, where pressure is $p = 0.15 \text{ MPa}$. The discharge coefficient is assumed to be constant and equal to $\psi = 0.62$. Atmospheric pressure is $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$. What is the mass flow rate of liquid flowing into the pressure tank if liquid level is maintained at constant height $H_1 = 1 \text{ m}$? What is the time necessary to remove liquid from the upper tank after liquid inflow is stopped? When will the liquid flow stop? At which level liquid will stop in the pipe?

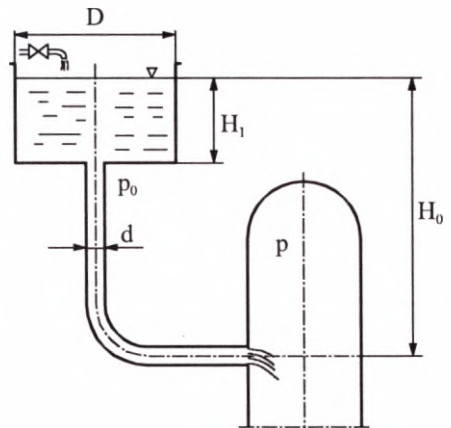


Fig. 2.8. Liquid outflow to pressure tank

Taking into account that $d^2 \ll D^2$ and including hydraulic resistance to the discharge coefficient, one can obtain a velocity for steady inflow using Eq. (2.2)

$$u = \psi \sqrt{2gH_0 - \frac{2(p-p_0)}{\rho}}$$

$$u = 0.62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 8 - \frac{2 \cdot (0.15 - 0.1) \cdot 10^6}{1030}} = 4.8 \text{ m/s}$$

The mass flow rate is equal to

$$\dot{m} = \dot{V} \rho = \frac{\pi d^2}{4} u \rho = \frac{\pi (0.05)^2}{4} \cdot 4.8 \cdot 1030 = 9.7 \text{ kg/s}$$

If inflow is stopped, when level difference equals H , it can be written that

$$-\frac{\pi D^2}{4} dH = \frac{\pi d^2}{4} \cdot u \cdot dt$$

The outflow time for the tank without a pipe is

$$t_1 = \frac{D^2}{\psi d^2} \int_{H_0-H_1}^{H_0} \frac{dH}{\sqrt{2gH - \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}}$$

After integration by parts, one obtains

$$t_1 = \frac{D^2}{\psi d^2 g} \left(\sqrt{2gH_0 - \frac{2\Delta p}{\rho}} - \sqrt{2g(H_0 - H_1) - \frac{2\Delta p}{\rho}} \right)$$

$$t_1 = \frac{(0.5)^2}{0.62 \cdot (0.05)^2 \cdot 9.81} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 8 - \frac{2 \cdot (0.15 - 0.1) \cdot 10^6}{1030}} - \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot (8 - 1) - \frac{2 \cdot (0.15 - 0.1) \cdot 10^6}{1030}} \right)$$

$$t_1 = 22.9 \text{ s}$$

Level will stabilize at height H_2 , which results from pressure equilibrium

$$\rho g H_2 = p - p_0$$

$$H_2 = \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{(0.15 - 0.1) \cdot 10^6}{1030 \cdot 9.81} = 4.95 \text{ m}$$

The time of liquid outflow from the pipe, until this level is reached, is equal to

$$t_2 = \frac{1}{\psi} \int_{H_2}^{H_0 - H_1} \frac{dH}{\sqrt{2gH - \frac{2\Delta p}{\rho}}} = \frac{1}{\psi g} \left(\sqrt{2g(H_0 - H_1) - \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} - \sqrt{2gH_2 - \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} \right)$$

$$t_2 = \frac{1}{0.62 \cdot 9.81} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 7 - \frac{2 \cdot (0.15 - 0.1) \cdot 10^6}{1030}} - 0 \right) = 1.05 \text{ s}$$

Liquid outflow will stop after $22.9 + 1.05 = 23.95$ s from the moment in which inflow is stopped.

EXAMPLE 2.3

Calculate the time necessary to fill a square tank, which height is $h = 1.6$ m and bottom side length is $a = 2$ m, with liquid flowing through a pipe of length $L = 7$ m and diameter $d = 50$ mm from a tank with constant liquid level at height $H = 5$ m above the pipe outlet. An outflow stub pipe has the same diameter as the pipe and is placed in the middle height of the tank. The friction coefficient for the pipe is assumed to be constant and equal to $\lambda = 0.02$, the contraction coefficient $\alpha_1 = 0.65$, local losses are neglected. After the orifice is submerged, the contraction coefficient is $\alpha_2 = 0.8$.

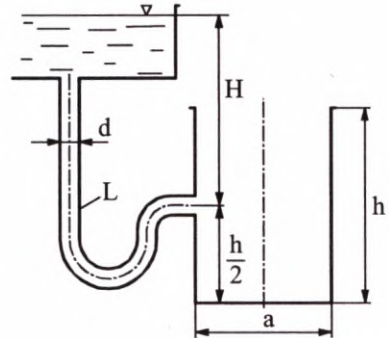


Fig. 2.9. Filling tank with liquid

The discharge coefficient is equal to

$$\psi_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{d}}} = \frac{0.65}{\sqrt{1 + 0.02 \cdot \frac{7}{0.05}}} = 0.33$$

The time elapsing until half of the tank is filled (at a constant velocity) is

$$t_1 = \frac{V_1}{\dot{V}_1}$$

$$V_1 = a^2 \cdot \frac{h}{2} = 2^2 \cdot \frac{1.6}{2} = 3.2 \text{ m}^3$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \psi_1 \sqrt{2gH} = \frac{\pi \cdot (0.05)^2}{4} \cdot 0.33 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 5} = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t_1 = \frac{3.2}{6.4 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ s}$$

While the upper part of the tank is being filled, an outflow velocity changes; in this case Eq. (2.11) is used

$$t_2 = \frac{S}{\psi_2 s \sqrt{2g}} \int_{H-\frac{h}{2}}^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2a^2}{\psi_2 \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g}} \left(\sqrt{H} - \sqrt{H - \frac{h}{2}} \right)$$

The discharge coefficient for the submerged orifice has a value of

$$\psi_2 = \frac{0.8}{\sqrt{1 + 0.02 \cdot \frac{7}{0.05}}} = 0.41$$

The time necessary to fill the second part of the tank is equal to

$$t_2 = \frac{2 \cdot 2^2}{0.41 \cdot \frac{\pi \cdot (0.05)^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81}} \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{1.6}{2}} \right) = 419 \text{ s}$$

The total tank filling time equals

$$t_1 + t_2 = 500 + 419 = 919 \text{ s}$$

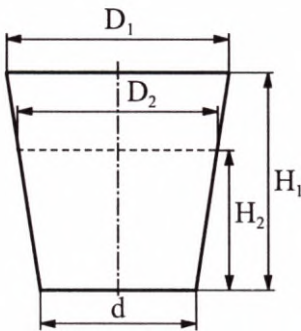


Fig. 2.10. Truncated cone (bucket)

EXAMPLE 2.4

There is a $\delta = 1$ cm diameter orifice in a bottom of a bucket (Fig. 2.10), which dimensions are as follows: $D_1 = 0.3$ m, $d = 0.2$ m, $H_1 = 0.35$ m. Flow through the orifice is characterized by the coefficient $\psi = 0.6$. Initially the bucket was fully filled with water. What is the time required for half of water to flow from the bucket?

The following relation (Fig. 2.11) resulting from similarity of triangles is valid for a truncated cone

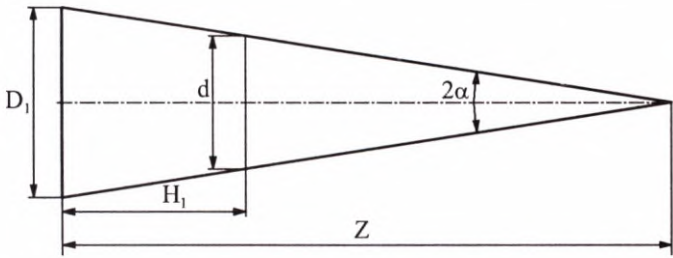


Fig. 2.11. Geometrical relations for cross-section of truncated cone

$$\frac{D_1}{Z} = \frac{d}{Z - H_1}$$

hence

$$Z = \frac{D_1 H_1}{D_1 - d}$$

Volume of a truncated cone can be calculated as

$$V_1 = \frac{\pi D_1^2}{12} \cdot Z - \frac{\pi d^2}{12} \cdot (Z - H_1)$$

Substituting the relation for Z and transforming, one can obtain

$$V_1 = \frac{\pi}{12} \cdot H_1 (D_1^2 + D_1 d + d^2) = \frac{\pi}{12} \cdot 0.35 \cdot [(0.3)^2 + 0.3 \cdot 0.2 + (0.2)^2] = 0.0174 \text{ m}^3$$

To find height of a liquid column after half of water flows out, the formula for volume must be rearranged to the form

$$\frac{D_2 - d}{2H_2} = \text{tg } \alpha$$

Hence

$$H_2 = \frac{D_2 - d}{2 \cdot \text{tg } \alpha}$$

Half of the bucket volume is equal to

$$V_2 = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{D_2 - d}{2 \cdot \text{tg } \alpha} \cdot (D_2^2 + D_2 d + d^2)$$

Hence

$$D_2 = \sqrt[3]{d^3 + \frac{24V_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\pi}}$$

Under the given conditions

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0.3 - 0.2}{2 \cdot 0.35} = 0.1429$$

Half of liquid volume equals 0.0087 m^3 , a liquid surface diameter is

$$D_2 = \sqrt[3]{(0.2)^3 + \frac{24 \cdot 0.0087 \cdot 0.1429}{\pi}} = 0.26 \text{ m}$$

and liquid column height is

$$H_2 = \frac{D_2 - d}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0.26 - 0.2}{2 \cdot 0.1429} = 0.21 \text{ m}$$

Eq.(2.11) can be used for outflow time calculations; according to that formula, an area of liquid surface is equal to

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} (2H \cdot \operatorname{tg} \alpha + d)^2$$

where D and H denote a current diameter and height. The outflow time for half of water (Eq. (2.11)) equals

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\psi \delta^2 \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{4H^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + 4Hd \cdot \operatorname{tg} \alpha + d^2}{\sqrt{H}} dH = \\ &= \frac{1}{\psi \delta^2 \sqrt{2g}} \left[\frac{8}{5} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (H_1^2 \sqrt{H_1} - H_2^2 \sqrt{H_2}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \cdot d \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (H_1 \sqrt{H_1} - H_2 \sqrt{H_2}) + 2d^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \right] \\ t &= \frac{1}{0.6 \cdot (10^{-2})^2 \sqrt{2 \cdot 9.81}} \cdot \left\{ \frac{8}{5} \cdot (0.1429)^2 \cdot [(0.35)^2 \sqrt{0.35} - (0.21)^2 \sqrt{0.21}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \cdot 0.2 \cdot 0.1429 \cdot (0.35 \sqrt{0.35} - 0.21 \sqrt{0.21}) + 2(0.2)^2 (\sqrt{0.35} - \sqrt{0.21}) \right\} \end{aligned}$$

$$t = 78.3 \text{ s}$$

EXAMPLE 2.5

A cylindrical tank (Fig. 2.12) filled with liquid is being emptied because of flow through an outflow pipe of a diameter $d = 15$ mm and through an orifice in the wall, which diameter is the same as of the pipe. The discharge coefficient for each orifice is $\psi = 0.62$. Calculate the tank emptying time. Data: $D = 1$ m, $H = 2$ m, $Z = 1$ m, $L = 3$ m.

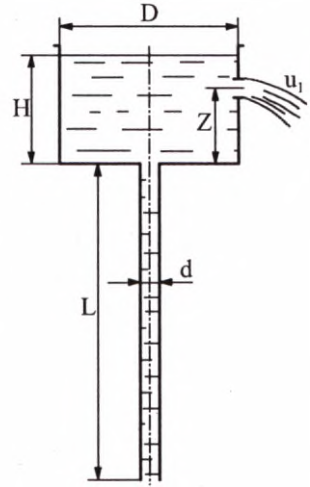


Fig. 2.12. For the Example (2.5)

When liquid flows through two orifices of the same diameter, Eq. (2.10) can be written in the modified form

$$-\frac{\pi D^2}{4} \cdot dh = (u_1 + u_2) \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot dt$$

Velocities u_1 and u_2 are given by the equations

$$u_1 = \psi \sqrt{2gh}$$

$$u_2 = \psi \sqrt{2g(h + L + Z)}$$

where h means height of a liquid column measured from the orifice in the wall. Substituting into the differential equation and integrating, one obtains

$$t_1 = \frac{D^2}{d^2 \psi \sqrt{2g}} \int_0^{H-Z} \frac{dh}{\sqrt{h+L+Z} + \sqrt{h}} = \frac{D^2}{d^2 \psi \sqrt{2g}} \int_0^{H-Z} \frac{\sqrt{h+L+Z} - \sqrt{h}}{h+L+Z-h} dh$$

$$t_1 = \frac{2D^2}{3d^2 \psi \sqrt{2g} (L+Z)} \left[(H+L)^{3/2} - (L+Z)^{3/2} - (H-Z)^{3/2} \right]$$

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1^2}{3 \cdot (0.015)^2 \cdot 0.62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81} \cdot (3+1)} \cdot \left[(2+3)\sqrt{2+3} - (3+1)\sqrt{3+1} - (2-1)\sqrt{2-1} \right]$$

$$t_1 = 588.1 \text{ s}$$

The rest of liquid is flowing from the tank through the outflow pipe

$$t_2 = \frac{D^2}{d^2 \psi \sqrt{2g}} \int_L^{L+Z} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2D^2}{d^2 \psi \sqrt{2g}} (\sqrt{L+Z} - \sqrt{L})$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot 1^2}{(0.015)^2 \cdot 0.62 \sqrt{2 \cdot 9.81}} (\sqrt{3+1} - \sqrt{3}) = 867.3 \text{ s}$$

The time of outflow through the pipe is

$$t_3 = \frac{1}{\psi \sqrt{2g}} \int_0^L \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\psi} \sqrt{\frac{2L}{g}} = \frac{1}{0.62} \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9.81}} = 1.3 \text{ s}$$

The total outflow time is equal to

$$t_1 + t_2 + t_3 = 588.1 + 867.3 + 1.3 = 1456.7 \text{ s}$$

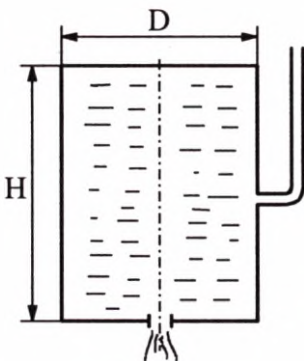


Fig. 2.13. Liquid outflow from Mariotte tank

EXAMPLE 2.6

Evaluate the outflow time required to empty a cylindrical closed tank (Fig. 2.13) of dimensions $D = 1 \text{ m}$, $H = 2 \text{ m}$. A pipe connected with atmosphere is placed at half-height of a tank's side-wall. Liquid is flowing through an orifice in the bottom which cross-sectional area is equal to $s = 0.006 \text{ m}^2$. The discharge coefficient is $\psi = 0.62$.

When the pipe supplying air is submerged, the outflow velocity is constant

$$u = \psi \sqrt{2g \frac{H}{2}} = 0.62 \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \frac{2}{2}} = 2.746 \text{ m/s}$$

The outflow time for half of liquid volume is (Mariotte vessel)

$$t_1 = \frac{V}{s \cdot u}$$

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{H}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \cdot \frac{2}{2} = 0.785 \text{ m}^3$$

$$t_1 = \frac{0.785}{0.006 \cdot 2.746} = 47.6 \text{ s}$$

The rest of liquid is flowing through the orifice at a variable velocity. In this case the outflow time, according to Eq. (2.11), can be calculated as

$$t_2 = \frac{S}{s\psi\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{H}{2}} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2S}{s\psi\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{H}{2}}$$

$$t_2 = \frac{2\pi \cdot 1^2}{4 \cdot 0.006 \cdot 0.62 \sqrt{2 \cdot 9.81}} \sqrt{\frac{2}{2}} = 95.3 \text{ s}$$

So the total time taken for the tank to empty is

$$t_1 + t_2 = 47.6 + 95.3 = 142.9 \text{ s}$$

EXAMPLE 2.7

Compare how many times longer is the emptying time for a hemispherical vessel which spherical part is pointed upwards (Fig. 2.14a) than the emptying time for the same vessel with spherical part pointed downwards (Fig. 2.14b). In both cases liquid is flowing through the same orifices and atmospheric pressure is exerted on the liquid surface.

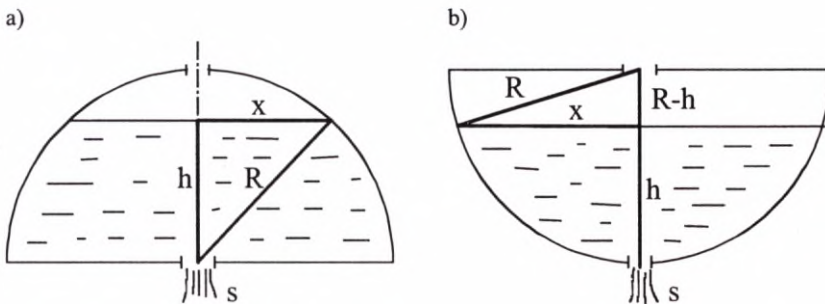


Fig. 2.14. Hemisphere-shaped vessels

In both cases the outflow time is calculated using Eq. (2.11)

$$t = \frac{1}{s\psi\sqrt{2g}} \int_0^R \frac{S \cdot dh}{\sqrt{h}}$$

but the relation between a liquid surface cross-sectional area and liquid height is different in each case.

- In case „a” it can be written that $S_a = \pi x^2$ and using the Pythagorean theorem:
 $x^2 = R^2 - h^2$.
- In case „b”:
 $S_b = \pi x^2$

$$x^2 = R^2 - (R-h)^2 = R^2 - R^2 + 2hR - h^2 = 2hR - h^2$$

The outflow times are equal to

$$t_a = \frac{\pi}{s\psi\sqrt{2g}} \left[\int_0^R \frac{R^2 dh}{\sqrt{h}} - \int_0^R \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh \right] = \frac{\pi}{s\psi\sqrt{2g}} \left(2R^2\sqrt{R} - \frac{2}{5}\sqrt{R^5} \right)$$

$$t_a = \frac{8}{5} \frac{\pi}{s\psi\sqrt{2g}} \sqrt{R^5}$$

$$t_b = \frac{\pi}{s\psi\sqrt{2g}} \left[\int_0^R \frac{2hR}{\sqrt{h}} dh - \int_0^R \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh \right] = \frac{\pi}{s\psi\sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3}R\sqrt{R^3} - \frac{2}{5}\sqrt{R^5} \right)$$

$$t_b = \frac{14}{15} \frac{\pi}{s\psi\sqrt{2g}} \sqrt{R^5}$$

So the emptying time in case „a” will be

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{8}{5} : \frac{14}{15} = \frac{12}{7}$$

times longer than in case „b”.

EXAMPLE 2.8

Evaluate emptying time for a cistern in the shape of a horizontal cylinder of diameter $D = 0.3$ m and length $L = 0.5$ m. Liquid is flowing through an $d = 0.02$ m diameter orifice located in the cistern's bottom. Initially, there was $V = 20$ dm³ of liquid in the cistern. The discharge coefficient is $\psi = 0.62$.

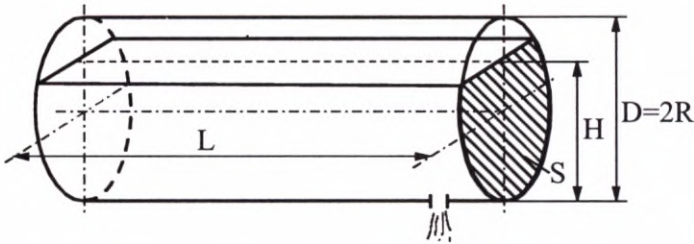


Fig. 2.15. Emptying of cistern

Volume of liquid in the cistern can be written as

$$V = S \cdot L$$

where S is an area of a segment of a circle (Fig. 2.15). It depends on height H , according to the relation

$$S = \frac{\pi R^2}{180^\circ} \arccos\left(1 - \frac{H}{R}\right) + R(H - R) \sqrt{\frac{H}{R} \left(2 - \frac{H}{R}\right)}$$

Value of S equals

$$S = \frac{V}{L} = \frac{0.02}{0.5} = 0.04 \text{ m}^2$$

So the following equation must be solved

$$f(H) = \frac{\pi \cdot (0.15)^2}{180^\circ} \arccos\left(1 - \frac{H}{0.15}\right) + 0.15 \cdot (H - 0.15) \sqrt{\frac{H}{0.15} \left(2 - \frac{H}{0.15}\right)} - 0.04 = 0$$

One chose the bisection method and was looking for the solution in the range (0.15; 0.3). Results of calculations are presented in the table.

H	$f(H)$
0.15	-0.00466
0.30	0.03068
0.225	0.01687
0.1875	0.00674
0.1688	0.00099
0.1594	-0.00184
0.1641	-0.00043
0.1664	0.00025
0.1652	

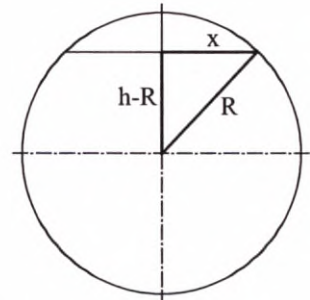


Fig. 2.16. Geometrical relations for cistern's cross-section

So it can be assumed that the height $H = 0.1652$ m. The outflow time is calculated using the formula (5.11)

$$t = \frac{4}{\pi d^2 \psi \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S \cdot dh}{\sqrt{h}}$$

where $S = 2 \cdot x \cdot L$. On the basis of Fig. 2.16 one can conclude that

$$x = \sqrt{R^2 - (h - R)^2} = \sqrt{(D - h)h}$$

After integration, one obtains

$$t = \frac{16 \cdot L}{3\pi d^2 \psi \sqrt{2g}} \left[D^{3/2} - (D-H)^{3/2} \right]$$

$$t = \frac{16 \cdot 0,5}{3\pi \cdot (0,02)^2 \cdot 0,62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \cdot \left[(0,3)^{3/2} - (0,3 - 0,1652)^{3/2} \right] = 88,7 \text{ s}$$

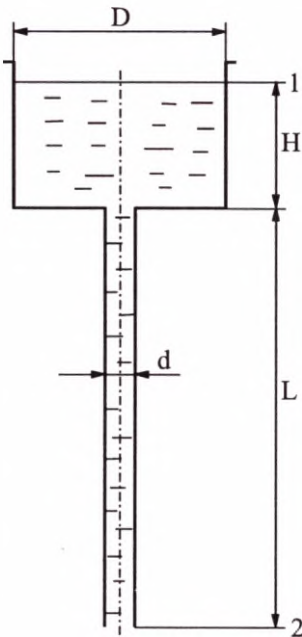


Fig. 2.17. Outflow from tank with glass outflow pipe

EXAMPLE 2.9

Calculate the outflow time of water flowing at a temperature 20°C from a cylindrical tank with a glass outflow pipe (Fig. 2.17). Tank dimensions are as follows: $D = 1$ m, $H = 2$ m, $L = 5$ m, $d = 0.01$ m. Use the Blasius formula in calculations. Neglect local losses and the time of flow through the pipe.

Density and the viscosity coefficient for water at 20°C can be found in the table AT-1: $\rho = 998,2$ kg/m³, $\mu = 0,9934 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s). The Bernoulli equation for cross-sections 1 and 2 reduces to the form

$$\rho gh = \frac{u^2 \rho}{2} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} \right)$$

where h denotes current liquid level measured from the outflow level; the friction resistance is taken into account only in the outflow pipe. In order to simplify later calculations, 1 in the brackets is neglected because it is much smaller than the term $\lambda L/d$, which equals about 15. The value of λ is substituted on the basis of the formula (1.16)

$$\rho gh = \frac{u^2 \rho}{2} \cdot \frac{0,3164 \cdot \mu^{0,25}}{u^{0,25} \cdot d^{0,25} \cdot \rho^{0,25}} \cdot \frac{L}{d}$$

After some transformations, one gets

$$u = 2,87 \cdot \frac{g^{0,571} h^{0,571} d^{0,714} \rho^{0,143}}{\mu^{0,143} L^{0,571}}$$

Denoting a cross-sectional area of the tank by S , and the cross-sectional area of the pipe by s , one can calculate the tank emptying time using the formula

$$t = \frac{S}{s} \int_L^{H+L} \frac{dh}{u} = \frac{D^2}{d^2} \frac{\mu^{0.143} L^{0.571}}{2.87 \cdot g^{0.571} d^{0.714} \rho^{0.143}} \int_L^{H+L} h^{-0.571} dh$$

$$t = 0.348 \cdot \frac{D^2 \mu^{0.143} L^{0.571}}{d^{2.714} g^{0.571} \rho^{0.143}} \cdot \left[(H+L)^{0.429} - L^{0.429} \right]$$

$$t = 0.348 \cdot \frac{1^2 \cdot (0.9934 \cdot 10^{-3})^{0.143} \cdot 5^{0.571}}{(0.01)^{2.714} \cdot (9.81)^{0.571} \cdot (998.2)^{0.143}} \left[(2+5)^{0.429} - (5)^{0.429} \right] = 2727 \text{ s}$$

It can be noticed that, in the face of a relatively weak relationship between the flow resistance and velocity ($\lambda \propto u^{0.25}$), the formula for the tank emptying time does not differ much from the equation, in which the resistance is included into ψ because is constant (compare Example 2.5).

EXAMPLE 2.10

Calculate the time necessary to transfer the whole content of the upper $D_1 = 1$ m diameter cylindrical tank in the amount of $V = 100 \text{ dm}^3$ (Fig. 2.18) to the lower $D_2 = 0.2$ m diameter tank through an outflow pipe of diameter $d = 0.025$ m and length $L = 6$ m. When the valve opens, liquid level in the lower tank is equal to the level of the outflow pipe tip. The discharge coefficient $\psi = 0.5$. Neglect the outflow pipe volume.

Initial liquid level in the upper tank is equal to

$$h_1 = \frac{4V}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0.1}{\pi \cdot 1^2} = 0.127 \text{ m}$$

Level difference (causing the flow), denoted as H , equals

- at the beginning of the process:
 $H_p = h_1 + L = 0.127 + 6 = 6.127 \text{ m}$
- at the end of the process:
 $H_k = L - \frac{4V}{\pi D_2^2} = 6 - \frac{4 \cdot 0.1}{\pi \cdot (0.2)^2} = 2.82 \text{ m}$

According to the formula (2.16)

$$-\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} dH = s\psi \sqrt{2gH} dt$$

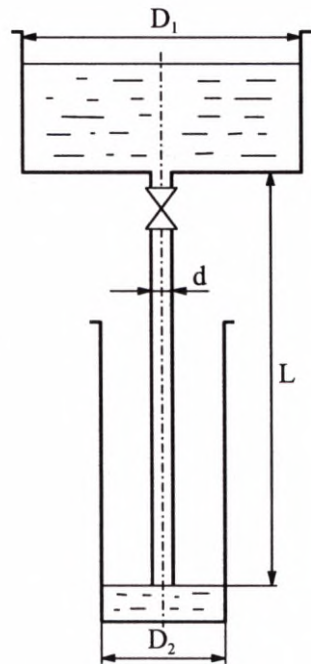


Fig. 2.18. Outflow through submerged pipe

and after integration

$$t = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{1}{s\psi\sqrt{2g}} \int_{H_k}^{H_p} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2S_1 S_2}{(S_1 + S_2)s\psi\sqrt{2g}} (\sqrt{H_p} - \sqrt{H_k})$$

Surface areas are equal to:

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 0.785 \text{ m}^2$$

$$S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.2)^2}{4} = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.025)^2}{4} = 4.906 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

and the outflow time is

$$t = \frac{2 \cdot 0.785 \cdot 0.0314}{(0.785 + 0.0314) \cdot 4.906 \cdot 10^{-4} \cdot 0.5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81}} (\sqrt{6.127} - \sqrt{2.82})$$

$$t = 44.2 \text{ s}$$

EXAMPLE 2.11

A perpendicular tank of length $L = 3$ m, width $B = 1$ m and height $H = 1.5$ m has an $d = 50$ mm diameter orifice in the bottom. Assuming that the discharge coefficient is equal to $\psi = 0.62$, calculate the time required for liquid level to reach steady and height of this level if $\dot{V} = 6$ dm³/s of water is flowing into the initially empty tank.

A cross-sectional area of the orifice in the bottom is

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0.05)^2}{4} = 19.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

After liquid reaches the steady level, inflow is equal to outflow

$$\dot{V} = su = s\psi\sqrt{2gH_0}$$

and liquid column height H_0 equals

$$H_0 = \frac{\dot{V}^2}{2\psi^2 s^2 g} = \frac{(0.006)^2}{2 \cdot (0.62)^2 \cdot (19.6 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 9.81} = 1.2381 \text{ m}$$

The time of reaching the steady level can be calculated on the basis of the following argumentation: amount of liquid in the tank increases by $(\dot{V} - s\psi) \cdot dt$ during time dt , what causes the level to increase by dh (Eq. 2.12)

$$S \cdot dh = (\dot{V} - s\psi\sqrt{2gh}) \cdot dt$$

After integration of this equation with boundaries $h = 0$ (empty tank) and $h = H_0$ (steady-state level), it is obtained that

$$t = \int_0^{H_0} \frac{S \cdot dh}{\dot{V} - s\psi\sqrt{2gh}} = \frac{S}{g s^2 \psi^2} \left[\dot{V} \cdot \ln \left(\frac{\dot{V}}{\dot{V} - s\psi\sqrt{2gH_0}} \right) - s\psi\sqrt{2gH_0} \right]$$

It should be noticed that substitution of previously calculated value 1.2381 m in place of H_0 causes that the value of the denominator is equal to 0 and from a mathematical point of view it will take an infinitely long time to reach the steady state. Practically it is enough to calculate the time at which the level will be for example lower by 0.81 cm than the steady-state level. Substituting $H_0 = 1.23$ m, one gets

$$t = \frac{3 \cdot 1}{9.81 \cdot (19.6 \cdot 10^{-4})^2 \cdot (0.62)^2} \cdot \left[0.006 \cdot \ln \left(\frac{0.006}{0.006 - 19.6 \cdot 10^{-4} \cdot 0.62 \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.23}} \right) - 19.6 \cdot 10^{-4} \cdot 0.62 \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.23} \right]$$

$$t = 5843 \text{ s}$$

Times of reaching selected liquid levels are presented below.

H_0 [m]	t [s]
1	1722
1.2	3938
1.23	5843
1.237	8304

More precise calculations do not have physical sense when taking into account the accuracy of both flow rate measurements and determination of the coefficient ψ .

EXAMPLE 2.12

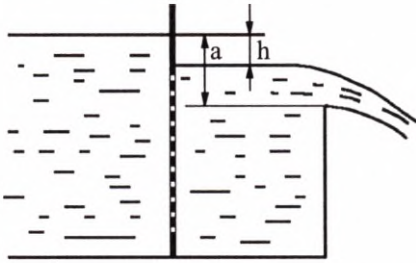


Fig. 2.19. Outflow through rectangular weir

Water is flowing from a tank (Fig. 2.19) through a thick-walled weir. Before the weir there is a perforated plate of a total area of perforations $S=0.25\text{ m}^2$. The perforations can be considered as independently working outflow orifices for which the discharge coefficient is $\psi = 0.6$. Weir edge width is $B = 0.8\text{ m}$, the velocity coefficient $\phi = 0.627$. Calculate the flow rate of water if level height before the plate in relation to the edge of the weir is $a = 0.4\text{ m}$. What is the value of height h ?

Because all plate's perforations are submerged they may be treated as a one orifice of surface S , through which water is flowing due to the liquid height difference h . According to the equations (2.7) and (2.9), for a steady flow it can be written that

$$\psi S \sqrt{2gh} = 0.67 \phi B (a - h) \sqrt{2g(a - h)}$$

Hence

$$\left(\frac{\psi S}{0.67 \phi B} \right)^2 = \frac{(a - h)^3}{h}$$

Substituting numerical values to the left side of the above equation, one gets

$$\left(\frac{0.6 \cdot 0.25}{0.67 \cdot 0.627 \cdot 0.8} \right)^2 = 0.1922$$

So

$$\frac{(0.4 - h)^3}{h} = 0.1992$$

This equation must be solved numerically. The solution is $h = 0.1155\text{ m}$. The flow rate of water for this value of h equals

$$\dot{V} = \psi S \sqrt{2gh} = 0.6 \cdot 0.25 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.1155} = 0.2258\text{ m}^3/\text{s}$$

EXERCISE 2.1

A rectangular tank is divided into two chambers by a partition, in which there is a circular orifice of diameter $d_1 = 0.05$ m. In the external wall there is another $d_2 = 0.07$ m diameter orifice at the same level. Liquid level in the first chamber is maintained at constant height $z_1 = 1.5$ m (Fig. 2.20). Determine liquid level in the second chamber. Assume that the discharge coefficient is the same for both orifices.

Answer: $z_2 = 0.31$ m.

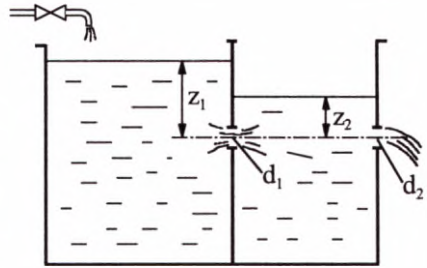


Fig. 2.20. Communicating vessels

EXERCISE 2.2

Water is flowing from a tank through three pipes (Fig. 2.21), which have the following dimensions: $l_1 = 2.5$ m, $d_1 = 0.10$ m, $l_2 = 1.5$ m, $d_2 = 0.08$ m, $l_3 = 1.5$ m, $d_3 = 0.054$ m. Liquid level is constant and equal to 20 m from the bottom. What is the flow rate of water if the contraction coefficient $\alpha = 0.65$ and the coefficient of hydraulic resistance is constant and equal to 0.03? Neglect the local resistance.

Answer: 0.1574 m³/s.

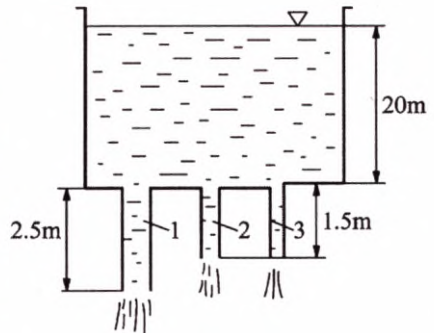


Fig. 2.21. Tank with three outflow pipes

EXERCISE 2.3

Assuming that $\varphi = 1$, calculate the initial velocity of liquid outflow from a tank, in which there is a layer of water ($\rho_w = 1000$ kg/m³) of height 1 m and a layer of oil ($\rho_o = 800$ kg/m³) of the same height. Oil and water do not mix. Compare the result with the initial outflow velocity for the same tank but filled only with water or oil to a height 2 m.

Answer: two layers, $u_0 = 5.94$ m/s,
layer of water or oil, $u_0 = 6.26$ m/s.

EXERCISE 2.4

Calculate the emptying time of a laboratory burette (for the calibrated part) of diameter 15 mm and capacity 100 cm³ if a diameter of an outflow orifice is 1.5 mm, the distance between the outflow orifice and graduation denoting 100 cm³ is 100 mm, the coefficient of a local resistance for the burette valve equals 5 and the coefficient of contraction is 0.6. Neglect the friction resistance.

Answer: 92.1 s.

EXERCISE 2.5

Evaluate the time of liquid outflow from a rectangular 4 m height tank which bottom has dimensions 2m \times 1m. Initially, the tank is half full. Pressure above the surface of water is maintained at constant level 0.3 MPa. Water is flowing through an outflow pipe of length 3 m and a cross-sectional area 0.005 m², which is placed in the bottom of the tank. The discharge coefficient is $\psi = 0.62$ and the total local resistance coefficient is equal to 2.5. Atmospheric pressure is 0.1 MPa.

Answer: 110 s.

EXERCISE 2.6

A cone-shaped 2 m height tank, which apex points downwards and the bottom has a diameter of 1 m, was fully filled with water. A diameter of an outflow orifice is 0.02 m. Assuming the discharge coefficient 0.7, calculate the height of water level after 2 min from the beginning of outflow.

Answer: 1.77 m.

EXERCISE 2.7

A metal cube, which side length is 0.5 m, was thrown into a vertical cylindrical tank of diameter 1 m and height 2 m, which was half filled with water. Assuming that the cube does not cover the 0.01 m diameter outflow orifice, which is located in the bottom of the tank, and that the discharge coefficient is 0.62, calculate the emptying time of the tank with and without the cube.

Answer: with the cube 6201 s,
without the cube 7282 s.

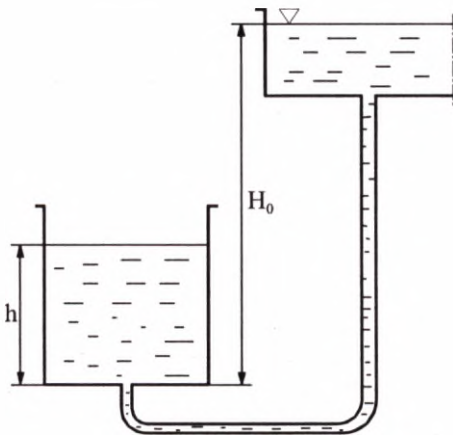


Fig. 2.22. Filling of tank

EXERCISE 2.8

Find the time necessary to fill a 1.13 m diameter cylindrical vessel to height 3 m with water flowing gravitationally through a 5 cm diameter orifice in the bottom of a tank with constant level situated 25 m above the level of the vessel (Fig. 2.22). The discharge coefficient is $\psi = 0.5$.

Answer: 142.8 s.

EXERCISE 2.9

Milk is packed in tetrahedral-shaped texture containers. Assuming that the container is initially full, calculate how many times longer milk is flowing through

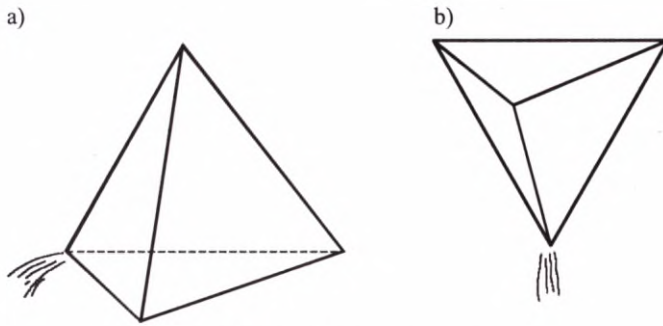


Fig. 2.23. Outflow from tetrahedron

an orifice in the bottom (Fig. 2.23a) than through the same orifice but located in the apex which points downwards (Fig. 2.23b). In both cases atmospheric pressure is exerted on the surface of milk.

Answer: $8/3$.

EXERCISE 2.10

Calculate the emptying time for a spherical tank of diameter 2 m, which is connected with an outflow pipe of length 1 m and diameter 0.04 m. A pipe transporting air from the surroundings is submerged in the liquid filling the tank. The submerged depth equals 1 m. The discharge coefficient is $\psi = 0.4$.

Answer: 1410 s.

EXERCISE 2.11

Calculate emptying time for a closed tank filled with water, which dimensions are given in Fig. 2.24. Water is flowing through a pipe of an internal diameter 0.05 m, for which the total coefficient of resistance is $\Sigma\zeta = 2$. A pipe communicating with the surroundings is submerged in the tank. The discharge coefficient should be calculated using Fig. 2.2.

Answer: 2560 s.

EXERCISE 2.12

$1 \text{ dm}^3/\text{s}$ of water is flowing into a vertical cylindrical tank of diameter 0.3 m and height 0.5 m. There is an 0.01 m diameter orifice in the bottom of the tank. Assuming that the discharge coefficient equals 0.6, calculate the time after which water will start to flow over the upper edge of the tank.

Answer: 39.2 s.

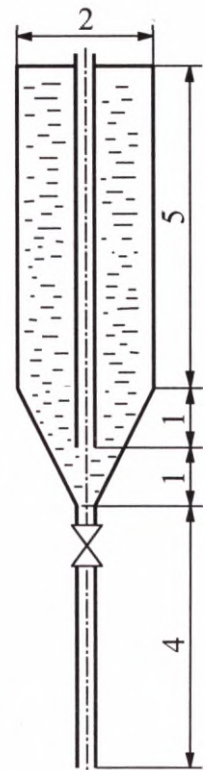


Fig. 2.24. Closed tank with outflow pipe and air release

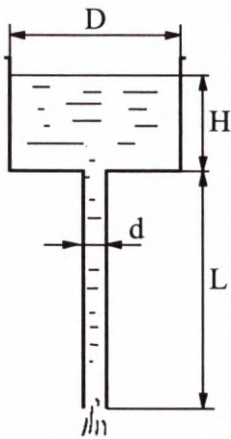


Fig. 2.25. For the exercise (2.13)

EXERCISE 2.13

Find a general relation for time of liquid outflow from a tank shown in Fig. 2.25 (but not from the pipe). Liquid density is ρ and its coefficient of viscosity is μ . Liquid flow in the pipe is laminar. Local losses can be neglected. It can be assumed that $L/d \gg 1$.

Answer:
$$t = \frac{32\mu LD^2}{\rho g d^4} \ln \frac{H + L}{L}$$

EXERCISE 2.14

Two cylindrical tanks are connected by a horizontal pipe located at height 1.2 m from their bottoms. Calculate the time which passes from opening of the valve on the pipe, until 7.5 m^3 of water is transferred from the first tank to the second one. An area of the first tank is 5 m^2 and of the second one is 3.5 m^2 . A cross-sectional area of the connecting pipe equals 80 cm^2 . Initially, water level in the first tank is 3.8 m and the second tank is empty. The contraction coefficient is $\alpha = 0.62$, the coefficient of flow resistance $\Sigma \zeta = 3$. Volume of liquid in the connecting pipe can be neglected.

Answer: 607.5 s.

EXERCISE 2.15

Calculate the time necessary for liquid level in communicating vessels to equalize (Fig. 2.26). Diameters D_1 and D_2 are equal to 1.6 m and 3.2 m, respectively, height $h_0 = 1.5 \text{ m}$, initial level difference $H_0 = 4 \text{ m}$. Liquid is flowing through a pipe of diameter $d = 100 \text{ mm}$, for which the discharge coefficient is $\psi = 0.82$.

Answer: 472 s.

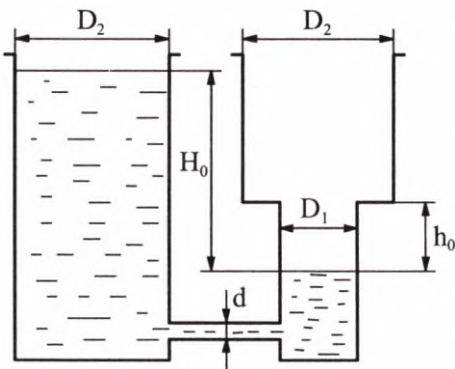


Fig. 2.26. System of communicating vessels

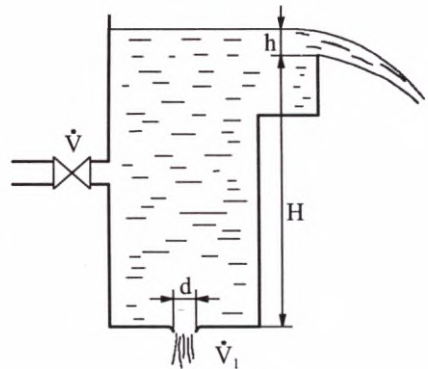


Fig. 2.27. Simultaneous outflow through orifice and weir

EXERCISE 2.16

A tank with a 0.7 m wide weir at height $H = 3$ m was built to maintain almost constant outflow \dot{V}_1 (Fig. 2.27) through a $d = 120$ mm diameter tip in case of fluctuations in the supply network \dot{V} . What are the inflow \dot{V} and outflow \dot{V}_1 rates if height h is 100 mm, the discharge coefficient for the tip is $\psi = 0.97$ and for the weir is $\phi = 0.64$? What is the limiting inflow rate \dot{V} at which liquid does not flow through the weir?

Answer: $\dot{V} = 0.128 \text{ m}^3/\text{s}$; $\dot{V}_1 = 0.086 \text{ m}^3/\text{s}$; liquid does not flow through the weir for $\dot{V} \leq 0.084 \text{ m}^3/\text{s}$.

3. FLUID TRANSPORTATION

3.1. PUMPING POWER

The pumping power is calculated using the equation

$$N = \frac{\dot{V} \cdot \Delta p}{\eta} = \frac{\dot{V} H \rho g}{\eta} \quad (3.1)$$

where:

- \dot{V} – volumetric flow rate of fluid, m³/s,
- Δp – pressure increment, which must be delivered by a pump (fan) to send liquid from a supply reservoir to a discharge reservoir, Pa,
- H – pump head (pumping height), m,
- ρ – liquid density, kg/m³,
- η – coefficient of total pump (or fan) efficiency;

The coefficient of efficiency for centrifugal pumps is 0.5÷0.9 and for piston pumps – 0.7÷0.92.

When liquids are under consideration, Eq. (3.1) is valid for any value of Δp . For gases (fans) it can be used only if $\Delta p < 10$ kPa. If this condition is not fulfilled, gas density changes must be taken into account to calculate power of the device.

When pumping power is calculated, the quantity Δp in Eq. (3.1) is calculated as the sum of the following terms

$$\Delta p = \Delta p_f + \Delta p_h + \Delta p_{2-1} + \Delta p_u \quad (3.2)$$

where:

- Δp_f – pressure loss caused by the resistance to flow, Pa,
- Δp_h – pressure required to overcome a height difference (geometric head) ΔH (Fig. 3.1), Pa.

$$\Delta p_h = \Delta H \cdot \rho g \quad (3.3)$$

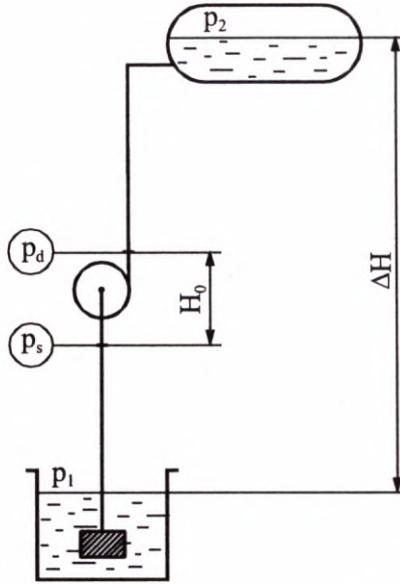


Fig. 3.1. Scheme of pumping system

Δp_{2-1} – difference between pressure in a cross-section to which fluid is flowing p_2 and pressure in a location from which fluid is taken p_1 (Fig. 3.1), Pa

$$\Delta p_{2-1} = p_2 - p_1 \quad (3.4)$$

Δp_u – difference between dynamic pressures in two cross-sections: 1 and 2 which results from velocity change, Pa

$$\Delta p_u = \frac{u^2 \rho}{2} \quad (3.5)$$

The term Δp_u is taken into account only when there is a significant velocity difference between the considered cross-sections. Usually, when liquid is transferred from one container to another, this term is insignificant.

Neglecting the term Δp_u , one can write Eq. (3.2) for a pump (fan) in the following form equivalent to the relation (3.2)

$$H = \Delta h_f + \Delta H + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} \quad (3.6)$$

where:

ΔH – geometric head, m,

Δh_f – pressure loss expressed by height of a fluid column (friction head), m.

The pump head is also determined by the expression

$$H = \frac{p_d - p_s}{\rho g} + H_0 + \frac{u_d^2 - u_s^2}{2g} \quad (3.7)$$

where (Fig. 3.1):

p_d – pressure in a discharge pipe at the outflow of fluid from a pump, Pa,

p_s – pressure in a suction pipe at the inflow of fluid to a pump connected, Pa,

H_0 – vertical distance between points of pressure p_d and p_s measurements,

u_d – liquid velocity in a discharge pipe, m/s,

u_s – liquid velocity in a suction pipe, m/s.

3.2. PUMP AND PIPING SYSTEM CHARACTERISTIC CURVES

The pump characteristic curve or pump performance curve provides information about the relationship $H = f(\dot{V})$ between pump head H and the pump capacity \dot{V} . Pumps (fans) characteristics determined experimentally by manufacturers are given in appropriate catalogues.

To choose a pump, one must know not only a pump characteristic but also a characteristic of a system, i.e. a pipeline and apparatus (elements) connected with it. The system (installation) characteristic is a relation between the flow rate \dot{V} and pressure difference necessary to flow through the pipeline (system), which is expressed by height of a liquid column H .

The pump operating point P (Fig. 3.2) is determined by the intersection of the pump characteristic and the system characteristic. The \dot{V} coordinate corresponds to the effective pump capacity in a given system.

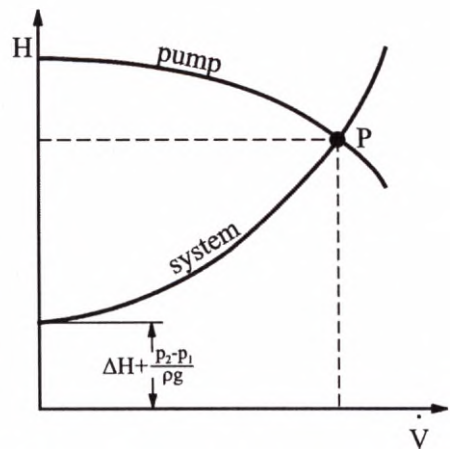


Fig. 3.2. Pump and system characteristic curves

3.3. CO-OPERATION BETWEEN PUMPS

Systems with pumps in parallel or in series are often used because of economical or constructional reasons.

If a pump capacity is too low, two or more pumps of this type can be connected in parallel. Characteristic of such a system is determined in a coordinate system $H = f(\dot{V})$ by increasing the value of \dot{V} (abscissa) for each pumping height.

If there is a need for increasing a pump head, pumps are connected in series. Characteristic of a system with pumps in series can be determined on the basis of one pump characteristic by increasing pump heads (ordinates) for each value of \dot{V} .

Regulation of pump capacity can be made by throttling valves or by discharge stream by-pass. Throttling on a suction line is not allowed because of cavitation.

3.4. CAVITATION

If at some point in a pipe pressure decreases to the saturation pressure of flowing liquid vapor, liquid starts to boil at this point. Because vapor bubbles arise, cavitation (interruption of liquid stream continuity) occurs. It leads to severe disruptions of pump operation. When installations with pumps are designed, it must be checked if pressure right before a pump, i.e. at the point where pressure has the lowest value, is sufficiently higher than the saturation pressure of the liquid being pumped (at a given temperature).

EXAMPLE 3.1

An impeller pump is pumping 60% sulfuric acid solution of density 1500 kg/m^3 . Measuring instruments indicate the following values: a manometer installed on a discharge pipe $\Delta p_d = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a vacuum meter installed on a suction pipe $\Delta p_s = 76 \text{ mm Hg}$ (Fig. 3.1). The vertical distance between the manometer and vacuum meter is $0,8 \text{ m}$. The flow rate of acid is $16 \text{ m}^3/\text{h}$. The suction pipe has an internal diameter of $d_s = 60 \text{ mm}$, the discharge pipe $- d_d = 50 \text{ mm}$. The atmospheric pressure is $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Calculate the pump head. Neglect the resistance to flow between the measuring points of pressure.

The formula (3.7) should be used in order to calculate the pump head. The difference $p_d - p_s$ was calculated as follows

$$p_d = p_0 + \Delta p_d$$

$$p_s = p_0 - \Delta p_s$$

$$p_d - p_s = \Delta p_d + \Delta p_s = 2 \cdot 10^5 + 0.076 \cdot 13\,600 \cdot 9.81 = 2.101 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

It was taken into account that mercury density is 13 600 kg/m³. Liquid velocity in the discharge pipe is

$$u_d = \frac{4\dot{V}}{\pi d_d^2} = \frac{4 \cdot 16/3600}{\pi \cdot (0.050)^2} = 2.26 \text{ m/s}$$

and in the suction pipe

$$u_s = u_d \left(\frac{d_d}{d_s} \right)^2 = 2.26 \cdot \left(\frac{0.050}{0.060} \right)^2 = 1.57 \text{ m/s}$$

Substitution of the above values into the formula (3.7) gives

$$H = \frac{p_d - p_s}{\rho g} + H_0 + \frac{u_d^2 - u_s^2}{2g}$$

$$H = \frac{2.101 \cdot 10^5}{1500 \cdot 9.81} + 0.80 + \frac{(2.26)^2 - (1.57)^2}{2 \cdot 9.81}$$

$$H = 14.27 + 0.80 + 0.13 = 15.20 \text{ m}$$

EXAMPLE 3.2

Calculate power of a pump of efficiency $\eta = 0.6$, which is pumping $0.48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ of water at a temperature 20°C. Internal diameters of hydraulically smooth suction and discharge pipes are equal to 30 mm. Lengths of sections of the pipe and individual heights (Fig. 3.3) are as follows: $L_1 = 27 \text{ m}$, $L_2 = 50 \text{ m}$, $L_3 = 1 \text{ m}$, $h_0 = 3 \text{ m}$, $h_1 = 2 \text{ m}$, $h_2 = 8 \text{ m}$, $h_3 = 0.5 \text{ m}$. Coefficients of local losses are equal to: $\zeta_1 = 6$ (suction rose), $\zeta_2 = 0.5$, $\zeta_3 = 5$. The barometric pressure is $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Check if cavitation occurs at the cross-section (3-3). Water's saturated vapor pressure is 2337 Pa at 20°C.

