IBLIOTHEK
NN UND A. WITTING

NG

EINFÜHRUNG IN DIE INFINITESIMAL-RECHNUNG

N B. G. TEUBNER LEIPZIG-BERLIN

Mathematische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementarmathematik für Schule und Leben

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**

Oberlehrer an der Oberrealschule zu Barmen | Prof. am Gymnasium zum Heiligen Kreuz zu Dresden

In Kleinoktavbändchen kart. je M. —.80.

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an der Mathematik im weitesten Sinne des Wortes haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren und zu unterrichten. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung und eingehendere Bearbeitung solcher elementarer Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes mathematisches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser — ohne zu große Anforderungen an seine mathematischen Kenntnisse zu stellen — in neue Gebiete der Mathematik einführen.

Bisher sind erschienen:

1. E. Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme bei den Kulturvölkern in alter und neuer Zeit. 1912.
2. H. Wieleitner, Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Mit 10 Figuren. 1911.
3. W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Mit 44 Figuren. 1912.
4. O. Meißner, Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Mit 6 Figuren. 1912.
5. H. E. Timerding, Die Fallgesetze. Mit 20 Figuren. 1912.
6. M. Zacharias, Einführung in die projektive Geometrie. Mit 18 Figuren. 1912.
7. H. Wieleitner, Die 7 Rechnungsarten mit allgem. Zahlen. 1912.
8. P. Meth, Die Theorie der Planetenbewegung. 1912.
9. A. Witting, Infinitesimalrechnung. 1912.

In Vorbereitung befinden sich:

E. Bentel, Die Quadratur des Kreises. | M. Winkelmann, Der Kreisel.
W. Lietzma … raphische Darstellungen.
edersatz. … ekürztes Rechnen.
A. Schreib … M. Gebhardt, Bei-
dem Land … ichte der Mathematik.
H. Wieleitn … eometr. Konstruktion.

IX. 12.

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON **W. LIETZMANN** UND **A. WITTING**
9

EINFÜHRUNG IN DIE INFINITESIMAL-RECHNUNG

VON

DR. ALEXANDER WITTING

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZUM HEILIGEN KREUZ
IN DRESDEN

MIT ZWEI PORTRÄTTAFELN
130 BEISPIELEN UND AUFGABEN
UND MIT 40 FIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT.

Der Zweck dieses Bändchens ist, in leichtverständlicher und zu eignem Arbeiten anregender Weise die ersten Schritte in das heute in weitem Maße unentbehrliche Gebiet anzuleiten. Von graphischen Methoden ausgehend und immer auf sie gestützt wurden die Differentialquotienten der rationalen, irrationalen, goniometrischen und zyklometrischen Funktionen abgeleitet. Das Integral wird zuerst als Grenzwert einer Summe eingeführt. Vermieden sind allenthalben die Differentiale, was nach den langjährigen Erfahrungen des Verfassers im Schulunterrichte nicht nur angängig, sondern sogar von Vorteil ist. Der Logarithmus und die Exponentialfunktion sind einem besonderen Bändchen dieser Sammlung vorbehalten.

Eine neue Bezeichnung drängte sich dem Verfasser auf, die diejenigen Stellen einer Kurve kurz und deutlich trifft, in denen die Funktion ein Maximum oder Minimum hat. Die Engländer nennen solche Punkte turning points, Herr Scheffers spricht in seinem sehr verbreiteten Lehrbuche von Gipfel- und Talpunkten; wir haben hier das Wort Wagepunkt gebildet, dem sich dann folgerichtig die Bezeichnung Wendewagepunkt anschließt.

Dem Bändchen sind beigegeben die Bilder der beiden großen Erfinder der Infinitesimalrechnung Leibniz (21. VI. 1646–14. XI. 1716) und Newton (4. I. 1643–31. III. 1727). Unter Newtons Bild konnte ein Teil seiner langen und eindrucksvollen Grabinschrift aus der Westminster-Abtei zu London gesetzt werden; die Grabinschrift von Leibniz in der Neustädter Kirche in Hannover lautet: Ossa Leibnitii (die Gebeine von Leibniz).

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Erstes Kapitel.

§ 1. Über die Abstraktion. Linie und Punkt als Grenzbegriffe . . . 1
§ 2. Die Kurve . . . 3
§ 3. Die abgeleitete Kurve . . . 7
§ 4. Die Tangente . . . 10

Zweites Kapitel.

§ 5. Arithmetische Grenzprozesse . . . 13
§ 6. Die Geschwindigkeit . . . 17
§ 7. Der Differentialquotient . . . 20

Drittes Kapitel.

§ 8. Die Differentiation von x^n und deren geometrische Verwertung . . . 22
§ 9. Die Summe und der konstante Faktor . . . 26
§ 10. Produkt und Quotient . . . 27
§ 11. Die Funktion einer Funktion; implizite Funktionen . . . 30

Viertes Kapitel.

§ 12. Anwendung auf Kurven. Maxima und Minima . . . 34
§ 13. Der Wendepunkt . . . 41
§ 14. Die physikalische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten . . . 43

Fünftes Kapitel.

§ 15. Die Differentiation der goniometrischen Funktionen . . . 44
§ 16. Inverse Funktionen. Differentiation der zyklometrischen Funktionen . . . 49
§ 17. Interpolation und Fehlerberechnung . . . 52

Sechstes Kapitel.

§ 18. Ein arithmetischer Hilfssatz . . . 54
§ 19. Anwendungen. Das bestimmte Integral . . . 56
§ 20. Ein goniometrischer Hilfssatz und seine Anwendung . . . 59
§ 21. Der Zusammenhang zwischen dem Differentialquotienten und dem Integral . . . 60
§ 22. Das Integral als Funktion. Konstruktion der Integralkurve . . . 63

Siebentes Kapitel.

§ 23. Das unbestimmte Integral . . . 66
§ 24. Integrationsregeln . . . 68
§ 25. Einige Beispiele zur partiellen Integration . . . 69

Anhang.

Aufgaben zur Differentialrechnung . . . 72
Aufgaben zur Integralrechnung . . . 73

ERSTES KAPITEL.

§ 1. ÜBER DIE ABSTRAKTION. LINIE UND PUNKT ALS GRENZBEGRIFFE.

Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften des menschlichen Geistes ist die Fähigkeit der *Abstraktion*, die durch die Erziehung von klein auf gebildet und geübt wird. *Abstrahieren* heißt wörtlich übersetzt *abziehen;* abstrahieren bedeutet *von sinnlich Wahrnehmbarem Begriffe bilden. Begriff* kommt von *begreifen* her, bezeichnet also ursprünglich etwas, das man anfassen, mit den Händen betasten kann. Nach und nach hat aber das Wort seine Bedeutung völlig gewandelt und bezeichnet seit langem etwas, das man nur *mit dem Verstande „erfassen" kann.* Unsere deutsche Sprache ist, wie nur eine, plastisch, und wenn man nur genau aufpaßt, namentlich aber wenn man sie historisch-etymologisch betrachtet, so enthüllen sich ungeahnte Schönheiten; da ergeht es einem manchmal, wie wenn man ein Stereoskopbild durch ein Stereoskop ansieht — es wird plötzlich plastisch, es erhält Tiefe, klar und greifbar deutlich steht alles da.

Jede Wissenschaft ist abstrakt, aber bei keiner tritt dies so deutlich schon in den ersten Anfängen zutage, wie bei der Mathematik. Versetzen wir uns einen Augenblick zurück in jene Zeit, in der uns die Anfangsgründe der Geometrie gelehrt wurden. Da wurde vielleicht von einem Körper ausgegangen, sagen wir von einem Würfel. Welche Menge von Abstraktionen ist schon nötig, um den Begriff des Würfels aufzufassen! Wir müssen zunächst von dem Stoffe absehen, aus dem das *Modell* des Würfels angefertigt war; ob aus Holz oder Stein oder Papier, ob massiv oder hohl, das gilt gleich. Es handelt sich nur um die *Form.* Aber wie unvollkommen war die Form des vor uns aufgestellten Modelles, wenn wir genau zusahen!

Wir gelangten dann zum Begriffe der Fläche, insbesondere der Ebene, der unbegrenzten Ebene, der Linie, insbesondere der Geraden, der unbegrenzten Geraden — welche Menge von Abstraktionen gab es da zu leisten!

Überlegen wir uns jetzt diese Abstraktionen genauer, es wird uns von wesentlichem Nutzen für unsere weiteren Zwecke sein. Wir legen ein Stück Papier glatt hin und denken uns dabei ein Stück einer Ebene; wir abstrahieren also von den Unebenheiten des Tisches und des Papieres. Nun ziehen wir mit einer Reißfeder eine Gerade — wir abstrahieren von den Unebenheiten des Lineals und von der Dicke des Striches. Wie kann man das letztere tun? *Gewiß nicht auf einmal*, sondern etwa so: Wir stellen die Reißfeder zunächst so ein, daß wir einen dicken Strich erhalten, dann stellen wir sie enger und ziehen einen feineren Strich. Betrachten wir nun den feineren Strich durch eine Lupe, so mag er uns vielleicht ebenso dick erscheinen wie der erste. Jetzt können wir uns einen dritten Strich herstellen, oder auch nur denken, der durch die Lupe gesehen ebenso dick erscheint wie der zweite ohne Lupe . . .

Man erkennt wohl leicht, was die drei Punkte am Ende des vorigen Absatzes bedeuten sollen. Der soeben geschilderte Prozeß soll immer weiter fortgesetzt gedacht werden; immer stärkere Vergrößerungen des optischen Hilfsmittels führen uns zu immer feineren Strichen, die Strichdicke nimmt immer mehr ab, bis schließlich die körperlich unvorstellbare, ideale Gerade begrifflich aufgefaßt werden kann. Wenn wir diese dann beim geometrischen Zeichnen durch einen Strich, einen Streifen von irgendeiner Dicke, die wir durch $\mathfrak{d}$ bezeichnen wollen, darstellen, so können wir uns etwa die ideale Gerade als Mittellinie dieses Streifens vorstellen, die nur eine einzige Dimension entsprechend der Länge des Streifens hat.

Denselben Denkprozeß haben wir auch bei jeder krummen Linie auszuführen. Stellen wir also zunächst einmal fest: der mathematische Begriff der idealen Linie kann nur erfaßt werden, wenn wir in unserer Vorstellung die Strichbreite $\mathfrak{d}$ der „körperlichen Linie“ auf dem Papier sich fortgesetzt verringern lassen, bis sie endlich unter jede irgendwie angebbare noch so kleine Größe sinkt. Die ideale mathematische Linie ist demnach eine nur begrifflich festgesetzte **Grenze**, der sich die körperliche Linie immer mehr nähert, je kleiner die Strichbreite $\mathfrak{d}$ wird. Wir sagen daher:

Die Linie ist ein Grenzbegriff.

Jetzt gehen wir zum Punkt. Wie zeichnen wir einen Punkt? Nun, wir haben auch hier zu unterscheiden, wie oben, zwischen dem „körperlichen Punkt" und dem wahren, d. h. dem idealen oder mathematischen Punkt. Zeichnen wir zwei (körperliche) Gerade, die sich schneiden, so haben die beiden Streifen von etwa der gleichen Breite $\mathfrak{d}$ einen Rhombus gemein, den wir als körperlichen Punkt bezeichnen wollen und der uns den mathematischen Punkt versinnlicht. Denken wir uns wieder die idealen Linien als Mittellinien der Streifen, so erhalten wir den idealen Punkt als Mittelpunkt des Rhombus.

Aber noch einen andern Weg können wir einschlagen, um zum Punkte zu gelangen. Wir denken uns einen kleinen Kreis, dessen Durchmesser $\mathfrak{d}$ sei und lassen nun das $\mathfrak{d}$ immer kleiner werden, bis es endlich kleiner wird als jede noch so kleine irgendwie definierbare Größe; dann zieht sich die Kreisfläche, wie ein verdunstender Tropfen Äther, immer mehr zusammen und nähert sich einer Grenze, die rein begrifflich von jeder Ausdehnung abstrahiert.

Die Abstraktion zeigt uns

Der Punkt ist ein Grenzbegriff.

§ 2. DIE KURVE.

Jeder kennt selbstschreibende (registrierende) Vorrichtungen an gewissen Apparaten, wie Thermometer, Barometer usw. Bei einem solchen Barometer z. B. wird ein System von Hebeln durch den Luftdruck in einer gewissen Stellung gehalten. Ändert sich der Luftdruck, so ändert sich auch die Stellung des Hebelsystems. Das Ende des letzten Hebels bewegt sich dabei etwa vertikal auf und nieder, je nachdem der Luftdruck steigt oder fällt und zwar um Strecken, die den Luftdrucksdifferenzen proportional sind. Jenes Hebelende ist mit einem Schreibstift versehen und ein gespanntes Papier bewegt sich horizontal mit konstanter Geschwindigkeit vorbei. Ist der Luftdruck konstant, so erhalten wir eine horizontale Linie als „*Diagramm*“. Steigt der Luftdruck, so wird die Linie im Diagramm ebenfalls steigen, und zwar um so steiler, je schneller der Luftdruck steigt. Sinkt der Luftdruck, so senkt sich auch die Linie im Diagramm (Fig. 1).

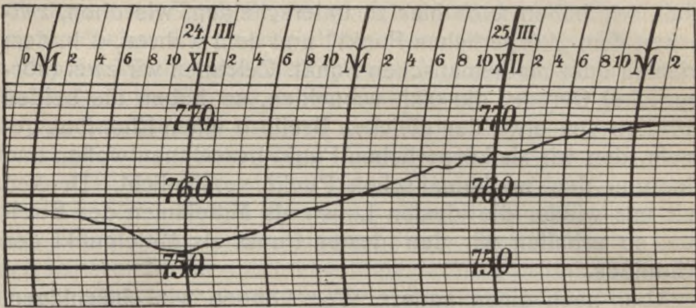


Fig. 1.

Wir sprachen immer von einer *Linie*; was ist das nun für eine Linie? Offenbar das, was wir oben körperliche Linie nannten, und wir können uns wohl auch hier die Idealisierung, den Grenzprozeß vorstellen. Aber da kommen wir in eine bemerkenswerte Schwierigkeit hinein, die eine genauere Betrachtung verdient.

Nehmen wir ein Stück Millimeterpapier; bezeichnen wir die vertikalen stärkeren Geraden etwa mit den Stundenzahlen 6, 2, 10; 6, 2, 10; usw. der aufeinanderfolgenden Tage 24. März, 25. März usw.; versehen wir endlich die horizontalen stärkeren Linien mit den Zahlen 750, 760, 770 usw. Wenn wir nun täglich dreimal zu den angegebenen Zeiten ein Barometer ablesen und den erhaltenen Wert in jenes Netz auf dem Papier eintragen, so ergibt sich statt einer Tabelle eine Reihe von Punkten (Fig. 2). Indem wir diese Reihe mit den

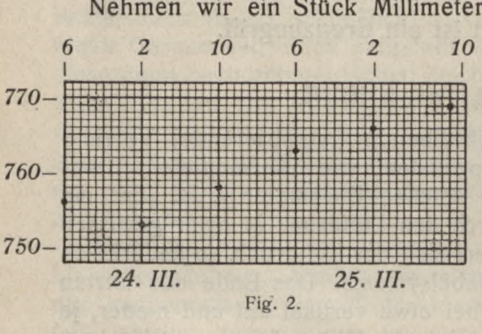


Fig. 2.

Augen überfliegen, fühlen wir uns genötigt, eine Linie hinzuzudenken, auf der die Punkte liegen, und wir werden diese Linie, die die Punkte verbindet, sicherlich auch zeichnen (Fig. 3), denn dadurch wird es uns leichter, die Lage der einzelnen Punkte zu übersehen, uns ein Bild vom Gang des Luftdruckes zu machen und es uns einzuprägen. Aber das so gewonnene Bild ist nur sehr unvollkommen, wenn man es mit dem früheren Diagramm vergleicht, das an denselben Tagen von einem Selbstschreiber aufgenommen war. Wir dürfen also unsere Kurve Fig. 3 nicht in der früher angegebenen Weise idealisieren. Können wir aber den bewußten Grenzprozeß bei der Kurve Fig. 1 ausführen?

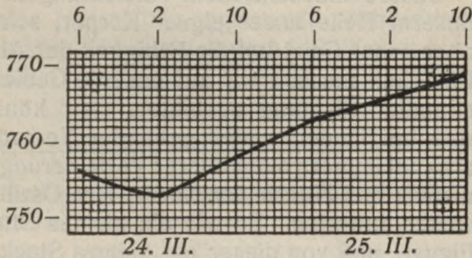


Fig. 3.

Fig. 4 ist ein kleines Stück eines Diagramms, das ein Toeplersches Luftdruckvariometer (photographisch) in nicht

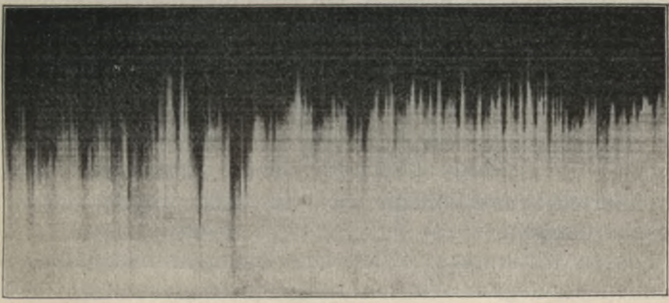


Fig. 4.

ganz einer Stunde aufgezeichnet hat. Das Diagramm zeigt, daß der Luftdruck unausgesetzt schwankte. Der Apparat ist so beschaffen, daß die Schwankungen des Quecksilberbarometers auf das 130fache vergrößert werden. So nähern wir uns also der idealen Kurve! Wie wird sie bei millionenfacher Vergrößerung aussehen?

Unsere mechanischen Vorrichtungen sind eben, wie zu unserm Heile unser eigner Körper, schwerfällige Systeme, aber unser Geist hat die Fähigkeit der Abstraktion und diese Fähigkeit müssen wir auf unserm Gebiete hier in ganz bestimmter Richtung ausbilden. Wir können uns vorstellen, daß bei immer weiter gehender Vergrößerung der Kurve, also bei immer vollendeterer Verfeinerung des Schreibmechanismus das Zittern der Kurve, ihre Oszillationen auch immer weiter auftreten. So wie ein kleines Stück der Figur 3 die Figur 1 und von dieser ein kleines Stück die Figur 4 ergibt, so könnte auch ein kleines Stückchen dieser letzteren bei millionenfacher Vergrößerung wieder ein ähnlich krauses Bild ergeben; und so unbegrenzt weiter.

Aber noch eine andere Möglichkeit als die soeben betrachtete müssen wir ins Auge fassen, ehe wir weiter kommen. Sehen wir einmal aufmerksam die Zeiger einer in Gang befindlichen Taschenuhr an. Beim Sekundenzeiger sieht jedes normale Auge, daß die Bewegung ruckweise, meist mit fünf Stößen in der Sekunde, vor sich geht; beim Minutenzeiger dürften nicht viele Augen das ungleichmäßige Vorrücken bemerken und beim Stundenzeiger muß man eine starke Vergrößerung zu Hilfe nehmen, um auch hier die Diskontinuität der Bewegung zu erkennen. Denken wir uns, daß jeder dieser Zeiger in der Ruhestellung nach jedem Sprunge mit seiner Spitze ein winziges Pünktchen auf das Zifferblatt setzte, so würden wir drei punktierte Kreise erhalten und bei angemessener Vergrößerung auch sehen können. Um es kurz zu machen: diesen Prozeß der Verfeinerung einer punktierten Kurve können wir uns wieder unbegrenzt fortgesetzt denken.

Fassen wir unsere letzten Überlegungen zusammen, so können wir sagen: Wir sind auf Gebilde gekommen, die in jedem noch so kleinen Stücke oszillieren und ferner auf Gebilde, die in jedem noch so kleinen Stücke punktiert sind. Wir erkennen also, daß man mit den Idealisierungen von körperlichen Erscheinungen sehr vorsichtig sein muß.

