

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
im. Tadeusza Kościuszki



MARIAN PALUCH

# Mechanika teoretyczna

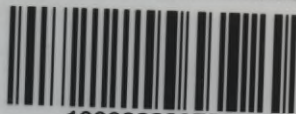
Wydanie ósme



KRAKÓW 2006

*podręcznik* dla studentów  
wyższych szkół technicznych

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000229755

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
im. Tadeusza Kościuszki

MARIAN PALUCH

# MECHANIKA TEORETYCZNA

PODRĘCZNIK DLA STUDENTÓW WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH

Wydanie ósme



Kraków 2006

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Kazimierz Furtak

PRZEWODNICZĄCY SEKCJI WYDAWNICTW DYDAKTYCZNYCH

Maria Misiągiewicz

REDAKTOR SERII Jacek Śliwiński  
Wydział Inżynierii Lądowej

RECENZENT Zbyszko Stojek

SEKRETARZ SEKCJI I OPRACOWANIE REDAKCYJNE Jolanta Wyznakiewicz

PROJEKT OKŁADKI Barbara Skąpska

© Copyright by Politechnika Krakowska, Kraków 2006

ISBN 83-7242-386-5  
ISBN 978-83-7242-386-3

Wydanie pierwsze – 1987 r.  
Wydanie drugie – 1988 r.  
Wydanie trzecie – 1990 r.  
Wydanie czwarte – 1992 r.  
Wydanie piąte – 1996 r.  
Wydanie szóste – 1999 r.  
Wydanie siódme – 2002 r.



W-78464

Wydawnictwo PK, ul. Podchorążych 1, 30-084 Kraków; tel./fax: (0...12) 637 42 89, 628 23 80  
e-mail: wydawnictwo@pk.edu.pl □ www.wydawnictwo.pk.edu.pl  
Adres do korespondencji: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Druk i oprawę wykonano w Dziale Poligrafii Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej.  
Ark. wyd. 18,50. Ark. druk. 28,25. Podpisano do druku 8.03.2006 r.

Zam. 50/2006

Nakład 500 egz.

Cena zł 29,00

J-600/2008

## Spis treści

Od autora . . . . .	6
Międzynarodowy układ jednostek . . . . .	8
Rozdział 1. Kinematyka punktu materialnego . . . . .	10
1.1. Wprowadzenie . . . . .	10
1.2. Sposoby opisu ruchu punktu . . . . .	28
1.3. Prędkość punktu . . . . .	32
1.4. Przyspieszenie punktu . . . . .	37
1.5. Ruch punktu po okręgu . . . . .	47
1.6. Ruch punktu we współrzędnych krzywoliniowych . . . . .	49
1.7. Ruch względny punktu . . . . .	56
Pytania kontrolne . . . . .	62
Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	63
Rozdział 2. Kinematyka ciała sztywnego . . . . .	65
2.1. Wprowadzenie . . . . .	65
2.2. Sposoby wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów ciała sztywnego w ruchu dowolnym . . . . .	75
2.3. Ruch postępowy ciała sztywnego . . . . .	77
2.4. Ruch kulisty ciała sztywnego . . . . .	78
2.5. Ruch obrotowy ciała sztywnego . . . . .	79
2.6. Ruch płaski ciała sztywnego . . . . .	79
2.7. Ogólny przypadek ruchu ciała sztywnego . . . . .	98
2.8. Wyznaczenie przemieszczeń punktów ciała sztywnego . . . . .	100
Pytania kontrolne . . . . .	101
Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	101
Rozdział 3. Statyka . . . . .	104
3.1. Wprowadzenie . . . . .	104
3.2. Teoria równoważności układów sił . . . . .	107
3.2.1. Moment siły względem punktu . . . . .	107
3.2.2. Moment siły względem prostej . . . . .	108
3.2.3. Twierdzenie o zmianie bieguna . . . . .	109
3.2.4. Równoważność układów sił . . . . .	111
3.2.5. Zerowy układ sił i para sił . . . . .	112
3.2.6. Redukcja układu sił, redukcja w punkcie i redukcja do najprostszej postaci . . . . .	114

3.2.7. Oś środkowa układu sił, skrętnik . . . . .	118
3.2.8. Równoległy układ sił, środek równoległego układu sił . . . . .	121
3.3. Zasada prac wirtualnych, warunki równowagi sił . . . . .	125
3.4. Podpory, układy konstrukcyjne statycznie wyznaczalne, niewyznaczalne i chwiejne . . . . .	135
3.5. Tarcie, stożek tarcia . . . . .	160
Pytania kontrolne . . . . .	162
Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	163
Rozdział 4. Dynamika punktu materialnego . . . . .	166
4.1. Wprowadzenie . . . . .	166
4.2. Ruch harmoniczny prosty, tłumiony i wymuszony . . . . .	169
4.3. Wyznaczenie ruchu punktu we współrzędnych krzywoliniowych . . . . .	177
4.4. Ruch punktu po powierzchni gładkiej . . . . .	179
4.5. Ruch punktu po krzywej gładkiej . . . . .	182
4.6. Pole sił, praca pola sił, energia kinetyczna, potencjalne pole sił . . . . .	186
Pytania kontrolne . . . . .	195
Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	195
Rozdział 5. Dynamika sztywnego układu materialnego . . . . .	197
5.1. Wprowadzenie do rachunku tensorowego w układach kartezjańskich . . . . .	197
5.2. Masa układu materialnego . . . . .	214
5.2.1. Masa skończonego układu punktów materialnych . . . . .	214
5.2.2. Masa bryły materialnej . . . . .	214
5.2.3. Masa płaskiego obszaru materialnego . . . . .	215
5.2.4. Masa krzywej materialnej . . . . .	215
5.2.5. Masa płata powierzchniowego . . . . .	216
5.3. Moment statyczny układu materialnego . . . . .	216
5.3.1. Moment statyczny skończonego układu punktów materialnych . . . . .	217
5.3.2. Moment statyczny bryły materialnej . . . . .	217
5.3.3. Moment statyczny płaskiego obszaru materialnego . . . . .	218
5.3.4. Moment statyczny krzywej materialnej . . . . .	218
5.3.5. Moment statyczny materialnego płata powierzchniowego . . . . .	219
5.4. Środek masy układu materialnego . . . . .	219
5.5. Pęd układu materialnego, zasada pędu i zasada zachowania pędu . . . . .	221
5.6. Kręt układu materialnego liczony względem punktu, zasada krętu i zasada zachowania krętu . . . . .	222
5.7. Kręt bryły sztywnej w ruchu obrotowym . . . . .	223
5.8. Tensor bezwładności . . . . .	225
5.8.1. Moment bezwładności układu materialnego . . . . .	226

5.8.2. Moment dewiacji (odśrodkowy, zboczenia) układu materialnego . . . . .	228
5.8.3. Twierdzenia Steinera . . . . .	232
5.8.4. Charakterystyki geometryczne jednorodnych ( $\rho_0 = 1$ ) figur płaskich — przekroje poprzeczne prętów . . . . .	243
5.8.5. Numeryczne wyznaczenie charakterystyk geometrycznych jednorodnych ( $\rho_0 = 1$ ) figur płaskich . . . . .	250
5.9. Twierdzenie Koeniga . . . . .	257
5.10. Równania różniczkowe ruchu ciała sztywnego . . . . .	261
Pytania kontrolne . . . . .	270
Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	271
Rozdział 6. Wybrane zagadnienia mechaniki . . . . .	273
6.1. Zasada d'Alemberta . . . . .	273
6.2. Równania Lagrange'a II rodzaju . . . . .	277
6.3. Zasada Hamiltona . . . . .	282
6.3.1. Wstęp do rachunku wariacyjnego . . . . .	282
6.4. Dynamika ruchu względnego . . . . .	305
6.5. Rodzaje stanów równowagi układu materialnego . . . . .	307
Pytania kontrolne . . . . .	311
Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	311
Rozdział 7. Wybrane zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami . . . . .	313
7.1. Zestaw egzaminacyjny nr 1 . . . . .	313
7.2. Zestaw egzaminacyjny nr 2 . . . . .	337
7.3. Zestaw egzaminacyjny nr 3 . . . . .	355
7.4. Zestaw egzaminacyjny nr 4 . . . . .	375
7.5. Zestaw egzaminacyjny nr 5 . . . . .	410
Literatura . . . . .	449

*Niewiedza oddala, zaś rzetelna wiedza zbliża człowieka do Boga. Zdobywając solidną, ugruntowaną przez doświadczenie wiedzę, zaledwie dotykamy nieogarnionej Wszechmocy Boga, doznając przy tym Jego wielkiej Miłości, którą nas obdarza.*

## OD AUTORA

Mechanika jest nauką o najprostszej postaci ruchu materii — ruchu mechanicznym, który polega na zmianie położenia ciał lub ich części w przyjętym układzie odniesienia z upływem czasu.

Przez ciało materialne rozumie się jakikolwiek przedmiot fizyczny dostrzegany naszymi zmysłami. Zagadnienia wewnętrznej budowy ciał materialnych nie wchodzi w zakres mechaniki, stanowiąc przedmiot badań innych dyscyplin wiedzy inżynierskiej. W zależności od właściwości fizycznych ciał materialnych i rozważanego problemu wykorzystuje się w mechanice przybliżone modele ciał rzeczywistych, jak: punkt materialny, układ punktów materialnych, ciało sztywne.

Przez punkt materialny rozumie się ciało materialne, którego rozmiary i kształt nie są istotne w analizowanym problemie. I tak ciała na powierzchni Ziemi są punktami w stosunku do obszaru widzianego z samolotu lecącego na dużej wysokości, lecz oglądane z Ziemi nimi nie są.

Ciało materialne może być również traktowane jako układ punktów materialnych (cząsteczek) o rozmiarach znikomo małych w stosunku do wymiarów rozważanego ciała.

Ciałem sztywnym jest ciało materialne, w którym odległości każdego dwóch jego punktów są stałe w czasie. Innymi słowy, wymiary i kształt ciała nie zmieniają się w czasie ruchu tego ciała.

Mechanika składa się z dwu zasadniczych części, a to: kinematyki i kinetyki, obejmującej statykę i dynamikę. Kinematyka opisuje ruch mechaniczny ciał bez rozpatrywania warunków, w jakich on powstał, zaś kinetyka bada wpływ oddziaływań pomiędzy ciałami na ich ruch. W statyce ustala się warunki równowagi układu sił, warunki równowagi statycznej oraz metody wyznaczania oddziaływań więzów. W dynamice poznamy prawa zachowania się ciał, na które działa niezrównoważony układ sił. A zatem mechanika jest podstawową dyscypliną wiedzy inżynierskiej, która zajmuje się badaniem stanu równowagi lub ruchu ciał materialnych i jest wstępem do studiowania kolejnych przedmiotów z nią związanych, takich jak mechanika ośrodków ciągłych i odkształcalnych.



W mechanice jako nauce dedukcyjnej wprowadzimy pojęcia pierwotne, za pomocą których sformułujemy podstawowe postulaty, a ich prawdziwość można wykazać na drodze doświadczalnej. Wszystkie inne pojęcia, nie będące pojęciami pierwotnymi, zdefiniujemy i w dalszym ciągu wykorzystamy przy wypowiedzaniu podstawowych twierdzeń mechaniki. Językiem, którym posługujemy się w mechanice, jest matematyka z jej głównymi działami, tj. geometrią, analizą i algebrą.

Niniejszy podręcznik autor opracował wykorzystując kilkuletnie wykłady i ćwiczenia, które prowadził dla studentów Wydziałów Inżynierii Lądowej oraz Sanitarnej i Wodnej Politechniki Krakowskiej. Każdy rozdział kończy się kontrolnymi pytaniami i zadaniami do samodzielnego rozwiązania, bowiem umiejętność rozwiązywania zadań jest najlepszym sprawdzianem opanowania materiału.

Wydanie drugie zostało poszerzone o dodatkowe przykłady oraz rozdział pt.: „Numeryczne wyznaczanie charakterystyk geometrycznych jednorodnych figur płaskich”, a także o program na maszynę cyfrową. Na prośbę studentów w wydaniu trzecim i czwartym dodano dalsze przykłady w celu umożliwienia łatwiejszego przyswojenia omawianej teorii. Wydanie piąte zostało uzupełnione o wybrane zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami. Wydanie szóste pozostało bez zmian.

W związku z tym, że z podręcznika korzystają również studenci studiów zaocznych i punktów konsultacyjnych, w wydaniu siódmym dodano do każdego rozdziału podstawowe formuły i zależności matematyczne potrzebne do zrozumienia treści danego rozdziału. Zrezygnowano z dodatku zawierającego program do obliczeń charakterystyk geometrycznych dla jednorodnych figur płaskich w języku *Turbo Pascal*.

W tym miejscu autor pragnie gorąco podziękować swoim nauczycielom akademickim: prof. drowi hab. inż. Gwidonowi Szeferowi, prof. drowi hab. inż. Stefanowi Piechnikowi i prof. drowi hab. inż. Januszowi Orkiszowi za ukazanie piękna mechaniki i nauczanie jej abecadła. Serdecznie dziękuje recenzentowi podręcznika prof. drowi hab. Zbyszkowi Stojkowi za cenne i wnikliwe uwagi. Oddzielne podziękowanie kieruje do swojej żony Krystyny, której pomoc przy redagowaniu podręcznika była nieodzowna. Autor składa także podziękowania studentom Politechniki Krakowskiej — Maciejowi Kufłowi i Karolowi Paluchowi, którzy przepisali do niniejszego wydania teksty oraz wykonali potrzebne rysunki z wykorzystaniem grafiki komputerowej.

Przy pisaniu niniejszego podręcznika autor starał się kierować słowami: „Cokolwiek wykładasz — wykładaj tak, aby twój student słuchając — rozumiał, rozumiejąc mógł tworzyć, tworząc miał radość, radość — ponieważ słowa z wykładu przyniosły dobro służące bliźniemu, a przez miłość uwielbiły Boga”.

## MIĘDZYNARODOWY UKŁAD JEDNOSTEK

W niniejszym podręczniku wszelkie obliczenia prowadzone będą w międzynarodowym układzie jednostek SI. Najczęściej występujące w mechanice teoretycznej wielkości fizyczne oraz ich jednostki podano w tablicy 1.

Tablica 1

Lp.	Wielkość	Jednostka	Symbol jednostki	Wymiar
1	Długość, odległość	metr	m	m
2	Masa	kilogram	kg	kg
3	Czas	sekunda	s	s
4	Kąt płaski	radian	rad	—
5	Prędkość skalarna	metr na sekundę	m/s	$m s^{-1}$
6	Przyspieszenie skalarne	metr na kwadrat sekundy	$m/s^2$	$m s^{-2}$
7	Skalarna prędkość kątowna	radian na sekundę	rad/s	$rad s^{-1}$
8	Skalarne przyspieszenie kątowe	radian na kwadrat sekundy	$rad/s^2$	$rad s^{-2}$
9	Częstotliwość	herz	Hz	—
10	Krzywizna krzywej	odwrotność metra	1/m	$m^{-1}$
11	Pole powierzchni	metr kwadratowy	$m^2$	$m^2$
12	Objętość	metr sześcienny	$m^3$	$m^3$
13	Gęstość masy	kilogram na metr sześcienny	$kg/m^3$	$kg m^{-3}$
14	Pęd	kilogramometr na sekundę	kg m/s	$kg m s^{-1}$
15	Kręt	kilogram razy metr kwadratowy na sekundę	$kg m^2/s$	$kg m^2 s^{-1}$
16	Moment statyczny	kilogram razy metr	kg m	kg m
17	Moment bezwładności	kilogram razy metr kwadratowy	$kg m^2$	$kg m^2$
18	Siła	niuton	N	$kg m s^{-2}$
19	Moment siły	niuton razy metr	N m	$kg m^2 s^{-2}$
20	Praca, energia mechaniczna	dżul	J	$kg m^2 s^{-2}$

## Wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar

Przedrostek	Oznaczenie	Wielkość
Tera	T	$10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$
Giga	G	$10^9 = 1000\ 000\ 000$
Mega	M	$10^6 = 1000\ 000$
Kilo	k	$10^3 = 1000$
Hekto	h	$10^2 = 100$
Deka	da	$10^1 = 10$
Decy	d	$10^{-1} = 0,1$
Centy	c	$10^{-2} = 0,01$
Mili	m	$10^{-3} = 0,001$
Mikro	$\mu$	$10^{-6} = 0,000001$
Nano	n	$10^{-9} = 0,000000001$
Piko	p	$10^{-12} = 0,000000000001$

## Rozdział 1

# KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

### 1.1. WPROWADZENIE

Kinematyka jest nauką zajmującą się matematycznym opisem ruchu układu materialnego, bez wnikania w przyczyny, które ten ruch wywołały lub zakłóciły. Przez sam ruch rozumie się zmiany położenia rozważanego obiektu materialnego względem przyjętego układu odniesienia. Układ odniesienia jest rzeczywistym lub umownym ciałem sztywnym, względem którego opisuje się ruch badanego obiektu.

Z układem odniesienia jest sztywno związany układ współrzędnych, poprzez który położenie każdego punktu ciała poruszającego się względem układu odniesienia jest jednoznacznie określone za pomocą trzech współrzędnych tego punktu. A więc wszystkie zjawiska opisywane w kinematyce dzieją się w czasoprzestrzeni  $M$ , gdzie:

$$M = T \times E^3 \quad (1.1)$$

jest iloczynem kartezjańskim przedziału czasowego  $T$  i trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^3$  (zbiór uporządkowanych czwórek liczb  $(t, x, y, z)$ ).

Podstawowe cechy przestrzeni euklidesowej to:

- sposób mierzenia odległości pomiędzy punktami (metryka przestrzeni),
- możliwość wprowadzenia kartezjańskiego układu współrzędnych (rys. 1.1).

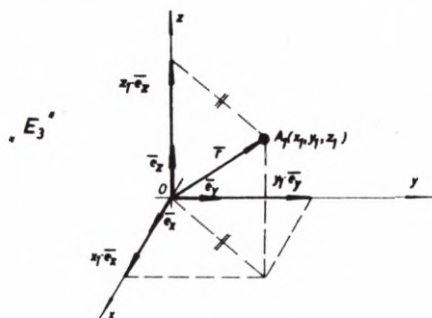
Każdy punkt przestrzeni można jednoznacznie przedstawić za pomocą wektora wodzącego  $\vec{r}$  posiadającego jednoznaczną reprezentację w bazie  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z \quad (1.2)$$

gdzie  $x_1, y_1, z_1$  są liczbami rzeczywistymi (współrzednymi punktu), a wersory  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  stanowią bazę układu. W ten sposób otrzymaliśmy przestrzeń wektorową o metryce:

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.3)$$

Tutaj  $A_1$  i  $A_2$  są punktami przestrzeni, a  $\rho$  jest odległością między nimi.



Rys. 1.1

Punkty przestrzeni  $E^3$  nazywamy położeniami, a punkty jednowymiarowego przedziału czasowego  $T$  chwilami.

Przyjmujemy następujące postulaty:

- przestrzeń  $E^3$  jest jednorodna, co oznacza, że żadne położenie w tej przestrzeni nie jest uprzywilejowane (wyróżnione),
  - przestrzeń  $E^3$  jest izotropowa, czyli żaden kierunek w tej przestrzeni nie jest uprzywilejowany,
  - jednowymiarowy przedział czasowy  $T$  jest jednorodny, to znaczy, że żadna chwila nie jest uprzywilejowana,
- w przestrzeni  $E^3$  istnieją globalne układy współrzędnych, które z jednego położenia w inne można przeprowadzić wykorzystując sztywny obrót i równoległe przesunięcie.

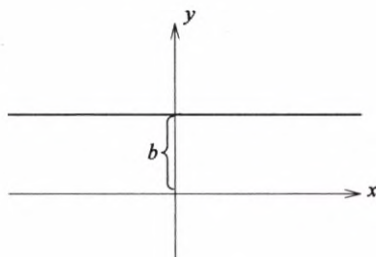
### Podstawowe formuły i zależności matematyczne potrzebne do zrozumienia niniejszego rozdziału

Funkcja jednej zmiennej  $x \rightarrow y = f(x)$  jest to jednoznaczne przyporządkowanie każdej wartości zmiennej niezależnej  $x$  należącej do dziedziny ( $x \in X$ ) zmiennej zależnej  $y$  należącej do przeciwdziedziny ( $y \in Y$ ).

Funkcja może być przedstawiona za pomocą wzorów matematycznych (analitycznie), w postaci wykresów (graficznie) lub numerycznie (w postaci tablic).

#### Funkcja stała

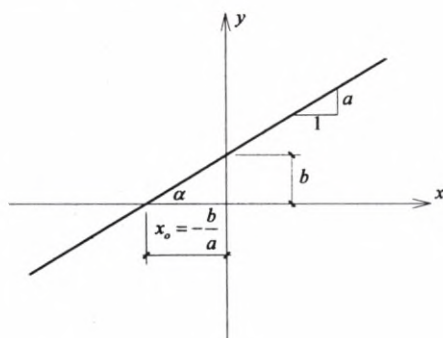
$$x \rightarrow y = b = \text{const}$$



$x \in \mathbb{R}$  — zbiór liczb rzeczywistych

**Funkcja liniowa**

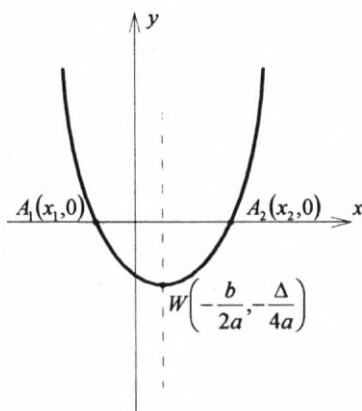
$$x \rightarrow y = ax + b, \quad a \neq 0$$



$a = \operatorname{tg} \alpha$  — współczynnik kierunkowy prostej

**Funkcja kwadratowa (parabola drugiego stopnia)**

$$x \rightarrow y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

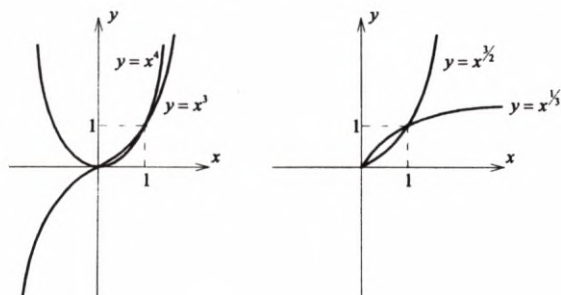


Punkty  $A_1$  i  $A_2$  są miejscami zerowymi, zaś  $W$  jest wierzchołkiem paraboli.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

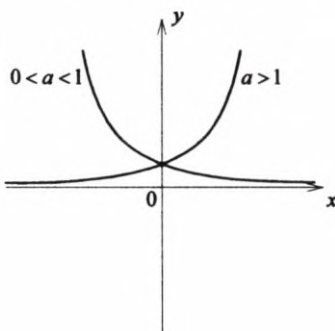
### Funkcja potęgowa

$$x \rightarrow y = x^r, \quad r \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$



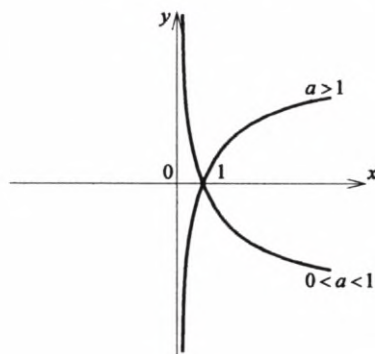
### Funkcja wykładnicza

$$x \rightarrow y = a^x, \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$



### Funkcja logarytmiczna

$$x \rightarrow y = \log_a x, \quad x > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$$

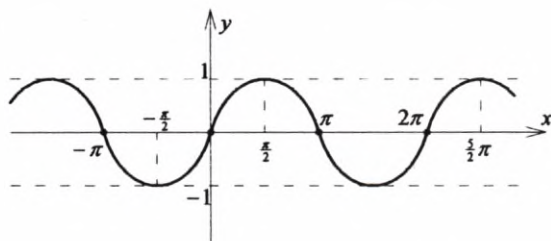


Jeżeli  $a = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.73\dots$ , to  $\log_e x = \ln x$  i nazywamy go logarytmem naturalnym.

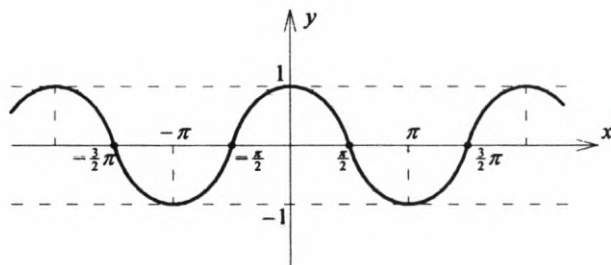
Jeżeli  $a = 10$ , to  $\log_{10} x = \lg x$  i nazywamy go logarytmem dziesiętnym.

### Funkcje trygonometryczne

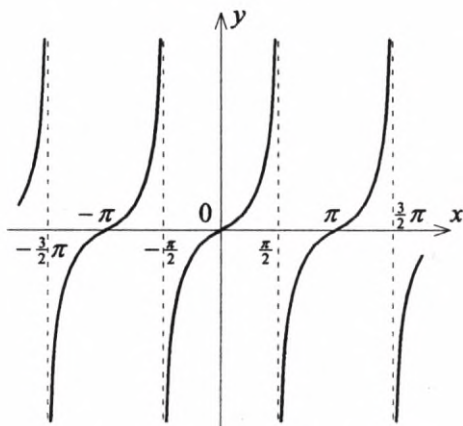
$$x \rightarrow y = \sin x$$



$$x \rightarrow y = \cos x$$

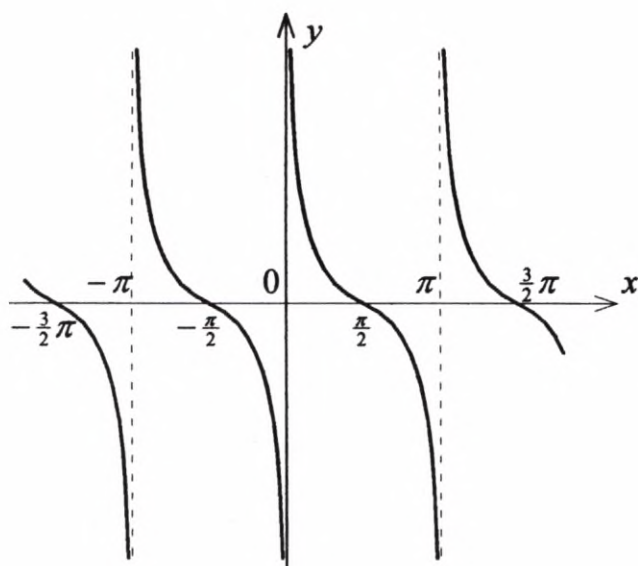


$$x \rightarrow y = \operatorname{tg} x$$



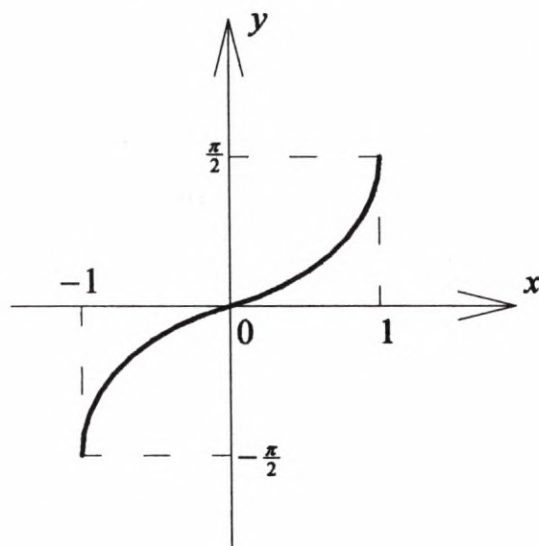


$$x \rightarrow y = \operatorname{ctg} x$$

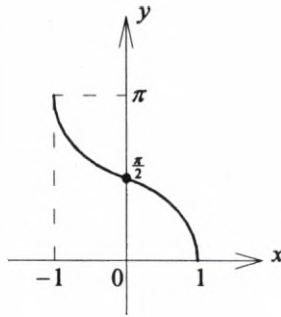


### Funkcje cyklometryczne (kołowe)

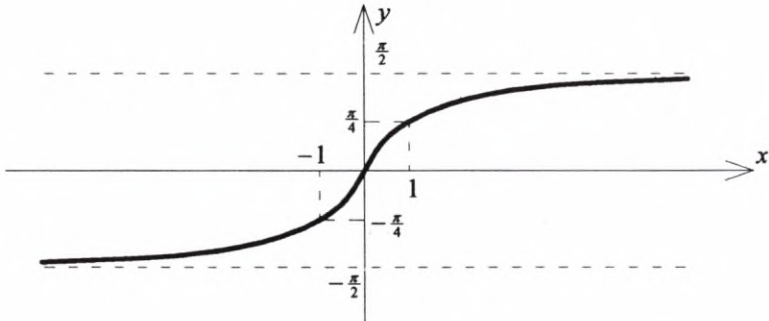
$$x \rightarrow y = \operatorname{arc} \sin x$$



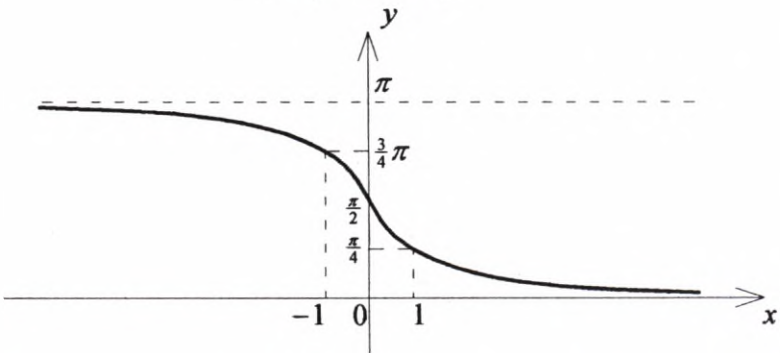
$$x \rightarrow y = \arccos x$$



$$x \rightarrow y = \arctan x$$

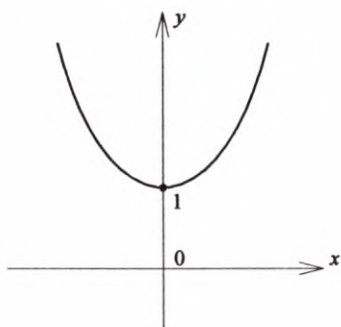


$$x \rightarrow y = \text{arccotg } x$$

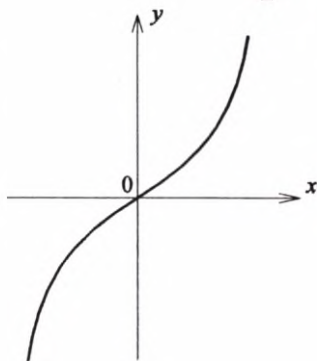


### Funkcje hiperboliczne

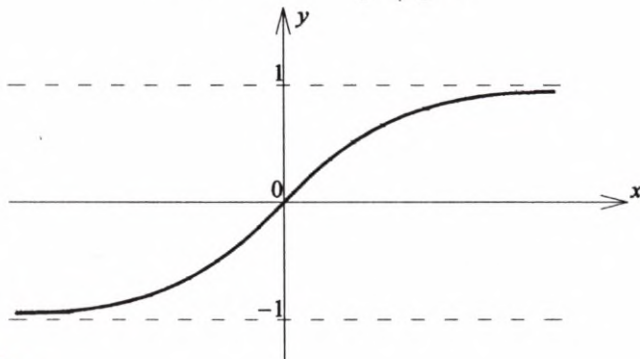
$$x \rightarrow y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (krzywa łańcuchowa)}$$



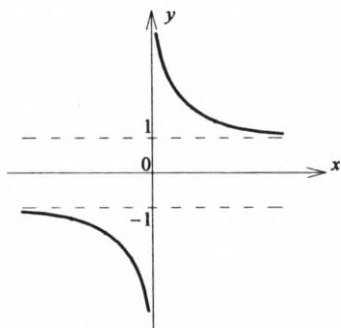
$$x \rightarrow y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$x \rightarrow y = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

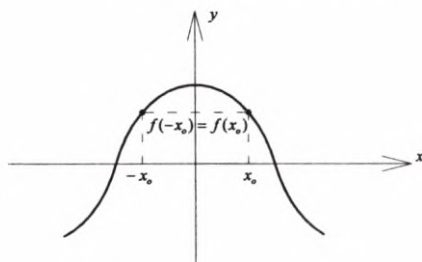


$$x \rightarrow y = \operatorname{ctgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



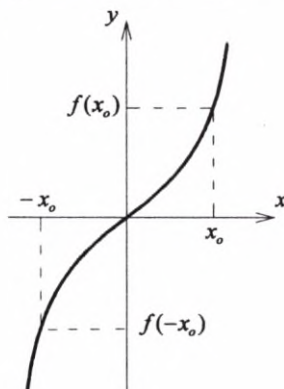
### Funkcja parzysta

$$\forall x \in X [-x \in X \text{ i } f(-x) = f(x)]$$



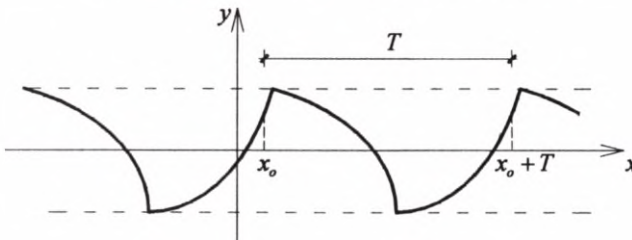
### Funkcja nieparzysta

$$\forall x \in X [-x \in X \text{ i } f(-x) = -f(x)]$$

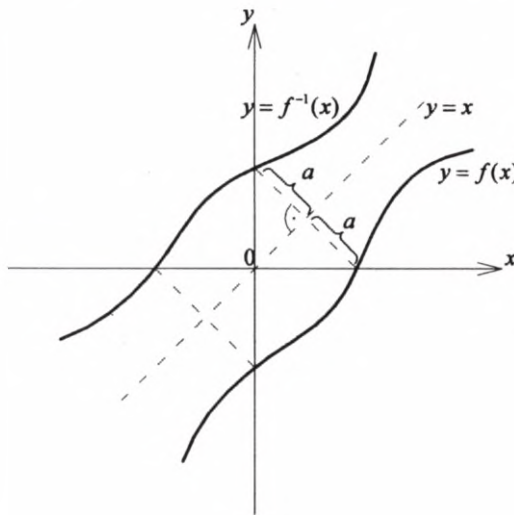


### Funkcja okresowa

$$\exists T \neq 0 \forall x \in X [(x + T) \in X \wedge f(x + T) = f(x)]$$



**Funkcja  $y = f^{-1}(x)$  odwrotna do funkcji  $y = f(x)$**



Wykresy  $y = f^{-1}(x)$  i  $y = f(x)$  są symetryczne względem prostej o równaniu  $y = x$ .

### Funkcja złożona

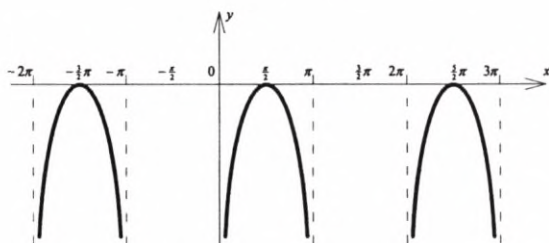
$$y = g(u) = g(f(x)) = F(x)$$

$$u = f(x)$$

Tutaj  $x$  jest zmienną niezależną,  $u$  — zmienną pośrednią,  $y$  — zmienną zależną,  $f$  — funkcją wewnętrzną,  $g$  — funkcją zewnętrzną.

## Przykład

$$y = \ln \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} u = f(x) = \sin x \\ y = g(u) = \ln u \end{cases}$$



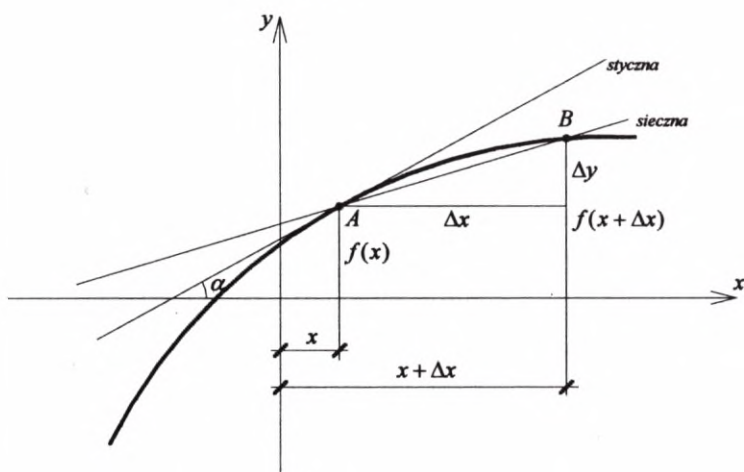
## Pochodna funkcji jednej zmiennej

Przez pochodną funkcji  $y = f(x)$  w punkcie  $A$  o odciętej  $x$  rozumiemy granicę, do której dąży stosunek  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  przy  $\Delta x$  zmierzających do zera, co zapisujemy symbolicznie:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Wyrażenie  $dy$  jest różniczką funkcji i wyraża się iloczynem pochodnej funkcji i różniczki argumentu  $x$ :

$$dy = f'(x) dx$$



W danym punkcie  $A$  funkcji  $y = f(x)$  pochodna jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu w tym punkcie do osi  $Ox$ . Obliczanie pochodnej funkcji nazywa się różniczkowaniem.

Wyrażenie  $y' = \frac{dy}{dx}$  jest pierwszą pochodną funkcji  $y = f(x)$ . Różniczkując pierwszą pochodną względem zmiennej  $x$  otrzymujemy drugą pochodną:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

W ten sposób można uzyskać wyższe pochodne:

— trzecią

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

— czwartą

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right)$$

i ogólnie  $n$ -tą

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$$

### Podstawowe wzory rachunku różniczkowego

$y = b = \text{const}$	to	$y' = 0$
$y = ax + b$	to	$y' = a$
$y = ax^2 + bx + c$	to	$y' = 2ax + b$
$y = x^r$	to	$y' = r x^{r-1}$
$y = a^x$	to	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	to	$y' = e^x$
$y = \ln x$	to	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	to	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	to	$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$

$y = \sin x$	to	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	to	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	to	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{ctg} x$	to	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)$
$y = \arcsin x$	to	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	to	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	to	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arctg} x$	to	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	to	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = \sinh x$	to	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	to	$y' = \sinh x$
$y = \operatorname{tgh} x$	to	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$y = \operatorname{ctgh} x$	to	$y' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$y = u(x) \pm v(x)$	to	$y' = u' \pm v'$
$y = u(x) v(x)$	to	$y' = u'v + uv'$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	to	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\begin{cases} y = g(f(x)) \\ u = f(x) \end{cases}$	to	$y' = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} = g'(u) \Big _{u=f(x)} f'(x)$

### Podstawowe wzory rachunku całkowego

Całką nieoznaczoną (funkcją pierwotną) z danej funkcji  $f(x)$  nazywamy zbiór wszystkich funkcji  $F(x) + C$  ( $C$  — dowolna stała) spełniających warunek:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow (F(x) + C)' = f(x)$$



$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \wedge a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + C$$

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \operatorname{arc} \sin x dx = x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \sqrt{a+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a+x^2} + \frac{1}{2} a \ln \left| x + \sqrt{a+x^2} \right| + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

## Algebra wektorów

Wektorem  $\vec{a}$  nazywamy uporządkowaną parę punktów, która jednoznacznie określa jego kierunek, wielkość (moduł) i zwrot:

$$\vec{a} = \overline{AB} \stackrel{\text{af}}{=} \begin{cases} \text{kierunek} & \text{— wyznaczony przez punkty } A \text{ i } B \\ \text{moduł} & \text{— } |\vec{a}| = |\overline{AB}| \\ \text{zwrot} & \text{— od punktu } A \text{ do } B \end{cases}$$



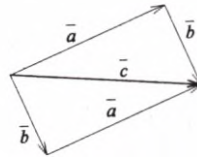
Jeżeli  $A = B$ , to  $\vec{a} = \vec{0}$ , ponieważ  $|\vec{a}| = 0$ .

Wektor  $\vec{e}$  o długości jednostkowej nazywamy wersorem ( $|\vec{e}| = 1$ ). Dwa wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są równe, jeśli mają ten sam kierunek, ten sam moduł i zwrot. Dwa wektory  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$  są przeciwne, jeśli mają ten sam kierunek, równe długości, lecz przeciwne zwroty.

### Podstawowe działania na wektorach:

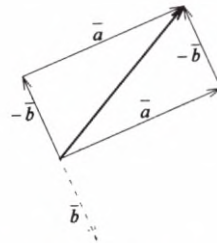
#### 1. Dodawanie wektorów

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$



#### 2. Odejmowanie wektorów

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{d}$$



#### 3. Iloczyn liczby k i wektora $\vec{a}$

$$k\vec{a} = \vec{b} \stackrel{\text{af}}{=} \begin{cases} \text{kierunek} & \text{— } \vec{b} \parallel \vec{a} \\ \text{moduł} & \text{— } |\vec{b}| = |k||\vec{a}| \\ \text{zwrot} & \text{— zależy od znaku liczby } k, \text{ jeśli } k > 0, \text{ to zwrot } \vec{b} \\ & \text{jest taki jak } \vec{a} \end{cases}$$

Tutaj  $|k|$  oznacza wartość bezwzględną liczby  $k$ :

$$|k| \stackrel{df}{=} \begin{cases} k, & \text{dla } k \geq 0 \\ -k, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$

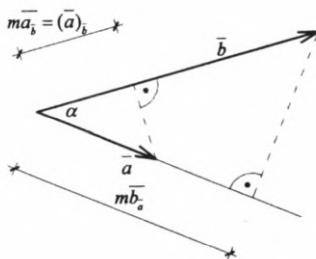
Na podstawie df. (3) można wyznaczyć dla danego wektora  $\vec{a}$  jego wersor:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_{\vec{a}} \Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

4. Iloczyn skalarny dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{df}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \alpha = |\vec{a}| (\vec{b})_{\vec{a}} = |\vec{b}| (\vec{a})_{\vec{b}}$$

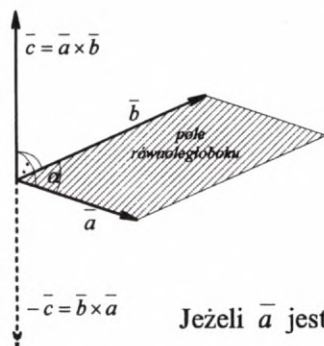
gdzie  $(\vec{b})_{\vec{a}}$  — miara rzutu wektora  $\vec{b}$  na kierunek wektora  $\vec{a}$



Jeżeli  $\vec{a}$  jest prostopadły do  $\vec{b}$ , to  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

5. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \stackrel{df}{=} \begin{cases} \text{kierunek} & - \vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b} \\ \text{moduł} & - |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = P_{\text{równoległoboku}} \\ \text{zwrot} & - \text{trójka wektorów } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ma być prawoskrętna} \end{cases}$$

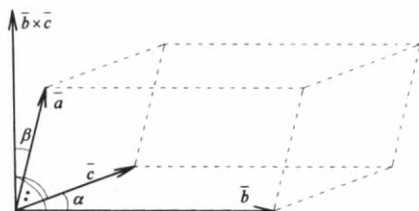


Jeżeli  $\vec{a}$  jest równoległy do  $\vec{b}$ , to  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

6. Iloczyn mieszany trzech wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \alpha \cos \beta = V_{abc} \end{aligned}$$

(miara objętości bryły zbudowanej na wektorach  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ )



Jeżeli  $V_{abc} = 0$ , to wektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  leżą w jednej płaszczyźnie.

7. Podwójny iloczyn wektorowy wektorów  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$

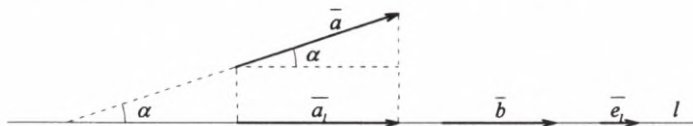
$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

co wynika z warunku  $\vec{p} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{a}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{a})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})] \vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] \vec{d}$$

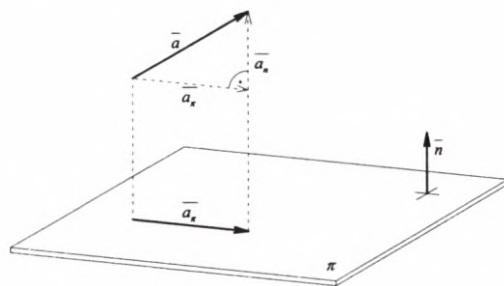
8. Rzut prostokątny wektora  $\vec{a}$  na dany kierunek  $l$



$$\vec{a}_t = (\vec{a} \cdot \vec{e}_t) \vec{e}_t = a_t \vec{e}_t$$

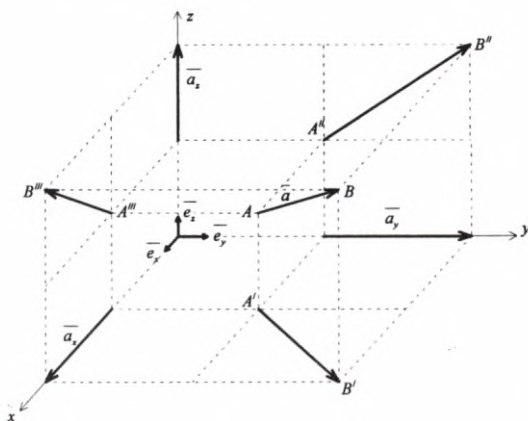
Podstawiając  $\vec{e}_t = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$  otrzymamy:

$$\vec{a}_t = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$$

9. Rzut prostokątny wektora  $\vec{a}$  na płaszczyznę  $\pi$ 

Ponieważ:

$$\vec{a}_n = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n} \text{ to } \vec{a}_\pi = \vec{a} - \vec{a}_n = \vec{a} - \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n} = \frac{\vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})}{|\vec{n}|^2}$$

10. Rozkład wektora  $\vec{a}$  w trójwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

Współrzędne wektora  $\vec{a}$ :

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x, \quad a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y, \quad a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Wykorzystując df. współrzędnych wektorów możemy podać wzory dotyczące działań na wektorach

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x)\bar{e}_x + (a_y + b_y)\bar{e}_y + (a_z + b_z)\bar{e}_z$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x)\bar{e}_x + (a_y - b_y)\bar{e}_y + (a_z - b_z)\bar{e}_z$$

$$k\bar{a} = (ka_x)\bar{e}_x + (ka_y)\bar{e}_y + (ka_z)\bar{e}_z$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

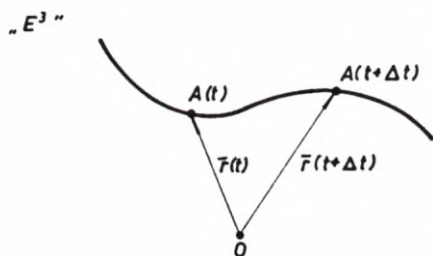
$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x)\bar{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{e}_z$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

## 1.2. SPOSOBY OPISU RUCHU PUNKTU

Opis ruchu punktu w układzie odniesienia powinien być tak zadany, aby w każdej chwili czasu trwania ruchu określał jednoznacznie położenie punktu. W opisie wektorowym położenie punktu określamy przez podanie wektora wodzącego  $\bar{r}$  poruszającego się punktu jako funkcji:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad (1.4)$$



Rys. 1.2

Na rysunku 1.2 punkt 0 jest stałym punktem odniesienia. Łącząc punkty określone zależnością (1.4) otrzymamy krzywą będącą torem punktu.

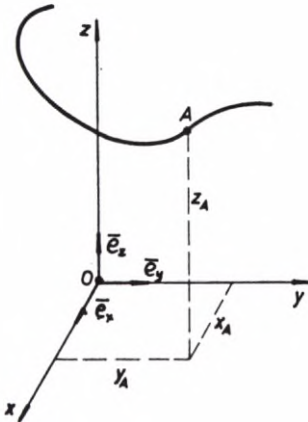
Jeżeli z punktem odniesienia 0 zwiążemy układ współrzędnych, w którym położenie poruszającego się punktu będzie jednoznacznie określone przez współrzędne  $q_1, q_2, q_3$  punktu, które są funkcjami czasu, to taki opis jest opisem skalarnym. W mechanice

jako podstawowe w opisie skalarnym stosuje się następujące układy współrzędnych:

- kartezjański  $\{0, x, y, z\}$  – rys. 1.3,
- cylindryczny  $\{0, r, \varphi, z\}$  – rys. 1.4,
- sferyczny  $\{0, R, \varphi, \vartheta\}$  – rys. 1.5.

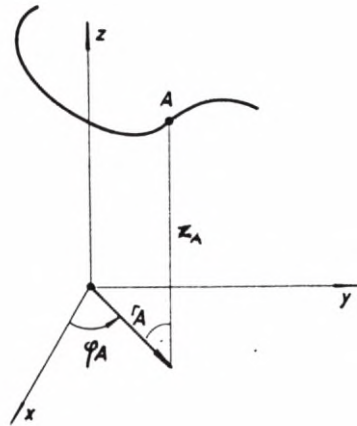
Wszystkie te układy można zapisać następująco:

$$\{0, q_1, q_2, q_3\}$$



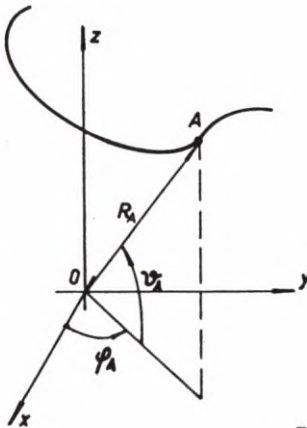
$$\begin{cases} q_1 = x_A(t) \\ q_2 = y_A(t) \\ q_3 = z_A(t) \end{cases} \text{ - WSPÓRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE}$$

Rys. 1.3



$$\begin{cases} q_1 = r_A(t) \\ q_2 = \varphi_A(t) \\ q_3 = z_A(t) \end{cases} \text{ - WSPÓRZĘDNE CYLINDRYCZNE}$$

Rys. 1.4



$$\begin{cases} q_1 = R_A(t) \\ q_2 = \varphi_A(t) \\ q_3 = \vartheta_A(t) \end{cases} \text{ - WSPÓRZĘDNE SFERYCZNE}$$

Rys. 1.5

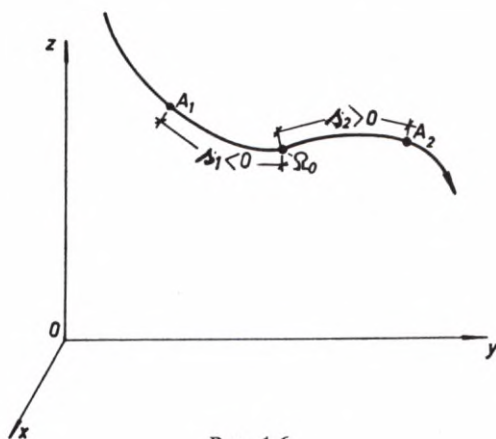
Równania:

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

są równaniami parametrycznymi ruchu poruszającego się punktu. Ruch punktu może być również określony przez podanie toru ( $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ) punktu, jego orientacji, punktu początkowego toru (lub ruchu) i równania ruchu:

$$s = s(t) \quad (1.6)$$

gdzie  $s$  jest współrzędną łukową poruszającego się punktu.



Rys. 1.6

Współrzędna łukowa punktu jako parametr naturalny toru odmierzana jest po torze od punktu początkowego toru  $\Omega_0$ , dla którego  $s_0 = 0$  i jest dodatnia, gdy odmierzamy ją zgodnie z orientacją toru (por. rys. 1.6).

Należy podkreślić, że po danym torze mogą zachodzić różne ruchy opisane równaniem (1.6). Taki opis ruchu punktu jest w mechanice nazywany opisem naturalnym.

### Przykład 1.1

Dany jest opis ruchu punktu w układzie kartezjańskim:

$$\vec{r}(t) = a \sin(\omega t) \vec{e}_x + b \cos(\omega t) \vec{e}_y + c \sin(\omega t) \vec{e}_z \quad (1.7)$$

gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\omega$  są stałymi. Wyznaczyć tor punktu.



W celu wyznaczenia toru punktu należy z równań ruchu wyrugować czas. Mamy więc:

$$\begin{cases} x = a \sin(\omega t) \\ y = b \cos(\omega t) \\ z = c \sin(\omega t) \end{cases} \quad (1.8)$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \sin(\omega t) \\ \frac{y}{b} = \cos(\omega t) \\ \frac{z}{c} = \sin(\omega t) \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \\ \frac{z}{c} = \frac{x}{a} = \sin \omega t \end{cases}$$

Odpowiedź:

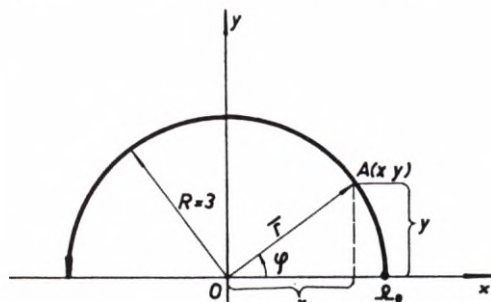
1° Torem punktu jest krzywa przecięcia powierzchni walca eliptycznego płaszczyzną:

$$C : \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \\ z = \frac{c}{a}x \end{cases}$$

2° Jeśli traktować  $t$  jako parametr, to równanie (1.8) jest równaniem parametrycznym toru.

## Przykład 1.2

Punkt materialny porusza się po krzywej o równaniu  $y = \sqrt{9 - x^2}$  ruchem  $s(t) = 3(t^2 - 1)$ . Punktem początkowym toru jest punkt  $\Omega_0(3, 0)$ . Orientację toru podano na rys. 1.7. Przejsź na opis parametryczny ruchu, przyjmując  $t$  jako parametr oraz układ kartezjański.



Rys. 1.7

Wykorzystując równanie krzywej, której obrazem jest półokrąg, możemy napisać:

$$\vec{r}: \begin{cases} x = 3 \cos \varphi(t) \\ y = 3 \sin \varphi(t) \end{cases}$$

Nieznaną funkcję  $\varphi(t)$  wyznaczymy, korzystając z definicji współrzędnej łukowej punktu:

$$s(t) = \int_{\varphi=0}^{\varphi(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

$$3(t^2 - 1) = \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{9 \sin^2 \varphi + 9 \cos^2 \varphi} d\varphi = 3 \int_0^{\varphi(t)} d\varphi = 3\varphi(t)$$

Stąd  $\varphi(t) = t^2 - 1$ . Ostatecznie mamy:

$$\vec{r}: \begin{cases} x = 3 \cos(t^2 - 1) \\ y = 3 \sin(t^2 - 1) \end{cases}$$

### 1.3. PRĘDKOŚĆ PUNKTU

Zajmijmy się teraz zdefiniowaniem prędkości punktu i sposobami jej wyznaczenia w zależności od przyjętego opisu ruchu. Niech w chwili  $t$  położenie punktu  $A$  (rys. 1.8) określa wektor  $\vec{r}(t)$ , zaś w chwili  $(t + \Delta t)$  wektor  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . Różnica tych wektorów:

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) \quad (1.9)$$

jest przemieszczeniem punktu  $A$  w czasie między chwilami  $t$  i  $t + \Delta t$ .

Przez prędkość punktu będziemy rozumieli granicę ilorazu  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ , gdy z  $\Delta t$  zmierzamy do zera:

$$\bar{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \quad (1.10)$$

Prędkość punktu nie zależy od przyjętego sposobu opisu ruchu.

W układzie kartezjańskim prędkość punktu możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{e}_x + \dot{y}\bar{e}_y + \dot{z}\bar{e}_z = \\ &= v_x\bar{e}_x + v_y\bar{e}_y + v_z\bar{e}_z \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie:

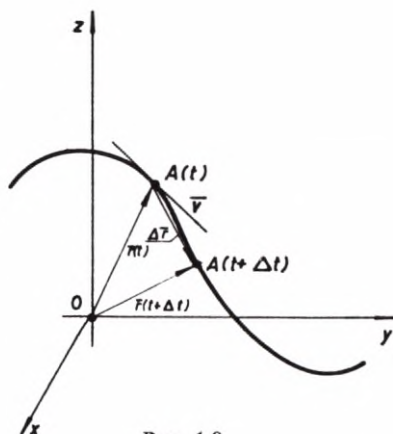
$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

są współzrędnymi prędkości punktu.

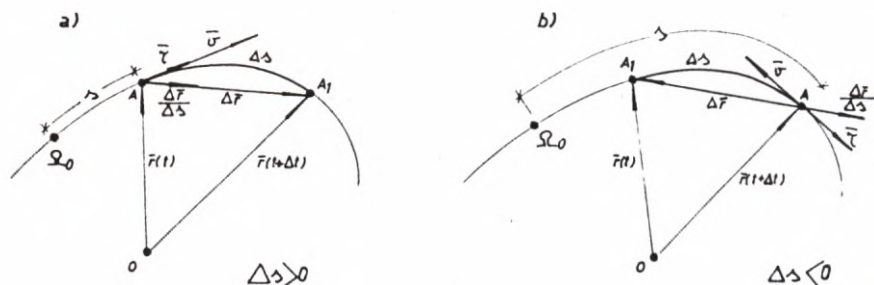
Wykorzystując definicję prędkości punktu pokażemy, jak ją można wyznaczyć w opisie naturalnym. Z zasady obliczania pochodnej funkcji złożonej  $\bar{r}(s)$ , gdzie  $s = s(t)$ , otrzymujemy:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \bar{\tau} \quad (1.12)$$

gdzie  $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$  jest wektorem kierunku stycznego do toru,  $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$  jest prędkością skalarną punktu. W celu ustalenia zwrotu wektora  $\bar{\tau}$  rozważamy dwa przypadki poruszania się punktu po torze w zależności od orientacji toru (por. rys. 1.9).



Rys. 1.8



Rys. 1.9

Na rys. 1.9 przedstawiono punkt  $A$ , który porusza się po torze zgodnie z założoną orientacją toru. W tym przypadku przyrost współrzędnej łukowej  $\Delta s$  punktu  $A$  jest dodatni, czyli wektory  $\Delta \vec{r}$  i  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$  mają ten sam zwrot (w stronę orientacji toru).

Jeśli punkt porusza się po torze przeciwnie do przyjętej orientacji toru (rys. 1.9b), to wektory  $\Delta \vec{r}$  i  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$  mają zwroty przeciwne, gdyż  $\Delta s$  jest ujemne. Zatem w obu przypadkach pokazanych na rys. 1.9 wektor  $\vec{\tau}$  ma zwrot zgodny z orientacją toru.

Wektor  $\vec{\tau}$  jest wektorem jednostkowym, gdyż  $|\Delta s| = |\Delta \vec{r}| + \xi$ , a stąd:

$$|\vec{\tau}| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta s|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta \vec{r}| + \xi} = 1$$

Wykazaliśmy, że wektor  $\vec{\tau}$  jest wersorem kierunku stycznego do toru o zwrocie zgodnym z orientacją toru. A zatem prędkość punktu jest wektorem stycznym do toru o module  $|\vec{v}| = |\dot{s}|$  i zwrocie zależnym od znaku  $\dot{s}$  (dla  $\dot{s} > 0$  zwrot jest zgodny z orientacją toru).

### Przykład 1.3

Ruch punktu opisany jest funkcjami:

$$\begin{cases} x = d \cos(\omega t) \\ y = d \sin(\omega t) \\ z = b t \end{cases}$$

gdzie  $d$ ,  $\omega$ ,  $b$  są stałymi. Wyznaczyć prędkość punktu oraz kąty, jakie ona zawiera z osiami układu współrzędnych. Rozwiązanie jest następujące:

– współrzędne prędkości

$$v_x = \dot{x} = -d \omega \sin(\omega t)$$

$$v_y = \dot{y} = d \omega \cos(\omega t)$$

$$v_z = \dot{z} = b$$

– prędkość punktu

$$\bar{v} = -d \omega \sin(\omega t) \bar{e}_x + d \omega \cos(\omega t) \bar{e}_y + b \bar{e}_z$$

– moduł prędkości

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{d^2 \omega^2 + b^2}$$

– cosinusy kątów

$$\cos(\bar{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{|\bar{v}|} = \frac{-d \omega \sin(\omega t)}{\sqrt{d^2 \omega^2 + b^2}}$$

$$\cos(\bar{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{|\bar{v}|} = \frac{d \omega \cos(\omega t)}{\sqrt{d^2 \omega^2 + b^2}}$$

$$\cos(\bar{v}, \hat{z}) = \frac{v_z}{|\bar{v}|} = \frac{b}{\sqrt{d^2 \omega^2 + b^2}}$$

Torem punktu jest krzywa o równaniu:

$$C : \begin{cases} x = d \cos\left(\frac{\omega}{b} z\right) \\ y = d \sin\left(\frac{\omega}{b} z\right) \end{cases}$$

### Przykład 1.4

Punkt materialny  $A$  porusza się po prostej o równaniu:

$$C : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Współrzędna łukowa liczona od punktu  $\Omega_o(0, 1, 3)$  określona jest wzorem  $s(t) = 2 \sin(2t) + 1$ . Orientację toru określa wektor  $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ . Wyznaczyć prędkość punktu oraz jego położenie w chwili  $t = \frac{\pi}{2}$  [s]. Wyznaczamy kolejno:

– wersor styczny

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left( \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

– prędkość skalarną

$$\dot{s} = 4 \cos(2t)$$

– prędkość punktu

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau} = \left( -\frac{4}{\sqrt{3}} \cos(2t), \frac{4}{\sqrt{3}} \cos(2t), \frac{4}{\sqrt{3}} \cos(2t) \right)$$

$$\vec{v} \left( t = \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{-4}{\sqrt{3}}, \frac{-4}{\sqrt{3}} \right)$$

Położenie punktu w chwili  $t = \frac{\pi}{2}$  [s] określa wektor  $\Omega_o \vec{A}$ :

$$\Omega_o \vec{A} = s \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} \vec{\tau} = 1 \vec{\tau} = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\Omega_o \vec{A} = (x_A, y_A - 1, z_A - 3)$$

Porównując odpowiednie współrzędne obu wektorów otrzymujemy:

$$x_A = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y_A = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}, \quad z_A = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$$

## 1.4. PRZYSPIESZENIE PUNKTU

Niech w chwili  $t$  punkt  $A$  ma prędkość  $\bar{v}(t)$ , zaś w chwili  $t + \Delta t$  prędkość  $\bar{v}(t + \Delta t)$ . Wektor  $\Delta \bar{v} = \bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)$  podaje zmianę prędkości punktu między chwilami  $t$  i  $t + \Delta t$ .

Przyspieszeniem punktu nazywamy granicę ilorazu  $\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$ , gdy z  $\Delta t$  zmierzamy do zera:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} \equiv \ddot{\bar{r}} \quad (1.13)$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych przyspieszenie punktu wyrażamy następująco:

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{e}_x + \ddot{y}\bar{e}_y + \ddot{z}\bar{e}_z = a_x\bar{e}_x + a_y\bar{e}_y + a_z\bar{e}_z \quad (1.14)$$

gdzie  $a_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \ddot{y}$ ,  $a_z = \ddot{z}$  są współrzędnymi przyspieszenia punktu. W opisie naturalnym otrzymamy:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \bar{a}_s + \bar{a}_n \quad (1.15)$$

Tutaj  $\bar{a}_s = \ddot{s}\bar{\tau}$  jest przyspieszeniem stycznym,  $\bar{a}_n = \dot{s}\dot{\bar{\tau}}$  przyspieszeniem normalnym punktu. Zauważmy, że  $\bar{\tau}^2 = 1$ . Różniczkując to wyrażenie po czasie stwierdzamy, że wektor  $\dot{\bar{\tau}}$  jest prostopadły do wektora  $\bar{\tau}$ , ponieważ zachodzi:

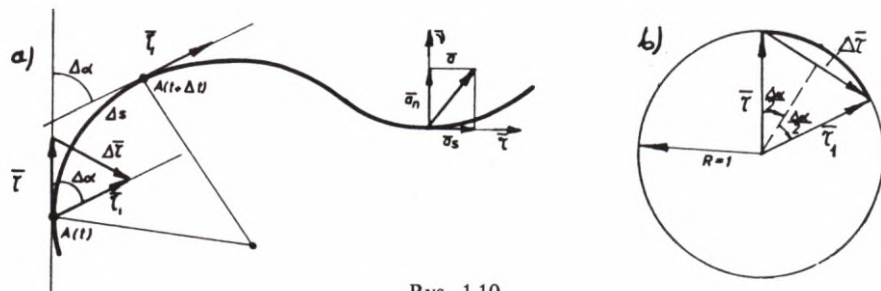
$$2\bar{\tau} \cdot \dot{\bar{\tau}} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\tau}} \perp \bar{\tau}$$

Przekształćmy wyrażenie na przyspieszenie normalne punktu w następujący sposób:

$$\bar{a}_n = \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{d\alpha}{ds} = \dot{s}^2 \kappa \frac{d\bar{\tau}}{d\alpha} = \dot{s}^2 \kappa \bar{v} \quad (1.16)$$

gdzie  $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$  jest krzywizną krzywej, a jej odwrotność  $\rho_x = \frac{ds}{d\alpha}$  nazywa się

promieniem krzywizny. Wektor  $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{d\alpha}$  jako współliniowy z  $\dot{\bar{r}}$  leży na kierunku normalnym głównym (por. rys. 1.10).



Rys. 1.10

Przyspieszenie styczne jest rzutem prostokątnym przyspieszenia całkowitego na kierunek styczny do toru:

$$\bar{a}_s = (\bar{a} \cdot \bar{\tau}) \bar{\tau} = \left( \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{v^2} \right) \bar{v} = \left( \frac{1}{2v^2} \frac{d}{dt} v^2 \right) \bar{v} \quad (1.17)$$

Wykorzystano tutaj zależności:  $\bar{\tau} \parallel \bar{v}$ ,  $|\bar{\tau}| = 1$  i  $\bar{\tau} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ .

Znając przyspieszenie całkowite i styczne możemy obliczyć przyspieszenie normalne:

$$\bar{a}_n = \bar{a} - \bar{a}_s = \bar{a} - \left( \frac{1}{2v^2} \frac{d}{dt} v^2 \right) \bar{v} = \frac{(\bar{v} \times \bar{a}) \times \bar{v}}{v^2} \quad (1.18)$$

Udowodnimy teraz, że wektor  $\bar{v}$  jest wersorem zwróconym zawsze do środka krzywizny toru. Obliczmy moduł wektora  $\bar{v}$ . Wykorzystując rysunek 1.10b możemy napisać:

$$|\Delta \bar{\tau}| = 2 \sin \frac{|\Delta \alpha|}{2} \quad (1.19)$$

a dalej

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{|\Delta \alpha|} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{|\Delta \alpha|}{2}}{|\Delta \alpha|} = 1$$





Rys. 1.11

Aby ustalić zwrot wektora  $\vec{v}$ , należy rozpatrzyć dwa możliwe przypadki poruszania się punktu w zależności od orientacji toru (por. rys. 1.11). W obu analizowanych przypadkach wektor  $\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}$  ma zwrot do środka krzywizny toru.

W geometrii różniczkowej wprowadza się tzw. trójścian Freneta wyznaczony przez kierunki: stycznej do toru ( $\vec{\tau}$ ), normalnej głównej ( $\vec{\nu}$ ) i binormalnej ( $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$ ). Proste o tych kierunkach wyznaczają płaszczyzny:

- ściśle styczną (zawierającą wektory  $\vec{\tau}$  i  $\vec{\nu}$ ),
- normalną do toru (określoną przez wektory  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{b}$ ),
- prostującą (rektyfikującą), opisaną wektorami  $\vec{\tau}$  i  $\vec{b}$ .

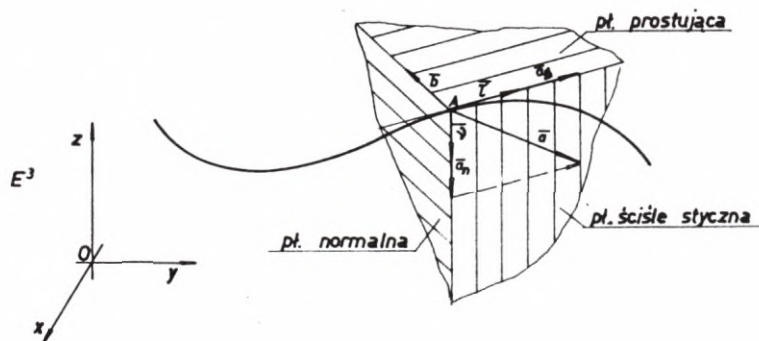
Zapiszmy wektor przyspieszenia punktu w lokalnej bazie Freneta (rys. 1.12):

$$\vec{a} = a_s \vec{\tau} + a_n \vec{\nu} + a_b \vec{b}, \quad \vec{\nu} = \vec{b} \times \vec{\tau}, \quad \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{\nu} \quad (1.20)$$

gdzie:  $a_s = \ddot{s}$ ,  $a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho_x}$ ,  $a_b = 0$  są współzrędnymi przyspieszenia punktu. Podsumowując możemy napisać:

$$\vec{a}_s = \ddot{s} \vec{\tau} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{kierunek} & - \text{styczny do toru} \\ \text{moduł} & - |\vec{a}_s| = |\ddot{s}| \\ \text{zwrot} & - \text{zależy od znaku } \ddot{s} \text{ (dla } \ddot{s} > 0 \text{ zgodny z orientacją toru)} \end{cases}$$

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho_x} \vec{\nu} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{kierunek} & - \text{normalnej głównej} \\ \text{moduł} & - |\vec{a}_n| = \frac{\dot{s}^2}{\rho_x} = \frac{v^2}{\rho_x} = a_n \\ \text{zwrot} & - \text{zawsze do środka krzywizny toru} \end{cases}$$



Rys. 1.12

### Przykład 1.5

Punkt porusza się ruchem:

$$\vec{r}(t) = d \cos(\omega t) \vec{e}_x + d \sin(\omega t) \vec{e}_y + b t \vec{e}_z$$

Wyznaczyć promień krzywizny krzywej. Obliczamy kolejno:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -d \omega \sin(\omega t) \vec{e}_x + d \omega \cos(\omega t) \vec{e}_y + b \vec{e}_z$$

$$\vec{v}^2 = d^2 \omega^2 + b^2$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -d \omega^2 \cos(\omega t) \vec{e}_x - d \omega^2 \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{a}_s = \left( \frac{d}{dt} \vec{v}^2 \right) \frac{\vec{v}}{2 \vec{v}^2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_n = \vec{a}, \quad |\vec{a}_n| = d \omega^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_x} \Rightarrow \rho_x = \frac{v^2}{a_n} = d + \frac{b^2}{d \omega^2}$$

### Przykład 1.6

Dla krzywej płaskiej o równaniu  $y = y(x)$  wyprowadzić wzór określający krzywiznę krzywej.

W płaskim układzie kartezjańskim wektory  $\vec{v}$  i  $\vec{a}$  zapisujemy następująco:

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y, \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y$$

Krzywiznę krzywej obliczamy z zależności:

$$\kappa = \frac{a_n}{v^2} = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{|\bar{v}|^3} = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{x}^3|} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{3/2}}$$

gdzie:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'$$

zaś

$$\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dx} y' = y''$$

Zatem wzór na krzywiznę i promień krzywizny krzywej płaskiej jest następujący:

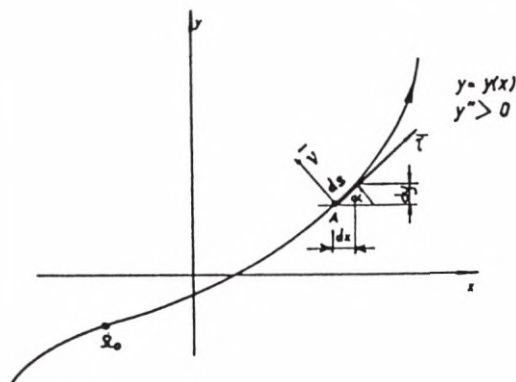
$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}, \quad \rho_\kappa = \frac{1}{\kappa} = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad (1.21)$$

zaś dla krzywej przestrzennej:

$$\kappa = \frac{1}{\rho_\kappa} = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}, \quad \rho_\kappa = \frac{|\bar{r}'|^3}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|} \quad (1.21a)$$

### Przykład 1.7

Dla krzywej płaskiej o równaniu  $y = y(x)$  wyprowadzić wzory określające współrzędne wersorów  $\bar{\tau}$  i  $\bar{v}$ .



Rys. 1.13

Wersor  $\bar{\tau}$  w punkcie  $A$  krzywej (rys. 1.13) nachylony jest do osi  $OX$  pod kątem  $\alpha$ , a więc jego współrzędne wynoszą:

$$\tau_x = \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \tau_y = \sin \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = y' \tau_x$$

gdzie:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Współrzędne wersora  $\bar{v}$  wyznaczamy z warunków:

$$v^2 = 1 \quad \text{i} \quad \bar{v} \cdot \bar{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = (-\tau_y, \tau_x)$$

Tak więc dla założonej orientacji toru o równaniu  $y = y(x)$  otrzymano:

$$\bar{\tau} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) \tag{1.22}$$

$$\bar{v} = \left( -\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right)$$

### Przykład 1.8

Dla krzywej przestrzennej o równaniu:

$$\bar{r}(\lambda): \begin{cases} x = e^\lambda \cos \lambda \\ y = e^\lambda \sin \lambda \\ z = e^\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

wyznaczyć w punkcie  $A$  ( $\lambda = 0$ ) promień krzywizny oraz napisać równania prostych i płaszczyzn trójścianu Freneta.

Podstawiając w równaniu krzywej  $\lambda = 0$  otrzymujemy współrzędne punktu  $A(1, 0, 1)$ . Teraz obliczamy wektory:

– styczny do krzywej

$$\vec{r}' : \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = e^\lambda (\cos \lambda - \sin \lambda) \\ \frac{dy}{d\lambda} = e^\lambda (\sin \lambda + \cos \lambda) \\ \frac{dz}{d\lambda} = e^\lambda \end{cases}$$

$$\vec{r}'_A = (1, 1, 1)$$

– normalny główny

$$\vec{n} = (\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}' = (\vec{r}')^2 \vec{r}'' - (\vec{r}' \cdot \vec{r}'') \vec{r}'$$

$$\vec{r}'' : \begin{cases} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = -2e^\lambda \sin \lambda \\ \frac{d^2 y}{d\lambda^2} = 2e^\lambda \cos \lambda \\ \frac{d^2 z}{d\lambda^2} = e^\lambda \end{cases}$$

$$\vec{r}''_A = (0, 2, 1)$$

$$\vec{n} = [-3e^{3\lambda}(\sin \lambda + \cos \lambda), 3e^{3\lambda}(\cos \lambda - \sin \lambda), 0]$$

$$\vec{n}_A = (-3, 3, 0)$$

– binormalny

$$\vec{b} = \vec{r}' \times \vec{r}'' = [e^{2\lambda}(\sin \lambda - \cos \lambda), -e^{-2\lambda}(\sin \lambda + \cos \lambda), 2e^{2\lambda}]$$

$$\vec{b}_A = (-1, -1, 2)$$

Z wzoru (1.21a) wyznaczamy promień krzywizny krzywej:

$$\rho_A = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Równania prostych i płaszczyzn trójścianu Freneta są następujące:

– prosta styczna

$$l_A^s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = \beta \\ z = 1 + \beta, \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

– prosta normalna główna

$$l_A^n: \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = 1, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

– prosta binormalna

$$l_A^b: \begin{cases} x = 1 + \gamma \\ y = -\gamma \\ z = 1 + 2\gamma, \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

– płaszczyzna ściśle styczna

$$x + y - 2z + 1 = 0$$

– płaszczyzna normalna

$$x + y + z - 2 = 0$$

– płaszczyzna prostująca

$$y - x + 1 = 0$$

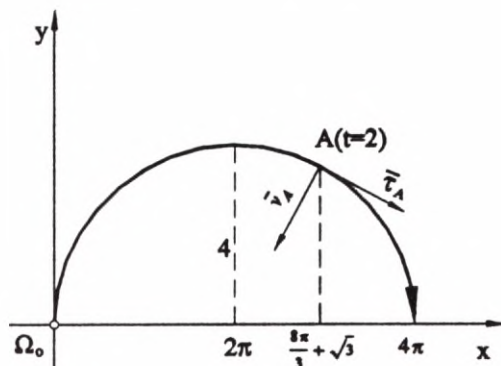
## Przykład 1.8 a

Punkt materialny  $A$  porusza się po krzywej (rys. 1.13 a) o równaniu:

$$\bar{r}(\lambda): \begin{cases} x = 2(\lambda - \sin \lambda) \\ y = 2(1 - \cos \lambda), \end{cases} \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi$$

ruchem  $s(t) = t^4 - 4$ .

Punkt początkowy  $\Omega_0$  toru jest dla  $\lambda = 0$ . Orientacja toru dodatnia dla  $\lambda > 0$ . Wyznaczyć  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  dla  $t = 2$ .



Rys. 1.13 a

Jest to naturalny opis ruchu punktu, gdyż podane są: tor, orientacja toru, punkt początkowy toru i równanie ruchu  $s = s(t)$ . Punkt początkowy toru –  $\Omega_0(x = 0, y = 0)$ . Dla  $t = 2$ :

$$s(t = 2) = 2^4 - 4 = 12 = s_A$$

Wyznaczamy położenie punktu  $A$  na torze dla  $t = 2$

$$\begin{aligned} 12 &= \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sqrt{4(1 - \cos \lambda)^2 + 4 \sin^2 \lambda} d\lambda = \\ &= 2 \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sqrt{2(1 - \cos \lambda)} d\lambda = 2 \int_0^{\lambda_A} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\lambda}{2}} d\lambda = 4 \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \left| \sin \frac{\lambda}{2} \right| d\lambda = \\ &= 4 \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sin \frac{\lambda}{2} d\lambda = 4 \left( -2 \cos \frac{\lambda}{2} \right) \Big|_0^{\lambda_A} = -8 \cos \frac{\lambda_A}{2} + 8 = 12 \end{aligned}$$

Stąd

$$\lambda_A = \frac{4}{3}\pi \rightarrow A\left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}, 3\right)$$

W położeniu  $A$  wyznaczamy wersory  $\bar{\tau}_A$  i  $\bar{\nu}_A$  oraz promień  $\rho_A$  koła krzywiznowego. Liczymy zatem:

– wektor styczny do toru i jego wersor

$$\bar{r}' = \left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}\right) = (2 - 2\cos\lambda, 2\sin\lambda)$$

$$\bar{r}'_A = \bar{r}'\left(\lambda_A = \frac{4}{3}\pi\right) = (3, -\sqrt{3}), \quad |\bar{r}'_A| = 2\sqrt{3}$$

$$\bar{\tau}_A = \frac{\bar{r}'_A}{|\bar{r}'_A|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

– wersor  $\bar{\nu}_A$  kierunku normalnego głównego

$$\bar{\nu}_A \cdot \bar{\tau}_A = 0 \Rightarrow \bar{\nu}_A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

– promień koła krzywiznowego

$$\rho_x = \frac{|\bar{r}'|^3}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}$$

$$\bar{r}'' = \left(\frac{d^2x}{d\lambda^2}, \frac{d^2y}{d\lambda^2}\right) = (2\sin\lambda, 2\cos\lambda)$$

$$\bar{r}''_A = \bar{r}''\left(\lambda_A = \frac{4}{3}\pi\right) = (-\sqrt{3}, -1)$$

$$\bar{r}'_A \times \bar{r}''_A = (0, 0, -6) \Rightarrow |\bar{r}'_A \times \bar{r}''_A| = 6$$

$$\rho_A = \frac{(2\sqrt{3})^3}{6} = 4\sqrt{3}$$



Możemy teraz odpowiedzieć na postawione pytania:

a)

$$\bar{v} = \dot{s} \bar{\tau} = 4 t^3 \bar{\tau}$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}(t=2) = 32 \bar{\tau}_A = (16\sqrt{3}, -16)$$

b)

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_x} \bar{v} = 12 t^2 \bar{\tau} + \frac{16 t^6}{\rho_x} \bar{v}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}(t=2) = 48 \bar{\tau}_A + \frac{256}{3} \sqrt{3} \bar{v}_A = \left( -\frac{56}{3} \sqrt{3}, -152 \right)$$

**Odpowiedź:**

$$\bar{v}_A = (16\sqrt{3}, -16)$$

$$\bar{a}_A = \left( -\frac{56}{3} \sqrt{3}, -152 \right)$$

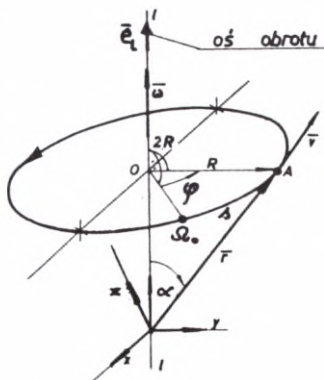
## 1.5. RUCH PUNKTU PO OKRĘGU

Punkt materialny  $A$  porusza się po okręgu o promieniu  $R$  i środku w punkcie  $O$ . Przez punkt  $O$  poprowadzimy prostą  $l$  prostopadłą do płaszczyzny okręgu (rys. 1.14). W dowolnym punkcie należącym do prostej  $l$ , zwanej osią obrotu, przyjęto

początek układu współrzędnych. Położenie punktu  $A$  na okręgu będzie jednoznacznie zadane przez kąt  $\varphi$ , zwany drogą kątową. Droga kątowa odmierzana jest od promienia  $O\Omega_0$  do  $OA$  w kierunku zgodnym z przyjętą orientacją toru.

Związek pomiędzy współrzędną łukową punktu a drogą kątową wynika z następującej proporcji:

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow s = R\varphi \quad (1.23)$$



Rys. 1.14

Wyznaczając prędkość punktu otrzymamy:

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau} = R\dot{\varphi}\bar{\tau} = R\omega\bar{\tau} \quad (1.24)$$

gdzie  $\omega \stackrel{\text{df}}{=} \dot{\varphi}$  jest skalarną prędkością kątową.

Wektorem prędkości kątowej nazywamy wektor:

$$\bar{\omega} \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \bar{e}_l = \dot{\varphi} \bar{e}_l = \omega \bar{e}_l \quad (1.25)$$

Ma on kierunek osi obrotu  $l$ , jego wielkość jest równa wartości bezwzględnej prędkości kątowej, zaś zwrot wynika z prawoskrętnej trójki wektorów  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{r}$ ,  $\bar{v}$  związanych zależnościami:

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \omega \bar{e}_l \times \bar{r} = (\omega |\bar{r}| \sin \alpha) \bar{\tau} = R \omega \bar{\tau} = \bar{v} = \dot{\bar{r}} \quad (1.26)$$

Wektor przyspieszenia punktu jest sumą przyspieszenia stycznego i normalnego:

$$\begin{aligned} \bar{a}_s &= \ddot{s}\bar{\tau} = R\ddot{\varphi}\bar{\tau} = R\dot{\omega}\bar{\tau} = R\varepsilon\bar{\tau} \\ \bar{a}_n &= \frac{\dot{s}^2}{R}\bar{v} = R\omega^2\bar{v} \end{aligned} \quad (1.27)$$

gdzie:  $\varepsilon \stackrel{\text{df}}{=} \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$  jest skalarnym przyspieszeniem kątowym.

Wychodząc z definicji przyspieszenia punktu i wykorzystując zależność (1.26) otrzymujemy:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\bar{v} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}} = \varepsilon \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{a}_s + \bar{a}_n \quad (1.28)$$

Tutaj wektor  $\varepsilon \stackrel{\text{df}}{=} \dot{\bar{\omega}}$  jest wektorem przyspieszenia kątowego o kierunku osi obrotu, wielkości równej wartości bezwzględnej przyspieszenia kątowego i zwrocie wynikającym z prawoskrętnej trójki wektorów  $\varepsilon$ ,  $\bar{r}$ ,  $\bar{a}_s$

$$\varepsilon \times \bar{r} = \varepsilon \bar{e}_l \times \bar{r} = (\varepsilon |\bar{r}| \sin \alpha) \bar{\tau} = R \varepsilon \bar{\tau} = \bar{a}_s$$

$$\bar{\omega} \times \bar{v} = \omega \bar{e}_l \times R \omega \bar{\tau} = R \omega^2 \bar{v} = \bar{a}_n$$

Podsumowując stwierdzamy, że w ruchu punktu po okręgu wektory  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  będziemy obliczać następująco:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= R \omega \bar{\tau} = \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{a} &= R \varepsilon \bar{\tau} + R \omega^2 \bar{v} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}\end{aligned}\quad (1.29)$$

### Przykład 1.9

Ruchoma półprosta  $l$  o kierunku przechodzącym przez punkt  $O$  obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega_0$  w płaszczyźnie  $\{x, y\}$ . Wyznaczyć  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  punktu  $M$  przecięcia tej półprostej z nieruchomym okręgiem o promieniu  $R$ . Położenie początkowe punktu  $M$  pokrywa się z punktem  $M_0$  (rys. 1.15).

Ponieważ prędkość kątowa jest stała, to drogę kątową określa wzór:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + C$$

Z warunku początkowego  $\varphi(t=0) = 0$  wynika, że stała  $C$  jest równa zero. Z rys. 1.15 wynikają współrzędne punktu  $M$ :

$$\begin{cases} x = R \sin 2\varphi = R \sin(2\omega_0 t) \\ y = R \cos 2\varphi = R \cos(2\omega_0 t) \end{cases}$$

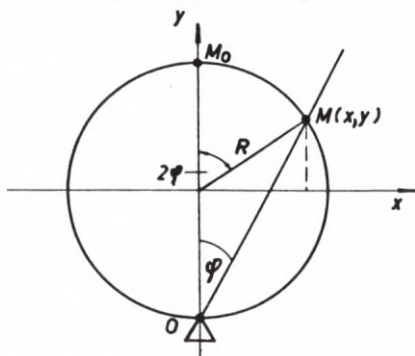
Prędkość punktu i jego przyspieszenie są następujące:

$$\bar{v} = (\dot{x}, \dot{y}), \quad \bar{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2R\omega_0 \cos(2\omega_0 t) & \ddot{x} = -4R\omega_0^2 \sin(2\omega_0 t) \\ \dot{y} = -2R\omega_0 \sin(2\omega_0 t) & \ddot{y} = -4R\omega_0^2 \cos(2\omega_0 t) \end{cases}$$

$$\bar{v} = 2R\omega_0 \cos(2\omega_0 t) \bar{e}_x - 2R\omega_0 \sin(2\omega_0 t) \bar{e}_y$$

$$\bar{a} = -4R\omega_0^2 \sin(2\omega_0 t) \bar{e}_x - 4R\omega_0^2 \cos(2\omega_0 t) \bar{e}_y$$



Rys. 1.15

## 1.6. RUCH PUNKTU WE WSPÓLRZĘDNYCH KRZYWOLINIOWYCH

Położenie punktu w przestrzeni jest jednoznacznie określone trójką liczb rzeczywistych. I tak w układzie kartezjańskim liczbami tymi są współrzędne  $x, y, z$ . Oczywiście można oprócz układu kartezjańskiego wybrać inne układy współ-

rzędnych, zwane dalej układami krzywoliniowymi. W układach krzywoliniowych współrzędne punktu będziemy oznaczać przez  $q_1, q_2, q_3$ . Współrzędne te są funkcjami współrzędnych kartezjańskich, co wynika z zależności:

$$\bar{r} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z = q_1\bar{e}_1 + q_2\bar{e}_2 + q_3\bar{e}_3 \quad (1.30)$$

Rozwiązując równanie (1.30) względem współrzędnych  $x, y, z$  otrzymujemy:

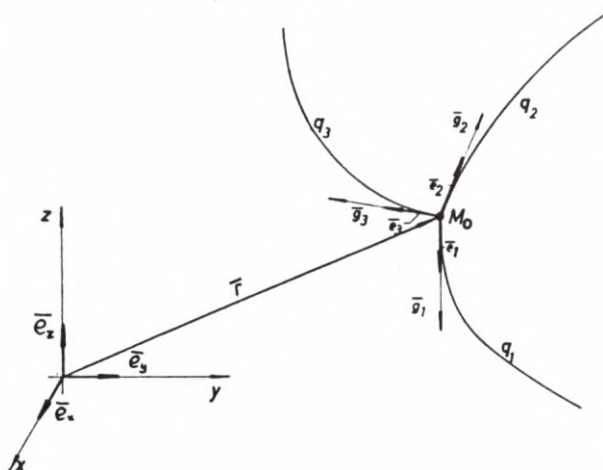
$$\begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1.31)$$

i związek odwrotny:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1.32)$$

Interpretacja geometryczna układu równań (1.31) jest następująca: przez punkt  $M_0$  (rys. 1.16) o współrzędnych krzywoliniowych  $q_1, q_2, q_3$  przechodzą trzy niestyczne względem siebie powierzchnie:

$$\begin{cases} q_1(x, y, z) = \text{const} \\ q_2(x, y, z) = \text{const} \\ q_3(x, y, z) = \text{const} \end{cases}$$



Rys. 1.16

które przecinają się wzdłuż linii współrzędnych  $q_1, q_2, q_3$ . Wektory  $\bar{g}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$ ,  $\bar{g}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$ ,  $\bar{g}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}$  są styczne do linii współrzędnych i stanowią bazę układu krzywoliniowego.

Zapiszmy  $i$ -ty wektor bazy układu krzywoliniowego w układzie kartezjańskim:

$$\bar{g}_i = \frac{\partial \bar{r}(x, y, z)}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \bar{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_i} \bar{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_i} \bar{e}_z \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.33)$$

i obliczmy jego moduł:

$$|\bar{g}_i| = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{1/2} = H_i \quad (1.34)$$

Współczynniki  $H_i$  noszą nazwę współczynników Lamego. Możemy teraz wersory bazy układu krzywoliniowego zapisać następująco:

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{g}_i}{H_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.35)$$

Stąd otrzymujemy związek:

$$H_i \bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \quad (1.36)$$

W dalszym ciągu rozważać będziemy ortogonalne układy krzywoliniowe, dla których zachodzi:

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.37)$$

W takich układach prędkość punktu wyraża się następującym wzorem:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 (H_i \dot{q}_i) \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 v_{q_i} \bar{e}_i \quad (1.38)$$

gdzie:

$$v_{q_i} = \bar{v} \cdot \bar{e}_i = H_i \dot{q}_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

jest jej  $i$ -tą współrzędną. Podobnie zapiszemy przyspieszenie punktu:

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^3 a_{q_i} \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\bar{a} \cdot \bar{e}_i) \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{1}{H_i} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \bar{e}_i \quad (1.39)$$

Przekształcając wyrażenie określające  $i$ -tą współrzędną przyspieszenia otrzymamy:

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left( \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) - \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \right] \quad (1.40)$$

Z równania (1.38) wynikają następujące związki:

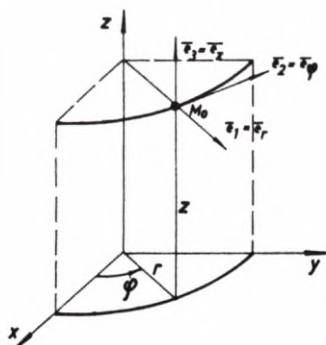
$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \right)$$

Podstawiając (1.41) do (1.40) otrzymamy:

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} \right] = \frac{1}{H_i} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.42)$$

### Przykład 1.10



Rys. 1.17

Wyznaczyć składowe prędkości i przyspieszenia punktu w cylindrycznym układzie współrzędnych (rys. 1.17). Z rysunku wynikają zależności pomiędzy współrzędnymi cylindrycznymi i kartezjańskimi:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi = q_1 \cos q_2 \\ y = r \sin \varphi = q_1 \sin q_2 \\ z = z = q_3 \end{cases}$$

Obliczamy:

– współczynniki Lamego

$$H_1 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2} = 1$$

$$H_2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} = r$$

$$H_3 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} = 1$$

– współrzędne prędkości punktu

$$v_{q1} = v_r = H_1 \dot{q}_1 = 1 \dot{r}$$

$$v_{q2} = v_\varphi = H_2 \dot{q}_2 = r \dot{\varphi}$$

$$v_{q3} = v_z = H_3 \dot{q}_3 = \dot{z}$$

– kwadrat prędkości punktu

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

– współrzędne przyspieszenia punktu

$$a_{q1} = a_r = \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \dot{r} - r \dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$$

$$a_{q2} = a_\varphi = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\} = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) - 0 \right] = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}$$

$$a_{q3} = a_z = \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \dot{z} = \ddot{z}$$

**Odpowiedź:**

W układzie cylindrycznym prędkość i przyspieszenie punktu są następujące:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

**Przykład 1.11**

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu w układzie sferycznym (rys. 1.18).

Między współzrędnymi sferycznymi i kartezjańskimi zachodzą następujące zależności:

$$\begin{cases} x = R \cos \vartheta \cos \varphi = q_1 \cos q_2 \cos q_3 \\ y = R \cos \vartheta \sin \varphi = q_1 \cos q_2 \sin q_3 \\ z = R \sin \vartheta = q_1 \sin q_3 \end{cases}$$

Rozwiązując zadanie kolejno wyznaczamy:

– współczynniki Lamego

$$H_1 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial R} \right)^2 \right]^{1/2} = 1$$

$$H_2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} = R \cos \vartheta$$

$$H_3 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right)^2 \right]^{1/2} = R$$

– współrzędne prędkości

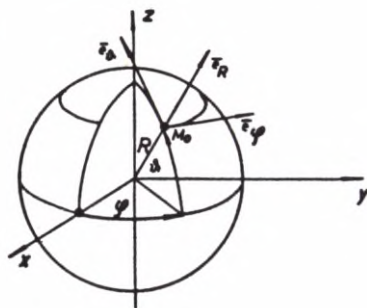
$$v_R = H_1 \dot{R} = \dot{R}$$

$$v_\varphi = H_2 \dot{\varphi} = R \cos(\vartheta) \dot{\varphi}$$

$$v_\vartheta = H_3 \dot{\vartheta} = R \dot{\vartheta}$$

– kwadrat prędkości punktu

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2 \cos^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\vartheta}^2$$



Rys. 1.18



– współrzędne przyspieszenia punktu

$$\frac{\partial}{\partial \dot{R}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \dot{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{v^2}{2} \right) = R \cos^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + R \dot{\vartheta}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = R^2 \cos^2(\vartheta) \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = R^2 \dot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{R^2}{2} \sin(2\vartheta) \dot{\varphi}^2$$

$$\begin{cases} a_R = \ddot{R} - R \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta - R \dot{\vartheta}^2 \\ a_\varphi = R \ddot{\varphi} \cos \vartheta + 2 \dot{R} \dot{\varphi} \cos \vartheta - 2 R \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \\ a_\vartheta = R \ddot{\vartheta} + 2 \dot{R} \dot{\vartheta} + \frac{R \dot{\varphi}^2}{2} \sin(2\vartheta) \end{cases}$$

**Odpowiedź:**

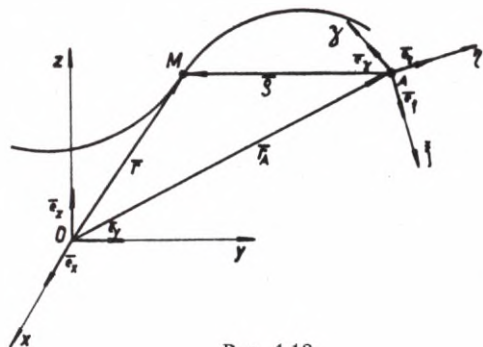
W układzie sferycznym mamy następujące wzory:

$$\bar{v} = \dot{R} \bar{e}_R + R \dot{\varphi} \cos \vartheta \bar{e}_\varphi + R \dot{\vartheta} \bar{e}_\vartheta$$

$$\begin{aligned} \bar{a} = & (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta - R \dot{\vartheta}^2) \bar{e}_R + (R \ddot{\varphi} \cos \vartheta + 2 \dot{R} \dot{\varphi} \cos \vartheta - 2 R \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \bar{e}_\varphi + \\ & + (R \ddot{\vartheta} + 2 \dot{R} \dot{\vartheta} + \frac{R \dot{\varphi}^2}{2} \sin(2\vartheta)) \bar{e}_\vartheta \end{aligned}$$

## 1.7. RUCH WZGLĘDNY PUNKTU

Dotychczas zajmowaliśmy się opisem ruchu punktu względem nieruchomego układu odniesienia. I tak opisując ruch punktu na powierzchni Ziemi przyjmuje się układ związany z Ziemią i zakłada, że jest on nieruchomy. W rzeczywistości tak nie jest, gdyż Ziemia obraca się wokół własnej osi. W związku z powyższym przyjęcie nieruchomego układu odniesienia jest założeniem upraszczającym. W licznych zagadnieniach technicznych to uproszczenie jest dopuszczalne i mieści się w granicach dopuszczalnego błędu.



Rys. 1.19

Rozpatrzmy dwa układy odniesienia (rys. 1.19), a to układ stały (nieruchomy)  $\{O, x, y, z\}$  o bazie  $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$  i ruchomy  $\{A, \xi, \eta, \zeta\}$  o bazie  $\{\bar{e}_\xi, \bar{e}_\eta, \bar{e}_\zeta\}$ . Ruch punktu  $M$  możemy odnieść zarówno do układu stałego, jak i ruchomego. W układzie stałym położenie punktu  $M$  określa wektor  $\bar{r}$ , zaś w ruchomym — wektor  $\bar{\rho}$ .

Wektory te spełniają zależność (rys. 1.19):

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_A(t) + \bar{\rho}(t) \quad (1.43)$$

Ruch punktu odniesiony do układu stałego nazywamy ruchem bezwzględnym, zaś odniesiony do układu ruchomego — ruchem względnym. Ruch układu ruchomego względem układu nieruchomego nazywany jest ruchem unoszenia.

Ruch unoszenia jest złożeniem ruchu polegającego na równoległym przesunięciu układu ruchomego względem stałego (translacja) i ruchu będącego obrotem układu ruchomego względem nieruchomego (rotacja).

W przypadku translacji zachodzi równość odpowiednich wersorów obu baz:

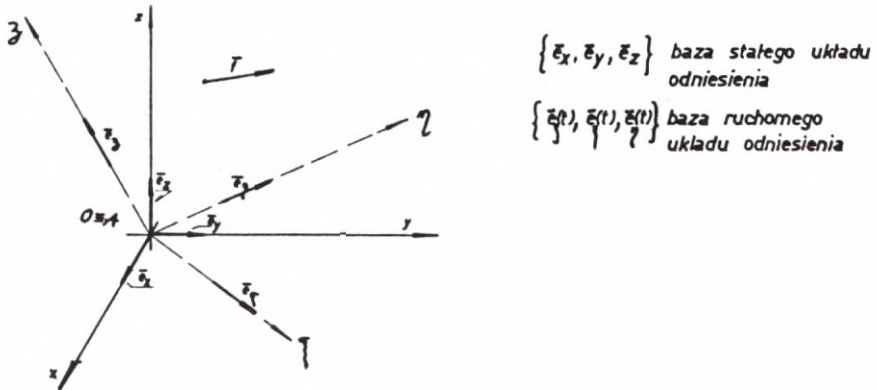
$$\bar{e}_\xi = \bar{e}_x, \quad \bar{e}_\eta = \bar{e}_y, \quad \bar{e}_\zeta = \bar{e}_z$$

Tak więc dowolny wektor  $\bar{f}$  ma w obu układach te same współrzędne:

$$f_\xi = f_x, \quad f_\eta = f_y, \quad f_\zeta = f_z$$

Jeżeli obliczymy pochodną wektora  $\bar{f}$  względem parametru czasu  $t$ , to okaże się, że jest ona identyczna w układzie stałym i ruchomym, a mianowicie:

$$\dot{\bar{f}} = \dot{f}_x \bar{e}_x + \dot{f}_y \bar{e}_y + \dot{f}_z \bar{e}_z = \dot{f}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{f}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{f}_\zeta \bar{e}_\zeta = \dot{f}_\xi \bar{e}_x + \dot{f}_\eta \bar{e}_y + \dot{f}_\zeta \bar{e}_z \quad (1.44)$$



Rys. 1.20

Gdy ruch unoszenia jest rotacją, to baza układu ruchomego jest funkcją czasu (rys. 1.20):

$$\bar{e}_\xi = \bar{e}_\xi(t), \quad \bar{e}_\eta = \bar{e}_\eta(t), \quad \bar{e}_\zeta = \bar{e}_\zeta(t)$$

Dowolny wektor  $\bar{f}$  możemy zapisać w obu układach odniesienia, a mianowicie:

$$\bar{f} = f_x \bar{e}_x + f_y \bar{e}_y + f_z \bar{e}_z = f_\xi \bar{e}_\xi(t) + f_\eta \bar{e}_\eta(t) + f_\zeta \bar{e}_\zeta(t) \quad (1.45)$$

Z powyższego równania wyznacza się związki między współrzędnymi wektora  $\bar{f}$  w układzie stałym i ruchomym:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\xi = \bar{f} \cdot \bar{e}_\xi = f_x (\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_x) + f_y (\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_y) + f_z (\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_z) = \\ \quad = f_x \cos(\xi, \hat{x}) + f_y \cos(\xi, \hat{y}) + f_z \cos(\xi, \hat{z}) \\ f_\eta = \bar{f} \cdot \bar{e}_\eta = f_x (\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_x) + f_y (\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_y) + f_z (\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_z) = \\ \quad = f_x \cos(\eta, \hat{x}) + f_y \cos(\eta, \hat{y}) + f_z \cos(\eta, \hat{z}) \\ f_\zeta = \bar{f} \cdot \bar{e}_\zeta = f_x (\bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_x) + f_y (\bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_y) + f_z (\bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_z) = \\ \quad = f_x \cos(\zeta, \hat{x}) + f_y \cos(\zeta, \hat{y}) + f_z \cos(\zeta, \hat{z}) \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Związek odwrotny ma postać następującą:

$$\begin{cases}
 f_x = \bar{f} \cdot \bar{e}_x = f_\xi (\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_x) + f_\eta (\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_x) + f_\zeta (\bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_x) = \\
 \quad = f_\xi \cos(\xi, \hat{x}) + f_\eta \cos(\eta, \hat{x}) + f_\zeta \cos(\zeta, \hat{x}) \\
 f_y = \bar{f} \cdot \bar{e}_y = f_\xi (\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_y) + f_\eta (\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_y) + f_\zeta (\bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_y) = \\
 \quad = f_\xi \cos(\xi, \hat{y}) + f_\eta \cos(\eta, \hat{y}) + f_\zeta \cos(\zeta, \hat{y}) \\
 f_z = \bar{f} \cdot \bar{e}_z = f_\xi (\bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_z) + f_\eta (\bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_z) + f_\zeta (\bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_z) = \\
 \quad = f_\xi \cos(\xi, \hat{z}) + f_\eta \cos(\eta, \hat{z}) + f_\zeta \cos(\zeta, \hat{z})
 \end{cases} \quad (1.47)$$

Równania (1.46) i (1.47) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi, \hat{x}) & \cos(\xi, \hat{y}) & \cos(\xi, \hat{z}) \\ \cos(\eta, \hat{x}) & \cos(\eta, \hat{y}) & \cos(\eta, \hat{z}) \\ \cos(\zeta, \hat{x}) & \cos(\zeta, \hat{y}) & \cos(\zeta, \hat{z}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (1.48)$$

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi, \hat{x}) & \cos(\eta, \hat{x}) & \cos(\zeta, \hat{x}) \\ \cos(\xi, \hat{y}) & \cos(\eta, \hat{y}) & \cos(\zeta, \hat{y}) \\ \cos(\xi, \hat{z}) & \cos(\eta, \hat{z}) & \cos(\zeta, \hat{z}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{Bmatrix} \quad (1.49)$$

Obliczmy teraz pochodną po czasie funkcji wektorowej  $\bar{f}$  w układzie stałym i ruchomym, pamiętając, że w rozważanym przypadku baza układu ruchomego jest funkcją czasu. Otrzymamy:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \dot{f}_x \bar{e}_x + \dot{f}_y \bar{e}_y + \dot{f}_z \bar{e}_z = \dot{f}_\xi \bar{e}_\xi + \dot{f}_\eta \bar{e}_\eta + \dot{f}_\zeta \bar{e}_\zeta + (f_\xi \dot{\bar{e}}_\xi + f_\eta \dot{\bar{e}}_\eta + f_\zeta \dot{\bar{e}}_\zeta) \quad (1.50)$$

Wykorzystując zależność (1.26), w której w miejsce wektora  $\bar{r}$  podstawiamy kolejno wersory  $\bar{e}_\xi$ ,  $\bar{e}_\eta$ ,  $\bar{e}_\zeta$ , otrzymujemy następujące wyrażenia na pochodne po czasie tych wersorów:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_\xi = \bar{\omega}_A \times \bar{e}_\xi \\ \dot{\bar{e}}_\eta = \bar{\omega}_A \times \bar{e}_\eta \\ \dot{\bar{e}}_\zeta = \bar{\omega}_A \times \bar{e}_\zeta \end{cases} \quad (1.51)$$

Na podstawie związków (1.51) równanie (1.50) zapiszemy następująco:

$$\dot{\vec{f}} = \dot{f}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{f}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{f}_\zeta \vec{e}_\zeta + \vec{\omega}_A \times (f_\xi \vec{e}_\xi + f_\eta \vec{e}_\eta + f_\zeta \vec{e}_\zeta) = \dot{\vec{f}}_w + \vec{\omega}_A \times \vec{f} \quad (1.52)$$

Wyrażenie  $\dot{\vec{f}}_w = \dot{f}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{f}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{f}_\zeta \vec{e}_\zeta$  jest lokalną pochodną po czasie odniesioną do układu ruchomego. Zatem pochodna absolutna po czasie funkcji wektorowej jest sumą pochodnej lokalnej i iloczynu wektorowego wektora prędkości kątowej przez zadaną funkcję wektorową. Wyprowadźmy zależność między prędkością punktu w układzie stałym i ruchomym. W tym celu wykorzystamy związki (1.43) i (1.50). Zależność ta ma postać:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + (\dot{\vec{\rho}}) = \dot{\vec{\rho}}_w + (\dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}) = \vec{v}_w + \vec{v}_u = \vec{v}_b \quad (1.53)$$

W powyższej równości wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \vec{v}_b &\equiv \dot{\vec{r}} && \text{— prędkość bezwzględna punktu,} \\ \vec{v}_w &\equiv \dot{\vec{\rho}}_w && \text{— prędkość względna punktu,} \\ \vec{v}_u &\equiv \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} && \text{— prędkość unoszenia punktu.} \end{aligned}$$

Podobnie dochodzimy do związku między przyspieszeniem punktu w układzie stałym i ruchomym:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_A + (\dot{\vec{\rho}}) + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times (\dot{\vec{\rho}}) = \ddot{\vec{\rho}}_w + (2\vec{\omega}_A \times \dot{\vec{\rho}}_w) + \\ &+ (\ddot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times (\dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{\rho})) = \vec{a}_w + \vec{a}_c + \vec{a}_u = \vec{a}_b \end{aligned} \quad (1.54)$$

Z równości (1.54) wynika, że przyspieszenie punktu w ruchu względnym składa się z:

- przyspieszenia względnego  $\vec{a}_w = \ddot{\vec{\rho}}_w$ ,
- przyspieszenia Coriolisa  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_A \times \dot{\vec{\rho}}_w = 2\vec{\omega}_A \times \vec{v}_w$ ,
- przyspieszenia unoszenia  $\vec{a}_u = \ddot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_A \times (\dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{\rho})$ .

Wektor  $\vec{a}_b = \ddot{\vec{r}}$  jest przyspieszeniem bezwzględnym punktu.

### Przykład 1.12

Tarcza  $ABCD$  na płaszczyźnie  $(x, y)$  (rys. 1.21) obraca się wokół wierzchołka  $A$  ze stałą skalarną prędkością kątową  $\omega = \omega_O = \text{const}$ . Wzdłuż boku  $BC$  porusza się punkt  $M$  z prędkością względną  $\vec{v}_w = \vec{v}_O = \text{const}$ . Obliczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne punktu  $M$ , jeśli w chwili  $t = 0$  punkt  $M$  zajmował położenie  $B$ . Obliczenia wykonamy w układzie ruchomym  $\{A, \xi, \eta\}$ .

Rozwiązanie jest następujące:

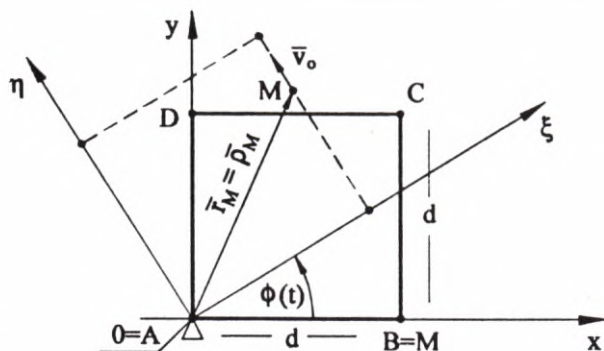
- prędkość względna punktu:

$$\bar{v}_w = \dot{\bar{\rho}}_w = \bar{v}_O = v_O \bar{e}_\eta$$

– wektor wodzący punktu  $M$  w układzie ruchomym:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_M &= \int \dot{\bar{\rho}}_w dt + \bar{\rho}_O = \\ &= v_O t \bar{e}_\eta + \bar{\rho}_O \end{aligned}$$

gdzie  $\bar{\rho}_O = \bar{\rho}(t=0) = d \bar{e}_\xi$ .  
Zatem  $\dot{\bar{\rho}}_M = d \dot{\bar{e}}_\xi + v_O t \dot{\bar{e}}_\eta$ .  
Ponieważ skalarna prędkość kątowna jest stała i równa  $\omega_O$ , to droga kątowna jest funkcją liniową:



Rys. 1.21

$$\varphi(t) = \omega_O t + \varphi_O$$

Stałą  $\varphi_O$  wyznaczamy z warunku początkowego:

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi_O = 0$$

Wektor prędkości kątowej  $\bar{\omega}$  leży na osi  $\zeta$  pokrywającej się z osią  $z$  i ma zwrot zgodny z wierzchołkiem osi  $z$ :

$$\bar{\omega} = \omega_O \bar{e}_\xi$$

Możemy teraz obliczyć:

– prędkość unoszenia

$$\bar{v}_u = \dot{\bar{r}}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = -\omega_O v_O t \bar{e}_\xi + d \omega_O \bar{e}_\eta$$

– prędkość bezwzględna

$$\bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w = -\omega_O v_O t \bar{e}_\xi + (v_O + d \omega_O) \bar{e}_\eta$$

– przyspieszenie względne

$$\bar{a}_w = \ddot{\bar{\rho}}_w = \bar{0}$$

– przyspieszenie Coriolisa

$$\bar{a}_c = 2 \bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}_w = -2 \omega_o v_o \bar{e}_z$$

– przyspieszenie unoszenia

$$\bar{a}_u = \ddot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = -d \omega_o^2 \bar{e}_z + (-\omega_o^2 v_o t) \bar{e}_\eta$$

– przyspieszenie bezwzględne

$$\bar{a}_b = \bar{a}_w + \bar{a}_c + \bar{a}_u = -(d \omega_o^2 + 2 \omega_o v_o) \bar{e}_z - \omega_o^2 v_o t \bar{e}_\eta$$

Z zależności (1.49) wyznaczmy  $\bar{v}_b$  i  $\bar{a}_b$  w układzie stałym:

$$\begin{aligned} \bar{v}_b = \dot{\bar{r}} : \begin{Bmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_o t), & -\sin(\omega_o t), & 0 \\ \sin(\omega_o t), & \cos(\omega_o t), & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega_o v_o t \\ v_o + d \omega_o \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -\omega_o v_o t \cos(\omega_o t) - (v_o + d \omega_o) \sin(\omega_o t) \\ -\omega_o v_o t \sin(\omega_o t) + (v_o + d \omega_o) \cos(\omega_o t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_b = \ddot{\bar{r}} : \begin{Bmatrix} a_{bx} \\ a_{by} \\ a_{bz} \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_o t), & -\sin(\omega_o t), & 0 \\ \sin(\omega_o t), & \cos(\omega_o t), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -(d \omega_o + 2 v_o) \omega_o \\ -\omega_o^2 v_o t \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -\omega_o (d \omega_o + 2 v_o) \cos(\omega_o t) + \omega_o^2 v_o t \sin(\omega_o t) \\ -\omega_o (d \omega_o + 2 v_o) \sin(\omega_o t) - \omega_o^2 v_o t \cos(\omega_o t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

**Odpowiedź:**

W układzie stałym prędkość i przyspieszenie są następujące:

$$\begin{aligned} \bar{v}_b = \dot{\bar{r}} &= [-\omega_o v_o t \cos(\omega_o t) - (v_o + d \omega_o) \sin(\omega_o t)] \bar{e}_x + \\ &+ [-\omega_o v_o t \sin(\omega_o t) + (v_o + d \omega_o) \cos(\omega_o t)] \bar{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_b = \ddot{\bar{r}} = & [-\omega_o(d\omega_o + 2v_o)\cos(\omega_o t) + \omega_o^2 v_o t \sin(\omega_o t)] \bar{e}_x + \\ & + [-\omega_o(d\omega_o + 2v_o)\sin(\omega_o t) - \omega_o^2 v_o t \cos(\omega_o t)] \bar{e}_y \end{aligned}$$

U w a g a!