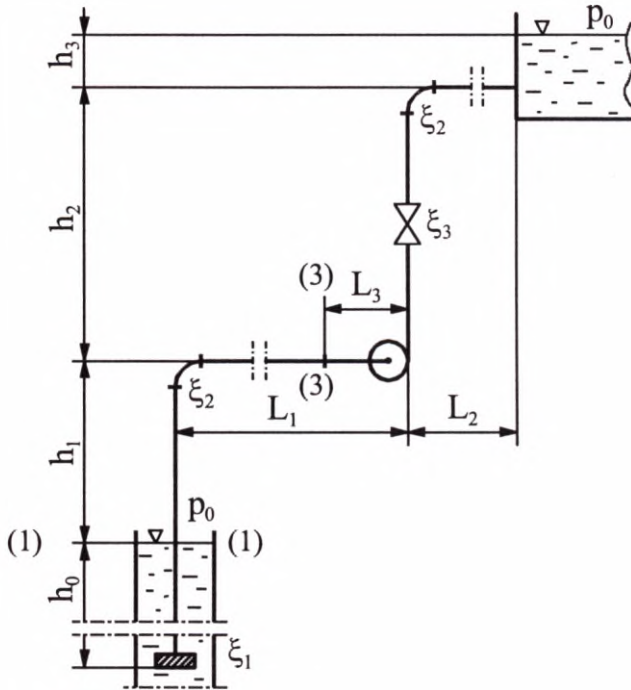


Fig. 3.3. For the Example (3.2)

One can calculate power of the pump on the basis of the formula (3.1), determining Δp according to the expression (3.2) and taking into account that $\Delta p_{2-1} = 0$ (open tanks).

Flow velocity is

$$u = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0.48 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (0.030)^2} = 0.68 \text{ m/s}$$

It is necessary to determine flow character by calculating the Reynolds number

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{0.68 \cdot 0.030 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 20\,499$$

The flow is turbulent, so the coefficient λ was calculated using Eq. (1.16)

$$\lambda = 0.3164 \cdot \text{Re}^{-0.25} = 0.3164 \cdot (20\,499)^{-0.25} = 0.0264$$

The pressure increment that must be delivered by the pump is

$$\Delta p = \frac{u^2 \rho}{2} \left[\lambda \frac{h_0 + h_1 + h_2 + L_1 + L_2}{d} + \zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3 \right] + (h_1 + h_2 + h_3) \rho g$$

$$\Delta p = \frac{(0.68)^2 \cdot 998.2}{2} \cdot \left[0.0264 \cdot \frac{3+2+8+27+50}{0.030} + 6 + 2 \cdot 0.5 + 5 \right] + (2+8+0.5) \cdot 998.2 \cdot 9.81$$

$$\Delta p = 0.210 \cdot 10^5 + 1.028 \cdot 10^5 = 1.238 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

The pumping power is equal to

$$N = \frac{\dot{V} \cdot \Delta p}{\eta} = \frac{0.48 \cdot 10^{-3} \cdot 1.238 \cdot 10^5}{0.6} = 99.1 \text{ W}$$

To determine if cavitation occurs at the cross-section 3-3, the absolute pressure p_3 at this cross-section must be calculated. Using the Bernoulli equation for cross-sections 1-1 and 3-3 and taking into account that $z_1 = 0$, $z_3 = h_1$, $u_1 = 0$, $u_3 = u$ and $p_1 = p_0$, one gets the following expression

$$p_3 = p_0 - \frac{u^2 \rho}{2} \left(1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \lambda \frac{h_0 + h_1 + L_1 - L_3}{d} \right) - h_1 \rho g$$

Substituting numerical data, one obtains

$$p_3 = 1.013 \cdot 10^5 - \frac{(0.68)^2 \cdot 998.2}{2} \cdot \left(1 + 6 + 0.5 + 0.0264 \cdot \frac{3+2+27-1}{0.030} \right) - 2 \cdot 998.2 \cdot 9.81$$

$$p_3 = 1.013 \cdot 10^5 - 0.080 \cdot 10^5 - 0.196 \cdot 10^5 = 0.737 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Pressure at the cross-section 3-3 is 73700 Pa so cavitation does not occur because water's saturated vapor pressure is 2337 Pa at 20°C.

EXAMPLE 3.3

Characteristic of the impeller pump is presented by line 1 in Fig. 3.4. The pump is pumping sulfuric acid of concentration 98% ($\rho = 1830 \text{ kg/m}^3$) from the bottom tank, in which pressure is equal to atmospheric pressure $p_1 = 750 \text{ mm Hg}$, to the upper tank, where gauge pressure equals $\Delta p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. The distance between liquid levels

in tanks is constant and equal to $\Delta H = 12$ m. The internal diameter of the suction pipe is $d_s = 175$ mm, its length $L_1 = 11$ m, the sum of the coefficients of local losses $\Sigma\zeta_s = 8.5$ and the coefficient of resistance $\lambda_s = 0.027$. The internal diameter of the discharge pipe is $d_d = 125$ mm, its length $L_2 = 120$ m, the sum of coefficients of local losses is $\Sigma\zeta_d = 32$ and the coefficient of resistance is $\lambda_d = 0.032$. Calculate the pump capacity \dot{V} and the pump head.

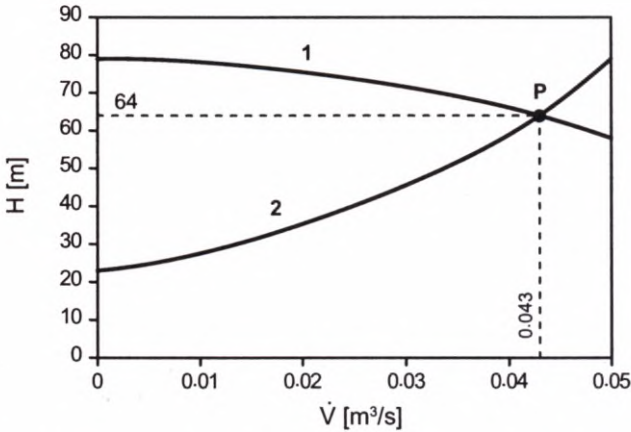


Fig. 3.4. Pump characteristic and method for determination of operating point

The characteristic of the system must be determined and plotted on the chart of the pump characteristic (Fig. 3.4). Substituting the transformed formula (1.24) into (3.6), one obtains the expression (a), which allows them to determine the pump head as a function of the volumetric flow rate

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \Delta H + \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d_s^4 g} \left(\lambda_s \frac{L_1}{d_s} + \sum \zeta_s \right) + \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d_d^4 g} \left(\lambda_d \frac{L_2}{d_d} + \sum \zeta_d \right)$$

Substituting numerical values and taking into consideration that $p_2 = p_1 + \Delta p_2$, one gets

$$H = \frac{2 \cdot 10^5}{1830 \cdot 9.81} + 12 + \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 (0.175)^4 \cdot 9.81} \cdot \left(0.027 \cdot \frac{11}{0.175} + 8.5 \right) + \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 \cdot (0.125)^4 \cdot 9.81} \cdot \left(0.032 \cdot \frac{120}{0.125} + 32 \right)$$

$$H = 23.1 + 22225 \dot{V}^2 \quad (\text{a})$$

Taking different values of flow rate using Eq. (a), one calculates the corresponding pump heads H

\dot{V} [m ³ /s]	0	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050
H [m]	23.10	25.32	31.99	43.10	58.70	78.66

The system characteristic was plotted (line 2) on the basis of the obtained values. The operating point is the intersection point of both characteristics. The following values correspond to the operating point (Fig. 3.4): $\dot{V} = 0.043$ m³/s, $H = 64$ m.

EXAMPLE 3.4

The pump characteristic is specified by the following values:

\dot{V} [m ³ /s]	0	0.024	0.032	0.040	0.048
H [m]	100	90	80	60	40

The pipeline (piping system) characteristic is specified by the values from the following table:

\dot{V} [m ³ /s]	0	0.008	0.024	0.038	0.047	0.059
H [m]	66	70	80	100	120	153

What capacity can be obtained by parallel and serial connection of two pumps of the above characteristic? How much larger will be the capacity of the system of two pumps than the capacity of one pump?

In order to solve the example the characteristic of pumps connected in parallel (Fig. 3.5) and in series (Fig. 3.6) must be plotted. Then the pipeline characteristic (line 2) must be plotted on these two plots.

The graphs show that when the pipeline cooperates with a single pump, the capacity is $\dot{V} = 0.028$ m³/s.

When two pumps are connected in parallel (Fig. 3.5), the installation has the capacity $\dot{V} = 0.035$ m³/s; it means that the capacity will be 25% higher than in the case of the single pump.

If two pumps are connected in series (Fig. 3.6), the installation has the capacity $\dot{V} = 0.043$ m³/s, i.e. it is 54% higher than the capacity obtained when the single pump is used.

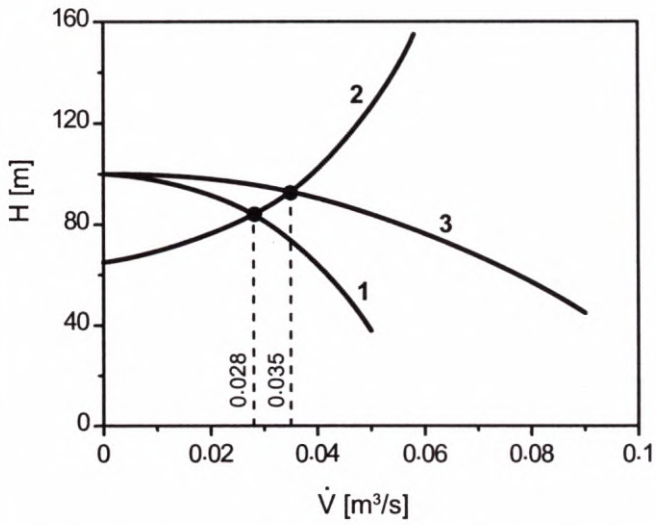


Fig. 3.5. Parallel connection of pumps: 1 – characteristic of single pump, 2 – characteristic of pipeline, 3 – characteristic of two pumps connected in parallel

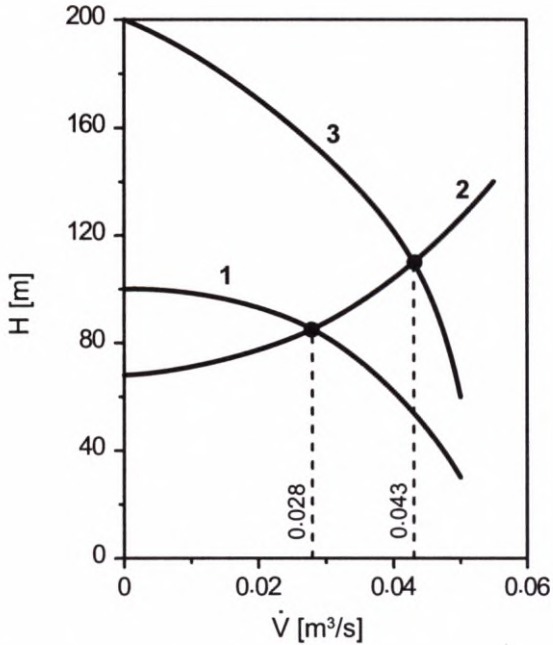


Fig. 3.6. Serial connection of pumps: 1 – characteristic of single pump, 2 – characteristic of pipeline, 3 – characteristic of two pumps connected in series

EXAMPLE 3.5

Make the characteristic of the pipe of the internal diameter $d = 150$ mm and length $L = 280$ m if the equivalent length of all local losses equals $L_e = 85$ m and the coefficient of resistance is $\lambda = 0.03$. The pipe connects open tanks ($p_1 = p_2$) and a geometric head is 20 m. The pump is pumping water at 20°C through this pipe. Calculate power of the pump's engine. The pump characteristic is shown in Fig. 3.7.

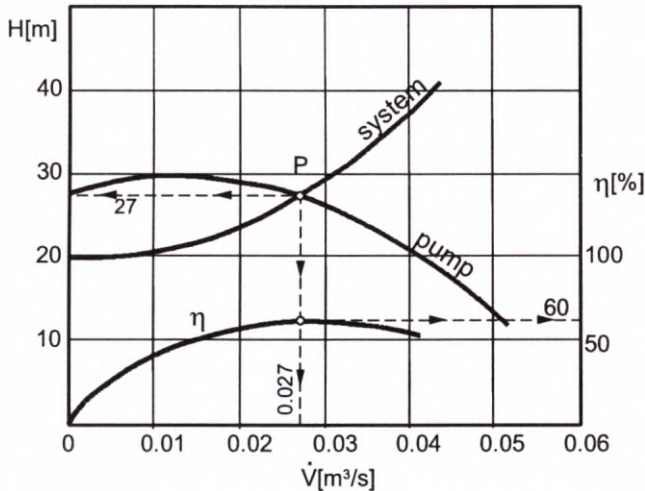


Fig. 3.7. For the Example (3.5)

A relation describing the pipe characteristic can be obtained on the basis of Eq. (3.6) and the transformed Eq. (1.25)

$$H = \Delta H + \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d^4 g} \left(\lambda \frac{L + L_e}{d} \right)$$

$$H = 20 + \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 \cdot (0.150)^4 \cdot 9.81} \cdot \left(0.03 \cdot \frac{280 + 85}{0.150} \right)$$

$$H = 20 + 11970\dot{V}^2$$

A system characteristic can be made with the use of Eq. (a).

\dot{V} [m ³ /s]	0	0.010	0.020	0.030	0.040
H [m]	20	21.2	24.8	30.8	39.2

Conditions, under which the pump is operating after connection with the system of the given characteristic, are determined by coordinates of the operating point P (Fig. 3.7). The following values correspond to the operating point

$$\dot{V} = 0.027 \text{ m}^3/\text{s}; \quad H = 27 \text{ m}; \quad \eta = 60\%$$

According to the formula (3.1), the pumping power for the given operating parameters equals

$$N = \frac{\dot{V}H\rho g}{\eta} = \frac{0.027 \cdot 27 \cdot 998.2 \cdot 9.81}{0.6}$$

$$N = 11900 \text{ W} = 11.9 \text{ kW}$$

EXERCISE 3.1

The following data was obtained during study on a centrifugal pump which efficiency coefficient is $\eta = 0.6$:

\dot{V} [m ³ /s]	0	100	200	300	400	500
H [m]	37.2	38.0	37.0	34.5	31.8	28.5

The pump is connected with a pipe which diameter is 68 mm and total length – 355 m (real pipe length plus equivalent pipe length). The geometric head is $\Delta H = 4.8$ m and the coefficient of resistance $\lambda = 0.03$. Water at a temperature of 20°C is flowing through the pipe. Calculate:

1. Water flow rate in the pipe.
2. Pump power.
3. Coordinates of the operating point.
4. Pump capacity if pump head is equal to $H^* = 25$ m.
5. Water flow rate for the cases of serial and parallel connection of two pumps of the given characteristic.

Answer:

1. $\dot{V} = 0.067 \text{ m}^3/\text{s}$.
2. $N = 3.5 \text{ kW}$.
3. $H = 31.5 \text{ m}$, $\dot{V} = 0.067 \text{ m}^3/\text{s}$.
4. $\dot{V}^* = 0.086 \text{ m}^3/\text{s}$.
5. $\dot{V}_{\text{serial}} = 0.088 \text{ m}^3/\text{s}$; $\dot{V}_{\text{parallel}} = 0.072 \text{ m}^3/\text{s}$.

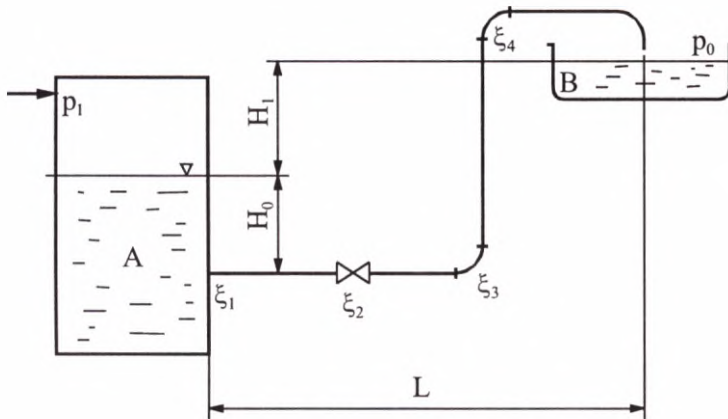


Fig. 3.8. Scheme of the installation

EXERCISE 3.2

Liquid which density is $\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$ and viscosity is $\mu = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ is to be pumped from the tank *A* (Fig. 3.8) to the open tank *B*. The difference between the liquid levels is $H_1 = 8 \text{ m}$. Other dimensions are as follows (Fig. 3.8): $L = 49 \text{ 500 m}$, $H_0 = 5 \text{ m}$. The internal diameter of the pipe is $d = 21 \text{ mm}$. Coefficients of local losses are equal to: $\zeta_1 = 0,5$, $\zeta_2 = 3,5$, $\zeta_3 + \zeta_4 = 2,2$. Barometric pressure equals $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Calculate:

1. The minimal pressure $p_{1\text{min}}$ in the tank *A* which ensures that liquid will be pumped.
2. What value should pressure p_1 have to maintain laminar flow.
3. Liquid flow rate if pressure in the tank *A* is $2,229 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ and the coefficient of resistance is $\lambda = 0,04$.

Answer: $p_{1\text{min}} = 1,878 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $1,878 \cdot 10^5 < p_1 < 1,900 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\dot{m} = 0,278 \text{ kg/s}$.

EXERCISE 3.3

Calculate pump head delivered by a pump if water flow rate is $30 \text{ m}^3/\text{h}$ at 20°C , manometer placed on a discharge pipe indicates the gauge pressure $\Delta p_d = 3,4 \text{ atm}$ and vacuum meter installed on a suction pipe – sub-atmospheric pressure $\Delta p_s = 350 \text{ mm Hg}$ (pressure below atmospheric). An internal diameter of the suction pipe is 125 mm and of the discharge pipe – 100 mm . The vertical distance between the points at which the measuring devices are connected with the pipes is $1,3 \text{ m}$.

Answer: $H = 40,1 \text{ m}$.

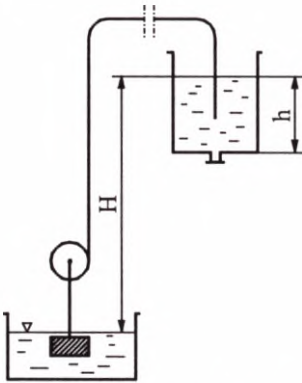


Fig. 3.9. Pumping installation

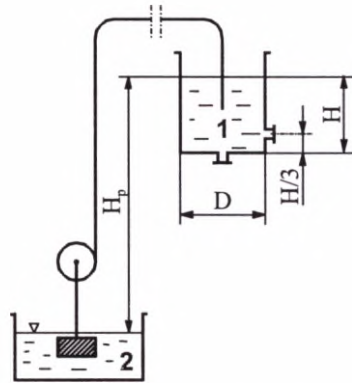


Fig. 3.10. Scheme of pumping installation

EXERCISE 3.4

The pump, which efficiency coefficient is $\eta = 0.6$, is pumping water at a temperature 20°C from the bottom tank to the upper tank (Fig. 3.9). There is an outflow orifice in the bottom of the upper tank. The geometric head is 20 m. Discharge pipe length equals 100 m, suction pipe length is 12 m. Internal diameters of both pipes are equal to 0.25 m. The sum of coefficients of local losses for the suction pipe is $\Sigma\zeta_s = 20$, for the discharge pipe – $\Sigma\zeta_d = 30$. Flow rate of water is $0.04 \text{ m}^3/\text{s}$. Calculate:

1. Power of pump's engine.
2. The diameter of the upper tank's outflow orifice, which ensures that liquid level in this tank is constant and equal to $h = 3.5 \text{ m}$. The discharge coefficient is 0.6.

Answer: $N = 14.36 \text{ kW}$, $d = 0.1 \text{ m}$.

EXERCISE 3.5

The technological process requires the tank 1 (Fig. 3.10) to be periodically filled to a height $H = 2 \text{ m}$ with water at a temperature 20°C and then to be emptied; water is flowing through two orifices of the same area equal to 0.005 m^2 . One of the outflow orifices is in the bottom of the 2 m diameter tank and the second one is in the side wall at $1/3$ of its height. The discharge coefficients are the same for both orifices and equal to 0.6. The tank should be filled within $t_n = 157 \text{ s}$. For this purpose the centrifugal pump, which is pumping water from the bottom tank, is used. The pump efficiency is $\eta = 0.6$. The geometric head is 20 m. Length of the discharge pipe is 100 m and length of the suction pipe is 12 m. Diameters of both pipes are equal to 0.25 m. The sum of the coefficients of local losses for the suction pipe is $\Sigma\zeta_s = 20$ and for the discharge pipe $\Sigma\zeta_d = 30$. Calculate:

1. Required pumping power.
2. Time necessary for complete emptying of the tank 1.

Answer: $N = 14.36 \text{ kW}$, $t = 558 \text{ s}$.

EXERCISE 3.6

Water at a temperature of 20°C is flowing through a 60 mm diameter pipe at a velocity of 1.5 m/s. The absolute roughness of pipe surface is $e = 0.15$ mm. There are 18 elbows ($\zeta_1 = 0.5$) and 6 taps ($\zeta_2 = 0.05$) on a $L = 2$ km length section of the pipe. Calculate pump's engine power, assuming that the efficiency coefficient equals $\eta = 0.82$.

Answer: $N = 5$ kW.

4. SETTLING OF PARTICLES IN FLUIDS

4.1. FLUID RESISTANCE (DRAG)

The drag force or fluid resistance R exerted by a fluid on a solid particle which is moving through the fluid is given by the formula

$$R = \lambda \frac{w^2 \rho}{2} A \quad (4.1)$$

where:

- λ – drag coefficient,
- w – velocity of a settling particle, m/s,
- ρ – fluid density, kg/m³,
- A – area of the particle projected on plane normal to direction of settling, m².

The characteristic dimension for spherical particles is their diameter. For non-spherical particles a concept of equivalent diameter d_e was introduced. It is defined as the diameter of a sphere of the same volume V_s as a given particle. Thus

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{6V_s}{\pi}} \quad (4.2)$$

For spherical particles $d = d_e$.

Relations for calculations of the drag coefficient λ are different for different ranges of particle motion. A proper criterion that characterizes each individual settling range is the settling Reynolds number defined as follows

$$\text{Re} = \frac{w d_e \rho}{\mu} \quad (4.3)$$

where μ is the coefficient of fluid viscosity.

For non-spherical particles the drag coefficient depends also on the sphericity Ψ , which is defined as the ratio of the surface area of a sphere with the same volume as a given particle to the surface area A_s of the particle. Because the surface area of a sphere of the same volume as the particle is πd_e^2 , so

$$\Psi = \frac{\pi d_e^2}{A_s} = \pi \left(\frac{6}{\pi} \right)^{2/3} \frac{V_s^{2/3}}{A_s} = 4.836 \frac{V_s^{2/3}}{A_s} \quad (4.4)$$

The sphere has the smallest surface area among all surfaces enclosing a given volume, hence $\Psi \leq 1$.

The drag coefficients are given by the following relations:

- for spherical particles and the laminar settling range i.e., for the Reynolds number in the range between 10^{-4} and 0.4

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}} \quad (4.5)$$

- for spherical particles and the transient settling range i.e., for the Reynolds number in the range between 0.4 and 1000

$$\lambda = \frac{18.5}{\text{Re}^{0.6}} \quad (4.6)$$

- for spherical particles and turbulent settling i.e., for the Reynolds number in the range between 1000 and $2 \cdot 10^5$ the drag coefficient has a constant value

$$\lambda = 0.44 \quad (4.7)$$

- for laminar settling of non-spherical particles ($10^{-4} < \text{Re} < 0.05$) a relation for the drag coefficient can be written as follows

$$\lambda = \frac{28.5}{\text{Re} \cdot \lg(\Psi/0.065)} \quad (4.8)$$

- for turbulent settling of non-spherical particles ($2000 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5$) the following relation is valid

$$\lambda = 5.31 - 4.88\Psi \quad (4.9)$$

The above relations are presented in Tab. 4.1. For non-spherical particles only formulas for laminar (4.8) and turbulent (4.9) settling are known.

Table 4.1

Relationships for each range of settling of particles in fluids

	Laminar range (Stokes)	Transient range (Allen)	Turbulent range (Newton)
Range of criterial number	Re $10^{-4} \div 0.4$ $10^{-4} \div 0.05^*$	0.4 ÷ 1000	$1000 \div 2 \cdot 10^5$ $2000 \div 2 \cdot 10^{5*}$
	Ar 0.0018 ÷ 7.2	$7.2 \div 3.30 \cdot 10^5$	$3.30 \cdot 10^5 \div 8.25 \cdot 10^{10}$
	Ly $5.56 \cdot 10^{-10} \div 8.89 \cdot 10^{-3}$	$8.89 \cdot 10^{-3} \div 3030$	$3030 \div 1.515 \cdot 10^6$
Drag coefficient of spherical particles	$\frac{24}{Re}$ (4.5)	$\frac{18.5}{Re^{0.6}}$ (4.6)	0.44 (4.7)
Drag coefficient of nonspherical particles	$\frac{28.5}{Re \cdot \lg(\Psi/0.065)}$ (4.8)		$5.31 - 4.88\Psi$ (4.9)
Re =	Ar/18 $4.243 \sqrt{Ly}$ (4.21) (4.21')	$0.1528 Ar^{0.7143}$ $5.175 Ly^{0.625}$ (4.22) (4.22')	$1.741 \sqrt{Ar}$ $0.330 Ly$ (4.23) (4.23')

* refers to nonspherical particles

4.2. FREE SETTLING OF SPHERICAL PARTICLES

Free settling is when particle settling is not influenced by the presence of adjacent particles.

While particles fall under vacuum ($R = 0$), their motion is uniformly accelerated because the unbalanced constant gravitational force G is exerted on them. Due to this fact, the settling velocity increases linearly. When settling occurs in a fluid, the drag force (the frictional force) R and the buoyant force W arises. The buoyant force is applied in direction opposite to the gravitational force, and the drag force direction is contrary to the direction of motion. According to the Newton's second law of motion

$$\underbrace{\frac{\pi d^3}{6} \rho_s g}_G - \underbrace{\frac{\pi d^3}{6} \rho g}_W - \underbrace{\lambda_t \frac{w_t^2 \rho}{2} \frac{\pi d^2}{4}}_{R_t} = \frac{\pi d^3}{6} \rho_s \frac{dw_t}{dt} \quad (4.10)$$

The index t means that the quantity varies with time (unsteady settling); ρ_s is the density of a particle ($\rho_s > \rho$).

According to the relation (4.1) the buoyant force is equal to zero at the initial moment of settling ($w_t = 0$). When velocity increases, the buoyant force also increases until it balances the resultant force ($G - W$) which is exerted in the opposite direction. From this moment velocity is constant and is characteristic for particular physical properties of the particle (d, ρ_s) and the fluid (ρ, μ). For steady settling of a particle it can be written that $dw_t/dt = 0$ and $w_t = w$, so after substitution of these relations into the formula (4.10), one obtains

$$\lambda = \frac{4}{3} \frac{d(\rho_s - \rho)g}{w^2 \rho} \quad (4.11)$$

If a settling range is laminar ($\lambda = 24/\text{Re}$), transforming the Eq. (4.10) and taking into account (4.11), one gets the following differential equation

$$\frac{dw_t}{w - w_t} = \frac{18\mu}{d^2 \rho_s} dt$$

where w is the terminal settling velocity reached after forces have been balanced. Integrating and taking into consideration that for $t = 0$, $w_t = 0$, one obtains

$$t = -\frac{d^2 \rho_s}{18\mu} \cdot \ln \left(1 - \frac{w_t}{w} \right) \quad (4.12)$$

Although the formula (4.12) suggests that the period of time after which $w_t = w$ is infinitely long, it appears that stabilization of the velocity is fast enough to assume that particle settling is steady from the beginning.

Typical computing problems in particles settling refer to calculations of the terminal settling velocity of particles of a given diameter d and determination of a diameter of a particle that falls at given velocity (for given values of ρ_s , ρ and μ).

The relation (4.11) cannot be used in direct calculations because of its implicit character (λ is the function of the Reynolds number which depends on both particles diameter and their settling velocity). Some methods for solving this problem for the case of spherical particles are given below.

4.2.1. Trial and error method

In this method the range of particle motion is assumed. The appropriate equations for λ can be used and the formula (4.11) can be solved. Formulas for particular ranges of settling are as follows:

– laminar settling

$$w = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} \quad (4.13)$$

– transient settling

$$w = 0.1528 \frac{d^{1.143}(\rho_s - \rho)^{0.7143} g^{0.7143}}{\rho^{0.2857} \mu^{0.4286}} \quad (4.14)$$

– turbulent settling

$$w = 1.741 \sqrt{\frac{d(\rho_s - \rho)g}{\rho}} \quad (4.15)$$

After transformation, the above formulas can be used for calculations of a particle diameter for given settling velocity.

After w (or d) is calculated by means of an appropriate formula, the Reynolds number must be calculated and it must be verified if the assumption for a settling range was correct. If the assumption was incorrect, a different settling range must be assumed.

4.2.2. Graphical method

Multiplying Eq. (4.11) by Re^2 , one gets

$$\lambda Re^2 = \frac{4 d^3 (\rho_s - \rho) \rho g}{3 \mu^2} \quad (4.16)$$

while dividing (4.11) by Re , one obtains

$$\frac{\lambda}{Re} = \frac{4 (\rho_s - \rho) g \mu}{3 \rho^2 w^3} \quad (4.17)$$

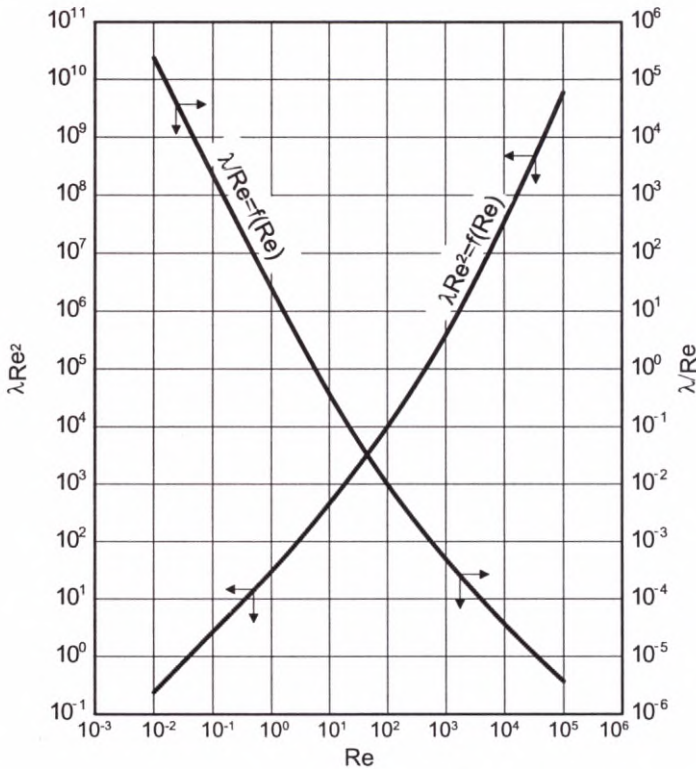


Fig. 4.1. Relation between the quantities: λRe^2 , λ/Re and the Reynolds number

The quantities λRe^2 and λ/Re are functions of Re , what comes from the fact that λ is a function of Re . The relations $\lambda Re^2 = f(Re)$ and $\lambda/Re = f(Re)$ are presented in Fig. 4.1. To determine settling velocity of a particle (for given values of d , ρ_s , ρ and μ), the right side of the relation (4.16) must be calculated, then the Reynolds number

must be found using the plot $\lambda \text{Re}^2 - \text{Re}$. Using the definitional formula for Re , one can calculate settling velocity.

In order to calculate a particle diameter (for given values of w , ρ_s , ρ and μ), the right side of Eq. (4.17) is calculated and then the Reynolds number is determined using the plot $\lambda/\text{Re} - \text{Re}$. A particle diameter is calculated by means of the definition of the Reynolds number.

4.2.3. Analytical method

The formulas (4.16) and (4.17) are used also in this method. The expression on the right side of Eq. (4.16), without the numerical multiplier, is called the Archimedes number. It is a criterion number and characterizes the ratio of the buoyant force to the viscosity force. The definition has the form

$$\text{Ar} = \frac{d^3 (\rho_s - \rho) \rho g}{\mu^2} \quad (4.18)$$

So

$$\lambda \text{Re}^2 = \frac{4}{3} \text{Ar} \quad (4.19)$$

The reciprocal of the expression on the right side of Eq. (4.17), without the numerical multiplier, is called the Ly number in Russian literature. It is easy to show that it is a combination of Ar and Re numbers

$$\left(\frac{\text{Re}^3}{\text{Ar}} \right) = \text{Ly} = \frac{\rho^2 w^3}{(\rho_s - \rho) g \mu} \quad (4.20)$$

On the basis of Ar (or Ly) values the character of settling can be determined. Connecting the relations (4.5) and (4.19) one can obtain the formulas (4.21) and (4.21') for laminar settling

$$\text{Re} = \frac{\text{Ar}}{18} \quad (4.21)$$

$$\text{Re} = 4.243 \sqrt{\text{Ly}} \quad (4.21')$$

Substituting the limiting values instead of Re , one can prove that laminar settling is when $0.0018 < \text{Ar} < 7.2$ and when $5.56 \cdot 10^{-10} < \text{Ly} < 8.89 \cdot 10^{-3}$.

Analogical relation can be derived for transient and turbulent settling. For transient settling the following relations are valid

$$\text{Re} = 0.1528 \text{Ar}^{0.7143} \quad (4.22)$$

$$\text{Re} = 5.175 \text{Ly}^{0.625} \quad (4.22')$$

For the transient settling range the following inequalities are justified: $7.2 < \text{Ar} < 3.30 \cdot 10^5$ and $8.89 \cdot 10^{-3} < \text{Ly} < 3030$.

For settling in the turbulent range the Reynolds number can be determined as follows

$$\text{Re} = 1.741 \sqrt{\text{Ar}} \quad (4.23)$$

$$\text{Re} = 0.330 \text{Ly} \quad (4.23')$$

Turbulent settling of spherical particles occurs for $3.30 \cdot 10^5 < \text{Ar} < 8.25 \cdot 10^{10}$ and $3030 < \text{Ly} < 1.515 \cdot 10^6$.

The above relations are presented in Tab. 4.1. The algorithm of calculations is as follows: when settling velocity is determined, it is necessary to calculate Ar (using (4.18)), and then Re must be found using the appropriate formula (4.21, 4.22 or 4.23).

If the particle diameter is to be found, first of all Ly must be calculated according to the relation (4.20), a settling range must be determined, and then Re is found using the appropriate formula (4.21', 4.22' or 4.23').

For simplified calculations the Todes' formula can be used. It expresses the relationship between Re and Ar for all ranges of settling, what is a huge convenience. Instead of the formulas (4.21)–(4.23) the following equation can be used

$$\text{Re} = \frac{\text{Ar}}{18 + 0,575 \sqrt{\text{Ar}}} \quad (4.24)$$

Depending on the mutual relations between summands in the denominator, in the limiting cases this formula takes the form of Eq. (4.21) or (4.23).

4.3. DUST-SETTLING CHAMBERS

Settling chambers are the simplest type of devices for separating solids from a gas stream. In the Howard chamber there is a series of horizontal rectangular

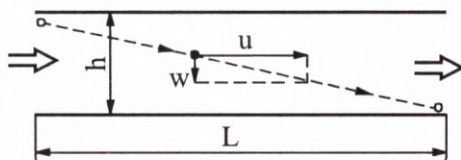


Fig. 4.2. Dust-settling chambers operating principles

plates placed one above another. Dust-laden gas flows between the plates. Dust particles are moving obliquely downwards in straight trajectories (Fig. 4.1). They are carried by the gas but they also have the downward component of velocity (settling velocity). A typical calculating problem lies in finding plates length L for which a particle covers a vertical distance between the plates h during the residence time. It corresponds to settlement of the particle which was at the most inconvenient initial position (a particle is separated from gas when it contacts with the plate). Because the time of particle settling is h/w and the time the particle stays in the device is L/u (u – gas velocity), the following relation is obligatory

$$\frac{h}{w} = \frac{L}{u} \quad (4.25)$$

For a given gas flow rate gas velocity is determined by plate width B . This velocity should be selected in such a way that the secondary sweeping of particles which has already been settled does not occur.

4.4. CYCLONES

Cyclones are dust-settling devices, in which “the driving force” of particles settling is a centrifugal force. A dust-laden gas stream enters through an inlet pipe tangentially to cyclone walls, what causes the gas stream to spin (Fig. 4.3).

Particles have a complicated trajectory of motion because they are not only carried by gas but also move towards the wall due to the centrifugal force. Assuming that particles motion in radial direction is laminar ($\lambda = 24/Re$), one can write the condition for equilibrium between the drag force and the inertia force

$$3\pi d\mu w = m_s \frac{u^2}{r} \quad (4.26)$$

where:

- w – particle velocity in radial direction,
- m_s – particle mass,

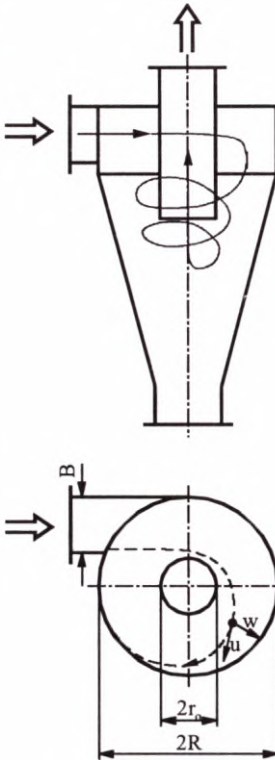


Fig. 4.3. Cyclone: — gas trajectory, - - - particles trajectory

u — particle (also gas) tangential velocity,
 r — radius of particle trajectory curvature.

Substituting $\pi d^3 \rho_s / 6$ instead of particle mass, one gets

$$w = \frac{dr}{dt} = \frac{d^2 \rho_s u^2}{18\mu r} \quad (4.27)$$

So radial velocity w depends on a radius of curvature, which value varies from r_0 (for $t = 0$) to R . After integration of the Eq. (4.27), one obtains

$$t = \frac{9\mu}{d^2 \rho_s u^2} (R^2 - r_0^2) \quad (4.28)$$

The residence time can be approximately determined as $2\pi r i / u$ (it is conventionally assumed that $r = R$), where i denotes how many times a stream spins in a cyclone; it is usually assumed that $i = 1.5$.

Comparing the residence time with the time of motion towards the wall (formula (4.28)), one can obtain the relation for the minimum diameter of particles separated from gas in a cyclone

$$d = \sqrt{\frac{9\mu (R^2 - r_0^2)}{2\pi i \rho_s u R}} \quad (4.29)$$

Alternatively, it can be assumed that $r = \text{const}$ in Eq. (4.27) and that a distance covered by a particle moving towards the wall is equal to inlet pipe width B . In this case the following formula is obtained

$$d = \sqrt{\frac{9\mu B}{\pi i \rho_s u}} \quad (4.30)$$

Tangential gas velocity u can be determined only conventionally: it is usually assumed to be equal to the inlet gas velocity (in the inlet pipe).

4.5. HYDRAULIC CLASSIFIERS

Hydraulic classifiers are devices for separation of particles of various densities in a liquid stream.

If two types of particles of densities ρ_A and ρ_B ($\rho_A > \rho_B > \rho$) and of identical size are to be separated, it is easy to conclude that the settling velocity of particles A will be larger than the velocity of particles B regardless the settling range. It results from analysis of the formula (4.13)–(4.15).

If particles settle in a fluid moving in horizontal direction, they are also carried by the liquid stream and settle in various places depending on their settling velocity.

In practice particles of sizes in a certain range, which is the same for A and B, are separated. The principle of hydraulic classification is presented in Fig. 4.4. Two types of particles A and B are separated from each other; the particles size range

is between d_{\min} and d_{\max} . Particles A of the maximum diameter have the highest settling velocity $w_{A\max}$, while particles B of the minimum diameter have the lowest velocity, $w_{B\min}$. Separation of particles A and B depends on the relation between velocities $w_{B\max}$ and $w_{A\min}$ (Fig. 4.4). If $w_{A\min} \geq w_{B\max}$, separation is complete. Otherwise, a mixed fraction (II) arises (Fig. 4.4). The first fraction (I), which is the closest to the dosing point, is composed of particles A of sizes in the range between d_{\max} and d_{A1} . The mixed fraction (II) consists of particles A of sizes between d_{A1} and d_{\min} and particles B which diameters are between d_{\max} and d_{B1} . In the case shown in Fig. 4.4 the mixed fraction cannot be separated into components A and B by sieving because $d_{A1} > d_{B1}$. The last i.e., the farthest from the dosing point, fraction (III) consists of particles B of sizes between d_{B1} and d_{\min} .

Classifier capacity is influenced by liquid density because in each settling range settling velocity depends on the difference between particles and fluid density, what is expressed by the formula (4.31) resulting from the relations (4.13)–(4.15)

$$w = C(\rho_s - \rho)^n \quad (4.31)$$

where:

C – constant,

n – exponent depending on settling character; for laminar settling $n = 1.0$, for the transient settling range $n = 0.7143$, for turbulent settling $n = 0.5$.

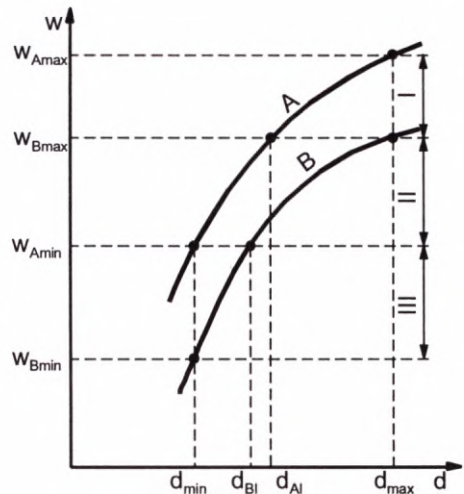


Fig. 4.4. Graphical interpretation of hydraulic classification

Classifier capacity can be characterized by the ratio w_A/w_B , which according to (4.31) is equal to

$$\frac{w_A}{w_B} = \frac{C_A}{C_B} \left(\frac{\rho_{sA} - \rho}{\rho_{sB} - \rho} \right)^n \quad (4.32)$$

Analysis of this formula leads to the conclusion that for $\rho \rightarrow \rho_{sB}$ the expression w_A/w_B tends to infinity, so if fluid density increases, classifier efficiency increases.

4.6. SEDIMENTATION

Sedimentation consists in concentrating (settling) of solid in liquid under the influence of gravitational forces. Because of high concentration of solids, particles influence adjacent particles. This is often called hindered settling. The hindered-settling velocity w_z is a function of among others the porosity of a suspension ε i.e., the volume fraction of liquid in the suspension. For $\varepsilon < 0.7$ the following formula is valid

$$w_z = 0.123 \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} w \quad (4.33)$$

where w is the free-settling velocity. The typical calculating problem lies in determination of the formation time of a clear layer of a certain height (Fig. 4.5).

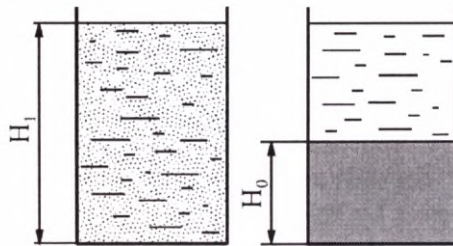


Fig. 4.5. Scheme illustrating sedimentation process

The porosity of a suspension varies during the process between the value for a raw suspension ε_1 (the beginning of settling $H = H_1$) and the value corresponding with a concentrated sediment ε_0 (the end of settling $H = H_0$). Making a balance for particles volume during sedimentation, before and after the process, one can write

$$(1 - \varepsilon)H = (1 - \varepsilon_1)H_1 = (1 - \varepsilon_0)H_0 \quad (4.34)$$

Because of variable porosity, settling velocity w_z varies with the settling time ($= dH/dt$), so the time of formation of a clear layer of height $H_1 - H_0$ can be calculated using the formula

$$t = \int_{H_0}^{H_1} \frac{dH}{w_z} \quad (4.35)$$

Another problem is in calculation of a continuous decanter area for a given suspension flow rate and suspension and sludge concentrations. A suspension at a flow rate \dot{V}_{sus} with reference to clear liquid is entered into a sedimentation tank (Fig. 4.6).

Sludge at a flow rate of \dot{V}_{sl} per clear liquid is collected from the bottom of the sedimentation tank and the clear liquid at a flow rate \dot{V} (without particles) is flowing out through a weir. Calculations are easy because it can be assumed that particles have constant (average) settling velocity w_{zm} .

An area of a sedimentation tank must be selected in such a way that the linear directed-upward liquid velocity \dot{V}/S is at most equal to the average settling velocity of particles

$$\frac{\dot{V}}{S} = w_{zm} \quad (4.36)$$

EXAMPLE 4.1

Calculate the range of diameters of spherical sand particles of density $\rho_s = 2300 \text{ kg/m}^3$ which settle in water at 20°C . Make this calculations for laminar, transient and turbulent settling. Evaluate the drag forces corresponding to these diameters.

Calculations will be made for the limiting Reynolds number for each settling range i.e., for the values 10^{-4} , 0.4, 1000 and $2 \cdot 10^5$. The appropriate formulas for settling velocity, including the formula (a), will be used for evaluation of each diameter

$$w = \frac{\text{Re}\mu}{d\rho} \quad (a)$$

Connecting the formulas (a) and (4.13), one gets the relation

$$d = 2.6213 \sqrt[3]{\text{Re} \frac{\mu^2}{(\rho_s - \rho) \rho g}} \quad (b)$$

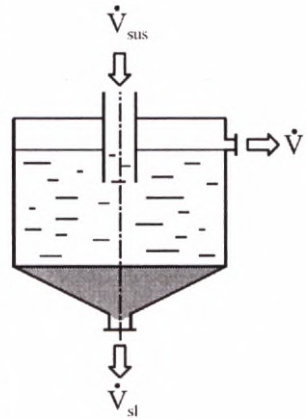


Fig. 4.6. Continuous settler

According to the Table AT-1 physical properties of water at 20°C are as follows: $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.9934 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. It is convenient to calculate separately the quotient under the root in the relation (b)

$$\frac{\mu^2}{(\rho_s - \rho)\rho g} = \frac{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2}{(2300 - 998.2) \cdot 998.2 \cdot 9.81} = 7.744 \cdot 10^{-14} \text{ m}^3 \quad (\text{c})$$

Substituting $\text{Re} = 10^{-4}$ as the limiting value for laminar settling, one obtains

$$d = 2.621 \cdot \sqrt[3]{10^{-4} \cdot 7.744 \cdot 10^{-14}} = 5.18 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Substituting in place of Re the limiting value for laminar and transient settling i.e., $\text{Re} = 0.4$, one gets

$$d = 2.621 \cdot \sqrt[3]{0.4 \cdot 7.744 \cdot 10^{-14}} = 82.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

So laminar settling of sand in water refers to particles of diameters in the above ranges. For the turbulent range the formula resulting from (a) and (4.15) is used

$$d = 0.6910 \sqrt[3]{\text{Re}^2 \frac{\mu^2}{(\rho_s - \rho)\rho g}} \quad (\text{d})$$

Substituting $\text{Re} = 1000$ as the limiting value for transient and laminar settling, one gets

$$d = 0.6910 \cdot \sqrt[3]{(1000)^2 \cdot 7.744 \cdot 10^{-14}} = 2.94 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

The turbulent settling also has the upper limiting; the limiting value of Re is $2 \cdot 10^5$, and the diameter resulting from that value is abstract for sand particles but such values of Re cannot be found in problems of chemical engineering. Calculation gives

$$d = 0.6910 \cdot \sqrt[3]{(2 \cdot 10^5)^2 \cdot 7.744 \cdot 10^{-14}} = 101 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong 0.1 \text{ m}$$

So practically each sand pellet of diameter higher than about 3 mm falls turbulently in water.

As it results from the definition of the Archimedes number (4.18) the expression calculated using the formula (c) can be presented in the form

$$\frac{\mu^2}{(\rho_s - \rho)\rho g} = \frac{d^3}{Ar} \quad (e)$$

The formula (e) allows one to conduct analogical calculations by substituting appropriate limiting values for Ar.

The drag force for laminar settling can be evaluated using a formula resulting from the relations (4.1), (4.3) and (4.5); the value of this force was calculated for $Re = 0.4$

$$R = 3\pi Re \frac{\mu^2}{\rho} = 3\pi \cdot 0.4 \cdot \frac{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2}{998.2} = 3.73 \cdot 10^{-9} \text{ N} \quad (f)$$

The drag force for turbulent settling is calculated using the formula resulting from (4.1), (4.3) and (4.7); the value of this force was calculated for $Re = 1000$

$$R = 0.055\pi Re^2 \frac{\mu^2}{\rho} \quad (g)$$

$$R = 0.055 \cdot \pi \cdot (1000)^2 \cdot \frac{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2}{998.2} = 0.171 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

The above values of drag forces can also be calculated using relations for transient settling. However, such calculations will give less accurate results. It was obtained that

$$R = 7.265 Re^{1.4} \frac{\mu^2}{\rho} \quad (h)$$

It was received that $R = 2.04 \cdot 10^{-9} \text{ N}$ for $Re = 0.4$ and $R = 0.116 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ for $Re = 1000$.

EXAMPLE 4.2

Determine the settling velocity of sand particles which density is $\rho_s = 2300 \text{ kg/m}^3$ and the diameter is $d = 1 \text{ mm}$. Particles are settling in water at 20°C .

Physical properties of water at 20°C are as follows (Table AT-1): $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.9934 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Calculations will be made using all the three methods presented in Chapter 4.2.

Trial and error method. It is assumed that settling is laminar; settling velocity is calculated using the formula (4.13)

$$w = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} = \frac{(0.001)^2 \cdot (2300 - 998.2) \cdot 9.81}{18 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}} = 0.714 \text{ m/s}$$

The Reynolds number is calculated in order to control if the assumption is correct

$$\text{Re} = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{0.714 \cdot 0.001 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 717 > 0.4$$

So settling is not laminar. It is assumed that settling is turbulent (formula (4.15))

$$w = 1.741 \sqrt{\frac{d(\rho_s - \rho)g}{\rho}} = 1.741 \cdot \sqrt{\frac{0.001 \cdot (2300 - 998.2) \cdot 9.81}{998.2}} = 0.197 \text{ m/s}$$

Calculation of Re gives

$$\text{Re} = \frac{0.197 \cdot 0.001 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 198 < 1000$$

Settling is not turbulent. The only possibility is to assume transient settling. In this case the formula (4.14) is valid

$$w = 0.1528 \frac{d^{1.143} \cdot (\rho_s - \rho)^{0.7143} \cdot g^{0.7143}}{\rho^{0.2857} \cdot \mu^{0.4286}}$$

$$w = 0.1528 \cdot \frac{(0.001)^{1.143} \cdot (2300 - 998.2)^{0.7143} \cdot (9.81)^{0.7143}}{(998.2)^{0.2857} \cdot (0.9934 \cdot 10^{-3})^{0.4286}} = 0.131 \text{ m/s}$$

Calculation of the Reynolds number confirms the assumed range

$$\text{Re} = \frac{0.131 \cdot 0.001 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 132$$

So the settling velocity of sand in water is 0.131 m/s.

Graphical method. The expression λRe^2 is calculated using the relation (4.16)

$$\lambda \text{Re}^2 = \frac{4}{3} \frac{d^3(\rho_s - \rho)\rho g}{\mu^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(0.001)^3 \cdot (2300 - 998.2) \cdot 998.2 \cdot 9.81}{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2} = 17220$$

The Reynolds number which corresponds to $\lambda Re^2 = 17220$ is found using the chart (Fig. 4.1). Only the approximate estimation is possible; it was received that $Re \cong 160$. Hence

$$w = \frac{Re \cdot \mu}{d\rho} = \frac{160 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.001 \cdot 998.2} = 0.159 \text{ m/s}$$

Analytical method. The Archimedes number is calculated using (4.18) and (4.19)

$$Ar = \frac{3}{4} \cdot \lambda Re^2 = \frac{3}{4} \cdot 17\,220 = 12\,920$$

This value is higher than 7.2 and lower than 330000, so it refers to the transient settling range. The Reynolds number is calculated using the relation (4.22)

$$Re = 0.1528 Ar^{0.7143} = 0.1528 \cdot (12\,920)^{0.7143} = 132$$

The settling velocity is equal to

$$w = \frac{132 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.001 \cdot 998.2} = 0.131 \text{ m/s}$$

The result is identical as obtained in the trial and error method. The result obtained using the Todes' formula (4.24) is less accurate

$$Re = \frac{Ar}{18 + 0.575\sqrt{Ar}} = \frac{12\,920}{18 + 0.575 \cdot \sqrt{12\,920}} = 155$$

The settling velocity which corresponds to the above value of the Reynolds number equals 0.154 m/s.

EXAMPLE 4.3

A particle of shape similar to a cylinder is settling in air at a temperature 20°C. The particle diameter is equal to its height. Density of the particle is 2900 kg/m³, and its mass $m_s = 1$ g. Calculate the particle settling velocity. If calculations were made for a spherical particle instead of a cylindrical one, what would be the error?