Nun wollen wir ein- für allemal festsetzen, daß wir hier in Zukunft solche Gebilde wie die eben betrachteten aus-schließen wollen. Unsere weiterhin zu untersuchenden Kurven sollen solche „*pathologischen Abnormitäten*“ nicht aufweisen, so daß wir das, was wir sehen, harmlos idealisieren können; wir betrachten hinfort nur sogenannte **vernünftige Kurven.** Wir mußten aber von jenen andern Gebilden reden, um die Gedanken völlig zu klären.

§ 3. DIE ABGELEITETE KURVE.

Schon im geometrischen Anfangsunterrichte wird die Tangente des Kreises betrachtet, später kommen auch die Tangenten der drei andern Kegelschnitte hinzu. Jede dieser vier Kurven hat mit einer sie schneidenden Geraden zwei Punkte gemein, z. B. die Gerade g die Punkte P_1 und P_2 mit dem Kreise k (Fig. 5). Drehen wir nun die Gerade um den Punkt P_1, so durchläuft der andere Schnittpunkt P_2 die Kurve und rückt schließlich in den Punkt P_1 hinein. In diesem Augenblicke, so sagt man in der Elementargeometrie, hat die Gerade mit der Kurve nur einen einzigen Punkt gemein und heißt Tangente der Kurve. Beachtet man aber, daß die *Tangente als Grenzlage einer Sekante* entsteht, bei der zwei Schnittpunkte zusammenrücken, so ergibt sich die Ausdrucksweise, daß die Tangente an der Berührungsstelle zwei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat.

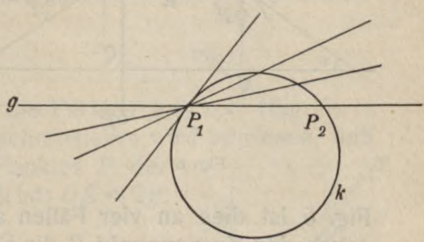


Fig. 5.

Genau dasselbe kann man bei einer beliebigen krummen Linie für jeden Punkt ausführen und so nach Augenmaß in jedem Punkte einer gezeichneten Kurve an diese die Tangente legen. Durchwandern wir die Kurve, so wird die Tangente fortwährend ihre Richtung ändern — darin liegt ja eben das Charakteristische einer Kurve und gerade diese Veränderlichkeit der Tangentenrichtung wollen wir jetzt etwas genauer betrachten. Dazu müssen wir eine feste Gerade annehmen und die Winkel beobachten, die eine an der Kurve hingleitende Tangente mit dieser Geraden bildet. Zur

Veranschaulichung bietet sich uns am bequemsten die Methode rechtwinkliger Koordinaten dar.

Die feste Gerade, die Achse, legen wir etwa horizontal, nehmen ihre positive Richtung nach rechts an, erteilen der Kurve einen entsprechenden Durchlaufungssinn und bestimmen den Winkel τ, den die Tangente mit der Achse bildet, durch Drehung von der positiven Richtung der Achse aus links herum, also gegen die Uhrzeigerbewegung. In

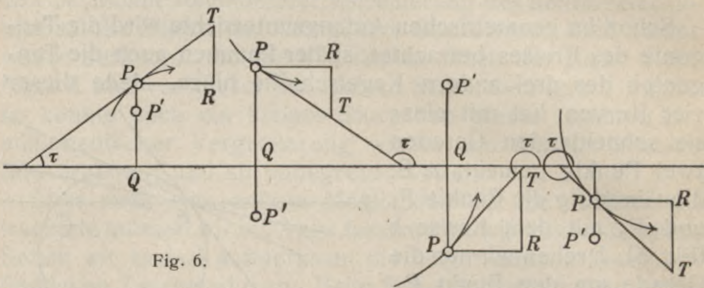


Fig. 6.

Fig. 6 ist dies an vier Fällen ausgeführt. Ziehen wir jetzt durch den Kurvenpunkt P die Strecke PR parallel der positiven Richtung der Achse, machen PR gleich der Längeneinheit und errichten dann das Lot RT bis zum Schnittpunkt T mit der Tangente, so ist $RT = \tan\tau$ nach Größe und Richtung. Liegt τ im ersten oder dritten Quadranten, so ist $\tan\tau$ positiv, RT geht nach oben; liegt τ im zweiten oder vierten Quadranten, so ist $\tan\tau$ negativ, RT geht nach unten.[1])

Um nun eine innigere Verbindung zwischen dem Kurvenpunkte P und dem zugehörigen Werte von $\tan\tau$ zu erhalten, fällen wir das Lot PQ auf die Achse und machen auf ihm $QP' = RT$ nach Größe und Richtung. Verfahren wir so bei allen Punkten P einer gegebenen Kurve, so bilden auch die Punkte P' eine Kurve, der wir den Namen der **abgeleiteten Kurve** geben.

Nehmen wir eine beliebige Gerade, so ist die abgeleitete Kurve eine Parallele zur Achse.[2])

---

1) Es ist also auch senkrecht zur Achse eine positive Richtung (nach oben) und eine negative Richtung (nach unten) festgesetzt.

2) Führe die Zeichnung bei verschiedenen Lagen der Geraden aus.

Die Fig. 7 zeigt uns die abgeleitete Kurve eines Kreises; hierbei ist die Achse durch den Kreismittelpunkt O gelegt, der obere Halbkreis ausgezogen und der untere punktiert gezeichnet. Die abgeleitete Kurve besteht entsprechend den beiden Halbkreisen aus zwei Teilen, die die Tangenten in den Punkten A und B zu Asymptoten haben. Bezeichnet man, wie üblich, die Koordinaten OQ und QP des Kreispunktes P mit x und y, so erkennt man leicht die Gleichung

$$\tan\tau = -\frac{x}{y}.$$

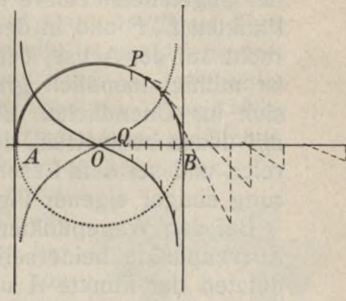


Fig. 7.

Ein weiteres Beispiel sei die Parabel $y = ax^2$ (Fig. 8).

In der elementaren Kegelschnittslehre wird bewiesen, daß die Subtangente SU des Punktes P der doppelten Ordinate AS gleich ist: $US = 2y$. Daher ist

$$\tan\tau = RT = SU : SP = 2y : x$$
$$= 2ax^2 : x = 2ax.$$

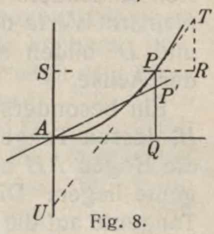


Fig. 8.

Bezeichnen wir nun QP', die Ordinate des Punktes P', mit y', so erhalten wir

$$y' = 2ax,$$

und das drückt aus, daß die Punkte P' auf einer durch A gehenden Geraden liegen; *die abgeleitete Kurve der obigen Parabel ist eine Gerade.*[1])

Aber auch für eine beliebig hingeworfene Kurve ist die Ausführung der abgeleiteten Kurve sehr lehrreich.

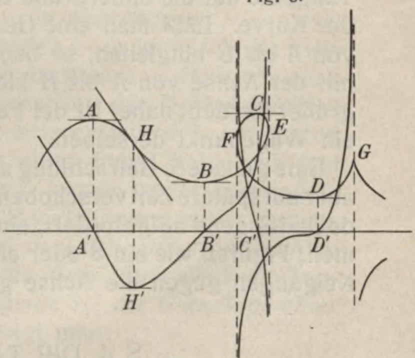


Fig. 9.

In Fig. 9 bemerken wir zunächst die Punkte $A, B, C, D,$

1) Führe die Zeichnung aus für die Parabel $y^2 = 2px$, für eine Ellipse, für eine Hyperbel.

deren Tangenten wagerecht sind und die wir daher *Wagepunkte* nennen wollen; die zugehörigen Punkte A', B', C', D' der abgeleiteten Kurve *liegen daher auf der Achse.* In den Punkten E, F und in der *Spitze G* steht die Tangente senkrecht auf der Achse, der Tangens des betreffenden Winkels ist mithin unendlich groß, die abgeleitete Kurve erstreckt sich ins Unendliche. Ein Vergleich dieser Vorkommnisse mit denen beim Kreis, der Ellipse und der Hyperbel ist lehrreich und sei dem Leser ebenso empfohlen wie die Ausführung einiger eigener Figuren.

Bei den Wagepunkten A und C liegen die benachbarten Kurvenpunkte beiderseits unterhalb der Tangente, die Ordinaten der Punkte A und C sind also größer als die der Nachbarpunkte, diese Ordinaten sind *Maxima* oder *größte Werte*; die Tangenten der abgeleiteten Kurve in A' und C' bilden daher *stumpfe Winkel* mit der positiven Richtung der Achse. Anders bei B und D, deren Ordinaten ersichtlich *kleinste Werte* oder *Minima* darstellen; die Tangenten in B' und D' bilden *spitze Winkel* mit der positiven Richtung der Achse.

Ein besonders bemerkenswerter Punkt unserer Figur ist H, dessen Tangente von der Kurve so durchsetzt wird, daß die Bogen AH und HB auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen. Die Kurve wendet sich von einer Seite der Tangente auf die andere und daher heißt H ein *Wendepunkt* der Kurve. Läßt man eine Gerade berührend an der Kurve von A bis B hingleiten, so beobachtet man, daß ihre Winkel mit der Achse von A bis H kleiner und von H bis B wieder größer werden; daher ist der Punkt H' der abgeleiteten Kurve ein Wagepunkt derselben.

Eine genauere Betrachtung aller dieser Erscheinungen mag aber auf spätere Zeit verschoben werden, indessen sei der Leser doch dringend aufgefordert, einige Übungen selbst vorzunehmen; Figuren wie ein **S** oder ein Zirkumflex in verschiedenen Neigungen gegen die Achse geben vortreffliche Beispiele.

§ 4. DIE TANGENTE.

Es gibt einen bekannten Satz der Planimetrie, der von niemandem angezweifelt wird: *eine Gerade ist durch zwei*

Punkte bestimmt. Wer freilich geometrische Zeichnungen mit gut gespitztem Bleistift möglichst genau machen will, der gewöhnt sich bald an einen anders klingenden Satz: *eine Gerade ist durch zwei Punkte fast nie genau bestimmt.* Der erste Satz ist rein theoretisch, der zweite ist praktisch; der erste spricht von idealen Geraden und Punkten, der zweite von körperlichen. Abstrahieren wir von der Praxis des Zeichnens und denken wir uns in unsern gezeichneten Linien von der Breite $\mathfrak{d}$ die idealen Linien als deren Mittellinien! Es sei eine krumme Linie gezeichnet und durch zwei parallele Gerade von der Strichbreite $\mathfrak{d}$ geschnitten (Fig. 10); diese Linien bestimmen dann zwei Parallelogramme[1]) von der Breite $\mathfrak{d}$ und wir können uns diese beiden Parallelogramme so durch einen geradlinigen Streifen verbunden denken, daß dessen Mittellinie genau durch die Mittelpunkte der Parallelogramme geht. Wir haben dann das Bild eines Kurvenbogens mit einer Sehne vor uns, das wir uns leicht idealisieren könnten. Wir lassen aber vorher den einen geradlinigen Streifen dem festgehaltenen andern immer näher rücken, bis endlich die Streifen nebeneinander liegen (Fig. 11). Die Mittelpunkte der beiden Schnittfiguren liegen einander jetzt so nahe, als dies bei der Strichbreite $\mathfrak{d}$ überhaupt möglich ist, wenn sich die beiden parallelen Streifen nicht überdecken sollen. Der sie verbindende Streifen — er ist durch die zwei Punkte theoretisch vollkommen bestimmt — fällt, wie man sieht, mit dem Kurvenstreifen zwischen den beiden Punkten fast völlig zusammen. Jetzt idealisieren wir, d. h. wir führen unsern Grenzprozeß aus. Den einen Punkt halten wir fest und lassen nun die Strichbreite $\mathfrak{d}$ immer weiter schwinden. Dann nähern sich die beiden Punkte immer mehr und im Grenzfalle ($\mathfrak{d} = 0$) reden wir von *zwei benachbarten Punkten* der Kurve und erkennen, daß die Verbindungslinie die Tangente der Kurve wird. *Die Tangente ist die Grenzlage einer Sekante* und in diesem Sinne sagt man:

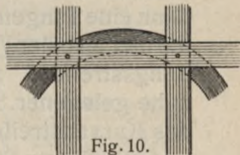


Fig. 10.

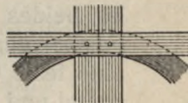


Fig. 11.

1) Parallelogramme entstehen eigentlich erst, wenn man die Schnittpunkte geradlinig verbindet!

Eine Tangente einer Kurve ist als Verbindungslinie zweier benachbarter Kurvenpunkte aufzufassen.

Noch auf andere Weise kann man zu dieser Erklärung kommen. Wenn wir in eine gezeichnete Kurve (ohne Wendepunkte) einen Sehnenzug einschreiben und die Ecken dieses Zuges einander immer näher rücken lassen, so kommen wir bald an die Grenze des Ausführbaren und Wahrnehmbaren; das Polygon taucht gewissermaßen völlig in den Kurvenstreifen unter (Fig. 12). Die Verlängerung einer Seite stellt dann eine Tangente dar, die hier also der Verbindungsstreifen zweier nahe gelegener Stellen des Kurvenstreifens ist und mit diesem Streifen ein kleines Stückchen gemein hat. Geht man jetzt in Gedanken zur Grenze über, so hat man wieder die obige Erklärung der Tangente.

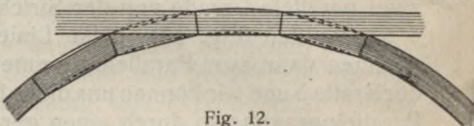


Fig. 12.

Wir haben bisher immer dieselbe Strichbreite δ, gemessen senkrecht zu den Rändern der Streifen angenommen. Das ist beides nicht notwendig und wir wollen gleich andere Festsetzungen treffen. Zu diesem Zwecke führen wir wieder eine feste Gerade als *Abszissenachse* ein, legen diese horizontal und bezeichnen die auf ihr von irgend einem Punkte O an gemessenen Strecken durch den Buchstaben x; haben wir verschiedene Strecken auf ihr zu unterscheiden, so tun wir dies durch Marken oder Indizes, wie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Senkrecht zur x-Achse OX nehmen wir eine zweite Achse OY, die *Ordinatenachse*, an und bezeichnen die auf ihr von O aus gemessenen Strecken mit y. Die Strecken x, die Abszissen, werden von O nach rechts hin positiv, nach links hin negativ gerechnet; die Strecken y, die Ordinaten, gelten nach oben hin gemessen positiv, nach unten hin negativ.

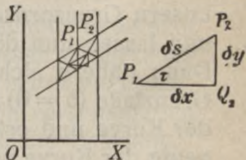


Fig. 13.

Nennen wir nun die idealen Mittelpunkte der beiden benachbarten Parallelogramme (Fig. 13) P_1 und P_2, ziehen durch P_1 eine horizontale, durch P_2 eine vertikale Gerade, die sich in Q_2 schneiden, so entsteht, wie auf der nebenstehenden vergrößerten Figur zu sehen, ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten wir $\mathfrak{d}x$ und $\mathfrak{d}y$ nennen wollen und dessen Hypotenuse $\mathfrak{d}s$ heiße. Diese Symbole sollen nicht etwa Produkte darstellen; wir können z. B. das x in dem Ausdruck $\mathfrak{d}x$ ebensogut als Index von $\mathfrak{d}$ ansehen, wie auch das $\mathfrak{d}$ als Operationszeichen zu x — man vergleiche damit Ausdrücke wie $\sin x$, $\log x$. Man erkennt sofort, daß die drei Größen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}s$ von der Strichbreite $\mathfrak{d}$ und zugleich auch von dem Winkel τ, dem *Steigungswinkel*, abhängen, denn es ist

$$\tan\tau = \frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x}, \quad \sin\tau = \frac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}s}, \quad \cos\tau = \frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}s}.$$

Was wird aus diesen Gleichungen, wenn die Strichbreite $\mathfrak{d}$ immer kleiner wird? Das ist die Kernfrage, zu deren Beantwortung aber noch mancherlei Vorarbeiten zu erledigen sind.

ZWEITES KAPITEL.

§ 5. ARITHMETISCHE GRENZPROZESSE.

Wir hatten soeben Gleichungen, also Beziehungen zwischen Zahlen, aufgestellt und früher auch schon solche benutzt. Der Anwendung von Zahlen auf geometrische Gebilde liegt nun wieder eine Idealisierung zu grunde, und zwar eine uns so geläufige, daß man nicht besonders darüber nachdenken zu müssen glaubt. Schon wenn man sagt, eine Strecke sei 3 cm lang, behauptet man mehr als man verantworten kann, und die Aufgabe, eine Strecke von 3 cm Länge zu zeichnen, fordert mehr als man leisten kann.

Wir wollen uns einmal einen idealen Maßstab vorstellen, also eine ideale gerade Linie, auf der von irgend einem Anfangspunkte aus Zentimeter abgeteilt seien. Die Zentimeter seien wieder in Millimeter, diese in Zehntel usf. eingeteilt. Denken wir uns etwa als Modell einen gespannten Gummifaden, behalten seine Länge bei und lassen seine Dicke in Gedanken verschwinden. Verringern oder vergrößern wir die Spannung, so werden die Teilpunkte näher zusammen- oder weiter auseinanderrücken; nur bei der ursprünglichen Spannung haben wir den richtigen Maßstab. Wir können uns weiter vorstellen, daß wir den Maßstab bei ungeänderter Spannung an irgend eine gegebene Strecke anlegen und somit deren Länge messen können. Begrifflich hat das keine Schwierigkeit mehr.

Hat eine krumme Linie, z. B. ein Kreis, eine bestimmte Länge? Auch hier ist die Antwort begrifflich leicht zu geben. Wir stellen uns vor, daß wir unsern Maßstab bei ungeänderter Spannung um den Kreis herumlegen und wir können so seinen Umfang messen. Bekanntlich verfährt man wohl in der Praxis so, wenn man den Umfang einer Säule oder irgend eines zylindrischen Werkstücks bestimmen will, nicht aber in der Geometrie. Da teilt man den Kreis mit dem Radius r in n gleiche Teile. Verbindet man die Teilpunkte, so erhält man ein eingeschriebenes regelmäßiges n-Eck, dessen Umfang $2nr \sin \frac{180^0}{n}$ ist. Legt man aber in den Teilpunkten Tangenten an den Kreis, so ergibt sich ein umgeschriebenes regelmäßiges n-Eck, dessen Umfang $2nr \tan \frac{180^0}{n}$ ist. Zwischen beiden liegt der Kreisumfang, und je größer n genommen wird, desto geringer ist der Unterschied der Umfänge. Rechnet man die Faktoren von $2r$ in beiden Fällen für dasselbe n in Dezimalzahlen aus, so stimmen sie bis zu einer gewissen Stelle überein und wir schließen daraus ohne weiteres, daß die Zahl π bis zu derselben Dezimale ebenfalls mit jenen zusammenfällt. Verdoppelt man die Zahl n, so ergibt sich eine noch weiter reichende Übereinstimmung. Dieser Prozeß läßt sich rechnerisch und erst recht in Gedanken beliebig weit fortsetzen; er stellt einen **arithmetischen Grenzprozeß** dar.