Końcowy wynik można również uzyskać z zależności  $\bar{r}_M = \bar{\rho}_M$  pisząc:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_o t), & -\sin(\omega_o t), & 0 \\ \sin(\omega_o t), & \cos(\omega_o t), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ v_o t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \cos(\omega_o t) - v_o t \sin(\omega_o t) \\ d \sin(\omega_o t) + v_o t \cos(\omega_o t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a dalej:

$$\bar{v}_b = \dot{\bar{r}}_M = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\bar{a}_b = \ddot{\bar{r}}_M = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

## PYTANIA KONTROLNE

1. Co to jest ruch punktu?
2. Podać definicję układu odniesienia i układu współrzędnych.
3. Co to jest czasoprzestrzeń i jakie postulaty w niej obowiązują?
4. Jak należy rozumieć metrykę przestrzeni?
5. Omówić poznane sposoby opisu ruchu punktu.
6. Podać definicję prędkości i przyspieszenia punktu oraz sposoby ich obliczania w zależności od przyjętego opisu ruchu.
7. Ile wynosi przyspieszenie normalne punktu w ruchu po prostej i dlaczego?
8. Jak leży przyspieszenie punktu w stosunku do toru?
9. Podać definicję płaszczyzny ściśle stycznej, krzywizny krzywej i promienia krzywizny.
10. Określić ruch punktu, jeśli:
  - a)  $\bar{v} = \overline{\text{const}}$ ,
  - b)  $|\bar{v}| = \text{const}$ ,
  - c)  $\bar{a}_s = \bar{0}$  i  $\bar{a}_n \neq \bar{0}$ ,
  - d)  $\bar{a}_s \neq \bar{0}$  i  $\bar{a}_n = \bar{0}$ ,
  - e)  $\bar{a}_s \neq \bar{0}$  i  $\bar{a}_n \neq \bar{0}$ .
11. Omówić ruch punktu po okręgu.



12. Podać definicję  $\bar{\omega}$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$ .
13. Jak oblicza się  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  w krzywoliniowych ortogonalnych układach współrzędnych?
14. Jak oblicza się  $\frac{d\bar{f}}{dt}$ , jeśli  $\bar{f}$  jest zadane w ruchomym układzie odniesienia?
15. Co to jest ruch bezwzględny, względny i unoszenia?
16. Podać definicję  $\bar{v}_b$ ,  $\bar{v}_w$ ,  $\bar{v}_u$  oraz  $\bar{a}_b$ ,  $\bar{a}_u$ ,  $\bar{a}_c$ ,  $\bar{a}_w$ .
17. W jakim ruchu punktu  $\bar{a}_c$  jest równe zero?
18. Jak dodaje się wektory, z których jeden jest określony w układzie stałym, zaś drugi w układzie ruchomym?

### ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Dla zadanej trajektorii ruchu punktu wyznaczyć: tor, prędkość i przyspieszenie oraz dokonać rozkładu przyspieszenia na styczne i normalne:

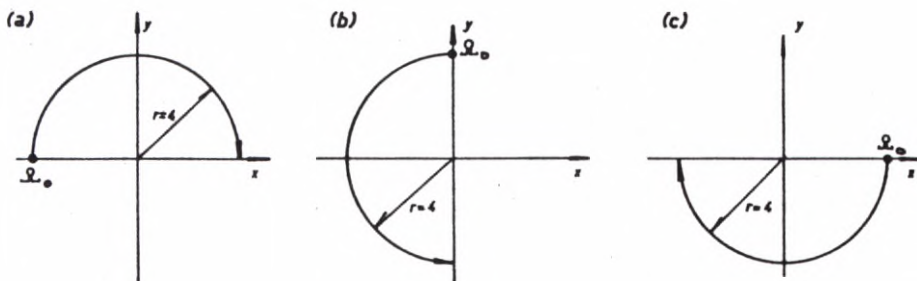
a) 
$$\begin{cases} x = \frac{k^2 t^2}{2} \\ y = k t \\ z = k \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x = k \cos^2(\omega t) \\ y = k \sin^2(\omega t) \\ z = k \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x = 2 \cos t^2 - \sin(2t) \\ y = 2 \sin t^2 - \cos(2t) \\ z = t^2 \end{cases}$$

$$k, \omega = \text{const}$$

2. W ruchu punktu po okręgu wyznaczyć:  $\bar{v}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$ , jeśli  $\varphi(t) = 2t^2 - 1$ , zaś orientacja toru podana jest na rys. 1.22.



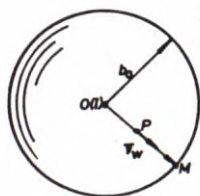
Rys. 1.22

3. Punkt materialny porusza się po krzywej o równaniu:  $y = -3x^3$  ruchem  $s = (1-t)e^{-2t}$  od punktu  $\Omega_0$ , dla którego  $x = 0$ . Obliczyć  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  dla chwili  $t = 1$ , przyjmując orientację toru w kierunku malejących wartości  $x$ .

4. W układzie cylindrycznym wyznaczyć  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  oraz promień krzywizny toru, jeśli:

$$\begin{cases} x = d \cos(\omega t) \\ y = d \sin(\omega t) \\ z = b t \end{cases}$$

$$b, d = \text{const}$$



Rys. 1.23

5. Koło o promieniu  $r = b_0$  obraca się wokół osi  $l$  prostopadłej do płaszczyzny koła z prędkością kątową  $\omega(t) = 3e^t$ . Wzdłuż odcinka  $OM$  (rys. 1.23) porusza się punkt  $P$  z prędkością  $|\bar{v}_w| = t^2 + 1$ . Zwrot prędkości jest zgodny ze zwrotem wektora  $\overline{OM}$ . Wyznaczyć  $\bar{v}_b$  i  $\bar{a}_b$ , przeprowadzając obliczenia w układzie ruchomym i stałym.

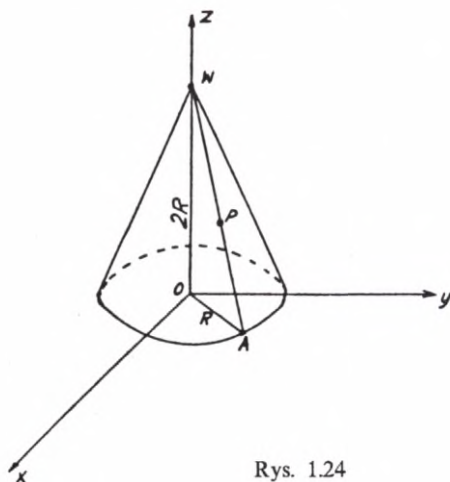
6. Stożek obraca się wokół osi  $O_z$  z  $\omega = 2e^t$ . Wzdłuż tworzącej  $WA$  porusza się punkt  $P$ , przy czym:

$$|\bar{W}P| = \frac{Rt}{t^2 + 1}$$

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne punktu  $P$ .

7. Dla ruchu punktu określonego równaniami:

$$\bar{r}(t): \begin{cases} x(t) = d \cos t \\ y(t) = d \sin t \\ z(t) = d \ln |\cos t| \end{cases}$$



Rys. 1.24

wyznaczyć promień krzywizny oraz trójścian Freneta dla chwili  $t = 0$ .

8. Punkt porusza się ruchem opisanym przez funkcje:

a) 
$$\begin{cases} x = 4(1 - e^{-\pi t}) \\ y = 2 \sin(4\pi t) \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x = (t + 1)^2 \\ y = 4(t + 1)^{-2} \end{cases}$$

Wyznaczyć jego tor oraz prędkość i przyspieszenie.

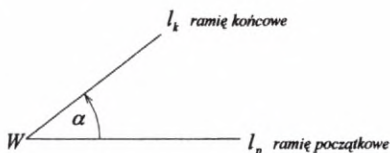
## Rozdział 2

# KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

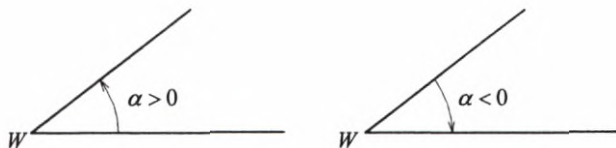
### 2.1. WPROWADZENIE

W rozdziale tym poznamy sposoby opisu ruchu ciała sztywnego. Jak wiemy z rozdziału 1, ruch polega na zmianie położenia punktów ciała względem układu odniesienia. Zatem należy odpowiedzieć na pytanie: ile punktów będzie określać jednoznacznie ruch bryły sztywnej? Zanim odpowiemy na to pytanie, przypomnijmy sobie podstawowe zależności matematyczne, potrzebne do zrozumienia niniejszego rozdziału.

Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy uporządkowaną na płaszczyźnie parę półprostych o wspólnym początku — wierzchołku kąta.

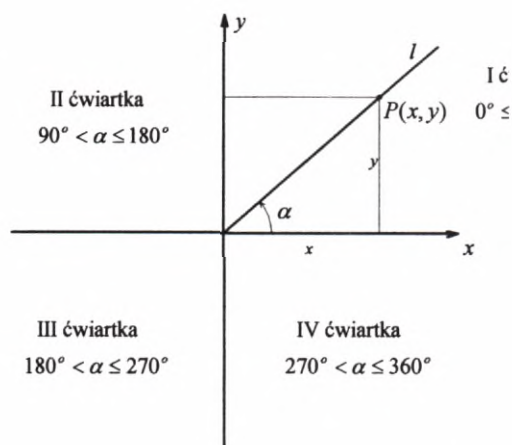


Miara kąta skierowanego jest miarą kąta obrotu ruchomego ramienia wokół wierzchołka kąta. Przy obrocie przeciwnym do ruchu wskazówek zegara miara kąta jest dodatnia.



### Funkcje trygonometryczne dla dowolnego kąta

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$



gdzie:

$r$  — długość promienia wodzącego punktu  $P$ ,

$x$  — odcięta punktu  $P$ , czyli miara jego odległości od osi  $Oy$  (oś rzędnych),

$y$  — rzędna punktu  $P$ , czyli miara jego odległości od osi  $Ox$  (oś odciętych).

Tabela 3

Kąt $\alpha^\circ$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
Funkcja							
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\infty$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2 - \sqrt{3}$	0

Wzory redukcyjne

$\alpha =$ $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

## Podstawowe zależności trygonometryczne

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \forall \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

**Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych nazywają się funkcjami cyklo-  
metrycznymi (arcusowymi)**

$$y = \arcsin x, \quad \text{to} \quad x = \sin y$$

$$y = \arccos x, \quad \text{to} \quad x = \cos y$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{to} \quad x = \operatorname{tg} y$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad \text{to} \quad x = \operatorname{ctg} y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\arcsin x) = x \\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right.$$

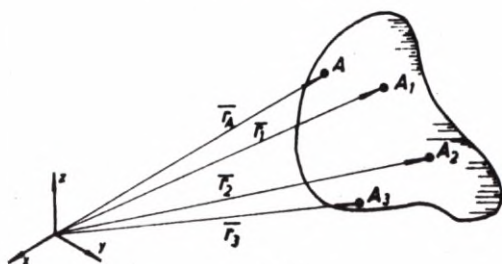
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \\ \cos(\arccos x) = x \\ \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \end{array} \right.$$

Jeżeli zadamy równania ruchu trzech nie leżących na jednej prostej punktów  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  (rys. 2.1) ciała sztywnego:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{r}}_1 = \bar{\mathbf{r}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2(t) \\ \bar{\mathbf{r}}_3 = \bar{\mathbf{r}}_3(t) \end{cases} \quad (2.1)$$



Rys. 2.1

to dla dowolnego punktu tego ciała zachodzi:

$$\bar{\mathbf{r}}_A(t) = \alpha \bar{\mathbf{r}}_1(t) + \beta \bar{\mathbf{r}}_2(t) + \gamma \bar{\mathbf{r}}_3(t) \quad (2.2)$$

gdzie:  $\alpha, \beta, \gamma$  są liczbami rzeczywistymi, które wyznacza się z warunku sztywności ciała:

$$\begin{cases} |\overline{A_1A}| = |\bar{\mathbf{r}}_A - \bar{\mathbf{r}}_1| = d_1 = \text{const} \\ |\overline{A_2A}| = |\bar{\mathbf{r}}_A - \bar{\mathbf{r}}_2| = d_2 = \text{const} \\ |\overline{A_3A}| = |\bar{\mathbf{r}}_A - \bar{\mathbf{r}}_3| = d_3 = \text{const} \end{cases} \quad (2.3)$$

Punkty  $A_1, A_2, A_3$  są niewspółliniowe, więc spełniają zależność:

$$(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1) \times (\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1) \neq \bar{\mathbf{0}} \quad (2.4)$$

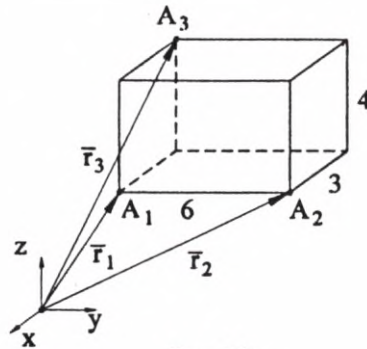
Z równań (2.1) przy spełnieniu warunku (2.3) wynika, że położenie ciała sztywnego w układzie odniesienia jest w pełni określone przez sześć niezależnych funkcji skalarnych, zwanych dalej współrzędnymi uogólnionymi.

### Przykład 2.1

Sprawdzić, czy równania:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{r}}_1 = 2t^2 \bar{\mathbf{e}}_x + 4\bar{\mathbf{e}}_y \\ \bar{\mathbf{r}}_2 = 2t^2 \bar{\mathbf{e}}_x + 4\bar{\mathbf{e}}_y + 6\bar{\mathbf{e}}_z \\ \bar{\mathbf{r}}_3 = (2t^2 + 5 \cos t) \bar{\mathbf{e}}_x + (4 + 5 \sin t) \bar{\mathbf{e}}_y \end{cases}$$

określają ruch ciała sztywnego przedstawionego na rys. 2.1 a.



Rys. 2.1a

Na to, aby podane równania stanowiły równania ruchu ciała sztywnego, muszą być spełnione warunki sztywności, czyli stałych odległości między punktami ciała:

$$d_1 = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = \sqrt{(2t^2 - 2t^2)^2 + (4 - 4)^2 + 6^2} = 6 = \text{const}$$

$$d_2 = |\bar{r}_3 - \bar{r}_2| = \sqrt{(5 \cos t)^2 + (5 \sin t)^2 + 6^2} = \sqrt{61} = \text{const}$$

$$d_3 = |\bar{r}_3 - \bar{r}_1| = \sqrt{(5 \cos t)^2 + (5 \sin t)^2} = 5 = \text{const}$$

Ponieważ warunek sztywności jest spełniony, to pozostało jeszcze sprawdzić, czy punkty  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  są niewspółliniowe:

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 6 \bar{e}_z \times (5 \cos t \bar{e}_x + 5 \sin t \bar{e}_y) = 30 \cos t \bar{e}_y - 30 \sin t \bar{e}_x \neq \bar{0}$$

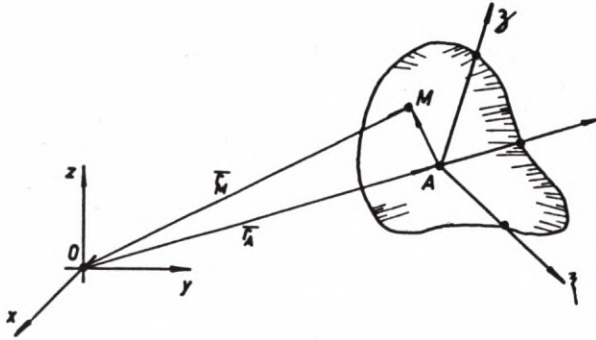
### Odpowiedź:

Podane równania są równaniami ruchu dla ciała sztywnego.

Innym możliwym opisem ruchu ciała sztywnego jest przyjęcie układu, np. prostokątnego  $A$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , sztywno związanego z poruszającym się ciałem oraz nieruchomego  $O$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , względem którego badamy ruch ciała (rys. 2.2).

Dowolny punkt  $M$  ciała ma w układzie nieruchomym współrzędne przestrzenne (Eulera)  $x_M(t)$ ,  $y_M(t)$ ,  $z_M(t)$ , zaś w układzie ruchomym, związanym sztywno z poruszającym się ciałem, współrzędne materialne (Lagrange'a)  $\xi_M$ ,  $\eta_M$ ,  $\zeta_M$ , które są stałe (niezmienne) w czasie ruchu.





Rys. 2.2

Współrzędne przestrzenne i materialne związane są następującą zależnością (por. (1.43)):

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \overline{AM} \quad (2.5)$$

która w zapisie macierzowym ma postać (por. (1.48) i (1.49)):

$$\begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \\ \zeta_M \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi, \hat{x}), & \cos(\xi, \hat{y}), & \cos(\xi, \hat{z}) \\ \cos(\eta, \hat{x}), & \cos(\eta, \hat{y}), & \cos(\eta, \hat{z}) \\ \cos(\zeta, \hat{x}), & \cos(\zeta, \hat{y}), & \cos(\zeta, \hat{z}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

lub

$$\begin{Bmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi, \hat{x}), & \cos(\eta, \hat{x}), & \cos(\zeta, \hat{x}) \\ \cos(\xi, \hat{y}), & \cos(\eta, \hat{y}), & \cos(\zeta, \hat{y}) \\ \cos(\xi, \hat{z}), & \cos(\eta, \hat{z}), & \cos(\zeta, \hat{z}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \\ \zeta_M \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Występująca w równaniu (2.6) macierz cosinusów kierunkowych, a w równaniu (2.7) macierz transponowana nosi nazwę macierzy przejścia i określa obrót układu ruchomego względem nieruchomego. Ponieważ elementy wierszy macierzy przejścia są współrzędnymi wersorów osi układu ruchomego zapisanymi w układzie nieruchomym (podobnie elementy kolumn są współrzędnymi wersorów bazy układu nieruchomego zapisanymi w układzie ruchomym), to wynika stąd, że iloczyn dwóch wierszy (kolumn) jednoimiennych jest równy jedności, zaś iloczyn dwóch wierszy (kolumn) różnoimiennych — zeru. W macierzy przejścia

sześć elementów jest liniowo niezależnych, gdyż jej dziewięć współczynników musi spełniać dwanaście równań i stąd trzy (nie leżące w jednym wierszu bądź kolumnie) można przyjąć dowolnie jednak tak, aby były z przedziału:

$$-1 \leq \alpha_{ij} \leq 1$$

## Przykład 2.2

Napisać równania wynikające z własności macierzy przejścia:

$$\cos^2(\xi, \hat{x}) + \cos^2(\xi, \hat{y}) + \cos^2(\xi, \hat{z}) = \bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\xi = 1$$

$$\cos^2(\eta, \hat{x}) + \cos^2(\eta, \hat{y}) + \cos^2(\eta, \hat{z}) = \bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\eta = 1$$

$$\cos^2(\zeta, \hat{x}) + \cos^2(\zeta, \hat{y}) + \cos^2(\zeta, \hat{z}) = \bar{e}_\zeta \cdot \bar{e}_\zeta = 1$$

$$\cos(\xi, \hat{x})\cos(\eta, \hat{x}) + \cos(\xi, \hat{y})\cos(\eta, \hat{y}) + \cos(\xi, \hat{z})\cos(\eta, \hat{z}) = \bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\eta = 0$$

$$\cos(\xi, \hat{x})\cos(\zeta, \hat{x}) + \cos(\xi, \hat{y})\cos(\zeta, \hat{y}) + \cos(\xi, \hat{z})\cos(\zeta, \hat{z}) = \bar{e}_\xi \cdot \bar{e}_\zeta = 0$$

$$\cos(\eta, \hat{x})\cos(\zeta, \hat{x}) + \cos(\eta, \hat{y})\cos(\zeta, \hat{y}) + \cos(\eta, \hat{z})\cos(\zeta, \hat{z}) = \bar{e}_\eta \cdot \bar{e}_\zeta = 0$$

$$\cos^2(\xi, \hat{x}) + \cos^2(\eta, \hat{x}) + \cos^2(\zeta, \hat{x}) = \bar{e}_x \cdot \bar{e}_x = 1$$

$$\cos^2(\xi, \hat{y}) + \cos^2(\eta, \hat{y}) + \cos^2(\zeta, \hat{y}) = \bar{e}_y \cdot \bar{e}_y = 1 \quad (2.8)$$

$$\cos^2(\xi, \hat{z}) + \cos^2(\eta, \hat{z}) + \cos^2(\zeta, \hat{z}) = \bar{e}_z \cdot \bar{e}_z = 1$$

$$\cos(\xi, \hat{x})\cos(\xi, \hat{y}) + \cos(\eta, \hat{x})\cos(\eta, \hat{y}) + \cos(\zeta, \hat{x})\cos(\zeta, \hat{y}) = \bar{e}_x \cdot \bar{e}_y = 0$$

$$\cos(\xi, \hat{x})\cos(\xi, \hat{z}) + \cos(\eta, \hat{x})\cos(\eta, \hat{z}) + \cos(\zeta, \hat{x})\cos(\zeta, \hat{z}) = \bar{e}_x \cdot \bar{e}_z = 0$$

$$\cos(\xi, \hat{y})\cos(\xi, \hat{z}) + \cos(\eta, \hat{y})\cos(\eta, \hat{z}) + \cos(\zeta, \hat{y})\cos(\zeta, \hat{z}) = \bar{e}_y \cdot \bar{e}_z = 0$$

## Przykład 2.3

Korzystając z równań (2.8) uzupełnić brakujące elementy macierzy przejścia, a następnie narysować układ stały i ruchomy odpowiadający zadanej macierzy przy założeniu, że początki obu układów pokrywają się ( $O = A$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi, \hat{x}), & \cos(\xi, \hat{y}), & \cos(\xi, \hat{z}) \\ \cos(\eta, \hat{x}), & \cos(\eta, \hat{y}), & \cos(\eta, \hat{z}) \\ \cos(\zeta, \hat{x}), & \cos(\zeta, \hat{y}), & \cos(\zeta, \hat{z}) \end{pmatrix}$$

Z powyższej macierzy odczytujemy:

$$\cos(\xi, \hat{x}) = 1, \quad \cos(\eta, \hat{y}) = \frac{1}{2}, \quad \cos(\zeta, \hat{y}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

i obliczamy:

$$\begin{aligned} 1^2 + \cos^2(\xi, \hat{y}) + \cos^2(\xi, \hat{z}) &= 1 \Rightarrow \cos^2(\xi, \hat{y}) = \\ &= -\cos^2(\xi, \hat{z}) \Rightarrow \cos(\xi, \hat{y}) = \cos(\xi, \hat{z}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + \cos^2(\eta, \hat{x}) + \cos^2(\zeta, \hat{x}) &= 1 \Rightarrow \cos(\eta, \hat{x}) = \\ &= \cos(\zeta, \hat{x}) = 0 \end{aligned}$$

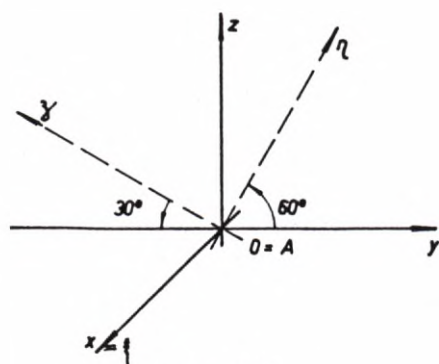
$$0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2(\eta, \hat{z}) = 1 \Rightarrow \cos(\eta, \hat{z}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2(\zeta, \hat{z}) = 1 \Rightarrow \cos(\zeta, \hat{z}) = \frac{1}{2}$$

Macierz przejścia ma więc postać:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0, & \frac{-\sqrt{3}}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

z której wynika, że obrót układu ruchomego nastąpił wokół osi  $Ox$  w płaszczyźnie  $Oy, z$ , co pokazano na rys. 2.3.



Rys. 2.3

Elementy macierzy przejścia wyrazimy przez kąty Eulera, rozważając trzy obroty układu  $A, x, y, z$ , a to: 1° – obrót wokół osi  $Az$  o kąt  $\psi$ , 2° – obrót wokół osi  $Al$  o kąt  $\vartheta$  i 3° – obrót wokół osi  $A\xi$  o kąt  $\varphi$ , otrzymując:

$$\cos(\xi, \hat{x}) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta$$

$$\cos(\xi, \hat{y}) = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta$$

$$\cos(\xi, \hat{z}) = \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$\cos(\eta, \hat{x}) = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta$$

$$\cos(\eta, \hat{y}) = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta \quad (2.9)$$

$$\cos(\eta, \hat{z}) = \cos \varphi \sin \vartheta$$

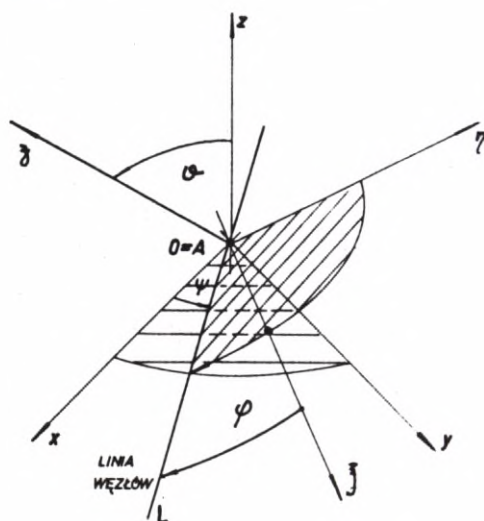
$$\cos(\zeta, \hat{x}) = \sin \psi \sin \vartheta$$

$$\cos(\zeta, \hat{y}) = -\cos \psi \sin \vartheta$$

$$\cos(\zeta, \hat{z}) = \cos \vartheta$$

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań i w tym opisie położenie ciała sztywnego w układzie odniesienia określone jest jednoznacznie przez sześć współrzędnych uogólnionych, z których trzy  $x_A(t), y_A(t), z_A(t)$  podają translację ciała, zaś pozostałe trzy, to jest niezależne elementy macierzy przejścia, opisują rotację ciała.

Do opisu rotacji ciała można również użyć kątów Eulera pokazanych na rysunku 2.4. Noszą one nazwę:  $\varphi$  – kąt obrotu właściwego,  $\psi$  – kąt precesji,  $\vartheta$  – kąt nutacji.



Rys. 2.4

Ruch spowodowany tylko przez zmianę kąta  $\varphi$  nazywamy obrotem właściwym ciała wokół osi  $A\zeta$ , zwanej osią obrotu właściwego. Podobnie ruch spowodowany tylko zmianą kąta  $\psi$  jest precesją ciała wokół osi  $Az$ , zwanej stąd osią precesji. Analogicznie nutacja ciała to ruch spowodowany tylko zmianą kąta  $\vartheta$  wokół osi nutacji, zwanej także linią węzłów.

## 2.2. SPOSOBY WYZNACZANIA PRĘDKOŚCI I PRZYSPIESZEŃ PUNKTÓW CIAŁA SZTYWNEGO W RUCHU DOWOLNYM

Zgodnie z rys. 2.2 położenie każdego punktu  $M$  ciała sztywnego w ruchu dowolnym określa wektor  $\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \overline{AM}$ . Mamy więc do czynienia z ruchem złożonym punktu. Możemy zatem przy liczeniu prędkości i przyspieszeń punktów ciała wykorzystać wzory (1.53) i (1.54), pamiętając jednak o założeniu, że w układzie ruchomym współrzędne punktu są niezależne od czasu, bo są to współrzędne materialne. Otrzymamy wzory:

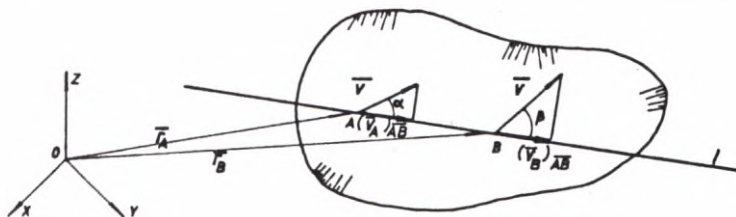
$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \overline{AM} \quad (2.10)$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_A \times \overline{AM} + \vec{\omega}_A \times (\vec{\omega}_A \times \overline{AM})$$

Podamy teraz twierdzenia dotyczące rozkładu prędkości punktów ciała sztywnego w ruchu dowolnym.

### Twierdzenie 1

W ruchu dowolnym ciała sztywnego rzuty prędkości punktów leżących na prostej na tę prostą są równe (rys. 2.5).



Rys. 2.5

Korzystając z założenia o sztywności ciała możemy napisać:

$$\overline{AB}^2 = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2 = \text{const}$$

Różniczkując to wyrażenie po czasie otrzymujemy:

$$2 \overline{AB} \cdot \dot{\overline{AB}} = 2 \overline{AB} \cdot (\overline{v}_B - \overline{v}_A) = 0$$

czyli

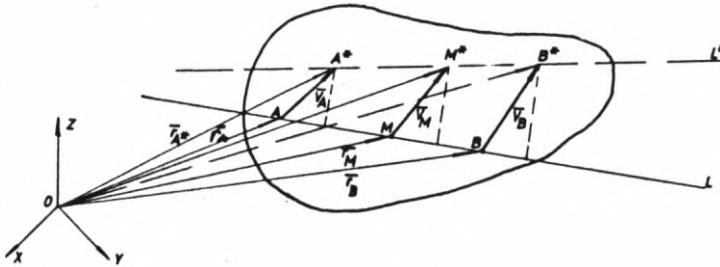
$$\overline{v}_B \cdot \overline{AB} = \overline{v}_A \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow |\overline{v}_B| \cdot |\overline{AB}| \cos \beta = |\overline{v}_A| \cdot |\overline{AB}| \cos \alpha$$

Wykorzystano tutaj definicję iloczynu skalarnego dwóch wektorów. Po wydzieleniu obustronnym ostatniego wyrażenia przez  $|\overline{AB}|$  otrzymamy:

$$(\overline{v}_B)_{AB} = (\overline{v}_A)_{AB} \quad c. b. d. o.$$

### Twierdzenie 2

W ruchu dowolnym ciała sztywnego końce wektorów prędkości punktów leżących na prostej też leżą na prostej (rys. 2.6).



Rys. 2.6

Założenie: Ciało sztywne

$$\overline{AM} \times \overline{AB} = \vec{0}, \quad \text{czyli} \quad \overline{AM} = \alpha \overline{AB}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Teza:

$$\overline{A^*M^*} \times \overline{A^*B^*} = \vec{0}$$

Dowód: Z rys. 2.6 odczytujemy zależności:

$$\overline{A^*M^*} = \overline{AM} + \overline{v}_M - \overline{v}_A = \overline{AM} + \overline{\omega}_A \times \overline{AM}$$

$$\overline{A^*B^*} = \overline{AB} + \overline{v}_B - \overline{v}_A = \overline{AB} + \overline{\omega}_A \times \overline{AB}$$

Wystarczy teraz wektory  $\overline{A^*M^*}$  i  $\overline{A^*B^*}$  pomnożyć wektorowo:

$$\begin{aligned}\overline{A^*M^*} \times \overline{A^*B^*} &= (\overline{AM} + \bar{\omega}_A \times \overline{AM}) \times (\overline{AB} + \bar{\omega}_A \times \overline{AB}) = \overline{AM} \times \overline{AB} + \\ &+ \overline{AM} \times (\bar{\omega}_A \times \overline{AB}) - \overline{AB} \times (\bar{\omega}_A \times \overline{AM}) + \\ &+ (\bar{\omega}_A \times \overline{AM}) \times (\bar{\omega}_A \times \overline{AB}) = (\overline{AM} \cdot \overline{AB}) \bar{\omega}_A - (\overline{AM} \cdot \bar{\omega}_A) \overline{AB} - \\ &- (\overline{AB} \cdot \overline{AM}) \bar{\omega}_A + (\overline{AB} \cdot \bar{\omega}_A) \overline{AM} = \bar{0}\end{aligned}$$

Ponieważ iloczyn wektorowy jest równy zeru, to punkty  $A^*$ ,  $M^*$ ,  $B^*$  należą do jednej prostej.

Jeśli znamy prędkości trzech niewspółliniowych punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ciała sztywnego (w dowolnym ruchu), to prędkość każdego innego punktu  $M$  tego ciała możemy przedstawić jako kombinację liniową wektorów będących rzutami prędkości punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na kierunki łączące te punkty z punktem  $M$ :

$$\bar{v}_M = \alpha(\bar{v}_A)_{AM} + \beta(\bar{v}_B)_{BM} + \gamma(\bar{v}_C)_{CM} \quad (2.11)$$

gdyz zachodzi:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{v}_M)_{AM} = (\bar{v}_A)_{AM} \\ (\bar{v}_M)_{BM} = (\bar{v}_B)_{BM} \\ (\bar{v}_M)_{CM} = (\bar{v}_C)_{CM} \end{array} \right\}$$

Stąd wyznaczamy współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

### 2.3. RUCH POSTĘPOWY CIAŁA SZTYWNEGO

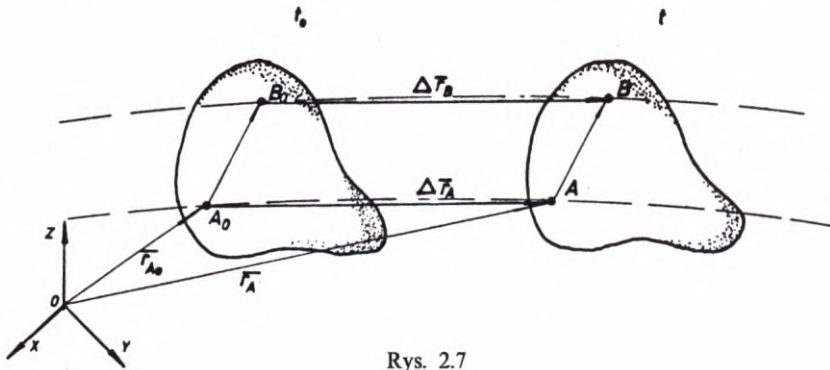
Ruchem postępowym ciała sztywnego nazywamy ruch, w którym odcinek łączący każde dwa dowolnie wybrane punkty ciała zajmuje w czasie jego trwania położenie równoległe do położenia poprzedniego (lub początkowego – rys. 2.7).

Korzystając z definicji ruchu postępowego możemy napisać:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_{B_0} + \Delta \bar{r}_B$$

$$\bar{r}_A = \bar{r}_{A_0} + \Delta \bar{r}_A$$

Ponieważ  $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{B_0} - \vec{r}_{A_0} = \text{const}$ , to zachodzi równość  $\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A$ , a stąd otrzymujemy  $\vec{v}_B = \vec{v}_A$  i  $\vec{a}_B = \vec{a}_A$ .



Rys. 2.7

Własności ruchu postępowego:

- tory punktów ciała są krzywymi przystającymi,
- kąty Eulera są stałe w czasie ruchu,
- prędkości (przyspieszenia) są w danej chwili ruchu jednakowe dla wszystkich punktów ciała,
- ruch postępowy jest translacją ciała, czyli do jego opisu wystarczy podać trzy współrzędne uogólnione  $x_A(t)$ ,  $y_A(t)$  i  $z_A(t)$ .

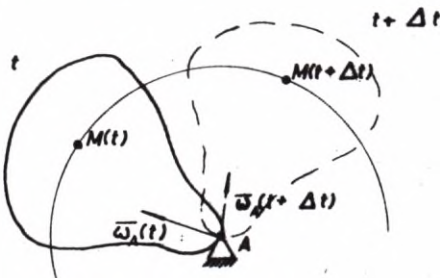
#### 2.4. RUCH KULISTY CIAŁA SZTYWNEGO

Załóżmy teraz, że  $x_A = \text{const}$ ,  $y_A = \text{const}$ ,  $z_A = \text{const}$ , czyli punkt  $A$  jest punktem nieruchomym. Wszystkie inne punkty ciała poruszają się będą po

odpowiednich sferach kulistych o środku w punkcie  $A$ . A zatem ruch kulisty ciała sztywnego jest to ruch ciała wokół stałego punktu (rys. 2.8). Ponieważ  $\vec{v}_A = \vec{0}$  i  $\vec{a}_A = \vec{0}$ , to prędkość (przyspieszenie) dowolnego punktu  $M$  ciała zgodnie z (2.10) jest równa:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_A \times \overline{AM} \quad (2.12)$$

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon}_A \times \overline{AM} + \vec{\omega}_A \times (\vec{\omega}_A \times \overline{AM})$$



Rys. 2.8



Własności ruchu kulistego:

- tory punktów ciała leżą na sferach kulistych o środku w punkcie  $A$ ,
- kąty Eulera są współzrzednymi uogólnionymi jednoznacznie określającymi ten ruch,
- wektor prędkości kątowej  $\bar{\omega}(t)$  określa chwilową oś obrotu zawierającą punkt unieruchomienia,
- przejście ciała z położenia w chwili  $t$  do położenia w chwili  $t + \Delta t$  następuje poprzez skończony obrót wokół punktu unieruchomienia lub ciąg chwilowych obrotów wokół chwilowych osi obrotów przechodzących przez punkt unieruchomienia, gdy z  $\Delta t \rightarrow 0$ .

## 2.5. RUCH OBROTOWY CIAŁA SZTYWNEGO

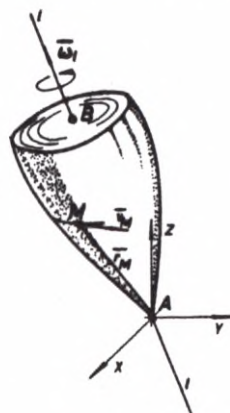
Szczególnym przypadkiem ruchu kulistego jest ruch obrotowy, z którym mamy do czynienia, gdy wektor prędkości kątowej  $\bar{\omega}_A(t)$  jest stały co do kierunku (rys. 2.9). Może się zmieniać jego wielkość i zwrot. A więc istnieje stała oś obrotu  $l$  zawierająca wektor prędkości kątowej. Prędkość, przyspieszenie dowolnego punktu  $M$  ciała są równe:

$$\bar{v}_M = \bar{\omega}_l \times \overline{AM} \quad (2.13)$$

$$\bar{a}_M = \bar{\varepsilon}_l \times \overline{AM} + \bar{\omega}_l \times (\bar{\omega}_l \times \overline{AM})$$

Własności ruchu obrotowego:

- torami punktów ciała są okręgi leżące w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu i o środkach należących do tej osi,
- wektor prędkości kątowej jest stały co do kierunku,
- dwa kąty Eulera są stałe, a więc jedna współzrzedna uogólniona, np. kąt obrotu właściwego, jednoznacznie opisuje ten ruch.



Rys. 2.9

## 2.6. RUCH PŁASKI CIAŁA SZTYWNEGO

Z ruchem tym mamy do czynienia, gdy punkty ciała sztywnego poruszają się w płaszczyznach równoległych do jednej płaszczyzny  $\Pi_O$  zwanej kierującą.

W tym przypadku ruchy punktów ciała leżących na prostopadłej do płaszczyzny kierującej są identyczne, a zatem wystarczy badać ruch figury

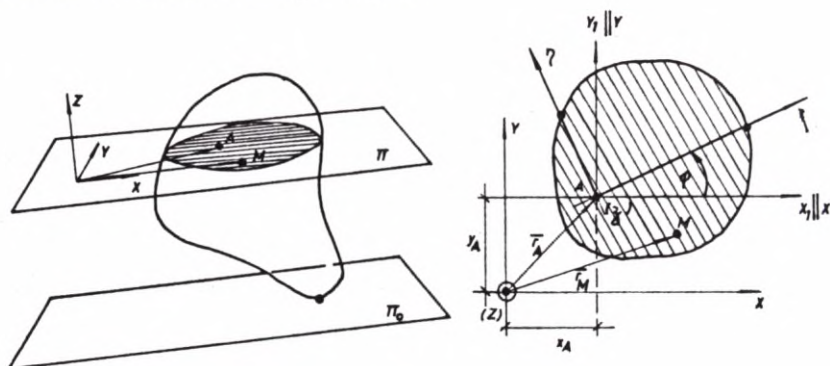
płaskiej, powstałej przez myślowe przecięcie ciała płaszczyzną  $\Pi$  równoległą do płaszczyzny  $\Pi_O$  w jej płaszczyźnie. Zgodnie z rys. 2.10 i wzorem (2.7) położenie dowolnego punktu  $M$  figury płaskiej w nieruchomym układzie współrzędnych określa wektor  $\bar{r}_M$ :

$$\bar{r}_M: \begin{cases} x_M(t) = x_A(t) + \xi_M \cos \varphi(t) - \eta_M \sin \varphi(t) \\ y_M(t) = y_A(t) + \xi_M \sin \varphi(t) + \eta_M \cos \varphi(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Ruch figury płaskiej w jej płaszczyźnie jest jednoznacznie opisany poprzez trzy współrzędne uogólnione, z których dwie  $x_M(t)$ ,  $y_M(t)$  podają translację, zaś kąt  $\varphi(t)$  określa rotację. Równania:

$$\begin{cases} x_M = x_M(t) \\ y_M = y_M(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

są równaniami ruchu dowolnego punktu  $M$  figury płaskiej. Aby otrzymać równania ruchu punktów ciała leżących poza tą płaszczyzną, należy do tych równań dodać równanie  $z = z_O = \text{const}$ .



Rys. 2.10

Z równania (2.14) wyznaczamy prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu ciała (rys. 2.10 a) i (rys. 2.10 b).

$$\bar{v}_M = \dot{\bar{r}} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_A \times \overline{AM} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_A \times (\bar{r}_M - \bar{r}_A) = \bar{v}_A + \bar{v}_{M/A} \quad (2.16)$$

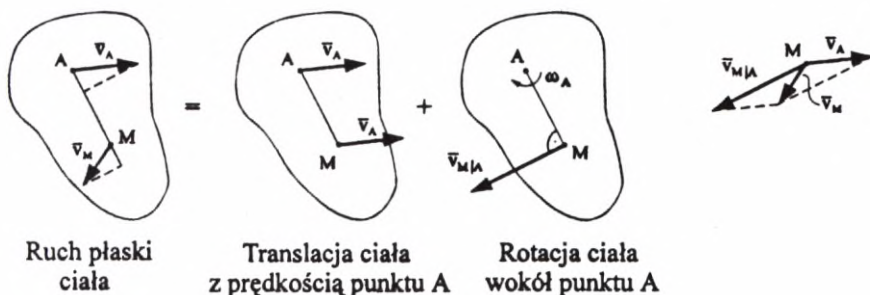
$$\begin{aligned}\bar{a}_M &= \ddot{\bar{r}} = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AM} + \bar{\omega}_A \times (\bar{\omega}_A \times \overline{AM}) = \\ &= \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AM} - \omega_A^2 \overline{AM} = \bar{a}_A + \bar{a}_{M/A}\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_M^{(s)} + \bar{a}_M^{(n)}$$

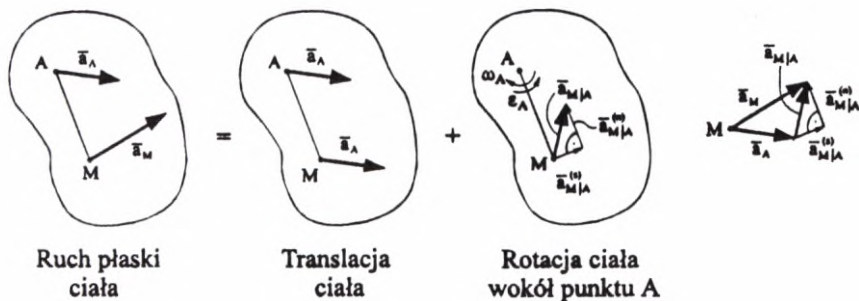
gdzie:

$$\bar{v}_{M/A} = \bar{\omega}_A \times \overline{AM}$$

$$\bar{a}_{M/A} = \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AM} - \omega_A^2 \overline{AM} = \bar{a}_{M/A}^{(s)} + \bar{a}_{M/A}^{(n)}$$



Rys. 2.10a



Rys. 2.10b

Własności ruchu płaskiego:

- tory punktów leżą w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny kierującej,
- kierunek wektora  $\bar{\omega}_A$  jest prostopadły do płaszczyzny kierującej,
- ruch płaski jest złożeniem ruchu postępowego w płaszczyźnie kierującej z prędkością  $\bar{v}_A$  i chwilowego ruchu obrotowego wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt A.

W ruchu płaskim wprowadza się pojęcie środka chwilowego obrotu jako punktu  $P$ , którego prędkość w danej chwili jest równa zero:

$$\bar{v}_P = \bar{0} = \bar{v}_A + \bar{\omega}_A \times (\bar{r}_P - \bar{r}_A) \quad (2.17)$$

Jeżeli wyrażenie (2.17) pomnożymy wektorowo przez wektor prędkości kątowej  $\bar{\omega}_A$ , to otrzymamy wzór na wektor wodzący środka chwilowego obrotu w układzie stałym:

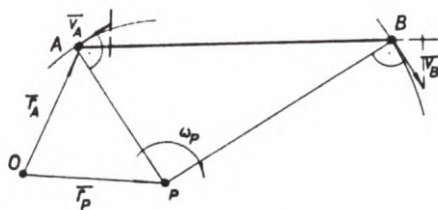
$$\bar{r}_P = \bar{r}_A + \frac{\bar{\omega}_A \times \bar{v}_A}{\omega_A^2} \quad (2.18)$$

Gdy znamy prędkości dwóch punktów figury płaskiej, to środek chwilowego obrotu można również wyznaczyć jako punkt przecięcia prostych prostopadłych do zadanych prędkości punktów  $A$  i  $B$ .

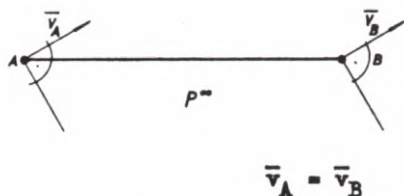
Mogą tu wystąpić następujące przypadki:

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}_P \times \overline{PA} \quad (2.19)$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_P \times \overline{PB}$$



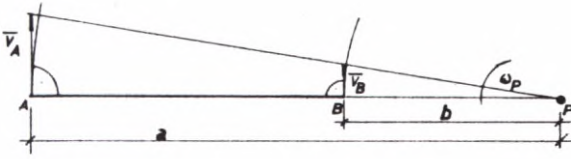
Rys. 2.11a



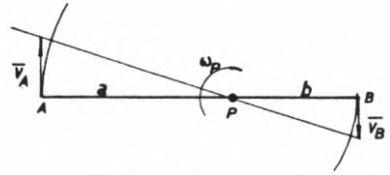
Rys. 2.11b

$P^\infty$  jest punktem niewłaściwym  
(leżącym w nieskończoności)

$$\begin{aligned} \bar{v}_A = \bar{\omega}_P \times \overline{PA} &\Rightarrow \frac{|\bar{v}_A|}{a} = \frac{|\bar{v}_B|}{b} \\ \bar{v}_B = \bar{\omega}_P \times \overline{PB} & \end{aligned} \quad (2.20)$$

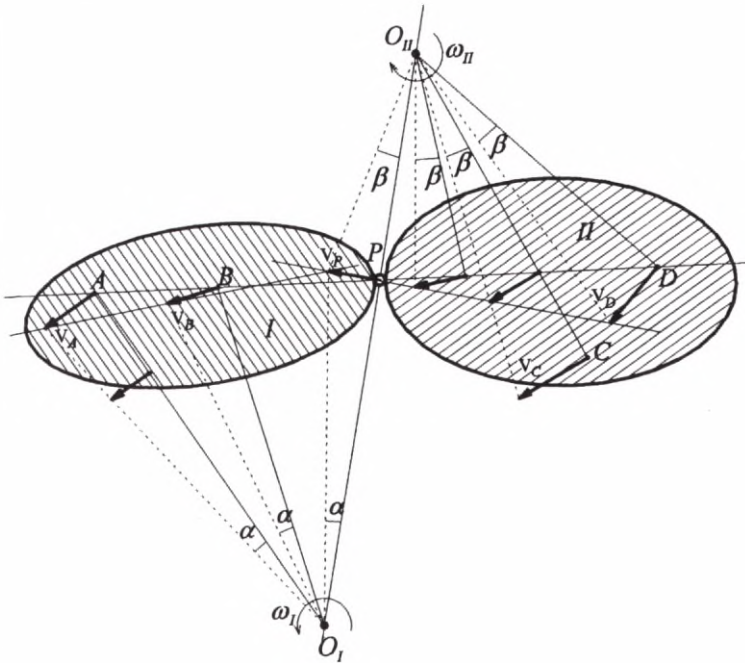


Rys. 2.11c



Rys. 2.11d

Jeżeli dwie sztywne figury płaskie (tarcze) mają wspólny punkt (przegub), który zezwala na wzajemny obrót łączonych tarcz, to środki ich chwilowych obrotów i przegub leżą na jednej prostej.



$$|\bar{v}_A| = v_A$$

$$|\bar{v}_B| = v_B$$

Znając środki chwilowych obrotów łączonych tarcz możemy wyznaczyć możliwe prędkości korzystając:

a) z zapisu wektorowego

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}_I \times \overline{O_I A}$$

$$\bar{v}_P = \bar{\omega}_I \times \overline{O_I P} = \bar{\omega}_{II} \times \overline{O_{II} P} \Rightarrow \bar{\omega}_{II} = \bar{\omega}_{II}(\bar{\omega}_I)$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_I \times \overline{O_I B}$$

$$\bar{v}_D = \bar{\omega}_{II} \times \overline{O_{II} D}$$

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_{II} \times \overline{O_{II} C}$$

b) z twierdzenia o rozkładzie prędkości punktów ciała sztywnego

$$(\bar{v}_A)_{AP} = (\bar{v}_P)_{AP}$$

$$(\bar{v}_P)_{PC} = (\bar{v}_C)_{PC}$$

c) z zapisu skalarnego

Przyjęto  $v_A = v_O$

$$v_B = \omega_I |\overline{O_I B}| = |\overline{O_I B}| \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha = \omega_I = \frac{v_A}{|\overline{O_I A}|} = \frac{v_O}{|\overline{O_I A}|}$$

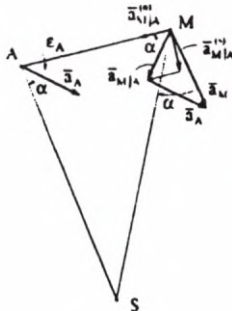
$$v_P = |\overline{O_I P}| \operatorname{tg} \alpha = |\overline{O_I P}| \frac{v_O}{|\overline{O_I A}|} = \omega_{II} |\overline{O_{II} P}| = |\overline{O_{II} P}| \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{|\overline{O_I P}|}{|\overline{O_{II} P}|} \operatorname{tg} \alpha$$

$$v_C = |\overline{O_{II} C}| \operatorname{tg} \beta$$

d) z proporcji

$$\frac{v_B}{|\overline{O_I B}|} = \frac{v_A}{|\overline{O_I A}|} = \frac{v_P}{|\overline{O_I P}|}, \quad \frac{v_P}{|\overline{O_{II} P}|} = \frac{v_C}{|\overline{O_{II} C}|} = \frac{v_D}{|\overline{O_{II} D}|}$$

Oprócz środka chwilowego obrotu wprowadza się w ruchu płaskim ciała sztywnego chwilowy środek przyspieszeń (rys. 2.11 e).



Rys. 2.11e

$$\begin{aligned} \bar{a}_M &= \bar{a}_A + \bar{\epsilon}_A \times \overline{AM} - \omega_A^2 \overline{AM} \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_A + \bar{a}_{M|A} = \bar{a}_A + \bar{a}_{M|A}^{(t)} + \bar{a}_{M|A}^{(n)} \\ \bar{a}_{M|A}^{(t)} &= \bar{\epsilon}_A \times \overline{AM} \\ \bar{a}_{M|A}^{(n)} &= -\omega_A^2 \overline{AM} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|\bar{a}_{M|A}^{(t)}|}{|\bar{a}_{M|A}^{(n)}|} = \frac{|\bar{\epsilon}_A|}{\omega_A^2} \end{aligned}$$

Chwilowy środek przyspieszeń punktów ciała sztywnego w ruchu płaskim definiujemy jako punkt, którego przyspieszenie w danej chwili jest równe 0.

**Twierdzenie dotyczące rozkładu przyspieszeń punktów ciała sztywnego w ruchu płaskim (rys. 2.11 e)**

Dla punktów ciała sztywnego w dowolnym ruchu płaskim zachodzi:

$$\frac{|\bar{a}_M|}{|SM|} = \frac{|\bar{a}_A|}{|SA|}$$

Dowód: W dowodzie skorzystamy z zależności wyprowadzonych w rachunku wektorowym:

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) &= (\bar{a} \cdot \bar{c})(\bar{b} \cdot \bar{d}) - (\bar{b} \cdot \bar{c})(\bar{a} \cdot \bar{d}) \\ (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) &= a^2 b^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2\end{aligned}$$

Zapiszmy przyspieszenie punktu  $M$ :

$$\bar{a}_M = \bar{a}_S + \bar{\varepsilon}_S \times \overline{SM} - \omega_S^2 \overline{SM}$$

Ponieważ

$$\bar{a}_S = \bar{0}$$

to

$$\bar{a}_M = \bar{\varepsilon}_S \times \overline{SM} - \omega_S^2 \overline{SM}$$

Obliczymy teraz kwadrat długości  $\bar{a}_M$ :

$$\bar{a}_M^2 = \bar{a}_M \cdot \bar{a}_M = (\bar{\varepsilon}_S \times \overline{SM}) \cdot (\bar{\varepsilon}_S \times \overline{SM}) + \omega_S^4 \overline{SM}^2 - 2\omega_S^2 \overline{SM} \cdot (\bar{\varepsilon}_S \times \overline{SM})$$

Iloczyn mieszany wektorów  $\overline{SM}$ ,  $\bar{\varepsilon}_S$  i  $\overline{SM}$  jest równy zeru, gdyż leżą one w jednej płaszczyźnie

$$\bar{a}_M^2 = (\varepsilon_S^2 + \omega_S^4) \overline{SM}^2$$

Analogicznie dla punktu  $A$  zachodzi:

$$\bar{a}_A^2 = (\varepsilon_S^2 + \omega_S^4) \overline{SA}^2$$

Stąd

$$\frac{|\bar{a}_M|}{|\bar{a}_A|} = \frac{|\overline{SM}|}{|\overline{SA}|} \quad c. b. d. o.$$

## Przykład 2.4

Dla sztywnego układu prętowego złożonego z trzech prętów wyznaczyć środki chwilowych obrotów oraz prędkości punktów  $A$  i  $B$ .

Punkty  $P_1$  i  $P_3$  jako nieruchome stanowią środki obrotów dla prętów 1 i 3. Środek chwilowego obrotu pręta 2 leży na przecięciu prostych  $AP_1$  i  $BP_3$  (rys. 2.12) i stąd jego współrzędne w układzie  $P_1 x, y$  wynoszą:

$$P_2(0, -2)$$

Obliczmy teraz prędkości punktów  $A$  i  $B$ :

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}_1 \times \overline{P_1 A} = \bar{\omega}_2 \times \overline{P_2 A}$$

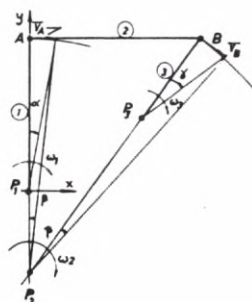
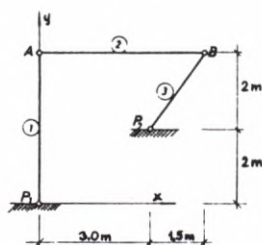
$$\begin{array}{r} \bar{\omega}_1 = (0, \quad 0, \quad -\omega_1) \\ \times \overline{P_1 A} = (0, \quad 4, \quad 0) \\ \hline \bar{v}_A = (4\omega_1, \quad 0, \quad 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bar{\omega}_2 = (0, \quad 0, \quad -\omega_2) \\ \times \overline{P_2 A} = (0, \quad 6, \quad 0) \\ \hline \bar{v}_A = (6\omega_2, \quad 0, \quad 0) \end{array}$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_2 \times \overline{P_2 B} = \bar{\omega}_3 \times \overline{P_3 B}$$

$$\begin{array}{r} \bar{\omega}_2 = (0, \quad 0, \quad -\omega_2) \\ \times \overline{P_2 B} = \left( \frac{9}{2}, \quad 6, \quad 0 \right) \\ \hline \bar{v}_B = \left( 6\omega_2, \quad -\frac{9}{2}\omega_2, \quad 0 \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bar{\omega}_3 = (0, \quad 0, \quad -\omega_3) \\ \times \overline{P_3 B} = \left( \frac{3}{2}, \quad 2, \quad 0 \right) \\ \hline \bar{v}_B = \left( 2\omega_3, \quad -\frac{3}{2}\omega_3, \quad 0 \right) \end{array}$$



Rys. 2.12

Porównując odpowiednie prędkości punktów wyznaczamy zależność między prędkościami kątowymi:



$$4\omega_1 = 6\omega_2 = 2\omega_3$$

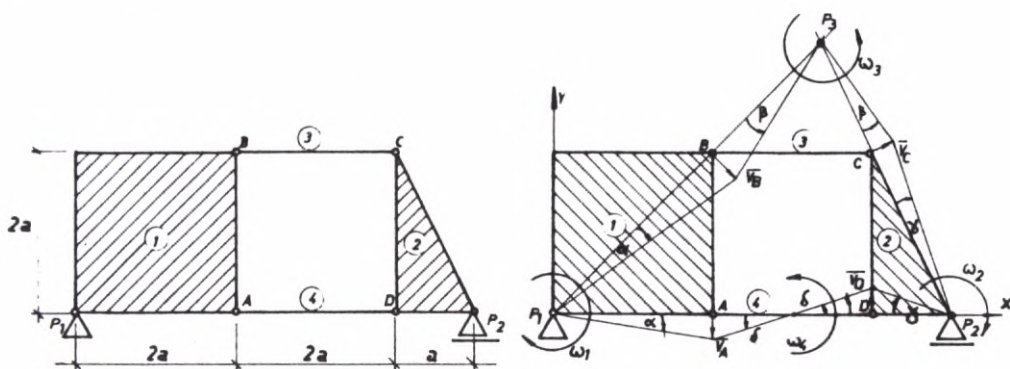
Stąd otrzymujemy:

$$\omega_2 = \frac{2}{3}\omega_1$$

$$\omega_3 = 2\omega_1$$

### Przykład 2.5

Dla sztywnego układu tarczowo-prętowego złożonego z dwóch tarcz i dwu prętów wyznaczyć środki chwilowych obrotów oraz prędkości punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (rys. 2.13).



Rys. 2.13

Również i w tym przykładzie punkty  $P_1$  i  $P_2$  jako stałe stanowią środki obrotów dla tarcz 1 i 2. Środek chwilowego obrotu dla pręta 3 leży na przecięciu prostych  $P_1B$  i  $P_2C$ , zaś dla pręta 4 na prostej  $P_1P_2$  i prostej łączącej końce wektorów prędkości punktów  $A$  i  $D$ . Współrzędne punktu  $P_3$  wyznaczamy z następującej proporcji:

$$\frac{y_3}{5a - x_3} = \frac{2a}{a} = 2, \quad y_3 = x_3$$

Stąd otrzymujemy:

$$y_3 = x_3 = \frac{10}{3}a$$

Obliczmy prędkości punktów  $A$  i  $B$ :

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= \bar{\omega}_1 \times \overline{P_1A} \Leftrightarrow \bar{\omega}_1 = (0, & 0, & -\omega_1) \\ & \times \overline{P_1A} = (2a, & 0, & 0) \\ \hline \bar{v}_A &= (0, & -2a\omega_1, & 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{\omega}_1 \times \overline{P_1B} \Leftrightarrow \bar{\omega}_1 = (0, & 0, & -\omega_1) \\ & \times \overline{P_1B} = (2a, & 2a, & 0) \\ \hline \bar{v}_B &= (2a\omega_1, & -2a\omega_1, & 0) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{\omega}_3 \times \overline{P_3B} \Leftrightarrow \bar{\omega}_3 = (0, & 0, & +\omega_3) \\ & \times \overline{P_3B} = \left(-\frac{4}{3}a, & -\frac{4}{3}a, & 0\right) \\ \hline \bar{v}_B &= \left(\frac{4}{3}a\omega_3, & -\frac{4}{3}a\omega_3, & 0\right) \end{aligned}$$

Z porównania współrzędnych wektora  $\bar{v}_B$  wynika, że  $\omega_3 = \frac{3}{2}\omega_1$ . Podobnie liczymy prędkość punktu  $C$ :

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_3 \times \overline{P_3C} = \bar{\omega}_2 \times \overline{P_2C}$$

$$\begin{array}{l} \bar{\omega}_3 = \left(0, \quad 0, \quad \frac{3}{2}\omega_1\right) \\ \times \overline{P_3C} = \left(\frac{2}{3}a, \quad -\frac{4}{3}a, \quad 0\right) \\ \hline \bar{v}_C = (2a\omega_1, \quad a\omega_1, \quad 0) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \bar{\omega}_2 = (0, \quad 0, \quad -\omega_2) \\ \times \overline{P_2C} = (-a, \quad 2a, \quad 0) \\ \hline \bar{v}_C = (2a\omega_2, \quad a\omega_2, \quad 0) \end{array}$$

I tutaj okazało się, że  $\omega_2 = \omega_1$ .

Prędkość punktu  $D$  wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} \bar{v}_D = \bar{\omega}_2 \times \overline{P_2 D} &\Leftrightarrow \bar{\omega}_2 = (0, & 0, & -\omega_1) \\ &\times \overline{P_2 D} = (-a, & 0, & 0) \\ \hline \bar{v}_D &= (0, & a\omega_1, & 0) \end{aligned}$$

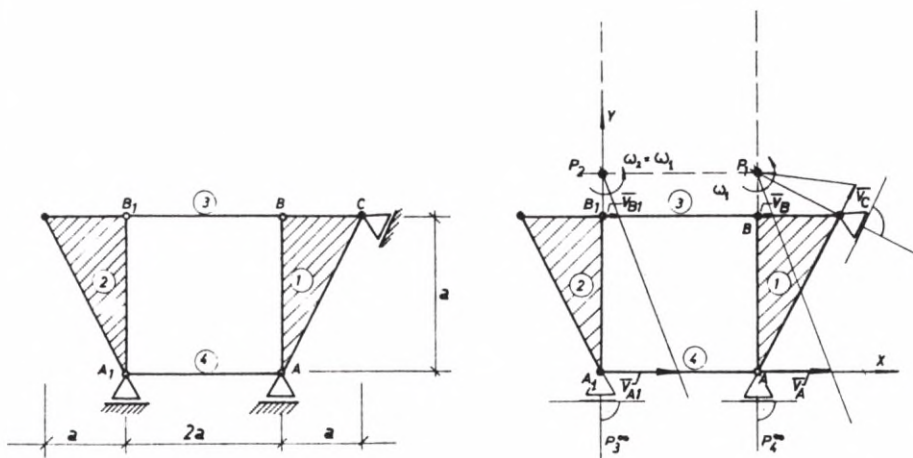
Należy jeszcze wyznaczyć współrzędne punktu  $P_4$ . W tym celu skorzystamy z proporcji:

$$\frac{|\bar{v}_D|}{4a - x_4} = \frac{|\bar{v}_A|}{x_4 - 2a} \Rightarrow x_4 = \frac{10}{3}a$$

$$P_4 \left( \frac{10}{3}a, 0 \right)$$

### Przykład 2.6

Dla sztywnego układu złożonego z dwóch tarcz i dwu prętów wyznaczyć środki chwilowych obrotów oraz prędkości punktów  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$  (rys. 2.14).



Rys. 2.14

Ponieważ punkty  $A_1$ ,  $A$  i  $C$  mają możliwość ruchu w zaznaczonych kierunkach, to środek chwilowego obrotu tarczy 1 leży na przecięciu prostych prostopadłych do tych kierunków. Pręty 3 i 4 mogą poruszać się tylko przez translację, a zatem środki chwilowych obrotów są punktami niewłaściwymi, bo

leżącymi w nieskończoności. Stąd wynika, że  $\bar{v}_{A1} = \bar{v}_A$  i  $\bar{v}_{B1} = \bar{v}_B$ . Środek chwilowego obrotu tarczy 2 leży na kierunku prostopadłym do  $\bar{v}_{A1}$  oraz prostej łączącej końce wektorów prędkości punktów  $A_1$  i  $B_1$ .

W układzie  $A_1 x, y$  środki chwilowych obrotów mają następujące współrzędne:

$$P_1(2a, 2a) \qquad P_2(0, 2a)$$

Obliczymy prędkości punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$\begin{array}{r} \bar{v}_A = \bar{\omega}_1 \times \overline{P_1A} \Leftrightarrow \bar{\omega}_1 = (0, \quad 0, \quad \omega_1) \\ \quad \times \overline{P_1A} = (0, \quad -2a, \quad 0) \\ \hline \bar{v}_A = (2a\omega_1, \quad 0, \quad 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bar{v}_B = \bar{\omega}_1 \times \overline{P_1B} \Leftrightarrow \bar{\omega}_1 = (0, \quad 0, \quad \omega_1) \\ \quad \times \overline{P_1B} = (0, \quad -a, \quad 0) \\ \hline \bar{v}_B = (a\omega_1, \quad 0, \quad 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bar{v}_C = \bar{\omega}_1 \times \overline{P_1C} \Leftrightarrow \bar{\omega}_1 = (0, \quad 0, \quad \omega_1) \\ \quad \times \overline{P_1C} = (a, \quad -a, \quad 0) \\ \hline \bar{v}_C = (a\omega_1, \quad a\omega_1, \quad 0) \end{array}$$

### Przykład 2.6a

Dla układu prętowo-tarczowego, pokazanego na rys. 2.14a, wyznaczyć rozkład możliwych prędkości punktów  $A_1$  do  $A_6$ , wykorzystując twierdzenia o rozkładzie prędkości punktów ciała sztywnego. Pręty 1, 2, 3 tworzą sztywną tarczę podpartą w punktach  $A_1$  i  $A_2$ , przez co jest ona unieruchomiona. Pręt 5 ma środek obrotu w punkcie  $A_1$ , a zatem prędkość możliwa punktu  $A_4$  jest prostopadła do odcinka  $\overline{O_5A_4}$ ; przyjęto jej wielkość równą  $v_0$ . Dla pręta 4 punkt  $A_3$  stanowi środek obrotu i dlatego prędkość możliwa punktu  $A_6$  jest prostopadła do wektora  $\overline{O_4A_6}$ , a jej wielkość obliczymy z równości rzutów prędkości  $v_4$  i  $v_6$  na kierunek  $A_4 - A_6$ :

$$v_0 \cos(45^\circ - \alpha) = v_6 \cos(45^\circ - \beta)$$

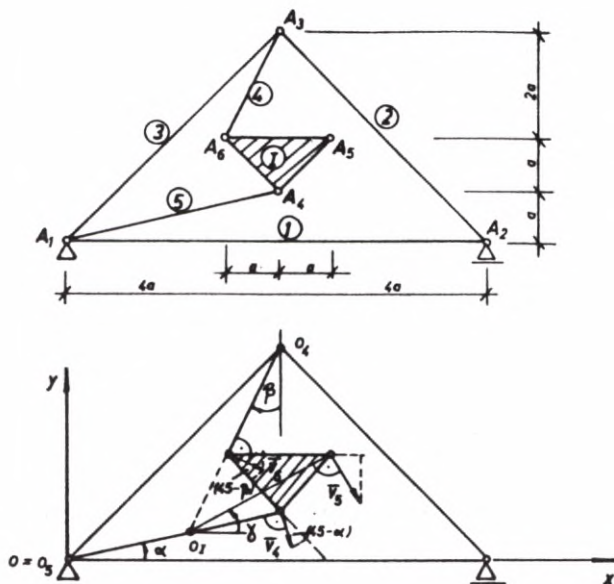
a dalej:

$$v_6 = \frac{\cos(45^\circ - \alpha)}{\cos(45^\circ - \beta)} v_0 = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \beta + \sin \beta} v_0 = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{5}{17}} v_0 = 0,904 v_0$$

gdyż

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



Rys. 2.14a

Środek  $O_1$  obrotu tarczy I leży na przecięciu prostych prostopadłych do możliwych prędkości punktów  $A_4$  i  $A_5$ . Prędkość punktu  $A_5$  możemy teraz wyliczyć z równości rzutów prędkości punktów  $A_6$  i  $A_5$  na kierunek wyznaczony przez te punkty lub z proporcji:

$$\frac{v_5}{|O_1 A_5|} = \frac{v_6}{|O_1 A_6|} \Rightarrow v_5 = \frac{|O_1 A_5|}{|O_1 A_6|} v_6$$

W układzie współrzędnych  $\{O, x, y\}$  proste wyznaczone przez odcinki  $\overline{OA_4}$  i  $\overline{A_3A_6}$  mają następujące równania:

$$\begin{cases} y = 0,25x \\ y = 2x - 4a \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań wyznaczmy współrzędne środka  $O_I$ :

$$O_I\left(\frac{16}{7}a, \frac{4}{7}a\right)$$

a dalej obliczymy długości wektorów  $\overline{O_I A_5}$  i  $\overline{O_I A_6}$ :

$$|\overline{O_I A_5}| = \frac{19}{7}a, \quad |\overline{O_I A_6}| = \frac{5}{7}\sqrt{5}a$$

Ostatecznie mamy:

$$v_5 = \frac{19}{3\sqrt{17}}v_0 \cong 1,536v_0$$

$$\sin \gamma = \frac{10}{\sqrt{461}} = 0,466, \quad \cos \gamma = \frac{19}{\sqrt{461}} = 0,885$$

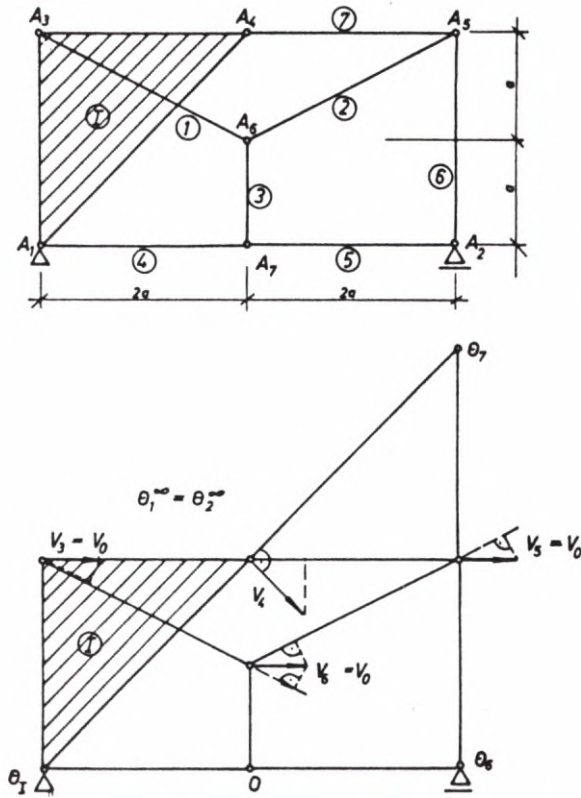
### Przykład 2.6b

Dla sztywnego układu prętowo-tarczowego, przedstawionego na rys. 2.14 b, wyznaczyć rozkład prędkości możliwych, stosując metodę z poprzedniego przykładu.

Dla tarczy I unieruchomionej w punkcie  $A_1 = O_I$ , będącym jej środkiem obrotu, przyjęto prędkość możliwą punktu  $A_3$  równą  $v_3 = v_0$ . Punkt  $A_4$  również należy do tej tarczy, czyli jego prędkość możliwa jest prostopadła do odcinka  $\overline{O_I A_4}$  i ma wielkość  $v_4 = \sqrt{2}v_0$ , co wynika z równości rzutów prędkości  $v_3$  i  $v_4$  na kierunek  $A_3 - A_4$ .

Środek obrotu dla pręta 7 leży na przecięciu prostych  $O_I - A_4$  z prostą  $A_2 - A_5$ . Jest zatem widoczne, że prędkość punktu  $A_5$  jest równa  $v_5 = v_0$ . Prędkość punktu  $A_6$  ustalamy z rzutów prędkości  $v_5$  i  $v_6$  na kierunek  $A_3 - A_6$  oraz prędkości  $v_5$  i  $v_6$  na kierunek  $A_5 - A_6$ . Punkt przecięcia prostych prostopadłych do tych rzutów stanowi koniec wektora prędkości punktu  $A_6$  (por. rys. 2.14 b). Zachodzi więc następująca zależność:

$$v_6 = v_0$$

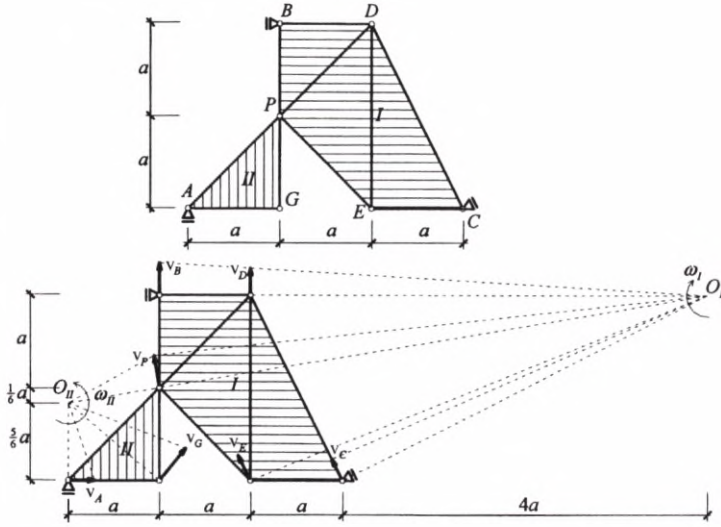


Rys. 2.14b

Środki obrotów dla prętów 1 i 2 są punktami niewłaściwymi, czyli pręty te mogą przemieszczać się tylko przez translację. Środek obrotu dla pręta 3 jest w punkcie  $O_3$ , zaś dla pręta 6 w punkcie  $O_6$ . Pręty 4 i 5 są unieruchomione.

### Przykład 2.6c

Dla sztywnego układu tarczowego wyznaczyć środki chwilowych obrotów oraz prędkości możliwe punktów wierzchołkowych



Środek  $O_I$  obrotu tarczy I leży na przecięciu prostych prostopadłych do  $\vec{v}_B$  i  $\vec{v}_C$ . Przyjęto  $v_B = 6v_O$ , a stąd:

$$\operatorname{tg} \alpha_I = \frac{6v_O}{6a} = \frac{v_O}{a} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] = \omega_I$$

$$v_D = 5a \operatorname{tg} \alpha_I = 5v_O, \quad v_C = 2\sqrt{5}a \operatorname{tg} \alpha_I = 2\sqrt{5}v_O,$$

$$v_E = \sqrt{29}a \operatorname{tg} \alpha_I = \sqrt{29}v_O, \quad v_P = \sqrt{37}a \operatorname{tg} \alpha_I = \sqrt{37}v_O.$$

Środek  $O_{II}$  obrotu tarczy II leży na przecięciu linii  $O_I P$  z linią prostopadłą do  $\vec{v}_A$ . Z twierdzenia Talesa wyznaczamy wartość  $y_O$ :

$$\frac{y_O}{a} = \frac{a}{6a} \Rightarrow y_O = \frac{1}{6}a$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{v_P}{\frac{\sqrt{37}}{6}a} = \frac{6v_O}{a}$$

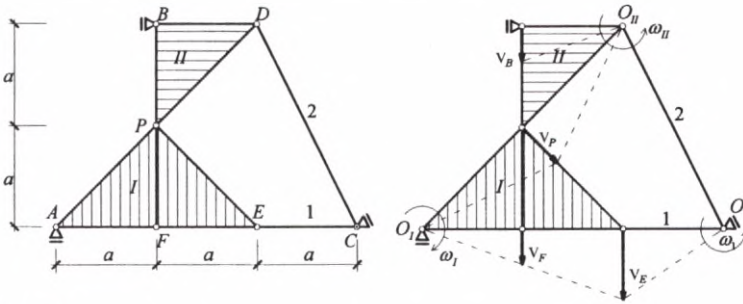
$$v_A = \frac{5}{6}a \operatorname{tg} \alpha_{II} = 5v_O$$

$$v_G = \frac{\sqrt{61}}{6}a \operatorname{tg} \alpha_{II} = \sqrt{61}v_O$$



### Przykład 2.6d

Dla sztywnego układu prętowo-tarczowego wyznaczyć środki chwilowych obrotów oraz prędkości punktów węzłowych



Przyjęto  $v_B = v_O$

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{v_O}{a} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] = \omega_{II} = \omega_I$$

$$v_P = \sqrt{2} a \frac{v_O}{a} = \sqrt{2} v_O$$

$$v_F = a \frac{v_O}{a} = v_O$$

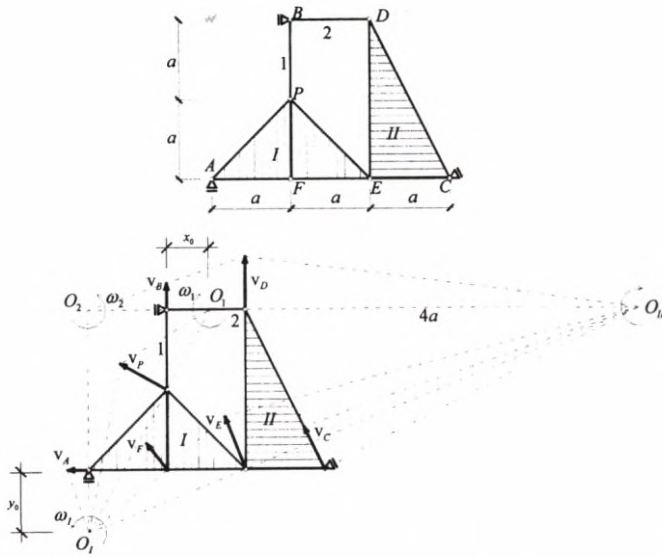
$$v_E = 2 a \frac{v_O}{a} = 2 v_O$$

$$\omega_I = \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{v_E}{a} = \frac{2 v_O}{a} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$v_C = 0$$

### Przykład 2.6e

Dla sztywnego układu prętowo-tarczowego wyznaczyć środki chwilowych obrotów oraz możliwe prędkości punktów węzłowych.



Środek obrotu tarczy II leży na przecięciu linii  $BD$  z prostą prostopadłą do  $\vec{v}_A$ . Przyjęto  $v_D = 5v_0$  i stąd:

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{5v_0}{5a} = v_0 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$v_C = 2\sqrt{5} \operatorname{tg} \alpha_{II} = 2\sqrt{5} v_0, \quad v_E = \sqrt{29} a \operatorname{tg} \alpha_{II} = \sqrt{29} v_0$$

Z twierdzenia Talesa wyznaczamy  $y_0$

$$\frac{y_0}{2a} = \frac{2a}{5a} \Rightarrow y_0 = \frac{4}{5} a$$

$$\operatorname{tg} \alpha_I = \frac{v_E}{\frac{2}{5} \sqrt{29} a} = \frac{5v_0}{2a} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$v_A = \frac{4}{5} a \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{4}{5} a \frac{5v_0}{2a} = 2v_0$$

$$v_F = \frac{1}{5} \sqrt{41} a \operatorname{tg} \alpha_I = \frac{1}{5} \sqrt{41} a \frac{5v_0}{2a} = \frac{\sqrt{41}}{2} v_0$$

$$v_P = \frac{1}{5} \sqrt{106} a \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{5} \sqrt{106} a \frac{5}{2} \frac{v_O}{a} = \frac{\sqrt{106}}{2} v_O$$

Z twierdzenia Talesa wyznaczamy położenie środka chwilowego obrotu pręta 1:

$$\frac{x_O}{a} = \frac{a}{\frac{9}{5}a} \Rightarrow x_O = \frac{5}{9}a$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_P}{\frac{1}{9} \sqrt{106} a} = \frac{9 \sqrt{106} v_O}{2 \sqrt{106} a} = \frac{9}{2} \frac{v_O}{a}$$

$$v_B = \frac{5}{9} a \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{9} a \frac{9}{2} \frac{v_O}{a} = \frac{5}{2} v_O$$

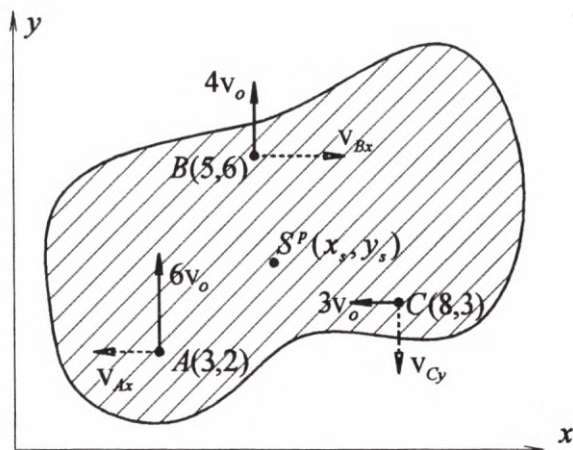
Środek obrotu pręta 2 leży na przecięciu prostej  $BD$  z prostą łączącą końce prędkości punktów  $D$  i  $B$ .

### Przykład 2.6f

W ruchu płaskim figury sztywnej znane są dla jej punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  w ustalonej chwili  $t$  składowe prędkości:

$$v_{Ax} = 6v_O \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right], \quad v_{By} = 4v_O \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right], \quad v_{Cx} = 3v_O \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

Wyznaczyć środek chwilowego obrotu i pozostałe składowe prędkości tych punktów.



## Rozwiązanie

Piszemy proporcje:

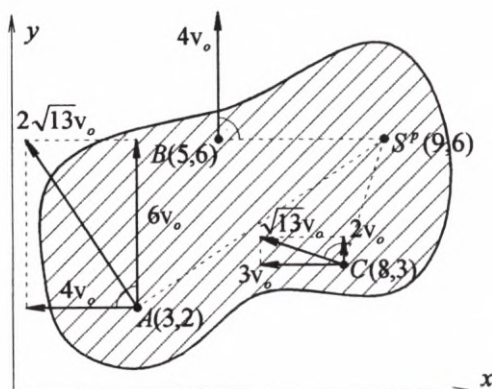
$$\frac{6}{x_S - 3} = \frac{4}{x_S - 5} \Rightarrow x_S = 9 \text{ [m]}$$

$$\frac{6}{x_S - 3} = \frac{3}{y_S - 3} \Rightarrow y_S = 6 \text{ [m]}$$

$$\frac{v_{AX}}{y_S - 2} = \frac{3}{y_S - 3} \Rightarrow v_{AX} = 4 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$\frac{v_{BX}}{6 - y_S} = \frac{4}{y_S - 2} \Rightarrow v_{BX} = 0 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$\frac{v_{CY}}{8 - x_S} = \frac{6}{x_S - 3} \Rightarrow v_{CY} = -2 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

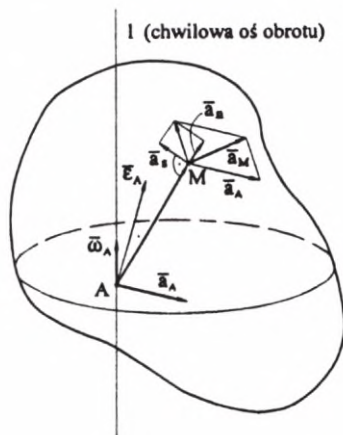


## 2.7. OGÓLNY PRZYPADEK RUCHU CIAŁA SZTYWNEGO

Mamy z nim do czynienia, gdy wszystkie sześć jego współrzędnych uogólnionych zmienia się w czasie:

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), & y_A = y_A(t), & z_A = z_A(t), \\ \varphi = \varphi(t), & \psi = \psi(t), & \vartheta = \vartheta(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

Wyboru punktu  $A$  można dokonać na nieskończenie wiele sposobów. Ma to wpływ tylko na ruch postępowy ciała, gdyż kąty Eulera nie zależą od jego wyboru. A zatem ruch dowolny ciała sztywnego można przedstawić jako złożenie ruchu postępowego ciała z prędkością dowolnie wybranego punktu  $A$  ciała i chwilowego ruchu obrotowego wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez ten wybrany punkt.



Rys. 2.15

Prędkości i przyspieszenia punktów ciała sztywnego w ruchu dowolnym (rys. 2.15) obliczamy według zależności:

$$\begin{aligned}\bar{v}_M &= \bar{v}_A + \bar{\omega}_A \times \overline{AM} = \bar{v}_A + \bar{v}_{M/A} \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AM} + \bar{\omega}_A \times (\bar{\omega}_A \times \overline{AM}) = \\ &= \bar{a}_A + \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AM} + (\bar{\omega}_A \cdot \overline{AM}) \bar{\omega}_A - \omega_A^2 \overline{AM} \quad (2.22) \\ \bar{a}_M &= \bar{a}_A + \bar{a}_s + \bar{a}_n\end{aligned}$$

gdzie:

$$\bar{a}_s = \bar{\varepsilon}_A \times \overline{AM}, \quad \bar{a}_n = (\bar{\omega}_A \cdot \overline{AM}) \bar{\omega}_A - \omega_A^2 \overline{AM}$$

## 2.8. WYZNACZENIE PRZEMIESZCZEŃ PUNKTÓW CIAŁA SZTYWNEGO

Rozważmy dwa bliskie położenia ciała sztywnego odpowiadające chwilom  $t$  i  $t + \Delta t$ . O przyroście czasu  $\Delta t$  zakładamy, że jest na tyle mały, aby można było w analizie ruchu pominąć wielkości  $(\Delta t)^n$ ,  $n \geq 2$ .

Położenie dowolnego punktu  $M$  ciała w chwili  $t$  w stałym układzie odniesienia określa wektor  $\bar{r}_M(t)$ , zaś w chwili  $t + \Delta t$  wektor  $\bar{r}_M(t + \Delta t)$ .

Wektor  $\bar{u}_M = \bar{r}_M(t + \Delta t) - \bar{r}_M(t) = \bar{r}_M \Delta t + 0(\Delta t^2)$  jest wektorem przemieszczenia punktu  $M$ . Jeśli wykorzystamy zależność (2.22), to wektor przemieszczenia możemy zapisać następująco:

$$\bar{u}_M = (\bar{v}_A + \bar{\omega}_A \times \overline{AM}) \Delta t = \bar{v}_A \Delta t + (\bar{\omega}_A \Delta t) \times \overline{AM} = \bar{u}_A^0 + \bar{\omega}'_A \times \overline{AM} \quad (2.23)$$

gdzie  $\bar{u}_A^0$  i  $\bar{\omega}'_A$  są wektorami stałymi, a więc jednakowymi dla wszystkich punktów ciała.

W wyrażeniu (2.23) wektor  $\bar{u}_A^0$  stanowi przemieszczenie punktu związane z translacją ciała, a wektor  $\bar{\omega}'_A \times \overline{AM}$  – przemieszczenie odpowiadające rotacji ciała.

Zapiszmy wektor  $\bar{u}_M$  w bazie stałego układu współrzędnych:

$$\begin{aligned} \bar{u}_M(x, y, z) = u_x \bar{e}_x + u_y \bar{e}_y + u_z \bar{e}_z = u_0 \bar{e}_x + v_0 \bar{e}_y + w_0 \bar{e}_z + \\ + (\alpha_0 \bar{e}_x + \beta_0 \bar{e}_y + \gamma_0 \bar{e}_z) \times (x \bar{e}_x + y \bar{e}_y + z \bar{e}_z) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Z równości (2.24) otrzymujemy wzory określające współrzędne przemieszczeń punktów ciała sztywnego:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_0 - \gamma_0 y + \beta_0 z = u_x(y, z) \\ u_y(x, y, z) = v_0 + \gamma_0 x - \alpha_0 z = u_y(x, z) \\ u_z(x, y, z) = w_0 - \beta_0 x + \alpha_0 y = u_z(x, y) \end{cases} \quad (2.25)$$

Ponieważ związki (2.25) są liniowe, zatem spełniają następujący jednorodny układ równań różniczkowych:

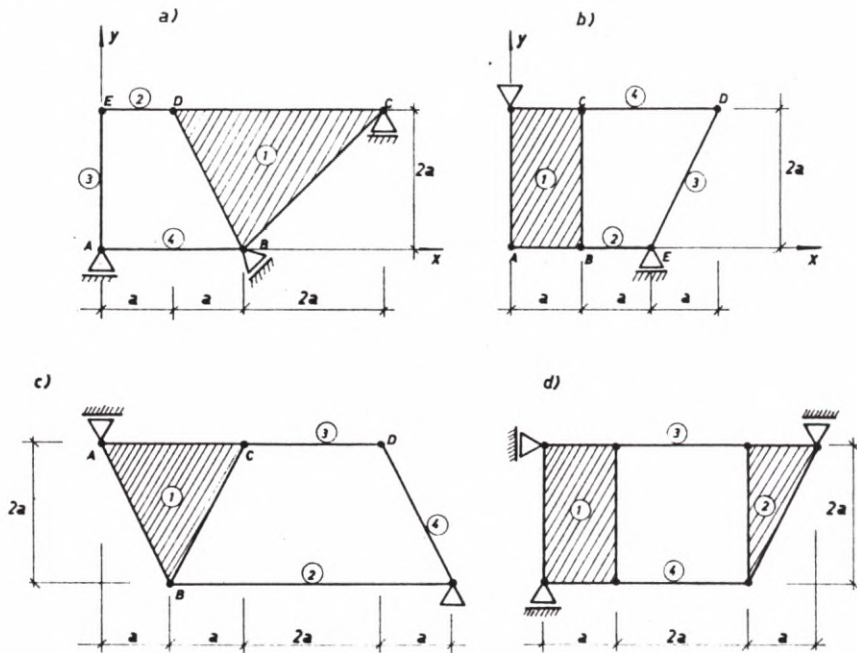
$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

### PYTANIA KONTROLNE

1. Omówić poznane opisy ruchu ciała sztywnego.
2. Jak oblicza się  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$  punktów ciała sztywnego w ruchu dowolnym?
3. Podać twierdzenia o rozkładzie prędkości punktów ciała sztywnego.
4. Do czego służy macierz przejścia i jakie ma własności?
5. Zdefiniować kąty Eulera.
6. Dlaczego w macierzy przejścia trzy elementy są liniowo niezależne?
7. Omówić poznane ruchy ciała sztywnego i ich własności.
8. Co nazywamy środkiem chwilowego obrotu i jak go wyznaczamy?
9. Czy ruch obrotowy jest ruchem płaskim?
10. Czym różni się chwilowy ruch obrotowy od ruchu kulistego?
11. Stwierdzono, że prędkości trzech niewspółliniowych punktów bryły sztywnej leżą w płaszczyźnie. Jakim ruchem porusza się ciało?
12. Jak oblicza się przemieszczenia punktów ciała sztywnego?

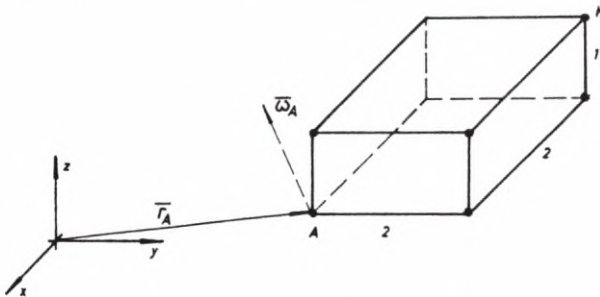
### ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wyprowadzić wzory (2.9) podające elementy macierzy przejścia poprzez kąty Eulera. Wskazówka – skorzystać z niezależności ruchów: obrotu właściwego, precesji, nutacji i wykorzystać wzór (1.48).



Rys. 2.16

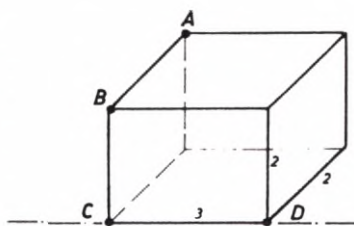
2. W sztywnych układach prętowo-tarczowych (rys. 2.16) wyznaczyć środki chwilowych obrotów i prędkości zaznaczonych punktów.
3. Ciało sztywne (rys. 2.17) porusza się ruchem dowolnym określonym przez ruch punktu  $A$  i chwilowy ruch obrotowy wokół punktu  $A$ . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $K$  w chwili  $t = 1$ , jeśli:  $\vec{r}_A = (2t, 4t^2 - 1, 3t + 1)$  i  $\vec{\omega}_A = (t, \sin t, e^{-t})$



Rys. 2.17



4. Sztywny prostopadłościan obraca się wokół boku  $CD$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W położeniu ciała jak na rys. 2.18 prędkość skalarna punktu  $A$  wynosi  $v_A = 5 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ . Obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $B$  w tym położeniu.



Rys. 2.18

5. Wyznaczyć stałe  $u_0, v_0, w_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  występujące w układzie równań (2.25), jeśli dla  $x = y = z = 4$  zachodzi:

$$u_x = \frac{2}{5}, \quad u_y = \frac{1}{5}, \quad u_z = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{16}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{3}{16}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{5}{16}$$

## Rozdział 3

# STATYKA

### 3.1. WPROWADZENIE

Statyka jest działem mechaniki zajmującym się badaniem warunków koniecznych i wystarczających na to, aby układ materialny nie zmieniał swojego położenia w przyjętym układzie odniesienia.

Wprowadzimy oprócz już poznanych pojęć, takich jak: czasoprzestrzeń z globalnym układem odniesienia, punkt materialny, ciało sztywne – nowe pojęcia, którymi są: siła, masa i pęd.

Siła jest miarą wzajemnego oddziaływania ciał przejawiającą się przez zmianę ich położenia lub utrzymania w położeniu równowagi. Oddziaływanie to charakteryzuje się linią działania, wartością i zwrotem. Graficznym obrazem siły jest wektor. W przypadku gdy każdemu punktowi ciała lub jego podobszaru podporządkujemy wzajemnie jednoznacznie siłę, to mówimy o polu sił lub układzie sił.

Masa punktu materialnego jest wielkością skalarną, określoną przez iloraz miary siły ciężkości  $\bar{Q}$  i miary przyspieszenia ziemskiego  $\bar{g}$ :

$$m \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\bar{Q}}{\bar{g}} > 0 \quad (3.1)$$

Pęd punktu materialnego jest iloczynem jego masy i prędkości:

$$\bar{p} \stackrel{\text{df}}{=} m \bar{v} \quad (3.2)$$

Dalsze rozważania prowadzić będziemy, opierając się na aksjomatach mechaniki:

1. Aksjomat bezwładności. Istnieją układy odniesienia, w których jeśli na punkt materialny nie działa żadna siła, to pęd punktu jest stały (nie ulega zmianie):

$$\bar{p} = m \bar{v} = \bar{p}_0 = \overline{\text{const}}$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{\bar{p}_O}{m} = \bar{v}_O = \overline{\text{const}} \quad (3.3)$$

$$\bar{r}(t) = \bar{v}_O t + \bar{r}_O$$

Z zależności (3.3) wynika, że przy stałym pędzie punkt porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym ( $\bar{v}_O \neq \bar{0}$ ) lub jest w spoczynku ( $\bar{v}_O = \bar{0}$ ). Inaczej każde ciało materialne ma tego rodzaju własność, że bez udziału innych ciał (sił) nie może zmienić swego ruchu względem układu odniesienia. Własność tę nazywamy bezwładnością ciała. Układy odniesienia, w których spełniony jest aksjomat bezwładności, są układami inercjalnymi. W układach inercjalnych współrzędne miejsca zmieniają się według prawa transformacji fizycznej:

$$\hat{x}_k = \sum_{j=1}^3 Q_{jk} x_j + x_O \quad (3.4)$$

zaś chwile czasu według wzoru:

$$\hat{\tau} = \tau + \tau_O \quad (3.5)$$

Występująca w równaniu (3.4) macierz jest nieosobliwą macierzą ortogonalną, spełniającą — podobnie jak macierz przejścia — równania:

$$\sum_{j=1}^3 Q_{jk} Q_{lj} = \delta_{lk} = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^3 Q_{kj} Q_{lj} = \delta_{kl}$$

Dowolny układ odniesienia, który względem układu inercjalnego porusza się bez przyspieszenia ( $\bar{a} = \bar{0}$ ), jest również układem inercjalnym.

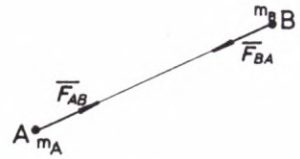
2. Aksjomat ruchu (prawo ruchu). Istnieją układy odniesienia, w których, jeśli na punkt materialny działa siła, to zmienia jego pęd według prawa:

$$\frac{d}{dt} \bar{p} = \bar{F} \quad (3.7)$$

Jeśli założymy, że  $m = \text{const}$ , to prawo ruchu (3.7) przyjmie postać:

$$m \ddot{\bar{r}} = \bar{F} \quad (3.8)$$

3. Aksjomat wzajemnego oddziaływania (prawo akcji i reakcji). Dwa punkty materialne działają na siebie zawsze wzajemnie z siłami równymi, przeciwnie skierowanymi i leżącymi na jednej prostej (rys. 3.1):



Rys. 3.1

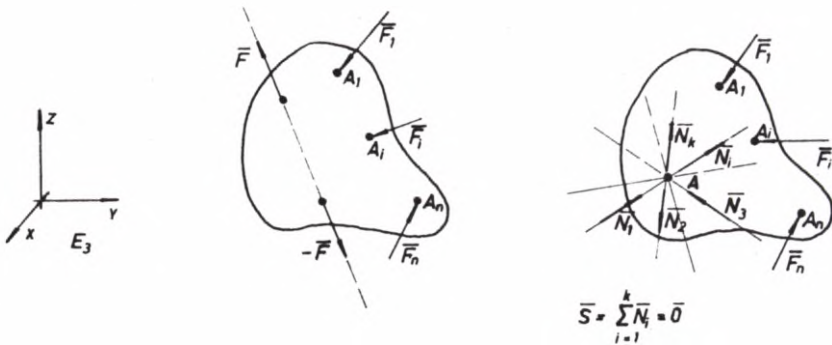
$$\bar{F}_{AB} + \bar{F}_{BA} = \bar{0} \quad (3.9)$$

Prawdziwość powyższych aksjomatów stwierdza się na drodze doświadczalnej.

Wprowadzimy teraz pojęcia równowagi ciała (układu materialnego) i równowagi układu sił działających na układ materialny. Mówimy, że ciało jest w równowadze, jeżeli jest w spoczynku w danym układzie odniesienia.

O siłach działających na układ materialny powiemy, że są w równowadze, jeżeli przyłożone do układu nie zmieniają jego ruchu. A więc równowaga sił jest warunkiem koniecznym równowagi ciała, zaś równowaga sił ze spoczynkiem ciała w chwili przyłożenia tych sił stanowi warunek konieczny i wystarczający równowagi ciała. Z pojęciem równowagi sił związane są następujące aksjomaty równowagi sił:

1. Jeżeli do układu sił działających na sztywny układ materialny pozostający w równowadze dołączymy (lub usuniemy) układ dwóch sił przeciwnych leżących na jednej prostej, to równowaga układu materialnego nie zostanie naruszona.
2. Jeżeli do układu sił działających na sztywny układ materialny będący w równowadze dołączymy (lub usuniemy) układ sił zbieżnych (zaczepionych w jednym punkcie) o sumie równej zeru, to równowaga układu nie zostanie naruszona.
3. Jeżeli na sztywny układ materialny nie działają żadne siły, to może on pozostawać w spoczynku.



Rys. 3.2

Przy omawianiu aksjomatów równowagi sił zostało wprowadzone pojęcie przekształceń elementarnych typu  $\alpha$  i  $\beta$  (lub I i II rodzaju).

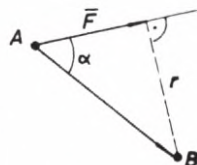
Przez przekształcenie elementarne I rodzaju rozumiemy dodanie (lub odjęcie) do układu sił dwóch sił przeciwnych, leżących na jednej prostej, zaś przez przekształcenie elementarne II rodzaju – dodanie (lub odjęcie) zbieżnego układu sił o sumie równej zero (rys. 3.2).

Z powyższych aksjomatów wynika, że jeżeli na danym układzie sił będącym w równowadze dokonamy ciągu przekształceń elementarnych typu  $\alpha$  i  $\beta$ , to równowaga układu nie zostanie naruszona. Wniosek ten jest podstawą budowy teorii równoważności sił, na której bazuje cała statyka ciała sztywnego.

## 3.2. TEORIA RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW SIŁ

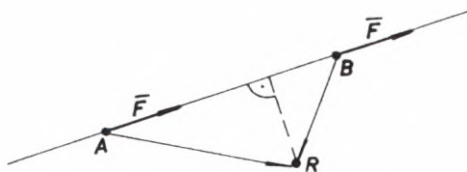
### 3.2.1. Moment siły względem punktu

Obierzmy dowolny punkt  $B$  i siłę  $\vec{F}$  zaczepioną w punkcie  $A$  (rys. 3.3). Momentem siły  $\vec{F}$  względem punktu  $B$  nazywamy wektor  $\vec{M}_B$  równy iloczynowi wektorowemu siły  $\vec{F}$  i wektora łączącego punkt zaczepienia siły z punktem, względem którego liczymy moment:



Rys. 3.3

$$\vec{M}_B \stackrel{\text{df}}{=} \vec{F} \times \overline{AB} = \overline{BA} \times \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{kierunek: } \vec{M}_B \perp \vec{F} \wedge \vec{M}_B \perp \overline{AB} \\ \text{moduł: } |\vec{M}_B| = |\vec{F}| |\overline{AB}| \sin \alpha = |\vec{F}| r \\ \text{zwrot: Trójka wektorów } \vec{F}, \overline{AB}, \vec{M}_B \text{ jest prawoskrętna} \end{cases} \quad (3.10)$$



Rys. 3.4

Na rys. 3.3 przez  $r$  oznaczono ramię siły, czyli odległość punktu  $B$  (względem którego liczymy moment siły) od kierunku działania siły. Moment siły względem punktu jest równy zero, gdy siła lub jej ramię równa jest zero. Jeżeli siłę przesuniemy wzdłuż prostej jej działania (prze-

kształcenie typu  $\alpha$ ), to moment liczony względem tego samego punktu nie ulegnie zmianie:

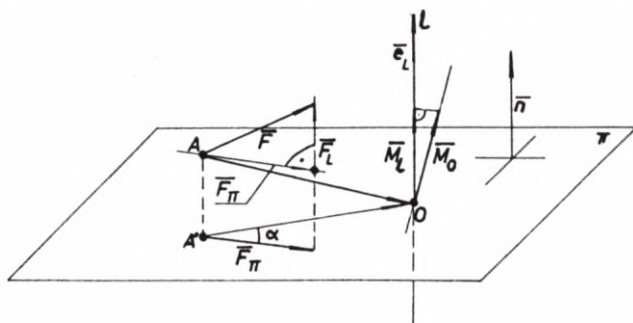
$$\vec{M}_R = \vec{F} \times \overline{AR} = \vec{F} \times (\overline{AB} + \overline{BR}) = \vec{F} \times \overline{BR} = \text{const} \quad (3.11)$$

## 3.2.2. Moment siły względem prostej

Niech zadana będzie siła  $\vec{F}$  zaczepiona w punkcie  $A$  i prosta  $l$ . Na prostej  $l$  obierzmy dowolny punkt  $O$ , przez który prowadzimy płaszczyznę  $\Pi$  prostopadłą do prostej  $l$ . Wyznamy rzut prostokątny siły  $\vec{F}$  i punktu  $A$  na płaszczyznę  $\Pi$ . Momentem siły  $\vec{F}$  zaczepionej w punkcie  $A$  względem prostej  $l$  nazywamy iloczyn wektorowy rzutu  $\vec{F}_\Pi$  siły i wektora  $\vec{AO}$  (rys. 3.5):

$$\vec{F}_\Pi = \vec{F} - \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} = \frac{(\vec{n} \times \vec{F}) \times \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$$

$$\vec{M}_l \stackrel{\text{df}}{=} \vec{F}_\Pi \times \vec{AO} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{kierunek: } \vec{M}_l \parallel l \\ \text{moduł: } |\vec{M}_l| = |\vec{F}_\Pi| |\vec{AO}| \sin \alpha \\ \text{zwrot: Wektory } \vec{F}_\Pi, \vec{AO} \text{ i } \vec{M}_l \text{ stanowią trójkę prawoskrętną} \end{cases} \quad (3.12)$$



Rys. 3.5

Jeżeli obliczymy moment siły względem dowolnego punktu  $O$  prostej i rzutujemy go na tę prostą, to okaże się, że otrzymany wektor jest równy momentowi siły względem tej prostej. Dla dowodu powyższego twierdzenia skorzystamy z podwójnego iloczynu wektorowego:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (3.13)$$

Zgodnie z rys. 3.5 i definicją (3.12) wyznaczamy:

$$\begin{aligned}
\bar{M}_l &= \bar{F}_H \times \overline{A'O} = (\bar{F} - \bar{F}_l) \times (\overline{AO} - \overline{AA'}) = \\
&= \left[ \bar{F} - \left( \frac{\bar{F} \cdot \bar{n}}{\bar{n}^2} \right) \bar{n} \right] \times \left[ \overline{AO} - \left( \frac{\overline{AO} \cdot \bar{n}}{\bar{n}^2} \right) \bar{n} \right] = \\
&= \bar{F} \times \overline{AO} - \bar{F} \times \left( \frac{\overline{AO} \cdot \bar{n}}{\bar{n}^2} \right) \bar{n} - \left( \frac{\bar{F} \times \bar{n}}{\bar{n}^2} \right) \bar{n} \times \overline{AO} = \\
&= \bar{M}_O + \frac{\bar{n}}{\bar{n}^2} \times [(\overline{AO} \cdot \bar{n}) \bar{F} - (\bar{F} \cdot \bar{n}) \overline{AO}] = \bar{M}_O + \frac{1}{\bar{n}^2} [\bar{n} \times (\bar{n} \times \bar{M}_O)] = \\
&= \bar{M}_O + \frac{1}{\bar{n}^2} [(\bar{n} \cdot \bar{M}_O) \bar{n} - \bar{n}^2 \bar{M}_O] = \left( \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{n}}{\bar{n}^2} \right) \bar{n}
\end{aligned}$$

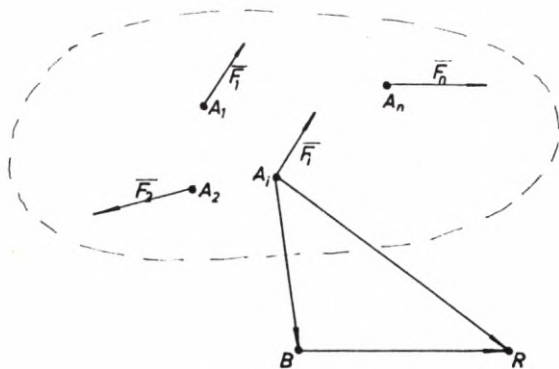
Ostatecznie mamy:

$$\bar{M}_l \stackrel{tw}{=} \left( \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{n}}{\bar{n}^2} \right) \bar{n} \quad c. b. d. o. \quad (3.14)$$

Z zależności (3.12) i (3.14) wynika, że moment siły względem prostej jest równy zero, gdy prosta wraz z linią działania siły wyznaczają płaszczyznę (leżą w jednej płaszczyźnie).

### 3.2.3. Twierdzenie o zmianie bieguna

Dla układu złożonego z  $n$  sił obliczmy moment względem punktu (bieguna)  $B$  i nowego punktu (bieguna)  $R$  (rys. 3.6):



Rys. 3.6

$$\bar{M}_B \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{A_i B} \quad (3.15)$$

$$\bar{M}_R = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{A_i R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times (\overline{A_i B} + \overline{BR}) = \bar{M}_B + \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right) \times \overline{BR}$$

Wektor  $\bar{S} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$  nazywamy sumą układu. Mamy zatem:

$$\bar{M}_R \stackrel{\text{tw}}{=} \bar{M}_B + \bar{S} \times \overline{BR} \quad (3.16)$$

Powyższy związek stanowi treść ważnego twierdzenia o zmianie bieguna. Stwierdza ono: Moment układu sił liczony względem bieguna nowego jest równy momentowi układu względem bieguna starego powiększonego o iloczyn wektorowy sumy układu i wektora łączącego biegun stary z nowym.

Na podstawie (3.16) możemy wypowiedzieć następujące wnioski:

1. Jeżeli  $\bar{S} = \bar{0}$ , to moment układu jest stały (niezależny od wyboru bieguna, względem którego jest liczony).
2. Jeżeli momenty układu liczone względem trzech niewspółliniowych punktów są równe, to suma układu jest równa zeru. Aby wykazać prawdziwość tego wniosku, należy dwukrotnie zastosować twierdzenie o zmianie bieguna.

Z: punkty  $A, B, C$  są niewspółliniowe:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} \neq \bar{0} \quad \text{oraz} \quad \bar{M}_A = \bar{M}_B = \bar{M}_C$$

$$\text{T: } \bar{S} = \bar{0}$$

$$\text{D: } \left. \begin{array}{l} \bar{M}_B = \bar{M}_A + \bar{S} \times \overline{AB} \\ \bar{M}_C = \bar{M}_A + \bar{S} \times \overline{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{S} \times \overline{AB} = \bar{0} \\ \bar{S} \times \overline{AC} = \bar{0} \end{array} \right. \Rightarrow \bar{S} = \bar{0}$$

3. Iloczyn skalarny sumy i momentu liczonego względem dowolnego punktu jest dla układu sił wielkością stałą i nazywamy ją parametrem układu:

$$K \stackrel{\text{df}}{=} \bar{M}_O \cdot \bar{S} = \bar{M}_A \cdot \bar{S} = \text{const} \quad (3.17)$$

$$\text{D: } \bar{M}_A \cdot \bar{S} = (\bar{M}_O + \bar{S} \times \overline{OA}) \cdot \bar{S} = \bar{M}_O \cdot \bar{S} + \bar{S} \cdot (\bar{S} \times \overline{OA}) = \bar{M}_O \cdot \bar{S}$$



## 3.2.4. Równoważność układów sił

Dwa układy sił  $/A = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_i, \dots, \bar{F}_n)$  i  $/B = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_j, \dots, \bar{R}_k)$  nazywamy równoważnymi, jeżeli wykonując na jednym z nich skończoną ilość przekształceń elementarnych I i II rodzaju otrzymamy drugi układ. Z definicji przekształceń elementarnych wynika, że nie zmieniają one sumy i momentu układu.

Zatem równoważne układy sił  $/A$  i  $/B$  to takie, które mają równe sumy i równe momenty liczone względem dowolnego (każdego) punktu:

$$df \begin{cases} \bar{S}_A = \bar{S}_B \\ \bar{M}_Q(A) = \bar{M}_Q(B), \end{cases} \quad Q - \text{dowolny punkt}$$

**Twierdzenia o równoważności układów sił**

1. Dwa układy sił  $/A$  i  $/B$  są równoważne, gdy mają równe sumy i równe momenty liczone względem jednego (ustalonego) punktu.

$$Z: \bar{S}_A = \bar{S}_B$$

$$\bar{M}_O(A) = \bar{M}_O(B), \quad O - \text{ustalony punkt} \quad (3.18)$$

$$T: /A \sim /B$$

D:  $O'$  – dowolny punkt.

Należy wykazać, że  $\bar{M}_{O'}(A) = \bar{M}_{O'}(B)$ . Skorzystajmy z twierdzenia (3.16)

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{O'}(A) &= \bar{M}_O(A) + \bar{S}_A \times \overline{OO'} \\ \bar{M}_{O'}(B) &= \bar{M}_O(B) + \bar{S}_B \times \overline{OO'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Stąd po odjęciu stronami otrzymujemy}$$

$$\bar{M}_{O'}(A) - \bar{M}_{O'}(B) = \bar{0} \quad \text{lub} \quad \bar{M}_{O'}(A) = \bar{M}_{O'}(B)$$

2. Dwa układy sił  $/A$  i  $/B$  są równoważne, gdy mają (odpowiednio) równe momenty liczone względem trzech niewspółliniowych punktów.