Particle volume is

$$V_s = \frac{m_s}{\rho_s} = \frac{0.001}{2900} = 0.345 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Because for a cylinder it is

$$V_s = \frac{\pi D^2}{4} H$$

so the particle diameter equal to its height is

$$D = H = \sqrt[3]{\frac{4V_s}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0.345 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 7.60 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Then particle area must be calculated

$$A_s = 2 \frac{\pi D^2}{4} + \pi D H = 1.5 \cdot \pi D^2 = 1.5 \cdot \pi \cdot (7.60 \cdot 10^{-3})^2 = 2.72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Hence, taking the relation (4.4) into account, one can calculate the sphericity

$$\Psi = 4.836 \frac{V_s^{2/3}}{A_s} = 4.836 \cdot \frac{(0.345 \cdot 10^{-6})^{2/3}}{2.72 \cdot 10^{-4}} = 0.874$$

Assuming that particle settling is turbulent, one can calculate the drag coefficient using the formula (4.9)

$$\lambda = 5.31 - 4.88\Psi = 5.31 - 4.88 \cdot 0.874 = 1.05$$

The equivalent diameter is (formula 4.2)

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{6V_s}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0.345 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 8.70 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

According to Table AT-2 physical properties of air at 20°C are as follows: $\rho = 1.164 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.824 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. The settling velocity is calculated using the relation (4.11) and assuming that $d = d_e$

$$w = \sqrt{\frac{4 d_e (\rho_s - \rho) g}{3 \lambda \rho}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8.70 \cdot 10^{-3} \cdot (2900 - 1.164) \cdot 9.81}{3 \cdot 1.05 \cdot 1.164}} = 16.4 \text{ m/s} \quad (\text{a})$$

It must be verified if settling is turbulent

$$\text{Re} = \frac{w d_e \rho}{\mu} = \frac{16.4 \cdot 8.70 \cdot 10^{-3} \cdot 1.164}{1.824 \cdot 10^{-5}} = 9130$$

The value $\text{Re} > 2000$ shows that the assumption was correct.

If the particle was spherical ($d = d_e$), its settling velocity should be calculated using the relation (4.15)

$$w = 1.741 \sqrt{\frac{d (\rho_s - \rho) g}{\rho}} = 1.741 \sqrt{\frac{8.70 \cdot 10^{-3} \cdot (2900 - 1.164) \cdot 9.81}{1.164}} = 25.4 \text{ m/s} \quad (\text{b})$$

The result is inflated by more than 50%.

It is easy to notice that the formulas (a) and (b) differ only in the drag coefficient value. The coefficient $\lambda = 1.05$ was substituted into (a), while $\lambda = 0.44$ is included in the constant in (b).

EXAMPLE 4.4

Determine runs of the curves $w = f(d)$ in each settling range for the three kinds of particles of densities 2000 kg/m^3 , 4000 kg/m^3 and 6000 kg/m^3 settling freely in water at 20°C .

Calculations were conducted for particles of diameters between 0.005 mm and 10 mm. Firstly, the number Ar was calculated, then the settling range was determined and the Reynolds number was calculated using the appropriate formula: (4.21), (4.22) or (4.23) and finally settling velocity was evaluated. Results of calculations are presented in Tab. 4.2. Horizontal bold lines separate settling ranges.

The obtained results are presented graphically in Figs. 4.7a and b. Fig. 4.7a refers to the whole considered range of particles diameters; the laminar range is almost invisible in this figure. An enlarged fragment of this chart for small diameters is presented in Fig. 4.7b. These charts show that curves for the laminar range are concave, for the transient range – almost straight, while for the turbulent one – convex. Analysis of the formulas (4.13)–(4.15) confirms such courses; for the laminar range it is $w \propto d^2$, for transient range $w \propto d^{1.14}$ and for the turbulent one – $w \propto d^{1/2}$.

Table 4.2

Results of calculations for the Example 4.4

d [mm]	$\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$			$\rho_s = 4000 \text{ kg/m}^3$			$\rho_s = 6000 \text{ kg/m}^3$		
	Ar	Re	w [m/s]	Ar	Re	w [m/s]	Ar	Re	w [m/s]
0.005	0.001214	-	-	0.003636	0.000202	0.000041	0.006058	0.000337	0.000068
0.010	0.009709	0.0005339	0.000054	0.02909	0.001616	0.000163	0.04846	0.002692	0.000271
0.020	0.07767	0.004315	0.000217	0.2327	0.01293	0.000651	0.3877	0.02154	0.001084
0.050	1.214	0.06744	0.001358	3.636	0.2020	0.004068	6.058	0.3365	0.006777
0.100	9.709	0.7749	0.007803	29.09	1.6970	0.01709	48.46	2.443	0.02460
0.200	77.67	3.422	0.01723	232.7	7.494	0.03773	387.7	10.79	0.05433
0.500	1214	24.39	0.04912	3636	53.39	0.1075	6058	76.88	0.1548
1.000	9709	107.7	0.1084	29090	235.8	0.2374	48460	339.5	0.3419
2.000	77670	475.6	0.2395	232700	839.8	0.4228	387700	1084	0.5458
5.000	1214000	1918	0.3863	3636000	3320	0.6686	6098000	4285	0.8630
10.00	9709000	5425	0.5463	29090000	9390	0.9456	48460000	12120	1.2205

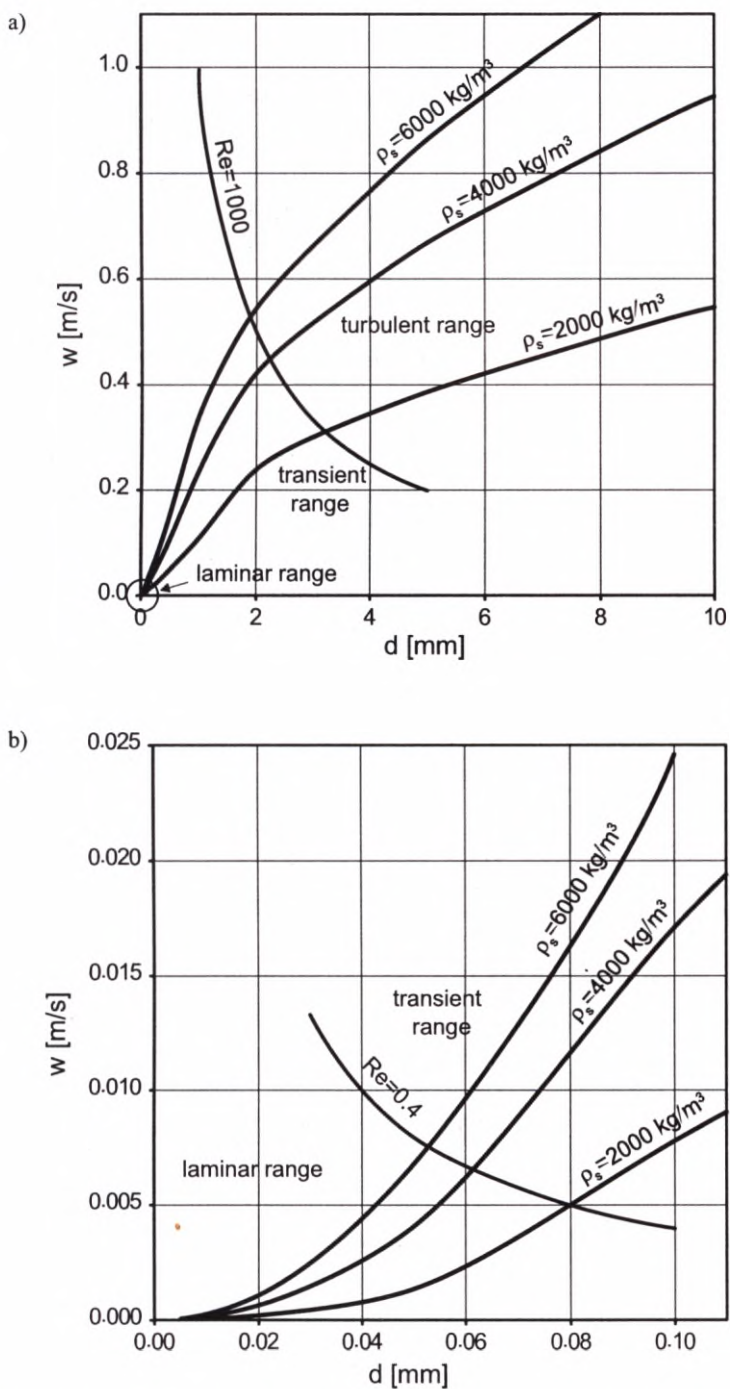


Fig. 4.7. Relation between particle settling velocity and its diameter and density: a) transient and turbulent range, b) laminar and transient range

EXAMPLE 4.5

Calculate length and width of the Howard settling chamber where solid particles are separated from air at the flow rate $\dot{V} = 10000 \text{ m}^3/\text{h}$. Assume that particles are spherical, their diameter is $d = 18 \text{ }\mu\text{m}$ and density $\rho_s = 3100 \text{ kg/m}^3$. The chamber height is $H = 3 \text{ m}$, the distance between trays $h = 0.1 \text{ m}$, air temperature 80°C and its velocity $u = 0.4 \text{ m/s}$.

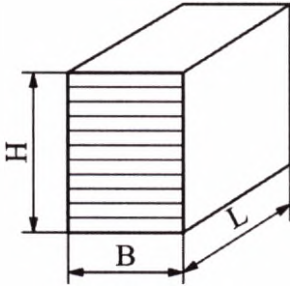


Fig. 4.8. Dimensions of dust-settling chamber

The chamber cross-sectional area $S = BH$ was evaluated using the given air velocity

$$S = \frac{\dot{V}}{u} = \frac{10\,000/3600}{0.4} = 6.94 \text{ m}^2$$

Hence, the chamber width (Fig. 4.8) is

$$B = \frac{S}{H} = \frac{6.94}{3} = 2.31 \text{ m}$$

If settling is laminar, the settling velocity of particles can be calculated using the following formula:

$$w = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} = \frac{(18 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (3100 - 0.968) \cdot 9.81}{18 \cdot 2.079 \cdot 10^{-5}} = 0.0263 \text{ m/s}$$

Physical properties of air at 80°C : $\rho = 0.968 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2.079 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, taken from Table AT-2, were used in the above calculations. Control calculations confirm the assumed motion range

$$\text{Re} = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{0.0263 \cdot 18 \cdot 10^{-6} \cdot 0.968}{2.079 \cdot 10^{-5}} = 0.022 < 0.4$$

The chamber length is calculated using the relation (4.25)

$$L = \frac{uh}{w} = \frac{0.4 \cdot 0.1}{0.0263} = 1.52 \text{ m}$$

Such value of length is theoretical; in practice, chamber length should be twice the computational length.

EXAMPLE 4.6

Dust particles of density $\rho_s = 3000 \text{ kg/m}^3$ and with spherical-like shape are removed from air in a cyclone with a diameter $2R = 1.0 \text{ m}$. The air flow rate is $\dot{V} = 2000 \text{ m}^3/\text{h}$ and its temperature is 140°C . Dimensions of the inlet rectangular pipe are: height $h = 0.3 \text{ m}$, width $B = 0.2 \text{ m}$, while the outlet pipe diameter is $2r_0 = 0.5 \text{ m}$. Calculate the limiting size of particles separated in the cyclone and evaluate the separation efficiency for $5 \mu\text{m}$ diameter particles.

Gas velocity in the inlet pipe is

$$u = \frac{\dot{V}}{Bh} = \frac{2000/3600}{0.2 \cdot 0.3} = 9.26 \text{ m/s}$$

According to Table AT-2 physical properties of air at 140°C are as follows: $\rho = 0.827 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2.334 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. The limiting size of particles separated in the cyclone can be calculated using the formula (4.29) or (4.30). Substituting the given values to the formula (4.29) for $i = 1.5$, one obtains

$$d = \sqrt{\frac{9\mu(R^2 - r_0^2)}{2\pi i \rho_s u R}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2.334 \cdot 10^{-5} \cdot [(0.5)^2 - (0.25)^2]}{2\pi \cdot 1.5 \cdot 3000 \cdot 9.26 \cdot 0.5}} = 17.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

while using the formula (4.30), one gets

$$d = \sqrt{\frac{9\mu B}{\pi i \rho_s u}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2.334 \cdot 10^{-5} \cdot 0.2}{\pi \cdot 1.5 \cdot 3000 \cdot 9.26}} = 17.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Hence, the computational limiting values of particles sizes differ little. The value obtained using the formula (4.30) will be taken for further calculations. It must be checked if particles motion in radial direction is laminar. Substituting $r = r_0$ into the formula (4.27), one can obtain the maximum value of radial particle velocity

$$w_{\max} = \frac{d^2 \rho_s u^2}{18\mu r_0} = \frac{(17.9 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 3000 \cdot (9.26)^2}{18 \cdot 2.334 \cdot 10^{-5} \cdot 0.25} = 0.785 \text{ m/s}$$

The maximum value of the Reynolds number is

$$\text{Re}_{\max} = \frac{w_{\max} d \rho}{\mu} = \frac{0.785 \cdot 17.9 \cdot 10^{-6} \cdot 0.827}{2.334 \cdot 10^{-5}} = 0.498$$

The maximum value of Re only slightly exceeds the limiting value, which is 0.4.

Particles with diameters higher than $d = 17.9 \mu\text{m}$ should be completely removed in the cyclone, while particles with a diameter d_x , smaller than d , are partially removed depending on the initial distance between a particle (in the inlet stream) and a cyclone wall B_x ($B_x < B$). Analysis of the relation (4.30) leads to the conclusion that

$$\frac{d_x}{d} = \sqrt{\frac{B_x}{B}}$$

Assuming a uniform distribution of particles in the inlet stream, one can treat the ratio B_x/B as the efficiency of dust removal i.e., the fraction of particles separated in relation to particles delivered to a cyclone (it refers to a specific size d_x). The dust removal efficiency for particles with sizes of $5 \mu\text{m}$ is

$$\eta = \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 = \left(\frac{5.0}{17.9}\right)^2 = 0.078 = 7.8\%$$

Although the above calculation is based on an ideal model of dust removal from gases, it confirms that cyclonic separation of particles with diameters in the order of magnitude of several micrometers has low efficiency.

EXAMPLE 4.7

A mixture of minerals A and B of densities $\rho_{sA} = 5400 \text{ kg/m}^3$ and $\rho_{sB} = 2700 \text{ kg/m}^3$, respectively, is separated in a horizontal hydraulic classifier. Particles of the minerals are approximately spherical and their diameters are between 0.15 mm and 1.5 mm . Height of water level in the classifier is $h = 0.2 \text{ m}$, water velocity $u = 0.5 \text{ m/s}$ and temperature 20°C . Determine sizes and settling zones for all fractions.

Physical properties of water at 20°C are as follows: $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.9934 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Firstly it is necessary to determine the settling velocity in water for particles A and B with extreme sizes.

In order to calculate $w_{A\text{max}}$, which is the velocity of particles A with the maximum size, the Archimedes number must be calculated

$$\text{Ar} = \frac{d^3 (\rho_s - \rho) \rho g}{\mu^2} = \frac{(1.5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (5400 - 998.2) \cdot 998.2 \cdot 9.81}{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2} = 147\,300$$

Settling is transient; the Reynolds number is (relation (4.22)):

$$\text{Re} = 0.1528 \text{Ar}^{0.7143} = 0.1528 \cdot (147\,300)^{0.7143} = 751$$

The settling velocity is calculated in the following way

$$w_{Amax} = \frac{Re \cdot \mu}{d\rho} = \frac{751 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 998.2} = 0.498 \text{ m/s}$$

Similar calculations are conducted for particles A of the minimum size (w_{Amin})

$$Ar = \frac{(0.15 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (5400 - 998.2) \cdot 998.2 \cdot 9.81}{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2} = 147$$

$$Re = 0.1528 \cdot (147)^{0.7143} = 5.41$$

$$w_{Amin} = \frac{5.41 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.15 \cdot 10^{-3} \cdot 998.2} = 0.0359 \text{ m/s}$$

For particles B (lighter particles) firstly the settling velocity for the maximum size was calculated (w_{Bmax})

$$Ar = \frac{(1.5 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (2700 - 998.2) \cdot 998.2 \cdot 9.81}{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2} = 56\,980$$

$$Re = 0.1528 \cdot (56\,980)^{0.7143} = 381$$

$$w_{Bmax} = \frac{381 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 998.2} = 0.253 \text{ m/s}$$

Calculations for particles B of the minimum size are analogical

$$Ar = \frac{(0.15 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (2700 - 998.2) \cdot 998.2 \cdot 9.81}{(0.9934 \cdot 10^{-3})^2} = 56.98$$

$$Re = 0.1528 \cdot (56.98)^{0.7143} = 2.74$$

$$w_{Bmin} = \frac{2.74 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.15 \cdot 10^{-3} \cdot 998.2} = 0.0182 \text{ m/s}$$

Because $w_{Amin} < w_{Bmax}$, so mixed fraction is going to arise in the classifier. Fraction I consists only of the mineral A and refers to particles with settling velocity between 0.498 m/s and 0.253 m/s. Fraction II (mixed fraction) is formed of particles A and B settling with velocities between 0.253 m/s and 0.0359 m/s. Fraction III is composed of pure mineral B; in this case the settling velocity range is between 0.0359 m/s and 0.0182 m/s.

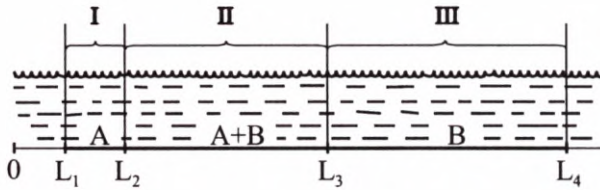


Fig. 4.9. Settling zone for each fraction

Settling zones of each particular fraction in the classifier are determined using the formula (4.25). Each particular distance between the point of minerals dosing (Fig. 4.9) is

$$L_1 = \frac{hu}{w_{Amax}} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.498} = 0.201 \text{ m}$$

$$L_2 = \frac{hu}{w_{Bmax}} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.253} = 0.395 \text{ m}$$

$$L_3 = \frac{hu}{w_{Amin}} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.0359} = 2.78 \text{ m}$$

$$L_4 = \frac{hu}{w_{Bmin}} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.0182} = 5.49 \text{ m}$$

Fraction I deposits between 0.201 m and 0.395 m from the dosing point, fraction II – between 0.395 m and 2.78 m, fraction III – between 2.78 m and 5.49 m.

Determination of particles sizes in each fraction requires calculations of the diameters d_{A1} and d_{B1} , for which the graphical interpretation is given in Fig. 4.4. The quantity d_{A1} is a diameter of particles A settling with velocity w_{Bmax} . In order to calculate this velocity, the value of the expression Ly must be calculated

$$Ly = \frac{\rho^2 w^3}{(\rho_s - \rho) g \mu} = \frac{(998.2)^2 \cdot (0.253)^3}{(5400 - 998.2) \cdot 9.81 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}} = 376$$

Motion is transient, so the formula (4.23') is taken for Re calculations

$$Re = 5.175 Ly^{0.625} = 5.175 \cdot (376)^{0.625} = 211$$

The diameter of particles is

$$d_{A1} = \frac{Re \cdot \mu}{w_p} = \frac{211 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.253 \cdot 998.2} = 0.829 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

The quantity d_{B1} i.e., the diameter of particles B settling with velocity w_{Amin} , is calculated analogically

$$Ly = \frac{(998.2)^2 \cdot (0.0359)^3}{(2700 - 998.2) \cdot 9.81 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}} = 2.78$$

$$Re = 5.175 \cdot (2.78)^{0.625} = 9.81$$

$$d_{B1} = \frac{9.81 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.0359 \cdot 998.2} = 0.272 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Fraction I is composed of particles A of sizes between 0.829 mm and 1.5 mm. Fraction II (mixed) consists of particles A of diameters between 0.15 mm and 0.829 mm and particles B of diameters between 0.272 mm and 1.5 mm. Sieving separation of this fraction into its components A and B is not possible. Fraction III is comprised of particles B of diameters between 0.15 mm and 0.272 mm.

EXAMPLE 4.8

A water-based suspension of silica is supplied at the flow rate of 50 m³/h at 10°C into a settler. It was found that in 1 dm³ of the suspension was 800 g of a dry solid of density 2650 kg/m³ and an average diameter of 50 μm. The bulk density of silica is 1100 kg/m³. Calculate the diameter of the settler if liquid level in it is 1.2 m.

According to Table AT-1 physical properties of water at 10°C are as follows: $\rho = 999.7 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.2964 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. The free settling velocity (in the laminar range) is

$$w = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} = \frac{(50 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (2650 - 999.7) \cdot 9.81}{18 \cdot 1.2964 \cdot 10^{-3}} = 0.00173 \text{ m/s}$$

Verification of the assumed range gives

$$\text{Re} = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{0.00173 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 999.7}{1.2964 \cdot 10^{-3}} = 0.0669 < 0.4$$

There is 800 g of silica in 1 dm³ of the suspension i.e., 800/2650 = 0.302 dm³. Porosity is a volume fraction of liquid in a suspension, so for the raw suspension

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - 0.302}{1} = 0.698$$

The final porosity (porosity of sludge) is calculated using the bulk density ρ_b (formula (5.2)). The bulk density is a ratio of dry solid mass to a volume occupied by the solid in a loose condition (i.e. the total volume of the solid and intergranular space). The porosity of concentrated sludge is

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho_s - \rho_b}{\rho_s} = \frac{2650 - 1100}{2650} = 0.585$$

The hindered-settling velocity of silica is calculated using the relation (4.33). This velocity for the raw suspension is

$$w_{z1} = 0.123 \frac{\varepsilon_1^3}{1 - \varepsilon_1} w = 0.123 \cdot \frac{(0.698)^3}{1 - 0.698} \cdot 0.00173 = 0.000240 \text{ m/s}$$

At the end of settling i.e., when the porosity is the porosity of sludge, the settling velocity is smaller

$$w_{z0} = 0.123 \cdot \frac{(0.585)^3}{1 - 0.585} \cdot 0.00173 = 0.000103 \text{ m/s}$$

The height of a sludge layer is calculated using the balance of particles volume (relation (4.34))

$$H_0 = H_1 \frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_0} = 1.2 \cdot \frac{1 - 0.698}{1 - 0.585} = 0.873 \text{ m}$$

The porosity in the settling zone (i.e., between H_0 and H_1 – Fig. 4.5) is calculated using equation (4.34)

$$\varepsilon = 1 - \frac{H_1}{H}(1 - \varepsilon_1) = 1 - \frac{1.2}{H}(1 - 0.698) = 1 - \frac{0.362}{H} \quad (\text{a})$$

For $H = 1.2$ m there is $\varepsilon_1 = 0.698$ (raw suspension), while for $H = 0.873$ m there is $\varepsilon_0 = 0.585$ (sludge). Substituting equation (a) into the formula (4.33), one obtains the relation between the settling velocity and the height H of a suspension layer

$$w_z = 0.123 \cdot \frac{\left(1 - \frac{0.362}{H}\right)^3}{\frac{0.362}{H}} \cdot 0.00173 = 5.89 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{(H - 0.362)^3}{H^2}$$

The time required for a settling particle to cover the distance between the positions H_1 and H_0 is calculated using the formula (4.35)

$$t = \int_{H_0}^{H_1} \frac{dH}{w_z} = \int_{0.873}^{1.200} \frac{H^2 dH}{5.89 \cdot 10^{-4} \cdot (H - 0.362)^3} = 2050 \text{ s}$$

The substitution: $z = H - 0.362$ was used to solve the integral. Some control on the above calculations can be obtained by calculation of the average settling velocity

$$w_{zm} = \frac{H_1 - H_0}{t} = \frac{1.200 - 0.873}{2050} = 1.60 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

As expected this value is between the values calculated for the beginning and the end of settling. The amount of water supplied with the raw suspension is

$$\dot{V}_{\text{sus}} = 0.698 \cdot 50 = 34.9 \text{ m}^3/\text{h}$$

A portion of this amount leaves the settler as a clear liquid \dot{V} and the remainder flows away together with the sediment in the form of the sludge \dot{V}_{sl} . The volumetric flow rate of the dry sludge is

$$50 - 34.9 = 15.1 \text{ m}^3/\text{h}$$

While the volumetric flow rate of the sludge equals

$$\frac{15.1}{1 - 0.585} = 36.4 \text{ m}^3/\text{h}$$

so the volumetric flow rate of water flowing with the sludge stream is

$$\dot{V}_{sl} = 36.4 - 15.1 = 21.3 \text{ m}^3/\text{h}$$

The flow rate of a clear liquid is

$$\dot{V} = 34.9 - 21.3 = 13.6 \text{ m}^3/\text{h}$$

The settler area is calculated using the relation (4.36)

$$S = \frac{\dot{V}}{w_{zm}} = \frac{13.6/3600}{1.60 \cdot 10^{-4}} = 23.7 \text{ m}^2$$

Hence, the diameter of the settler equals 5.49 m.

EXAMPLE 4.9

Calculate the time needed for a spherical particle of a diameter $d = 0.1 \text{ mm}$ and density $\rho_s = 1700 \text{ kg/m}^3$ to reach the settling velocity which amounts to 99% of the terminal velocity. What distance will the particle cover during that time? Conduct the calculations for settling in water at 20°C .

According to Table AT-1 water at 20°C has the following physical properties: $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.9934 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Calculations of the time will be conducted using the equation (4.12) for $w_t = 0.99w$. It is convenient to calculate separately the value of the expression which occurs in the relation (4.12)

$$t_r = \frac{d^2 \rho_s}{18\mu} = \frac{(0.1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1700}{18 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}} = 9.51 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

It is the so called relaxation time. Substitution of the relation (4.12) gives

$$t = -t_r \cdot \ln\left(1 - \frac{w_t}{w}\right) = -9.51 \cdot 10^{-4} \cdot \ln(1 - 0.99) = 0.00438 \text{ s}$$

This is a vanishingly small time, so settling approaches conditions close to steady-settling conditions (these conditions are almost the same) very fast, although reaching the steady state theoretically requires an infinitely long time. The steady-settling velocity is (laminar motion is assumed)

$$w = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu} = \frac{(0.1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (1700 - 998.2) \cdot 9.81}{18 \cdot 0.9934 \cdot 10^{-3}} = 0.00385 \text{ m/s}$$

Verification of Re confirms the assumed settling range

$$\text{Re} = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{0.00385 \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 0.387$$

The relation between the settling velocity and the settling time can be determined by transformation of the formula (4.12)

$$w_t = w \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{t_r}\right) \right] \quad (\text{a})$$

The distance covered by a particle during the time t is

$$s = \int_0^t w_t dt \quad (\text{b})$$

Combining the relations (a) and (b) yields (after integration)

$$s = wt_r \left[\frac{t}{t_r} + \exp\left(-\frac{t}{t_r}\right) - 1 \right] \quad (\text{c})$$

After substitution of numerical values one gets

$$s = 0.00385 \cdot 9.51 \cdot 10^{-4} \left[\frac{0.00438}{9.51 \cdot 10^{-4}} + \exp\left(-\frac{0.00438}{9.51 \cdot 10^{-4}}\right) - 1 \right] = 13.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

This distance is 7 times smaller than the particle diameter.

EXERCISE 4.1

Calculate the range of diameters (equivalent) of sand particles settling in water at 20°C for turbulent and laminar motion. Sand density is 2300 kg/m³. Calculate also the drag force corresponding to these diameters. The sphericity of particles is 0.8.

Answer: for laminar motion: $d_{\min} = 5.33 \mu\text{m}$, $d_{\max} = 42.3 \mu\text{m}$,

for turbulent motion: $d_{\min} = 6.89 \text{ mm}$,

drag forces: $R = 0.507 \cdot 10^{-9} \text{ N}$ for $\text{Re} = 0.05$,

$R = 2.18 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ for $\text{Re} = 2000$.

EXERCISE 4.2

Find the diameter of spherical sand particles of density 2300 kg/m^3 which are settling in air at 20°C at a velocity of 1 m/s .

Answer: 0.171 mm .

EXERCISE 4.3

$10\,000 \text{ m}^3/\text{h}$ of dust laden gas is passing through a square pipe of cross sectional dimension $2 \times 2 \text{ m}$ and length 15 m . Gas density is 0.9 kg/m^3 and its viscosity coefficient is $1.9 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Determine the minimum size of the dust particle which would settle in the pipe. Dust particles density is 3400 kg/m^3 .

Answer: $30.8 \text{ }\mu\text{m}$.

EXERCISE 4.4

Particles which range in diameters from $8 \text{ }\mu\text{m}$ to $50 \text{ }\mu\text{m}$ are coming out of the chimney of 30 m height. The biggest particles settle approximately 1000 m from the chimney at a particular wind speed. Calculate the range of settling (distance from the chimney) for the smallest particles. Assume that particles density is 1400 kg/m^3 , they are spherical and air temperature is 20°C .

Answer: $39\,000 \text{ m}$.

EXERCISE 4.5

The Howard chamber was used to remove dust from $40\,000 \text{ m}^3/\text{h}$ of gas. The chamber length is 5 m , its width 6 m and height 4 m . Determine how many trays must be installed in the chamber to remove all the particles of diameters higher than $30 \text{ }\mu\text{m}$. Assume that the particles of spherical shape, their density is 2710 kg/m^3 , gas density 1.05 kg/m^3 , coefficient of gas viscosity $1.89 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$.

Answer: 11 trays (10.8).

EXERCISE 4.6

A mixture of mineral pellets A and B of densities 7000 kg/m^3 and 3300 kg/m^3 , respectively, is to be separated in a hydraulic classifier. The particles range in size from 0.65 mm to 1.80 mm . What the minimum density of the liquid in which classification occurs be to obtain a mixed fraction. Assume that particles are spherical and settling is turbulent.

Answer: 1209 kg/m^3 .

EXERCISE 4.7

$15\,000 \text{ kg/h}$ of water-based suspension containing 15% by mass of a solid phase should be supplied into a settler. The spherical-like solid particles are of density 2700 kg/m^3 . Their minimum size is $20 \text{ }\mu\text{m}$. It was found that the hindered-

settling velocity is approximately half of the free-settling velocity. Assuming that concentration of the solid phase in the thickened stream (the sludge) is 30% by mass, calculate the diameter of the settler necessary for the process.

Answer: 3.77 m.

EXERCISE 4.8

Calculate the settling time needed for spherical particles of diameter $40\ \mu\text{m}$ and density $1700\ \text{kg/m}^3$ to settle from a height 0.2 m. Conduct these calculations for settling:

- a) in water at 20°C ,
- b) in water at 50°C ,
- c) in air 20°C ,
- d) as before but for unsteady particle motion,
- e) under vacuum.

Answer: a) 325 s, b) 179 s, c) 2.46 s, d) 2.47 s, e) 0.202 s.

5. METHODS FOR TWO-PHASE CONTACT

In this chapter the following processes connected with phase contact are described: flow through dry and wet packing, flow of gas bubbles through liquid, fluid flow on vertical surface, fluidization and mixing.

5.1. PARAMETERS CHARACTERIZING PACKING

Parameters which characterize a packed bed are as follows: porosity, specific surface area and equivalent channel diameter; there also exist quantities characterizing each particular packing element: equivalent diameter and shape factor.

The porosity of a packed bed ε_0 is the ratio of void spaces (i.e., spaces between packing elements) to the total volume of the layer. These void spaces are also called the outer pores. If packing elements are identical and there are N elements each of the volume V_{el} in a given volume of the bed V , the porosity can be calculated using the formula:

$$\varepsilon_0 = 1 - \left(\frac{N}{V} \right) V_{el} \quad (5.1)$$

Several types of packing used in columns are shown in Fig. 5.1. The characteristic of Raschig rings and Berl saddles is presented in Tab. 5.1. The number of randomly elements in a packed bed which volume is 1 m^3 , the porosity of the layer and the specific surface are given.

Bulk density of a packing layer ρ_b is the ratio of mass of the packing to volume of the bed. There is a correlation between density of packing elements ρ_s , bulk density and porosity, which has the form:

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{\rho_b}{\rho_s} \quad (5.2)$$

A specific surface area of a packed bed is the ratio between a surface area of packing elements and volume of the layer which is comprised of them. Therefore

$$a = \left(\frac{N}{V} \right) A_{el} \quad (5.3)$$

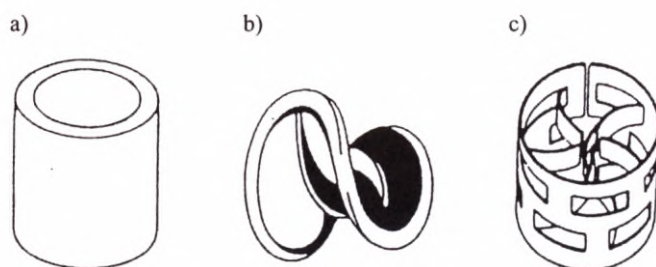


Fig. 5.1. Typical column packing elements: a) Raschig rings, b) Berl saddles, c) Pall rings

Table 5.1

Packings characteristic

Packing	Size [mm]	Thickness of ring wall [mm]	Number of elements in 1 m ³ (N/V) [1/m ³]	Porosity ε_0	Specific surface area a , [m ² /m ³]
Ceramic Raschig rings	13	2,4	378 000	0,64	370
	19	2,4	109 000	0,72	240
	25	3,2	47 700	0,74	190
Metallic Raschig rings	19	1,6	111 000	0,80	245
	25	1,6	46 300	0,86	185
	38	1,6	14 100	0,90	130
Berl saddles	13	–	590 000	0,62	465
	25	–	77 000	0,68	250

where A_{el} is a surface area of an individual packing element. For spherical elements of a diameter d it comes from the formulas (5.1) and (5.3) that

$$a = \frac{6(1 - \varepsilon_0)}{d} \quad (5.4)$$

The equivalent channel diameter d_{ek} i.e., a diameter of pores which allow a fluid to flow through the bed, is based on a concept of a hydraulic diameter. The ratio between a cross-sectional area of channels and their wetted perimeter is equal to a ratio of channels volume ($V\varepsilon_0$) to their surface area (Va). Using the definition of a hydraulic diameter (formula (1.4)), one obtains

$$d_{ek} = \frac{4\varepsilon_0}{a} \quad (5.5)$$

In the case of spherical packings the above formula can be expressed in the form

$$d_{ek} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} d \quad (5.6)$$

An equivalent diameter of packing elements d_e is defined analogically as the equivalent diameter of any other non-spherical particle (formula (4.2)), while the shape factor φ is the reciprocal of the sphericity of a particle Ψ , which is defined by the formula (4.4). The shape factor concept allows one to determine the following correlation between A_{el} , V_{el} and d_e

$$\frac{A_{el}}{V_{el}} = \frac{6\varphi}{d_e} \quad (5.7)$$

5.2. PRESSURE DROP OF FLUID FLOWING THROUGH PACKED BED

The approximate relationship between fluid velocity in channels u' and apparent fluid velocity u i.e., velocity in the empty column without a packing, is as follows

$$u' = \frac{u}{\varepsilon_0} \quad (5.8)$$

In reality fluid velocity in channels is higher than u' because of tortuosity of channels.

The Reynolds number for flow through a spherical packing was defined by Ergun on the basis of a hydraulic diameter of channels (formula (5.6)) and flow velocity in channels (formula (5.8)). If the numeric constant is not taken into account, the formula has the form

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{(1-\varepsilon_0)\mu} \quad (5.9)$$

It was found that flow is laminar when $\text{Re} < 10$. Correlation for pressure drop of a fluid flowing through a packing is based on the correlation for flow through pipes but the quantities u' and d_{ek} are substituted instead of velocity in a pipe and pipe diameter. Ergun formulated the relationship between the resistance coefficient λ and the Reynolds number for laminar, transient and turbulent flow in the form

$$\lambda = \frac{300}{\text{Re}} + 3.50 \quad (5.10)$$

Pressure drop of fluid flowing through a spherical packing is defined by the formula

$$\Delta p = \frac{150\mu u H}{d^2} \cdot \frac{(1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} + \frac{1.75u^2 \rho H}{d} \cdot \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} \quad (5.11)$$

where H is the packing layer height. The first term of the above relation is predominant for laminar flow, the second one – for turbulent flow ($Re > 1000$).

The following equality is valid for spherical elements: $A_{el}/V_{el} = 6/d$. Substituting this expression in the formula (5.7), one obtains that $d = d_e/\varphi$, what after substituting into the first term of the equation (5.11) gives the relation derived by Leva (the only difference is in the numeric constant)

$$\Delta p = \frac{200\mu u H}{d_e^2} \frac{(1 - \varepsilon_0)^2 \varphi^2}{\varepsilon_0^3} \quad (5.12)$$

The above equation corresponding to laminar flow refers to a layer consisting of elements in any shape. Leva defines the Reynolds number directly with the use of an equivalent diameter of packing elements and apparent velocity; so it is the equivalent number

$$Re_z = \frac{u d_e \rho}{\mu} \quad (5.13)$$

It was found that laminar flow is when $Re_z < 10$ and turbulent flow – when $Re_z > 100$. A generalized form (i.e., valid for laminar and turbulent flow) of the equation for pressure drop of a fluid flowing through a layer of packing in any shape is as follows

$$\Delta p = \lambda \frac{H}{d_e} \frac{u^2 \rho}{2} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_0)^{3-n} \varphi^{3-n}}{\varepsilon_0^3} \quad (5.14)$$

where λ and n are defined in the following way. For laminar flow

$$\lambda = \frac{400}{Re}; \quad n = 1 \quad (5.15)$$

In the case of turbulent flow the resistance coefficient is a function of the equivalent Reynolds number and the roughness of packing elements characterized by the parameter b

$$\lambda = \frac{b}{Re_z^{2-n}} \quad (5.16)$$

For ceramic packings (of the average roughness) $b = 10.5 \div 14$. The parameter b for other packing materials takes values between 7 (glass) and 16 (aluminium oxide). The values of n , which depend on the Reynolds number, are presented in Tab. 5.2. In the limiting case i.e., for $Re \rightarrow \infty$, it is $n = 2$.

Table 5.2

Relationship $n = f(\text{Re}_z)$

Re_z	10	20	40	80	100	200	400	1000	2000	4000	10 000
n	1.00	1.15	1.30	1.45	1.55	1.70	1.80	1.85	1.90	1.93	1.96

5.3. FLOW THROUGH WETTED PACKING

Computational problems associated with countercurrent flow of a gas and liquid through a packing relate to determination of the following quantities: gas pressure drop, the maximum gas velocity (flooding velocity) and the degree of surface utilization for a packing.

The Reynolds number for the gravity flow over a packing is defined on the basis of a hydraulic diameter of a liquid film flowing over the packing and the real velocity of a liquid. If it is assumed that a liquid flowing over the packing forms a thin layer of thickness δ , the cross-sectional area of a packing layer occupied by the liquid is $aS\delta$ (S – cross-sectional area of a packing layer). Because the wetted perimeter is aS , a hydraulic diameter is equal to four times the thickness of the liquid layer. If the flow rate of the liquid is \dot{V}_l , the real velocity can be defined as $\dot{V}_l/(aS\delta) = u_l/(a\delta)$. Hence, the Reynolds number for the flowing liquid phase is

$$\text{Re}_l = \frac{4g_{ml}}{a\mu_l} \quad (5.17)$$

Leva formulated the following relationship for pressure drop of a gas flowing through a wetted packing Δp_{wet}

$$\Delta p_{\text{wet}} = \alpha (10)^{\beta g_{ml}} u_g^2 \rho_g H \quad (5.18)$$

where:

- $g_{ml} (= u_l \rho_l)$ – mass velocity of a liquid, kg/(m²s),
- $u_l (= \dot{V}_l / S)$ – apparent velocity of a liquid i.e., average velocity which would occur if the liquid was flowing through the whole cross-sectional area of the column, m/s,
- α, β – parameters depending on packing elements type and size.

Values of α and β for Raschig rings and Berl saddles are given in Tab. 5.3.

Equation (5.18) can be used also for calculations of pressure drop on a dry packing ($g_{ml} = 0$).

Values of parameters in Eq. (5.18)

Packing	Size		Parameters in Eq (5.18)		Liquid mass velocity range	
	inch	mm	α [1/m]	β [m ² s/kg]	g_{ml} [kg/(m ² s)]	
Standard Raschig rings	random	3/8	9.5	264	0.0840	1.0–5.8
		1/2	12.7	174	0.0840	0.4–11.7
		5/8	15.9	132	0.0533	1.4–8.9
		3/4	19.0	75.2	0.0533	2.4–14.7
		1	25.4	54.4	0.0512	0.5–36.7
		1 1/4	31.8	32.0	0.0471	1.0–14.7
		1 1/2	38.1	21.9	0.0471	1.0–19.4
	random	2	50.8	13.5	0.0348	1.0–26.9
	ordered	2	50.8	3.7	0.0264	1.0–43.9
	Berl saddles		1/2	12.7	67.4	0.0430
		3/4	19.0	34.8	0.0348	0.5–19.4
		1	25.4	21.9	0.0348	1.0–38.9
		1 1/2	38.1	11.8	0.0266	1.0–29.2

In the case of countercurrent flow of a gas and liquid through a packing, velocity limitations for both phases exist. For example for a given apparent velocity of a liquid there is the maximum apparent velocity of a gas u_{g^*} , above which flooding occurs in a scrubber. This velocity is determined on the basis of the experimentally determined relationships between the dimensionless quantities Y and X

$$Y = \frac{u_g^2 a \rho_g}{g \varepsilon_0^3 \rho_l} \left(\frac{\mu_l}{\mu_0} \right)^{0.2} \quad (5.19)$$

$$X = \left(\frac{L}{G} \right) \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} \quad (5.20)$$

where μ_0 is a standard value of viscosity coefficient (the viscosity coefficient of water at 20°C). The relationship between Y and X under flooding conditions is usually presented in charts. This relationship according to Sherwood is presented graphically in Fig. 5.2.

The expression (L/G) is the ratio between mass flow rates of a liquid ($L \equiv \dot{m}_l$) and gas ($G \equiv \dot{m}_g$)

$$\frac{L}{G} = \frac{u_l \cdot \rho_l}{u_g \cdot \rho_g} \quad (5.21)$$

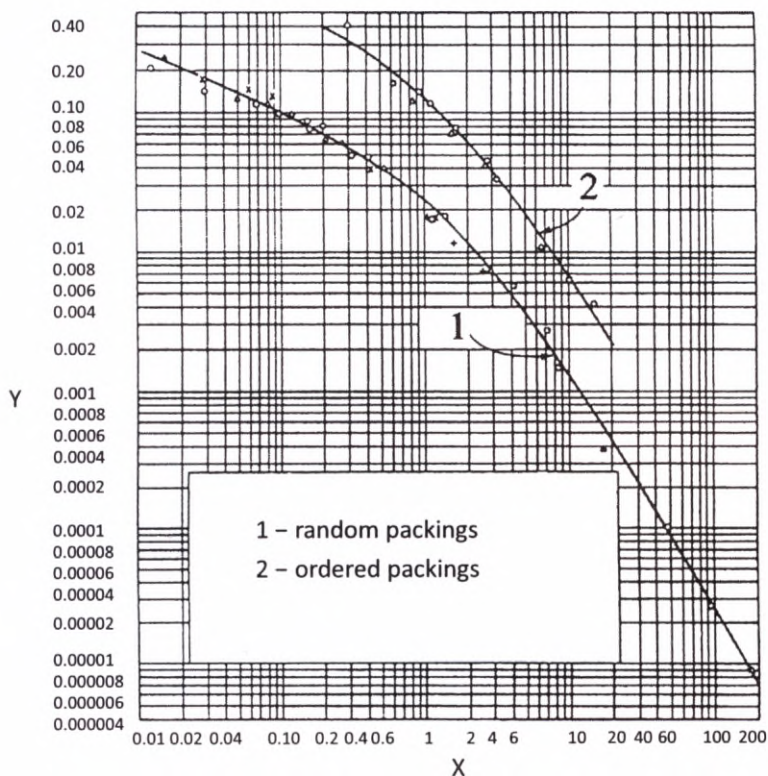


Fig. 5.2. Flooding velocity determination

In order to determine for example u_{gz} for a given (L/G) ratio (values of L and G are not known separately), X is calculated using the equation (5.20), then the limiting value of $Y = Y_z$ is found using the chart (Fig. 5.2), and finally $u_g = u_{gz}$ is determined with the use of the formula (5.19).

The degree of surface area utilization for a packing φ_e is the ratio between the gas-liquid contact surface area and the geometric surface area of the packing. The formula proposed by Hobler can be used among many others correlations for φ_e

$$\varphi_e = 3.39u_l^{0.187} \exp\left(-0.08\frac{H}{D}\right) \quad (5.22)$$

where D is diameter of a packing layer; the unit of fluid apparent velocity u_l is m/s.

5.4. FLUIDIZATION

Packing particles become to be in a fluidized state when apparent velocity of a fluid flowing (in an upward direction) through a layer exceeds some critical value. The minimum (critical) velocity of a fluid u_{mf} at which fluidization starts is determined by equalizing the drag force exerted by a fluid $\Delta p \cdot S$ (S – cross-sectional area of a bed) and the apparent weight of particles i.e., the weight reduced by the buoyant force. For spherical particles pressure drop Δp can be determined using the Ergun equation (5.11); in this case it is obtained that

$$Ar = 150 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} Re_{mf} + \frac{1.75}{\varepsilon^3} Re_{mf}^2 \quad (5.23)$$

where $Re_{mf} = u_{mf} d \rho / \mu$ and the Archimedes number is given by the equation (4.18). The quantity ε used in this formula is usually not identical with porosity of the layer in the static state ε_0 and refers to a bed that was previously loosened during fluidization process; so it is the porosity in the limiting state between a stationary and fluidized bed.

In the case of non-spherical particles, the formula for the minimal fluidization velocity is obtained with the use of the equation (5.12). The formula for laminar flow and particles in any shape has the form

$$Re_{mf} = 0.005 \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)\varphi^2} Ar \quad (5.24)$$

The linear dimension occurring in Re_{mf} and Ar is an equivalent diameter of particles.

The maximum velocity, at which fluidization decays, corresponds to the velocity of free-settling of particles which form the layer (Chapter 4), so $u_{\max} = w$.

The following approximate relationship between fluid velocity and porosity of a bed in a fluidized state valid for particles in any shape was found experimentally

$$\frac{u}{u_{\max}} = \varepsilon_f^n \quad (5.25)$$

For $u = u_{\max}$ it is $\varepsilon_f = 1$, what corresponds to fluidization decay. When the second limiting case referring to the beginning of fluidization i.e., $\varepsilon_f = \varepsilon$ for $u = u_{mf}$ is taken into account, the exponent n can be presented in the form

$$n = \frac{\ln \left(\frac{u_{mf}}{u_{\max}} \right)}{\ln \varepsilon} \quad (5.26)$$

The exponent n can also be determined using empirical relations; it was found that it is a function of the equivalent Reynolds number. For example for $Re_z < 0.2$ the exponent is $n = 4.65$, while for $Re_z > 500$ $n = 2.39$.

Fluidized bed porosity is directly related to the dynamic height of the bed H_f . The following formula results from comparison of volume of a solid phase in a static (0) and fluidized (f) state.

$$H_0(1 - \varepsilon_0) = H_f(1 - \varepsilon_f) \quad (5.27)$$

5.5. GAS BUBBLING THROUGH LIQUID

According to the theory of van Krevelen free movement and chain flow of gas bubbles can be distinguished. The free movement of gas bubbles is typical for low gas flow rates; during this process there is a distance between two adjacent bubbles which are getting out of a small orifice and ascending. A diameter of a bubble does not depend on a gas flow rate but depends on an orifice diameter d_0 . In this case the following relation is valid

$$d = \sqrt[3]{\frac{6d_0\sigma}{(\rho_l - \rho_g)g}} \quad (5.28)$$

where σ is the surface tension of a liquid. The chain flow of gas bubbles occurs more often and in this case there is no distance between adjacent bubbles and the bubble diameter depends on a gas flow rate \dot{V}_i (for one orifice) but does not depend on d_0 . Hence, the following formula is valid

$$d = \sqrt{\frac{6\dot{V}_i}{\pi w}} \quad (5.29)$$

where w is the velocity of an rising bubble determined in the same way as for particles settling in fluids.

The limiting value of the Reynolds number for bubbles flow is $Re = 9$. Rising flow of bubbles for lower values is laminar and the formula identical as in the case of solid particles settling is valid

$$w = \frac{d^2(\rho_l - \rho_g)g}{18\mu_l} \quad (5.30)$$

For $Re > 9$ rising flow of bubbles is treated as turbulent; the resistance coefficient has a constant value (different than for particles settling): $\lambda = 8/3$. Rise velocity of bubbles is

$$w = \sqrt{\frac{d(\rho_l - \rho_g)g}{2\rho_l}} \quad (5.31)$$

where ρ_g and ρ_l denote density of a gas and liquid, respectively.

Substituting (5.30) into (5.29), one obtains the formula for a diameter of bubbles in a chain during laminar flow

$$d = \left[\frac{108\mu_l \dot{V}_i}{\pi(\rho_l - \rho_g)g} \right]^{0.25} \quad (5.32)$$

Connecting the formulas (5.29) and (5.31), one gets the equation for chain bubbling during turbulent flow of bubbles

$$d = \left[\frac{72\rho_l \dot{V}_i^2}{\pi^2(\rho_l - \rho_g)g} \right]^{0.2} \quad (5.33)$$

An important problem is to determine the volumetric flow rate of a gas flowing through an orifice \dot{V}_{icr} , above which chain bubbling occurs (the critical flow). In order to determine \dot{V}_{icr} , the right sides of the relationships (5.28) and (5.29) are compared. It is obtained that

$$\dot{V}_{icr} = \frac{\pi w}{6} \left[\frac{6d_0\sigma}{(\rho_l - \rho_g)g} \right]^{2/3} \quad (5.34)$$

When $\dot{V}_i < \dot{V}_{icr}$, free movement of gas bubbles occurs, otherwise – chain flow of gas bubbles takes place.

Some difficulty in calculations is caused by the necessity of assuming preliminarily the character of bubbling (free or chain bubbling) and the character of bubbles flow (laminar or turbulent flow). It is most probable that chain bubbling with turbulent flow of bubbles will occur. In this case calculations should be conducted in the following way: a bubble diameter is calculated for a given value of \dot{V}_i using (5.33) and then rise velocity of the bubble is found using (5.31). Verification of the assumption is done by the calculation of the Reynolds number

$$Re = \frac{wd\rho_l}{\mu_l} \quad (5.35)$$

which should be higher than 9 and by the calculation of \dot{V}_{ikr} using the formula (5.34); it should be $\dot{V}_i > \dot{V}_{icr}$.

Tray is a typical example of a bubbling device (Fig. 5.3). A liquid flows into a tray through a downcomer, then it flows across the tray, discharges over the outlet weir into the next downcomer and flows to the lower tray. In the case of a sieve tray, which is presented in the figure, a gas flows into the liquid stream through small orifices in the bottom of the tray.

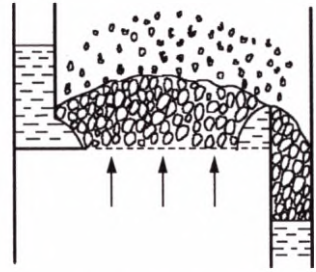


Fig. 5.3. Sieve tray

The apparent velocity of a gas cannot be too high because it leads to an entrainment of liquid drops which are then transferred to the upper tray. The maximum apparent velocity of a gas is given by the Souders-Brown formula

$$u_{\max} = C \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{0.2} \sqrt{\frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_g}} \quad (5.36)$$

where:

- σ – surface tension of liquid, N/m,
- $\sigma_0 (= 0.02 \text{ N/m})$ – standard value of surface tension.

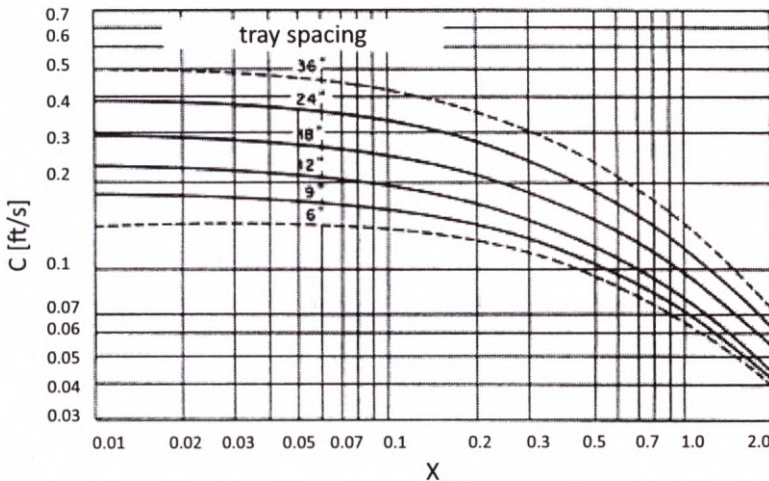


Fig. 5.4. Relationship between coefficient C and quantities X and H for Souders-Brown formula

The coefficient C is a function of the distance between adjacent trays H and the quantity X defined by the equation (5.20). A chart which can be used for determination

of the coefficient C for bubble-cap and sieve trays is presented in Fig. 5.4. The Anglo-Saxon units are used in the chart; in order to use the SI units, the following conversion factors should be used: $1'' = 25,4$ mm, 1 ft/s = $0,305$ m/s ($'' =$ inch, ft = foot).

5.6. FALLING FILM OF LIQUID

A flow of a thin liquid layer occurs in pipes where a gas is flowing from their bottom. This type of phase contact brings the possibility of heat transfer between the wall and the liquid. Thickness of a layer δ is of fundamental importance in consideration of heat and mass transfer in the flowing layer.

The Reynolds number for a liquid flow along a wall is defined similarly as in the case of flow through a packing. However, in this case the concept of mass flow rate \dot{m}_l per unit of wetted circumference O is introduced

$$\Gamma = \frac{\dot{m}_l}{O} \quad (5.37)$$

Average velocity of a liquid is $\dot{m}_l / (\rho_l O \delta)$, a hydraulic diameter of a liquid layer – 4δ , so the Reynolds number is

$$\text{Re}_l = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \quad (5.38)$$

The flow is laminar when $\text{Re}_l < 1600$. The following relationship between the average velocity of a flowing liquid and a layer thickness is valid in this range

$$u_l = \frac{\rho_l g}{3\mu_l} \delta^2 \quad (5.39)$$

A concept of an equivalent linear dimension dependent only on physical properties of a liquid is introduced

$$\vartheta_z = \sqrt[3]{\frac{\mu_l^2}{\rho_l g}} \quad (5.40)$$

On the basis of the relationships (5.38)–(5.40) it can be shown that the relationship between δ , ϑ_z and Re_l has the form

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \vartheta_z \text{Re}_l^{1/3} \quad (5.41)$$

5.7. MIXING

Determination of the mixing power N is an important problem connected with mixing of liquids. The character of liquid motion in a mixing tank is determined by the Reynolds number for mixing defined conventionally on the basis of tangential velocity of the agitator $u = \pi dn$, where n is the agitator revolutions frequency and d – its diameter. The Reynolds number for mixing has the form (without a numeric constant)

$$\text{Re}_m = \frac{nd^2\rho}{\mu} \quad (5.42)$$

It was found that mixing is laminar when $\text{Re}_m < 10$, while turbulent when $\text{Re}_m > 1000$. The relationship used for calculations of the mixing power has the function form

$$\text{Ne} = f(\text{Re}_m) \quad (5.43)$$

where

$$\text{Ne} = \frac{N}{d^5 n^3 \rho} \quad (5.44)$$

is the Newton number (the power number). The equation (5.43) is usually presented in the form of charts for different types of agitators.