Bezeichnen wir mit $2ri$ und $2ru$ die Umfänge der ein- und umgeschriebenen Vielecke, lassen n die Reihe der Potenzen von 2 durchlaufen und nehmen als Index den Exponenten derjenigen Potenz von 2, die die Seitenzahl n angibt, so erhalten wir von den beiden Quadraten ausgehend zwei Reihen von Größen:

$$i_2\ i_3\ i_4\ \ldots\ i_k\ i_{k+1}\ \ldots$$

$$u_2\ u_3\ u_4\ \ldots\ u_k\ u_{k+1}\ \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) jedes i ist kleiner als jedes u,

2) irgend ein i ist größer als das vorhergehende: $i_{k+1} > i_k$,

3) irgend ein u ist kleiner als das vorhergehende: $u_{k+1} < u_k$,

4) die Differenz $u_k - i_k$ strebt mit wachsendem k der Grenze Null zu.

Ehe wir weiter gehen, merken wir erst noch an, daß man unter einer *Reihe* eine *geordnete Folge von gesetzmäßig gebildeten Größen* versteht.

Die Reihe der i wächst immerfort, die Reihe der u nimmt immerfort ab, beide haben als gemeinsame Grenze die Zahl π, sie **konvergieren** nach π.

Wir haben hier als Beispiel für eine Grenzbestimmung eines der bekanntesten Probleme der Planimetrie genommen, aber es ist nicht das einfachste. Betrachten wir noch einige andere. Man weiß, daß $\sqrt{2}$ die Diagonale des Quadrates von der Längeneinheit ist, eine bestimmte Länge, die aber inkommensurabel zur Seite ist. Sei die Seite 1 cm, wie stellt sich dann jenes Symbol $\sqrt{2}$ als Dezimalzahl dar? Wir kennen alle den einfachen Algorithmus[1]), der es gestattet, $\sqrt{2}$ auf beliebig viel Dezimalen zu berechnen. Sehen wir genau zu, so erhalten wir dadurch ebenfalls zwei Reihen von Größen, die dieselben vier Eigenschaften haben wie die oben betrachteten Reihen; nämlich:

$$1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad 1{,}41424 \ldots$$
$$1{,}5 \quad 1{,}42 \quad 1{,}415 \quad 1{,}4143 \quad 1{,}41425 \ldots$$

Die gemeinsame Grenze der beiden Reihen ist $\sqrt{2}$, die Glieder der Reihen *konvergieren nach* $\sqrt{2}$.

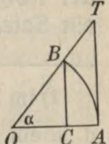


Fig. 14.

Ist (Fig. 14) OAB ein Sektor des Einheitskreises (d. h. des Kreises mit Radius 1) mit dem Winkel α am Mittelpunkt O und zieht man BC und AT senkrecht zu OA, so ist bekanntlich $BC = \sin\alpha$, $AT = \tan\alpha$ und der Bogen $AB = \operatorname{arc}\alpha$ oder kurzweg $AB = \alpha$, denn man mißt in der höheren Mathematik die Winkel nicht nach Graden, Minuten und Sekunden, sondern mittels des Arkus, d. h. des Bogens im Einheitskreise, schreibt

1) Algorithmus = Rechenverfahren, Rechenvorschrift.

also 2π, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ... für 360^0, 180^0, 90^0, 60^0 ...[1]). Nun liegt die Fläche des Sektors zwischen den Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke, oder in Zeichen:

$$\tfrac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha < \tfrac{1}{2} \alpha < \tfrac{1}{2} \tan \alpha .$$

Dividieren wir alle drei Glieder durch $\frac{1}{2} \sin \alpha$, so kommt

$$\cos \alpha < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} .$$

Lassen wir jetzt α unbegrenzt abnehmen, immer kleiner werden oder, wie man auch sagt, *nach Null konvergieren*, so bildet $\cos \alpha$ eine zunehmende, $\frac{1}{\cos \alpha}$ eine abnehmende Reihe. Beide konvergieren, wie man weiß, nach 1, also konvergiert auch der zwischen beiden stehende Bruch nach demselben Werte 1, sein Grenzwert für $\alpha = 0$ ist 1, oder in Zeichen

I) $$\lim_{\alpha = 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

(lies: limes $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ für limes α gleich Null...) Man kann dies wichtige Ergebnis auch folgendermaßen aussprechen:

Je kleiner ein Winkel ist, auf desto mehr Dezimalen stimmen sein Arkus und sein Sinus überein.

Jede Logarithmentafel erlaubt eine Nachprüfung in Zahlen. Auch der folgende Satz ist nichts anderes:

Je größer die Eckenzahl eines einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons ist, desto mehr nähert sich der Polygonumfang dem Kreisumfang,

ein Satz, den wir ja oben schon betrachteten.

---

1) Im Dreieck ist also $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Allgemein ist $\alpha = \frac{\pi}{180^0} \alpha^0$, d. h. ein in Grad gegebener Winkel wird in den Arkus umgerechnet, indem man die Gradzahl mit $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745$ multipliziert. Ebenso ist $\mu = \frac{\pi}{180 \cdot 60'} \mu'$, d. h. ein in Minuten gegebener Winkel wird in den Arkus umgerechnet, indem man die Minutenzahl mit $\frac{\pi}{180 \cdot 60} = 2991 \cdot 10^{-7}$ multipliziert.

§ 6. DIE GESCHWINDIGKEIT.

Wir haben Grenzübergänge mancherlei Art kennen gelernt. In der Geometrie bei den einfachsten Begriffen des Punktes und der Linie, bei den Kurven die Tangente, in der Arithmetik bei der Bestimmung irrationaler Größen, bei der Ermittelung des Grenzwertes, dem der Quotient $\alpha : \sin\alpha$ bei verschwindendem α zustrebt. Aber auch in der Mechanik gibt es eine große Menge von Grenzbegriffen, von denen einer so elementarer Art ist, daß er hier zur Befestigung der Sache herangezogen werden kann; das ist der Begriff der *Geschwindigkeit*, der der Vorstellung einer *gleichförmigen* Bewegung entfließt.

Wenn ein Punkt in beliebig kleinen gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, so schreibt man ihm eine gleichförmige Bewegung zu; dann erhält man bekanntlich den in einer Zeiteinheit zurückgelegten Weg, wenn man den in irgend einer Zeit zurückgelegten Weg durch die Anzahl der dazu nötigen Zeiteinheiten dividiert. Mathematisch ausgedrückt heißt das, wenn in $t_1, t_2, t_3 \ldots$ Sekunden $s_1, s_2, s_3 \ldots$ cm zurück gelegt werden, so ist

$$s_1 : t_1 = s_2 : t_2 = s_3 : t_3 = \cdots = c,$$

die Quotienten haben alle denselben Wert, den wir soeben mit dem Buchstaben c bezeichnet haben. Für jedes t und das dazu gehörige s besteht demnach die Gleichung

$$s = ct.$$

Den Quotienten c (Weg dividiert durch Zeit), dessen Dimension[1]) $\mathrm{cm\,sec}^{-1}$ ist, nennt man bekanntlich die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung. Diesen Begriff überträgt man nun auch auf eine ungleichförmige Bewegung.

Berlin	6^{20}	12^{15}	4^{30}
Dresden	12^{15}	4^{28}	6^{49}

Betrachten wir z. B. die folgenden drei Züge, die von Berlin nach Dresden gehen. Der Weg beträgt 188,6 km, die Zeiten sind $5^{\mathrm{h}}\,55^{\mathrm{min}}$, $4^{\mathrm{h}}\,23^{\mathrm{min}}$ und $2^{\mathrm{h}}\,19^{\mathrm{min}}$. Dividiert man hier die Kilometerzahl durch die Zahl

1) Dimension = Maßbezeichnung.

der Stunden, so kommt 31,9 km h^{-1}, 43,1 km h^{-1} und 81,3 km h^{-1}, und diese Werte nennt man die **mittleren** Geschwindigkeiten. Es wären die Geschwindigkeiten, die die Züge bei gleichförmiger Bewegung haben müßten, um in den angegebenen Zeiten den Weg zurückzulegen.

Noch deutlicher tritt dies hervor, wenn wir z. B. den Zug genauer verfolgen, der 6^{25} von Dresden über Chemnitz geht und 10^{02} in St. Egidien nach 106 km Weg eintrifft. Seine mittlere Geschwindigkeit nach km : min berechnet ist

$$106 : 217 = 0{,}49;$$

im einzelnen aber erhalten wir die nebenstehende Tabelle, aus der ersichtlich ist, daß die für kleinere Zeiten berechneten mittleren Geschwindigkeiten zwischen 0,00 und 0,88 km : min schwanken. Stellen wir für die letzten Strecken von Chemnitz 9^{16} bis zum Ende der Tabelle die Wege und die Geschwindigkeiten als Funktionen der Zeit graphisch dar, so ergeben sich die beiden oberen

km	Zeit	Geschwindigkeit
0	6^{25}	
14	6^{45}	14 : 20 = 0,70
	6^{47}	0 : 2 = 0,00
18	6^{56}	4 : 9 = 0,44
26	7^{16}	8 : 20 = 0,40
31	7^{24}	5 : 8 = 0,63
36	7^{31}	5 : 7 = 0,71
41	7^{38}	5 : 7 = 0,71
	7^{44}	0 : 6 = 0,00
46	7^{53}	5 : 9 = 0,56
50	8^{01}	4 : 8 = 0,50
58	8^{15}	8 : 14 = 0,57
65	8^{25}	7 : 10 = 0,70
68	8^{30}	3 : 5 = 0,60
	8^{35}	0 : 5 = 0,00
72	8^{42}	4 : 7 = 0,57
	8^{53}	0 : 11 = 0,00
77	9^{03}	5 : 10 = 0,50
81	9^{08}	4 : 5 = 0,80
	9^{16}	0 : 8 = 0,00
83	9^{20}	2 : 4 = 0,50
84	9^{24}	1 : 4 = 0,25
89	9^{32}	5 : 8 = 0,63
92	9^{39}	3 : 7 = 0,43
95	9^{47}	3 : 8 = 0,38
99	9^{54}	4 : 7 = 0,57
106	10^{02}	7 : 8 = 0,88

Teile der Fig. 15. Aber jeder, der einmal auf der Eisenbahn gefahren ist, weiß, daß das Bild keinesfalls der Wirklichkeit entspricht. Die Geschwindigkeit ändert sich nicht ruckweise und zu den angegebenen Zeiten hält der Zug eine kleine Weile. So wird die Zeitwegkurve eine krumme Linie, die an den Stellen, wo hier Ecken gezeichnet sind kurze horizontale Strecken hat. Die Geschwindigkeitslinie enthält an diesen

Stellen eine kleine Strecke der Zeitachse und ist ebenfalls eine krumme Linie, so daß sich ein Bild ergibt, wie es in Fig. 15 unten für ein kleines Stück angedeutet ist.[1])

Die geraden Strecken der Weglinie oben sind die Sehnen

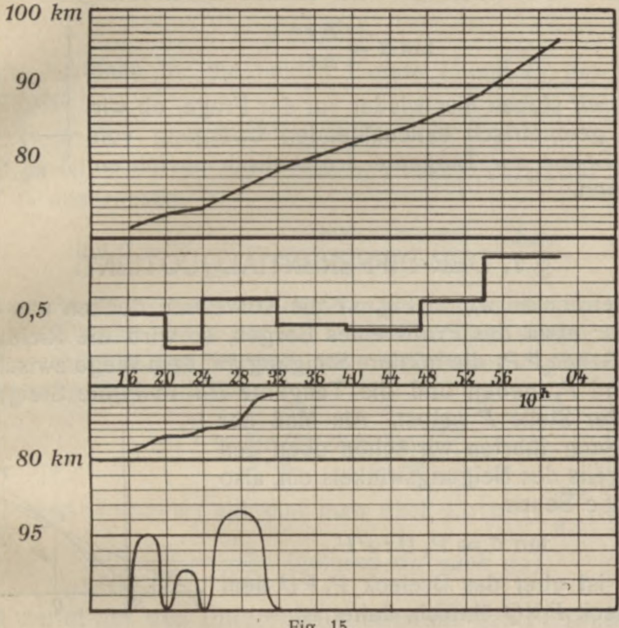


Fig. 15.

der Bögen der Weglinie unten und man sieht, daß die mittlere Geschwindigkeit als Quotient von Wegdifferenz und Zeitdifferenz gleich dem Tangens des Winkels zwischen der Sehne und der Zeitachse ist. Ist nun die Weglinie eine krumme Linie, so kommen wir dem Begriffe der Geschwindigkeit an einer gewissen Stelle näher, wenn wir eine von dieser Stelle ausgehende Sehne durch Drehung zur Tangente werden lassen. Wir haben also auch hier wieder

1) Vervollständige die obige Figur und zeichne andere Teile der Tabelle.

einen Grenzübergang. Das rechtwinklige Dreieck (Fig. 16), dessen Katheten wir mit

$$s_2 - s_1 = \Delta s \text{ und } t_2 - t_1 = \Delta t$$

bezeichnen wollen, gibt die mittlere Geschwindigkeit

$$\tan \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

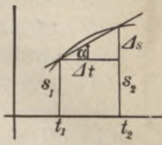


Fig. 16.

und wir stehen hier wieder vor der Frage, ob wir den geometrisch einleuchtenden Übergang von der Sehne zur Tangente arithmetisch ausführen können.

§ 7. DER DIFFERENTIALQUOTIENT.

Betrachten wir in Fig. 17 die Kurve und denken uns darunter etwa das Profil eines Berges, so wird die Richtung der Sehne PP_1 die mittlere Steigung auf dem Wege zwischen P und P_1 geben und die Tangente PT in P die Steigung an der Stelle P selbst. Als Maß der Steigung führten wir schon oben den Tangens des Neigungswinkels ein, also für die Sehne

$$\tan \sigma = P_1 U : PU.$$

Nun ist aber das Dreieck P_1PU dem Dreieck PVQ ähnlich, daher ist

$$\tan \sigma = PQ : VQ.$$

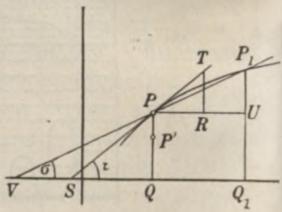


Fig. 17.

Rückt nun P_1 nach P, so verschwindet zwar das Dreieck P_1PU vollständig, aber der Punkt V wandert gleichzeitig nach S und wir erhalten für die Stelle P als Steigungsmaß

$$\tan \tau = PQ : SQ,$$

also den *Quotienten aus der Ordinate und der Subtangente*, eine Beziehung, die wir schon oben bei der Parabel benutzt haben. Das Dreieck PQS nannte man zur Zeit der Entstehung der Infinitesimalrechnung das *charakteristische Dreieck* und man bemühte sich damals, die Subtangente einer durch eine Gleichung zwischen den zwei Variabeln x und y

gegebenen Kurve zu bestimmen. Erst Leibniz fand einen neuen Weg und definierte den Differentialquotienten.

Nehmen wir an, die Kurve sei dadurch bestimmt, daß die Ordinate y eines beliebigen Kurvenpunktes als Funktion einer Abszisse x gegeben ist, oder kurz in Zeichen

$$y = f(x).$$

Dann bestehen für die beiden Punkte P und P_1 die Gleichungen

$$y = f(x), \quad y_1 = f(x_1)$$

und es ist, wenn wir die Differenzen wieder durch das Symbol Δ ausdrücken,

$$\tan\sigma = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\text{Ordinatendifferenz}}{\text{Abszissendifferenz}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dieser Ausdruck heißt der *Differenzenquotient der Funktion* für die Strecke von x bis x_1. Lassen wir nun wieder P_1 an P heranrücken, so können wir unter Benutzung der Bezeichnung lim schreiben

$$\tan\tau = \lim_{\Delta x = 0} \tan\sigma = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Diesen Grenzwert schreibt man nach Leibniz $\frac{dy}{dx}$, also

II) $$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$ (gelesen *dy nach dx*),

und nennt ihn den **Differentialquotienten der Funktion y (genommen) nach x.** *Er ist selbst kein Quotient, sondern der Grenzwert des Differenzenquotienten.*

Eine andere Bezeichnung für den Differentialquotienten, deren wir uns auch öfters bedienen werden, ist y'; eine andere Benennung ist **(erste) Ableitung der Funktion nach x.**

Sei z. B. $y = x^2$, so wird $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = x_1 + x$, folglich ist, wenn sich x_1 dem Werte x immer mehr nähert, die Differenz $x_1 - x = \Delta x$ also nach Null konvergiert, schließlich

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Macht man in Fig. 17 wieder $PR = 1$, so ist $RT = y'$, und trägt man $QP' = y'$ auf der Ordinate von A auf, so ist P' ein Punkt der (ersten) *abgeleiteten Kurve.* Wir können also sagen:

Konstruiert man zu einer gegebenen Kurve die (erste) Ableitung, so ist diese das Diagramm des (ersten) Differentialquotienten derjenigen Funktion, deren Diagramm die gegebene Kurve ist.

Man erkennt sofort, daß man von der ersten Ableitung, insofern sie doch auch wieder eine Funktion von x ist, abermals eine Ableitung bilden kann, die nun die zweite Ableitung der gegebenen Funktion heißt; die Kurve der zweiten Ableitung nennt man dann die zweite abgeleitete Kurve. Und so kann man fortfahren. Die Bezeichnungen sind:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \textit{(gelesen d zwei y nach dx Quadrat)},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \textit{(gelesen d drei y nach dx zur Dritten)}.$$

usw.

Statt nun jene Grenzübergänge bei jedem praktisch vorkommenden Falle, bei der Lösung irgend einer gegebenen Aufgabe stets wieder von neuem im einzelnen durchzumachen, erkannte Leibniz mit genialem Scharfblick, daß hier der Ursprung eines ganz neuen und eigenartigen Algorithmus verborgen liegt, für den er selbst die wichtigsten Regeln aufstellte und im Jahre 1684 veröffentlichte. Den dadurch begründeten neuen Zweig der Mathematik nennt man Differentialrechnung. Wie neu die Sache damals war und wie wenig man damals die Bedeutung dieses Algorithmus erkannte, kann man sich heute kaum vorstellen; Tatsache ist aber, daß bis zum Jahre 1696 außer Newton, der seine eigene Methode schon viel früher besaß und für sich benutzte, nur die beiden Brüder Bernoulli und der Marquis de l'Hospital das Wesen der Sache erfaßt hatten.

DRITTES KAPITEL.

§ 8. DIE DIFFERENTIATION VON x^n UND DEREN GEOMETRISCHE VERWERTUNG.

Die Funktion $y = x^n$ wird bereits im Elementarunterricht für alle reellen Werte von n erklärt. Lassen wir x um einen kleinen Betrag Δx zunehmen und setzen $x + \Delta x = x_1$, so nimmt auch y um einen Betrag Δy zu und wir setzen $y + \Delta y = y_1 = x_1^n$. Wir wissen ferner, daß je kleiner Δx ist, um so kleiner auch Δy wird.

Der Grenzwert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *für verschwindendes* Δx *ist zu untersuchen.*

Wir nehmen

1. *n als positive ganze Zahl* an. Dann ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^{\,n} - x^n}{x_1 - x} = x_1^{\,n-1} + x_1^{\,n-2}\,x + \cdots$$
$$+ x_1\,x^{n-2} + x^{n-1},$$

also die Summe einer Reihe von n positiven Gliedern mit je $(n - 1)$ Faktoren. Lassen wir nun Δx nach Null konvergieren, schließlich also $x_1 = x$ werden, so nähert sich jedes Glied der Reihe dem Wert x^{n-1} und es ergibt sich als Grenzwert

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}.$$

2. Ist n *ein positiver rationaler Bruch*

$$n = \frac{p}{q} \qquad (p \text{ und } q \text{ ganze Zahlen}),$$

so setzen wir $x = z^q$, also $\sqrt[q]{x} = z$ und erhalten dadurch $y = x^{\frac{p}{q}} = z^p$.