Z:  $O, O', O''$  – punkty niewspółliniowe,

$$\bar{M}_O(A) = \bar{M}_O(B)$$

$$\bar{M}_{O'}(A) = \bar{M}_{O'}(B)$$

$$\bar{M}_{O''}(A) = \bar{M}_{O''}(B)$$

$$T: \bar{S}_{/A} = \bar{S}_{/B} \quad \text{czyli} \quad /A \sim /B$$

D: W dowodzie wykorzystamy twierdzenie o zmianie bieguna:

$$\bar{M}_{O'}(A) = \bar{M}_O(A) + \bar{S}_{/A} \times \overline{OO'} \wedge \bar{M}_{O'}(B) = \bar{M}_O(B) + \bar{S}_{/B} \times \overline{OO'}$$

$$\bar{M}_{O''}(A) = \bar{M}_O(A) + \bar{S}_{/A} \times \overline{OO''} \wedge \bar{M}_{O''}(B) = \bar{M}_O(B) + \bar{S}_{/B} \times \overline{OO''}$$

Na podstawie założeń możemy napisać:

$$(\bar{S}_{/A} - \bar{S}_{/B}) \times \overline{OO'} = \bar{0} \wedge (\bar{S}_{/A} - \bar{S}_{/B}) \times \overline{OO''} = \bar{0}$$

Ponieważ wektor  $\overline{OO'}$  nie jest równoległy do  $\overline{OO''}$ , stąd wynika, że:

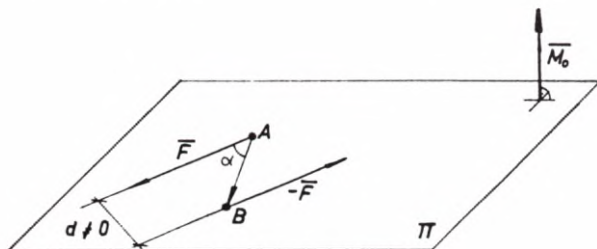
$$\bar{S}_{/A} - \bar{S}_{/B} = \bar{0} \quad \text{czyli} \quad \bar{S}_{/A} = \bar{S}_{/B}$$

### 3.2.5. Zerowy układ sił i para sił

Układ sił, dla którego suma jest wektorem zerowym i moment liczony względem dowolnego punktu równa się zero, nazywamy zerowym układem sił:

$$\bar{S} = \bar{0} \wedge \bar{M}_O = \bar{0} \quad (3.19)$$

Jako przykład takiego układu można podać układ złożony z dwóch sił przeciwnych leżących na jednej prostej lub układ zbieżnych sił o sumie równej zero.



Rys. 3.7

Parę sił stanowią dwie siły niezerowe, przeciwne, nie leżące na jednej prostej.

Z definicji pary sił wynika, że jej suma jest równa zeru, moment liczony względem dowolnego punktu jest stały (por. (3.16)):

$$\bar{S} = \bar{0} \wedge \bar{M}_O \neq \bar{0} \quad (3.20)$$

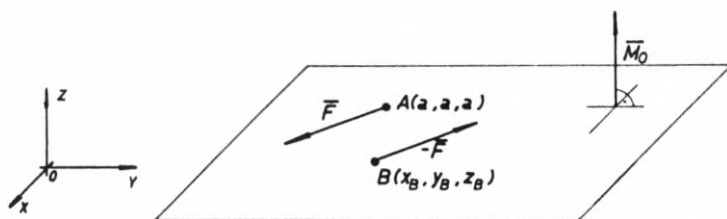
Płaszczyznę wyznaczoną przez parę sił nazywamy płaszczyzną działania pary sił (rys. 3.7):

$$\bar{M}_O = \bar{M}_B = \bar{F} \times \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{kierunek: } \bar{M}_O \perp \Pi \\ \text{moduł: } |\bar{M}_O| = |\bar{F}| |\overline{AB}| \sin \alpha = |\bar{F}| d \\ \text{zwrot: Wektory } \bar{F}, \overline{AB}, \bar{M}_O \text{ stanowią trójkę prawoskrętną} \end{cases} \quad (3.21)$$

Pary sił leżące w jednej płaszczyźnie i mające ten sam moment stanowią zbiór równoważnych par sił. A zatem parę sił można dowolnie przesuwać, obracać w płaszczyźnie jej działania.

### Przykład 3.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (rys. 3.8) podany jest moment pary sił. Wyznaczyć jedną z równoważnych par sił, jeżeli płaszczyzna działania pary sił zawiera punkt  $A(a, a, a)$ .



Rys. 3.8

$$\bar{M}_O = 4Pa\bar{e}_x + Pa\bar{e}_y + Pa\bar{e}_z$$

Siłę  $\bar{F}$  wyznaczamy z warunku prostopadłości wektorów  $\bar{F}$  i  $\bar{M}_O$ :

$$\bar{F} \cdot \bar{M}_O = 0 \Rightarrow F_x 4Pa + F_y Pa + F_z Pa = 0 /: Pa$$

$$4F_x + F_y + F_z = 0$$

Stąd dla spełnienia powyższej równości przyjęto  $F_x = P$ ,  $F_y = 0$  i obliczono  $F_z = -4P$ .

Współrzędne punktu  $B$  zaczepienia siły  $-\bar{F}$  wyznaczmy, korzystając z własności pary sił:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_B = \bar{F} \times \overline{AB} = \begin{cases} \bar{F} = (P, & 0, & -4P) \\ \times \\ \overline{AB} = (x_B - a, & y_B - a, & z_B - a) \\ \hline \bar{M}_B = [4P(y_B - a), & -4P(x_B - a) - P(z_B - a), & P(y_B - a)] \end{cases}$$

Porównując odpowiednie współrzędne wektorów  $\bar{M}_O$  i  $\bar{M}_B$  otrzymano:

$$x_B = a, \quad y_B = 2a, \quad z_B - \text{dowolne (przyjęto } z_B = 0)$$

### Odpowiedź:

Momentowi  $\bar{M}_O$  odpowiada np. para sił:

$$\begin{cases} \bar{F} = (F, 0, -4P), & -\bar{F} = (-P, 0, 4P) \\ A = (a, a, a), & B = (a, 2a, 0) \end{cases}$$

### 3.2.6. Redukcja układu sił, redukcja w punkcie i redukcja do najprostszej postaci

Przez redukcję rozumiemy będziemy przekształcenie polegające na zastąpieniu danego układu układem równoważnym, możliwie prostszym (złożonym z mniejszej liczby sił). Układ sił, którego suma jest równa zeru, redukuje się do układu zerowego, gdy jego moment jest zerowy, a do pary sił, gdy jego moment jest niezerowy.

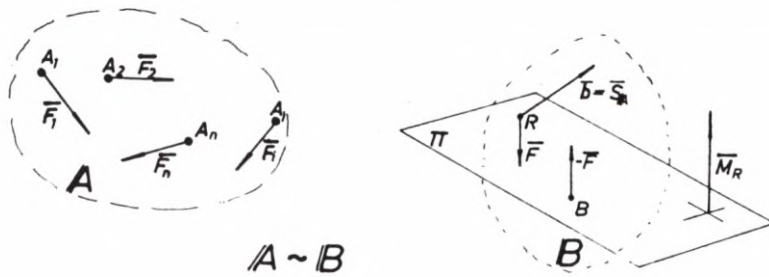
Redukcja układu sił w punkcie  $R$  (biegunie) polega na zastąpieniu danego układu układem równoważnym, złożonym z wektora równego sumie układu (gdy  $\bar{S} \neq \bar{0}$ ), zaczepionego w biegunie redukcji i pary sił o momencie równym momentowi układu liczonego względem bieguna redukcji (gdy  $\bar{M}_R \neq \bar{0}$ ).

Mogą tutaj wystąpić następujące przypadki:

- 1) układ zerowy ( $\bar{S} = \bar{0} \wedge \bar{M}_R = \bar{0}$ ),
- 2) para sił ( $\bar{S} = \bar{0} \wedge \bar{M}_R \neq \bar{0}$ ),
- 3) układ złożony z jednego wektora

$$\bar{b} = \bar{S} \quad (\bar{S} \neq \bar{0} \wedge \bar{M}_R = \bar{0}) \quad (3.22)$$

- 4) układ złożony z trzech wektorów (por. rys. 3.9, gdy  $\bar{S} \neq \bar{0} \wedge \bar{M}_R \neq \bar{0}$ ).



Rys. 3.9

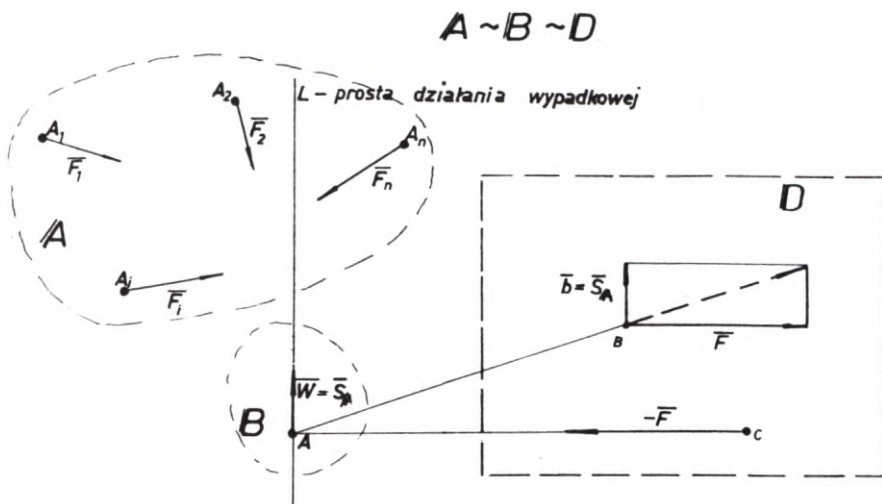
Układ sił równoważny danemu układowi, a złożony z najmniejszej liczby sił, nazywamy najprostszym układem sił. Jest nim:

- 1) układ zerowy, gdy  $\vec{S} = \vec{0} \wedge \vec{M}_O = \vec{0}$ ,
- 2) para sił, gdy  $\vec{S} = \vec{0} \wedge \vec{M}_O \neq \vec{0}$ ,
- 3) wypadkowa układu sił, gdy  $\vec{S} \neq \vec{0} \wedge K = 0$ ,
- 4) układ złożony z dwu sił skośnych, gdy  $K \neq 0$ .

(3.23)

Układy te wzajemnie się wykluczają.

Układ zerowy i para sił zostały już omówione (por. 3.2.5). Podamy teraz definicję wypadkowej układu, a więc układu równoważnego danemu układowi, złożonemu z jednej niezerowej siły równej sumie układu. Z definicji tej wynika, że wypadkowa ma ściśle określoną prostą działania o tej własności, że moment układu liczony względem jej punktów jest równy zero, zaś liczony względem punktów nie należących do tej prostej – różny od zera i prostopadły do sumy układu.



Rys. 3.10

Należy podkreślić istotne różnice między sumą sił a wypadkową. Suma jest to wektor swobodny (nie ma ustalonego punktu zaczepienia), który może być wektorem zerowym. Wypadkowa, jako układ równoważny danemu, jest wektorem niezerowym, o ściśle określonej prostej działania. Suma nie może być równoważna układowi sił, gdyż nie jest układem. Układ sił o sumie niezerowej i parametrze układu równym zeru redukuje się do wypadkowej (w punktach leżących na prostej działania wypadkowej), zaś w punktach poza prostą, na której leży wypadkowa, otrzymujemy układ równoważny, złożony z trzech sił (rys. 3.10) leżących w jednej płaszczyźnie.

### Przykład 3.2

Podany układ sił  $\mathcal{A}$  zredukować w punkcie  $A_3$ , a następnie wyznaczyć najprostszemu zredukowanemu układowi:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1, & \bar{F}_2, & \bar{F}_3 \\ A_1, & A_2, & A_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}_1 = (2P, P, 3P), \quad \bar{F}_2 = (-2P, -P, -3P), \quad \bar{F}_3 = (4P, 2P, 6P)$$

$$A_1(0, 0, a), \quad A_2(a, a, 0), \quad A_3(a, a, a)$$

Aby odpowiedzieć na pierwszą część pytania, należy wyznaczyć sumę zadanego układu i jego moment względem punktu  $A_3$ :

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n=3} \bar{F}_i = (4P, 2P, 6P) \neq \bar{0}$$

$$\bar{M}_{A_3} = \sum_{i=1}^{n=3} \bar{F}_i \times \overline{A_i A_3} = (-4Pa, 5Pa, Pa) \neq \bar{0}$$

W punkcie  $A_3$  układ  $\mathcal{A}$  redukuje się do wektora  $\bar{F} = \bar{S}_{/A} = (4P, 2P, 6P)$  zaczepionego w tym punkcie i pary sił o momencie  $\bar{M}_{A_3} = (-4Pa, 5Pa, Pa)$ . Najprostszym zredukowanym układem jest wypadkowa, ponieważ  $\bar{S} \neq \bar{0} \wedge K = \bar{S} \cdot \bar{M}_{A_3} = 0$ .

Niech punkt  $R(x, y, z)$  należy do prostej  $l$  działania wypadkowej:

$$\begin{aligned} \bar{M}_R = \bar{0} = \bar{M}_{A_3} + \bar{S} \times \overline{A_3 R} &= P(z - 3y)\bar{e}_x + \\ &+ P(6x - 4z + 3a)\bar{e}_y + P\left(2y - x - \frac{a}{2}\right)\bar{e}_z \end{aligned}$$

Stąd równanie krawędziowe prostej działania wypadkowej jest następujące:

$$l: \begin{cases} 6x - 4z + 3a = 0 \\ z - 3y = 0 \end{cases}$$

**Odpowiedź:**

Najprostszym zredukowanym układem jest wypadkowa  $\bar{W} = \bar{S} = (4P, 2P, 6P)$  o prostej działania

$$l: \begin{cases} 6x - 4z + 3a = 0 \\ z - 3y = 0 \end{cases}$$

Pozostało nam jeszcze przeanalizować układ sił o parametrze  $K \neq 0$ . Redukując taki układ w dowolnym punkcie, np. w punkcie  $R$ , otrzymamy układ złożony z wektora  $\bar{b} = \bar{S}$  i parę sił o momencie  $\bar{M}_R$  (rys. 3.9). Przez dodanie w punkcie  $R$  sił  $\bar{b}$  i  $\bar{F}$  dostajemy najprostszy równoważny układ, bo złożony z dwóch sił, a to:

$$/B = \begin{pmatrix} \bar{b} + \bar{F}, & -\bar{F} \\ R, & B \end{pmatrix}$$

### Przykład 3.3

Dla układu sił  $/A$  wyznaczyć najprostszy równoważny układ:

$$/A = \begin{pmatrix} \bar{F}_1, & \bar{F}_2, & \bar{F}_3 \\ A_1, & A_2, & A_3 \end{pmatrix}$$

gdzie:

$$\bar{F}_1 = (0, 0, -P), \quad \bar{F}_2 = (-2P, 0, 0), \quad \bar{F}_3 = (4P, -2P, 0)$$

$$A_1(2a, 0, a), \quad A_2(2a, a, a), \quad A_3(0, a, 0),$$

$$R(2a, 0, 0)$$

Liczymy parametr układu:

$$K = \bar{S} \cdot \bar{M}_A$$

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = (2P, -2P, -P) \neq \bar{0}$$

$$\bar{M}_R = \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i \times \overline{A_i R} = (0, -2Pa, 2Pa) \neq \bar{0}$$

$$K = 2P^2 a \neq 0$$

Przez punkt  $R$  prowadzimy płaszczyznę  $\Pi$  prostopadłą do wektora  $\bar{M}_R$ . W płaszczyźnie tej poszukujemy układu wektorów  $\begin{pmatrix} \bar{F} & -\bar{F} \\ R & B \end{pmatrix}$  o momencie  $\bar{M}_R$ :

$$\bar{F} \cdot \bar{M}_R = 0 \Rightarrow \bar{F} = (P, P, P)$$

$$\bar{M}_R = \bar{M}_B = \bar{F} \times \overline{RB} \Rightarrow B(a, a, a)$$

Do siły  $\begin{pmatrix} \bar{F} \\ R \end{pmatrix}$  dodajemy  $\begin{pmatrix} \bar{b} = \bar{S} \\ R \end{pmatrix}$ , otrzymując układ  $/B$  równoważny układowi  $/A$ :

$$/B = \begin{pmatrix} \bar{G} & -\bar{F} \\ R & B \end{pmatrix}$$

gdzie:

$$\bar{G} = (3P, -P, 0), \quad -\bar{F} = (-P, -P, -P)$$

$$R(2a, 0, 0), \quad B(a, a, a)$$

### 3.2.7. Oś środkowa układu sił, skrętnik

W układzie sił o sumie niezerowej wprowadzimy pojęcie osi środkowej, to jest miejsca geometrycznego punktów o tej własności, że moment układu liczony względem tych punktów jest równy zeru ( $K = 0$ ) lub jest równoległy do sumy układu ( $K \neq 0$ ). Punkty osi środkowej mają jeszcze jedną własność wynikającą z parametru układu (jest on stały dla układu):

$$K = \bar{S} \cdot \bar{M}_A = |\bar{S}| |\bar{M}_A| \cos(\bar{S}, \wedge \bar{M}_A) = \text{const}$$

Stąd otrzymujemy:

$$|\bar{M}_A| = \frac{K}{|\bar{S}| \cos(\bar{S}, \wedge \bar{M}_A)} = \min \quad \text{gdy} \quad \begin{cases} K = 0 \wedge \bar{S} \neq \bar{0} \\ K \neq 0 \wedge \bar{M}_A \parallel \bar{S} \end{cases} \quad (3.24)$$

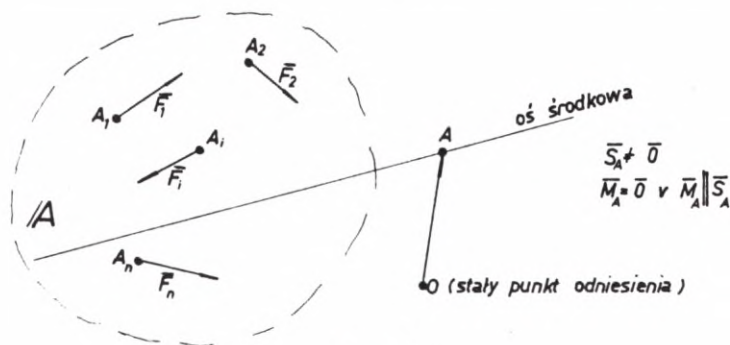


A zatem mamy:

$$\bar{M}_A = \pm |\bar{M}_A| \frac{\bar{S}}{|\bar{S}|} = \left( \frac{K}{S^2} \right) \bar{S} \quad (3.25)$$

Własność tę można ująć następująco: Moduł momentu (układu sił o  $\bar{S} \neq \bar{0}$ ) liczonego względem punktów osi środkowej jest minimalny. Z warunku (3.25) znajdujemy takie punkty, które należą do osi środkowej, a więc jej równanie. Do równania osi środkowej (rys. 3.11) możemy również dojść wykorzystując jej definicję. Z twierdzenia o zmianie bieguna mamy:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{S} \times \overline{OA} = \begin{cases} \bar{0} & \text{gdy } K = 0 \\ \lambda \bar{S} & \text{gdy } K \neq 0 \end{cases}$$



Rys. 3.11

Pomnóżmy wektorowo wektory  $\bar{M}_A$  i  $\bar{S}$ :

$$\bar{M}_A \times \bar{S} = \bar{M}_O \times \bar{S} + (\bar{S} \times \overline{OA}) \times \bar{S} = \bar{0}$$

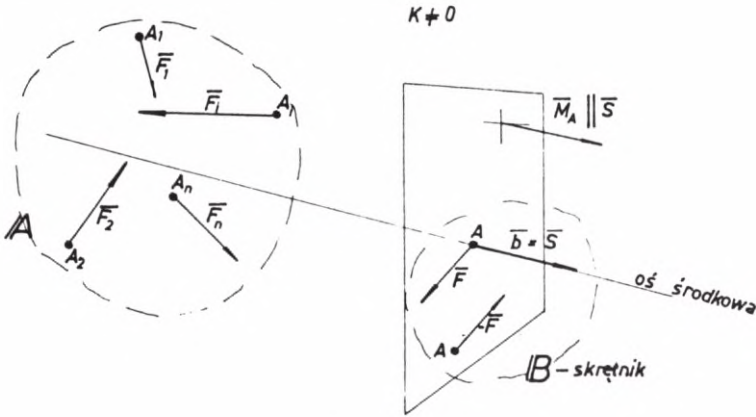
Korzystając z (3.13) powyższe wyrażenie zapiszemy następująco:

$$\bar{M}_O \times \bar{S} + \bar{S}^2 \overline{OA} - (\bar{S} \cdot \overline{OA}) \bar{S} = \bar{0}$$

Stąd otrzymamy:

$$\overline{OA} = -\frac{\bar{M}_O \times \bar{S}}{\bar{S}^2} + \left( \frac{\bar{S} \cdot \overline{OA}}{\bar{S}^2} \right) \bar{S} = -\frac{M_O \times \bar{S}}{\bar{S}^2} + \lambda \bar{S} \quad (3.26)$$

gdzie  $\lambda = \frac{\bar{S} \cdot \overline{OA}}{\bar{S}^2}$  jest parametrem należącym do zbioru liczb rzeczywistych. Warto jeszcze podkreślić, że oś środkową mają układy, których  $\bar{S} \neq \vec{0}$ .



Rys. 3.12

W przypadku układu o parametrze  $K \neq 0$  wprowadza się pojęcie skrętnika, to jest układu zredukowanego w dowolnym punkcie osi środkowej. Układ taki składa się z wektora  $\bar{b} = \bar{S}$  leżącego na osi środkowej i pary sił o momencie równoległym do sumy układu (rys. 3.12).

### Przykład 3.4

Układ sił  $A$  z przykładu 3.3 zredukować w dowolnym punkcie osi środkowej:

$$\bar{F}_1 = (0, 0, -P), \quad \bar{F}_2 = (-2P, 0, 0), \quad \bar{F}_3 = (4P, -2P, 0),$$

$$A_1(2a, 0, a), \quad A_2(2a, a, a), \quad A_3(0, a, 0),$$

$$\bar{S} = (2P, -2P, -P) \neq \vec{0}, \quad \bar{M}_R = (0, -2Pa, 2Pa) \neq \vec{0}, \quad R(2a, 0, 0),$$

$$K = \bar{S} \cdot \bar{M}_R = 2P^2a \neq 0$$

Jeżeli punkt  $A(x, y, z)$  należy do osi środkowej, to zgodnie z (3.25) mamy:

$$\bar{M}_A = \left( \frac{K}{\bar{S}^2} \right) \bar{S} = \frac{2}{9} a \bar{S} = \left( \frac{4}{9} Pa, -\frac{4}{9} Pa, -\frac{2}{9} Pa \right)$$

Moment  $\bar{M}_A$  może być również wyznaczony z twierdzenia o zmianie bieguny:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_R + \bar{S} \times \overline{RA} = [P(y - 2z), -P(x + 2z), 2P(x + y - a)]$$

Porównując odpowiednie współrzędne wektora  $\bar{M}_A$  otrzymujemy współrzędne punktu  $A$ :

$$\begin{cases} \frac{4}{9}Pa = P(y - 2z) \\ -\frac{4}{9}Pa = -P(x + 2z) \\ -\frac{2}{9}Pa = 2P(x + y - a) \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{12}{9}a, -\frac{4}{9}a, -\frac{4}{9}a\right)$$

Równanie osi środkowej w postaci parametrycznej jest następujące:

$$l: \begin{cases} x(\lambda) = \frac{12}{9}a + 2\lambda a \\ y(\lambda) = -\frac{4}{9}a - 2\lambda a \\ z(\lambda) = -\frac{4}{9}a - \lambda a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ — zbiór liczb rzeczywistych}$$

### Odpowiedź:

W punktach osi środkowej  $l$  układ  $\mathcal{A}$  redukuje się do skrętnika złożonego z wektora  $\bar{b} = \bar{S} = (2P, -2P, -P)$  leżącego na tej osi i pary sił o momencie

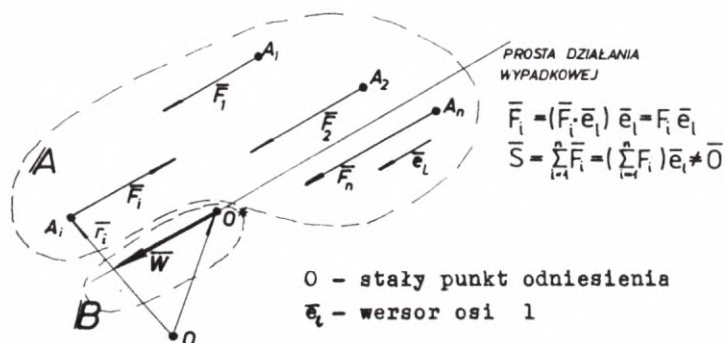
$$\bar{M}_A = \left(\frac{4}{9}Pa, -\frac{4}{9}Pa, -\frac{2}{9}Pa\right).$$

### 3.2.8. Równoległy układ sił, środek równoległego układu sił

Układ sił, w którym siły są równoległe do stałego kierunku, nazywamy równoległym układem sił. Parametr takiego układu jest zawsze równy zero, co wynika z faktu, że przy  $\bar{S} \neq \bar{0}$  i  $\bar{M}_A \neq \bar{0}$  moment jest prostopadły do sumy. A zatem równoległy układ sił redukuje się do:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ układu zerowego, gdy } \bar{S} = \bar{0} \wedge \bar{M}_A = \bar{0}, \\ 2^\circ \text{ pary sił, gdy } \bar{S} = \bar{0} \wedge \bar{M}_A \neq \bar{0}, \\ 3^\circ \text{ wypadkowej układu, gdy } \bar{S} \neq \bar{0}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Przeanalizujmy bliżej przypadek 3° (rys. 3.13). Moment takiego układu liczony względem dowolnego punktu prostej działania wypadkowej jest równy zero.



Rys. 3.13

$$\bar{M}_{O^*} = \bar{M}_O + \bar{S} \times \overline{OO^*} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{A_i O} + \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right) \times \overline{OO^*} = \bar{0}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i \bar{e}_l \times (-\bar{r}_i) + \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \bar{e}_l \times \overline{OO^*} = \bar{0}$$

$$\bar{e}_l \times \left[ -\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i + \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{OO^*} \right] = \bar{0} \quad (3.28)$$

Ze związku (3.28) wynika, że wektor  $\left[ -\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i + \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{OO^*} \right]$  jest równoległy do prostej l, co można zapisać następująco:

$$-\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i + \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{OO^*} = \lambda \bar{e}_l \quad (\text{równanie prostej } l),$$

lub jest równy zeru:

$$-\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i + \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \overline{OO^*} = \bar{0} \quad (\text{nie zależy od kierunku } l).$$

Stąd mamy:

$$\overline{OO^*} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (3.29)$$

Wektor  $\overline{OO^*}$  określa położenie punktu zwanego środkiem równoległego układu sił. Środek ten ma następujące własności:

- układ posiadający środek redukuje się w tym punkcie do wypadkowej,
- moment układu względem środka jest równy zeru,
- jeżeli w równoległym układzie sił posiadającym środek obrócimy siły wokół punktów ich zaczepienia o ten sam kąt, to środek układu nie zmieni swojego położenia.

### Przykład 3.5

Wyznaczyć położenie środka układu dla zadanego równoległego układu sił:

$$\bar{F}_1 = (2P, -P), \quad \bar{F}_2 = (4P, -2P), \quad \bar{F}_3 = (-2P, P)$$

$$A_1(a, 0), \quad A_2(0, a), \quad A_3(a, a)$$

Sprawdzamy, czy suma układu jest różna od zera:

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = (4P, -2P) \neq \bar{0}$$

Wyznaczamy wektor kierunku równoległego:

$$\bar{e}_t = \frac{\bar{F}_1}{|\bar{F}_1|} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

i obliczamy miary sił na ten kierunek:

$$F_1 = \bar{F}_1 \cdot \bar{e}_t = \sqrt{5}P$$

$$F_2 = \bar{F}_2 \cdot \bar{e}_t = 2\sqrt{5}P$$

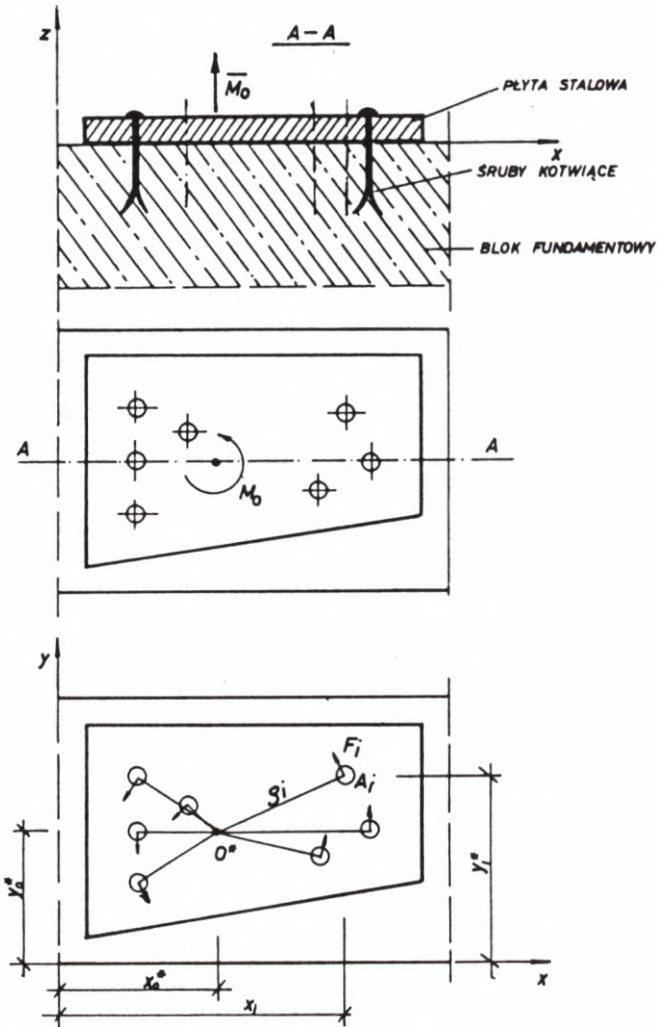
$$F_3 = \bar{F}_3 \cdot \bar{e}_t = -\sqrt{5}P$$

Wektory wodzące  $\bar{r}_i$  punktów zaczepienia  $A_i$  sił mają współrzędne równe współrzędnym tych punktów. A zatem:

$$\overline{OO^*} = \frac{F_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2 + F_3 \bar{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \left( 0, \frac{a}{2} \right)$$

### Przykład 3.5 a

Stalowa płyta połączona jest z blokiem fundamentowym za pomocą układu śrub kotwiących, jak pokazano na rys. 3.13 a. Płyta obciążona jest parą sił o momencie  $M_0$ . Z warunku równoważności układów sił wyznaczyć siły powstałe w śrubach, przyjmując że kierunki ich działania są prostopadłe do odcinków



Rys. 3.13a

łączących punkty ich zaczepienia ze środkiem obrotu  $O^*$ , zaś moduły proporcjonalne do odległości śrub od punktu  $O^*$ . Środek obrotu układu śrub wyznaczmy z wzoru (3.29), przyjmując w nim  $F_i = \lambda = \text{const}$ :

$$\overline{OO^*} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^n \bar{r}_i}{\lambda n} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, 0 \right)$$

Ponieważ moduł  $i$ -tej siły jest równy  $P_i = k \rho_i$ , to moment układu sił względem punktu  $O^*$  można zapisać następująco:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \times \overline{A_i O^*} = \left( 0, 0, \sum_{i=1}^n P_i \rho_i = \sum_{i=1}^n k \rho_i^2 \right)$$

Tak obliczony moment układu sił musi być równy momentowi pary sił, z czego wynika, że zachodzi:

$$M_O = k \sum_{i=1}^n \rho_i^2$$

A zatem współczynnik  $k = \frac{M_O}{\sum_{i=1}^n \rho_i^2}$ , czyli siła w  $i$ -tej śrubie jest równa:

$$P_i = M_O \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i^2}$$

Z powyższych rozważań wynika, że najbardziej jest obciążona śruba najdalej odsunięta od środka obrotu  $O^*$ , gdyż działa na nią siła:

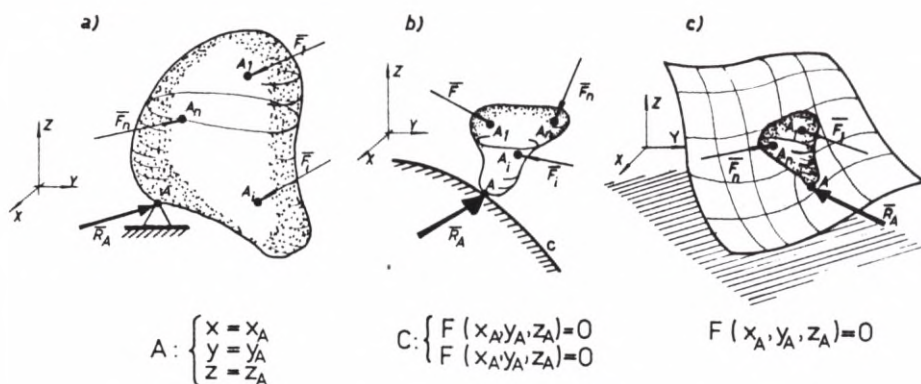
$$P_{\max} = M_O \frac{\rho_{\max}}{\sum_{i=1}^n \rho_i^2}$$

### 3.3. ZASADA PRAC WIRTUALNYCH, WARUNKI RÓWNOWAGI SIŁ

Układ materialny, którego ruch odbywa się bez żadnych ograniczeń, nazywamy układem swobodnym, gdy natomiast na ruch układu nałożone są ograniczenia (więzy), to taki układ jest nieswobodny. Ograniczenie może być nałożone na ruch układu materialnego (rys. 3.14) w punkcie, na krzywej, na powierzchni itp. Dla układów nieswobodnych ma zastosowanie aksjomat

o więzach (tzw. zasada oswobodzenia z więzów), który głosi: W ruchu ciała nieswobodnego nic się nie zmieni, jeśli więzy myślowo usuniemy, a ich działanie zastąpimy siłami zwanymi reakcjami. Na podstawie powyższego postulatu ruch ciała nieswobodnego możemy analizować jako ruch ciała swobodnego, pamiętając jednak, że do sił działających na ciało należy dodać reakcje więzów. Siły zewnętrzne przyłożone do ciała nazywamy czynnymi, zaś reakcje więzów – siłami biernymi. Siły bierne pojawiają się z chwilą przyłożenia do ciała sił czynnych. Więzy układu materialnego dzielimy na:

- 1) holonomiczne (geometryczne) i nieholonomiczne (kinematyczne),
- 2) skleronomiczne (stacjonarne) i reonomiczne (niestacjonarne),
- 3) idealne (gładkie) i chropowate (szorstkie),
- 4) dwustronne i jednostronne.



Rys. 3.14

Powiemy, że więzy są holonomiczne, jeżeli stanowią ograniczenia nałożone na położenia punktów układu materialnego (ograniczają tylko przemieszczenia). Więzy takie możemy zapisać następująco:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \leq 0 \quad (3.30)$$

Jeżeli więzy ograniczają wielkości kinematyczne układu (przemieszczenia i prędkości przemieszczeń):

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0 \quad (3.31)$$

to nazywamy je nieholonomicznymi.

Więzy, które w sposób jawny nie zależą od czasu, np. (3.31), są więzami skleronomicznymi, gdy zaś zależą jawnie od czasu, np. (3.30) – więzami reonomicznymi.



Więzy idealne beztarciowe to takie, dla których praca reakcji równa się zeru. Przez pracę stałej siły  $\bar{R}$  na odcinku  $\overline{AB}$  rozumiemy iloczyn skalarny:

$$\bar{R} \cdot \overline{AB} \stackrel{\text{df}}{=} L_{AB} \quad (3.32)$$

Gdy praca reakcji więzów jest różna od zera, to więzy są szorstkie (występuje tarcie). Jeśli więzy można matematycznie zapisać za pomocą równania, to nazywamy je dwustronnymi. Więzy zapisane przy użyciu nierówności są jednostronne. Przykładowo więzy (3.31) są więzami kinematycznymi, stacjonarnymi i dwustronnymi, a więzy (3.30) – więzami geometrycznymi, niestacjonarnymi i jednostronnymi.

Dla punktów układu materialnego wprowadza się pojęcia przesunięcia rzeczywistego, możliwego i wirtualnego. I tak przesunięcie rzeczywiste jest wektorem łączącym dwa rzeczywiste położenia punktu (zależy od więzów i sił działających). Przesunięcie możliwe stanowi wektor łączący dwa możliwe położenia punktu (zależy tylko od więzów). A więc przesunięcie rzeczywiste jest możliwym, natomiast możliwe nie musi być rzeczywistym, gdyż z całej rodziny przesunięć możliwych tylko jedno jest rzeczywiste. Przesunięciem wirtualnym (przygotowanym, pomyślanym) punktu jest każdy wektor współliniowy z prędkością możliwą punktu, to jest prędkością, na jaką zezwalają więzy układu:

$$\bar{\delta}_s \stackrel{\text{df}}{=} k \hat{v}, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3.33)$$

Punkt swobodny będący w spoczynku względem układu odniesienia ma prędkość rzeczywistą równą zeru, zaś jego prędkość możliwą stanowi każdy wektor.

Rozważmy ruch możliwy układu materialnego złożonego z  $n$  punktów materialnych, poddanych więzom opisanym przez  $m$  liniowo niezależnych równań i zapytajmy, jaki warunek musi być



Rys.3.15

spełniony, aby wektor  $\bar{\delta}_s$  był przesunięciem wirtualnym punktu  $A_i$ . O więzach układu założymy, że są holonomiczne, stacjonarne i dwustronne. Możemy je zapisać za pomocą następującego układu równań:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.34)$$

gdzie:  $x_i, y_i, z_i$  są funkcjami dowolnego parametru  $\tau$ , który dla ruchu rzeczywistego utożsamia się z czasem  $\tau = t$ .

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, zróżniczkujemy po parametrze  $\tau$  układ równań (3.34):

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f_j}{\partial y_1} \frac{dy_1}{d\tau} + \frac{\partial f_j}{\partial z_1} \frac{dz_1}{d\tau} + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \frac{dx_n}{d\tau} + \frac{\partial f_j}{\partial y_n} \frac{dy_n}{d\tau} + \frac{\partial f_j}{\partial z_n} \frac{dz_n}{d\tau} = 0$$

Możemy go zapisać przy użyciu symbolu sumowania w następującej postaci:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} z'_i \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.35)$$

Oznaczmy przesunięcie wirtualne punktu  $A_i$  przez:

$$\bar{\delta}_{s_i} = k \hat{v} = (k x'_i, k y'_i, k z'_i) = (\delta_{x_i}, \delta_{y_i}, \delta_{z_i}), \quad k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3.36)$$

i pomnożmy każde z równań (3.35) przez ten sam współczynnik  $k$ . Z układu równań (3.35) otrzymamy teraz następujący związek:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta_{x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta_{y_i} + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta_{z_i} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

który możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^n \overline{\text{grad}}_i f_j \cdot \bar{\delta}_{s_i} = 0 \quad (3.37)$$

gdzie:

$$\overline{\text{grad}}_i f_j \equiv \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right)$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy przesunięcia wirtualne punktów układu materialnego o  $s$  stopniach swobody. Liczba  $s$  stopni swobody podaje tę ilość niezależnych parametrów, która jest potrzebna do jednoznacznego określenia położenia układu materialnego w układzie odniesienia:

$$s = 3n - m \quad (3.38)$$

gdzie:

- $n$  – liczba punktów opisująca dany układ materialny,
- $m$  – liczba niezależnych równań więzów.

### Przykład 3.6

Wyznaczyć przesunięcie wirtualne punktów  $A_1$  i  $A_2$  sztywnego odcinka materialnego, pozostających stale na powierzchni walca kołowego o równaniu  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ .

Równania niezależne więzów są następujące:

$$\begin{cases} f_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - d^2 = 0 \\ f_2 = x_1^2 + y_1^2 - 4 = 0 \\ f_3 = x_2^2 + y_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Analizowany układ jest opisany przez  $s = 3 \cdot 2 - 3 = 3$  stopnie swobody.

Przesunięcia wirtualne punktów  $A_1, A_2$  zapiszemy według wzoru (3.36):

$$\bar{\delta}_{s_1} = (\delta_{x_1}, \delta_{y_1}, \delta_{z_1}), \quad \bar{\delta}_{s_2} = (\delta_{x_2}, \delta_{y_2}, \delta_{z_2})$$

Obliczamy współrzędne gradientów:

$$\overline{\text{grad}}_1 f_1 = [-2(x_2 - x_1), -2(y_2 - y_1), -2(z_2 - z_1)]$$

$$\overline{\text{grad}}_2 f_1 = -\overline{\text{grad}}_1 f_1$$

$$\overline{\text{grad}}_1 f_2 = (2x_1, 2y_1, 0)$$

$$\overline{\text{grad}}_2 f_2 = \overline{\text{grad}}_1 f_3 = \bar{0}$$

$$\overline{\text{grad}}_2 f_3 = (2x_2, 2y_2, 0)$$

Układ równań (3.37) w naszym przykładzie ma postać:

$$\begin{cases} -(x_2 - x_1)\delta_{x_1} - (y_2 - y_1)\delta_{y_1} - (z_2 - z_1)\delta_{z_1} + (x_2 - x_1)\delta_{x_2} + \\ + (y_2 - y_1)\delta_{y_2} + (z_2 - z_1)\delta_{z_2} = 0 \\ x_1\delta_{x_1} + y_1\delta_{y_1} = 0 \\ x_2\delta_{x_2} + y_2\delta_{y_2} = 0 \end{cases}$$

Ponieważ dysponujemy trzema równaniami, a mamy do wyznaczenia sześć współrzędnych przesunięć wirtualnych, dlatego też trzy współrzędne przyjmujemy jako parametry, pozostałe zaś obliczamy z powyższego układu równań:

$$\delta_{x_1} = a, \quad \delta_{x_2} = b, \quad \delta_{z_1} = 0, \quad \delta_{y_1} = -\frac{ax_1}{y_1}, \quad \delta_{y_2} = -\frac{bx_2}{y_2}$$

$$\delta_{z_2} = \frac{1}{z_2 - z_1} \left[ (x_2 - x_1)(a - b) + (y_2 - y_1) \left( -\frac{ax_1}{y_1} + \frac{bx_2}{y_2} \right) + (z_2 - z_1)c \right]$$

$$y_1 \neq 0, \quad y_2 \neq 0, \quad \text{i} \quad z_2 \neq z_1$$

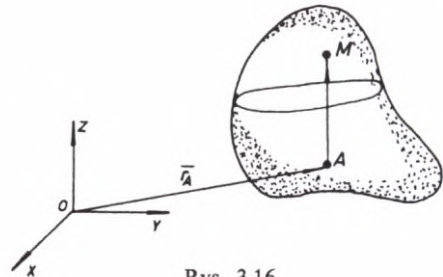
### Przykład 3.7

Dla bryły sztywnej swobodnej (rys. 3.16) wyznaczyć przesunięcie wirtualne dowolnego jej punktu  $M$ .

Na podstawie kinematyki ciała sztywnego możemy napisać:

$$\hat{v}_M = \hat{v}_A + \hat{\omega}_A \times \overline{AM} / \cdot k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$k \hat{v}_M = k \hat{v}_A + (k \hat{\omega}_A) \times \overline{AM}$$



Rys. 3.16

a stąd po wykorzystaniu związku (3.33) przesunięcie wirtualne punktu  $M$  będzie następujące:

$$\bar{\delta}_{S_M} = \bar{\delta}_{S_A} + \bar{\delta}_{\omega_A} \times \overline{AM}$$

Wprowadźmy oznaczenia współrzędnych wektorów:

$$\bar{\delta}_{S_A} = (\delta_{x_A}, \delta_{y_A}, \delta_{z_A})$$

$$\bar{\delta}_{\omega_A} = (\delta_{\omega_x}, \delta_{\omega_y}, \delta_{\omega_z})$$

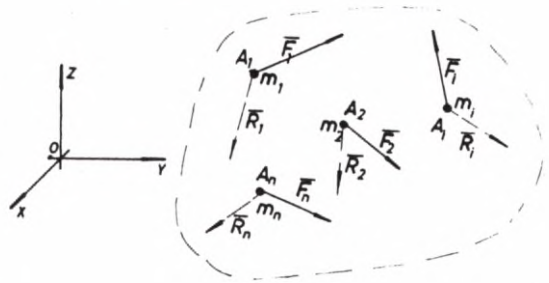
$$\overline{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A)$$

i obliczmy współrzędne wektora  $\bar{\delta}_{S_M}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{S_M} = & [\delta_{x_A} + \delta_{\omega_y}(z_M - z_A) - \delta_{\omega_z}(y_M - y_A)] \bar{e}_x + \\ & + [\delta_{y_A} + \delta_{\omega_z}(x_M - x_A) - \delta_{\omega_x}(z_M - z_A)] \bar{e}_y + \\ & + [\delta_{z_A} + \delta_{\omega_x}(y_M - y_A) - \delta_{\omega_y}(x_M - x_A)] \bar{e}_z \end{aligned}$$

Spróbujmy teraz odpowiedzieć na pytanie, jaki warunek muszą spełniać siły układu działające na swobodny lub nieswobodny układ materialny o więzach: stacjonarnych, geometrycznych, dwustronnych i gładkich, aby były w równowadze?

W tym celu przeanalizujemy układ materialny nieswobodny, złożony z  $n$  punktów materialnych (rys. 3.17) podanych więzom opisanym przez  $m$  równań, na który to układ działają siły czynne i siły reakcji. Układ znajduje się w spoczynku, a więc prędkości i przyspieszenia punktów układu są równe zeru.



Rys. 3.17

Zapiszmy prawo ruchu (3.8) dla  $n$  punktów badanego układu:

$$+ \begin{cases} \vec{0} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{R}_1 / \cdot \vec{\delta}_{S_1} \\ \vdots \\ \vec{0} = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i / \cdot \vec{\delta}_{S_i} \\ \vdots \\ \vec{0} = m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n + \vec{R}_n / \cdot \vec{\delta}_{S_n} \end{cases} \quad (3.39)$$

Poszczególnym punktom układu przyporządkujemy przesunięcia wirtualne zgodnie z (3.37) i obliczmy pracę wirtualną od sił czynnych i reakcji:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{\delta}_{S_i} + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \vec{\delta}_{S_i} = 0 \quad (3.40)$$

Praca wirtualna sił reakcji jest równa zeru, gdyż więzy są gładkie. A zatem w położeniu równowagi układu materialnego praca wirtualna sił czynnych jest równa zeru. Jest to warunek konieczny równowagi układu sił. Należy zapytać, czy jest to również warunek wystarczający. Aby dać właściwą odpowiedź, rozważmy sytuację, w której układ materialny jest w ruchu rzeczywistym:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Obliczmy pracę sił na przesunięciu rzeczywistym:

$$\Delta \bar{r}_i = \bar{r}_i(t + \Delta t) - \bar{r}_i(t) = \dot{\bar{r}}_i \Delta t + 0(\Delta^2 t)$$

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i \Delta t = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_{S_i} = \delta L > 0$$

Okazało się, że w ruchu rzeczywistym  $\delta L \neq 0$ .

Możemy teraz wypowiedzieć twierdzenie zwane zasadą prac wirtualnych: Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił działających na układ materialny swobodny lub nieswobodny o więzach: geometrycznych, stacjonarnych, dwustronnych i gładkich jest, by suma prac wirtualnych od wszystkich sił czynnych działających na dany układ materialny, na każdym przesunięciu wirtualnym, była równa zero:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_{S_i} = 0, \quad \forall \bar{\delta}_{S_i} \quad (3.41)$$

Z zasady prac wirtualnych obliczamy siły w położeniu równowagi lub przy zadanych siłach położenie równowagi układu. Niezależnych równań otrzymujemy tyle, ile układ materialny ma stopni swobody.

Położenie równowagi układu materialnego jest jednoznacznie określone poprzez  $s$  współrzędnych uogólnionych  $q_s$ , gdzie  $s$  – liczba stopni swobody.

Zapiszmy zasadę prac wirtualnych poprzez współrzędne uogólnione. Wektor wodzący  $A_i$ -tego punktu układu jest funkcją  $s$  – współrzędnych uogólnionych:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.42)$$

zaś prędkość możliwa punktu  $A_i$  jest równa:

$$\hat{v}_i = \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} q'_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} q'_j \quad (3.43)$$

Aby otrzymać przesunięcie wirtualne punktu  $A_i$ , należy wektor  $\hat{v}_i$  pomnożyć przez parametr  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ :

$$\bar{\delta}_{S_i} = k \hat{v}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} (k \cdot q'_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.44)$$

gdzie  $\delta q_j \stackrel{\text{df}}{=} k \cdot q'_j$  jest uogólnionym przesunięciem wirtualnym. Podstawiając (3.44) do (3.41) otrzymamy:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta} s_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \left( \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^s \delta q_j \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\delta L = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = 0, \quad \forall \delta q_j \quad (3.45)$$

gdzie  $Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$  jest siłą uogólnioną.

### Przykład 3.8

Z zasady prac wirtualnych wyznaczyć warunek konieczny i wystarczający równowagi układu sił działających na sztywne ciało swobodne (rys. 3.18).

Dla punktu  $A_i$ ,  $\bar{\delta} s_i = \bar{\delta} s_A + \bar{\delta} \omega_A \times \overline{AA_i}$  (por. 3.38), zatem z zasady prac wirtualnych otrzymujemy:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot (\bar{\delta} s_A + \bar{\delta} \omega_A \times \overline{AA_i}) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right) \cdot \bar{\delta} s_A + \bar{\delta} \omega_A \cdot \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{AA_i} \right) = 0$$

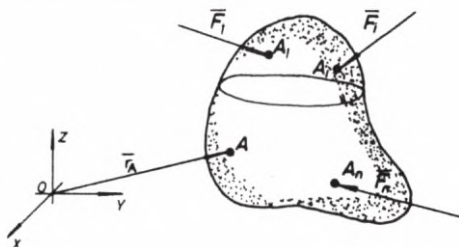
dla każdego  $\bar{\delta} s_A$  i  $\bar{\delta} \omega_A$ . Stąd wynika, że:

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{0} \quad \wedge \quad \bar{M}_A = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{AA_i} = \bar{0} \quad (3.46)$$

układ sił jest układem zerowym.

Wykorzystując postulat o więzach i wyprowadzone dla ciała sztywnego swobodnego warunki równowagi sił, możemy je teraz sformułować dla ciała sztywnego nieswobodnego:

$$\begin{cases} \bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{j=1}^k \bar{R}_j = \bar{0} \\ \bar{M}_A = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{AA_i} + \sum_{j=1}^k \bar{R}_j \times \overline{B_j A} = \bar{0} \end{cases} \quad (3.47)$$



Rys. 3.18

Ponieważ w (3.47) występują siły czynne i bierne, więc warunek konieczny i wystarczający równowagi sił dla ciała sztywnego nieswobodnego zapiszemy następująco:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k \bar{R}_j = - \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \sum_{j=1}^k \bar{R}_j \times \overline{B_j A} = - \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{A_i A} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{/A} = - \bar{S}_{/B} \\ \bar{M}_A(/A) = - \bar{M}_A(/B) \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Mówimy, że dwa układy sił równowazą się, jeśli ich sumy są przeciwne i momenty liczone względem dowolnego punktu też są przeciwne.

Na podstawie (3.48) możemy stwierdzić, że układ sił reakcji w położeniu równowagi ciała sztywnego nieswobodnego równowazę układ sił czynnych. Równania (3.48) noszą nazwę równań równowagi. Możemy je zapisać w kartezjańskim układzie odniesienia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{i_x} + \sum_{j=1}^k R_{j_x} = 0 \Leftrightarrow (S_x = 0) \\ \sum_{i=1}^n F_{i_y} + \sum_{j=1}^k R_{j_y} = 0 \Leftrightarrow (S_y = 0) \\ \sum_{i=1}^n F_{i_z} + \sum_{j=1}^k R_{j_z} = 0 \Leftrightarrow (S_z = 0) \\ \sum_{i=1}^n M_{A_x}(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_{A_x}(\bar{R}_j) = 0 \Leftrightarrow (M_{A_x} = 0) \\ \sum_{i=1}^n M_{A_y}(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_{A_y}(\bar{R}_j) = 0 \Leftrightarrow (M_{A_y} = 0) \\ \sum_{i=1}^n M_{A_z}(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_{A_z}(\bar{R}_j) = 0 \Leftrightarrow (M_{A_z} = 0) \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Równania równowagi (3.49) w przypadku płaskim przyjmują jedną z równoważnych postaci:



$$1^{\circ} \begin{cases} S_x = 0 \\ S_y = 0 \\ M_{A_z} = 0 \end{cases} \quad 2^{\circ} \begin{cases} M_{A_z} = 0 \\ M_{B_z} = 0 \\ M_{C_z} = 0 \end{cases} \quad 3^{\circ} \begin{cases} S_l = 0 \\ M_{A_z} = 0 \\ M_{B_z} = 0 \\ \overline{AB} \not\perp l \end{cases} \quad (3.50)$$

gdzie:  $A, B, C$  – punkty niewspółliniowe

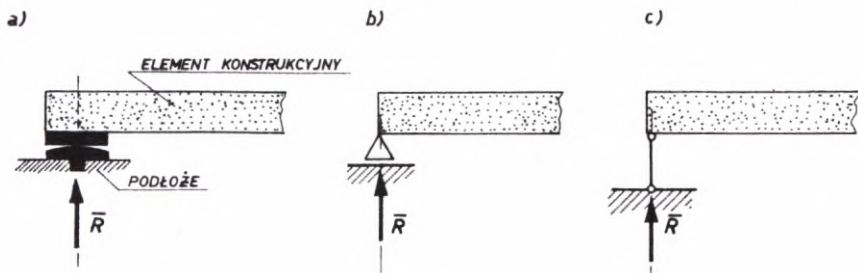
Jeżeli ciało sztywne unieruchomione jest w jednym punkcie, np.  $A$ , to warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił działających na to ciało jest, by moment układu sił czynnych liczony względem punktu unieruchomienia był równy zero. Dla ciała sztywnego unieruchomionego w dwóch różnych punktach, np.  $A$  i  $B$ , warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił działających na ciało jest, by moment od sił czynnych liczony względem prostej przechodzącej przez te punkty był równy zero.

### 3.4. PODPORY, UKŁADY KONSTRUKCYJNE STATYCZNIE WYZNACZALNE, NIEWYZNACZALNE I CHWIEJNE

Podporą (łożyskiem) nazywamy ciało sztywne, stanowiące więzy dla innych ciał materialnych. I tak obciążenia z elementów konstrukcyjnych, jak belki, ramy, kraty, są przekazywane przez odpowiednio skonstruowaną podporę na fundament i podłoże np. gruntowe. Specjalna konstrukcja łożyska unieruchamia element konstrukcyjny w ten sposób, że odbiera mu odpowiednią liczbę stopni swobody, np. możliwość obrotu czy przesunięcia w zadanym kierunku. Wyróżniamy trzy zasadnicze rodzaje podpór, a to:

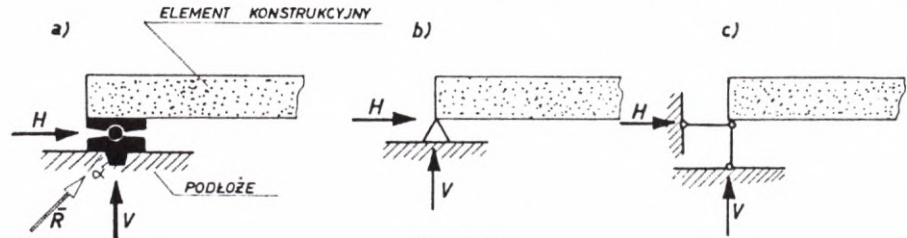
- 1) podpora przegubowo-przesuwna (łożysko ruchome),
- 2) podpora przegubowa (łożysko stałe),
- 3) sztywne utwierdzenie (zamocowanie).

Ad 1. Na podporze przegubowo-przesuwnej układ sił reakcji redukuje się do jednej siły o znanym kierunku, prostopadłym do płaszczyzny przesunięcia.

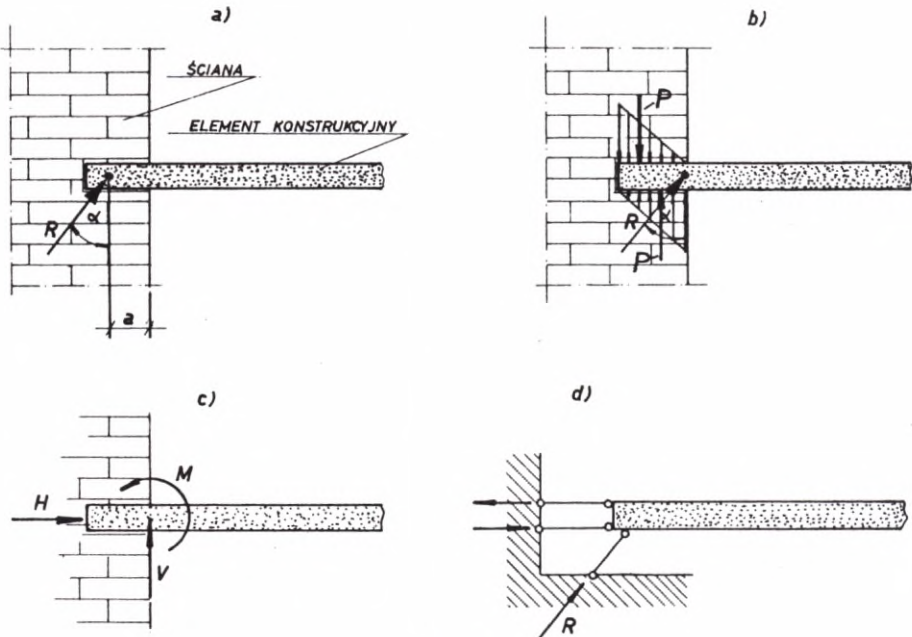


Rys. 3.19

W przypadku płaskim podpora ta odbiera ciało jeden stopień swobody, gdyż eliminuje przesunięcie w jednym kierunku, a zezwala na przesunięcie w drugim kierunku i swobodny obrót. Podporę tę można zastąpić jednym prętem.



Rys. 3.20



Rys. 3.21

Na rys. 3.19 element konstrukcyjny połączony jest z podłożem np. grun-  
towym za pomocą łożyska ruchomego. Pokazano również przyjęte w mechanice  
oznaczenia tych podpór.

Ad 2. Na podporze przegubowej układ sił reakcji redukuje się do jednej siły  
o nieznanym kierunku. W przypadku płaskim podpora ta odbiera ciało dwa  
stopnie swobody przez eliminację przesunięć w obu kierunkach. Zezwala tylko na  
swobodny obrót wokół punktu podparcia. Podporę taką można zastąpić dwoma

prętami nierównoległymi, połączonymi w punkcie. Na rys. 3.20 przedstawiono łożysko stałe oraz przyjęte w mechanice oznaczenia tych łożysk.

Ad 3. Podporę, której układ sił reakcji redukuje się do jednej siły o nieznanym kierunku i pary sił, nazywamy utwierdzeniem. W przypadku płaskim podpora ta odbiera ciało trzy stopnie swobody, to znaczy eliminuje obrót i przesunięcia w obu kierunkach. Wobec tego w miejscu sztywnego utwierdzenia występuje siła  $R$  o kierunku określonym kątem  $\alpha$  i para sił (o momencie nazywanym momentem utwierdzenia), która zastępuje nieznaną wymiar  $a$  (rys. 3.21 a). Podporę taką można zastąpić trzema prętami nierównoległymi i nie przecinającymi się w jednym punkcie.

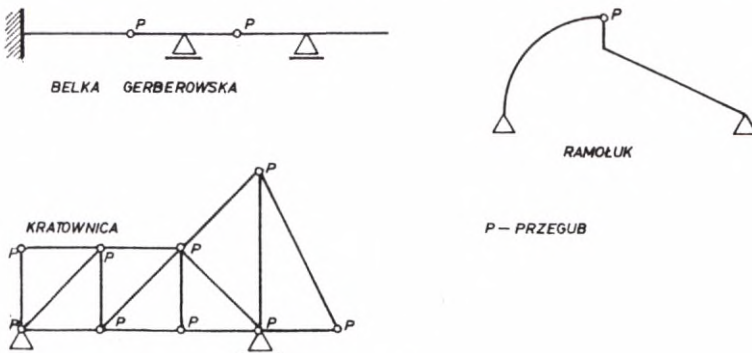
Na rys. 3.21 przedstawiono podporę zwaną utwierdzeniem i pokazano przyjęte w mechanice oznaczenia tych podpór. Jak już podano, łożyska służą do podparcia elementów konstrukcyjnych. Wybór podpory podyktowany jest rodzajem konstrukcji i sposobem jej pracy.

Wszystkie układy konstrukcyjne dzielimy na:

- 1) statycznie wyznaczalne,
- 2) statycznie niewyznaczalne (hiperstatyczne),
- 3) chwiejne.

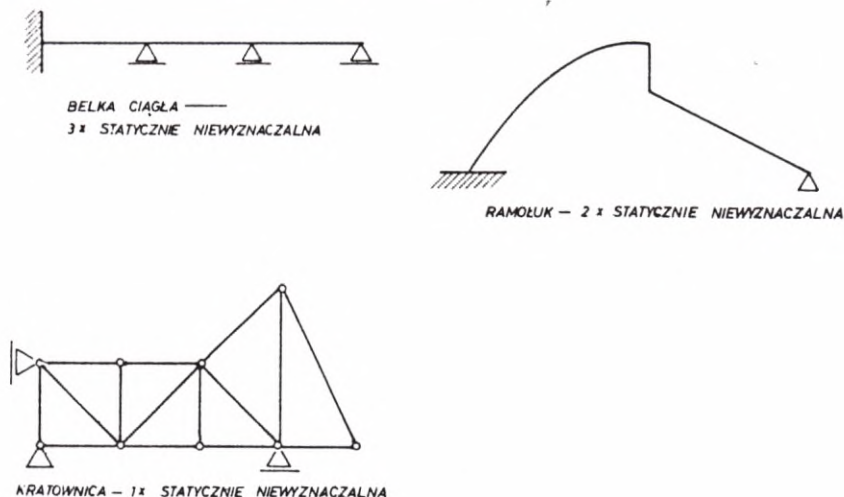
Ad 1. Układ konstrukcyjny, dla którego z równań równowagi można jednoznacznie wyznaczyć siły reakcji, nazywamy układem statycznie wyznaczalnym. Dla takiego układu liczba reakcji jest równa liczbie niezależnych równań równowagi oraz liczba stopni swobody, która zapewnia geometryczną niezmiennąść układu, równa się zero.

Na rys. 3.22 przedstawiono układy statycznie wyznaczalne – geometrycznie niezmiennie. Literą  $P$  oznaczono tak zwany przegub, który – łącząc części konstrukcyjne – zezwala im na swobodny obrót wokół punktu połączenia.



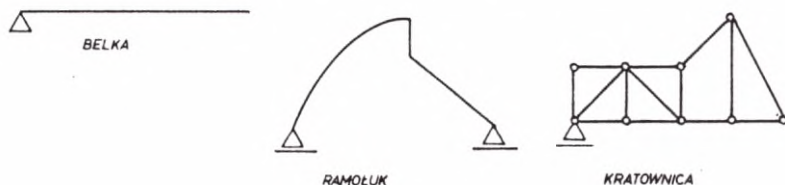
Rys. 3.22

Ad 2. Układ konstrukcyjny, dla którego z równań równowagi otrzymuje się nieskończenie wiele rozwiązań dla sił reakcji, jest układem statycznie niewyznaczalnym. W takim przypadku liczba reakcji jest większa od liczby niezależnych równań równowagi oraz liczba stopni swobody układu jest równa zero. Przykłady układów hiperstatycznych podaje rys. 3.23.



Rys. 3.23

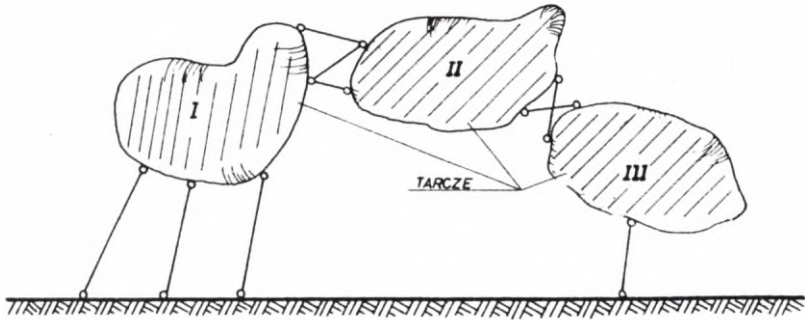
Ad 3. Układ, dla którego równania równowagi stanowią sprzeczny układ równań algebraicznych, nazywamy układem chwiejnym (geometrycznie zmiennym). W tym przypadku liczba reakcji jest mniejsza od liczby niezależnych równań równowagi, a liczba stopni swobody jest większa od zera.



Rys. 3.24

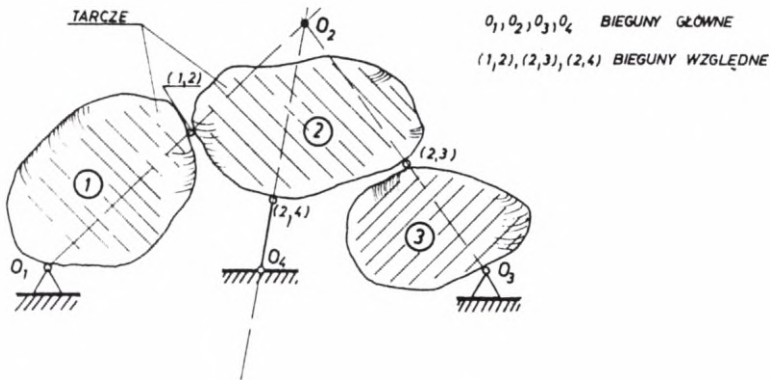
A teraz podamy kilka zasad budowy układów geometrycznie niezmiennych. Element konstrukcyjny (tarcza) połączony z podłożem np. gruntowym (tarcza) trzema prętami, nie przecinającymi się w jednym punkcie i nierównoległymi, stanowi układ geometrycznie niezmienny. Jeśli do takiego układu, stanowiącego tarczę, dołączymy następną, połączoną również trzema prętami nie przecinającymi się w jednym punkcie i nierównoległymi, to układ tarcz jest geometrycznie

niezmienny. W ten sposób układ tarcz możemy rozbudować (rys. 3.25). Połączenie przegubowe tarcz jest realizowane tutaj przez krzyżujące się pręty.



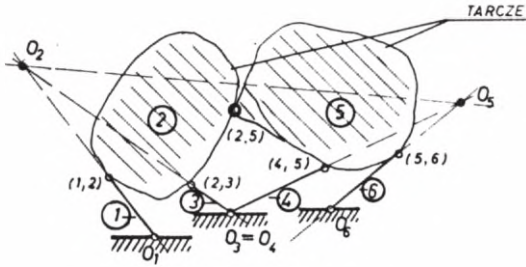
Rys. 3.25

Układ tarcz przedstawiony na rys. 3.26 jest układem geometrycznie zmiennym, gdyż ma możliwość obrotu wokół środków chwilowych obrotów (biegunów głównych). Występujące w tym układzie przeguby traktować możemy jako bieguny względnego obrotu łączonych tarcz.



Rys. 3.26

Bieguny główne dwóch tarcz i odpowiadający im biegun względny (przegub) w układzie geometrycznie zmiennym leżą na jednej prostej. Analiza planu biegunów stanowi kolejne kryterium do badania geometrycznej niezmienności układów konstrukcyjnych. Jeśli plan biegunów pokazuje, że bieguny główne i odpowiadający im biegun względny leżą na jednej prostej, to układ taki jest geometrycznie zmienny, zaś w przeciwnym przypadku stanowi układ geometrycznie niezmienny. Wykorzystując to kryterium stwierdzamy, że układ przedstawiony na rys. 3.27 jest geometrycznie niezmienny, gdyż bieguny  $O_2$ ,  $O_5$  i (2,5) nie leżą na jednej prostej.

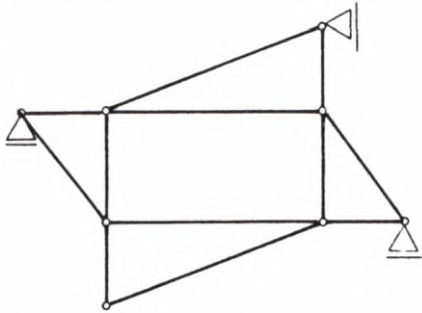


Rys. 3.27

### Przykład 3.9

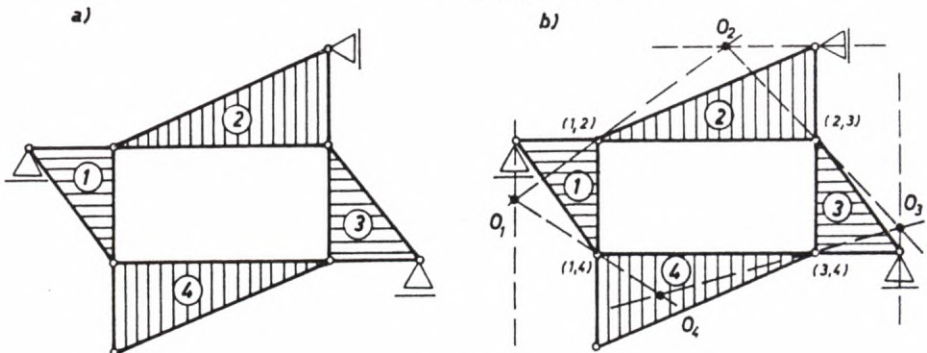
Przeanalizować, jakim układem (ze względu na geometryczną niezmienność) jest kratownica przedstawiona na rys. 3.28.

Ponieważ najprostszym układem geometrycznie niezmiennym jest trójkąt (nie można go bowiem bez zmiany długości boków przekształcić w inny o tych samych wymiarach), to analizowaną kratownicę możemy rozpatrywać jako układ złożony z czterech tarcz trójkątnych (rys. 3.29 a).



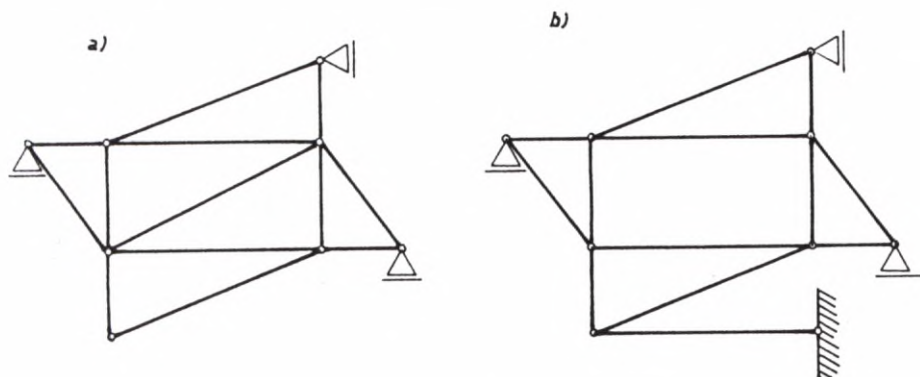
Rys. 3.28

Z analizy planów biegunów przedstawionej na rys. 3.29 b wynika, że jest to układ geometrycznie zmienny. Celem otrzymania układu geometrycznie niezmiennego należy wprowadzić do zadanej kratownicy dodatkowy pręt, łączący dwa przeguby (rys. 3.30 a), lub pręt zewnętrzny, stanowiący podporę przegubowo-przesuwą (rys. 3.30 b).

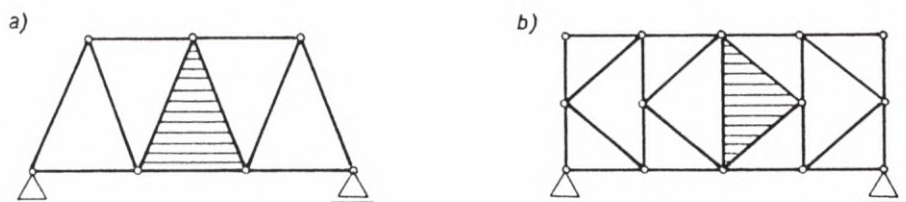


Rys. 3.29

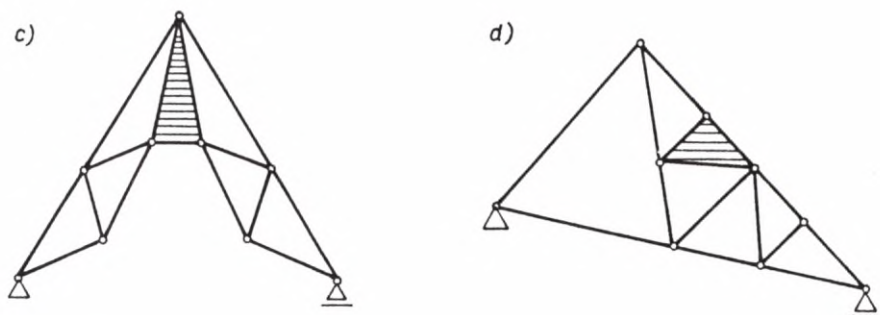
Podsumowując to zadanie możemy podać praktyczny wniosek, że wszystkie układy powstające z trójkątnej kratownicy przez kolejne dołączenie węzłów za pomocą dwóch prętów, nie leżących na jednej prostej, są geometrycznie niezmiennie (rys. 3.31 a, b, c, d).



Rys. 3.30

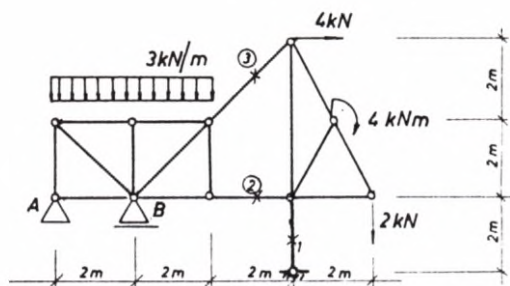


Rys. 3.31 a, b

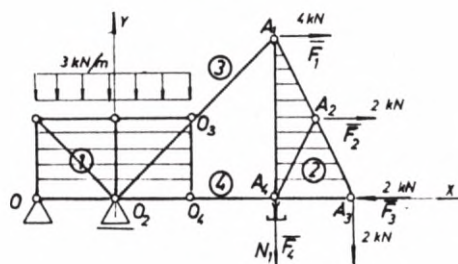


Rys. 3.31 c, d

## Przykład 3.10



Rys. 3.32



Rys. 3.32a

$$\bar{F}_2 = (2, 0),$$

$$A_2(5, 2),$$

$$\bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_\omega \times \overline{O_2 A_2} = (-2 \delta_\omega, 5 \delta_\omega)$$

$$\bar{F}_3 = (-2, -2),$$

$$A_3(6, 0),$$

$$\bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_\omega \times \overline{O_2 A_3} = (0, 6 \delta_\omega)$$

$$\bar{F}_4 = (0, -N_1),$$

$$A_4(4, 0),$$

$$\bar{\delta}_4 = \bar{\delta}_\omega \times \overline{O_2 A_4} = (0, 4 \delta_\omega)$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_i = \delta_\omega (-16 - 4 - 12 - 4N_1) = 0 \quad \forall \delta_\omega$$

Stąd mamy  $N_1 = -\frac{32}{4} = -8$  [kN] (pręt ściskany siłą o wielkości 8 [kN])

## Obliczenie siły w pręcie 2

Tarcza 1 jest nieruchoma, zaś tarcza 2 ma środek chwilowego obrotu w punkcie  $O_2$  (rys. 3.32 b).

Z zasady prac wirtualnych wyznaczyć siły w zaznaczonych prętach kratownicy (rys. 3.32), a reakcje podópór z równań równowagi.

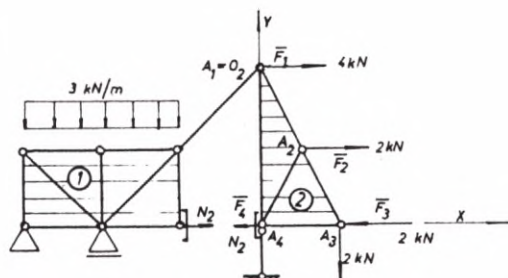
## Obliczenie siły w pręcie 1

Po wykorzystaniu (dla pręta 1) postulatu o więzach analizowany układ składa się z dwóch tarcz połączonych dwoma prętami (rys. 3.32 a). Tarcza 1 jest nieruchoma. Punkt  $O_2$  jest środkiem chwilowego obrotu tarczy 2, a punkty  $O_3$  i  $O_4$  – prętów 3 i 4. W układzie  $Ox$   $y$  wyznaczamy współrzędne sił i współrzędne punktów ich zaczepienia oraz przesunięcia wirtualne według wzoru (3.38):

$$\bar{F}_1 = (4, 0), \quad A_1(4, 4),$$

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_\omega \times \overline{O_2 A_1} = (-4 \delta_\omega, 4 \delta_\omega)$$





Rys. 3.32b

$$\bar{F}_1 = (4, 0), \quad A_1(0, 4),$$

$$\bar{\delta}_1 = (0, 0)$$

$$\bar{F}_2 = (2, 0), \quad A_2(1, 2),$$

$$\bar{\delta}_2 = (2 \delta_\omega, \delta_\omega)$$

$$\bar{F}_3 = (-2, -2), \quad A_3(2, 0), \quad \bar{\delta}_3 = (4 \delta_\omega, 2 \delta_\omega)$$

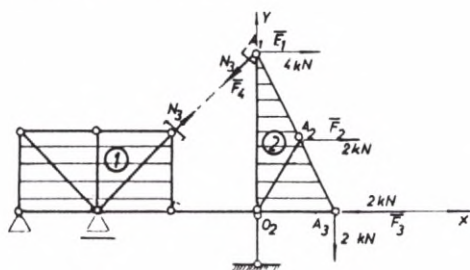
$$\bar{F}_4 = (-N_2, 0), \quad A_4(0, 0), \quad \bar{\delta}_4 = (4 \delta_\omega, 0)$$

$$\bar{\delta}_i = \bar{\delta}_\omega \times \overline{O_2 A_i}, \quad \delta L = \delta_\omega (4 - 8 - 4N_2 - 4) = 0 \quad \forall \delta_\omega$$

$N_2 = -2$  [kN] (pręt ściskany siłą o wielkości 2 [kN])

### Obliczenie siły w pręcie 3

Tarcza 1 jest nieruchoma, zaś tarcza 2 ma środek chwilowego obrotu w punkcie  $O_2$  (rys. 3.32c).



Rys. 3.32c

$$\bar{F}_1 = (4, 0), \quad A_1(0, 4),$$

$$\bar{\delta}_1 = (-4 \delta_\omega, 0)$$

$$\bar{F}_2 = (2, 0), \quad A_2(1, 2),$$

$$\bar{\delta}_2 = (-2 \delta_\omega, \delta_\omega)$$

$$\bar{F}_3 = (-2, -2), \quad A_3(2, 0),$$

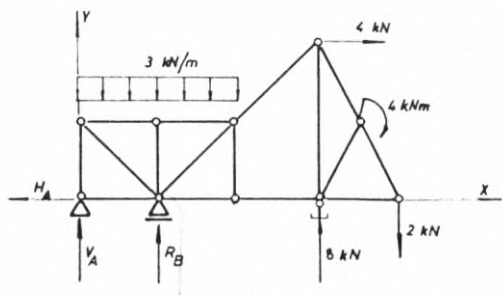
$$\bar{\delta}_3 = (0, 2\delta_\omega)$$

$$\bar{F}_4 = \left( -N_3 \frac{\sqrt{2}}{2}, -N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad A_4 = A_1, \quad \bar{\delta}_4 = \bar{\delta}_1$$

$$\delta L = \delta_\omega (-16 + 2\sqrt{2}N_3 - 4 - 4) = 0 \quad \forall \delta_\omega$$

Stąd  $N_3 = 6\sqrt{2}$  [kN] (pręt rozciągany siłą o wielkości  $6\sqrt{2}$  [kN]).

### Obliczenie sił reakcji z równań równowagi (rys. 3.32d)



Rys. 3.32d

$$1. \quad \Sigma X = 0$$

$$-H_A + 4 = 0 \Rightarrow H_A = 4 \text{ [kN]}$$

$$2. \quad \Sigma M_{B_z} = 0$$

$$-V_A \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 4 - 2 \cdot 6 + \\ + 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_A = 0 \text{ [kN]}$$

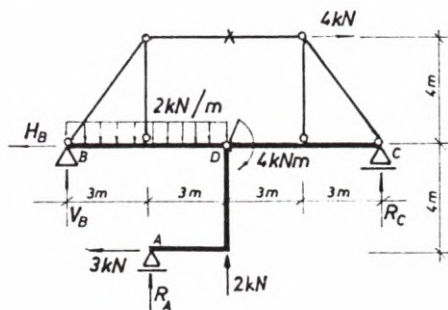
$$3. \quad \Sigma M_{A_z} = 0$$

$$R_B \cdot 2 - (3 \cdot 4) \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 4 - 2 \cdot 8 + 8 \cdot 6 = 0 \Rightarrow R_B = 6 \text{ [kN]}$$

### Sprawdzenie:

$$\Sigma Y = 0, \quad 6 + 8 - 3 \cdot 4 - 2 = 0, \quad 0 = 0$$

### Przykład 3.11



Rys. 3.33

Wyznaczyć z równań równowagi siły reakcji podpór oraz siłę w zaznaczonym przęcie (rys. 3.33).

Obliczenie sił reakcji podpór:

$$1. \quad M_D^d = 0$$

$$-R_A \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_A = -4 \text{ [kN]}$$

$$2. \quad \Sigma M_B = 0$$

$$-(2 \cdot 6)3 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 + 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + R_c \cdot 12 = 0 \Rightarrow R_c = \frac{17}{3} \text{ [kN]}$$

$$3. \Sigma M_c = 0$$

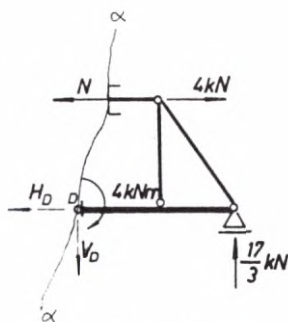
$$2 \cdot 6 \cdot 9 - 4 - 16 - 2 \cdot 6 - 12 + 4 \cdot 9 - V_B \cdot 12 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{25}{3} \text{ [kN]}$$

$$4. \Sigma X = 0$$

$$-H_B - 3 + 4 = 0 \Rightarrow H_B = 1 \text{ [kN]}$$

### Sprawdzenie

$$\Sigma Y = 0, \quad \frac{25}{3} - 4 - 2 \cdot 6 + \frac{17}{3} + 2 = 0, \quad 0 = 0$$



Rys. 3.33 a

Obliczenie siły w zaznaczonym przęciu z warunku, że każda myślowo wycięta część konstrukcji musi być w równowadze (rys. 3.33 a).

$$\Sigma M_D = 0,$$

$$-4 - 4 \cdot 4 + \frac{17}{3} \cdot 6 + N \cdot 4 = 0 \Rightarrow N = -\frac{7}{2} \text{ [kN]}$$

$$V_D = \frac{17}{3} \text{ [kN]}, \quad H_D = 4 - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{2} \text{ [kN]}$$

### Przykład 3.11a

Korzystając z zasady prac wirtualnych wyznaczyć siłę w zaznaczonym przęciu kratownicy. Wykorzystując postulat o więzach myślowo usuwamy zaznaczony na rys. 3.33 b pręt, a jego działanie zastępujemy nieznaną siłą  $K$ . Przesunięcia wirtualne  $\bar{\delta}_i$  punktów  $A_i$  przyłożenia sił otrzymujemy z przemnożenia prędkości możliwych (zob. rys. 2.14 a) tych punktów przez stały współczynnik  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ :

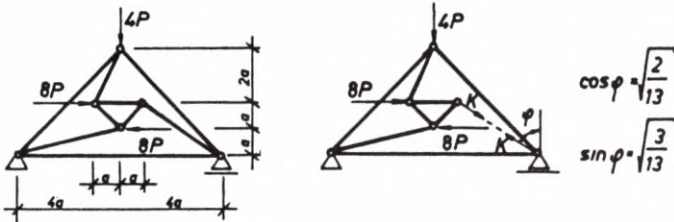
$$\bar{\delta}_i = k \hat{v}_i$$

Możemy zatem zapisać zasadę prac wirtualnych dla analizowanego układu:

$$\begin{aligned}
 \delta L &= k[-8P \cos(90^\circ - \alpha)v_4 + 8P \cos \beta v_6 + K \cos(\varphi - \gamma)v_5] = \\
 &= kv_0[-8P \sin \alpha + 8P \cos \beta 0,904 + K(\cos \varphi \cos \gamma + \sin \varphi \sin \gamma) 1,536] = \\
 &= \delta_0 \left[ -8P \frac{1}{\sqrt{17}} + 8P \frac{2}{\sqrt{5}} 0,904 + K \left( \frac{2}{\sqrt{13}} 0,885 + \frac{3}{\sqrt{13}} 0,466 \right) 1,536 \right] = \\
 &= \delta_0(4,528P + 1,35K) = 0, \quad \forall \delta_0
 \end{aligned}$$

stąd

$$K = -0,298P$$

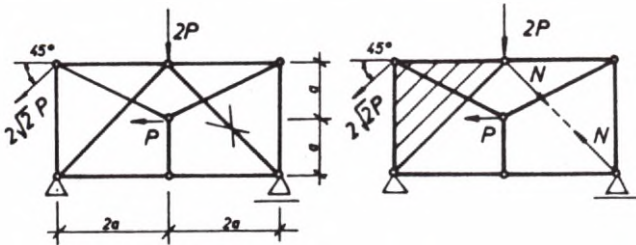


Rys. 3.33b

### Przykład 3.11b

Z zasady prac wirtualnych wyznaczyć siłę w zaznaczonym przecie kratownicy.

I tutaj również korzystamy z postulatu o więzach i z przykładu 2.6 b, z którego odczytujemy prędkości możliwe punktów przyłożenia sił. Piszemy zatem zasadę prac wirtualnych, przyjmując oznaczenia  $kv_0 = \delta_0$ , gdzie  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ :



Rys. 3.33c

$$\begin{aligned}
 \delta L &= k(2Pv_4 \cos 45^\circ - 2\sqrt{2}P \cos 45^\circ v_3 - Pv_6 + Nv_4) = \\
 &= \delta_0 \left( 2P\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}P \frac{1}{\sqrt{2}} - P + N\sqrt{2} \right) = 0, \quad \forall \delta_0
 \end{aligned}$$

stąd

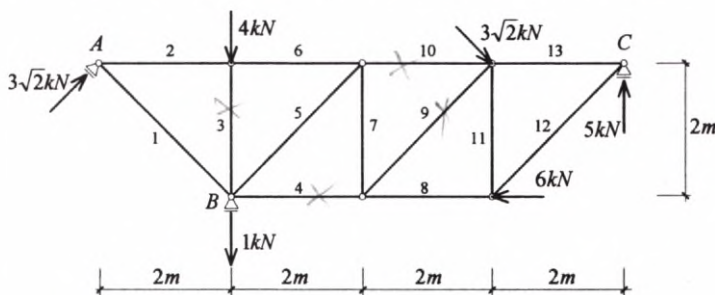
$$N = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

**Odpowiedź:**

Pręt jest rozciągany siłą o wielkości  $\frac{\sqrt{2}}{2} P$ .

### Przykład 3.11c

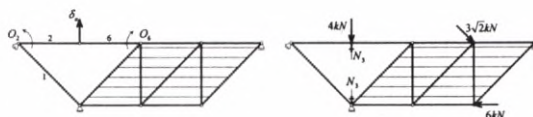
Korzystając z zasady prac wirtualnych wyznaczyć siły osiowe w zaznaczonych prętach kratownicy oraz siły reakcji podporowych na podporze  $A$  i  $B$ .



**Rozwiązanie**

a. Obliczenie siły osiowej w pręcie (3)

Korzystając z postulatu o więzach usuwamy myślowo pręt (3) i zastępujemy go siłą osiową  $N_3$



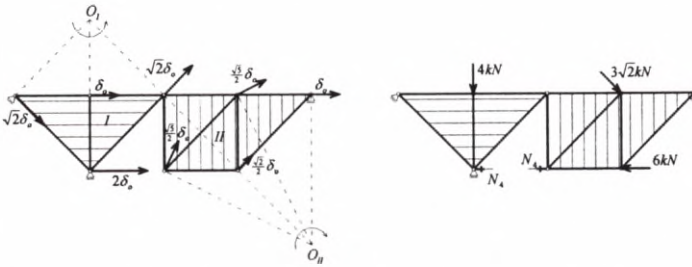
Powstał układ złożony z tarczy i trzech prętów. Tarcza i pręt (1) są nieruchome. Z równania — zasady prac wirtualnych — mamy:

$$\delta L = -4 \delta_o + N_3 \delta_o = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$\delta_o (N_3 - 4) = 0 \Rightarrow N_3 = 4 \text{ [kN]}$$

Pręt jest ściskany siłą o wielkości 4 [kN]. Dla pozostałych prętów obliczenia przebiegają analogicznie.

## b. Obliczenie siły osiowej w pręcie (4)



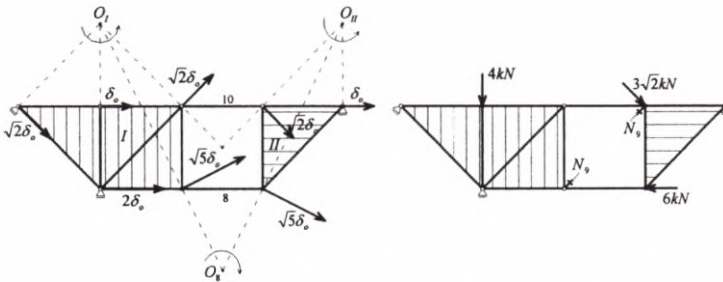
$$\delta L = \left(3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \delta_o \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \delta_o\right) \frac{1}{\sqrt{5}} -$$

$$- 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta_o \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + N_4 \cdot 2\delta_o - N_4 \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \delta_o \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\delta L = 3\delta_o - 3 \cdot \frac{1}{2}\delta_o - 6 \cdot \frac{1}{2}\delta_o + N_4 \cdot 2\delta_o - N_4 \cdot \frac{1}{2}\delta_o = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$\delta_o \left(\frac{3}{2}N_4 - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow N_4 = 1 \text{ [kN]} \text{ — pręt rozciągany siłą o wielkości 1 [kN].}$$

## c. Obliczenie siły osiowej w pręcie (9)

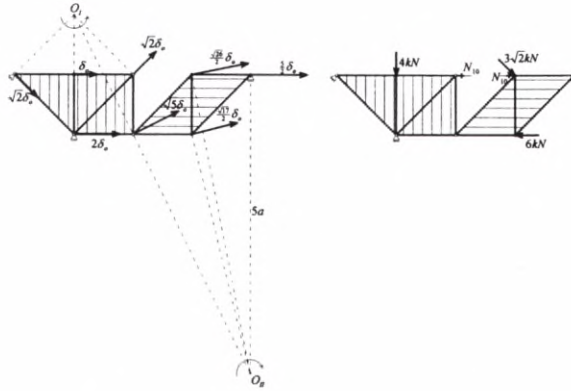


$$\delta L = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \delta_o - 6 \left(\sqrt{5} \delta_o \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(N_9 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt{5} \delta_o \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) +$$

$$+ \left(N_9 \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt{5} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0 \quad \forall \delta_o$$

$\delta_o \left( 6 - 12 + \frac{3}{\sqrt{2}} N_9 \right) = 0 \Rightarrow N_9 = 2\sqrt{2} \text{ [kN]}$  — pręt rozciągany siłą o wielkości  $2\sqrt{2} \text{ [kN]}$ .

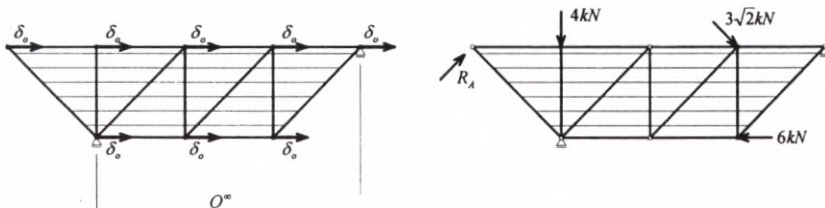
d. Obliczenie siły osiowej w pręcie (10)



$$\begin{aligned} \delta L = & N_{10} \left( \sqrt{2} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - N_{10} \left( \frac{1}{2} \sqrt{26} \delta_o \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} \right) + \\ & + \left( 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{26} \delta_o \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} \right) - \\ & - \left( 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{26} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \right) - 6 \left( \frac{1}{2} \sqrt{17} \delta_o \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \right) = 0 \quad \forall \delta_o \end{aligned}$$

$\delta_o \left( -\frac{3}{2} N_{10} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} - 12 \right) = 0 \Rightarrow N_{10} = -4 \text{ [kN]}$  — pręt ściskany siłą o wielkości  $4 \text{ [kN]}$ .

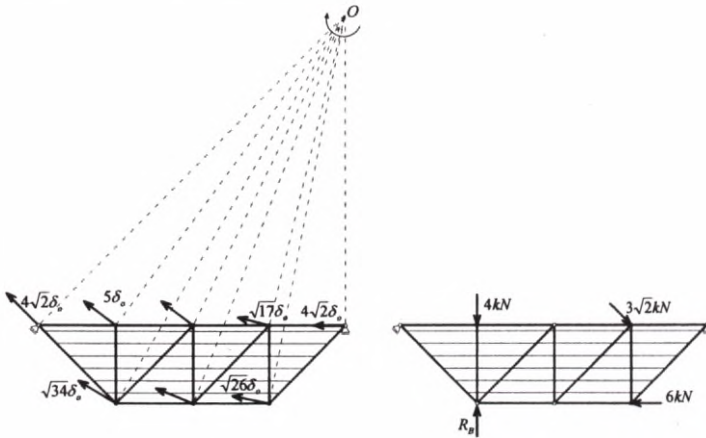
e. Obliczenie reakcji na podporze A



$$\delta L = \left( R_A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \delta o + \left( 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \delta o - 6 \delta o = 0 \quad \forall \delta o$$

$$\delta o \left( \frac{R_A}{\sqrt{2}} - 3 \right) = 0 \Rightarrow R_A = 3\sqrt{2} \text{ [kN]}$$

f. Obliczenie reakcji na podporze B



$$\begin{aligned} \delta L = & -4 \left( 5\delta o \cdot \frac{3}{5} \right) - \left( 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \sqrt{17} \delta o \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \right) - \\ & - \left( 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( \sqrt{17} \delta o \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + 6 \left( \sqrt{26} \delta o \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} \right) + \\ & + R_B \left( \sqrt{34} \delta o \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \right) = 0 \quad \forall \delta o \end{aligned}$$

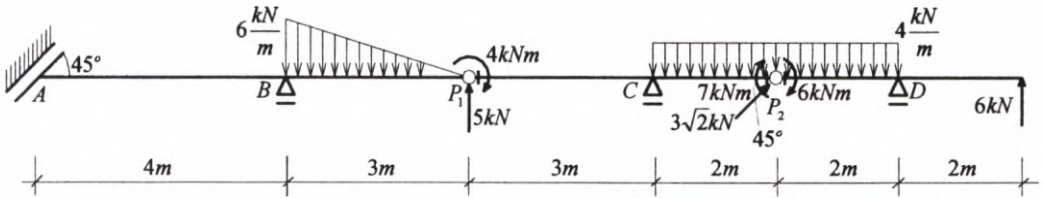
$$\delta o (-12 - 12 - 3 + 30 + 3R_B) = 0 \Rightarrow R_B = -1 \text{ [kN]}$$

Wielkość reakcji  $R_B$  wynosi 1 [kN], zaś jej zwrot jest przeciwny do założonego.

### Przykład 3.11d

Korzystając z zasady prac wirtualnych wyznaczyć moment utwierdzenia na podporze A oraz siły reakcji  $R_B$  i  $R_C$

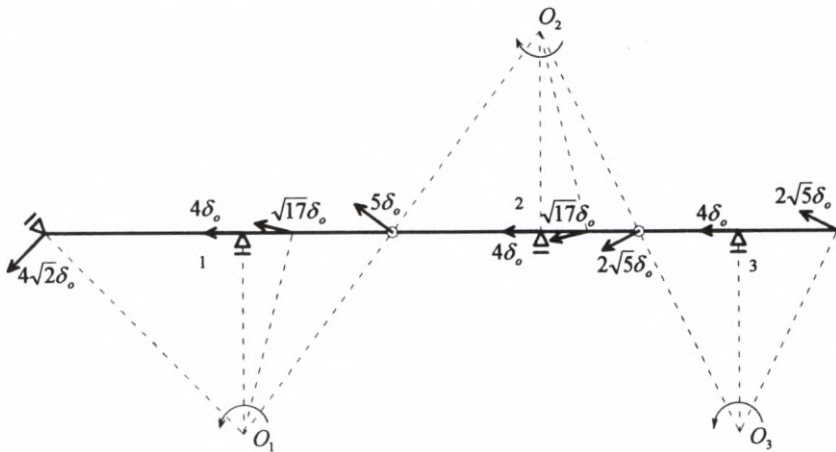




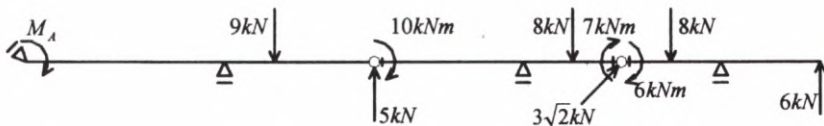
## Rozwiązanie

### a. Obliczenie momentu utwierdzenia na podporze A

Na podstawie postulatu o więzach podporę A zamieniamy na przegubowo-przesuwną, obciążoną parą sił o momencie utwierdzenia  $M_A$ . Powstał układ złożony z trzech belek połączonych przegubem.



$$\omega_1 = -\omega_2 = \omega_3 = \delta_0 = \operatorname{tg} \alpha_1$$



Na powyższym rysunku przedstawiono plan przemieszczeń wirtualnych oraz przyłożone siły do układu prętowego. Zapisujemy równanie wynikające z zasady prac wirtualnych:

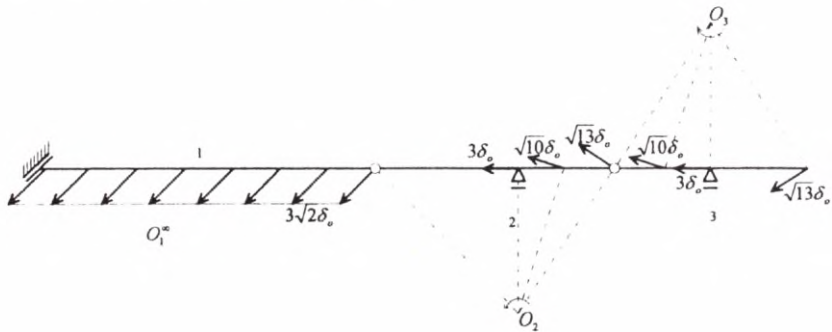
$$\begin{aligned} \delta L = & -M_A \cdot \delta_o - 9 \left( \sqrt{17} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + 5 \left( 5 \delta_o \cdot \frac{3}{5} \right) + 10 \cdot \delta_o + 8 \left( \sqrt{17} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + \\ & + 7 \cdot \delta_o - \left( 3\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( 2\sqrt{5} \delta_o \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \left( 3\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left( 2\sqrt{5} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \\ & - 6 \cdot \delta_o + 8 \left( \sqrt{17} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \right) + 6 \left( 2\sqrt{5} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\delta L = \delta_o (-M_A - 9 + 15 + 10 + 8 + 7 - 12 - 6 - 6 + 8 + 12) = 0 \quad \forall \delta_o$$

i obliczamy  $M_A = 27$  [kNm].

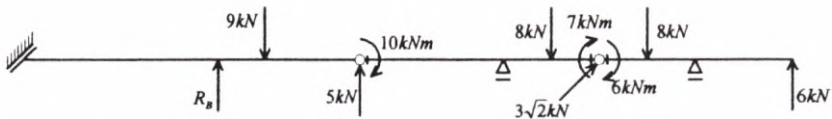
b. Wyznaczenie reakcji  $R_B$  na podporze  $B$

Podobnie jak w punkcie (a) rysujemy plan przemieszczeń wirtualnych i siły działające na analizowany układ prętowy.



$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\omega_3 = \delta_o = \operatorname{tg} \alpha_2 = -\operatorname{tg} \alpha_3$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\omega_3 = \delta_o = \operatorname{tg} \alpha_2 = -\operatorname{tg} \alpha_3$$



Z równania będącego zasadą prac wirtualnych:

$$\delta L = R_B \left( 3\sqrt{2} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 9 \left( 3\sqrt{2} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 5 \left( 3\sqrt{2} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 10 \delta_o -$$

$$\begin{aligned}
 & -8\left(\sqrt{10} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 7 \cdot \delta_o - \left(3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{13} \delta_o \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}\right) + \\
 & + \left(3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{13} \delta_o \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}\right) + 6 \cdot \delta_o - 8\left(\sqrt{10} \delta_o \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right) - \\
 & - 6\left(\sqrt{13} \delta_o \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 0 \quad \forall \delta_o
 \end{aligned}$$

obliczamy reakcję  $R_B$

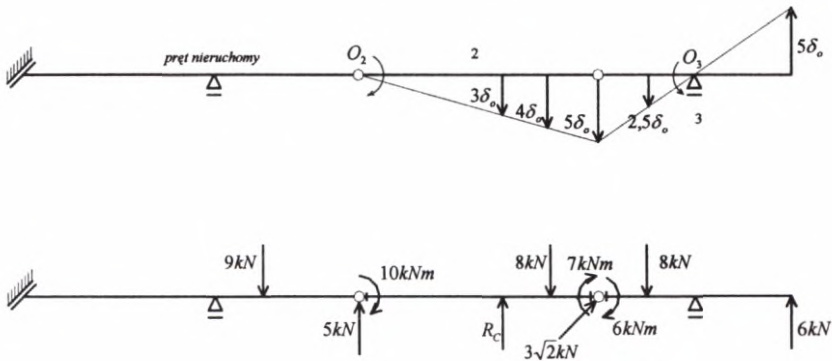
$$\delta_o(3R_B + 27 - 15 - 10 - 8 - 7 - 9 + 6 + 6 - 8 - 12) = 0$$

$$R_B = 10 \text{ [kN]}$$

c. Wyznaczenie reakcji na podporze  $C$

Rysujemy plan przemieszczeń wirtualnych i siły działające na układ prętowy:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \delta_o, \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{5}{2} \delta_o$$



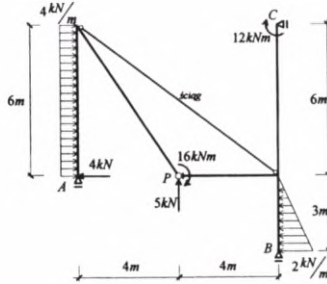
Z równania  $\delta L = 0$  obliczamy siłę reakcji  $R_C$

$$\delta L = 10 \cdot \delta_o - R_C \cdot 3\delta_o + 8 \cdot 4\delta_o + 7 \cdot \delta_o - 3 \cdot 5\delta_o - 6 \cdot \frac{5}{2} \delta_o + 8 \cdot 2,5\delta_o + 6 \cdot 5\delta_o = 0 \quad \forall \delta_o$$

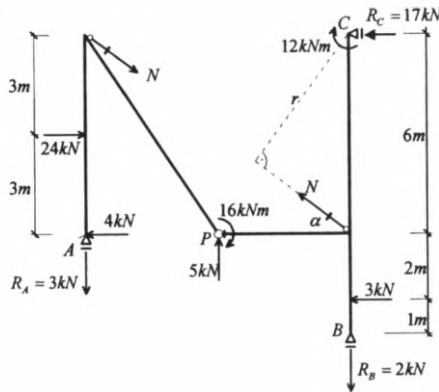
$$\delta L = (10 - 3R_C + 32 + 7 - 15 - 15 + 20 + 30) \delta_o = 0 \Rightarrow R_C = 23 \text{ [kN]}$$

### Przykład 3.11e

Dla układu ramowego ze ściągiem wyznaczyć z równań równowagi siły reakcji, zaś siłę w ściągu obliczyć z zasady prac wirtualnych.



Przy obliczeniu sił reakcji podporowych równoległe układy sił zastępujemy siłami wypadkowymi.



Równania równowagi sił:

(1)

$$\Sigma X = 0$$

$$-4 + 24 + N \cos \alpha - N \cos \alpha - R_C - 3 = 0$$

$$R_C = 17 \text{ [kN]}$$

(2)

$$\Sigma M_C = 0$$

$$-3 \cdot 8 - 12 - N \cdot r + N \cdot r - 16 - 5 \cdot 4 + 8R_A - 4 \cdot 6 + 24 \cdot 3 = 0$$

$$R_A = 3 \text{ [kN]}$$

$$(3) \quad \Sigma Y = 0$$

$$-3 + 5 - R_B - N \sin \alpha + N \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_B = 2 \text{ [kN]}$$

$$(4) \quad M_p^z \text{ lewej} = 0$$

$$3 \cdot 4 - 24 \cdot 3 - (N \cos \alpha) \cdot 6 + (N \sin \alpha) \cdot 4 = 0$$

$$2,4 N = -60 \Rightarrow N = -25 \text{ [kN]} \text{ (pręt ściskany siłą o wielkości 25 [kN].)}$$

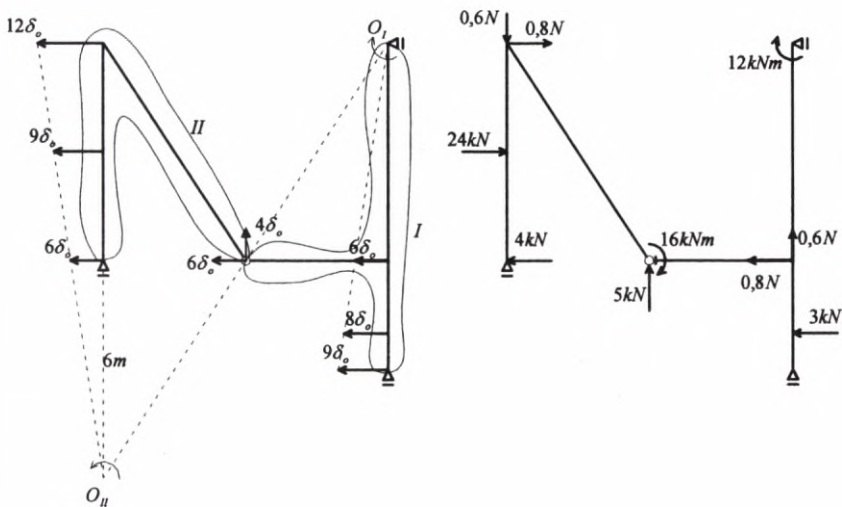
**Sprawdzenie:**

$$M_p^z \text{ prawej} = 0$$

$$-16 + 0,6 N \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 17 \cdot 6 - 12 = 0 \Rightarrow N = -25 \text{ [kN]}$$

### Wyznaczenie siły w ściągu z zasady prac wirtualnych

Wykorzystując postulat o więzach rysujemy plan przemieszczeń wirtualnych i siły działające na układ dwóch ram połączonych przegubem  $P$ .



Równanie wynikające z zasady prac wirtualnych:

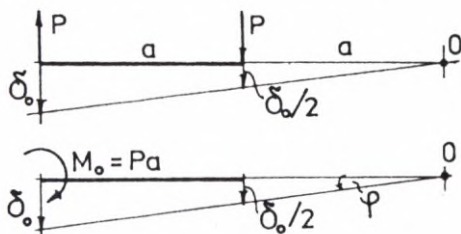
$$\delta L = 4 \cdot 6 \delta_0 - 24 \cdot 9 \delta_0 - 0,8 N \cdot 12 \delta_0 + 5 \cdot 4 \delta_0 + 16 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + 3 \cdot 8 \delta_0 + \\ + 0,8 N \cdot 6 \delta_0 + 12 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 0 \quad \forall \delta_0$$



Stąd

$$R_A = \frac{47}{2}P = 23,5P$$

W powyższym równaniu wykorzystano zależność, że praca wirtualna pary sił jest równa iloczynowi momentu pary sił i tangensa kąta  $\varphi$ , co obrazuje rys. 3.34 b.



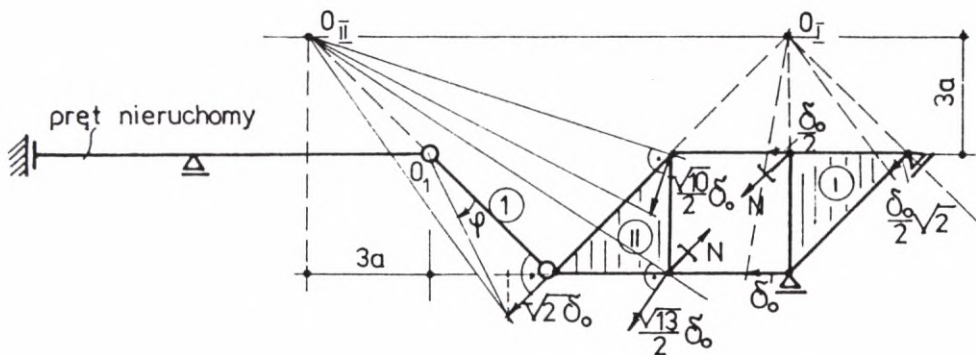
Rys. 3.34b

$$\delta L = -P \cdot \delta_o + P \cdot \frac{\delta_o}{2} = -\frac{P}{2} \cdot \delta_o$$

$$\begin{aligned} \delta L &= -M_o \cdot \operatorname{tg} \varphi = -Pa \cdot \frac{\delta_o}{2a} = \\ &= -\frac{P}{2} \cdot \delta_o \end{aligned}$$

Dla małych kątów można przyjąć, że  $\operatorname{tg} \varphi \cong \varphi$ .

Plan wirtualnych przemieszczeń dla wyznaczenia siły  $N$  w zaznaczonym przecie kratownicy przedstawiono na rys. 3.34 c.



Rys. 3.34c

Równanie zasady prac wirtualnych w tym przypadku jest następujące:

$$\begin{aligned} \delta L &= -12Pa \cdot \operatorname{tg} \varphi + 4P \cdot \frac{\delta_o \sqrt{10}}{2} \frac{3}{\sqrt{10}} - 5P \cdot \delta_o + N \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\delta_o}{2} - \\ &- N \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\delta_o \sqrt{13}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{\delta_o \sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Podstawiając za  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta_o \sqrt{2}}{3\sqrt{2}a}$  mamy:

$$\delta L = -\left(4P - 6P + 5P - N\frac{\sqrt{2}}{4} + N\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}N\right)\delta_o = 0, \quad \forall \delta_o$$

Stąd

$$N = -\frac{3}{4}\sqrt{2}P$$

Okazało się, że pręt jest ściskany siłą o wielkości  $\frac{3}{4}\sqrt{2}P$ . Pozostałe siły reakcji wyznaczamy z równań równowagi:

$$\Sigma M_C^L = 0 \Leftrightarrow M_B + 2Pa - 23,5P \cdot 6a + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6P}{a} \cdot 6a\right)\left(\frac{1}{3} \cdot 6a\right) = 0,$$

$$M_B = 103Pa$$

$$\Sigma M_D^L = 0 \Leftrightarrow 103Pa + H_B \cdot 3a - 2P \cdot 2a - 23,5P \cdot 9a +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6P}{a} \cdot 6a\right)\left(\frac{6a}{3} + 3a\right) + 12Pa = 0$$

$$H_B = 3,5P$$

$$\Sigma X = 0 \Leftrightarrow -3,5P + 2P + 5P - R_F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_F = 3,5\sqrt{2}P$$

$$\Sigma Y = 0 \Leftrightarrow 23,5P - \frac{1}{2} \cdot \frac{6P}{a} \cdot 6a - 4P - R_E + 3,5\sqrt{2}P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow R_E = 5P$$

**Sprawdzenie:**

$$\Sigma M_F = 0 \Leftrightarrow 103Pa + 2Pa - 23,5P \cdot 18a + 18P \cdot 14a + 12Pa + 4P \cdot 6a +$$

$$+ 5P \cdot 3a + 5P \cdot 3a = 0, \quad 0 = 0$$

### Przykład 3.13

Trójkątna płyta  $ABC$  w punkcie  $A$  ma podporę przegubowo-przesuwną zezwalającą na translację wzdłuż osi  $Ox$  i obroty we wszystkich trzech kierunkach, zaś w punkcie  $B$  jest utwierdzona z możliwością translacji i obrotu wzdłuż osi  $Oy$  (rys. 3.35 a). Dla zadanego układu sił zewnętrznych wyznaczyć siły reakcji więzów.