Detailed forms of the relationship (5.43) have been formulated for laminar and turbulent flow. The following theoretical relationship is valid for laminar mixing

$$\text{Ne} = \frac{C_1}{\text{Re}_m} \quad (5.45)$$

For turbulent mixing the power number is approximately constant

$$\text{Ne} = C_2 \quad (5.46)$$

For example for the simplest paddle agitator the values of the constants in (5.45) and (5.46) are $C_1 = 36.5$, $C_2 = 1.70$.

Analysis of the relationships (5.45) and (5.46) leads to the conclusion that mixing power for laminar mixing depends on the coefficient of liquid viscosity, and does not depend on its density, while the relationship for turbulent mixing is reverse.

5.8. PHASE CONTACT AREA

This is the surface-contact area between phases. This quantity can usually be determined only approximately. A concept of a specific surface area of phase contact a_e i.e., the ratio of a surface area to contact layer volume V , is often used in calculations of mass transfer processes

$$a_e = \frac{A}{V} \quad (5.47)$$

where A is a surface area of phase contact.

When the value of the degree of surface utilization φ_e for a packing is known, a specific surface area for the packed column is calculated using the formula

$$a_e = \varphi_e a \quad (5.48)$$

Because of high uncertainty of computational values of φ_e , for flow rate per cross-sectional area in scrubbers, it is often assumed that $a_e \cong a$. When the calculated values of φ_e are higher than 1 (what is possible in reality), it is assumed that $\varphi_e = 1$.

When apparatus walls are wetted and a liquid layer flowing over the walls covers them completely, a contact area is strictly defined by geometrical dimensions of the walls.

When one of the phases is dispersed (bubbling, settling or rising flow of liquid bubbles in another liquid, emulsifying of two non-miscible liquids in mixing tanks) the phase contact area is usually determined on the basis of average dimensions of elements of the dispersed phase (bubbles, drops) and the so called hold-up of this phase. The hold-up ϕ is a volume fraction of the dispersed phase in a contact layer

$$\phi = \frac{V_d}{V} \quad (5.49)$$

where V_d – volume of the dispersed phase in a contact layer.

When phase contact occurs in mixing tanks (phases volumes are known), the quantity ϕ is easy to define, whereas in flow apparatus it is determined on the basis of apparent and real velocity of the dispersed phase. If the dispersed phase is flowing through the contact layer of a cross-sectional area S and height H at apparent velocity u and elements of this phase are flowing at velocity w , the residence time of the elements in the layer is H/w and the volume of this phase is $V_d = uS \cdot H/w$. Hence, on the basis of the relationship (5.49)

$$\phi = \frac{u}{w} \quad (5.50)$$

It is worth to notice that countercurrent flow of the continuous phase results in reduction of the velocity of drops or bubbles in relation to the apparatus wall, what causes the hold-up to increase. The number of spherical elements of a dispersed phase in a system is equal to

$$N = \frac{\text{volume of dispersed phase}}{\text{volume of dispersed phase element}} = \frac{\phi V}{\pi d^3/6}$$

Because the surface area of one element of the dispersed phase is πd^2 , the following relationship defining the specific surface area of phase contact is valid

$$a_e = \frac{6\phi}{d} \quad (5.51)$$

EXAMPLE 5.1

Calculate the minimum porosity of a packing bed which consists of spherical elements.

The minimum porosity corresponds to the maximum “packing degree” of the bed. A bed composed of spherical elements is the most compact when the elements are located in the vertices of a tetrahedron.

A vertex of each tetrahedron is the common point of 24 tetrahedrons. Because each tetrahedron has 4 vertices, $4/24 = 1/6$ of a sphere of a diameter a equal to the edge of the tetrahedron is located inside the tetrahedron. According to the definition of porosity it can be written that

$$\varepsilon_0 = \frac{\text{tetrahedron volume} - 1/6 \cdot \text{sphere volume}}{\text{tetrahedron volume}}$$

Volume of a tetrahedron of the edge a is $\sqrt{2}a^3/12$, so

$$\varepsilon_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 - \frac{1}{6} \frac{\pi a^3}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3} = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.260$$

Porosity of randomly dumped spheres is higher; in this case it is often assumed that $\varepsilon_0 = 0.40$.

EXAMPLE 5.2

There is $m_s = 400$ kg of a catalyst in the shape of a 11.5 mm diameter, 6 mm high pill in a cylindrical apparatus of diameter $D = 700$ mm. The catalyst density is $\rho_s = 1770$ kg/m³, while the bulk density of the bed is $\rho_b = 1100$ kg/m³. Calculate the hydraulic diameter of channels between pills in the bed and the bed height.

Volume of the pill is:

$$V_{el} = \frac{\pi(0.0115)^2}{4} \cdot 0.006 = 0.623 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

The number of pill in the apparatus can be calculate in the following way

$$N = \frac{m_s}{\rho_s V_{el}} = \frac{400}{1770 \cdot 0.623 \cdot 10^{-6}} = 362\,600$$

Volume of the bed is calculated on the basis of the bulk density

$$V = \frac{m_s}{\rho_b} = \frac{400}{1100} = 0.364 \text{ m}^3$$

If the volume of the bed is known, it is easy to determine its height

$$h = \frac{4V}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0.364}{\pi(0.7)^2} = 0.945 \text{ m}$$

Surface area of the pill is calculated as follows

$$A_{el} = \pi \cdot 0.0115 \cdot 0.006 + \frac{\pi}{2} \cdot (0.0115)^2 = 4.24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

so the specific surface area of the bed (formula (5.3)) equals

$$a = \frac{N}{V} A_{el} = \frac{362\,600 \cdot 4.24 \cdot 10^{-4}}{0.364} = 423 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$$

Porosity of the packing layer can be calculated using the formula (5.1) or (5.2). Substituting numerical values into the formula (5.2), one gets

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{\rho_b}{\rho_s} = 1 - \frac{1100}{1770} = 0.378$$

The identical result is obtained using the formula (5.1). The hydraulic diameter of channels between pills in the bed is calculated on the basis of equation (5.5)

$$d_{ek} = \frac{4\varepsilon_0}{a} = \frac{4 \cdot 0.378}{423} = 0.00358 \text{ m}$$

EXAMPLE 5.3

A column of diameter $D_1 = 0.4 \text{ m}$ is packed with spherical elements. The bed porosity is $\varepsilon_0 = 0.385$. Gas is flowing through the packing. The height of the bed is 1 m but it was found that it must be increased by about 50%. Because the gas transport device was working at full load it was decided to add a second column in parallel, which diameter is $D_2 = 0.2 \text{ m}$ and which is filled to a height $H_2 = 1.5 \text{ m}$. If the gas flow rate is $\dot{m} = 1200 \text{ kg/h}$ and must be maintained, calculate the level to which the packing height in the first column can be increased. A diameter of packing elements is $d = 6 \text{ mm}$, gas pressure and temperature are near the ambient conditions. Neglect the resistance caused by branching.

In the case of a flow through one column (D_1) the mass velocity is

$$g_m = \frac{\dot{m}}{S_1} = \frac{4\dot{m}}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 1200/3600}{\pi(0.4)^2} = 2.65 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$$

Because physical properties of the gas are unknown, the Reynolds number can be determined only approximately. The viscosity coefficients of normal gases under ambient conditions usually does not exceed the value of $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$; the Reynolds number calculated using the relationship (5.9) is at least equal to

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu(1-\varepsilon_0)} = \frac{g_m d}{\mu(1-\varepsilon_0)} = \frac{2.65 \cdot 0.006}{2 \cdot 10^{-5} (1-0.385)} = 1290$$

So despite the incomplete data it can be said that flow is turbulent, what allows the second term of the equation (5.11) to be used for pressure drop calculations. Introducing the mass velocity $g_m = u\rho$ and substituting the numerical value instead of ε_0 , one obtains

$$(\rho \cdot \Delta p) = \frac{1.75 g_m^2 H}{d} \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} = 18.9 \frac{g_m^2 H}{d} \quad (\text{a})$$

This value for a flow through one column is equal to

$$(\rho \cdot \Delta p) = 18.9 \frac{(2.65)^2 \cdot 1}{0.006} = 22\,100 \text{ kg}^2/(\text{m}^4\text{s}^2)$$

It should be noticed that the product $\rho \cdot \Delta p$ keeps its value after the second column has been connected with the first one. This is because if the gas transport device power and the gas flow rate remain unchanged, the pressure drop and average density must remain constant.

The following denotations are introduced for a parallel flow through two columns: index 1 refers to the column of diameter D_1 , index 2 – to the column of diameter D_2 . The following equalities are justified

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$$

They result from the above reasoning and from an obvious fact that pressure drop must be identical in each branch. The mass velocity in the column 2 is calculated on the basis of the equation (a)

$$g_{m2} = \sqrt{\frac{(\rho \cdot \Delta p) d}{18.9 H_2}} = \sqrt{\frac{22\,100 \cdot 0.006}{18.9 \cdot 1.5}} = 2.16 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$$

The following equality is valid for a flow through two columns

$$\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$$

Because

$$\dot{m} = g_m S_1$$

$$\dot{m}_1 = g_{m1} S_1$$

$$\dot{m}_2 = g_{m2} S_2$$

so

$$g_{m1} = g_m - g_{m2} \frac{S_2}{S_1}$$

where S denotes the cross-sectional surface area. Substitution of numerical values results in

$$g_{m1} = 2.65 - 2.16 \left(\frac{0.2}{0.4} \right)^2 = 2.11 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$$

Knowing the mass velocity in the column 1, one can calculate the packing height H_1 (after the packing elements were added) using equation (a)

$$H_1 = \frac{(\rho \cdot \Delta p) d}{18.9 g_{m1}^2} = \frac{22\,100 \cdot 0.006}{18.9 \cdot (2.11)^2} = 1.58 \text{ m}$$

This packing height in the column 1 allows one to obtain the required gas flow rate (1200 kg/h) by both columns connected in parallel. If the packing had a lower height e.g. 1.50 m, the total flow rate would be higher according to the characteristic of the gas transport device. Obviously this can be prevented by throttling.

It must be checked if the gas flow character remains unchanged after the second column has been added

$$Re_1 = \frac{g_{m1} d}{\mu(1 - \varepsilon_0)} = \frac{2.11 \cdot 0.006}{2 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0.385)} = 1030 > 1000$$

$$Re_2 = \frac{g_{m2} d}{\mu(1 - \varepsilon_0)} = \frac{2.16 \cdot 0.006}{2 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0.385)} = 1050 > 1000$$

EXAMPLE 5.4

$\dot{V}_1 = 778 \text{ m}^3/\text{h}$ of air at 20°C and $0.990 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ is flowing through a column of a diameter $D = 0.5 \text{ m}$, which is packed to a height $H = 3.8 \text{ m}$ with metal Raschig rings of dimensions $25 \times 25 \times 1.6$ (external diameter \times height \times wall thickness). Calculate pressure drop of air flowing through the packing layer.

Firstly, parameters of the packing must be determined. The ring inside diameter equals: $0.025 - 2 \cdot 0.0016 = 0.0218 \text{ m}$, so the volume of the packing element is

$$V_{el} = \frac{\pi}{4} \cdot \left[(0.025)^2 - (0.0218)^2 \right] \cdot 0.025 = 2.94 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

The packing element surface area is calculated

$$A_{el} = \pi \cdot 0.025 \cdot 0.025 + \pi \cdot 0.0218 \cdot 0.025 + \frac{\pi}{2} \cdot \left[(0.025)^2 - (0.0218)^2 \right] = 39.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

The equivalent diameter of the element is (formula (4.2))

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{6V_{el}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2.94 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 0.0178 \text{ m}$$

The shape factor is the reciprocal of sphericity (formula (4.4))

$$\varphi = \frac{1}{\Psi} = 0.2068 A_{\text{el}} V_{\text{el}}^{-2/3} = 0.2068 \cdot 39.1 \cdot 10^{-4} \cdot (2.94 \cdot 10^{-6})^{-2/3} = 3.94$$

According to Tab. 5.1, the number of metal Raschig rings of the nominal size of 25 mm in 1 m³ is $(N/V) = 46300$. Knowing this quantity, one can determine the porosity and the specific surface area of the packing. Using the formula (5.1), one obtains

$$\varepsilon_0 = 1 - \left(\frac{N}{V} \right) V_{\text{el}} = 1 - 46300 \cdot 2.94 \cdot 10^{-6} = 0.864$$

The specific surface area was calculated on the basis of the formula (5.3)

$$a = \left(\frac{N}{V} \right) A_{\text{el}} = 46300 \cdot 39.1 \cdot 10^{-4} = 181 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

The obtained values of ε_0 and a are compatible with the values given in Tab. 5.1.

Density and velocity of air changes during the flow through the bed because pressure changes (decreases). For the inlet conditions (1):

$$\rho_1 = \frac{p_1 M}{RT} = \frac{0.990 \cdot 10^5 \cdot 29}{8314 \cdot (273 + 20)} = 1.178 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = \frac{4\dot{V}_1}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 778/3600}{\pi \cdot (0.5)^2} = 1.100 \text{ m/s}$$

Assuming tentatively that $p_1 - p_2 = \Delta p \cong 500$ Pa, one can calculate density and velocity of air for the outlet conditions (2). If the above assumption is correct, pressure at the column outlet is $p_2 = 0.990 \cdot 10^5 - 500 = 0.985 \cdot 10^5$ Pa, while gas density is

$$\rho_2 = \frac{0.985 \cdot 10^5 \cdot 29}{8314 \cdot (273 + 20)} = 1.173 \text{ kg/m}^3$$

In order to determine air velocity at the outlet, the mass velocity of the gas g_m must be calculated (this value is the same at the inlet and outlet)

$$g_m = \frac{4\dot{V}_1 \rho_1}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 778/3600 \cdot 1.178}{\pi (0.5)^2} = 1.296 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$$

Air velocity at the inlet of the column is

$$u_2 = \frac{g_m}{\rho_2} = \frac{1.296}{1.173} = 1.105 \text{ m/s}$$

Differences in gas density and velocity between the inlet and outlet are small if the value of Δp is of the order of several hundred Pa. The average values will be used for further calculations: $u = 1.102 \text{ m/s}$, $\rho = 1.176 \text{ kg/m}^3$. The equivalent Reynolds number Re_z is (formula (5.13))

$$Re_z = \frac{u d_e \rho}{\mu} = \frac{1.102 \cdot 0.0178 \cdot 1.176}{1.824 \cdot 10^{-5}} = 1260$$

where the coefficient of viscosity was taken from Table AT-2. The flow is turbulent; it was found in Tab. 5.2 that $n = 1.86$. The resistance coefficient equals (formula (5.16))

$$\lambda = \frac{b}{Re_z^{2-n}} = \frac{7}{(1260)^{2-1.86}} = 2.58$$

In the above calculations it was assumed that the surface of metal rings is smooth ($b = 7$). Pressure drop of the gas flowing through the packing is calculated using the formula (5.14)

$$\Delta p = \lambda \frac{H}{d_e} \frac{u^2 \rho}{2} \frac{(1 - \varepsilon_0)^{3-n} \varphi^{3-n}}{\varepsilon_0^3}$$

$$\Delta p = 2.58 \cdot \frac{3.8}{0.0178} \cdot \frac{(1.102)^2 \cdot 1.176}{2} \cdot \frac{(1 - 0.864)^{3-1.86} \cdot (3.94)^{3-1.86}}{(0.864)^3} = 299 \text{ Pa}$$

Pressure drop of such order does not have a significant influence on density values, so calculations will not be improved despite the incomplete consistence with the assumption ($\Delta p = 500 \text{ Pa}$).

One can also calculate the pressure drop using the simplified relationship for a wetted packing and substituting $g_{ml} = 0$. According to Tab. 5.3 $\alpha = 54.4 \text{ m}^{-1}$ for Raschig rings of a nominal size of 1'' ($\cong 25 \text{ mm}$). Substitution into the formula (5.18) gives

$$\Delta p = \alpha (10)^{\beta g_{ml}} u_g^2 \rho_g H = 54.4 \cdot 1 \cdot (1.102)^2 \cdot 1.176 \cdot 3.8 = 295 \text{ Pa}$$

Consistency between the obtained results is very good.

EXAMPLE 5.5

A packing is wetted with water at 20°C under the conditions given in the example 5.4. Calculate gas pressure drop and specific phase contact area if liquid flow rate is 70% of the maximum possible value i.e., the value corresponding to flooding conditions.

The following quantities calculated in the example 5.4 are needed in this example:

- apparent gas velocity: $u_g = 1.102$ m/s,
- gas density: $\rho_g = 1.176$ kg/m³,
- packing layer porosity: $\varepsilon_0 = 0.864$,
- packing layer specific surface area: $a = 181$ m²/m³,
- packing layer height: $H = 3.8$ m,
- column diameter: $D = 0.5$ m.

Physical properties of water at 20°C are as follows (Table AT-1): $\rho = 998.2$ kg/m³, $\mu = 0.9934 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s). The value of the expression Y must be calculated (formula (5.19))

$$Y = \frac{u_g^2 a}{g \varepsilon_0^3} \frac{\rho_g}{\rho_l} \left(\frac{\mu_l}{\mu_0} \right)^{0.20} = \frac{(1.102)^2 \cdot 181}{9.81 \cdot (0.864)^3} \cdot \frac{1.176}{998.2} \cdot \left(\frac{0.9934 \cdot 10^{-3}}{0.9934 \cdot 10^{-3}} \right)^{0.20} = 0.041$$

The following value of X taken from the chart (Fig. 5.2) corresponds to the above value of Y under flooding conditions: $X_z \cong 0.47$. The ratio L/G , which corresponds to flooding, is calculated using equation (5.20)

$$\left(\frac{L}{G} \right)_z = X_z \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} = 0.47 \cdot \sqrt{\frac{998.2}{1.176}} = 13.7$$

According to the formula (5.21) it can be written that

$$\left(\frac{L}{G} \right)_z = \frac{u_{lz}}{u_g} \frac{\rho_l}{\rho_g}$$

Using the above relationship the apparent liquid velocity can be calculated

$$u_{lz} = u_g \frac{\rho_g}{\rho_l} \left(\frac{L}{G} \right)_z = 1.102 \cdot \frac{1.176}{998.2} \cdot 13.7 = 0.0178 \text{ m/s}$$

The real value of liquid velocity must constitute 70% of this value

$$u_l = 0.7 u_{lz} = 0.7 \cdot 0.0178 = 0.0125 \text{ m/s}$$

The mass velocity of liquid g_{ml} is

$$g_{ml} = u_l \rho_l = 0.0125 \cdot 998.2 = 12.5 \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$$

The values of parameters α and β for a packing composed of 25 mm (1") diameter Raschig rings were taken from Tab. 5.3: $\alpha = 54.4 \text{ m}^{-1}$, $\beta = 0.0512 \text{ m}^2/\text{kg}$. According to the equation (5.18) pressure drop of a gas flowing through the wetted packing equals

$$\Delta p_{\text{wet}} = \alpha (10)^{\beta g_{ml}} u_g^2 \rho_g H = 54.4 \cdot (10)^{0.0512 \cdot 12.5} \cdot (1.102)^2 \cdot 1.176 \cdot 3.8 = 1290 \text{ Pa}$$

The formula (5.22) was used for calculations of the degree of surface utilization for the packing

$$\varphi_e = 3.39 u_l^{0.187} \exp\left(-0.08 \frac{H}{D}\right) = 3.39 \cdot (0.0125)^{0.187} \exp\left(-0.08 \cdot \frac{3.8}{0.5}\right) = 0.812$$

The gas-liquid contact area for 1 m³ of the bed equals (formula (5.48))

$$a_e = \varphi_e a = 0.812 \cdot 181 = 147 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

EXAMPLE 5.6

A gas-phase reaction occurs in a cylindrical apparatus in presence of moving spherical catalyst particles of diameters $d = 2 \text{ mm}$ and density $\rho_s = 1450 \text{ kg}/\text{m}^3$. The apparatus diameter is $D = 0.6 \text{ m}$ and the fluidized bed height should not exceed $H = 1.5 \text{ m}$. Assuming that mass of the catalyst is $m_s = 150 \text{ kg}$, calculate gas flow capacity of the apparatus and gas pressure drop Δp . Physical properties of the gas are as follows: density $\rho = 1.52 \text{ kg}/\text{m}^3$, the viscosity coefficient $\mu = 1.76 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Assume that porosity of particles (in the loose condition) is $\varepsilon = 0.40$.

The Archimedes number equals (formula (4.18))

$$\text{Ar} = \frac{d^3 (\rho_s - \rho) \rho g}{\mu^2} = \frac{(0.002)^3 \cdot (1450 - 1.52) \cdot 1.52 \cdot 9.81}{(1.76 \cdot 10^{-5})^2} = 557\,600$$

The value of the equivalent Reynolds number Re_{mf} corresponding to the minimum fluidization velocity, is calculated using the formula (5.23). The quadratic equation is obtained

$$557\,600 = 150 \cdot \frac{1 - 0.40}{(0.40)^3} \cdot \text{Re}_{mf} + \frac{1.75}{(0.40)^3} \cdot \text{Re}_{mf}^2$$

Solving the equation, one gets $Re_{mf} = 119$. The critical fluidization velocity is equal to

$$u_{mf} = \frac{\mu Re_{mf}}{d\rho} = \frac{1.76 \cdot 10^{-5} \cdot 119}{0.002 \cdot 1.52} = 0.691 \text{ m/s}$$

The equivalent Reynolds number value corresponding to the maximum fluidization velocity is calculated using the formula (4.23) for turbulent settling of particles ($Ar > 330\,000$)

$$Re_{\max} = 1.741\sqrt{Ar} = 1.741 \cdot \sqrt{557\,600} = 1300$$

The maximum gas velocity equals

$$u_{\max} = \frac{\mu Re_{\max}}{d\rho} = \frac{1.76 \cdot 10^{-5} \cdot 1300}{0.002 \cdot 1.52} = 7.53 \text{ m/s}$$

The cross-sectional surface area of the apparatus is

$$S = \frac{\pi \cdot (0.6)^2}{4} = 0.283 \text{ m}^2$$

The volume occupied by catalyst particles is $m_s/\rho_s = 150/1450 = 0.103 \text{ m}^3$. Because volume of the fluidized bed is to be $SH = 0.283 \cdot 1.5 = 0.424 \text{ m}^3$, porosity in this state is equal to

$$\varepsilon_f = 1 - \frac{0.103}{0.424} = 0.756$$

The gas velocity which ensures obtaining such porosity must be calculated. The exponent n in the formula (5.25) is calculated using equation (5.26)

$$n = \frac{\ln \frac{u_{mf}}{u_{\max}}}{\ln \varepsilon} = \frac{\ln \left(\frac{0.691}{7.53} \right)}{\ln(0.4)} = 2.61$$

According to the formula (5.25) the gas velocity equals

$$u = u_{\max} \varepsilon_f^n = 7.53 \cdot (0.756)^{2.61} = 3.63 \text{ m/s}$$

Assuming that the gas flow corresponds to the value $Re_z > 500$, one can use the formula (5.25) with the value $n = 2.39$. It is obtained that

$$u = 7.53 \cdot (0.756)^{2.39} = 3.86 \text{ m/s}$$

As can be seen, both values of u are quite consistent. It must be verified if the value of Re_z fulfills the inequality $Re_z > 500$. It is obtained that

$$Re_z = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{3.86 \cdot 0.002 \cdot 1.52}{1.76 \cdot 10^{-5}} = 667$$

In calculations of the volumetric gas flow rate the value $u = 3.63 \text{ m/s}$ was used. The gas flow rate corresponding to a 1.5 m high fluidized bed equals

$$\dot{V} = Su = 0.283 \cdot 3.63 = 1.03 \text{ m}^3/\text{s} = 3670 \text{ m}^3/\text{h}$$

The resistance to gas flow (pressure drop) is equal to the ratio of the particle apparent weight to the cross-sectional area of the bed. The weight is $m_s g$, the buoyant force is $m_s g \rho / \rho_s$, so the apparent weight is $m_s g (1 - \rho / \rho_s)$. Hence

$$\Delta p = \frac{m_s g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right)}{S} = \frac{150 \cdot 9.81 \cdot \left(1 - \frac{1.52}{1450}\right)}{0.283} = 5200 \text{ Pa}$$

EXAMPLE 5.7

A gas-liquid layer is situated on a sieve tray of diameter $D = 0.2 \text{ m}$. Gas bubbles of density 3 kg/m^3 are flowing through the liquid. Gas flow rate is $\dot{V} = 5 \text{ m}^3/\text{h}$. The two-phase mixture height is $H = 150 \text{ mm}$. Assuming that gas bubbles are spherical and of equal diameters and that the liquid is stationary, calculate the hold-up and the phase contact area. The tray has $i = 250$ orifices of diameters 3 mm . Physical properties of the liquid: density $\rho_l = 800 \text{ kg/m}^3$, the coefficient of viscosity $\mu_l = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, the surface tension $\sigma = 0.066 \text{ N/m}$.

The volumetric flow rate of the gas flowing through one orifice is

$$\dot{V}_i = \frac{\dot{V}}{i} = \frac{5/3600}{250} = 5.56 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

The chain bubbling and turbulent flow of bubbles are assumed. The diameter of a bubble is calculated using the formula (5.33)

$$d = \left[\frac{72\rho_l \dot{V}_i^2}{\pi^2 (\rho_l - \rho_g) g} \right]^{0.2} = \left[\frac{72 \cdot 800 \cdot (5.56 \cdot 10^{-6})^2}{\pi^2 (800 - 3) \cdot 9.81} \right]^{0.2} = 7.46 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Velocity of rising bubbles is determined using the relationship (5.31)

$$w = \sqrt{\frac{d(\rho_l - \rho_g)g}{2\rho_l}} = \sqrt{\frac{7.46 \cdot 10^{-3} \cdot (800 - 3) \cdot 9.81}{2 \cdot 800}} = 0.191 \text{ m/s}$$

Verification of the bubbles flow character with the use of the formula (5.35) gives

$$\text{Re} = \frac{wd\rho_l}{\mu_l} = \frac{0.191 \cdot 7.46 \cdot 10^{-3} \cdot 800}{0.5 \cdot 10^{-3}} = 2280$$

The limiting gas flow rate through one orifice, above which chain bubbling occurs, is equal to (formula (5.34))

$$\dot{V}_{\text{icr}} = \frac{\pi w}{6} \left[\frac{6d_0\sigma}{(\rho_l - \rho_g)g} \right]^{2/3} = \frac{\pi \cdot 0.191}{6} \cdot \left[\frac{6 \cdot 0.003 \cdot 0.066}{(800 - 3) \cdot 9.81} \right]^{2/3}$$

$$\dot{V}_{\text{icr}} = 2.84 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Because $\text{Re} > 9$ and $\dot{V}_{\text{icr}} < \dot{V}_i$, the assumptions are fulfilled. The cross-sectional area of the tray is

$$S = \frac{\pi \cdot (0.2)^2}{4} = 0.0314 \text{ m}^2$$

The apparent velocity of the gas is calculated

$$u = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{5/3600}{0.0314} = 0.0442 \text{ m/s}$$

Having the real and apparent gas velocity, one can calculate the gas hold-up using the formula (5.50)

$$\phi = \frac{u}{w} = \frac{0.0442}{0.191} = 0.232$$

Then the specific phase contact area is calculated using (5.51)

$$a_e = \frac{6\phi}{d} = \frac{6 \cdot 0.232}{7.46 \cdot 10^{-3}} = 186 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

The phase contact area A is equal to the product of the specific surface area and volume of the contact layer

$$A = a_e SH = 186 \cdot 0.0314 \cdot 0.15 = 0.878 \text{ m}^2$$

The phase contact area can also be calculated as the product of the surface area of one bubble, the number of bubbles in the chain and the number of orifices. The surface area of one bubble is πd^2 , the number of bubbles in the chain is H/d , hence

$$A = \pi d^2 \frac{H}{d} \cdot i = \pi \cdot d \cdot H \cdot i = \pi \cdot 7.46 \cdot 10^{-3} \cdot 0.15 \cdot 250 = 0.878 \text{ m}^2$$

EXAMPLE 5.8

A liquid ($\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.93 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$) is to be supplied into a vertical pipe of the internal diameter $D = 90 \text{ mm}$ and height $H = 7 \text{ m}$ through a distributor and spread on the pipe wall (falling film flow). What should the liquid flow rate be so that the average residence time is 10 s ? What would the thickness of the film be in this case?

The average velocity of the film is equal to

$$u_l = \frac{H}{t} = \frac{7}{10} = 0.7 \text{ m/s}$$

Thickness of the film is calculated using the formula (5.39) rearranged to the form

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu_l u_l}{\rho_l g}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0.93 \cdot 10^{-3} \cdot 0.7}{1100 \cdot 9.81}} = 0.425 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

The wetted circumference is $O = \pi D = \pi \cdot 0.09 = 0.283 \text{ m}$. Because of the small thickness of the film in relation to the pipe diameter the cross-sectional surface area of the film was calculated as follows

$$S = O\delta = 0.283 \cdot 0.425 \cdot 10^{-3} = 1.20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

The volumetric flow rate of a liquid film flowing over the wall is equal to

$$\dot{V} = u_l S = 0.7 \cdot 1.20 \cdot 10^{-4} = 84.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

The mass flow rate \dot{m}_l per unit of wetted circumference equals

$$\Gamma = \frac{\dot{m}}{O} = \frac{\rho \dot{V}}{O} = \frac{1100 \cdot 84.0 \cdot 10^{-6}}{0.283} = 0.327 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$$

In film thickness calculations it was assumed that flow is laminar. Verification of the Reynolds number value confirms this assumption

$$\text{Re}_l = \frac{4\Gamma}{\mu_l} = \frac{4 \cdot 0.327}{0.93 \cdot 10^{-3}} = 1410 < 1600$$

The film thickness can also be calculated using the formula (5.41). The equivalent linear dimension is

$$\vartheta_z = \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{\rho^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{(0.93 \cdot 10^{-3})^2}{(1100)^2 \cdot 9.81}} = 41.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Because ϑ_z and Re_l are known, the film thickness can be calculated

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \vartheta_z \text{Re}_l^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot 41.8 \cdot 10^{-6} \cdot (1410)^{1/3} = 0.425 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

EXAMPLE 5.9

In a standard mixing tank a liquid is being heated to the temperature 20°C. The 1 m diameter normal paddle agitator makes 1.1 revolution in a second. Calculate the mixing power at the beginning of heating if the following liquids are being mixed:

a) water,

b) glycerin ($\rho = 1261 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\mu = 1412 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ for 20°C).

Calculate also the mixing power for a 0.1 m diameter laboratory-scale agitator if other process parameters stay the same.

Ad a. Physical properties of water at 20°C are as follows (Table AT-1): $\rho = 998.2 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\mu = 0.9934 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. The mixing Reynolds number for the 1 m diameter agitator is (5.42)

$$\text{Re}_m = \frac{nd^2\rho}{\mu} = \frac{1.1 \cdot 1^2 \cdot 998.2}{0.9934 \cdot 10^{-3}} = 1\,105\,000$$

Mixing is turbulent; the power number for this type of agitator is $\text{Ne} = 1.70$. The mixing power is calculated using the formula (5.44)

$$N = \text{Ne} \cdot d^5 n^3 \rho = 1.70 \cdot 1^5 \cdot (1.1)^3 \cdot 998.2 = 2260 \text{ W}$$

The Reynolds number for the laboratory-scale agitator is

$$\text{Re}_m = \frac{1 \cdot (0.1)^2 \cdot 999.1}{1.1356 \cdot 10^{-3}} = 8798$$

Also in this case mixing is turbulent. The mixing power is

$$N = 1.70 \cdot (0.1)^5 \cdot (1.1)^3 \cdot 998.2 = 0.0226 \text{ W}$$

As can be seen, the agitator which diameter is 10 times smaller requires 10^5 less power (for the same revolutions frequency and turbulent mixing).

Ad b. When the mixed liquid is glycerin, the Reynolds number for the 1 m diameter agitator equals

$$\text{Re}_m = \frac{1.1 \cdot 1^2 \cdot 1261}{1412 \cdot 10^{-3}} = 982 \approx 1000$$

The obtained value is much smaller than for water what results from high value of the coefficient of viscosity for glycerin. However, the character of mixing can be considered to be approximately turbulent and as previously it can be assumed that $\text{Ne} = 1.70$. The mixing power has the following value

$$N = 1.70 \cdot 1^5 \cdot (1.1)^3 \cdot 1261 = 2850 \text{ W}$$

so it is only slightly higher than for water. The difference comes from higher density (not viscosity) of glycerin in relation to water. The Reynolds number for mixing of glycerin using the 0.1 m diameter agitator is

$$\text{Re}_m = \frac{1.1 \cdot (0.1)^2 \cdot 1261}{1412 \cdot 10^{-3}} = 9.82$$

In this case mixing is laminar ($Re_m < 10$). One can calculate the power number using the equation (5.45) and taking into account that $C_1 = 36.5$

$$Ne = \frac{36.5}{Re_m} = \frac{36.5}{9.82} = 3.72$$

Finally, the mixing power can be calculated

$$N = 3.72 \cdot (0.1)^5 \cdot (1.1)^3 \cdot 1261 = 0,0624 \text{ W}$$

In this case the higher value of power in relation to mixing of water using the 0.1 m diameter agitator results mainly from the higher value of the coefficient of viscosity of glycerin. The dependence of the mixing power upon the coefficient of viscosity is typical for laminar mixing.

EXERCISE 5.1

Calculate the maximum porosity of a packed bed which consists of spherical elements.

Answer: $\varepsilon_0 = 1 - \pi/6 = 0.476$.

EXERCISE 5.2

If s denotes thickness of a Raschig ring wall and d – its external diameter (height), calculate the value of the ratio s/d at which the equivalent diameter of the ring equals d .

Answer: $s/d = 0.211$.

EXERCISE 5.3

An open cylindrical 100 mm diameter apparatus is packed with a 840 mm high bed composed of 3.1 mm diameter spheres. What should the pressure of air at the inlet of the layer be to obtain the air flow rate of 100 kg/h at 80°C? The atmospheric pressure is 0.1 MPa and the bed porosity is 0.4.

Tip: The Ergun equation should be transformed into the form $\Delta p \cdot \rho = CH$; the following relationship is valid for the elementary height of the apparatus

$$\frac{M}{RT} p \cdot dp = -C \cdot dH$$

The outlet pressure of air can be calculated by integration of this equation and determination of C .

Answer: $1.495 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

EXERCISE 5.4

Absorption of a component in water occurs in a scrubber packed with ceramic Raschig rings of dimensions $25 \times 25 \times 3.2$ mm. Gas velocity in any cross-section of the apparatus is 0.9 m/s. If the mass velocity equals $6.78 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$, what is the ratio of the inlet gas velocity to the flooding velocity? Because of a low concentration of the component being absorbed in the liquid phase, it should be assumed that the liquid flow rate is constant and the liquid phase has the same properties as water. Temperature in the bottom cross-section of the absorber is 35°C and gas density – $1.242 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Answer: 0.95.

EXERCISE 5.5

Water is flowing through a sand bed from its bottom. The temperature of water is 25°C . The equivalent diameter of sand grains is 0.92 mm, their shape factor 1.26 and density $2330 \text{ kg}/\text{m}^3$. Porosity of the sand bed, which has been previously fluidized, is 0.43. Calculate water pressure drop through a 1.2 m high layer if water velocity is 70% of the velocity corresponding to the beginning of fluidization.

Answer: 6260 Pa.

EXERCISE 5.6

A 80 mm diameter scrubber is filled with 5 dm^3 of 98% sulfuric acid which temperature is 20°C ($\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$, $\sigma = 0.0815 \text{ N}/\text{m}$). Air is supplied to the scrubber through a washer with 50 orifices of diameters 3 mm in order to be dried. What should the volumetric flow rate of air be so that the gas hold-up is 10%? What would the surface area of phase contact be in this case?

Answer: $\dot{V} = 73.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, $A = 0.76 \text{ m}^2$.

EXERCISE 5.7

A 0.50 mm thick film of water is flowing over a vertical wall at 65°C . Calculate how the thickness of the film will change if the temperature of water was 35°C for the same specific liquid flux.

Answer: it would increase by 0.58 mm.

6. FILTRATION

Filtration is the process of separation of solid particles from liquids, during which a liquid is flowing through a porous filter-cake deposited on a filter medium.

The starting point for discussion is the Darcy's equation, which is the generalized form of the formula (5.12).

$$\Delta P = \frac{u\mu_l L}{K_p} \quad (6.1)$$

where:

- L – porous layer thickness, m,
- u – liquid velocity, m/s,
- μ_l – liquid viscosity, kg/(m·s),
- K_p – permeability, m².

After transformation, the basic equation of filtration is obtained

$$\frac{dV}{A \cdot dt} = \frac{\Delta P}{\mu_l \left(\frac{\alpha x V}{A} + R_f \right)} \quad (6.2)$$

where:

- dV/dt – volumetric flow rate of filtrate, m³/s,
- A – filtration area, m²,
- V – volume of filtrate delivered from the beginning of process, m³.

The quantity x denotes the mass of a cake per unit volume of clear filtrate

$$x = \frac{m_{cake}}{V} \text{ kg/m}^3 \quad (6.3)$$

The coefficient α is called the specific resistance of a cake

$$\alpha = \frac{k'a^2\phi^2}{\rho_s} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \text{ m/kg} \quad (6.4)$$

where:

- ε – porosity,
- φ – shape factor,
- k' – numeric constant (equals (5.56) for spherical particles of the cake),
- a – specific surface area of cake, m^2/m^3 ,
- ρ_s – density of solid, kg/m^3 .

The quantity R_f [m^{-1}] in the equation (6.2) is the specific resistance of a filter medium. The following relationship is valid for compressible cakes

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} = b \cdot \Delta P^s \quad (6.5)$$

where:

- b – numeric constant,
- s – coefficient of cake compressibility.

For incompressible cakes it is $s = 0$; porosity of this kind of cakes practically does not depend on process pressure. Substituting (6.5) into (6.4), one gets

$$\alpha = \frac{ka^2\varphi^2}{\rho_s} \Delta P^s = \alpha_0 \Delta P^s \quad (6.6)$$

where: $k = k' b$ – numeric constant. For incompressible cakes $\alpha = \alpha_0$. Hence, the basic equation of filtration (6.2) can be written in the form

$$\frac{dV}{Adt} = \frac{\Delta P}{\mu_l \left(\frac{\alpha_0 x V}{A} \Delta P^s + R_f \right)} \quad (6.7)$$

6.1. ISOBARIC FILTRATION

When filtration is conducted at constant pressure ΔP , equation (6.7) can be integrated to obtain the form (the Ruth's equation)

$$V^2 + 2CV = Kt \quad (6.8)$$

where the expressions

$$C = \frac{R_f A}{\alpha_0 x \Delta P^s} \text{ m}^3 \quad (6.9)$$

$$K = \frac{2A^2 \Delta P^{1-s}}{\mu_1 \alpha_0 x} \frac{m^6}{s} \quad (6.10)$$

are called the filtration constants for a given filter and cake. The equation (6.8) gives the relationship between the amount of filtrate and filtration time (Fig. 6.1).

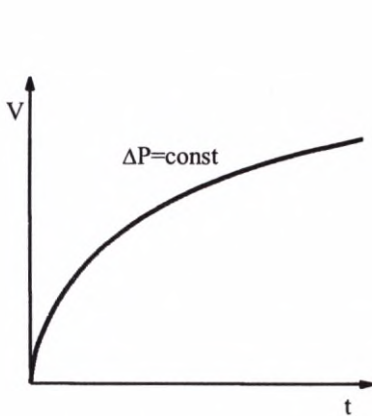


Fig. 6.1. Relationship between filtrate volume and filtration time at constant pressure

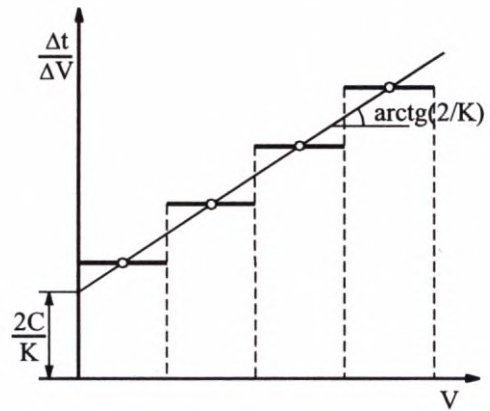


Fig. 6.2. Graphical determination of isobaric filtration constants

The constants C and K can be calculated using the equations (6.9) and (6.10) but they are usually determined experimentally. In order to determine the constants, it is necessary to measure the amount of filtrate at two moments in time measured from the process beginning. If a larger number of experimental data is available, the constants can be calculated using the least squares method or graphically. In the latter case the equation (6.8) is differentiated, then the differentials are replaced with finite increments and transformed into the form

$$\frac{\Delta t}{\Delta V} = \frac{2V}{K} + \frac{2C}{K} \quad (6.11)$$

This is the equation of a straight line and it can be used for graphical determination of the constants K and C (Fig. 6.2). In justified cases, when the resistance of filter medium can be neglected, it is assumed that $C = 0$.

6.2. FILTRATION AT CONSTANT FLOW RATE OF FILTRATE

This process is conducted at $V/t = \text{const}$. Pressure is increased gradually in order to overcome the resistance of a growing cake. The left side of equation (6.7) is constant so it can be written that

$$\frac{V}{At} = \frac{\Delta P}{\mu_l \left(\alpha_0 x \Delta P^s \frac{V}{A} + R_l \right)} \quad (6.12)$$

The relationship between pressure and the amount of filtrate can be found with the use of equation (6.12)

$$\Delta P = BV\Delta P^s + D \quad (6.13)$$

where

$$B = \frac{\mu_l \alpha_0 x}{A^2} \left(\frac{V}{t} \right) \quad (6.14)$$

$$D = \frac{\mu_l R_l}{A} \left(\frac{V}{t} \right) \quad (6.15)$$

or equation (6.12) can be used to determine the relationship between changes in pressure and time

$$\Delta P = E\Delta P^s t + D \quad (6.16)$$

where

$$E = \frac{\mu_l \alpha_0 x}{A^2} \left(\frac{V}{t} \right)^2 \quad (6.17)$$

6.3. TWO-STAGE FILTRATION

The two-stage filtration (Fig. 6.3) is conducted in order to ensure proper conditions at the beginning of the process (among others to prevent the solid particles to pass through the filter medium when the initial pressure is too high):

- a) until V_1 of filtrate is delivered (up to time t_1)
 – the first period of filtration at constant rate takes place; pressure increases gradually,
 b) until V of filtrate is delivered (up to time t)
 – the second period of filtration at constant pressure occurs.

The equation for the second period of filtration has the form resulting from integration of the equation (6.7) for $\Delta P = \text{const}$ in the limits (t_1, t) and (V_1, V)

$$V^2 - V_1^2 + 2C(V - V_1) = K(t - t_1) \quad (6.18)$$

The equation of both isobaric filtration and filtration at constant flow rate is valid at the point (V_1, t_1)

$$\frac{V_1}{t_1} = \frac{K}{2(V_1 + C)} \quad (6.19)$$

It can be used for determination of the duration time of the first filtration stage

$$t_1 = \frac{K - 2C\left(\frac{V_1}{t_1}\right)}{2\left(\frac{V_1}{t_1}\right)^2} \quad (6.20)$$

6.4. FILTER-CAKE WASHING

Washing is performed after filtration, in order to remove the filtrate contained in the filter-cake. The so called cocurrent washing is when the washing liquid flows in the same direction as the slurry (Fig. 6.4). The so called countercurrent washing can be conducted in filter-presses; during this process the washing liquid flows from the head plate through the whole cloth and cake thickness in each frame (Fig. 6.5).

Washing is the process of a liquid flow through a porous layer of constant thickness. Therefore, if it is conducted at constant pressure, what is usually applied, the equation analogical to (6.19) can be used for washing rate calculations

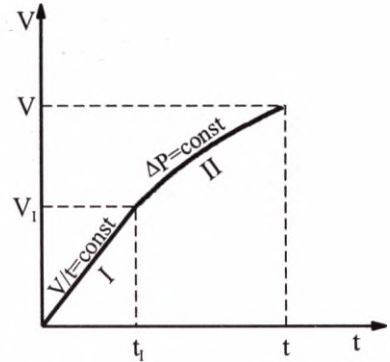


Fig. 6.3. Relationship between filtrate volume and time of two-stage filtration

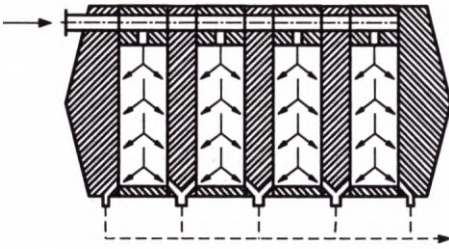


Fig. 6.4. Cocurrent washing of filtration press

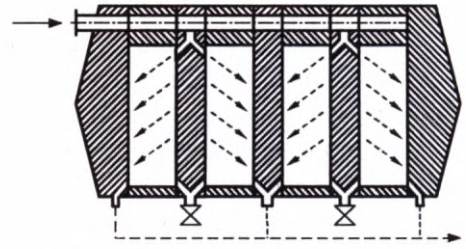


Fig. 6.5. Countercurrent washing of filtration press

$$\left(\frac{V_m}{t_m}\right)_{\text{cocurrent}} = \frac{K_m}{2(V + C_m)} \quad (6.21)$$

The constants K_m and C_m can be calculated on the basis of the constants K and C for isobaric filtration with the use of the following relations resulting from equations (6.9) and (6.10)

$$K_m = K \left(\frac{\mu_l}{\mu_m}\right) \left(\frac{\Delta P_m}{\Delta P}\right)^{1-s} \quad (6.22)$$

$$C_m = C \left(\frac{\Delta P}{\Delta P_m}\right)^s \quad (6.23)$$

When washing is performed in a filter-press countercurrently, the cake is twice as thick and the filtration area is twice as small as in the case of cocurrent washing and as a result the rate of washing calculated from equation (6.21) must be reduced four times

$$\left(\frac{V_m}{t_m}\right)_{\text{countercurrent}} = \frac{1}{4} \left(\frac{V_m}{t_m}\right)_{\text{cocurrent}} \quad (6.24)$$

If filtrate is a solution and filter-cake washing is performed with the use of a clear solvent (e.g. water), changes in concentration of the dissolved substance in the outflowing washing liquid can be described by equation

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{k_m u_m t_d}{L}\right) \quad (6.25)$$

where:

- c_0 – initial filtrate concentration, kg/m^3 ,
- k_m – constant,
- $u_m (= V_m / (At_m))$ – superficial velocity of washing liquid, m/s ,
- t_d – diffusive-washing duration time i.e., from the moment when concentration of outflowing liquid has changed, s ,
- L – filter-cake thickness, m .

6.5. OPTIMAL TIME OF ISOBARIC FILTRATION

If the following assumptions are made:

- coefficients of viscosity of the washing liquid and filtrate are the same,
- washing pressure is the same as filtration pressure,
- the ratio of washing liquid amount to filtrate amount which ensures the sufficient wash ($n = V_m / V$) has already been determined experimentally,
- the time needed to unload the filter and prepare it for another filtration is known, t_c

the optimal filtration time, at which filtration cycle capacity is maximal, can be determined with the use of equation (6.26)

$$t_{\text{opt}} = \frac{t_c}{2n+1} + 2\sqrt{\frac{C^2 t_c}{K(2n+1)}} \quad (6.26)$$

In this case the cycle capacity is equal to

$$\dot{V} = \frac{V}{t_{\text{opt}} + t_m + t_c} = \max \quad (6.27)$$

6.6. OPTIMAL TIME OF TWO-STAGE FILTRATION

If assumptions as in chapter 6.5 are made and the resistance of a filter medium ($C = 0$) is neglected, time of the second stage of two-stage filtration, at which the cycle capacity is maximal, can be expressed by equation

$$t_{2\text{opt}} = (t - t_1)_{\text{opt}} = \frac{t_c - nt_1}{2n+1} \quad (6.28)$$

If it is assumed that time of washing does not depend on the amount of the cake and this time is included into the constant t_c , equation (6.28) will take the form ($n = 0$)

$$t_{2\text{opt}} = (t - t_1)_{\text{opt}} = t_c \quad (6.28a)$$

The cycle capacity is

$$\dot{V} = \frac{V}{t_1 + t_{2\text{opt}} + t_m + t_c} \quad (6.29)$$

6.7. FILTRATION THROUGH LAYER OF CONSTANT THICKNESS

In the case of filters where a liquid with low concentration of solid particles is flowing through a granular layer of constant thickness (e.g. sand filter), the filter resistance does not depend on the amount of the delivered filtrate and equation (6.2) can be written in the form

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{R} \quad (6.30)$$

where R has a constant value and is called the resistance of a filter-cake, $\text{kg}/(\text{m}^4\text{s})$. If a liquid will be poured to such a filter to height H , the pressure exerted by the liquid column on the granular cake is

$$\Delta P = H\rho g \quad (6.31)$$

dV of liquid will outflow within the time interval dt and the liquid level will be reduced by dH ; after substituting into (6.30), one gets

$$-\frac{AdH}{dt} = \frac{H\rho g}{R} \quad (6.32)$$

and after integration within the limits H_1 and H_2

$$\ln \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{\rho g}{AR} \right) t = kt \quad (6.33)$$

where: k – coefficient of proportionality (determined experimentally), $1/\text{s}$.

If a suspension with thick and fast-settling grains will be poured on a filter medium to a height H_1 , the grains will form a filter layer of thickness proportional to the volume of the suspension and as a result proportional to H_1 . If the resistance of the filter medium is neglected, the following equation, which is analogical to (6.33), can be derived

$$\ln \frac{H_1}{H_2} = \frac{k_1}{H_1} t \quad (6.34)$$

where: k_1 – coefficient of proportionality, 1/s.

EXAMPLE 6.1

Results of laboratory test conducted with the use of a plate-and-frame filter which consists of two frames of the total filter area 0.1 m^2 are presented below¹. A suspension of calcium carbonate was used in the tests.

$$\Delta P = 2.1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

t [s]	0	26	98	211	361	555	788	1083
\dot{V} [dm ³]	0	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	16.1 filled filter

$$\Delta P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

t [s]	0	17	61	132	231	358	511	693
\dot{V} [dm ³]	0	2.3	4.6	6.9	9.2	11.5	13.8	16.1 filled filter

Gravimetric measurements revealed that the ratio of the mass of wet cake to the mass of dry cake is 1.473 for the lower pressure and 1.470 for the higher pressure. Density of the dry cake was 1182 and 1187 kg/m³ respectively for the lower and higher pressure. The other data are as follows: the mass fraction of CaCO₃ in the suspension $x_z = 0.139$, the coefficient of viscosity of filtrate $\mu_f = 0.856 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$, calcium carbonate density $\rho_s = 2627 \text{ kg}/\text{m}^3$, filtrate density $\rho_f = 996.4 \text{ kg}/\text{m}^3$. Using these data, calculate:

- values of filtration constants using the graphical method and least squares method,
- resistance coefficients of the cake,
- porosity of the cake,
- compressibility coefficient of the cake,
- resistance coefficient of the filter medium.

¹ The data for this above example were taken from the article: E.L.McMillen, H.A.Webber, Trans. Am. Inst. Chem. Engrs, 34, 213-240, 1938.