Man rechnet nun leicht aus, daß

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{z_1^{\,p} - z^p}{z_1^{\,q} - z^q}$$

$$= \frac{(z_1 - z)\,(z_1^{\,p-1} + z_1^{\,p-2}\,z + \cdots + z_1\,z^{p-2} + z^{p-1})}{(z_1 - z)\,(z_1^{\,q-1} + z_1^{\,q-2}\,z + \cdots + z_1^{\,q-2} + z^{q-1})}$$

ist. Kürzt man den Bruch durch $(z_1 - z)$ und läßt Δx nach Null konvergieren, so konvergiert z_1 nach z und man erhält endlich:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p z^{p-1}}{q z^{q-1}} = \frac{p}{q}\,z^{p-q} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1} = n x^{n-1},$$

ein Ergebnis, das mit dem für ganzzahliges n gefundenen übereinstimmt.

3. Ist n *eine positive irrationale Zahl*, dann gilt die eben aufgestellte Gleichung für jeden rationalen Näherungswert von n und wir entnehmen dieser Tatsache die Berechtigung [1]) zu sagen, daß die Gleichung

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}$$

mit beliebiger Annäherung auch für positive irrationale Exponenten gilt.

4. Sei nun endlich n *eine beliebige negative Zahl*, also etwa $n = -m$, wo m positiv ist. Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^{-m} - x^{-m}}{x_1 - x} = -\frac{1}{x_1^m x^m} \cdot \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$$

und somit wird der Grenzwert

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{2m}} m x^{m-1} = -m x^{-m-1} = n x^{n-1}.$$

Wir erkennen also, daß für alle reellen Werte des Exponenten n die Gleichung besteht

$$\text{III)} \qquad \frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}.$$

In Worten heißt das also:

Der Differentialquotient einer Potenz wird gebildet, indem man den Exponenten als Faktor vor die Potenz setzt und deren Exponenten dann um 1 vermindert.

Der zweite Differentialquotient oder die zweite Ableitung von x^n ist, ebenso gebildet: [2])

$$\frac{d^2(x^n)}{dx^2} = \frac{d(n x^{n-1})}{dx} = n(n-1) x^{n-2}.$$

In gleicher Weise lassen sich alle folgenden Differentialquotienten bilden.

---

1) Vgl. H. Wieleitner, *Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen.* Math. Bibl. Bd. 7 S. 53.

2) Führe die Rechnung etwa für positives ganzzahliges n genau durch!

Aufgaben: 1. Gilt die Formel III auch noch für $n = 0$, und was heißt das dann?

2. Kann man für $n = 1$ (also für $y = x$) den zweiten Differentialquotienten bilden?

3. Bilde die Ableitungen für $n = 5$, $n = 7{,}3$, $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{2}$, $n = \frac{5}{7}$, $n = -\frac{3}{8}$, $n = -\frac{1}{2}$, $n = \sqrt{2}$, $n = \pi$

4. Wie heißt die 4. Ableitung für $n = 2$, $n = 4$, $n = 5$, $n = -1$, $n = 2\frac{1}{2}$?

Unsere Formel III kann auch noch anders geschrieben werden, wenn man y an Stelle von x^n einführt; man erhält[1])

$$\text{IV)} \quad \left| \begin{array}{l} y = x^n \\ y' = nx^{n-1} = \dfrac{ny}{x}. \end{array} \right.$$

In dieser letzten Form ist das Ergebnis leicht geometrisch verwertbar, wenn wir uns erinnern, daß der Differentialquotient den Tangens des Winkels darstellt, den die Tangente eines Kurvenpunktes mit der Abszissenachse bildet. Zeichnen wir also die Kurve $y = x^n$ für einen bestimmten Exponenten n, z. B. $n = -\frac{2}{3}$. Das Ergebnis der Rechnung:

$$y' = -\frac{2}{3}\frac{y}{x} = y : \left(-\frac{3}{2}x\right) = \tan\tau$$

sagt uns, daß man, um die Tangente im beliebigen Punkte P zu erhalten, vom Fußpunkte Q der Ordinate PQ aus die Strecke $QT = \frac{3}{2}OQ$ (von O weg!) aufzutragen hat; PT ist dann die Tangente.

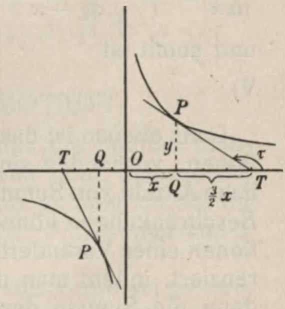


Fig. 18.

Man wird gestehen müssen, daß diese einzige Anwendung der Differentialrechnung in ihrer Kürze, Eleganz und Allgemeinheit (beliebiges n) eine Ahnung von deren umfassender Bedeutung entstehen läßt.

Aufgaben. Zeichne die Kurven und konstruiere einige Tangenten für $n = 3$, $n = 4$, $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$. Beachte die Tangentenrichtung im Punkte $x = 1$, $y = 1$.

---

1) Fasse das Ergebnis in Worte!

§ 9. DIE SUMME UND DER KONSTANTE FAKTOR.

1. Wenn die Funktion $y = x^n + x^m$ vorliegt, so ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1{}^n + x_1{}^m - x^n - x^m}{x_1 - x} = \frac{x_1{}^n - x^n}{x_1 - x} + \frac{x_1{}^m - x^m}{x_1 - x}$$

$$= \frac{\Delta(x^n)}{\Delta x} + \frac{\Delta(x^m)}{\Delta x},$$

er ist also gleich der Summe der Differenzenquotienten der beiden Summanden. Geht man zur Grenze über, so kommt für den Differentialquotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + mx^{m-1};$$

man erhält also die Ableitung der Summe als Summe der Ableitungen ihrer Glieder. Hier liegt die Frage nahe, ob man allgemein so verfahren darf.

Die Antwort ist leicht gegeben. Nehmen wir eine Funktion y als Summe zweier anderer Funktionen u und v von x an, deren Ableitungen u' und v' wir kennen, dann sehen wir, daß aus $y = u + v$ folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u_1 + v_1) - (u + v)}{x_1 - x} = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{v_1 - v}{x_1 - x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

und somit ist

V) $$y' = u' + v'.$$

Ganz ebenso ist das Verfahren, wenn mehr als zwei Funktionen vorhanden sind, wobei wir uns aber auf eine endliche Anzahl von Summanden beschränken wollen. Mit diesen Beschränkungen können wir sagen: Eine Summe von Funktionen einer Veränderlichen wird nach dieser Variabeln differenziert, indem man die einzelnen Glieder differenziert und dann die Summe der Differentialquotienten addiert; oder, wie man kürzer sagt:

Eine Summe darf gliedweise differenziert werden.

2. Wenn $y = ax^n$ gegeben ist, wo a ein konstanter Faktor

ist, so ist es nicht schwer einzusehen[1]), daß dieser Faktor bei der Bildung des Differenzenquotienten vor den Bruch tritt und daß schließlich

$$y' = nax^{n-1} = a\frac{d(x^n)}{dx}$$

wird. Einen Spezialfall hatten wir ja bereits bei den höheren Ableitungen von x^n kennen gelernt. Aber auch allgemein kann man sofort zeigen, daß, wenn die Funktion z von x den Differentialquotienten z' hat, dann für die Funktion $y = az$ die Gleichung besteht

VI) $$y' = az'.$$

In der Tat ist ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{az_1 - az}{x_1 - x} = a\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = a\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

woraus sich die behauptete Gleichung ergibt.

Beispiele.[2])

1. $y = 3x^2 - 2x + 5 - q\sqrt{x}, \qquad y' = 6x - 2 - \frac{q}{2\sqrt{x}}.$
2. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4,$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3.$$
3. $y = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4},$
$$y' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}.$$

§ 10. PRODUKT UND QUOTIENT.

Soeben haben wir gesehen, daß man die Summe mehrerer Funktionen gliedweise differenzieren kann; naturgemäß schließt sich daran sofort die Frage, ob es möglich ist, für das Produkt und den Quotienten zweier Funktionen von x ähnliche Regeln aufzustellen.

Seien also u und v zwei Funktionen von x und sei $y = uv$. Dann bilden wir, indem wir x um Δx zunehmen lassen, die Gleichung

1) Führe die Rechnung genau durch.
2) Bilde selbst weitere Übungsbeispiele.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

und erhalten durch Subtraktion

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v,$$

also nach Division durch Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Lassen wir nun Δx nach Null konvergieren und nehmen wir an, daß wir die Differentialquotienten von u und v bilden können, so wird das letzte Glied $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ wegen des dann verschwindenden Faktors Δv in Wegfall kommen und es ergibt sich

VII) $$y = uv, \quad y' = u'v + uv';$$

man multipliziert also die Ableitung des ersten Faktors mit dem zweiten, dann den ersten Faktor mit der Ableitung des zweiten und addiert beide Produkte.

Nehmen wir einmal als ganz triviales Beispiel $y = x^m x^n$, dann wird

$$y' = mx^{m-1}x^n + x^m n x^{n-1} = (m + n)x^{m+n-1},$$

was ja auch unmittelbar daraus folgt, daß $y = x^{m+n}$ ist.

Weniger trivial ist die Aufgabe y^2 nach x zu differenzieren. Da $y^2 = yy$ ist, so folgt

$$\frac{d(y^2)}{dx} = y'y + yy' = 2yy'.$$

Ebenso folgt aus $y^3 = y^2 y$ die Gleichung

$$\frac{d(y^3)}{dx} = 2yy'y + y^2y' = 3y^2y',$$

und so fortschreitend kann man für ganzzahliges n zu der Gleichung

$$\frac{d(y^n)}{dx} = ny^{n-1}y'$$

gelangen.

Sei ferner das Produkt $yx^n = 1$, also eine konstante Größe, so muß der Differentialquotient des Produktes Null sein, also

$$y'x^n + nyx^{n-1} = 0 \quad \text{oder} \quad y' = -n\frac{y}{x} = -nx^{-n-1}.$$

Sei weiter $y^p x^n = 1$, so wird

$$py^{p-1}y' x^n + ny^p x^{n-1} = 0 \text{ also } y' = -\frac{n}{p}\frac{y}{x} = -\frac{n}{p}x^{-\frac{n}{p}-1}.$$

Durch diese beiden letzten Ableitungen sind frühere Ergebnisse von neuem gewonnen worden: die Differentiation von Potenzen mit negativen ganzen und mit gebrochenen Exponenten.

Aus der Identität $y^n y^{-n} = 1$ ergibt sich

$$ny^{n-1}y' y^{-n} + y^n \frac{d(y^{-n})}{dx} = 0.$$

Also wird

$$\frac{d(y^{-n})}{dx} = -ny^{-n-1}y'.$$

Sei endlich $u = y^{\frac{p}{q}}$, also $u^q y^{-p} = 1$, so folgt aus der Gleichung

$$qu^{q-1}u' y^{-p} - pu^q y^{-p-1}y' = 0$$

die Beziehung

$$u' = \frac{p}{q} u y^{-1} y' = \frac{p}{q} y^{\frac{p}{q}-1} y'.$$

Nimmt man die Ergebnisse der letzten Rechnungen zusammen, so folgt, daß der Differentialquotient von y^n nach x, bei *beliebigem rationalen* n den Wert $ny^{n-1}y'$ hat. Da man einer irrationalen Zahl durch rationale Zahlen unbegrenzt nahe kommen kann, so ergibt sich in diesem Sinne die Gültigkeit der Formel

VIII) $$\frac{d(y^n)}{dx} = ny^{n-1}y'$$

auch für irrationale Werte von n und damit für beliebiges reelles n.

Von einem andern Gesichtspunkte aus wird uns diese Gleichung im nächsten Paragraphen begegnen.

Beim Quotienten $y = \frac{u}{v}$ zweier differenzierbarer Funktionen u und v gewinnt man leicht die Gleichung:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v},$$

woraus man bildet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}.$$

Beim Übergang zur Grenze für $\Delta x = 0$ wird wieder $\Delta v = 0$, und es entsteht die Formel

IX) $$y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

eine Formel die man leicht in Worte fassen kann. Es ist nicht unnütz, dies noch auf einem andern Wege abzuleiten, indem man nämlich setzt:

$$y = u \cdot \frac{1}{v}, \qquad y' = \frac{1}{v}u' - u \cdot \frac{1}{v^2}v' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

§ 11. DIE FUNKTION EINER FUNKTION; IMPLIZITE FUNKTIONEN.

Die bisher erkannten Gesetze lassen uns bei scheinbar recht einfachen Aufgaben entweder ganz im Stich oder führen zu sehr großen Rechnungen. Man braucht nur einmal $y = \sqrt{a - x}$ oder $y = (1 - 2x + 3x^2)^7$ vorzunehmen, um bei der ersten Funktion vielleicht[1]) ganz ratlos zu sein, bei der zweiten ungeheuer viel Rechnung zu haben. Es gibt aber eine höchst einfache Methode, um beide Funktionen, ja noch viel kompliziertere, mit Leichtigkeit der Differentiation unterwerfen zu können.

In den beiden soeben genannten Aufgaben ist eine Funktion von x potenziert ($a - x$ bzw. $1 - 2x + 3x^2$), oder allgemeiner ausgedrückt, *y ist eine Funktion einer Funktion von x.*

Sei nun allgemein u eine Funktion von x, schreiben wir etwa $u = \varphi(x)$, und y eine Funktion von u, etwa $y = f(u)$, so bilden wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

---

1) Versuche deinen Scharfsinn daran!

Sofern wir nun im stande sind, den Grenzübergang auszuführen, was von der Natur der Funktion abhängt, erhalten wir

X) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir bilden also die Ableitung von y nach u, dann differenzieren wir u nach x und multiplizieren endlich die beiden Ergebnisse miteinander.

Einige Beispiele mögen das gleich näher erläutern.

Sei $y = u^5$ und $u = \sqrt[7]{x}$, so ist $\frac{dy}{du} = 5u^4$

und $\frac{du}{dx} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$;

demnach wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5u^4}{7\sqrt[7]{x^6}} = \frac{5\sqrt[7]{x^4}}{7\sqrt[7]{x^6}} = \frac{5}{7}x^{-\frac{2}{7}}.$$

Diese Aufgabe hätten wir kürzer nach Formel III erledigen können.[1]) Aber gerade solche Beispiele, die nach zwei Methoden gerechnet werden können, sind für das Heimischwerden in einem neuen Gebiete sehr wertvoll und der Leser möge sich selbst weitere Aufgaben dieser Art bilden und die Rechnungen durchführen.

Ein anderes Beispiel ist $y = (a + bx)^3$. Hier ist $u = a + bx$ und man erhält

$$y' = 3b(a + bx)^2,$$

was ja auch ohne große Mühe nach Ausrechnung der dritten Potenz des Binoms nach Formel III und V ermittelt werden kann. Wenn dagegen $y = (ax^2 + bx + c)^n$ ist, so versagen die früheren Methoden ihren Dienst. Hier setzen wir $ax^2 + bx + c = u$, erhalten $\frac{du}{dx} = 2ax + b$, $\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$, so daß das elegante Ergebnis

$$y' = n(2ax + b)(ax^2 + bx + c)^{n-1}$$

entsteht. Von solchen Beispielen wird sich der Leser mit

1) Wieso?

einiger Phantasie selbst zahlreiche bilden können, etliche sind noch im Anhang mitgeteilt; wir wollen hier an einem speziellen Falle sehen weiterzukommen. Es sei

$$y = \sqrt[3]{a^3 - x^3} = u^{\frac{1}{3}}, \text{ wo also } u = a^3 - x^3 \text{ ist.}$$

Dann wird

$$y' = \tfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} (-3x^2) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(a^3 - x^3)^2}}.$$

Erhebt man die gegebene Gleichung in die dritte Potenz, so ergibt sich

$$y^3 = a^3 - x^3,$$

und man kann hier y^3 als Funktion einer Funktion behandeln, d. h. erst nach y und dann y nach x differenzieren. So bekommt man die Gleichung

$$3y^2 y' = -3x^2,$$

woraus sich

$$y' = -\frac{x^2}{y^2}$$

übereinstimmend mit dem obigen Resultat ergibt. Hier war y^3 nach x zu differenzieren, was wir schon im vorigen Paragraphen und in Formel VIII geleistet hatten; man erkennt leicht, daß die Ableitung der Formel VIII aus der Formel X bequemer ist.[1]) Wir haben aber bei der Behandlung des letzten Beispiels eine ganz neue Erweiterung unserer Methoden ausgeführt, indem wir eine Gleichung auf beiden Seiten, oder wie man auch sagen kann, gliedweise differenzierten. Sei, um das weiter zu verfolgen, die Gleichung

$$4y^5 + \frac{2}{3} y^3 + 3x^5 + \frac{2}{x^7} = 0$$

gegeben. Hier wäre es ganz unmöglich, y als Funktion von x, wie man sagt, *explizit* darzustellen, man muß sich mit der Gleichung begnügen, durch die y, wie man sagt, als *implizite Funktion* von x definiert ist. Trotzdem gelingt es uns ohne weiteres, eine Gleichung zwischen x, y und y' an-

1) Führe diese Ableitung streng durch!

zugeben und aus dieser y' zu berechnen. Durch Differentiation ergibt sich ja

$$20y^4y' + 2y^2y' + 15x^4 - \frac{14}{x^8} = 0, \qquad y' = \frac{14 - 15x^{12}}{2x^8y^2(10y^2 + 1)}.$$

Nehmen wir die Mittelpunktsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so können wir

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

berechnen und müssen nun $a^2 - x^2 = u$ als Hilfsfunktion hinzunehmen. Dann ergibt sich

$$y = \frac{b}{a}u^{\frac{1}{2}},$$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{b}{a}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{b}{a}u^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Differenzieren wir aber die gegebene Gleichung nach x, so kommt viel einfacher

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0, \quad y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

in Übereinstimmung mit dem Vorherigen. Wir können dies Ergebnis geometrisch zur Konstruktion der Ellipsentangente verwerten. Bezeichnen wir (Fig. 19) die Subtangente QT des Ellipsenpunktes P mit s, so ist

$$\tan\tau = -\frac{y}{s} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

$$s = \frac{a^2}{b^2}\frac{y^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

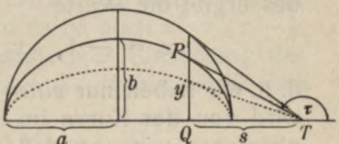


Fig. 19.

Da der für s gefundene Wert außer von x nur von a, dagegen nicht von b abhängt, so heißt das, daß alle Ellipsen über derselben Achse $2a$ in Punkten mit derselben Abszisse Tangenten besitzen, die nach demselben Punkte der großen Achse gehen. Zu diesen Ellipsen gehört aber auch der Kreis mit Radius a und daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Ellipsentangente mit Hilfe der „zugehörigen“ Kreistangente.

Aufgaben. Führe dieselben Rechnungen durch bei den Kurven

1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ 2) $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1.$

3) $\frac{x^n}{a^n} - \frac{y^n}{b^n} = 1.$ 4) $x^p y^q = a^{p+q}.$

5) $x^p y^q + x^q y^p = a^{p+q}.$ 6) $x^p y^q - x^q y^p = a^{p+q}.$

VIERTES KAPITEL.

§ 12. ANWENDUNG AUF KURVEN. MAXIMA UND MINIMA VON FUNKTIONEN.

Betrachten wir sofort, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, die *Parabel* dritter Ordnung

1) $$y = x^3 - 3x^2 + x + 5,$$

und fragen wir uns, was wir zu berechnen haben, um eine möglichst gute und genaue Vorstellung vom Verlaufe der Kurve zu erhalten, x und y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Ebene gedeutet.