Na rys. 3.35 b zaznaczono składowe sił reakcji. Siły te wyznaczymy z równań (3.48). W tym celu wypisujemy współrzędne wszystkich sił i momentów par sił:

$$\bar{R}_A = (0, R_{Ay}, R_{Az}), \quad A(3, 0, 0)$$

$$\bar{R}_B = (R_{Bx}, 0, R_{Bz}), \quad B(0, 3, 0)$$

$$\bar{F} = (-60, 80, 0), \quad C(3, 3, 0)$$

$$\bar{Q} = (0, 0, -200), \quad S(2, 2, 0)$$

$$\bar{M}_B = (M_{Bx}, 0, M_{Bz})$$

$$\bar{M} = (300, -300, 0)$$

Równania równowagi w analizowanym przykładzie są następujące:

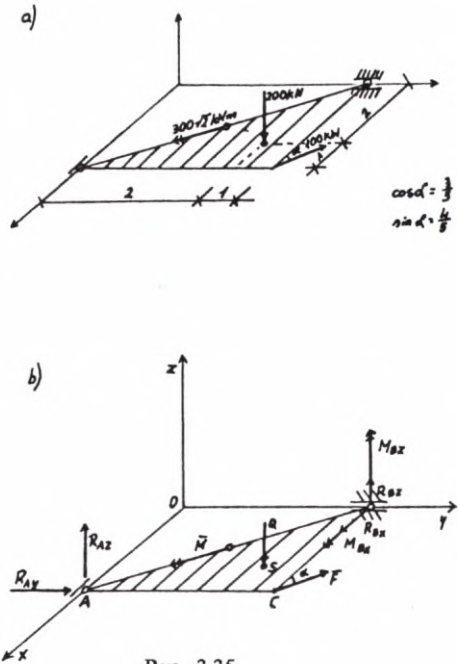
$$\begin{cases} \bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{F} + \bar{Q} = \bar{0} \\ \bar{R}_A \times \overline{AO} + \bar{R}_B \times \overline{BO} + \bar{F} \times \overline{CO} + \bar{Q} \times \overline{SO} + \bar{M}_B + \bar{M} = \bar{0} \end{cases}$$

zaś zapisane we współrzędnych mają postać:

$$\begin{cases} R_{Bx} - 60 = 0 \\ R_{Ay} + 80 = 0 \\ R_{Az} + R_{Bz} - 200 = 0 \\ M_{Bx} + 3R_{Bz} - 100 = 0 \\ -3R_{Az} + 100 = 0 \\ M_{Bz} + 3R_{Ay} - 3R_{Bx} + 420 = 0 \end{cases}$$

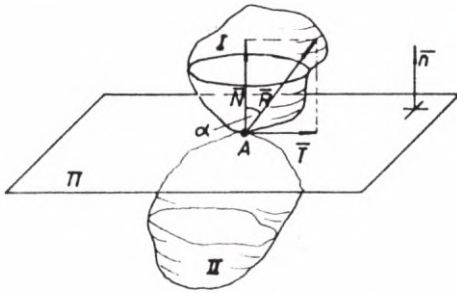
Stąd otrzymujemy:

$$\bar{R}_A = \left(0, -80, \frac{100}{3}\right), \quad \bar{R}_B = \left(60, 0, \frac{500}{3}\right), \quad \bar{M}_B = (-400, 0, 0)$$



Rys. 3.35

## 3.5. TARCIE, STOŻEK TARCIA



Rys. 3.36

Rozważmy dwa stykające się w punkcie  $A$  ciała szorstkie (rys. 3.36). Oznaczmy przez  $\bar{R}$  reakcję, z jaką ciało II działa na ciało I. Przez punkt  $A$  przechodzi płaszczyzna  $\Pi$  styczna do obu ciał. Reakcja  $\bar{R}$  nachylona jest do normalnej  $\bar{n}$  płaszczyzny  $\Pi$  pod kątem  $\alpha$ .

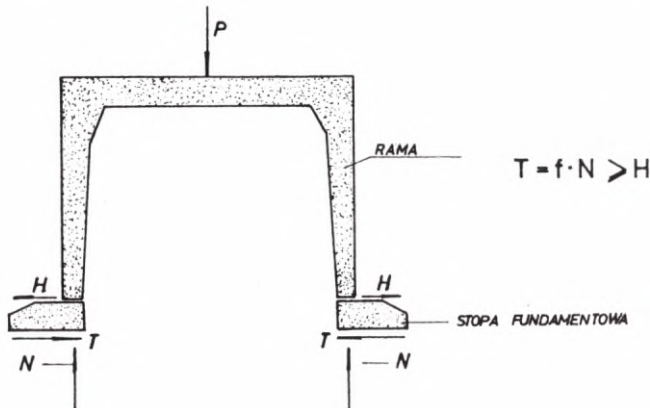
Oznaczając przez  $\bar{N}$  rzut siły  $\bar{R}$  na kierunek  $\bar{n}$ , zaś przez  $\bar{T} = \bar{R} - \bar{N}$  rzut na kierunek prostopadły do  $\bar{n}$ , możemy napisać:

$$\begin{aligned} |\bar{T}| &= |\bar{R}| \sin \alpha = |\bar{N}| \operatorname{tg} \alpha \\ |\bar{N}| &= |\bar{R}| \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.51)$$

Siłę  $\bar{T}$  nazywamy siłą tarcia, a siłę  $\bar{N}$  siłą normalną.

Doświadczenie uczy, że kąt  $\alpha$  nie może przekroczyć pewnej granicy zależnej od powierzchni stykających się ciał:

$$0 \leq \alpha \leq \varphi$$

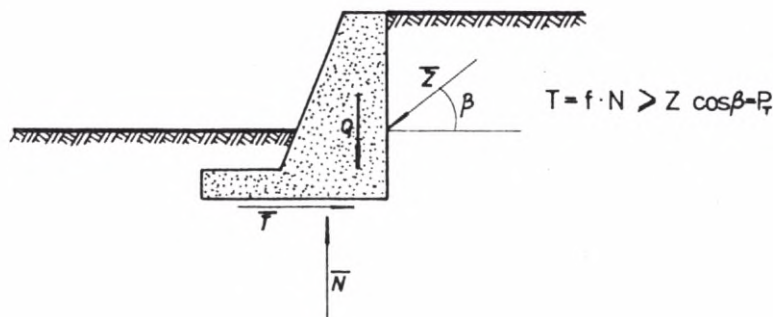


Rys. 3.37

Kąt  $\alpha_0 = \varphi$  odpowiada granicznemu położeniu równowagi ciał, a tangens tego kąta jest statycznym współczynnikiem tarcia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \eta \quad (3.52)$$

Stożek o wierzchołku w punkcie  $A$  i osi równoległej do  $\bar{n}$ , a nachylonej do tworzących stożka pod kątem  $\alpha_0 = \varphi$ , nazywamy stożkiem tarcia statycznego. Ponieważ  $\alpha \leq \varphi$ , to reakcja  $\bar{R}$  leży wewnątrz lub na powierzchni stożka tarcia statycznego. Rama pokazana na rys. 3.37 wywołuje rozpór poziomy  $H$  przekazywany na fundament. Rozpór ten musi być zrównoważony siłą tarcia  $T$ , występującą w płaszczyźnie zetknięcia się stopy fundamentowej z gruntem, aby nie nastąpił ruch fundamentu. Podobnie siła tarcia utrzymuje mur oporowy (rys. 3.38), na który działa parcie ziemi  $\bar{Z}$  i siła ciężkości  $\bar{Q}$ .

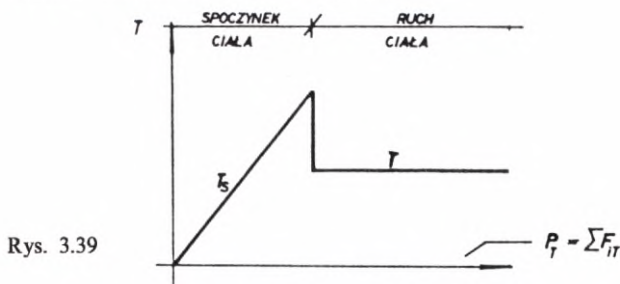


Rys. 3.38

Z tarcielem statycznym mamy do czynienia tak długo, dopóki spełniony jest warunek:

$$T \geq P_T = \Sigma F_{iT}$$

(suma miar rzutów sił na kierunek siły tarcia).



Rys. 3.39

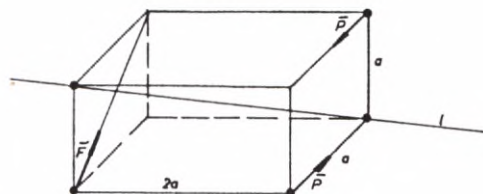
W przypadku  $T < \Sigma F_{iT}$  pojawia się tarcie kinetyczne, dla którego siła tarcia  $T_K < T_S$  (tarcie statyczne) – por. rys. 3.39.

## PYTANIA KONTROLNE

1. Co to są układy inercjalne?
2. Podać aksjomaty mechaniki.
3. Podać definicję równowagi ciała i równowagi układu sił.
4. Omówić aksjomaty równowagi sił.
5. Na czym polegają przekształcenia elementarne I i II rodzaju?
6. Podać definicję momentu siły względem punktu i prostej.
7. Podać i udowodnić twierdzenie o momencie siły względem prostej.
8. Kiedy moment siły względem prostej jest równy zeru?
9. Co nazywamy układem sił? Podać przykłady.
10. Podać twierdzenie o zmianie bieguna i wnioski, jakie z niego wynikają.
11. Podać definicję oraz twierdzenia o równoważności układów sił.
12. Omówić układ zerowy.
13. Co to jest para sił i jakie ma własności?
14. Na czym polega redukcja układu sił w punkcie?
15. Wymienić najprostsze zredukowane układy sił.
16. Podać definicję wypadkowej układu sił i wyjaśnić, co to znaczy, że jest ona układem równoważnym danemu?
17. Podać definicję skrętnika i wyjaśnić, czy jest to najprostszy układ sił?
18. Co to jest oś środkowa układu sił i do czego ona służy?
19. Do czego redukuje się układ sił posiadający oś środkową?
20. Do czego redukuje się płaski układ sił, równoległy układ sił i zbieżny układ sił?
21. Co to jest środek układu sił i jakie ma własności?
22. Podać definicję więzów układu i postulat, jaki one spełniają.
23. Co nazywamy przesunięciem wirtualnym punktu oraz jaki warunek musi spełniać wektor, aby mógł być przesunięciem wirtualnym punktu?
24. Podać zasadę prac wirtualnych oraz wyjaśnić, do czego ona służy.
25. Podać warunki równowagi sił działających na ciało sztywne:
  - a) swobodne,
  - b) nieswobodne,
  - c) unieruchomione w jednym punkcie,
  - d) unieruchomione w dwóch różnych punktach.
26. Co to są układy sił równoważące się i kiedy z nich korzystamy?
27. Co to są podpory układu? Wymienić ich rodzaje i własności.
28. Podać definicję układu statycznie wyznaczalnego, statycznie niewyznaczalnego i chwiejnego.
29. Omówić zasady budowy układów geometrycznie niezmiennych.
30. Dlaczego siła tarcia kinetycznego jest mniejsza od siły tarcia statycznego?

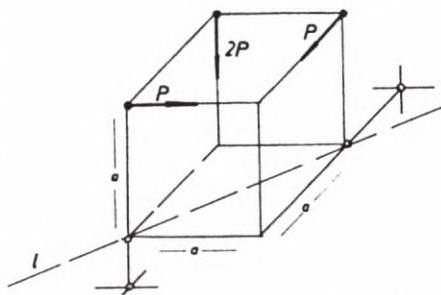
## ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wyznaczyć wielkość i zwrot siły  $\vec{F}$ , aby moment podanego układu sił względem prostej  $l$  był równy zero (rys. 3.40).

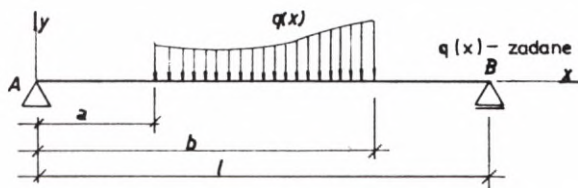


Rys. 3.40

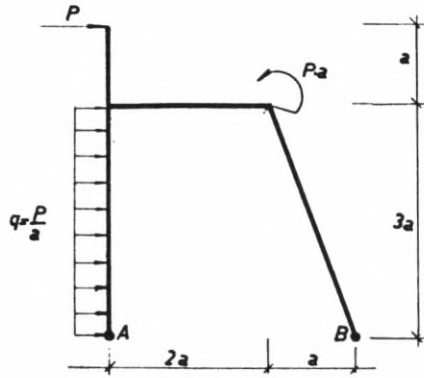
2. Układ sił czynnych działających na konstrukcję (rys. 3.41) zredukować, a następnie dołączyć taki najprostszy układ, aby łączny zredukował się do wypadkowej o prostej działania  $l$ .
3. Zredukować układ sił czynnych działających na belkę (rys. 3.42), a następnie wyznaczyć siły reakcji podpór.
4. W punktach  $A$  i  $B$  (rys. 3.43) wyznaczyć układ równoważący zadany układ sił.
5. Wyznaczyć siły reakcji podpór oraz siły w zaznaczonych prętach (rys. 3.44).
6. Korzystając z zasady prac wirtualnych wyprowadzić warunki konieczne i wystarczające równowagi układu sił działających na sztywny układ ciał (rys. 3.45).



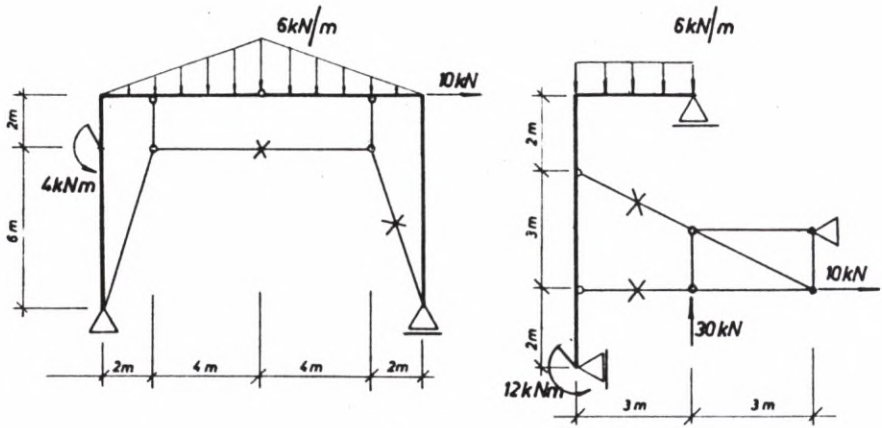
Rys. 3.41



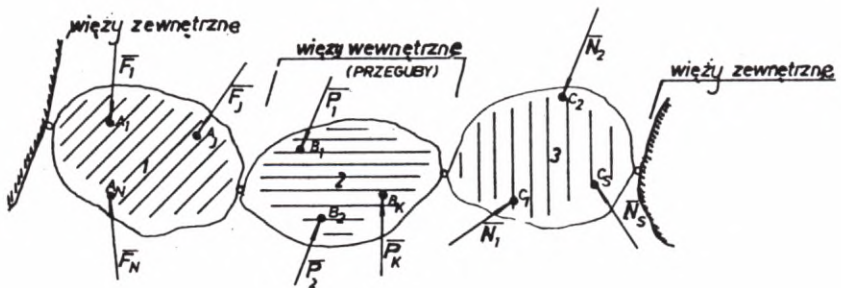
Rys. 3.42



Rys. 3.43

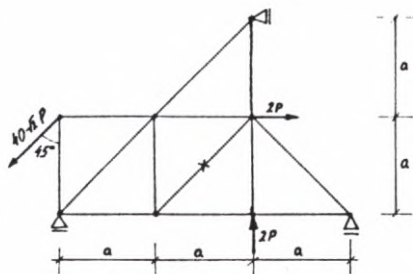


Rys. 3.44

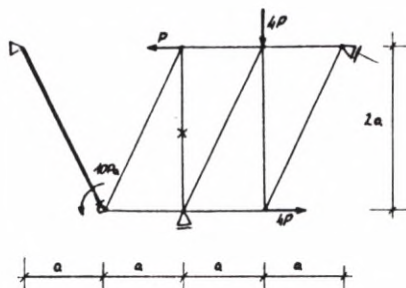


Rys. 3.45

7. Na rys. 3.46 przedstawiona jest kratownica, dla której należy wyznaczyć siły reakcji z równań równowagi, zaś siłę w zaznaczonym przecięciu z zasady prac wirtualnych.

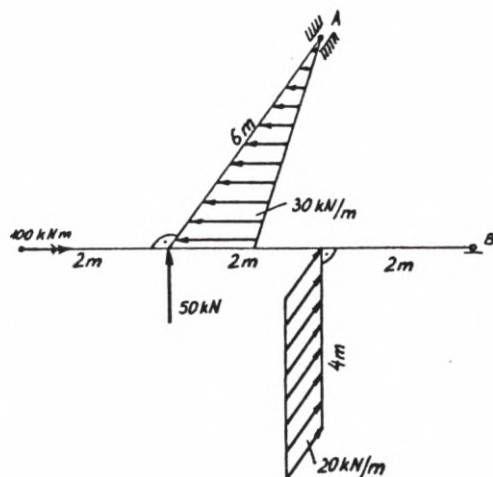


Rys. 3.46



Rys. 3.47

8. Dla układu ramowo-kratowego (rys. 3.47) wyznaczyć siły reakcji z równań równowagi, zaś siłę w zaznaczonym przecięciu z zasady prac wirtualnych.



Rys. 3.48

9. Dla przestrzennej ramy (rys. 3.48) wyznaczyć siły reakcji więzów.

## Rozdział 4

## DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

## 4.1. WPROWADZENIE

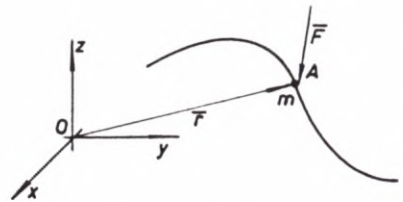
Dynamika jest nauką, która zajmuje się opisem metod wyznaczania ruchu układu materialnego pod wpływem przyłożonego obciążenia. Wykorzystuje ona aksjomaty, to jest prawa będące wynikiem obserwacji praw przyrody. Prawa te zostały sformułowane przez Newtona. Są to aksjomaty: bezwładności, ruchu, akcji-reakcji, omówione we wstępie do statyki. Pojęciami pierwotnymi są: siła, masa i czas. Dla zagadnień, które w dalszym ciągu będziemy analizować, Ziemia jest dostatecznie dobrym przybliżeniem układu inercjalnego. Podstawowym zadaniem, które rozwiążemy, jest wyznaczenie ruchu punktu materialnego, na który działa siła (lub układ sił). W najogólniejszym przypadku siła może być funkcją czasu, położenia i prędkości. O masie punktu materialnego będziemy zakładać, że jest niezmienna w czasie ruchu, a zatem prawo ruchu punktu zapiszemy w postaci:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (4.1)$$

wynikającej z II prawa Newtona.

W przypadku, gdy znamy masę punktu i siłę działającą, to z (4.1) wyznaczamy ruch punktu, a przy zadanej masie punktu i jego ruchu siłę, która ten ruch spowodowała.

Prawo ruchu (4.1) jest oczywiście równoważne trzem skalarnym równaniom różniczkowym:



Rys. 4.1

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m \ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m \ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases} \quad (4.2)$$



Równania te przekształcamy, doprowadzając je do równoważnego układu zwanego całkami pierwszymi równań różniczkowych ruchu:

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_1 \\ \varphi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_2 \\ \varphi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_3 \end{cases} \quad (4.3)$$

gdzie  $C_1, C_2, C_3$  są stałymi.

W podobny sposób równania (4.3) można doprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} \psi_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_4 \\ \psi_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_5 \\ \psi_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_6 \end{cases} \quad (4.4)$$

zwanej całkami drugimi równań ruchu. Określają one trzy funkcje  $x(t), y(t), z(t)$ , zależne od czasu i sześciu niezależnych stałych dowolnych:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \quad (4.5)$$

stanowiąc rozwiązanie ogólne równań różniczkowych (4.2).

Można tutaj mówić o całej rodzinie równań ruchów punktu. Jeżeli zażądamy, aby poruszający się punkt zajmował w ustalonej chwili czasu  $t_0$  położenie określone wektorem  $\bar{r}_0$  i w tym położeniu miał prędkość  $\bar{v}_0$ , będzie to równoznaczne z wyborem jednego szczególnego równania ruchu z ogólnej rodziny rozwiązań. Warunki nałożone na położenie punktu i jego prędkość w tej samej chwili nazywamy warunkami początkowymi, zaś w różnych chwilach — warunkami brzegowymi.

Na podstawie twierdzenia Zaremby wybór ruchu szczególnego jest jednoznaczny, gdy przy zadanych warunkach początkowych funkcje  $\bar{F}(\bar{r}, \bar{r}, t)$  są klasy  $C^1$ .

Z warunków początkowych (lub brzegowych) wyznacza się stałe występujące w rozwiązaniu ogólnym:

$$\begin{cases} x(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = x_0 \\ y(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = y_0 \\ z(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = z_0 \\ \dot{x}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = v_{0x} \\ \dot{y}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = v_{0y} \\ \dot{z}(t_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = v_{0z} \end{cases} \quad (4.6)$$

otrzymując rozwiązanie szczególne naszego zagadnienia początkowego:

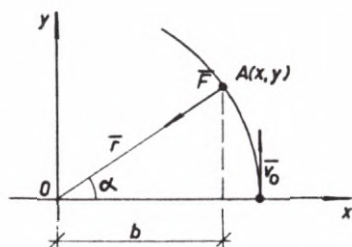
$$\begin{cases} x = x(t, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4, \hat{C}_5, \hat{C}_6) \\ y = y(t, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4, \hat{C}_5, \hat{C}_6) \\ z = z(t, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4, \hat{C}_5, \hat{C}_6) \end{cases} \quad (4.7)$$

### Przykład 4.1

Punkt  $A$  o masie  $m$  jest przyciągany do nieruchomego punktu  $O$  siłą o wielkości  $|\bar{F}| = k^2 m r$ , gdzie  $k = \text{const}$ ,  $r = |OA|$  (rys. 4.2). W chwili  $t = 0$ :

$$\bar{r}(t = 0) = \bar{r}_0 = (b, 0)$$

$$\bar{v}(t = 0) = \bar{v}_0 = (0, v_0)$$



Rys. 4.2

Wyznaczyć ruch punktu  $A$ .

W obliczeniach wykorzystamy prawo ruchu (4.2):

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -k^2 m r \cos \alpha = -k^2 m x \\ m \ddot{y} = -k^2 m r \sin \alpha = -k^2 m y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \ddot{y} + k^2 y = 0 \end{cases}$$

Są to równania różniczkowe II rzędu, liniowe, jednorodne, o stałych współczynnikach, dla których równanie charakterystyczne ma postać:

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm ik$$

A zatem rozwiązanie ogólne:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \\ y(t) = C_3 \sin(kt) + C_4 \cos(kt) \end{cases}$$

zawiera cztery stałe  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , które wyznaczamy z warunków początkowych, otrzymując:

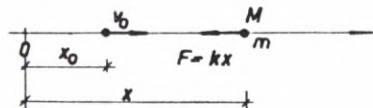
$$\hat{C}_1 = b, \quad \hat{C}_2 = 0, \quad \hat{C}_3 = \frac{v_0}{k}, \quad \hat{C}_4 = 0$$

Podstawiając je do rozwiązania ogólnego otrzymujemy równania parametryczne ruchu punktu:

$$\begin{cases} x(t) = b \cos(kt) \\ y(t) = \frac{v_0}{k} \sin(kt) \end{cases}$$

## 4.2. RUCH HARMONICZNY PROSTY, TŁUMIONY I WYMUSZONY

Rozważmy problem drgań masy podwieszanej na sprężynie (bez siły tarcia), a więc ruchu punktu  $M$  o masie  $m$  przyciąganego do stałego punktu  $O$  siłą proporcjonalną do wychylenia  $F = kx$  (rys. 4.3). Ponieważ postawione zagadnienie jest jednowymiarowe, stąd prawo ruchu (4.1) redukuje się do jednego skalarnego równania różniczkowego II rzędu, liniowego, jednorodnego o stałych współczynnikach:



Rys. 4.3

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{lub} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.8)$$

Wprowadzając stałą  $\frac{k}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^2$ , całka ogólna równania (4.8) przyjmie postać:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (4.9)$$

Z warunków początkowych:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

wyznaczamy stałe  $C_1, C_2$ :

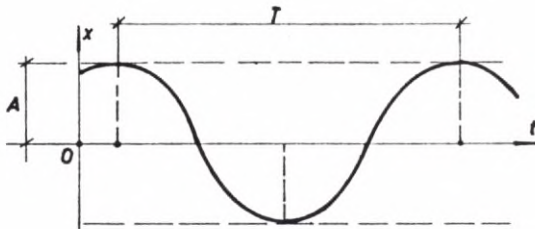
$$\begin{cases} \hat{C}_1 = x_0 \\ \hat{C}_2 = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

które po podstawieniu do (4.9) dają rozwiązanie szczególne:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

Wprowadzając do (4.10) oznaczenia:

$$\begin{cases} x_0 = A \sin \varphi_0 \\ \frac{v_0}{\omega} = A \cos \varphi_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi_0 = \arctg \frac{x_0 \omega}{v_0} \end{cases}$$



Rys. 4.4

otrzymamy równoważną postać funkcji ruchu punktu:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (4.12)$$

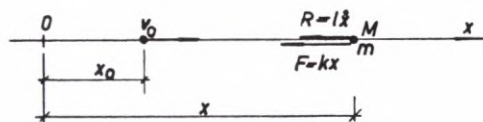
przedstawionej na rys. 4.4.

Ruch punktu opisany równaniem (4.12) nazywamy ruchem harmonicznym (drgającym) prostym. Stała  $\omega$  jest prędkością kątową, argument  $\omega t + \varphi_0$  funkcji sinus – fazą ruchu,  $\varphi_0$  – fazą początkową, stała  $A$  – amplitudą ruchu, a czas, jaki upływa pomiędzy dwoma kolejnymi, następującymi po sobie wychyleniami, jest okresem ruchu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.13)$$

Wielkość odwrotną do okresu drgań nazywamy częstotliwością drgań:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.14)$$



Rys. 4.5

W dalszym ciągu przeanalizujemy problem ruchu harmonicznego tłumionego, z którym mamy do czynienia, gdy na punkt materialny oprócz siły sprężystej  $F = kx$  działa

siła  $R$  tłumiąca ruch o wielkości proporcjonalnej do prędkości punktu (rys. 4.5):

$$R = l\dot{x}$$

gdzie  $l$  – stała tłumienia. Odpowiada to drganiom w cieczy lepkiej masy podwieszanej na sprężynie bez tarcia. Prawo ruchu (4.1) w tym przypadku ma postać:

$$m\ddot{x} = -l\dot{x} - kx \quad (4.15)$$

lub

$$\ddot{x} + \frac{l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Wprowadzając do (4.15) oznaczenia:

$$\frac{l}{m} = 2b$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

otrzymamy:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.16)$$

Jest to równanie różniczkowe II rzędu, liniowe, jednorodne, o stałych współczynnikach. Odpowiada mu równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 2br + \omega^2 = 0 \quad (4.17)$$

które w zależności od znaku wyróżnika  $\Delta = 4(b^2 - \omega^2)$  ma pierwiastki urojone ( $\Delta < 0$ ) lub rzeczywiste ( $\Delta \geq 0$ ). Gdy siła tłumiąca ruch jest mała, to również mały jest współczynnik  $b$ , co odpowiada ujemnemu wyróżnikowi  $\Delta$ . Mamy więc zespolone pierwiastki równania charakterystycznego:

$$r_{1,2} = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$$

Całka ogólna ma postać:

$$x(t) = e^{-bt} [C_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - b^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t)] \quad (4.18)$$

Po wyznaczeniu z warunków początkowych:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

stałych  $C_1$ ,  $C_2$  i wprowadzeniu nowych według zależności:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = A \sin \varphi_0 = x_0 \\ \hat{C}_2 = A \cos \varphi_0 = \frac{b x_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \end{cases}$$

całkę szczególną ruchu zapiszemy następująco:

$$x(t) = A e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi_0) = e^{-bt} \left[ x_0 \cos(\sqrt{\omega^2 - b^2} t) + \right. \\ \left. + \frac{b x_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t) \right] \quad (4.19)$$

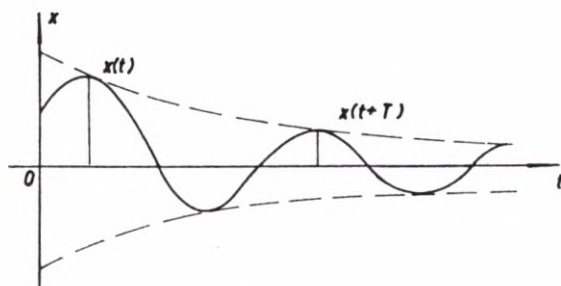
W ruchu tym (rys. 4.6) iloraz każdych dwóch kolejno następujących po sobie wychyleń (przesuniętych o okres  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}$ ):

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-bT} \quad (4.20)$$

jest wielkością stałą, zależną od współczynnika tłumienia. Jeżeli w (4.19) podstawić  $b = 0$  (nie występuje siła tłumienia), to otrzymujemy (4.12), co świadczy

o poprawności rozwiązania. Przy dużej sile tłumiącej ( $l > 2\sqrt{\omega m}$ ) zachodzi warunek  $b^2 > \omega^2$  i dlatego całka ogólna przyjmuje postać:

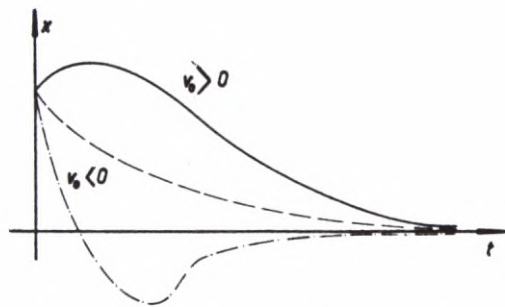
$$x(t) = C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2})t} \quad (4.21)$$



Rys. 4.6

W przypadku gdy  $b^2 = \omega^2$ , wyróżnik  $\Delta = 0$ , a stąd:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-bt} \quad (4.22)$$



Rys. 4.7

co odpowiada (podobnie jak dla  $b^2 > \omega^2$ ) ruchowi aperiodycznemu, przedstawionemu na rys. 4.7.

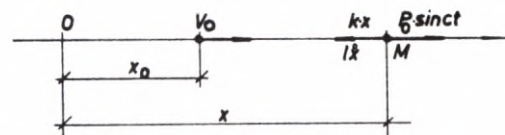
Rozważmy jeszcze ruch punktu  $M$  o masie  $m$ , gdy działają na niego siły: sprężysta  $F = kx$ , tłumiąca  $R = l\dot{x}$  i wymuszająca  $P = P_0 \sin ct$  (rys. 4.8), harmonicznie zmienna w czasie. Dla tak sformułowanego zadania prawo ruchu punktu (4.1) ma postać:

$$m\ddot{x} = -l\dot{x} - kx + P_0 \sin(ct)$$

lub

$$\ddot{x} + \frac{l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_0}{m}\sin(ct) \quad (4.23)$$

Jeżeli w (4.23) wprowadzimy oznaczenie:



Rys. 4.8

$$\frac{l}{m} = 2b, \quad \frac{k}{m} = \omega^2 \quad \text{i} \quad \frac{P_0}{m} = q_0$$

to otrzymamy:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = q_0 \sin(ct) \quad (4.24)$$

Jest to równanie różniczkowe II rzędu, liniowe, niejednorodne o stałych współczynnikach. Całka ogólna takiego równania jest sumą całki ogólnej odpowiadającego mu równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego.

Przeanalizujemy ruch punktu przy małej sile tłumienia ( $b^2 < \omega^2$ ). W tym przypadku całka równania jednorodnego opisana jest zależnością (4.19), a całkę szczególną przyjmujemy w postaci:

$$x_s(t) = B \sin(ct - \psi) \quad (4.25)$$

gdzie:  $B, \psi$  są stałymi. Podstawiając (4.25) do (4.24) otrzymamy równanie:

$$B(\omega^2 - c^2) \sin(ct - \psi) + 2Bbc \cos(ct - \psi) = q_0 \sin(ct) \quad (4.26)$$

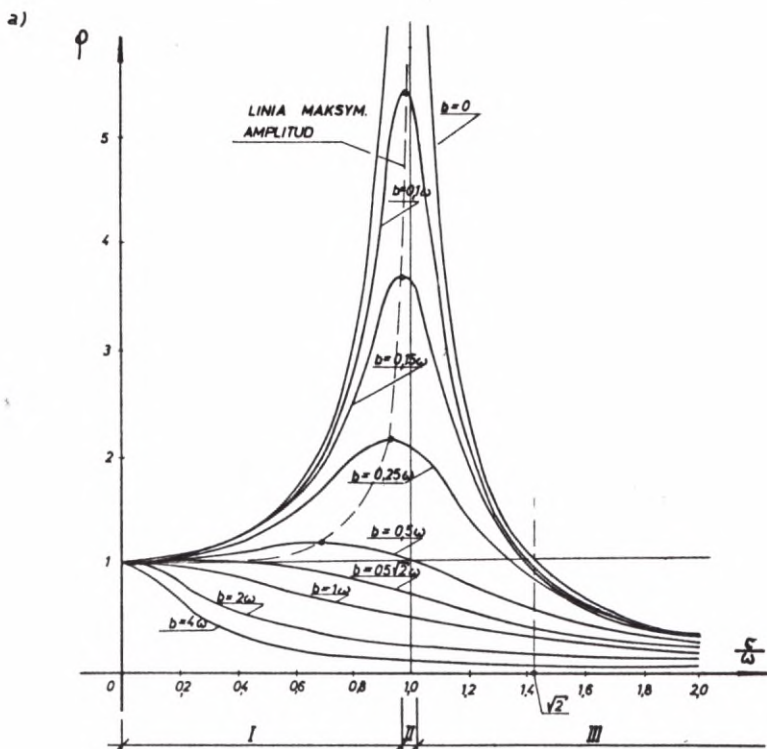
które musi być spełnione dla każdego  $t$ , a więc i dla chwil:  $t_1 = \frac{\psi}{c}$ ,  $t_2 = \frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{c}$ .

Stąd wyznaczamy maksymalną amplitudę  $B$  drgań wymuszonych i przesunięcie fazowe  $\psi$  przemieszczeń masy względem wymuszenia:

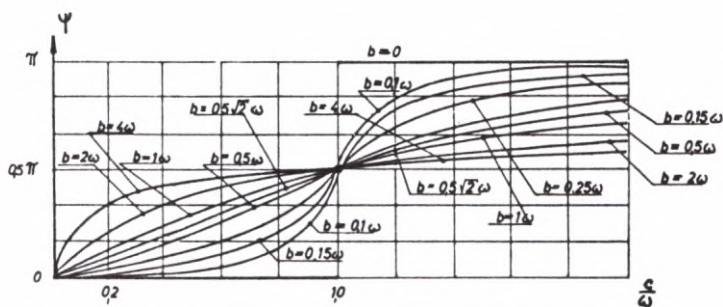
$$\begin{aligned} B &= \frac{q_0}{\sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 + 4b^2 c^2}} = \frac{q_0}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{b}{\omega}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)\right]^2}} = \\ &= \frac{q_0}{\omega^2} \varphi\left(\frac{c}{\omega}, \frac{b}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\psi = \arctg \frac{2bc}{\omega^2 - c^2} = \arctg \frac{2\left(\frac{b}{\omega}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2}$$





b)



Rys. 4.9

Zdefiniowana w (4.27) funkcja  $\varphi\left(\frac{c}{\omega}, \frac{b}{\omega}\right)$  wyraża stosunek amplitudy  $B$  do przemieszczenia statycznego  $x_{st} = \frac{q_0}{\omega^2} = \frac{P_0}{k}$ . Jej graficzny obraz został podany na

rysunku 4.9a. A zatem rozwiązanie ogólne postawionego problemu ruchu harmonicznego tłumionego z wymuszeniem jest następujące:

$$x(t) = A e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} t + \varphi_0) + \frac{q_0}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left[2\left(\frac{b}{\omega}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)\right]^2}} \cdot \sin \left[ ct - \operatorname{arctg} \frac{2\left(\frac{b}{\omega}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2} \right] \quad (4.28)$$

Przyjmuje ono dla ruchu harmonicznego wymuszonego bez tłumienia ( $b = 0$ ) postać:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{q_0}{\omega^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2} \sin(ct) \quad (4.29)$$

Występujące w (4.28) i (4.29) stałe dowolne  $A$  i  $\varphi_0$  wyznaczamy z warunków początkowych ruchu (4.10).

Analizując otrzymane rozwiązanie stwierdzamy, że ruch punktu jest złożeniem (superpozycją) dwóch drgań, a to:

- 1) drgań własnych o amplitudzie  $A e^{-bt}$  i częstotliwości równej  $\sqrt{\omega^2 - b^2}$ ,
- 2) drgań wymuszonych o amplitudzie  $B$  wyrażonej wzorem (4.27) i częstotliwości  $c$ .

Ze wzrostem czasu  $t \gg 1$  pierwszy składnik w (4.28) można pominąć i ruch punktu odbywa się dalej z częstotnością  $c$ .

Zjawisko osiągnięcia maksimum przez amplitudę  $B$  drgań wymuszonych przy zmianach częstotliwości siły wymuszającej nosi nazwę rezonansu. Przypatrzmy się bliżej krzywym rezonansowym przedstawionym na rys. 4.9a. I tak dla  $\frac{c}{\omega} > \sqrt{2}$  mamy  $\varphi < 1$  (wykorzystuje się to przy zagadnieniu wibroizolacji), zaś dla  $\frac{c}{\omega} \gg 1$  jest  $\varphi \sim 0$ , co było podstawą budowy sejsmografów. Przedział zmienności  $\frac{c}{\omega}$  został podzielony na trzy podprzedziały, a to:

- I – przedrezonansowy  $0 \leq \frac{c}{\omega} < 1$ ,
- II – okołorezonansowy  $\frac{c}{\omega}$  bliskie jedności, (4.30)
- III – pozarezonansowy  $\frac{c}{\omega} > 1$  (można pominąć tłumienie).

Na rys. 4.9b przedstawiono zależność przesunięcia fazowego przemieszczeń masy względem wymuszenia dla różnych wartości współczynnika tłumienia.

Problem rezonansu jest bardzo ważnym zagadnieniem przy projektowaniu konstrukcji podlegających działaniu dynamicznemu. Prawdopodobnie zaprojektowana konstrukcja winna pracować w przedziale przedrezonansowym lub pozarezonansowym celem uniknięcia dużych wychyleń mogących spowodować jej zniszczenie. Dlatego też należy tak dobierać okresy drgań sił periodycznych zewnętrznych, działających na elementy konstrukcyjne, aby różniły się możliwie dużo od okresów drgań własnych tych elementów.

#### 4.3. WYZNACZENIE RUCHU PUNKTU WE WSPÓŁRZĘDNYCH KRZYWOLINIOWYCH

Prawo ruchu (4.1) punktu materialnego o masie  $m$ , na który działa siła  $\bar{F}$ , można zapisać w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych. I tak w ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych, uwzględniając (1.39), ma ono postać:

$$\begin{cases} \frac{1}{H_1} m \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\} = F_{q_1} \\ \frac{1}{H_2} m \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\} = F_{q_2} \\ \frac{1}{H_3} m \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right\} = F_{q_3} \end{cases} \quad (4.31)$$

gdzie:

$H_i$  – współczynniki Lamego (por. (1.34)),

$F_{q_i}$  – współrzędne krzywoliniowe siły równe iloczynowi skalarnemu siły  $\bar{F}$  i wersora  $\bar{e}_i$  bazy układu krzywoliniowego.

W układzie cylindrycznym  $(r, \varphi, z)$  równania (4.31) wyrażają się następująco:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \quad (4.32)$$

Analogicznie dla współrzędnych sferycznych  $(R, \varphi, \vartheta)$  z (4.31) znajdziemy:

$$\begin{cases} m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta - R\dot{\vartheta}^2) = F_R \\ m(R\ddot{\varphi} \cos \vartheta + 2\dot{R}\dot{\varphi} \cos \vartheta - 2R\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta) = F_\varphi \\ m(R\ddot{\vartheta} + 2\dot{R}\dot{\vartheta} + R\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) = F_\vartheta \end{cases} \quad (4.33)$$

### Przykład 4.2

Korzystając z równań (4.32) wyznaczyć ruch punktu materialnego o masie  $m$  pod wpływem siły  $\vec{F} = -m d \omega^2 \vec{e}_r$ , jeśli dla  $t = 0$  zajmuje położenie określone przez wektor  $\vec{r}(t, 0) = d \vec{e}_r$  i ma prędkość  $\vec{v}(t = 0) = d \omega \vec{e}_r + b \vec{e}_z$ .

Równania różniczkowe ruchu mają postać:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -d\omega^2 \\ r\ddot{\varphi} + 2(\dot{r}\dot{\varphi}) = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} \frac{\ddot{r} + d\omega^2}{r} = \dot{\varphi}^2 = \text{const} = \alpha^2 \\ -2\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy:

$$\varphi(t) = A + \alpha t$$

i po podstawieniu do równania drugiego otrzymamy  $r(t) = \text{const} = D$ . Z równania  $\ddot{z} = 0$  wynika, że  $z(t) = Bt + C$ .

Stałe  $A, B, C, D$  obliczamy z warunków początkowych. Ostatecznie otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$\bar{r}(t) = d\bar{e}_r + \omega t\bar{e}_\varphi + bt\bar{e}_z$$

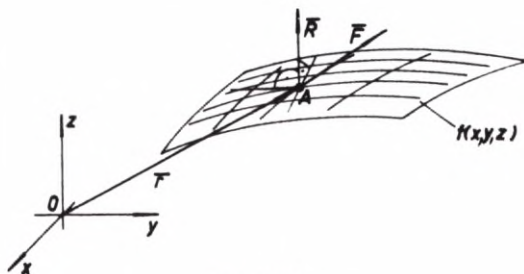
#### 4.4. RUCH PUNKTU PO POWIERZCHNI GŁADKIEJ

Niech powierzchnia  $f(x, y, z) = 0$  stanowi więzy gładkie dla punktu  $A$  o masie  $m$  (rys. 4.10).

Aby wyznaczyć ruch takiego punktu należy skorzystać z postulatu o więzach, czyli w równaniu różniczkowym ruchu punktu do siły czynnej  $\bar{F}$  dodać siłę reakcji więzów:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{R} \quad (4.34)$$

Ponieważ więzy są gładkie, stąd siła reakcji jest współliniowa z wektorem gradientu powierzchni:



Rys. 4.10

$$\bar{R} = \lambda \overline{\text{grad } f} \quad (4.35)$$

Dysponujemy układem równań:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

z którego możemy wyznaczyć przy zadanych warunkach początkowych (lub brzegowych) ruch punktu i siłę reakcji określoną przez (4.35). W celu znalezienia funkcji  $\lambda(t)$  równanie więzów dwukrotnie różniczkujemy po czasie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + \\ &+ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \dot{x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \dot{y} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \dot{z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Wprowadzając z definicji funkcję:

$$\psi(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} \right) \quad (4.39)$$

drugą pochodną po czasie funkcji więzów, pomnożoną przez masę możemy zapisać następująco:

$$m \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} (m \ddot{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} (m \ddot{y}) + \frac{\partial f}{\partial z} (m \ddot{z}) + m \psi(x, y, z) = 0 \quad (4.40)$$

Podstawiając (4.36) do (4.40) otrzymamy:

$$\lambda(t) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} F_x + \frac{\partial f}{\partial y} F_y + \frac{\partial f}{\partial z} F_z + m \psi}{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \quad (4.41)$$

Mając wyznaczoną funkcję  $\lambda(t)$  z (4.35) obliczamy siłę reakcji, a z (4.36) – ruch punktu.

W przypadku więzów szorstkich w równaniu (4.34) należy uwzględnić siłę tarcia:

$$\bar{R}_T = \bar{T} = -\eta R_N \frac{\bar{v}_T}{|\bar{v}_T|}$$

gdzie:

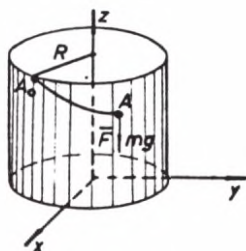
$\bar{v}_T$  – prędkość poślizgu

czyli

$$m \ddot{\bar{r}}(t) = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) + \bar{R}_N - \eta R_N \frac{\bar{v}_T}{|\bar{v}_T|}$$

### Przykład 4.3

Powierzchnia walca kołowego (rys. 4.11) stanowi gładkie więzy dla punktu  $A$  o masie  $m$ . Wyznaczyć ruch punktu, jeżeli siła  $\bar{F} = -mg \bar{e}_z$  oraz  $\bar{r}(t=0) = (R, 0, h)$  i  $\bar{v}(t=0) = (0, u, w)$ .



Rys. 4.11

Równanie więzów ma postać:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Z prawa ruchu dla punktu  $A$  otrzymujemy równania różniczkowe:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x \\ m \ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y \\ m \ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Z zależności (4.40) i (4.41) wyznaczamy funkcję  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2} \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \frac{m u^2}{R^2}$$

Reakcja więzów jest określona wzorem:

$$\bar{R} = \lambda \overline{\text{grad}} f = \left( -\frac{m u^2}{R^2} x, -\frac{m u^2}{R^2} y, 0 \right)$$

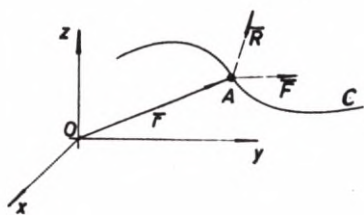
Podstawiając  $\lambda(t)$  do prawa ruchu otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \left(\frac{u}{R}\right)^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \left(\frac{u}{R}\right)^2 y = 0 \\ \ddot{z} + g = 0 \end{cases}$$

z którego przy zadanych warunkach początkowych wyznaczono ruch punktu:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos\left(\frac{u}{R} t\right) \\ y(t) = R \sin\left(\frac{u}{R} t\right) \\ z(t) = -\frac{g t^2}{2} + w t + h \end{cases}$$

#### 4.5. RUCH PUNKTU PO KRZYWEJ GŁADKIEJ



Rys. 4.12

Dla punktu  $A$  o masie  $m$  krzywa  $C$  o równaniu (rys. 4.12):

$$C: \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

stanowi więzy gładkie. Wykorzystując postulat o więzach i pamiętając, że reakcja leży



w płaszczyźnie normalnej do krzywej (bo więzy są gładkie), zapiszemy prawo ruchu punktu:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R} = \vec{F} + \lambda_1 \overline{\text{grad}} f_1 + \lambda_2 \overline{\text{grad}} f_2 \quad (4.42)$$

Mamy zatem do dyspozycji następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (4.43)$$

z którego przy zadanych warunkach początkowych:

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0, \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$$

wyznaczamy  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Po dwukrotnym zróżniczkowaniu po czasie równań więzów i wykorzystaniu prawa ruchu na nieznanne funkcje  $\lambda_i(t)$ , ( $i = 1, 2$ ) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x} F_x + \frac{\partial f_1}{\partial y} F_y + \frac{\partial f_1}{\partial z} F_z + \lambda_1 \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ \quad + \lambda_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) + m\psi_1 = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} F_x + \frac{\partial f_2}{\partial y} F_y + \frac{\partial f_2}{\partial z} F_z + \lambda_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) + \\ \quad + \lambda_1 \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)^2 \right] + m\psi_2 = 0 \end{array} \right. \quad (4.44)$$

gdzie:

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} \right)$$

$$\psi_2(x, y, z) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} \right)$$

Mając wyznaczone funkcje  $\lambda_1(t)$  i  $\lambda_2(t)$  obliczamy reakcję więzów  $\bar{R} = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2$  i ruch punktu.

### Przykład 4.4

Wyznaczyć ruch punktu  $A$  o masie  $m$  poruszającego się po prostej gładkiej (rys. 4.13), jeżeli  $\bar{F} = mg \bar{e}_y$ ,  $\bar{r}(t=0) = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ ,  $\bar{v}(t=0) = (-v_0, v_0)$ .

Równanie więzów jest następujące:

$$c: \begin{cases} f_1(x, y, z) = x + y - l = 0 \\ f_2(x, y, z) = z = 0 \end{cases}$$

Pomocnicze funkcje  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ .

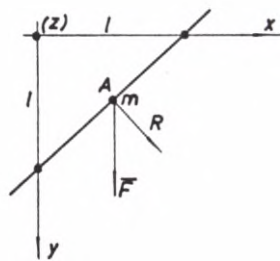
Z układu równań (4.44) otrzymujemy:

$$\lambda_1 = -\frac{mg}{2}, \quad \lambda_2 = 0$$

Mamy zatem do rozwiązania następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{g}{2} = 0 \\ \ddot{y} - \frac{g}{2} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Całkując je dwukrotnie po czasie i wykorzystując warunki początkowe, wyznaczamy równania parametryczne ruchu punktu:



Rys. 4.13

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{gt^2}{4} - v_0 t + \frac{l}{2} \\ y(t) = \frac{gt^2}{4} + v_0 t + \frac{l}{2} \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Ruch punktu po krzywej gładkiej można również przedstawić w układzie lokalnym, wyznaczonym przez trójścian Freneta (por. rys. 1.12). Prawo ruchu punktu w takim układzie ma postać:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_s \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho_x} = F_n + R_n \\ 0 = F_b + R_b \end{cases} \quad (4.45)$$

Do układu (4.45) dołączamy warunki początkowe:

$$\begin{cases} s(t=0) = s_0 \\ \dot{s}(t=0) = v_0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Z pierwszego równania (4.45) przy warunkach (4.46) wyznaczamy  $s(t)$ , a następnie obliczamy składowe reakcji:

$$\begin{cases} R_n = \frac{m\dot{s}^2}{\rho_x} - F_n \\ R_b = -F_b \end{cases} \quad (4.47)$$

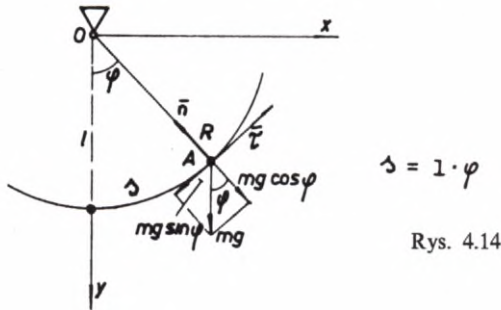
### Przykład 4.5

Wyznaczyć ruch wahadła matematycznego. Wahadło matematyczne jest to punkt materialny o masie  $m$ , podwieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici przymocowanej do nieruchomego punktu  $O$  (rys. 4.14).

Zakładając, że początkowe wychylenie wahadła jest małe, czyli  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi = 1$  oraz podstawiając w (4.45)  $s = l\varphi$  otrzymamy równanie różniczkowe ruchu  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$ , którego całka ogólna wyraża się w następujący sposób:

$$\varphi(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$



$$\Delta = 1 \cdot \varphi$$

Rys. 4.14

Dla  $\varphi(t=0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(t=0) = 0$  otrzymujemy stałe  $\hat{C}_1 = \varphi_0$ ,  $\hat{C}_2 = 0$ . Równanie ruchu wahadła matematycznego ma zatem postać:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

#### 4.6. POLE SIŁ, PRACA POLA SIŁ, ENERGIA KINETYCZNA, POTENCJALNE POLE SIŁ

Polem sił w obszarze  $\Lambda$  nazywamy funkcję wektorową  $\bar{F}(M)$ , która każdemu punktowi  $M$  obszaru przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie siłę  $\bar{F}$ , co w układzie kartezjańskim możemy zapisać następująco:

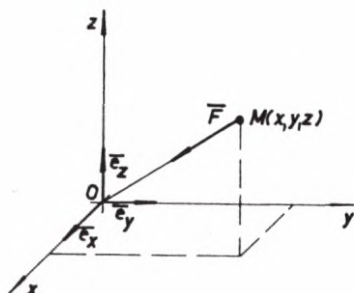
$$\bar{F}(M) = F_x(x, y, z)\bar{e}_x + F_y(x, y, z)\bar{e}_y + F_z(x, y, z)\bar{e}_z \quad (4.48)$$

#### Przykład 4.6

Pole sił określone jest przez siły skierowane do początku układu współrzędnych, o wielkościach wprost proporcjonalnych do kwadratu odległości punktów ich zaczepienia od płaszczyzny  $Oxy$  (rys. 4.15). Zapisać to pole sił.

$$\begin{aligned}\vec{F}(M) &= |\vec{F}| \frac{\overline{MO}}{|\overline{MO}|} = k z^2 \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}_x + \\ &+ k z^2 \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}_y - k z^2 \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Punkt 0 do pola sił nie należy.



Rys. 4.15

Pracę sił pola po zadanej krzywej  $C$  od punktu  $A$  do  $B$  definiować będziemy jako całkę krzywoliniową skierowaną z iloczynu skalarnego sił pola i elementu liniowego  $\overline{ds}$  krzywej:

$$L_{AB} \stackrel{\text{df}}{=} \int_C \vec{F} \cdot \overline{ds} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (4.49)$$

Jeżeli krzywą  $C$  zapiszemy w układzie kartezjańskim, w postaci parametrycznej:

$$C: \begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda), \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.50)$$

a współrzędne sił pola wyrazimy poprzez parametr  $\lambda$ , to pracę możemy przedstawić w postaci następującej całki oznaczonej:

$$L_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot \overline{ds} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \left[ F_x(\lambda) x' + F_y(\lambda) y' + F_z(\lambda) z' \right] d\lambda \quad (4.51)$$

Licząc pracę sił pola po torze punktu zapisanym równaniami parametrycznymi, w których parametrem jest czas,  $z$  (4.51) otrzymujemy:

$$L_{AB} = \int_{t_0}^{t_k} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.52)$$

### Przykład 4.7

Dla pola sił  $\vec{F} = (2x + 1)\vec{e}_x + (2y - 1)\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  obliczyć pracę od punktu  $O$  do  $C$  po zadanej krzywej łamanej (rys. 4.16):

$$A(4, 0, 0)$$

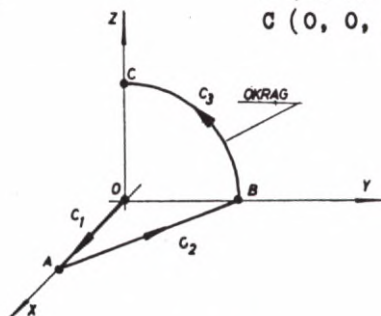
$$B(0, 3, 0)$$

$$C(0, 0, 3)$$

$$L_{OC} = L_{OA} + L_{AB} + L_{BC}$$

Równania krzywych są następujące:

$$C_1: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$



Rys. 4.16

$$C_2: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = -3 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$C_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \cos \varphi \\ z = 3 \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -3 \sin \varphi \\ z' = 3 \cos \varphi \end{cases}$$

a zatem praca jest równa:

$$L_{OC} = \int_{x=0}^{x=4} (2x+1) dx + \int_{\lambda=1}^{\lambda=0} \left[ (2 \cdot 4\lambda + 1)4 + (6 - 6\lambda - 1)(-3) \right] d\lambda + \\ + \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \left[ (6 \cos \varphi - 1)(-3 \sin \varphi) + 3 \sin \varphi \cdot 3 \cos \varphi \right] d\varphi = 20 - 14 - 1,5 = 4,5$$

Pomnóżmy skalarnie równanie różniczkowe ruchu (4.1) przez wektor  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ :

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.53)$$

Lewą stronę równości (4.53) możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} \right) = \frac{m}{2} 2 \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.54)$$

Całkując wyrażenie (4.54) w przedziale czasu  $\langle t_0, t_k \rangle$  otrzymamy:

$$\frac{m v^2}{2} \Big|_{t_0}^{t_k} = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = L_{t_0, t_k} \quad (4.55)$$

Wyrażenie  $\frac{m v^2}{2} = E_k$  nazywamy energią kinetyczną punktu materialnego. Jest to wielkość skalarna, charakteryzująca ruch mechaniczny:

$$E_k(t_k) - E_k(t_0) = L_{t_0, t_k} \quad (4.56)$$

Równość (4.56) stanowi zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej. Głosi ona: Przyrost energii kinetycznej między chwilami  $t_0$  i  $t_k$  jest równy pracy wykonanej przez siły pola w tym samym przedziale czasu.

Dla ruchu punktu zadanego:

a) we współrzędnych kartezjańskich

$$E_k = \frac{m}{2} \dot{\vec{v}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

b) cylindrycznych

$$E_k = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.57)$$

c) sferycznych

$$E_k = \frac{m}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta + R^2 \dot{\vartheta}^2)$$

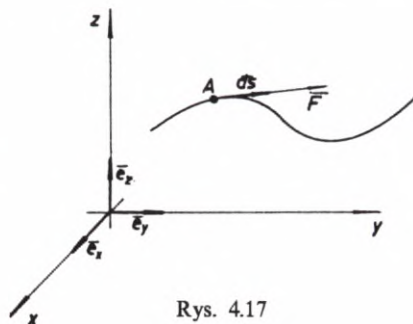
Liniami sił pola nazywamy rodzinę krzywych o tej własności, że w każdym punkcie krzywej wektor siły pola jest styczny do krzywej (rys. 4.17):

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{e}_x + Q(x, y, z)\vec{e}_y + R(x, y, z)\vec{e}_z$$

$$d\vec{s} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

Korzystając z definicji linii sił pola możemy napisać zależność pomiędzy siłą pola a elementem liniowym krzywej:

$$\vec{F} = \lambda d\vec{s} \quad (4.58)$$



Rys. 4.17

Stąd też otrzymujemy równania różniczkowe:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P} \\ \frac{dz}{dy} = \frac{R}{Q} \end{cases} \quad (4.59)$$

których całka ogólna stanowi rodzinę linii sił pola. Pole sił, dla którego istnieje funkcja skalarna  $V(x, y, z)$ , której pierwsze pochodne cząstkowe  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$  są równe odpowiednim współrzędnym pola sił  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , a więc zachodzi:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R \quad (4.60)$$

nazywamy potencjalnym polem sił, zaś funkcję  $V(x, y, z)$  — potencjałem.



Z równości (4.60) wyznaczamy tzw. warunki Schwartza:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

stanowiące warunek konieczny istnienia potencjalnego pola sił. Jeżeli o współrzędnych  $P, Q, R$  pola sił założymy, że są ciągłe i różniczkowalne, to warunek (4.61) staje się warunkiem również wystarczającym.

Obliczmy pracę w potencjalnym polu sił:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_C \vec{F} \cdot \overline{ds} = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_C \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \\ &= \int_C dV = V \Big|_A^B = V_B - V_A \end{aligned} \quad (4.62)$$

Jest ona równa różnicy potencjałów punktu końcowego i początkowego, więc nie zależy od krzywej, po której jest liczona, a po krzywej zamkniętej jest równa zero. Są to własności potencjalnego pola sił.

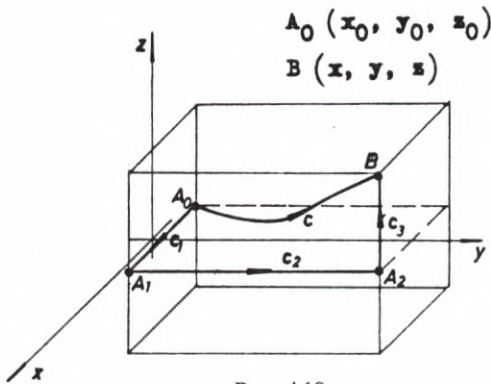
Zapiszmy zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej (4.56) w potencjalnym polu sił:

$$E_k(t_k) - E_k(t_0) = L_{AB} = V_B - V_A$$

czyli

$$E_k(t_k) + (-V_B) = E_k(t_0) + (-V_A) = \text{const} \quad (4.63)$$

gdzie  $-V \stackrel{\text{df}}{=} U$  jest energią potencjalną. Równość (4.63) stanowi treść zasady zachowania całkowitej energii mechanicznej, będącej sumą energii kinetycznej i potencjalnej. Powierzchnie, na których potencjał ma stałą wartość, nazywamy powierzchniami ekwipotencjalnymi. Podobnie można zdefiniować linie ekwipotencjalne. Są one krzywymi przecięcia powierzchni ekwipotencjalnych płaszczyzną. W każdym punkcie potencjalnego pola sił linie pola sił są prostopadłe do linii ekwipotencjalnych, gdyż  $\vec{F} = \text{grad } V$ .



Rys. 4.18

Pozostało nam jeszcze podać sposób na wyznaczenie potencjału dla zadanego potencjalnego pola sił. W tym celu wybierzmy w przestrzeni pola sił dwa punkty, z tym że położenie jednego punktu, np.  $A_0$ , jest ustalone, zaś drugi punkt  $B$  jest punktem dowolnym. Korzystając z własności potencjalnego pola sił pracę pomiędzy punktami  $A_0$  i  $B$  możemy obliczyć jako sumę prac po odcinkach  $A_0A_1$ ,  $A_1A_2$  i  $A_2B$  (rys. 4.18):

$$L_{A_0B} = L_{A_0A_1} + L_{A_1A_2} + L_{A_2B} = V - V_0$$

$$V(x, y, z) = L_{A_0A_1} + L_{A_1A_2} + L_{A_2B} + V_0$$

Zapiszmy równania poszczególnych odcinków:

$$C_1: \begin{cases} x = \xi, & x' = 1 \\ y = y_0, & y' = 0, \\ z = z_0, & z' = 0 \end{cases} \quad x_0 \leq \xi \leq x$$

$$C_2: \begin{cases} x = x, & x' = 0 \\ y = \eta, & y' = 1, \\ z = z_0, & z' = 0 \end{cases} \quad y_0 \leq \eta \leq y$$

$$C_3: \begin{cases} x = x, & x' = 0 \\ y = y, & y' = 0, \\ z = \zeta, & z' = 1 \end{cases} \quad z_0 \leq \zeta \leq z$$

Dla potencjału pola sił otrzymujemy wyrażenie:

$$V(x, y, z) = \int_{\xi=x_0}^{\xi=x} P(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{\eta=y_0}^{\eta=y} Q(x, \eta, z_0) d\eta + \int_{\zeta=z_0}^{\zeta=z} R(x, y, \zeta) d\zeta + V_0 \quad (4.64)$$

### Przykład 4.8

Sprawdzić, czy zadane pole sił jest polem potencjalnym – jeśli tak, to wyznaczyć potencjał i obliczyć pracę pola sił pomiędzy punktami  $A$  i  $B$ . Dane są następujące:

$$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{e}_x + (5 - 2xy)\vec{e}_y + (z + 4)\vec{e}_z$$

$$A(-3, 1, 3), \quad B(3, 2, 1)$$

Sprawdzamy warunki Schwartza (4.61):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(5 - 2xy) = -2y \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(z + 4) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(5 - 2xy) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(z + 4) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Ponieważ warunki (4.61) są spełnione i współrzędne  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  pola sił należą do klasy funkcji ciągłych i różniczkowalnych, zatem pole sił jest polem potencjalnym. Potencjał pola wyznaczamy z wzoru (4.64):

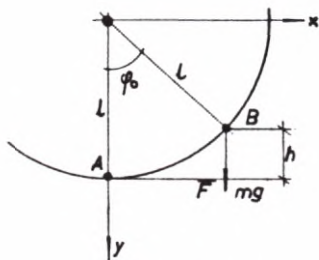
$$\begin{aligned}
 V(x, y, z) &= \int_{x_0}^x (\xi^2 - y_0^2) d\xi + \int_{y_0}^y (5 - 2x\eta) d\eta + \int_{z_0}^z (\zeta + 4) d\zeta + V_0 = \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + 5y + \frac{z^2}{2} + 4z + E
 \end{aligned}$$

Aby sprawdzić poprawność rozwiązania, wystarczy obliczyć pierwsze pochodne cząstkowe wyznaczonego potencjału i porównać je ze współzrędnymi  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  zadanego pola sił.

Obliczmy pracę pola między punktami  $A$  i  $B$ :

$$L_{AB} = V_B - V_A = 11,5 + E - (15,5 + E) = -4$$

### Przykład 4.9



Rys. 4.19

Wahadło matematyczne zostało wychylone z położenia  $A$  na wysokość  $h$  (rys. 4.19) i swobodnie puszczono. Wyznaczyć prędkość skalarną wahadła w położeniu  $A$ , wykorzystując zasadę zachowania energii mechanicznej w potencjalnym polu sił.

Dla grawitacyjnego pola sił mamy:

$$V(x, y) = mgy + V_0$$

$$U(x, y) = -V = -mgy - V_0$$

W położeniu  $B$

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv_B^2 = 0 \\ U = -mgl \cos \varphi_0 - V_0 \end{cases}$$

zaś w położeniu  $A$

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv^2 \\ U = -mgl - V_0 \end{cases}$$

Porównując energię mechaniczną  $E_k + U$  w obu położeniach otrzymamy:

$$-mgl \cos \varphi_0 - V_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl - V_0$$

$$\frac{1}{2}v^2 = g(l - l \cos \varphi_0) = gh$$

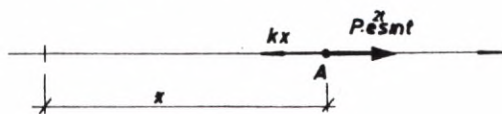
Stąd prędkość skalarna punktu jest równa  $v = \sqrt{2gh}$ .

### PYTANIA KONTROLNE

1. Podać prawa Newtona.
2. Jakie warunki muszą być spełnione, aby swobodny punkt materialny poruszał się ruchem prostoliniowym?
3. Omówić ruch harmoniczny prosty, tłumiony i wymuszony.
4. Jakie zjawisko nazywamy rezonansem?
5. Co to są krzywe rezonansowe?
6. Omówić ruch punktu nieswobodnego po powierzchni gładkiej.
7. Omówić ruch punktu nieswobodnego po krzywej gładkiej.
8. Podać definicję pola sił.
9. Podać definicję pracy siły po krzywej.
10. Jak oblicza się pracę po trajektorii ruchu?
11. Podać definicję potencjalnego pola sił i jego własności.
12. Podać definicję energii potencjalnej i kinetycznej.
13. Dlaczego linie sił pola są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych?
14. Jak wyznacza się potencjał pola sił?
15. Podać zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej w przypadku ogólnym i w potencjalnym polu sił.

### ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Wyznaczyć ruch punktu materialnego  $A$  o masie  $m$  pod wpływem sił opisanych na rysunku 4.20. W chwili  $t = 0$   $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = v_0$ .
2. Dla podanego ruchu punktu materialnego o masie  $m = 1$  wyznaczyć siłę, która ten ruch spowodowała, a następnie obliczyć pracę tej siły pomiędzy chwilami  $t_0 = 0$  i  $t_k = \pi$ :



Rys. 4.20

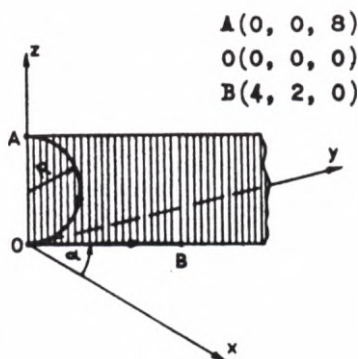
$$\vec{r}(t) = 4 \cos t \vec{e}_x + 2 \sin t \vec{e}_y + 5 \vec{e}_z$$

3. Sprawdzić, czy podane pole sił jest polem potencjalnym – jeśli tak, to wyznaczyć potencjał i obliczyć pracę pola pomiędzy punktami  $A$  i  $B$ :

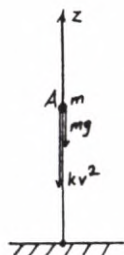
$$\vec{F} = (yz - 1)\vec{e}_x + (xz + 1)\vec{e}_y + (xy - 3)\vec{e}_z$$

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, 1, 3)$$

4. Obliczyć pracę pola sił  $\vec{F} = (2x - y, y + z, z - 1)$  po zadanej krzywej łamanej od punktu  $A$  do punktu  $B$  (rys. 4.21).



Rys. 4.21

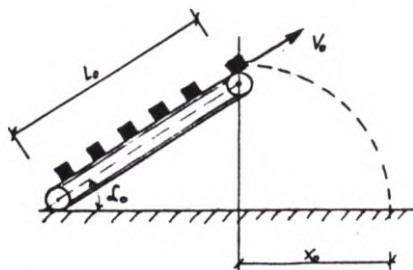


Rys. 4.22

5. Punkt materialny  $A$  o masie  $m$  porusza się w polu sił ciężkości w środowisku stawiającym opór proporcjonalny do kwadratu prędkości. Wyznaczyć jego ruch oraz obliczyć pracę po trajektorii ruchu od chwili  $t = 0$  do  $t = t_w$  (czas wznoszenia), jeśli dla

$$z(t = 0) = 0, \quad \dot{z}(t = 0) = v_0$$

6. Taśma transportera przesuwa cegły (każda o ciężarze  $mg$ ) z prędkością  $v_0$  (rys. 4.23). Transporter ma długość  $l_0$  i tworzy z poziomem kąt  $\alpha_0$ . Określić  $x_0$  – zasięg spadania cegieł.



Rys. 4.23

## Rozdział 5

## DYNAMIKA SZTYWNEGO UKŁADU MATERIALNEGO

5.1. WPROWADZENIE DO RACHUNKU TENSOROWEGO  
W UKŁADACH KARTEZJAŃSKICH

Układem współrzędnych (w euklidesowej trójwymiarowej przestrzeni) nazywamy zależność, która każdemu punktowi  $P$  tej przestrzeni przyporządkowuje trójkę liczb  $x_1, x_2, x_3$ , co zapisujemy  $P(x_1, x_2, x_3)$ , przy czym  $P$  oznacza punkt przestrzeni, zaś  $x_1, x_2, x_3$  – współrzędne punktu. W rachunku tensorowym rozpatrujemy nie jeden układ współrzędnych, lecz ich rodzinę, żądając przy tym, by funkcje określające przejście od jednego do drugiego układu współrzędnych (należących do tej rodziny) tworzyły układ równań różnowartościowych, a więc odwracalny. Stosować będziemy konwencję sumacyjną Einsteina, pisząc:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \equiv a_i x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

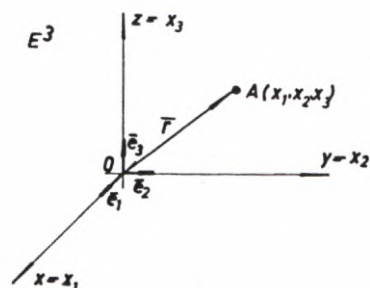
$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k a_{mn} x_m x_n \equiv a_{mn} x_m x_n, \quad (m, n = 1, 2, \dots, k)$$

i rozumiejąc, że jeżeli w wyrażeniu wskaźnikowym, będącym jednomianem, wskaźniki powtarzają się, to należy dokonać sumowania po powtarzających się wskaźnikach do odpowiedniej wymiarowości obiektu.

Niech trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa  $E^3$  odniesiona będzie do ortokartezjańskiego układu współrzędnych  $\{O, x_1, x_2, x_3\}$  (rys. 5.1). Wektor wodzący  $\bar{r}$  punktu  $A$  zapisany w bazie  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  wyraża się następująco:

$$\bar{r} = x_i \bar{e}_i = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.2)$$

Stąd  $i$ -ty wersor bazy jest określony wzorem:



Rys. 5.1

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \bar{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \bar{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x_i} \bar{e}_3, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.3)$$

Mnożąc skalarnie wektor  $\bar{r}$  i  $j$ -ty wersor bazy:

$$\bar{r} \cdot \bar{e}_j = x_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = x_i \delta_{ij}^* = x_j \quad (5.4)$$

wyznaczamy  $j$ -tą współrzędną wektora  $\bar{r}$ .

Niech w bazie  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  zadane będą wektory:

$$\bar{a} = a_i \bar{e}_i, \quad \bar{b} = b_j \bar{e}_j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

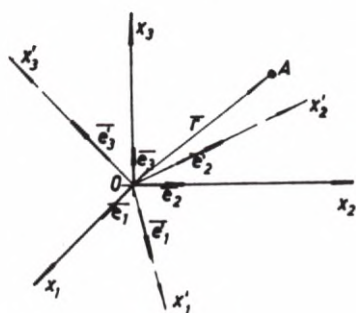
Obliczmy ich iloczyn skalarny:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_i \bar{e}_i \cdot b_j \bar{e}_j = a_i b_j (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \quad (5.5)$$

oraz iloczyn wektorowy:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} = a_i \bar{e}_i \times b_j \bar{e}_j = a_i b_j (\bar{e}_i \times \bar{e}_j) / \bar{e}_k \\ c_k &= \bar{c} \cdot \bar{e}_k = a_i b_j [\bar{e}_k \cdot (\bar{e}_i \times \bar{e}_j)] = \epsilon_{kij}^{**} a_i b_j \\ \bar{c} &= c_k \bar{e}_k = \epsilon_{kij} a_i b_j \bar{e}_k \end{aligned} \quad (5.6)$$

Rozważmy dwa ortonormalne układy współrzędnych kartezjańskich obrócone względem siebie jak na rys. 5.2.



$\{0, x_1, x_2, x_3\}$  - układ stary  
 $\{0, x'_1, x'_2, x'_3\}$  - układ nowy  
 /obrócony/

Rys. 5.2

\* Wyrażenie  $\delta_{ij}^{dr} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  nazywamy deltą Croneckera.

\*\* Wyrażenie  $\epsilon_{kij} = \bar{e}_k \cdot (\bar{e}_i \times \bar{e}_j)$  jest symbolem Ricciego, który przyjmuje wartości 0, 1, -1, gdyż jest iloczynem mieszanym wersorów bazy.



Wektor wodzący  $\bar{r}$  punktu  $A$  możemy zapisać w obu układach (starym i nowym):

$$\bar{r} = x_i \bar{e}_i = x'_j \bar{e}'_j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.7)$$

a stąd otrzymujemy:

$$\bar{e}'_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'_j} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \bar{e}_i = \alpha_{ji} \bar{e}_i \quad (5.8)$$

gdzie:

$\bar{e}'_j$  — wersor  $j$ -tej osi układu nowego,

$\bar{e}_i$  — wersor  $i$ -tej osi układu starego,

$$\alpha_{ji} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \bar{e}'_j \cdot \bar{e}_i = \cos(x'_j, \wedge x_i)$$

Analogicznie wyprowadza się związek odwrotny do (5.8):

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \bar{e}'_j = \alpha_{ji} \bar{e}'_j \quad (5.9)$$

Równania (5.8) i (5.9) są prawami transformacyjnymi dla wersorów baz układu starego i nowego. Na ich podstawie możemy podać, jak transformują się współrzędne wektorów przy przejściu z jednego układu do drugiego:

$$\begin{aligned} x'_j &= \bar{r} \cdot \bar{e}'_j = \bar{r} \cdot \alpha_{ji} \bar{e}_i = \alpha_{ji} (\bar{r} \cdot \bar{e}_i) = \alpha_{ji} x_i \\ x_i &= \bar{r} \cdot \bar{e}_i = \bar{r} \cdot \alpha_{ji} \bar{e}'_j = \alpha_{ji} (\bar{r} \cdot \bar{e}'_j) = \alpha_{ji} x'_j \end{aligned} \quad (5.10)$$

Tutaj:

$x'_j$  —  $j$ -ta współrzędna wektora  $\bar{r}$  w układzie nowym,

$x_i$  —  $i$ -ta współrzędna wektora  $\bar{r}$  w układzie starym.

W ten sposób doszliśmy do definicji tensora I rzędu (tensora o walencji 1).

Tensorom I rzędu nazywamy macierz jednowskaźnikową, określoną w układzie współrzędnych, która przy przejściu z jednego układu do drugiego transformuje się według prawa:

$$a'_j = \alpha_{jk} a_k, \quad a_i = \alpha_{ji} a'_j \quad (5.11)$$

które w zapisie macierzowym ma postać:

$$\begin{Bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{Bmatrix}$$

Z powyższych rozważań wynika, że wektor jest tensorem pierwszego rzędu, zaś skalar tensorem zerowego rzędu. Występująca w tych związkach macierz przejścia  $(\alpha_{ij})$  została omówiona w podrozdziale 2.1 niniejszego podręcznika.

W dalszym ciągu wprowadźmy iloczyn diadyczny (zewnętrzny) wektorów  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$ :

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = a_i \bar{e}_i \otimes b_j \bar{e}_j = a_i b_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.13)$$

który posiada sens iloczynu kartezjańskiego baz dwóch trójwymiarowych przestrzeni wektorowych.

Bazę diadową  $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$  można interpretować jako wszystkie kombinacje dwójek wektorów baz. W wyrażeniu (5.13) mamy macierz:

$$(a_i b_j) = \begin{pmatrix} a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3 \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3 \\ a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

określoną w układzie  $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ . Jej elementy przy przejściu do nowego układu transformują się następująco:

$$a'_i b'_j = \alpha_{ik} a_k \alpha_{jl} b_l = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_k b_l \quad (5.14)$$

Obiekt dwuwskaznikowy określony w układzie współrzędnych, którego elementy transformują się według relacji (5.14), nazywamy tensorem II rzędu (o walencji 2).

W podobny sposób dochodzimy do prawa odwrotnego:

$$a_i b_j = \alpha_{ki} \alpha_{lj} a'_k b'_l \quad (5.15)$$

Prawa te w zapisie macierzowym mają postać

$$\begin{pmatrix} a'_1 b'_1, a'_1 b'_2, a'_1 b'_3 \\ a'_2 b'_1, a'_2 b'_2, a'_2 b'_3 \\ a'_3 b'_1, a'_3 b'_2, a'_3 b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1, a_1 b_2, a_1 b_3 \\ a_2 b_1, a_2 b_2, a_2 b_3 \\ a_3 b_1, a_3 b_2, a_3 b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1, a_1 b_2, a_1 b_3 \\ a_2 b_1, a_2 b_2, a_2 b_3 \\ a_3 b_1, a_3 b_2, a_3 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 b'_1, a'_1 b'_2, a'_1 b'_3 \\ a'_2 b'_1, a'_2 b'_2, a'_2 b'_3 \\ a'_3 b'_1, a'_3 b'_2, a'_3 b'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Uogólniając powyższe rozważania dochodzimy do definicji tensora  $N$ -tego rzędu.

Tensorom  $N$ -tego rzędu nazywamy macierz  $N$ -wskaznikową, określoną w układzie współrzędnych, której elementy przy przejściu do drugiego układu transformują się według prawa:

$$\begin{aligned} T'_{ij \dots s} &= \alpha_{iA} \alpha_{jB} \dots \alpha_{sR} T_{AB \dots R} \\ T_{AB \dots R} &= \alpha_{iA} \alpha_{jB} \dots \alpha_{sR} T'_{ij \dots s} \end{aligned} \quad (5.17)$$

W dalszym ciągu omawiać będziemy tensory, dla których  $N \leq 2$ . Podstawowe działania na tensorach to:

a) dodawanie tensorów

$$a_{ij} + b_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} c_{ij} \quad (\text{tensory tego samego rzędu i w tej samej przestrzeni})$$

b) odejmowanie tensorów

$$a_{ij} - b_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} d_{ij} \quad (\text{założenie jak w pktcie a})$$

c) iloczyn liczby i tensora

$$k a_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} b_{ij}$$

d) iloczyn wewnętrzny tensorów

$$a_{ij} b_j \stackrel{\text{df}}{=} c_i$$

e) iloczyn zewnętrzny tensorów

$$(a_i b_j \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \otimes c_k \bar{e}_k \stackrel{\text{df}}{=} a_i b_j c_k (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k)$$

f) rozkład tensora II rzędu na część symetryczną ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) i skośnie symetryczną ( $a_{ij} = -a_{ji}$ )

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

g) zwężenie tensora polegające na zrównaniu dwóch wskaźników tensora, co obniża rząd tensora o 2 (można stosować dla tensora drugiego i wyższych rzędów)

$$a_{ij}, \quad i = j$$

$$a_{jj} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Rozpatrzmy teraz problem wektorów własnych. Wektorem własnym (głównym) tensora  $A$  nazywamy niezerowy wektor  $\bar{w}$ , przez który pomnożony wewnątrznie tensor  $A$  daje wektor współliniowy z danym, co można ująć w jednej z następujących postaci:

$$A \bar{w} = \lambda \bar{w}, \quad \bar{w} \neq \bar{0}$$

$$a_{ij} w_j = \lambda w_i = \lambda w_j \delta_{ij} \Leftrightarrow (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) w_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.18)$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) w_1 + a_{12} w_2 + a_{13} w_3 = 0 \\ a_{21} w_1 + (a_{22} - \lambda) w_2 + a_{23} w_3 = 0 \\ a_{31} w_1 + a_{32} w_2 + (a_{33} - \lambda) w_3 = 0 \end{cases}$$

W układzie (5.18)  $\lambda$  jest parametrem, zaś niewiadome  $w_i$  są współrzędnymi wektora własnego. Układ ten jest układem trzech równań liniowych i jednorodnych.

Wprowadzając z definicji wektory:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = (a_{11} - \lambda, a_{12}, a_{13}) \\ \bar{X}_2 = (a_{21}, a_{22} - \lambda, a_{23}) \\ \bar{X}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33} - \lambda) \end{cases}$$

można równania (5.18) zapisać w równoważnej postaci:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \cdot \bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 \perp \bar{w} \\ \bar{X}_2 \cdot \bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 \perp \bar{w} \\ \bar{X}_3 \cdot \bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{x}_3 \perp \bar{w} \end{cases}$$



Rys. 5.3

z której wynika, że jeśli wektor  $\bar{w}$  ma być równocześnie prostopadły do  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$ ,  $\bar{X}_3$ , to muszą one leżeć w jednej płaszczyźnie prostopadłej do wektora własnego  $\bar{w}$  (rys. 5.3). Komplanarność zapewnia iloczyn mieszany wektorów  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$ ,  $\bar{X}_3$  równy zero:

$$\Delta = \bar{X}_1 \cdot (\bar{X}_2 \times \bar{X}_3) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.19)$$

Równanie (5.19) po rozpisaniu wyznacznika przyjmuje postać:

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (5.20)$$

gdzie:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii} \quad \text{ślad tensora}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\partial |a_{ij}|^*}{\partial a_{pp}} = \frac{1}{2}(I_1^2 - a_{ij} a_{ij}) \quad (5.21)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} I_1^3 - \frac{1}{2} I_1 a_{ij} a_{ij} + \frac{1}{3} a_{ij} a_{ip} a_{jp} = I_1 \cdot I_2 - \frac{1}{2} (I_1^3 - a_{ij} a_{ip} a_{jp})$$

\*  $\frac{\partial}{\partial a_{pp}} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial a_{11}} (\cdot) + \frac{\partial}{\partial a_{22}} (\cdot) + \frac{\partial}{\partial a_{33}} (\cdot)$

Łatwo wykazać, że  $I_i$  nie zależą od układu współrzędnych i dlatego nazywamy je niezmiennikami. Równanie (5.20) nazywamy równaniem wiekowym. Z równania (5.20) obliczamy  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , które nazywamy wartościami własnymi (głównymi). Pokażemy później, że dla tensora symetrycznego wartości własne są zawsze rzeczywiste.

Znając wartości główne wyznaczamy wektory własne z warunku:

$$\bar{w}_j = \bar{X}_k \times \bar{X}_l \neq \bar{0} \quad (5.22)$$

### Przykład 5.1

Dla tensora  $A = \begin{pmatrix} 2, 3, 2 \\ 10, 3, 4 \\ 3, 6, 1 \end{pmatrix}$  określonego w układzie  $\{O, x_1, x_2, x_3\}$  wyznaczyć wektory własne. Obliczamy kolejno:

– niezmienniki tensora

$$I_1 = 6, \quad I_2 = -49, \quad I_3 = 66$$

– z równania wiekowego wartości główne

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 49\lambda - 66 = 0, \quad \lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

– wektory własne z warunku (5.22)

dla  $\lambda = \lambda_1 = 11$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} -9, & 3, & 2 \\ & \times & (10, -8, 4) \\ & & \hline & & (28, 56, 42) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{w}_1 = (2k, 4k, 3k), \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

dla  $\lambda = \lambda_2 = -2$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= \bar{X}_1 \times \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 4, & 3, & 2 \\ & \times & (10, 5, 4) \\ & & \hline & & (2, 4, -10) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{w}_2 = (k, 2k, -5k)$$

dla  $\lambda = \lambda_3 = -3$

$$\bar{w}_3 = \bar{X}_3 \times \bar{X}_1 = \begin{array}{r} (3, 6, 4) \\ \times (5, 3, 2) \\ \hline (0, 14, -21) \end{array}$$

$$\bar{w}_3 = (0, 2k, -3k)$$

### Twierdzenia dotyczące tensora symetrycznego

1. Dla tensora symetrycznego wartości własne są liczbami rzeczywistymi

Z.  $a_{kj} = a_{jk}$

T.  $\lambda_i$  – rzeczywiste ( $i = 1, 2, 3$ )

**Dowód:**

Przyjmujemy, że  $\lambda$  jest zespolona, a dochodząc do sprzeczności wykażemy prawdziwość tezy. Jeżeli dla  $a_{kj}w_j = \lambda w_k$  mamy zespoloną wartość własną  $\lambda = \alpha + i\beta$ , której odpowiada wektor zespolony  $w_j = u_j + \lambda v_j$ , to  $a_{kj}(u_j + i v_j) = (\alpha + i\beta)(u_k + i v_k)$ . Pomnóżmy otrzymaną równość przez wektor  $w_k^*$  sprzężony z wektorem  $w_k$ :

$$a_{kj}(u_j + i v_j)(u_k - i v_k) = (\alpha + i\beta)(u_k + i v_k)(u_k - i v_k)$$

Mamy więc:

$$a_{kj}(u_j u_k + v_j v_k) + i a_{kj}(v_j u_k - v_k u_j) = (\alpha + i\beta)(u_k^2 + v_k^2)$$

Ponieważ po wskaźnikach  $k, j$  należy dokonać sumowania, stąd prawdziwa jest równość

$$a_{jk}(u_k u_j + v_k v_j) + i a_{jk}(v_k u_j - v_j u_k) = (\alpha + i\beta)(u_k^2 + v_k^2)$$

Dodając je stronami otrzymujemy

$$2 a_{kj}(u_j u_k + v_j v_k) + i a_{kj} \cdot 0 = 2\alpha(u_k^2 + v_k^2) + i 2(u_k^2 + v_k^2)\beta$$

Ponieważ dwie liczby zespolone są równe, gdy mają równe części rzeczywiste i części urojone, to  $\beta = 0$  czyli  $\lambda = \alpha$  jest liczbą rzeczywistą.

2. Dla tensora symetrycznego wektory własne, odpowiadające różnym wartościom głównym, są ortogonalne.

$$Z. a_{ij} = a_{ji}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$$

$$T. \bar{w}_1 \perp \bar{w}_2, \bar{w}_2 \perp \bar{w}_3, \bar{w}_3 \perp \bar{w}_1$$

D. W dowodzie korzystamy z definicji wektora własnego:

$$a_{ij} w_j^{(1)} = \lambda_1 w_i^{(1)} / \cdot w_i^{(2)}$$

$$a_{ij} w_j^{(2)} = \lambda_2 w_i^{(2)} / \cdot w_i^{(1)}$$

$$\begin{cases} a_{ij} w_j^{(1)} w_i^{(2)} = \lambda_1 w_i^{(1)} w_i^{(2)} = \lambda_1 \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 \\ a_{ij} w_j^{(2)} w_i^{(1)} = a_{ji} w_i^{(2)} w_j^{(1)} = \lambda_2 w_i^{(2)} w_i^{(1)} = \lambda_2 \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 \end{cases}$$

Odejmując stronami powyższe równości otrzymujemy:

$$a_{ij} \cdot 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2$$

Ponieważ  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , to  $\bar{w}_2 \perp \bar{w}_1$ . Analogicznie dowodzimy, że  $\bar{w}_2 \perp \bar{w}_3$  i  $\bar{w}_3 \perp \bar{w}_1$ .

3. Tensor symetryczny w układzie osi własnych (wyznaczonych przez wektory własne) przyjmuje postać diagonalną.

$$Z. a_{ij} = a_{ji}$$

$$T. a'_{12} = a'_{13} = a'_{23} = 0$$

D. W dowodzie skoncentrujemy się na dwóch elementach tensora, gdyż dla pozostałych elementów dowód przebiega analogicznie:

– dla elementu  $a'_{11}$

$$a_{ij} w_j^{(1)} = \lambda_1 \cdot w_i^{(1)} / \cdot w_i^{(1)}$$

$$a_{ij} w_i^{(1)} \cdot w_j^{(1)} = \lambda_1 \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1 = \lambda |\bar{w}_1| |\bar{w}_1| / : |\bar{w}_1|^2$$

$$a_{ij} \frac{w_i^{(1)}}{|\bar{w}_1|} \cdot \frac{w_j^{(1)}}{|\bar{w}_1|} = a_{ij} \alpha_{1i} \alpha_{1j} = a'_{11} = \lambda_1$$

– dla elementu  $a'_{12}$

$$a_{ij} w_j^{(1)} = \lambda_1 w_i^{(1)} / \cdot w_i^{(2)}$$

$$a_{ij} w_i^{(2)} w_j^{(1)} = \lambda_1 \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = 0 \quad \text{gdyż} \quad \bar{w}_2 \perp \bar{w}_1$$



$$a_{ji} w_j^{(2)} w_i^{(1)} = 0 / : (|\bar{w}_1| |\bar{w}_2|)$$

$$a_{ij} \frac{w_i^{(1)}}{|\bar{w}_1|} \cdot \frac{w_j^{(2)}}{|\bar{w}_2|} = a_{ij} \alpha_{1i} \alpha_{2j} = a'_{12} = 0 \quad \text{c.b.d.o.}$$

4. Wartości własne tensora symetrycznego są ekstremalnymi wartościami elementów z przekątnej głównej.

Z.  $a_{ij} = a_{ji}$

T.  $\lambda_1 = a'_{11}$ ,  $\lambda_2 = a'_{22}$ ,  $\lambda_3 = a'_{33}$  są ekstremalne w układzie osi własnych.

D. Korzystając z definicji tensora II rzędu mamy:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \alpha_{1k} \alpha_{1l} a_{kl} = \alpha_{11} \alpha_{11} a_{11} + \alpha_{11} \alpha_{12} a_{12} + \alpha_{11} \alpha_{13} a_{13} + \alpha_{12} \alpha_{11} a_{21} + \\ &+ \alpha_{12} \alpha_{12} a_{22} + \alpha_{12} \alpha_{13} a_{23} + \alpha_{13} \alpha_{11} a_{31} + \alpha_{13} \alpha_{12} a_{32} + \\ &+ \alpha_{13} \alpha_{13} a_{33} = a'_{11}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) \end{aligned}$$

Poszukujemy ekstremum funkcji trzech zmiennych spełniających warunek  $g = 1 - (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2) = 0$ . Zbudujmy funkcję Lagrange'a:

$$\begin{aligned} L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) &= a'_{11} + \lambda g = \alpha_{11}^2 a_{11} + \alpha_{12}^2 a_{22} + \alpha_{13}^2 a_{33} + \\ &+ 2(\alpha_{11} \alpha_{12} a_{12} + \alpha_{11} \alpha_{13} a_{13} + \alpha_{12} \alpha_{13} a_{23}) + \\ &+ \lambda(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2) \end{aligned}$$

i zapiszmy warunki na jej ekstremum:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{11}} = 2[(a_{11} - \lambda) \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{12} + a_{13} \alpha_{13}] = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_{12}} = 2[a_{21} \alpha_{11} + (a_{22} - \lambda) \alpha_{12} + a_{23} \alpha_{13}] = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_{13}} = 2[a_{31} \alpha_{11} + a_{32} \alpha_{12} + (a_{33} - \lambda) \alpha_{13}] = 0 \end{cases}$$

Otrzyaliśmy układ trzech równań liniowych i jednorodnych, analogiczny z układem (5.18), którego rozwiązanie niezerowe istnieje dla wyznacznika układu  $\Delta = 0$ .

Przy szukaniu ekstremum doszliśmy do równania wiekowego, z którego wyznaczamy wartości własne. A zatem wykazaliśmy prawdziwość tezy.

Z równania wiekowego otrzymujemy trzy pierwiastki, z tym, że dla tensora symetrycznego są one rzeczywiste i spełniają jedną z relacji:

$$(a) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$$

$$(b) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 \quad \text{lub} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \quad \text{lub} \quad \lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2$$

$$(c) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

zaś dla dowolnego tensora mogą być rzeczywiste lub jeden rzeczywisty, a dwa zespolone (sprzężone). Udowodniliśmy już, że w przypadku (a) mamy trzy wektory własne wzajemnie prostopadłe.

Przeanalizujmy teraz przypadek (b). Niech  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ . Jak wiemy, w układzie osi własnych tensor ma postać diagonalną:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3 = \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Obliczając wektor własny dla  $\lambda = \lambda_1$  układ równań (5.18) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} 0 w_1 + 0 w_2 + 0 w_3 = 0 \\ 0 w_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) w_2 + 0 w_3 = 0 \\ 0 w_1 + 0 w_2 + (\lambda_3 - \lambda_1) w_3 = 0 \end{cases}$$

z której wynika:

$$\bar{w}_1 = (w_1, 0, 0), \quad w_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Biorąc teraz  $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3$  otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2) w_1 + 0 w_2 + 0 w_3 = 0 \\ 0 w_1 + (\lambda_2 - \lambda_2) w_2 + 0 w_3 = 0 \\ 0 w_1 + 0 w_2 + (\lambda_3 - \lambda_2) w_3 = 0 \end{cases}$$

który redukuje się do jednego równania:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 0 \Rightarrow w_1 = 0, \quad w_2 \text{ i } w_3 \text{ mogą być dowolne}$$

Wektory własne  $\bar{w}_2 = (0, w_2, w_3)$  są więc prostopadłe do  $\bar{w}_1$ . Mamy zatem całą płaszczyznę wektorów własnych o gradientie współliniowym z wektorem  $\bar{w}_1$ .

Analizując przypadek (c) stwierdzamy, że układ równań (5.18) redukuje się do jednego równania typu  $0w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 0$ , które to równanie spełnia każdy wektor.

Badanie tensorowego charakteru macierzy na podstawie: a) definicji i b) twierdzenia:

ad a) Rozważmy dwa względem siebie obrócone układy o wspólnym początku i wyznaczmy w nich elementy badanej macierzy. Jeżeli dla każdego elementu zachodzi prawo transformacyjne, jak dla tensora, to ta macierz jest tensorem.

ad b) Jeżeli macierz określoną w układzie współrzędnych pomnożymy wewnętrznym przez wektor i w wyniku otrzymamy wektor, to jest ona tensorem.

Z.  $A = (a_{ij})$  - określona w układzie współrzędnych  $\{O, x_1, x_2, x_3\}$

T.  $a_{ij}b_j = c_i$  (wektor), to  $A$  jest tensorem.

D.  $a_{ij}b_j = c_i$  w układzie  $\{O, x_1, x_2, x_3\}$

$$a'_{ij}b'_j = c'_i \text{ w układzie } \{O, x'_1, x'_2, x'_3\}$$

$$a'_{ij}b'_j = c'_i = \alpha_{ik}c_k = \alpha_{ik}(a_{kj}b_j) = \alpha_{ik}a_{kj}(\alpha_{sj}b'_s)$$

$$a'_{is}b'_s = \alpha_{ik}\alpha_{sj}a_{kj}b'_s$$

$$b'_s(a'_{is} - \alpha_{ik}\alpha_{sj}a_{kj}) = 0 \quad \forall \quad \bar{b}$$

Stąd  $a'_{is} = \alpha_{ik}\alpha_{sj}a_{kj}$  - a to jest prawo transformacyjne dla tensora.

Problem wyznaczenia wektorów i wartości własnych bardzo upraszcza się w przypadku antypłaskim i płaskim (rys. 5.4).

Zagadnienie płaskie jest szczególnym przypadkiem problemu antypłaskiego ( $a_{33} = 0$ ).

Obliczamy niezmienniki tensora  $A$ :

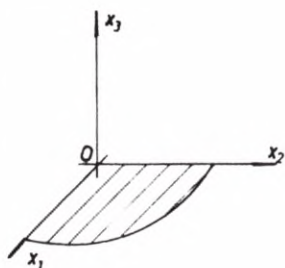
$$I_1 = (a_{11} + a_{22}) + a_{33} = I_1^* + a_{33}$$

$$I_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{33}(a_{11} + a_{22}) = I_2^* + a_{33}I_1^*$$

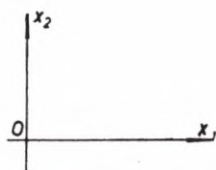
$$I_3 = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{33}I_2^*$$

a następnie z równania wiekowego wartości własne:

$$\lambda^3 - (I_1^* + a_{33})\lambda^2 + (I_2^* + a_{33}I_1^*)\lambda - a_{33}I_2^* = 0$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{przypadek} \\ \text{antyplaski} \\ \text{w płaszczyźnie} \\ 0x_1x_2 \end{array}$$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{przypadek płaski}$$

Rys. 5.4

Widać, że jednym z pierwiastków jest  $a_{33} = \lambda_3$ , zaś pozostałe wartości własne znajdujemy z równania kwadratowego:

$$\lambda^2 - I_1^* \lambda + I_2^* = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}$$

(5.23)

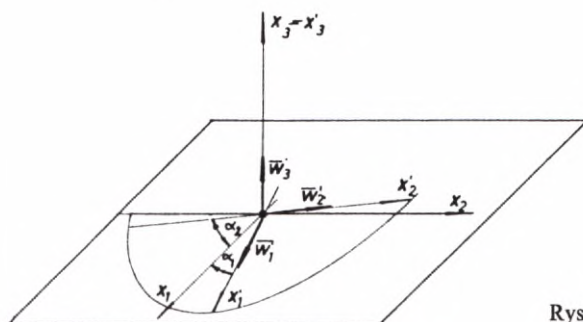
$$\lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}$$

Z warunku (5.22) wyznaczamy osie własne, określone przez wektory własne. I tak dla  $\lambda_3 = a_{33}$  układ równań jednorodnych ma postać:

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{33})w_1 + a_{12}w_2 = 0 \\ a_{21}w_1 + (a_{22} - a_{33})w_2 = 0 \\ 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 0 \end{cases}$$

Stąd  $\bar{w}_3 = (0, 0, k)$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Wektor ten wyznacza oś  $x'_3$  układu własnego, która pokrywa się z osią  $x_3$  układu starego. A zatem pozostałe osie  $x'_1, x'_2$  układu własnego leżą w płaszczyźnie  $Ox_1, x_2$  układu starego (rys. 5.5).



Rys. 5.5

Dla wartości własnej  $\lambda = \lambda_1$  układ równań jednorodnych:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1) w_1 + a_{12} w_2 = 0 \\ a_{21} w_1 + (a_{22} - \lambda_1) w_2 = 0 \end{cases}$$

$$w_3 = 0$$

redukuje się do jednego niezależnego równania  $a_{21} w_1 + (a_{22} - \lambda_1) w_2 = 0$ , z którego wyznaczamy:

$$\frac{w_2}{w_1} = \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{a_{21}}{a_{22} - \lambda_1} \Rightarrow \alpha_1 \quad (5.24)$$

Analogicznie dla wartości własnej  $\lambda = \lambda_2$  otrzymamy:

$$\frac{w_2}{w_1} = \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22} - \lambda_2} \Rightarrow \alpha_2 \quad (5.25)$$

Kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  wyznaczają położenie wektorów własnych  $\bar{w}_1$  i  $\bar{w}_2$ . W przypadku gdy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{0}$  jest nieokreślony istnieje oprócz osi własnej  $x'_3$  cała płaszczyzna osi głównych, prostopadła do  $x'_3$ .

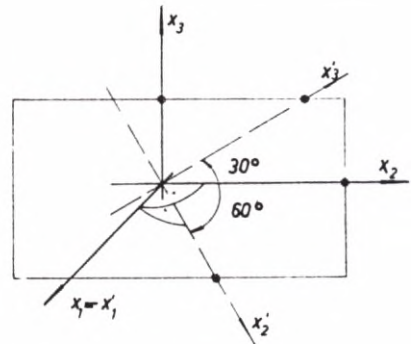
## Przykład 5.2

Wyznaczyć kierunki własne i wartości własne dla tensora  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -5, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \sqrt{3} \\ 0, & \sqrt{3}, & -2 \end{pmatrix}$$

określonego w układzie  $0x_1x_2x_3$ .

Mamy tutaj do czynienia z przypadkiem antypłaskim w płaszczyźnie  $0x_2x_3$  (rys. 5.6).  
Rozwiązanie ma postać:



Rys. 5.6

$$\lambda_1 = a_{11} = -5$$

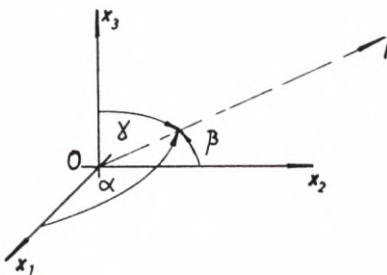
$$\lambda_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a_{33} - a_{22})^2 + 4a_{23}^2} = -3$$

$$\lambda_3 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a_{33} - a_{22})^2 + 4a_{23}^2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-a_{23}}{a_{33} - \lambda_2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha_2 = -60^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{-a_{23}}{a_{33} - \lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha_3 = 30^\circ$$

Niech w układzie współrzędnych określony jest tensor II rzędu i dany jest kierunek  $l$  wyznaczający pierwszą oś nowego układu (rys. 5.7).



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$z^* a_{ij} = a_{ji}$$

Rys. 5.7

Prosta  $l$  tworzy z osiami układu współrzędnych kąty  $\alpha, \beta, \gamma$ , których cosinusy kierunkowe wyznaczają elementy pierwszego wiersza macierzy przejścia:

$$\alpha_{11} = \cos \alpha, \quad \alpha_{12} = \cos \beta, \quad \alpha_{13} = \cos \gamma$$

przy czym zachodzi  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Obliczmy element  $a'_{11}$  tensora  $A$ :

$$a_l = a'_{11} = \alpha_{1k} \alpha_{1l} a_{kl} = a_{11} \cos^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \beta + a_{33} \cos^2 \gamma + 2(a_{12} \cos \alpha \cos \beta + a_{13} \cos \alpha \cos \gamma + a_{23} \cos \beta \cos \gamma) \quad (5.26)$$

### Przykład 5.3

Dla tensora z przykładu 5.2 wyznaczyć element tensora odpowiadający kierunkowi:

- wyznaczonemu przez punkty  $O(0,0,0)$  i  $B(2,-2,1)$ ,
- pokrywającemu się z osią własną  $x'_2$ ,
- pokrywającemu się z osią własną  $x'_3$ .

Skorzystajmy tutaj z wzoru (5.26) i w tym celu obliczymy cosinusy kierunkowe:

$$\text{ad a)} \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

$$a_l = -5 \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{1}{9} + 2\sqrt{3} \left( -\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{22 + 4\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{ad b)} \quad \cos \alpha_2 = 0, \quad \cos \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_l = a'_{22} = -2 \cdot \frac{3}{4} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -3$$

$$\text{ad c)} \quad \cos \alpha_3 = 0, \quad \cos \beta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \gamma_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_l = a'_{33} = -2 \cdot \frac{1}{4} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

## Przykład 5.4

Wykazać, że niezmienniki  $I_1, I_2, I_3$  tensora II rzędu nie zależą od układu współrzędnych.

Wykorzystamy w dowodzie prawo transformacyjne:

$$a'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jk} a_{kl}$$

$$I_1 = a'_{ii} = \alpha_{ik} \alpha_{il} a_{kl} = \delta_{kl} a_{kl} = a_{ll} = I_1$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} a'_{ij} a'_{ij} = \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl} \alpha_{ir} \alpha_{js} a_{rs} = \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} \delta_{kr} a_{kl} \delta_{ls} a_{rs} = \\ &= \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} a_{rl} a_{rl} = I_2 \end{aligned}$$

$$I_3 = \det a'_{ij} = \det(\alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl}) = \det \alpha_{ik} \cdot \det \alpha_{jl} \cdot \det a_{kl} = 1 \cdot 1 \cdot \det a_{kl} = I_3$$

## 5.2. MASA UKŁADU MATERIALNEGO

Badając ruch sztywnego układu materialnego stwierdzamy, że zależy on nie tylko od przyłożonych do układu sił zewnętrznych czynnych i sił reakcji (gdy jest on poddany więzom), lecz także od wielkości masy ciała i jej rozkładu. Dlatego też znajomość wielkości masy ciała i jej rozkładu jest nieodzowna przy wyznaczaniu ruchu układu materialnego.

### 5.2.1. Masa skończonego układu punktów materialnych

Dla układu punktów materialnych masa całego układu jest równa sumie mas poszczególnych punktów rozważanego układu:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad [\text{kg}] \quad (5.27)$$

### 5.2.2. Masa bryły materialnej

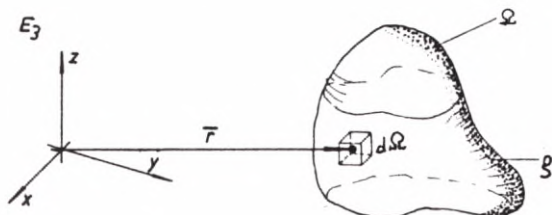
Masę bryły materialnej (rys. 5.8) określamy według następującego wzoru:

$$m = \iiint_{\Omega} dm = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) d\Omega \quad (5.28)$$



gdzie:

- $\Omega$  – obszar geometryczny w  $E^3$  rozważanego ciała wypełniony w sposób ciągły masą,
- $dm$  – element masy rozumiany jako masa elementu  $d\Omega$  ciała, która jest funkcją ciągłą położenia punktu w obszarze  $\Omega$ ,
- $\iiint_{\Omega} \dots d\Omega$  – całka potrójna po obszarze  $\Omega$ .



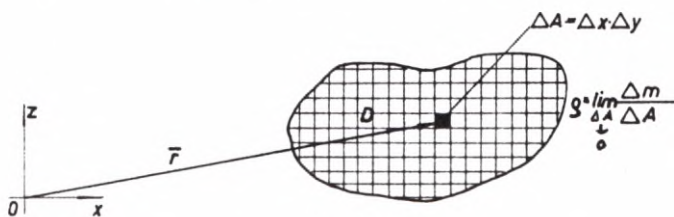
Rys. 5.8

### 5.2.3. Masa płaskiego obszaru materialnego

W przypadku płaskiego obszaru materialnego (rys. 5.9):

$$m = \iint_D dm = \iint_D \rho dA = \iint_D \rho(x, y) dx dy, \quad \rho(x, y) \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (5.29)$$

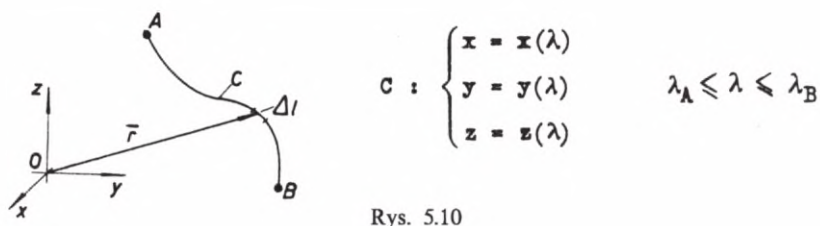
gdzie  $\iint_A \dots dA$  jest całką podwójną w obszarze płaskim  $D$ .



Rys. 5.9

### 5.2.4. Masa krzywej materialnej

Dla krzywej materialnej  $C$  o gęstości  $\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}$   $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$  (rys. 5.10) ( $\Delta m$  jest masą łuku o długości  $\Delta l$ )



Rys. 5.10

masa łuku wyraża się wzorem:

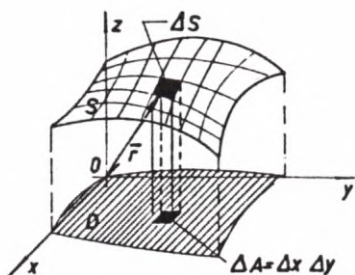
$$m = \int_C dm = \int_C \rho dL = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \rho(\lambda) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2} d\lambda \quad (5.30)$$

a  $\int_C \dots dL$  jest całką krzywoliniową nieskierowaną.

### 5.2.5. Masa płyta powierzchniowego

Masę płyta powierzchniowego (rys. 5.11) o gęstości  $\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$  [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ] obliczamy (wykorzystując definicję całki powierzchniowej nieorientowanej) z następującego wzoru:

$$m = \iint_S dm = \iint_S \rho dS = \iint_D \rho [x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (5.31)$$



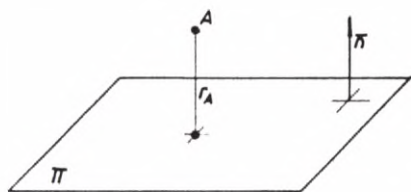
Rys. 5.11

$$S: \{z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

$D$  – rzut prostokątny płyta  $S$  na płaszczyznę  $Oxy$

## 5.3. MOMENT STATYCZNY UKŁADU MATERIALNEGO

Niech będzie zadany punkt materialny  $A$  i dowolna płaszczyzna  $\Pi$  o normalnej zewnętrznej  $\vec{n}$  (rys. 5.12). Miara odległości  $r_A$  punktu  $A$  od płaszczyzny



Rys. 5.12

$\Pi$  może być: dodatnia (punkt znajduje się po stronie zewnętrznej płaszczyzny), ujemna (punkt znajduje się po przeciwnej stronie płaszczyzny) lub równa zero, gdy punkt leży na płaszczyźnie.

Wyrażenie  $S_{\Pi} \stackrel{\text{df}}{=} m r_A$  nazywamy momentem statycznym punktu  $A$  względem płaszczyzny  $\Pi$ .

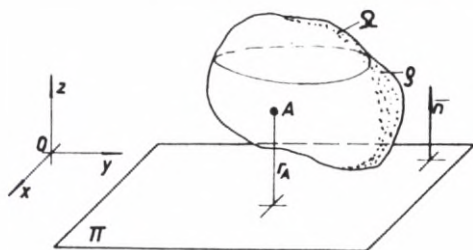
### 5.3.1. Moment statyczny skończonego układu punktów materialnych

Dla układu punktów materialnych moment statyczny zapiszemy następująco:

$$S_{\Pi} = \sum_{i=1}^n m_i r_i \quad (5.32)$$

gdzie  $m_i$  jest masą punktu  $A_i$  układu, zaś  $r_i$  miarą jego odległości od płaszczyzny  $\Pi$ .

### 5.3.2. Moment statyczny bryły materialnej



Rys. 5.13

Momentem statycznym bryły materialnej względem płaszczyzny  $\Pi$  (rys. 5.13) nazywamy:

$$S_{\Pi} = \iiint_{\Omega} r_A dm = \iiint_{\Omega} \rho r_A d\Omega \quad (5.33)$$

gdzie  $r_A$  jest miarą odległości bieżącego punktu obszaru  $\Omega$  od płaszczyzny  $\Pi$ .

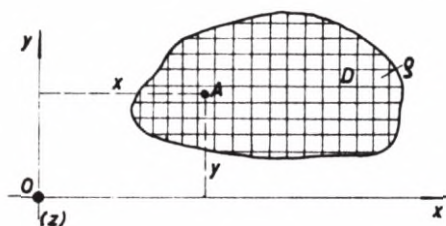
Biorąc za płaszczyznę  $\Pi$  kolejno odpowiednie płaszczyzny kartezjańskiego układu współrzędnych możemy na podstawie (5.33) napisać:

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) z dx dy dz$$

$$S_{xz} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) y dx dy dz \quad (5.34)$$

$$S_{yz} = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) x dx dy dz$$

## 5.3.3. Moment statyczny płaskiego obszaru materialnego



$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D$$

$$z = 0$$

Rys. 5.14

Dla płaskiego obszaru materialnego leżącego w płaszczyźnie  $0xy$  (rys. 5.14) momenty statyczne liczone względem płaszczyzn układu współrzędnych są równe:

$$S_{xy} = \iint_D \rho(x, y) z \, dx \, dy = 0$$

$$S_{xz} = S_x = \iint_D \rho(x, y) y \, dx \, dy \quad (5.35)$$

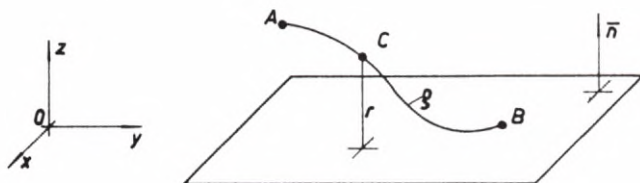
$$S_{yz} = S_y = \iint_D \rho(x, y) x \, dx \, dy$$

## 5.3.4. Moment statyczny krzywej materialnej

Moment statyczny krzywej materialnej (rys. 5.15) określony jest następującymi wzorami:

$$S_{II} = \int_C r \, dm = \int_C \rho r \, dl \quad (5.36)$$

$$S_{xy} = \int_C \rho z \, dl, \quad S_{xz} = \int_C \rho y \, dl, \quad S_{yz} = \int_C \rho x \, dl$$

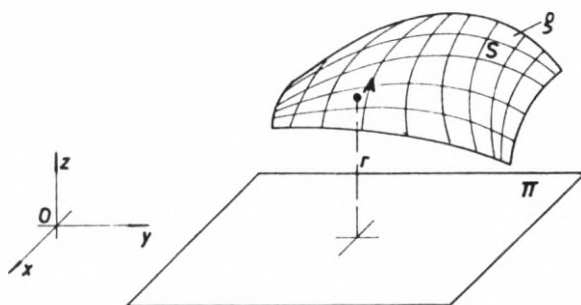


Rys. 5.15

gdzie  $r$ ,  $z$ ,  $y$ ,  $x$  są miarami odległości bieżącego punktu krzywej od płaszczyzny odpowiednio  $II$ ,  $0xy$ ,  $0xz$  i  $0yz$ .