Ad a. Constants determination using least squares method

In order to determine the values of constants C and K with the use of the least squares method, equation of filtration (6.8) must be rearranged into the form

$$\frac{V^2}{t} = K + C \left(-\frac{2V}{t} \right)$$

which corresponds to the following equation

$$y = K + Cx$$

Calculations for the pressure difference $\Delta P = 2.1 \cdot 10^5$ Pa are presented below ($N = 7$). The values of x and y are shown in the table

$x = -2V/t$	$y = V^2/t$
-0.1769	0.2035
-0.09388	0.2159
-0.06540	0.2256
-0.05097	0.2344
-0.04144	0.2383
-0.03502	0.2417
-0.02973	0.2393

$$\sum x = \sum \frac{2V}{t} = -0.4933;$$

$$\sum y = \sum \frac{V^2}{t} = 1.598$$

$$\sum x^2 = 0.05081;$$

$$\sum xy = -0.1083$$

$$C = \frac{N \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} = 0.27 \text{ dm}^3$$

$$K = \frac{\sum y}{N} - C \frac{\sum x}{N} = 0.249 \text{ dm}^6/\text{s}$$

Calculations for $\Delta P = 3.5 \cdot 10^5$ Pa give ($N = 7$)

$$\sum x = -0.7699;$$

$$\sum y = 2.486$$

$$\sum x^2 = 0.1226;$$

$$\sum xy = -0.2636$$

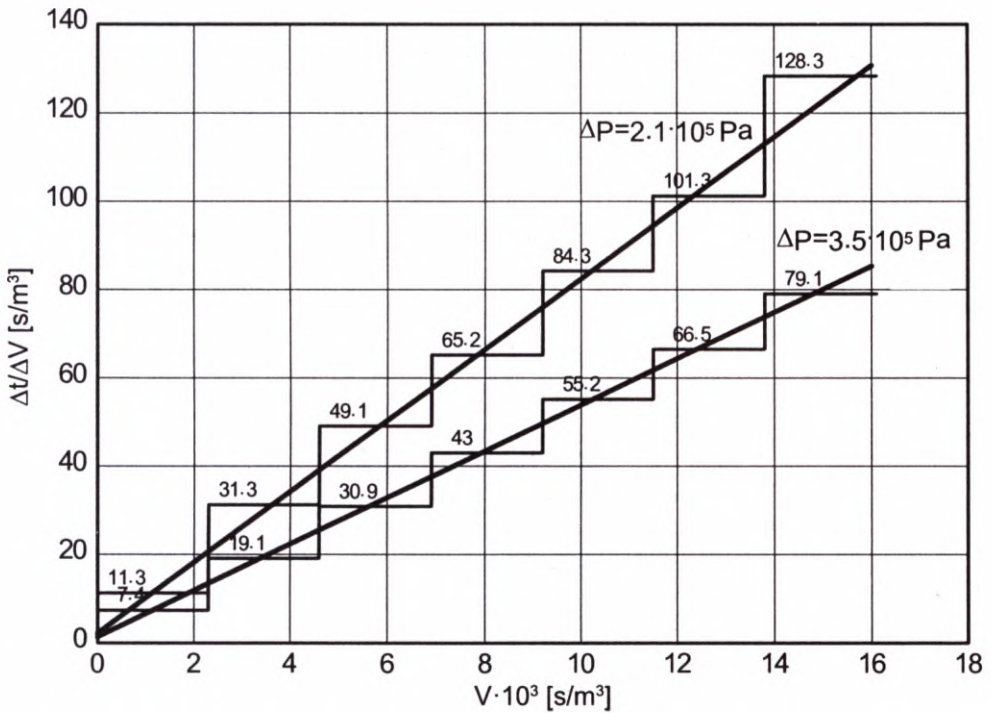


Fig. 6.6. Filtration constants determination

The constants C and K were calculated using the above relations. It was obtained that

$$C = 0.26 \text{ dm}^3; \quad K = 0.381 \text{ dm}^6/\text{s}$$

In order to determine the filtration constants graphically, a chart was made (Fig. 6.6) and it was read from the chart that

a) for $\Delta P = 2.1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

- the tangent of the angle of slope of the line is 7.75; since $2/K = 7.75$, thus $K = 0.258 \text{ dm}^6/\text{s}$,
- the ordinate of the point of intersection between the line and the vertical axis is 2.5; since $2C/K = 2.5$, thus $C = 0.309 \text{ dm}^3$;

b) for $\Delta P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

- the tangent of the angle of slope of the line is 5.21, so $K = 0.384 \text{ dm}^6/\text{s}$,
- the ordinate of the point of intersection between the line and the vertical axis is 1.2; the following value of the constant comes from this value $C = 0.288 \text{ dm}^3$.

Ad b. If the relation (6.10) is taken into consideration in the equation (6.6), the resistance coefficient of the cake can be calculated

$$\alpha = \frac{2A^2\Delta P}{K\mu_l x}$$

where x denotes cake mass per unit volume of filtrate. If the following values are known

$$x_z = \frac{\text{mass of solid}}{\text{mass of suspension}} = 0.139$$

$$x_0 = \frac{\text{mass of deposit}}{\text{mass of solid}} = 1.473$$

$$\rho_l = 996.4 \text{ kg/m}^3$$

the balance relationship can be derived

$$x = \frac{x_z x_0}{1 - x_z x_0} \quad \rho_l = \frac{0.139 \cdot 1.473}{1 - 0.139 \cdot 1.473} \cdot 996.4 = 256 \text{ kg of cake/m}^3 \text{ of filtrate}$$

Hence, the resistance coefficient of the cake equals

$$\alpha = \frac{2 \cdot (0.1)^2 \cdot 2.1 \cdot 10^5}{0.249 \cdot 10^{-6} \cdot 8.56 \cdot 10^{-4} \cdot 256} = 7.70 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$$

Ad c. Using the definition of porosity, one can calculate

$$(1 - \varepsilon)\rho_s = \rho_{s0}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_{s0}}{\rho_s} = 1 - \frac{1182}{2627} = 0.550$$

Values calculated analogically for $\Delta P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ are equal to

$$\alpha = 8.39 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$$

$$\varepsilon = 0.548$$

Ad d. Because of small difference between the values of the constants C it is better to determine the compressibility coefficient of the cake on the basis of the values of K with the use of equation (6.10)

$$s = 1 - \frac{\ln \frac{K_1}{K_2}}{\ln \frac{\Delta P_1}{\Delta P_2}} = 1 - \frac{\ln \frac{0.249}{0.381}}{\ln \frac{2.1}{3.5}} = 0.167$$

Ad e. The coefficient of resistance of the filter medium is calculated using the equation (6.9), in which (6.6) for pressure $2.1 \cdot 10^5$ Pa is taken into account

$$R_t = \frac{\alpha x C}{A} = \frac{7.70 \cdot 10^{10} \cdot 256 \cdot 0.27}{0.1} = 5.32 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-1}$$

EXAMPLE 6.2

Assuming that the suspension used in filtration in the previous example contains a small amount of the dissolved substance and properties of the suspension and filtrate are practically identical, calculate the time required for countercurrent washing of the cake at pressure $2.1 \cdot 10^5$ Pa if the volume of water used for washing is three times the volume of liquid remained in the pores of the cake. Assume that washing rate is 75% of computational theoretical rate.

Because two frames of dimensions $15 \times 15 \times 5$ cm were used, the total volume of the cake is

$$V_{\text{cake}} = 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.05 \cdot 2 = 2.25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Filtration rate at the end of the test is

$$\frac{dV}{dt} = \frac{K}{2(V+C)} = \frac{0.249}{2(16.1+0.27)} = 7.60 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3/\text{s}$$

According to equation (6.24) the theoretical rate of countercurrent washing is

$$\left(\frac{dV}{dt} \right)'_m = \frac{1}{4} \cdot 7.60 \cdot 10^{-3} = 1.90 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3/\text{s}$$

The real rate of washing is lower by 25%

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_m = 0.75 \cdot 1.90 \cdot 10^{-3} = 1.43 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3/\text{s}$$

The volume of washing liquid equals

$$V_m = 3\varepsilon V_{\text{cake}} = 3 \cdot 0.55 \cdot 2.25 \cdot 10^{-3} = 3.71 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (3.71 \text{ dm}^3)$$

The washing time is

$$t_m = \frac{V_m}{\left(\frac{dV}{dt}\right)_m} = \frac{3.71}{1.43 \cdot 10^{-3}} = 2600 \text{ s} \quad (\text{about } 44 \text{ min})$$

EXAMPLE 6.3

A plate-and-frame filter press with 20 frames of dimensions $0.6 \times 0.6 \times 0.025 \text{ m}$ is used for filtration of a suspension containing 10% of solid particles. The filter cake is incompressible and contains 70% of solid particles. How many kg of clear filtrate will have been produced up to the moment when frames are filled with deposit of density 1440 kg/m^3 in the wet state?

The volume of the cake is equal to the volume of frames

$$V_{\text{cake}} = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.025 \cdot 20 = 0.18 \text{ m}^3$$

and the deposit mass is

$$m_{\text{cake}} = V_{\text{cake}} \rho_{\text{cake}} = 0.18 \cdot 1440 = 259 \text{ kg}$$

Defining

$$x_z = \frac{m_s}{m_z} \quad (\text{suspension concentration})$$

$$x_{\text{cake}} = \frac{m_s}{m_{\text{cake}}} \quad (\text{deposit concentration})$$

it can be written that

$$\frac{1}{x_z} \frac{1}{x_{\text{cake}}} = \frac{m_z - m_{\text{os}}}{m_s} = \frac{m_f}{m_s} = \frac{m_f}{m_{\text{cake}} x_{\text{cake}}}$$

Hence, the filtrate mass is

$$m_f = m_{\text{cake}} x_{\text{cake}} \left(\frac{1}{x_z} - \frac{1}{x_{\text{cake}}} \right)$$

$$m_f = 259 \cdot 0.7 \cdot \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.7} \right) = 1550 \text{ kg}$$

EXAMPLE 6.4

The following results were obtained during isobaric filtration:

- 3 dm³ of filtrate after 120 seconds,
- 5 dm³ of filtrate after 300 seconds.

Calculate volume of filtrate received after 1200 seconds if the resistance of the filter medium is taken into account and neglected.

After the data are inserted into equation (6.8) of isobaric filtration, the system of equations is created

$$\begin{cases} 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot C = K \cdot 120 \\ 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot C = K \cdot 300 \end{cases}$$

The filtration constants are determined by solution of this system of equations

$$K = 0.1 \text{ dm}^6/\text{s}; \quad C = 0.5 \text{ dm}^3$$

The amount of filtrate after 1200 s is calculated using the equation

$$V^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot V = 0.1 \cdot 1200$$

$$V^2 + V - 120 = 0$$

$$V = 10.5 \text{ dm}^3$$

If the filter medium resistance is neglected, two different constants will be obtained. Using the data given in the example, one gets

$$K_1 = \frac{V_1^2}{t_1} = \frac{3^2}{120} = 0.075 \text{ dm}^6/\text{s}$$

$$K_2 = \frac{V_2^2}{t_2} = \frac{5^2}{300} = 0.083 \text{ dm}^6/\text{s}$$

Taking the average value

$$K = \frac{0.075 + 0.083}{2} = 0.079 \text{ dm}^6/\text{s}$$

one obtains

$$V = \sqrt{Kt} = \sqrt{0.079 \cdot 1200} = 9.7 \text{ dm}^3$$

EXAMPLE 6.5

Constants of the Ruth's equation were determined in laboratory tests on isobaric filtration of a suspension conducted in a filter of area 0.3 m^2

i	ΔP_i [MPa]	K_i [m^6/s]	C_i [m^3]
1	0.18	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$
2	0.3	$1.675 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$
3	0.4	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$
4	0.5	$2.14 \cdot 10^{-4}$	$0.968 \cdot 10^{-3}$

Coefficient of viscosity of the filtrate is $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$. Industrial filtration was conducted at $\Delta P_s = 0.7 \text{ MPa}$ in a filter of area 1.2 m^2 . Calculate volume of filtrate produced in the industrial filter within 8000 s and the amount of water, which viscosity coefficient is $1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$, that is used for countercurrent filter-cake washing, assuming that the duration of washing is 8000 s.

In order to use all the data for determination of the compressibility coefficient, the experimental data were logarithmed and a chart presented in Fig. 6.7 was created.

i	$\ln(\Delta P)$	$\ln K$	$\ln C$
1	-1.71	-8.95	-6.47
2	-1.20	-8.69	-6.73
3	-0.92	-8.60	-6.83
4	-0.69	-8.45	-6.94

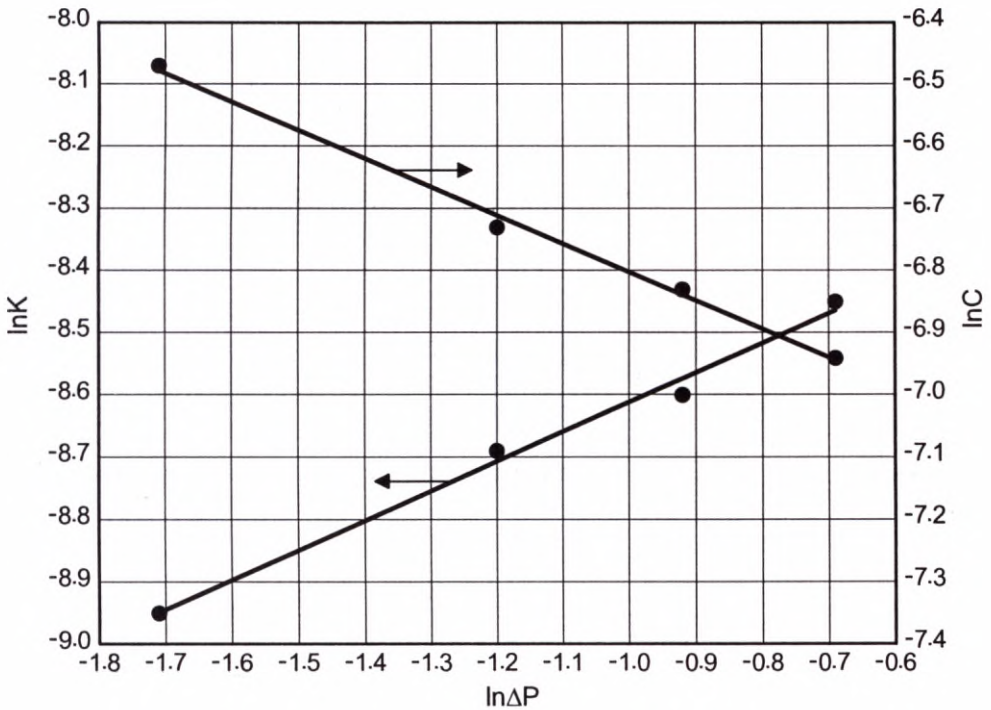


Fig. 6.7. Determination of coefficient of compressibility of cake

After logarithmization of equations (6.9) and (6.10), it was obtained that

$$\ln C = -s \cdot \ln(\Delta P) + \ln \frac{R_f A}{\alpha_0 x}$$

$$\ln K = (1-s) \cdot \ln(\Delta P) + \ln \frac{2A^2}{\mu_f \alpha_0 x}$$

The slopes of the lines in Fig. 6.7 are equal to $(-s)$ and $(1-s)$ respectively. The values of the tangents of the angles of slopes of the lines were found using the chart.

The tangent for the decreasing line (referring to the constant C) is -0.49 and for the increasing line it is 0.47 . Hence, $s \cong 0.49 \div 0.53$. It was assumed that $s \cong 0.5$.

The values of industrial-filtration constants are calculated using equations (6.9) and (6.10) on the basis of the data for the nearest pressure

$$K_5 = K_4 \left(\frac{A_5}{A_4} \right)^2 \left(\frac{\Delta P_5}{\Delta P_4} \right)^{1-s} = 2.14 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1.2}{0.3} \right)^2 \cdot \left(\frac{0.7}{0.5} \right)^{0.5} = 40.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^6/\text{s}$$

$$C_5 = C_4 \left(\frac{A_5}{A_4} \right) \left(\frac{\Delta P_5}{\Delta P_4} \right)^s = 0.968 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1.2}{0.3} \right) \cdot \left(\frac{0.5}{0.7} \right)^{0.5} = 3.27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

The amount of filtrate is calculated using the rearranged equation (6.8)

$$V = \sqrt{C_5^2 + K_5 t} - C_5$$

$$V = \sqrt{(3.27 \cdot 10^{-3})^2 + 40.5 \cdot 10^{-4} \cdot 8000} - 3.27 \cdot 10^{-3} = 5.69 \text{ m}^3$$

Countercurrent washing rate is calculated with the use of the equation (6.24). The constants for washing equal (equations (6.22) and (6.23))

$$K_m = K_5 \frac{\mu_l}{\mu_m} = 40.5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} = 48.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^6/\text{s}$$

$$C_m = C_5 = 3.27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

So the washing rate is

$$\left(\frac{V_m}{t_m} \right)_{\text{countercurrent}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{K_m}{2(V + C_m)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{48.6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot (5.69 + 3.27 \cdot 10^{-3})} = 0.107 \cdot 10^{-3} \text{ m}^6/\text{s}$$

and the volume of washing water is

$$V_m = \left(\frac{V_m}{t_m} \right) \cdot t_m = 0.107 \cdot 10^{-3} \cdot 8000 = 0.854 \text{ m}^3$$

EXAMPLE 6.6

The following amounts of filtrate were obtained during experimental filtration on an industrial filter at pressure 0.2 MPa: 1 m³ within 540 s, and 1.5 m³ within 1200 s, while at pressure 0.3 MPa the same amounts of filtrate were delivered during 387 s and 860 s respectively.

Industrial filtration is to be conducted at constant pressure 0.4 MPa. The duration of filtration in one cycle is 0.5 h. For the washing liquid it can be written that $\mu_l = \mu_m$. The washing liquid is flowing in the same direction as the filtrate and its volume is 1/4 of filtrate volume. The duration of filter cleaning is $t_c = 45$ minutes. Calculate the twenty-four-hour capacity of filtration.

The isobaric filtration constants are calculated using the Ruth's equation (6.8)

$$\begin{cases} 1^2 + 2C_1 = K_1 \cdot 540 \\ (1.5)^2 + 3C_1 = K_1 \cdot 1200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1^2 + 2C_2 = K_2 \cdot 387 \\ (1.5)^2 + 3C_2 = K_2 \cdot 860 \end{cases}$$

$$K_1 = 0.00192 \text{ m}^6/\text{s}; \quad C_1 = 0.0192 \text{ m}^3$$

$$K_2 = 0.00268 \text{ m}^6/\text{s}; \quad C_2 = 0.0179 \text{ m}^3$$

The cake compressibility factor equals

$$s = 1 - \frac{\ln \frac{K_2}{K_1}}{\ln \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}} = 1 - \frac{\ln \frac{0.00268}{0.00192}}{\ln \frac{3}{2}} = 0.18$$

The industrial filtration constants are being converted

$$K_3 = K_2 \left(\frac{\Delta P_3}{\Delta P_2} \right)^{1-s} = 0.00268 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{1-0.18} = 0.00339 \text{ m}^6/\text{s}$$

$$C_3 = C_2 \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_3} \right)^s = 0.0179 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{0.18} = 0.017 \text{ m}^3$$

In the filtration cycle, that is comprised of filtration, washing, discharging and cleaning, filtration takes 1800 s and delivers the following amount of filtrate

$$V = \sqrt{C_3^2 + K_3 t} - C_3 = \sqrt{(0.017)^2 + 0.00339 \cdot 1800} - 0.017 = 2.45 \text{ m}^3$$

Rate of cocurrent washing (equation (6.21)) is

$$\left(\frac{V_m}{t_m} \right) = \frac{K_3}{2(V + C_3)} = \frac{0.00339}{2 \cdot (2.45 + 0.017)} = 0.000686 \text{ m}^3/\text{s}$$

and the time of washing with the use of $V_m = 1/4 V$ of washing liquid is equal to

$$t_m = \frac{0.25 \cdot 2.45}{0.000686} = 894 \text{ s}$$

The cycle time is

$$\sum t = t_f + t_m + t_c = 1800 + 894 + 2700 = 5394 \text{ s} \cong 1.5 \text{ h}$$

Hence

$$\frac{24}{1.5} = 16 \text{ cycles}$$

will be completed in twenty-four-hours and each of them will deliver 2.45 m³ of filtrate. So the twenty-four-hour filtration capacity equals 16 · 2.45 = 39.2 m³ of filtrate.

EXAMPLE 6.7

Calculate the area of a filtration press which capacity is 14.4 m³ of filtrate per twenty-four-hours, if the duration of full cycle is 100 min including the duration of filtration 33.3 min, washing – 16.7 min, discharge and cleaning of the press – 50 min. When filtration of the same suspension is conducted in a laboratory press of area 0.2 m², 0.02 m³ of filtrate is delivered within 1000 s and 0.04 m³ of filtrate – within 3000 s. Filtration is carried out at constant pressure, which is the same as for the laboratory tests. Calculate also the press capacity in 1 cycle and the required amount of a washing liquid which viscosity equals the filtrate viscosity if washing is conducted at the same pressure and in the same direction

as filtration. How much larger will the twenty-four-hours capacity be when the process is conducted under optimal parameters for the same ratio of washing liquid amount to filtrate amount?

The filtration constants for the laboratory conditions equal (from equation (6.8))

$$\begin{cases} (0.02)^2 + 2 \cdot 0.02 \cdot C = K \cdot 1000 \\ (0.04)^2 + 2 \cdot 0.04 \cdot C = K \cdot 3000 \end{cases}$$

$$K = 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^6/\text{s}; \quad C = 0.01 \text{ m}^3$$

Since there are $24 \cdot 3600 = 86400$ seconds per twenty four hours and 14.4 m^3 of the filtrate is produced during twenty four hours, thus the process capacity is

$$\frac{14.4}{86400} = 1.667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ of filtrate/s}$$

Because it takes 6000 s to complete 1 cycle, $6000 \cdot 1.667 \cdot 10^{-4} = 1 \text{ m}^3$ of filtrate is obtained per 1 cycle. The values of filtration constants for the area A of the industrial filter are

$$K' = K \left(\frac{A}{0.2} \right)^2 = 8 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{A^2}{(0.2)^2} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot A^2 \text{ m}^6/\text{s}$$

$$C' = C \left(\frac{A}{0.2} \right) = 0.01 \cdot \frac{A}{0.2} = 0.05 \cdot A \text{ m}^3$$

During 1 filtration cycle 1 m^3 of filtrate is produced within 2000 s. The equation (6.8) has the form

$$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0.05A = 2 \cdot 10^{-5} A^2 \cdot 2000$$

Using the above equation, one can calculate that $A = 6.4 \text{ m}^2$. The washing liquid amount results from the washing rate (equation (6.21))

$$\left(\frac{V_m}{t_m} \right) = \frac{K'}{2(V + C')} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot (6.4)^2}{2 \cdot (1 + 0.05 \cdot 6.4)} = 3.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

and the washing time that equals 1000 s in 1 cycle

$$V_m = \left(\frac{V_m}{t_m} \right) \cdot t_m = 3.1 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 = 0.31 \text{ m}^3$$

Hence, 0.31 m³ of washing liquid is used per 1 cycle. The optimal time of isobaric filtration is calculated with the use of the formula (6.26) in which

$$n = \frac{V_m}{V} = \frac{0.31}{1} = 0.31$$

$t_c = 50 \text{ min} = 3000 \text{ s}$ (as previously)

$$t_{\text{opt}} = \frac{3000}{2 \cdot 0.31 + 1} + 2 \sqrt{\frac{(0.05)^2 \cdot 3000}{2 \cdot 10^{-5} \cdot (2 \cdot 0.31 + 1)}} = 2814 \text{ s}$$

The amount of filtrate produced per 1 cycle is

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{C'^2 + K't} - C' = \sqrt{(0.05 \cdot 6.4)^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot (6.4)^2 \cdot 2814} - 0.05 \cdot 6.4$$

$$V_{\text{opt}} = 1.232 \text{ m}^3$$

and the amount of washing liquid is

$$V_{\text{mopt}} = nV_{\text{opt}} = 0.31 \cdot 1.232 = 0.382 \text{ m}^3$$

Now the washing time is

$$t_{\text{mopt}} = \frac{0.382}{3.1 \cdot 10^{-4}} = 1232 \text{ s}$$

and process capacity (equation (6.27))

$$\dot{V}_{\text{opt}} = \frac{1.232}{2814 + 1232 + 3000} = 1.748 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

The capacity rose by

$$\frac{1.748 \cdot 10^{-4} - 1.667 \cdot 10^{-4}}{1.667 \cdot 10^{-4}} = 4.9\%$$

so the cycle planned in the example is close to the optimal one.

EXAMPLE 6.8

The constants $K = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^6/\text{s}$, $C = 0.1 \text{ m}^3$ were determined during isobaric filtration. It was found that the cake is not washed enough if washing liquid volume is half the volume of filtrate. The duration of filter discharge and cleaning is 25 minutes. Derive the formula (6.26) for the optimal filtration time and calculate the capacity of filtration for the optimal cycle. Compare this capacity with the result of calculations in which it is assumed that $C = 0$.

It is assumed that viscosity of the washing liquid is similar to that of the filtrate and washing pressure is the same as filtration pressure. The amount of washing liquid is a submultiple of the filtrate volume

$$V_m = nV$$

From the Ruth's equation (6.8) the amount of filtrate is

$$V^2 + 2CV = Kt$$

$$V = \sqrt{C^2 + Kt} - C \quad (\text{a})$$

The washing rate is given by the relation

$$\left(\frac{V_m}{t_m} \right) = \frac{K}{2(V + C)} = \frac{nV}{t_m}$$

The above equation can be used to calculate the washing time

$$t_m = \frac{2nV(V + C)}{K}$$

After the relationship (a) is taken into account, the capacity of filtration cycle is

$$\dot{V} = \frac{V}{\sum t} = \frac{\sqrt{C^2 + Kt} - C}{t + \frac{2n}{K}(\sqrt{C^2 + Kt} - C)\sqrt{C^2 + Kt} + t_c}$$

where: t_c – time of auxiliary operations.

In order to find the maximum capacity, the root of the first derivative (the necessary condition) must be found

$$\frac{d\dot{V}}{dt} = \frac{\frac{K}{2\sqrt{C^2+K}} \left[\frac{2n}{K} (C^2 + Kt - C\sqrt{C^2 + Kt}) + t + t_c \right] - (\sqrt{C^2 + Kt} - C) \left(2n - \frac{nC}{\sqrt{C^2 + Kt}} + 1 \right)}{\left[\frac{2n}{K} (C^2 + Kt - C\sqrt{C^2 + Kt}) + t + t_c \right]^2}$$

The following quadratic equation is obtained after the numerator has been equated to zero and the terms have been grouped

$$(2n+1)t^2 - 2t_c t - \frac{4C^2}{K}t_c + \frac{t_c^2}{2n+1} = 0$$

Solutions of this equation are equal to

$$t = \frac{t_c}{2n+1} \pm 2\sqrt{\frac{C^2 t_c}{K(2n+1)}}$$

It can be shown that the solution with the sign „+” corresponds to the local maximum of the capacity. So the optimal time of filtration under the conditions of the example is

$$t = \frac{1500}{2 \cdot 0.5 + 1} + 2\sqrt{\frac{(0.1)^2 \cdot 1500}{1.2 \cdot 10^{-4} \cdot (2 \cdot 0.5 + 1)}} = 1250 \text{ s}$$

The amount of filtrate is

$$V = \sqrt{C^2 + Kt} - C = \sqrt{(0.1)^2 + 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot 1250} - 0.1 = 0.3 \text{ m}^3$$

The washing time equals

$$t_m = \frac{2nV(V+C)}{K} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot (0.3 + 0.1)}{1.2 \cdot 10^{-4}} = 1000 \text{ s}$$

The capacity of filtration

$$\dot{V}_{\max} = \frac{0.3}{1250 + 1000 + 1500} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

If the resistance of the cloth was neglected and it was taken that $C = 0$, the filtration time would be equal to

$$t = \frac{t_c}{2n+1} = \frac{1500}{2 \cdot 0.5 + 1} = 750 \text{ s}$$

The amount of filtrate would equal

$$V = \sqrt{C^2 + Kt} - C = \sqrt{(0.1)^2 + 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot 750} - 0.1 = 0.216 \text{ m}^3$$

and the filtration time would be

$$t_m = \frac{2nV(V+C)}{K} = \frac{2 \cdot 0.5 \cdot 0.216 \cdot (0.216 + 0.1)}{1.2 \cdot 10^{-4}} = 569 \text{ s}$$

The capacity is

$$\dot{V} = \frac{V}{\sum t} = \frac{0.216}{750 + 569 + 1500} = 76.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

In this case it can be noticed that the maximum capacity is not visibly higher than the process capacity, while the filtration times are significantly different. Therefore, the course of the function $\dot{V} = f(t)$ is flat for the data given in the example.

EXAMPLE 6.9

A cake which has the compressibility coefficient equal to $s = 0.2$ is being filtered at the constant rate of $0.5 \text{ dm}^3/\text{s}$. Manometer installed at the inlet shows the positive gauge pressure of $\Delta P_0 = 0.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ at the initial moment and $\Delta P_1 = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ after 600 seconds. What time is required to reach the value $\Delta P_2 = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? How much filtrate will be delivered during this period?

The quantities independent of time which occur in equation (6.16) are integrated in the constants E and D

$$\Delta P = E \Delta P^s t + D$$

One can determine these constants, using the experimental data and solving the system of equations

$$\begin{cases} 0.2 \cdot 10^5 = E \cdot (0.2 \cdot 10^5)^{0.2} \cdot 0 + D \\ 1.2 \cdot 10^5 = E \cdot (1.2 \cdot 10^5)^{0.2} \cdot 600 + D \end{cases}$$

$$D = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}; \quad E = 16.1 \text{ Pa}^{1-s}/\text{s}$$

Pressure ΔP_2 will be obtained after

$$t = \frac{\Delta P_2 - D}{E \Delta P_2^s} = \frac{2.5 \cdot 10^5 - 0.2 \cdot 10^5}{16.1 \cdot (2.5 \cdot 10^5)^{0.2}} = 1192 \text{ s}$$

The following amount of filtrate will be delivered within this time

$$V = \left(\frac{V}{t} \right) \cdot t = 0.5 \cdot 1192 = 596 \text{ dm}^3$$

EXAMPLE 6.10

Filtration is conducted in a plate-and-frame filtration press in two stages:

- at constant filtrate flow rate of $3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{m}^2\text{s})$ until pressure 0.25 MPa is obtained,
- at constant pressure 0.25 MPa.

The cake is not washed. It is expected that the time of discharge and cleaning of the press will be 0.75 h. Laboratory tests conducted in an experimental filter of area 0.09 m^2 with the use of the same suspension and filter cloth gave the following results:

ΔP [MPa]	t [s]	V [m ³]
0.2	970	0.0018
0.2	3650	0.0036
0.35	740	0.0019
0.35	2560	0.0036

The process capacity should be $\dot{V} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ due to technological reasons. Design the press (calculate the area and number of frames of dimensions $850 \times 850 \text{ mm}$) for this process if the filtration cycle is expected to be conducted in the optimal way.

The isobaric filtration constants are calculated for the laboratory conditions (equation (6.8)). For pressure 0.2 MPa

$$\begin{cases} (0.0018)^2 + 2 \cdot 0.0018 \cdot C_1 = 970 \cdot K_1 \\ (0.0036)^2 + 2 \cdot 0.0036 \cdot C_1 = 3650 \cdot K_1 \end{cases}$$

Hence

$$K_1 = 3.78 \cdot 10^{-9} \text{ m}^6/\text{s}; \quad C_1 = 0.117 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

For pressure 0.35 MPa

$$\begin{cases} (0.0019)^2 + 2 \cdot 0.0019 \cdot C_2 = 740 \cdot K_2 \\ (0.0036)^2 + 2 \cdot 0.0036 \cdot C_2 = 2560 \cdot K_2 \end{cases}$$

So

$$K_2 = 4.47 \cdot 10^{-9} \text{ m}^6/\text{s}; \quad C_2 = 0.0794 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

The coefficient of compressibility of the cake is calculated with the use of the above data

$$s = 1 - \frac{\ln \frac{K_2}{K_1}}{\ln \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}} = 1 - \frac{\ln \frac{4.47}{3.78}}{\ln \frac{0.35}{0.2}} = 0.7$$

and the values of constants are converted for the target pressure 0.25 MPa

$$K_3 = K_1 \left(\frac{\Delta P_3}{\Delta P_1} \right)^{1-s} \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 = 3.78 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{0.25}{0.2} \right)^{1-0.7} \cdot \left(\frac{A_3}{0.09} \right)^2$$

$$K_3 = 4.99 \cdot 10^{-7} \cdot A_3^2 [\text{m}^6/\text{s}]$$

$$C_3 = C_1 \left(\frac{\Delta P_1}{\Delta P_3} \right)^s \left(\frac{A_3}{A_1} \right) = 0.117 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{0.2}{0.25} \right)^{0.7} \cdot \left(\frac{A_3}{0.09} \right)$$

$$C_3 = 1.11 \cdot 10^{-3} \cdot A_3 [\text{m}^3]$$

One can calculate the amount of filtrate delivered in the first stage, rearranging equation (6.19)

$$V_1 = \frac{K_3}{2 \left(\frac{V}{t} \right)_1} - C_3 = \frac{4.99 \cdot 10^{-7} \cdot A_3^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot A_3} - 1.11 \cdot 10^{-3} \cdot A_3 = 7.20 \cdot 10^{-3} \cdot A_3 \text{ m}^3$$

Duration of the first stage of filtration is

$$t_1 = \frac{V_1}{\left(\frac{V}{t} \right)_1} = \frac{7.20 \cdot 10^{-3} \cdot A_3}{3 \cdot 10^{-5} \cdot A_3} = 240 \text{ s}$$

If the condition for optimal process parameters is taken into account, when washing ($n = 0$) is not carried out, the equation (6.28) can be simplified to the following form

$$t_{\text{IIopt}} = (t - t_1)_{\text{opt}} = t_c = 2700 \text{ s}$$

So the whole cycle takes

$$\sum t = t_1 + t_{\text{II}} + t_c = 240 + 2700 + 2700 = 5640 \text{ s}$$

Since the cycle efficiency is $\dot{V} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, thus the amount of filtrate delivered in the cycle is

$$V = \dot{V} \cdot \sum t = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5640 = 1.13 \text{ m}^3$$

This value satisfies the equation of two-stage filtration (6.18)

$$\begin{aligned} (1.13)^2 - (7.20 \cdot 10^{-3} \cdot A_3)^2 + 2 \cdot 1.11 \cdot 10^{-3} \cdot A_3 (1.13 - 7.20 \cdot 10^{-3} \cdot A_3) &= \\ &= 4.99 \cdot 10^{-7} \cdot A_3^2 \cdot 2700 \end{aligned}$$

Solving this equation, one obtains $A_3 = 30.9 \text{ m}^2$.

The single frame of dimensions $850 \times 850 \text{ mm}$ has the following double area

$$(0.85)^2 \cdot 2 = 1.44 \text{ m}^2$$

So the number of frames is

$$n = \frac{A_3}{1.44} = \frac{30.9}{1.44} = 21.5$$

After this value is rounded, 22 frames are obtained.

EXAMPLE 6.11

Filtration of a fine-grained suspension is carried out in two stages. Firstly, the constant filtration rate is maintained until 0.05 m^3 of filtrate is produced. Then, constant pressure is maintained. The Ruth's constants for this pressure equal $K = 3.72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6/\text{s}$, $C = 1.65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. After the process is finished, the cake is being washed cocurrently with a liquid of the same viscosity coefficient as of the filtrate. The volume of washing liquid is $1/3$ of filtrate volume. The time of discharge and cleaning of the filter is 1800 s . Neglecting the resistance of the filter medium in the optimization calculations, derive the equation (6.28) and calculate the capacity of filtration. What is the rate of the I stage of filtration?

The following relationship is valid at the end of the I stage of filtration ($C = 0$)

$$\frac{V_1}{t_1} = \frac{K}{2V_1}$$

On the basis of this relationship, it can be written that

$$2V_1^2 = Kt_1 \quad (\text{a})$$

The II stage of filtration is described by equation (6.18) and if $C = 0$, this equation has the form

$$V^2 - V_1^2 = K(t - t_1) \quad (\text{b})$$

The washing time is (compare the example (6.8))

$$t_m = \frac{2nV^2}{K}$$

and after the expression for V^2 that results from the relationships (a) and (b) is substituted

$$t_m = 2n \left(t - \frac{t_1}{2} \right)$$

the filtration capacity is

$$\dot{V} = \frac{\sqrt{K \left(t - \frac{t_1}{2} \right)}}{t + 2n \left(t - \frac{t_1}{2} \right) + t_c}$$

The maximum capacity will occur if the following condition is fulfilled

$$\frac{d\dot{V}}{dt} = \frac{\frac{K}{2\sqrt{K(t-t_1/2)}} \left[t + 2n \left(t - \frac{t_1}{2} \right) + t_c \right] - 2(n+1) \sqrt{K \left(t - \frac{t_1}{2} \right)}}{\left[t + 2n \left(t - \frac{t_1}{2} \right) + t_c \right]^2} = 0$$

Solution of this equation gives duration of the II stage of filtration

$$t - t_1 = \frac{t_c - nt_1}{2n+1}$$

Under the conditions given in the example the time of the I stage of filtration is calculated from the equation written for the last point of the I stage, for which the equation of the II stage is also valid

$$\frac{V_1}{t_1} = \frac{K}{2(V_1 + C)}$$

$$t_1 = \frac{2V_1^2 + 2CV_1}{K}$$

Hence

$$t_1 = \frac{2 \cdot (0.05)^2 + 2 \cdot 1.65 \cdot 10^{-4} \cdot 0.05}{3.72 \cdot 10^{-6}} = 1348 \text{ s}$$

According to equation (6.28) derived above the time of the II stage of filtration is

$$t - t_1 = \frac{t_c - nt_1}{2n+1} = \frac{1800 - 0.333 \cdot 1348}{2 \cdot 0.333 + 1} = 810 \text{ s}$$

The amount of filtrate produced in two-stage filtration cycle can be calculated from equation (6.18)

$$V^2 - (0.05)^2 + 2 \cdot 1.65 \cdot 10^{-4} \cdot V - 2 \cdot 1.65 \cdot 10^{-4} \cdot 0.05 - 3.72 \cdot 10^{-6} \cdot 810 = 0$$

The solution of the above equation which has physical meaning is

$$V = 0.0742 \text{ m}^3$$

The washing time is

$$t_m = \frac{2nV(V+C)}{K} = \frac{2 \cdot 0.333 \cdot 0.0742 \cdot (0.0742 + 1.65 \cdot 10^{-4})}{3.72 \cdot 10^{-6}} = 989 \text{ s}$$

So the filtration capacity equals

$$\dot{V} = \frac{V}{\sum t} = \frac{0.0742}{1348 + 810 + 989 + 1800} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

and the rate of the I stage of filtration is

$$\left(\frac{V}{t}\right)_1 = \frac{0.05}{810} = 6.17 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

EXAMPLE 6.12²

A water-based suspension containing 200 kg of solid particles in 1 m³ is being filtered in a frame press which one frame has the area of 0.2 m². Disassembly of the press takes 150 s, removing the cake from 1 frame – 150 s and assembly of the filter press – also 150 s. The filtration capacity is expected to be 0.6 m³/h at constant filtration pressure 0.2 MPa. The cake that can be assumed to be incompressible is not washed. The resistance of filtration medium can be neglected. Calculate the minimum number of frames and their thickness. The data for the cake and filtrate are given below:

² According to S. Leszczyński, *Filtracja w przemyśle*, WNT, Warszawa 1972.

density of solid particles $\rho_s = 3000 \text{ kg/m}^3$,
 cake porosity $\varepsilon = 0.5$,
 specific resistance of cake $\alpha_0 = 2.87 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$,
 coefficient of viscosity of filtrate $\mu_f = 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$,
 filtrate density $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Volume of n frames of thickness δ is $n \cdot (0.2/2) \cdot \delta = 0.1 \cdot n\delta \text{ [m}^3\text{]}$. The area of one frame was divided by 2 because the frame is two-sided. It is assumed that the process will be conducted until the frames are completely filled with the cake.

200 kg of solid particles of the total volume $V_s = 200/3000 = 0.067 \text{ m}^3$ is in 1 m^3 of the suspension. The cake formed by this solid will have the volume

$$V_0 = \frac{V_s}{1 - \varepsilon} = \frac{0.067}{1 - 0.5} = 0.134 \text{ m}^3$$

The mass of cake is

$$m_0 = V_s \rho_s + \varepsilon V_0 \rho_f = 0.067 \cdot 3000 + 0.5 \cdot 0.134 \cdot 1000 = 268 \text{ kg}$$

The volume of filtrate delivered from 1 m^3 of the suspension is $1 - V_0 = 1 - 0.134 = 0.866 \text{ m}^3$. Hence, the value of x from equation (6.3) equals

$$x = \frac{m_0}{V_f} = \frac{268}{0.866} = 309 \text{ kg/m}^3$$

According to the equation (6.10), the constant K of isobaric filtration is equal to

$$K = \frac{2A^2 \Delta P}{\mu_f \alpha_0 x} = \frac{2 \cdot (0.2)^2 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 2.87 \cdot 10^{10} \cdot 309} = 1.80 \cdot 10^{-6} \cdot n^2 \text{ m}^6/\text{s}$$

If the resistance of filtration medium is neglected, equation (6.8) has the form

$$V^2 = Kt$$

$$V^2 = 1.80 \cdot 10^{-6} \cdot n^2 t$$

Hence, the filtration time is

$$t = \frac{V^2}{1.80 \cdot 10^{-6} \cdot n^2} \text{ s}$$

The total time of a cycle is

$$\sum t = t + t_c = t + 150 + n \cdot 150 + 150 = t + 150 \cdot n + 300 \text{ s}$$

1 m³ of the cake is formed after 0.866/0.134 m³ of filtrate has been separated. The following volume of filtrate corresponds to the volume of n filled frames

$$V = 6.46 \cdot 0.1 \cdot n\delta = 0.646 \cdot n\delta \text{ m}^3$$

So the filtration time can be expressed as

$$t = \frac{(0.646)^2 \cdot n^2 \delta^2}{1.80 \cdot 10^{-6} \cdot n^2} = 3.59 \cdot 10^5 \cdot \delta^2 \text{ s}$$

Hence

$$\sum t = 3.59 \cdot 10^5 \cdot \delta^2 + 150 \cdot n + 300$$

The given capacity of filtration is

$$\dot{V} = \frac{V}{\sum t} = \frac{0.6}{3600} = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

Substituting the expressions for V and $\sum t$, one obtains the equation

$$\frac{0.646 \cdot n\delta}{3.59 \cdot 10^5 \cdot \delta^2 + 150 \cdot n + 300} = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

Using the above formula, one can calculate that

$$n = \frac{59.8 \cdot \delta^2 + 0.05}{0.646 \cdot \delta - 0.025} \quad (\text{a})$$

Looking for the optimal number of frames, one finds the root of the derivative

$$\frac{dn}{d\delta} = \frac{2 \cdot 59.8 \cdot \delta \cdot (0.646 \cdot \delta - 0.025) - 0.646 \cdot (59.8 \cdot \delta^2 + 0.05)}{(0.646 \cdot \delta - 0.025)^2} = 0$$

The positive root of the resultant quadratic equation is $\delta = 0.087$ m, what corresponds to $n = 16.1$.

The closest higher natural number is taken, that is $n = 17$ frames. Thickness of the frame for this value of n is obtained by solving the equation (a); it is $\delta = 0.07$ m. So the minimum number of frames is 17 and frame thickness equals 0.07 m.

EXAMPLE 6.13

Filtration of a suspension of solid particles from a diluted water-based H_2SO_4 solution was conducted on a filter of area 2m^2 . 0.2 m^3 of filtrate was obtained. Analysis of the suspension showed that it was containing 15% of solid of density 1830 kg/m^3 . The cake porosity is 0.5. Filtrate, which density is 1000 kg/m^3 , has concentration $0.00120\text{ kg H}_2\text{SO}_4/\text{m}^3$. After filtration, the cake was washed with $0.1\text{ dm}^3/\text{s}$ water and after 500 seconds concentration of H_2SO_4 in the washings was 0.00095 kg/m^3 . What time is required to obtain the concentration 0.00012 kg/m^3 ?

Suspension density is

$$\rho_z = \frac{1}{\frac{x_z}{\rho_s} + \frac{1-x_z}{\rho_t}} = \frac{1}{\frac{0.15}{1830} + \frac{0.85}{1000}} = 1073\text{ kg/m}^3$$

1 m^3 of the suspension weights ρ_z and contains $x_z\rho_z$ of solid of density $x_z\rho_z/\rho_s$. The cake volume will be $x_z\rho_z/(\rho_s(1-\epsilon))$. So the amount of solid per 1 m^3 of filtrate is

$$x = \frac{x_z\rho_z}{1 - \frac{x_z\rho_z}{\rho_s(1-\epsilon)}} = \frac{0.15 \cdot 1073}{1 - \frac{0.15 \cdot 1073}{1830 \cdot (1-0.5)}} = 195\text{ kg of solid/m}^3\text{ of filtrate}$$

The mass of solid in the cake can be written as

$$AL(1-\epsilon)\rho_s = Vx'$$

Hence, thickness of the cake layer is

$$L = \frac{Vx'}{A(1-\epsilon)\rho_s} = \frac{0.2 \cdot 195}{2 \cdot (1-0.5) \cdot 1830} = 0.0213\text{ m}$$

Linear superficial velocity of washing liquid flowing through the cake is

$$u_m = \left(\frac{V}{t} \right)_m \cdot \frac{1}{A} = \frac{0.1 \cdot 10^{-3}}{2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

The volume of filtrate in capillaries is

$$V_{\text{cake}} \varepsilon = \frac{Vx'}{\rho_s (1 - \varepsilon)} \varepsilon = \frac{0.2 \cdot 195}{1830 \cdot (1 - 0.5)} \cdot 0.5 = 0.0213 \text{ m}^3$$

The time required to displace this volume of filtrate is

$$t_w = \frac{0.0213}{0.1 \cdot 10^{-3}} = 213 \text{ s}$$

After this period of time, the diffusive washing starts. The equation (6.25) is used to calculate the changes in the washings concentration. If the concentration after some time is known, the constant k_m can be calculated

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{k_m u_m t_d}{L}\right)$$

$$0.00095 = 0.00120 \cdot \exp\left(-\frac{k_m \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 287}{0.0213}\right)$$

$$-\frac{k_m \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 287}{0.0213} = \ln \frac{0.95}{1.2}$$

$$k_m = 0.347$$

The following value

$$500 - 213 = 287 \text{ s}$$

was taken for calculations as the diffusive washing time.

The time required to decrease the concentration ten times can be calculated from the rearranged equation (6.25)

$$t = -\frac{L}{k_m u_m} \cdot \ln \frac{c}{c_0}$$

$$t = -\frac{0.0213}{0.347 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \cdot \ln \frac{0.00012}{0.00120} = 2827 \text{ s}$$

That is

$$2827 + 213 = 3040 \text{ s} \quad (0.844 \text{ h})$$

including the time t_w .

EXAMPLE 6.14³

80 dm³ of filtrate is collected during 1 revolution of a rotary vacuum filter of area 2 m². The angle of filter immersion is 90° (Fig. 6.8), suspension contains 15% by volume of solid particles. A layer of solid of thickness 1 mm stays at the surface of the filter after the cake has been removed. The cake porosity is $\varepsilon = 0.3$ and its compressibility coefficient $s = 0.2$. The resistance of filter medium can be neglected. Compare how the filtration capacity will be increased if:

- 1) rotational speed will be doubled,
- 2) pressure will be doubled,
- 3) immersion depth will be doubled.

The volume of cake layer of thickness 1 mm is 0.002 m³ = 2 dm³; solid occupies $(1 - \varepsilon) \cdot 2 = 0.7 \cdot 2 = 1.4$ dm³ of this volume and the rest is occupied by the liquid in cake capillaries. 1 dm³ of solid in the suspension corresponds to $(100 - 15)/15 = 5.67$ dm³ of liquid; thus the suspension which formed a 1 mm thick cake-layer is composed of 1.4 dm³ of solid and $1.4 \cdot 5.67 = 7.95$ dm³ of liquid. 0.6 dm³ of this liquid stays in the cake and the rest, i.e. 7.35 dm³, forms the filtrate. Therefore, calculations for the filtration process can be done as for the II stage of two-stage filtration and the volume of filtrate from the I stage is $V_1 = 7.35$ dm³.

The equation (6.18) for $C = 0$ has the form

$$V^2 - V_1^2 = Kt$$

The value of t_1 is zero because time of the process is calculated from the beginning of the II stage. 80 dm³ of filtrate is obtained during 1 revolution but V_1 of filtrate, which corresponds to the formed 1 mm thick cake-layer, must be added to this value

³ According to J. Ciborowski, *Inżynieria chemiczna*, PWT, Warszawa 1955.

$$V = 80 + 7.35 = 87.35 \text{ dm}^3$$

$$Kt = (87.35)^2 - (7.35)^2 = 7600 \text{ dm}^3$$

Ad 1. Filtration time is reduced twice if rotations are doubled

$$t' = \frac{t}{2}$$

According to the equation of filtration

$$V'^2 - (7.35)^2 = K \frac{t}{2} = 3800 \text{ dm}^6$$

$$V' = \sqrt{3800 + (7.35)^2} = 62 \text{ dm}^3$$

$$V' - V_1 = 62 - 7.35 = 54.65 \text{ dm}^3/\text{revolution}$$

Since the capacity is referred to time not the number of revolutions, thus the comparison requires the calculated volume of filtrate to be doubled as in the same time the filter will perform twice as many revolutions. After revolutions has been doubled, the capacity is $2 \cdot 54.65 = 109.3 \text{ dm}^3$ of filtrate for the time during which the filter originally performed 1 revolution. The increase in capacity is

$$\frac{109.3 - 80}{80} = 36\%$$

Ad 2. If the pressure is made double, the value of K will change

$$K'' = K \left(\frac{\Delta P''}{\Delta P} \right)^{1-s} = K \cdot 2^{1-0.2} = 1.74K$$

This value substituted into the equation of filtration gives

$$V''^2 - (7.35)^2 = K''t = 1.74 \cdot Kt = 1.74 \cdot 7600$$

$$V'' = 115.2 \text{ dm}^3$$

$$V'' - V_1 = 115.2 - 7.35 = 108 \text{ dm}^3/\text{revolution}$$

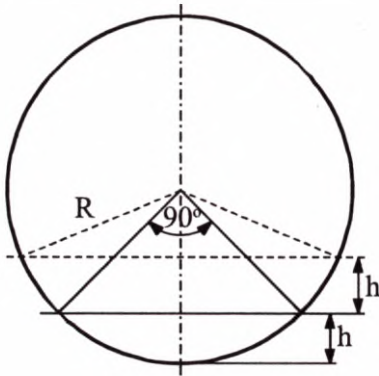


Fig. 6.8. Rotary filter

The increase in capacity is equal to

$$\frac{108 - 80}{80} = 35\%$$

Ad 3. Geometry of the cross-section (Fig. 6.8) must be considered in order to calculate the filter capacity when the immerse depth is made double.

If the quantity H defined as

$$H = R - h$$

is introduced, using the appropriate triangle, one can found that

$$H = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{R(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}$$

for the angle of immersion of 90° .

After immersion is increased to the depth

$$h''' = 2h = R(2 - \sqrt{2})$$

the appropriate distance between the drum axis and liquid level is

$$H''' = R - h''' = R(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{H'''}{R} = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$$

Hence, the immersion angle is $\alpha = 132^\circ$. The filtration time is proportional to the immersion angle so

$$\frac{t'''}{t} = \frac{132}{90} = 1.47$$

Similarly to the first case, the following calculations are made

$$V^{m^2} - (7.35)^2 = Kt^m = 1.47 \cdot 7600 = 11\,200$$

$$V^m = 105.8 \text{ dm}^3$$

$$V^m - V_1 = 105.8 - 7.35 = 98.4 \text{ dm}^3$$

The capacity is increased by

$$\frac{98.4 - 80}{80} = 23\%$$

EXAMPLE 6.15

Water at 20°C was poured into a 0.5 m diameter sand filter to a height $H_1 = 4$ m. The sand layer thickness is 0.15 m. It was noticed that water level fell to $H_2 = 3.5$ m during 420 s. Calculate the filter capacity if the level will be maintained at 4 m.

The coefficient k is calculated on the basis of equation (6.33)

$$k = \frac{\ln \frac{H_1}{H_2}}{t}$$

$$k = \frac{\ln \frac{4}{3.5}}{420} = 3.18 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Hence, the cake resistance R is

$$R = \frac{\rho g}{Ak}$$

$$R = \frac{998 \cdot 9.81}{\frac{\pi \cdot (0.5)^2}{4} \cdot 3.18 \cdot 10^{-4}} = 1.57 \cdot 10^8 \text{ kg}/(\text{m}^4 \cdot \text{s})$$

Pressure exerted by a 4 m high water column is equal to (equation (6.31))

$$\Delta P = H\rho g$$

$$\Delta P = 4 \cdot 998 \cdot 9.81 = 39160 \text{ Pa}$$

Therefore, according to the equation (6.30), the filter capacity is

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{R} = \frac{39160}{1.57 \cdot 10^8} = 2.50 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

EXAMPLE 6.16

During filtration of a coarse-grained fast-settling suspension a liquid level fell from $H_1 = 4 \text{ m}$ to $H_2 = 2.5 \text{ m}$ within 310 s. What will be the liquid level after 600 s from the beginning of filtration?

The equation (6.34) is used for calculation of the constant k_1

$$k_1 = \frac{H_1}{t} \cdot \ln \frac{H_1}{H_2}$$

$$k_1 = \frac{4}{310} \cdot \ln \frac{4}{2.5} = 6.06 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

Then H_2 is calculated with the use of the same equation

$$H_2 = H_1 \exp\left(-\frac{k_1 t}{H_1}\right)$$

The height of a liquid column after 600 s is

$$H_2 = 4 \cdot \exp\left(-\frac{6.06 \cdot 10^{-3} \cdot 600}{4}\right) = 1.61 \text{ m}$$

EXERCISE 6.1

A suspension containing 48 kg of solid particles in each 1 m^3 of filtrate which viscosity coefficient is $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ is to be filtered in a filtration press at constant pressure 13.8 kPa. The specific resistance of the cake can be described by the equation

$$\alpha = 5.84 \cdot 10^7 \cdot (\Delta P)^{0.2}$$

Calculate the total area of filtration if 11 m^3 of filtrate is delivered during 2-hours filtration. The resistance of the filter medium and the amount of liquid held up in the filter cake can be neglected.

Answer: $A = 3.71 \text{ m}^2$.

EXERCISE 6.2

A rotary filter performs 2 revolutions per 60 s. The immersed part of the filter constitutes 1/5 of its area. It was measured that under the given filtration conditions 0.15 m³ of filtrate is delivered per 1 m² of the immersed area during 60 s. How large should the filter area be to obtain 0.2 m³ of filtrate per each revolution?

A n s w e r: $A = 13.3 \text{ m}^2$.

EXERCISE 6.3

Design a filter press (calculate the number of frames of dimensions 0.5 × 0.5 m) which should deliver 0.5 m³ of filtrate within 1 hour at constant pressure 0.2 MPa. During tests conducted at the same pressure on an experimental filter of area 2 m², 0.03 m³ of filtrate was produced within 120 s and 0.06 m³ of filtrate – within 360 s. What will the time of countercurrent washing of the cake be if 0.1 m³ of the washing liquid is used and its viscosity is the same as filtrate viscosity?

A n s w e r: 10 frames; $t_m = 4600 \text{ s}$.

EXERCISE 6.4

Tests conducted on a filter of area 0.1 m² at pressure 35 kPa gave the following results:

Filtrate volume [m ³]	0.00292	0.00780
Time [s]	146	888

Incompressibility of the filter cake can be assumed. In a filter press of area 10 m² and with the same filter medium 1 m³ of filtrate should be produced within 660 s. What pressure should the process be conducted at?