Um die Lage der Kurve gegen das Koordinatensystem festzulegen, wird man die Schnittpunkte mit den Achsen berechnen. Die x-Achse wird in den Punkten geschnitten, für welche $y = 0$ ist. Die Auflösung der Gleichung dritten Grades ergibt die Werte

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2 + i, \quad x_3 = 2 - i,$$

d. h. wir haben nur *einen* reellen Schnittpunkt. Die y-Achse wird von der Kurve im Punkte $y = 5$ geschnitten. Ferner überlegen wir uns, daß für sehr große Werte von x das Glied x^3 alle andern Glieder der rechten Seite überragt; daher wird y negativ sein für große negative Werte von x, positiv dagegen für große positive Werte von x. Je größer wir y wählen, desto weniger wird das aus der Gleichung 1) berechnete reelle x von $\sqrt[3]{y}$ abweichen[1]); unsere Kurve wird sich also der Kurve $y = x^3$ immer mehr nähern,

1) Führe die Rechnung für $y = \pm 10, \pm 100, \pm 1000000$ durch!

sie hat — wie man sagt — die Kurve $y = x^3$ zur Asymptote.[1])

Charakteristisch für den Verlauf der Kurve sind nun vor allem die **Wagepunkte**, d. h. diejenigen Punkte, in denen, wie in § 3 auseinandergesetzt wurde, die Tangenten horizontal laufen, die Funktion also — von einem später zu besprechenden Falle abgesehen — ein *Maximum* oder ein *Minimum* hat. Nun gibt ja $\frac{dy}{dx}$ den Tangens des Winkels zwischen der Abszissenachse und der Tangente des Punktes x, y an, *wir erhalten demnach jene Wagepunkte*, für die doch dieser Winkel Null ist, *aus der Bedingung* $\frac{dy}{dx} = 0$.

Überdies erkennen wir: wenn der erste Differentialquotient *positiv* ist, so *steigt* die Kurve, die Funktion nimmt mit wachsendem x zu, wenn der erste Differentialquotient *negativ* ist, so *fällt* die Kurve, die Funktion nimmt mit wachsendem x ab.

Hier in unserm Beispiel ist

$$y' = 3x^2 - 6x + 1,$$

und dies wird Null,

2) $$x^2 - 2x + \tfrac{1}{3} = 0,$$

für $$x = 1 \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

also für die beiden Werte 1,816 und 0,184.

Die zugehörigen Werte von y erhält man bequem unter Benutzung der Gleichung 2). Denn es ist doch $x^2 = 2x - \frac{1}{3}$, nach Multiplikation mit x und nachheriger Einsetzung des Wertes für x^2 wird also $x^3 = 3\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$. Mithin erhält man

$$y = -\tfrac{4}{3}x + 5\tfrac{1}{3} = 4 \mp \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \begin{cases} 2{,}912 \\ 5{,}088 \end{cases}.$$

Betrachten wir jetzt einmal die Tangente in dem einen Wagepunkte, etwa im Punkte $x = 0{,}184$; $y = 5{,}088$ und

---

1) Die Abszissen der endlichen Schnittpunkte der beiden Kurven $y = x^3$ und $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$ erhält man aus der Gleichung

$$3x^2 - x - 5 = 0; \quad x_1 = 1{,}468 \quad \text{und} \quad x_2 = -1{,}135.$$

Warum? Berechne die zugehörigen Werte von y!

fragen nach den Punkten, die sie mit unserer Kurve gemein hat. Wir erhalten die Koordinaten auf algebraischem Wege als gemeinsame Lösungen der Kurven- und der Tangentengleichung, also des Systems

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5,$$

$$y = 5{,}088 = 4 + \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Sofort ergibt sich durch Subtraktion die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 - \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0.$$

Da sich nun die linke Seite der Gleichung als Produkt

$$\left[x - \left(1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\right]^2 \left[x - \left(1 + 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\right]$$

darstellen läßt[1]), so erkennt man, daß von den drei Wurzeln, die zu erwarten sind, zwei den Wert $1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ haben und die dritte $1 + 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ ist. Wir erhalten somit eine rechnerische Bekräftigung der früher gebrauchten Ausdrucksweise, daß im Berührungspunkte einer Tangente zwei Kurvenpunkte mit ihr zusammenfallen.[2])

Aber auch eine zweite Rechnung wollen wir eben noch anstellen. Wir wollen uns fragen, wie die dem Berührungspunkte benachbarten Stellen der Kurve zur Tangente liegen. Wir berechnen also den Wert von y für $x = 1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}} + \delta$, wo δ irgend eine kleine Größe bedeutet. Es ergibt sich nach leichter Ausrechnung[3])

$$y = 5{,}088 - 0{,}448\,\delta^2 + \delta^3 = 5{,}088 - (0{,}448 - \delta)\,\delta^2.$$

Ist also $\delta < 0{,}448$, so ist die Klammer $0{,}448 - \delta$ auf jeden Fall positiv; da nun δ^2 immer positiv ist, so liegt die Kurve für alle x, die kleiner sind als $1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}} + 0{,}448 = 0{,}632$ unterhalb jener wagerechten Tangente. Die Differenzen zwischen der Kurvenordinate und der Ordinate der Tangente, die zu demselben x gehören, sind *angenähert proportional*

1) Rechne das Produkt aus und bestätige damit die Behauptung! Der quadratische Faktor ist kein Zufall.

2) Eine ganz analoge Rechnung kann man für eine beliebige Tangente der Kurve durchführen!

3) Führe die Rechnung durch; beachte dabei, daß für $x = 1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $y = 5{,}088$ wird!

mit $\mathfrak{d}^2$, und dies um so genauer, je kleiner $\mathfrak{d}$ ist. Eine ganz ähnliche Rechnung kann man für den andern Wagepunkt anstellen[1]) und man wird finden, daß innerhalb gewisser Grenzen für $\mathfrak{d}$ die Kurve oberhalb der Tangente liegt. Der eine Punkt wird also als Maximum der Funktion y anzusprechen sein, der andere als Minimum.[2])

Erinnern wir uns jetzt dessen, was wir in § 3 über die abgeleitete Kurve an den Stellen, die den Wagepunkten entsprechen, ausgeführt und gesehen haben. Im Maximum der Hauptkurve geht die abgeleitete Kurve so durch die x-Achse, daß ihre Tangente mit dieser Achse einen stumpfen Winkel bildet; beim Minimum ist jener Winkel spitz. Da nun der Tangens eines stumpfen Winkels negativ, eines spitzen Winkels positiv ist, dieser Tangens aber durch den Wert angegeben wird, den die Ableitung der Ableitung, also die zweite Ableitung y'' annimmt, so erhalten wir an Stelle der obigen ganz nützlichen, aber etwas langen Rechnung die Regel:

An der Stelle, wo $y' = 0$ ist,
hat y ein Maximum oder Minimum,
je nachdem y'' negativ oder positiv ist.

Durch diese Regel sind wir in den Stand gesetzt, eine Menge von Aufgaben zu lösen, die sonst mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sind. Zwar wenn y eine Funktion zweiten Grades in x ist, braucht man diese Betrachtungen noch nicht, die Frage nach den *Extremwerten* der Funktion, wie man Maximum und Minimum zusammenfassend nennt, läßt sich auch „elementar" erledigen. Uns werden demnach hier vorzugsweise Aufgaben interessieren, bei denen der elementare Weg nicht oder nur mit Schwierigkeiten zum Ziele führt, bei denen also die Funktion den zweiten Grad übersteigt.

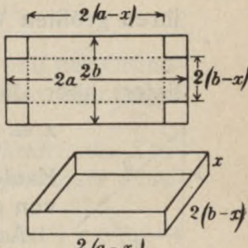


Fig. 20.

Aufgabe 1. *Schneide von den Ecken eines Rechtecks solche Quadrate weg, daß der durch Umbiegen entstehende offene Kasten den maximalen Inhalt hat.* (Fig. 20.)

1) Führe die Rechnung durch! 2) Zeichne die Kurve mit Benutzung aller gewonnenen Ergebnisse!

Sind $2a$ und $2b$ die Seiten des Rechtecks, x die Quadratseite und nachmalige Höhe des Kastens, so ist dessen Rauminhalt

$$y = 4x(a - x)(b - x).$$

Setzt man den Differentialquotienten gleich Null,

$$y' = 4[ab - 2(a + b)x + 3x^2] = 0,$$

so ergeben sich zwei Werte von x, deren weitere Untersuchung [1]) (rechnerisch und konstruktiv) wir dem Leser überlassen. Besonders einfach wird das Ergebnis, wenn $a = b$ ist.

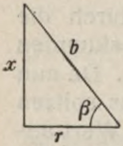


Fig. 21.

Aufgabe 2. *Über einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche erhebt sich eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten von gegebener Länge b. Wann hat die Pyramide den größten Inhalt?* (Fig. 21.)

Sei x die Höhe der Pyramide und r der Radius des Umkreises der Grundfläche, so ist die Grundfläche $\frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$, der Rauminhalt der Pyramide ist demnach $\frac{n}{6} x r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$. Dieses wird offenbar ein Maximum, wenn die Funktion

$$y = xr^2 = x(b^2 - x^2)$$

ihren größten Wert annimmt.

$$y' = b^2 - 3x^2 = 0$$

liefert aber die von der Zahl n unabhängige Bedingung $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$, so daß also β, der Neigungswinkel der Kante b gegen die Grundfläche eine bestimmte von n unabhängige Größe ist [2]).

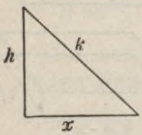


Fig. 22.

Aufgabe 3. *Von einer Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche und gleichen Seitenkanten ist der Rauminhalt gegeben. Es soll diejenige Form bestimmt werden, deren Seitenflächen die kleinste Summe haben.* [3]) (Fig. 22.)

---

1) Beachte hier *und in den weiteren Beispielen* besonders die zweite Ableitung und zeichne die Funktionskurve!

2) Wie groß sind β, r und die Seite a der Grundfläche? Berechne und konstruiere diese Größen!

3) Die Aufgaben 2 und 3 können praktisch bei der Konstruktion von Zelten Verwendung finden.

Sei h die Pyramidenhöhe, x der Radius des Inkreises der Grundfläche, eines regelmäßigen n-Ecks, k die Höhe eines Seitendreiecks, V das gegebene Volumen und O die Seitensumme, so ist

$$V = \frac{n}{3} h x^2 \tan\frac{\pi}{n}, \quad O = n x k \tan\frac{\pi}{n}, \quad k^2 = h^2 + x^2.$$

Bezeichnen wir das Quadrat von O mit y, so wird dieses mit O ein Minimum werden. Es ist nun

$$y = n^2 x^2 k^2 \tan^2\frac{\pi}{n} = n^2 x^2 h^2 \tan^2\frac{\pi}{n} + n^2 x^4 \tan^2\frac{\pi}{n}$$
$$= \frac{9V^2}{x^2} + n^2 x^4 \tan^2\frac{\pi}{n} \cdot$$

Daher wird

$$y' = -\frac{18V^2}{x^3} + 4n^2 x^3 \tan^2\frac{\pi}{n} = 0$$

zu setzen sein, woraus

$$n x^3 \tan\frac{\pi}{n} = \frac{3V}{\sqrt{2}}$$

folgt. Daraus ergibt sich zunächst überraschenderweise

$$\frac{h}{x} = \sqrt{2},$$

d. h. der Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche ist von n unabhängig. Die weiteren Ausrechnungen seien dem Leser überlassen.

Aufgabe 4. *Welche Form muß eine zylindrische Konservenbüchse haben, um bei 1 l Inhalt die geringste Oberfläche zu beanspruchen?*

Sei x der Grundkreisradius, h die Höhe, so ist[1]) $\pi x^2 h = 1$ und die Oberfläche wird

$$y = 2\pi x h + 2\pi x^2 = \frac{2}{x} + 2\pi x^2.$$

Aus der Gleichung

$$y' = -\frac{2}{x^2} + 4\pi x = 0$$

ergibt sich also $\pi x^3 = \frac{1}{2}$ und daher $h = 2x$. Die genauere

1) Mit welcher Einheit sind x und h gemessen?

Betrachtung zeigt, daß das gesuchte Minimum der Oberfläche in der Tat erreicht wird, wenn der Achsenschnitt des Zylinders ein Quadrat ist.

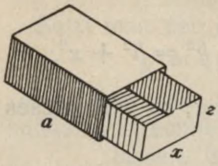


Fig. 23.

Aufgabe 5. *Ein Streichholzkästchen habe den Inhalt k^3, die längste Kante sei a, die kürzeste Kante, die Höhe, sei z, und die dritte Kante sei x. Wann wird die Gesamtoberfläche ein Minimum?*[1] (Fig. 23.)

Man hat $axz = k^3$ und die Oberfläche wird

$$y = 2xz + 3ax + 4az = \frac{2k^3}{a} + 3ax + \frac{4k^3}{x}.$$

Daher kommt

$$y' = 3a - \frac{4k^3}{x^2} = 0, \text{ also } x^2 = \frac{4k^3}{3a} \text{ und } \frac{z}{x} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 6. *Es sollen Maximum und Minimum des Ausdruckes*

$$y = (x - k_1)^3 + (x - k_2)^3 + (x - k_3)^3 + \cdots + (x - k_n)^3$$

bestimmt werden.

Setzt man

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = s_1,$$
$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \cdots + k_n^2 = s_2,$$
$$k_1^3 + k_2^3 + k_3^3 + \cdots + k_n^3 = s_3,$$

so erhält man

$$y = nx^3 - 3s_1x^2 + 3s_2x + s_3,$$

also wird

$$y' = 3nx^2 - 6s_1x + 3s_2 = 0, \quad y'' = 6nx - 6s_1;$$

mithin

$$x = \frac{1}{n}\left(s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - ns_2}\right).$$

Aufgabe 7. *Für welchen Wert von x wird*

$$y = (x - k_1)^2 + (x - k_2)^2 + \cdots + (x - k_n)^2$$

ein Minimum?

---

1) Von der Dicke des Holzes soll abgesehen werden.

§ 13. DER WENDEPUNKT.

Soeben haben wir festgestellt, daß in den Wagepunkten das Vorzeichen von y'' von Bedeutung ist; was geschieht aber nun, wenn die zweite Ableitung Null ist? Sehen wir zunächst von der Bedingung $y' = 0$ ab und untersuchen, was allein die Bedingung

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

bedeutet. Offenbar, daß der erste Differentialquotient ein Maximum oder Minimum, die abgeleitete Kurve also einen Wagepunkt hat. Dann hat aber, wie schon in § 3 erörtert, die Hauptkurve einen **Wendepunkt.**

Bei der vorhin untersuchten Parabel $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$ ergibt sich also die Gleichung

$$y'' = 6x - 6 = 0, \quad \text{mithin} \quad x_w = 1, \quad y_w = 4, \quad y'_w = -2,$$

wobei wir den Index w an die Koordinaten und die dafür berechnete erste Ableitung des Wendepunktes gesetzt haben. Da der Richtungsfaktor der *Wendetangente* -2 ist, so ist die Gleichung dieser Tangente

$$\frac{\eta - 4}{x - 1} = -2 \quad \text{oder} \quad \eta = -2x + 6,$$

wenn wir die Ordinaten der Punkte der Wendetangente mit η bezeichnen statt mit y, das wir für die Ordinaten der Kurvenpunkte benutzen. Für die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der Wendetangente ist $y = \eta$ und das ergibt die Gleichung

$$(x - 1)^3 = 0.$$

Fig. 24.

Wir müssen uns also vorstellen, daß hier drei Kurvenpunkte auf der Wendetangente zusammengerückt sind, was ja auch durch Drehung einer durch den Wendepunkt gehenden Geraden (Fig. 24) um diesen Punkt anschaulich wird. Gleichzeitig erhellt, daß die Kurve die Wendetangente durchsetzen muß. Noch eindringlicher wird dies klar, wenn wir für die Abszisse $x = 1 + \delta$ die zugehörigen Werte von y und η berechnen und die Differenz $y - \eta$ bilden. Es zeigt eine leichte Rechnung, daß

$$y - \eta = \delta^3$$

ist, daß also für positives δ die Kurve oberhalb der Wendetangente liegt, für negatives δ dagegen unterhalb. Außerdem sehen wir, daß die Differenzen $y - \eta$ den dritten Potenzen der Werte δ gleich sind. Ist die Gleichung der Kurve von höherem als dem dritten Grade, so sind die Differenzen $y - \eta$ um so genauer den dritten Potenzen von δ proportional, je kleiner δ ist.

Eine gute Übung ist es, alles bisher Erwähnte an einer einfachen Kurve, wie z. B. der Parabel 4. Ordnung

$$y = (x^2 - 1)^2$$

durchzunehmen. Hier ist, wie nur kurz angegeben sein mag[1]),

$$y' = 4x(x^2 - 1), \quad y'' = 12(x^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Daher sind die besonderen Punkte:

$x = 0,\ y = +1,\ y' = 0,\ y'' = -4$ (Maximum);
Tangente $\eta = 1$,

$x = \pm 1,\ y = 0,\ y' = 0,\ y'' = +8$ (Minimum);
Tangente $\eta = 0$,

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},\ y = \frac{4}{9},\ y' = \mp \frac{8}{3\sqrt{3}},\ y'' = 0$ (zwei Wendepunkte); Wendetangenten $\eta = \mp \frac{8}{3\sqrt{3}} x + \frac{4}{3}$.

Die wagerechte Tangente $\eta = 1$ schneidet die Kurve noch in den Punkten $x = \pm\sqrt{2},\ y = 1$, für welche $y' = \pm 4\sqrt{3}$ ist und die Tangenten $\eta = \pm 4x\sqrt{2} - 7$ sind, die sich auf der y-Achse im Punkte $y = -7$ schneiden. Jede Wendetangente schneidet die Kurve noch in einem Punkte und die Koordinaten dieser Punkte sind $x = \pm\sqrt{3},\ y = 4$. Diese Tangenten mit den Berührungs- und Schnittpunkten sind zuerst zu konstruieren; sie geben gewissermaßen ein festes Gerüst, in das sich die Kurve einschmiegt.[2])

1) Führe die Rechnung genau durch!

2) Zeichne die Kurve! Untersuche noch das Verhalten der Kurve in der Nähe eines Wendepunktes, setze also $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + \delta$!

Wenn bei einer Funktion an einer Stelle zugleich

$$y' = 0 \quad \text{und} \quad y'' = 0$$

ist, so hat die Funktion an dieser Stelle weder ein Maximum noch ein Minimum, die Kurve hat an dieser Stelle eine wagerechte Wendetangente und den Kurvenpunkt kann man daher einen *Wendewagepunkt* nennen.

Aufgabe 1. $y = x^3 + a$ (Wendepunkt).

Aufgabe 2. $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

$\cdot\ (y' = 4(x-1)^2(x+1))$.

Aufgabe 3. $y = \frac{1-x}{1+x^2}$ (2 Wagepunkte, 3 Wendepunkte).

§ 14. DIE PHYSIKALISCHE BEDEUTUNG DES ZWEITEN DIFFERENTIALQUOTIENTEN.

Aus dem in § 6 Gesagten folgt, daß sich die Geschwindigkeit einer Bewegung, die durch die Weg-Zeit-Gleichung

$$s = f(t)$$

gegeben war, durch

$$v = \frac{ds}{dt}$$

bestimmt. Wenn diese Größe v keine Konstante, sondern eine *lineare* Funktion von t ist,

$$v = at + c,$$

so bezeichnet man bekanntlich den Faktor a als die *Beschleunigung* der Bewegung.

Man sieht leicht, daß

$$a = \frac{v_1 - v}{t_1 - t}$$

wird, wenn $v_1 = at_1 + c$ gesetzt wird. Die Beschleunigung ist also hier Geschwindigkeitsdifferenz durch Zeitdifferenz. Ist die Geschwindigkeit weder konstant noch eine lineare Funktion der Zeit, so wird dieser Quotient nicht konstant sein und man kann seinen jeweiligen Wert als die *mittlere Beschleunigung* während des Zeitintervalles $t_1 - t$ bezeichnen. Daher wird man die *Beschleunigung an einer Stelle der Bahn* naturgemäß als den Grenzwert jenes Quotienten an dieser

Stelle definieren, d. h. als den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit, d. h.

Die Beschleunigung einer Bewegung ist der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

So ist beim freien Fall der Weg $s = \frac{1}{2} g t^2$, die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = gt$ und die Beschleunigung $\frac{d^2 s}{dx^2} = g$.

Befestigt man auf einer Seite des Fadens einer Atwoodschen Fallmaschine nach dem Vorschlage von Pfaundler ein Gläschen, aus dem während der Bewegung Wasser in einem feinen Strahle ausfließt, so wird die Weggleichung gegeben durch

$$s = s_0 + at + \tfrac{1}{2} b t^2 + \tfrac{1}{6} c t^3 .$$

Daher ist die Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt} = a + bt + \tfrac{1}{2} c t^2 ,$$

die Beschleunigung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = b + ct .$$

Ein weiteres Beispiel ist in § 15 erwähnt.

FÜNFTES KAPITEL.

§ 15. DIE DIFFERENTIATION DER GONIOMETRISCHEN FUNKTIONEN.

Der Sinus eines Winkels kann, wie man aus der Goniometrie weiß, als halbe vertikale Sehne im Einheitskreis dargestellt werden; ist also (Fig. 25) der Radius $OE = 1$ und sind PQ, P_1Q_1 Lote auf OE, die zu den Winkeln x und $x + \Delta x$ gehören, so ist

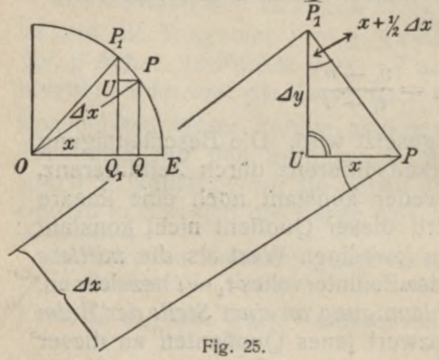
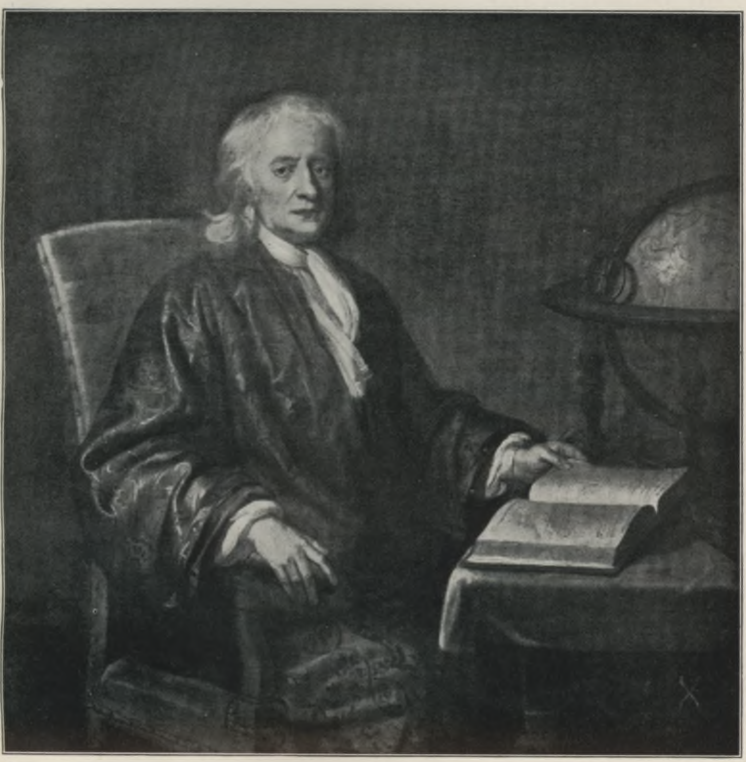


Fig. 25.

$$y = \sin x = PQ$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$= P_1 Q_1 .$$



NEWTON

Sibi gratulentur mortales tale tantumque extitisse humani generis decus.

(Mögen sich die Sterblichen Glück wünschen, daß eine Zierde des Menschengeschlechts von solcher Art und solcher Größe erstanden war.)

Macht man $Q_1 U = QP$, so ist $P_1 U = \Delta y$ und im rechtwinkligen Dreieck $PP_1 U$ ist der Winkel $\widehat{P_1} = x + \frac{1}{2}\Delta x$, die Hypotenuse $PP_1 = 2 \sin \frac{1}{2}\Delta x$. Demnach ist

$$\cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = \frac{\Delta y}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\sin \frac{1}{2}\Delta x}.$$

Läßt man nun Δx nach Null konvergieren, so konvergiert der letzte Bruch nach 1 (vgl. Formel I) und man erhält

$$\text{XI)} \qquad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Aus derselben Figur erkennt man ebenso[1]), daß

$$\text{XII)} \qquad \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x.$$

Zur Differentiation des Tangens benutzen wir die Bruchregel IX (S. 30) und erhalten aus

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

also ist

$$\text{XIII)} \qquad \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

und analog

$$\text{XIV)} \qquad \frac{d \cot x}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Zeichnet man die Funktionskurven im rechtwinkligen Koordinatensystem, so erhält man die Wage- und Wendepunkte in so einfacher Art und ebenso auch die Konstruktion der Tangenten, daß wir das billig dem Leser überlassen dürfen. Ebenso einfach wie zur Übung empfehlenswert ist es, die höheren Differentialquotienten der vier goniometrischen Funktionen zu berechnen.

Bei der Funktion

$$x = r \sin(ax + b)$$

erhält man unter Beachtung der Formel X (S. 31)

---

1) Leite die beiden Formeln XI und XII unter Anwendung goniometrischer Umformung aus den Differenzenquotienten $\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ und $\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$ her!

$$y' = ar\cos(ax+b)\,, \qquad y'' = -a^2 r\sin(ax+b) = -a^2 y\,,$$

Formeln, die beim Pendel, bei der harmonischen Bewegung, bei den elastischen (ungedämpften) Schwingungen für die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung wohlbekannt sind.

Recht geeignete schwierigere Beispiele bilden die Untersuchungen und graphischen Darstellungen der Funktionen

$$y = x\sin x \quad \text{und} \quad y = \frac{\sin x}{x}\,.$$

Bei der ersteren erhält man die Wagepunkte aus

$$y' = x\cos x + \sin x = 0 \quad \text{d. h.} \quad \tan x = -x\,;$$

man wird also bei der graphischen Behandlung die Kurve $y = \tan x$ mit der Geraden $y = -x$, der Halbierenden des zweiten und vierten Quadranten zum Schnitt bringen, um diejenigen Abszissen zu erhalten, bei denen $x\sin x$ Wagepunkte hat. Bei der zweiten Funktion haben wir für $x = 0$ den Wert

$$y = \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Die erste Ableitung

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

ist an dieser Stelle unendlich groß, die Tangente steht also auf der x-Achse senkrecht und die Kurve hat hier eine *Spitze*. Die Wagepunkte ergeben sich aus der Gleichung $\tan x = x$, so daß man die Tangenskurve mit der Halbierenden des ersten und dritten Quadranten zu schneiden hat.

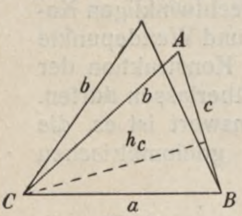


Fig. 26.

Beispiel 1. *Dreht man im Dreieck ABC die Seite b um C, während a festbleibt, so ändert sich mit dem Winkel γ auch die Seite c; wie ist diese Änderung beschaffen?* (Fig. 26.)

Nach dem Kosinussatze ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Differenziert man nach γ, so ist

$$2c\frac{dc}{d\gamma} = 2ab\sin\gamma;$$

daher ist

$$\frac{dc}{d\gamma} = \frac{ab\sin\gamma}{c} = \frac{2J}{c} = h_c,$$

unter J den Inhalt des Dreiecks verstanden. Die *Änderungsgeschwindigkeit von c ist also gleich dem jeweiligen Abstande von dem Drehpunkte C.*

Beispiel 2. *Ein Punkt bewegt sich von P aus geradlinig mit der Geschwindigkeit c_1 nach dem Punkte R auf der Geraden g und von da mit der Geschwindigkeit c_2 geradlinig nach Q. Wann wird der gebrochene Weg in der kürzesten Zeit durchlaufen?*

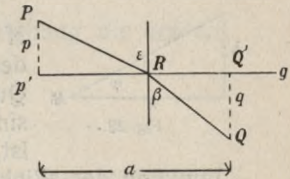


Fig. 27.

Sind (Fig. 27) die Abstände $PP' = p$, $QQ' = q$, die Strecke $P'Q' = a$ und nennt man ϵ und β die Winkel der beiden Wegstrecken mit dem Lote in R, so legt die Gleichung

$$1.\quad p\tan\epsilon + q\tan\beta = a$$

die Abhängigkeit des Winkels β von ϵ fest. Daher bestimmt sich der Differentialquotient von β nach ϵ aus der Gleichung

$$2.\quad \frac{p}{\cos^2\epsilon} + \frac{q}{\cos^2\beta}\cdot\frac{d\beta}{d\epsilon} = 0.$$

Ferner ist $PR = p : \cos\epsilon$, $QR = q : \cos\beta$, die Zeit aber, die zum Durchlaufen des gebrochenen Weges gebraucht wird, ist

$$3.\quad t = \frac{p}{c_1\cos\epsilon} + \frac{q}{c_2\cos\beta}.$$

Differenziert man nach ϵ, so kommt

$$4.\quad \frac{dt}{d\epsilon} = -\frac{p\sin\epsilon}{c_1\cos^2\epsilon} - \frac{q\sin\beta}{c_2\cos^2\beta}\,\frac{d\beta}{d\epsilon}$$

oder unter Benutzung der Beziehung 2.

$$5.\quad \frac{dt}{d\epsilon} = -\frac{p\sin\epsilon}{c_1\cos^2\epsilon} + \frac{p\sin\beta}{c_2\cos^2\epsilon}.$$

Das Minimum ergibt sich daher, wenn man diesen Differentialquotienten Null setzt, also wenn

$$\frac{\sin \epsilon}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

d. h. wir erhalten das *Brechungsgesetz* in der von Fermat zuerst gegebenen Form; der Punkt muß sich nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz bewegen, wenn er in der kürzesten Zeit von P nach Q gelangen soll.

Beispiel 3. *Wie hoch müssen zwei im Abstande $2a$ stehende Straßenlaternen sein, damit der in der Mitte gelegene Punkt das Maximum der Beleuchtung erhält.*

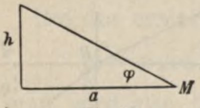


Fig. 28.

Das von einer Laterne nach dem Punkte M gehende Licht muß dort ein Maximum der Erleuchtung erzeugen. Da diese dem Quadrat des Abstandes umgekehrt, dem Kosinus des Einfallswinkels direkt proportional ist, so erhält man für die Intensität J als Funktion des Winkels φ (Fig. 28) den Ausdruck

$$J = \frac{k}{a^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi .$$

Daher ist

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{k}{a^2}\left[\cos^3 \varphi - 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi\right] = 0$$

zu setzen, und daraus ergibt sich

$$\tan \varphi = \frac{h}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

d. h. die Laternenhöhe soll sich zum halben Abstand verhalten wie die Seite zur Diagonale eines Quadrats.

Aufgabe 1. *Aus den beiden Seiten a und b das Dreieck größten Inhalts zu zeichnen. Wie groß ist der eingeschlossene Winkel γ?*

Aufgabe 2. *Die Punkte P und Q* (vgl. Beispiel 2) *liegen auf derselben Seite der Geraden g; ein Punkt soll mit konstanter Geschwindigkeit c von P über einen Punkt R auf g nach Q in der kürzesten Zeit gelangen.* (Reflexionsgesetz.)

Aufgabe 3. *Bestimme die n^{te} Ableitung von $\sin(ax+b)$ und von $\cos(ax+b)$.*

Aufgabe 4. *Ein Punkt bewegt sich nach der Gleichung $s = r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right)\right]$, wobei t die variable Zeit ist. Bestimme die maximale Geschwindigkeit.*

§ 16. INVERSE FUNKTIONEN; DIFFERENTIATION DER ZYKLOMETRISCHEN FUNKTIONEN.

Ist y als Funktion von x gegeben, so ist dadurch auch umgekehrt x als Funktion von y bestimmt, und man nennt die in dieser Beziehung zueinander stehenden Funktionen, die wir etwa schreiben:

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad x = \varphi(y)$$

invers. Wir fragen uns, in welcher Beziehung die beiden Differentialquotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad x' = \frac{dx}{dy}$$

zueinander stehen. Da beides Grenzwerte von Quotienten sind, so müssen wir auf ihren Ursprung, auf die Differenzenquotienten zurückgreifen. Da ersieht man denn sofort, daß diese

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

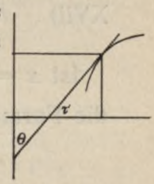


Fig. 29.

reziprok sind. Ist das nach erfolgtem Grenzübergang auch noch so? Die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung löst die Frage für uns, da wir es nur mit „vernünftigen“ Kurven zu tun haben, völlig. Denn nennen wir (Fig. 29) τ den Winkel, den die Tangente eines Kurvenpunktes mit der x-Achse bildet, θ den Winkel, den sie mit der y-Achse macht, so bestehen die Gleichungen

$$\tau + \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \tan\tau, \quad \frac{dx}{dy} = \tan\theta$$

und aus ihnen geht ohne weiteres hervor, daß

XV) $$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1,$$

daß also die beiden Differentialquotienten reziprok sind.

Dieser Sachverhalt gestattet uns eine bequeme Berechnung der ersten Ableitungen der zyklometrischen Funktionen[1]), die ja die Inversen der goniometrischen Funktionen sind.

Ist also $x = \sin y$, demnach $y = \arcsin x$, so folgt aus $\frac{dx}{dy} = \frac{d\sin y}{dy} = \cos y$ unmittelbar $\frac{dy}{dx} = \frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos y}$ und daher

$$\text{XVI)} \qquad \frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

denn es ist ja $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

Ist $x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, so wird

$$y = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

daher ist

$$\text{XVII)} \qquad \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ist $x = \tan y$, also $y = \arctan x$, so folgt aus $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ die Formel

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

also

$$\text{XVIII)} \qquad \frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

und analog

$$\text{XIX)} \qquad \frac{d\,\mathrm{arccot}\, x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

---

1) $y = \arcsin x$, gelesen arcussinus x, bedeutet den Arcus, dessen Sinus den Wert x hat; so ist z. B. $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, folglich $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$. Analog ist es bei den andern Funktionen. Aus der Periodizität der goniometrischen Funktionen folgt, daß die zyklometrischen Funktionen unendlich vieldeutig sind. So ist z. B. $\tan\alpha = \tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha + 2\pi) = \cdot\cdot = \tan(\alpha + k\pi)$; bezeichnen wir diesen Wert mit a, so ergibt sich $\arctan a = \alpha + k\pi$, wobei k jede ganze positive oder negative Zahl sein kann. Analog bei den andern Funktionen! Wie erhält man die graphische Darstellung? (Spiegelung der goniometrischen Kurven an der Halbierungslinie des ersten und dritten Quadranten!)

Beispiel. *Die (gespitzte) Zykloide.* (Fig. 30 und 31.)

Rollt der Kreis mit dem Radius a auf der Geraden OX, so beschreibt irgendeiner seiner Punkte die Zykloide, eine Kurve, die auf der Geraden mit Spitzen aufsteht. Legen wir den Koordinatenursprung O in eine solche Spitze und

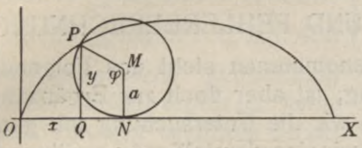


Fig. 30.

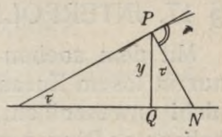


Fig. 31.

bezeichnen mit φ den Winkel, um den sich der Kreis bis zum Punkte P gedreht hat: $P\widehat{M}N = \varphi$, so ist $ON = a\varphi$, also wird

$$x = a\varphi - a\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ und } y = a + a\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{y-a}{a}$$

und

$$\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{y-a}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}.$$

Daher wird die Gleichung der Zykloide

$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

wobei wir y als unabhängige, x als abhängige Veränderliche ansehen. Wir rechnen demnach[1])

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2} \text{ usw.}$$

Nun ist aber die Subnormale QN bei einer beliebigen Kurve, wie aus dem rechtwinkligen Dreieck PQN mit dem Winkel τ hervorgeht, $QN = y\tan\tau$, also wird hier

$$QN = y\tan\tau = y\frac{dy}{dx} = \sqrt{2xy - y^2},$$

und daraus geht hervor, daß der in Fig. 31 mit N bezeich-

---

1) Führe die Rechnungen genau durch!

nete Punkt genau derselbe Punkt ist, der auch in Fig. 30 so genannt war, d. h. die Normale des Punktes P geht durch den augenblicklichen Berührungspunkt N des rollenden Kreises und der Abszissenachse.

§ 17. INTERPOLATION UND FEHLERBERECHNUNG.

Mit dem soeben Durchgenommenen steht das Folgende nur in losem Zusammenhang, ist aber doch zur Ergänzung nicht unwesentlich. Fangen wir die Untersuchung mit ganz bekannten Dingen an. Wenn wir eine vierstellige Logarithmentafel aufschlagen, so finden wir die vierstelligen Mantissen der Logarithmen der Zahlen 100, 101, 102, . . ., 999, und man weiß, daß man durch ein einfaches Interpolationsverfahren den Logarithmus einer beliebigen vierstelligen Zahl finden kann. Betrachten wir diese Art der Berechnung von Zwischenwerten genauer auf ihre *Berechtigung* hin.

Wir finden etwa

$$\log 210 = 2{,}3222\,, \quad \log 211 = 2{,}3243\,,$$

der zehnte Teil der „Tafeldifferenz" in Einheiten der vierten Dezimale ist 2,1, das wird bekanntlich mit der vierten Stelle des Numerus multipliziert und bildet dann den Zuschlag zum log 210. So erhalten die Logarithmen

von	210,1	210,2	210,3	210,4	210,5
die Mantissen:	3224	3226	3228	3230	3233
von	210,6	210,7	210,8	210,9	
die Mantissen:	3235	3237	3239	3241,	

die mit den wirklichen Werten durchaus übereinstimmen. Wollte man aber etwa log 420 nach demselben Verfahren bilden, d. h. $2{,}1 \cdot 2100 = 4410$ zur Mantisse von log 210 addieren, so erhielte man 2,7632, während doch 2,6233 der richtige Wert ist. Daher lernt man im Anfangsunterrichte wohl die „Regel", daß kleinen Differenzen der Nummeri die Differenzen der Logarithmen proportional sind. Wie kommt das, ist das nur eine Eigentümlichkeit der Logarithmen und wie klein müssen die Differenzen sein?

Leicht ist es auf diese Fragen die Antwort zu finden, wenn wir nur auf die Bedeutung der Zahlen achten, wenn wir uns nur gegenwärtig halten, daß die Logarithmen selbst irrational, jene Mantissen 3222 und 3243 nur angenäherte Werte sind, daß also

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}32215 \leqq \log 210 < 2{,}32225 \\ 2{,}32425 \leqq \log 211 < 2{,}32435 \end{array}\right| \begin{array}{c}\text{Differenz der Grenzen} \\ 0{,}0001.\end{array}$$

Die graphische Darstellung der Tabellenwerte ergibt gar keine Punkte, sondern vertikale Strecken von der Länge 0,0001, auf denen die wahren Werte liegen müssen.

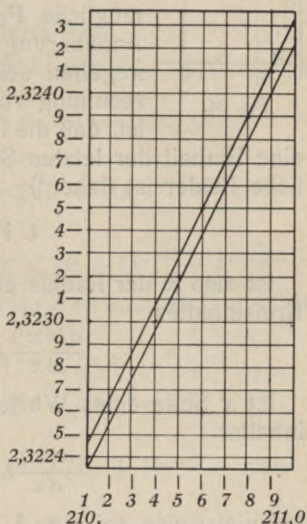


Fig. 32.

Tragen wir nun unsere oben berechneten Zwischenwerte als Punkte ein, so sehen wir (Fig. 32), daß sie alle innerhalb des Streifens liegen, der die beiden gegebenen vertikalen Endstrecken verbindet, die Kurve $y = \log x$ liegt selbst völlig innerhalb dieses Streifens! Wir werden also folgendes über Funktionstafeln nunmehr aussagen können:

Die Werte irgendeiner Funktion $y = f(x)$ müssen für die aufeinanderfolgenden Werte von x mindestens auf so viel Dezimalen ausgerechnet werden, daß die ideale Kurve völlig innerhalb des die einzelnen vertikalen Strecken verbindenden Streifenpolygones liegt (Fig. 33).

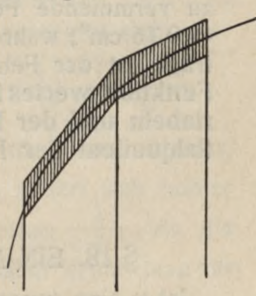


Fig. 33.

Wenn das der Fall ist, so kann man *„nach der geraden Linie"* interpolieren, d. h. die Differenzen der Funktionswerte *innerhalb eines solchen Streifens* sind den Differenzen der unabhängigen Veränderlichen x proportional.[1])

1) Erprobe alles dies an einer selbsthergestellten dreistelligen Tafel für $\sin x$!

Hier waren die Werte für x bestimmt gegebene, genaue Zahlen. Anders wird die Sache aber, wenn die Werte von x ungenaue, etwa durch Messung gewonnene Zahlen sind. Ist (Fig. 34) $\delta x = QQ_1$ der mögliche Fehler von $x = OQ$, ist $QP = y = f(x)$, $Q_1P_1 = y + \delta y = f(x + \delta x)$ und ist endlich PV die Tangente des Punktes P, so wird der mögliche Fehler δy von y mit genügender Annäherung durch UV statt durch UP_1 angegeben sein, wenn die Genauigkeit der Berechnung von y auf so viel Stellen geschehen ist, daß die Differenz der beiden Grenzen, also eine Einheit der letzten Stelle, gleich VP_1 ist. Dieser mögliche Fehler ist daher[1])

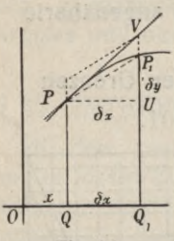


Fig. 34.

$$UV = \frac{dy}{dx}\,\delta x.$$

Ist also x der Radius eines Kreises, so ist der Fehler des Kreisinhaltes

$$\frac{d(\pi x^2)}{dx}\,\delta x = 2\pi x \delta x.$$

Ist x Seite eines Würfels, so ist der Fehler des Würfelinhaltes

$$\frac{d(x^3)}{dx}\,\delta x = 3x^2 \delta x;$$

beispielsweise sei $x = 5{,}7$ cm, $\delta x = 0{,}1$ cm, so wäre der zu vermutende Fehler des Würfelinhalts $3 \cdot 5{,}7^2 \cdot 0{,}1\ \text{cm}^3 = 9{,}75\ \text{cm}^3$; während aber der Fehler von x nur $1{,}7\%$ beträgt, ist der Fehler des Inhalts $5{,}3\%$. **Der Fehler des Funktionswertes ist also proportional dem Fehler der Variabeln und der Proportionalitätsfaktor ist der Differentialquotient der Funktion.**

SECHSTES KAPITEL.

§ 18. EIN ARITHMETISCHER HILFSSATZ.

Ist μ eine ganze positive Zahl und $a > b$, so ergeben sich aus der Identität

1) Sprich den Satz in Worten aus!

$$\frac{a^{\mu+1} - b^{\mu+1}}{a-b} = a^{\mu} + a^{\mu-1} b + \cdots + b^{\mu}$$

die Ungleichungen

$$(\mu + 1) b^{\mu} < \frac{a^{\mu+1} - b^{\mu+1}}{a-b} < (\mu + 1) a^{\mu}.$$

Setzt man hier

$$b = k, \quad a = k + 1,$$

so erhält man aus der ersten Ungleichung

$$(\mu + 1) k^{\mu} < (k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1};$$

setzt man

$$a = k, \quad b = k - 1,$$

so gibt die zweite Ungleichung

$$k^{\mu+1} - (k-1)^{\mu+1} < (\mu + 1) k^{\mu}.$$

Es ist demnach

$$k^{\mu+1} - (k-1)^{\mu+1} < (\mu + 1) k^{\mu} < (k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}.$$

Schreibt man die Ungleichungen für $k = 1, 2, 3, \ldots n$ untereinander:

$$\begin{array}{ll}
1^{\mu+1} & < (\mu+1) 1^{\mu} < 2^{\mu+1} - 1^{\mu+1} \\
2^{\mu+1} - 1^{\mu+1} & < (\mu+1) 2^{\mu} < 3^{\mu+1} - 2^{\mu+1} \\
\cdots & \cdots \\
n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1} & < (\mu+1) n^{\mu} < (n+1)^{\mu+1} - n^{\mu+1}
\end{array}$$

und addiert, so erhält man

$$n^{\mu+1} < (\mu + 1)(1^{\mu} + 2^{\mu} + \cdots + n^{\mu}) < (n+1)^{\mu+1} - 1^{\mu+1}.$$

Dividiert man nun durch $(\mu + 1) n^{\mu+1}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{\mu+1} < \frac{1^{\mu} + 2^{\mu} + \cdots + n^{\mu}}{n^{\mu+1}} < \frac{1}{\mu+1}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\mu+1} - \frac{1}{n^{\mu+1}}\right].$$

Läßt man n immer größer werden, so wird $\frac{1}{n}$ immer kleiner, und die rechts stehende obere Grenze nähert sich immer mehr der links stehenden unteren Grenze $\frac{1}{\mu+1}$, da die eckige Klammer nach 1 konvergiert. Daher erhält man für positives ganzes μ die Formel[1])

1) Die Formel hat noch einen weiteren Gültigkeitsbereich als nur für ganzes positives μ; aber wir brauchen sie nur in dem oben angegebenen Bereiche.

$$\text{XX)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1^\mu + 2^\mu + \cdots + n^\mu}{n^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu+1}.$$

So ist der Grenzwert dieser Summe

$$\frac{1}{2} \text{ für } \mu = 1, \quad \frac{1}{3} \text{ für } \mu = 2 \text{ usw.}$$

§ 19. ANWENDUNGEN. DAS BESTIMMTE INTEGRAL.

Eine einfache Anwendung der zuletzt gewonnenen Formel bietet uns die Berechnung der Fläche, die von einem Bogen OA der Parabel μ^{ter} Ordnung $y = x^\mu$ und den Koordinaten a und a^μ des Endpunktes A begrenzt wird. Teilt man die Strecke a in n gleiche Teile (in Fig. 35 sind es 4) und errichtet in den Teilpunkten die Ordinaten, so kann man — wie aus Fig. 35 ersichtlich — zwei Summen von Rechtecken bilden, zwischen denen die gesuchte Fläche F liegt:

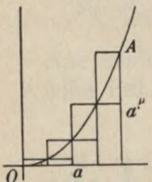


Fig. 35.

$$\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^\mu + \frac{a}{n}\left(\frac{2a}{n}\right)^\mu + \cdots + \frac{a}{n}\left(\frac{na}{n}\right)^\mu > F > \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^\mu$$
$$+ \frac{a}{n}\left(\frac{2a}{n}\right)^\mu + \cdots + \frac{a}{n}\left(\frac{n-1}{n}a\right)^\mu$$

oder

$$a^{\mu+1}\frac{1^\mu + 2^\mu + \cdots + n^\mu}{n^{\mu+1}} > F > a^{\mu+1}\frac{1^\mu + 2^\mu + \cdots + n^\mu}{n^{\mu+1}} - \frac{1}{n}.$$

Läßt man n unendlich groß werden, so nähern sich die beiden Grenzen immer mehr und konvergieren nach dem Werte $\frac{1}{\mu+1}$. Daher ist

$$F = \frac{1}{\mu+1} a^{\mu+1} = \frac{1}{\mu+1} a \cdot a^\mu,$$

d. h. die Fläche ist der $(\mu+1)^{\text{te}}$ Teil des aus den Koordinaten des Endpunktes gebildeten Rechtecks.

Zu einer neuen und bequemeren Bezeichnungsweise gelangen wir, wenn wir

$$\frac{a}{n} = \Delta x$$

setzen und die zu den einzelnen Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n$ nennen. Dann ist

$$F = \lim_{\Delta x = 0} (y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + y_3 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x) = \lim_{\Delta x = 0} \sum_{x=0}^{x=a} y \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \sum_{0}^{a} x^{\mu} \Delta x.$$

Die „Grenzen" 0 und a beim Summenzeichen Σ bedeuten offenbar, daß die Werte von $y = x^{\mu}$ für alle Teilwerte der Abszisse von $x = 0$ bis $x = a$ gebildet werden sollen.

Für dieses Symbol $\lim\limits_{\Delta x = 0} \sum\limits_{0}^{a} y \Delta x$ bedient man sich nach dem Vorgange von Leibniz des kürzeren Symbols

$$\int_0^a y\,dx.$$

Das dabei gebrauchte Zeichen $\int$ ist eine früher viel gebrauchte Form des s; hier hat sie den Namen **Integral** erhalten. $\int_0^a y\,dx$ wird gelesen: **das Integral $y\,dx$ von 0 bis a, 0 und a heißen die Grenzen des Integrals**; der Ausdruck heißt ein **bestimmtes Integral** – „bestimmt", weil die Grenzen gegeben sind.

Das Ergebnis stellt sich nun so dar

$$\text{XXI)} \qquad \int_0^a x^{\mu}\,dx = \frac{a^{\mu+1}}{\mu+1} \qquad (\mu \textit{ eine positive ganze Zahl}).$$

Für $\mu = 0$ wird

$$\int_0^a dx = a;$$

für $\mu = 1$ erhält man den trivialen Fall des Dreiecksinhalts, für $\mu = 2$ kommt die gemeine Parabel.

Ein zweites Beispiel bietet uns die Berechnung des Kegelinhalts. Sei ein Polygon, ein Kreis oder eine sonst von einer Linie umschlossene Fläche als Grundfläche G eines Kegels (oder einer Pyramide) gegeben. Führen wir im Abstande x von der Spitze einen ebenen Querschnitt G_x parallel zur Grundfläche, so ist, wie in der elementaren Stereometrie gelehrt wird,

$$G_x = \frac{x^2}{h^2} G .$$

Wir teilen nun die Höhe h in n gleiche Teile $\frac{h}{n} = \Delta x$ und schließen den Kegel (die Pyramide) in zwei Treppen ein, deren einzelne Stufen Zylinder (Prismen) von der Höhe Δx sind. Die genauere Ausführung sei dem Leser überlassen; das Ergebnis ist

$$\text{Volumen} = \int_0^h \frac{x^2}{h^2} G\, dx = \frac{G}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \frac{G}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} Gh ,$$

eine bekannte Formel der Elementarmathematik, deren Herleitung *nur* mit Hilfe von Infinitesimalbetrachtungen möglich ist. Den konstanten Faktor $\frac{G}{h^2}$ nimmt man vor die Summe, ehe man Δx nach Null konvergieren läßt!

Weitere leichte Beispiele bieten die Berechnungen von Schwerpunkten und von Trägheitsmomenten einfacher Figuren. Sei z. B. das Trägheitsmoment J einer Strecke $AB = a$ in bezug auf eine in ihrem Endpunkt A senkrecht zu ihr stehende Achse gesucht. Ist m die Masse der Längeneinheit und $\Delta x = a : n$, so wird das Trägheitsmoment eines Teilchens, das sich von x bis $x + \Delta x$ erstreckt (von A aus gemessen), zwischen $mx^2\Delta x$ und $m(x + \Delta x)^2\Delta x$ liegen.[1]) Daraus ergibt sich leicht[2])

---

1) Die Masse des Teilchens ist $m\Delta x$, da m als Masse der Längeneinheit definiert war!

2) Führe die Untersuchung nochmals ausführlich durch unter Verwendung von $\frac{a}{n}$ anstatt Δx!

$$J = m\int_0^a x^2 dx = \frac{m a^3}{3} = \frac{1}{3} M a^2,$$

wenn wir $ma = M$ die Masse der ganzen Strecke nennen.

Sei noch das Volumen einer Halbkugel vom Radius r berechnet. Wir ersetzen die Halbkugel zunächst in bekannter Weise durch eine Folge von n Zylinderschichten von der Höhe $\frac{r}{n} = \Delta x$ und dem Inhalte $\pi(r^2 - x^2)\Delta x$ (Fig. 36), so daß die so entstandene „Kugeltreppe" den Inhalt

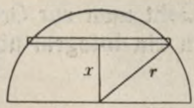


Fig. 36.

$$\sum_0^r \pi(r^2 - x^2)\Delta x = \pi r^2 \sum_0^r \Delta x - \pi \sum_0^r x^2 \Delta x$$

hat. Dann wird die Halbkugel selbst das Volumen

$$\pi r^2 \int_0^r dx - \pi \int_0^r x^2 dx = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

haben.

§ 20. EIN GONIOMETRISCHER HILFSSATZ UND SEINE ANWENDUNG.

Die Summe der Reihe

$$S = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha$$

kann man dadurch bestimmen, daß man $2S\sin\alpha$ bildet und nun die Formel

$$2\cos k\alpha \sin\alpha = \sin(k+1)\alpha - \sin(k-1)\alpha$$

auf alle Glieder der Reihe anwendet. Man erhält dann

$$\begin{aligned}2S\sin\alpha &= \sin 2\alpha + (-\sin\alpha + \sin 3\alpha) + (-\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)\\ &\quad + \cdots + (-\sin(n-2)\alpha + \sin n\alpha) + (-\sin(n-1)\alpha\\ &\quad + \sin(n+1)\alpha) = -\sin\alpha + \sin n\alpha + \sin(n+1)\alpha,\end{aligned}$$

also wird

$$S = \frac{\sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Setzt man hier $\alpha = \Delta x$ und $n\alpha = n\Delta x = \varphi$ und multipliziert die letzte Gleichung für S noch mit Δx, so folgt

$$S\Delta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\varphi + \Delta x) + \sin\varphi - \sin\Delta x\right)\frac{\Delta x}{\sin\Delta x}.$$

Geht man zur Grenze $\Delta x = 0$ über, so sieht man, daß $S\Delta x$ in ein Integral übergeht, und man erhält

XXII) $$\int_0^\varphi \cos x\,dx = \sin\varphi.$$

Ganz auf demselben Wege erhält man

XXIII) $$\int_0^\varphi \sin x\,dx = 1 - \cos\varphi.$$

§ 21. DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM DIFFERENTIALQUOTIENTEN UND DEM INTEGRAL.

Wenn wir die beiden Formeln XXI und XXII

$$\int_0^a x^\mu\,dx = \frac{1}{\mu+1}a^{\mu+1} \quad \text{und} \quad \int_0^\varphi \cos x\,dx = \sin\varphi$$

betrachten, so fällt es uns auf, daß die mit dem Symbol dx behaftete Funktion unter dem Integralzeichen der Differentialquotient der rechts stehenden Funktion ist. In der Tat ist ja

$$\frac{d\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}}{dx} = x^\mu \quad \text{und} \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

Ist das allgemein so, oder ist das nur gerade hier, gewissermaßen zufällig so?

Zur Entscheidung dieser wichtigen Frage gehen wir auf die Entstehung des Differentialquotienten und des Integrals zurück. Da hatten wir zuerst einmal zu einer gegebenen Kurve $y = f(x)$ die abgeleitete Kurve gezeichnet. Wir teilen, um das nochmals auszuführen, etwa die Strecke von $x = a$

bis $x=b$ in n gleiche Teile Δx – in Fig. 37 sind es vier Teile –, die Ordinaten mögen y_1, y_2, y_3, y_4, y, die Kurvenpunkte mögen P_1, P_2, P_3, P_4, P heißen. Dann ziehen wir die Sehnen 1, 2, 3, 4 und die Parallelen zur Abszissenachse, tragen etwa links vom Nullpunkt die Strecke $OE=1$ auf und ziehen durch E Parallelen zu den Sehnen nach der y-Achse; die dort abgeschnittenen Stücke sind die Tangenten der Steigungswinkel der Sehnen. Tragen wir diese Stücke in einem senkrecht darunter liegenden Koordinatensysteme als Ordinaten auf, so ergeben sich die Punkte $P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*$ mit den Ordinaten

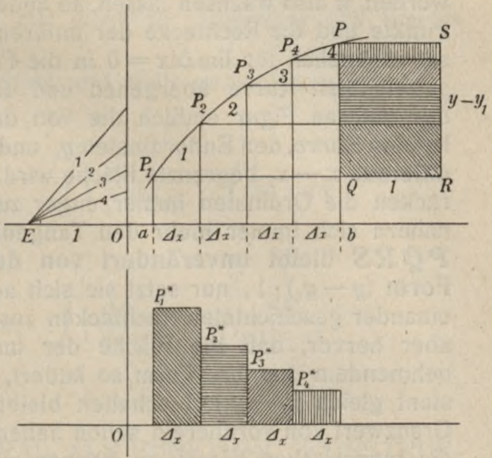


Fig. 37.

$$y_1^*=\frac{y_2-y_1}{\Delta x},\quad y_2^*=\frac{y_3-y_2}{\Delta x},\quad y_3^*=\frac{y_4-y_3}{\Delta x},\quad y_4^*=\frac{y-y_4}{\Delta x}.$$

Daher ist

$$y_1^*\Delta x+y_2^*\Delta x+y_3^*\Delta x+y_4^*\Delta x=(y-y_1)1=PQ\cdot 1=PQRS,$$

wenn wir die Rechteckseite $QR=1$ machen. D. h. aber:

Die Summe der Rechtecke der unteren Figur ist gleich dem Rechteck der oberen Figur gebildet aus der Differenz der Endordinaten und der Einheitsstrecke,

ein Rechteck, das sich übrigens zusammensetzt aus den einzelnen Schichten mit den Höhen y_2-y_1 usw. Man erkennt leicht: *für den Fall, daß ein Steigungswinkel stumpf, sein Tangens also negativ ist, geht das betreffende Rechteck subtraktiv in die Figur wie in die Rechnung ein*; ferner aber ist sofort ersichtlich, daß *der Fall, wo der Steigungswinkel ein rechter ist, einfach auszuschließen* ist, denn dessen Tangens wird ja unendlich groß, und dann ist die vorstehende Betrachtung nicht mehr anwendbar.

Wenn wir nun in beiden Figuren das Δx immer kleiner werden, n also wachsen lassen, so ändern sich die gesternten Punkte und die Rechtecke der unteren Figur immerfort, bis sie schließlich für $\lim \Delta x = 0$ in die Punkte P_1', P_2' ... der abgeleiteten Kurve übergehen und die schraffierte Fläche der unteren Figur endlich die von dem Bogen der abgeleiteten Kurve, den Endordinaten y_1' und y' und der Abszissendifferenz $x - x_1$ begrenzte Fläche wird. In der oberen Figur rücken die Ordinaten immer enger zusammen, die Sehnen nähern sich immer mehr den Tangenten, **aber die Fläche $PQRS$ bleibt unverändert von derselben Größe und Form** $(y - y_1) \cdot 1$, nur setzt sie sich aus immer mehr übereinander geschichteten Rechtecken zusammen. Daraus geht aber hervor, daß die Fläche der unteren Figur bei abnehmendem Δx ihre Form so ändert, daß ihre Größe konstant gleich $(y - y_1) \cdot 1$ erhalten bleibt, daß wir also ihren Grenzwert von vornherein schon haben! Betrachten wir nur die numerischen Werte, so können wir den Faktor 1 weglassen und können nun das Ergebnis kurz schreiben:

XXIV) $$\int_{x_1}^{x} y' dx = y - y_1,$$

wobei wir aber nicht vergessen wollen, nochmals ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß wir den Fall $y' = \infty$ in dem Intervall von x_1 bis x ausgeschlossen hatten, und daß wir von vornherein angenommen hatten, daß die Kurve $y = f(x)$ eine sogenannte *vernünftige Kurve* war.

Die eben abgeleitete *Grundformel der Integralrechnung* sagt aber aus:

Steht unter dem Integralzeichen eine Funktion $\varphi(x)$, die sich als Ableitung einer Funktion $f(x)$ darstellen läßt, so ist das bestimmte Integral gleich der Differenz derjenigen beiden Werte, die $f(x)$ für die Grenzen des Integrals annimmt:

XXV) $$\int_a^b \varphi(x) dx = f(b) - f(a), \text{ wenn } \varphi(x) = f'(x),$$

immer unter Beachtung der mehrfach angegebenen Kautelen!

Damit ist z. B. die Gültigkeit der Formel XXI (S. 57) für *beliebiges reelles* μ *mit alleiniger Ausnahme des Wertes* $\mu = -1$ bewiesen.

Aufgaben. Berechne und stelle geometrisch dar:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx, \quad \int_5^7 \sqrt[3]{x^2}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 22. DAS INTEGRAL ALS FUNKTION. KONSTRUKTION DER INTEGRALKURVE.

In den vorigen Paragraphen war mehrfach begründet und in Beispielen benutzt worden, daß der Inhalt einer Fläche, die von einem Kurvenbogen, von zwei Ordinaten und einem Stück der x-Achse begrenzt ist, durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt wird, dessen Berechnung uns in einigen Fällen bereits gelang und dessen Zusammenhang mit dem Differentialquotienten soeben in einer allgemeineren Untersuchung berührt wurde. Das bestimmte Integral hat feste Grenzen und ist eine bestimmte Zahl. Jetzt wollen wir einen Schritt weiter tun und das Integral *als Funktion seiner oberen Grenze* auffassen lernen. Der Sinn dieser Aussage ist ja sofort klar, denn wenn ich die untere Grenze eines Integrals festhalte, die obere aber verändere, so verändert sich der Wert des Integrals in ganz bestimmter Weise; dadurch ist aber doch gerade der Tatbestand der funktionalen Abhängigkeit zwischen dem Integral und seiner oberen Grenze gegeben.

Sei also $y = \varphi(x)$ irgendeine Funktion, die graphisch eine

„vernünftige“ Kurve darstellt (Fig. 38) und in dem betrachteten Intervall nicht unendlich wird; sei ferner $OA = a$, $AB = \varphi(a)$, Q ein variabler Punkt auf der Achse, $OQ = x$, $PQ = y$ und es sei endlich bezeichnet die variable Fläche

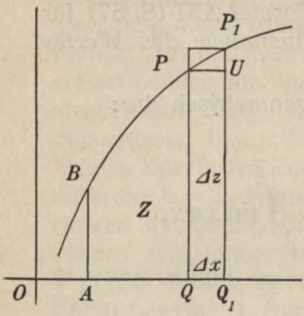


Fig. 38.

$$ABPQ = z = f(x).$$

Wir denken uns die Fläche z dadurch erzeugt, daß die Ordinate AB nach rechts hin verschoben wird, so daß A mit konstanter Geschwindigkeit auf der Achse, B auf der Kurve wandert. Dann sieht man, daß z eine Funktion von x ist, die für $x = a$ den Wert Null hat. Wir wollen nun die *Änderungsgeschwindigkeit* von z bestimmen, denn überall, wo eine Bewegung vorliegt, fragen wir nach der Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit wird aber durch den Differentialquotienten gegeben. Lassen wir x um $QQ_1 = \Delta x$ zunehmen, so nimmt y um $UP_1 = \Delta y$, z um $\Delta z = QQ_1P_1P$ zu und man erkennt leicht, daß:

$$y\Delta x < \Delta z < y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y;$$

also ist

$$y < \frac{\Delta z}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Lassen wir nun Δx nach Null konvergieren, so verschwindet auch Δy und die beiden Grenzen rücken zusammen, d. h. wir haben das Ergebnis

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Wir erkennen also nun:

$z = \int_a^x y\,dx$ ist diejenige Funktion der oberen Grenze x, die für $x = a$ Null ist und deren Differentialquotient nach x die Funktion y ist.

Es muß noch angemerkt werden, daß als Folge dieser ganzen Auffassung *für die Fläche z eine negative Zahl* *herauskommt, wenn die Ordinaten negativ sind.* Wenn wir also die von der Sinuskurve und der Achse umschlossene Fläche für die Grenzen $x = 0$ bis $x = 2\pi$ berechnen wollen, so ergibt sich Null, da sich der positive Teil, der über der Achse liegt (von $x = 0$ bis $x = \pi$) gegen den unter der Achse befindlichen negativen Teil glatt weghebt.

Versuchen wir jetzt auch das Integral als Funktion seiner oberen Grenze graphisch darzustellen, so sehen wir zunächst, daß derjenige Wert von x, für den das Integral Null sein soll, also die untere Grenze beliebig gewählt werden kann. Im übrigen muß man dann offenbar genau umgekehrt verfahren wie bei der Darstellung der abgeleiteten Kurve. Es mögen also (Fig. 39) P_1', P_2', P_3' ... Punkte der gegebenen Kurve $y = z' = \varphi(x)$ sein. Wir machen $OE = 1$ und ziehen durch E diejenigen Geraden, die auf der y-Achse Strecken gleich den Ordinaten der Punkte P_1', P_2', P_3' ... abschneiden. Diese mit 1, 2, 3 ... bezeichneten Geraden geben die Richtungen der Tangenten in den zugehörigen Punkten P_1, P_2, P_3 ... der Kurve $z = f(x)$, der *Integralkurve* an. Man nimmt etwa P_1 beliebig an, zeichnet die durch ihn gehende Tangente und sorgt im Weitergehen dafür, daß die andern Ordinaten in den vorgeschriebenen Richtungen 2, 3... überschritten werden. Das geht aber am einfachsten, wenn man mitten zwischen je zwei Ordinaten neue Ordinaten einschiebt und die Parallelen bis zu diesen hin zieht. Eine ge-

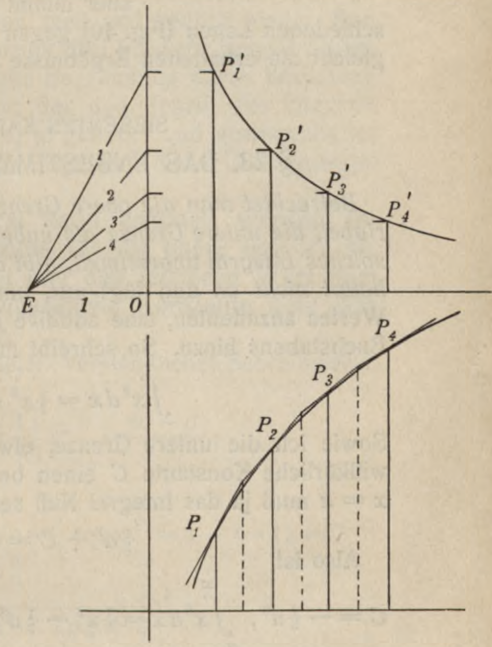


Fig. 39.

ringe Übung, die dem Leser aber sehr empfohlen sei, wird die Zweckmäßigkeit und verhältnismäßige Genauigkeit der Methode erweisen.

Aufgabe. Bestimme durch graphische Integration der Fläche eines Viertelkreises vom Radius 2 die Zahl π!

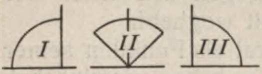


Fig. 40.

Anleitung. Als Längeneinheit nimmt man etwa 5 cm, den Viertelkreis aber nimmt man nacheinander in verschiedenen Lagen (Fig. 40) gegen die Achsen an und vergleicht die erhaltenen Ergebnisse miteinander.

SIEBENTES KAPITEL.

§ 23. DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL.

Betrachtet man die obere Grenze eines Integrals als variabel, die untere Grenze als unbestimmt, so nennt man ein solches Integral unbestimmt, gibt bei ihm die Grenzen überhaupt nicht an und fügt nur, um die Unbestimmtheit des Wertes anzudeuten, eine additive Konstante mit Hilfe eines Buchstabens hinzu. So schreibt man z. B.

$$\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C.$$

Sowie ich die untere Grenze, etwa a, festsetze, erhält die willkürliche Konstante C einen bestimmten Wert, denn für $x = a$ muß ja das Integral Null sein:

$$\tfrac{1}{3}a^3 + C = 0.$$

Also ist

$$C = -\tfrac{1}{3}a^3, \quad \int_a^x x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}a^3; \quad \int_a^b x^2 dx = \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{3}a^3.$$

Das bestimmte Integral kann also aus dem unbestimmten leicht gefunden werden und es stellte sich hier als eine Differenz dar. In der Tat folgen ja aus dem Begriff des Integrals als Grenzwert einer Summe, oder als Fläche ohne weiteres die Beziehungen

XXVI) $$\int_a^b y\,dx + \int_b^c y\,dx = \int_a^c y\,dx,$$

$$\text{XXVII)}\qquad \int_a^b y\,dx + \int_b^a y\,dx = 0,$$

$$\text{XXVIII)}\qquad \int_a^b y\,dx = \int_c^b y\,dx - \int_c^a y\,dx,$$

wobei a, b, c beliebige konstante Werte von x darstellen, und wobei selbstverständlich immer vorausgesetzt wird, daß y in allen diesen Intervallen reell und endlich bleibt. Den Wortlaut der durch die letzten drei Formeln ausgedrückten Sätze und ihre anschauliche Begründung durch Zeichnung überlassen wir dem Leser, der den Begriff des Integrals um so fester erfassen wird, je genauer und gewissenhafter er dabei zu Werke geht. Ein Ergebnis [1]) dieser Überlegungen sei aber doch angegeben:

Das bestimmte Integral kann ermittelt werden, indem man das unbestimmte für die obere und für die untere Grenze berechnet und den letzteren Wert vom ersteren abzieht; die willkürliche Konstante hebt sich bei der Subtraktion weg.

Beispiele sind etwa in leicht verständlicher Schreibweise:

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{1}{4}\Big[x^4\Big]_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4};$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \Big[\cos x\Big]_\pi^0 = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_a^b \frac{(x+p)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2px + q}} = \Big[\sqrt{x^2 + 2py + q}\Big]_a^b$$

$$= \sqrt{b^2 + 2pb + q} - \sqrt{a^2 + 2pa + q}.$$

Wir sind damit imstande, jedes Integral $\int \varphi(x)\,dx$ zu berechnen, wenn wir die unter dem Integralzeichen stehende Funktion $\varphi(x)$ als Differentialquotienten einer Funktion $f(x)$ kennen und zunächst auch nur dann.

1) Vgl. Formel XXV S. 62 und den dortigen Satz.

§ 24. INTEGRATIONSREGELN.

Wir hatten auf mehrfache Weise gesehen, daß die Integration als eine Umkehrung der Differentiation angesehen werden kann. Es erhebt sich also ganz naturgemäß die Frage, in welcher Gestalt die besondern Regeln, die wir bei der Differentiation zusammengesetzter Funktionen aufgedeckt hatten, hier bei der inversen Operation verwendbar werden. Was die Summe mehrerer Funktionen anlangt, so ist es ja leicht bewiesen[1]), daß das Integral einer Summe von Funktionen die Summe der Integrale der einzelnen Funktionen selbst ist. Ebenso haben wir schon in § 19 darauf hingewiesen, daß ein konstanter Faktor, der unter dem Integralzeichen steht, vor dies Zeichen gesetzt werden kann. Den beiden Formeln V und VI (S. 26, 27) treten also die Formeln

$$\text{XXIX)}\qquad \int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx,$$

$$\text{XXX)}\qquad \int a y\,dx = a\int y\,dx$$

zur Seite.

Wie steht es aber nun mit Formel VII (S. 28)? Wir hatten die Formel aus der Gleichung

$$\Delta y = \Delta(uv) = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

gewonnen. Aus ihr ergibt sich

$$u\Delta v = \Delta(uv) - v\Delta u - \Delta u\Delta v$$

oder

$$u\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x = \frac{\Delta(uv)}{\Delta x}\Delta x - v\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x - \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}(\Delta x)^2.$$

Bilden wir nun durch Grenzübergang die unbestimmten Integrale, so erhalten wir

$$\lim_{\Delta x=0}\sum u\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x = uv - \lim_{\Delta x=0}\sum v\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x - \lim_{\Delta x=0}\left[\Delta x\sum\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\right].$$

Der letzte Ausdruck wird aber wegen des voranstehenden

---

[1]) Führe diesen Beweis analytisch durch und mache ihn Dir geometrisch klar.

Faktors Δx verschwinden und so entsteht endlich die wichtige Formel

XXXI) $$\int u v' dx = uv - \int v u' dx.$$

Das durch diese Formel angedeutete Integrationsverfahren nennt man **partielle Integration**; sie ist eine der fruchtbarsten Methoden bei der Berechnung der Integrale.

§ 25. BEISPIELE FÜR PARTIELLE INTEGRATION.

In folgenden Beispielen soll gezeigt werden, wie die letzte Formel anzuwenden ist. Da wir dabei die Integration als Umkehrung der Differentiation behandeln, so sind wir, wie bei jeder inversen Operation, auf ein Versuchen angewiesen. Es entsteht bei manchen Aufgaben sogar die Möglichkeit, verschiedene Wege einzuschlagen.

Beispiel 1. $\int \arcsin x\, dx.$

Wir kennen bisher keine Funktion, deren Differentialquotient $\arcsin x$ wäre. Setzen wir aber

$$u = \arcsin x, \quad v' = 1,$$

so ergibt sich

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x,$$

also wird

$$\int \arcsin x\, dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das letztere Integral aber ist leicht zu ermitteln, da doch

$$\frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist. Also wird nun

$$\int \arcsin x\, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

wobei wir die beim unbestimmten Integral auftretende beliebige Konstante mit C bezeichnet haben.

Beispiel 2. $\int x \sin x\, dx.$

Hier setzen wir

$$u = x, \quad v' = \sin x,$$

erhalten demnach

$$u' = 1, \quad v = -\cos x$$

und damit

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Setzen wir aber in dem gegebenen Ausdrucke

$$u = \sin x, \quad v' = x,$$

so wird

$$u' = \cos x, \quad v = \tfrac{1}{2} x^2$$

und damit kommt

$$\int x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} x^2 \sin x - \tfrac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

So gelangt man also nicht zum gewünschten Ziele, denn das Integral auf der rechten Seite ist uns unbekannt. Aber wir können aus dieser Gleichung unter Benutzung des vorher ausgewerteten Integrales der Funktion $x \sin x$ jetzt finden:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$
$$= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$$

Beispiel 3. $\int \cos^2 x \, dx.$

Wir setzen

$$u = \cos x, \quad v' = \cos x,$$

also

$$u' = -\sin x, \quad v = \sin x.$$

Daher wird

$$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx$$
$$= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx.$$

Folglich ist

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \sin x + \int dx,$$

also endlich

$$\int \cos^2 x \, dx = \tfrac{1}{2} \cos x \sin x + \tfrac{1}{2} x + C.$$

Beispiel 4. $$2pr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi.$$

Dieses Integral erhält man, nebenbei bemerkt, bei der Berechnung des Winddruckes gegen einen Kreiszylinder mit Radius r und der Höhe 1, wenn p den Winddruck senkrecht zur Flächeneinheit und φ den Winkel zwischen einer Kreistangente und der Windrichtung bedeutet.

Wir setzen
$$u = \sin^2 \varphi, \quad v' = \sin \varphi,$$
erhalten
$$u' = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad v = -\cos \varphi,$$
also
$$\begin{aligned}\int \sin^3 \varphi \, d\varphi &= -\sin^2 \varphi \cos \varphi + 2\int \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2\int \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \, d\varphi \\ &= \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2\int \sin \varphi \, d\varphi - 2\int \sin^3 \varphi \, d\varphi.\end{aligned}$$
Daher wird nun
$$3\int \sin^3 \varphi \, d\varphi = -\sin^2 \varphi \cos \varphi - 2 \cos \varphi,$$
also endlich
$$\begin{aligned}2pr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi &= -\tfrac{2}{3} pr \left[\sin^2 \varphi \cos \varphi + 2 \cos \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\tfrac{2}{3} pr [-2] = \tfrac{4}{3} pr.\end{aligned}$$
Angemerkt sei noch, daß man dies Integral auch unter Verwendung der goniometrischen Formel
$$\sin^3 \varphi = \tfrac{3}{4} \sin \varphi - \tfrac{1}{4} \sin 3\varphi$$
behandeln kann. Man erhält dann leicht
$$\int \sin^3 \varphi \, d\varphi = -\tfrac{3}{4} \cos \varphi + \tfrac{1}{12} \cos^3 \varphi.$$

ANHANG.

AUFGABEN ZUR DIFFERENTIALRECHNUNG.

Differenziere:

1) $y = \sqrt[3]{x^5}$.

2) $y = x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}$.

3) $y = ax^2 + bx + c + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}$.

4) $y = \sqrt[5]{3 + 4x - 5x^2}$.

5) $y = \sqrt[n]{ax^2 + bx + c}$.

6) $x^2y^3 - x^3y^2 = (x - y)^5$.

7) $\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}$;

(durch wiederholte Differentiationen beider Seiten entstehen bemerkenswerte Formeln).

8) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

9) $y = \frac{x + x^3 + x^5}{1 + x^2 + x^4}$.

10) Untersuche die Kurve $y = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$.

11) (Filteraufgabe). Aus einem Kreise mit dem Radius ρ ist ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel φ herausgeschnitten; dieser Sektor sei der Mantel eines geraden Kreiskegels. Wie groß muß φ gewählt werden, damit der Inhalt des Kegels ein Maximum wird?

Untersuche die Kurven

12) $y = \sin x + \cos x$;

13) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$;

14) $y = \sin (x^2)$.

15) Differenziere die Gleichung $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$.

Verfahre ebenso mit andern goniometrischen Gleichungen!

16) Bilde den ersten und den zweiten Differentialquotienten von $\tan (ax + b)$.

17) Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c hat den größten Inhalt?

18) Bilde die zweiten Differentialquotienten der zyklometrischen Funktionen.

19) Differenziere $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ und $\arctan\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$.

20) Es sei

$$y=\sqrt{1+2x-3x^2}$$

und gemessen sei $x = 38{,}2$ cm mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,03 cm. Wie groß ist der wahrscheinliche Fehler von y? Gib die Fehler auch in Prozenten an.

21) In der Gleichung $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ seien

1) a und c konstant; berechne $\frac{db}{d\gamma}$.

2) a und γ konstant; berechne $\frac{dc}{db}$ und $\frac{db}{dc}$.

3) c und γ konstant; berechne $\frac{db}{da}$.

AUFGABEN ZUR INTEGRALRECHNUNG.

22) Stelle eine Tabelle von unbestimmten Integralen als Umkehrungen der Formeln der Differentialrechnung her.

Berechne

23) $\int\limits_{-3}^{+3} x^2\,dx;\quad \int\limits_{-3}^{+3}\sqrt[5]{x}\,dx;\quad \int\limits_{-a}^{+a}x^3\,dx;\quad \int\limits_{a}^{b}\sqrt[3]{7}\,dx.$

24) $\int(ax+b)\,dx;\quad \int 3\,(2\,ax+b)\,(ax^2+bx+c)^2\,dx;$

25) $\int\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx.$

26) $\int\limits_0^{\pi} a\cos(ax+b)\,dx;\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a}{\cos^2(ax+b)}\,dx.$

27) $\int\cos^2 x\,dx;\quad \int\cos^3 x\,dx;\quad \int\sin^4 x\,dx.$

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.