### 5.3.5. Moment statyczny materialnego płata powierzchniowego

Materialny płat powierzchniowy o gęstości  $\rho$  (rys. 5.16) ma następujące momenty statyczne:



Rys. 5.16

$$\begin{aligned}
 S_{II} &= \iint_S r dm = \iint_S \rho r dS \\
 S_{xy} &= \iint_S \rho z dS \\
 S_{xz} &= \iint_S \rho y dS \\
 S_{yz} &= \iint_S \rho x dS
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

Tutaj  $\iint_S \dots dS$  jest całką powierzchniową, zaś  $r, z, y, x$  są miarami odległości bieżącego punktu płata powierzchniowego od odpowiednich płaszczyzn.

### 5.4. ŚRODEK MASY UKŁADU MATERIALNEGO

Rozważmy układ materialny złożony z  $n$  punktów  $A_1, A_2, \dots, A_n$  o masach odpowiednio  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Na tak zadanym układzie materialnym budujemy równoległy układ wektorów:

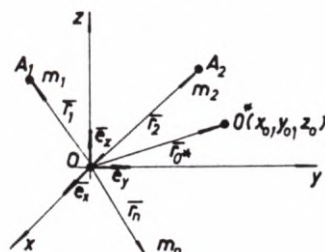
$$A = \left( \begin{array}{cccc} \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_p, \dots, \bar{F}_n \\ A_1, A_2, \dots, A_p, \dots, A_n \end{array} \right)$$

dla którego:

$$\vec{F}_i = k m_i \vec{e} \quad (5.38)$$

Tutaj  $k$  jest dowolnie przyjętym współczynnikiem proporcjonalności,  $m_i$  – masą punktu  $A_i$  układu,  $\vec{e}$  – wersorem kierunku przyjętego dla układu wektorów.

Ponieważ suma układu wektorów  $\vec{S}_A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = k \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{e}$  jest różna od zera, to istnieje środek układu (rys. 5.17) opisany wzorem (3.29):



Rys. 5.17

$$\begin{aligned} \overline{OO^*} = \vec{r}_{O^*} &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n k m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n k m_i} = \\ &= \frac{k \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{k \sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Wzór (5.39) zapiszemy następująco:

$$m \vec{r}_{O^*} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (5.40)$$

Związek (5.40) zapisany w bazie kartezjańskiego układu współrzędnych przedstawia się następująco:

$$m x_O \vec{e}_x + m y_O \vec{e}_y + m z_O \vec{e}_z = \left( \sum_{i=1}^n m_i x_i \right) \vec{e}_x + \left( \sum_{i=1}^n m_i y_i \right) \vec{e}_y + \left( \sum_{i=1}^n m_i z_i \right) \vec{e}_z \quad (5.41)$$

Przez porównanie odpowiednich współrzędnych przy wersorach bazy otrzymamy:

$$\begin{cases} m x_O = \sum_{i=1}^n m_i x_i = S_{yz} \\ m y_O = \sum_{i=1}^n m_i y_i = S_{xz} \\ m z_O = \sum_{i=1}^n m_i z_i = S_{xy} \end{cases} \quad (5.42)$$

Stąd otrzymujemy współrzędne punktu  $O^*$ :

$$x_o = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_o = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_o = \frac{S_{xy}}{m} \quad (5.43)$$

Punkt geometryczny  $O^*$ , któremu przypiszemy masę  $m$  równą masie układu materialnego, a jego położenie określimy według wzoru (5.43), nazywamy środkiem masy układu materialnego. Z równości (5.42) wynika, że moment statyczny układu materialnego, liczony względem dowolnej płaszczyzny  $\Pi$ , jest równy momentowi statycznemu środka masy względem płaszczyzny  $\Pi$ .

Jeżeli zatem płaszczyzna przechodzi przez środek masy układu, to moment statyczny układu materialnego jest równy zeru, bo miara odległości środka masy od tej płaszczyzny jest równa zeru.

### 5.5. PĘD UKŁADU MATERIALNEGO, ZASADA PĘDU I ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

We wstępie do statyki poznaliśmy definicję pędu punktu materialnego:

$$\bar{p} = m \bar{v}$$

Pęd dla rozważanych przez nas układów jest równy:

a) dla układu punktów materialnych:

$$\bar{p}(t) = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \quad (5.44)$$

gdzie  $\bar{v}_i$  – prędkość punktu  $A_i$  układu;

b) dla bryły materialnej:

$$\bar{p}(t) = \iiint_{\Omega} \rho_A \bar{v}_A d\Omega \quad (5.45)$$

c) dla obszaru płaskiego:

$$\bar{p}(t) = \iint_D \rho_A \bar{v}_A dA \quad (5.46)$$

d) dla krzywej materialnej:

$$\bar{p}(t) = \int_C \rho_A \bar{v}_A dl \quad (5.47)$$

e) dla materialnego płata powierzchniowego  $S$ :

$$\bar{p}(t) = \iint_S \rho_A \bar{v}_A dS \quad (5.48)$$

We wzorach tych  $\bar{v}_A$  jest prędkością bieżącego punktu obszaru  $\Omega$ ,  $D$ ,  $S$  i krzywej  $C$ .

Obliczając pochodną pędu, otrzymujemy tzw. zasadę pędu:

$$\dot{\bar{p}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{v}}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{S} \quad (5.49)$$

Stwierdza ona: Pochodna po czasie pędu układu materialnego jest równa sumie sił działających na dany układ. Jeżeli suma układu sił jest równa zeru, to pęd układu — jak widać z (5.49) — jest stały w czasie:

$$\bar{S} = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}(t) = \bar{p}_0 = \overline{\text{const}} \quad (5.50)$$

Równość (5.50) stanowi treść zasady zachowania pędu. Korzystając z definicji środka masy układu materialnego wyznaczamy jego pęd:

$$\bar{p}_O(t) = m \dot{\bar{r}}_O = m \dot{\bar{v}}_{O^*} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \bar{p}(t) \quad (5.51)$$

Możemy zatem wypowiedzieć następujące twierdzenie: Pęd układu materialnego jest równy pędowi środka masy tego układu.

## 5.6. KRĘT UKŁADU MATERIALNEGO LICZONY WZGLĘDEM PUNKTU, ZASADA KRĘTU I ZASADA ZACHOWANIA KRĘTU

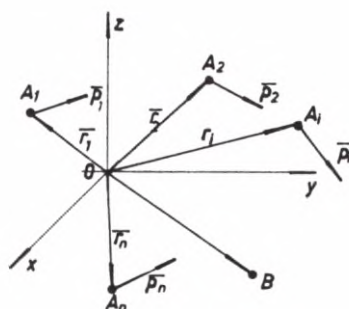
Kręt układu materialnego względem punktu definiujemy podobnie jak moment układu sił względem bieguna, z tym, że zamiast sił bierzemy pędy poszczególnych punktów materialnych (rys. 5.18), czyli:

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \times \overline{A_i O} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{p}_i \quad (5.52)$$

Podobnie kręt względem bieguna  $B$  ma postać:



$$\bar{K}_B = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \times \overline{A_i B} = \bar{K}_O + \left( \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \right) \times \overline{OB} = \bar{K}_O + \bar{p} \times \overline{OB} \quad (5.53)$$



Rys. 5.18

Równość (5.53) jest odpowiednikiem twierdzenia o zmianie bieguna. A zatem przy zerowym pędzie układu kręt względem każdego punktu jest taki sam. Obliczmy pierwszą pochodną po czasie wyrażenia (5.53):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{K}}_B &= \sum_{i=1}^n \dot{\bar{p}}_i \times \overline{A_i B} + \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \times \dot{\overline{A_i B}} = \bar{F}_i \times \overline{A_i B} + \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \times (\bar{v}_B - \bar{v}_i) = \\ &= \bar{M}_B + \left( \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \right) \times \bar{v}_B = \bar{M}_B + \bar{p} \times \bar{v}_B \end{aligned}$$

Jeżeli punkt  $B$  jest punktem nieruchomym ( $\bar{v}_B = \bar{0}$ ) lub środkiem masy układu materialnego ( $\bar{p} \parallel \bar{v}_B$ ), to iloczyn  $\bar{p} \times \bar{v}_B$  jest równy zeru, a zatem:

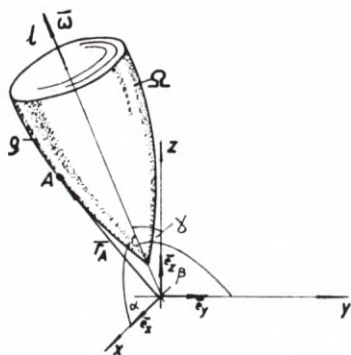
$$\dot{\bar{K}}_B = \bar{M}_B \quad (5.54)$$

Jest to zasada krętu. Stwierdza ona: Pochodna po czasie krętu układu materialnego liczonego względem stałego punktu lub środka masy jest równa momentowi układu sił względem tego punktu.

Jeżeli moment układu sił względem stałego punktu lub środka masy jest równy zeru, to kręt układu materialnego jest stały. Powyższe twierdzenie nosi nazwę zasady zachowania krętu.

## 5.7. KRĘT BRYŁY SZTYWNEJ W RUCHU OBROTOWYM

Ciało sztywne (rys. 5.19) porusza się ruchem obrotowym wokół osi  $l$ , przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Obliczmy kręt bryły względem punktu  $O$ . Otrzymujemy:



Rys. 5.19

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{\omega} \times \vec{r}_A \\ \vec{\omega} &= \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z \\ \vec{r}_A &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \iiint_{\Omega} \rho \vec{r}_A \times \vec{v}_A dx dy dz = \iiint_{\Omega} \rho \vec{r}_A \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Omega} \rho [r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}] dx dy dz \end{aligned}$$

Dalsze obliczenia wykonajmy w bazie układu  $\{0x, y, z\}$ .

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= K_{Ox} \vec{e}_x + K_{Oy} \vec{e}_y + K_{Oz} \vec{e}_z = \left[ \omega_x \iiint_{\Omega} \rho (y^2 + z^2) dx dy dz - \right. \\ &\quad \left. - \omega_y \iiint_{\Omega} \rho x y dx dy dz - \omega_z \iiint_{\Omega} \rho x z dx dy dz \right] \vec{e}_x + \\ &\quad + \left[ -\omega_x \iiint_{\Omega} \rho y x dx dy dz + \omega_y \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + z^2) dx dy dz - \right. \\ &\quad \left. - \omega_z \iiint_{\Omega} \rho y z dx dy dz \right] \vec{e}_y + \left[ -\omega_x \iiint_{\Omega} \rho z x dx dy dz - \right. \\ &\quad \left. - \omega_y \iiint_{\Omega} \rho z y dx dy dz + \omega_z \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \right] \vec{e}_z \end{aligned} \quad (5.55)$$

Jeżeli w równaniu (5.55) wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 J_x &\equiv \iiint_{\Omega} \rho (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 J_y &\equiv \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + z^2) dx dy dz \\
 J_z &\equiv \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 D_x &\equiv \iiint_{\Omega} \rho y z dx dy dz \\
 D_y &\equiv \iiint_{\Omega} \rho x z dx dy dz \\
 D_z &\equiv \iiint_{\Omega} \rho x y dx dy dz
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

to współrzędne wektora  $\bar{K}_O$  wyrażają się następująco:

$$\begin{cases}
 K_{Ox} = \omega_x J_x + \omega_y (-D_z) + \omega_z (-D_y) \\
 K_{Oy} = \omega_x (-D_z) + \omega_y J_y + \omega_z (-D_x) \\
 K_{Oz} = \omega_x (-D_y) + \omega_y (-D_x) + \omega_z J_z
 \end{cases} \tag{5.57}$$

Możemy je również zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{Bmatrix} K_{Ox} \\ K_{Oy} \\ K_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -D_z & -D_y \\ -D_z & J_y & -D_x \\ -D_y & -D_x & J_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \bar{K}_O = (J_O) \bar{\omega} \tag{5.58}$$

Macierz  $(J_O)$  nazywamy macierzą bezwładności.

## 5.8. TENSOR BEZWŁADNOŚCI

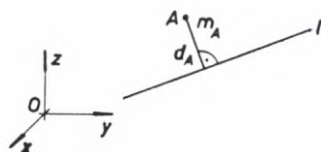
Powołując się na twierdzenie dotyczące tensorowego charakteru macierzy stwierdzamy, że macierz bezwładności jest tensorem, gdyż jest określona

w układzie współrzędnych, a pomnożona wewnątrz przez wektor prędkości kątowej daje jako wynik wektor krętu (por. (5.58)). Elementami jej są momenty bezwładności leżące na przekątnej głównej i momenty dewiacji (odśrodkowe).

### 5.8.1. Moment bezwładności układu materialnego

Moment bezwładności układu materialnego liczony jest względem prostej. Dla punktu materialnego mamy (rys. 5.20):

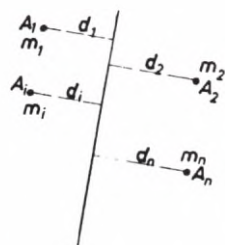
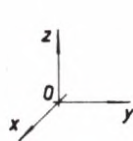
$$\begin{aligned}
 J_l &\stackrel{\text{df}}{=} m_A d_A^2 \\
 J_x &= m_A (y_A^2 + z_A^2) \\
 J_y &= m_A (x_A^2 + z_A^2) \\
 J_z &= m_A (x_A^2 + y_A^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$



Rys. 5.20

gdzie  $d_A$ ,  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $z_A$  są miarami odległości punktu  $A$  od osi, względem których liczony jest moment bezwładności.

Jeżeli układ (rys. 5.21) składa się z  $n$  punktów materialnych, to:



Rys. 5.21

$$\begin{aligned}
 J_l &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \geq 0 \\
 J_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \\
 J_y &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \\
 J_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.60}$$

Tutaj  $d_i$  jest miarą odległości punktu  $A_i$  od osi  $l$ , zaś  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  jego współrzędnymi w układzie  $\{0x, y, z\}$ .

W przypadku sztywnej bryły materialnej (rys. 5.22) otrzymujemy:

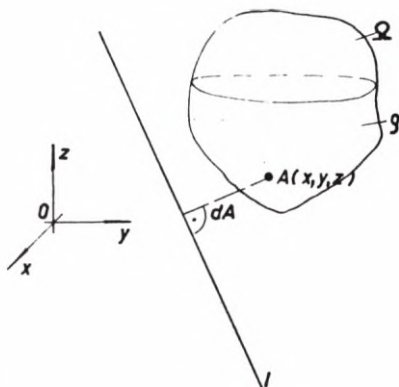
$$J_l \stackrel{\text{df}}{=} \iiint_{\Omega} \rho d_A^2 d\Omega$$

$$J_x = \iiint_{\Omega} \rho (y^2 + z^2) dx dy dz \quad (5.61)$$

$$J_y = \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + z^2) dx dy dz$$

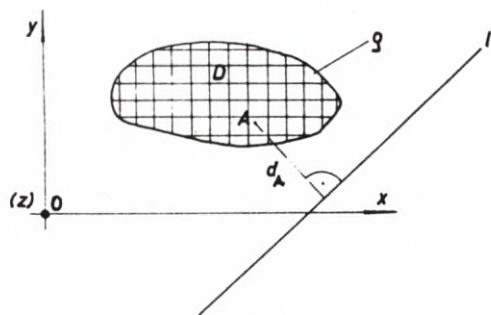
$$J_z = \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz$$

gdzie  $d_A$  jest miarą odległości bieżącego punktu obszaru  $\Omega$  od prostej  $l$ , zaś  $x, y, z$  są jego współrzędnymi.



Rys. 5.22

Dla obszaru płaskiego (rys. 5.23), np. leżącego w płaszczyźnie  $\{0x, y\}$ , mamy:



Rys. 5.23

$$J_l \stackrel{\text{df}}{=} \iint_D \rho d_A^2 dD$$

$$J_x = \iint_D \rho y^2 dx dy \quad (5.62)$$

$$J_y = \iint_D \rho x^2 dx dy$$

$$J_z = \iint_D \rho (y^2 + x^2) dx dy = J_x + J_y = J_O$$

gdzie  $d_A$  jest miarą odległości bieżącego punktu obszaru  $D$  od prostej  $l$ , zaś  $x, y$  — jego współrzędnymi.

Jeżeli układ materialny stanowi krzywa  $C$  o gęstości  $\rho$  (rys. 5.24), to:

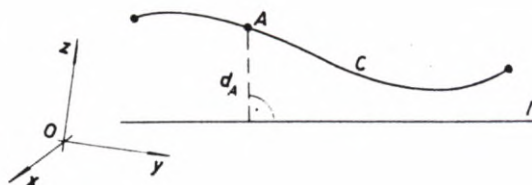
$$J_l = \int_C \rho d_A^2 dl \geq 0$$

$$J_x = \int_C \rho (y^2 + z^2) dl$$

$$J_y = \int_C \rho (x^2 + z^2) dl$$

$$J_z = \int_C \rho (x^2 + y^2) dl$$

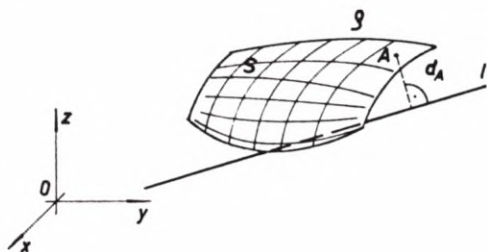
(6.63)



Rys. 5.24

Tutaj  $d_A$  jest miarą odległości punktu bieżącej krzywej od prostej  $l$ , zaś  $x, y, z$  — jego współrzędnymi.

Dla układu materialnego będącego płatem powierzchniowym (rys. 5.25) o gęstości  $\rho$  mamy:



Rys. 5.25

$$J_l = \iint_S \rho d_A^2 dS$$

$$J_x = \iint_S \rho (y^2 + z^2) dS$$

(5.64)

$$J_y = \iint_S \rho (x^2 + z^2) dS$$

$$J_z = \iint_S \rho (x^2 + y^2) dS$$

gdzie  $d_A$  jest miarą odległości bieżącego punktu rozważanego obszaru powierzchniowego  $S$  od prostej  $l$ , zaś  $x, y, z$  — jego współrzędnymi.

### 5.8.2. Moment dewiacji (odśrodkowy, zboczenia) układu materialnego

Moment dewiacji dla układu materialnego liczony jest względem dwóch przecinających się płaszczyzn (rys. 5.26). I tak dla punktu materialnego mamy:

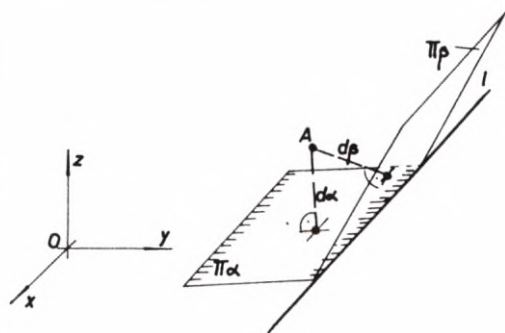
$$D_{\alpha\beta} = D_l \stackrel{\text{df}}{=} m_A d_\alpha d_\beta$$

$$D_x = m_A y_A z_A$$

$$D_y = m_A x_A z_A$$

$$D_z = m_A x_A y_A$$
(5.65)

gdzie  $d_\alpha$  i  $d_\beta$  są miarami odległości punktu  $A$  od płaszczyzn  $\Pi_\alpha$  i  $\Pi_\beta$  przecinających się wzdłuż prostej  $l$ , zaś  $x_A, y_A, z_A$  – jego współrzędnymi w układzie  $\{0x, y, z\}$ .



Rys. 5.26

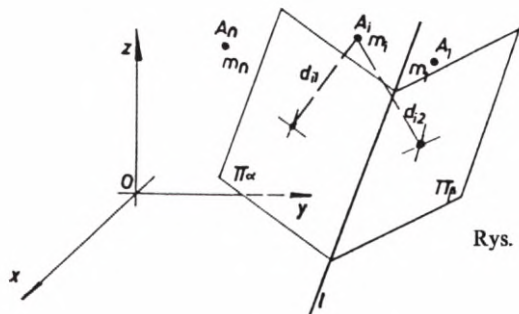
Gdy układ materialny składa się z  $n$  punktów (rys. 5.27), to:

$$D_{\Pi_\alpha \Pi_\beta} = D_l = \sum_{i=1}^n m_i d_{i1} d_{i2}$$

$$D_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$

$$D_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

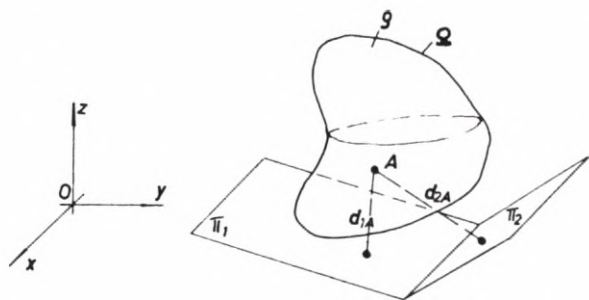
$$D_z = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$
(5.66)



Rys. 5.27

gdzie  $d_{i1}, d_{i2}$  są miarami odległości punktu  $A_i$  od płaszczyzn  $\Pi_\alpha$  i  $\Pi_\beta$ , zaś  $x_i, y_i, z_i$  – jego współrzędnymi.

Dla układu materialnego będącego sztywną bryłą (rys. 5.28) o gęstości  $\rho$  mamy:



Rys. 5.28

$$D_{\Pi_1\Pi_2} = D_I = \iiint_{\Omega} \rho d_{1A} d_{2A} d\Omega$$

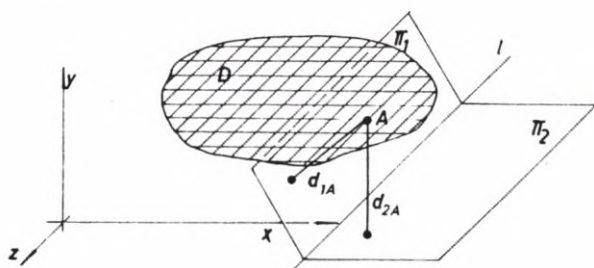
$$D_x = \iiint_{\Omega} \rho y z dx dy dz \quad (5.67)$$

$$D_y = \iiint_{\Omega} \rho x z dx dy dz$$

$$D_z = \iiint_{\Omega} \rho x y dx dy dz$$

przy czym  $d_{1A}$ ,  $d_{2A}$  są miarami odległości bieżącego punktu rozważanego obszaru  $\Omega$  od płaszczyzn  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$ , zaś  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — jego współrzędnymi.

Jeżeli układ materialny stanowi obszar płaski o gęstości  $\rho$  leżący w płaszczyźnie  $Oxy$  (rys. 5.29), to:



Rys. 5.29

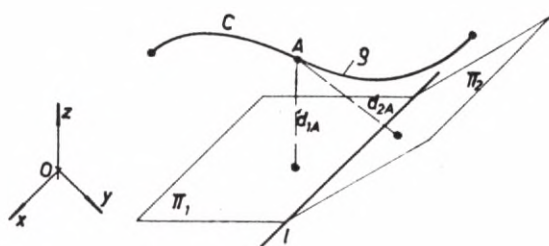
$$D_{\Pi_1\Pi_2} = D_I = \iint_D \rho d_{1A} d_{2A} dD$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \iint_D \rho y z dx dy = 0 \\ D_y &= \iint_D \rho x z dx dy = 0 \\ D_z &= \iint_D \rho x y dx dy = J_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$



gdzie  $d_{1A}$ ,  $d_{2A}$  są miarami odległości bieżącego punktu  $D$  od płaszczyzn  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , zaś  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — jego współrzędnymi.

Niech układ materialny będzie krzywą  $C$  o gęstości  $\rho$  (rys. 5.30). Dla takiego układu zachodzi:



Rys. 5.30

$$D_{\Pi_1\Pi_2} = D_l = \int_C \rho d_{1A} d_{2A} dl$$

$$D_x = \int_C \rho y z dl$$

(5.69)

$$D_y = \int_C \rho x z dl$$

$$D_z = \int_C \rho x y dl$$

gdzie  $d_{1A}$ ,  $d_{2A}$  są miarami odległości bieżącego punktu krzywej  $C$  od płaszczyzn  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$ , zaś  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — jego współrzędnymi.

Gdy układ materialny jest płatem powierzchniowym o gęstości  $\rho$  (rys. 5.31), to:

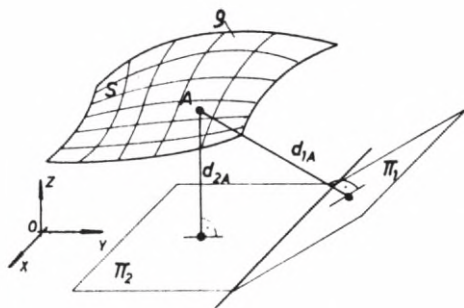
$$D_{\Pi_1\Pi_2} \equiv D_l = \iint_S \rho d_{1A} d_{2A} dS$$

$$D_x = \iint_S \rho y z dS$$

(5.70)

$$D_y = \iint_S \rho x z dS$$

$$D_z = \iint_S \rho x y dS$$

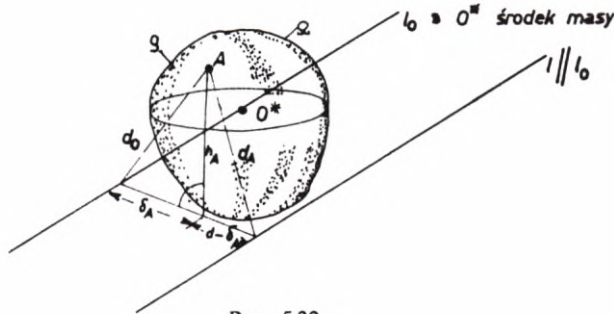


Rys. 5.31

przy czym  $d_{1A}$ ,  $d_{2A}$  są miarami odległości bieżącego punktu płata powierzchniowego od płaszczyzn  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$ , zaś  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — jego współrzędnymi.

## 5.8.3. Twierdzenia Steinera

Podamy teraz dla układu materialnego dwa twierdzenia Steinera (rys. 5.32). Niech w sztywnym układzie materialnym prosta  $l_0$  przechodzi przez środek masy układu, zaś prosta  $l$  jest do niej równoległa.



Rys. 5.32

Obliczmy moment bezwładności układu względem prostej  $l$  i  $l_0$ :

$$J_l = \iiint_{\Omega} \rho d_A^2 d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho [(d - \delta_A)^2 + h_A^2] d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho (d_0^2 + d^2 - 2d \cdot \delta_A) d\Omega$$

i na tej podstawie podamy związek między nimi:

$$J_l = \iiint_{\Omega} \rho d_0^2 d\Omega + d^2 \iiint_{\Omega} \rho d\Omega - 2d \iiint_{\Omega} \rho \delta_A d\Omega$$

(bo jest to moment statyczny układu, liczony względem płaszczyzny przechodzącej przez środek masy). Ostatecznie mamy:

$$J_l \stackrel{tw}{=} J_{l_0} + m d^2 \quad (5.71)$$

Jest to twierdzenie Steinera. Mówi ono: moment bezwładności układu materialnego liczony względem prostej  $l$  jest równy momentowi bezwładności układu względem prostej  $l_0$  przechodzącej przez środek masy i równoległej do prostej  $l$ , powiększony o iloczyn masy układu i kwadratu odległości między tymi prostymi.

Rozważmy teraz dla układu materialnego (rys. 5.33) układ dwóch par płaszczyzn odpowiednio równoległych i niech jedna z tych par płaszczyzn zawiera środek masy układu.

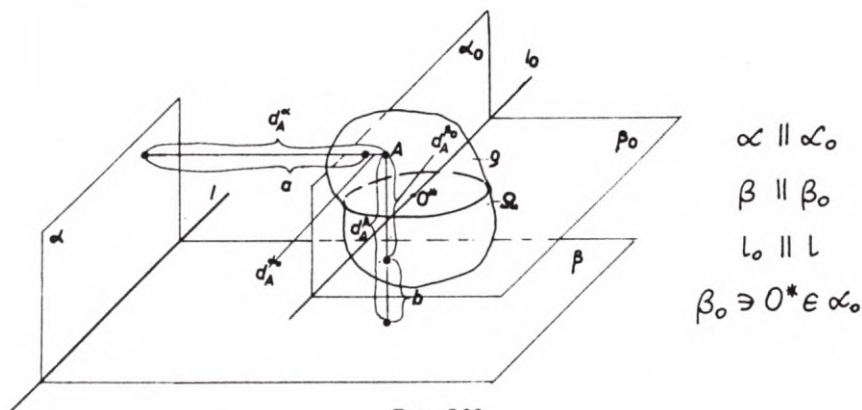
Moment dewiacji układu materialnego względem płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  ma postać:

$$D_{\alpha\beta} = D_I = \iiint_{\Omega} \rho d_A^\alpha d_A^\beta d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho (d_A^\alpha \rho + a)(d_A^\beta \rho + b) d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho d_A^\alpha \rho d_A^\beta \rho d\Omega +$$

$$+ ab \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + a \iiint_{\Omega} \rho d_A^\beta \rho d\Omega + b \iiint_{\Omega} \rho d_A^\alpha \rho d\Omega$$

a stąd otrzymujemy:

$$D_I \stackrel{tw}{=} D_{I_0} + mab \quad (5.72)$$



Rys. 5.33

A więc moment dewiacji układu materialnego liczony względem płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$  jest równy momentowi dewiacji układu względem płaszczyzn  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ , które są odpowiednio równoległe do płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$ , powiększony o iloczyn masy układu i miar odległości pomiędzy równoległymi płaszczyznami.



Rys. 5.34

W dowolnym punkcie  $A$  przestrzeni (rys. 5.34) możemy przyjąć układ współrzędnych i zestawić w nim dla układu materialnego tensor bezwładności:

$$(J_A) = \begin{pmatrix} J_x & -D_z & -D_y \\ -D_z & J_y & -D_x \\ -D_y & -D_x & J_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

Dla tak zbudowanego tensora liczymy jego niezmienniki:

$$I_1 = J_{11} + J_{22} + J_{33} = J_{kk}$$

$$I_2 = J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{12}^2 - J_{13}^2 - J_{23}^2$$

$$I_3 = \det(J_A)$$

a z równania wiekowego:

$$J^3 - I_1 J^2 + I_2 J - I_3 = 0$$

wartości własne  $J_1, J_2, J_3$ , które nazywamy głównymi momentami bezwładności.

Głównym momentom bezwładności przyporządkowane są główne osie bezwładności, wyznaczone przez wektory własne tensora bezwładności.

Jeżeli dla układu materialnego tensor bezwładności zestawimy w środku masy, to odpowiadające mu wartości własne nazywamy głównymi centralnymi momentami bezwładności, zaś osie wyznaczone przez wektory własne tego tensora – głównymi centralnymi osiami bezwładności.

Wykorzystując poznane twierdzenia dotyczące symetrycznego tensora II rzędu (a takim jest tensor bezwładności) możemy na tej podstawie podać własności głównych i głównych centralnych osi bezwładności:

1. Każdy układ materialny posiada co najmniej trzy główne osie bezwładności, a to dokładnie trzy, gdy  $J_1 \neq J_2 \neq J_3 \neq J_1$ , jedną główną oś i całą płaszczyznę głównych osi bezwładności prostopadłych do tej osi, gdy  $J_1 \neq J_2 = J_3$  lub  $J_2 \neq J_1 = J_3$  lub  $J_3 \neq J_1 = J_2$ , całą przestrzeń głównych osi bezwładności, gdy  $J_1 = J_2 = J_3$ .
2. Momenty bezwładności liczone względem głównych osi bezwładności są ekstremalne.
3. Momenty dewiacji liczone względem płaszczyzn wyznaczonych przez główne osie bezwładności są równe zeru.
4. Dla jednorodnego ( $\rho = \text{const}$ ) układu materialnego, posiadającego oś symetrii, jedna z głównych centralnych osi bezwładności pokrywa się z tą osią (jest przez nią wyznaczona).

### Przykład 5.5

Dla jednorodnego obszaru płaskiego prostokątem o gęstości  $\rho = 1$  wyznaczyć główne centralne osie bezwładności i główne centralne momenty bezwładności.

Wykorzystując symetrię układu stwierdzamy, że środek masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym, a osie  $x_0, y_0$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, gdyż w tym układzie moment dewiacji jest równy zeru. Kolejno otrzymujemy:

$$J_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^h y^2 dy = \frac{a h^3}{3}$$

$$J_{x_0} = J_x - m y_0^2 = \frac{a h^3}{3} - a h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{a h^3}{12}$$

a stąd:

$$J_y = \frac{h a^3}{3}, \quad J_{y_0} = \frac{h a^3}{12}$$

$$D_z = J_{xy} = \iint_D x y dx dy = \int_0^a x dx \int_0^h y dy = \frac{a^2 h^2}{4}$$

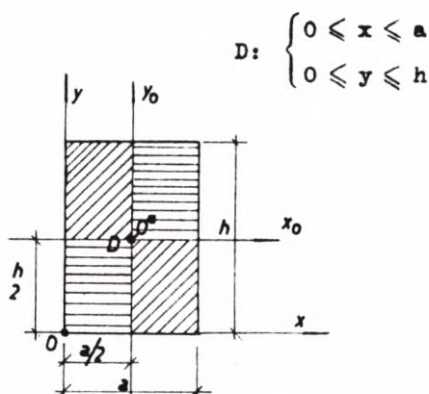
$$D_{z_0} = J_{x_0 y_0} = J_{xy} - m \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a^2 h^2}{4} - \frac{a^2 h^2}{4} = 0$$

**U w a g a:** Osie  $x, y$  w punkcie  $O$  nie są głównymi osiami bezwładności, gdyż w tym układzie współrzędnych  $J_{xy} = \frac{a^2 h^2}{4} \neq 0$ .

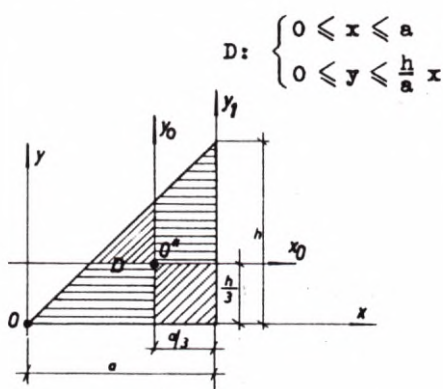
Na rys. 5.35 zaznaczono: ukośnymi liniami – podobzdar, w którym iloczyn współrzędnych jest ujemny (ujemny moment dewiacji), zaś poziomymi liniami – podobzdar o dodatnim momencie dewiacji.

### Przykład 5.6

Dla jednorodnego obszaru (o gęstości  $\rho = 1$ ) będącego trójkątem prostokątnym (rys. 5.36) zestawić elementy tensora bezwładności w środku masy.



Rys. 5.35



Rys. 5.36

Ponieważ  $\rho = \text{const}$ , to środek masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym układu. Zatem mamy wzory:

$$J_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{h}{a}x} y^2 dy = \frac{ah^3}{12}$$

$$J_{x_0} = J_x - m y_0^2 = \frac{ah^3}{12} - \frac{ah}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{ah^3}{36}$$

i podobnie:

$$J_{y_0} = \frac{ha^3}{36}$$

Moment bezwładności względem osi 0 y można obliczyć z definicji lub przez dwukrotne zastosowanie twierdzenia Steinera:

$$J_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^{\frac{h}{a}x} dy = \frac{ha^3}{4}$$

$$J_y = \left[ J_{y_1} - m \left(\frac{a}{3}\right)^2 \right] + m \left(a - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{ha^3}{12} - \frac{ah}{2} \cdot \frac{a^2}{9} + \frac{ah}{2} \cdot \frac{4}{9} a^2 = \frac{ha^3}{4}$$

$$D_z = J_{xy} = \iint_D xy dx dy = \int_0^a x dx \int_0^{\frac{h}{a}x} y dy = \frac{a^2 h^2}{8}$$

$$D_{z_0} = J_{x_0 y_0} = J_{xy} - m x_0 y_0 = \frac{a^2 h^2}{8} - \frac{ah}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} h = \frac{a^2 h^2}{72}$$

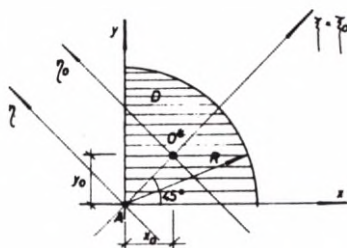
$$J_{z_0} = J_{x_0} + J_{y_0} = \frac{ah}{36} (a^2 + h^2)$$

$$(J_{0^*}) = \begin{pmatrix} \frac{ah^3}{36}, & -\frac{a^2 h^2}{72}, & 0 \\ -\frac{a^2 h^2}{72}, & \frac{ha^3}{36}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{ah^3 + ha^3}{36} \end{pmatrix}$$

### Przykład 5.7

Dla jednorodnego obszaru (rys. 5.37) (o gęstości  $\rho = 1$ ) będącego ćwiartką koła o promieniu  $R$  zestawić elementy tensora bezwładności w punkcie  $A$ , a następnie wyznaczyć główne centralne osie bezwładności i główne centralne momenty bezwładności.

Obliczenia wykonamy posługując się współzrędnymi biegunowymi. Otrzymamy:



Rys. 5.37

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad |J| = r \quad \Delta: \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$J_x = \iint_D y^2 dx dy = \iint_D r r^2 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi R^4}{16} = J_y$$

$$J_z = J_O = J_x + J_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$D_z = J_{xy} = \iint_D xy dx dy = \iint_D r r^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi dr d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{R^4}{8}$$

$$(J_A) = \begin{pmatrix} \frac{\pi R^4}{16}, & -\frac{R^4}{8}, & 0 \\ -\frac{R^4}{8}, & \frac{\pi R^4}{16}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\pi R^4}{8} \end{pmatrix}$$

Ze względu na symetrię obszaru osie  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $z$  są głównymi osiami bezwładności w punkcie  $A$ , gdyż  $J_{\xi\eta} = 0$ :

$$J_\xi = J_{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} = \frac{R^4}{16} (\pi - 2)$$

$$J_\eta = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} = \frac{R^4}{16} (\pi + 2)$$

$$J_z = J_\xi + J_\eta = J_x + J_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

Obliczmy współrzędne środka masy:

$$x_O = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_O = \frac{S_{xz}}{m}$$

$$m = \frac{\pi R^2}{4},$$

$$S_{yz} = \iint_D x dx dy = \iint_A r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{R^3}{3} = S_{xz}$$

$$x_O = y_O = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Osie  $\xi_O$ ,  $\eta_O$ ,  $z = z_O$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności:

$$J_{\xi_O} = J_\xi = \frac{R^4}{16}(\pi - 2)$$

$$J_{\eta_O} = J_\eta - m \left( \frac{4R}{3\pi} \sqrt{2} \right)^2 = \frac{R^4}{16}(\pi + 2) - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{32R^2}{9\pi^2} = \left( \frac{\pi + 2}{16} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$$

$$J_{z_O} = J_{\xi_O} + J_{\eta_O} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8R^4}{9\pi}$$

### Przykład 5.8

Dla zadanego obszaru płaskiego (rys. 5.38) jednorodnego (o gęstości  $\rho = 1$ ) wyznaczyć moment bezwładności względem osi  $l$ .

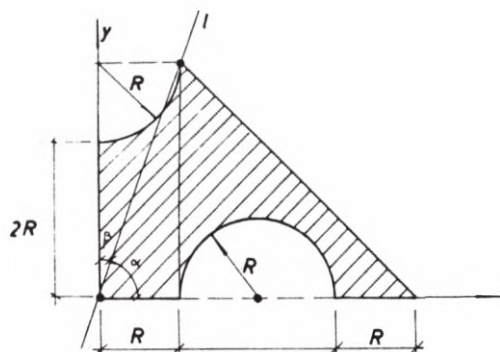
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \beta = \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin(2\alpha)$$



Rys. 5.38

Zadany obszar podzielmy na podobszary, a to: I – prostokąt o wymiarach  $(R, 3R)$ , II – trójkąt równoramienny, III – półkoło i IV – ćwiartka koła. Korzystamy z wyprowadzonych wzorów i twierdzenia Steinera:

$$J_x = \frac{R(3R)^3}{3} + \frac{3R(3R)^3}{12} - \frac{\pi R^4}{16} \cdot 2 -$$

$$- \left[ \frac{\pi R^4}{16} - \frac{\pi R^2}{4} \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi R^2}{4} \left( 3R - \frac{4R}{3\pi} \right)^2 \right] = 10,09 R^4$$

$$J_y = \frac{3R \cdot R^3}{3} + \frac{3R(3R)^3}{36} + \frac{9R^2}{2} (2R)^2 - \left[ \frac{\pi R^4}{8} + \frac{\pi R^2}{2} (2R)^2 \right] - \frac{\pi R^4}{16} = 14,38 R^4$$

$$J_{xy} = \frac{R^2 (3R)^2}{4} + \left[ -\frac{(3R)^2 \cdot (3R)^2}{72} + \frac{9R^2}{2} \cdot 2R \cdot R \right] - \left( \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2R \cdot \frac{4R}{3\pi} \right) -$$

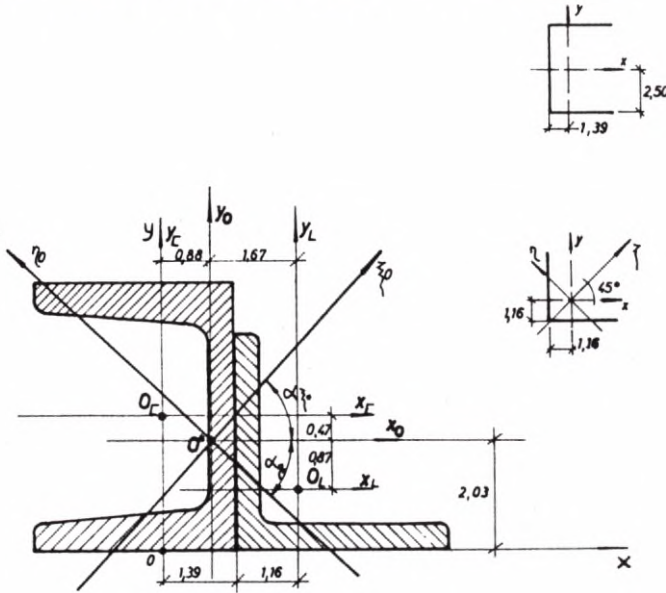
$$- \left[ -\frac{R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} \left( -\frac{4R}{3\pi} \right) + \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} \left( 3R - \frac{4R}{3\pi} \right) \right] = 7,92 R^4$$

**Odpowiedź:**

$$J_I = 12,08 R^4$$

### Przykład 5.9

Dla przekroju poprzecznego pręta (rys. 5.39) składającego się z ceownika NP 50 i kątownika równoramiennego NP 40 × 40 × 5 wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności i główne centralne osie bezwładności.



Rys. 5.39

Z tablic inżynierskich odczytano:

$$F_I = 7,12 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$J_x = 26,4 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_y = 9,12 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$F_L = 3,79 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$J_x = J_y = 5,43 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_\xi = 8,64 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_{\eta} = (J_x + J_y) - J_{\xi} = 2,22 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_{xy} = (J_y - J_{\xi}) \operatorname{tg} 45^{\circ} = -3,21 \text{ [cm}^4\text{]}$$

Obliczamy kolejno:

– pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$F = F_I + F_L = 7,12 + 3,79 = 10,91 \text{ cm}^2 = 10,91 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

– momenty statyczne w układzie  $\{0x, y\}$

$$S_{xz} = S_x = 7,12 \cdot 2,5 + 3,79 \cdot 1,16 = 22,2 \text{ cm}^3 = 22,2 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}$$

$$S_{yz} = S_y = 7,12 \cdot 0 + 3,79 \cdot 2,55 = 9,59 \text{ cm}^3 = 9,59 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}$$

– współrzędne środka masy w układzie  $\{0x, y\}$

$$x_O = \frac{S_y}{F} = \frac{9,59}{10,91} = 0,88 \text{ cm} = 0,88 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$y_O = \frac{S_x}{F} = \frac{22,2}{10,91} = 2,03 \text{ cm} = 2,03 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$

– elementy tensora bezwładności w układzie  $\{0x_O, y_O\}$

$$J_{x_O} = 26,4 + 7,12 \cdot 0,47^2 + 5,43 + 3,79 \cdot 0,87^2 = 36,27 \text{ cm}^4 = 36,27 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$J_{y_O} = 9,12 + 7,12 \cdot 0,88^2 + 5,43 + 3,79 \cdot 1,67^2 = 30,36 \text{ cm}^4 = 30,36 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$\begin{aligned} J_{x_O y_O} &= 7,12 \cdot (-0,88) \cdot 0,47 - 3,21 + 3,79 \cdot 1,67 \cdot (-0,87) = \\ &= -11,59 \text{ cm}^4 = -11,59 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]} \end{aligned}$$

– główne centralne momenty bezwładności

$$J_{\xi_O} = \frac{J_{x_O} + J_{y_O}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_O} - J_{x_O})^2 + 4J_{x_O y_O}^2} = 45,26 \text{ cm}^4 = 45,26 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$J_{\eta_O} = \frac{J_{x_O} + J_{y_O}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_O} - J_{x_O})^2 + 4J_{x_O y_O}^2} = 21,37 \text{ cm}^4 = 21,37 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$J_{z_o} = J_{\xi_o} + J_{\eta_o} = 66,63 \text{ cm}^4 = 66,63 \cdot 10^{-8} [\text{m}^4]$$

– kąty nachylenia głównych centralnych osi bezwładności w układzie  $O^* x_o y_o$

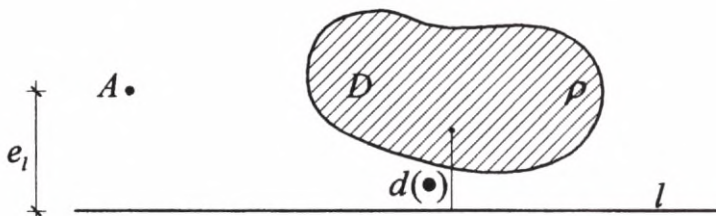
$$\text{tg } \alpha_{\xi_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{\xi_o}} = \frac{-11,59}{30,36 - 45,26} = 0,7784 \Rightarrow \alpha_{\xi_o} = 37^\circ 50'$$

$$\text{tg } \alpha_{\eta_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{\eta_o}} = \frac{-11,59}{30,36 - 21,37} = -1,2892 \Rightarrow \alpha_{\eta_o} = -52^\circ 10'$$

### Przykład 5.9a

Dla obszaru  $D$  o gęstości  $\rho$  dobrać taką odległość  $e_l$  punktu  $A$  o masie  $m_A = m_D$ , aby

$$J_l^A = J_l^D$$



Rozwiązanie

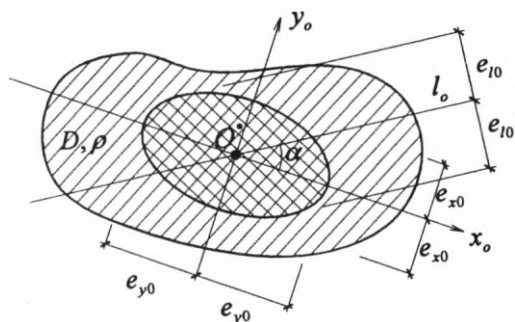
$$m_A = \iint_D \rho dA = m$$

$$J_l^A = m_A \cdot e_l^2 = \iint_D \rho d(\cdot)^2 dA = J_l^D = J_l$$

stąd

$$e_l = \pm \sqrt{\frac{J_l}{m}} \quad \text{— ramię (promień) bezwładności.}$$

Obliczmy promień bezwładności w układzie głównych centralnych osi bezwładności płaskiego obszaru  $D$  o gęstości  $\rho$ .



Osie  $x_o, y_o$  — główne centralne osie bezwładności,  $J_{x_o y_o} = 0$ .

$$J_{l_o} = J_{x_o} \cos^2 \alpha_o + J_{y_o} \sin^2 \alpha_o \quad / : m$$

$$\left( \sqrt{\frac{J_{x_o}}{m}} \right)^2 \cos^2 \alpha_o + \left( \sqrt{\frac{J_{y_o}}{m}} \right)^2 \sin^2 \alpha_o = \left( \sqrt{\frac{J_{l_o}}{m}} \right)^2$$

$$e_{x_o}^2 \cos^2 \alpha_o + e_{y_o}^2 \sin^2 \alpha_o = e_{l_o}^2$$

Jest to równanie elipsy bezwładności o półosiach

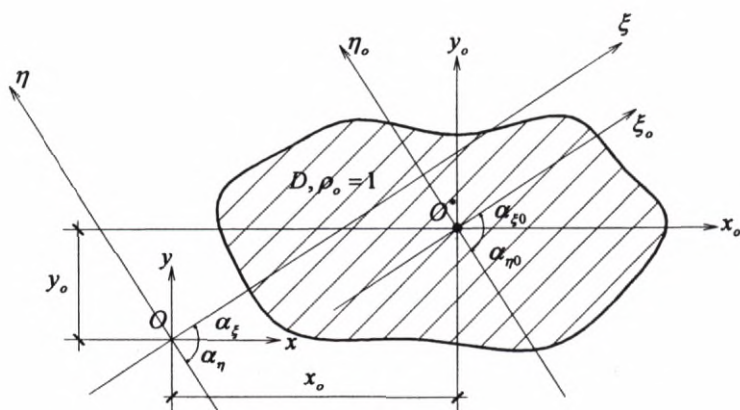
$$e_{x_o} = \pm \sqrt{\frac{J_{x_o}}{m}}, \quad e_{y_o} = \pm \sqrt{\frac{J_{y_o}}{m}}$$

Moment bezwładności względem dowolnej prostej przechodzącej przez środek masy  $O^*$  wynosi:

$$J_{l_o} = m e_{l_o}^2$$

#### 5.8.4. Charakterystyki geometryczne jednorodnych ( $\rho_o = 1$ ) figur płaskich — przekroje poprzeczne prętów

W obliczeniach wytrzymałościowych związanych z wymiarowaniem prętów posługujemy się pojęciami momentów statycznych, momentów bezwładności, momentów dewiacji, głównych i głównych centralnych momentów i osi bezwładności. Dla przekroju poprzecznego pręta wyznaczamy je według zdefiniowanych wcześniej zależności.



1. Pole przekroju poprzecznego pręta

$$F = \iint_D d x d y$$

2. Momenty statyczne

$$S_x = \iint_D y d x d y, \quad S_y = \iint_D x d x d y$$

3. Środek ciężkości przekroju poprzecznego pręta

$$x_o = \frac{S_y}{F}, \quad y_o = \frac{S_x}{F}$$

4. Momenty bezwładności

$$J_x = \iint_D y^2 d x d y, \quad J_y = \iint_D x^2 d x d y$$

5. Moment dewiacji (odśrodkowy)

$$J_{xy} = \iint_D x y d x d y$$

6. Tensor bezwładności w punkcie O

$$(J_O) = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z = J_x + J_y \end{pmatrix}$$

7. Główne momenty bezwładności w punkcie  $O$ 

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\min}$$

$$J_{\eta} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\max}$$

Sprawdzenie:

$$J_{\xi} + J_{\eta} = J_x + J_y$$

8. Główne osie bezwładności w punkcie  $O$ 

$$\operatorname{tg} \alpha_{\xi} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\xi}} \Rightarrow \alpha_{\xi}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\eta} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\eta}} \Rightarrow \alpha_{\eta}$$

Sprawdzenie:

$$|\alpha_{\xi}| + |\alpha_{\eta}| = 90^\circ$$

## 9. Tensor bezwładności w środku masy

$$(J_{O^*}) = \begin{pmatrix} J_{x_o} & -J_{x_o y_o} & 0 \\ -J_{x_o y_o} & J_{y_o} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_o} = J_{x_o} + J_{y_o} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} J_{x_o} = J_x - F \cdot y_o^2 \\ J_{y_o} = J_y - F \cdot x_o^2 \\ J_{x_o y_o} = J_{xy} - F \cdot x_o y_o \end{cases}$$

## 10. Główne centralne momenty bezwładności

$$J_{\xi_o} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_o} - J_{x_o})^2 + 4J_{x_o y_o}^2}$$

$$J_{\eta_o} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_o} - J_{x_o})^2 + 4J_{x_o y_o}^2}$$

Sprawdzenie:

$$J_{\xi_o} + J_{\eta_o} = J_{x_o} + J_{y_o}$$

11. Główne centralne osie bezwładności

$$\operatorname{tg} \alpha_{\xi_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{\xi_o}} \Rightarrow \alpha_{\xi_o}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\eta_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{\eta_o}} \Rightarrow \alpha_{\eta_o}$$

Sprawdzenie:

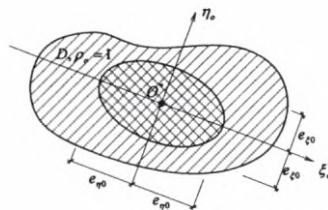
$$|\alpha_{\xi_o}| + |\alpha_{\eta_o}| = 90^\circ$$

12. Promień bezwładności

$$e_{\xi_o} = \pm \sqrt{\frac{J_{\xi_o}}{F}}, \quad e_{\eta_o} = \pm \sqrt{\frac{J_{\eta_o}}{F}}$$

13. Elipsa bezwładności

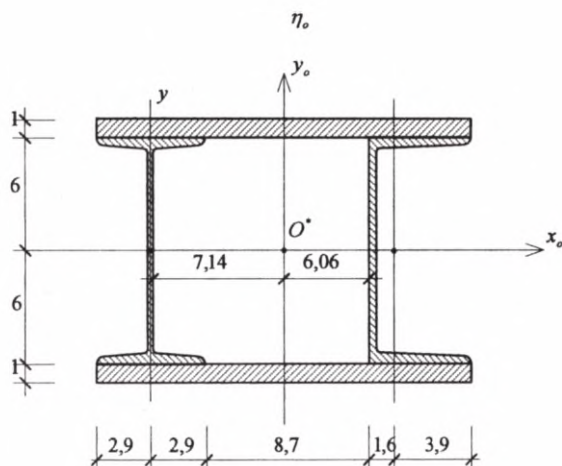
Elipsa bezwładności wspiera się na głównych centralnych osiach bezwładności, a jej półosie wyznaczone są przez promienie bezwładności  $e_{\xi_o}$  i  $e_{\eta_o}$ .



### Przykład 5.9b

Dla przekroju poprzecznego pręta składającego się z dwuteownika NP120, ceownika NP120 i blach  $200 \times 10$  wyznaczyć elipsę bezwładności.





Z tablic inżynierskich odczytano:

$$F_I = 14,2 \text{ [cm}^2\text{]} \quad F_C = 17 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$J_x = 328 \text{ [cm}^4\text{]} \quad J_x = 364 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_y = 21,5 \text{ [cm}^4\text{]} \quad J_y = 43,2 \text{ [cm}^4\text{]}$$

Obliczamy kolejno:

— pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$F = 14,2 + 17 + 20 + 20 = 71,2 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

— moment statyczny  $S_y$ :

$$S_y = 14,2 \cdot 0 + 17 \cdot 13,2 + 2 \cdot 20 \cdot 7,1 = 508,4 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}$$

$$x_o = \frac{S_y}{F} = \frac{508,4}{71,2} = 7,14 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$

Osie  $O^*$ ,  $x_o$ ,  $y_o$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, ponieważ  $J_{x_o y_o} = 0$  (oś  $x_o$  jest osią symetrii przekroju poprzecznego pręta).

Główne centralne momenty bezwładności:

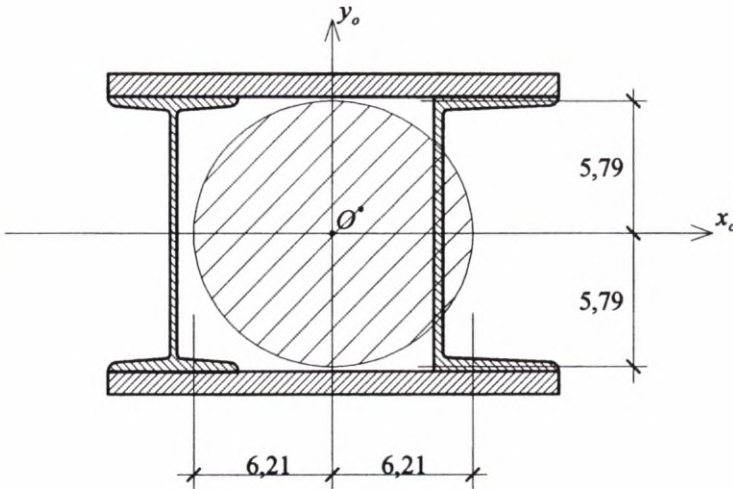
$$J_{x_o} = 328 + 364 + 2 \left( \frac{20 \cdot 1^3}{12} + 20 \cdot 4,5^2 \right) = 2385,33 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$J_{y_o} = 21,5 + 14,2 \cdot 7,14^2 + 43,2 + 17 \cdot 6,06^2 + 2 \left( \frac{1 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 0,04^2 \right) = 2746,31 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

Promienie bezwładności:

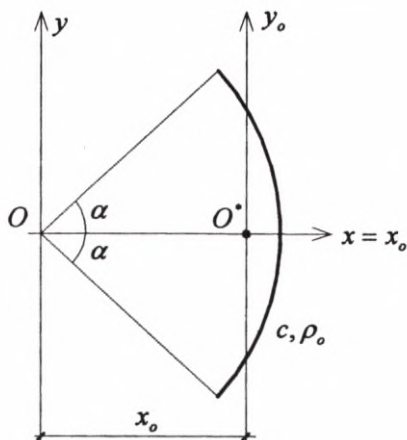
$$e_{x_o} = \pm \sqrt{\frac{J_{x_o}}{F}} = \pm \sqrt{\frac{2385,33}{71,2}} = \pm 5,79 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$e_{y_o} = \pm \sqrt{\frac{J_{y_o}}{F}} = \pm \sqrt{\frac{2746,31}{71,2}} = \pm 6,21 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}$$



### Przykład 5.10

Dla jednorodnej krzywej materialnej o gęstości  $\rho_o = \text{const}$  wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności



W układzie  $Oxy$  równanie krzywej  $c$  jest następujące:

$$c: \begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \quad -\alpha \leq \varphi \leq \alpha$$

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = R d\varphi$$

Położenie środka masy określa współrzędna  $x_o$ :

$$x_o = \frac{S_y}{m}$$

$$x_o = \int_c \rho_o dl = 2\rho_o \int_0^\alpha R d\varphi = 2\rho_o R \hat{\alpha}$$

$$S_y = \int_c \rho_o x dl = 2\alpha^2 \rho_o \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi = 2\rho_o R^2 \sin \alpha$$

$$x_o = \frac{2\rho_o R^2 \sin \alpha}{2\rho_o R \hat{\alpha}} = \frac{R \sin \alpha}{\hat{\alpha}}$$

Osie  $O^*$ ,  $x_o$ ,  $y_o$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, ponieważ  $J_{x_o y_o} = 0$ .

Główne centralne momenty bezwładności  $J_{x_o}$ ,  $J_{y_o}$ :

$$J_{x_o} = J_x = \int_c \rho_o y^2 dl = 2\rho_o R^3 \int_0^\alpha \sin^2 \alpha d\alpha = \rho_o \frac{R^3}{2} (2\hat{\alpha} - \sin 2\alpha)$$

$$J_{y_o} = \int_c \rho_o x^2 dl = 2 \rho_o R^3 \int_0^\alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \rho_o \frac{R^3}{2} (2\hat{\alpha} + \sin 2\alpha)$$

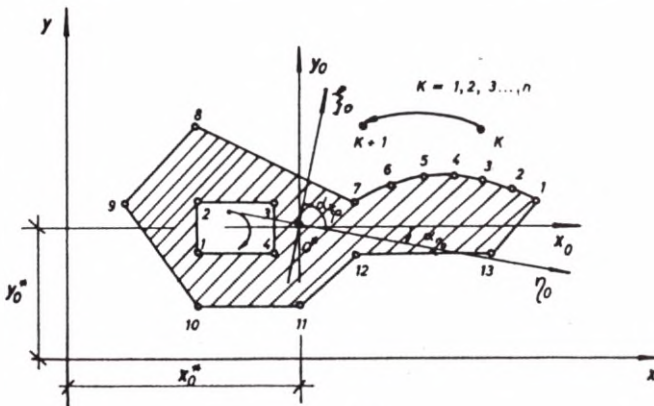
$$J_{y_o} = J_y - mx_o^2 = \rho_o \frac{R^3}{2} (2\hat{\alpha} + \sin 2\alpha) - 2 \rho_o R^3 \frac{\sin^2 \alpha}{\hat{\alpha}}.$$

### 5.8.5. Numeryczne wyznaczenie charakterystyk geometrycznych jednorodnych ( $\rho_o = 1$ ) figur płaskich

Obliczanie całek określających pole  $F = \iint_D dx dy$ , momenty statyczne

$$S_x = \iint_D y dx dy, \quad S_y = \iint_D x dx dy, \quad \text{momenty bezwładności} \quad J_x = \iint_D y^2 dx dy,$$

$J_y = \iint_D x^2 dx dy$  i moment dewiacji  $D_z = \iint_D xy dx dy$  dowolnego jednorodnego obszaru  $D$  określonego przez współrzędne  $(x_k, y_k)$  punktów naroży (por. rys. 5.39 a) sprowadza się do obliczania następujących wyrażeń przy zachowaniu wskazanej na rysunku kolejności oznaczeń naroży wzdłuż konturu:



Rys. 5.39a

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_{k+1} + y_k)$$

$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_k^2 + y_k y_{k+1} + y_{k+1}^2)$$

$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - y_k)(x_k^2 + x_k x_{k+1} + x_{k+1}^2)$$

$$J_x = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})(y_k^3 + y_k^2 y_{k+1} + y_k y_{k+1}^2 + y_{k+1}^3)$$

$$J_y = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - y_k)(x_k^3 + x_k^2 x_{k+1} + x_k x_{k+1}^2 + x_{k+1}^3)$$

$$J_{xy} = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1})[x_k(3y_k^2 + y_{k+1}^2 + 2y_k y_{k+1}) + x_{k+1}(3y_{k+1}^2 + y_k^2 + 2y_k y_{k+1})]$$

Możemy teraz wyznaczyć współrzędne środka masy (ciężkości):

$$x_o = \frac{S_y}{F}, \quad y_o = \frac{S_x}{F}$$

a dalej elementy tensora bezwładności w układzie  $\{O^*, x_o, y_o\}$ :

$$J_{x_o} = J_x - F y_o^2$$

$$J_{y_o} = J_y - F x_o^2$$

$$J_{x_o y_o} = J_{xy} - F x_o y_o$$

Z wzorów (5.23) obliczamy główne centralne momenty bezwładności:

$$J_{\xi_o} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_o} - J_{x_o})^2 + 4J_{x_o y_o}^2}$$

$$J_{\eta_o} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_o} - J_{x_o})^2 + 4J_{x_o y_o}^2}$$

zaś z (5.24) i (5.25) kierunki głównych centralnych osi bezwładności:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\xi_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{\xi_o}} \Rightarrow \alpha_{\xi_o}$$

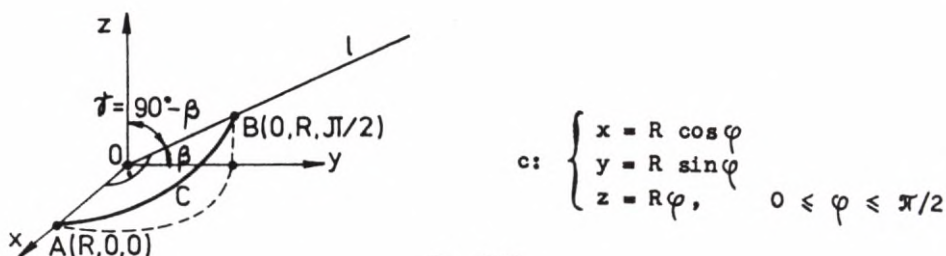
$$\operatorname{tg} \alpha_{\eta_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{\eta_o}} \Rightarrow \alpha_{\eta_o}$$

W przypadku figury wielospójnej odpowiednie wyrażenia dla konturu wyciętego (pustego) należy odejmować lub przy oznaczeniu kolejności punktów naroży tego konturu przyjąć obieg przeciwny do poprzedniego, czyli zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Przedstawiony powyżej tok obliczeń można zaprogramować na maszynie cyfrową, wprowadzając jako dane wejściowe kolejne punkty konturu i ich współrzędne w przyjętym układzie odniesienia. Jeśli kontur figury tworzy krzywa nie dająca się zapisać analitycznie, to kontur taki zastępujemy linią łamaną, zagęszczając odpowiednio punkty podziału.

### Przykład 5.10a

Dla jednorodnego łuku krzywej materialnej o gęstości  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ , pokazanego na rys. 5.40, wyznaczyć jego moment bezwładności względem osi  $l$ .



Rys. 5.40

Do obliczenia  $J_l$  wykorzystamy wzór (5.26), który dla tensora bezwładności ( $J_0$ ) ma postać:

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2D_x \cos \beta \cos \gamma - 2D_y \cos \alpha \cos \gamma - 2D_z \cos \alpha \cos \beta$$

Ponieważ w rozważanym przypadku:

$$\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 + 4}}, \quad \cos \gamma = \sin \beta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$$

to

$$J_l = J_y \frac{4}{\pi^2 + 4} + J_z \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4} - D_x \frac{4\pi}{\pi^2 + 4}$$

Widać więc, że należy obliczyć tylko te elementy tensora bezwładności, które występują w powyższej zależności. Liczymy kolejno:

– element liniowy łuku

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{2} R d\varphi$$

– momenty bezwładności

$$I_y = \int_C \rho_O (x^2 + z^2) dl = \rho_O \sqrt{2} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \varphi^2) d\varphi = \frac{\pi \sqrt{2} (6 + \pi^2)}{24} \rho_O R^3$$

$$I_z = \int_C \rho_O (x^2 + y^2) dl = \rho_O \sqrt{2} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \rho_O R^3$$

– moment dewiacji

$$D_x = \int_C \rho_O y z dl = \rho_O \sqrt{2} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \sqrt{2} \rho_O R^3$$

**Odpowiedź:**

$$J_I = \frac{(2\pi^2 - 9)\sqrt{2}}{3(\pi^2 + 4)} \rho_O R^3$$

### Przykład 5.11

Dla jednorodnej ( $\rho = \rho_O = 1$ ) powierzchni stożkowej (rys.5.41) dobrać wymiar  $R(H)$  tak, aby otrzymać całą przestrzeń głównych centralnych osi bezwładności.

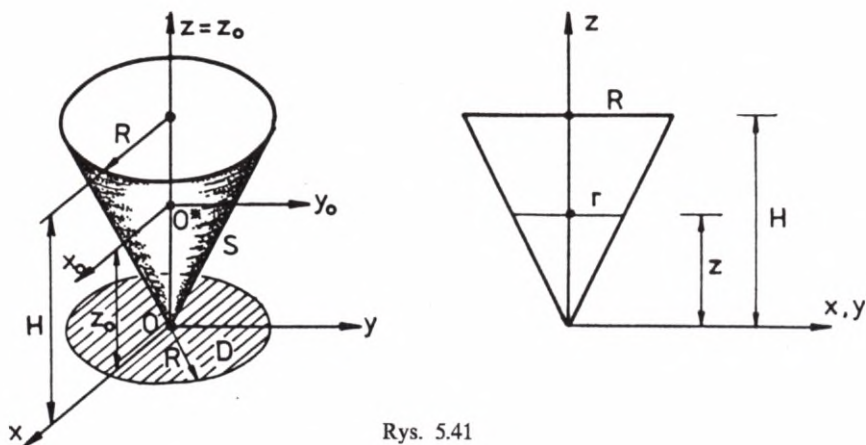
Równanie powierzchni stożkowej otrzymujemy z następującej proporcji:

$$\frac{z}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow z = \frac{H}{R} r = \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Przy obliczaniu całek powierzchniowych korzystać będziemy ze współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$ . Wyznaczamy kolejno:

– element powierzchniowy  $dS$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} r dr d\varphi$$



Rys. 5.41

– masę płata powierzchniowego

$$m = \iint_S \rho_O dS = \iint_A \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} \cdot r dr d\varphi = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

– moment statyczny  $S_{xy}$

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iint_S \rho_O z dS = \iint_A \frac{H}{R^2} \sqrt{R^2 + H^2} \cdot r^2 dr d\varphi = \frac{H}{R^2} \sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{3}{2} H \pi R \sqrt{R^2 + H^2} \end{aligned}$$

– współrzędną  $z_O$  środka masy

$$z_O = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{2}{3} H$$

– moment bezwładności względem osi  $z = z_O$

$$\begin{aligned} J_z = J_{z_O} &= \iint_S \rho_O (x^2 + y^2) dS = \iint_A \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} \cdot r^3 dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2} R^3 \sqrt{R^2 + H^2} \end{aligned}$$



– moment bezwładności  $J_x$

$$J_x = \iint_S \rho_0 (y^2 + z^2) dS = \iint_d \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} \left( r^3 \sin^2 \varphi + \frac{H^2}{R^2} r^3 \right) dr d\varphi =$$

$$= \frac{1}{R} \sqrt{R^2 + H^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \left( \sin^2 \varphi + \frac{H^2}{R^2} \right) d\varphi = \frac{\pi}{4} R (R^2 + 2H^2) \sqrt{R^2 + H^2} = J_y$$

– moment bezwładności  $J_{x_0}$

$$J_{x_0} = J_x - m \cdot z_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot R (R^2 + 2H^2) \sqrt{R^2 + H^2} - \pi R \sqrt{R^2 + H^2} \cdot \frac{4}{9} H^2 =$$

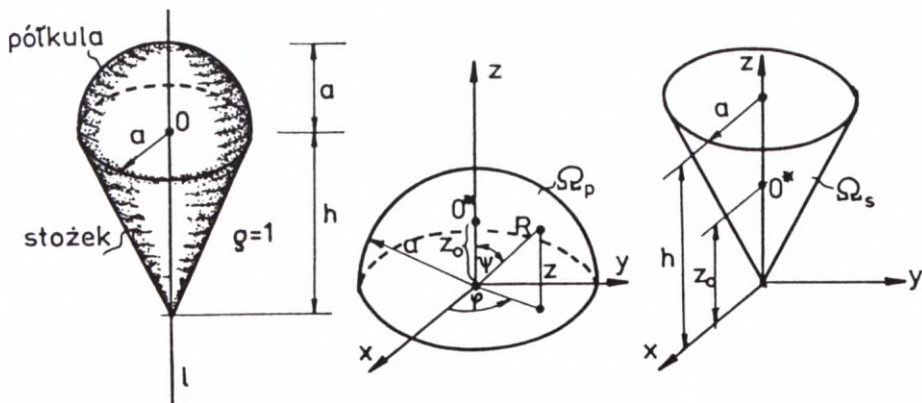
$$= \frac{\pi}{2} R \left( \frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{9} \right) \sqrt{R^2 + H^2} = J_{y_0}$$

Ponieważ ma być cała przestrzeń głównych centralnych osi bezwładności, to musi być spełniony warunek  $J_{x_0} = J_{y_0} = J_{z_0}$ . Stąd mamy:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{3} H$$

### Przykład 5.12

Dla jednorodnej ( $\rho = \rho_0 = 1$ ) bryły obrotowej wyznaczyć wymiar  $h(a)$  z warunku, aby środek masy pokrywał się z punktem 0 opisanym na rys. 5.42. Dla tak dobranego wymiaru  $h$  obliczyć  $J_I$ .



Rys. 5.42

Obszar  $\Omega_p$ 

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \psi \\ y = R \sin \varphi \sin \psi \\ z = R \cos \psi \end{cases}$$

$$V_p: \begin{cases} 0 \leq R \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \psi \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$|J_p| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = |-R^2 \sin \psi|$$

Obszar  $\Omega_s$ 

$$z = \frac{h}{a}r$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$V_s: \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{h}{a}r \leq z \leq h \end{cases}$$

$$|J_s| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

Obliczenia wykonamy oddzielnie dla obu podobszarów

a) dla półkuli

$$m_p = \iiint_{\Omega_p} \rho_O d\Omega = \int_0^a R^2 dR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \frac{2}{3} \pi a^3$$

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega_p} \rho_O z d\Omega = \int_0^a R^3 dR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\psi d\psi = \frac{\pi a^4}{4}$$

$$z_o^p = \frac{S_{xy}}{m_p} = \frac{3}{8}a$$

$$J_z = \iiint_{\Omega_p} \rho_O (x^2 + y^2) d\Omega = \int_0^a R^4 dR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \psi d\psi = \frac{4}{15} \pi a^5$$

b) dla stożka

$$m_s = \iiint_{\Omega_p} \rho_O d\Omega = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{h}{a}r}^h dz = 2\pi \int_0^a (h - \frac{h}{a}r) r dr = \frac{1}{3} \pi h a^2$$

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega_p} \rho_O z d\Omega = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{h}{a}r}^h z dz = \pi \int_0^a (h^2 - \frac{h^2}{a^2} r^2) r dr = \frac{1}{4} \pi h^2 a^2$$

$$z_O^s = \frac{S_{xy}}{m_s} = \frac{3}{4} h$$

$$J_z = \iiint_{\Omega_p} \rho_O (x^2 + y^2) d\Omega = \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{h}{a}r}^h dz = 2\pi \int_0^a (h - \frac{h}{a}r) r^3 dr = \frac{1}{10} \pi h a^4$$

Aby punkt  $O$  był środkiem masy dla zadanej bryły obrotowej, to musi być spełniony następujący warunek:

$$m_p \cdot z_O^p = m_s (h - z_O^s) \Leftrightarrow \frac{2}{5} \pi a^3 \cdot \frac{3}{8} a = \frac{1}{3} \pi h a^2 \cdot \frac{1}{4} h$$

czyli

$$h = \sqrt{3} a$$

Moment bezwładności bryły względem prostej  $l$  wynosi:

$$J_l = J_z^p + J_z^s = \frac{4}{15} \pi a^5 + \frac{1}{10} \pi \sqrt{3} \cdot a^5 = \frac{8 + 3\sqrt{3}}{30} \pi a^5$$

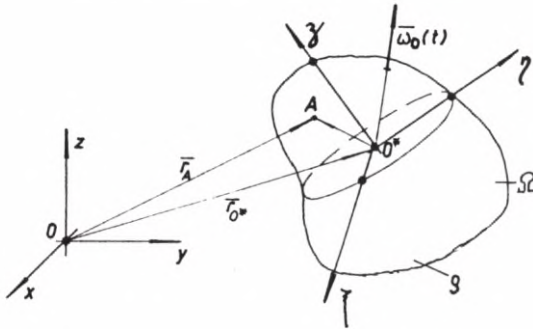
## 5.9. TWIERDZENIE KOENIGA

W ruchu dowolnym ciała sztywnego prędkość bieżącego punktu ciała możemy przedstawić jako sumę prędkości środka masy i iloczynu wektorowego wektora prędkości kątovej z wektorem łączącym środek masy z punktem bieżącym (rys. 5.43).

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{O^*} + \bar{\omega}_{O^*} \times \overline{O^*A}$$

$$\overline{O^*A} = \xi \bar{e}_\xi + \eta \bar{e}_\eta + \zeta \bar{e}_\zeta$$

$$\bar{\omega}_{O^*} = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta$$



Rys. 5.43

Obliczmy energię kinetyczną dla ciała:

$$E_k = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho \bar{v}_A^2 d\Omega = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho [\bar{v}_{O^*}^2 + 2 \bar{v}_{O^*} \cdot (\bar{\omega}_{O^*} \times \overline{O^*A}) + (\bar{\omega}_{O^*} \times \overline{O^*A})^2] d\Omega$$

$$E_k = \frac{\bar{v}_{O^*}^2}{2} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + (\bar{v}_{O^*} \times \bar{\omega}_{O^*}) \cdot \iiint_{\Omega} \rho \overline{O^*A} d\Omega + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho [(\zeta \omega_\eta - \eta \omega_\zeta)^2 + (\xi \omega_\zeta - \zeta \omega_\xi)^2 + (\eta \omega_\xi - \xi \omega_\eta)^2] d\Omega = \frac{m \bar{v}_{O^*}^2}{2} + \frac{1}{2} J_{ij} \omega_i \omega_j$$

$$E_k \stackrel{tw}{=} \frac{m \bar{v}_{O^*}^2}{2} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{O^*}^T (J_{O^*}) \bar{\omega}_{O^*} \quad (5.74)$$

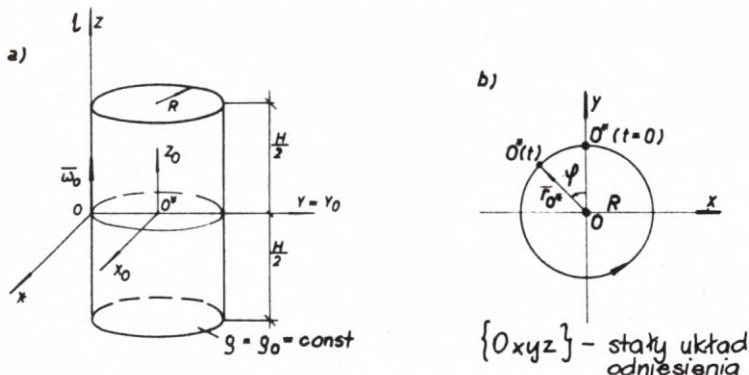
**Twierdzenie Koeniga:** W ruchu dowolnym ciała sztywnego jego energia kinetyczna jest równa sumie energii kinetycznej ruchu postępowego (wyznaczonego przez ruch środka masy) i energii kinetycznej chwilowego ruchu obrotowego (opisanego przez wektor  $\bar{\omega}_{O^*}$ ).

W przypadku, gdy  $\bar{\omega}_{O^*}$  ma stały kierunek  $l$ , to z zależności (5.74) otrzymujemy:

$$E_k = \frac{m \bar{v}_{O^*}^2}{2} + \frac{1}{2} J_l \omega_{O^*}^2 \quad (5.75)$$

### Przykład 5.13

Obliczyć pęd, kręt względem punktu  $O^*$  oraz energię kinetyczną dla jednorodnego walca kołowego (rys. 5.44) poruszającego się ruchem obrotowym wokół osi  $l$  ze stałą prędkością kątową  $\omega = \omega_0 = \text{const}$ .



Rys. 5.44

Przy stałej prędkości kątowej droga kąтова jest funkcją liniową:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Ponieważ dla  $t = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ , to  $\varphi_0 = 0$ .

Wykorzystując rysunek 5.41 b wyznaczamy funkcje ruchu środka masy:

$$\vec{r}_{O^*}(t) = -R \sin(\omega_0 t) \vec{e}_x + R \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y,$$

i jego prędkość:

$$\vec{v}_{O^*} = -R \omega_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x - R \omega_0 \sin(\omega_0 t) \vec{e}_y$$

Pęd bryły jest równy pędowi środka masy, czyli:

$$\vec{p} = \vec{p}_{O^*} = m \vec{v}_{O^*} = \rho_0 \pi R^3 H \omega_0 [-\cos(\omega_0 t) \vec{e}_x - \sin(\omega_0 t) \vec{e}_y]$$

Przy obliczaniu krętu bryły względem środka masy skorzystamy z twierdzenia o zmianie bieguną:

$$\vec{K}_{O^*} = \vec{K}_O + \vec{p} \times \vec{OO}^*$$

gdzie:

$$\bar{K}_O = (J_O) \bar{\omega}_O = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_O \end{Bmatrix} = J_z \omega_O \bar{e}_z$$

Momenty bezwładności wygodnie będzie liczyć, posługując się współrzędnymi cylindrycznymi  $\{r, \varphi, z\}$ . Tok obliczeń jest następujący:

$$\begin{cases} x_O = r \cos \varphi \\ y_O = r \sin \varphi \\ z_O = z \end{cases} \quad |J| = r, \quad \Delta: \begin{cases} 0 \leq x \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -H/2 \leq z \leq H/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_y = J_{y_O} = J_{x_O} &= \iiint_{\Omega} \rho_O (y_O^2 + z_O^2) d\Omega = \rho_O \iiint_{\Delta} r (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dr d\varphi dz = \\ &= \rho_O \left[ \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz + \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz \right] = \\ &= \rho_O \frac{\pi H R^2}{12} (3R^2 + H^2) \end{aligned}$$

$$J_x = J_{x_O} + m R^2 = \rho_O \frac{\pi H R^2}{12} (21R^2 + H^2)$$

$$\begin{aligned} J_{z_O} &= \iiint_{\Omega} \rho_O (x_O^2 + y_O^2) d\Omega = \rho_O \iiint_{\Delta} r^3 dr d\varphi dz = \rho_O \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \pi H R^4 \rho_O \end{aligned}$$

$$J_z = J_{z_O} + m R^2 = \frac{3}{2} \rho_O \pi H R^4$$

Stąd otrzymujemy:

$$\bar{K}_O = \frac{3}{2} \rho_O \pi H R^4 \omega_O \bar{e}_z$$

i

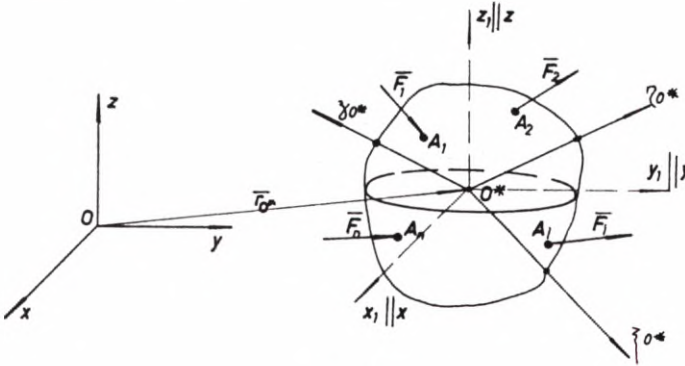
$$\bar{K}_{O^*} = \frac{1}{2} \rho_O \pi H R^4 \omega_O \bar{e}_z$$

W ruchu obrotowym energia kinetyczna ciała wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} J_I \omega_O^2 = \frac{1}{2} J_z \omega_O^2 = \frac{3}{4} \rho_O \pi H R^4 \omega_O^2$$

## 5.10. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU CIAŁA SZTYWNEGO

W naszych rozważaniach doszliśmy do dynamiki ciała sztywnego, w której wykorzystamy wszystkie dotychczas poznane zagadnienia. Istotą dynamiki bryły sztywnej (rys. 5.45) jest wyznaczenie jej ruchu dowolnego, a więc najbardziej ogólnego z możliwych ruchów. Z kinematyki ciała sztywnego wiemy, że każdy ruch dowolny ciała możemy rozpatrywać jako złożenie ruchu postępowego z prędkością dowolnie wybranego punktu (jest nim środek masy, gdyż zasada krętu obowiązuje względem środka masy jako bieguna, a opis charakterystyk geometrycznych ciała jest prosty w układzie głównych centralnych osi bezwładności) i chwilowego ruchu obrotowego wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez ten punkt.



Rys. 5.45

Z zasady pędu dla ciała sztywnego wyznaczymy ruch środka masy (a tym samym ruch postępowy ciała):

$$\dot{\bar{p}}_{O^*} = \bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

Równanie:

$$m \ddot{\bar{r}}_{O^*} = \bar{S} \quad (5.76)$$

jest prawem ruchu dla środka masy, w którym  $m$  jest masą ciała,  $\ddot{\bar{r}}_{O^*}$  – przyspieszeniem środka masy, zaś  $S$  – sumą sił działających na dane ciało.

Równanie (5.76) zapisane w bazie stałego układu odniesienia przedstawia układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{O^*} = S_x \\ m\ddot{y}_{O^*} = S_y \\ m\ddot{z}_{O^*} = S_z \end{cases} \quad (5.77)$$

z którego przy zadanych warunkach początkowych:

$$\bar{r}_{O^*}(t=0) = \hat{\bar{r}}_{O^*} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x_{O^*}(t=0) = \hat{x}_{O^*} \\ y_{O^*}(t=0) = \hat{y}_{O^*} \\ z_{O^*}(t=0) = \hat{z}_{O^*} \end{cases} \quad (5.78)$$

i

$$\dot{\bar{r}}_{O^*}(t=0) = \hat{\dot{\bar{r}}}_{O^*} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \dot{x}_{O^*}(t=0) = \hat{\dot{x}}_{O^*} \\ \dot{y}_{O^*}(t=0) = \hat{\dot{y}}_{O^*} \\ \dot{z}_{O^*}(t=0) = \hat{\dot{z}}_{O^*} \end{cases}$$

wyznaczamy funkcje ruchu środka masy.

Pozostaje zatem wyznaczyć chwilowy ruch obrotowy, który jest ruchem kulistym wokół środka masy. W tym celu skorzystamy z zasady krętu:

$$\dot{\bar{K}}_{O^*} = \bar{M}_{O^*}$$

gdzie:

$$\bar{K}_{O^*} = (J_{O^*})\bar{\omega}_{O^*}$$

przyjmując środek masy jako biegun.

Pochodną po czasie liczymy według wzoru (1.52):

$$(J_{O^*})\dot{\bar{\omega}}_{O^*} + \bar{\omega}_{O^*} \times [(J_{O^*})\bar{\omega}_{O^*}] = \bar{M}_{O^*} \quad (5.79)$$

Równanie (5.79) zapisane w bazie ruchomego układu odniesienia związanego z poruszającym się ciałem (przyjęto, że osie  $\xi_{O^*}$ ,  $\eta_{O^*}$ ,  $\zeta_{O^*}$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności) przedstawia układ trzech równań różniczkowych, zwanych równaniami Eulera:



$$\begin{cases} J_{\xi_{0*}} \dot{\omega}_{\xi_{0*}} + (J_{\zeta_{0*}} - J_{\eta_{0*}}) \omega_{\eta_{0*}} \omega_{\zeta_{0*}} = M_{\xi_{0*}} \\ J_{\eta_{0*}} \dot{\omega}_{\eta_{0*}} + (J_{\xi_{0*}} - J_{\zeta_{0*}}) \omega_{\xi_{0*}} \omega_{\zeta_{0*}} = M_{\eta_{0*}} \\ J_{\zeta_{0*}} \dot{\omega}_{\zeta_{0*}} + (J_{\eta_{0*}} - J_{\xi_{0*}}) \omega_{\xi_{0*}} \omega_{\eta_{0*}} = M_{\zeta_{0*}} \end{cases} \quad (5.80)$$

w których  $J_{\xi_{0*}}, J_{\eta_{0*}}, J_{\zeta_{0*}}$  są głównymi centralnymi momentami bezwładności,  $\omega_{\xi_{0*}}, \omega_{\eta_{0*}}, \omega_{\zeta_{0*}}$  – współrzędnymi wektora prędkości kątowej o kierunku przechodzącym przez środek masy, zaś  $M_{\xi_{0*}}, M_{\eta_{0*}}, M_{\zeta_{0*}}$  – współrzędnymi momentu liczonego względem środka masy od sił działających na dane ciało.

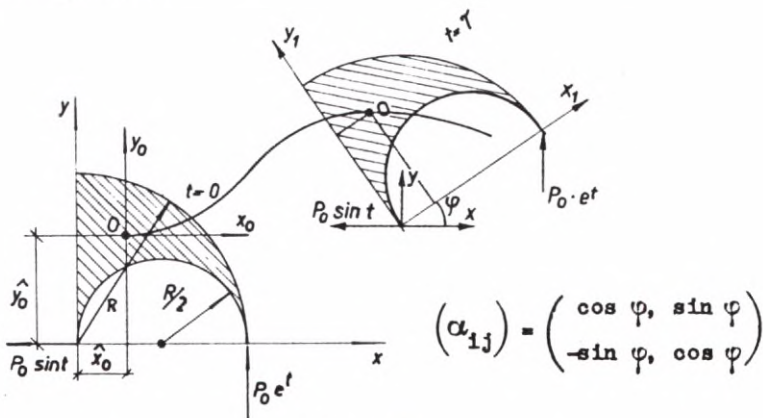
Do równań (5.80) dołączamy warunki początkowe:

$$\bar{\omega}_{0*}(t=0) = \hat{\omega}_{0*} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \omega_{\xi_{0*}}(t=0) = \hat{\omega}_{\xi_{0*}} \\ \omega_{\eta_{0*}}(t=0) = \hat{\omega}_{\eta_{0*}} \\ \omega_{\zeta_{0*}}(t=0) = \hat{\omega}_{\zeta_{0*}} \end{cases} \quad (5.81)$$

przy których z tych równań wyznaczamy wektor  $\bar{\omega}_{0*}$ , określający jednoznacznie chwilowy ruch obrotowy ciała sztywnego.

### Przykład 5.14

Wyznaczyć ruch sztywnego układu materialnego jednorodnego o gęstości  $\rho = 1$  przyjmując, że w chwili  $t=0$  był on w spoczynku w położeniu jak pokazano na rys. 5.46.



Rys. 5.46

Obliczenia rozpoczniemy od przyjęcia warunków początkowych. W tym celu liczymy kolejno:

– masę układu:

$$m = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{8}$$

– momenty statyczne:

$$S_{xz} = S_x = \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \frac{\pi R^2}{8} \cdot \frac{4R}{6\pi} = \frac{R^3}{4}$$

$$S_{yz} = S_y = \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \frac{\pi R^2}{8} \cdot \frac{R}{2} = \frac{16 - 3\pi}{48} R^3$$

– współrzędne środka masy dla  $t = 0$ :

$$\begin{cases} x_O(t=0) = \frac{S_y}{m} = \frac{16 - 3\pi}{6\pi} R = \hat{x}_O \\ y_O(t=0) = \frac{S_x}{m} = \frac{2}{\pi} R = \hat{y}_O \end{cases}$$

i jego prędkość:

$$\begin{cases} \dot{x}_O(t=0) = 0 \\ \dot{y}_O(t=0) = 0 \end{cases}$$

Z prawa ruchu środka masy:

$$\begin{cases} \ddot{x}_O(t) = -\frac{8P_O}{\pi R^2} \sin t \\ \ddot{y}_O(t) = \frac{8P_O}{\pi R^2} e^t \end{cases}$$

po przecałkowaniu po czasie otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{x}_O(t) = \frac{8P_O}{\pi R^2} \cos t + C_1 \\ \dot{y}_O(t) = \frac{8P_O}{\pi R^2} e^t + C_2 \end{cases}$$

Zatem całka ogólna ma postać:

$$\begin{cases} x_o(t) = \frac{8 P_o}{\pi R^2} \sin t + C_1 t + C_3 \\ y_o(t) = \frac{8 P_o}{\pi R^2} e^t + C_2 t + C_4 \end{cases}$$

Stałe  $C_1, C_2, C_3, C_4$  wyznaczamy z przyjętych warunków początkowych:

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{-8 P_o}{\pi R^2}, \quad \hat{C}_3 = \hat{x}_o, \quad \hat{C}_4 = \hat{y}_o - \frac{8 P_o}{\pi R^2}$$

i po podstawieniu ich do całki ogólnej otrzymujemy funkcje ruchu środka masy:

$$\begin{cases} x_o(t) = \frac{8 P_o}{\pi R^2} (\sin t - t) + \hat{x}_o \\ y_o(t) = \frac{8 P_o}{\pi R^2} (e^t - t - 1) + \hat{y}_o \end{cases}$$

Chwilowy ruch obrotowy wokół środka masy wyznaczamy z równań Eulera (5.80), które redukują się w tym przypadku do jednego równania:

$$J_{\zeta_o} \dot{\omega}_{\zeta_o} = M_{\zeta_o}$$

gdzie:

$$J_{\zeta_o} = J_{\zeta_o} + J_{\eta_o} = J_{x_o} + J_{y_o}$$

$$M_{\zeta_o} = P_o \{ e^t [(R - \hat{x}_o) \cos \varphi + \hat{y}_o \sin \varphi] - \sin t (\hat{x}_o \sin \varphi + \hat{y}_o \cos \varphi) \}$$

$$J_{x_o} = \left( \frac{\pi R^4}{16} - \frac{\pi R^4}{128} \right) - \frac{\pi R^2}{8} \hat{y}_o^2$$

$$J_{y_o} = \left[ \frac{\pi R^4}{16} - \left( \frac{\pi R^4}{128} + \frac{\pi R^2}{8} \cdot \frac{R^2}{4} \right) \right] - \frac{\pi R^2}{8} \hat{x}_o^2$$

$$J_{\zeta_o} = J_{x_o} + J_{y_o} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{3\pi}{64} R^4 - \frac{\pi R^2}{8} (\hat{x}_o^2 + \hat{y}_o^2)$$

Mamy do rozwiązania równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\ddot{\varphi} = \frac{P_0}{J_{z_0}} \{ e^t [(R - \hat{x}_0) \cos \varphi + \hat{y}_0 \sin \varphi] - \sin t (\hat{x}_0 \sin \varphi + \hat{y}_0 \cos \varphi) \}$$

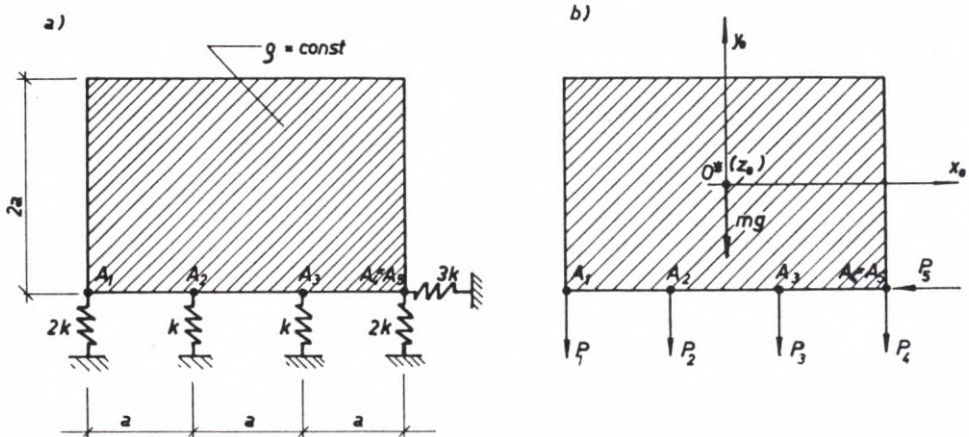
z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t=0) = 0 \\ \varphi(t=0) = 0 \end{cases}$$

Równanie to możemy rozwiązać w przybliżony sposób, np. metodą różnic skończonych.

### Przykład 5.15

Jednorodna sztywna tarcza prostokątna o masie  $m$ , podparta za pomocą sprężyn o stałych  $ik$  (rys. 5.47), wykonuje małe drgania płaskie. Wyznaczyć częstości drgań układu.



Rys. 5.47

Ruch sztywnej tarczy w płaszczyźnie  $\{O^* x_0 y_0\}$  opisany jest jednoznacznie przez przemieszczenia  $u_0(t)$ ,  $\vartheta_0(t)$  środka masy i obrót naokoło osi  $z_0$  określony kątem  $\gamma_0(t)$ . Siły zastępujące działanie sprężyn (więzów) pokazano na rys. 5.44 b. Po wykorzystaniu równań (2.25) siły te możemy zapisać następująco:

$$P_1 = 2k \vartheta_1 = 2k \left[ \vartheta_0 + \gamma_0 \left( -\frac{3}{2} a \right) \right] = 2k \vartheta_0 - 3ka \gamma_0$$

$$P_2 = k \vartheta_2 = k \left[ \vartheta_0 + \gamma_0 \left( -\frac{a}{2} \right) \right] = k \vartheta_0 - \frac{1}{2} k a \gamma_0$$

$$P_3 = k \vartheta_3 = k \left( \vartheta_0 + \gamma_0 \frac{a}{2} \right) = k \vartheta_0 + \frac{1}{2} k a \gamma_0$$

$$P_4 = 2k \vartheta_4 = 2k \left( \vartheta_0 + \gamma_0 \frac{3}{2} a \right) = 2k \vartheta_0 + 3k a \gamma_0$$

$$P_5 = -3k u_5 = -3k \left[ u_0 - \gamma_0 (-a) \right] = 3k u_0 + 3k a \gamma_0$$

Moment sił (czynnych i biernych) działających na tarczę liczony względem środka masy jest równy:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O^*} &= \bar{P}_1 \times \bar{A}_1 0^* + \bar{P}_2 \times \bar{A}_2 0^* + \bar{P}_3 \times \bar{A}_3 0^* + (\bar{P}_4 + \bar{P}_5) \times \bar{A}_4 0^* = \\ &= (0, 0 - 3k a u_0 - \frac{25}{2} k a^2 \gamma_0) \end{aligned}$$

Równania ruchu mają postać:

$$\begin{cases} m \ddot{\vartheta}_0 = -mg - 6k \vartheta_0 \\ m \ddot{u}_0 = -3k u_0 - 3k a \gamma_0 \\ J_{z_0} \ddot{\gamma}_0 = -3k a u_0 + \left( -\frac{25}{2} k a^2 \gamma_0 \right) \end{cases}$$

gdzie:

$$J_{z_0} = J_{x_0} + J_{y_0} = \rho_0 \left[ \frac{3a(2a)^3 + 2a(3a)^3}{12} \right] = \frac{13}{12} m a^2$$

$$\rho_0 = \frac{m}{6a^2}$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vartheta}_O + \frac{6k}{m} \vartheta_O = -g \quad (1) \\ \ddot{u}_O + \frac{3k}{m} u_O + \frac{3ka}{m} \gamma_O = 0 \quad (2) \\ \frac{3k}{m} u_O + \frac{13}{12} a \ddot{\gamma}_O + \frac{25k}{2m} a \gamma_O = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

Całka ogólna równania (1) jest następująca:

$$\vartheta_O(t) = -\frac{mg}{6k} + C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{6k}{m}} t\right)$$

Składnik pierwszy reprezentuje ugięcie statyczne pod wpływem ciężaru  $mg$ , pozostałe składniki – drgania z częstością  $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ . Równania (2) i (3) stanowią układ dwóch równań różniczkowych, których rozwiązania szukać będziemy w postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_O(t) = A \sin(\omega t) \\ \gamma_O(t) = B \sin(\omega t) \end{array} \right.$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$\left[ \left( -\omega^2 + \left( \frac{3k}{m} \right) A + \frac{3k}{m} a B \right) \sin(\omega t) = 0 \right.$$

$$\left. \left[ \frac{3k}{m} A + a \left( -\frac{13}{12} \omega^2 + \frac{25k}{2m} \right) B \right] \sin(\omega t) = 0 \right.$$

Równania te mają być spełnione w każdej chwili ruchu. Jest to możliwe, gdy wyznacznik główny układu będzie równy zero. Prowadzi to do równania:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{3k}{m}, & \frac{3k}{m}a \\ \frac{3k}{m}, & \left(-\frac{13}{12}\omega^2 + \frac{25k}{2m}\right)a \end{vmatrix} = a \left( \frac{13}{12}\omega^4 - \frac{63}{4m}k\omega^2 + \frac{57k^2}{2m^2} \right) = 0$$

którego rozwiązaniem są pierwiastki:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{11k}{26m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{367k}{26m}}$$

**Odpowiedź:**

Analizowany układ wykonuje małe drgania z częstościami:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{11k}{26m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{156k}{26m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{367k}{26m}}$$

Zastanówmy się jeszcze nad tym, jaki będzie ruch ciała sztywnego, na które działa zerowy układ sił. Do rozwiązania tak postawionego problemu wykorzystamy równania różniczkowe ruchu sztywnego układu materialnego:

$$\begin{cases} m\ddot{\bar{r}}_{O^*} = \bar{S} = \bar{0} \\ [(J_{O^*})\ddot{\bar{\omega}}_{O^*}] = \bar{M}_{O^*} = \bar{0} \end{cases} \quad (5.82)$$

Z równań tych wynika, że:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}}_{O^*} = \bar{v}_{O^*} = \overline{\text{const}} \quad \text{i dalej} \quad \bar{r}_{O^*} = \bar{v}_{O^*}t + \hat{\bar{r}}_{O^*} \\ \bar{\omega}_{O^*} = \hat{\bar{\omega}}_{O^*} = \overline{\text{const}} \end{aligned} \quad (5.83)$$

A więc w przypadku zerowego układu sił środek masy może poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a wokół niego ciało może wykonywać ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową. Aby wykluczyć możliwość ruchu ciała, wystarczy założyć następujące warunki początkowe:

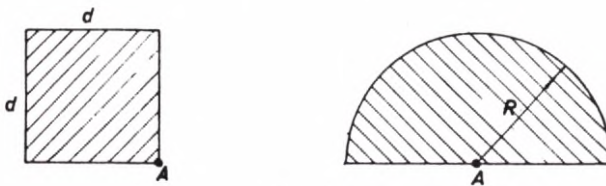
i

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}_{O^*}(t=0) = \hat{\bar{g}}_{O^*} = \bar{0} \\ \bar{\omega}_{O^*}(t=0) = \hat{\bar{\omega}}_{O^*} = \bar{0} \end{cases} \quad (5.84)$$

Stwierdziliśmy zatem, że warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi ciała sztywnego jest równowaga układu sił oraz spoczynek ciała w chwili początkowej.

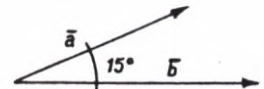
### PYTANIA KONTROLNE

1. Podać definicję środka masy i jego własności.
2. Podać poznane twierdzenia wykorzystujące własności środka masy.
3. Podać zasady: pędu, zachowania pędu, krętu i zachowania krętu.
4. Uzasadnić, że macierz bezwładności jest tensorem.
5. Kiedy w ruchu obrotowym  $\bar{\omega}_O \parallel \bar{K}_O$ ?
6. Podać i udowodnić twierdzenie dotyczące tensorowego charakteru macierzy.
7. Podać i uzasadnić własności głównych osi bezwładności.
8. Kiedy momenty dewiacji są równe zero?
9. Czy moment bezwładności układu materialnego może być równy zero? Jeśli tak, to podać odpowiedni przykład.
10. Podać definicję tensora III rzędu.
11. Ile głównych osi bezwładności posiadają w punkcie A:
  - jednorodny kwadrat o boku  $d$ ,
  - jednorodne półkole o promieniu  $R$ ?



Rys. 5.48

12. Wektor  $\bar{a}$  jest wektorem własnym tensora  $A$ . Czy jest nim również wektor  $\bar{b}$ ?
13. Podać i udowodnić twierdzenia Steinera.
14. Czy zawsze środek masy leży wewnątrz ciała?
15. Czy główne osie bezwładności są prostopadłe?
16. Czy w celu obliczenia momentu bezwładności bryły materialnej można przyjąć, że jej masa jest skupiona w środku masy?





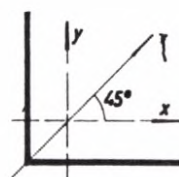
17. Co można powiedzieć o pędzie układu materialnego, jeśli wiadomo, że kręty liczony względem dwóch punktów jest taki sam?
18. Napisać równania różniczkowe ruchu kulistego ciała sztywnego.
19. Podać i udowodnić twierdzenia dotyczące symetrycznego tensora II rzędu.
20. Podać prawo ruchu środka masy sztywnego układu materialnego.

### ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Z tablic inżynierskich odczytano dla kątownika równoramiennego:

$$J_x = J_y = 5,4 [\text{cm}^4]$$

$$J_z = 8,6 [\text{cm}^4]$$



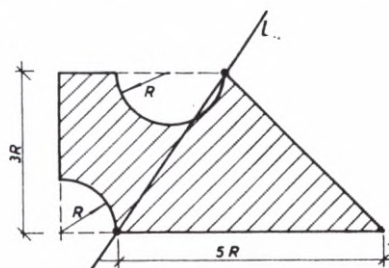
Rys. 5.49

Obliczyć  $J_{xy} = ?$

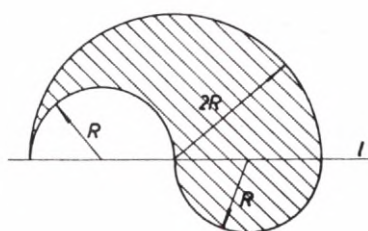
2. Dla tensorów  $A, B, C$  określonych w układzie  $\{0x_1, x_2, x_3\}$  wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im kierunki główne:

$$A = \begin{pmatrix} 3, & -1, & 1 \\ -1, & 5, & -1 \\ 1, & -1, & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1, & 2, & -4 \\ 2, & -2, & -2 \\ -4, & -2, & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{pmatrix}$$

3. Dla jednorodnego obszaru płaskiego (rys. 5.50) o gęstości  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  obliczyć  $J_l$  oraz wyznaczyć główne centralne osie bezwładności.

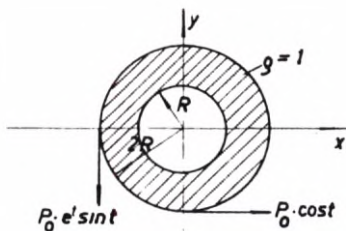


Rys. 5.50

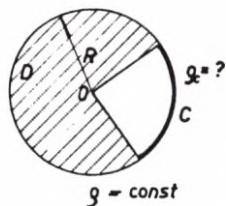


Rys. 5.51

4. W jakiej odległości  $e$  od prostej  $l$  (rys. 5.51) należy umieścić punkt  $A$  o masie równej masie danego jednorodnego obszaru ( $\rho = 1$ ), aby momenty bezwładności względem tej prostej, punktu  $A$  i obszaru były równe?
5. Wyznaczyć ruch sztywnego pierścienia przyjmując, że w chwili  $t = 0$  był on w spoczynku w położeniu, jak na rys. 5.52.

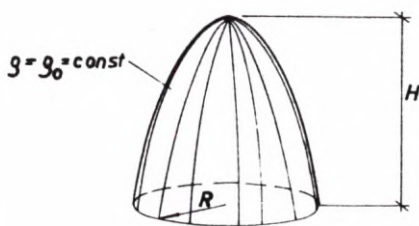


Rys. 5.52

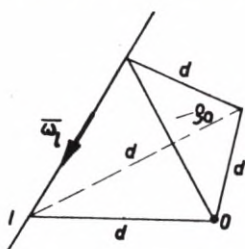


Rys. 5.53

6. Dobrać stałą gęstość krzywej materialnej, będącej częścią okręgu, aby środek masy układu jak na rys. 5.53 pokrywał się z punktem  $O$ .
7. Dla jednorodnego płata powierzchniowego, będącego paraboloidą obrotową (rys. 5.54), wyznaczyć główne centralne osie bezwładności.



Rys. 5.54

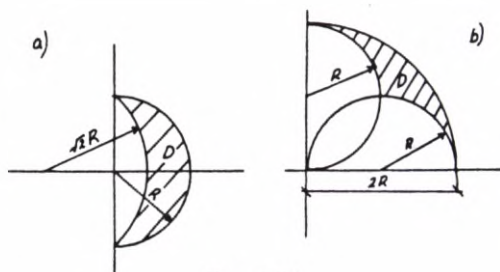


Rys. 5.55

$$\rho_0 = \text{const}$$

$$|\bar{\omega}_L| = e^t - 1$$

8. Obliczyć pęd, kręt względem punktu  $O$  oraz energię kinetyczną bryły materialnej (rys. 5.55), będącej w ruchu obrotowym wokół osi  $l$ .
9. Dla jednorodnych obszarów płaskich (rys. 5.56) o gęstości  $\rho_D = 1$  wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności.



Rys. 5.56

## Rozdział 6

## WYBRANE ZAGADNIENIA MECHANIKI

## 6.1. ZASADA D'ALEMBERTA

## A. Dla punktu materialnego

Na punkt o masie  $m$  działa siła  $\vec{F}$ . Zapiszmy dla niego prawo ruchu w postaci:

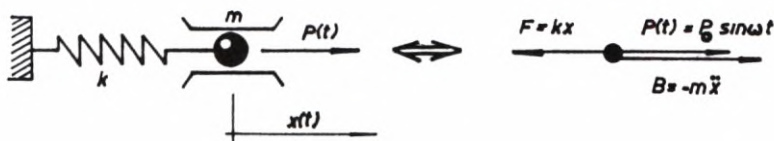
$$\vec{F} + (-m\ddot{\vec{r}}) = \vec{0} \quad \text{lub} \quad \vec{F} + \vec{B} = \vec{0} \quad (6.1)$$

Wyrażenie  $\vec{B} \stackrel{\text{df}}{=} -m\ddot{\vec{r}}$  nazywamy umownie siłą bezwładności (siłą d'Alemberta). Równość (6.1) wyraża zatem równowagę sił: zewnętrznej  $\vec{F}$  i bezwładności  $\vec{B}$ .

Jeżeli  $\vec{B} \neq \vec{0}$ , to punkt materialny znajduje się w ruchu, zaś dla  $\vec{B} = \vec{0}$  możliwe są dwa przypadki, a to: ruch punktu jednostajny prostoliniowy lub jego spoczynek.

## Przykład 6.1

Punkt materialny o masie  $m$  przyciągany jest do sztywnej ściany (rys. 6.1) za pomocą sprężyny o stałej równej  $k$ . Do punktu przyłożono siłę wymuszającą ruch  $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$  o częstości  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Wyznaczyć ruch punktu, jeśli w chwili  $t = 0$  był on w spoczynku.



Rys. 6.1

Wykorzystując zasadę d'Alemberta warunek równowagi sił ma postać:

$$P + B - F = P_0 \sin(\omega t) - m\ddot{x} - kx = 0$$

lub

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P_0}{m} \sin(\omega t)$$

Rozwiązaniem ogólnym jest tu wyrażenie:

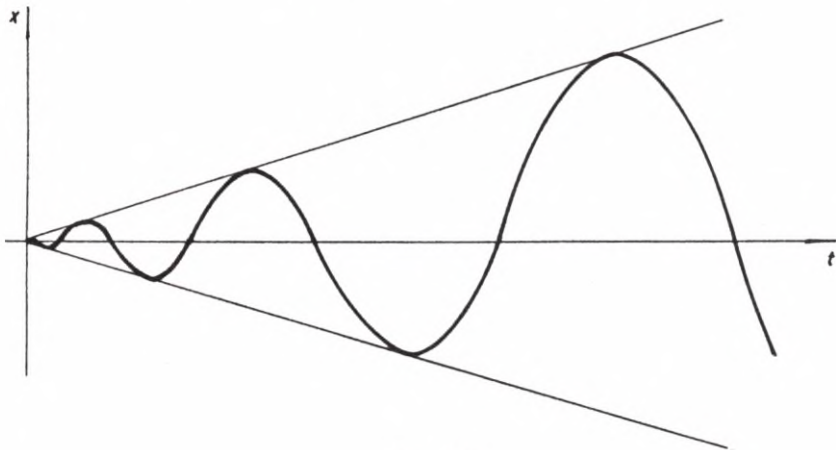
$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - \frac{P_0}{2m\omega} t \cos(\omega t)$$

Z warunków początkowych ruchu:

$$x(t=0) = \hat{x}_0 = 0 \quad \text{i} \quad \dot{x}(t=0) = \hat{v}_0 = 0$$

wyznaczamy stałe  $C_1$  i  $C_2$ , ostatecznie otrzymując następującą funkcję ruchu:

$$x(t) = \frac{P_0}{2m\omega} \left( \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) - t \cos(\omega t) \right)$$



Rys. 6.2

której wykres przedstawiono na rys. 6.2. Amplituda drgań wymuszonych tego ruchu rośnie nieograniczenie z czasem, gdyż jest to przypadek rezonansu (częstość drgań własnych jest równa częstości siły wymuszającej).