A n s w e r: 72.8 kPa.

EXERCISE 6.5

Calculate the twenty-four-hour capacity of a filter press of area 10 m² operating at constant pressure 0.2 MPa if 9.8 m³ of filtrate is produced in 1 cycle. Laboratory tests showed that 1 m³ of filtrate was produced by a filter of area 1 m² during 1 hour at pressure 0.1 MPa and during 0.5 hour at pressure 0.3 MPa. Resistance of the filter medium can be neglected. Time of discharge and cleaning of the filter is 1 hour. The cake is not washed.

A n s w e r: 145 m³/twenty-four-hours.

EXERCISE 6.6

The filtration constants were determined on the basis of the following results of laboratory tests on filtration of a suspension conducted on a laboratory filter of area 0.3 m²

ΔP [MPa]	K [m^6/s]	C [m^3]
0.18	$13 \cdot 10^{-5}$	0.00155
0.3	$16.75 \cdot 10^{-5}$	0.0012

Industrial filtration is conducted at pressure of 0.5 MPa on a filter of area 1.2 m^2 . The coefficient of viscosity of filtrate is $4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Calculate the volume of filtrate produced within 1.5 h and the amount of water of viscosity coefficient $1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ used for cocurrent washing conducted at the same pressure for 1.5 h.
 Answer: $V = 4.32 \text{ m}^3$; $V_m = 8.64 \text{ m}^3$

EXERCISE 6.7

Filtration was conducted on a periodic filter at constant positive gauge pressure 0.2 MPa. The temporary rate of filtration at the initial moment was $0.02 \text{ m}^3/1000 \text{ s}$. After 1000 s of filtration, 0.015 m^3 of filtrate was collected. Calculate what positive gauge pressure the process should be conducted at to obtain twice the amount of liquid within the same time 1000 s. Assume that the cake is incompressible.

Answer: 0.5 MPa.

EXERCISE 6.8

0.25 m^3 of filtrate was produced during constant-rate filtration what caused the positive gauge pressure to rise and reach the value $2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. How much filtrate will have been received up to the moment when the positive gauge pressure has reached the value $4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? It can be assumed that the cake is incompressible and the filter medium resistance is negligible.

Answer: 0.4 m^3 .

EXERCISE 6.9

0.1 m^3 of filtrate was obtained during filtration at constant pressure $\Delta P = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ conducted for 2280 s. The coefficient of compressibility of the cake equals 0.4. The resistance of the filter medium can be neglected. If filtration in this filter is conducted at the constant rate $60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, what pressure will be reached after 0.1 m^3 of filtrate has been collected?

Answer: $21.4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

EXERCISE 6.10

Discharge and cleaning of a temporary filter takes 2000 s. During tests on filtration at constant pressure $\Delta P = 9.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, 6 m^3 of filtrate was received within 2000 s. Compare the maximum capacity of filtration carried out at constant pressure

$3.5 \cdot 10^5$ Pa with the maximum capacity of two-stage filtration during which the first stage is conducted at constant rate $0.005 \text{ m}^3/\text{s}$ and the second stage – at constant pressure $\Delta P = 3.5 \cdot 10^5$ Pa. Washing is performed countercurrently with the use of a liquid of viscosity similar to that of filtrate. The amount of the washing liquid is 0.3 of the filtrate volume. The filter medium resistance can be neglected.

A n s w e r: isobaric filtration $1.18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$,
two-stage filtration $1.14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

7. POLISH TEXTS

7.1. PRZEPŁYW PŁYNÓW PRZEZ PRZEWODY

7.1.1. Rodzaje ruchu płynów

Przepływ płynów przez przewód może być:

- laminarny: profil prędkości płynu jest wówczas paraboliczny, a średnią prędkość przepływu u można obliczyć z zależności (1.1),
- burzliwy: profil prędkości płynu jest wówczas spłaszczony, a średnia wartość prędkości u znajduje się w przedziale $(0,8 \div 0,9) \cdot u_{\max}$; do obliczeń wykorzystuje się zależność (1.2).

Maksymalna prędkość u_{\max} występuje w osi przewodu.

Kryterium rodzaju przepływu jest bezwymiarowa liczba Reynoldsa Re , będąca miarą stosunku siły bezwładności do siły lepkości działających w płynie, definiowana zależnością (1.3), przy czym: u – średnia prędkość przepływu płynu, m/s, d_e – średnica ekwiwalentna przewodu, m, ρ – gęstość płynu, kg/m³, μ – współczynnik lepkości płynu, kg/(m·s).

Przepływ laminarny występuje wtedy, gdy liczba Reynoldsa jest mniejsza od wartości krytycznej, wynoszącej około 2100.

Przepływ burzliwy występuje wtedy, gdy liczba Reynoldsa ma wartość powyżej 10 000. Przy wartościach Re w zakresie $2100 < Re < 10\ 000$ istnieje tzw. przepływ częściowo burzliwy (przejściowy).

Dla przewodów o przekroju kołowym jest $d_e = d$; dla przewodów o innych kształtach średnicę hydrauliczną (ekwiwalentną) oblicza się z zależności (1.4), w której: S – pole przekroju poprzecznego przewodu (strumienia płynu), m², O – obwód przewodu omywany strumieniem płynu, m.

Rozróżnia się przepływy izotermiczne, gdy temperatury ścianki przewodu i strumienia nie różnią się, i nieizotermiczne, gdy w strumieniu występuje gradient temperatury powodujący zmienność lepkości płynu w przekroju poprzecznym, przez co następuje deformacja profilu (rozkładu) prędkości.

W niniejszym rozdziale będzie rozważany przepływ ustalony, tj. taki, w którym prędkość przepływu jest niezależna od czasu.

7.1.2. Natężenie przepływu

Jeżeli przepływ jest ustalony i w czasie t przepływa masa płynu m , to masowe natężenie przepływu \dot{m} jest określone zależnością (1.5). Objętościowe natężenie przepływu zdefiniowane jest zależnością (1.6), w której: V – objętość płynu przepływająca w czasie t , m^3 , \dot{V} – objętościowe natężenie przepływu, m^3/s .

Prędkość średnia jest ilorazem objętościowego natężenia przepływu i pola powierzchni przekroju poprzecznego przewodu zgodnie ze wzorem (1.7). W obliczeniach stosuje się także prędkość masową przepływu g_m , określoną wzorem (1.8).

Często przy obliczaniu średnicy przewodu należy przyjąć wartości średniej prędkości przepływu płynu. Zalecane są następujące wartości:

- dla cieczy do 2 m/s,
- dla gazów do 30 m/s,
- dla pary nasyconej od 15 do 40 m/s,
- dla pary przegrzanej do 50 m/s.

Stosując zasadę zachowania ilości substancji do przepływającego płynu w ruchu ustalonym, otrzymuje się równanie ciągłości: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dots = \text{const}$. Stąd dla dwóch rozpatrywanych przekrojów przewodu przy $\rho = \text{const}$ obowiązuje zależność (1.9). A więc dla przekrojów kołowych słuszną jest zależność (1.10).

7.1.3. Równanie Bernoulliego

Zgodnie z równaniem Bernoulliego dla ustalonego ruchu cieczy doskonałej, dla dwóch dowolnie wybranych przekrojów układu, przez który odbywa się przepływ, suma energii kinetycznej, energii ciśnienia i energii położenia jest wielkością stałą. Najczęściej równanie Bernoulliego zapisuje się w postaci (1.11), gdzie: $u^2/(2g)$ – wysokość odpowiadająca ciśnieniu dynamicznemu, m, $p/(\rho g)$ – wysokość odpowiadająca ciśnieniu statycznemu (piezometryczna), m, z – wysokość odniesienia (geometryczna), m.

Dla płynów rzeczywistych równanie Bernoulliego przyjmuje postać (1.12), gdzie Δh_f – wysokość odpowiadająca stracie ciśnienia spowodowanej oporami przepływu pomiędzy przekrojami 1 i 2, m.

7.1.4. Opory przepływu

Opory przepływu, wyrażające stratę ciśnienia płynu przy przepływie przez prosty przewód o długości L i niezmienniej średnicy d_e , oblicza się z zależności (1.13), gdzie λ – współczynnik oporu zależny od liczby Reynoldsa i szorstkości przewodu.

Dla ruchu laminarnego współczynnik oporu λ zależy tylko od liczby Reynoldsa, zgodnie z zależnością (1.14). Dla poszczególnych kształtów przekroju poprzecznego przewodów stała a wynosi: dla koła $a = 64$, dla pierścienia $a = 95$, dla kwadratu $a = 57$.

Podstawienie wyrażenia (1.14) dla przekroju kołowego do wzoru (1.13) prowadzi do równania Poiseuille'a (1.15), które można wyprowadzić teoretycznie.

Do obliczenia współczynnika oporu dla przepływu burzliwego w rurach gładkich można m.in. stosować empiryczną zależność Blasiusa (1.16). Ta zależność jest słuszna w zakresie $3000 < Re < 100\ 000$.

Przy przepływie burzliwym w rurach szorstkich współczynniki oporu są znacznie większe niż w rurach gładkich i zależą ponadto od szorstkości względnej przewodu ϵ_s , zdefiniowanej wzorem (1.17), gdzie e – szorstkość bezwzględna (średnia wysokość nierówności).

Wartości szorstkości bezwzględnej wynoszą: dla rur żeliwnych $0,3 \div 1,5$ mm, dla rur z materiałów ceramicznych $0,8 \div 1$ mm, dla rur stalowych $0,1 \div 0,2$ mm (rury nowe) i $0,3 \div 0,9$ mm (rury skorodowane). Jeżeli dla ruchu burzliwego słuszna jest nierówność (1.18), to współczynnik oporu praktycznie nie zależy od liczby Reynoldsa i może być obliczony ze wzoru (1.19). Jeżeli natomiast słuszna jest nierówność (1.20), to rurę uznaje się za gładką i można korzystać ze wzoru (1.16).

Współczynnik oporu λ' dla przepływu nieizotermicznego może być obliczony z zależności (1.21), gdzie: μ – współczynnik lepkości w średniej temperaturze strumienia, μ_s – współczynnik lepkości w temperaturze ścianki przewodu, λ – współczynnik oporu dla przepływu izotermicznego w średniej temperaturze strumienia. Dla ruchu laminarnego stałe w równaniu (1.21) wynoszą: $b = 1,1$, $n = 0,25$, a dla burzliwego: $b = 1,0$, $n = 0,14$.

Stratę ciśnienia, związaną z pokonywaniem oporów miejscowych (lokalnych) przy przepływie strumienia płynu przez profilowane części przewodu (kolana, rozgałęzienia, dyfuzory, zwężki, urządzenia zamykające itp.), można wyrazić wzorem (1.22), gdzie ζ – współczynnik oporu miejscowego. Przykładowe wartości współczynników oporu miejscowego przedstawiono w tabeli 1.1.

Tabela 1.1

Rodzaj oporu miejscowego	ζ
Kurek (przy pełnym otwarciu)	0,05
Zawór normalny (przy pełnym otwarciu)	3÷4
Zasuwa (przy pełnym otwarciu)	0,05
Włot do rury z ostrymi krawędziami	0,5
Włot z przewodu do zbiornika	1,0

Stratę ciśnienia na pokonanie oporów miejscowych wyraża się też za pomocą tzw. długości zastępczej L_e . Jest to długość prostego odcinka rurociągu o średnicy d_e , na której występuje taka sama strata ciśnienia jak na danym oporze miejscowym. Zależność pomiędzy współczynnikiem oporu miejscowego i długością zastępczą jest dana wzorem (1.23).

Miarą oporu miejscowego jest w tym przypadku współczynnik n , którego wartości dla wybranych elementów armatury przedstawiono w tabeli 1.2.

Tabela 1.2

Rodzaj oporu miejscowego	n
Zasuwa otwarta całkowicie	7
Zasuwa otwarta do połowy	190
Kolano 45°	15
Kolano 90°	31
Trójnik znormalizowany	65

Sumaryczny spadek ciśnienia na rurociągu i na oporach miejscowych należy obliczać według wzoru (1.24) lub (1.25).

7.1.5. Pomiar natężenia przepływu płynu

7.1.5.1. Rurki spiętrzające

Rurki spiętrzające (Pitota i Prandtla) służą do pomiaru lokalnej prędkości przepływu płynu. Zasadę ich działania ilustruje rys. 1.1. Zastosowanie równania Bernoulliego prowadzi do zależności (1.26).

Gdy rurkę spiętrzającą umieści się w osi przewodu, to pomiar dotyczy prędkości maksymalnej. W celu wyznaczenia objętościowego natężenia przepływu należy prędkość maksymalną przeliczyć na średnią za pomocą zależności (1.1) lub (1.2), a następnie skorzystać ze wzoru (1.7).

7.1.5.2. Zwężki

Zwężki pomiarowe służą do pomiaru natężenia przepływu płynu (rys. 1.2). Stosując równanie Bernoulliego oraz równanie ciągłości strugi, otrzymuje się wzór (1.27), gdzie α jest współczynnikiem przepływu, określonym zależnością (1.28), przy czym wielkość μ_2 jest współczynnikiem przewężenia strugi (1.29). Wielkość S_2 oznacza pole przekroju strumienia w miejscu jego największego przewężenia. Stopień rozwarcia zwężki (moduł) jest definiowany wzorem (1.30). Jest to więc sto-

sunek pola powierzchni przekroju zwężki S_0 do pola powierzchni przekroju rury S_1 . Wielkości geometryczne D , d_0 i d_2 zostały objaśnione na rys. 1.2.

Współczynnik ekspansji ε dla cieczy jest równy jedności, zaś dla gazów zależy od modułu zwężki i spadku ciśnienia na zwężce.

7.1.5.3. Rotametry

Zasadniczą częścią rotametry jest rura szklana, rozszerzająca się w kierunku przepływu (rys. 1.3). Wewnątrz rury znajduje się pływak. Różnica ciśnień, powstająca przy przepływie płynu przez szczelinę między pływakiem a ścianą rury, równoważy ciężar pływaka i utrzymuje go na wysokości określonej dla danego natężenia przepływu płynu. Zależność natężenia przepływu \dot{V} od wielkości pola powierzchni szczeliny S_2 można przedstawić równaniem (1.31), gdzie: α – liczba przepływu, V_{pl} – objętość pływaka, m^3 , ρ_{pl} – gęstość pływaka, kg/m^3 , ρ – gęstość płynu, kg/m^3 , S_{pl} – pole przekroju pływaka, m^2 , S_2 – pole przekroju pierścieniowego określone przez położenie pływaka, m^2 .

Przeliczenie wskazań rotametry dla płynu o innej gęstości niż płyn wzorcowy wykonuje się zgodnie z zależnością (1.32). Symbole z indeksem 0 odnoszą się do warunków wzorcowych. Dla pływaków typu kołnierzewego można przyjąć, że $\alpha/\alpha_0 = 1$. Dla rotametrów do pomiaru natężenia przepływu gazów, gdy gęstość materiału pływaka jest wielokrotnie większa od gęstości gazu, wzór (1.32) upraszcza się do postaci (1.33).

PRZYKŁAD 1.1

Poziomym gładkim przewodem o przekroju:

- kołowym o średnicy wewnętrznej $d = 0,032$ m,
- kwadratowym o boku (wewnątrz przewodu) $a = 0,30$ m,
- prostokątnym o bokach (wewnątrz przewodu) $a = 0,02$ m, $b = 0,03$ m,
- pierścieniowym o następujących wymiarach: średnica wewnętrzna rury zewnętrznej $D_w = 0,100$ m, średnica zewnętrzna rury wewnętrznej $d_z = 0,076$ m, przepływa ciecz z prędkością średnią $0,7$ m/s. Gęstość cieczy wynosi $\rho = 800$ kg/m^3 , zaś współczynnik lepkości $\mu = 0,60 \cdot 10^{-3}$ $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$.

Obliczyć dla każdego przypadku (a, b, c, d) masowe i objętościowe natężenie przepływu oraz prędkość masową przepływu. Określić charakter przepływu. Jaka musiałaby być graniczna średnica zastępcza przewodu, aby przepływ był laminarny przy niezmięnionej średniej prędkości płynu?

PRZYKŁAD 1.2

Przewodem przedstawionym na rys. 1.4, o średnicy wewnętrznej (w przekroju A) $d_A = 112$ mm, biegnącym pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu, przepływa woda o temperaturze 20°C . Od pewnego miejsca przewód zwęża się do średnicy wewnętrznej

$d_B = 40$ mm (w przekroju B). Ciśnienie statyczne wody przed przewężeniem wynosi $p_A = 1,5 \cdot 10^5$ Pa.

Obliczyć:

- 1) masowe i objętościowe natężenie przepływu, jeżeli woda przepływa z prędkością stanowiącą 90% prędkości, przy której występuje zjawisko kawitacji (patrz rozdział 3.4),
- 2) ciśnienie w przekroju B przewodu przy prędkości wody obliczonej powyżej,
- 3) prędkość, jaką musiałaby mieć woda w przekroju A, aby liczba Reynoldsa osiągnęła wartość 10 000.

Opory przepływu zaniedbać.

PRZYKŁAD 1.3

Przewodem o średnicy zewnętrznej 40 mm, grubości 4 mm i długości 12 m przepływa woda o temperaturze 20°C z prędkością 1,70 m/s. Obliczyć opory przepływu w następujących przypadkach:

- a) przewód jest gładki,
- b) przewód jest szorstki, a jego bezwzględna szorstkość wynosi $e = 0,3$ mm,
- c) przewód (b) jest ogrzewany, przy czym temperatura ścianki wynosi 45°C.

PRZYKŁAD 1.4

Obliczyć stratę ciśnienia przy przepływie 2,5 kg/s alkoholu metylowego przez poziomą rurę o długości 20 m, średnicy wewnętrznej 70 mm i szorstkości bezwzględnej 0,8 mm. Przyjąć $\rho = 791$ kg/m³, $\mu = 0,60 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s). O ile wzrosną opory przepływu, jeżeli na rurociągu zamontuje się dwa kurki probiercze i zawór normalny? Jakiej długości odcinek prosty tego rurociągu stawia ten sam opór przepływu co zamontowana armatura?

PRZYKŁAD 1.5

Rurkę spiętrzącą (rys. 1.1), połączoną z manometrem różnicowym napełnionym rtęcią ($\rho_m = 13600$ kg/m³), umieszczono w przewodzie o średnicy wewnętrznej 120 mm tak, że końcówka przyrządu znajduje się w osi przewodu. Różnica poziomów rtęci wynosi $\Delta h_m = 35$ mm. Obliczyć średnią prędkość wody o temperaturze 20°C w przewodzie oraz masową prędkość przepływu. Jakie byłoby wskazanie manometru połączonego z rurką spiętrzącą dla średniej prędkości wody?

PRZYKŁAD 1.6

Rotametr do pomiaru natężenia przepływu alkoholu etylowego o temperaturze 20°C ($\rho = 790$ kg/m³), zainstalowany na stanowisku badawczym, przy położeniu pływaką na wysokości $H = 0,30$ m względem działki zerowej, wskazuje natężenie przepływu 3,95 kg/s. Określić maksymalny możliwy zakres pomiarowy rotametru

i wyznaczyć zależność pomiędzy położeniem pływaka a objętościowym natężeniem przepływu. Jakie będzie objętościowe natężenie przepływu alkoholu w temperaturze 40°C ($\rho = 772 \text{ kg/m}^3$) przy położeniu pływaka na wysokości $H = 0,30 \text{ m}$? Założyć stałość liczby przepływu α .

Parametry charakteryzujące rotometr są następujące: średnica wewnętrzna odpowiadająca zerowemu poziomowi skali $D_0 = 0,03 \text{ m}$, kąt rozwarcia rury rotometru $\varphi = 20'$, długość skali rotometru $H_c = 0,5 \text{ m}$. Działki zaznaczono co $0,1 \text{ m}$. Pływak wykonany jest ze stali nierdzewnej o gęstości $\rho_{fl} = 8000 \text{ kg/m}^3$. Masa pływaka wynosi $m_{fl} = 0,24 \text{ kg}$, zaś jego średnica $D_{fl} = D_0$.

PRZYKŁAD 1.7

Przez rurociąg o wymiarach $76 \times 3 \text{ mm}$ (średnica zewnętrzna \times grubość ścianki) przepływa $1,1 \text{ kg/s}$ wody w temperaturze 20°C . Na rurociągu zamontowano zwężkę pomiarową (rys. 1.2) o średnicy $d_0 = 28 \text{ mm}$. Współczynnik przewężenia strugi wynosi $\mu_z = 0,615$. Obliczyć wskazanie manometru rtęciowego ($\rho_m = 13\,600 \text{ kg/m}^3$) podłączonego do zwężki. Jakiemu natężeniu przepływu odpowiada wychylenie manometru $\Delta h_m = 5 \text{ mm}$?

PRZYKŁAD 1.8

Poziomym rurociągiem o średnicy wewnętrznej 130 mm przepływa $0,017 \text{ m}^3/\text{s}$ wody o temperaturze 10°C . Na odcinku o długości 50 m strata ciśnienia zmierzona manometrem U-rurkowym wynosi 58 mm Hg . Obliczyć współczynnik oporu λ , przyjmując, że przepływ jest izotermiczny. Ile wynosi maksymalne objętościowe natężenie przepływu wody, przy którym przepływ jest jeszcze laminarny? Ile wynosi wtedy współczynnik oporu i strata ciśnienia?

PRZYKŁAD 1.9

Z otwartego zbiornika I (rys. 1.6), w którym utrzymywany jest stały poziom, odprowadzana jest za pomocą rury syfonowej woda o temperaturze 20°C do otwartego zbiornika II. Ciśnienie otoczenia wynosi $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1. Jaka musi być średnica rury syfonowej, aby objętościowe natężenie przepływu wynosiło $0,20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$?
2. Jakie jest ciśnienie w kolanie rury syfonowej (przekrój 2-2)?
3. Określić charakter przepływu w przewodzie rury syfonowej. Opory przepływu pominąć.

PRZYKŁAD 1.10

Obliczyć wysokość unoszenia wody oraz ciśnienie przy podstawie stożkowej dyszy fontanny (rys. 1.7). Objętościowe natężenie przepływu wody o temperaturze 20°C wynosi $0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Ciśnienie barometryczne wynosi $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Obliczenia wykonać dla $D = 0,04 \text{ m}$, $d = 0,01 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$. Opory przepływu pominąć.

ZADANIE 1.1

Obliczyć prędkość graniczną pomiędzy przepływem laminarnym a przejściowym w prostym, gładkim przewodzie o przekroju prostokątnym i wymiarach $a = 0,03$ m, $b = 0,02$ m, przez który przepływa ciecz o gęstości $\rho = 963$ kg/m³ i współczynniku lepkości $\mu = 35 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s).

Odpowiedź: $u = 3,18$ m/s.

ZADANIE 1.2

Hydraulicznie gładkim rurociągiem o średnicy wewnętrznej 0,30 m przepływa woda o temperaturze 20°C z prędkością 2,5 m/s. Obliczyć stratę ciśnienia powstałą na odcinku o długości 300 m.

Odpowiedź: $\Delta p_{fl} = 3,36 \cdot 10^5$ Pa.

ZADANIE 1.3

Przez rurociąg o średnicy wewnętrznej 50 mm przepływa pewna ciecz w ilości 7 m³/h. Jak zmieni się strata ciśnienia w przewodzie, jeżeli:

- natężenie przepływu wzrośnie dwukrotnie,
- zamontuje się przewód o średnicy dwukrotnie większej.

Przyjąć, że zmiana prędkości cieczy nie powoduje zmiany współczynnika oporu.

- Odpowiedź: a) straty ciśnienia wzrosną 4-krotnie,
b) straty ciśnienia zmniejszą się 2⁵ razy.

ZADANIE 1.4

Aparat typu „rura w rurze” (rys. 1.8) składa się z dwóch koncentrycznych rur. Wymiary rury zewnętrznej są następujące: średnica wewnętrzna 79 mm, grubość 5 mm. Rura wewnętrzna ma wymiary: średnica wewnętrzna 44,5 mm, grubość 3,5 mm. Przewody są hydraulicznie gładkie. Przestrzenią pierścieniową pomiędzy rurami przepływa toluen w ilości 1900 kg/h ($\rho = 870$ kg/m³, $\mu = 0,448 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s)).

Rurą wewnętrzną płynie woda o temperaturze 20°C z prędkością 0,815 m/s. Obliczyć:
1) straty ciśnienia dla toluenu i wody przypadające na metr długości przewodu,
2) wskazania wodnego manometru różnicowego (rys. 1.8), jeżeli kurki impulsowe oddalone są od siebie o 5 metrów.

- Odpowiedź: 1) $\Delta p_{fl}/L = 170,9$ Pa/m – dla wody,
 $\Delta p_{fl}/L = 22,7$ Pa/m – dla toluenu,
2) $\Delta h_m = 0,089$ m.

ZADANIE 1.5

Przez hydraulicznie gładki przewód o średnicy 0,1 m i długości 140 m przepływa ciecz ($\rho = 905$ kg/m³, $\mu = 7,24 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s)) z objętościowym natężeniem przepływu 0,01 m³/s. Opory przepływu w przeliczeniu na wysokość słupa cieczy wynoszą

3,35 m. Obliczyć wartość współczynnika oporu λ i porównać z wartością uzyskaną ze wzoru (1.16).

Odpowiedź: $\lambda = 0,0290$ (z pomiaru), $\lambda = 0,0282$ (ze wzoru (1.16)).

ZADANIE 1.6

Obliczyć minimalną średnicę przewodu o długości 200 m, którym przepływa woda o temperaturze 20°C z prędkością 1,5 m/s. Dopuszczalna wartość oporów przepływu wynosi 10 m słupa wody. Założyć, że przewód jest hydraulicznie gładki.

Wskazówka: Zastosować metodę „prób i błędów”, zakładając wstępnie wartość współczynnika oporu $\lambda = 0,02$.

Odpowiedź: $d = 0,045$ m.

ZADANIE 1.7

Prostoliniowym, hydraulicznie gładkim przewodem o średnicy w przekroju A–A 50 mm (rys. 1.4) przepływa 2,16 kg/s wody o temperaturze 20°C . Przewód biegnie pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Od pewnego miejsca zwęża się do średnicy w przekroju B–B wynoszącej 30 mm. Ciśnienie w przekroju A–A wynosi $p_A = 2,45 \cdot 10^5$ Pa. Odległość między przekrojem A–A i B–B wynosi 8 m. Opory przepływu pominąć. Obliczyć:

- 1) ciśnienie w przekroju B–B przewodu,
- 2) prędkość, jaką musiałyby mieć woda w przekroju A–A, aby liczba Reynoldsa osiągnęła wartość 2100.

Odpowiedź: $p_B = 2,017 \cdot 10^5$ Pa, $u = 0,042$ m/s.

ZADANIE 1.8

Rurociągiem o średnicy wewnętrznej 0,5 m i długości 3 km ma być doprowadzona woda o temperaturze 10°C w ilości 1200 m³/h. Szorstkość bezwzględna rurociągu wynosi $e = 0,6$ mm. Jakie ciśnienie musi wytworzyć pompa, jeżeli w punkcie odbioru wody ciśnienie ma wynosić $8 \cdot 10^5$ Pa?

Odpowiedź: $9,8 \cdot 10^5$ Pa.

ZADANIE 1.9

Poziomym, prostym i hydraulicznie gładkim przewodem przepływa powietrze o temperaturze 40°C . Średnica wewnętrzna przewodu wynosi 147 mm. W celu wyznaczenia natężenia przepływu powietrza zamontowano w osi przewodu rurkę spiętrzącą (rys. 1.1), połączoną z wodnym manometrem różnicowym. Manometr wskazuje wychylenie 13 mm H₂O. Obliczyć objętościowe natężenie przepływu powietrza, jeżeli ciśnienie w rurociągu jest w przybliżeniu równe ciśnieniu atmosferycznemu.

Odpowiedź: $\dot{V} = 0,211$ m³/s.

ZADANIE 1.10

Obliczyć prędkość i opory przepływu w wężownicy, przez którą przepływa woda o temperaturze 30°C w ilości 1,135 kg/s. Wężownica wykonana jest z rury stalowej o średnicy zewnętrznej 43 mm i grubości 2,5 mm. Szorstkość bezwzględna powierzchni rury wynosi $e = 0,2$ mm. Średnica zwoju wężownicy wynosi 1 m, wężownica składa się z 10 zwojów.

Wskazówka: Współczynnik oporu λ_w w wężownicy oblicza się ze wzoru

$$\lambda_w = \lambda_{\text{straight tube}} \left(1 + 3,54 \frac{d}{D} \right)$$

gdzie:

d – średnica rury, m,

D – średnica zwojów, m,

Odpowiedź: $u = 1$ m/s, $\Delta p_{fl} = 0,144 \cdot 10^5$ Pa.

ZADANIE 1.11

Powietrze o temperaturze 50°C przepływa przez przewód hydraulicznie gładki o średnicy wewnętrznej 90 mm. Do wyznaczenia natężenia przepływu zamontowano zwężkę pomiarową (rys. 1.2) o średnicy przewężenia $d_0 = 49,3$ mm. Wodny manometr różnicowy przyłączony do zwężki wskazuje wychylenie 400 mm. Obliczyć średnią prędkość przepływu powietrza przy założeniu, że $\varepsilon \cong 1$ oraz $\alpha = 0,64$.

Odpowiedź: $u = 16,3$ m/s.

7.2. WYPIŹYW CIECZY ZE ZBIORNIKÓW

7.2.1. PRĘDKOŚĆ WYPIŹYU

Dla cieczy rzeczywistej wypływającej ze zbiornika można zapisać równanie Bernoulliego (2.1), gdzie indeks 1 dotyczy powierzchni cieczy, a indeks 2 – otworu wypływowego (rys. 2.1).

Uwzględniając równanie ciągłości strugi $Su_1 = su_2$, gdzie S oznacza pole powierzchni na poziomie 1, natomiast s – pole przekroju wypływającego strumienia cieczy, uzyskuje się zależność (2.2). Równanie (2.2) uwzględnia tylko opory lokalne związane z wypływem, wyrażone przez Δp_f . Wobec małej prędkości u_1 w porównaniu z u_2 , nie uwzględnia się oporu tarcia cieczy przepływającej w zbiorniku.

Ponieważ s jest na ogół znacznie mniejsze od S , najczęściej przyjmuje się, że $1 - (s/S)^2 \cong 1$. Gdy ciśnienie na powierzchni cieczy jest takie samo jak w otoczeniu, do którego następuje wypływ (np. ze zbiornika otwartego), wówczas $p_1 = p_2$.

Przy powyższych założeniach i bez uwzględniania oporów równanie (2.2) przybiera postać (2.3), która dla cieczy idealnej jest taka sama jak równania Torricellego dla swobodnego spadku ciał z wysokości h .

Rzeczywistą prędkość wypływu można obliczyć, mnożąc prędkość wyrażoną równaniem (2.2) przez współczynnik prędkości uwzględniający opór lokalny wypływu określony równaniem (2.4), gdzie: ζ – współczynnik oporu przepływu przez otwór (dla małego otworu o ostrych krawędziach i dużych liczb Reynoldsa $\zeta \cong 0,06$).

Pole przekroju poprzecznego strumienia wypływającego jest zwykle mniejsze niż pole przekroju otworu wypływowego, a stosunek pól tych przekrojów nazywa się współczynnikiem zwężenia (zależność (2.5)).

Tak więc natężenie objętościowe wypływającej cieczy z otwartego zbiornika może być zapisane w postaci zależności (2.6) lub (2.7), gdzie wielkość $\psi = \alpha \cdot \varphi$ nazywa się współczynnikiem wypływu. Zależność powyższych współczynników od liczby Reynoldsa, dla wypływu przez mały, okrągły otwór o ostrych krawędziach, przedstawiono na rys. 2.2. Wartości współczynników dla $Re > 10^5$ można przyjąć stałe i równe: $\varphi \cong 0,97$, $\alpha \cong 0,62$, $\psi \cong 0,60$.

Jeżeli na drodze wypływu znajdują się dodatkowe opory lokalne, należy uwzględnić je w równaniu (2.4), w miejsce ζ wstawiając $\Sigma\zeta$. W przybliżeniu można też współczynnik ψ odczytany z wykresu 2.2 podzielić przez $\sqrt{1 + \Sigma\zeta}$. W obliczeniach na ogół nie uwzględnia się wpływu zmian prędkości wypływu na współczynniki φ , α i ψ , przyjmując stałe wartości jak dla prędkości początkowej.

Współczynnik zwężenia α dla końcówek wypływowych o ostrych krawędziach i dużych liczb Reynoldsa można obliczyć z równania (2.8). Dla końcówek o łagodnych krawędziach współczynnik $\alpha \cong 1$.

Natężenie objętościowe wypływu przez prostokątny przelew z cienką ścianką (rys. 2.3) oblicza się z równania Poleniego (2.9), przy czym $0,60 < \varphi < 0,65$.

7.2.2. Czas wypływu cieczy

Ponieważ prędkość wypływu zmienia się w czasie wraz z wysokością słupa cieczy, czas wypływu oblicza się, rozwiązując równanie różniczkowe (2.10). Podstawiając do wzoru (2.10) zależność (2.7) i całkując, otrzymuje się zależność (2.11).

Jeśli z geometrii wynika, że wielkość S jest stała wzdłuż wysokości, można ją wyłączyć przed całkę. W przeciwnym przypadku należy znaleźć zależność S od h i wykonać całkowanie. We wzorze (2.11) relacja pomiędzy poziomami cieczy jest następująca: $H_1 > H_2$, bowiem poziom cieczy w zbiorniku obniża się.

Gdy do zbiornika dopływa ciecz ze stałym natężeniem \dot{V}_{inlet} i jednocześnie następuje wypływ grawitacyjny, to równanie (2.10) dla tego przypadku przybierze formę (2.12) lub po podstawieniu równania (2.7) i scałkowaniu – postać (2.13). Jeżeli

mianownik tego wyrażenia jest dodatni dla każdego h w przedziale (H_1, H_2) , gdzie $H_2 > H_1$, poziom cieczy w zbiorniku będzie się podnosił od H_1 do H_2 w czasie t .

7.2.3. Wyrównanie poziomów w naczyniach połączonych

Do obliczenia czasu wyrównania poziomów w naczyniach połączonych o powierzchniach przekroju S_1 i S_2 (rys. 2.4) można przeprowadzić następujące rozumowanie: przepływ odbywa się pod wpływem różnicy poziomów h ; w czasie Δt przepływa z lewego do prawego naczynia ΔV cieczy, obniży to poziom w lewym naczyniu o $\Delta V/S_1$, a w prawym podwyższy o $\Delta V/S_2$. Łącznie różnica poziomów zmieni się o wartość h określoną wzorem (2.14). Przechodząc do granicy, można napisać zależność (2.15). Podobnie jak w równaniu (2.10) zapisuje się zależność na dV w postaci (2.16).

7.2.4. Naczynie Mariotte'a

Do grawitacyjnego wypływu cieczy ze stałym natężeniem objętościowym stosuje się tzw. naczynie Mariotte'a, które stanowi zbiornik zamknięty z rurką połączoną z atmosferą, zanurzoną do pewnej głębokości (rys. 2.5). Przez otwór w dnie wypływa ciecz ze stałą prędkością $u = \varphi\sqrt{2gh}$, gdzie h nie zależy od położenia powierzchni cieczy, a tylko od głębokości zanurzenia rurki. W miejsce cieczy, która wypływa ze zbiornika, dopływa do niego powietrze, wskutek czego na poziomie h panuje ciśnienie równe atmosferycznemu.

7.2.5. Rura wypływowa

Wypływ cieczy ze zbiornika przez rurę wypływową następuje z prędkością taką, jaka odpowiada słupowi cieczy o wysokości h (rys. 2.6a). Taką samą prędkość wypływu ($u = \varphi\sqrt{2gh}$) osiągnęłaby ciecz, wypływając ze zbiornika z otworem w dnie, w którym słup cieczy miałby wysokość h (rys. 2.6b). Różnicę w rozkładzie ciśnień na poszczególnych poziomach w obu tych przypadkach ilustrują wykresy na rys. 2.6, przy czym Δp oznacza nadciśnienie w stosunku do ciśnienia atmosferycznego.

PRZYKŁAD 2.1

Do zbiornika podzielonego na dwie sekcje przegrodą z otworem o średnicy $d = 100$ mm, z ostrymi brzegami, wpływa woda w ilości $\dot{V} = 80$ dm³/s. Z każdej sekcji woda wypływa przez otwory w dnie, przy czym średnice tych otworów są takie same jak średnica otworu w przegrodzie. Współczynniki wypływu wynoszą $\psi_1 = 0,6$ dla otworu w przegrodzie i $\psi_2 = 0,82$ dla otworów w dnie. Obliczyć natę-

żenie wypływu przez każdy otwór w stanie ustalonym, zakładając, że otwór w przegrodzie jest zatopiony wodą (rys. 2.7).

PRZYKŁAD 2.2

Ciecz o gęstości $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$ spływa grawitacyjnie rurą o średnicy $d = 50 \text{ mm}$ z odkrytego zbiornika o średnicy $D = 0,5 \text{ m}$, usytuowanego $H_0 = 8 \text{ m}$ powyżej poziomu wypływu, do zbiornika, w którym ciśnienie wynosi $p = 0,15 \text{ MPa}$. Współczynnik wypływu przyjmuje się stały i równy $\psi = 0,62$. Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$. Jakie jest masowe natężenie przepływu cieczy do zbiornika ciśnieniowego przy utrzymywanym stałym poziomie $H_1 = 1 \text{ m}$? Po jakim czasie od zatrzymania dopływu cieczy do górnego zbiornika zbiornik ten opróżni się? Kiedy ustanie wypływ cieczy? Na jakiej wysokości zatrzyma się ciecz w rurze?

PRZYKŁAD 2.3

Obliczyć czas napełniania zbiornika o podstawie kwadratowej o boku $a = 2 \text{ m}$ i wysokości $h = 1,6 \text{ m}$ cieczą dopływającą przez przewód o długości $L = 7 \text{ m}$ i średnicy $d = 50 \text{ mm}$ ze zbiornika o stałym poziomie, usytuowanym $H = 5 \text{ m}$ ponad wypływem z przewodu. Króciec wypływowy ma tę samą średnicę co przewód i jest umieszczony w połowie wysokości zbiornika. Współczynnik tarcia w przewodzie przyjmuje się stały i równy $\lambda = 0,02$, współczynnik zwężenia $\alpha_1 = 0,65$; opory lokalne pomija się. Po zatopieniu otworu współczynnik zwężenia wynosi $\alpha_2 = 0,8$.

PRZYKŁAD 2.4

W wiadrze (rys. 2.10) o wymiarach $D_1 = 0,3 \text{ m}$, $d = 0,2 \text{ m}$, $H_1 = 0,35 \text{ m}$ znajduje się otwór w dnie o średnicy $\delta = 1 \text{ cm}$, przez który następuje wypływ charakteryzujący się współczynnikiem $\psi = 0,6$. Wiadro początkowo było całkowicie napełnione wodą. Po jakim czasie wypłynie połowa objętości wody?

PRZYKŁAD 2.5

Cylindryczny zbiornik (rys. 2.12) napełniony cieczą opróżnia się przez rurę wypływową o średnicy $d = 15 \text{ mm}$ i przez otwór w ścianie o takiej samej średnicy. Współczynnik wypływu dla każdego otworu przyjmuje się $\psi = 0,62$. Obliczyć czas opróżniania zbiornika. Dane: $D = 1 \text{ m}$, $H = 2 \text{ m}$, $Z = 1 \text{ m}$, $L = 3 \text{ m}$.

PRZYKŁAD 2.6

Obliczyć czas opróżniania cylindrycznego zbiornika zamkniętego (rys. 2.13) o wymiarach $D = 1 \text{ m}$, $H = 2 \text{ m}$, w którego bocznej ścianie w połowie wysokości umieszczona jest rurka połączona z otoczeniem. Ciecz wypływa przez otwór w dnie o powierzchni przekroju $s = 0,006 \text{ m}^2$. Współczynnik wypływu przyjmuje się $\psi = 0,62$.

PRZYKŁAD 2.7

Porównać, ile razy czas opróżniania naczynia półkulistego, położonego częścią kulistą ku górze (rys. 2.14a), jest większy od czasu opróżniania takiego samego naczynia położonego częścią kulistą ku dołowi (rys. 2.14b). W obu przypadkach wypływ następuje przez jednakowy otwór, a na powierzchnię cieczy działa ciśnienie atmosferyczne.

PRZYKŁAD 2.8

Obliczyć czas opróżniania cysterny w kształcie cylindra poziomego o średnicy $D = 0,3$ m i długości $L = 0,5$ m przez otwór dolny o średnicy $d = 0,02$ m, jeżeli wiadomo, że w cysternie znajduje się $V = 20$ dm³ cieczy. Współczynnik wypływu $\psi = 0,62$.

PRZYKŁAD 2.9

Obliczyć czas wypływu wody o temperaturze 20°C ze zbiornika cylindrycznego ze szklaną rurą wypływową (rys. 2.17) o wymiarach: $D = 1$ m, $H = 2$ m, $L = 5$ m, $d = 0,01$ m. Do obliczeń przyjmując wzór Blasiusa i zaniedbać opory lokalne oraz czas wypływu z rury.

PRZYKŁAD 2.10

Obliczyć, po jakim czasie cała zawartość górnego zbiornika cylindrycznego o średnicy $D_1 = 1$ m w ilości $V = 100$ dm³ (rys. 2.18) przepłynie do dolnego zbiornika o średnicy $D_2 = 0,2$ m przez rurę wypływową o średnicy $d = 0,025$ m i długości $L = 6$ m. W chwili otwarcia zaworu poziom wody w dolnym zbiorniku sięga końca rury wypływowej. Współczynnik wypływu wynosi $\psi = 0,5$. Objętość rury w obliczeniach pominąć.

PRZYKŁAD 2.11

Zbiornik prostopadłościenny o długości $L = 3$ m, szerokości $B = 1$ m i wysokości $H = 1,5$ m ma w dnie otwór o średnicy $d = 50$ mm. Przyjmując współczynnik wypływu $\psi = 0,62$, obliczyć, po jakim czasie ustali się poziom cieczy w zbiorniku i na jakiej wysokości, jeśli do pustego początkowo zbiornika dopływa $\dot{V} = 6$ dm³/s wody?

PRZYKŁAD 2.12

Woda wypływa ze zbiornika (rys. 2.19) przez przelew o cienkiej, prostej ścianie. Przed przelewem znajduje się płyta perforowana o łącznej powierzchni otworów $S = 0,25$ m². Otwory te można uważać za niezależnie działające końcówki wypływowe o $\psi = 0,6$. Szerokość krawędzi przelewu $B = 0,8$ m, a współczynnik $\phi = 0,627$. Obliczyć natężenie przepływu wody, jeżeli wysokość poziomu przed płytą w stosunku do krawędzi przelewu wynosi $a = 0,4$ m. Ile wynosi wysokość h ?

ZADANIE 2.1

Prostopadłościenny zbiornik jest podzielony na dwie komory przegrodą, w której znajduje się okrągły otwór o średnicy $d_1 = 0,05$ m. W zewnętrznej ścianie jest drugi otwór, na tym samym poziomie co pierwszy, o średnicy $d_2 = 0,07$ m. Poziom cieczy w pierwszej komorze utrzymuje się stale na wysokości $z_1 = 1,5$ m (rys. 2.20). Określić poziom w drugiej komorze. Współczynnik wypływu przyjąć równy dla obu otworów.
Odpowiedź: $z_2 = 0,31$ m.

ZADANIE 2.2

Ze zbiornika o stałym poziomie 20 m w stosunku do dna (rys. 2.21) woda wypływa trzema rurami o następujących długościach i średnicach: $l_1 = 2,5$ m, $d_1 = 0,10$ m, $l_2 = 1,5$ m, $d_2 = 0,08$ m, $l_3 = 1,5$ m, $d_3 = 0,054$ m. Jakie jest objętościowe natężenie wypływu wody, jeżeli współczynnik zwężenia α wynosi 0,65, a współczynnik oporu przepływu jest stały i równy 0,03? Opory lokalne pominać.
Odpowiedź: $0,1574$ m³/s.

ZADANIE 2.3

Obliczyć, przyjmując współczynnik $\varphi = 1$, początkową prędkość wypływu cieczy ze zbiornika, w którym znajduje się warstwa wody ($\rho_w = 1000$ kg/m³) o wysokości 1 m i niemieszająca się z nią warstwa oleju ($\rho_o = 800$ kg/m³) również o wysokości 1 m. Porównać ten wynik z początkową prędkością wypływu przy napełnieniu zbiornika do wysokości 2 m samą wodą lub samym olejem.

Odpowiedź: dwie warstwy, $u_o = 5,94$ m/s, warstwa oleju lub wody, $u_o = 6,26$ m/s.

ZADANIE 2.4

Obliczyć czas opróżniania biurety laboratoryjnej (części kalibrowanej) o pojemności 100 cm³ i średnicy 15 mm, jeżeli otwór wylotowy ma średnicę 1,5 mm, odległość od działki oznaczającej 100 cm³ do wylotu wynosi 100 mm, współczynnik oporu lokalnego na zaworze wynosi 5, a współczynnik zwężenia 0,6. Pomija się opory tarcia.
Odpowiedź: 92,1 s.

ZADANIE 2.5

Obliczyć czas wypływu cieczy ze zbiornika prostopadłościennego o podstawie 2m × 1m i wysokości 4 m, napełnionego do połowy. Nad powierzchnią wody utrzymywane jest stałe ciśnienie 0,3 MPa. Wypływ następuje przez rurę wypływową umieszczoną w dnie zbiornika, której długość wynosi 3 m, a powierzchnia przekroju poprzecznego jest równa 0,005 m². Współczynnik wypływu wynosi $\psi = 0,62$, a sumaryczny współczynnik oporów lokalnych jest równy 2,5. Ciśnienie atmosferyczne wynosi 0,1 MPa.

Odpowiedź: 110 s.

ZADANIE 2.6

Zbiornik w kształcie stożka o średnicy podstawy 1 m i wysokości 2 m, skierowany wierzchołkiem w dół, był napełniony całkowicie wodą. Średnica otworu wypływowego wynosi 0,02 m. Przyjmując współczynnik wypływu równy 0,7, obliczyć, na jakiej wysokości będzie poziom wody w zbiorniku po dwóch minutach od chwili rozpoczęcia wypływu.

Odpowiedź: 1,77 m.

ZADANIE 2.7

Znaleźć czas napełniania naczynia cylindrycznego o średnicy 1,13 m do wysokości 3 m wodą napływającą grawitacyjnie ze zbiornika o stałym poziomie, położonego o 25 m powyżej poziomu naczynia (rys. 2.22) przez otwór w dnie o średnicy 5 cm. Współczynnik wypływu wynosi $\psi = 0,5$.

Odpowiedź: 142,8 s.

ZADANIE 2.8

Do pionowego zbiornika cylindrycznego o średnicy 1 m i wysokości 2 m, napełnionego do połowy wodą, wrzucono sześcián stalowy o boku 0,5 m. Zakładając, że sześcián nie przysłania otworu wypływowego o średnicy 0,01 m, znajdującego się w dnie zbiornika, i że współczynnik wypływu wynosi 0,62, obliczyć, ile wynosi czas opróżniania zbiornika z sześciánem i bez sześciánu.

Odpowiedź: z sześciánem 6201 s, bez sześciánu 7282 s.

ZADANIE 2.9

Mleko jest pakowane w tekturowe opakowania w kształcie czworosiánu foremnego. Zakładając, że wypełnia ono początkowo całą objętość opakowania, obliczyć, ile razy dłużej wypływa przez otwór w poziomo ustawionej podstawie (rys. 2.23a) w porównaniu z wypływem przez taki sam otwór w wierzchołku skierowanym ku dołowi (rys. 2.23b). W obu przypadkach na powierzchnię mleka działa ciśnienie atmosferyczne.

Odpowiedź: 8/3.

ZADANIE 2.10

Obliczyć czas całkowitego opróżnienia zamkniętego zbiornika kulistego o średnicy 2 m z rurą wypływową o długości 1 m i średnicy 0,04 m, w którym zanurzona jest rurka doprowadzająca powietrze z otoczenia na głębokość 1 m. Współczynnik wypływu wynosi $\psi = 0,4$.

Odpowiedź: 1410 s.

ZADANIE 2.11

Obliczyć czas całkowitego opróżnienia zbiornika zamkniętego o wymiarach podanych na rys. 2.24, napełnionego wodą. Wypływ następuje przez rurę o średnicy wewnętrznej 0,05 m, a sumaryczny współczynnik oporu na rurze wypływowej wynosi $\Sigma\zeta = 2$. W zbiorniku zanurzona jest rurka połączona z otoczeniem. Współczynnik wypływu należy znaleźć z rys. 2.2.

Odpowiedź: 2560 s.

ZADANIE 2.12

Do pionowego cylindrycznego zbiornika o średnicy 0,3 m i wysokości 0,5 m z otworem o średnicy 0,01 m, znajdującym się w dnie, dopływa stale $1 \text{ dm}^3/\text{s}$ wody. Zakładając współczynnik wypływu równy 0,6, obliczyć, po jakim czasie od początku dopływu woda zacznie przelewać się przez górną krawędź naczynia.

Odpowiedź: 39,2 s.

ZADANIE 2.13

Znaleźć zależność ogólną na czas wypływu cieczy o gęstości ρ i współczynniku lepkości μ ze zbiornika (lecz nie z rury), jak na rys. 2.25, jeżeli płynie ona w rurze wypływowej ruchem laminarnym i zaniedba się opory lokalne oraz uzna, że $L/d \gg 1$.

Odpowiedź: $t = \frac{32\mu LD^2}{\rho g d^4} \ln \frac{H+L}{L}$.

ZADANIE 2.14

Dwa zbiorniki cylindryczne połączone są poziomą rurą umieszczoną na wysokości 1,2 m od dna. Obliczyć, po upływie jakiego czasu od otwarcia zaworu, umieszczonego na rurze łączącej oba zbiorniki, przepłynie z pierwszego zbiornika do drugiego $7,5 \text{ m}^3$ wody. Powierzchnia pierwszego zbiornika wynosi 5 m^2 , a drugiego $3,5 \text{ m}^2$. Pole przekroju poprzecznego rury łączącej wynosi 80 cm^2 . Początkowo poziom wody w pierwszym zbiorniku wynosi 3,8 m, a drugi zbiornik jest pusty. Współczynnik zwężenia przyjmuje się $\alpha = 0,62$, a współczynnik oporów przepływu $\Sigma\zeta = 3$. Pomija się objętość cieczy w rurze łączącej.

Odpowiedź: 607,5 s.

ZADANIE 2.15

Obliczyć czas wyrównania poziomów w naczyniach połączonych (rys. 2.26). Średnice D_1 i D_2 wynoszą odpowiednio 1,6 i 3,2 m, wysokość $h_0 = 1,5 \text{ m}$, początkowa różnica poziomów $H_0 = 4 \text{ m}$. Przepływ następuje przewodem o średnicy $d = 100 \text{ mm}$, dla którego współczynnik wypływu wynosi $\psi = 0,82$.

Odpowiedź: 472 s.

ZADANIE 2.16

Do utrzymania prawie stałego wypływu \dot{V}_1 (rys. 2.27) przez końcówkę o średnicy $d = 120$ mm, przy wahaniach w sieci zasilającej \dot{V} , zbudowano zbiornik z przelewem o szerokości 0,7 m na wysokości $H = 3$ m. Jakie jest natężenie dopływu \dot{V} do zbiornika i natężenie wypływu \dot{V}_1 , jeżeli wysokość spiętrzenia h wynosi 100 mm, współczynnik wypływu z końcówki $\psi = 0,97$, a dla przelewu $\varphi = 0,64$? Przy jakim granicznym natężeniu dopływu \dot{V} ciecz nie sływa przelewem?

Odpowiedź: $\dot{V} = 0,128$ m³/s; $\dot{V}_1 = 0,086$ m³/s,
nie sływa dla $\dot{V} \leq 0,084$ m³/s.

7.3. PRZESYŁANIE PŁYNÓW

7.3.1. Moc pompowania

Moc pompowania oblicza się ze wzoru (3.1), gdzie:

- \dot{V} – natężenie objętościowe przepływu płynu, m³/s,
- Δp – przyrost ciśnienia, jaki musi wytworzyć pompa (wentylator), aby płyn był przesłany od punktu zasysania do punktu odbioru, Pa,
- H – wysokość pompowania, m,
- ρ – gęstość płynu, kg/m³,
- η – współczynnik całkowitej sprawności pompy (lub wentylatora).

Współczynnik sprawności dla pomp odśrodkowych wynosi 0,5÷0,9, a dla tłokowych – 0,7÷0,92. Zależność (3.1) jest słuszna dla cieczy przy dowolnych wartościach Δp , a dla gazów (wentylatory) tylko przy wartościach $\Delta p < 10$ kPa. Jeżeli dla gazów warunek ten nie jest spełniony, to moc urządzenia do przesyłania gazu oblicza się z uwzględnieniem zmiany jego gęstości.

Przy obliczaniu mocy pompowania wielkość Δp w równaniu (3.1) wyznacza się jako sumę składników zgodnie z zależnością (3.2), gdzie:

- Δp_f – straty ciśnienia spowodowane oporami przepływu, Pa,
- Δp_h – ciśnienie potrzebne na pokonanie różnicy wysokości ΔH (rys. 3.1), obliczane wg wzoru (3.3),
- Δp_{2-1} – różnica pomiędzy ciśnieniem w miejscu wypływu płynu p_2 a ciśnieniem w miejscu pobierania płynu p_1 (rys. 3.1), obliczana wg wzoru (3.4),
- Δp_u – ciśnienie związane z nadaniem prędkości strumieniowi płynu; to ciśnienie obliczamy zgodnie z zależnością (3.5).

Człon Δp_u uwzględniany jest tylko wtedy, gdy pomiędzy rozważanymi przekrojami istnieją wyraźne różnice prędkości przepływu. Człon ten przy przesyłaniu płynu z jednego zbiornika do drugiego najczęściej jest nieistotny.

Pomijając człon związany z nadaniem prędkości strumieniowi płynu, równanie (3.2) dla pompy (wentylatora) można zapisać w postaci (3.6), równoważnej do (3.2), gdzie:

ΔH – geometryczna wysokość podnoszenia płynu, m,

Δh_f – strata ciśnienia wyrażona w wysokości słupa płynu, m.

Wysokość pompowania jest określona także wyrażeniem (3.7), gdzie zgodnie z rys. 3.1:

p_d – ciśnienie w przewodzie tłocznym w miejscu wypływu cieczy z pompy, Pa,

p_s – ciśnienie w przewodzie ssawnym w miejscu dopływu cieczy do pompy, Pa,

H_0 – odległość w pionie między punktami pomiaru ciśnień p_d i p_s , m,

u_d – prędkość przepływu cieczy w rurociągu tłocznym, m/s,

u_s – prędkość przepływu cieczy w rurociągu ssawnym, m/s.

7.3.2. Charakterystyka pompy i sieci

Zależność $H = f(\dot{V})$ między wysokością pompowania H i wydajnością pompy \dot{V} nazywa się charakterystyką pompy. Charakterystyki pomp (wentylatorów), wyznaczone doświadczalnie przez producentów, są podawane w odpowiednich katalogach.

Przy wyborze pompy niezbędna jest, oprócz znajomości charakterystyki pompy, znajomość charakterystyki sieci, tj. rurociągu i przyłączonych do niego aparatów (elementów). Charakterystykę sieci wyraża zależność między natężeniem przepływu płynu \dot{V} i różnicą ciśnień niezbędną do przepływu płynu przez rurociąg (sieć), wyrażoną przez wysokość słupa płynu H .

Punkt pracy pompy P (rys. 3.2) to punkt przecięcia się charakterystyki pompy z charakterystyką sieci. Współrzędna \dot{V} punktu pracy odpowiada efektywnej wydajności pompy w danym układzie.

7.3.3. Współpraca pomp

Często ze względów ekonomicznych lub konstrukcyjnych stosuje się układy pompowe z równoległą lub szeregową współpracą kilku pomp. Jeżeli jedna pompa ma za małą wydajność, można połączyć równolegle dwie lub więcej pomp tego typu. Charakterystykę zespołu pomp połączonych równolegle wykreśla się w układzie $H = f(\dot{V})$, zwielfokrotniając wartości \dot{V} (odcięte) dla poszczególnych wysokości podnoszenia.

W przypadku konieczności powiększenia wysokości pompowania pompy łączy się szeregowo. Zwielfokrotniając wysokości pompowania (rzędne) dla poszczególnych wartości \dot{V} , na podstawie charakterystyki jednej pompy można wyznaczyć charakterystykę zespołu pomp współpracujących szeregowo.

Regulację wydajności pomp można przeprowadzić przez dławienie zaworem lub bocznikowanie (by-pass) części strumienia na tłoczeniu. Dławienie po stronie ssania jest niedopuszczalne z uwagi na możliwość wystąpienia kawitacji wskutek obniżenia ciśnienia płynu.

7.3.4. Kawitacja

Jeżeli w pewnym miejscu przewodu ciśnienie statyczne spadnie do poziomu ciśnienia nasycenia par przepływającej cieczy, to w tym miejscu ciecz zaczyna wrzeć. Wskutek powstawania pęcherzy parowych dochodzi do zjawiska kawitacji (przerwanie ciągłości strumienia cieczy). Prowadzi to do poważnych zakłóceń w pracy pompy. W obliczeniach instalacji pompowych należy sprawdzić, czy ciśnienie bezpośrednio przed pompą, tj. tam, gdzie jest ono najniższe, jest odpowiednio wyższe od ciśnienia nasycenia pompowanej cieczy (w danej temperaturze).

PRZYKŁAD 3.1

Pompa wirowa przetłacza 60% wodny roztwór kwasu siarkowego o gęstości 1500 kg/m^3 . Przyrządy pomiarowe wskazują następujące wartości: manometr zainstalowany na rurze tłocznej $\Delta p_d = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, wakuometr zainstalowany na rurze ssawnej $\Delta p_s = 76 \text{ mm Hg}$ (rys. 3.1). Odległość w pionie między manometrem a wakuometrem wynosi 0,8 m. Natężenie przepływu kwasu jest równe $16 \text{ m}^3/\text{h}$. Rura ssąca ma średnicę wewnętrzną $d_s = 60 \text{ mm}$, a rura tłoczna $d_d = 50 \text{ mm}$. Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Obliczyć wysokość pompowania. Opory przepływu pomiędzy punktami pomiaru ciśnienia zaniedbać.

PRZYKŁAD 3.2

Obliczyć moc pompy o współczynniku sprawności $\eta = 0,6$, służącej do przetłaczania $0,48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ wody o temperaturze 20°C . Średnice wewnętrzne hydraulicznie gładkich rurociągów tłoczącego i ssącego są równe i wynoszą 30 mm. Długości poszczególnych odcinków przewodu oraz odpowiednie wysokości wynoszą (rys. 3.3): $h_0 = 3 \text{ m}$, $h_1 = 2 \text{ m}$, $h_2 = 8 \text{ m}$, $h_3 = 0,5 \text{ m}$, $L_1 = 27 \text{ m}$, $L_2 = 50 \text{ m}$, $L_3 = 1 \text{ m}$. Współczynniki oporów miejscowych wynoszą: $\zeta_1 = 6$ (kosz ssawny), $\zeta_2 = 0,5$, $\zeta_3 = 5$. Ciśnienie barometryczne jest równe $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Sprawdzić, czy w przekroju (3-3) wystąpi kawitacja.

PRZYKŁAD 3.3

Charakterystykę pompy wirowej przedstawia linia 1 na rysunku 3.4. Pompa ta przetłacza 98% kwas siarkowy ($\rho = 1830 \text{ kg/m}^3$) ze zbiornika dolnego, w którym panuje ciśnienie atmosferyczne $p_1 = 750 \text{ mm Hg}$, do zbiornika górnego, w którym panuje nadciśnienie $\Delta p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Odległość między poziomami kwasu w zbior-

nikach jest stała i wynosi $\Delta H = 12$ m. Średnica wewnętrzna rury ssącej wynosi $d_s = 175$ mm, długość $L_1 = 11$ m, suma współczynników oporów miejscowych $\Sigma\zeta_s = 8,5$, a współczynnik oporu przepływu $\lambda_s = 0,027$. Średnica wewnętrzna rury tłocznej wynosi $d_d = 125$ mm, długość $L_2 = 120$ m, suma współczynników oporów miejscowych $\Sigma\zeta_d = 32$, zaś współczynnik oporu przepływu $\lambda_d = 0,032$. Obliczyć wydajność \dot{V} i wysokość podnoszenia pompy.

PRZYKŁAD 3.4

Charakterystykę pompy określają następujące dane:

\dot{V} [m ³ /s]	0	0,024	0,032	0,040	0,048
H [m]	100	90	80	60	40

Charakterystyka sieci jest natomiast określona przez wartości zamieszczone w poniższej tabeli.

\dot{V} [m ³ /s]	0	0,008	0,024	0,038	0,047	0,059
H [m]	66	70	80	100	120	153

Jaką wydajność urządzenia można uzyskać przez równoległe i szeregowe połączenia dwóch pomp o podanej charakterystyce oraz o ile wzrośnie wydajność zespołu pomp w porównaniu z wydajnością jednej pompy?

PRZYKŁAD 3.5

Sporządzić charakterystykę przewodu o średnicy wewnętrznej $d = 150$ mm i długości $L = 280$ m, jeżeli równoważna długość wszystkich oporów miejscowych wynosi $L_e = 85$ m, a współczynnik oporu $\lambda = 0,03$. Przewód łączy zbiorniki otwarte ($p_1 = p_2$), a geometryczna wysokość podnoszenia wynosi 20 m. Obliczyć moc silnika pompy przetłaczającej wodę o temperaturze 20°C przez ten przewód. Charakterystykę pompy przedstawiono na rys. 3.7.

ZADANIE 3.1

Podczas badania pompy odśrodkowej o współczynniku sprawności wynoszącym $\eta = 0,6$ otrzymano następujące dane:

\dot{V} [dm ³ /min]	0	100	200	300	400	500
H [m]	37,2	38,0	37,0	34,5	31,8	28,5

Pompę podłączono do rurociągu o średnicy 68 mm i długości sumarycznej (długość rzeczywista powiększona o długość zastępczą oporów miejscowych) 355 m. Geometryczna wysokość podnoszenia wynosi $\Delta H = 4,8$ m, zaś współczynnik oporu $\lambda = 0,03$. Przez rurociąg przepływa woda o temperaturze 20°C . Obliczyć:

1. Natężenie przepływu wody przez rurociąg.
2. Moc pompy.
3. Współrzędne punktu pracy.
4. Wydajność pompy, jeżeli wysokość pompowania będzie wynosiła $H^* = 25$ m.
5. Natężenie przepływu cieczy w przypadku szeregowego i równoległego połączenia zespołu dwóch pomp o podanej charakterystyce.

Odpowiedź:

1. $\dot{V} = 0,067 \text{ m}^3/\text{s}$.
2. $N = 3,5 \text{ kW}$.
3. $H = 31,5 \text{ m}$, $\dot{V} = 0,067 \text{ m}^3/\text{s}$.
4. $\dot{V}^* = 0,086 \text{ m}^3/\text{s}$.
5. Połączenie szeregowe $\dot{V}' = 0,088 \text{ m}^3/\text{s}$.
Połączenie równoległe $\dot{V}'' = 0,072 \text{ m}^3/\text{s}$.

ZADANIE 3.2

Ciecz o gęstości $\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$ i lepkości $\mu = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ należy przetłoczyć ze zbiornika A (rys. 3.8) do otwartego zbiornika B . Różnica poziomów cieczy wynosi $H_1 = 8$ m. Pozostałe wymiary są następujące (rys. 3.8): $L = 49\ 500$ m, $H_0 = 5$ m. Wewnętrzna średnica rurociągu $d = 21$ mm. Współczynniki oporów lokalnych wynoszą: $\zeta_1 = 0,5$, $\zeta_2 = 3,5$, $\zeta_3 + \zeta_4 = 2,2$, a ciśnienie barometryczne jest równe $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Obliczyć:

1. Minimalne ciśnienie $p_{1\text{min}}$ w zbiorniku A , zapewniające przetłoczenie cieczy.
2. Jaką wartość powinno mieć ciśnienie p_1 , aby ruch cieczy był laminarny.
3. Natężenie przepływu cieczy, gdy ciśnienie w zbiorniku A wynosi $2,229 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a współczynnik oporu $\lambda = 0,04$.

Odpowiedź: $p_{1\text{min}} = 1,878 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $1,878 \cdot 10^5 < p_1 < 1,900 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\dot{m} = 0,278 \text{ kg/s}$.

ZADANIE 3.3

Obliczyć wysokość pompowania, jaką wytwarza pompa, jeżeli przy wydatku wody o temperaturze 20°C , wynoszącym $30 \text{ m}^3/\text{h}$, manometr zamontowany na przewodzie tłocznym wskazuje nadciśnienie $3,4 \text{ atm}$, a wakuometr zamontowany na przewodzie ssawnym – podciśnienie 350 mm Hg . Średnica wewnętrzna przewodu ssawnego wynosi 125 mm , a tłocznego 100 mm . Pionowa odległość pomiędzy punktami podłączenia przyrządów pomiarowych wynosi $1,3 \text{ m}$.

Odpowiedź: $H = 40,1 \text{ m}$.

ZADANIE 3.4

Pompa o współczynniku sprawności $\eta = 0,6$ tłoczy wodę o temperaturze 20°C ze zbiornika dolnego do zbiornika górnego (rys. 3.9), w którego dnie znajduje się otwór wypływowy. Wysokość geometryczna tłoczenia wynosi 20 m. Długość rurociągu tłocznego wynosi 100 m, a ssącego 12 m. Średnice wewnętrzne rurociągów są równe i wynoszą 0,25 m. Suma współczynników oporów miejscowych na rurociągu ssawnym $\Sigma\zeta_s = 20$, a na tłocznym $\Sigma\zeta_t = 30$. Natężenie przepływu wody wynosi $0,04 \text{ m}^3/\text{s}$. Obliczyć:

1. Moc silnika pompy.
2. Średnicę otworu wypływowego w zbiorniku górnym, zapewniającą stałą wysokość cieczy w tym zbiorniku, wynoszącą $h = 3,5$ m. Współczynnik wypływu wynosi 0,6.

Odpowiedź: $N = 14,36 \text{ kW}$, $d = 0,1 \text{ m}$.

ZADANIE 3.5

W procesie technologicznym istnieje potrzeba okresowego napełnienia zbiornika 1 (rys. 3.10) wodą o temperaturze 20°C do wysokości $H = 2$ m, a następnie opróżniania tego zbiornika, przy czym wypływ następuje przez dwa otwory o tej samej powierzchni, równej $0,005 \text{ m}^2$. Jeden z otworów wypływowych znajduje się w dnie zbiornika o średnicy 2 m, a drugi w ścianie bocznej na $1/3$ wysokości. Współczynniki wypływu są jednakowe dla obu otworów i wynoszą 0,6. Zbiornik należy napełnić w czasie $t_n = 157$ s. Do tego celu wykorzystuje się pompę odśrodkową o współczynniku sprawności $\eta = 0,6$, tłoczącą wodę ze zbiornika dolnego. Wysokość geometryczna podnoszenia wynosi 20 m. Długość rurociągu tłocznego wynosi 100 m, a ssącego 12 m. Średnice obu rurociągów są jednakowe i wynoszą 0,25 m. Suma współczynników oporów miejscowych na rurociągu ssącym $\Sigma\zeta_s = 20$, a na tłocznym $\Sigma\zeta_t = 30$. Obliczyć:

1. Potrzebną moc pompowania.
2. Czas całkowitego opróżnienia zbiornika 1.

Odpowiedź: $N = 14,36 \text{ kW}$, $t = 558$ s.

ZADANIE 3.6

Rurociągiem o średnicy wewnętrznej 60 mm płynie woda o temperaturze 20°C z prędkością $1,5 \text{ m/s}$. Szorstkość bezwzględna powierzchni rurociągu wynosi $e = 0,15 \text{ mm}$. Na odcinku o długości $L = 2 \text{ km}$ znajduje się 18 kolan ($\zeta_1 = 0,5$) oraz 6 kurków ($\zeta_2 = 0,05$). Obliczyć moc silnika pompy przy założeniu współczynnika sprawności $\eta = 0,82$.

Odpowiedź: $N = 5 \text{ kW}$.

7.4. OPADANIE CZĄSTEK W PŁYNACH

7.4.1. Opór ośrodka (płynu)

Siłę oporu ośrodka R działającą na cząstkę poruszającą się w płynie, określa wzór (4.1), gdzie:

λ – współczynnik oporu ośrodka,

w – prędkość opadania cząstki, m/s,

ρ – gęstość płynu, kg/m³,

A – powierzchnia rzutu cząstki na płaszczyznę prostopadłą do kierunku opadania, m².

Wymiarem charakterystycznym dla cząstek kulistych jest ich średnica. Dla cząstek niekulistych wprowadzono pojęcie średnicy ekwiwalentnej (zastępczej) d_e , definiowanej jako średnica kuli o objętości cząstki V_s . Stąd wynika, że ta średnica jest określona wzorem (4.2). Dla cząstek kulistych $d = d_e$.

Zależności do obliczania współczynnika oporu ośrodka λ są różne dla różnych zakresów opadania cząstek. Odpowiednim kryterium, charakteryzującym poszczególne zakresy opadania, jest liczba Reynoldsa dla opadania, definiowana zależnością (4.3), przy czym μ jest współczynnikiem lepkości ośrodka (płynu).

Dla cząstek niekulistych współczynnik oporu zależy ponadto od sferyczności Ψ , definiowanej jako stosunek powierzchni kuli o objętości cząstki do powierzchni cząstki A_s . Ponieważ kula o objętości cząstki ma powierzchnię πd_e^2 , obowiązuje zatem zależność (4.4). Spośród wszystkich brył kula ma najmniejszą powierzchnię przy określonej objętości, a więc zawsze jest $\Psi \leq 1$.

Współczynniki oporu są określone następującymi zależnościami:

- dla cząstek kulistych i laminarnego zakresu opadania, tj. dla liczb Reynoldsa zawartych w przedziale od 10^{-4} do 0,4, obowiązuje zależność (4.5),
- dla cząstek kulistych i opadania w zakresie przejściowym, tj. dla liczb Reynoldsa zawartych w przedziale od 0,4 do 1000, obowiązuje zależność (4.6),
- dla cząstek kulistych przy burzliwym zakresie opadania, tj. dla liczb Reynoldsa zawartych w przedziale od 1000 do $2 \cdot 10^5$, współczynnik oporu ma wartość stałą (wzór (4.7)),
- przy laminarnym opadaniu cząstek niekulistych ($10^{-4} < Re < 0,05$) zależność na współczynnik oporu przedstawia wzór (4.8),
- przy burzliwym opadaniu cząstek niekulistych ($2000 < Re < 2 \cdot 10^5$) obowiązuje zależność (4.9).

Powyższe zależności zestawiono w tabeli 4.1. Dla cząstek niekulistych znane są wzory tylko dla ruchu laminarnego (4.8) i burzliwego (4.9).

7.4.2. Opadanie swobodne cząstek kulistych

Opadanie swobodne (niezakłócone) zachodzi wtedy, gdy na ruch poszczególnych cząstek nie ma wpływu obecność cząstek sąsiadujących.

Przy opadaniu w próżni ($R = 0$) ruch ma charakter jednostajnie przyśpieszony, na cząstkę bowiem działa niezrównoważona stała siła ciężkości G . Prędkość opadania narasta więc liniowo z czasem. Przy opadaniu w ośrodku płynnym pojawia się siła oporu ośrodka (tarcie) R , a ponadto siła wyporu W . Siła wyporu skierowana jest przeciwnie do siły ciężkości, natomiast siła oporu – przeciwnie do kierunku ruchu. Zgodnie z drugim prawem dynamiki obowiązuje wzór (4.10). Indeks t oznacza, że wielkość jest zmienna w czasie (opadanie nieustalone); ρ_s oznacza gęstość cząstki ($\rho_s > \rho$).

Siła oporu w momencie początkowym opadania ($w_t = 0$) jest zerowa, zgodnie z zależnością (4.1). W miarę narastania prędkości siła oporu rośnie do momentu, gdy praktycznie zrównoważy wypadkową siłę ($G - W$) działającą w przeciwnym kierunku. Wtedy prędkość ustala się i jest wielkością charakterystyczną dla określonych właściwości fizycznych cząstki (d, ρ_s) i ośrodka (ρ, μ). Dla ustalonego opadania cząstki $dw/dt = 0$ i $w_t = w$, co daje po podstawieniu do zależności (4.10) wzór (4.11).

Gdy opadanie odbywa się w zakresie laminarnym ($\lambda = 24/Re$), to w wyniku przekształcenia równania (4.10) otrzymuje się, po uwzględnieniu (4.11), równanie różniczkowe (w jest prędkością po ustaleniu sił), po scałkowaniu którego, z uwzględnieniem, że dla $t = 0$ jest $w_t = 0$, otrzymuje się zależność (4.12).

Mimo iż wzór (4.12) sugeruje, że czas, po którym $w_t = w$ jest nieskończenie długi, okazuje się, że stabilizacja prędkości następuje na tyle szybko (patrz przykład 4.9), że praktycznie ruch cząstki najczęściej uważa się od początku za ustalony.

Typowe problemy obliczeniowe przy opadaniu cząstek to obliczanie prędkości (końcowej) opadania cząstek o danej średnicy d oraz określenie średnicy cząstki opadającej ze znaną prędkością (dla ustalonych wartości ρ_s, ρ i μ).

Zależność (4.11) nie nadaje się bezpośrednio do obliczeń ze względu na uwikłany charakter (liczba Re , której funkcją jest λ , zależy zarówno od średnicy cząstek, jak też od ich prędkości opadania). Poniżej przedstawiono kilka sposobów rozwiązania problemu dla cząstek kulistych.

7.4.2.1. Metoda prób i błędów

W tej metodzie przyjmuje się próbnie zakres ruchu cząstki. Można wtedy stosować odpowiednie zależności na λ i rozwikłać wzór (4.11). Dla poszczególnych zakresów ruchu wzory są następujące:

- dla ruchu laminarnego wzór (4.13),
- dla ruchu przejściowego wzór (4.14),
- dla ruchu burzliwego wzór (4.15).

Po przekształceniu powyższe wzory mogą też służyć do obliczenia średnicy cząstki dla znanej jej prędkości opadania.

Po obliczeniu w (lub d) według odpowiedniego wzoru należy obliczyć liczbę Reynoldsa i sprawdzić słuszność założonego charakteru ruchu. Gdy założenie było błędne, należy przyjąć inny zakres ruchu.

7.4.2.2. Metoda graficzna

Mnożąc obustronnie równanie (4.11) przez Re^2 , otrzymuje się wzór (4.16), natomiast obustronne podzielenie (4.11) przez Re daje wzór (4.17).

Wielkości λRe^2 i λ/Re są funkcjami Re , co wynika z faktu, że λ jest funkcją Re . Zależności $\lambda Re^2 = f(Re)$ i $\lambda/Re = f(Re)$ przedstawiono na rys. 4.1. Chcąc obliczyć prędkość opadania cząstki (dla danych wartości d , ρ_s , ρ i μ), oblicza się prawą stronę zależności (4.16), a następnie z wykresu $\lambda Re^2 - Re$ określa liczbę Reynoldsa. Wykorzystując wzór definicyjny tej liczby, oblicza się prędkość opadania.

W celu obliczenia średnicy cząstki (dla danych wartości w , ρ_s , ρ i μ) oblicza się prawą stronę zależności (4.17), a następnie z wykresu $\lambda/Re - Re$ określa liczbę Reynoldsa. Średnicę cząstki oblicza się, wykorzystując wzór definicyjny tej liczby.

7.4.2.3. Metoda analityczna

W metodzie tej również wykorzystuje się wzory (4.16) i (4.17). Wyrażenie po prawej stronie równania (4.16), bez współczynnika liczbowego, nosi nazwę liczby Archimedesesa. Liczba ta jest liczbą kryterialną i charakteryzuje stosunek siły wyporu do siły lepkości. Definicja ma postać (4.18). Tak więc słuszna jest zależność (4.19).

Odwrotność wyrażenia po prawej stronie równania (4.17), bez współczynnika liczbowego, w literaturze rosyjskojęzycznej jest oznaczana symbolem Ly . Jak łatwo wykazać, jest ona kombinacją liczb Ar i Re (wzór (4.20)). Na podstawie wartości Ar (lub Ly) można określić zakres ruchu. Dla ruchu laminarnego, przez połączenie zależności (4.5) i (4.19), otrzymuje się wzory (4.21) i (4.21'). Podstawiając za Re wartości graniczne można wykazać, że ruch laminarny istnieje przy $0,0018 < Ar < 7,2$ oraz przy $5,56 \cdot 10^{-10} < Ly < 8,89 \cdot 10^{-3}$. Analogiczne zależności można wyprowadzić dla ruchów przejściowego i burzliwego. Dla ruchu przejściowego słuszne są zależności (4.22) i (4.22'). Dla przejściowego zakresu opadania obowiązują nierówności: $7,2 < Ar < 3,30 \cdot 10^5$ oraz $8,89 \cdot 10^{-3} < Ly < 3030$.

Dla opadania w zakresie burzliwym liczbę Reynoldsa można określić z zależności (4.23) i (4.23'). Opadanie burzliwe cząstek kulistych zachodzi dla $3,30 \cdot 10^5 < Ar < 8,25 \cdot 10^{10}$ oraz $3030 < Ly < 1,515 \cdot 10^6$. Powyższe zależności zestawiono w tabeli 4.1.

Algorytm obliczeń jest następujący. Przy wyznaczeniu prędkości opadania oblicza się najpierw Ar (wg (4.18)), określa zakres opadania, a następnie znajduje Re

według odpowiedniego wzoru (4.21)–(4.23). Przy wyznaczaniu średnicy cząstki najpierw oblicza się Ly według zależności (4.20), określa zakres opadania, a następnie znajduje Re według odpowiedniego wzoru (4.21')–(4.23').

Do uproszczonych obliczeń można stosować wzór Todesa, który wyraża zależność pomiędzy Re i Ar dla wszystkich zakresów ruchu, co stanowi duże udogodnienie. Zamiast wzorów (4.21)–(4.23) można stosować wzór (4.24). W zależności od wzajemnych relacji pomiędzy składnikami sumy w mianowniku wzór ten przechodzi w skrajnych przypadkach w postać (4.21) lub (4.23).

7.4.3. Komory odpylające

Są to najprostsze urządzenia do odpylania gazów. W komorze Howarda znajduje się wiele poziomych płyt prostokątnych, umieszczonych jedna nad drugą. Pomiędzy płytami przepływa zapyłony gaz. Cząstki pyłu poruszają się po torach prostoliniowych ukośnie w dół. Są bowiem z jednej strony unoszone przez gaz, z drugiej zaś mają składową prędkości skierowaną w dół (prędkość opadania). Typowy problem obliczeniowy polega na znalezieniu długości płyt L , przy których cząstka w okresie przebywania w komorze przemieści się w kierunku pionowym o odległość pomiędzy płytami h , co odpowiada jej osadzeniu przy najbardziej niekorzystnym położeniu początkowym (zetknięcie cząstki z płytą utożsamiane jest z jej oddzieleniem od gazu). Ponieważ czas opadania cząstki wynosi h/w , a czas przebywania L/u (u – prędkość gazu), obowiązuje zależność (4.25) (rys. 4.2). Prędkość gazu przy określonym natężeniu przepływu ustala się przez dobór szerokości płyt B . Prędkość tę należy dobrać w taki sposób, by nie następowało wtórne unoszenie cząstek już osadzonych.

7.4.4. Cyklony

Cyklony są to urządzenia odpylające, w których „siłą napędową” osadzania cząstek jest siła odśrodkowa. Zapyłony strumień gazu wpływa przewodem wlotowym stycznie do ścian cyklonu, przez co uzyskuje się zawirowanie strumienia (rys. 4.3). Ruch cząstek odbywa się po skomplikowanym torze, wynikającym z unoszenia cząstek przez gaz oraz ruchu ku ścianie cyklonu, spowodowanego działaniem siły odśrodkowej (bezwładności). Przy założeniu, że ruch cząstek w kierunku promieniowym ma charakter laminarny ($\lambda = 24/Re$), warunek równowagi siły oporu i siły bezwładności ma postać (4.26), gdzie:

- w – prędkość cząstki w kierunku promieniowym,
- m_s – masa cząstki,
- u – prędkość obwodowa cząstki (również gazu),
- r – promień krzywizny toru cząstki.

Podstawiając za masę cząstki $\pi d^3 \rho_s / 6$, otrzymuje się zależność (4.27). Prędkość promieniowa w zależy zatem od promienia krzywizny, którego wartość zmienia się od r_0 (dla $t = 0$) do R . Po scałkowaniu równania (4.27) otrzymuje się wzór (4.28).

Czas przebywania cząstki w cyklonie można określić orientacyjnie jako $2\pi r i / u$ (przyjmuje się umownie $r = R$), gdzie i jest ilością zawirowań strumienia gazu w cyklonie; najczęściej przyjmuje się $i = 1,5$. Z porównania czasu przebywania z czasem przemieszczania ku ścianie (wzór (4.28)) otrzymuje się zależność (4.29) na minimalną średnicę cząstek oddzielanych w cyklonie.

Alternatywnym podejściem do zagadnienia jest umowne założenie we wzorze (4.27) $r = \text{const}$ oraz przyjęcie, że droga przemieszczania cząstki ku ścianie jest równa szerokości przewodu wlotowego B . Otrzymuje się wtedy wzór (4.30).

Prędkość obwodową gazu u można określić tylko umownie: przyjmuje się ją zazwyczaj jako równą prędkości wlotowej gazu (w przewodzie doprowadzającym).

7.4.5. Klasyfikatory hydrauliczne

Są to urządzenia do rozdziału cząstek stałych o różnych gęstościach w strumieniu cieczy. Jeżeli rozdziałowi podlegają dwa rodzaje cząstek o gęstościach ρ_A i ρ_B ($\rho_A > \rho_B > \rho$) i o jednakowym rozmiarze, łatwo wywnioskować, że bez względu na zakres ruchu prędkość opadania cząstek A będzie większa od prędkości cząstek B. Wynika to z analizy wzorów (4.13)–(4.15). Jeżeli opadanie cząstek następuje w płynie poruszającym się w kierunku poziomym, cząstki są ponadto unoszone przez strumień płynu i osadzają się w różnych miejscach zależnych od ich prędkości opadania.

W praktyce oddzielane są cząstki o pewnym zakresie rozmiarów, jednakowym dla A i B. Na rys. 4.4 przedstawiono zasadę klasyfikacji na przykładzie rozdziału dwóch rodzajów cząstek A i B, o wymiarach w zakresie od d_{\min} do d_{\max} . Największą prędkość opadania mają cząstki A o maksymalnym rozmiarze, $w_{A_{\max}}$, najmniejszą zaś cząstki B o minimalnym rozmiarze, $w_{B_{\min}}$. Rozdział cząstek A i B zależy od relacji pomiędzy prędkościami $w_{B_{\max}}$ i $w_{A_{\min}}$ (rys. 4.4). Jeżeli $w_{A_{\min}} \geq w_{B_{\max}}$, to rozdział jest całkowity. W przeciwnym przypadku (przedstawionym na rysunku) powstaje frakcja mieszana (II). Pierwsza frakcja (I), opadająca najbliżej punktu dozowania, składa się wtedy z cząstek A o rozmiarze od d_{\max} do d_{A1} . Frakcję mieszaną (II) tworzą cząstki A o rozmiarach od d_{A1} do d_{\min} i cząstki B o rozmiarach od d_{\max} do d_{B1} . W sytuacji przedstawionej na rysunku frakcja mieszana nie da się rozdzielić na składniki A i B za pomocą przesiewania, gdyż $d_{A1} > d_{B1}$. Ostatnią, tj. opadającą najdalej od punktu dozowania, frakcję (III) tworzą cząstki B o rozmiarach od d_{B1} do d_{\min} .

Na zdolność rozdzielczą klasyfikatora ma wpływ gęstość cieczy, ponieważ prędkość opadania w każdym zakresie zależy od różnicy gęstości cząstek i ośrodka, zgodnie ze wzorem (4.31) wynikającym z zależności (4.13)–(4.15), gdzie: C – stała, n – wykładnik zależny od charakteru ruchu; dla ruchu laminarnego $n = 1,0$, dla przejściowego $n = 0,7143$, dla burzliwego $n = 0,5$.

Zdolność rozdzielczą klasyfikatora można scharakteryzować stosunkiem w_A/w_B , który zgodnie z (4.31) jest dany zależnością (4.32). Analiza wzoru prowadzi do wniosku, że dla $\rho \rightarrow \rho_{sB}$ wyrażenie w_A/w_B dąży do nieskończoności, czyli ze wzrostem gęstości ośrodka zdolność rozdzielcza rośnie.

7.4.6. Sedymentacja

Sedymentacja polega na zagęszczaniu (opadaniu) ciała stałego w cieczy pod wpływem sił ciężkości. Ze względu na duże stężenia ciała stałego opadanie ma najczęściej charakter zakłócony. Prędkość opadania zakłóconego w_z jest m.in. funkcją porowatości zawiesiny ε , tj. objętościowego udziału cieczy w zawieszynie. Dla $\varepsilon < 0,7$ obowiązuje wzór (4.33), przy czym w jest prędkością opadania swobodnego. Typowy problem obliczeniowy polega na określeniu czasu powstawania warstwy klarownej o określonej wysokości (rys. 4.5). Porowatość zawiesiny zmienia się w trakcie procesu od wartości dla zawiesiny surowej ε_1 (początek opadania $H = H_1$) do wartości odpowiadającej zagęszczonemu osadowi ε_0 (koniec opadania $H = H_0$). Bilansując objętości cząstek w trakcie osadzania oraz przed i po osadzeniu, można napisać zależność (4.34).

Ze względu na zmienną porowatość w trakcie opadania prędkość w_z jest zmienna w czasie ($= dH/dt$), tak więc czas tworzenia klarownej warstwy o wysokości $H_1 - H_0$ oblicza się według wzoru (4.35).

Innym problemem jest obliczenie powierzchni odstojnika ciągłego dla określonego natężenia przepływu zawiesiny oraz stężeń zawiesiny i szlamu. Do odstojnika (rys. 4.6) doprowadza się zawiesinę z objętościowym natężeniem przepływu w przeliczeniu na czystą ciecz \dot{V}_{sus} . Szlam o natężeniu objętościowym przepływu czystej cieczy \dot{V}_{sl} jest odbierany z dna odstojnika, natomiast klarowna ciecz w ilości \dot{V} (bez cząstek) odprowadzana jest przelewem. Obliczenia są proste, gdy można przyjąć stałą (uśrednioną) prędkość opadania cząstek w_{zm} . Powierzchnia odstojnika musi być tak dobrana, aby prędkość liniowa cieczy ku górze \dot{V}/S była co najwyżej równa średniej prędkości opadania cząstek określonej wzorem (4.36).

PRZYKŁAD 4.1

Obliczyć zakres średnic kulistych cząstek piasku o gęstości $\rho_s = 2300 \text{ kg/m}^3$, opadających w wodzie o temperaturze 20°C dla ruchów laminarnego, przejściowego i burzliwego. Obliczyć również siły oporu ośrodka odpowiadające tym średnicom.

PRZYKŁAD 4.2

Określić prędkość opadania kulistych cząstek piasku o gęstości $\rho_s = 2300 \text{ kg/m}^3$ i średnicy $d = 1 \text{ mm}$ w wodzie o temperaturze 20°C .

PRZYKŁAD 4.3

W powietrzu o temperaturze 20°C opada cząstka o kształcie zbliżonym do walca o wysokości równej średnicy. Gęstość cząstki wynosi 2900 kg/m^3 , a masa $m_s = 1\text{ g}$. Obliczyć prędkość opadania tej cząstki. Jaki byłby błąd obliczeń, gdyby prędkość opadania wyznaczono jak dla cząstki kulistej?

PRZYKŁAD 4.4

Zbadać kształt i położenie krzywych $w = f(d)$ w poszczególnych zakresach ruchu dla trzech rodzajów cząstek kulistych o gęstościach 2000 kg/m^3 , 4000 kg/m^3 i 6000 kg/m^3 opadających w wodzie o temperaturze 20°C .

PRZYKŁAD 4.5

Obliczyć długość i szerokość komory odpylającej Howarda, w której ma się odpylać $\dot{V} = 10\,000\text{ m}^3/\text{h}$ powietrza od cząstek o średnicy $d = 18\text{ }\mu\text{m}$ i gęstości $\rho_s = 3100\text{ kg/m}^3$. Przyjąć wysokość komory $H = 3\text{ m}$, odległość między półkami $h = 0,1\text{ m}$, temperaturę powietrza 80°C oraz jego prędkość przepływu $u = 0,4\text{ m/s}$. Założyć kulisty kształt cząstek.

PRZYKŁAD 4.6

W cyklonie o średnicy $2R = 1,0\text{ m}$ oczyszczane jest powietrze o temperaturze 140°C w ilości $\dot{V} = 2000\text{ m}^3/\text{h}$ od cząstek pyłu o gęstości $\rho_s = 3000\text{ kg/m}^3$ i kształcie zbliżonym do kulistego. Wymiary prostokątnego przewodu wlotowego wynoszą: wysokość $h = 0,3\text{ m}$, szerokość $B = 0,2\text{ m}$, a średnica rury wylotowej wynosi $2r_0 = 0,5\text{ m}$. Określić graniczny rozmiar cząstek oddzielanych w cyklonie oraz oszacować, z jaką sprawnością będą oddzielane cząstki o rozmiarze $5\text{ }\mu\text{m}$.

PRZYKŁAD 4.7

W poziomym klasyfikatorze hydraulicznym rozdzielana jest mieszanina minerałów A i B o gęstościach odpowiednio $\rho_{sA} = 5400\text{ kg/m}^3$ i $\rho_{sB} = 2700\text{ kg/m}^3$. Cząstki minerałów są w przybliżeniu kuliste, a ich średnice zawarte w przedziale od $0,15\text{ mm}$ do $1,5\text{ mm}$. Wysokość poziomu wody w klasyfikatorze wynosi $h = 0,2\text{ m}$, jej prędkość $u = 0,5\text{ m/s}$, a temperatura 20°C . Określić rozmiary oraz strefy opadania poszczególnych frakcji.

PRZYKŁAD 4.8

Do cylindrycznego odstojnika doprowadza się wodną zawiesinę krzemionki w ilości $50\text{ m}^3/\text{h}$ o temperaturze 10°C . Stwierdzono, że w 1 dm^3 zawiesiny znajduje się 800 g suchego ciała stałego o gęstości 2650 kg/m^3 i przeciętnej średnicy $50\text{ }\mu\text{m}$. Gęstość nasypowa krzemionki wynosi 1100 kg/m^3 . Obliczyć niezbędną średnicę odstojnika o wysokości poziomu cieczy $1,2\text{ m}$.

PRZYKŁAD 4.9

Obliczyć czas, po jakim kulista cząstka o średnicy $d = 0,1$ mm i gęstości $\rho_s = 1700$ kg/m³ osiągnie prędkość opadania stanowiącą 99% prędkości ustalonej. Jaką drogę przebędzie cząstka w tym czasie? Obliczenia przeprowadzić dla opadania w wodzie o temperaturze 20°C.

ZADANIE 4.1

Obliczyć zakres średnic (zastępczych) cząstek piasku o gęstości 2300 kg/m³, opadających w wodzie o temperaturze 20°C dla ruchu laminarnego i burzliwego. Obliczyć również siły oporu ośrodka odpowiadające tym średnicom. Sferyczność cząstek wynosi 0,8.

Odpowiedź: dla ruchu laminarnego: $d_{\min} = 5,33$ μm , $d_{\max} = 42,3$ μm ,
 dla ruchu burzliwego: $d_{\min} = 6,89$ mm,
 siły oporu: $R = 0,507 \cdot 10^{-9}$ N dla $Re = 0,05$,
 $R = 2,18 \cdot 10^{-3}$ N dla $Re = 2000$.

ZADANIE 4.2

Znaleźć średnicę kulistych cząstek piasku o gęstości 2300 kg/m³, opadających w powietrzu o temperaturze 20°C z prędkością 1 m/s.

Odpowiedź: 0,171 mm.

ZADANIE 4.3

Kanałem o przekroju kwadratowym 2×2 m i długości 15 m odprowadzany jest zapyłony gaz w ilości 10 000 m³/h. Gęstość gazu wynosi 0,9 kg/m³, a współczynnik lepkości $1,9 \cdot 10^{-5}$ kg/(m·s). Wyznaczyć minimalną średnicę cząstek pyłu o gęstości 3400 kg/m³, które zostaną osadzone w kanale.

Odpowiedź: 30,8 μm .

ZADANIE 4.4

Z komina o wysokości 30 m wydostają się cząstki o zakresie średnic od 8 μm do 50 μm . Cząstki największe, przy pewnej prędkości wiatru, opadają w odległości ok. 1000 m od komina. Obliczyć zasięg opadania (odległość od komina) cząstek najdrobniejszych. Przyjąć, że cząstki mają gęstość 1400 kg/m³, są kuliste, a temperatura powietrza wynosi 20°C.

Odpowiedź: 39 000 m.

ZADANIE 4.5

Do odpylania 40 000 m³/h gazu zastosowano komorę Howarda o długości 5 m, szerokości 6 m i wysokości 4 m. Określić, ile należy zamontować półek w tej komorze, aby zostały w niej wydzielone wszystkie cząstki o wymiarze powyżej 30 μm .

Przyjąć kulisty kształt cząstek, gęstość cząstek 2710 kg/m^3 , gęstość gazu $1,05 \text{ kg/m}^3$, współczynnik lepkości gazu $1,89 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$.

Odpowiedź: 11 pól (10,8).

ZADANIE 4.6

W klasyfikatorze hydraulicznym należy rozdzielić mieszaninę ziaren minerałów A i B o gęstościach odpowiednio 7000 kg/m^3 i 3300 kg/m^3 . Wymiary cząstek zawarte są w granicach od $0,65 \text{ mm}$ do $1,80 \text{ mm}$. Jaka musi być minimalna gęstość cieczy, w której zachodzi klasyfikacja, aby nie wydzieliła się frakcja mieszana. Przyjąć, że cząstki są kuliste, a opadanie zachodzi w zakresie ruchu burzliwego.

Odpowiedź: 1209 kg/m^3 .

ZADANIE 4.7

Do odstojnika o działaniu ciągłym należy doprowadzić $15\,000 \text{ kg/h}$ wodnej zawiesiny, zawierającej 15% masowych fazy stałej. Cząstki tej fazy mają kształt zbliżony do kulistego, gęstość 2700 kg/m^3 i minimalny rozmiar $20 \mu\text{m}$. Stwierdzono, że prędkość opadania zakłóconego tych cząstek jest w przybliżeniu równa połowie prędkości opadania swobodnego. Przyjmując, że w strumieniu zagęszczonym (szlamie) zawartość fazy stałej wynosi 30% masowych, obliczyć średnicę odstojnika niezbędną do realizacji procesu.

Odpowiedź: $3,77 \text{ m}$.

ZADANIE 4.8

Obliczyć czas opadania z wysokości $0,2 \text{ m}$ cząstek kulistych o średnicy $40 \mu\text{m}$ i gęstości 1700 kg/m^3 . Obliczenia przeprowadzić dla opadania:

- w wodzie o temperaturze 20°C ,
- w wodzie o temperaturze 50°C ,
- w powietrzu o temperaturze 20°C ,
- w powietrzu o temperaturze 20°C z uwzględnieniem, że ruch cząstki jest nieustalony,
- w próżni.

Odpowiedź: a) 325 s , b) 179 s , c) $2,46 \text{ s}$, d) $2,47 \text{ s}$, e) $0,202 \text{ s}$.

7.5. SPOSOBY KONTAKTOWANIA FAZ

W niniejszym rozdziale opisano następujące procesy związane z kontaktowaniem faz: przepływ przez wypełnienie suche i zraszane, przepływ pęcherzyków gazu przez ciecz, spływ cieczy po powierzchni pionowej oraz fluidyzację i mieszanie.

7.5.1. Parametry charakteryzujące wypełnienie

Parametrami charakteryzującymi złożę (warstwę wypełnienia) są: porowatość, powierzchnia właściwa i średnica zastępcza przestrzeni międzyziarnowych (kapilar); ponadto istnieją wielkości charakteryzujące poszczególne elementy wypełnienia: średnica zastępcza i czynnik kształtu.

Porowatością usypanej warstwy wypełnienia ε_0 nazywa się udział objętości przestrzeni „pustych” (tj. przestrzeni znajdujących się pomiędzy ziarnami) w objętości warstwy. Te przestrzenie nazywane są też porami zewnętrznymi. Jeżeli elementy wypełnienia są jednakowe i w objętości warstwy V znajduje się N elementów, z których każdy ma objętość V_{el} , to porowatość można obliczyć ze wzoru (5.1)

Na rys. 5.1 przedstawiono kilka typów wypełnień stosowanych w kolumnach. W tabeli 5.1 przedstawiono charakterystykę pierścieni Raschiga oraz siodełek Berla. Podano liczbę elementów wypełnienia, chaotycznie usypanych w warstwie o objętości 1 m^3 , porowatość warstwy wypełnienia oraz powierzchnię właściwą.

Gęstością nasypową warstwy wypełnienia ρ_b nazywamy stosunek masy wypełnienia do objętości warstwy. Istnieje związek pomiędzy gęstością elementów wypełnienia ρ_s , gęstością nasypową i porowatością o postaci (5.2).

Powierzchnią właściwą warstwy wypełnienia nazywa się stosunek pola powierzchni elementów wypełnienia do objętości warstwy, w której one się znajdują. A zatem słuszna jest zależność (5.3), przy czym A_{el} jest polem powierzchni pojedynczego elementu wypełnienia. Dla elementów kulistych o średnicy d ze wzorów (5.1) i (5.3) wynika zależność (5.4).

Średnica zastępcza przestrzeni międzyziarnowych d_{ek} , tj. kanalików, przez które płyn przepływa przez warstwę, jest oparta na pojęciu średnicy hydraulicznej. Stosunek pola przekroju poprzecznego tych kanalików do ich obwodu zwilżonego jest równy stosunkowi objętości kanalików ($V\varepsilon_0$) do ich powierzchni (Va). Wykorzystując definicję średnicy hydraulicznej (wzór (1.4)), otrzymuje się zależność (5.5). Dla wypełnień kulistych wzór można przedstawić w postaci (5.6).

Średnicę zastępczą elementów wypełnienia d_e definiuje się analogicznie jak średnicę zastępczą dowolnych cząstek niekulistych (wzór (4.2)), natomiast czynnik kształtu φ jest odwrotnością sferyczności cząstki Ψ , zdefiniowanej wzorem (4.4). Pojęcie czynnika kształtu pozwala na ustalenie związku pomiędzy A_{el} , V_{el} i d_e . Ma on postać (5.7).

7.5.2. Strata ciśnienia płynu przy przepływie przez warstwę wypełnienia

Przybliżony związek pomiędzy prędkością płynu w przestrzeniach międzyziarnowych u' a prędkością pozorną płynu u , tj. prędkością, która występowałaby, gdyby nie było wypełnienia, przedstawia wzór (5.8). W rzeczywistości prędkość płynu w przestrzeniach międzyziarnowych jest większa od u' z powodu krętości tych przestrzeni.

Ergun określił liczbę Reynoldsa dla przepływu przez wypełnienie kuliste w oparciu o średnicę hydrauliczną przestrzeni międzyziarnowych (wzór (5.6)) i prędkość przepływu w tych przestrzeniach (wzór (5.8)). Bez uwzględnienia stałej liczbowej wzór ma postać (5.9). Stwierdzono, że przepływ jest laminarny przy $Re < 10$. Zależność na stratę ciśnienia przy przepływie przez wypełnienie bazuje na zależności dla przepływu przez przewody, w której, zamiast występujących tam prędkości przepływu i średnicy przewodu, występują wielkości u' i d_{ek} . Ergun podał zależność współczynnika oporu λ od liczby Reynoldsa wspólną dla ruchów laminarnego, przejściowego i burzliwego. Wzór ma postać (5.10). Stratę ciśnienia przy przepływie przez wypełnienie kuliste określa zatem wzór (5.11), gdzie H jest wysokością warstwy wypełnienia. Dla ruchu laminarnego dominuje pierwszy człon zależności, dla burzliwego zaś ($Re > 1000$) – drugi.

Dla elementów kulistych zachodzi równość: $A_{el}/V_{el} = 6/d$. Uwzględniając to wyrażenie we wzorze (5.7), otrzymuje się, że $d = d_e/\phi$, co po podstawieniu do pierwszego członu równania (5.11) daje zależność (5.12), którą wyprowadził Leva (różniącą się jedynie stałą liczbową).

Zależność (5.12), odnosząca się do ruchu laminarnego, dotyczy warstwy złożonej z elementów wypełnienia o dowolnym kształcie. Leva zdefiniował liczbę Reynoldsa bezpośrednio przy użyciu średnicy zastępczej elementów wypełnienia i prędkości pozornej płynu – jest to zatem liczba zastępcza (wzór (5.13)). Stwierdzono, że ruch laminarny istnieje przy $Re_z < 10$, zaś burzliwy – dla $Re_z > 100$. Uogólnioną postać (tj. słuszną dla ruchu laminarnego i burzliwego) zależności na stratę ciśnienia przy przepływie przez warstwę wypełnienia o dowolnym kształcie przedstawia wzór (5.14), przy czym λ i n są określone następująco. Dla ruchu laminarnego słuszny jest wzór (5.15), natomiast dla ruchu burzliwego współczynnik oporu jest funkcją zastępczej liczby Reynoldsa i szorstkości powierzchni elementów wypełnienia, charakteryzowanej parametrem b (wzór (5.16)). Dla wypełnień ceramicznych (o średniej szorstkości) $b = 10,5 \div 14$. Dla innych materiałów wypełnień parametr b przyjmuje wartości od 7 (szkło) do 16 (tlenek glinu). Wartość n w zależności od liczby Reynoldsa przedstawiono w tabeli 5.2. W granicznym przypadku dla $Re \rightarrow \infty$ jest $n = 2$.

7.5.3. Przepływ przez wypełnienie zraszane

Przy przeciwnieprądowym przepływie gazu i cieczy przez wypełnienie problemy obliczeniowe dotyczą określenia następujących wielkości: strat ciśnienia przy przepływie gazu, prędkości maksymalnej gazu (prędkości zachłystywania) oraz stopnia wykorzystania powierzchni wypełnienia.

Dla grawitacyjnego spływu cieczy po wypełnieniu liczbę Reynoldsa definiuje się w oparciu o średnicę hydrauliczną spływającej warstewki cieczy oraz rzeczywi-

stą prędkość cieczy. Przy założeniu, że ciecz rozplywa się po wypełnieniu, tworząc cienką warstewkę o grubości δ , pole przekroju poprzecznego warstwy wypełnienia zajmowane przez ciecz wynosi $aS\delta$ (S – pole przekroju poprzecznego warstwy wypełnienia). Ponieważ obwód zwilżony wynosi aS , zatem średnica hydrauliczna jest równa czterokrotnej grubości warstewki cieczy. Jeżeli natężenie przepływu cieczy wynosi \dot{V} , to rzeczywistą prędkość spływu można określić jako $\dot{V}_l / (aS\delta) = u_l / (a\delta)$. Ostatecznie liczba Reynoldsa dla zraszania (spływającej fazy ciekłej) jest określona wzorem (5.17).

Leva podał zależność (5.18) na stratę ciśnienia gazu przy przepływie przez wypełnienie zraszone Δp_{wer} , gdzie:

$g_{ml}(= u_l \rho_l)$ – prędkość masowa cieczy (gęstość zraszania), $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$,

$u_l(= \dot{V} / S)$ – prędkość pozorna cieczy, tj. średnia prędkość, jaka występowałaby, gdyby ciecz płynęła całym przekrojem poprzecznym kolumny, m/s ,

α, β – parametry równania zależne od rodzaju i wielkości elementów wypełnienia.

Wartości parametrów α i β dla pierścieni Raschiga i siodełek Berla podano w tabeli 5.3.

Zależność (5.18) można też wykorzystywać do obliczeń straty ciśnienia na wypełnieniu niezraszanym ($g_{ml} = 0$).

Przy przeciwprądowym przepływie gazu i cieczy przez wypełnienie istnieją wzajemne ograniczenia prędkości przepływów obu faz. Na przykład dla określonej prędkości pozornej cieczy istnieje maksymalna pozorna prędkość przepływu gazu u_{gz} , powyżej której występuje zjawisko zachłystywania skruberów. Prędkość tę określa się na podstawie doświadczalnie stwierdzonej relacji pomiędzy bezwymiarowymi wielkościami Y i X , które mają postać (5.19) i (5.20), przy czym μ_0 oznacza standardową wartość współczynnika lepkości (współczynnik lepkości wody w temperaturze 20°C). Relacja pomiędzy wielkościami Y i X dla warunków zachłystywania przedstawiana jest najczęściej na wykresach. Na rys. 5.2 przedstawiono graficznie tę zależność według Sherwooda. Wyrażenie (L/G) jest stosunkiem masowych natężeń przepływu cieczy ($L = \dot{m}_l$) i gazu ($G = \dot{m}_g$) zgodnie ze wzorem (5.21). Chcąc określić np. u_{gz} dla danego stosunku (L/G) (przy czym oddzielnie wartości L i G są nieznanne), należy obliczyć X według zależności (5.20), następnie określić graniczną wartość $Y = Y_z$ z wykresu (rys. 5.2), a w końcu wyznaczyć $u_g = u_{gz}$ według zależności (5.19).

Stopień użyteczności powierzchni wypełnienia ϕ_e jest stosunkiem pola powierzchni kontaktu gazu z cieczą do pola powierzchni geometrycznej wypełnienia. Spośród wielu możliwych zależności do obliczenia ϕ_e można stosować wzór zaproponowany przez Hoblera (5.22), gdzie D jest średnicą warstwy wypełnienia, a wymiarem prędkości pozornej cieczy u_l jest m/s .

7.5.4. Fluidyzacja

Ziarna wypełnienia przechodzą w stan sfluidyzowany, gdy pozorna prędkość przepływu płynu przez warstwę (w kierunku ku górze) przekroczy pewną wartość krytyczną. Tę minimalną (krytyczną) prędkość płynu u_{mf} przy której rozpoczyna się fluidyzacja, określa się, przyrównując siłę oporu przepływu płynu $\Delta p \cdot S$ (S – pole przekroju poprzecznego warstwy) z pozornym ciężarem warstwy cząstek, tj. ciężarem pomniejszonym o wypór. Dla ziaren kulistych do określenia straty ciśnienia Δp można wykorzystać równanie Erguna (5.11), otrzymuje się wówczas zależność (5.23), przy czym $Re_{mf} = u_{mf} d \rho / \mu$, zaś liczba Archimedesesa określona jest zależnością (4.18). Stosowana tu wielkość ε nie jest na ogół identyczna z porowatością warstwy w stanie statycznym ε_0 i odpowiada stanowi złoża rozluźnionego w wyniku uprzedniego sfluidyzowania; jest to zatem porowatość w stanie granicznym między złożem stacjonarnym i fluidalnym.

Dla cząstek niekulistych, wykorzystując zależność (5.12), otrzymuje się wzór na minimalną prędkość fluidyzacji. Dla ruchu laminarnego i cząstek o dowolnym kształcie wzór ma postać (5.24). Wymiarem liniowym w Re_{mf} i Ar jest średnica zastępcza cząstek.

Prędkość maksymalna płynu, przy której zanika fluidyzacja, odpowiada prędkości niezakłóconego opadania cząstek, które tworzą warstwę (rozdział 4), a więc $u_{\max} = w$.