### B. Dla układu punktów materialnych

Na układ materialny (swobodny lub nieswobodny o więzach holonomicznych, stacjonarnych, dwustronnych i gładkich) złożony z  $n$  punktów o  $s$  stopniach

swobody działają układy: sił czynnych  $\left\{ \begin{matrix} \bar{F}_i \\ A_i \end{matrix} \right\}$ , sił reakcji  $\left\{ \begin{matrix} \bar{R}_i \\ A_i \end{matrix} \right\}$  i sił bezwładności  $\left\{ \begin{matrix} \bar{B}_i \\ A_i \end{matrix} \right\}$ . Dla każdego punktu układu materialnego możemy napisać warunek równowagi dynamicznej sił:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_1 + \bar{R}_1 + \bar{B}_1 = \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{B}_i = \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{F}_n + \bar{R}_n + \bar{B}_n = \bar{0} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Mnożąc skalarnie każde z równań (6.2) przez odpowiednie przesunięcie wirtualne punktu, na który te siły działają i po dodaniu tak otrzymanych równań stronami mamy:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta} s_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \bar{\delta} s_i + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \cdot \bar{\delta} s_i = 0 \quad (6.3)$$

Ponieważ założyliśmy, że więzy układu są gładkie, dlatego możemy napisać:

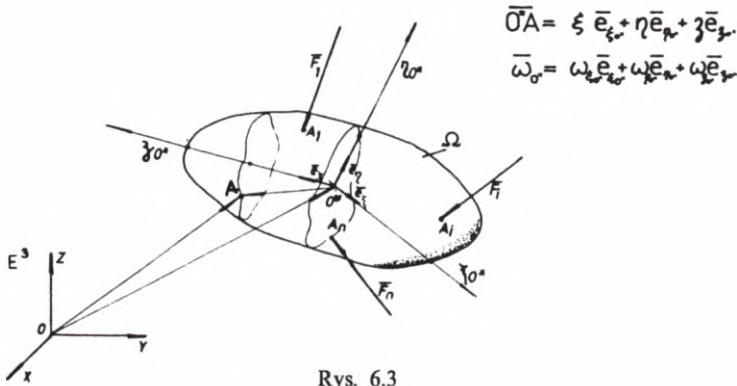
$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i + \bar{B}_i) \cdot \bar{\delta} s_i = 0 \quad \forall \bar{\delta} s_i \quad (6.4)$$

gdzie:  $\bar{B}_i = -m_i \ddot{r}_i$ .

Równanie (6.4) stanowi treść zasady d'Alemberta, która stwierdza: ze wszystkich ruchów możliwych układu materialnego swobodnego lub nieswobodnego o więzach holonomicznych, stacjonarnych, dwustronnych i gładkich ten ruch jest ruchem rzeczywistym układu, dla którego suma prac wirtualnych sił czynnych i bezwładności na każdym przesunięciu wirtualnym jest równa zero. Z zasady tej otrzymujemy  $s$  (liczba stopni swobody) skalarnych równań różniczkowych ruchu układu materialnego.

## Przykład 6.2

Wykorzystując zasadę d'Alemberta wyznaczyć równania różniczkowe ruchu ciała sztywnego:



Rys. 6.3

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_{S_i} - \iiint_{\Omega} \rho \bar{r}_A \cdot \bar{\delta}_{S_A} d\Omega = 0 \quad (6.5)$$

gdzie:

- $\bar{F}_i$  – siła zewnętrzna przyłożona w punkcie  $A_i$ ,
- $\bar{\delta}_{S_i}$  – przesunięcie wirtualne punktu  $A_i$ ,
- $\rho$  – gęstość masy,
- $\ddot{\bar{r}}$  – przyspieszenie bieżącego punktu ciała,
- $\bar{\delta}_{S_A}$  – przesunięcie wirtualne bieżącego punktu ciała,
- $O^*$  – środek masy.

Liczmy kolejno:

$$\bar{\delta}_{S_i} = k \hat{v}_i = k(\hat{v}_{O^*} + \hat{\omega}_{O^*} \times \overline{O^*A_i}) = k \hat{v}_{O^*} + (k \hat{\omega}_{O^*}) \times \overline{O^*A_i}, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\bar{\delta}_{S_i} = \bar{\delta}_{O^*} + \bar{\delta}_{\omega_{O^*}} \times \overline{O^*A_i}$$

$$\bar{\delta}_{S_A} = k \hat{v}_A = k(\hat{v}_{O^*} + \hat{\omega}_{O^*} \times \overline{O^*A}) = \bar{\delta}_{O^*} + \bar{\delta}_{\omega_{O^*}} \times \overline{O^*A}$$

$$\ddot{\bar{r}}_A = \ddot{\bar{r}}_{O^*} + \dot{\bar{\omega}}_{O^*} \times \overline{O^*A} + \bar{\omega}_{O^*} \times (\bar{\omega}_{O^*} \times \overline{O^*A})$$

a stąd po podstawieniu do (6.5) mamy:

$$\begin{aligned} \delta L = & \bar{\delta}_{O^*} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \bar{F}_i - \ddot{\bar{r}}_{O^*} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega \right] + \bar{\delta} \omega_{O^*} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \times \overline{A_i O^*} - \right. \\ & - \left( \iiint_{\Omega} \rho |\overline{O^* A}|^2 \dot{\bar{\omega}}_{O^*} d\Omega - \iiint_{\Omega} \rho (\dot{\bar{\omega}}_{O^*} \cdot \overline{O^* A}) \overline{O^* A} d\Omega + \right. \\ & \left. \left. + \iiint_{\Omega} \rho (\overline{O^* A} \times \bar{\omega}_{O^*}) \cdot (\bar{\omega}_{O^*} \cdot \overline{O^* A}) d\Omega \right) \right] = 0 \quad \forall \bar{\delta}_{O^*} \text{ i } \bar{\delta} \omega_{O^*} \end{aligned}$$

$$\delta L = \bar{\delta}_{O^*} \cdot [\bar{S} - m \ddot{\bar{r}}_{O^*}] + \bar{\delta} \omega_{O^*} \cdot [\bar{M}_{O^*} - ((J_{O^*}) \dot{\bar{\omega}}_{O^*} + \bar{\omega}_{O^*} \times [(J_{O^*}) \bar{\omega}_{O^*}])] = 0$$

Ponieważ powyższa równość ma być spełniona dla każdego przesunięcia wirtualnego, to otrzymujemy dobrze nam już znane równania różniczkowe ruchu ciała sztywnego:

$$\begin{cases} m \ddot{\bar{r}}_{O^*} = \bar{S} \\ (J_{O^*}) \dot{\bar{\omega}}_{O^*} + \bar{\omega}_{O^*} \times [(J_{O^*}) \bar{\omega}_{O^*}] = \bar{M}_{O^*} \end{cases} \quad (6.6)$$

## 6.2. RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU

Omawiając zasadę prac wirtualnych we współrzędnych uogólnionych, rozważaliśmy układ materialny złożony z  $n$  punktów o  $s$  stopniach swobody, którego położenie było jednoznacznie określone poprzez współrzędne uogólnione. Teraz dla analogicznego układu punktów materialnych wyprowadzimy równania różniczkowe jego ruchu (wyrażone poprzez współrzędne uogólnione), korzystając z zasady d'Alemberta:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta} s_i + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \cdot \bar{\delta} s_i = 0 \quad (6.7)$$

Praca wirtualna sił czynnych jest równa:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{\delta} s_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \quad (6.8)$$

gdzie:

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \quad \delta q_j = k \dot{q}_j, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Obliczmy pracę sił bezwładności:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{B}}_i \cdot \bar{\delta}_{\mathbf{S}_i} = - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \bar{\delta}_{\mathbf{S}_i} = - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_j} \delta q_j \quad (6.9)$$

Przy liczeniu prędkości punktu we współrzędnych uogólnionych otrzymaliśmy wzór na pochodną po czasie funkcji wektorowej:

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial}{\partial q_j}(\cdot) \dot{q}_j \quad (6.10)$$

a zatem na podstawie (6.10) otrzymujemy:

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (6.11)$$

Stąd mamy:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (6.12)$$

Podstawmy (6.12) do (6.9):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{B}}_i \cdot \bar{\delta}_{\mathbf{S}_i} &= - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \\ &= - \sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

Korzystając z (6.10) możemy napisać:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{B}}_i \cdot \bar{\delta}_{\mathbf{S}_i} = - \sum_{j=1}^s \delta q_j \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \sum_{k=1}^s \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_k \right] \quad (6.14)$$

Przekształćmy wyrażenie (6.14) do postaci zależnej od energii kinetycznej układu w następujący sposób:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{B}}_i \cdot \bar{\delta}_{\mathbf{S}_i} = - \sum_{j=1}^s \delta q_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^n m_i \frac{\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^2}{2} \right) \right] - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \right\} \quad (6.15)$$



$$\sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{B}}_i \cdot \bar{\delta} \mathbf{s}_i = - \sum_{j=1}^s \delta q_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^n m_i \frac{\bar{v}_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^n m_i \frac{\bar{v}_i^2}{2} \right) \right\} \quad (6.16)$$

Wyrażenie w nawiasach okrągłych jest energią kinetyczną rozważanego układu materialnego:

$$E_k = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\bar{v}_i^2}{2} \quad (6.17)$$

Wstawiając (6.17) do (6.16) zasadę d'Alemberta zapiszemy w postaci:

$$\delta L = \sum_{j=1}^s \left\{ \left[ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + Q_j \right] \delta q_j \right\} = 0 \quad \forall \delta q_j \quad (6.18)$$

Ponieważ równość (6.18) musi być spełniona dla każdego dowolnego  $\delta q_j$ , to każdy z wyrazów w nawiasie [ ] musi być równy zeru. Otrzymujemy zatem  $s$  równań:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (6.19)$$

które w mechanice noszą nazwę równań Lagrange'a drugiego rodzaju.

Jeżeli ruch układu materialnego odbywa się w potencjalnym polu sił (polu zachowawczym), to siły uogólnione wyrażają się poprzez potencjał pola:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left( F_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial V}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Jak wiadomo, potencjał pola jest skalarną funkcją współrzędnych uogólnionych:

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (6.21)$$

Stąd mamy  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

Równania (6.19) po uwzględnieniu (6.20) i (6.21) przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (E_k + V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (E_k + V) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (6.22)$$

gdzie:  $E_k + V = W$  jest potencjałem kinetycznym,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (6.23)$$

Z równań Lagrange'a korzystamy przy rozwiązywaniu dwóch typów zadań mechaniki, a to:

- 1) przy zadanym układzie sił wyznaczamy rzeczywisty ruch układu materialnego,
- 2) przy zadanym ruchu rzeczywistym wyznaczamy siły, które ten ruch wywołały.

### Przykład 6.3

Korzystając z równań (6.19) wyprowadzić równania różniczkowe ruchu środka masy sztywnej bryły materialnej (zob. rys. 6.1).

Środek masy opisany jest trzema współrzędnymi uogólnionymi  $x_{O^*}$ ,  $y_{O^*}$ ,  $z_{O^*}$ . Stąd też będą trzy równania Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_{O^*}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_{O^*}} = Q_{x_{O^*}} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_{O^*}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y_{O^*}} = Q_{y_{O^*}} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}_{O^*}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial z_{O^*}} = Q_{z_{O^*}} \end{cases} \quad (6.24)$$

Energia kinetyczna środka masy jest równa:

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{O^*}^2 + \dot{y}_{O^*}^2 + \dot{z}_{O^*}^2) \quad (6.25)$$

Stąd mamy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_{O^*}} = m \dot{x}_{O^*}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_{O^*}} = m \dot{y}_{O^*}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}_{O^*}} = m \dot{z}_{O^*} \\ \frac{\partial E_k}{\partial x_{O^*}} = \frac{\partial E_k}{\partial y_{O^*}} = \frac{\partial E_k}{\partial z_{O^*}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_{O^*}} \right) = m \ddot{x}_{O^*}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_{O^*}} \right) = m \ddot{y}_{O^*}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{z}_{O^*}} \right) = m \ddot{z}_{O^*} \end{array} \right. \quad (6.26)$$

Wektor siły  $\bar{F}_i$  zapisany w bazie stałego układu współrzędnych jest równy:

$$\bar{F}_i = F_{ix} \bar{e}_x + F_{iy} \bar{e}_y + F_{iz} \bar{e}_z$$

Wektor wodzący punktu  $A_i$  w bazie stałego układu wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i = \bar{r}_{O^*} + \overline{O^*A_i} = & [x_{O^*} + \cos(\xi_{O^*} \hat{x}_1) \xi_i + \cos(\eta_{O^*} \hat{x}_1) \eta_i + \cos(\zeta_{O^*} \hat{x}_1) \zeta_1] \bar{e}_x + \\ & + [y_{O^*} + \cos(\xi_{O^*} \hat{y}_1) \xi_i + \cos(\eta_{O^*} \hat{y}_1) \eta_i + \cos(\zeta_{O^*} \hat{y}_1) \zeta_i] \bar{e}_y + \\ & + [z_{O^*} + \cos(\xi_{O^*} \hat{z}_1) \xi_i + \cos(\eta_{O^*} \hat{z}_1) \eta_i + \cos(\zeta_{O^*} \hat{z}_1) \zeta_1] \bar{e}_z \end{aligned}$$

Możemy teraz obliczyć siły uogólnione:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{x_{O^*}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x_{O^*}} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ Q_{y_{O^*}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y_{O^*}} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \\ Q_{z_{O^*}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial z_{O^*}} = \sum_{i=1}^n F_{iz} \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Podstawiając (6.26) i (6.27) do układu równań (6.24) otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x}_{O^*} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = S_x \\ m \ddot{y}_{O^*} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = S_y \\ m \ddot{z}_{O^*} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = S_z \end{array} \right. \quad (6.28)$$

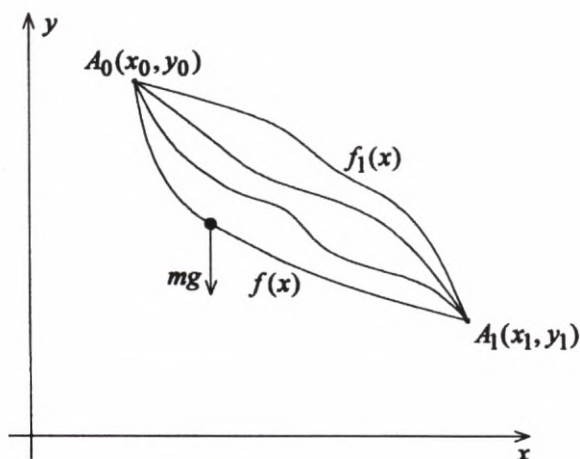
lub w postaci wektorowej:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}_{O^*} = \vec{S}$$

### 6.3. ZASADA HAMILTONA

#### 6.3.1. Wstęp do rachunku wariacyjnego

W dotychczasowych rozważaniach posługiwaliśmy się pojęciem funkcji jednej i wielu zmiennych. Dla nich zarówno dziedzinę, jak i przeciwdziedzinę stanowią zbiory liczb rzeczywistych. Nietrudno jednakże wyobrazić sobie zagadnienia, w których dziedziną jest zbiór funkcji, zaś przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych. W takich przypadkach mamy do czynienia z funkcjonałami. W problemie wyznaczenia krzywej najkrótszego czasu, tzw. brachistochronie, mamy do czynienia z przypisaniem każdej krzywej płaskiej łączącej dwa ustalone punkty  $A_0$  i  $A_1$  (nie leżące na jednym pionie) czasu, w którym punkt materialny pod



wplywem siły ciężkości przebędzie drogę od  $A$  do  $B$ . Dowolnej krzywej łączącej te dwa punkty jest przypisany czas. A więc określony jest funkcjonał. Krzywe  $f(x)$ ,  $f_1(x)$  stanowią zbiór funkcji dopuszczalnych. Z tego zbioru należy wybrać krzywą, na której realizuje się minimum funkcjonału.

Innym przykładem funkcjonału jest przypisanie każdej krzywej łączącej punkty  $A_0$  i  $A_1$  jej długości  $l$

$$l = J[f(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad l \in \mathbb{R}$$

W tym przypadku krzywa, na której realizuje się minimum funkcjonału to prosta przechodząca przez punkty  $A_0$  i  $A_1$ :

$$f_0(x) : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\lambda \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Dla tej prostej wartość funkcjonału wynosi:

$$J[f_0(x)] = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

zaś dla każdej krzywej  $f(x)$  z dziedziny funkcji dopuszczalnych:

$$J[f(x)] \geq J[f_0(x)]$$

Z podanych przykładów widać, że wartość funkcjonału zależy od funkcji  $f(x)$ .

Rachunek wariacyjny zajmuje się metodami poszukiwania ekstremalnych wartości funkcjonałów. Jest on podobny do badania ekstremów funkcji, dlatego też przez przypomnienie teorii ekstremów funkcji dojdziemy do teorii ekstremów funkcjonałów.

a. Zmienną zależną  $y$  nazywamy funkcję zmiennej  $x$ ,  $y = f(x)$ , jeżeli każdej wartości  $x$  ze zbioru jej określoności (dziedziny) przyporządkowana jest wartość  $y$  należąca do przeciwdziedziny.

A. Zmienna  $J$  nazywa się funkcjonałem zależnym od funkcji  $f(x)$ , co zapisujemy  $J = J[f(x)]$ , jeżeli każdej funkcji  $f(x)$  należącej do zbioru funkcji dopuszczalnych przyporządkowana jest wartość  $J$ ,  $J \in \mathbb{R}$ .

b. Przyrostem  $\Delta x$  argumentu  $x$  funkcji  $f(x)$  nazywamy różnicę między dwiema wartościami tej zmiennej  $\Delta x = x - x_0$ . Przyrost ten przechodzi w różniczkę  $dx$  dla  $x$  będącego zmienną niezależną.

B. Przyrostem (wariacją)  $\delta f$  argumentu  $f(x)$  funkcjonału  $J[f(x)]$  nazywamy różnicę między dwiema funkcjami:  $\delta f = f_1(x) - f(x)$ , przy czym

$\delta f(x_0) = \delta f(x_1) = 0$ , gdyż punkty  $A_0$  i  $A_1$  są nieruchome i należą do krzywych opisanych przez funkcje  $f(x)$ ,  $f_1(x)$ .

c. Funkcja  $y = f(x)$  jest ciągła, gdy małej zmianie  $x$  odpowiada mała zmiana  $f(x)$ .

C. Funkcjonał  $J[f(x)]$  jest ciągły, gdy małej zmianie  $f(x)$  odpowiada mała zmiana  $J[f(x)]$ .

**Uwaga:** Mówimy, że funkcje  $f(x)$  i  $f_1(x)$  są bliskie w sensie odległości  $n$ -tego rzędu w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , jeżeli są klasy  $C^n$  (wszystkie  $n$ -te pochodne istnieją i są ciągłe) i spełniają następujące warunki:

$$\begin{cases} |f_1(x) - f(x)| < \varepsilon \\ |f_1'(x) - f'(x)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |f_1^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

dla każdego  $x \in \langle a, b \rangle$  przy małym  $\varepsilon > 0$ .

d. Funkcja  $f(x)$  jest ciągła w punkcie  $x = x_0$ , jeżeli dla każdego (małego)  $\varepsilon > 0$  można dobrać  $\delta > 0$  takie, że zachodzi:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < \delta$$

D. Funkcjonał  $J[f(x)]$  jest ciągły na krzywej  $f = f(x)$  w sensie bliskości rzędu  $n$ -tego, jeżeli dla każdego dodatniego (małego)  $\varepsilon > 0$  można dobrać takie  $\delta > 0$ , że zachodzi:

$$J[f_1(x)] - J[f(x)] < \varepsilon$$

dla

$$\begin{cases} |f_1(x) - f(x)| < \delta \\ |f_1'(x) - f'(x)| < \delta \\ \vdots \\ |f_1^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)| < \delta \end{cases}$$

e. Funkcja  $f(x)$  nazywa się liniową, gdy spełnione są warunki:

$$f(cx) = cf(x), \quad c = \text{const}$$

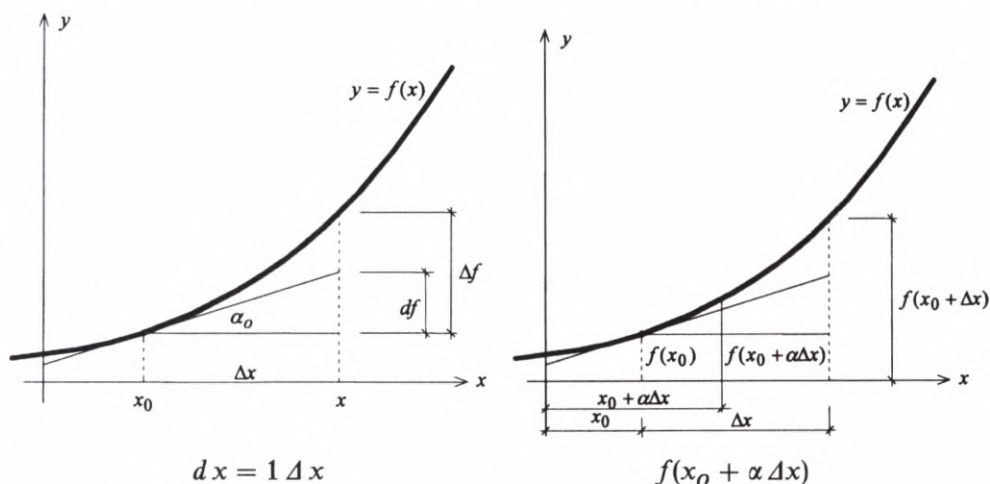
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

E. Funkcjonał  $L[f(x)]$  nazywa się liniowym, jeżeli spełnia warunki:

$$L[cf(x)] = cL[f(x)], \quad c = \text{const}$$

$$L[f_1(x) + f_2(x)] = L[f_1(x)] + L[f_2(x)]$$

f. Różniczką  $df$  funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x = x_0$  nazywamy iloczyn pochodnej tej funkcji w tym punkcie przez przyrost zmiennej niezależnej  $\Delta x = x - x_0$



$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx \quad df = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} (f(x_0 + \alpha \Delta x)) \right|_{\alpha=0} = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Przyrost funkcji można zapisać następująco:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \text{tg } \alpha_0 \cdot \Delta x + R(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x$$

Dla  $\Delta x \rightarrow 0$   $R(x_0, \Delta x) \Rightarrow 0$  i wówczas  $\Delta f = df$ .

Zatem różniczka funkcji jest liniową częścią przyrostu funkcji.

F. Przedstawiając przyrost funkcjonału według zależności:

$$\Delta J = J[f_1(x)] - J[f(x)] = J[f(x) + \delta f] - J[f(x)] = L[f(x), \delta f] + R[f(x), \delta f] \max |\delta f|,$$

gdzie  $L[f(x), \delta f]$  jest funkcjonałem liniowym względem  $\delta f$ ,  $\max |\delta f|$  zaś  $R[f(x), \delta f] \rightarrow 0$ , gdy  $\max |\delta f| \rightarrow 0$ , możemy zdefiniować wariację funkcjonału  $\delta J$  jako liniową część przyrostu funkcjonału  $J[f(x)]$ :

$$\delta J = L[f(x), \delta f]$$

Wyrażając wariację funkcji:

$$\delta f(x) = f_1(x) - f(x)$$

przez iloczyn parametru  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) i funkcji bazowej  $\eta(x)$ , gdzie:

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

$$\delta f(x) = \alpha \eta(x)$$

możemy wariację funkcjonału zapisać następująco:

$$\delta J[f_1(x)] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( J[f(x) + \alpha \eta(x)] \right) \right|_{\alpha=0}$$

$$f_1(x) = f(x) + \alpha \eta(x)$$

g. Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest różniczkowalna i osiąga ekstremum (maksimum lub minimum) w punkcie  $x_0$ ,  $x_0 \in \langle a, b \rangle$ , to w tym punkcie  $df = 0$ .

G. Jeśli funkcjonał  $J[f(x)]$  ma wariację, to na krzywej  $f_0(x)$ , zwanej ekstremalą, wariacja ta osiąga wartość zero:

$$\delta J[f_0(x)] = 0$$

h. Jeżeli różniczkowalna funkcja  $y = f(x)$  posiada w punkcie  $x = x_0$  ekstremum lokalne (max, min), to istnieje takie sąsiedztwo  $S$  punktu  $x_0$ , że dla każdego  $x$  należącego do  $S$  zachodzi:

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{dla maksimum}$$

$$f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{dla minimum}$$

H. Jeśli funkcjonał  $J[f(x)]$  osiąga na krzywej  $f_0(x)$  ekstremum (maksimum, minimum), to wartość funkcjonału  $J[f(x)]$  na dowolnej krzywej bliskiej do ekstremali  $f_0(x)$  spełnia zależność:

$$J[f(x)] - J[f_0(x)] < 0 \quad \text{dla maksimum}$$

$$J[f(x)] - J[f_0(x)] > 0 \quad \text{dla minimum}$$



**Przykład**

Dla funkcjonału

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} y'^2 - 8y + 6xy \right) dx$$

z warunkami:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

wyznaczyć ekstremalę.

**Rozwiązanie**

Załóżmy, że ekstremum będzie realizowane na krzywej  $y = f(x)$ . Krzywe dopuszczalne  $y = f_1(x)$  są krzywymi bliskimi ekstremali spełniającymi warunki brzegowe (\*). Możemy je zapisać następująco:

$$f_1(x) = f(x) + \alpha \eta(x)$$

Tutaj  $\eta(x)$  są funkcjami bazowymi spełniającymi jednorodne warunki brzegowe:

$$\eta(0) = 0, \eta(1) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Zapiszmy funkcjonał dla krzywych dopuszczalnych:

$$\begin{aligned} J[f_1(x)] &= J[f(x) + \alpha \eta(x)] = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} f_1'(x)^2 - 8f_1(x) + 6xf_1(x) \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (f'(x) + \alpha \eta'(x))^2 - 8(f(x) + \alpha \eta(x)) + 6x(f(x) + \alpha \eta(x)) \right] dx \end{aligned}$$

i obliczamy dla niego wariację:

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (J[f_1(x)]) \Big|_{\alpha=0} = \int_0^1 \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} (f' + \alpha \eta') \eta' - 8\eta + 6x\eta \right] \Big|_{\alpha=0} dx = \\ &= \int_0^1 (f' \eta' - 8\eta + 6x\eta) dx \end{aligned}$$

Całkując przez części pierwszą część wyrażenia podcałkowego i wykorzystując zależność  $\eta(0) = 0$ ,  $\eta(1) = 0$  mamy:

$$\int_0^1 f' \eta' dx = (f' \eta) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'' \eta dx = - \int_0^1 f'' \eta dx$$

Zatem wariacja funkcjonału jest równa:

$$\delta J = \int_0^1 (-f'' + 6x - 8) \eta dx$$

Z warunku na ekstremum  $\delta J = 0$  otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$f''(x) = 6x - 8$$

dla którego całka ogólna jest rodziną krzywych o równaniu

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + C_1 x + C_2$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczamy z warunków brzegowych  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , dla których  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = 4$ .

### Odpowiedź:

Ekstremum zadanego funkcjonału jest osiągnięte na krzywej o równaniu

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

Po tym krótkim wprowadzeniu do rachunku wariacyjnego przejdźmy do omówienia zasady Hamiltona.

W potencjalnym polu sił zadany jest układ materialny złożony z  $n$  punktów o  $s$  stopniach swobody. Jego położenie określa  $s$  współrzędnych uogólnionych  $q_i$ . Załóżmy, że ustalone są własności mechaniczne układu, a mianowicie energia kinetyczna  $E_k = E_k(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) = E_k(q, \dot{q}, t)$  oraz energia potencjalna  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_s) = U(q)$ . Dla prostoty obliczeń wprowadzono oznaczenia:

$$q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_s)$$

$$\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$$

przy których potencjał kinetyczny układu ma postać:

$$W = E_k + V = E_k - U = W(q, \dot{q}, t)$$

Niech  $q(t)$  podaje ruch rzeczywisty układu materialnego, zaś  $\tilde{q}(t)$  – jego ruch możliwy, to jest zgodny z więzami układu (ruch, na jaki zezwalają więzy).

Z definicji ruchu możliwego wynika, że jest to cała rodzina ruchów, z której wybierać będziemy jeden, to jest ruch rzeczywisty (zależny od więzów i sił działających). Musimy zatem podać sposób (zasadę) tego wyboru. Posłużymy się tutaj rachunkiem wariacyjnym.

Oznaczmy przez:

$$\delta q(t) \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{q}(t) - q(t) \quad (6.29)$$

wariację funkcji ruchu pomiędzy ustalonymi punktami  $A_0$  i  $A_k$ , którym odpowiadają chwile czasu  $t_0$  i  $t_k$ . Dla ustalonych położeń punktów  $A_0$  i  $A_k$  zachodzi:

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_k) = 0 \quad (6.30)$$

Wykazaliśmy już, że w ruchu rzeczywistym układu materialnego spełnione są równania Lagrange'a:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \quad (6.31)$$

Pomnóżmy je przez wariację  $\delta q$  i przecałkujmy w przedziale czasu  $\langle t_0, t_k \rangle$ :

$$\int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial W}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0 \quad \forall \delta q \quad (6.32)$$

Na podstawie (6.30) równość (6.32) zapiszemy następująco:

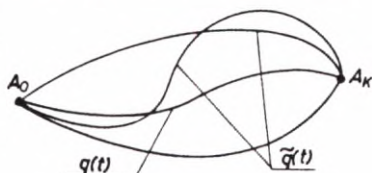
$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial W}{\partial q} \delta q dt - \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt + \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \Big|_{t_0}^{t_k} = 0 \quad \forall \delta q \quad (6.33)$$

i teraz, wykorzystując własności całkowania przez części, możemy napisać:

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial W}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) dt = 0 \quad \forall \delta q \quad (6.34)$$

Obliczmy:

$$\frac{d}{dt} (\delta q) = \frac{d}{dt} (\tilde{q} - q) = \dot{\tilde{q}} - \dot{q} = \delta \dot{q} \quad (6.35)$$



Rys. 6.4

Podstawiając (6.35) do (6.34) mamy:

$$\int_{t_0}^{t_k} \left[ \frac{\partial W}{\partial q} \delta q + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt = \int_{t_0}^{t_k} \delta W(q, \dot{q}, t) dt = \delta \int_{t_0}^{t_k} W(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad \forall \delta q \quad (6.36)$$

Wprowadzając pojęcie całki działania:

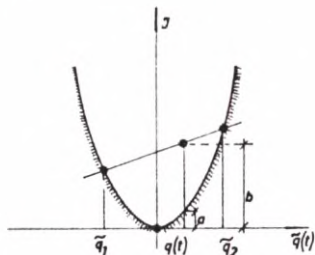
$$J = \int_{t_0}^{t_k} W(q, \dot{q}, t) dt \quad (6.37)$$

i podstawiając ją do (6.36) otrzymujemy:

$$\delta J = 0 \quad \text{przy} \quad \delta q(t_0) = \delta q(t_k) = 0 \quad (6.38)$$

Jest to zasada wariacyjna Hamiltona, która stwierdza: Rzeczywisty ruch układu materialnego (swobodnego lub nieswobodnego o więzach geometrycznych, stacjonarnych, dwustronnych i gładkich) w potencjalnym polu sił odbywa

się w ten sposób, że dla każdego przedziału czasowego  $\langle t_0, t_k \rangle$  wariacja całki działania jest równa zero przy dowolnych wariacjach funkcji ruchu  $q(t)$  spełniających zależność  $\delta q(t_0) = \delta q(t_k) = 0$ . Wychodząc z równań różniczkowych ruchu (6.31) dowiedliśmy warunek konieczny zasady Hamiltona. Należy jeszcze dowieść jej warunek wystarczający, to jest pokazać, że funkcje opisujące rzeczywisty ruch układu materialnego realizują ekstremum (minimum) całki działania w klasie funkcji dopuszczalnych.



Rys. 6.5

Z definicji całki działania wynika, że jest ona funkcjonalem wypukłym (rys. 6.5), gdyż spełnia warunek:

$$J((1 - \lambda)\tilde{q}_1 + \lambda\tilde{q}_2) \leq (1 - \lambda)J(\tilde{q}_1) + \lambda J(\tilde{q}_2) \quad (6.39)$$

$$\forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\forall \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \mathcal{I} = \{\tilde{q}\}$$

Liczmy zatem:

$$\begin{aligned} J(\tilde{q}) - J(q) &= J(q + \delta q) - J(q) = \int_{t_0}^{t_k} W(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_0}^{t_k} W(q, \dot{q}, t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_k} (W(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - W(q, \dot{q}, t)) dt \end{aligned} \quad (6.40)$$

W wyrażeniu (6.40) funkcję podcałkową zapiszemy w postaci rozwiniętej w szereg Taylora:

$$J(\tilde{q}) - J(q) = \int_{t_0}^{t_k} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \delta q + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt + \int_{t_0}^{t_k} r dt = \delta J + R \geq 0 \quad (6.41)$$

gdzie  $R$  jest resztą szeregu zmierzającą do zera przy  $\delta q$  dążącym do zera.

W ten sposób wykazaliśmy, że ze wszystkich funkcji dopuszczalnych opisujących ruch układu te są rzeczywiste, które realizują minimum funkcjonału Hamiltona. Wypada w tym miejscu wspomnieć o przybliżonych sposobach wyznaczenia funkcji ruchu  $q(t)$  układu materialnego. Poszukiwaną trajektorię ruchu rzeczywistego przedstawmy w postaci szeregu:

$$q_n(t) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(t) \quad (6.42)$$

w którym  $A_i$  są nieznanymi współczynnikami aproksymacji (ze zbioru liczb rzeczywistych), zaś  $\varphi_i(t)$  stanowią funkcje bazowe wybrane ze zbioru ( $IN = [\tilde{q}]$ ) ruchów dopuszczalnych, to jest zgodnych z więzami układu. I tak w metodzie Hamiltona-Ritza przyjmujemy funkcje bazowe  $\varphi_i(t)$  ze zbioru  $IN$  i podstawiamy je do (6.42), aby to z kolei wyrażenie wstawić do (6.37), otrzymując po wycalkowaniu:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} W(q_n, \dot{q}_n, t) dt = J(A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (6.43)$$

funkcję  $n$  zmiennych — współczynników  $A_i$ .

Warunek na ekstremum funkcji (6.43) prowadzi do układu  $n$  niezależnych równań algebraicznych liniowych:

$$\frac{\partial J(A_1, A_2, \dots, A_n)}{\partial A_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.44)$$

z których to równań wyznaczamy nieznanne współczynniki  $A_i$  przyjętej aproksymacji. Ponieważ nie znamy ścisłego rozwiązania, to należy (w analogiczny sposób) ponownie wykonać obliczenia przy zwiększonej liczbie funkcji bazowych.

Przez porównanie obu rozwiązań dla wybranych chwil z przedziału czasu  $\langle t_0, t_k \rangle$  stwierdzamy jak daleko jesteśmy od rozwiązania ścisłego. Gdyby

kolejne rozwiązania prowadziły do tego samego wyniku, świadczyłoby to, że wyznaczyliśmy w sposób ścisły trajektorię ruchu rzeczywistego. Decydujący jednak wpływ na dokładność obliczeń ma tutaj odpowiedni dobór funkcji bazowych.

Jako drugą w kolejności omówimy metodę Galerkiną, zwaną także metodą ortogonalizacyjną. Tutaj również będziemy poszukiwać rozwiązania w postaci (6.42), z tym, że o funkcjach bazowych  $\varphi_i$  (należących do zbioru  $IN$ ) założymy dodatkowo, że spełniają warunek ortogonalności w przedziale czasu  $\langle t_0, t_k \rangle$ :

$$\int_{t_0}^{t_k} \varphi_i \varphi_j dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (6.45)$$

Nieznane współczynniki aproksymacji wyznaczamy z następującego układu równań algebraicznych:

$$\int_{t_0}^{t_k} \left[ -\frac{\partial W}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) \right]_{\substack{q = q_N(t) \\ \dot{q} = \dot{q}_N(t)}} \cdot \varphi_j(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.46)$$

Metoda minimum kwadratów za punkt wyjścia bierze równanie Lagrange'a (6.31) i korzystając z aproksymacji (6.42) określa jej nieznane współczynniki z następującego układu równań algebraicznych:

$$\frac{\partial R(A_1, A_2, \dots, A_n)}{\partial A_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.47)$$

gdzie:

$$R = \int_{t_0}^{t_k} \left[ -\frac{\partial W}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) \right]_{\substack{q = q_N(t) \\ \dot{q} = \dot{q}_N(t)}} dt = \min.$$

W metodzie kollokacji poszukujemy rozwiązania równania (6.31) poprzez aproksymację (6.42), przy czym nieznane współczynniki tej aproksymacji wyznaczamy z warunku ścisłego spełnienia równania (6.31) w  $n$  wybranych chwilach czasu z przedziału  $\langle t_0, t_k \rangle$ .

$$R(A_1, A_2, \dots, A_n, t) = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial W}{\partial q} \right]_{\substack{q = q_n \\ \dot{q} = \dot{q}_n}} = 0 \quad \text{dla} \quad t = t_1, t_2, \dots, t_n \quad (6.48)$$

Zasadniczy pomysł metody różnicowej polega na zastąpieniu pochodnych w wybranych chwilach  $t_p$  z przedziału czasu  $\langle t_0, t_k \rangle$  przez wartości przybliżone, zwane różnicami skończonymi. I tak z zasady Hamiltona dla układu punktów materialnych otrzymujemy układ równań różniczkowych typu:

$$m_i \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} q_j = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (6.49)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} q_i(t_0) = q_{i0} \\ q_i(t_k) = q_{ik} \end{cases}$$

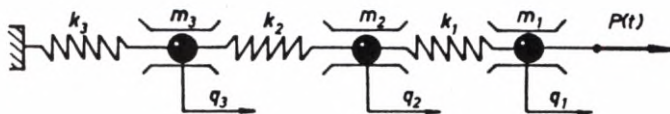
Przedział czasowy  $\langle t_0, t_k \rangle$ , w którym poszukujemy rozwiązania, dzielimy na  $m$  równych części o długości  $h = \frac{t_k - t_0}{m}$ . Korzystając z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora zastępujemy pochodne występujące w układzie równań (6.49) przybliżeniami różnicowymi:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t_p) &\cong \frac{q_i(t_p + h) - q_i(t_p - h)}{2h} \\ \ddot{q}_i(t_p) &\cong \frac{q_i(t_p - h) - 2q_i(t_p) + q_i(t_p + h)}{h^2} \end{aligned} \quad (6.50)$$

i w ten sposób równania różniczkowe przechodzą w równania algebraiczne (różnicowe) o niewiadomych (dyskretnych)  $q_i(t_p)$ .

Przykładowo równanie (6.49) zapisane dla układu złożonego z trzech materialnych punktów połączonych sprężynami jak na rys. 6.5a przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 (q_1 - q_2) = P(t) \\ m_2 \ddot{q}_2 - k_1 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 - k_2 q_3 = 0 \\ m_3 \ddot{q}_3 - k_2 q_2 + (k_2 + k_3) q_3 = 0 \end{cases}$$



Rys. 6.5a

Równania te w zapisie macierzowym przyjmą postać:

$$M \ddot{q} + K q = F \quad (6.50_1)$$

gdzie:

$$M = \begin{pmatrix} m_1, & 0, & 0 \\ 0, & m_2, & 0 \\ 0, & 0, & m_3 \end{pmatrix} - \text{macierz mas układu}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1, & -k_1, & 0 \\ -k_1, & k_1 + k_2, & -k_2 \\ 0, & -k_2, & k_2 + k_3 \end{pmatrix} - \text{macierz sztywności układu}$$

$$F = \begin{Bmatrix} P(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \text{wektor obciążeń}$$

$$q(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{Bmatrix} - \text{wektor przemieszczeń uogólnionych}$$

Jako ostatnią omówimy metodę elementów skończonych w czasoprzestrzeni. Poszukujemy rozwiązania równania  $M \ddot{q} + K q = F$  z warunkami brzegowymi:

$$q(t_0) = q_0 \quad \text{i} \quad q(t_k) = q_k$$

Rozważane równanie ruchu w sformułowaniu wariacyjnym ma postać:

$$\int_{t_0}^{t_k} (\delta q)^T (M \ddot{q} + K q - F) dt = 0 \quad \forall \delta q$$

gdzie  $\delta_p$  jest wariacją wektora  $q(t)$ , zaś całkowanie dotyczy przedziału czasowego  $\langle t_0, t_k \rangle$ , poza którym  $\delta q(t) = 0$ .

Wykorzystując całkowanie przez części dla całki:

$$\int_{t_0}^{t_k} (\delta q)^T M \ddot{q} dt = \delta q^T M \dot{q} \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} (\delta \dot{q})^T M \dot{q} dt = - \int_{t_0}^{t_k} (\delta \dot{q})^T M \dot{q} dt$$



otrzymujemy wygodną do zastosowań postać równania ruchu w sformułowaniu wariacyjnym:

$$\int_{t_0}^{t_k} (\delta q)^T K q dt - \int_{t_0}^{t_k} (\delta \dot{q})^T M \dot{q} dt = \int_{t_0}^{t_k} (\delta q)^T F dt \quad (6.50_2)$$

Załóżmy, że rozwiązania poszukiwać będziemy w dyskretnym zbiorze punktów czasowych  $t_j$ , czyli  $q_j(t_j)$ .

Poszukiwane rozwiązanie przedstawimy w formie szeregu:

$$q(t) = \sum_j N_j(t) q_j \quad (6.50_3)$$

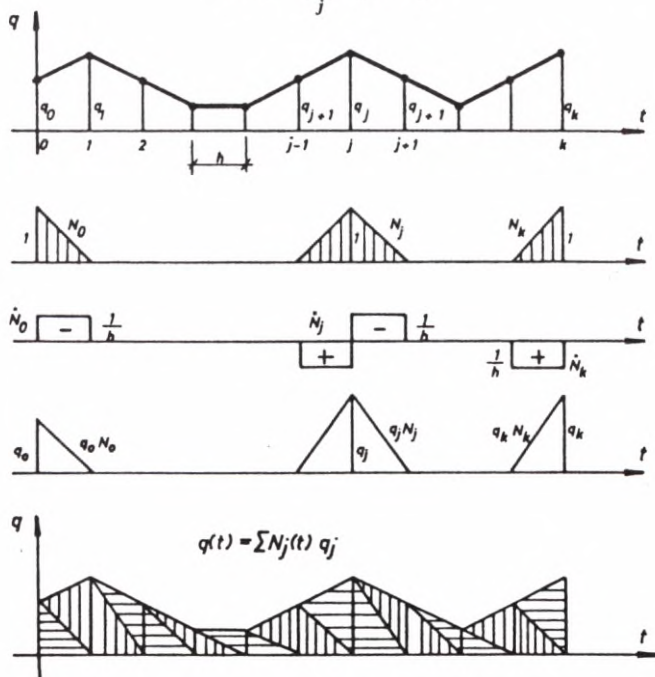
gdzie  $N_j(t)$  są odpowiednio dobranymi funkcjami kształtu, przy czym:

$$N_j(t_r) = \begin{cases} 0 & r \neq j \\ 1 & \text{dla } r = j \end{cases}$$

porównaj rys. 6.5b.

Podobnie wektor obciążeń zapiszemy w postaci szeregu:

$$F(t) = \sum_j N_j(t) F_j \quad (6.50_4)$$



Rys. 6.5b

zaś wariację poszukiwanego rozwiązania  $q(t)$  przyjmiemy jako:

$$\delta q = \sum_i N_i(t) q_i^* \quad (6.50_5)$$

gdzie:  $q_i^*$  – dowolny niezerowy wektor.

Tak przyjętą postać rozwiązania wstawiamy do równania (6.50<sub>1</sub>), otrzymując:

$$\sum_i q_i^* \left[ K \sum_j \int N_i N_j q_j dt - M \sum_j \int \dot{N}_i \dot{N}_j q_j dt - \sum_j \int N_i N_j F_j dt \right] = 0 \quad \forall q_i^*$$

a stąd

$$K \sum_j \int N_i N_j q_j dt - M \sum_j \int \dot{N}_i \dot{N}_j q_j dt = \sum_j \int N_i N_j F_j dt \quad (6.50_6)$$

Całki te dla przyjętych liniowych funkcji kształtu wyrażają się następująco:

$$\sum_j \int N_i N_j q_j dt = \frac{h}{6} (q_{i+1} + 4q_i + q_{i-1})$$

$$\sum_j \int \dot{N}_i \dot{N}_j q_j dt = \frac{1}{h} (-q_{i+1} + 2q_i - q_{i-1}) \quad (6.50_7)$$

$$\sum_j \int N_i N_j F_j dt = \frac{h}{6} (F_{i+1} + 4F_i + F_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

Po wstawieniu (6.50<sub>7</sub>) do (6.50<sub>6</sub>) otrzymamy układ równań, z którego wyznaczamy niewiadome  $q_j(t_j)$ :

$$\begin{aligned} (h^2 K + 6M) q_{i+1} + (4h^2 K - 12M) q_i + (h^2 K + 6M) q_{i-1} = \\ = h^2 (F_{i+1} + 4F_i + F_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (6.50_8)$$

Znając warunki brzegowe:

$$q(t_0) = q_0 \quad \text{i} \quad q(t_k) = q_k$$

z układu równań (6.50<sub>8</sub>) wyznaczamy pozostałe niewiadome  $q_1, \dots, q_{k-1}$ .

## Przykład 6.4

Korzystając z metod przybliżonego określenia trajektorii ruchu punktu, wyznaczyć ją w przedziale czasu  $\langle 0, 1 \rangle$ , jeśli potencjał kinetyczny ma postać:

$$W = \dot{q}^2 - q^2 - 2qt \quad \text{oraz} \quad q(0) = q(1) = 0$$

**A. Metoda Hamiltona-Ritza.** Funkcje bazowe przyjmujemy tak, aby były spełnione warunki  $\varphi_i(t=0) = \varphi_i(t=1) = 0$ . A zatem wybieramy ze zbioru  $IN$  funkcje  $\varphi_i(t) = t^i(1-t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Stąd:

$$q_n(t) = \sum_{i=1}^n A_i t^i (1-t)$$

Obliczenia przeprowadzimy dla  $n = 2$ :

$$q_2(t) = A_1 t(1-t) + A_2 t^2(1-t) = t(1-t)(A_1 + A_2 t)$$

$$\dot{q}_2(t) = A_1(1-2t) + A_2 t(2-3t)$$

$$\begin{aligned} J(A_1, A_2) &= \int_0^1 [\dot{q}_2^2(t) - q_2^2(t) - 2q_2(t)t] dt = \int_0^1 \{ [A_1(1-2t) + A_2 t(2-3t)]^2 - \\ &- [A_1 t(1-t) + A_2 t^2(1-t)]^2 - 2t[A_1 t(1-t) + A_2 t^2(1-t)] \} dt \end{aligned}$$

Z warunku na ekstremum funkcji  $J(A_1, A_2)$  otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych:

$$\begin{cases} 18A_1 + 9A_2 - 5 = 0 \\ 63A_1 + 52A_2 - 21 = 0 \end{cases}$$

Pierwiastki tego układu to:

$$A_1 = 0,19241 \quad \text{i} \quad A_2 = 0,17073$$

Mamy zatem wyznaczoną przybliżoną funkcję ruchu punktu:

$$q_2(t) = t(1-t)(0,19241 + 0,17073 \cdot t)$$

$$\begin{cases} q_2(0) = 0 \\ q_2(0,25) = 0,0441 \\ q_2(0,5) = 0,0694 \\ q_2(0,75) = 0,0601 \\ q_2(1) = 0 \end{cases}$$

**B. Metoda Galerкина.** Przyjmując aproksymację trajektorii ruchu jak w punkcie A piszemy dla  $n = 2$  układ równań (6.46):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 (\ddot{q}_2 + q_2 + t) \varphi_1 dt = \int_0^1 [-2A_1 + A_2(2 - 6t) + t(1 - t)(A_1 + A_2 t) + t] \times \\ \quad \times t(1 - t) dt = 0 \\ \int_0^1 (\ddot{q}_2 + q_2 + t) \varphi_2 dt = \int_0^1 [-2A_1 + A_2(2 - 6t) + t(1 - t)(A_1 + A_2 t) + t] \times \\ \quad \times t^2(1 - t) dt = 0 \end{array} \right.$$

Po wycałkowaniu i podstawieniu granic mamy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{10} A_1 + \frac{3}{20} A_2 - \frac{1}{12} = 0 \\ \frac{3}{20} A_1 + \frac{13}{105} A_2 - \frac{1}{20} = 0 \end{array} \right.$$

Stąd  $A_1 = \frac{71}{369} = 0,19241$  i  $A_2 = 0,17073$ .

Otrzymane rozwiązanie jest analogiczne, jak w metodzie Hamiltona-Ritza.

**C. Metoda minimum kwadratów.** Przyjmując  $q_2(t) = t(1 - t)(A_1 + A_2 t)$  budujemy funkcję  $R(A_1, A_2)$  (por. (6.47)):

$$R(A_1, A_2) = \int_0^1 (\ddot{q}_2 + q_2 + t)^2 dt = \int_0^1 [-2A_1 + 2A_2(1 - 3t) + t(1 - t)(A_1 + A_2 t) + t]^2 dt$$

Z warunku ekstremum mamy układ dwóch równań algebraicznych:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{33}{5} A_1 + \frac{23}{7} A_2 - \frac{11}{6} = 0 \\ \frac{72}{5} A_1 + \frac{81}{7} A_2 - \frac{19}{4} = 0 \end{array} \right.$$

którego pierwiastki są:

$$A_1 = 0,19297 \quad \text{i} \quad A_2 = 0,17035$$

Stąd przybliżona funkcja ruchu punktu:

$$q_2(t) = t(1-t)(0,19297 + 0,17035 t)$$

$$\begin{cases} q_2(0) = 0 \\ q_2(0,25) = 0,0442 \\ q_2(0,5) = 0,0695 \\ q_2(0,75) = 0,0601 \\ q_2(1) = 0 \end{cases}$$

**D. Metoda kollokacji.** Tutaj również przyjmujemy  $q_2(t) = t(1-t)(A_1 + A_2 t)$ .  
Zatem:

$$R(A_1, A_2, t) = \ddot{q}_2 + q_2 + t = -2A_1 + 2A_2(1-3t) + t(1-t)(A_1 + A_2 t)t$$

Wybierając chwile czasu, np.  $t_1 = \frac{1}{3}$  i  $t_2 = \frac{2}{3}$ , dla których  $R = 0$ , otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych:

$$\begin{cases} 48A_1 - 2A_2 - 9 = 0 \\ 48A_1 + 50A_2 - 18 = 0 \end{cases}$$

o pierwiastkach  $A_1 = \frac{486}{2496} = 0,19471$  i  $A_2 = \frac{432}{2496} = 0,17308$ . Stąd:

$$q_2(t) = t(1-t)(0,19471 + 0,17308 t)$$

$$q_2(0) = 0$$

$$q_2(0,25) = 0,0446$$

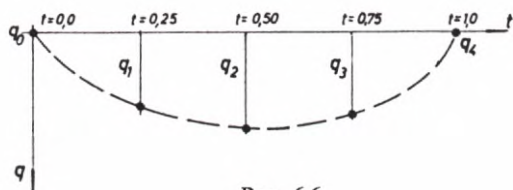
$$q_2(0,5) = 0,0703$$

$$q_2(0,75) = 0,0608$$

$$q_2(1) = 0$$

**E. Metoda różnic skończonych.** Mamy do rozwiązania równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial W}{\partial q} = 2(\ddot{q} + q + t) = 0$$



Rys. 6.6

z warunkami brzegowymi  $q(0) = q(1) = 0$ . Podzielimy przedział czasu  $\langle 0, 1 \rangle$  na cztery równe części. Równania różnicowe mają postać:

$$- \text{ dla } t = t_1 = 0,25$$

$$\frac{0 - 2q_1 + q_2}{(0,25)^2} + q_1 + 0,25 = 0$$

$$- \text{ dla } t = t_2 = 0,50$$

$$\frac{q_1 - 2q_2 + q_3}{(0,25)^2} + q_2 + 0,50 = 0$$

$$- \text{ dla } t = t_3 = 0,75$$

$$\frac{q_2 - 2q_3 + 0}{(0,25)^2} + q_3 + 0,75 = 0$$

Stąd mamy:

$$q_1 = q(0,25) = 0,0443$$

$$q_2 = q(0,50) = 0,0702$$

$$q_3 = q(0,75) = 0,0604$$

**F. Metoda elementów skończonych.** Ponieważ równanie wyjściowe ma postać:

$$\ddot{q} + q = -t$$

z warunkami brzegowymi  $q(0) = 0$  i  $q(1) = 0$ , wynika stąd, że w równaniach (6.50<sub>8</sub>) należy podstawić  $M = 1$ ,  $K = 1$ ,  $F = -t$ . Przedział czasowy  $\langle 0, 1 \rangle$

podzielimy na cztery równe części  $h = 0,25$  jak w metodzie różnic skończonych (por. rys. 6.6).

Równanie (6.50<sub>8</sub>) zapisane dla  $i = 1, 2, 3$  przedstawia się następująco:

$$i = 1 \quad (0,25^2 + 6)q_2 + (4 \cdot 0,25^2 - 12)q_1 = 0,25^2 [-0,5 + 4(-0,25)]$$

$$i = 2 \quad (0,25^2 + 6)q_3 + (4 \cdot 0,25^2 - 12)q_2 + (0,25^2 + 6)q_1 = \\ = 0,25^2 [-0,75 + 4(-0,5) - 0,25]$$

$$i = 3 \quad (4 \cdot 0,25^2 - 12)q_3 + (0,25^2 + 6)q_2 = 0,25^2 [-1 + 4(-0,75) - 0,5]$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} q_1 = q(0,25) = 0,0438 \\ q_2 = q(0,50) = 0,0694 \\ q_3 = q(0,75) = 0,0597 \end{cases}$$

Analizując otrzymane (różnymi metodami) wyniki stwierdzamy, że są porównywalne i zbieżne do rzeczywistej trajektorii ruchu punktu.

### Przykład 6.5

Obliczyć wariację całki działania:

$$J[y(t)] = \int_0^1 (12ty + y^2) dt$$

Wariację  $\delta J$  będącą liniową częścią przyrostu funkcjonału:

$$(\Delta J = J(y + \delta y) - J(y))$$

względem  $\delta y$  obliczamy z zależności (6.41):

$$\delta J[y(t)] = \int_{t_0}^{t_k} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \delta y + \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt$$

Mamy zatem:

$$\delta J = \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (12ty + y^2) \delta y + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (12ty + y^2) \delta \dot{y} \right] dt$$

a po wykonaniu oznaczonych działań:

$$\delta J = \int_0^1 (12t \delta y + 2\dot{y} \delta \dot{y}) dt$$

Ponieważ:

$$\int_0^1 2\dot{y} \delta \dot{y} dt = \int_0^1 2\dot{y} \frac{d}{dt}(\delta y) dt$$

to całkując przez części mamy:

$$\int_0^1 2\dot{y} \delta \dot{y} dt = (2\dot{y} \delta y) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{y} \delta y dt$$

Z warunku  $\delta y(1) = \delta y(0) = 0$  wynika, że  $2\dot{y} \delta y \Big|_0^1 = 0$ , co pozwala zapisać wariację całki działania w postaci:

$$\delta J = \int_0^1 (12t - 2\ddot{y}) \delta y dt$$

## Przykład 6.6

Dla całki działania:

$$J[x(t), y(t)] = \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) dt$$

przy warunkach:

$$\begin{cases} x(0) = 0, & y(0) = 0 \\ x(1) = 1, & y(1) = -1 \end{cases}$$

wyznaczyć trajektorię ruchu rzeczywistego.

I tutaj podobnie jak w przykładzie (6.5) liczymy:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_0^1 & \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) \delta x + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) \delta \dot{x} + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) \delta y + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) \delta \dot{y} \right] dt \end{aligned}$$



a dalej licząc pochodne cząstkowe mamy:

$$\delta J = \int_0^1 [(2\dot{x}^2 + \dot{y})\delta\dot{x} + (2\dot{y}^2 + \dot{x})\delta\dot{y}] dt$$

Wykonując teraz całkowanie przez części:

$$\delta J = (2\dot{x} + \dot{y})\delta x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2\ddot{x} + \ddot{y})\delta x dt + (2\dot{y} + \dot{x})\delta y \Big|_0^1 - \int_0^1 (2\ddot{y} + \ddot{x})\delta y dt$$

i wykorzystując warunek:

$$\delta x(1) = \delta x(0) = \delta y(1) = \delta y(0) = 0$$

otrzymujemy:

$$\delta J = - \int_0^1 (2\ddot{x} + \ddot{y})\delta x dt - \int_0^1 (2\ddot{y} + \ddot{x})\delta y dt$$

Ponieważ dla ruchu rzeczywistego  $\delta J = 0 \quad \forall \delta x$  i  $\delta y$ , to stąd wynika, że musi być spełniony następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \\ 2\ddot{y} + \ddot{x} = 0 \end{cases}$$

Układ ten przy zadanych warunkach ma następujące rozwiązanie:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t \end{cases}$$

### Przykład 6.7

Stosując poznane metody wariacyjne wyznaczyć rzeczywisty ruch układu, jeśli:

$$J[y(t)] = \int_0^{\pi/4} [y^2 - \dot{y}^2 + 6y \sin(2t)] dt$$

Jako pierwszą zastosujemy metodę wykorzystującą tę własność, że dla ruchu rzeczywistego funkcjonal  $J[y(t)]$  przyjmuje wartość minimum. Funkcją bazową, która spełnia zadane warunki może być funkcja postaci:

$$\varphi(t) = \sin(2t)$$

co pozwala zapisywać poszukiwane rozwiązanie następująco:

$$y_1(t) = a_1 \sin(2t)$$

gdzie:  $a_1$  jest nieznanym współczynnikiem, który będzie wyznaczony z warunku min.  $J[y_1(t)]$ , co zachodzi dla  $\frac{\partial}{\partial a_1} J[y_1(t)] = 0$

$$J[y(t)] = \int_0^{\pi/4} [a_1^2 \sin^2(2t) - 4a_1^2 \cos^2(2t) + 6a_1 \sin^2(2t)] dt$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} J[y_1(t)] = \int_0^{\pi/4} [(2a_1 + 6)\sin^2(2t) - 8a_1 \cos^2(2t)] dt = 0$$

Po wykonaniu całkowania i podstawieniu granic otrzymujemy  $a_1 = 1$ . Rozwiązaniem ostatecznym jest więc funkcja:

$$y_1(t) = \sin(2t)$$

Zastosujmy teraz metodę bazującą na obliczeniu wariacji funkcjonału i warunku  $\delta J = 0$ . Liczymy zatem:

$$\delta J[y(t)] = \int_0^{\pi/4} \{[2y + 6\sin(2t)]\delta y - 2\dot{y}\delta y\} dt = 0 \quad \forall \delta y$$

i podstawiamy:

$$y_1 = a_1 \sin(2t)$$

$$\delta y_1 = b_1 \sin(2t)$$

$$\delta \dot{y}_1 = 2b_1 \cos(2t)$$

gdzie:  $b_1$  – dowolne

$$\delta J = 2 \int_0^{\pi/4} [a_1 \sin(2t) + 3\sin(2t)b_1 \sin(2t) - 2a_1 \cos(2t) \cdot 2b_1 \cos(2t)] dt = 0 \quad \forall b_1$$

Warunek  $\delta J = 0$  dla dowolnego współczynnika  $b_1$  doprowadza do równania:

$$\int_0^{\pi/4} [(2a_1 + 6) \sin^2 2t - 8a_1 \cos^2 2t] dt = 0$$

z którego wyznaczamy  $a_1$  i jest też równe jedności, czyli  $y_1(t) = \sin 2t$ .

Jak wiadomo warunek  $\delta J = 0$  doprowadza do równania Lagrange'a II rodzaju. W naszym przypadku mamy zatem:

$$\begin{aligned} \delta J[y(t)] &= \int_0^{\pi/4} \{ [2y + 6 \sin(2t)] \delta y - 2\dot{y} \delta \dot{y} \} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} [2y + 6 \sin(2t) + 2\ddot{y}] \delta y dt = 0 \quad \forall \delta y \end{aligned}$$

Stąd równanie Lagrange'a II rodzaju to:

$$2y + 6 \sin(2t) + 2\ddot{y} = 0$$

a jego rozwiązaniem jest funkcja  $y(t) = \sin(2t)$ .

#### 6.4. DYNAMIKA RUCHU WZGLĘDNEGO

Dotychczas rozważaliśmy ruch układu materialnego w inercjalnym układzie odniesienia. Powstaje jednak pytanie, jak zmieni się prawo ruchu Newtona, gdy analizę ruchu przeprowadzimy w układzie nieinercjalnym? Aby dać prawidłową odpowiedź, wykorzystamy związek pomiędzy przyspieszeniami punktu w ruchu względnym:

$$\bar{a}_w = \bar{a}_b - \bar{a}_u - \bar{a}_c \quad (6.51)$$

Mnożąc to równanie przez masę punktu:

$$m \bar{a}_w = m \bar{a}_b + (-m \bar{a}_u) + (-m \bar{a}_c)$$

i wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} m \bar{a}_b &\equiv \bar{F} \\ -m \bar{a}_u &\equiv \bar{F}_u \quad - \text{siła unoszenia} \\ -m \bar{a}_c &= \bar{F}_c \quad - \text{siła Coriolisa} \end{aligned} \quad (6.52)$$

otrzymujemy prawo ruchu względnego:

$$m \bar{a}_w = \bar{F} + \bar{F}_u + \bar{F}_c \quad (6.53)$$

A więc prawo ruchu w układzie nieinercyjnym jest takie jak w układzie inercyjnym z tym, że do sił działających należy dodać siłę unoszenia i Coriolisa. Badając ruch punktu względem Ziemi, która jest nieinercyjnym układem odniesienia, należy stosować prawo ruchu określone zależnością (6.53).

Na punkt materialny  $A$  o masie  $m$ , pozostający w spoczynku względem Ziemi, działają siły: przyciąganie Ziemi  $\bar{G}$ , siła odśrodkowa (unoszenia)  $\bar{F}_u$  i siła ciężkości  $\bar{Q}$ , związane zależnością:

$$\bar{Q} = \bar{G} + \bar{F}_u \quad (6.54)$$

Siła unoszenia leży w płaszczyźnie równoleżnika określonego szerokością geograficzną  $\varphi$ , a jej wielkość jest równa:

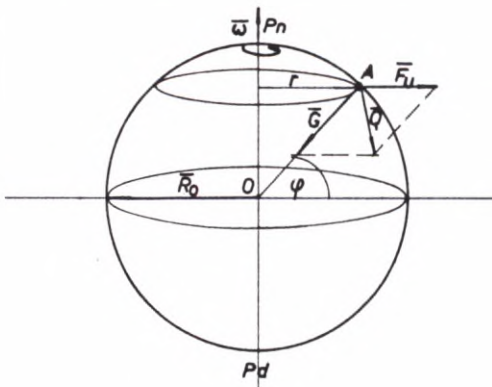
$$|\bar{F}_u| = m r \omega^2 = m R_0 \omega^2 \cos \varphi \quad (6.55)$$

Siła ciężkości określa kierunek zwany pionem, który na ogół nie pokrywa się z kierunkiem siły  $\bar{G}$ . Jest ona maksymalna na biegunach (pn, pd) i minimalna na równiku, przy czym różnica ta nie przekracza 0,55 %.

Siła przyciągania ziemskiego leży na kierunku przechodzącym przez środek Ziemi. Jest ona równa iloczynowi masy punktu i przyspieszenia ziemskiego (grawitacyjnego):

$$\bar{G} = m \bar{g} \quad (6.56)$$

Wielkość przyspieszenia grawitacyjnego zależy od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza. W obliczeniach technicznych przyjmuje się (przy średnim promieniu Ziemi  $R_0 = 6370$  [km])  $|\bar{g}| = 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ .

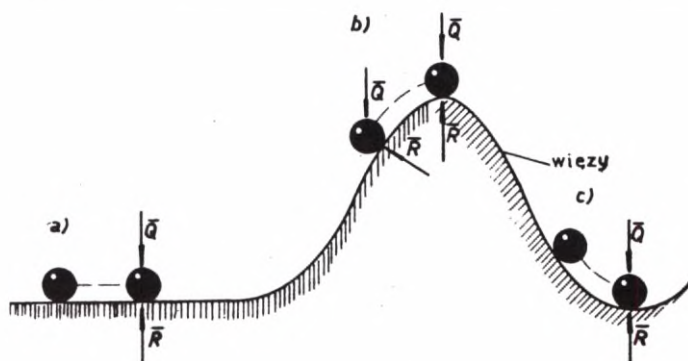


Rys. 6.7

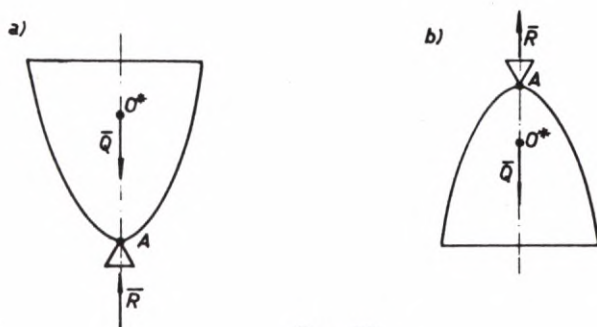
## 6.5. RODZAJE STANÓW RÓWNOWAGI UKŁADU MATERIALNEGO

W statyce badaliśmy równowagę układu materialnego, podając warunki konieczne i wystarczające tej równowagi. Jeżeli przyjrzymy się zachowaniu układu wytrąconego z położenia równowagi, to stwierdzimy, że może ono być różne. I tak, gdy po dowolnie małym początkowym wychyleniu z położenia równowagi ruch ciała jest taki, że wychylenia wszystkich punktów ciała nie są większe od początkowych, to równowagę taką nazywamy stateczną (trwałą).

W przeciwnym przypadku równowaga jest niestateczna (chwiejna). Dla układu materialnego znajdującego się w potencjalnym polu sił położeniu równowagi trwałej odpowiada minimum energii potencjalnej, zaś równowadze niestatecznej — jej maksimum. Jeśli przy dowolnie małym wychyleniu układu



Rys. 6.8



Rys. 6.9

z położenia równowagi energia potencjalna nie ulega zmianie, to mówimy o równowadze obojętnej. Obrazowo różne położenia równowagi dla kulki o masie  $m$  przedstawiono na rys. 6.8. Położenie a — odpowiada równowadze obojętnej, b — równowadze niestatecznej, zaś c — równowadze statecznej. Podobnie dla

ciała ciężkiego podpartego przegubowo w punkcie A (por. rys. 6.9) położenie a – jest położeniem równowagi niestatecznej, zaś b – równowagi statecznej.

Podamy teraz definicję równowagi statecznej układu według Lapunowa. Niech  $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$  opisuje położenie układu materialnego, zaś  $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_s^*)$  położenie jego równowagi. Stan równowagi układu materialnego jest trwały, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  można dobrać takie  $\eta_1(\varepsilon) > 0$  i  $\eta_2(\varepsilon) > 0$ , że jeżeli spełnione są nierówności:

$$\begin{cases} |q(t_0) - q^*| < \eta_1(\varepsilon) \\ |\dot{q}(t_0) - \dot{q}^*| < \eta_2(\varepsilon) \end{cases} \quad (6.57)$$

to zachodzi:

$$\begin{cases} |q(t) - q^*| < \varepsilon \\ |\dot{q}(t) - \dot{q}^*| < \varepsilon \end{cases}$$

dla każdego  $t > t_0$ .

W przypadku, gdy dla  $\varepsilon > 0$  nie da się dobrać takich  $\eta_1(\varepsilon) > 0$  i  $\eta_2(\varepsilon) > 0$ , aby spełnione były nierówności (6.57), to mamy do czynienia ze stanem równowagi nietrwalej.

**Twierdzenie 1.** W stanie równowagi układu jego energia potencjalna przyjmuje wartość ekstremalną.

Aby wykazać słuszność tego twierdzenia, skorzystamy z równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

Ponieważ w położeniu równowagi układu prędkości punktów są równe zeru, a zatem jego energia kinetyczna jest równa zeru. Mamy więc:

$$Q_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$$

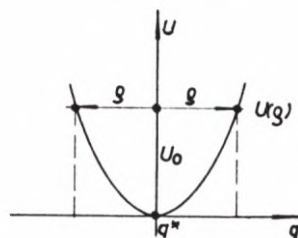
a to jest warunek konieczny ekstremum funkcji.

**Twierdzenie 2 (Mindinga-Lejeuna-Dirichleta).** Jeżeli w położeniu równowagi układu energia potencjalna przyjmuje wartość minimum, to ten stan równowagi jest położeniem równowagi trwałej.

W dowodzie korzysta się z własności wypukłości energii potencjalnej układu oraz zasady zachowania energii mechanicznej w polu zachowawczym.

Niech w położeniu równowagi całkowita energia mechaniczna układu jest równa  $h_0 = U_0 + E_{k0} = \text{const}$ . Jeżeli teraz małym impulsem wytrącimy nasz układ z położenia równowagi, to znajdzie się on w dowolnie małym otoczeniu  $\rho$  położenia równowagi (gdzie  $\rho = q^* + \delta q$ ), gdyż musi być spełniony warunek:

$$E_k(\rho) + U(\rho) = E_{k0} + U_0 = \text{const} \quad (6.58)$$



Rys. 6.10

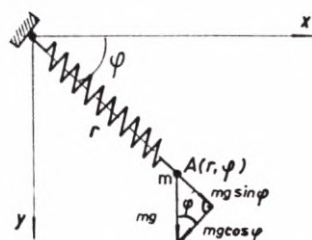
Aby układ mógł opuścić to otoczenie, jego energia kinetyczna musiałaby być większa od  $E_k(\rho)$ , co jest niemożliwe wobec warunku (6.58). A zatem w położeniu równowagi trwałej mamy minimum energii potencjalnej układu, co zapewniają warunki:

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2} > 0 \wedge \det \left| \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right| > 0 \quad (5.59)$$

### Przykład 6.8

Wyznaczyć położenie równowagi trwałej dla punktu materialnego  $A$ , zawieszono na sprężynie o stałej sprężystości  $k$ . Punkt  $A$  ma dwa stopnie swobody i dlatego dwie współrzędne uogólnione jednoznacznie określają jego położenie. Mogą to być współrzędne biegunowe  $q_1 = r$  i  $q_2 = \varphi$ .

Energia potencjalna układu jest równa sumie energii punktu w polu grawitacyjnym (polu sił ciężkości) i energii sprężystości sprężyny:



Rys. 6.11

$$U = -m g r \sin \varphi + \frac{k}{2} (r - r_0)^2$$

gdzie:

- $r$  — długość sprężyny po rozciągnięciu,
- $r_0$  — długość sprężyny przed rozciągnięciem.

Położenie równowagi trwałej wyznaczamy z warunków (6.59). Liczymy zatem:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -m g \sin \varphi + k (r - r_0)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -m g r \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} = -m g \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = m g r \sin \varphi$$

Przyrównując pierwsze pochodne energii potencjalnej do zera, otrzymujemy:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad r_1 = r_0 + \frac{m g}{k}$$

oraz

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad r_2 = r_0 - \frac{m g}{k}$$

Sprawdzamy teraz znaki drugich pochodnych w obu położeniach.

Dla pierwszego położenia  $(r_1, \varphi_1)$  mamy:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = k > 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} = -m g \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = m g \left( r_0 + \frac{m g}{k} \right) \sin \frac{\pi}{2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 = k m g \left( r_0 + \frac{m g}{k} \right) \sin \frac{\pi}{2} > 0$$

a więc jest to położenie równowagi trwałe.

Dla drugiego rozwiązania  $(r_2, \varphi_2)$  stwierdzamy, że jest ono położeniem równowagi niestatecznej, gdyż:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = m g \left( r_0 - \frac{m g}{k} \right) \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) < 0$$



## PYTANIA KONTROLNE

1. Podać zasadę d'Alemberta i wyjaśnić, do czego ona służy.
2. Czym są (i ile ich jest?) równania otrzymane z zasady d'Alemberta?
3. Podać równania Lagrange'a II rodzaju w przypadku ogólnym i w potencjalnym polu sił.
4. Dlaczego w równaniach Lagrange'a nie występują siły reakcji więzów?
5. Podać zasadę Hamiltona i wyprowadzić z niej równania Lagrange'a w potencjalnym polu sił.
6. Omówić metody przybliżonego wyznaczania trajektorii rzeczywistej układu materialnego.
7. Podać definicję sił: unoszenia i Coriolisa.
8. Kiedy siła Coriolisa jest równa zeru?
9. Czym różni się prawo ruchu w układzie inercjalnym od prawa ruchu w układzie nieinercjalnym?
10. Objaśnić pojęcia sił: przyciągania ziemskiego i ciężkości.
11. Podać definicję równowagi trwałej.
12. Podać twierdzenie Mindinga-Lejeuna-Dirichleta.

## ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Obliczyć wariację funkcjonału działania:

$$J(q) = \int_0^1 (q^2 + t^2 \dot{q}) dt$$

2. Dla całki działania:

$$J(x(t), y(t)) = \int_0^{\pi/2} (x^2 + y^2 + 2xy) dt$$

przy warunkach:

$$x(0) = y(0) = 0$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

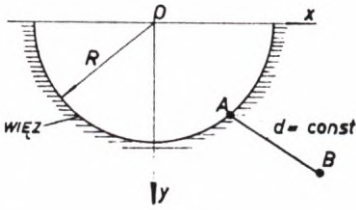
wyznaczyć trajektorię ruchu rzeczywistego.

3. Punkt materialny o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły ciężkości po krzywej o równaniu:

$$C: \begin{cases} x = d(\varphi - \sin \varphi) \\ y = d(1 - \cos \varphi), \end{cases} \quad d = \text{const}$$

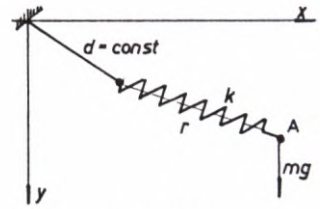
Przyjąć warunki początkowe i wyznaczyć trajektorię ruchu rzeczywistego.

4. Zbudować równania Lagrange'a II rodzaju dla sztywnego układu punktów  $A$  i  $B$  znajdujących się w polu sił ciężkości (rys. 6.12)



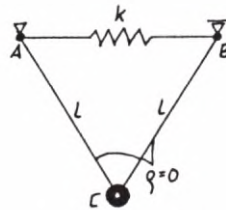
Rys. 6.12

$$\begin{aligned} m_A &= m \\ m_B &= 2m \end{aligned}$$



Rys. 6.13

5. Wyznaczyć położenie równowagi trwałej dla punktu  $A$  o masie  $m$  poddanego więzom jak na rys. 6.13.
6. Z równań Lagrange'a II rodzaju wyznaczyć ruch układu punktów materialnych, przyjmując warunki początkowe. Pręty o stałej długości (rys. 6.14) w punkcie  $C$  połączone są przegubowo.
7. Rozwiązać zadanie 6 przy założeniu, że



Rys. 6.14

$$\begin{aligned} m_A &= m_B = m_0 \\ m_C &= 2m_0 \end{aligned}$$

pręty  $AC$ ,  $BC$  mają stałą gęstość  $\rho = \frac{m_0}{l}$ .

8. Jednorodny walec o promieniu  $R$  i masie  $m_0$  toczy się bez poślizgu po równi pochylej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Obliczyć przyspieszenie dowolnego punktu osi walca oraz wyznaczyć jego ruch.

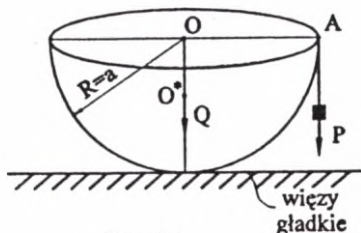
## Rozdział 7

WYBRANE ZADANIA EGZAMINACYJNE  
WRAZ Z ROZWIĄZANAMI

## 7.1. ZESTAW EGZAMINACYJNY NR 1

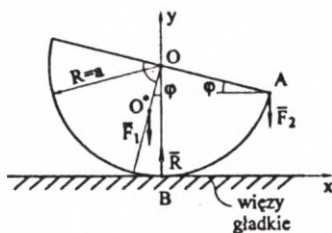
## A – część pisemna

1. W punkcie  $A$  jednorodnej półkuli o promieniu  $R = a$  i ciężarze  $Q$  podwieszono ciężar  $P$ . Korzystając z zasady prac wirtualnych wyznaczyć kąt  $\varphi$  w położeniu równowagi.



Rys. 7.1

## Rozwiązanie



Rys. 7.1a

Na rys. 7.1 a zaznaczono siły działające na półkulę. W przyjętym układzie współrzędnych mamy:

$$\bar{F}_1 = (0, -Q), \quad \overline{OO^*} = \left( -\frac{3}{8}a \sin \varphi, -\frac{3}{8}a \cos \varphi \right) = \bar{r}_1$$

$$\bar{F}_2 = (0, -P), \quad \overline{OA} = (a \cos \varphi - a \sin \varphi) = \bar{r}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}'_1 &= \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \tau} = \left( -\frac{3}{8} a \varphi' \cos \varphi, \frac{3}{8} a \varphi' \sin \varphi \right) \\ \bar{r}'_2 &= \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \tau} = (-a \varphi' \sin \varphi - a \varphi' \cos \varphi) \end{aligned} \right|_{k \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

$$k \hat{v}_1 = \bar{\delta}_1 = \left( -\frac{3}{8} a \cos \varphi \delta \varphi, \frac{3}{8} a \sin \varphi \delta \varphi \right)$$

$$k \hat{v}_2 = \bar{\delta}_2 = (-a \sin \varphi \delta \varphi, -a \cos \varphi \delta \varphi), \quad \delta \varphi = k \varphi$$

W analizowanym przypadku zasada prac wirtualnych:

$$\delta L = \bar{F}_1 \cdot \bar{\delta}_1 + \bar{F}_2 \cdot \bar{\delta}_2 = \left( -\frac{3}{8} Q a \sin \varphi + P a \cos \varphi \right) \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi$$

daje rozwiązanie:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{8P}{3Q}$$

Ten sam wynik można uzyskać z warunku równowagi  $\Sigma M_B = 0$

$$Q \frac{3}{8} a \sin \varphi - P a \cos \varphi = 0$$

2. Punkt  $A$  o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły:

$$\bar{F} = m(-b \omega^2 \cos(\omega t), -c \omega^2 \sin(\omega t)), \quad b, c, \omega = \text{const}$$

a) po jakim torze porusza się punkt, jeśli:

$$\bar{r}(t=0) = (b, 0)$$

$$\dot{\bar{r}}(t=0) = (0, c \omega),$$

b) podać wyrażenie na energię kinetyczną poruszającego się punktu,

c) ile wynosi praca między punktami  $A(b, 0)$  i  $B(0, c)$ ,

d) czy pole, w którym odbywa się ruch jest polem potencjalnym, jeśli tak, to wyznaczyć potencjał.

## Rozwiązanie

Na podstawie II zasady Newtona, czyli prawa ruchu możemy napisać:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x = -mb\omega^2 \cos(\omega t) \\ m\ddot{y} = F_y = -mc\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -b\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y} = -c\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \Big| \cdot \int dt$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -b\omega \sin(\omega t) + c_1 \\ \dot{y} = c\omega \cos(\omega t) + d_1 \end{cases} \Big| \cdot \int dt$$

$$\begin{cases} x(t) = b \cos(\omega t) + c_1 t + c_2 \\ y(t) = c \sin(\omega t) + d_1 t + d_2 \end{cases}$$

Jest to rozwiązanie ogólne. Stałe  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  i  $d_2$  wyznaczamy z warunków początkowych:

$$\begin{cases} b = b \cos 0^\circ + c_2 \\ 0 = c \sin 0^\circ + d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = -b\omega \sin 0^\circ + c_1 \\ c\omega = c\omega \cos 0^\circ + d_1 \end{cases}$$

otrzymując  $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$ .

Po podstawieniu obliczonych stałych do całki ogólnej otrzymamy:

$$\bar{r}(t): \begin{cases} x(t) = b \cos(\omega t) \\ y(t) = c \sin(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{b} = \cos(\omega t) \\ \frac{y}{c} = \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

Torem punktu jest zatem elipsa.

Wyrażenie na energię kinetyczną ma postać:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (b^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + c^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)) = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 \left( \frac{b^2 y^2}{c^2} + \frac{c^2 x^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

$$L_{AB} = E_k(B) - E_k(A) = \frac{1}{2} m \omega^2 b^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 c^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (b^2 - c^2)$$

Jeżeli do wyrażenia na  $\bar{F}$  podstawimy  $b \cos(\omega t) = x$  i  $c \sin(\omega t) = y$ , to otrzymamy:

$$\bar{F} = (-m\omega^2 x, -m\omega^2 y)$$

Powyższe pole sił spełnia warunki Schwartza, gdyż zachodzi:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

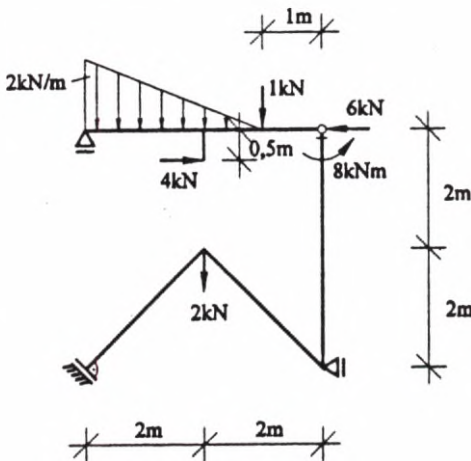
Ponieważ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P = -m\omega^2 x \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q = -m\omega^2 y$$

to

$$V(x, y) = -\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + V_0$$

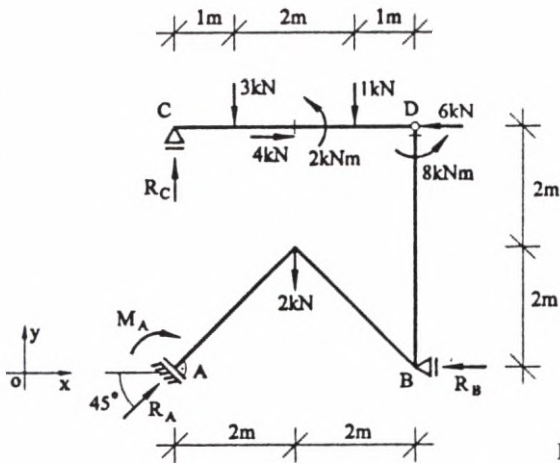
3. Z równań równowagi wyznaczyć reakcje podporowe dla danego układu statycznie wyznaczalnego.



Rys. 7.2

### Rozwiązanie

Na rys. 7.2a zaznaczono reakcje podporowe i przyjęto układ współrzędnych



Rys. 7.2a

Piszemy równania równowagi:

$$1^\circ \underline{M_D^I = 0}$$

$$-R_c \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_c = 3 \text{ [kN]}$$

$$2^\circ \underline{\Sigma Y = 0}$$

$$R_c - 3 - 1 - 2 + R_A \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$3 - 3 - 3 + R_A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow R_A = 3\sqrt{2} \text{ [kN]}$$

$$3^\circ \underline{\Sigma X = 0}$$

$$R_A \cdot \cos 45^\circ + 4 - 6 - R_B = 0$$

$$3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2 - R_B = 0 \Rightarrow R_B = 1 \text{ [kN]}$$

$$4^\circ \underline{\Sigma M_A = 0}$$

$$-M_A - 2 \cdot 2 + 8 + 6 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 2 - 4 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$M_A = 8 \text{ [kNm]}$$

Sprawdzenie  $\Sigma M_1 = 0$

$$-R_c \cdot 1 + 2 - 1 \cdot 2 + 8 - R_B \cdot 4 - 2 \cdot 1 + R_A \cos 45^\circ \cdot 4 -$$

$$- R_A \sin 45^\circ \cdot 1 - M_A = 0$$

$$-3 + 2 - 2 + 8 - 4 - 2 + 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 8 = 0$$

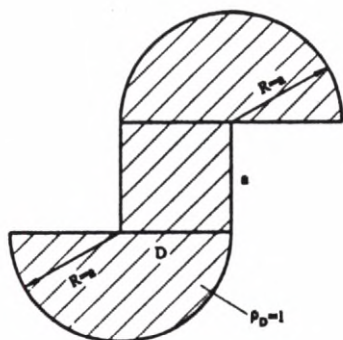
$$0 = 0$$

**Odpowiedź:**

Reakcje podporowe mają kierunki i zwroty jak na rys. 7.2 a, zaś ich wielkości wynoszą:

$$R_A = 3\sqrt{2} \text{ [kN]}, \quad R_B = 1 \text{ [kN]}, \quad R_c = 3 \text{ [kN]}, \quad M_A = 8 \text{ [kNm]}$$

4. Dla jednorodnego obszaru płaskiego przedstawionego na rys. 7.3 wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności.



Rys. 7.3

Analizowany układ materialny składa się z kwadratu i dwóch półkoli. Jego środek masy pokrywa się ze środkiem kwadratu (por. rys. 7.3 a). W przyjętym układzie współrzędnych związanym ze środkiem masy liczymy:

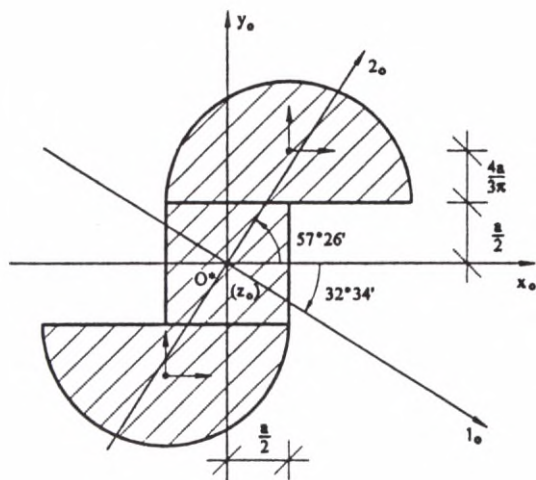
$$J_{x_o} = \frac{a^4}{12} + 2 \left[ \frac{\pi a^4}{8} - \frac{\pi a^2}{2} \cdot \left( \frac{4a}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi a^2}{2} \cdot \left( \frac{a}{2} + \frac{4a}{3\pi} \right)^2 \right] = 2,99 a^4$$

$$J_{y_o} = \frac{a^4}{12} + 2 \left[ \frac{\pi a^4}{8} + \frac{\pi a^2}{2} \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right] = 1,65 a^4$$



$$J_{z_o} = J_{x_o} + J_{y_o} = 4,64 a^4$$

$$D_{z_o} = J_{x_o y_o} = 0 + 2 \left[ 0 + \frac{\pi a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{a}{2} + \frac{4a}{3\pi} \right) \right] = 1,45 a^4$$



Rys. 7.3a

Główne centralne momenty bezwładności:

$$J_{1_o} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_o} - J_{x_o})^2 + 4 J_{x_o y_o}^2} = (2,32 + 1,60) a^4 = 3,92 a^4$$

$$J_{2_o} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_o} - J_{x_o})^2 + 4 J_{x_o y_o}^2} = (2,32 - 1,60) a^4 = 0,72 a^4$$

Sprawdzenie

$$J_{1_o} + J_{2_o} = J_{x_o} + J_{y_o} = (3,92 + 0,72) a^4 = 4,64 a^4$$

Położenie głównych centralnych osi bezwładności:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{1_o}} = -0,64 \Rightarrow \alpha_{1_o} = -32^\circ 34'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{2_o} = \frac{J_{x_o y_o}}{J_{y_o} - J_{2_o}} = 1,56 \Rightarrow \alpha_{2_o} = 57^\circ 26'$$

## Sprawdzenie

$$|\alpha_{1o}| + |\alpha_{2o}| = 90^\circ$$

$$32^\circ 34' + 57^\circ 26' = 90^\circ$$

**B – część testowa**

1. Do czego redukuje się układ sił w punktach osi środkowej?

W punktach osi środkowej układ redukuje się do wypadkowej, gdy  $K = 0$ , zaś do skrętnika dla  $K \neq 0$ .

2. Czy moment układu sił zależy od punktu, względem którego jest liczony?

Przy zerowej sumie układu moment nie zależy od punktu, bo jest stały, zaś dla sumy niezerowej zależy, co wynika z twierdzenia o zmianie bieguna:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \bar{S} \times \bar{AB}$$

3. Podać elementy naturalnego opisu punktu.

W naturalnym opisie należy podać: tor, orientację toru, punkt początkowy toru (lub ruchu) i równanie ruchu  $s = s(t)$ .

4. Wyznaczyć położenie środka równoległego układu sił oraz podać równoważny mu układ sił w tym punkcie:

$$\bar{F}_1 = (-2P, P), \quad \bar{F}_2 = (4P, -2P)$$

$$A_1(a, 0) \quad A_2(0, a)$$

Zadany układ sił posiada środek, gdyż jest równoległym układem o sumie niezerowej:

$$\overline{OO^*} = \frac{F_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2}{F_1 + F_2}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{F}_2}{|F_2|} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$F_1 = \bar{F}_1 \cdot \bar{e}_1 = -\sqrt{5}P, \quad \bar{r}_1 = (a, 0)$$

$$F_2 = \bar{F}_2 \cdot \bar{e}_1 = 2\sqrt{5}P, \quad \bar{r}_2 = (0, a)$$

$$F_1 + F_2 = \sqrt{5}P$$

$$F_1 \vec{r}_1 = (-\sqrt{5}Pa, 0), \quad F_2 \vec{r}_2 = (0, 2\sqrt{5}Pa)$$

$$\vec{OO}^* = (-a, 2a)$$

W środku układu równoważnym układem jest wypadkowa  $\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2P, -P)$  o prostej działania:

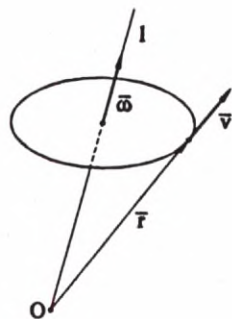
$$l: \begin{cases} x = -a + 2\lambda a \\ y = 2a - \lambda a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

5. Podać definicję wektorów  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ .

Wektor prędkości kątovej:

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \text{k.} & - \text{ leży na osi obrotu} \\ \text{m.} & - |\vec{\omega}| = |\omega| \\ \text{z.} & - \text{ trójka wektorów } \vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v} \text{ ma być prawoskrętna} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

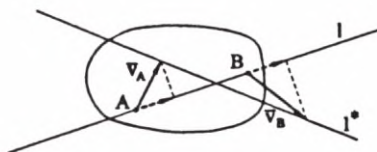


Wektor przyspieszenia kątowego:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$$

6. Podać twierdzenie o rozkładzie prędkości punktów ciała sztywnego w ruchu dowolnym.

**Twierdzenie 1**



$$\vec{v}_{Al} = \vec{v}_{Bl}, \quad A \in l \text{ i } B \in l$$

W dowolnym ruchu ciała sztywnego rzuty wektorów prędkości punktów leżących na prostej na tę prostą są sobie równe.

**Twierdzenie 2**

W dowolnym ruchu ciała sztywnego końce wektorów prędkości punktów leżących na prostej też leżą na prostej.

7. Podać zasadę prac wirtualnych i wyjaśnić, czy jej spełnienie gwarantuje równowagę ciała.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił działających na układ materialny swobodny lub nieswobodny o więzach: stacjonarnych, geometrycznych, dwustronnych i gładkich jest, aby suma prac wirtualnych od sił czynnych działających na ten układ na każdym przesunięciu wirtualnym była równa zero:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_{si}) = 0 \quad \forall \bar{\delta}_{si}$$

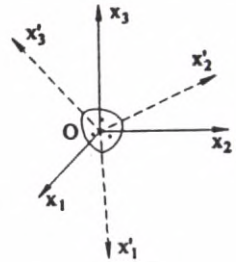
Jeśli analizowany układ materialny nie ma możliwości ruchu (liczba stopni swobody  $s = 0$ ), to spełnienie zasady prac wirtualnych gwarantuje jego równowagę.

8. Podać definicję i własności macierzy przejścia.

Macierz przejścia jest macierzą cosinusów kierunkowych:

$$\alpha = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \text{ gdzie } \alpha_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

$$\alpha \cdot \alpha^T = 1 \quad \text{i} \quad \alpha^T \cdot \alpha = 1, \quad \det \alpha = \pm 1$$



9. Z tablic inżynierskich (W. Bogucki, M. Żybertowicz: *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*) odczytano dla kątownika  $\perp 75 \times 75 \times 8$ :

$$J_{x_1} = J_{y_1} = 60,1 \text{ [cm}^4\text{]}, \quad J_{\max} = J_{\xi} = 94,9 \text{ [cm}^4\text{]}$$

Obliczyć  $J_{\min} = J_{\eta}$  oraz  $J_{x_1 y_1}$

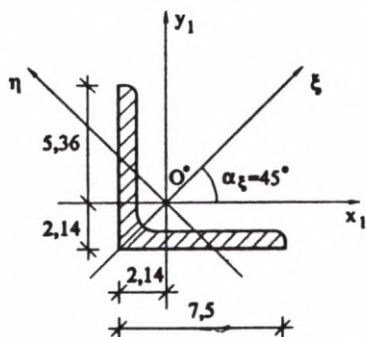
Rozwiązanie

$$J_{\eta} + J_{\xi} = J_{x_1} + J_{y_1} = 120,2 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$J_{\eta} = 120,2 - J_{\xi} = 120,2 - 94,9 = 25,3 \text{ [cm}^4\text{]}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\xi} = \frac{J_{x_1 y_1}}{J_{y_1} - J_{\xi}} = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1 \Rightarrow J_{x_1 y_1} =$$

$$= J_{y_1} - J_{\xi} = 60,1 - 94,9 = -34,8 \text{ [cm}^4\text{]}$$



10. Który z podanych układów może stanowić liniowo niezależny układ równań dla płaskiego ustroju statycznie wyznaczalnego:

$$\text{a) } \begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{i1} + \sum_{j=1}^k R_{j1} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{i2} + \sum_{j=1}^k R_{j2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_A(\bar{R}_j) = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{i1} + \sum_{j=1}^k R_{j1} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_A(\bar{R}_j) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_B(\bar{R}_j) = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_A(\bar{R}_j) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_B(\bar{R}_j) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) + \sum_{j=1}^k M_C(\bar{R}_j) = 0 \end{cases}$$

## Rozwiązanie

Układ (a), gdy prosta  $l$  nie jest równoległa do prostej  $p$ .

Układ (b), gdy prosta wyznaczona przez punkt  $A$  i  $B$  nie jest prostopadła do prostej  $l$ .

Układ (c), gdy punkty  $A, B, C$  spełniają warunek  $\overline{AB} \times \overline{AC} \neq \overline{0}$  (niewspółliniowe).

11. Podać zasadę Hamiltona oraz obliczyć pierwszą wariację zadanego funkcjonału:

$$J(q(t)) = \int_{t_0=0}^{t_k=2} [\dot{q} - (\dot{q})^2 + t] dt$$

$$q(t=0) = 0, \quad q(t=2) = 1$$

## Rozwiązanie

W potencjalnym polu sił rzeczywisty ruch układu materialnego swobodnego lub nieswobodnego o więzach: stacjonarnych, geometrycznych, dwustronnych i gładkich odbywa się w ten sposób, że dla każdego przedziału czasowego  $\langle t_0, t_k \rangle$  wariacja całki działania  $\delta J(q(t))$  jest równa zeru przy dowolnych wariacjach funkcjonału ruchu  $q(t)$  spełniających zależność:

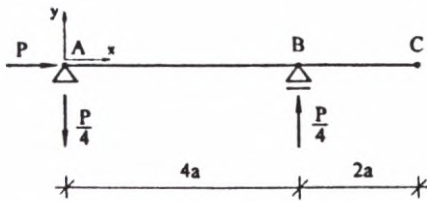
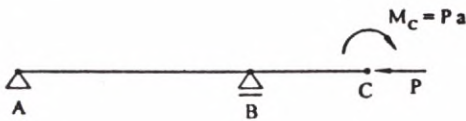
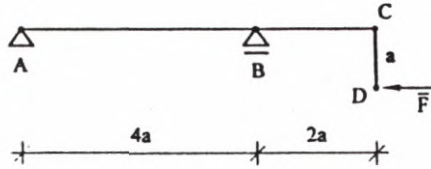
$$\delta q(t=t_0) = \delta q(t=t_k) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta J(q(t)) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0=0}^{t_k=2} [(\dot{q} + \alpha \dot{\eta}) - (\dot{q} + \alpha \dot{\eta})^2 + t] \Big|_{\alpha=0} dt = \\ &= \int_0^2 [\dot{\eta} - 2(\dot{q} + \alpha \dot{\eta}) \dot{\eta}] \Big|_{\alpha=0} dt = \int_0^2 (\dot{\eta} - 2\dot{q} \dot{\eta}) dt = \\ &= \int_0^2 (1 - 2\dot{q}) \dot{\eta} dt = (1 - 2\dot{q}) \eta \Big|_{t_0=0}^{t_k=2} - \int_0^2 (-2\ddot{q}) \eta dt \\ \delta J(q(t)) &= 2 \int_0^2 \ddot{q} \eta dt = 0 \quad \forall \eta \end{aligned}$$

**Uwaga!** W powyższym rozwiązaniu wariację funkcji ruchu  $\delta q(t) = \tilde{q}(t) - q(t)$  oznaczono przez  $\alpha \eta(t)$ , gdzie  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Stąd  $\tilde{q}(t) = q(t) + \alpha \eta(t)$ . Funkcja  $\eta(t)$  dla  $t = t_0$  i  $t = t_k$  przyjmuje wartość zero.

12. Na belkę działa siła ( $\vec{F}_D$ ). Podać w punkcie  $C$  układ równoważny tej sile, zaś w punktach  $A$  i  $B$  układ równoważący ją.

Rozwiązanie



Układ równoważny składa się z siły ( $\bar{F}_C$ ) i pary sił o momencie  $\bar{M}_C$ , przy czym  $|\bar{M}_C| = Pa$

Układ równoważący składa się z sił:

$$\bar{R}_A = \left( P, -\frac{P}{4} \right) \quad \text{i} \quad \bar{R}_B = \left( 0, \frac{P}{4} \right)$$

$$A(0, 0)$$

$$B(4a, 0)$$

13. Podać własności głównych osi bezwładności.

Główne osie bezwładności są to osie wyznaczone przez wektory własne tensora bezwładności. Mają one następujące własności:

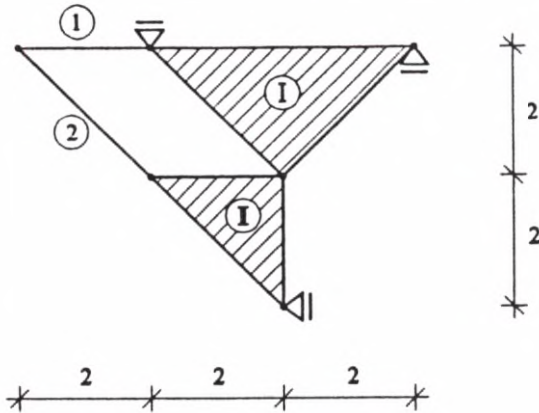
- każdy układ materialny posiada co najmniej trzy główne osie bezwładności, a to dokładnie trzy, gdy  $J_1 \neq J_2 \neq J_3 \neq J_1$ ; jedną główną oś i całą płaszczyznę głównych osi bezwładności prostopadłych do tej osi, gdy  $J_1 \neq J_2 = J_3$  lub  $J_2 \neq J_1 = J_3$  lub  $J_3 \neq J_1 = J_2$ ; całą przestrzeń głównych osi bezwładności, gdy  $J_1 = J_2 = J_3$ ;
- momenty bezwładności liczone względem głównych osi bezwładności są ekstremalne;
- momenty dewiacji liczone względem płaszczyzn wyznaczonych przez główne osie bezwładności są równe zeru.

14. Podać definicję tensora II rzędu.

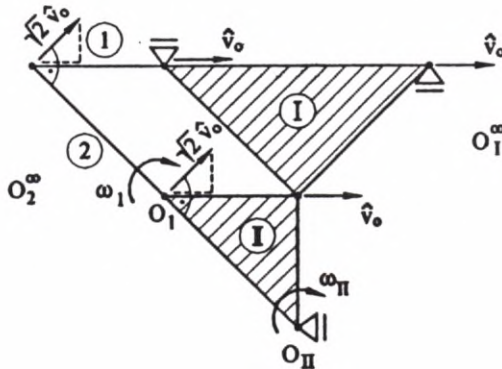
Tensorom II rzędu nazywamy macierz dwuwskaznikową, określoną w układzie współrzędnych, której elementy przy przejściu do drugiego układu współrzędnych transformują się wg następującego prawa transformacyjnego:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl} & \text{lub} & & \sigma_{ij} &= \alpha_{ki} \alpha_{lj} \sigma'_{kl} \\ \mathbf{T}'_{\sigma} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}_{\sigma} \cdot \mathbf{a}^T & \text{lub} & & \mathbf{T}_{\sigma} &= \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{T}'_{\sigma} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

15. Dla płaskiego układu prętowo-tarczowego wyznaczyć plan prędkości możliwych.

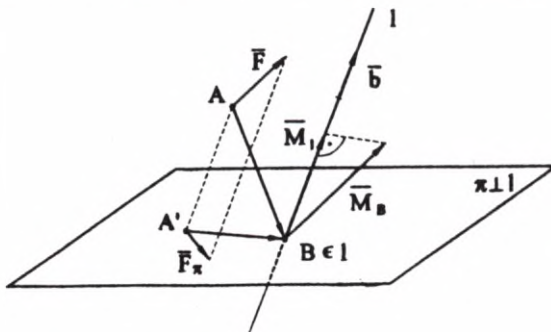


Rozwiązanie



**Uwaga!** W rozwiązaniu posłużono się twierdzeniami o rozkładzie prędkości punktów ciała sztywnego w ruchu dowolnym.

16. Podać twierdzenie o momencie siły względem prostej i przeprowadzić jego dowód.





$$\bar{M}_l = \left( \frac{\bar{M}_B \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \bar{b}, \quad \bar{M}_B = \bar{F} \times \overline{AB}$$

Moment siły względem prostej jest równy rzutowi momentu liczonego względem dowolnego punktu prostej na tą prostą.

**Dowód**

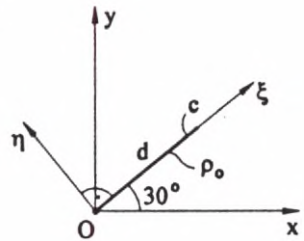
$$\begin{aligned} \bar{M}_l &= \bar{F}_\pi \times \overline{A'B} = \left[ \bar{F} - \left( \frac{\bar{F} \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \bar{b} \right] \times \left[ \overline{AB} - \left( \frac{\overline{AB} \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \bar{b} \right] = \\ &= \bar{F} \times \overline{AB} - \left( \frac{\overline{AB} \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \bar{F} \times \bar{b} - \left( \frac{\bar{F} \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \bar{b} \times \overline{AB} \quad \left| \cdot \bar{e}_l = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_l \cdot \bar{e}_l &= \bar{M}_B \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} - \left( \frac{\overline{AB} \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \left[ (\bar{F} \times \bar{b}) \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \right] - \left( \frac{\bar{F} \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \left[ (\bar{b} \times \overline{AB}) \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \right] \quad \left| \cdot \bar{e}_l \right. \\ (\bar{M}_l \cdot \bar{e}_l) \bar{e}_l &= \bar{M}_l = \left( \frac{\bar{M}_B \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \right) \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \left( \frac{\bar{M}_B \cdot \bar{b}}{b^2} \right) \bar{b} \quad \text{c.d.d.o.} \end{aligned}$$

17. Dla jednorodnego odcinka materialnego o gęstości  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  wyznaczyć elementy tensora bezwładności w układzie  $O, x, y$ , a następnie w układzie  $O, \xi, \eta$ .

W układzie  $(x, y)$  równanie odcinka jest następujące:

$$c: \begin{cases} x = x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



$$x \in \left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2} d \right\rangle$$

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{3} dx$$

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_C \rho_O y^2 dl = \rho_O \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 x^2 \frac{2}{3} \sqrt{3} dx = \rho_O \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} \frac{2}{9} \sqrt{3} x^2 dx = \\
 &= \rho_O \frac{2}{9} \sqrt{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} = \frac{1}{12} d^3 \rho_O
 \end{aligned}$$

$$J_y = \int_C \rho_O x^2 dl = \rho_O \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} x^2 \frac{2}{3} \sqrt{3} dx = \rho_O \frac{2}{3} \sqrt{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} = \frac{1}{4} d^3 \rho_O$$

$$\begin{aligned}
 J_{xy} &= \int_C \rho_O xy dl = \rho_O \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} x \frac{\sqrt{3}}{3} x \frac{2}{3} \sqrt{3} dx = \rho_O \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} x^2 dx = \\
 &= \rho_O \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}d} = \frac{\sqrt{3}}{12} d^3 \rho_O
 \end{aligned}$$

$$J_z = J_x + J_y = \frac{1}{3} d^3 \rho_O$$

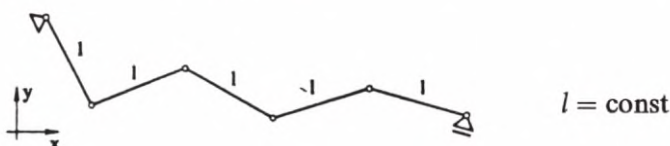
$$(J_A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \rho_O d^3 & -\frac{\sqrt{3}}{12} \rho_O d^3 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} \rho_O d^3 & \frac{1}{4} \rho_O d^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \rho_O d^3 \end{pmatrix} - (O, x, y)$$

Osie  $\xi, \eta$  są głównymi osiami bezwładności rozważanego odcinka w punkcie  $O$ .  
Zatem:

$$J_\xi = 0, \quad J_\eta = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} = \frac{1}{3} \rho_O d^3, \quad J_{\xi\eta} = 0$$

$$(J_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\rho_0 d^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_0 d^3 \end{pmatrix} - (O, x, y)$$

18. Podać definicję liczby stopni swobody układu materialnego, a następnie wyznaczyć ją dla układu jak na rysunku.



Przez liczbę stopni swobody układu materialnego rozumiemy tę ilość niezależnych parametrów, która jest potrzebna do jednoznacznego określenia położenia danego układu materialnego:

$$s = 3n - k$$

gdzie:

- $s$  – liczba stopni swobody,
- $n$  – liczba punktów jednoznacznie określająca ten układ,
- $k$  – liczba niezależnych równań więzów.

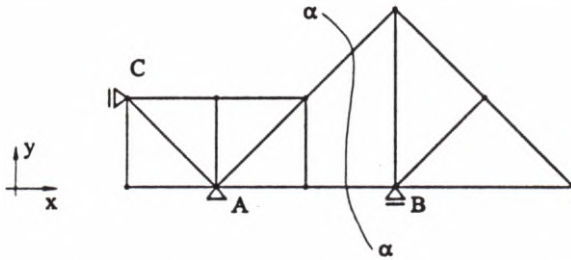
Dla przypadku płaskiego:

$$s = 2n - k$$

W analizowanym przykładzie mamy:

$$s = 2 \cdot 6 - 2 - 5 - 1 = 4$$

19. Podać definicję układu konstrukcyjnego statycznie wyznaczalnego i wyjaśnić jakim układem jest kratownica przedstawiona na podanym rysunku.



Układem statycznie wyznaczalnym nazywamy układ konstrukcyjny, dla którego liczba reakcji podporowych jest równa liczbie niezależnych równań równowagi oraz liczba stopni swobody równa się zero.

Dla zadanej kratownicy możemy napisać:  $(3 + 1)$  równań równowagi do wyznaczenia 4 niewiadomych podporowych, a liczba stopni swobody  $s = 0$ . Zatem kratownica ta jest statycznie wyznaczalna.

20. Podać definicję równowagi trwałej (statecznej) wg Lapunowa.

Niech  $q = (q_1, q_2, \dots, q_s)$  opisuje położenie układu materialnego, zaś  $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_s^*)$  położenie jego równowagi. Stan równowagi nazywamy statecznym, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby  $\varepsilon > 0$  można dobrać takie  $\eta_1(\varepsilon) > 0$  i  $\eta_2(\varepsilon) > 0$ , że jeżeli spełnione są nierówności:

$$\begin{cases} |q(t = t_0) - q^*| < \eta_1(\varepsilon) \\ |\dot{q}(t = t_0) - \dot{q}^*| < \eta_2(\varepsilon) \end{cases}$$

to zachodzi również:

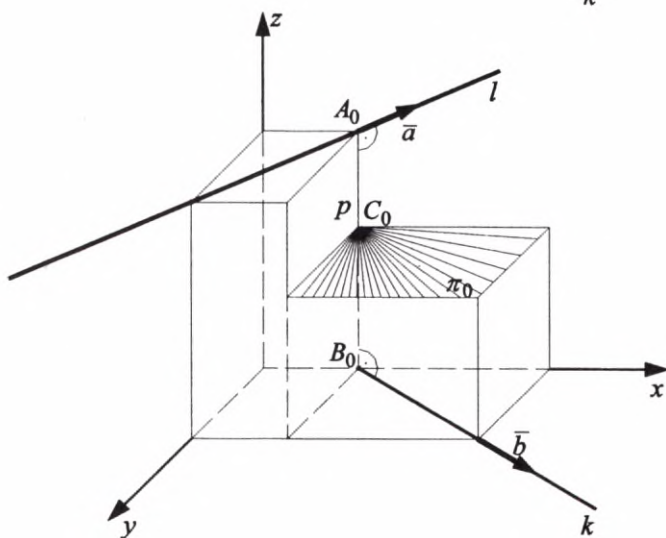
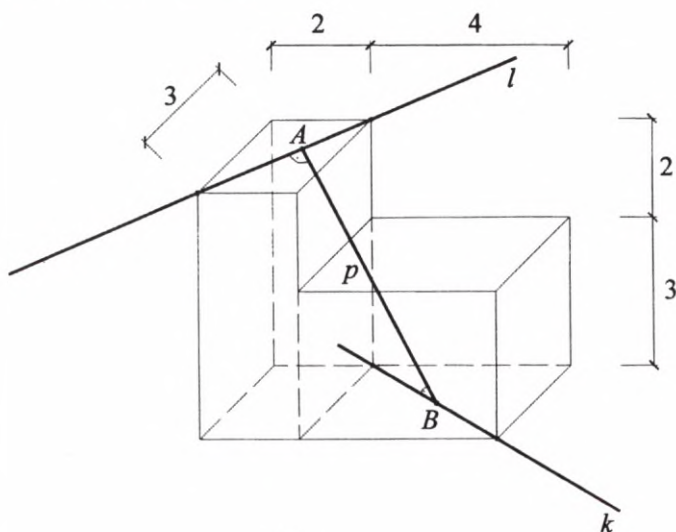
$$\begin{cases} |q(t) - q^*| < \varepsilon \\ |\dot{q}(t) - \dot{q}^*| < \varepsilon \end{cases} \text{ dla każdego } t > t_0$$

21. Na jakiej podstawie wolno redukować układ sił działających na sztywne ciało materialne?

O tym mówią aksjomaty równowagi sił:

- jeżeli do układu sił działających na sztywny układ materialny pozostający w równowadze dołączymy (lub usuniemy) układ dwóch sił przeciwnych leżących na jednej prostej, to równowaga układu materialnego nie zostanie naruszona,
- jeżeli do układu sił działających na sztywny układ materialny pozostający w równowadze dołączymy (lub usuniemy) układ sił zbieżnych o sumie równej zero, to równowaga układu materialnego nie zostanie naruszona,
- jeżeli na sztywny układ materialny nie działają żadne siły, to może on być w równowadze.

22. Na prostych skośnych  $l, k$  umieszczono dwa punkty masowe  $A$  i  $B$  o masach  $m_A = 3m$  i  $m_B = 2m$ . Punkty te znajdują się jednocześnie na prostej  $p$  prostopadłej do obu prostych skośnych. Wyznaczyć prostą  $d$  prostopadłą do prostej  $p$ , względem której moment bezwładności układu złożonego z punktów  $A$  i  $B$  będzie minimalny.



### Rozwiązanie

Punkt bieżący  $A$  prostej  $l$  to punkt o współrzędnych  $A(3 - 3\alpha, 2\alpha, 5)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , zaś punkt  $B(3\beta, 2 + 4\beta, 0)$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ , to punkt bieżący prostej  $k$ .

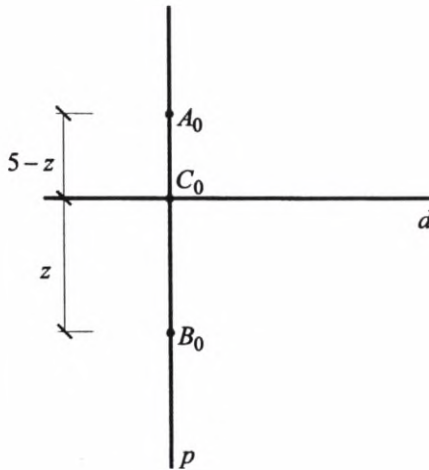
Wektor  $\vec{a} = (-3, 2, 0)$  jest wektorem kierunkowym prostej  $l$ , a wektor  $\vec{b} = (3, 4, 0)$  wektorem kierunkowym prostej  $k$ .

Wektor  $\overline{AB} = (3\beta + 3\alpha - 3, -2\alpha + 4\beta + 2, -5)$  ma być prostopadły do wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , czyli spełniać następujące warunki:

$$\begin{cases} \overline{AB} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overline{AB} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(3\alpha + 3\beta - 3) + 2(2 - 2\alpha + 4\beta) = 0 \\ 3(3\alpha + 3\beta - 3) + 4(2 - 2\alpha + 4\beta) = 0 \end{cases}$$

A stąd  $\alpha = 1$  i  $\beta = 0$ . Zatem punkty masowe  $A$  i  $B$  to punkty  $A_0(0, 2, 5)$ ,  $B_0(0, 2, 0)$ . Wektor  $\overline{A_0B_0} = (0, 0, -5)$  jest wektorem kierunkowym prostej  $p$ .

Na prostej  $p$  znajduje się punkt  $C_0$ , przez który przechodzi prosta  $d$  prostopadła do  $p$ . Względem tej prostej moment bezwładności punktów  $A_0$  i  $B_0$  ma być minimalny.



$$J_d = 3m(5-z)^2 + 2mz^2 = m(5z^2 - 30z + 75)$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum jest zerowanie się pierwszej pochodnej:

$$\frac{dJ_d}{dz} = 10z - 30 = 0 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow J_d = 30m$$

### Odpowiedź:

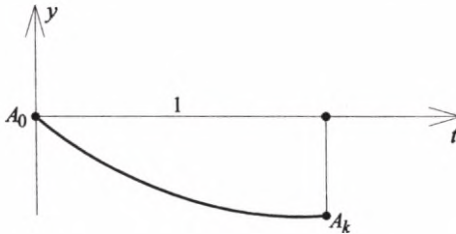
Prosta  $d$ , względem której moment bezwładności punktów  $A_0$  i  $B_0$  jest minimalny, to dowolna prosta zawierająca punkt  $C_0(0, 2, 3)$  z płaszczyzny  $\pi_0$  o równaniu  $z - 3 = 0$ .

23. Dla całki działania  $J(y(t)) = \int_{t_0=0}^{t_k=1} (\dot{y} + 12 t y) dt$ :

$$\begin{cases} y(t_0 = 0) = 0 \\ y(t_k = 1) = -2 \end{cases}$$

wyznaczyć trajektorię ruchu punktu korzystając z:

- równania Lagrange'a II rodzaju w potencjalnym polu sił,
- z własności ekstremalnych całki działania,
- zasady Hamiltona.



**Rozwiązanie**

ad a) Dla potencjału kinetycznego:

$$W = \dot{y} + 12 t y$$

równanie Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2 \ddot{y} - 12 t = 0$$

ma całkę ogólną  $y(t) = t^3 + C_1 t + C_2$ .

Z warunków brzegowych  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -2$  wyznaczamy stałe  $C_1$  i  $C_2$ :

$$C_1 = -3, C_2 = 0$$

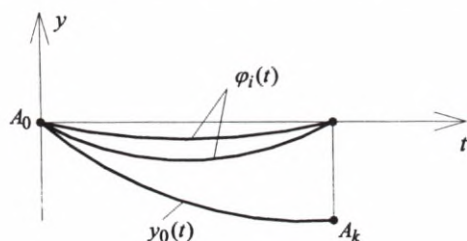
Zatem trajektoria ruchu rzeczywistego punktu jest następująca:

$$y(t) = t^3 - 3 t = t(t^2 - 3)$$

ad b) Szukane rozwiązanie przedstawmy w postaci wielomianu:

$$y_N(t) = y_O(t) + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(t)$$

przy czym funkcja  $y_0(t)$  spełnia niejednorodne warunki brzegowe, zaś funkcje  $\varphi_i(t)$  — jednorodne warunki brzegowe. Współczynniki  $a_i$  wyznaczamy na podstawie własności ekstremalnych całki działania.



W analizowanym przykładzie przyjęto:

$$y_0(t) = t(t - 3), \quad (y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = -2)$$

$$\varphi_1(t) = t^2(t - 1), \quad (\varphi_1(0) = 0), \quad \varphi_1(1) = 0$$

$$y_1(t) = y_0(t) + a_1 \varphi_1(t) = t^2 - 3t + a_1(t^3 - t^2), \quad (N = 1)$$

$$\dot{y}_1(t) = 2t - 2 + a_1(3t^2 - 2t)$$

Po podstawieniu  $y_1(t)$  do całki działania otrzymujemy:

$$J(y_1(t)) = \int_0^1 \{ [2t - 3 + a_1(3t^2 - 2t)]^2 + 12t^3 - 36t^2 + \\ + 12a_1(t^4 - t^3) \} dt = J(a_1)$$

a dalej z warunku ekstremum

$$\frac{dJ(a_1)}{da_1} = 2 \int_0^1 \{ [2t - 3 + a_1(3t^2 - 2t)](3t^2 - 2t) + 6(t^4 - t^3) \} dt = 0$$

Po wykonaniu całkowania i podstawieniu granic dochodzimy do równania:

$$\frac{-13}{3} + 3 + \frac{6}{5} + a_1 \left( \frac{9}{5} - \frac{5}{3} \right) = 0 \Rightarrow a_1 = 1$$

Zatem szukane rozwiązanie to:

$$y_1(t) = t^2 - 3t + t^3 - t^2 = t^3 - 3t = t(t^2 - 3)$$



Okazało się, że już dla jednej funkcji bazowej ( $N = 1$ )  $\varphi_1(t) = t^2(t - 1)$  otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym.

ad c) Do całki działania  $J(y(t)) = \int_0^1 (\dot{y}^2 + 12ty) dt$  podstawiamy funkcje dopuszczalne  $\tilde{y}(t)$ :

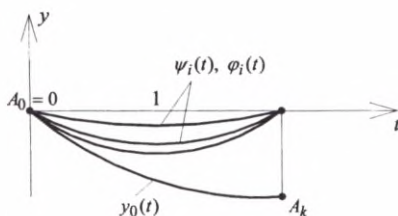
$$\tilde{y}(t) = y(t) + \delta y(t) = y(t) + \alpha \eta(t)$$

gdzie:

$y(t)$  — szukane rozwiązanie,

$\alpha$  — współczynnik z przedziału  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$\eta(t)$  — funkcja próbna przyjmująca na końcach przedziału wartości zerowe  $\eta(0) = 0$  i  $\eta(1) = 0$



$$J(\tilde{y}(t)) = \int_0^1 [(\dot{y} + \alpha \dot{\eta})^2 + 12t(y + \alpha \eta)] dt$$

Obliczamy wariację całki działania:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \int_0^1 [(\dot{y} + \alpha \dot{\eta})^2 + 12t(y + \alpha \eta)] dt \right\} \Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$\delta J = 2 \int_0^1 [(\dot{y} + \alpha \dot{\eta}) \dot{\eta} + 6t\eta] \Big|_{\alpha=0} dt = 0$$

$$\delta J = \int_0^1 (\dot{y} \dot{\eta} + 6t\eta) dt = 0$$

Ponieważ

$$\int_0^1 \dot{y} \dot{\eta} dt = (y \dot{\eta}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \dot{y} \eta dt = - \int_0^1 \dot{y} \eta dt$$

to

$$\delta J = \int_0^1 (6t - \ddot{y}) \eta dt = 0, \quad \forall \eta(t)$$

Przyjmując, że poszukiwane rozwiązanie ma postać wielomianu:

$$y_N(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(t)$$

zaś funkcje próbne

$$\eta_N(t) = \sum_{i=1}^N b_i \psi_i(t), \quad b_i \in \mathbb{R}$$

gdzie  $\psi_i(t)$  — spełniają jednorodne warunki brzegowe, to po podstawieniu ich do  $\delta J = 0 \quad \forall b_i$  otrzymamy równanie trajektorii ruchu punktu.

Dla założonej jak w punkcie (b) funkcji  $y_1(t)$

$$y_1(t) = y_0(t) + a_1 \varphi_1(t) = t^3 - 3t + a_1(t^3 - t^2)$$

i funkcji próbnej

$$\eta_1(t) = b_1 t(t - 1)$$

obliczamy wariację całki działania:

$$\delta J = \int_0^1 [6t - 2 - a_1(6t - 2)] b_1 (t^2 - t) dt = 0 \quad \forall b_1$$

$$2b_1 \int_0^1 [(3t - 2)(t^2 - t) - a_1(3t - 2)(t^2 - t)] dt = 0 \quad \forall b_1$$

A zatem

$$\int_0^1 [(3t - 2)(t^2 - t) - a_1(3t - 2)(t^2 - t)] dt = 0$$

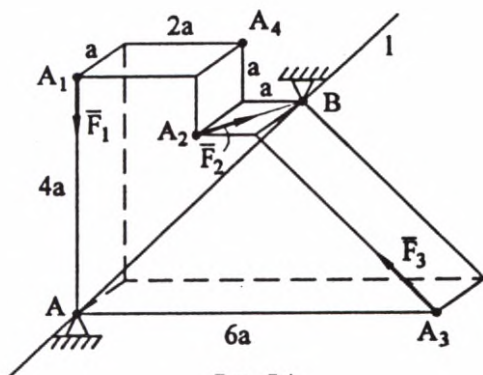
$$(1 - a_1) \int_0^1 (3t^3 - 5t^2 + 2t) dt = 0 \Rightarrow a_1 = 1$$

i  $y_1(t) = t(t^2 - 3)$  jest rozwiązaniem ścisłym.

## 7.2. ZESTAW EGZAMINACYJNY NR 2

## A – część pisemna

1. Na nieważkiej sztywne ciało unieruchomione w punktach  $A$  i  $B$  działa układ sił przedstawiony na rysunku 7.4. Sprawdzić czy przy jego działaniu ciało może być w równowadze, jeśli nie, to dołączyć siłę  $F_4$  w punkcie  $A_4$ , taką aby ciało mogło być w równowadze.



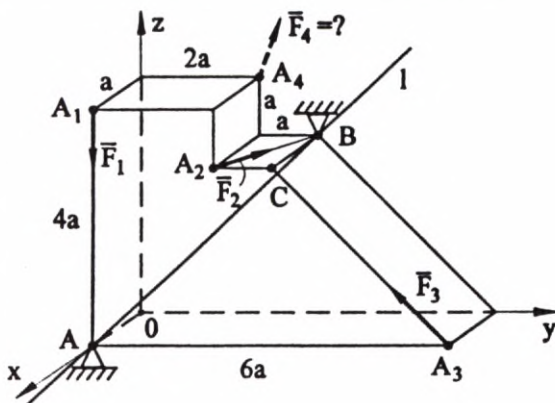
Rys. 7.4

$$|\bar{F}_1| = 2P, \quad |\bar{F}_2| = \sqrt{2}P$$

$$|\bar{F}_3| = 3\sqrt{2}P$$

## Rozwiązanie

Nieruchome punkty  $A$  i  $B$  wyznaczają prostą. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił działających na ciało sztywne unie-



Rys. 7.4a

ruchomione w dwóch nie pokrywających się punktach jest, aby moment układu sił liczony względem tej prostej unieruchomienia był równy zero. Na rys. 7.4a przyjęto układ współrzędnych potrzebny do wykonania obliczeń.

W układzie tym:

$$\bar{F}_1 = (0, 0, -2P), \quad A_1(a, 0, 4a)$$

$$\bar{F}_2 = \sqrt{2}P \frac{\overline{A_2B}}{|\overline{A_2B}|} = \sqrt{2}P \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = (-P, P, 0), \quad A_2(a, 2a, 3a)$$

$$\bar{F}_3 = 3\sqrt{2}P \frac{\overline{A_3C}}{|\overline{A_3C}|} = 3\sqrt{2}P \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (0, -3P, 3P), \quad A_3(a, 6a, 0)$$

$$\bar{F}_4 = (F_x, F_y, F_z), \quad A_4(0, 2a, 4a)$$

$$\bar{M}_l \stackrel{tw}{=} \left( \frac{\bar{M}_B \cdot \overline{AB}}{|\overline{AB}|^2} \right) \overline{AB} = \bar{0}$$

W obliczeniach – sił  $\begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} \bar{F}_2 \\ A_2 \end{pmatrix}$  nie musimy uwzględniać, gdyż ich moment względem prostej  $l$  jest równy zero. Zatem:

$$\bar{M}_B = \bar{F}_3 \times \overline{CB} + \bar{F}_4 \times \overline{A_4B}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_3 = (0, & -3P, & 3P) & \bar{F}_4 = (F_x, & F_y, & F_z) \\ \times & & & \times & & \\ \overline{CB} = (-a, & 0, & 0) & \overline{A_4B} = (0, & a, & -a) \\ \hline & (0, & -3Pa, & -3Pa) & & (-F_y a - F_z a, & F_x a, & F_x a) \end{array}$$

$$\bar{M}_B = (-F_y a - F_z a, F_x a - 3Pa, F_x a - 3Pa), \quad \overline{AB} = (-a, 3a, 3a)$$

$$\bar{M}_B \cdot \overline{AB} = 0 = F_y a^2 + F_z a^2 + 3F_x a^2 - 9Pa^2 + 3F_x a^2 - 9Pa^2 \mid : a^2$$

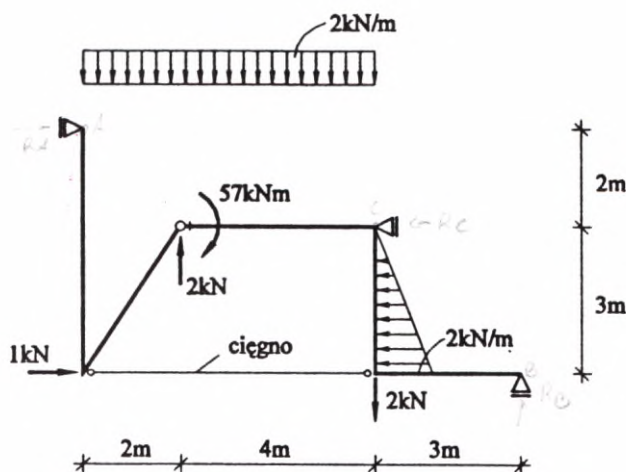
$$F_y + F_z + 6F_x - 18P = 0$$

Stąd przyjmując dwie współrzędne siły  $\bar{F}_4$ , np.  $F_y = F_z = 0$ , wyznaczamy pozostałą  $F_x = \frac{18}{6}P = 3P$ .

**Odpowiedź:**

$$\bar{F}_4 = (3P, 0, 0)$$

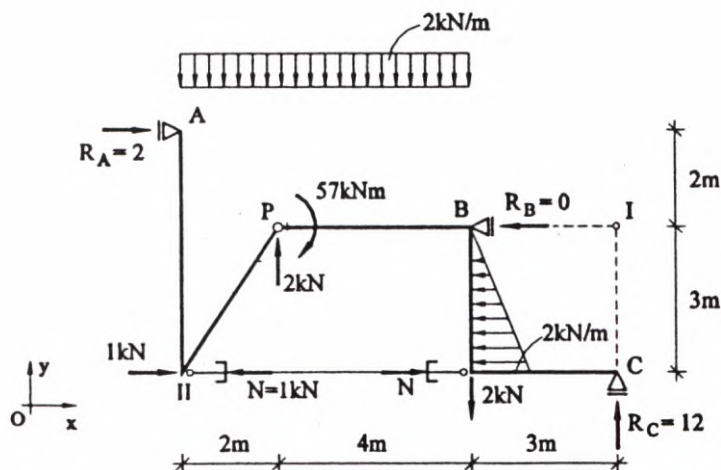
2. Z równań równowagi wyznaczyć reakcje podporowe układu, zaś siłę w cięgnię obliczyć z zasady prac wirtualnych (rys. 7.5).



Rys. 7.5

### Rozwiązanie

Podany układ konstrukcyjny jest statycznie wyznaczalny, gdyż do wyznaczenia trzech reakcji podporowych i siły w cięgnię dysponujemy czterema równaniami równowagi liniowo niezależnymi. Spełniony jest też warunek  $s = 0$ .



Rys. 7.5a

a)  $\underline{\Sigma M_I = 0}$

$$-R_A \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 7 - 57 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$$

$$R_A = 2,0 \text{ [kN]}$$

b)  $\underline{\Sigma X = 0}$

$$2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - R_B = 0$$

$$R_B = 0 \text{ [kN]}$$

c)  $\underline{\Sigma Y = 0}$

$$R_C - 2 + 2 - 2 \cdot 6 = 0$$

$$R_C = 12 \text{ [kN]}$$

d)  $\underline{M_p^L = 0}$

$$-N \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 4 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$N = +1 \text{ [kN]} \quad (\text{pręt ściskany siłą } 1 \text{ [kN]})$$

Sprawdzenie

$\underline{\Sigma M_{II} = 0}$

$$-2 \cdot 5 - 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 57 - 2 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 + 12 \cdot 9 = 0$$

$$0 = 0$$

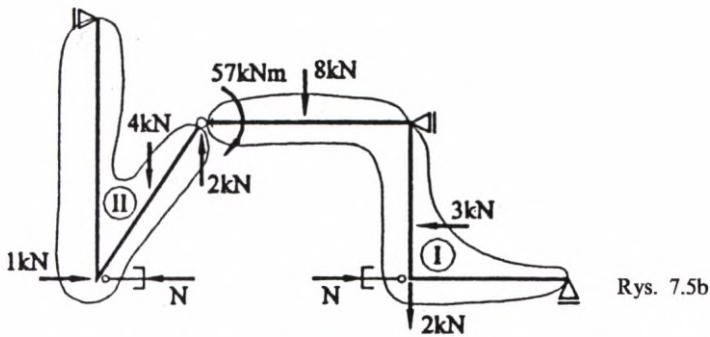
Wyznaczenie siły w cięgnie z zasady prac wirtualnych.

Usuając myślowo cięgno, otrzymujemy układ dwóch tarcz połączonych przegubem

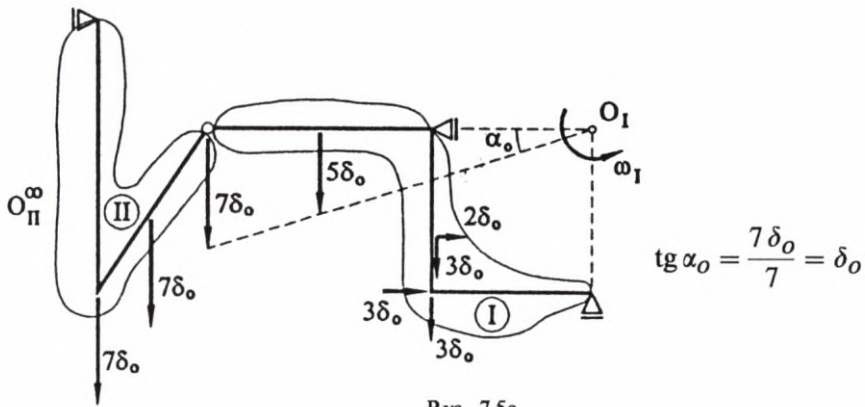
$$\delta L = 4 \cdot 7 \delta_o - 2 \cdot 7 \delta_o - 57 \cdot \text{tg} \alpha_o + 8 \cdot 5 \delta_o - 3 \cdot 2 \delta_o + 2 \cdot 3 + N \cdot 3 \delta_o = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$\delta_o (28 - 14 - 57 + 40 - 6 + 6 + 3N) = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$3N - 3 = 0 \Rightarrow N = 1 \text{ [kN]}$$



Rys. 7.5b



Rys. 7.5c

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{7\delta_0}{7} = \delta_0$$

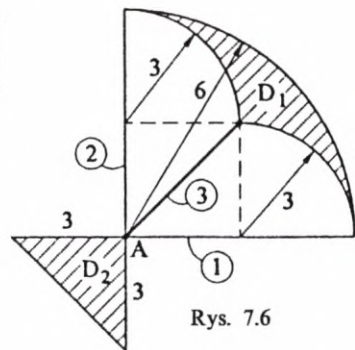
**Odpowiedź:**

$$R_A = 2,0 \text{ [kN]}, R_B = 0 \text{ [kN]}, R_C = 12 \text{ [kN]}, N = 1 \text{ [kN]}$$

3. Dla jednorodnego płaskiego układu materialnego (rys. 7.6) wyznaczyć w punkcie A położenie głównych osi bezwładności i główne momenty bezwładności.

$$\rho_{D_1} = \rho_{D_2} = 1$$

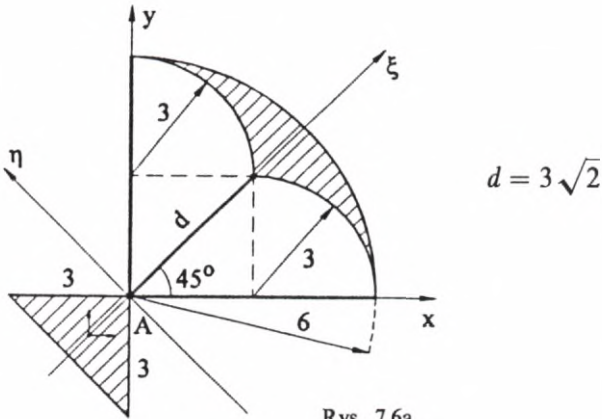
$$\rho_1 = \rho_2 = 2, \quad \rho_3 = \sqrt{2}$$



Rys. 7.6

## Rozwiązanie

W punkcie  $A$  przyjmujemy układ  $A$   $x, y$  oraz układ głównych osi bezwładności  $A$   $\xi, \eta$  – rys. 7.6 a.



Rys. 7.6a

Osie  $A$   $\xi, \eta$  są głównymi osiami bezwładności, gdyż moment dewiacji  $J_{\xi\eta} = 0$ . Kolejno wyznaczamy:

$$J_y = J_x = 1 \cdot \frac{\pi \cdot 6^4}{16} + 1 \cdot \frac{3^4}{12} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{6^3}{3} + \sqrt{2} \frac{d^3}{6} - \frac{3^4}{3} - \frac{\pi \cdot 3^4}{16} -$$

$$- \left[ \frac{\pi \cdot 3^4}{16} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \left( \frac{4 \cdot 3}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \left( 3 + \frac{4 \cdot 3}{3\pi} \right)^2 \right] = 246,79$$

$$J_{xy} = 1 \cdot \frac{6^4}{8} + 1 \cdot \left( -\frac{3^4}{72} + \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot \frac{d^3}{6} - \frac{3^4}{4} -$$

$$- 2 \left[ \frac{3^4}{8} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \left( \frac{4 \cdot 3}{3\pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \left( 3 + \frac{4 \cdot 3}{3\pi} \right) \left( \frac{4 \cdot 3}{3\pi} \right) \right] = 88,88$$

Główne momenty bezwładności:

$$J_\xi = J_x \cos^2 45^\circ + J_y \sin^2 45^\circ - J_{xy} \sin 90^\circ = J_x - J_{xy} = 157,91$$

$$J_\eta = J_x \sin^2 45^\circ + J_y \cos^2 45^\circ + J_{xy} \sin 90^\circ = J_x + J_{xy} = 335,67$$



## Sprawdzenie

$$J_{\xi} + J_{\eta} = J_x + J_y = 493,58$$

**Uwaga!** W obliczeniach skorzystano z zasady superpozycji dzieląc cały układ na następujące podobszary: ćwiartka koła o promieniu 6, trójkąt równoramienny o boku 3, odcinek materialny o długości 6 leżący na osi  $x$ , odcinek materialny o długości 6 leżący na osi  $y$ , odcinek materialny o długości  $d = 3\sqrt{2}$ , ćwiartka koła o promieniu 3 i podstawie leżącej na osi  $x$  oraz ćwiartka koła o promieniu 3 i podstawie leżącej na osi  $y$ .

4. W ruchu określonym równaniami:

$$\bar{r}(t): \begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$$

przeprowadzić rozkład przyspieszenia.

## Rozwiązanie

Korzystając z definicji prędkości punktu i jego przyspieszenia wyznaczamy:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \begin{cases} \dot{x} = -e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ \dot{y} = e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{v}} = \begin{cases} \ddot{x} = 2e^{-t} \sin t \\ \ddot{y} = -2e^{-t} \cos t \end{cases}$$

$$\bar{a}_s = \left( \frac{1}{2v^2} \frac{d}{dt} \bar{v}^2 \right) \bar{v}, \quad \bar{a}_n = \bar{a} - \bar{a}_s$$

Ponieważ

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2e^{-2t}$$

to

$$\frac{d}{dt} \bar{v}^2 = -4e^{-2t}$$

Stąd

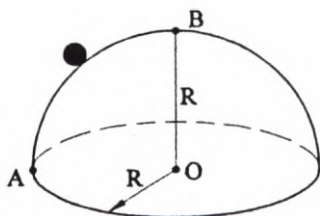
$$\frac{1}{2v^2} \frac{d}{dt} \bar{v}^2 = -1$$

Zatem

$$\bar{a}_s = -1 \bar{v} = [e^{-t}(\cos t + \sin t), e^{-t}(\sin t - \cos t)]$$

$$\bar{a}_n = [e^{-t}(\sin t - \cos t), -e^{-t}(\sin t + \cos t)]$$

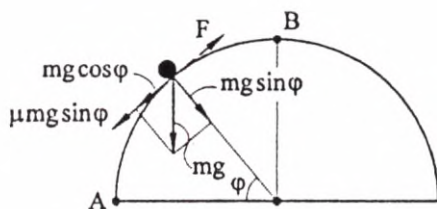
5. Obliczyć pracę  $L_{AB}$ , jaką trzeba wykonać, aby ciężki punkt materialny o masie  $m$  przesunąć z położenia  $A$  do  $B$  po szorstkiej powierzchni półkuli – rys. 7.7.



Rys. 7.7

Rozwiązanie

Pracę wykonuje składowa styczna siły ciężkości oraz siła tarcia – rys. 7.7a.



Rys. 7.7a

$$\begin{aligned} F &= mg \cos \varphi + \mu mg \sin \varphi = \\ &= mg (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$ds = R d\varphi$$

Zatem

$$L_{AB} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \bar{F} \cdot d\bar{s} = mgR \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) d\varphi = mgR(1 + \mu)$$

### B – część testowa

1. Sprawdzić, czy zadane pole sił jest polem potencjalnym, jeśli tak, to wyznaczyć potencjał

$$\bar{F} = 3x^2(1 + \ln y)\bar{e}_x + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)\bar{e}_y + (z^2 + 1)\bar{e}_z$$

Sprawdzamy warunki Schwartza

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{3x^2}{y} = \frac{3x^2}{y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \Leftrightarrow 0 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \Leftrightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

oraz czy  $P, Q, R \in C^1$  (czy istnieją wszystkie pochodne rzędu 1 i czy są ciągłe).  
Ponieważ W.K.iW są spełnione, to pole sił jest polem potencjalnym.

Wyznaczenie potencjału:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = P = 3x^2(1 + \ln y) \quad | \int dx \\ \frac{\partial V}{\partial y} = Q = \frac{x^3}{y} - 2y \\ \frac{\partial V}{\partial z} = z^2 + 1 \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = x^3(1 + \ln y) + \varphi(y, z)$$

$$Q = \frac{x^3}{y} - 2y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y \quad | \int dy$$

$$\varphi(y, z) = -y^2 + \psi(z)$$

$$V(x, y, z) = x^3(1 + \ln y) - y^2 + \psi(z)$$

$$R = z^2 + 1 = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{d\psi(z)}{dz} \Rightarrow \psi(z) = \frac{z^3}{3} + z + V_0$$

Ostatecznie

$$V(x, y, z) = x^3(1 + \ln y) - y^2 + \frac{z^3}{3} + z + V_0$$

2. Kiedy moment siły względem prostej jest równy zeru?

Moment siły względem prostej jest równy zeru, gdy kierunek działania siły i prosta wyznaczają jedną płaszczyznę.

3. Do czego redukuje się zbieżny układ sił?

Zbieżny układ sił redukuje się do układu zerowego przy sumie równej zeru, zaś do wypadkowej przy sumie niezerowej.

4. Dlaczego płaskiego układu sił nie można zredukować do skrętnika?

W. K i W redukcji układu sił do skrętnika jest  $K \neq 0$ . Dla płaskiego układu sił  $K$  jest zawsze równe zeru, gdyż nawet przy niezerowej sumie i niezerowym momencie wektory te są prostopadłe, a więc ich iloczyn skalarny jest równy zeru.

5. Dlaczego macierz bezwładności jest tensorem?

Wynika to z twierdzenia o tensorowym charakterze macierzy. Jeśli elementy macierzy II rzędu określone są w układzie współrzędnych i mnożone wewnętrznie przez wektor dając na wynik wektor, to ta macierz jest tensorem. Licząc kręt względem punktu dla sztywnego układu materialnego otrzymaliśmy zależność:

$$\bar{K}_O = (J_O) \cdot \bar{\omega}$$

gdzie:

$\bar{K}_O$  – wektor krętu,

$(J_O)$  – macierz bezwładności,

$\bar{\omega}$  – wektor prędkości kątowej.

Zatem macierz  $(J_O)$  jest tensorem II rzędu.

6. Punkt materialny porusza się ruchem:

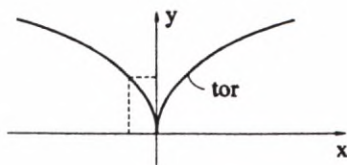
$$\bar{r}(t) = (t^3 - 3t^2 + 3t - 1)\bar{e}_x + (2t^2 - 4t + 2)\bar{e}_y$$

Wyznaczyć tor oraz  $\bar{v}$  i  $\bar{a}$ :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3 \\ y(t) = 2(t^2 - 2t + 1) = 2(t - 1)^2 \end{cases}$$

Rugując  $(t - 1)$  z powyższego układu otrzymujemy równanie toru:

$$t - 1 = x^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^3 \Rightarrow y^3 = 8x^2$$



$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}: \begin{cases} \dot{x} = 3(t-1)^2 \\ \dot{y} = 4(t-1) \end{cases} \quad \bar{a} = \ddot{\bar{v}}: \begin{cases} \ddot{x} = 6(t-1) \\ \ddot{y} = 4 \end{cases}$$

7. Podać prawo ruchu środka masy sztywnego układu materialnego:

$$m\ddot{\bar{r}}_O = \bar{S} + \text{warunki początkowe} \begin{cases} \bar{r}_O(t=0) = \hat{\bar{r}}_O \\ \dot{\bar{r}}_O(t=0) = \hat{\bar{v}}_O \end{cases}$$

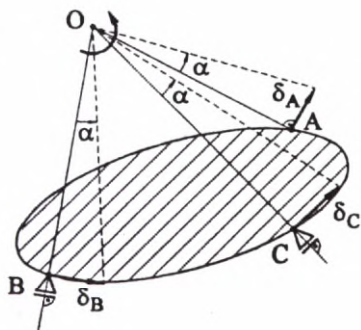
gdzie:

$m$  – masa układu,

$\ddot{\bar{r}}_O$  – przyspieszenie środka masy,

$\bar{S}$  – suma sił działających na układ materialny.

8. Podać definicję przesunięcia wirtualnego punktu oraz narysować je dla punktu  $A$  sztywnej tarczy jak na rysunku.



$$\bar{\delta}_s \stackrel{\text{df}}{=} k \hat{v}, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\bar{\delta}_s$  – przesunięcie wirtualne punktu,  
 $\hat{v}$  – prędkość możliwa punktu.

$$\frac{\delta_A}{|OA|} = \frac{\delta_B}{|OB|} = \frac{\delta_C}{|OC|}$$

9. Co to jest równowaga ciała i równowaga układu sił?

Przez równowagę ciała rozumiemy jego spoczynek w danym układzie odniesienia. Układ sił, który przyłożony do ciała nie zmienia jego ruchu nazywamy układem sił będących w równowadze. Zatem równowaga układu sił jest warunkiem koniecznym równowagi ciała. W.K i W równowagi ciała jest równowaga układu sił oraz aby w chwili przyłożenia sił do ciała ciało to było w spoczynku.

10. Podać równania Lagrange'a II rodzaju w przypadku ogólnym z objaśnieniem:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j$$

gdzie:  $j = 1, 2, \dots, s$ ,

$E_k$  – energia kinetyczna układu,

$Q_j = \sum_{i=1}^n \left( \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)$  – siła uogólniona,

$s$  – liczba stopni swobody układu.

11. Jak oblicza się energię kinetyczną sztywnej bryły w jej ruchu obrotowym?

$$E_k = \frac{1}{2} J_t \bar{\omega}^2$$

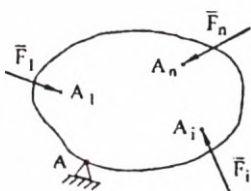
gdzie:

$E_k$  – energia kinetyczna,

$J_t$  – moment bezwładności bryły liczony względem osi obrotu,

$\bar{\omega}$  – wektor prędkości kątowej.

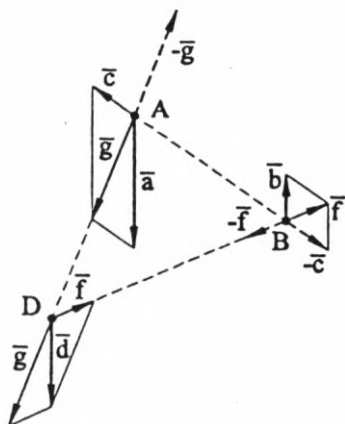
12. Podać W.K i W równowagi układu sił działających na sztywne ciało unieruchomione w jednym punkcie:



$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \times \overline{A_i A}) = \bar{M}_A = \bar{0}$$

13. Podać definicję przekształcenia elementarnego I rodzaju i na jego podstawie wykonać graficznie dodawanie wektorów  $\begin{pmatrix} \bar{a} \\ A \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} \bar{b} \\ B \end{pmatrix}$ , przy czym  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ .

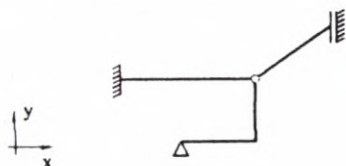
Przez przekształcenie elementarne I rodzaju (typu  $\alpha$ ) rozumiemy dołączenie (lub usunięcie) do układu sił dwóch sił przeciwnych leżących na jednej prostej.



$$\boxed{\begin{pmatrix} \bar{a} \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{b} \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ D \end{pmatrix}}$$

14. Podać definicję układu konstrukcyjnego statycznie niewyznaczalnego wraz z przykładem.

Układ konstrukcyjny nazywamy statycznie niewyznaczalnym, jeżeli liczba niewiadomych podporowych jest większa od liczby niezależnych równań równowagi oraz liczba stopni swobody układu jest równa zero.



Liczba reakcji podporowych  $3 + 2 + 2 = 7$ .  
Liczba niezależnych równań równowagi  $3 + 2 = 5$ ,  $7 - 5 = 2$ .  
Liczba stopni swobody  $s = 0$ .  
Układ konstrukcyjny przedstawiony na rysunku jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny.

15. Podać zasadę d'Alemberta.

Ze wszystkich ruchów możliwych układu materialnego swobodnego lub nieswobodnego o więzach: stacjonarnych, geometrycznych, dwustronnych i gładkich ten ruch jest ruchem rzeczywistym układu, dla którego suma prac wirtualnych sił czynnych i bezwładności na każdym przesunięciu wirtualnym jest równa zero:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i + \bar{B}_i) \cdot \bar{\delta}_{si} = 0 \quad \forall \bar{\delta}_{si}$$

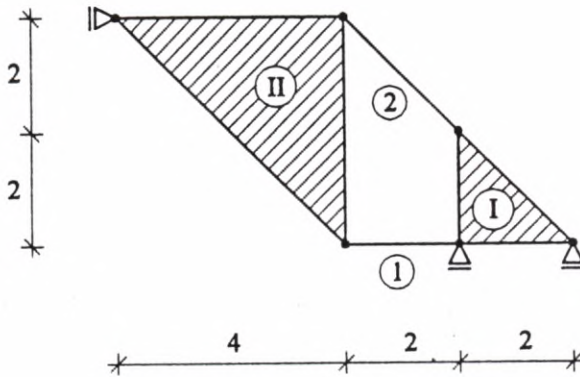
gdzie:

$$\bar{B}_i \stackrel{\text{def}}{=} -m_i \ddot{r}_i$$

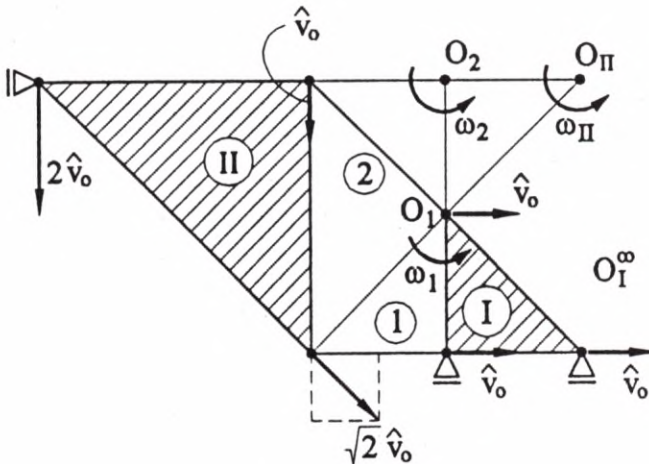
16. Jakie powinny być spełnione warunki, aby swobodny punkt materialny poruszał się ruchem prostoliniowym.

Jeżeli siła działająca na swobodny punkt materialny ma stały kierunek oraz w chwili rozpoczęcia ruchu prędkość początkowa jest współliniowa z siłą, to ruch punktu będzie ruchem prostoliniowym.

17. Dla płaskiego układu prętowo-tarczowego narysować plan prędkości możliwych.



Rozwiązanie



18. Kiedy moment dewiacji układu materialnego jest równy zero?

Moment dewiacji układu materialnego liczony względem płaszczyzn wyznaczonych przez główne osie bezwładności jest równy zero, ponieważ  $(J_o)$  w głównych osiach bezwładności ma postać diagonalną.



19. Kiedy dwa układy sił równoważą się?

Dwa układy sił równoważą się, gdy ich sumy są przeciwne i momenty liczone względem dowolnego (tego samego) punktu też są przeciwne.

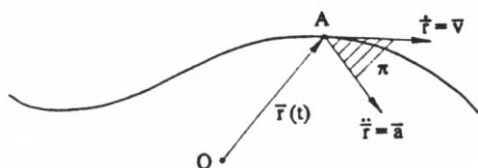
20. Podać twierdzenie o pędzie układu.

Pęd sztywnego układu materialnego jest równy pędowi jego środka masy:

$$\bar{p} = m \bar{v}_{O^*} = \sum_{i=1}^n (m_i \bar{v}_i)$$

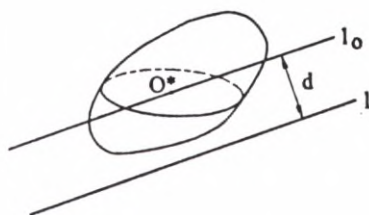
21. Jak leży przyspieszenie punktu względem jego trajektorii?

Przyspieszenie punktu leży w płaszczyźnie ściśle stycznej do trajektorii.



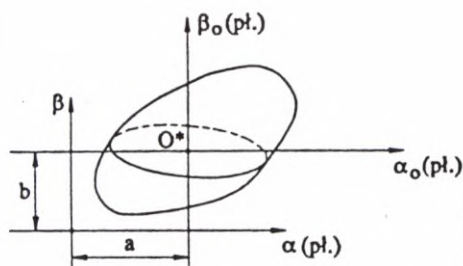
$\pi$  – płaszczyzna ściśle styczna

22. Podać wzory Steinera:



$$z: \begin{aligned} l_O \ni O^* \text{ (środek masy)} \\ l_O \parallel l \end{aligned}$$

$$J_l = J_{l_O} + m d^2$$



$$z: \begin{aligned} \alpha_O \ni O^* \\ \beta_O \ni O^* \end{aligned}$$

$$\alpha \parallel \alpha_O \text{ i } \beta \parallel \beta_O$$

$$J_{\alpha\beta} = J_{\alpha_O\beta_O} + m a b$$

23. Korzystając z II zasady dynamiki Newtona wykazać, że zmiana pędu masy jest równa popędowi siły w przedziale czasu  $\Delta t = t - t_0$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Big|_{t_0}^t dt$$

$$\int_{t_0}^t m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

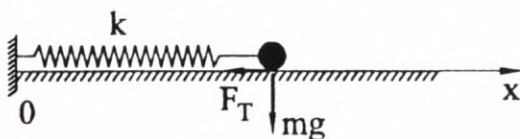
$$\int_{t_0}^t \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{I} \quad \text{-- (popęd siły) w przedziale czasu } \Delta t$$

Dla stałej siły  $\vec{F} = \overline{\vec{F}}$

$$\boxed{\vec{p} - \vec{p}_0 = \overline{\vec{F}} \Delta t}$$

24. Ciężki punkt o masie  $m$  porusza się po chropowatej poziomej płaszczyźnie pod wpływem siły sprężystości. Znając współczynnik tarcia kinematycznego i warunki początkowe wyznaczyć jego ruch.



Warunki początkowe:

$$\begin{cases} x(t=0) = \hat{x}_0 \\ \dot{x}(t=0) = \hat{v}_0 \end{cases}$$

Prawo ruchu:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \Big| : m$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\mu g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

Oznaczając  $\frac{k}{m} = \omega^2$  mamy do rozwiązania następujące równanie różniczkowe II rzędu, liniowe, niejednorodne o stałych współczynnikach:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\mu g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -\mu g \cdot \operatorname{sgn} \dot{x}$$

Odpowiadające mu równanie różniczkowe jedno-  
rodne:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ma następujące rozwiązanie:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Całkę szczególną równania niejednorodnego znajdujemy metodą przewidywania:

$$x_s = B = \text{const}, \quad \dot{x}_s = \ddot{x}_s = 0$$

$$B \omega^2 = -\mu g \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} \Rightarrow B = -\frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn} \dot{x}$$

Zatem całka ogólna równania niejednorodnego jest następująca:

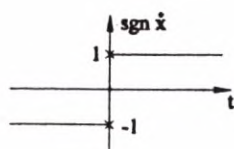
$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn} [\cos(\omega t + \varphi_0)]$$

Stałe  $A$  i  $\varphi_0$  wyznaczamy z warunków początkowych:

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = A \sin \varphi_0 - \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos \varphi_0) \\ \hat{v}_0 = A \omega \cos \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\left(\hat{x}_0 + \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos \varphi_0)\right)^2 + \left(\frac{\hat{v}_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \arctg \left[ \frac{\omega}{\frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos \varphi_0)} \left(\hat{x}_0 + \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos \varphi_0)\right) \right]$$

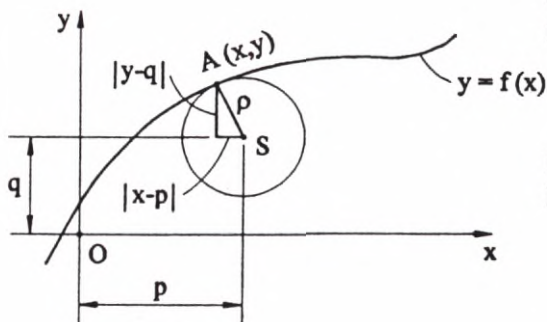


Stąd ostateczne rozwiązanie:

$$x(t) = \sqrt{\left(\hat{x}_0 + \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\hat{v}_0}{\omega}\right)^2} \cdot \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\hat{v}_0} \left(\hat{x}_0 + \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos \varphi_0)\right)\right)\right) - \frac{\mu}{\omega^2} g \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\omega t + \varphi_0))$$

25. Dla krzywej płaskiej wyprowadzić wzór na promień koła krzywiznowego

W układzie  $Oxy$  równanie okręgu o środku w punkcie  $S(p, q)$  i promieniu  $\rho$  jest następujące:



$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = \rho^2$$

Równanie to zróżniczkujemy dwukrotnie po zmiennej  $x$ :

$$2(x - p) \cdot 1 + 2(y - q) \cdot y' = 0 / : 2$$

$$\begin{cases} x - p + (y - q) \cdot y' = 0 \\ 1 + (y')^2 + (y - q) \cdot y'' = 0 \end{cases}$$

Możemy teraz obliczyć wyrażenia:

$$y - q = -\frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$x - p = -(y - q) \cdot y' = \frac{1 + (y')^2}{y''} \cdot y'$$

i wstawić je do równania okręgu otrzymując:

$$\frac{[1 + (y')^2]^2 \cdot (y')^2 + [1 + (y')^2]^2}{(y'')^2} = \frac{[1 + (y')^2]^3}{(y'')^2} = \rho^2$$

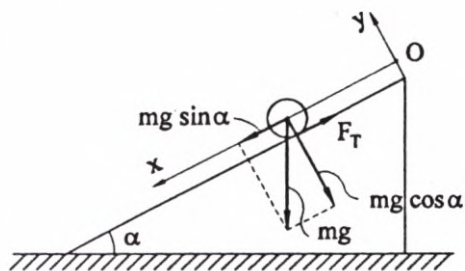
**Odpowiedź:**

$$\rho(x) = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

## 7.3. ZESTAW EGZAMINACYJNY NR 3

## A – część pisemna

1. Jednorodny walec kołowy o masie  $m$  i promieniu  $R$  stacza się po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$ . Wyznaczyć współczynnik tarcia, dla którego toczenie będzie bez poślizgu (rys. 7.8)



Rys. 7.8

$$F_T = \mu m g \cos \alpha$$

W rozwiązaniu wykorzystamy równania różniczkowe ruchu ciała sztywnego:

- dla środka masy

$$m \ddot{x} = m g \sin \alpha - F_T$$

- dla ruchu obrotowego walca względem jego osi  $l$

$$J_l \varepsilon = M_l = F_T R$$

Ponieważ ruch ma być bez poślizgu, to:

$$v_O = \dot{x}_O = \omega_O R$$

a stąd

$$\omega_O = \frac{\dot{x}_O}{R}$$

Przyspieszenie kątowe  $\varepsilon$  jest związane z prędkością kątową zależnością:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\ddot{x}_O}{R}$$

zaś moment bezwładności walca względem jego osi:

$$J_t = \frac{m R^2}{2}$$

Zatem

$$F_T = \frac{J_t \varepsilon}{R} = \frac{m}{2} \ddot{x}_O$$

czyli

$$m \ddot{x}_O = m g \sin \alpha - \frac{m}{2} \ddot{x}_O$$

Punkty osi walca poruszają się z przyspieszeniem:

$$\ddot{x}_O = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

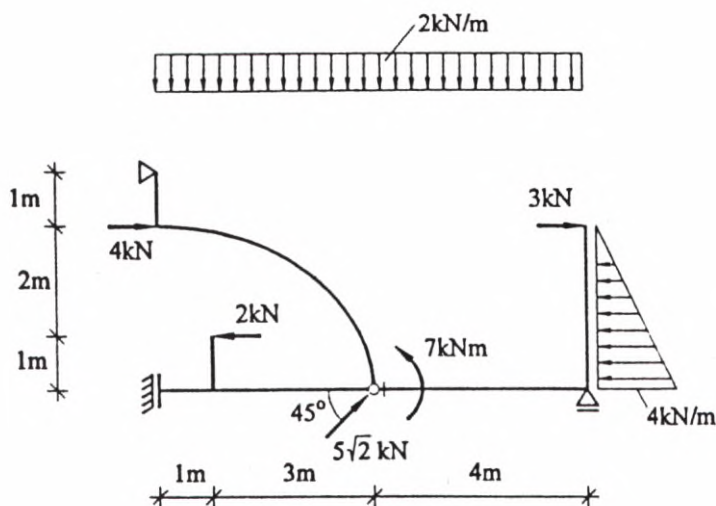
Aby ruch był bez poślizgu, to siła tarcia musi spełniać warunek:

$$F_T = \frac{m}{2} \ddot{x}_O = \frac{m}{3} g \sin \alpha \leq \mu m g \cos \alpha$$

Stąd

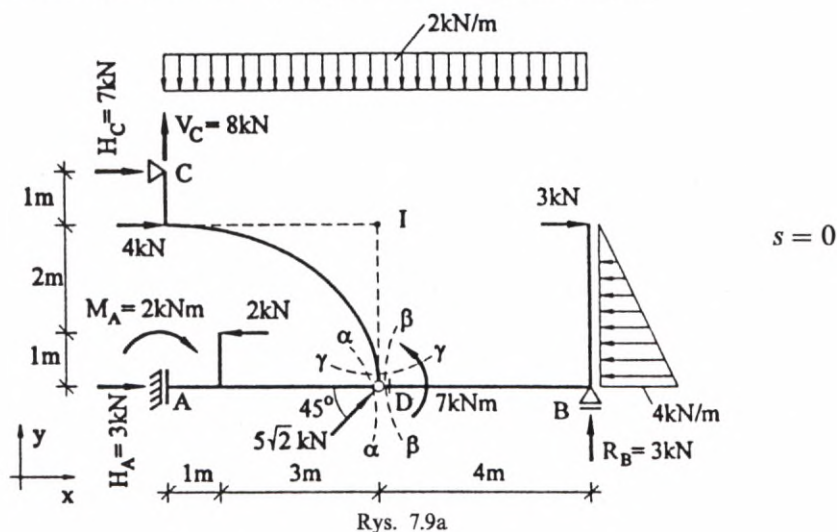
$$\boxed{\mu \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha}$$

2. Dla podanego układu ramowego statycznie wyznaczalnego wyznaczyć z równań równowagi reakcje podporowe (rys. 7.9)



Rys. 7.9

Przedstawiona na rys. 7.9 rama jest układem statycznie wyznaczalnym, gdyż do obliczenia pięciu reakcji podporowych dysponujemy  $(3 + 2 = 5)$  pięcioma równaniami równowagi. Ponadto  $s = 0$ . Na rys. 7.9a oznaczono niewiadome podporowe i przyjęto układ współrzędnych.



Rys. 7.9a

Równania równowagi:

a)  $\underline{M_D^L = 0}$

$$-M_A + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow M_A = 2 \text{ [kNm]}$$

$$\text{b) } \underline{M_D^{P(\beta-\beta)}} = 0$$

$$7 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 + R_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_B = 7 \text{ [kN]}$$

$$\text{c) } \underline{\Sigma Y = 0}$$

$$V_C + 5 + 3 - 2 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_C = 8 \text{ [kN]}$$

$$\text{d) } \underline{M_D^{q(\gamma-\gamma)}} = 0$$

$$-4 \cdot 3 + H_C \cdot 4 - 8 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_C = 7 \text{ [kN]}$$

$$\text{e) } \underline{\Sigma X = 0}$$

$$H_A - 2 + 5 + 4 + 3 - 7 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow H_A = 3 \text{ [kN]}$$

Sprawdzenie  $\underline{\Sigma M_I = 0}$

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 7 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 - 2 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 8 \cdot 4 = 0$$

$$0 = 0$$

3. Zadany układ trzech sił zredukować w dowolnym punkcie osi środkowej, a następnie dołączyć do niego siłę  $\begin{pmatrix} \bar{F}_4 \\ A_4 \end{pmatrix}$  taką, aby łączny układ sił redukowal się do wypadkowej o prostej działania

$$p: \begin{cases} x = -16a \\ y = 8a \\ z = \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\bar{F}_1 = (0, 0, P), \quad \bar{F}_2 = (2P, 0, 0), \quad \bar{F}_3 = (-4P, 2P, 0)$$

$$A_1(2a, 0, a), \quad A_2(2a, a, a), \quad A_3(0, a, -4a)$$

Rozwiązanie

$$\bar{S} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = (-2P, 2P, P) \neq \bar{0}, \quad \bar{S}^2 = 9P^2$$



$$\begin{aligned}\bar{M}_{A_2} &= \bar{F}_1 \times \overline{A_1 A_2} + \bar{F}_3 \times \overline{A_3 A_2} \\ \bar{F}_1 &= (0, 0, P), & \bar{F}_3 &= (-4P, 2P, 0) \\ \times & & \times & \\ \overline{A_1 A_2} &= (0, a, 0), & \overline{A_3 A_2} &= (2a, 0, 5a) \\ & \underline{(-Pa, 0, 0)} & & \underline{(10Pa, 20Pa, -4Pa)}\end{aligned}$$

$$\bar{M}_{A_2} = (9Pa, 20Pa, -4Pa) \neq \bar{0}$$

$$K = \bar{S} \cdot \bar{M}_{A_2} = (-18 + 40 - 4)P^2 a = 18P^2 a \neq 0$$

Układ w dowolnym punkcie osi środkowej  $l$  redukuje się do skrętnika.  
Obieramy punkt na osi środkowej  $A(x, y, z)$ ,  $A \in l$ :

$$\bar{M}_A = \left(\frac{K}{S^2}\right)\bar{S} = 2a\bar{S} = (-4Pa, 4Pa, 2Pa)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_A &= \bar{M}_{A_2} + \bar{S} \times \overline{A_2 A} = (9Pa, 20Pa, -4Pa) + \\ &+ (-2P, 2P, P) \times (x - 2a, y - a, z - a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S} &= (-2P, 2P, P) \\ \times & \\ \overline{A_2 A} &= (x - 2a, y - a, z - a) \\ & \underline{(-Py + 2Pz - Pa, Px + 2Pz - 4Pa, -2Py - 2Px + 6Pa)}\end{aligned}$$

$$\bar{M}_A = (-Py + 2Pz + 8Pa, Px + 2Pz + 16Pa, -2Px - 2Py + 2Pa)$$

$$\bar{M}_A = (-4Pa, 4Pa, 2Pa)$$

Z porównania odpowiednich współrzędnych otrzymujemy równanie osi środkowej:

$$l: \begin{cases} y - 2z = 12a \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l: \begin{cases} x = 2a - 2\lambda a \\ y = -2a + 2\lambda a \\ z = -7a + \lambda a, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Odpowiedź:**

W dowolnym punkcie osi środkowej układ redukuje się do skrętnika złożonego z wektora  $\bar{b} = \bar{S} = (-2P, 2P, P)$  leżącego na osi środkowej:

$$l: \begin{cases} x = 2a - 2\lambda a \\ y = -2a + 2\lambda a \\ z = -7a + \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

i pary siły o momencie  $\bar{M}_A = (-4Pa, 4Pa, 2Pa)$ .

Do wyznaczenia siły  $\bar{F}_4$  i jej punktu zaczepienia  $A_4$  skorzystamy z następujących warunków:

$$(\bar{S} + \bar{F}_4) \times \bar{p} = \bar{0}$$

gdzie:  $\bar{p}$  – wektor równoległy do prostej działania wypadkowej siły

$$\bar{M}_B + \bar{F}_4 \times \overline{A_4B} = \bar{0}, \quad B \in p \text{ – prosta działania wypadkowej siły}$$

$$\bar{F}_4 = (F_x, F_y, F_z), \quad A_4(x, y, z)$$

$$\bar{S} = (-2P, 2P, P)$$

$$\begin{aligned} (\bar{S} + \bar{F}_4) &= (F_x - 2P, F_y + 2P, F_z + P) \\ \times \\ \bar{p} &= (0, 0, 1) \\ \hline (\bar{S} + \bar{F}_4) \times \bar{p} &= (F_y + 2P, -F_x + 2P, 0) \end{aligned}$$

Przyjęto

$$\bar{F}_4 = (2P, -2P, 0)$$

gdzie:

$$\bar{S}^* = \bar{S} + \bar{F}_4 = (0, 0, P) = \bar{W} \text{ – wypadkowa}$$

Przyjmujemy punkt  $B$  na prostej działania wypadkowej:

$$B(-16a, +8a, 0)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_B &= \bar{M}_{A_2} + \bar{S} \times \overline{A_2B} = (9Pa, 20Pa, -4Pa) + \\ &+ (-2P, 2P, P) \times (-18a, 7a, -a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S} &= (-2P, \quad 2P, \quad P) \\ \times \quad \overline{A_2B} &= \begin{array}{r} (-18a, \quad +7a, \quad -a) \\ \hline (-9Pa, \quad -20Pa, \quad 22Pa) \end{array} \\ \bar{M}_B &= (0, 0, +18Pa) \\ \bar{M}_B + \bar{F}_4 \times \overline{A_4B} &= \bar{0} \Leftrightarrow \bar{F}_4 \times \overline{A_4B} = -\bar{M}_B = (0, 0, -18Pa) \\ \bar{F}_4 &= (2P, \quad -2P, \quad 0) \\ \times \quad \overline{A_4B} &= \begin{array}{r} (-16a - x, \quad +8a - y, \quad -z) \\ \hline (2Pz, \quad 2Pz, \quad -2Px - 2Py - 16Pa) = \bar{0} \end{array} \end{aligned}$$

Stąd

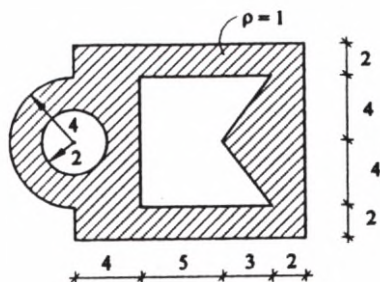
$$A_4(a, 0, 0)$$

**Odpowiedź:**

Dołączając do zadanego układu siłę  $\bar{F}_4 = (2P, -2P, 0)$ , zaczepioną w punkcie  $A_4(a, 0, 0)$ , łączny układ redukuje się do wypadkowej  $\bar{W} = (0, 0, P)$  o prostej działania

$$p: \begin{cases} x = -16a \\ y = 8a \\ z = \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

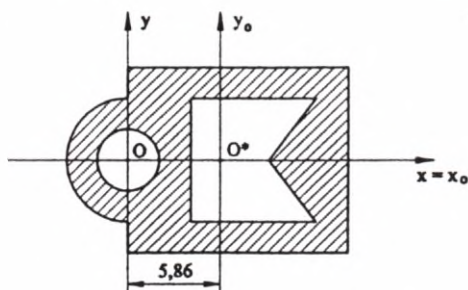
4. Dla zadanego obszaru płaskiego jednorodnego (rys. 7.10) wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności i główne centralne momenty bezwładności.



Rys. 7.10

## Rozwiązanie

Przedstawiony na powyższym rysunku obszar posiada oś symetrii, która jest jedną z głównych centralnych osi bezwładności



Rys. 7.10a

Wyznaczenie środka masy:

$$x_O = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{S_y}{m}$$

$$\begin{aligned} m &= 14 \cdot 12 - 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 + \frac{\pi \cdot 4^2}{2} - \pi \cdot 2^2 = \\ &= 168 - 64 + 12 + 8\pi - 4\pi = 128,566 \end{aligned}$$

$$S_{yz} = S_y = 168 \cdot 7 - 64 \cdot 8 + 12 \cdot 11 + 8\pi \left( -\frac{4 \cdot 4}{3\pi} \right) - 4\pi \cdot 0 = 753 \frac{1}{3}$$

$$x_O = \frac{753,33}{128,57} = 5,86$$

Osie  $x_O$ ,  $y_O$ ,  $z_O$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności.

Obliczenie głównych centralnych momentów bezwładności

$$J_{x_O} = \frac{14 \cdot 12^3}{12} - \frac{8^4}{12} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 4^3}{12} + \frac{\pi \cdot 4^4}{8} - \frac{\pi \cdot 2^4}{4} = 1810,34$$

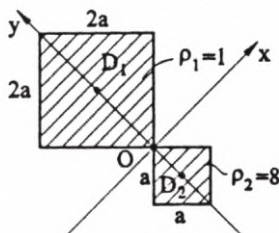
$$\begin{aligned}
 J_{y_o} &= \left( \frac{12 \cdot 14^3}{12} + 168 \cdot 1,14^2 \right) - \left( \frac{8^4}{12} + 64 \cdot 2,14^2 \right) + 2 \left( \frac{4 \cdot 3^3}{36} + 6 \cdot 5,14^2 \right) + \\
 &+ \left[ \frac{\pi \cdot 4^4}{8} - 8\pi \left( \frac{4 \cdot 4}{3\pi} \right)^2 + 8\pi \left( 5,86 + \frac{4 \cdot 4}{3\pi} \right)^2 \right] - \\
 &- \left( \frac{\pi \cdot 2^4}{4} + 4\pi \cdot 5,86^2 \right) = 3305,13
 \end{aligned}$$

$$J_{z_o} = J_{x_o} + J_{y_o} = 5115,47$$

**Uwaga!** Przy rozwiązywaniu zadania skorzystano z zasady superpozycji dzieląc obszar na następujące podobszary: prostokąt ( $14 \times 12$ ), kwadrat ( $8 \times 8$ ), dwa trójkąty ( $4 \times 3$ ), półkole o  $R = 4$  i koło  $r = 2$ .

### B – część testowa

1. Podać definicje głównych centralnych osi bezwładności i wyjaśnić, czy osie znaczone na rysunku są głównymi centralnymi osiami bezwładności dla danego obszaru.



Główne centralne osie bezwładności są to główne osie bezwładności wyznaczone w środku masy. Osie  $Oxy$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, gdyż przechodzą przez środek masy ( $S_x = 0$ ,  $S_y = 0$ ) i  $J_{xy} = 0$ .

2. Dla płaskiego sztywnego układu prętowo-tarczowego wyznaczyć plan prędkości możliwych.

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \Rightarrow O_1 \left( x_1 = \frac{8}{3}, y_1 = \frac{8}{3} \right)$$



Nie, ponieważ nie spełnia zależności dla macierzy przejścia:

$$A \cdot A^T = 1, \quad A^T \cdot A = 1$$

4. Czy para sił posiada środek?

Nie, ponieważ środek posiadają układy równoległe o niezerowej sumie, zaś suma pary sił jest równa zero.

5. Podać warunek równowagi układu sił działających na sztywne ciało nieswobodne.

W.K i W równowagi układu sił działających na sztywne nieswobodne ciało jest, aby układ sił reakcji równoważył układ sił czynnych:

$$\begin{cases} \bar{S}(\bar{F}) + \bar{S}(\bar{R}) = \bar{0} \\ \bar{M}_O(\bar{F}) + \bar{M}_O(\bar{R}) = \bar{0} \end{cases}$$

6. Podać równania Lagrange'a II rodzaju w potencjalnym polu sił

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$W = E_k - U = E_k + V$$

gdzie:

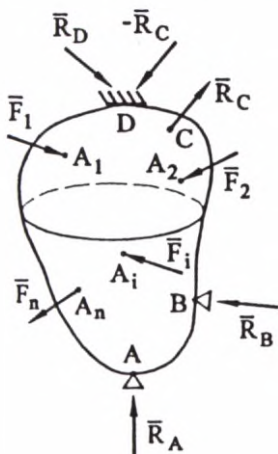
- $W$  – potencjał kinetyczny układu,
- $E_k$  – energia kinetyczna układu,
- $U$  – energia potencjalna układu,
- $V$  – potencjał,
- $s$  – liczba stopni swobody układu.

7. Co to znaczy, że układ sił /B równoważy układ sił /A?

Układ sił /B równoważy układ sił /A, to znaczy, że jego suma sił jest przeciwna do sumy układu /A oraz jego moment liczony względem dowolnego punktu jest też przeciwny do momentu układu /A liczonego względem tego samego punktu

$$\begin{cases} \bar{S}_{/B} = -\bar{S}_{/A} \\ \bar{M}_O(/B) = -\bar{M}(/A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{S}_{/B} + \bar{S}_{/A} = \bar{0} \\ \bar{M}_O(/B) + \bar{M}_O(/A) = \bar{0} \end{cases}$$

8. Kiedy moment statyczny układu materialnego jest równy zero?



Moment statyczny układu materialnego jest równy zeru, gdy jest liczony względem płaszczyzny przechodzącej przez środek masy tego układu.

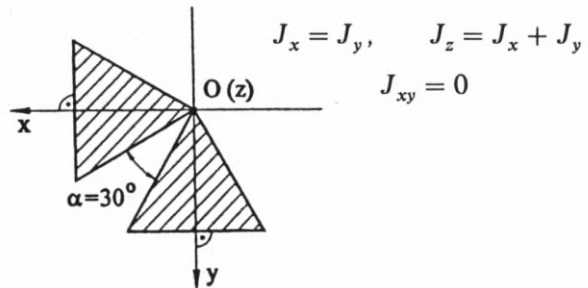
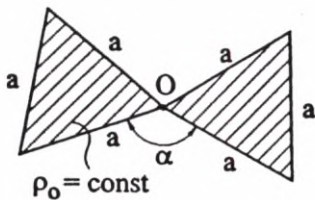
9. Podać definicję tensora III rzędu.

Tensorom III rzędu nazywamy macierz trójwskaźnikową określoną w układzie współrzędnych, której elementy przy przejściu do nowego układu współrzędnych zmieniają się według następującego prawa transformacyjnego:

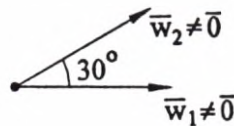
$$T'_{ijk} = \alpha_{ir} \alpha_{js} \alpha_{kw} T_{rs w}$$

**Uwaga!** Po wskaźnikach powtarzających się należy dokonać sumowania zgodnie z umową sumacyjną Einsteina.

10. Podać kąt  $\alpha$ , przy którym jednorodny płaski układ będzie posiadał w punkcie  $O$  główną oś i całą płaszczyznę głównych osi bezwładności.



11. Podać definicję wektora własnego i wyjaśnić, czy jeżeli wektor  $\bar{w}_1$  jest wektorem własnym tensora symetrycznego  $A = (a_{ij})$ , to czy jest nim również wektor  $\bar{w}_2$ .



Wektorem własnym tensora  $A$  nazywamy niezerowy wektor  $\bar{w}$ , taki że zachodzi:

$$A \bar{w} = \lambda \bar{w}$$

gdzie:  $\bar{w} \neq \bar{0}$ ,  $\lambda$  – parametr.



Wektor  $\bar{w}_2$  będzie wektorem własnym tensora  $A$  w przypadku:

- a) gdy  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  (cała przestrzeń wektorów własnych),  
 b) gdy  $\lambda_3 \neq \lambda_1 = \lambda_2$  i wektor  $\bar{w}_3 \perp$  do płaszczyzny, w której leżą wektory  $\bar{w}_1$  i  $\bar{w}_2$ .

12. Ile wynosi składowa binormalna przyspieszenia i dlaczego?

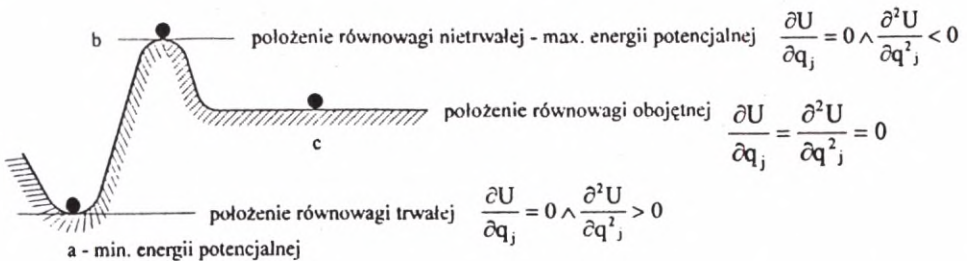
$\bar{a}_b = \bar{0}$ , ponieważ przyspieszenie leży w płaszczyźnie ściśle stycznej wyznaczonej przez wektory: kierunku stycznego do krzywej i normalnej głównej. Wektor kierunku binormalnego jest prostopadły do płaszczyzny ściśle stycznej

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{v} + 0\bar{e}_b$$

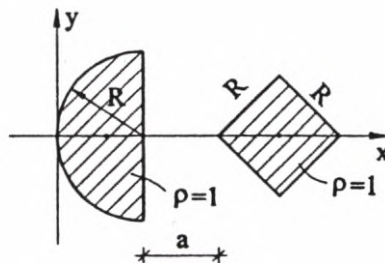
13. Kiedy przyspieszenie Coriolisa jest równe zeru?

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_w = \bar{0}, \quad \text{gdy} \quad \bar{\omega} = \bar{0} \quad \text{lub} \quad \bar{v}_w = \bar{0} \quad \text{lub} \quad \bar{\omega} \parallel \bar{v}_w$$

14. Czym charakteryzuje się położenie równowagi trwałej, nietrwałej i obojętnej?



15. Zastosować twierdzenie Steinera do obliczenia wymiaru  $a = ?$  dla spełnienia warunku:  $J_y = 10 J_x$



$$J_x = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{R^4}{12} = \frac{3\pi + 2}{24} R^4$$

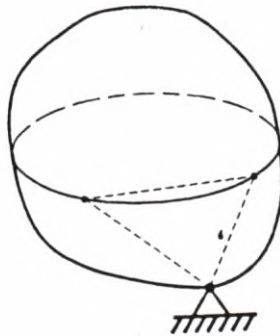
$$J_y = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \frac{\pi R^2}{2} \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \frac{R^4}{12} + R^2 \left(R + a + \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 =$$

$$= \frac{15\pi - 30}{24} R^4 + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}R + a\right)^2 R^2$$

$$\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}R + a\right)^2 = \frac{15\pi + 50}{24} R^2$$

$$a = \left(\sqrt{\frac{15\pi + 50}{24}} - \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)R \approx 0,3R$$

16. Co to jest ruch kulisty? Ile stopni swobody posiada układ w ruchu kulistym? Ruch ciała wokół stałego (nieruchomego) punktu nazywamy ruchem kulistym. W takim ruchu liczba stopni swobody  $s = 3 \cdot 3 - 3 - 3 = 3$



17. Przy jakim założeniu o punkcie  $A$  obowiązuje zasada krętu:

$$\frac{d}{dt}(\bar{K}_A) = \bar{M}_A$$

Zasada ta obowiązuje, gdy punkt  $A$  jest punktem stałym (nieruchomym) lub środkiem masy.

18. Czy znajomość zredukowanego układu sił w środku masy pozwala przewidzieć ruch ciała sztywnego?

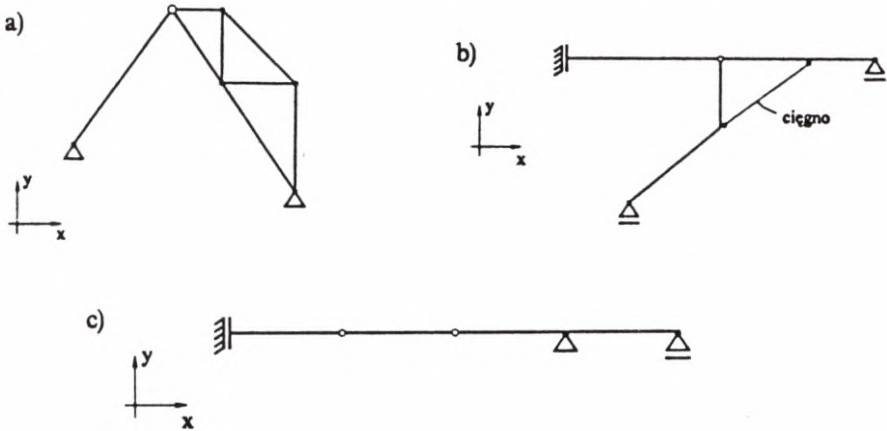
Tak, gdy będziemy znali rozkład masy w ciele oraz warunki początkowe, wówczas skorzystamy z równań różniczkowych:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}}_O = \vec{S} \\ \frac{d}{dt}[(J_O)\bar{\omega}_O] = \vec{M}_O \end{cases}$$

19. Jak oblicza się pracę sił po trajektorii punktu?

$$L_{t_0 t_k} = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = E_k(t_k) - E_k(t_0)$$

20. Który z podanych układów konstrukcyjnych jest statycznie wyznaczalny?



Układ (a) i (b) jest statycznie wyznaczalny, zaś układ (c) jest geometrycznie zmienny. Dla układu (a):

$$r = 4, \quad r.r = 3 + 1 = 4, \quad s = 0$$

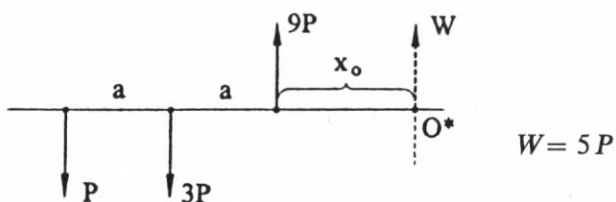
Dla układu (b):

$$r = 4 + 1 = 5, \quad r.r = 3 + 2 = 5, \quad s = 0$$

Dla układu (c):

$$r = 5, \quad r.r = 3 + 2 = 5, \quad \text{lecz} \quad s > 0$$

21. Podać położenie środka równoległego układu sił



Względem środka moment układu jest równy zeru:

$$M_{O^*} = P(x_0 + 2a) + 3P(x_0 + a) - 9P x_0 = 0$$

$$-5P x_0 + 5P a = 0$$

$$x_0 = a$$

22. Dla tensora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

wyznaczyć wektory własne

• Niezmienniki

$$I_1 = a_{ii} = 3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_3 = \det A = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

• Równanie wielokowe

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 3) = 0$$

• Wartości własne

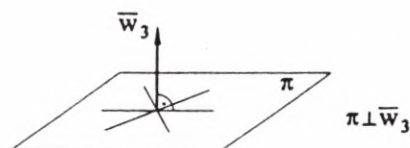
$$\lambda_3 = 3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

• Dla  $\lambda_3 = 3$

$$\begin{cases} -2w_1 - w_2 + w_3 = 0 \\ -w_1 - 2w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 - w_2 - 2w_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow w_2 = -w_1$$

$$\begin{cases} -w_1 - 2w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 - w_2 - 2w_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow w_3 = -w_2 = w_1 = p \in \mathbb{R} - \{0\}$$

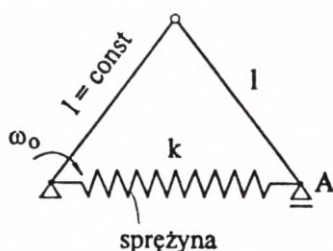
$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \bar{w}_3 = (p, -p, p) \Rightarrow \bar{e}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



23. Dla sztywnego układu prętowego wyznaczyć energię mechaniczną, przyjmując  $\dot{\alpha}(t) = \omega_0(t)$ :

$$\rho_O = \frac{m_O}{l} = \text{const}$$

$$m_A = m_O$$



Położenie układu jest opisane przez jeden parametr, np. kąt  $\alpha(t)$

– współrzędne punktów

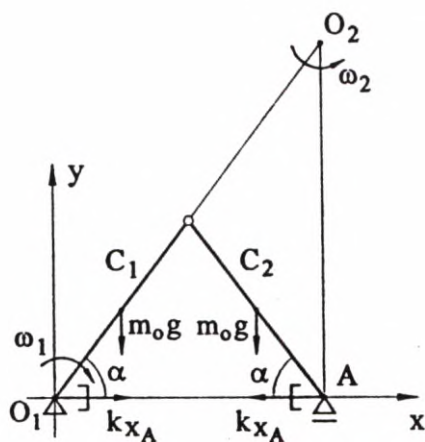
$$O_1(0, 0),$$

$$O_2(2l \cos \alpha, 2l \sin \alpha),$$

$$C_1\left(\frac{l}{2} \cos \alpha, \frac{l}{2} \sin \alpha\right),$$

$$C_2\left(\frac{3}{2} l \cos \alpha, \frac{l}{2} \sin \alpha\right),$$

$$A(2l \cos \alpha, 0)$$



– energia kinetyczna

a) prętów

$$E_k = \frac{1}{2} J_{I_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{I_2} \omega_2^2, \quad \omega_2 = -\omega_1 = \omega_O = \dot{\alpha}$$

$$J_{I_1} = \frac{m_O}{l} \cdot \frac{l^3}{3}, \quad J_{I_2} = \frac{m_O}{l} \left[ \frac{l^3}{12} + l \cdot \frac{l^2}{4} (\cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha) \right]$$

$$E_k = \frac{1}{3} m_O \omega_O^2 l^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha)$$

b) punktu  $A$  o masie  $m_O$

$$E_k = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_O 4 l^2 \omega_O^2 \sin^2 \alpha = 2 m_O l^2 \omega_O^2 \sin^2 \alpha$$

– energia kinetyczna układu

$$E_k = \frac{1}{3} m_O \omega_O^2 l^2 (1 + 9 \sin^2 \alpha)$$

– energia potencjalna układu

$$U = m_O g \frac{l}{2} \sin \alpha + m_O g \frac{l}{2} \sin \alpha = m_O g l \sin \alpha$$

– energia mechaniczna układu

$$E_m = E_k + U = \frac{1}{3} m_O \omega_O^2 l^2 (1 + 9 \sin^2 \alpha) + m_O g l \sin \alpha$$

24. Jaką własność mają współczynniki równania wiekowego?

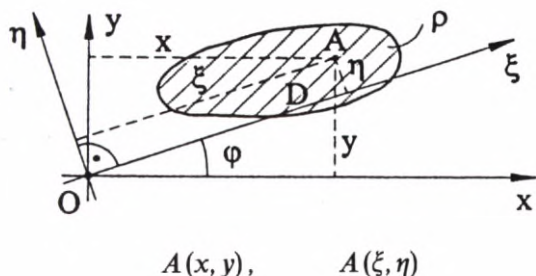
Współczynniki równania wiekowego są niezmiennikami, gdyż nie zależą od układu współrzędnych

$$I_1 = a'_{ii} = I_1 = a_{ii} = \text{const}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - a'_{ij} a'_{ij}) = \frac{1}{2} (I_1^2 - a_{ij} a_{ij}) = \text{const}$$

$$I_3 = I_1 I_2 - \frac{1}{3}(I_1^3 - a'_{ij} a'_{ip} a'_{jp}) = I_1 I_2 - \frac{1}{3}(I_1^3 - a_{ij} a_{ip} a_{jp}) = \text{const}$$

25. Dla obszaru płaskiego wyprowadzić wzory na  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_{\xi\eta}$



$$\begin{cases} \xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \\ \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_\xi &= \iint_D \rho \eta^2 d\xi d\eta = \iint_D \rho (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 dx dy = \\ &= \left( \iint_D \rho x^2 dx dy \right) \sin^2 \varphi + \left( \iint_D \rho y^2 dx dy \right) \cos^2 \varphi - \\ &- 2 \sin \varphi \cos \varphi \left( \iint_D \rho y x dx dy \right) = J_y \sin^2 \varphi + J_x \cos^2 \varphi - J_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\eta &= \iint_D \rho \xi^2 d\xi d\eta = \iint_D \rho (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dx dy = \dots = \\ &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\xi\eta} &= \iint_D \rho \xi \eta d\xi d\eta = \iint_D \rho (x \cos \varphi + y \sin \varphi) (-x \sin \varphi + \\ &+ y \cos \varphi) dx dy = \dots = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned}$$

26. Czym różni się suma układu od wypadkowej?

Wypadkowa jest układem sił, suma nie, bo to wektor swobodny. Suma może być zerowa, wypadkowa jest zawsze niezerowa. Wypadkowa jest układem równoważnym danemu, suma nie, bo nie jest układem. Wypadkowa ma ściśle określoną prostą działania, suma nie, bo nie ma punktu zaczepienia.

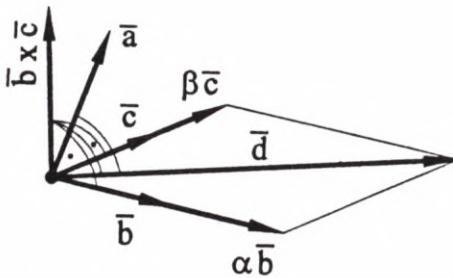
27. Wyprowadzić następujące tożsamości wektorowe:

a)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Przy wyprowadzaniu zależności (a) skorzystamy z następującego rysunku:

Wektor  $\vec{d}$  jest kombinacją liniową wektorów  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ :



$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{d} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \quad | \cdot \vec{a}$$

$$\vec{d} \cdot \vec{a} = 0 = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \beta(\vec{a} \cdot \vec{c}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{-\beta} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

Zatem

$$\alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad \beta = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

stąd

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Z równości tej korzystamy przy dowodzie zależności (b):

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = \vec{a} \cdot [(\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}] = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - \\ &- (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

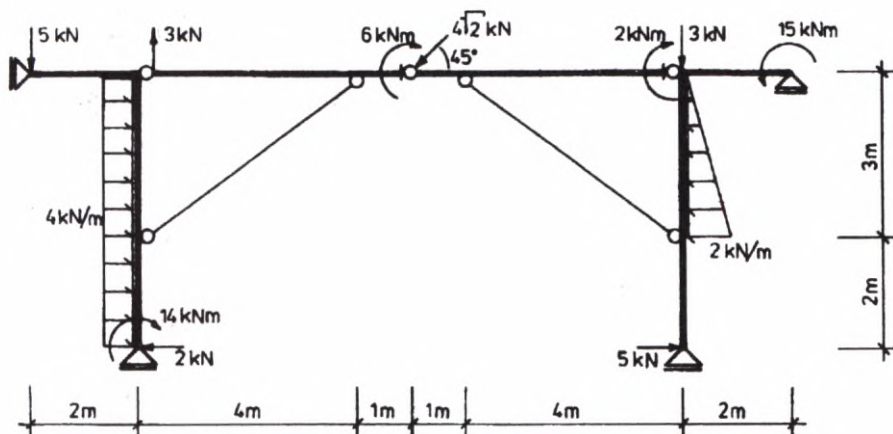
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d}$$



## 7.4. ZESTAW EGZAMINACYJNY NR 4

## A – część pisemna

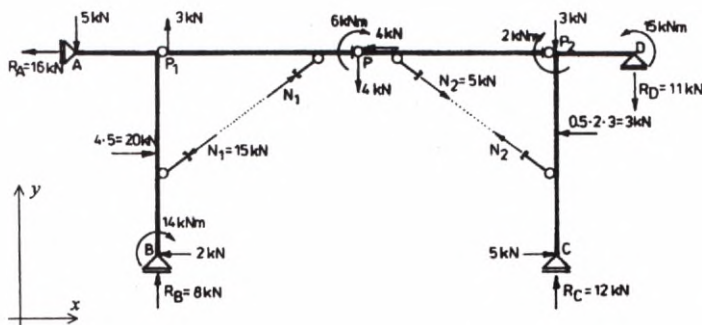
1. Dla danego płaskiego układu ramowego wyznaczyć reakcje podporowe i siły w ściąгах, wykorzystując równania równowagi sił oraz zasadę prac wirtualnych.



Rys. 7.11

Układ przedstawiony na rys. 7.11 jest statycznie wyznaczalny, gdyż do wyznaczenia 4 reakcji podporowych i 2 sił w ściąгах dysponujemy (3+3) sześcioma równaniami równowagi sił, a ponadto liczba stopni swobody układu jest równa zero.

Na rys. 7.11a zaznaczono reakcje podporowe, siły w ściąгах oraz układ współrzędnych.



Rys. 7.11a

## Równania równowagi sił

1.  $\Sigma X = 0$

$$-R_A - 2 - 4 + 20 - 3 + 5 = 0 \Rightarrow R_A = 16 \text{ [kN]}$$

2.  $M_{P_1}^z \text{ lewej} = 0$

$$5 \cdot 2 + 20 \cdot 2,5 - 14 - 2 \cdot 5 + \frac{4}{5} N_1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_1 = -15 \text{ [kN]}$$

(pręt ściskany siłą 15 [kN])

3.  $M_P^z \text{ lewej} = 0$

$$-6 - 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 20 \cdot 2,5 - 14 - 2 \cdot 5 - R_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_B = 8 \text{ [kN]}$$

4.  $\Sigma M_D = 0$

$$15 + 3 \cdot 2 - 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 - R_C \cdot 2 - 6 + 4 \cdot 7 - 3 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 2 \cdot 5 - 14 +$$

$$+ 20 \cdot 2,5 + 5 \cdot 14 = 0 \quad \Rightarrow R_C = 12 \text{ [kN]}$$

5.  $\Sigma Y = 0$

$$-5 + 3 + 8 - 4 - 3 + 12 - R_D = 0 \Rightarrow R_D = 11 \text{ [kN]}$$

6.  $M_{P_2}^z \text{ prawej} = 0$

$$15 - 11 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 - \frac{4}{5} N_2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_2 = 5 \text{ [kN]}$$

Sprawdzenie  $\Sigma M_O = 0$ 

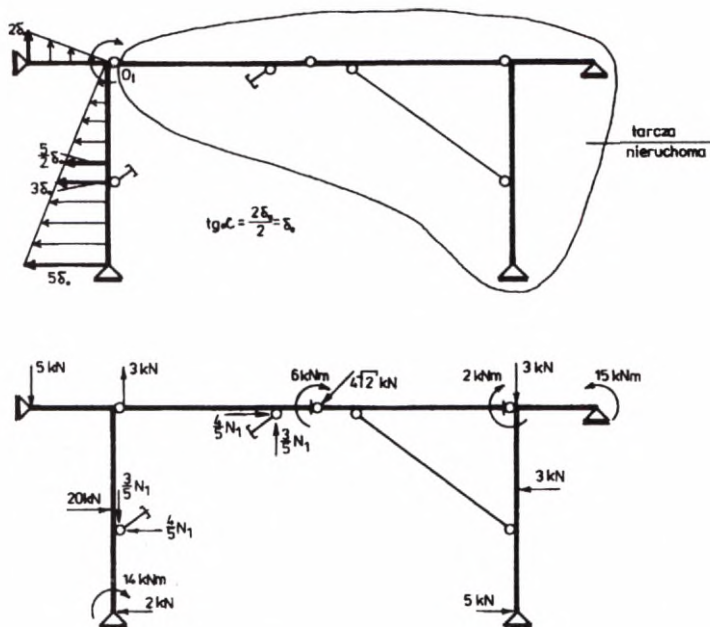
$$16 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 14 - 6 - 4 \cdot 7 + 4 \cdot 5 - 2 + 15 - 3 \cdot 12 +$$

$$+ 12 \cdot 12 - 11 \cdot 14 - 20 \cdot 2,5 + 3 \cdot 3 = 0$$

$$290 - 290 = 0$$

Obliczenie siły  $N_1$  z zasady prac wirtualnych

Usuujemy myślowo ścią 1 zastępując jego działanie siłą osiową  $N_1$ .  
Rysujemy plan przemieszczeń wirtualnych oraz działające siły (rys. 7.11b).



Rys. 7.11b

Piszemy równanie zasady prac wirtualnych, z którego to równania wyznaczymy siłę  $N_1$ .

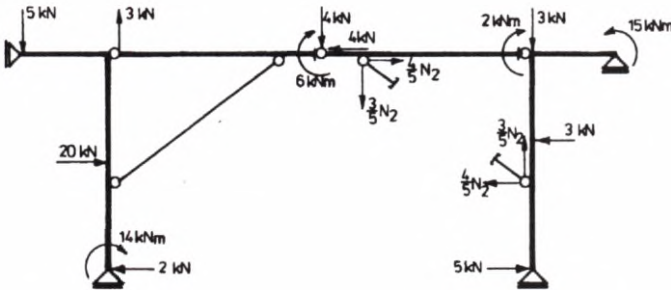
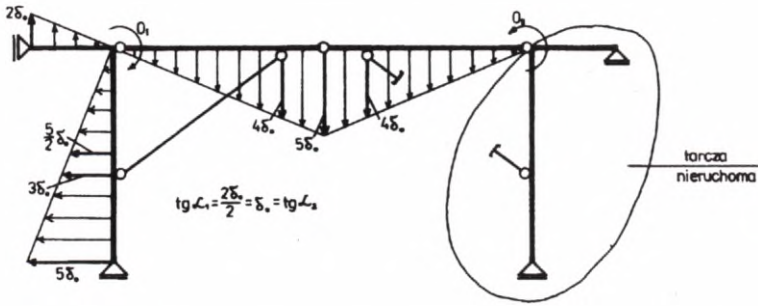
$$\delta L = -5 \cdot 2 \delta_o - 20 \cdot \frac{5}{2} \delta_o + \frac{4}{5} N_1 \cdot 3 \delta_o + 2 \cdot 5 \delta_o + 14 \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$\delta_o \left( -10 - 50 + \frac{12}{5} N_1 + 10 + 14 \right) = 0 \Rightarrow N_1 = 15 \text{ [kN]}$$

Analogicznie postępujemy przy obliczeniu siły  $N_2$  w drugim ściagu.

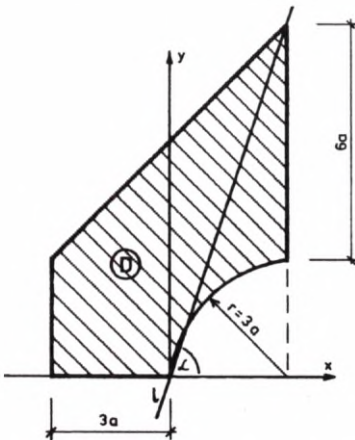
$$\delta L = -5 \cdot 2 \delta_o - 20 \cdot \frac{5}{2} \delta_o + 14 \operatorname{tg} \alpha_1 + 2 \cdot 5 \delta_o + 6 \operatorname{tg} \alpha_1 + 4 \cdot 5 \delta_o + \frac{3}{5} N_2 \cdot 4 \delta_o - 2 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$\delta_o \left( -10 - 50 + 14 + 10 + 6 + 20 + \frac{12}{5} N_2 - 2 \right) = 0 \Rightarrow N_2 = 5 \text{ [kN]}$$



Rys. 7.11c

2. Dla jednorodnej płaskiej figury materialnej o gęstości  $\rho_0 = 1$  wyznaczyć moment bezwładności względem prostej  $l$ .



$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Rys. 7.12

W dowolnym punkcie  $O$  prostej  $l$  należy przyjąć układ współrzędnych, aby można było skorzystać ze wzoru

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{10}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{9}{10}, \quad \sin 2\alpha = \frac{6}{10}$$

$$J_l = \frac{1}{10}(J_x + 9J_y - 6J_{xy})$$

Obszar dzielimy na prostokąt ( $6a \times 3a$ ), trójkąt prostokątny ( $6a \times 6a$ ), i ćwiartkę koła o promieniu  $R = 3a$ .

$$J_x = \left( \frac{6 \cdot 3^3}{3} + \frac{6 \cdot 6^3}{36} + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 5^2 - \frac{\pi \cdot 3^4}{16} \right) a^4 = 524,096 a^4$$

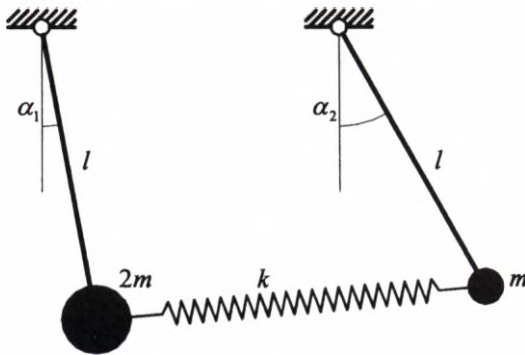
$$J_y = \left( \frac{3 \cdot 6^3}{12} + \frac{6 \cdot 6^3}{36} + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 1^2 - \left( \frac{\pi \cdot 3^4}{16} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left( \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi} \right)^2 + \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left( 3 - \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi} \right)^2 \right) \right) a^4 = 82,478 a^4$$

$$J_{xy} = \left( 0 + \frac{6^2 \cdot 6^2}{72} + \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \left( -\frac{3^4}{8} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left( \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi} \right) \cdot \left( \frac{-4 \cdot 3}{3 \cdot \pi} \right) + \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot \left( 3 - \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot \pi} \right) \cdot \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot \pi} \right) \right) a^4 = 91,125 a^4$$

**Odpowiedź:**  $J_l = 71,965 a^4$ .

3. Dwa wahadła matematyczne połączone są sprężyną o stałej  $k$ . Przeanalizować małe drgania układu wokół położenia równowagi statecznej ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ) wyznaczając częstości kątowe  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Do rozwiązania problemu wykorzystamy równania Lagrange'a II rodzaju. Są dwa, gdyż analizowany układ ma dwa stopnie swobody. Współrzędnymi uogólnionymi będą kąty  $\alpha_1(t)$  i  $\alpha_2(t)$ .



Rys. 7.13

Ponieważ  $v_A = \omega_1 l = \dot{\alpha}_1 l$ ,  $v_B = \omega_2 l = \dot{\alpha}_2 l$ , to energia kinetyczna układu jest równa:

$$E_k = \frac{1}{2} 2m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = m l^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}_2^2$$

Energia potencjalna układu wynosi:

$$E_p = 2mgl(1 - \cos \alpha_1) + mgl(1 - \cos \alpha_2) + \frac{1}{2} k l^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 = 4mgl \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + 2mgl \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} k l^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2$$

Dla małych kątów  $\sin \alpha \approx \alpha$ , zatem:

$$E_p = mgl \alpha_1^2 + \frac{1}{2} mgl \alpha_2^2 + \frac{1}{2} k l^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha_1} = Q_{\alpha_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha_2} = Q_{\alpha_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ml^2 \ddot{\alpha}_1 + 2mgl \alpha_1 - k l^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \\ ml^2 \ddot{\alpha}_2 + mgl \alpha_2 + k l^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \end{cases} \quad /: ml^2$$

$$\begin{cases} 2\ddot{\alpha}_1 + \left(\frac{2g}{l} + \frac{k}{m}\right)\alpha_1 - \frac{k}{m}\alpha_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}\alpha_1 + \ddot{\alpha}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Małe drgania układu opisane są przez ruch harmoniczny, co oznacza, że zachodzi:

$$\alpha_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \quad \ddot{\alpha}_1 = -A_1 \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 \alpha_1$$

$$\alpha_2(t) = A_2 \cos(\omega t), \quad \ddot{\alpha}_2 = -A_2 \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 \alpha_2$$

Po podstawieniu tych zależności do równań Lagrange'a otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych:

$$\begin{cases} \left(\frac{2g}{l} + \frac{k}{m} - 2\omega^2\right)\alpha_1 - \frac{k}{m}\alpha_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}\alpha_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

dla którego rozwiązanie niezerowe istnieje, gdy wyznacznik główny jest równy zeru:

$$\begin{vmatrix} \frac{2g}{l} + \frac{k}{m} - 2\omega^2, & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m}, & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\omega^4 - \left(\frac{4g}{l} + \frac{3k}{m}\right)\omega^2 + \left(\frac{3gk}{lm} + \frac{2g^2}{l^2}\right) = 0$$

$$\Delta = \frac{9k^2}{m^2}, \quad \sqrt{\Delta} = \frac{3k}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

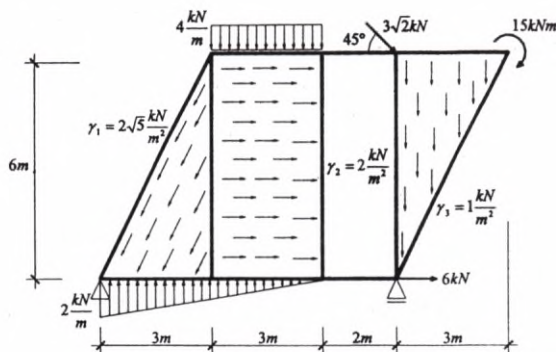
$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{3k}{2m} = \omega_1^2 + \frac{3k}{2m} = \omega_1^2 \left(1 + \frac{3k}{2m\omega_1^2}\right)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{3k}{2m\omega_1^2}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3kl}{2mg}}}$$

**Odpowiedź:** Ruch harmoniczny analizowanego układu jest następujący:

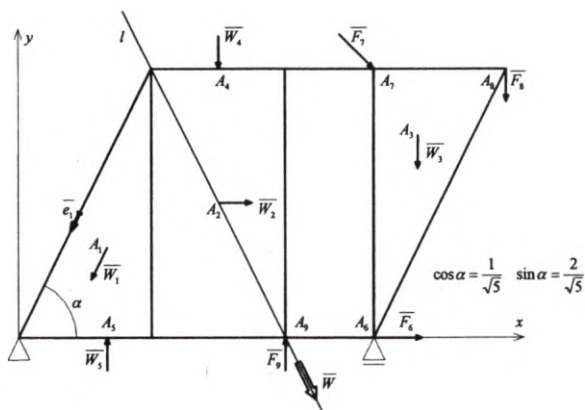
$$\begin{cases} \alpha_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) \\ \alpha_2(t) = A_2 \cos\left(\omega_1 \sqrt{1 + \frac{3k}{2m\omega_1^2}} + \varphi_{20}\right) \end{cases}$$

4. Zredukować do najprostszej postaci układ sił czynnych działających na układ trzech tarcz połączonych dwoma prętami — rys. 7.14.



Rys. 7.14

Obciążenia ciągłe zastępujemy siłami wypadkowymi, a moment — jedną z równoważnych par sił.



Rys. 7.14a



$$\overline{W}_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\overline{e}_1 = 18\sqrt{5} \left( \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right) = (-18, -36), A_1(2, 2)$$

$$\overline{W}_2 = 2 \cdot 3 \cdot 6\overline{e}_x = 36(1,0) = (36,0), A_2\left(\frac{9}{2}, 3\right)$$

$$\overline{W}_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6(-\overline{e}_y) = 9(0, -1) = (0, -9), A_3(9,4)$$

$$\overline{W}_4 = 4 \cdot 3(-\overline{e}_y) = 12(0, -1) = (0, -12), A_4\left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

$$\overline{W}_5 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6\overline{e}_y = 6(0, 1) = (0, 6), A_5(2, 0)$$

$$\overline{F}_6 = 6\overline{e}_x = 6(1,0) = (6, 0), A_6(8, 0)$$

$$\overline{F}_7 = 3\sqrt{2}\overline{e}_7 = 3\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (3, -3), A_7(8, 6)$$

$$\overline{F}_8 = \frac{15}{5}(-\overline{e}_y) = 3(0, -1) = (0, -3), A_8(11, 6)$$

$$\overline{F}_9 = \frac{15}{5}\overline{e}_y = 3(0, 1) = (0, 3), A_9(6, 0)$$

$$\overline{S} = \overline{W}_1 + \overline{W}_2 + \overline{W}_3 + \overline{W}_4 + \overline{W}_5 + \overline{F}_6 + \overline{F}_7 + \overline{F}_8 + \overline{F}_9 = (27, -54)$$

Parametr układu  $K = 0$ , ponieważ układ sił jest płaski. Najprostszy zredukowany układ sił to wypadkowa:

$$W = \overline{S} = (27, -54)$$

o prostej działania  $l$ .

Obieramy punkt  $A(x, y)$  na prostej  $l$  i liczymy moment układu względem tego punktu przyrównując go do wektora zerowego:

$$\begin{aligned} \overline{M}_A = & \overline{W}_1 \times \overline{A_1 A} + \overline{W}_2 \times \overline{A_2 A} + \overline{W}_3 \times \overline{A_3 A} + \overline{W}_4 \times \overline{A_4 A} + \overline{W}_5 \times \overline{A_5 A} + \\ & + \overline{F}_6 \times \overline{A_6 A} + \overline{F}_7 \times \overline{A_7 A} + \overline{F}_8 \times \overline{A_8 A} + \overline{F}_9 \times \overline{A_9 A} = \overline{0} \end{aligned}$$

$$\times \frac{\overline{W}_1 = (-18, 36)}{A_1 A = (x-2, y-2)} \times \frac{\overline{W}_2 = (36, 0)}{A_2 A = \left(x - \frac{9}{2}, y - 3\right)} \times \frac{\overline{W}_3 = (0, -9)}{A_3 A = (x-9, y-4)}$$

$$\frac{(0, 0, 36x - 18y - 36)}{(0, 0, 36y - 108)} \frac{(0, 0, 9x - 81)}$$

$$\times \frac{\overline{W}_4 = (0, -12)}{A_4 A = \left(x - \frac{9}{2}, y - 6\right)} \times \frac{\overline{W}_5 = (0, 6)}{A_5 A = (x-2, y)} \times \frac{\overline{W}_6 = (6, 0)}{A_6 A = (x-8, y)}$$

$$\frac{(0, 0, 12x - 54)}{(0, 0, -6x + 12)} \frac{(0, 0, 6y)}$$

$$\times \frac{\overline{F}_7 = (3, -3)}{A_6 A = (x-8, y-6)} \times \frac{\overline{F}_8 = (0, -3)}{A_6 A = (x-11, y-6)} \times \frac{\overline{F}_9 = (0, -3)}{A_6 A = (x-6, y)}$$

$$\frac{(0, 0, 3x + 3y - 42)}{(0, 0, 3x - 33)} \frac{(0, 0, -3x + 18)}$$

$$\overline{M}_A = (0, 0, 54x + 27y - 324) = (0, 0, 0)$$

$$l: 54x + 27y - 324 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 12$$

**Odpowiedź:** Zadany układ sił czynnych działających na konstrukcję redukuje się do wypadkowej  $\overline{W} = (27, -54)$  o prostej działania  $l: y = -2x + 12$ .

### B – część testowa

1. Podać twierdzenie o rozkładzie prędkości punktów dla ciała sztywnego.

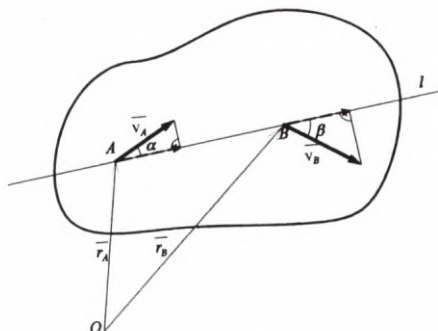
#### Twierdzenie 1

W dowolnym ruchu ciała sztywnego rzuty prędkości punktów leżących na prostej na tę prostą są równe.

$$Z: |\overline{AB}| = \text{const}$$

$$A, B \in l$$

$$T: (\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_B)_{AB}$$



$$D: AB = \bar{r}_B - \bar{r}_A$$

$$|\overline{AB}|^2 = \text{const} \quad / \frac{d}{dt}$$

$$2 \overline{AB} \cdot \dot{\overline{AB}} = 2 \overline{AB} \cdot (\dot{\bar{r}}_B - \dot{\bar{r}}_A) = 2 \overline{AB} \cdot (\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0$$

$$\overline{AB} \cdot \bar{v}_B = \overline{AB} \cdot \bar{v}_A$$

$$|\overline{AB}| |\bar{v}_B| \cos \beta = |\overline{AB}| |\bar{v}_A| \cos \alpha$$

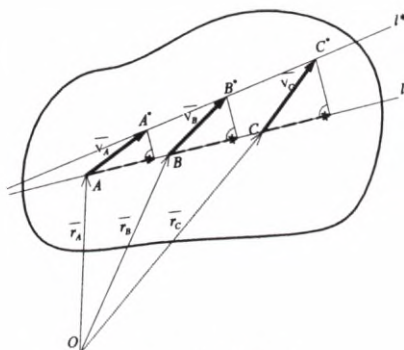
zatem

$$(\bar{v}_B)_{AB} = (\bar{v}_A)_{AB}$$

*c.b.d.o.*

## Twierdzenie 2

W dowolnym ruchu ciała sztywnego końce wektorów prędkości punktów leżących na prostej też leżą na prostej.



$$Z: A, M, B \in l$$

$$\overline{AM} = \alpha \overline{AB}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$|\overline{AB}| = \text{const}$$

$$T: A^*, M^*, B^* \in l^*$$

D:

$$\overline{r}_M = \overline{r}_A + \overline{AM} = \overline{r}_A + \alpha \overline{AB} \quad / \quad \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\overline{r}}_M = \dot{\overline{r}}_A + \alpha \dot{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{v}_M = \overline{v}_A + \alpha \dot{\overline{AB}}$$

$$\overline{r}_{M^*} = \overline{r}_M + \overline{v}_M = \overline{r}_A + \alpha \overline{AB} + \overline{v}_A + \alpha \dot{\overline{AB}}$$

$$\overline{r}_{M^*} = (\overline{r}_A + \overline{v}_A) + \alpha (\overline{AB} + \dot{\overline{AB}}) = \overline{r}_{A^*} + \alpha \dot{\overline{A^*B^*}} \quad (*)$$

Jeżeli zachodzi zależność:

$$\overline{A^*B^*} = \overline{AB} + \dot{\overline{AB}}$$

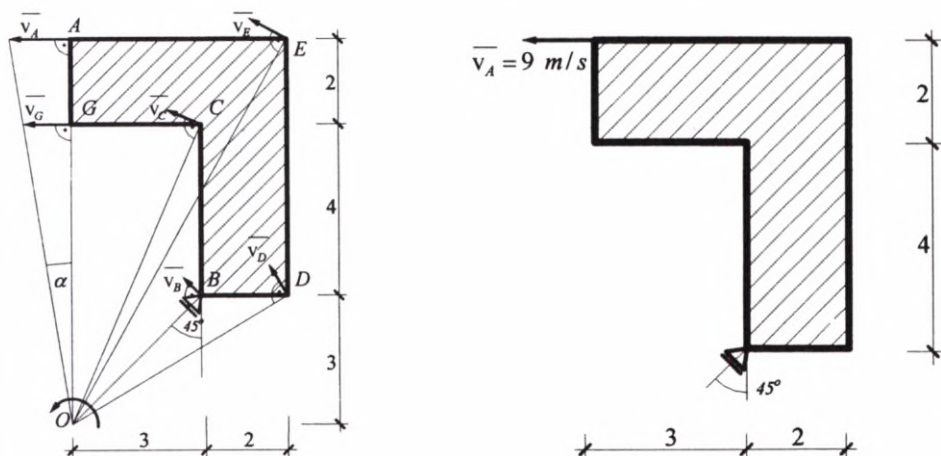
to równanie (\*) jest równaniem prostej  $l^*$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{r}_{A^*} = \overline{r}_A + \overline{v}_A \\ \overline{r}_{B^*} = \overline{r}_B + \overline{v}_B \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{r}_{B^*} - \overline{r}_{A^*} = \overline{r}_B - \overline{r}_A + \overline{v}_B - \overline{v}_A \Rightarrow \overline{A^*B^*} =$$

$$= \overline{AB} + \dot{\overline{r}}_B - \dot{\overline{r}}_A = \overline{AB} + \dot{\overline{AB}}$$

c.b.d.o.

2. W pewnej chwili ruchu płaskiego ciała sztywnego prędkość  $\vec{v}_A$  punktu  $A$  ma wielkość równą  $|\vec{v}_A| = 9 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$ . Wyznaczyć i narysować dla tej chwili prędkości punktów  $B, C, D, E$  i  $G$ .



Środek  $O$  chwilowego obrotu ciała leży na przecięciu prostych prostopadłych do prędkości punktu  $A$  i punktu  $B$ . Kierunek prędkości  $v_B$  pokrywa się z przesunięciem możliwym podpory  $B$ . Prowadząc do promieni wodzących punktów proste prostopadłe mamy określony kierunek prędkości poszczególnych punktów, a ich wielkości wyznaczamy z proporcji:

$$\omega_O = \frac{v_B}{|OB|} = \frac{v_A}{|OA|} = \operatorname{tg} \alpha = 1 \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right]$$

$$v_B = |OB| \operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{2} \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right] = 4,243 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

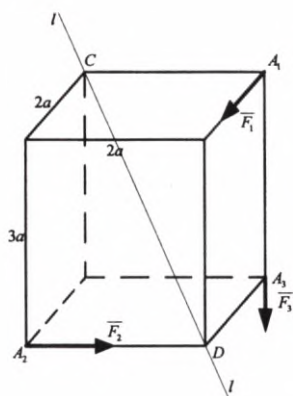
$$v_C = |OC| \operatorname{tg} \alpha = 7,616 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$v_D = |OD| \operatorname{tg} \alpha = 5,831 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$v_E = |\overline{OE}| \operatorname{tg} \alpha = 10,296 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$v_G = |\overline{OG}| \operatorname{tg} \alpha = 7 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

3. Obliczyć moment zadanego układu sił względem prostej  $l$  wyznaczonej przez punkty  $C, D$ .



$$|\overline{F_1}| = 2P$$

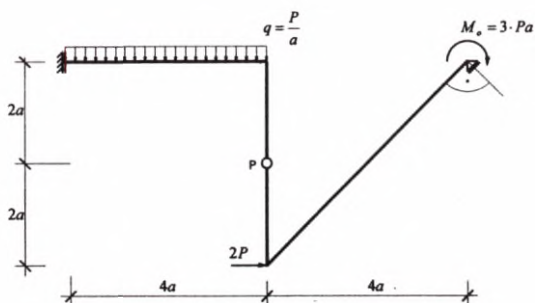
$$|\overline{F_2}| = 4P$$

$$|\overline{F_3}| = 3P$$

Analizując zadany układ sił widać, że moment od siły  $\overline{F_2}$  jest równy zero, gdyż linia działania tej siły z prostą  $l$  przecinają się. Podobnie, jeżeli siłę  $\overline{F_3}$  przesuniemy wzdłuż linii jej działania do punktu  $A_1$ , to wypadkowa sił  $\overline{F_1}$  i  $\overline{F_3}$  będzie leżała na linii  $A_1 D$ , czyli jej moment względem prostej  $l$  będzie równy zero. Tak więc:

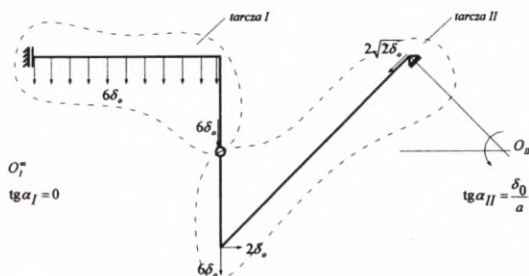
$$\overline{M}_l = \overline{0}$$

4. Sprawdzić, czy układ sił działający na układ prętowy jest w równowadze.



Odpowiedzi na to pytanie udzielimy na podstawie zasady prac wirtualnych. Układ sił będzie w równowadze, gdy  $\delta L = 0 \forall \delta o$ , a nie będzie w równowadze przy  $\delta L \neq 0$ .

Analizowany układ składa się z dwóch tarcz, a ich plan przesunięć wirtualnych przedstawia poniższy rysunek.



Piszemy równanie zasady prac wirtualnych:

$$\delta L = \frac{P}{a} \cdot 4a \cdot 6\delta o + 2P \cdot 2\delta o - 3Pa \operatorname{tg} \alpha_{II} = \delta o (24P + 4P - 3P) = 25P\delta o \neq 0$$

dla  $\forall \delta o$

Zadany układ sił nie jest w równowadze.

5. Podać, jaka jest różnica pomiędzy chwilową osią obrotu w ruchu płaskim, a chwilową osią obrotu w ruchu kulistym?

Chwilowa oś obrotu w ruchu płaskim ma stały kierunek prostopadły do płaszczyzny kierującej, zaś w ruchu kulistym jest to nieskończony zbiór prostych przechodzących przez stały punkt unieruchomienia ciała.

6. Sprawdzić, że jeżeli dla płaskiego pola sił  $\vec{F} = P(x, y)\vec{e}_x + Q(x, y)\vec{e}_y$  spełniony jest warunek Schwartza  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , to odpowiada mu równanie różniczkowe zupełne:

$$P dx + Q dy = dV$$

gdzie:

$V = V(x, y)$  – potencjał pola sił.

Warunek Schwartza zapiszmy następująco:

$$P = \frac{\partial V}{\partial x} \quad / \quad \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$Q = \frac{\partial V}{\partial y} \quad / \quad \frac{\partial}{\partial x}$$

Rozwiązanie:

$$\vec{F} = P \vec{e}_x + Q \vec{e}_y = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y = \overline{\text{grad}} V$$

$$P dx + Q dy = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = dV$$

Widać stąd, że:

$$P = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}$$

a więc pole sił jest polem potencjalnym.

7. Punkt materialny o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły ciężkości  $mg$  oraz siły oporu  $cv^2$ .

Warunki początkowe są następujące:

$$\begin{cases} z(t=0) = 0 \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

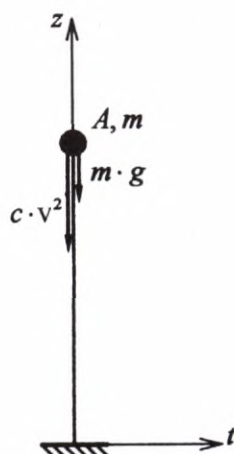
Wyznaczyć ten ruch.

Korzystamy z prawa ruchu:

$$m\ddot{z} = F = -mg - cv^2$$

Ponieważ  $\dot{z} = v$ , to  $\ddot{z} = \frac{dv}{dt}$ :

$$m \frac{dv}{dt} = -(mg + cv^2)$$





$$\frac{m dv}{mg + cv^2} = - dt$$

$$\int \frac{m dv}{mg + cv^2} = \sqrt{\frac{m}{gc}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v \right) = - \int dt = -t + C_o$$

Stałą  $C_o$  wyznaczamy z warunku  $\dot{z}(t=0) = v_o$ . A zatem:

$$C_o = \sqrt{\frac{m}{gc}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v_o \right)$$

zaś

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}} \operatorname{tg} \left[ \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v_o \right) - \sqrt{\frac{gc}{m}} t \right]$$

Całkując prędkość po czasie otrzymamy szukane równanie ruchu:

$$z(t) = \int v dt = \frac{m}{c} \ln \left| \cos \left( \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v_o \right) - \sqrt{\frac{gc}{m}} t \right) \right| + D_o$$

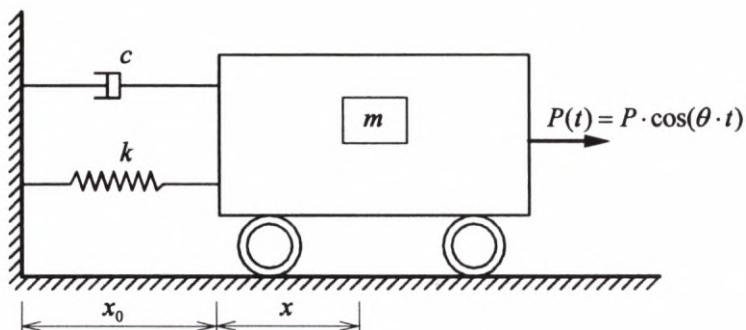
Dla  $t = 0$ ,  $z(0) = 0$  i stąd:

$$D_o = -\frac{m}{c} \ln \left| \cos \left[ \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v_o \right) \right] \right|$$

Ostatecznie:

$$z(t) = \frac{m}{c} \ln \left| \frac{\cos \left[ \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v_o \right) - \sqrt{\frac{gc}{m}} t \right]}{\cos \left[ \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{c}{mg}} v_o \right) \right]} \right|$$

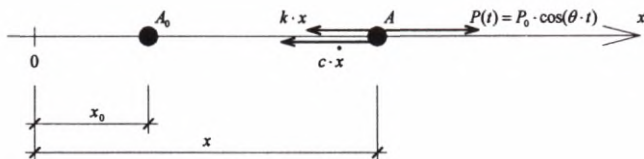
8. Dla typowego układu masowego o jednym stopniu swobody napisać prawo ruchu, a następnie korzystając z równania Lagrange'a II rodzaju, zawierającego człon związany z funkcją dyssypacji energii



wyprowadzić prawo ruchu dla masy  $m$ .

Modelem matematycznym w tym przypadku jest punkt materialny  $A$  o masie  $m$  obciążony sumą sił

$$F(t) = P_0 \cos(\Theta t) + (-c \dot{x}) + (-k x)$$



II zasada Newtona

$$m \ddot{x} = -c \dot{x} - k x + P_0 \cos(\Theta t)$$

Przechodząc do równania Lagrange'a II rodzaju przyjmuje ono postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = Q_x$$

$$E_k = \frac{m \dot{x}^2}{2}, \quad E_p = -V = \frac{k x^2}{2}, \quad E_D = \frac{c \dot{x}^2}{2}, \quad Q_x = P_0 \cos(Q t)$$

gdzie:

$E_k$  – energia kinetyczna punktu,

$E_p$  – energia potencjalna siły sprężystości,

$E_D$  – energia dyssypacji siły oporu,

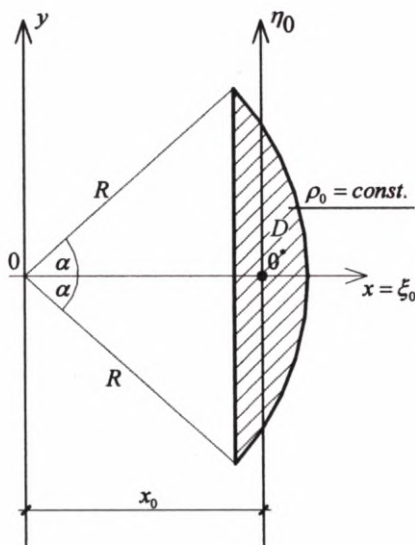
$Q_x$  – siła wymuszająca ruch.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = k x, \quad \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = c \dot{x}$$

I ostatecznie:

$$m \ddot{x} + kx + c\dot{x} = P_0 \cos \Theta t$$

9. Dla jednorodnego obszaru  $D$  będącego odcinkiem koła wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności.



Środek masy  $O^*(x_0, 0)$ :

$$x_0 = \frac{S_y}{m}$$

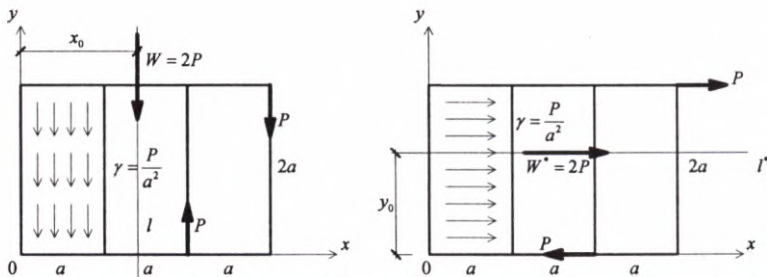
$$m = \rho_0 \left( \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi R^2 - \frac{R^2}{2} \sin 2\alpha \right) = \rho_0 R^2 \left( \hat{\alpha} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$$

$$S_y = \iint_D \rho_0 x dx dy = \rho_0 \iint_D r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \rho_0 \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha$$

$$x_0 = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\hat{\alpha} - \sin 2\alpha}$$

Osie  $\xi_0, \eta_0$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, ponieważ  $J_{\xi_0 \eta_0} = 0$ .

10. Wyznaczyć środek równoległego układu sił będącego punktem przecięcia prostych działania: wypadkowej zadanego układu i wypadkowej układu obróconego o ten sam kąt (przyjąć  $\alpha = 90^\circ$ ).



Ponieważ moment wypadkowej względem dowolnego punktu jest równy momentowi danego układu względem tego punktu, to stąd wyznaczmy równania prostych  $l$  i  $l^*$ :

$$\bar{M}_0(\bar{W}) = (0, 0, -2P x_0) = \bar{M}_0(\text{układu}) = \left(0, 0, -\frac{P}{a^2} 2a^2 \frac{a}{2} + 2Pa - 3Pa\right)$$

$$2P x_0 = \frac{P}{a^2} 2a^2 \frac{a}{2} - 2Pa + 3Pa \Rightarrow$$

$x_0 = a$  – równanie prostej  $l$ .

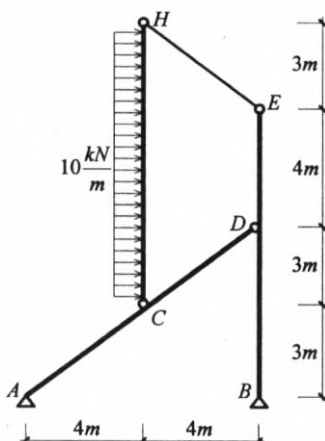
$$\bar{M}_0(\bar{W}^*) = (0, 0, -2P y_0) = \bar{M}_0(\text{układu}^*) = \left(0, 0, -\frac{P}{a^2} 2a^2 a - 2Pa\right)$$

$$2P y_0 = \frac{P}{a^2} 2a^2 a + 2Pa \Rightarrow$$

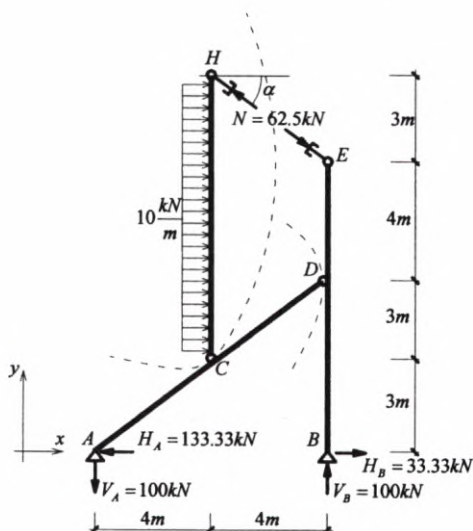
$y_0 = 2a$  – równanie prostej  $l^*$ .

A zatem środek układu ma współrzędne  $O^*(a, 2a)$ .

11. Dla układu prętowego wyznaczyć reakcje podporowe oraz siłę w przęcie  $EH$ .



Zadany problem rozwiążemy korzystając z równań równowagi układu sił.



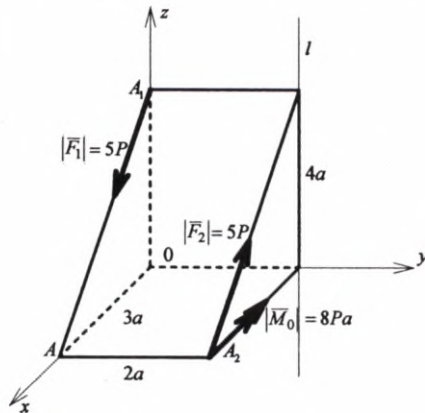
1.  $\Sigma M_A = 0,$   $8 V_B - 10 \cdot 10 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_B = 100 \text{ [kN]}$
2.  $\Sigma Y = 0,$   $-V_A + 100 = 0 \Rightarrow V_A = 100 \text{ [kN]}$
3.  $M_C^{\text{od góry}} = 0,$   $\frac{4}{5} N \cdot 10 - 10 \cdot 10 \cdot 5 = 0 \Rightarrow N = 62,5 \text{ [kN]}$  (pręt ściskany)
4.  $M_D^z \text{ prawej} = 0,$   $6 H_B - \frac{4}{5} \cdot 62,5 \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_B = \frac{100}{3} = 33,33 \text{ [kN]}$
5.  $\Sigma X = 0,$   $-H_A + 10 \cdot 10 + 33,33 = 0 \Rightarrow H_A = 133,33 \text{ [kN]}$

## Sprawdzenie

$$M_C^{od\ do\ l} = 0$$

$$100 \cdot 8 - 100 \cdot 3 - 10 \cdot 10 \cdot 5 = 0, \quad 0 = 0$$

12. Zadany układ sił zredukować, a następnie dołączyć do niego siłę  $\begin{pmatrix} \bar{F}_3 \\ A_3 \end{pmatrix}$  taką, aby łączny układ sił zredukował się do skrętnika o osi środkowej  $l$ .



W przyjętym układzie współrzędnych redukujemy zadany układ sił:

$$\bar{F}_1 = 5P \frac{\overline{A_1 A}}{|\overline{A_1 A}|} = (3P, 0, -4P), \quad \bar{F}_2 = (-3P, 0, 4P), \quad \bar{M}_0 = (-8Pa, 0, 0)$$

$$\bar{S} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{0}$$

$$\bar{M}_A = \bar{F}_2 \times \overline{A_2 A} + \bar{M}_0 = (8Pa, 0, 6Pa) + (-8Pa, 0, 0) = (0, 0, 6Pa)$$

Ponieważ suma układu jest zerowa, a moment niezerowy, to układ sił redukuje się do pary sił o momencie  $\bar{M}_A = (0, 0, 6Pa)$ .

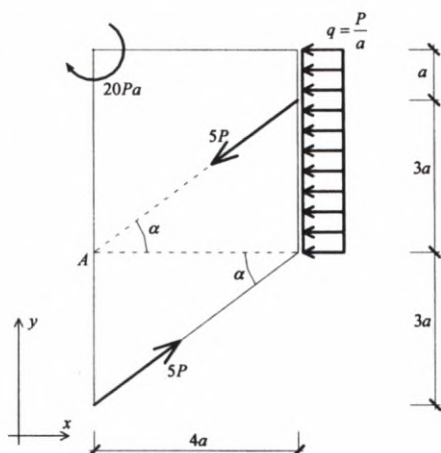
Odpowiadając na drugą część pytania wystarczy zauważyć, że  $\bar{M}_A$  jest równoległy do prostej  $l$  – osi środkowej skrętnika. Zatem wystarczy na tej osi zacząć dowolną siłę równoległą do tej osi:

$$\begin{cases} \bar{F}_3 = (0, 0, P) \\ A_3(0, 2a, 4a) \end{cases}$$

13. Podać do czego redukuje się zbieżny układ sił.

Zbieżny układ sił redukuje się do układu zerowego przy sumie równej zero, zaś do wypadkowej, gdy suma jest niezerowa.

14. Sprawdzić, czy prosta działania wypadkowej zadanego płaskiego układu sił przechodzi przez punkt  $A$ .



Ponieważ moment układu redukującego się do wypadkowej liczony względem dowolnego punktu prostej działania wypadkowej jest równy zero, to wystarczy skorzystać z tego warunku:

$$M_A = -20Pa + \frac{P}{a} \cdot 4a \cdot 2a + 4P \cdot 3a = 0$$

Przez punkt  $A$  przechodzi prosta działania wypadkowej.

15. Znaleźć wartości i wektory własne iloczynu diadycznego  $\bar{u} \otimes \bar{w}$ , gdzie:

$$\bar{u} = (1, -1), \quad \bar{w} = (2, -1)$$

Rozwiązanie:

$$\bar{u} \otimes \bar{w} = (1\bar{e}_1 - 1\bar{e}_2) \otimes (2\bar{e}_1 - 1\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = a_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = 3, \quad I_2 = 0$$

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0$$

Dla  $\lambda_1 = 3 \rightarrow \bar{w}_1 = (p, -p)$

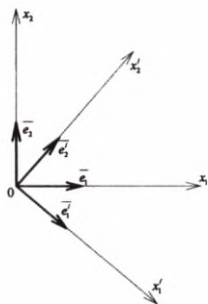
$$\begin{cases} (2-3)w_1 - w_2 = 0 \\ -2w_1 + (1-3)w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow w_2 = -w_1$$

Przyjmując  $w_1 = p \in \mathbb{R} - \{0\}$ , wektor  $\bar{w}_1 = (p, -p)$ , zaś jego wersor  $\bar{e}'_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

Podobnie dla

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow \bar{w}_2 = (p, 2p), \quad \bar{e}'_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\begin{cases} 2w_1 - w_2 = 0 \\ -2w_1 + w_2 = 0 \end{cases} \rightarrow w_2 = 2w_1 = 2p$$



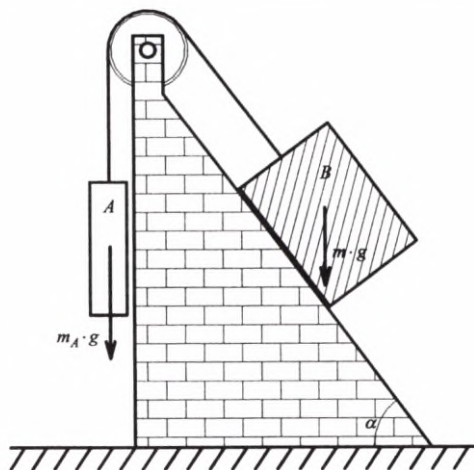
$O, x'_1, x'_2$  – osie własne tensora  $A$ .



16. Podać warunki, przy których dwa układy sił (układ  $A$  i  $B$ ) równoważą się. Warunkami tymi są:

$$\begin{cases} \bar{S}_A = -\bar{S}_B \\ \bar{M}_O(A) = -\bar{M}_O(B) \end{cases}$$

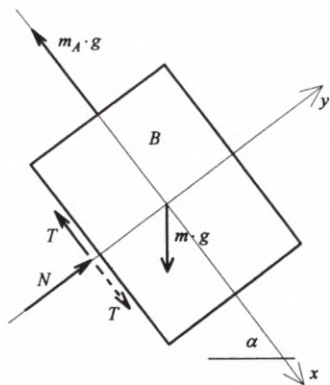
17. Przez krążek przerzucona jest nierozciągliwa lina, do której podwieszono są ciała  $A$  i  $B$  jak na rysunku.



Pomiędzy ciałem  $B$  a klinem  $C$  występuje siła tarcia  $T = \eta N$ . Wyznaczyć ciężar ciała  $A$  w położeniu równowagi, jeżeli ciężar ciała  $B$  jest równy  $mg$ , współczynnik tarcia  $\eta_1 = 0,6$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

### Rozwiązanie

Na ciało  $B$  działają siły:



$$1. \Sigma X = 0, \quad mg \sin 60^\circ - m_A g \pm T = 0$$

$$2. \Sigma Y = 0, \quad N - mg \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{2}$$

$$T = \eta \cdot N = 0,6 \cdot \frac{mg}{2} = 0,3 \, mg$$

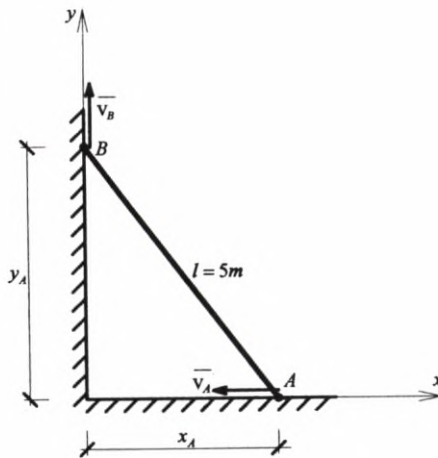
A zatem

$$m_A g = m g \cdot 0,866 \pm 0,3 m g = \left\{ \begin{array}{l} 0,566 m g \\ 1,166 m g \end{array} \right\}$$

**Odpowiedź:**

Układ ciał będzie w równowadze statecznej, gdy  $0,566 m g \leq m_A g \leq 1,166 m g$ .

18. Punkt  $A$  sztywnej drabiny  $AB$  przesuwa się ze stałą prędkością  $v_A = 6 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$ .  
Znaleźć prędkość punktu  $B$  oraz przyspieszenia tych punktów dla  $x_A = 3 \text{ [m]}$ ,  
 $y_B = 4 \text{ [m]}$ .



**Rozwiązanie**

$$\bar{v}_A = \dot{x}_A \bar{e}_x = -6 \bar{e}_x, \quad \bar{a}_A = \ddot{x}_A \bar{e}_x = \bar{0}$$

$$\bar{v}_B = \dot{y}_B \bar{e}_y, \quad \bar{a}_B = \ddot{y}_B \bar{e}_y$$

Równanie więzów:

$$x_A^2 + y_B^2 = 25 \quad / \quad \frac{d}{dt}$$

Różniczkując równanie więzów po czasie:

$$2 x_A \dot{x}_A + 2 y_B \dot{y}_B = 0 \quad / \quad : 2$$

$$x_A \dot{x}_A + y_B \dot{y}_B = 0$$

i podstawiając  $x_A = 3$ ,  $y_B = 4$  otrzymamy:

$$3 \dot{x}_A + 4 \dot{y}_B = 0 \Rightarrow \dot{y}_B = -\frac{3}{4} \dot{x}_A = 4,5 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

Różniczkując jeszcze raz po czasie równanie więzów:

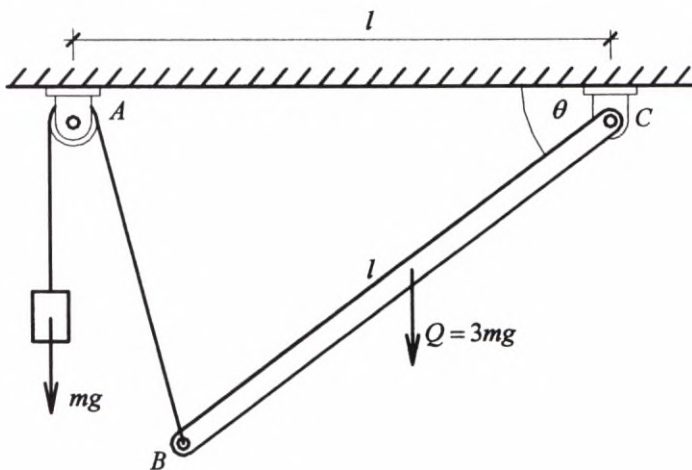
$$\dot{x}_A^2 + x_A \ddot{x}_A + \dot{y}_B^2 + y_B \ddot{y}_B = 0$$

wyznaczamy przyspieszenie punktu B:

$$6^2 + 3 \cdot 0 + 4,5^2 + 4 \ddot{y}_B = 0 \Rightarrow \ddot{y}_B = -14,0625 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$$

**Odpowiedź:**  $\bar{v}_B = 4,5 \bar{e}_y$ ,  $\bar{a}_B = -14,0625 \bar{e}_y$ .

19. Ciężki pręt BC o ciężarze  $Q = 3mg$  w punkcie C jest przegubowo przymocowany do podłoża, zaś do punktu B przymocowana jest lina przerzucona przez krążek, na końcu której powieszony jest ciężar  $mg$ . Wyznaczyć kąt  $\Theta$  w położeniu równowagi układu.



Warunkiem równowagi układu jest, aby  $M_C = 0$ .

$$Q \frac{l}{2} \cos \Theta = mgl \cos \frac{\Theta}{2}$$

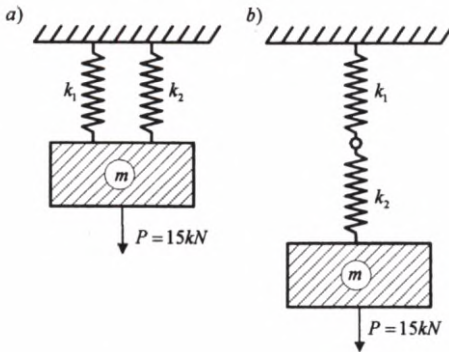
$$\frac{\cos \Theta}{\cos \frac{\Theta}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 \frac{\Theta}{2} - 1}{\cos \frac{\Theta}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 \cos^2 \frac{\Theta}{2} - 2 \cos \frac{\Theta}{2} - 3 = 0$$

Podstawiając  $\cos \frac{\Theta}{2} = u$  mamy

$$6u^2 - 2u - 3 = 0, \quad \Delta = 4 + 72 = 76$$

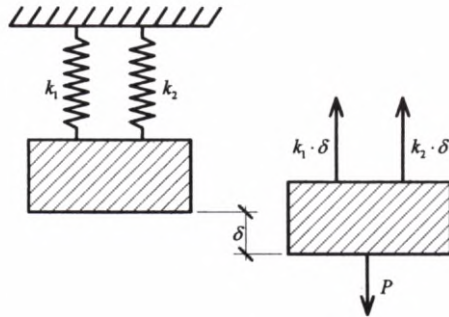
$$u_1 = \cos \frac{\Theta}{2} = \frac{2 + \sqrt{76}}{12} = 0,89315 \Rightarrow \Theta = 53^\circ 28'$$

20. Blok o masie  $m = 50$  kg podwieszony jest na dwóch sprężynach: równoległych (a) i połączonych szeregowo (b). Wyznaczyć zastępczą sztywność sprężyn, częstości drgań własnych, okres drgań oraz maksymalną prędkość i maksymalne przyspieszenie, jeżeli  $k_1 = 6 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$ ,  $k_2 = 8 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$ , amplituda ruchu  $A = 0,5$  [cm] = 0,05 [m],  $P = 15$  [kN].



### Rozwiązanie

a.



$$P = k_1 \delta + k_2 \delta = (k_1 + k_2) \delta = k \delta$$

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 6 + 8 = 14 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right] = 14 \cdot 10^3 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

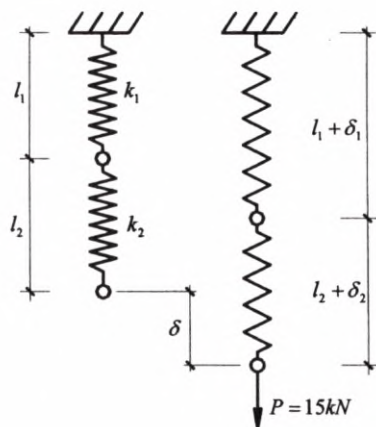
$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{14 \cdot 10^3 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]}{50 \text{ [kg]}} = 280 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right], \quad \omega = 16,733 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,3755 \text{ [sec]}$$

$$v_{\max} = A \omega = 0,05 \text{ [m]} \cdot 16,733 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] = 0,8367 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$a_{\max} = A \omega^2 = 0,05 \text{ [m]} \cdot 280 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right] = 14 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$$

b.



$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{15 \text{ [kN]}}{6 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]} + \frac{15 \text{ [kN]}}{8 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]} = 4,375 \text{ [m]}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{15 \text{ [kN]}}{4,375 \text{ [m]}} = 3,4286 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right] = 3428,6 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{3428,6 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]}{50 \text{ [kg]}} = 68,5714 \left[ \frac{1}{\text{sec}^2} \right],$$

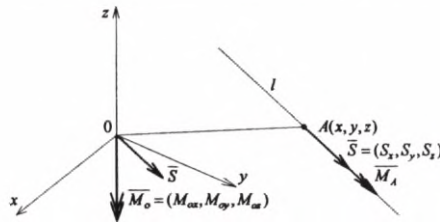
$$\omega = 8,281 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,7588 \text{ [sec]}$$

$$v_{\max} = A \omega = 0,05 \cdot 8,281 = 0,414 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right]$$

$$a_{\max} = A \omega^2 = 0,05 \cdot 68,5714 = 3,4286 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$$

21. Wyprowadzić równanie osi środkowej korzystając z warunku, że wielkość momentu liczonego względem dowolnego jej punktu  $A$  jest minimalna.



$$|\bar{M}_A| = \min$$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{S} \times \overline{OA}$$

$$\bar{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

×

$$\overline{OA} = (M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz})$$

$$\bar{M}_A = (M_{Ox} + S_y z - S_z y, M_{Oy} + S_z x - S_x z, M_{Oz} + S_x y - S_y x)$$

$$\bar{M}_A^2 = (M_{Ox} + S_y z - S_z y)^2 + (M_{Oy} + S_z x - S_x z)^2 + (M_{Oz} + S_x y - S_y x)^2 = \min$$

$$\frac{\partial \bar{M}_A^2}{\partial x} = 2(M_{Oy} + S_z x - S_x z)S_z - 2(M_{Oz} + S_x y - S_y x)S_y = 0 \Leftrightarrow M_{Ay}S_z = M_{Az}S_y$$

$$\frac{\partial \bar{M}_A^2}{\partial y} = 2(M_{Oz} + S_x y - S_y x)S_x - 2(M_{Ox} + S_y z - S_z y)S_z = 0 \Leftrightarrow M_{Az}S_x = M_{Ax}S_z$$

$$\frac{\partial \bar{M}_A^2}{\partial z} = 2(M_{Ox} + S_y z - S_z y)S_y - 2(M_{Oy} + S_z x - S_x z)S_x = 0 \Leftrightarrow M_{Ax}S_y = M_{Ay}S_x$$

A zatem z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji otrzymaliśmy:

$$\frac{M_{Ax}}{S_x} = \frac{M_{Ay}}{S_y} = \frac{M_{Az}}{S_z} = \lambda = \text{const}$$

czyli

$$\bar{M}_A \parallel \bar{S} \text{ lub } \bar{M}_A = \bar{0}$$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{S} \times \overline{OA} = \lambda \bar{S} \quad / \times \bar{S}$$

$$\bar{M}_A \times \bar{S} = \bar{0} = \bar{M}_O \times \bar{S} + (\bar{S} \times \overline{OA}) \times \bar{S} = \bar{0}$$

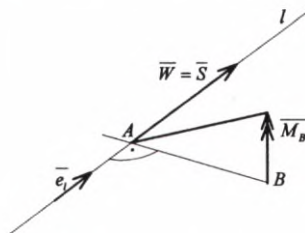
$$\bar{M}_O \times \bar{S} + \bar{S}^2 \overline{OA} - (\bar{S} \cdot \overline{OA}) \bar{S} = \bar{0}$$

$$\overline{OA} = \frac{\bar{S} \times \bar{M}_O}{\bar{S}^2} + \left( \frac{\bar{S} \cdot \overline{OA}}{\bar{S}^2} \right) \bar{S} = \frac{\bar{S} \times \bar{M}_O}{\bar{S}^2} + \lambda \bar{S}, \text{ gdzie } \lambda = \frac{\bar{S} \cdot \overline{OA}}{\bar{S}^2}$$

Ostatecznie:

$$\bar{r}(\lambda) = \frac{\bar{S} \times \bar{M}_O}{\bar{S}^2} + \lambda \bar{S} - \text{równanie osi środkowej.}$$

22. Wykazać, że dla układu sił redukującego się do wypadkowej rzut momentu liczonego względem dowolnego punktu  $B$  na linię  $l$  działania wypadkowej jest równy zeru.

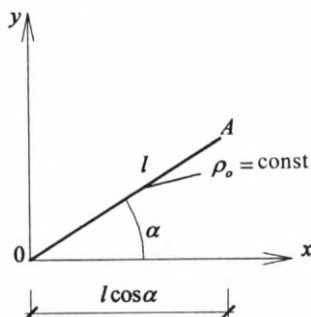


$$\bar{M}_A = \bar{0}, \text{ bo } A \in l$$

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \bar{S} \times \overline{AB}$$

$$\bar{M}_B^l = (\bar{M}_B \cdot \bar{e}_l) \bar{e}_l = \left( \frac{\bar{M}_B \cdot \bar{S}}{\bar{S}^2} \right) \bar{S} = \left( \frac{(\bar{S} \times \overline{AB}) \cdot \bar{S}}{\bar{S}^2} \right) \bar{S} = \bar{0}$$

23. Dla jednorodnego pręta  $OA$  o gęstości  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  wyznaczyć elementy tensora bezwładności w układzie  $Oxy$ .



$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Równanie parametryczne odcinka  $OA$ .

$$C: \begin{cases} x = x \\ y = \operatorname{tg} \alpha x \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad dl = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx$$

$$\begin{aligned} J_x &= \int_c \rho_0 y^2 dl = \rho_0 \int_0^{l \cos \alpha} \operatorname{tg}^2 \alpha x^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx = \frac{\rho_0}{3} l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{\rho_0 l^3}{3} \cos^2 \alpha \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\rho l^3}{3} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

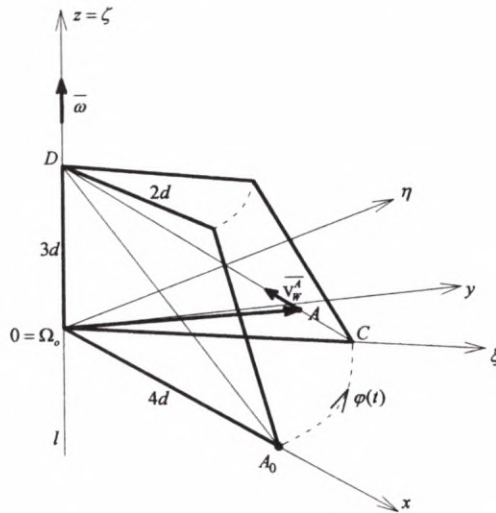
$$\begin{aligned} J_y &= \int_c \rho_0 x^2 dl = \rho_0 \int_0^{l \cos \alpha} x^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx = \rho_0 \frac{l^3 \cos^3 \alpha}{3} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{\rho_0 l^3}{3} \cos^2 \alpha \cos \alpha \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\rho l^3}{3} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_z = J_{xy} &= \int_c \rho_0 x y dl = \rho_0 \int_0^{l \cos \alpha} x^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} dx = \frac{\rho_0 l^3}{3} \cos^3 \alpha \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \rho_0 \frac{l^3}{3} \cos^3 \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \alpha} = \rho_0 \frac{l^3}{3} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\rho_0 l^3}{6} \sin 2\alpha \end{aligned}$$



$$(J_O) = \begin{pmatrix} \rho_O \frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha & -\rho_O \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha \\ -\rho_O \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha & \rho_O \frac{l^3}{3} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

24. Sztywna ramka wiruje wokół prostej  $l$  z prędkością kątową  $\omega = 4t^3$ . Wzdłuż przekątnej  $CD$  porusza się punkt  $A$  z prędkością względną  $|\vec{v}_w^A| = 15t^2$ . W chwili  $t = 0$  punkt  $A$  zajmował położenie  $A_0$ . Wyznaczyć prędkość bezwzględną i przyspieszenie bezwzględne punktu  $A$ .



$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.

Obliczenia w układzie ruchomym związanym z poruszającą się ramką:

$$\omega = \dot{\varphi} = 4t^3 \quad / \quad \int dt$$

$$\varphi(t) = t^4 + \varphi_0, \quad \varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, 4t^3), \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = (0, 0, 12t^2)$$

$$\dot{\bar{\rho}}_A = \bar{v}_w^A = 15t^2 \frac{\overline{CD}}{|CD|} = 15t^2(-4d, 0, 3d) \frac{1}{5d} = (-12t^2, 0, 9t^2) \quad / \int dt$$

$$\bar{\rho}_A = (-4t^3 + C_1, C_2, 3t^3 + C_3)$$

$$\bar{\rho}_A(t=0) = (4d, 0, 0) \Rightarrow C_1 = 4d, C_2 = 0, C_3 = 0$$

$$\bar{\rho}_A = (4d - 4t^3, 0, 3t^3)$$

$$\bar{v}_u^A = \dot{\bar{r}}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A = (0, 0, 4t^3) \times (4d - 4t^3, 0, 3t^3) = (0, 16t^3d - 16t^6, 0)$$

$$\bar{v}_b^A = \bar{v}_w^A + \bar{v}_u^A = (-12t^2, 16t^3d - 16t^6, 9t^2) - (\Omega_0 \xi \eta \zeta)$$

$$\bar{v}_b^A = \begin{Bmatrix} v_{bx}^A \\ v_{by}^A \\ v_{bz}^A \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t^4 & -\sin t^4 & 0 \\ \sin t^3 & \cos t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -12t^2 \\ 16t^3d - 16t^6 \\ 9t^2 \end{Bmatrix} =$$

$$= [-12t^2 \cos t^4 + (16t^6 - 16t^3d) \sin t^4, -12t^2 \sin t^4 +$$

$$+ (16t^3d - 16t^6) \cos t^4, 9t^2] - (Oxyz)$$

$$\bar{a}_w^A = \ddot{\bar{\rho}}_A = (-24t, 0, 18t)$$

$$\bar{a}_c^A = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_w^A = (0, 0, 8t^3) \times (-12t^2, 0, 9t^2) = (0, -96t^5, 0)$$

$$\bar{a}_u^A = \ddot{\bar{r}}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) = \bar{0} + (0, 0, 12t^2) \times (4d - 4t^3, 0, 3t^3) +$$

$$+ (0, 0, 4t^3) \times (0, 16t^3d - 16t^6, 0) = (64t^9 - 64t^6d, 48t^2d - 48t^5, 0)$$

$$\bar{a}_b^A = \bar{a}_w^A + \bar{a}_c^A + \bar{a}_u^A = (64t^9 - 64t^6d - 24t, 48t^2d - 144t^5, 18t) - (\Omega_0 \xi \mu \zeta)$$

$$\bar{a}_b^A : \begin{Bmatrix} a_{bx}^A \\ a_{by}^A \\ a_{bz}^A \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t^4 & -\sin t^4 & 0 \\ \sin t^4 & \cos t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 64t^9 - 64t^6d - 24t \\ 48t^2d - 144t^5 \\ 18t \end{Bmatrix} =$$

$$= [(64t^9 - 64t^6d - 24t) \cos t^4 + (144t^5 - 48t^2d) \sin t^3, (64t^9 - 64t^6d - 24t) \sin t^4 +$$

$$+ (48t^2d - 144t^5) \cos t^4, 18t] - (Oxyz)$$

Sprawdzenie poprawności obliczeń:

$$\bar{r}_A = \bar{\rho}_A$$

$$\begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t^4 & -\sin t^4 & 0 \\ \sin t^4 & \cos t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 4d - 4t^3 \\ 0 \\ 3t^3 \end{Bmatrix} = [(4d - 4t^3) \cos t^4, (4d - 4t^3) \sin t^4, 3t^3]$$

$$\bar{v}_b^A = \ddot{r}_A = [-12t^2 \cos t^4 + (16t^6 - 16t^3d) \sin t^4, -12t^2 \sin t^4 + (16t^3d - 16t^6) \cos t^4, 9t^2]$$

$$\bar{a}_b^A = \ddot{r}_A = [(64t^9 - 64t^6d - 24t) \cos t^4 + (144t^5 - 48t^2d) \sin t^4, 18t]$$

25. Sprawdzić, czy zadana macierz może być macierzą przejścia

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

W macierzy przejścia iloczyn dwóch wierszy (kolumn) równomiennych jest równy jedności, zaś iloczyn dwóch wierszy (kolumn) różnomiennych jest równy zeru.

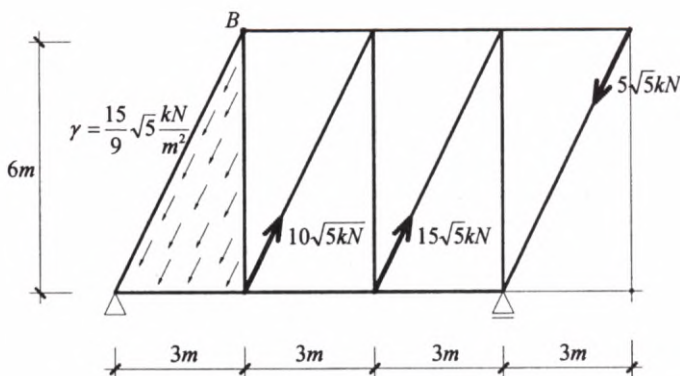
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = \frac{1}{\sqrt{15}} \neq 0$$

Zadana macierz nie jest macierzą przejścia.

## 7.5. ZESTAW EGZAMINACYJNY NR 5

## A — część pisemna

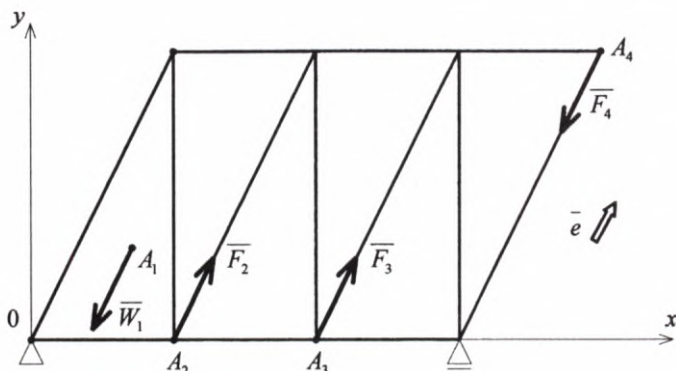
1. Dla równoległego układu sił czynnych, przedstawionego na rys. 7.15, wyznaczyć środek  $O^*$  a następnie zredukować układ sił w  $O^*$  oraz w punkcie  $B$ .



Rys. 7.15

## Rozwiązanie

Obciążenie ciągłe zastępujemy wypadkową i przyjmujemy układ współrzędnych celem przeprowadzenia w nim obliczeń.



Rys. 7.15a

Środek  $O^*$  wyznaczamy ze wzoru:

$$\overline{OO^*} = \frac{W_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2 + F_3 \bar{r}_3 + F_4 \bar{r}_4}{W_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

Obliczamy:

— miary sił względem wersora  $\bar{e} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ :

$$W_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{9} \sqrt{5} \cdot 3 \cdot 6 = -15\sqrt{5} \text{ [kN]}$$

$$F_2 = 10\sqrt{5} \text{ [kN]}, F_3 = 15\sqrt{5} \text{ [kN]}, F_4 = -5\sqrt{5} \text{ [kN]}$$

$$W_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 5\sqrt{5} \text{ [kN]}$$

— iloczyny miar sił i wektorów wodzących:

$$W_1 \bar{r}_1 = W_1 \overline{OA_1} = -15\sqrt{5}(2, 2) = (-30\sqrt{5}, -30\sqrt{5})$$

$$F_2 \bar{r}_2 = F_2 \overline{OA_2} = 10\sqrt{5}(3, 0) = (30\sqrt{5}, 0)$$

$$F_3 \bar{r}_3 = F_3 \overline{OA_3} = 15\sqrt{5}(6, 0) = (90\sqrt{5}, 0)$$

$$F_4 \bar{r}_4 = F_4 \overline{OA_4} = -5\sqrt{5}(12, 6) = (-60\sqrt{5}, -30\sqrt{5})$$

$$W_1 \bar{r}_1 + F_2 \bar{r}_2 + F_3 \bar{r}_3 + F_4 \bar{r}_4 = (30\sqrt{5}, -60\sqrt{5})$$

$$\overline{OO^*} = \frac{30\sqrt{5}(1, -2)}{5\sqrt{5}} = (6, -12)$$

W środku  $O^*$  układ sił redukuje się do wypadkowej  $\bar{W} = 5\sqrt{5} \bar{e} = (5, 10)$  [kN] prostej działania:

$$l: \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = -12 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

— redukcja w punkcie  $B(3, 6)$

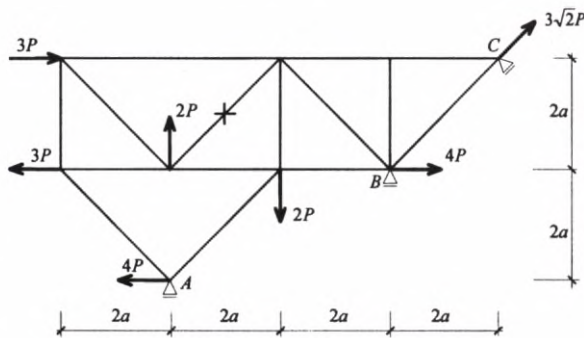
$$\bar{S} = (5, 10)$$

$$\bar{M}_B = \bar{W} \times \bar{O^*B} = (5, 10) \times (-3, 18) = (0, 0, 120)$$

W punkcie  $B$  układ redukuje się do siły  $\bar{b} = \bar{S} = (5, 10)$  zaczepionej w  $B(3, 6)$  i pary sił

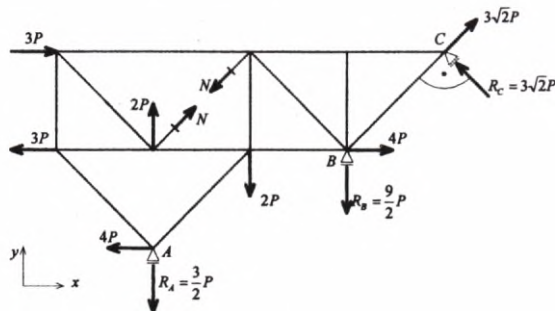
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F} = (-20, 0) \text{ — } \bar{F} = (20, 0) \\ B(3, 6) \quad O(0, 0) \end{array} \right\} \text{ o momencie } \bar{M}_B = (0, 0, 120)$$

2. Dla kratownicy płaskiej wyznaczyć dla zadanego obciążenia siły reakcji podporowych oraz siłę w zaznaczonym przęcie kratownicy.



Rys. 7.16

Siły reakcji obliczymy z równań równowagi



Rys. 7.16a

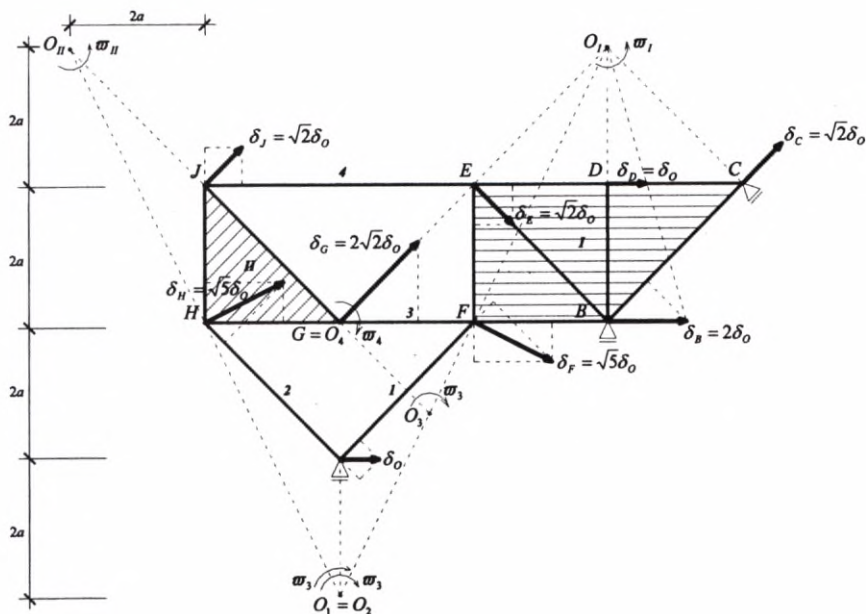
1.  $\Sigma X = 0, 3\sqrt{2}P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - R_C \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad R_C = 3\sqrt{2}P \text{ [kN]}$
2.  $\Sigma M_A = 0, -6Pa - 4Pa - 8Pa - 4R_B + 6P \cdot 6a = 0 \Rightarrow R_B = \frac{9}{2}P \text{ [kN]}$
3.  $\Sigma M_B = 0, -6Pa - 4Pa - 8Pa + 6P \cdot 2a + 4R_A = 0 \quad R_A = \frac{3}{2}P \text{ [kN]}$

Sprawdzenie

$$\Sigma Y = 0, -\frac{3}{2}P - \frac{9}{2}P + 6P = 0, 0 = 0.$$

Siłę w pręcie wyznaczymy z równania zasady prac wirtualnych.

Myślowo usuwamy pręt, a jego działanie zastępujemy siłą  $N$ . Rysujemy plan przemieszczeń wirtualnych.



Rys. 7.17

Rysowanie planu przemieszczeń rozpoczynamy od tarczy I, dla której środek  $O_1$  chwilowego obrotu leży na przecięciu prostych będących liniami działania reakcji  $R_B$  i  $R_C$ . Przyjmując  $\delta_B = 2\delta_0$  z proporcji wyznaczymy  $\delta_C = \sqrt{2}\delta_0$ ,  $\delta_D = \delta_0$ ,  $\delta_E = \sqrt{2}\delta_0$ ,  $\delta_F = \sqrt{5}\delta_0$ .

Na przecięciu linii  $O_1 F$  z linią działania reakcji  $R_A$  leży środek  $O_1$  chwilowego obrotu pręta 1. Znając  $\delta_F = \sqrt{5} \delta_O$  z proporcji wyznaczmy  $\delta_A = \delta_O$ . Znając  $\delta_A = \delta_O$  i  $\delta_F = \sqrt{5} \delta_O$  możemy wyznaczyć  $\delta_H$ .

Rzut  $\delta_F$  na kierunek  $FH$  wynosi  $2 \delta_O$ , zaś rzut  $\delta_A$  na kierunek  $AH$   $\frac{\sqrt{2}}{2} \delta_O$ .

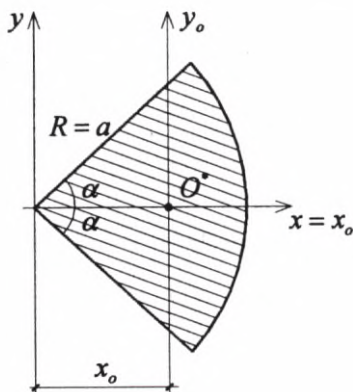
Proste prostopadłe do tych rzutów wyznaczają  $\delta_H = \sqrt{5} \delta_O$ . Rzut  $\delta_H$  na kierunek  $HJ$  i rzut  $\delta_E$  na kierunek  $EJ$  pozwalają wyznaczyć  $\delta_J = \sqrt{2} \delta_O$ . Proste prostopadłe do  $\delta_H$  i  $\delta_J$  przecinają się w punkcie  $O_{II}$  będącym środkiem chwilowego obrotu tarczy II. Zatem  $\delta_G = 2\sqrt{2} \delta_O$ .

Równanie zasady prac wirtualnych:

$$\delta L = 3P \cdot \delta_O - 3P \cdot 2\delta_O - 4P \cdot \delta_O + 2P \cdot 2\delta_O + 2P \cdot \delta_O + 4P \cdot 2\delta_O + \\ + 3\sqrt{2} P \cdot \sqrt{2} \delta_O + 2\sqrt{2} \delta_O \cdot N = 0 \quad \forall \delta_O$$

$$\delta_O (13P + 2\sqrt{2} N) = 0 \Rightarrow N = -\frac{13}{4} \sqrt{2} P \quad [\text{kN}].$$

3. Dla jednorodnego wycinka kołowego o gęstości  $\rho_O = 1$  wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności.



Rys. 7.18

Osie  $x_o, y_o$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, ponieważ przechodzą przez środek masy i  $J_{x_o y_o} = 0$ . Wyznaczamy położenie środka masy:

$$x_o = \frac{S_y}{m} = \frac{2 \sin \alpha \cdot a^3}{3 \alpha a^2} = \frac{2}{3 \alpha} \sin \alpha \cdot a$$



$$m = F = \hat{\alpha} a^2$$

$$S_y = \iint_D 1 \cdot x \, dx \, dy = 2 \int_0^a r^2 \, dr \int_0^\alpha \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} \sin \alpha \cdot \alpha^3$$

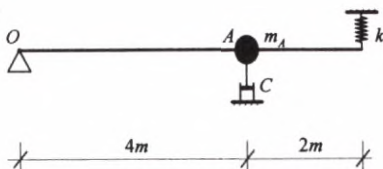
Główne centralne momenty bezwładności  $J_{x_o}$ ,  $J_{y_o}$ :

$$J_{x_o} = J_x = \iint_D 1 \cdot y^2 \, dx \, dy = 2 \int_0^a r^3 \, dr \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{2\hat{\alpha} - \sin 2\alpha}{8} a^4$$

$$J_y = \iint_D 1 \cdot x^2 \, dx \, dy = 2 \int_0^a r^3 \, dr \int_0^\alpha \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{2\hat{\alpha} + \sin 2\alpha}{8} a^4$$

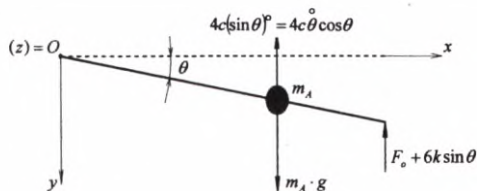
$$J_{y_o} = J_y - m x_o^2 = \frac{a^4}{36\hat{\alpha}} (9\hat{\alpha}^2 + 4\hat{\alpha} \sin 2\alpha + 8 \cos 2\alpha - 8)$$

4. Nieważki sztywny pręt podparty jest przegubowo w punkcie  $O$ , sprężynie w punkcie  $B$  (sprężyna o stałej  $k = 120$  [N/m]) i tłumiąco w punkcie  $A$  (tłumik o stałej tłumienia  $c = 54$  [N sec/m]). Nad tłoczkiem znajduje się masa  $m_A = 4,5$  [kg]. Wyznaczyć drgania tłumiące masy, jeśli dla chwili  $t = 0$ ,  $\Theta(0) = 0,15$  [rad],  $\dot{\Theta}(0) = 0$ .



Rys. 7.19

## Rozwiązanie



Rys. 7.19a

W położeniu równowagi statycznej spełniony jest warunek równowagi sił:

$$\Sigma M_O = 0, m_A g \cdot 4 - F_O \cdot 6 = 0 \Rightarrow F_O = \frac{2}{3} m_A g$$

Dla równowagi dynamicznej zachodzi:

$$\Sigma M_O = J_z^A \ddot{\Theta} \quad (\text{równanie Eulera})$$

$$4m_A g - 4c \dot{\Theta} \cos \Theta - \left( \frac{2}{3} m_A g + 6k \sin \Theta \right) \cdot 6 = m_A 4^2 \ddot{\Theta}$$

Dla małych drgań  $\sin \Theta \cong \Theta$ ,  $\cos \Theta \approx 1$ :

$$16m_A \ddot{\Theta} + 4c \dot{\Theta} + 36k \Theta = 0$$

$$16 \cdot 4,5 m_A \ddot{\Theta} + 216 \dot{\Theta} + 4320 \Theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\Theta} + 3 \dot{\Theta} + 60 \Theta = 0$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, drugiego rzędu, liniowe, jednorodne. Odpowiadające jemu równanie charakterystyczne to:

$$r^2 + 3r + 60 = 0$$

$$\Delta = 9 - 240 = -231, \sqrt{\Delta} = 15,2i$$

$$r_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i7,6$$

$$\Theta(t) = e^{-1,5t} (C_1 \cos 7,6t + C_2 \sin 7,6t)$$

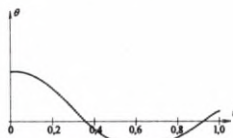
$$\dot{\Theta}(t) = e^{-1,5t} (-1,5 C_1 \cos 7,6t - 1,5 C_2 \sin 7,6t - 7,6 C_1 \sin 7,6t + 7,6 C_2 \cos 7,6t)$$

Stałe  $C_1$ ,  $C_2$  wyznaczamy z warunków początkowych:

$$\begin{cases} \Theta(0) = 0,15 \text{ [rad]} \rightarrow C_1 = 0,15 \text{ [rad]} \\ \dot{\Theta}(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0,03 \text{ [rad]} \end{cases}$$

Ruch drgający tłumiony masy  $m_A$  odbywa się wg zależności:

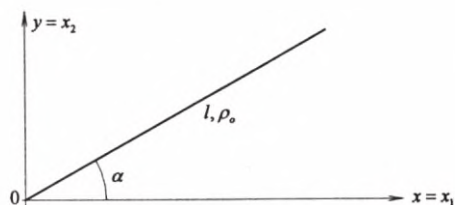
$$\Theta(t) = e^{-1,5t} (0,15 \cos 7,6t + 0,03 \sin 7,6t)$$



Rys. 7.19b

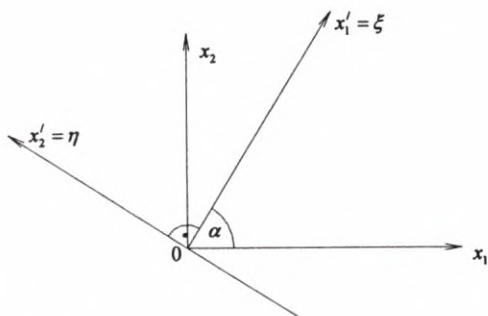
### B – część testowa

1. Dla jednorodnego pręta o gęstości  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  narysować główne osie bezwładności w punkcie  $O$ , a następnie, korzystając z ich własności i rachunku tensorowego, wyznaczyć tensor bezwładności w układzie  $O x_1 x_2$ .



### Rozwiązanie

Osie  $x_1'$  i  $x_2'$  są głównymi osiami bezwładności, ponieważ  $J_{x_1'x_2'} = 0$



Tensor bezwładności:

$$(J_O) = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \rho_0 l^3 \end{pmatrix} \text{ w } O_{x_1'x_2'}$$

Główne centralne momenty bezwładności  $J_\xi = 0$ :

$$J_\eta = \int_0^l \rho_0 \xi^2 d\xi = \rho_0 \frac{\xi^3}{3} \Big|_0^l = \rho_0 \frac{l^3}{3}$$

Tensor bezwładności w  $O x_1 x_2$ :

$$(J_O) = \begin{pmatrix} J_{x_1} & -J_{x_1x_2} \\ -J_{x_2x_1} & J_{x_2} \end{pmatrix}$$

Macierz przejścia:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Prawo transformacyjne dla tensora II rzędu:

$$\begin{pmatrix} J_{x_1} & -J_{x_1 x_2} \\ J_{x_2 x_1} & J_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 l^3/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_0 \frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha & -\rho_0 \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha \\ -\rho_0 \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha & \rho_0 \frac{l^3}{3} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

$$J_{x_1} = \rho_0 \frac{l^3}{3} \sin^2 \alpha, \quad J_{x_2} = \rho_0 \frac{l^3}{3} \cos^2 \alpha, \quad J_{x_1 x_2} = \rho_0 \frac{l^3}{6} \sin 2\alpha$$

2. Wykazać, że siła bezwładności  $\bar{B}$  ciała sztywnego będącego w dowolnym ruchu jest równa sile bezwładności  $\bar{B}$  jego środka masy.

Rozwiązanie

Pęd ciała sztywnego jest równy pędowi jego środka masy:

$$\bar{p} = \iiint_{\Omega} \rho \bar{v} \, dx \, dy \, dz = m \bar{v}_{O^*} = \bar{p}_{O^*}$$

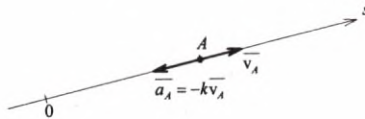
Różniczkując po czasie powyższą równość otrzymamy:

$$-\bar{B} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \iiint_{\Omega} \rho \bar{a} \, d\Omega = m \bar{a}_{O^*} = -\bar{B}_{O^*}$$

A zatem  $\bar{B} = \bar{B}_{O^*}$ .

3. W ruchu prostoliniowym punktu  $A$  zachodzi zależność:

$$\bar{a}_A = -k \bar{v}_A$$



Wyznaczyć, jak zmienia się w czasie jego prędkość, przyspieszenie oraz jaki jest ruch punktu, jeżeli dla  $t = 0$ ,  $s = s_0$  i  $v = v_0$ .

Rozwiązanie

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -k dt$$

Po obustronnym przeliczkowaniu otrzymamy:

$$\ln|v| = -kt + C$$

$$v(t) = e^{-kt+C} = e^C \cdot e^{-kt}$$

Ponieważ  $v(0) = v_0 = e^C$ , to stąd  $v(t) = v_0 e^{-kt} = \frac{ds}{dt}$ , a dalej  $ds = v_0 e^{-kt} dt$

Współrzędna łukowa punktu:

$$s(t) = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + d$$

Stałą  $d$  wyliczymy z warunku:

$$s(0) = s_0 = -\frac{v_0}{k} + d$$

Wynosi ona

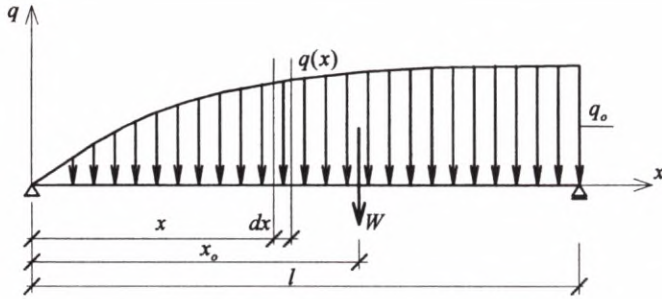
$$d = s_0 + \frac{v_0}{k}$$

Ruch punktu opisany jest równaniem:

$$s(t) = s_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$v(t) = v_0 e^{-kt}, \quad a(t) = -v_0 k e^{-kt}$$

4. Obciążenie ciągle o intensywności  $q(x) = q_0 \sqrt{\frac{x}{l}} \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$ , działające na belkę, zastąpić siłą wypadkową

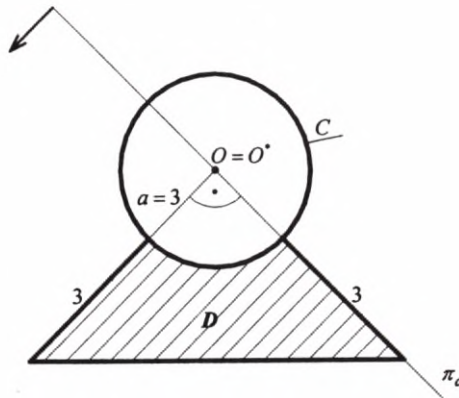


Rozwiązanie

$$W = \int_0^l q(x) dx = \int_0^l q_0 \sqrt{\frac{x}{l}} dx = \frac{2}{3} q_0 l$$

$$x_0 = \frac{\int_0^l q(x) x dx}{W} = \frac{\int_0^l q_0 \sqrt{\frac{x}{l}} x dx}{\frac{2}{3} q_0 l} = \frac{\frac{2}{5} q_0 l^2}{\frac{2}{3} q_0 l} = \frac{3}{5} l$$

5. Dobrać stałą gęstość  $\rho_C$  łuku  $C$  z warunku, aby środek masy zadanego układu pokrywał się z punktem  $O$ .



$$\rho_C = \text{const} = ?$$

$$\rho_D = \rho_O = \text{const}$$

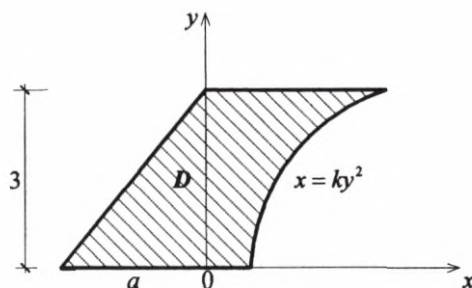
Łuk stanowi  $\frac{3}{4}$  okręgu o promieniu 3.

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy obliczyć moment statyczny układu względem np. płaszczyzny  $\pi_a$  przechodzącej przez środek masy  $O = O^*$  i przyrównać go do zera:

$$S_{\pi_a} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \rho_O\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 - \left(\frac{\pi \cdot 3^2}{4} \rho_O\right) \cdot \frac{4 \cdot 3}{3\pi} + \left(\frac{\pi \cdot 3}{2} \cdot \rho_C\right) \left(\frac{-2 \cdot 3}{\pi}\right) = 0$$

$$(18 \cdot 2 - 9) \rho_O = 9 \rho_C \Rightarrow \rho_C = 3 \rho_O$$

6. Dla płaskiego jednorodnego obszaru o gęstości  $\rho_O = \text{const}$  dobrać wymiar  $a$  i współczynnik  $k$  w równaniu paraboli opisującej część brzegu obszaru  $D$  z warunku, aby w punkcie  $O$  istniała cała płaszczyzna głównych osi bezwładności.



#### • Rozwiązanie

Warunkiem istnienia całej płaszczyzny głównych osi bezwładności jest spełnienie zależności:

$$J_x = J_y \text{ oraz } J_{xy} = 0$$

Obszar dzielimy na dwa podobszary:

- (1)  $D_1$  — trójkąt o wymiarach  $(a \times 3)$ ,
- (2)  $D_2$  — ograniczony prostymi  $y = 0$ ,  $y = 3$ ,  $x = 0$  oraz parabolą  $x = ky^2$

$$J_x = \frac{a \cdot 3^3}{12} + \int_0^3 y^2 dy \int_0^{ky^2} dx = 2,25a + k \frac{3^5}{5} = 2,25a + 48,6k$$

$$J_y = \frac{3 \cdot a^3}{12} + \int_0^3 dy \int_0^{ky^2} x^2 dx = 0,25a^3 + \frac{1}{3} k^3 \frac{3^7}{7} = 0,25a^3 + 104,1429k^3$$

$$J_{xy} = \frac{a^2 \cdot 3^2}{72} + \frac{3 \cdot a}{2} \left(-\frac{a}{3}\right) \cdot 1 + \int_0^3 y dy \int_0^{ky^2} x dx = -0,375a^2 + \frac{1}{2} k^2 \frac{3^6}{6} =$$

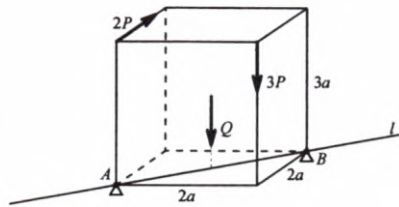
$$= -0,375a^2 + 60,75k^2$$

$$\begin{cases} 2,25 a + 48,6 k = 0,25 a^3 + 104,1429 k^3 \\ 60,75 k^2 - 0,375 a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 162 k^2 \text{ czyli } a = 12,728 k, \end{cases}$$

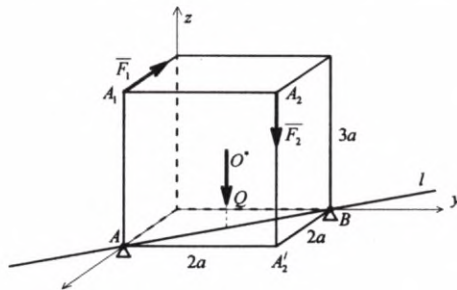
zaś z równania pierwszego

$$k^2 = 0,1246528 \text{ czyli } k = 0,353, a = 4,494$$

7. Sprawdzić, czy układ sił czynnych działających na ciało ciężkie o ciężarze  $\gamma = \frac{P}{a^3}$ , podparte przegubowo w punktach  $A$  i  $B$ , może być w równowadze?



Warunkiem równowagi układu sił działających na ciało unieruchomione w dwóch różnych punktach jest, aby moment tego układu liczony względem prostej przechodzącej przez te punkty był równy zero.



$$Q = \gamma \cdot V = \frac{P}{a^3} \cdot 12 a^3 = 12 P$$

$$\bar{F}_1 = (-2 P, 0, 0)$$

$$\bar{F}_2 = (0, 0, -3 P)$$

$$\bar{Q} = (0, 0, -12 P)$$

$$\bar{M}_l = \left( \frac{\bar{M}_A \cdot \overline{AB}}{AB^2} \right) \overline{AB}$$



$$\bar{M}_A = \bar{F}_1 \times \overline{A_1 A} + \bar{F}_2 \times \overline{A_2 A} + \bar{Q} \times \overline{O^* A}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_1 = (-2P, 0, 0) & \bar{F}_2 = (0, 0, -3P) & \bar{Q} = (0, 0, -12P) \\ \times \overline{A_1 A} = (0, 0, -3a) & \times \overline{A_2 A} = (0, -2a, 0) & \times \overline{O^* A} = \left(a, -a, -\frac{3}{2}a\right) \\ \hline (0, -6Pa, 0) & (-6Pa, 0, 0) & (-12Pa, -12Pa, 0) \end{array}$$

$$\bar{M}_A = (-18Pa, -18Pa, 0)$$

$$\overline{AB} = (-2a, 2a, 0)$$

$$\bar{M}_A \cdot \overline{AB} = 36Pa^2 - 36Pa^2 = 0 \Rightarrow \bar{M}_l = 0$$

Układ sił jest w równowadze, zaś ciało ciężkie w równowadze niestatecznej.

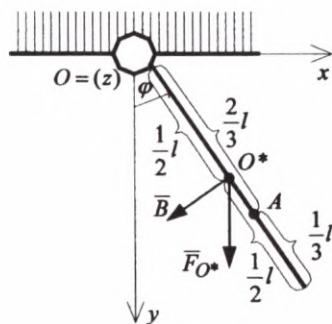
8. Wyznaczyć ruch sztywnego ciężkiego pręta o gęstości  $\rho_0 = \frac{m}{l}$  i długości  $l$  podpartego przegubowo na jednym końcu, jeśli dla  $t = 0$   $\varphi = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ .

Do obliczeń wykorzystać metody:

- zasadę zachowania energii mechanicznej w potencjalnym (grawitacyjnym) polu sił,
- zasadę d'Alemberta,
- równania Lagrange'a II rodzaju,
- zasadę Hamiltona.

$$\bar{F}_{O^*} = (0, mg)$$

$$|\bar{F}_{O^*}| = mg$$



Analizowany pręt posiada jeden stopień swobody, a zatem jedna współrzędna uogólniona  $\varphi$  opisuje jego ruch.

Liczmy kolejno:

— wektory wodzące punktów przyłożenia sił

$$\bar{r}_{O^*}: \begin{cases} x_{O^*} = \frac{l}{2} \sin \varphi(t) \\ y_{O^*} = \frac{l}{2} \cos \varphi(t) \end{cases}$$

$$\bar{v}_{O^*} = \dot{\bar{r}}_{O^*}: \begin{cases} \dot{x}_{O^*} = \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi(t) \\ \dot{y}_{O^*} = -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi(t) \end{cases}$$

$$\bar{r}_A: \begin{cases} x_A = \frac{2}{3} l \sin \varphi(t) \\ y_A = \frac{2}{3} l \cos \varphi(t) \end{cases} \quad \bar{v}_A = \dot{\bar{r}}_A: \begin{cases} \dot{x}_A = \frac{2}{3} l \dot{\varphi} \cos \varphi(t) \\ \dot{y}_A = -\frac{2}{3} l \dot{\varphi} \sin \varphi(t) \end{cases}$$

Uwaga! Wypadkowa siła bezwładności pręta jest zaczepiona w punkcie  $A$ .

— przesunięcia wirtualne punktów przyłożenia sił

$$\bar{\delta}_{O^*} = k \bar{v}_{O^*}, \quad \bar{\delta}_A = k \bar{v}_A, \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad k \dot{\varphi} = \delta \varphi$$

$$\bar{\delta}_{O^*}: \begin{cases} \delta_{x_{O^*}} = \frac{l}{2} \cos \varphi \delta \varphi \\ \delta_{y_{O^*}} = -\frac{l}{2} \sin \varphi \delta \varphi \end{cases} \quad \bar{\delta}_A: \begin{cases} \delta_{x_A} = \frac{2}{3} l \cos \varphi \delta \varphi \\ \delta_{y_A} = -\frac{2}{3} l \sin \varphi \delta \varphi \end{cases}$$

— przyspieszenie środka masy

$$\bar{a}_{O^*} = \dot{\bar{v}}_{O^*}: \begin{cases} \ddot{x}_{O^*} = \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ \ddot{y}_{O^*} = -\frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{cases}$$

— siłę bezwładności

$$\bar{B} = \bar{B}_{O^*} = -m \bar{a}_{O^*}$$

$$\bar{B}: \begin{cases} B_x = -m \ddot{x}_{O^*} = -\frac{ml}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi + \frac{ml}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ B_y = -m \ddot{y}_{O^*} = \frac{ml}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi + \frac{ml}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{cases}$$

— energię kinetyczną pręta

$$E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \rho_0 \frac{l^3}{3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

— potencjał pola sił

$$V = m g y_{O^*} + V_O = m g \frac{l}{2} \cos \varphi + V_O, \quad V_O = \text{const}$$

— energię potencjalną

$$E_p = -V = -\frac{mgl}{2} \cos \varphi - V_0$$

— potencjał kinetyczny

$$W = E_k + V = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{mgl}{2} \cos \varphi + V_0$$

— energię mechaniczną

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{2} \cos \varphi - V_0$$

ad a

$$E_m = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{2} \cos \varphi - V_0 = \text{const} \quad / \quad \frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \quad / \quad \cdot k \in \mathbb{R} - \{0\}, k \dot{\varphi} = \delta \varphi$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} \delta \varphi + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi$$

$$\delta \varphi \left( \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

ad b

$$\delta L = \bar{B} \cdot \bar{\delta}_A + \bar{F}_{O^*} \cdot \bar{\delta}_{O^*} = 0 \quad \forall \bar{\delta}_A \wedge \bar{\delta}_{O^*}$$

$$\begin{aligned} \delta L = & -\frac{ml}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi \cdot \frac{2}{3} l \cos \varphi \delta \varphi + \frac{ml}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cdot \frac{2}{3} l \cos \varphi \delta \varphi + \\ & + \frac{ml}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi \cdot \left( -\frac{2}{3} l \sin \varphi \delta \varphi \right) + \frac{ml}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \cdot \left( -\frac{2}{3} l \sin \varphi \delta \varphi \right) + \\ & + mg \left( -\frac{l}{2} \sin \varphi \delta \varphi \right) = 0 \quad \forall \delta \varphi \end{aligned}$$

$$\delta L = \left( -\frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi} - \frac{m g l}{2} \sin \varphi \right) \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

ad c

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} \right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\frac{m g l}{2} \sin \varphi$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{m g l}{2} \sin \varphi = 0 \quad / : \frac{1}{3} m l^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

ad d

$$J(\varphi(t)) = \int_{t_0}^{t_k} W(\varphi, \dot{\varphi}, t) dt = \int_{t_0}^{t_k} \left( \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m g l}{2} \cos \varphi + V_0 \right) dt$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(t = t_k) = \varphi_k = \text{const} \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + \delta \varphi(t) = \varphi(t) + \alpha \eta(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \eta(t=0) = \eta(t=t_k) = 0$$

$$J(\tilde{\varphi}(t)) = \int_0^{t_k} \left( \frac{1}{6} m l^2 (\dot{\varphi} + \alpha \dot{\eta})^2 + \frac{m g l}{2} \cos(\varphi + \alpha \eta) + V_0 \right) dt$$

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t_k} \left( \frac{1}{6} m l^2 (\dot{\varphi} + \alpha \dot{\eta})^2 + \frac{m g l}{2} \cos(\varphi + \alpha \eta) + V_0 \right) \Big|_{\alpha=0} dt = 0$$

$$\delta J = \int_0^{t_k} \left( \frac{1}{3} m l^2 (\dot{\varphi} + \alpha \dot{\eta}) \dot{\eta} - \frac{m g l}{2} \sin(\varphi + \alpha \eta) \cdot \eta + V_0 \right) \Big|_{\alpha=0} dt = 0$$

$$\delta J = \int_0^{t_k} \left( \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi} \dot{\eta} - \frac{m g l}{2} \sin \varphi \cdot \eta \right) dt = 0$$

$$\int_0^{t_k} \dot{\varphi} \dot{\eta} dt = (\dot{\varphi} \eta) \Big|_0^{t_k} - \int_0^{t_k} \ddot{\varphi} \eta dt = - \int_0^{t_k} \ddot{\varphi} \eta dt$$

$$\delta J = - \int_0^{t_k} \left( \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{m g l}{2} \sin \varphi \right) \eta dt = 0 \quad \forall \eta$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{m g l}{2} \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Dla małych wychyleń  $\sin \varphi \cong \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Oznaczamy  $\frac{3}{2} \frac{g}{l} = k^2$

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$$

$$\varphi(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -k C_1 \sin(kt) + k C_2 \cos(kt)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

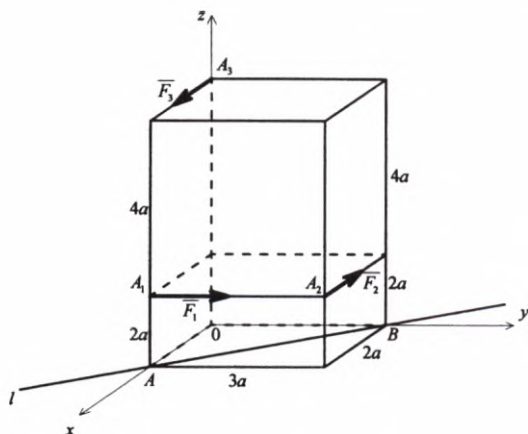
$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\omega}_0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{\omega}_0}{k}$$

Ostatecznie  $\varphi(t) = \frac{\dot{\omega}_0}{k} \sin(kt)$ .

9. Do zadanego układu sił działających na ciało sztywne dołączyć siłę  $\begin{pmatrix} \bar{F}_4 \\ A_4 \end{pmatrix}$  taką, aby łączny układ sił redukował się do wypadkowej o prostej działania  $l$ .

$$|\bar{F}_1| = 4P$$

$$|\bar{F}_2| = |\bar{F}_3| = P$$



W przyjętym układzie współrzędnych wyznaczamy współrzędne sił i punktów ich zaczepienia:

$$\bar{F}_1 = (0, 4P, 0) \quad \bar{F}_2 = (-P, 0, 0) \quad \bar{F}_3 = (P, 0, 0) \quad \bar{F}_4 = (F_x, F_y, F_z)$$

$$A_1(2a, 0, 2a) \quad A_2(2a, 3a, 2a) \quad A_3(0, 0, 6a) \quad A_4(x, y, z)$$

Suma łącznego układu:

$$\bar{S}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = (F_x, F_y + 4P, F_z)$$

musi być współliniowa z wektorem  $\bar{b} \parallel \overline{AB}$ :

$$\bar{S}^* = \lambda \bar{b} = (-2\lambda, 3\lambda, 0)$$

Z równości tej odczytujemy:

$$F_x = -2\lambda, \quad F_y = 3\lambda - 4P, \quad F_z = 0$$

Moment łącznego układu sił liczony względem punktu należącego do prostej  $l$ , np.  $A$ :

$$\bar{M}_A = \bar{F}_1 \times \overline{A_1A} + \bar{F}_2 \times \overline{A_2A} + \bar{F}_3 \times \overline{A_3A} + \bar{F}_4 \times \overline{A_4A}$$

jest równy zeru.

$$\begin{array}{ccc} \bar{F}_1 = (0, 4P, 0) & \bar{F}_2 = (-P, 0, 0) & \bar{F}_3 = (P, 0, 0) \\ \times \overline{A_1 A} = (0, 0, -2a) & \times \overline{A_2 A} = (0, -3a, -2a) & \times \overline{A_3 A} = (0, 0, -6a) \\ \hline & & (0, 6Pa, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \bar{F}_4 = (-2\lambda, 3\lambda - 4P, 0) \\ \times \overline{A_4 A} = (2a - x, -y, -z) \\ \hline (-3\lambda z + 4Pz, -2\lambda z, 2\lambda y - 6\lambda a + 3\lambda x + 8Pa - 4Px) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_A &= (-3\lambda z + 4Pz - 8Pa, -2\lambda z + 4Pa, 11Pa - 4Px + 3\lambda x + \\ &+ 2\lambda y - 6\lambda a) = \bar{0} \end{aligned}$$

Przyrównując współrzędne  $\bar{M}_A$  do zera otrzymujemy:

$$\begin{cases} -3\lambda z + 4Pz = 8Pa \\ -2\lambda z + 4Pa = 0 \\ -4Px + 3\lambda x + 2\lambda y - 6\lambda a = -11Pa \end{cases} \rightarrow \lambda z = 2Pa$$

Z równania pierwszego:

$$4Pz = 8Pa + 6Pa = 14Pa \Rightarrow z = \frac{7}{2}a \quad \lambda = \frac{4}{7}P$$

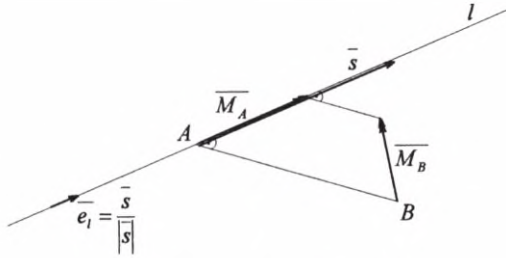
Z równania trzeciego mamy:

$$16x - 8y - 53a = 0 \Rightarrow A_4 \left( 2a, \frac{21}{8}a, \frac{7}{2}a \right)$$

**Odpowiedź:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_4 = \left( -\frac{8}{7}P, -\frac{16}{7}P, 0 \right) \\ A_4 \left( \frac{9}{2}a, \frac{19}{8}a, \frac{7}{2}a \right) \end{array} \right\}$$

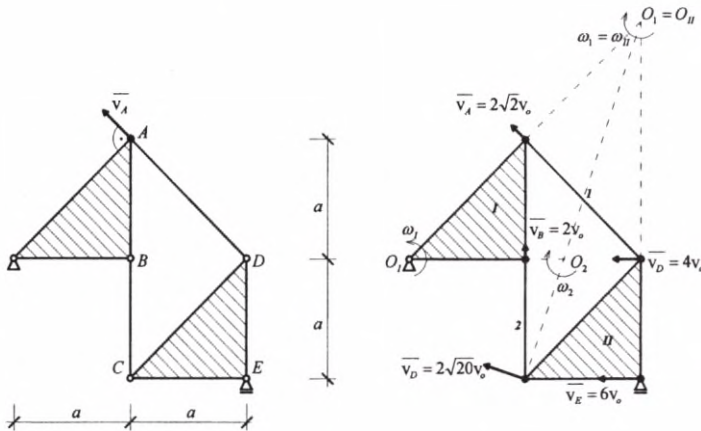
10. Wykazać, że dla układu sił redukującego się do skrętnika rzut momentu liczonego względem dowolnego punktu  $B$  na oś środkową jest równy momentowi  $\bar{M}_A$  liczonemu względem dowolnego punktu osi środkowej.



$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{S} \times \vec{AB}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_B^l &= (\vec{M}_B \cdot \vec{e}_l) \vec{e}_l = \left( \frac{\vec{M}_B \cdot \vec{S}}{S^2} \right) \vec{S} = \left( \frac{\vec{M}_A \cdot \vec{S} + (\vec{S} \times \vec{AB}) \cdot \vec{S}}{S^2} \right) \vec{S} = \left( \frac{\vec{M}_A \cdot \vec{S}}{S^2} \right) \vec{S} = \\ &= (\vec{M}_A \cdot \vec{e}_l) \vec{e}_l = \vec{M}_A \end{aligned}$$

11. W pewnej chwili ruchu sztywnego płaskiego układu prędkość  $\vec{v}_A$  punktu A ma wielkość równą  $|\vec{v}_A| = 2\sqrt{2} v_0$ . Wyznaczyć i narysować dla tej chwili prędkości punktów B, C, D, E.



Środek obrotu tarczy I znajduje się w punkcie  $O_1$  (podpora przegubowa). Prędkość kąta:

$$\omega_I = \frac{|\vec{v}_A|}{\sqrt{2}a} = \frac{2\sqrt{2} v_0}{a\sqrt{2}} = \frac{2}{a} v_0 \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right]$$

$$v_B = \omega_I a = 2 v_0$$



Środek chwilowego obrotu  $O_1$  pręta 1 leży na przecięciu linii  $O_1A$  oraz  $ED$ :

$$\omega_1 = \frac{|\bar{v}_A|}{|O_1A|} = \frac{2\sqrt{2}v_o}{\sqrt{2}a} = \frac{2v_o}{a}$$

$$v_D = \omega_1 \cdot 2a = 4v_o$$

Środek chwilowego obrotu tarczy II pokrywa się z punktem  $O_1$ . Zatem

$$v_E = \omega_{II} \cdot 3a = 6v_o$$

$$v_D = \omega_{II} \cdot \sqrt{10}a = 2\sqrt{10}v_o$$

Środek chwilowego obrotu pręta 2 leży na przecięciu linii  $O_1B$  oraz  $CO_{II}$ .

12. Punkt materialny o masie  $m$  porusza się pod wpływem siły ciężkości  $mg$  oraz siły oporu  $kz^2$ .

Warunki początkowe są następujące:

$$\begin{cases} z(t=0) = 0 \\ \dot{z}(t=0) = v_o \end{cases}$$

Wyznaczyć max przemieszczenie punktu  $A$  i pracę po trajektorii ruchu od chwili  $t_0 = 0$  do  $t_k = 2 \text{ sec}$ , dla której  $v_k = 0$ .

Korzystamy z prawa ruchu (II zasada Newtona):

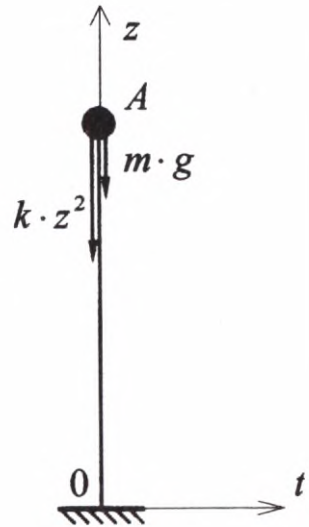
$$m\ddot{z} = -mg - kz^2$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{k}{m}z^2, \quad \dot{z} = v$$

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt}\dot{z} = \frac{d}{dt}v = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz} = -\left(g + \frac{k}{m}z^2\right)$$

$$v dv = -\left(g + \frac{k}{m}z^2\right) dz \quad / \int$$

$$\frac{v^2}{2} = -z\left(g + \frac{k}{3m}z^2\right) + C$$



Z warunków początkowych wynika, że  $C = \frac{v_0^2}{2}$ :

$$v^2 = v_0^2 - 2z\left(g + \frac{k}{m}z^2\right)$$

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2z\left(g + \frac{k}{m}z^2\right)}$$

Obliczamy  $z$  dla  $v_k = 0$ :

$$0 = v_0^2 - 2gz - \frac{2k}{m}z^3 \Leftrightarrow z^3 + \frac{mg}{k}z - \frac{mv_0^2}{2k} = 0$$

Podstawiamy:

$$z = y - \frac{mg}{k} \cdot \frac{1}{3y}$$

a otrzymamy równanie:

$$y^3 - \left(\frac{mg}{3ky}\right)^3 - \frac{m}{2k}v_0^2 = 0$$

Jeżeli teraz za  $y^3$  podstawimy  $x$ , to ostatnie równanie przejdzie w równanie kwadratowe:

$$x^2 - \frac{m}{2k}v_0^2x - \left(\frac{mg}{3k}\right)^3 = 0, \text{ dla którego } \Delta = \frac{m^2}{4k^2}v_0^4 + 4\left(\frac{mg}{3k}\right)^3$$

$$x_{1,2} = \frac{m}{4k}v_0^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$$

Wracając przez przyjęte podstawienia do  $z$  otrzymujemy szukane  $z_{\max} = z_k$ :

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{m}{4k}v_0^2 + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}} - \left(\sqrt[3]{\frac{m}{4k}v_0^2 - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}} \cdot \frac{3k}{mg}\right)^{-1}$$

Praca po trajektorii punktu jest równa:

$$L_{t_0, t_k} = E_k(t_k) - E_k(t_0) = \frac{m}{2} v_k^2 - \frac{m}{2} v_0^2 = -\frac{m}{2} v_0^2$$

13. Sprawdzić, czy zadane pole sił jest polem potencjalnym, jeśli tak, to wyznaczyć potencjał pola, energię potencjalną i obliczyć pracę od punktu  $A$  do  $B$ .

$$\vec{F} = (9x^2 \ln x - 2xy^3, 1 - 3x^2y^2, 3z^2 - 1)$$

$$A(1, 0, 2), B(e, 2, 0)$$

Sprawdzamy warunki Schwartza:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} = -6xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} P = 9x^2 \ln x - 2xy^3 = \frac{\partial V}{\partial x} & / \int dx \\ Q = 1 - 3x^2y^2 = \frac{\partial V}{\partial y} \\ R = 3z^2 - 1 = \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = \int 9x^2 \ln x dx - x^2 y^3 + \varphi(y, z) = 3x^3 \ln x - x^3 - x^2 y^3 + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -3x^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 - 3x^2 y^2 \quad / \int dy$$

$$\varphi(y, z) = y + \psi(z)$$

$$V(x, y, z) = 3x^3 \ln x - x^3 - x^2 y^3 + y + \psi(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{d\psi}{dz} = 3z^2 - 1 \quad / \int dz$$

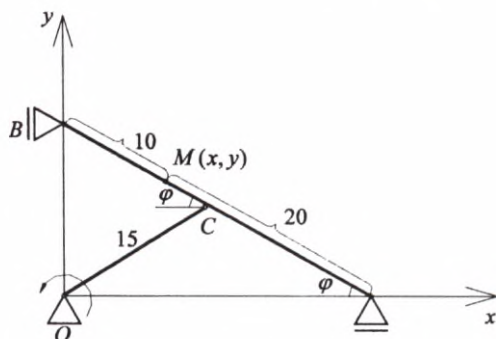
$$\psi(z) = z^3 - z + V_0$$

$$V(x, y, z) = 3x^3 \ln x - x^3 - x^2 y^3 + y + z^3 - z + V_0$$

$$E_p = -V = -3x^3 \ln x + x^3 + x^2 y^3 - y - z^3 + z - V_0$$

$$L_{AB} = V_B - V_A = (3e^3 - e^3 - 8e^2 + 2 + V_0) - (-1 + 8 - 2 + V_0) = 2e^3 - 8e^2 - 3$$

14. Sztywny pręt  $AB$  poruszany jest przez korbę  $OC$ . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $M$  pręta  $AB$ , jeżeli  $\varphi(t) = 3t^2$  [rad],  $|\overline{AC}| = |\overline{CB}| = |\overline{OC}| = 15$  [cm],  $|\overline{AM}| = 20$  [cm].



Rozwiązanie

$$\vec{r}_M : \begin{cases} x_M(t) = 10 \cos(3t^2) \\ y_M(t) = 20 \sin(3t^2) \end{cases}$$

$$\vec{v}_M : \begin{cases} \dot{x}_M(t) = -60t \sin(3t^2) \\ \dot{y}_M(t) = 120t \cos(3t^2) \end{cases}$$

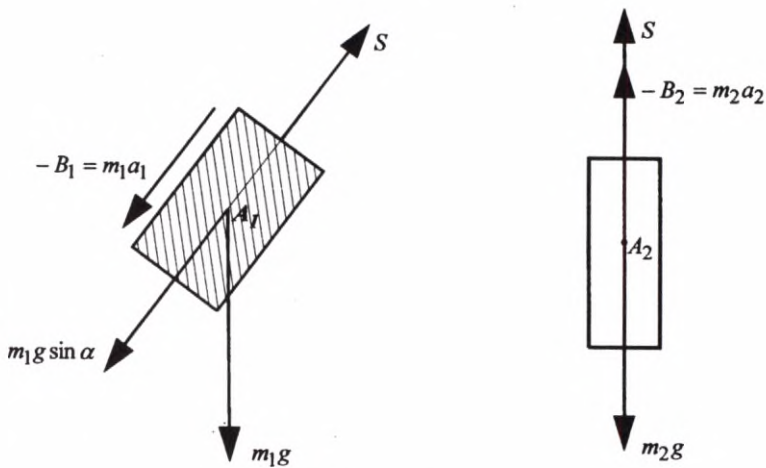
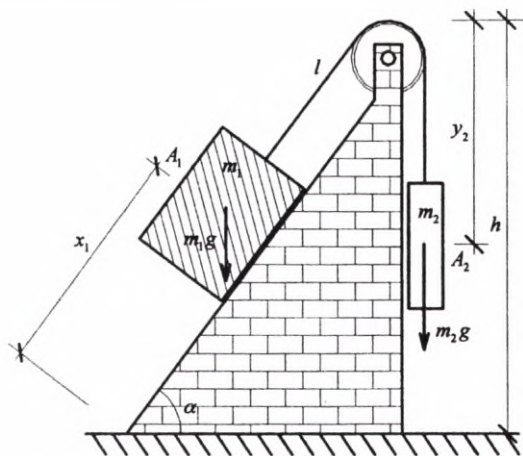
$$\vec{a}_M : \begin{cases} \ddot{x}_M(t) = -60 \sin(3t^2) - 360t^2 \cos(3t^2) \\ \ddot{y}_M(t) = 120 \cos(3t^2) - 720t^2 \sin(3t^2) \end{cases}$$

15. Na końcach nierozciągliwej nici (o długości  $l$ ), przerzuconej przez krążek umocowany w narożu klina, podwieszono są masy  $m_1$  i  $m_2$ . Wyznaczyć przyspieszenie obu mas i naciąg nici.

Dane:  $m_1, m_2, l, H, a$ .

Równanie więzów:

$$x_1 + l - y_2 = \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}_2, \quad \ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \quad \text{czyli} \quad a_1 = a_2$$



$$m_2 g = S + m_2 a_2$$

$$m_1 g \sin \alpha + m_1 a_1 = S$$

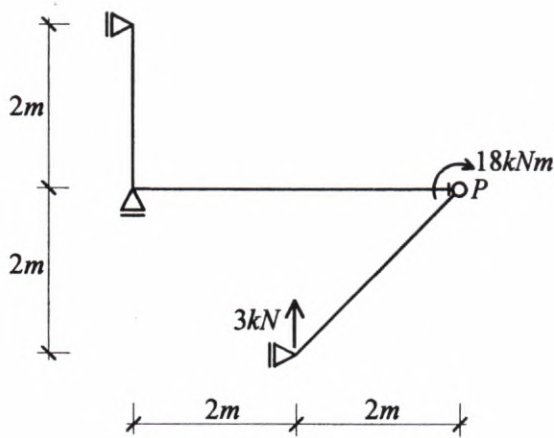
$$m_2 g - m_2 a_2 = m_1 g \sin \alpha + m_1 a_1$$

$$(m_1 + m_2) a_1 = m_2 g - m_1 g \sin \alpha$$

$$a_1 = a_2 = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}$$

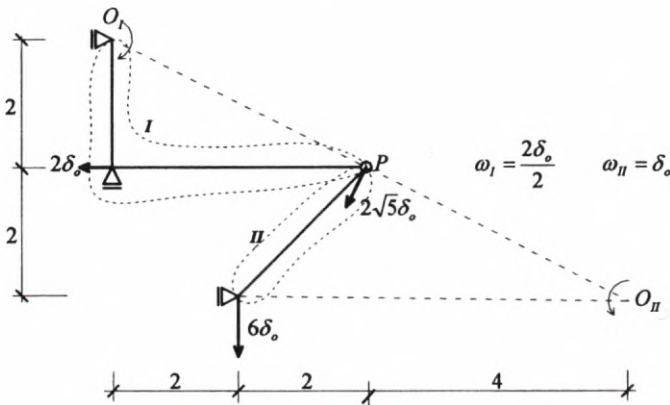
$$S = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \alpha)$$

16. Sprawdzić, czy układ sił działających na sztywny układ prętowy jest w równowadze.



### Rozwiązanie

Przedstawiony układ prętowy składa się z dwóch tarcz połączonych wspólnym przegubem  $P$ . Rysujemy plan przemieszczeń.



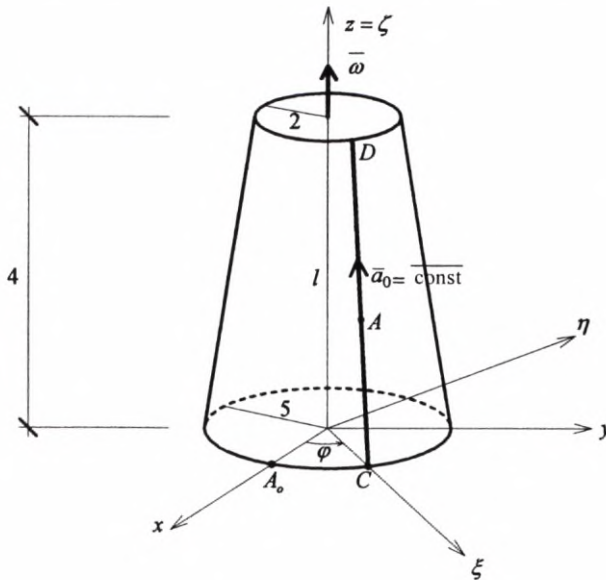
Piszemy równanie zasady prac wirtualnych:

$$\delta L = 18 \omega_I - 3 \cdot 6 \delta_0 = \delta_0 (18 - 18) = 0 \quad \forall \delta_0$$

Zadany układ sił jest w równowadze, zaś układ prętowy w równowadze niestatecznej.

17. Stożek ścięty obraca się wokół osi  $l$  z prędkością kątową  $\omega = 2t \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ .

Wzdłuż wyżłobionego rowka na poboczniccy porusza się punkt ze stałym przyspieszeniem  $\bar{a}_0$  względem stożka. Obliczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne punktu w chwili  $t$ , jeżeli w chwili początkowej punkt ruchomy zajmował położenie  $A_0$  i miał prędkość względną równą zeru.



$$|\bar{a}_0| = 5 \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$$

$$\bar{a}_w^A = a_0 \frac{\overline{CD}}{|CD|} = \left( -\frac{3}{5} a_0, 0, \frac{4}{5} a_0 \right) = (-3, 0, 4) \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$$

$$\bar{a}_w^A = \ddot{\rho}_A = \dot{\bar{v}}_w^A = (-3, 0, 4) / \int dt$$

$$\bar{v}_w^A = (-3t + C_1, C_2, 4t + C_3)$$

$$\bar{v}_w^A(t=0) = \bar{0} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

$$\bar{v}_w^A = \dot{\rho}_A = (-3t, 0, 4t) \left[ \frac{\text{m}}{\text{sec}} \right] / \int dt$$

$$\bar{\rho}_A = \left( -\frac{3}{2}t^2 + d_1, d_2, 2t^2 + d_3 \right) [\text{m}]$$

$$\bar{\rho}_A(t=0) = (5, 0, 0) \Rightarrow d_1 = 5, d_2 = 0$$

$$\bar{\rho}_A(t) = \left( 5 - \frac{3}{2}t^2, 0, 2t^2 \right)$$

$$\dot{\varphi} = \omega = 2t \quad \int dt$$

$$\varphi(t) = t^2 + \varphi_0$$

$$\varphi(t=0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$\varphi(t) = t^2 \quad [\text{rad}]$$

$$\bar{r}_A = \dot{\bar{\rho}}_A$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t^2 & -\sin t^2 & 0 \\ \sin t^2 & \cos t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 - \frac{3}{2}t^2 \\ 0 \\ 2t^2 \end{Bmatrix} = \\ &= \left[ \left( 5 - \frac{3}{2}t^2 \right) \cos t^2, \left( 5 - \frac{3}{2}t^2 \right) \sin t^2, 2t^2 \right] \end{aligned}$$

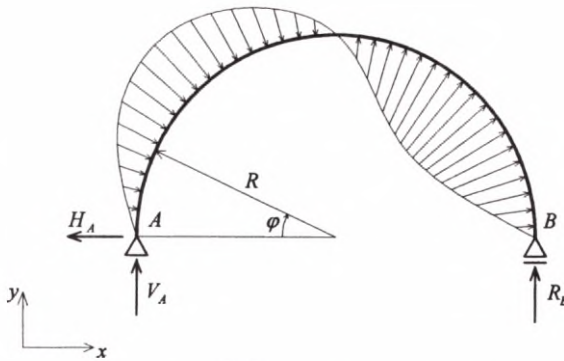
$$\bar{v}_b^A = \dot{\bar{r}}_A = [-3t \cos t^2 + (3t^3 - 10t) \sin t^2, -3t \sin t^2 + (10t - 3t^3) \cos t^2, 4t]$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_b^A = \ddot{\bar{r}}_A &= [(15t^2 - 10) \sin t^2 + (6t^4 - 20t^2 - 3) \cos t^2, (10 - 15t^2) \cos t^2 + \\ &+ (6t^4 - 20t^3 - 3) \sin t^2, 4] \end{aligned}$$

18. Łuk kołowy obciążony jest obciążeniem ciągłym promieniowym o intensywności  $q(\varphi) = q_0 \sin 2\varphi$ . Wyznaczyć siły reakcji podporowych.

Ponieważ obciążenie zewnętrzne jest asymetryczne, to reakcje  $V_A$  i  $V_B$  muszą być zerowe. Z sumy rzutów na oś  $X$  wyznaczmy reakcję  $H_A$ .



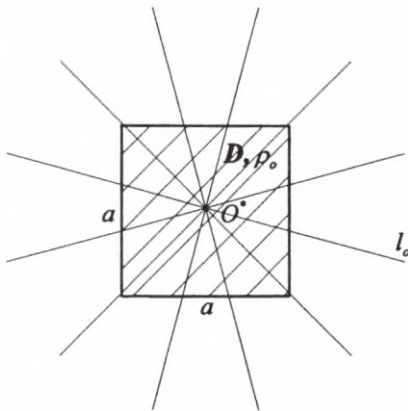


$$-H_A + \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} q(\varphi) \cos \varphi R d\varphi = 0$$

$$H_A = 2R \int_0^{\pi/2} q_0 \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$H_A = 2R q_0 \int_0^{\pi/2} 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -4R q_0 \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} R q_0 \quad [\text{kN}]$$

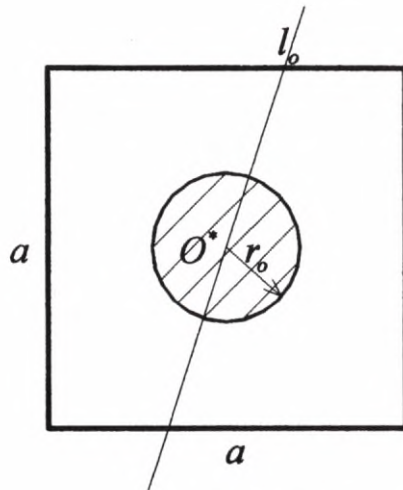
19. Czym jest elipsa bezwładności dla jednorodnego kwadratu o boku  $a$  i gęstości  $\rho_0 = \text{const}$ ?



Główne centralne osie bezwładności  
(cała płaszczyzna)

Ponieważ elipsa bezwładności jest opisana na głównych centralnych osiach bezwładności, to dla kwadratu jest ona kołem o promieniu

$$r_0 = \sqrt{\frac{J_{l_0}}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_0 a^4}{12 \rho_0 a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$



$$J_{l_0} = m r_0^2 = \rho_0 a^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{6} a \right)^2 = \rho_0 \frac{a^4}{12}$$

20. Podać własności macierzy przejścia i na tej podstawie uzupełnić brakujące elementy dla zadanej macierzy przejścia; narysować obrocone względem siebie układy współrzędnych dla podanej macierzy oraz obliczyć iloczyn skalarny wektorów  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$ , przy czym:

$$\bar{a} = 2\bar{e}_x + \bar{e}_z$$

$$\bar{b} = 2\sqrt{3}\bar{e}_z - \sqrt{2}\bar{e}_\eta + \sqrt{6}\bar{e}_\zeta$$

$$\mathbf{a} = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

### Rozwiązanie

Elementami macierzy przejścia są cosinusy kątów zawartych pomiędzy osiami obu obroconych względem siebie układów współrzędnych:

$$\alpha_{ij} = \cos(\hat{x}_i', x_j), \quad -1 \leq \alpha_{ij} \leq 1$$

Iloczyn dwóch wierszy (kolumn) jednoimiennych jest równy jedności, zaś iloczyn dwóch wierszy (kolumn) różnoimiennych równy zero. Wyznacznik z macierzy przejścia jest równy  $\pm 1$ :

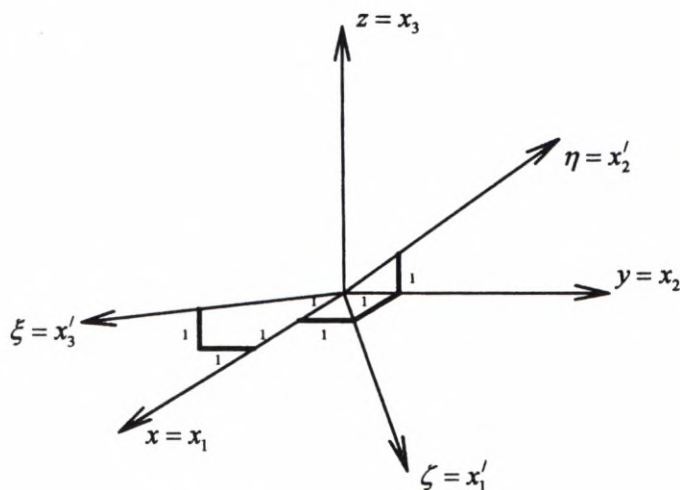
$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \quad \alpha_{31} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + (\alpha_{32})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \alpha_{12} + 0 \cdot \alpha_{22} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \alpha_{13}^2 = 1 \Rightarrow \alpha_{13} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\begin{Bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\bar{b} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{6})$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} = 6$$

Obliczenia w układzie  $Oxyz$ :

$$\bar{a} = (2, 0, 1)$$

$$\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{Bmatrix} = (4, 0, -2)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) = 6$$

21. Omówić jedną z wybranych metod numerycznego wyznaczenia ruchu punktu, jeżeli:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F(s, \dot{s}, t), & t_0 \leq t \leq t_k \\ s(t=0) = \hat{s}_0 \\ \dot{s}(t=0) = \hat{v}_0 \end{cases}$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{m} F(s, \dot{s}, t) = f(s, \dot{s}, t)$$

Ponieważ  $\dot{s} = v$ , to  $\ddot{s} = \dot{v}$ .

A zatem mamy:

$$\begin{cases} \dot{s} = v \\ \dot{v} = f(s, v, t) \end{cases}$$

Jest to układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} s(t_0 = 0) = \hat{s}_0 \\ \dot{s}(t_0 = 0) = \hat{v}_0 \end{cases}$$

Pochodne zastępujemy ilorazem różnicowym stosując np. krok w przód:

$$\dot{s}_i \cong \frac{s_{i+1} - s_i}{\Delta t} = v_i \Rightarrow s_{i+1} = s_i + \Delta t v_i$$

$$\dot{v}_i \cong \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = f(s_i, v_i, t_i) \Rightarrow v_{i+1} = v_i + \Delta t f(s_i, v_i, t_i)$$

Wykonujemy kolejne kroki obliczeń:

$$i = 0$$

$$s_1 = \hat{s}_0 + \Delta t \hat{v}_0$$

$$v_1 = \hat{v}_0 + \Delta t f(\hat{s}_0, \hat{v}_0, t_0), t_0 = 0$$

$$i = 1$$

$$s_2 = s_1 + \Delta t v_1$$

$$v_2 = v_1 + \Delta t f(s_1, v_1, t_1), t_1 = t_0 + \Delta t = \Delta t$$

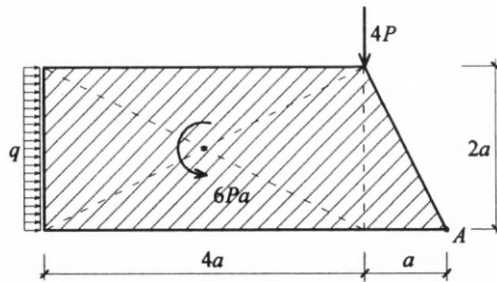
$$i = 2$$

$$\vdots$$

$$i = N$$

Obliczenia kończymy dla czasu  $t = t_k$ .

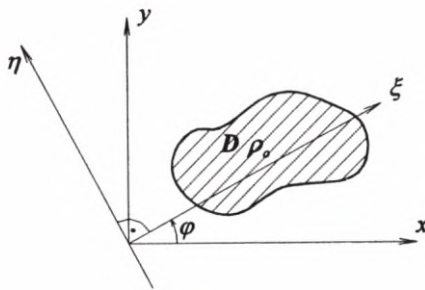
22. Dla jakiej wartości  $q = ?$  zadany płaski układ sił redukuje się do wypadkowej w punkcie  $A$ ?



Aby zadany układ sił zredukował się w punkcie  $A$  do wypadkowej, to jego moment liczony względem tego punktu przy niezerowej sumie musi być równy zero:

$$M_A = 4Pa + 6Pa - q \cdot 2a \cdot a = 0 \Rightarrow q = 5 \frac{P}{a}$$

23. Korzystając z własności głównych osi bezwładności wyznaczyć dla obszaru płaskiego kąty określające położenie głównych osi bezwładności w punkcie  $O$ .



Osie  $\xi, \eta$  – główne osie bezwładności

$$J_\xi = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - J_{xy} \sin 2\varphi = J_{\min}$$

Warunkiem istnienia ekstremum funkcji jest zerowanie pierwszej pochodnej:

$$\frac{dJ_\xi}{d\varphi} = -2J_x \cos \varphi \sin \varphi + 2J_y \sin \varphi \cos \varphi - 2J_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$(J_y - J_x) \sin 2\varphi = 2J_{xy} \cos 2\varphi$$

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}$$

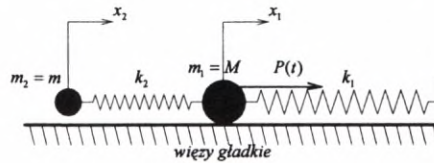
$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}$$

Ten sam wynik uzyskany z warunku, że moment dewiacji  $J_{\xi\eta}$  w układzie głównych osi bezwładności jest równy zeru:

$$J_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(J_y - J_x) \sin 2 \varphi + J_{xy} \cos 2 \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}$$

24. Układ złożony z dwóch mas połączonych sprężynami wykonuje małe drgania pod wpływem siły wymuszającej  $P(t) = P_0 \cos \Theta t$ . Wyznaczyć amplitudy tych mas i podać warunek, przy którym drgania masy  $M$  całkowicie zanikają.



Analizowany układ posiada dwa stopnie swobody, zatem dwie współrzędne uogólnione  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  opisują jego ruch (drgania). Zapiszmy prawo ruchu dla obu mas:

$$\begin{cases} M \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + P_0 \cos(\Theta t) \\ m \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

a dalej

$$\begin{cases} M \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = P_0 \cos(\Theta t) \\ m \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

W przypadku małych drgań ruch mas jest harmoniczny:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\Theta t) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\Theta t) \end{cases}$$

zatem

$$\ddot{x}_1 = -\Theta^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\Theta^2 x_2$$

i po podstawieniu do układu równań otrzymamy:

$$\begin{cases} (-M\Theta^2 + k_1 + k_2)A_1 \cos(\Theta t) - k_2 A_2 \cos(\Theta t) = P_0 \cos(\Theta t) \\ -k_2 A_1 \cos(\Theta t) + (-m\Theta^2 + k_2)A_2 \cos(\Theta t) = 0 \end{cases}$$

Zatem na poszukiwane amplitudy drgań mamy następujący układ równań:

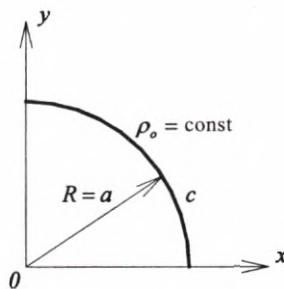
$$\begin{cases} (-M\Theta^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2 A_2 = P_0 \\ -k_2 A_1 + (-m\Theta^2 + k_2)A_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{P_0(-m\Theta^2 + k_2)}{(-m\Theta^2 + k_1 + k_2)(-m\Theta^2 + k_2) - k_2^2}$$

$$A_2 = \frac{P_0 k_2}{(-M\Theta^2 + k_1 + k_2)(-m\Theta^2 + k_2) - k_2^2}$$

Ruch masy  $M$  zanika dla  $A_1 = 0$ , czyli  $k_2 = m\Theta^2$ . Własność tę wykorzystuje się w budowie maszyn dla tłumienia drgań.

25. Dla łuku jednorodnego o gęstości  $\rho_0 = \text{const}$ , będącego czwartą częścią okręgu, wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności:



$$c: \begin{cases} x = a \cos \varphi & x' = -a \sin \varphi \\ y = a \sin \varphi & y' = a \cos \varphi \\ dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = a d\varphi \end{cases}$$



Wyznaczamy środek masy:

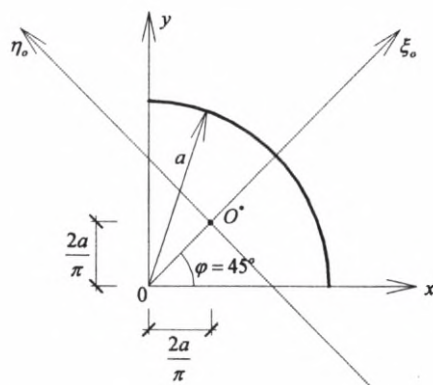
$$x_O = y_O = \frac{S_x}{m}$$

$$m = \rho_O \frac{\pi a}{2}$$

$$S_x = \int_c \rho_O y dl = \rho_O a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \rho_O a^2$$

$$x_O = y_O = \frac{2\rho_O a^2}{\rho_O \pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

Zadany układ posiada oś symetrii  $y = x$ , do której należy środek masy:



Osie  $\xi_O$  i  $\eta_O$  są głównymi centralnymi osiami bezwładności, ponieważ  $J_{\xi_O \eta_O} = 0$ .  
Obliczenie momentów bezwładności i momentu dewiacji w układzie  $Oxy$ :

$$J_x = J_y = \int_c \rho_O x^2 dl = \rho_O \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^2 \varphi d\varphi = \rho_O a^3 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3}{4} \rho_O$$

$$J_{xy} = \int_c \rho_O x y dl = \rho_O a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \rho_O a^3$$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$J_{\xi_o} = J_x \cos^2 45^\circ + J_y \sin^2 45^\circ - J_{xy} \sin 90^\circ = \frac{\pi a^3}{4} \rho_o - \frac{1}{2} a^3 \rho_o = \frac{\rho_o}{4} (\pi - 2) a^3 = J_{\max}$$

$$J_{\eta_o} = \frac{\rho_o}{4} (\pi + 2) a^3 - \rho_o \frac{\pi a}{2} \cdot \left( \frac{2a}{\pi} \cdot \sqrt{2} \right)^2 = \frac{\rho_o}{4} \left( \pi + 2 - \frac{16}{\pi} \right) a^3 = J_{\min}$$

## LITERATURA

- [1] E. Antoniuk, A. Kiedrzyński: *Zadania z mechaniki ogólnej*. PWN, Warszawa 1960.
- [2] S. Banach: *Mechanika*. PWN, Warszawa 1956.
- [3] F.P. Beer, E.R. Johnston jr: *Vector Mechanics for Engineers*. McGraw-Hill Publishing Company, 1988.
- [4] G. Białkowski: *Mechanika klasyczna*. Biblioteka Fizyki, t. 2. PWN, Warszawa 1984.
- [5] W. Bogucki, M. Żybartowicz: *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*. Arkady, Warszawa 1984.
- [6] R. Gutowski: *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa 1971.
- [7] A. Higdon, W.B. Stiles, A.W. Davis, Ch.R. Eves: *Engineering Mechanics-Statics and Dynamics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976.
- [8] E. Karaśkiewicz: *Zarys teorii wektorów i tensorów*. PWN, Warszawa 1971.
- [9] M. Łunc, E.A. Szaniawski: *Zarys mechaniki ogólnej*. PWN, Warszawa 1959.
- [10] D.J. McGill, W.W. King: *Engineering Mechanics-Statics and Dynamics*, PWS-Kent Publishing Company, Boston 1989.
- [11] Z. Osiński: *Mechanika ogólna*, cz. 1 i 2, PWN, Warszawa 1987.
- [12] S. Piasecki, J. Rzyśko: *Mechanika*. PWN, Warszawa 1972.
- [13] A. Piekara: *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa 1961.
- [14] W. Rubinowicz, W. Królikowski: *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa 1955.
- [15] B. Skalmierski: *Mechanika teoretyczna*. Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1971.
- [16] B. Skalmierski: *Mechanika – podstawy mechaniki klasycznej*, Wyd. Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1998.
- [17] Ch.E. Smith: *Applied Mechanics Statics*. Copyright 1982 by John Wiley & Sons.
- [18] Ch.E. Smith: *Applied Mechanics Dynamics*. Copyright 1982 by John Wiley & Sons.
- [19] V.M. Starzhinskii: *An Advanced Course of Theoretical Mechanics*. Mir Publishers, Moscow 1982.
- [20] S.P. Strelkov: *Mechanics*. Mir Publishers, Moscow 1978.
- [21] G.K. Susłow: *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa 1960.
- [22] T. Trajdos: *Matematyka dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1974.
- [23] K. Zarankiewicz: *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa 1967.







Cena zł 29,00

Biblioteka Politechniki Krakowskiej

**W-78464**



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000229755

ISBN 83-7242-386-5

ISBN 978-83-7242-386-3