Dla cząstek o dowolnym kształcie stwierdzono doświadczalnie przybliżoną zależność między prędkością płynu a porowatością warstwy w stanie fluidalnym, określoną wzorem (5.25). Dla $u = u_{\max}$ jest $\varepsilon_f = 1$, co odpowiada zanikowi fluidyzacji. Rozważając drugi skrajny przypadek dotyczący początku fluidyzacji, tj. $\varepsilon_f = \varepsilon$ dla $u = u_{mf}$ można wykładnik n przedstawić w postaci (5.26).

Wykładnik n można też określić według zależności empirycznych. Stwierdzono, że jest on funkcją zastępczej liczby Reynoldsa. Przykładowo dla $Re_z < 0,2$ wykładnik wynosi $n = 4,65$, zaś dla $Re_z > 500$ $n = 2,39$.

Porowatość warstwy fluidalnej jest bezpośrednio powiązana z wysokością dynamiczną warstwy H_f . Wzór (5.27) wynika z porównania objętości fazy stałej w stanie statycznym (0) i fluidalnym (f).

7.5.5. Barbotaż

Według teorii van Krevelena rozróżnia się barbotaż swobodny i łańcuchowy. Przy barbotażu swobodnym, charakterystycznym dla małych natężeń przepływów gazu, pęcherzyki, wydostające się z małego otworka podczas wznoszenia, zachowują między sobą odstępy. Średnica pęcherzyka nie zależy od natężenia przepływu gazu, zależy natomiast od średnicy otworka d_0 . Obowiązuje zależność (5.28), gdzie σ jest napięciem powierzchniowym cieczy. Przy częściej występującym barbotażu łańcuchowym odległość pomiędzy sąsiednimi pęcherzykami zanika, a średnica pę-

cherzyka zależy od natężenia przepływu gazu \dot{V}_i (przez jeden otworek), przestając zależeć od d_0 . Wynika stąd wzór (5.29), gdzie w jest prędkością wznoszenia pęcherzyka, określoną według zasad analogicznych jak przy opadaniu cząstek w płynach.

Dla ruchu pęcherzyków graniczną wartością liczby Reynoldsa jest $Re = 9$. Dla wartości mniejszych wznoszenie jest laminarne i obowiązuje wzór identyczny jak dla opadania cząstek stałych (5.30).

Dla $Re > 9$ wznoszenie pęcherzyków traktuje się jako burzliwe; współczynnik oporu ma wartość stałą (inną niż przy opadaniu cząstek): $\lambda = 8/3$. Prędkość wznoszenia pęcherzyków należy obliczać według wzoru (5.31), przy czym ρ_g i ρ_l oznaczają odpowiednio gęstość gazu oraz cieczy.

Wstawiając zależność (5.30) do (5.29), otrzymuje się wzór (5.32) na średnicę pęcherzyków w łańcuchu przy wznoszeniu laminarnym. Łącząc natomiast wzory (5.29) i (5.31), otrzymuje się zależność (5.33) dla barbotażu łańcuchowego przy burzliwym wznoszeniu pęcherzyków.

Istotnym problemem jest wyznaczenie takiego objętościowego natężenia przepływu gazu przez otwór, powyżej którego barbotaż ma charakter łańcuchowy (przepływ krytyczny), \dot{V}_{icr} . W celu wyznaczenia \dot{V}_{icr} porównuje się prawe strony zależności (5.28) i (5.29). Otrzymuje się zależność (5.34). Gdy $\dot{V}_i < \dot{V}_{icr}$, barbotaż ma charakter swobodny, w przeciwnym przypadku – łańcuchowy.

Przy obliczeniach pewną trudność sprawia konieczność wstępnego założenia charakteru barbotażu (swobodny lub łańcuchowy) oraz charakteru ruchu pęcherzyków (laminarny lub burzliwy). Najbardziej prawdopodobne jest, że barbotaż jest łańcuchowy, a ruch pęcherzyków – burzliwy. Tok obliczeń jest wówczas następujący. Dla danej wartości \dot{V}_i oblicza się średnicę pęcherzyka według (5.33), a następnie prędkość jego wznoszenia na podstawie (5.31). Sprawdzenia założeń dokonuje się, obliczając liczbę Reynoldsa według (5.35), która powinna być większa od 9, oraz obliczając \dot{V}_{icr} na podstawie wzoru (5.34); powinno być $\dot{V}_i > \dot{V}_{icr}$.

Półka stanowi typowy przykład urządzenia barbotażowego (rys. 5.3). Ciecz dostaje się na półkę przelewem i płynie w poprzek półki do przelewu po przeciwległej stronie, a następnie spływa na niższą półkę. W przypadku półki sitowej, przedstawionej na rysunku, gaz dostaje się do cieczy przez małe otworki w dnie półki. Prędkość pozorna gazu nie może być za wysoka, gdyż wówczas następuje porywanie cieczy i przerzucanie jej na półkę wyższą. Maksymalną pozorną prędkość gazu na półce określa wzór Soudersa–Browna (5.36), gdzie:

σ – napięcie powierzchniowe cieczy, N/m,

σ_0 (= 0,02 N/m) – standardowa wartość napięcia powierzchniowego.

Współczynnik C jest funkcją odległości między sąsiednimi półkami H oraz wielkości X , zdefiniowanej zależnością (5.20). Na rys. 5.4 przedstawiono wykres do wyznaczania współczynnika C dla półek kołpakowych i sitowych. Wykres dotyczy jednostek anglosaskich; do posługiwania się jednostkami układu SI należy zastosować przeliczniki: 1'' = 25,4 mm, 1 ft/s = 0,305 m/s ('' = cal, ft = stopa).

7.5.6. Spływ cieczy po ścianie pionowej

Spływ cieczy cienką warstwą występuje najczęściej wewnątrz rur, przez które dołu przepływa gaz. Ten typ kontaktu daje możliwość przenoszenia ciepła pomiędzy ścianą a cieczą. Do rozważań dotyczących ruchu ciepła lub masy w spływającej warstwie zasadnicze znaczenie ma jej grubość δ .

Liczbę Reynoldsa dla spływu cieczy po ścianie definiuje się podobnie jak dla spływu po wypełnieniu z tą różnicą, że wprowadza się pojęcie jednostkowego natężenia zraszania, definiowanego zgodnie z (5.37) jako stosunek masowego natężenia przepływu cieczy \dot{m}_l do obwodu zwilżonego O . Średnia prędkość spływu cieczy wynosi $\dot{m}_l / (\rho_l O \delta)$, średnica hydrauliczna warstewki – 4δ , stąd liczba Reynoldsa jest określona wzorem (5.38). Spływ ma charakter laminarny dla $Re_l < 1600$. W tym zakresie średnia prędkość spływającej cieczy jest związana z grubością warstwy zależnością (5.39).

Wprowadza się pojęcie zastępczego wymiaru liniowego, zależnego wyłącznie od właściwości fizycznych cieczy (wzór (5.40)). Na podstawie zależności (5.38)–(5.40) można znaleźć związek między δ , ϑ_z i Re_l (5.41).

7.5.7. Mieszanie

Przy mieszaniu cieczy istotnym problemem jest określenie mocy mieszania N . Charakter ruchu cieczy w mieszalniku jest określony liczbą Reynoldsa dla mieszania, definiowaną umownie w oparciu o prędkość obwodową mieszadła $u = \pi dn$, gdzie n jest częstotliwością obrotów mieszadła, a d – jego średnicą. Liczba Reynoldsa dla mieszania ma postać (bez stałej liczbowej) (5.42). Stwierdzono, że mieszanie ma charakter laminarny dla $Re_m < 10$, zaś burzliwy dla $Re_m > 1000$. Zależność do obliczania mocy mieszania ma postać funkcji (5.43), gdzie Ne jest liczbą Newtona (mocy), określoną wzorem (5.44). Zależność (5.43) podawana jest najczęściej w postaci wykresów dla poszczególnych typów mieszadeł.

Szczegółowe postaci zależności (5.43) są określone dla ruchu laminarnego i burzliwego. Dla mieszania laminarnego istnieje zależność o charakterze teoretycznym (5.45). Dla mieszania burzliwego liczba mocy jest w przybliżeniu stała (wzór (5.46)). Przykładowo dla najprostszego mieszadła łapowego (płaskownik) stałe wynoszą $C_1 = 36,5$, $C_2 = 1,70$.

Analiza zależności (5.45) i (5.46) prowadzi do wniosku, że dla mieszania laminarnego moc mieszania zależy od współczynnika lepkości cieczy, a nie zależy od jej gęstości; dla mieszania burzliwego – przeciwnie.

7.5.8. Pole powierzchni kontaktu międzyfazowego

Jest to pole powierzchni styku kontaktowanych faz. Wielkość tę najczęściej można określić jedynie w przybliżeniu. W obliczeniach procesów przenoszenia masy często operuje się pojęciem powierzchni właściwej kontaktu międzyfazowego a_e , tj. pola powierzchni odniesionej do objętości warstwy kontaktowej V , określonej wzorem (5.47), gdzie A jest polem powierzchni kontaktu międzyfazowego.

Dla aparatów z wypełnieniem powierzchnią właściwą kontaktu międzyfazowego oblicza się, gdy znana jest wartość stopnia użyteczności powierzchni wypełnienia, według wzoru (5.48).

Ze względu na dużą niepewność obliczeniowych wartości φ_e , przy intensywnym zraszaniu skruberów, często przyjmuje się w przybliżeniu $a_e \cong a$. Gdy obliczone wartości φ_e są większe od jedności (co jest możliwe w rzeczywistości), przyjmuje się umownie $\varphi_e = 1$.

Dla aparatów ze zraszonymi ścianami, przy całkowitym pokryciu ścian spływającą warstwą cieczy, powierzchnia kontaktu międzyfazowego jest ściśle określona przez wymiary geometryczne ściany.

Przy rozdrobnieniu jednej z faz (barbotaż, opadanie lub wznoszenie kroplel cieczy w cieczy, emulgowanie dwóch niemieszających się cieczy w mieszalnikach) pole powierzchni kontaktu międzyfazowego określa się na ogół na podstawie przeciętnych wymiarów elementów fazy rozproszonej (pęcherzyki, krople) i tzw. stopnia zatrzymania tej fazy. Stopień zatrzymania ϕ jest to objętościowy udział fazy rozproszonej w warstwie kontaktowej (wzór (5.49)), gdzie V_d – objętość fazy rozproszonej w warstwie kontaktowej.

Wielkość ϕ jest łatwa do określenia przy kontaktowaniu w mieszalnikach (znane objętości faz), natomiast w aparatach przepływowych określa się ją na podstawie znajomości prędkości pozornej i prędkości rzeczywistej fazy rozproszonej. Jeżeli przez warstwę kontaktową o polu przekroju poprzecznego S i wysokości H przepływa faza rozproszona z prędkością pozorną u , a elementy tej fazy przemieszczają się z prędkością w , to czas przebywania elementów w warstwie wynosi H/w , a objętość fazy $V_d = uS \cdot H/w$. Stąd, na podstawie zależności (5.49), otrzymuje się zależność (5.50).

Należy zwrócić uwagę, że przeciwny przepływ drugiej fazy (zwartej) powoduje zmniejszenie prędkości przemieszczania kroplel lub pęcherzyków w stosunku do ścian aparatu, przez co stopień zatrzymania wzrasta. Liczba kulistych elementów fazy rozproszonej w układzie wynosi

$$N = \frac{\text{objętość fazy rozproszonej}}{\text{objętość elementu fazy rozproszonej}} = \frac{\phi V}{\pi d^3/6}$$

Ponieważ powierzchnia jednego elementu fazy rozproszonej wynosi $\pi \cdot d^2$, to powierzchnię właściwą kontaktu międzyfazowego można wyznaczyć ze wzoru (5.51).

PRZYKŁAD 5.1

Obliczyć minimalną porowatość warstwy wypełnienia złożonej z elementów kulistych.

PRZYKŁAD 5.2

W aparacie cylindrycznym o średnicy $D = 700$ mm znajduje się $m_s = 400$ kg katalizatora w kształcie tabletek o średnicy 11,5 mm i wysokości 6 mm. Gęstość katalizatora wynosi $\rho_s = 1770$ kg/m³, zaś gęstość usypanej warstwy $\rho_u = 1100$ kg/m³. Obliczyć średnicę hydrauliczną przestrzeni międzyziarnowych oraz wysokość złoża.

PRZYKŁAD 5.3

Gaz przepływa przez warstwę kulistego wypełnienia o porowatości $\varepsilon_0 = 0,385$, znajdującą się w kolumnie o średnicy $D_1 = 0,4$ m. Okazało się, że konieczne jest zwiększenie wysokości warstwy wypełnienia, wynoszącej $H = 1$ m, o około 50%. Ponieważ urządzenie do transportu gazu pracuje przy pełnym obciążeniu, postanowiono dołączyć równolegle drugą kolumnę o średnicy $D_2 = 0,2$ m, wypełnioną do wysokości $H_2 = 1,5$ m. Jeżeli natężenie przepływu gazu, wynoszące $\dot{m} = 1200$ kg/h, ma zostać zachowane, obliczyć, do jakiej wysokości można dosypać wypełnienia do pierwszej kolumny. Średnica elementów wypełnienia wynosi $d = 6$ mm, a temperatura i ciśnienie gazu są zbliżone do warunków otoczenia. Opory związane z rozgałęzieniem pominać.

PRZYKŁAD 5.4

Przez kolumnę o średnicy $D = 0,5$ m, wypełnioną metalowymi pierścieniami Raschiga o wymiarach $25 \times 25 \times 1,6$ (średnica zewnętrzna \times wysokość \times grubość ścianki) do wysokości $H = 3,8$ m, przepływa $\dot{V}_1 = 778$ m³/h powietrza o temperaturze 20°C i ciśnieniu $0,990 \cdot 10^5$ Pa. Obliczyć stratę ciśnienia powietrza przy przepływie przez warstwę.

PRZYKŁAD 5.5

W warunkach przykładu 5.4 wypełnienie jest zraszane wodą o temperaturze 20°C. Obliczyć stratę ciśnienia gazu i powierzchnię właściwą kontaktu międzyfazowego przy natężeniu przepływu cieczy stanowiącym 70% wartości maksymalnie możliwej, tj. odpowiadającej warunkom zachłystywania.

PRZYKŁAD 5.6

W aparacie cylindrycznym zachodzi reakcja w fazie gazowej w obecności ruchomych, kulistych cząstek katalizatora o średnicy $d = 2$ mm i gęstości $\rho_s = 1450$ kg/m³. Aparat ma średnicę $D = 0,6$ m, a wysokość warstwy fluidalnej nie powinna przekraczać $H = 1,5$ m. Przyjmując, że masa katalizatora wynosi $m_s = 150$ kg, obliczyć przepustowość aparatu dla gazu \dot{V} oraz opory przepływu gazu Δp . Właściwości fizyczne gazu są następujące: gęstość $\rho = 1,52$ kg/m³, współczynnik lepkości $\mu = 1,76 \cdot 10^{-5}$ kg/(m·s). Przyjąć porowatość cząstek (w stanie rozluźnionym) $\varepsilon = 0,40$.

PRZYKŁAD 5.7

Na półce sitowej o średnicy $D = 0,2$ m znajduje się warstwa cieczy, przez którą przepływają pęcherzyki gazu o gęstości 3 kg/m³. Natężenie przepływu gazu wynosi $\dot{V} = 5$ m³/h, a wysokość mieszaniny dwufazowej $H = 150$ mm. Zakładając, że pęcherzyki gazu są kuliste i o jednakowej średnicy, oraz traktując ciecz jako nieruchomą, obliczyć stopień zatrzymania fazy gazowej oraz powierzchnię kontaktu międzyfazowego. Półka ma $i = 250$ otworków o średnicy 3 mm. Właściwości fizyczne cieczy: gęstość $\rho_l = 800$ kg/m³, współczynnik lepkości $\mu_l = 0,5 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s), napięcie powierzchniowe $\sigma = 0,066$ N/m.

PRZYKŁAD 5.8

Do wnętrza pionowej rury o średnicy wewnętrznej $D = 90$ mm i wysokości $H = 7$ m ma być doprowadzana ciecz ($\rho = 1100$ kg/m³, $\mu = 0,93 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s)) przez element zraszający, rozprowadzający ją na ścianę rury (warstewkowy spływ cieczy). Jakie powinno być natężenie przepływu cieczy, aby jej średni czas przebywania w rurze wynosił 10 s? Jaka będzie wtedy grubość spływającej warstewki?

PRZYKŁAD 5.9

W mieszalniku o proporcjach standardowych, z przegrodami, ogrzewa się ciecz od temperatury 20°C. Zainstalowane mieszadło łapowe zwykłe (płaskownik) o średnicy 1 m wykonuje 1 obrót w ciągu sekundy. Obliczyć moc mieszania na początku ogrzewania, jeżeli cieczami są:

a) woda,

b) gliceryna ($\rho = 1261$ kg/m³, $\mu = 1412 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s) dla 20°C).

Obliczyć również moc mieszania dla laboratoryjnego mieszadła o średnicy 0,1 m przy pozostałych warunkach niezmiennych.

ZADANIE 5.1

Obliczyć maksymalną porowatość warstwy wypełnienia złożonej z elementów kulistych.

Odpowiedź: $\varepsilon_0 = 1 - \pi/6 = 0,476$.

ZADANIE 5.2

Jeżeli s oznacza grubość ściany pierścienia Raschiga, a d – jego średnicę zewnętrzną (wysokość), obliczyć, dla jakiego stosunku s/d średnica zastępcza pierścienia jest równa d .

Odpowiedź: $s/d = 0,211$.

ZADANIE 5.3

W otwartym do atmosfery aparacie cylindrycznym o średnicy 100 mm znajduje się warstwa kul o średnicy 3,1 mm, nasypanych do wysokości 840 mm. Jakie musi być ciśnienie powietrza na wlocie do warstwy, aby uzyskać natężenie przepływu 100 kg/h powietrza o temperaturze 80°C? Ciśnienie atmosferyczne wynosi 0,1 MPa, a porowatość warstwy 0,4.

Wskazówka: Równanie Erguna należy przekształcić do postaci $\Delta p \cdot \rho = CH$; dla elementarnej wysokości aparatu słuszna jest zależność $(M/RT)p \cdot dp = -CdH$. Całkując to równanie oraz określając C , można obliczyć ciśnienie wlotowe powietrza.

Odpowiedź: $1,495 \cdot 10^5$ Pa.

ZADANIE 5.4

W skruberze wypełnionym ceramicznymi pierścieniami Raschiga o wymiarach $25 \times 25 \times 3,2$ mm zachodzi proces absorpcji składnika gazu w wodzie. Prędkość gazu w dolnym przekroju absorbera wynosi 0,9 m/s. Jeżeli prędkość masowa wody jest równa $6,78$ kg/(m²s), jaki jest stosunek prędkości gazu na wlocie do prędkości odpowiadającej początkowi zachłystywania? Ze względu na małe stężenie składnika absorbowanego w fazie ciekłej przyjmując niezmienność natężenia przepływu cieczy z wysokością skrubera oraz właściwości fizyczne cieczy jak dla wody. W dolnym przekroju absorbera temperatura cieczy wynosi 35°C, a gęstość gazu $1,242$ kg/m³.

Odpowiedź: 0,95.

ZADANIE 5.5

Przez warstwę piasku przepływa od dołu woda o temperaturze 25°C. Średnica zastępcza ziaren piasku wynosi 0,92 mm, czynnik kształtu 1,26, a gęstość 2330 kg/m³. Porowatość warstwy piasku, uprzednio sfluidyzowanego, wynosi 0,43. Obliczyć stratę ciśnienia wody przy przepływie przez warstwę o wysokości 1,2 m, jeżeli prędkość przepływu wody stanowi 70% prędkości odpowiadającej początkowi fluidyzacji.

Odpowiedź: 6260 Pa.

ZADANIE 5.6

Płuczka o średnicy 80 mm wypełniona jest 5 dm³ 98% kwasu siarkowego o temperaturze 20°C ($\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s), $\sigma = 0,0815$ N/m). W płuczce osuszane jest

powietrze doprowadzane przez bełkotkę z 50 otworami o średnicy 3 mm. Przy jakim objętościowym natężeniu przepływu powietrza jego stopień zatrzymania wyniesie 10%? Jaka będzie wtedy powierzchnia kontaktu międzyfazowego?

Odpowiedź: $\dot{V} = 73,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, $A = 0,76 \text{ m}^2$.

ZADANIE 5.7

Po pionowej ścianie spływa woda o temperaturze 65°C warstwą o grubości 0,50 mm. Obliczyć, jak zmieni się grubość spływającej warstewki, gdy przy tym samym jednostkowym natężeniu zraszania temperatura wody będzie wynosić 35°C .

Odpowiedź: zwiększy się o 0,58 mm.

7.6. FILTRACJA

Filtracją nazywa się proces oddzielania ciał stałych od cieczy, w którym ciecz przepływa przez warstwę osadu porowatego osadzoną na przegrodzie filtracyjnej.

Punktem wyjścia do rozważań jest równanie Darcy'ego (6.1), będące uogólnieniem zależności (5.14). W równaniu (6.1) poszczególne symbole oznaczają:

- L – grubość warstwy porowatej, m,
- u – prędkość przepływu cieczy, m/s,
- ρ_l – gęstość cieczy, kg/m^3 ,
- K_p – przepuszczalność.

Po przekształceniu otrzymuje się równanie filtracji (6.2), w którym:

- dV/dt – objętościowe natężenie przepływu filtratu, m^3/s ,
- A – powierzchnia filtracji, m^2 ,
- μ_l – współczynnik lepkości filtratu, $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$,
- V – objętość filtratu otrzymanego od początku procesu, m^3 .

Wielkość x oznacza masę osadu przypadającą na jednostkę objętości czystego filtratu (wzór (6.3)). Współczynnik α nazywa się oporem właściwym osadu (wzór (6.4)), gdzie:

- k' – stała liczbowa (dla cząstek kulistych osadu równa (5.56)),
- a – powierzchnia właściwa osadu, m^2/m^3 ,
- ρ_s – gęstość ciała stałego, kg/m^3 ,
- ε – porowatość,
- φ – współczynnik kształtu.

Wyraz $R_l [\text{m}^{-1}]$ w równaniu (6.2) jest oporem właściwym przegrody filtracyjnej. Dla osadów ściśliwych zachodzi związek (6.5), gdzie:

- b – stała liczbowa,
- s – współczynnik ściśliwości osadu.

Osady nieściśliwe mają współczynnik ściśliwości $s = 0$; dla nich porowatość praktycznie nie zależy od ciśnienia procesu. Podstawiając (6.5) do (6.4), otrzymuje się wzór (6.6), przy czym: $k = k' b$ – stała liczbowa. Dla osadów nieściśliwych $\alpha = \alpha_0$. Podstawowe równanie filtracji (6.2) można zatem napisać w postaci (6.7).

7.6.1. Filtracja izobaryczna

Gdy filtrację prowadzi się pod stałym ciśnieniem ΔP , równanie (6.7) można scałkować do postaci (6.8) (równanie Rutha), w którym wyrażenia (6.9) i (6.10) nazywają się stałymi filtracji dla danego filtru i osadu. Równanie (6.8) podaje zależność ilości otrzymanego filtratu od czasu filtracji (rys. 6.1).

Stałe C i K można obliczyć z równań (6.9) i (6.10), lecz najczęściej wyznaczane są doświadczalnie. Do ich wyznaczenia niezbędny jest pomiar ilości otrzymywanego filtratu w dwóch odstępach czasu, liczonego od początku procesu. W przypadku większej liczby danych doświadczalnych można obliczyć stałe metodą najmniejszych kwadratów lub graficznie. W tym ostatnim przypadku różniczkuje się równanie (6.8), zastępuje się różniczki przyrostami skończonymi i przekształca do postaci (6.11). Jest to równanie prostej, z którego graficznie (rys. 6.2) można wyznaczyć stałe K i C . W uzasadnionych przypadkach, gdy opór przegrody filtracyjnej można pominąć, przyjmuje się $C = 0$.

7.6.2. Filtracja ze stałym natężeniem przepływu filtratu

Proces ten prowadzi się przy $V/t = \text{const}$, zwiększając stopniowo ciśnienie filtracji, aby pokonać opór narastającej warstwy osadu. Lewa strona równania (6.7) ma wartość stałą, można zatem zapisać zależność (6.12). Z równania (6.12) można znaleźć zależność ciśnienia od ilości uzyskanego filtratu (wzór (6.13)), gdzie wielkości B i D są określone odpowiednio zależnościami (6.14) i (6.15), lub zależność zmian ciśnienia od czasu (6.16), gdzie wielkość E jest określona wzorem (6.17).

7.6.3. Filtracja dwustopniowa

W celu zapewnienia odpowiednich warunków na początku procesu (m.in. zapobieżenia przedostawaniu się osadu przez tkaninę przy zbyt dużym ciśnieniu początkowym) prowadzona jest filtracja dwustopniowa (rys. 6.3):

- do uzyskania V_1 przesączu w czasie t_1 – pierwszy okres filtracji ze stałą szybkością; następuje stopniowy wzrost ciśnienia,
- do uzyskania V przesączu w czasie t – drugi okres filtracji pod stałym ciśnieniem.

Równanie drugiego okresu filtracji ma postać (6.18), wynikającą ze scałkowania równania (6.7) dla $\Delta P = \text{const}$ w granicach (t_1, t) i (V_1, V) .

W punkcie o współrzędnych (V_1, t_1) obowiązuje równanie filtracji izobarycznej oraz przy stałej szybkości; stąd wynika zależność (6.19), z której można wyznaczyć czas trwania pierwszego okresu filtracji według (6.20).

7.6.4. Przemywanie osadu

Aby usunąć przesącz zawarty w osadzie po zakończonej filtracji, prowadzi się przemywanie osadu. Przepuszczanie cieczy przemylającej tą samą drogą co zawiesziny filtracyjnej nazywa się umownie przemylaniem współprądowym (rys. 6.4). W prasach filtracyjnych możliwe jest też tzw. przemylanie przeciwpądowe, w którym ciecz myjąca przepływa od czoła przez tkaninę i całą grubość osadu w każdej ramie (rys. 6.5).

Przemylanie jest procesem przepływu cieczy przez warstwę porowatą o stałej grubości. Jeśli zatem prowadzone jest, jak zazwyczaj, pod stałym ciśnieniem, można do obliczania szybkości przemylania stosować równanie (6.21), analogiczne do (6.19), gdzie stałe K_m i C_m mogą być obliczone na podstawie stałych K i C filtracji izobarycznej według zależności (6.22) i (6.23), wynikających z równań (6.9) i (6.10).

Gdy przemylanie prowadzone jest w prasie filtracyjnej przeciwpądowo, wówczas grubość osadu jest dwukrotnie większa, a powierzchnia dwukrotnie mniejsza, co powoduje, że szybkość przemylania obliczoną z równania (6.21) należy czterokrotnie zmniejszyć (wzór (6.24)).

Gdy filtrat jest roztworem pewnej substancji, a przemylanie osadu następuje czystym rozpuszczalnikiem (np. wodą), to zmiany stężenia substancji w wypływającej cieczy myjącej można wyrazić równaniem (6.25), gdzie:

- c – początkowe stężenie substancji w filtracie, kg/m^3 ,
- k_m – stała,
- $u_m (= V_m / (At_m))$ – prędkość pozorna cieczy myjącej, m/s ,
- t_d – czas przemylania dyfuzyjnego, tj. od chwili, w której nastąpiła zmiana stężenia cieczy odpływającej, s ,
- L – grubość osadu, m .

7.6.5. Optymalny czas filtracji izobarycznej

Przy założeniu, że:

- współczynniki lepkości cieczy myjącej i filtratu są jednakowe,
- ciśnienie przemylania jest takie jak ciśnienie filtracji,
- wyznaczono uprzednio doświadczalnie stosunek ilości cieczy myjącej do ilości filtratu, dający wystarczające przemycie ($n = V_m / V$),
- znany jest czas potrzebny do rozładowania filtru i przygotowania go do ponownej filtracji, t_c ,

można obliczyć optymalny czas filtracji, przy którym wydajność cyklu filtracyjnego jest maksymalna, z równania (6.26). Wydajność cyklu jest wówczas określona wzorem (6.27).

7.6.6. Optymalny czas filtracji dwustopniowej

Przy założeniach jak w punkcie 6.5 oraz przy zaniedbaniu oporu przegrody filtracyjnej ($C = 0$) czas drugiego okresu filtracji dwustopniowej, przy którym występuje maksimum wydajności cyklu, wyraża się równaniem (6.28). Gdyby przyjąć, że czas przemywania jest niezależny od ilości osadu i włączyć go do stałej wartości t_c , równanie (6.28) przyjęłoby postać ($n = 0$) (6.28a). Wydajność cyklu jest wówczas określona wzorem (6.29).

7.6.7. Filtracja przez warstwę o stałej grubości

Dla filtrów, w których przez warstwę ziarnistą o stałej grubości (np. filtr piaskowy) przepuszcza się ciecz o niewielkiej zawartości ciała stałego, ich opór nie zależy od ilości przepuszczonego filtratu i równanie (6.2) można zapisać w postaci (6.30), gdzie R ma wartość stałą i nazywa się oporem osadu, $\text{kg}/(\text{m}^4\text{s})$. Jeśli do takiego filtru naleje się cieczy do wysokości H , to nacisk warstwy cieczy na złożę ziarniste jest określony wzorem (6.31). W czasie dt wypłynie dV cieczy, a poziom obniży się o dH , co podstawione do (6.30) da zależność (6.32), a po scałkowaniu w granicach od H_1 do H_2 otrzymujemy zależność (6.33), gdzie: k – współczynnik proporcjonalności (wyznaczany doświadczalnie), $1/\text{s}$.

Jeśli na przegrodę filtracyjną naleje się do wysokości H_1 zawiesinę o grubych, szybko sedimentujących ziarnach, to utworzą one warstwę filtrującą o grubości proporcjonalnej do objętości zawiesiny, a więc i do H_1 . Zaniedbując opór przegrody, można wówczas wyprowadzić równanie (6.34) analogiczne do (6.33), gdzie: k_1 – współczynnik proporcjonalności, $1/\text{s}$.

PRZYKŁAD 6.1

Wyniki prób laboratoryjnych na filtrze płytowo-ramowym, zbudowanym z dwóch ram mających łącznie powierzchnię filtracyjną $0,1 \text{ m}^2$, podane są poniżej. Do badań stosowano zawiesinę węglanu wapnia w wodzie.

$$\Delta P = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

t [s]	0	26	98	211	361	555	788	1083
V [dm^3]	0	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1 napełniony filtr

$$\Delta P = 3.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

t [s]	0	17	61	132	231	358	511	693
V [dm ³]	0	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8	16,1 napełniony filtr

W oznaczeniach wagowych uzyskano stosunek masy mokrego osadu do masy suchego osadu dla niższego ciśnienia 1,473, a dla wyższego 1,470. Gęstość suchego osadu wynosiła odpowiednio 1182 i 1187 kg/m³ dla niższego i wyższego ciśnienia. Pozostałe dane są następujące: ułamek masowy CaCO₃ w zawieszynie $x_z = 0,139$, współczynnik lepkości filtratu $\mu_f = 0,856 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s), gęstość węglanu wapnia $\rho_s = 2627$ kg/m³, gęstość filtratu $\rho_f = 996,4$ kg/m³. Obliczyć na tej podstawie:

- wartości stałych filtracyjnych metodą graficzną i najmniejszych kwadratów,
- współczynniki oporu osadu,
- porowatość osadu,
- współczynnik ściśliwości osadu,
- współczynnik oporu przegrody filtracyjnej.

PRZYKŁAD 6.2

Zakładając, że zawiesina użyta do filtracji w poprzednim przykładzie zawiera niewielką ilość rozpuszczonej substancji i własności zawiesiny i filtratu są praktycznie jednakowe, obliczyć czas niezbędny do przeciwprądowego przemycia otrzymanego osadu pod ciśnieniem $2,1 \cdot 10^5$ Pa, a objętość wody przemywającej jest równa trzykrotnej objętości cieczy pozostającej w porach osadu. Przyjąć, że prędkość przemywania stanowi 75% obliczeniowej prędkości teoretycznej.

PRZYKŁAD 6.3

Prasa filtracyjna płytowo-ramowa, posiadająca 20 ram o rozmiarach $0,6 \times 0,6 \times 0,025$ m, jest używana do filtracji zawiesiny zawierającej 10% ciała stałego. Placek filtracyjny jest nieściśliwy i zawiera 70% ciała stałego. Ile kilogramów czystego filtratu otrzyma się do chwili, gdy ramy napełnią się osadem, którego gęstość w stanie mokrym wynosi 1440 kg/m³?

PRZYKŁAD 6.4

Podczas filtracji izobarycznej uzyskano następujące wyniki:

- po czasie 120 sekund 3 dm³ filtratu,
- po czasie 300 sekund 5 dm³ filtratu.

Obliczyć objętość filtratu uzyskanego po 1200 sekundach zarówno uwzględniając, jak i pomijając opór przegrody filtracyjnej.

PRZYKŁAD 6.5

W badaniach laboratoryjnych filtracji izobarycznej, prowadzonej na filtrze o powierzchni $0,3 \text{ m}^2$ dla pewnej zawiesiny, wyznaczono stałe równania Rutha

i	ΔP_i [MPa]	K_i [m^6/s]	C_i [m^3]
1	0,18	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,55 \cdot 10^{-3}$
2	0,3	$1,675 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-3}$
3	0,4	$1,84 \cdot 10^{-4}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
4	0,5	$2,14 \cdot 10^{-4}$	$0,968 \cdot 10^{-3}$

Współczynnik lepkości filtratu wynosi $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Filtracja przemysłowa była prowadzona przy $\Delta P_5 = 0,7 \text{ MPa}$ na filtrze o powierzchni $1,2 \text{ m}^2$. Obliczyć objętość przesączu otrzymanego na filtrze przemysłowym w czasie 8000 s oraz ilość wody, o współczynniku lepkości $1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$, służącej do przemywania osadu, przy założeniu, że czas przemywania przeciwprądowego wynosi 8000 s .

PRZYKŁAD 6.6

W czasie doświadczalnej filtracji na filtrze przemysłowym pod ciśnieniem $0,2 \text{ MPa}$ otrzymano 1 m^3 przesączu w czasie 540 s , a $1,5 \text{ m}^3$ w czasie 1200 s , zaś pod ciśnieniem $0,3 \text{ MPa}$ te same objętości przesączu otrzymano odpowiednio w czasie 387 i 860 s . Filtracja przemysłowa ma być prowadzona przy stałym ciśnieniu $0,4 \text{ MPa}$. Wiedząc, że czas filtracji w jednym cyklu wynosi $0,5 \text{ h}$, do przemywania używa się cieczy, której $\mu_l = \mu_m$, płynącej tę samą drogą co filtrat w ilości $1/4$ objętości otrzymanego filtratu, a czas czyszczenia filtru wynosi $t_c = 45$ minut, obliczyć wydajność dobową filtracji.

PRZYKŁAD 6.7

Obliczyć powierzchnię prasy filtracyjnej, której wydajność ma wynosić $14,4 \text{ m}^3$ przesączu na dobę, jeżeli pełny cykl jej pracy trwa 100 minut, w tym filtracja $33,3$ minuty, przemywanie $16,7$ minut, a rozładowanie i czyszczenie prasy – 50 minut. W czasie filtracji tej samej zawiesiny na prasie laboratoryjnej o powierzchni $0,2 \text{ m}^2$ otrzymano w ciągu 1000 sekund $0,02 \text{ m}^3$ przesączu, a po upływie 3000 sekund – $0,04 \text{ m}^3$ przesączu. Filtrację prowadzi się pod stałym ciśnieniem, takim samym jak w próbach laboratoryjnych. Obliczyć również wydajność prasy w 1 cyklu oraz ilość cieczy myjącej, o lepkości równej lepkości filtratu, zużywanej w cyklu, jeśli przemywanie odbywa się pod takim samym ciśnieniem i tą samą drogą co filtracja. O ile zwiększy się wydajność cyklu, gdy proces poprowadzi się w sposób optymalny przy tym samym stosunku ilości cieczy myjącej do ilości otrzymanego filtratu?

PRZYKŁAD 6.8

Podczas filtracji izobarycznej wyznaczono stałe $K = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^6/\text{s}$, $C = 0,1 \text{ m}^3$. Stwierdzono też, że osad jest należycie przemyty, gdy do przemywania zastosuje się objętość cieczy myjącej równą połowie ilości otrzymanego przesączu. Czas rozładowania i czyszczenia filtru wynosi 25 minut. Wyprowadzić wzór (9.26) na optymalny czas filtracji izobarycznej i obliczyć wydajność filtracji dla optymalnego cyklu. Porównać tę wydajność z wynikiem obliczeń, w których zakłada się przy różniczkowaniu, że $C = 0$.

PRZYKŁAD 6.9

Osad o współczynniku ściśliwości $s = 0,2$ jest filtrowany ze stałą szybkością $0,5 \text{ dm}^3/\text{s}$. W początkowym momencie manometr zainstalowany na dopływie zawiesiny wskazuje $\Delta P_0 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nadciśnienia, a po 600 sekundach $\Delta P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Po jakim czasie nadciśnienie wzrośnie do $\Delta P_2 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? Ile filtratu uzyska się w tym czasie?

PRZYKŁAD 6.10

W ramowej prasie filtracyjnej prowadzi się filtrację zawiesiny dwustopniowo:

- ze stałym natężeniem przepływu filtratu $3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/(\text{m}^2\text{s})$ do uzyskania ciśnienia $0,25 \text{ MPa}$,
- pod stałym ciśnieniem $0,25 \text{ MPa}$.

Osadu nie przemywa się. Czas rozładowania i czyszczenia prasy przewiduje się jako równy $0,75 \text{ h}$. Badania laboratoryjne prowadzone na filtrze doświadczalnym o powierzchni $0,09 \text{ m}^2$ przy użyciu tej samej zawiesiny i płótna filtracyjnego dały następujące wyniki:

ΔP [MPa]	t [s]	V [m^3]
0,2	970	0,0018
0,2	3650	0,0036
0,35	740	0,0019
0,35	2560	0,0036

Ze względów technologicznych wydajność procesu ma wynosić $\dot{V} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Zaprojektować prasę (powierzchnia, liczba ram o wymiarach $850 \times 850 \text{ mm}$), jeśli cykl filtracyjny ma być prowadzony w sposób optymalny.

PRZYKŁAD 6.11

Filtrację zawiesiny drobnoziarnistej prowadzi się dwustopniowo. Początkowo utrzymuje się stałą szybkość filtracji, aż do uzyskania $0,05 \text{ m}^3$ filtratu, a na-

stępnie utrzymuje się stałe ciśnienie, dla którego stałe równania Rutha wynoszą $K = 3,72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6/\text{s}$, $C = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. Po skończonym procesie osad przemywa się współprądowo cieczą o współczynniku lepkości takim samym jak dla filtratu w ilości 1/3 jego objętości. Czas rozładowania i czyszczenia filtru wynosi 1800 s. Zaniedbując w obliczeniach optymalizacyjnych opór przegrody filtracyjnej, wyprowadzić równanie (9.28) i obliczyć wydajność filtracji. Jaka jest szybkość I okresu filtracji?

PRZYKŁAD 6.12

Zawiesinę wodną, zawierającą 200 kg ciała stałego w 1 m^3 objętości, filtruje się w prasie ramowej o powierzchni czynnej jednej ramy $0,2 \text{ m}^2$. Rozebranie prasy trwa 150 s, zdjęcie osadu z 1 ramy 150 s i ponowny montaż prasy również 150 s. Wydajność filtracji ma wynosić $0,6 \text{ m}^3/\text{h}$ przy stałym ciśnieniu filtracji $0,2 \text{ MPa}$. Osadu nie płucze się i można go uznać za nieściśliwy. Opór przegrody filtracyjnej jest pomijalny. Obliczyć minimalną liczbę ram oraz ich grubość. Dane o osadzie i przesączu:

- gęstość ciała stałego $\rho_s = 3000 \text{ kg/m}^3$,
- porowatość osadu $\varepsilon = 0,5$,
- opór właściwy osadu $\alpha_0 = 2,87 \cdot 10^{10} \text{ m/kg}$,
- współczynnik lepkości przesączu $\mu_f = 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$,
- gęstość przesączu $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$.

PRZYKŁAD 6.13

Prowadzono filtrację zawiesiny ciała stałego z rozcieńczonego wodnego roztworu H_2SO_4 na filtrze o powierzchni 2 m^2 . Uzyskano $0,2 \text{ m}^3$ filtratu. Analiza zawiesiny wykazała zawartość 15% ciała stałego o gęstości 1830 kg/m^3 . Osad ma porowatość 0,5. Filtrat o gęstości 1000 kg/m^3 ma stężenie $0,00120 \text{ kg H}_2\text{SO}_4/\text{m}^3$. Po skończonej filtracji przemywano osad wodą w ilości $0,1 \text{ dm}^3/\text{s}$ i po 500 sekundach stężenie H_2SO_4 w popłuczynach wynosiło $0,00095 \text{ kg/m}^3$. Po jakim czasie należy spodziewać się stężenia $0,00012 \text{ kg/m}^3$?

PRZYKŁAD 6.14

W próżniowym filtrze obrotowym o powierzchni 2 m^2 na 1 obrót przypada 80 dm^3 przesączu. Kąt zanurzenia filtru wynosi 90° (rys. 9.8), a zawiesina zawiera 15% objętościowych ciała stałego. Na powierzchni filtru po zdrapaniu osadu pozostaje jeszcze warstwa o grubości 1 mm. Porowatość osadu wynosi $\varepsilon = 0,3$, a jego stopień ściśliwości $s = 0,2$. Opór przegrody jest pomijalny. Porównać zwiększenie wydajności filtracji przez:

- 1) podwojenie szybkości obrotowej,
- 2) podwojenie ciśnienia,
- 3) podwojenie głębokości zanurzenia.

PRZYKŁAD 6.15

Do filtru piaskowego o średnicy 0,5 m z warstwą piasku o grubości 0,15 m nalano wody o temperaturze 20°C do wysokości $H_1 = 4$ m i stwierdzono, że poziom opadł do $H_2 = 3,5$ m w czasie 420 s. Obliczyć przepustowość filtru, jeśli poziom będzie utrzymywany stale na wysokości 4 m.

PRZYKŁAD 6.16

W czasie filtracji zawiesiny gruboziarnistej i szybko sedymentującej uzyskano obniżenie poziomu cieczy z $H_1 = 4$ m do $H_2 = 2,5$ m w czasie 310 s. Na jakim poziomie będzie zwierciadło cieczy po upływie 600 s od początku filtracji?

ZADANIE 6.1

Zawiesina, zawierająca 48 kg ciała stałego na każdy 1 m³ filtratu o współczynniku lepkości $1,2 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s), ma być filtrowana na prasie filtracyjnej przy stałym ciśnieniu 13,8 kPa. Opór właściwy osadu można przedstawić równaniem $\alpha = 5,84 \cdot 10^7 \cdot (\Delta P)^{0,2}$. Obliczyć całkowitą powierzchnię filtracyjną, jeżeli w czasie 2-godzinnej filtracji otrzymuje się 11 m³ filtratu. Opór tkaniny oraz ilość cieczy zatrzymanej w placku filtracyjnym można zaniedbać.

O d p o w i e d ź: $A = 3,71$ m².

ZADANIE 6.2

Filtr obrotowy wykonuje 2 obroty w ciągu 60 s. Zanurzona część filtru stanowi 1/5 jego powierzchni. Zmierzono, że z 1 m² powierzchni zanurzonej otrzymuje się 0,15 m³ filtratu w ciągu 60 s w danych warunkach filtracji. Jaka powinna być powierzchnia filtru, aby otrzymać 0,2 m³ filtratu na każdy obrót?

O d p o w i e d ź: $A = 13,3$ m².

ZADANIE 6.3

Zaprojektować prasę filtracyjną (obliczyć liczbę ram o wymiarach 0,5 × 0,5 m), która w czasie 1 godziny powinna przefiltrować 0,5 m³ przesączu pod stałym ciśnieniem 0,2 MPa. Podczas prób prowadzonych pod tym samym ciśnieniem na filtrze doświadczalnym o powierzchni 2 m² otrzymano 0,03 m³ przesączu w ciągu 120 s, a 0,06 m³ przesączu w czasie 360 s. Jaki będzie na tej prasie czas przeciwnądowego płukania osadu przy użyciu 0,1 m³ cieczy o lepkości równej lepkości przesączu?

O d p o w i e d ź: 10 ram; $t_m = 4600$ s.

ZADANIE 6.4

Badania prowadzone na filtrze o powierzchni 0,1 m² pod ciśnieniem 35 kPa dały następujące wyniki:

Ilość przesączu [m ³]	0,00292	0,00780
Czas [s]	146	888

Filtrowany był osad, dla którego można przyjąć nieściśliwość. W prasie filtracyjnej o powierzchni 10 m² z taką samą tkaniną powinno się uzyskać z takiej samej zawiesiny 1 m³ przesączu w czasie 660 s. Pod jakim ciśnieniem należy prowadzić proces?

Odpowiedź: 72,8 kPa.

ZADANIE 6.5

Obliczyć dobową wydajność prasy filtracyjnej o powierzchni 10 m², pracującej pod stałym ciśnieniem 0,2 MPa, jeżeli w czasie 1 cyklu otrzymuje się 9,8 m³ filtratu. Badania laboratoryjne wykazały, że na filtrze o powierzchni 1 m² otrzymano 1 m³ przesączu pod ciśnieniem 0,1 MPa w czasie 1 godziny, a przy ciśnieniu 0,3 MPa w czasie 0,5 godziny. Opór tkaniny filtracyjnej można zaniedbać. Czas rozładowania i czyszczenia filtru wynosi 1 godzinę. Osadu nie przemywa się.

Odpowiedź: 145 m³/dobę.

ZADANIE 6.6

Opierając się na wynikach badań laboratoryjnych filtracji zawiesiny na filtrze laboratoryjnym o powierzchni 0,3 m², określono stałe filtracji

ΔP [MPa]	K [m ⁶ /s]	C [m ³]
0,18	$13 \cdot 10^{-5}$	0,00155
0,3	$16,75 \cdot 10^{-5}$	0,0012

Filtracja przemysłowa jest prowadzona pod ciśnieniem 0,5 MPa na filtrze o powierzchni 1,2 m². Współczynnik lepkości filtratu wynosi $4 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s). Obliczyć objętość przesączu otrzymanego w czasie 1,5 h i ilość wody o współczynniku lepkości $1 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s) przemywającej współprądowo osad pod tym samym ciśnieniem w czasie 1,5 h.

Odpowiedź: $V = 4,32$ m³; $V_m = 8,64$ m³.

ZADANIE 6.7

Na filtrze okresowym prowadzono filtrację pod stałym nadciśnieniem 0,2 MPa. Chwilowa szybkość filtracji w momencie początkowym wynosiła 0,02 m³/1000 s. Po 1000 s filtracji zebrano 0,015 m³ przesączu. Obliczyć, pod jakim nadciśnieniem

należy prowadzić proces, aby w tym samym czasie 1000 s uzyskać dwukrotnie więcej przesączu. Założyć, że osad jest nieściśliwy.

Odpowiedź: 0,5 MPa.

ZADANIE 6.8

Podczas filtracji ze stałą szybkością uzyskano $0,25 \text{ m}^3$ przesączu, a nadciśnienie wzrosło przy tym do $2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Ile przesączu otrzyma się do chwili, gdy nadciśnienie osiągnie wartość $4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? Osad można uważać za nieściśliwy, a opór przegrody filtracyjnej za pomijalny.

Odpowiedź: $0,4 \text{ m}^3$.

ZADANIE 6.9

Podczas badań filtracji pod stałym ciśnieniem $\Delta P = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ uzyskano $0,1 \text{ m}^3$ filtratu w czasie 2280 s. Współczynnik ściśliwości osadu wynosi 0,4. Opór przegrody filtracyjnej można pominąć. Jeśli na tym filtrze prowadzony będzie proces filtracji ze stałą szybkością $60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, jakie ciśnienie uzyska się po zebraniu $0,1 \text{ m}^3$ filtratu?

Odpowiedź: $21,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

ZADANIE 6.10

Rozładowanie i czyszczenie filtru okresowego trwa 2000 s. Prowadząc badania filtracji pod stałym ciśnieniem $\Delta P = 9,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, uzyskano 6 m^3 przesączu w czasie 2000 s. Porównać maksymalną wydajność filtracji prowadzonej pod stałym ciśnieniem $3,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ z maksymalną wydajnością filtracji dwustopniowej, w której pierwszy okres prowadzony jest ze stałą szybkością $0,005 \text{ m}^3/\text{s}$, a drugi przy $\Delta P = 3,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Płukanie odbywa się współprądowo cieczą o lepkości zbliżonej do lepkości filtratu w ilości $0,3$ objętości uzyskanego filtratu. Opór tkaniny filtracyjnej można zaniedbać.

Odpowiedź: filtracja izobaryczna $1,18 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$,
filtracja dwustopniowa $1,14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

Auxiliary Tables

Table AT-1

Properties of water

Temperature T [°C]	Density ρ [kg/m ³]	Heat capacity c_p [J/(kg·K)]	Heat conduction coefficient k [W/(m·K)]	Viscosity $\mu \cdot 10^3$ [kg/(m·s)]
0	999.9	4226	0.558	1.7936
5	1000.0	4206	0.568	1.5347
10	999.7	4195	0.577	1.2964
15	999.1	4187	0.587	1.1356
20	998.2	4182	0.597	0.9934
25	997.1	4178	0.606	0.8806
30	995.7	4176	0.615	0.7924
35	994.1	4175	0.624	0.7198
40	992.2	4175	0.633	0.6580
45	990.2	4176	0.640	0.6051
50	988.1	4178	0.647	0.5551
55	985.7	4179	0.652	0.5099
60	983.2	4181	0.658	0.4717
65	980.6	4184	0.663	0.4354
70	977.8	4187	0.668	0.4040
75	974.9	4190	0.671	0.3766
80	971.8	4194	0.673	0.3521
85	968.7	4198	0.676	0.3285
90	965.3	4202	0.678	0.3089
95	961.9	4206	0.680	0.2922
100	958.4	4211	0.682	0.2775
110	951.0	4224	0.684	0.2550
120	943.5	4232	0.685	0.2354
130	934.5	4250	0.686	0.2118
140	926.3	4257	0.684	0.2010
150	916.9	4270	0.680	0.1853
160	907.6	4285	0.679	0.1716

Properties of dry air at 98,1 kPa (1 at)

Temperature T [°C]	Density ρ [kg/m ³]	Heat capacity c_p [J/(kg·K)]	Heat conduction coefficient k [W/(m·K)]	Viscosity $\mu \cdot 10^5$ [kg/(m·s)]
-100	1.948	1022	0.0163	1.187
-50	1.534	1013	0.0198	1.481
-20	1.365	1005	0.0226	1.628
0	1.252	1011	0.0237	1.746
10	1.206	1010	0.0244	1.785
20	1.164	1012	0.0251	1.824
30	1.127	1013	0.0258	1.868
40	1.092	1014	0.0265	1.912
50	1.057	1016	0.0272	1.952
60	1.025	1017	0.0279	1.991
70	0.996	1018	0.0286	2.040
80	0.968	1019	0.0293	2.079
90	0.942	1021	0.0300	2.123
100	0.916	1022	0.0307	2.167
120	0.870	1025	0.0320	2.256
140	0.827	1027	0.0333	2.334
150	0.810	1028	0.0336	2.373
160	0.789	1030	0.0344	2.412
180	0.755	1032	0.0357	2.491
200	0.723	1035	0.0370	2.569
250	0.653	1043	0.0400	2.756
300	0.596	1047	0.0429	2.932
350	0.549	1055	0.0457	3.099
400	0.508	1059	0.0485	3.275

List of recommended literature supporting

- [1] C.O. Bennet, J.E. Myers, *Przenoszenie pędu, ciepła i masy*, WNT, Warszawa 1966.
- [2] J. Ciborowski, *Inżynieria chemiczna – inżynieria procesowa*, WNT, Warszawa 1973.
- [3] J. Kamiński, *Mieszanie układów wielofazowych*, WNT, Warszawa 2004.
- [4] Z. Kembłowski, S. Michałowski, C. Strumiłło, R. Zarzycki, *Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa 1985.
- [5] R. Koch, A. Noworyta, *Procesy mechaniczne w inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1998.
- [6] T. Kudra (Ed.), *Zbiór zadań z podstaw teoretycznych inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa 1985.
- [7] Z. Orzechowski, *Przepływy dwufazowe*, PWN, Warszawa 1990.
- [8] Z. Pakowski, M. Głębowski, *Symulacja procesów inżynierii chemicznej*, Politechnika Łódzka, Łódź 2001.
- [9] K.G. Pawłow, P.G. Romankow, A.A. Noskow, *Przykłady i zadania z zakresu aparatury i inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1974.
- [10] R.H. Perry, C.H. Chilton, *Chemical engineers' handbook*, McGraw Hill, New York 1995.
- [11] R. Pohorecki, S. Wroński, *Kinetyka i termodynamika procesów inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1979.
- [12] M. Serwiński, *Zasady inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa 1999.
- [13] R. Zarzycki (Ed.), *Zadania rachunkowe z inżynierii chemicznej*, Politechnika Łódzka, Łódź 1974.
- [14] Z. Ziołkowski (Ed.), *Podstawowe procesy inżynierii chemicznej*, PWN, Warszawa 1982.
- [15] S. Wroński, R. Pohorecki, J. Siwiński, *Przykłady obliczeń z termodynamiki i kinetyki procesów inżynierii chemicznej*, WNT, Warszawa 1979.

30.00



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-339548

Wydział Inżynierii i Technologii Chemicznej
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
ul. Warszawska 24
31-155 Kraków
tel.: +48 12 628 27 01
fax: +48 12 628 20 35

e-mail: wiitch@chemia.pk.edu.pl
<http://www.chemia.pk.edu.pl>

ISBN 978-83-7242-677-2

Publikacja bezpłatna

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000271120

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego