Uebungen

in der

Anwendung der Integral-Rechnung.

Von

Dr. Martin Ohm,

Prof. ord. an der Königl. Universität zu Berlin; Lehrer an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule ebendaselbst; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissensch. zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. zu München, der Accademia Pontificia de' nuovi Lincei zu Rom, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife.

Mit einer Figurentafel.

Nürnberg, 1856.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Vorrede.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Integral-Rechnung, ist die Auffindung der Summe von unendlichvielen unendlichkleinen Produkten von der Form

$$f_x \cdot dx, \quad \text{oder} \quad f_{x,y} \cdot dx \cdot dy, \quad \text{oder} \quad f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

oder, allgemein, von der Form

$$f \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \cdots dx_n,$$

wo f eine Funktion der n Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ ist, während diesen letzteren nach und nach alle, innerhalb gegebener Grenzbedingungen liegende, bezüglich um die (positiv gedachten) unendlichkleinen $dx_1, dx_2, dx_3, \cdots dx_n$ verschiedenen und von einander unabhängigen Werthe gegeben gedacht werden. — Von dieser Summation hängt in der Geometrie, die Berechnung der Bogenlängen (die Rektifikation), der Inhalte begrenzter, ebenen und gekrümmten Flächenräume (die Quadratur) und der Inhalte begrenzter Körperräume (die Kubatur) ab, — in der Statik aber, die Berechnung der Massen, der Schwerpunkte, der Attraktionen, überhaupt die Berechnung der mittlern Kraft (ihrer Größe, ihrer Richtung und ihrem Angriffspunkte nach), wenn auf die unendlichvielen Molecüle eines Körpers, oder einer (materiellen) aus Molecülen gebildeten Fläche, oder einer (materiellen) aus Molecülen gebildeten Linie, irgend Kräfte wirken, — in der Dynamik dagegen, die Berechnung der Trägheits-Momente, der Hauptdrehaxen und noch die Beantwortung mancher anderen Fragen. — Aber auch bei rein analytischen Untersuchungen kommen diese Aufgaben zur Sprache. Dabei kann man in vielen, vielleicht in den meisten Fällen, geometrische Betrachtungen zu Hilfe nehmen, in vielen Fällen aber wieder auch nicht. Die Frage: Wie können solche Produkte überhaupt ausgewerthet werden, und die andere Frage: Wie kann solches ohne Zuziehung geometrischer Betrachtungen geschehen, — sind daher gleich wichtig, und die gründlichste Beantwortung beider unerläßlich.

Und doch findet der Anfänger in der höhern Mathematik, in keiner bis jetzt vorhandenen Schrift eine nur einigermaßen ausreichende Belehrung über diese wichtigsten Anwendungen. Selbst die Wissenschaft läßt in den Werken ihrer Meister, gerade in dieser Beziehung, noch manches zu wünschen übrig. Sieht man doch selbst häufig noch solche Summen, mit bestimmten (einfachen oder vielfachen) Integralen verwechselt, während dieselben zwar zuweilen durch ein einziges bestimmtes Integral ausgedrückt werden können, häufiger aber nur durch die Summe mehrerer solcher bestimmten Integrale. — Bei vielen Schriftstellern steht ja selbst der Begriff des „bestimmten Integrals" nicht ganz fest, so daß man das Wort und das entsprechende Zeichen, bald in dem einen, bald in einem ganz anderen Sinne gebraucht sieht. So erlaubt eine solche Doppelsinnigkeit an den betreffenden Stellen vielleicht sein mag, und so wenig anstößig für einen mit dem Gegenstande Vertrauten, so wenig zuträglich ist ein solches Verfahren einem Anfänger in demselben Gegenstande gegenüber. Derselbe irrt zu lange im Nebel umher, bis sich ihm endlich irgendwo eine lichte Stelle aufthut, und selbst dann hat er doch noch keinen ganz freien Ausblick.

Euler hat schon gelehrt, durch welches analytische Verfahren das zu summirende Element umgeformt werden müsse, wenn neue Veränderliche eingeführt werden. Laplace (in seiner Mécanique coeleste. T. II.), Ivory (in den Philosophical transactions 1809.) und Andere, haben davon die wichtigsten Anwendungen gemacht. Allein gerade eine der wichtigsten Fragen, nämlich die über die Grenzen der neuen bestimmten Integrale, blieb, von dem wissenschaftlichen Standpunkt aus angesehen, stets gänzlich unbeachtet; man hat sich immer damit begnügt, in jedem besondern Falle der Anwendung, diese Grenzen (nicht aus der Natur der Frage mit Nothwendigkeit heraus-, sondern) nur auf vereinzelte Weise herbei- zu holen, also ohne daß man erkennen könnte, wie in jedem anderen besonderen Falle verfahren werden müsse.

Die Frage wegen der Grenzen dieser neuen Integrale, wenn die der alten feststehen, ist namentlich für die vielen Fälle um so weniger völlig erledigt worden (sobald man geometrische Betrachtungen nicht zu Hilfe nehmen kann oder nicht zu Hilfe nehmen will) — wo das alte (einfache oder) mehrfache Integral nicht durch ein einziges, sondern nur durch die Summe zweier oder mehrerer der neuen Integrale ausgedrückt werden kann. — In dieser Beziehung läßt namentlich die Darstellung Lagrange's (in seiner Théorie des fonctions und in seinen Leçons sur le calcul des fonctions) fast alles zu wünschen übrig. Indem dieser ausgezeichnete Analyst die Differential- und Integral-Rechnung endlich von dem Alp des Unendlichkleinen befreite, ging er zu weit und wollte auch in den Anwendungen dieser Rechnungen (zur Rektifikation, Quadratur, Kubatur ꝛc. ꝛc.) vom Unendlichkleinen nichts wissen. Abgesehen davon, daß, indem er seine abgeleiteten Funktionen in Grenzen einschließt, die sich ohne Ende fort der Gleichheit nähern, — abgesehen also davon, daß er eigentlich doch das Unendlichkleine, nur mehr versteckt, in seine Betrachtung aufnehmen muß, — abgesehen davon, daß sein Verfahren in den analogen Anwendungen auf statische und dynamische Probleme ein ungemein schwerfälliges, kaum überall klar durchzuführendes ist, — abgesehen endlich davon, daß seine Beweise für die oben gedachten Umformungen durchaus und völlig der an ihm sonst überall gewohnten Schärfe und Durchsichtigkeit ermangeln, — erfährt man, wie dies eine nothwendige Folge seiner Darstellungsweise ist, über die Grenzen der Integrale gar nichts, d. h. er läßt das wichtigste Moment der Sache ganz außer Acht. — So lächerlich es ist, das Unendlichkleine in die allgemeinen Lehren der Differential- und Integral-Rechnung jetzt noch mit aufzunehmen (denn dies ist nichts anders als auf einen bereits überwundenen Standpunkt zurückkehren), so nothwendig ist doch dessen Berücksichtigung, ja dessen volle Anerkennung, in den Anwendungen auf stetige Größen, — seien es Raum- oder Kraft-Größen, — weil man sich der Stetigkeit durch die nicht stetige (discrete) Zahl, nur mittelst dieser Hilfe bemächtigen kann. — Nur müssen strenge Beweise der Richtigkeit des Hauptsatzes der Anwendungen geführt werden.

Seit Lagrange's erwähnten Arbeiten ist die oben gedachte Frage von den Analysten kaum mehr berührt worden; man begnügte sich mit der Möglichkeit der Anwendung der oben angedeuteten Formeln, für die gewöhnlichen praktischen Fragen. In den Lehrbüchern gab man die Sache so wieder, wie man sie fand. In dem 9ten Theil meines „Systems der Mathematik" habe ich zwar diesen Gegenstand gründlicher zu behandeln versucht; allein die vorgeschriebene Kürze, mit welcher in einem, das Ganze der Analysis umfassenden Werke, manche einzelne Gegenstände behandelt werden müssen, erlaubte mir doch nicht, auf die vielen verschiedenen Punkte aufmerksam zu machen, welche alle, bei dem Eingehen in's Einzelne, berücksichtigt werden müssen. — In der Abhandlung des Prof. J. C. Ullherr (zu München) „die Substitutionsformel bei ein- und mehrfachen Integralen (Nürnberg 1853.)" findet sich endlich ein eben so schöner als strenger Beweis dessen, was Lagrange aufgestellt hat; allein die Frage über die Bestimmung der Grenzen der neuen Integrale, bleibt auch hier in der nöthigen Durchsichtigkeit und Deutlichkeit noch unbeantwortet, eben weil der Verfasser nur die Angaben des Lagrange außer Zweifel setzen und den zweiten Theil der Frage nicht weiter verfolgen wollte.

Alles dies bewog mich, eine zufällige Zeit der Muße, die mir lange gefehlt hat, zu benutzen, um in einigen durchgreifenden Beispielen die Hauptfrage zur Sprache zu bringen und sie, wo möglich, auf eine solche Weise zu erledigen, daß jeder Anfänger in der höheren Mathematik, sich in den Stand gesetzt sieht, jedes andere lösbare, hieher gehörige Problem, mit Sicherheit, d. h. mit vollem Bewußtsein dessen, was er erreichen will und wie er es erreichen kann, zu behandeln. Nebenher klären sich dabei einige, bisher wissenschaftlich noch nicht gehörig erör..rte Punkte vollständig auf, so daß, nach meiner Ueberzeugung, auch die Wissenschaft als solche, einige kleine Fortschritte gemacht haben dürfte, obgleich dies bei meinen Arbeiten stets nur Nebenzweck ist. Mein Hauptzweck wird immer der bleiben, schwierigere und bisher dunkler gebliebene Lehren für jedermann durchsichtig und zugänglich zu machen. Schon die bloße Hoffnung, diesen Zweck in Bezug auf den fraglichen Gegenstand in der vorliegenden Arbeit nicht ganz verfehlt zu haben, gewährt mir große Befriedigung.

Weil die meisten der Integrale, welche in den hier betrachteten Beispielen erhalten worden sind, sich sehr schwer oder öfter gar nicht werden auswerthen lassen, — so können diese Resultate, wenn man sie aus dem Gesichtspunkt der unmittelbaren Anwendung auf das Leben ansieht, häufig sehr nutz- und deshalb werthlos erscheinen. Ein solcher Einwand trifft aber mehr oder minder alle „Uebungen" und zwar nicht blos in der Wissenschaft; — z. B. auch die Turn- und die militairischen „Uebungen", durch welche nie ein Menschenleben gerettet oder ein Feind geschlagen wird. — Von Allem, was wir, in der Jugend wie im späteren Leben, erlernen, brauchen wir im praktischen Leben, wie überhaupt in der wirklichen Anwendung, meist nur einen äußerst kleinen Bruchtheil; — man „übt sich" aber, und verschafft sich eben dadurch die Fähigkeit und die Gewandtheit, um, wenn man einmal vor einer wirklichen Lebens-Aufgabe (z. B. zur Förderung einer gründlicheren Naturlehre) steht, selbige mit dem nöthigen Geschick und mit einer größeren Hoffnung auf Erfolg, angreifen zu können. Dazu kommt noch, daß die Anwendungen der Mathematik auf die Naturlehre, wie sie in den letzten 30 Jahren (so wie früher schon auf die „Mechanik des Himmels") statt gefunden haben, gerade alle Kräfte, auch des geübtesten Analysten, in Anspruch nehmen.

Also gerade die Verfolgung dieser, für den Menschen als solchen, wichtigsten Anwendungen, wird „Uebungen", wie die vorliegenden, jetzt viel mehr als früher nothwendig machen, wenn der Einzelne in das wahre Wesen der Wissenschaft, auch von dieser Seite, näher eindringen und dadurch eben seine Befähigung allseitiger erzielen will. — Ein Lehrer der Mathematik endlich, der die Pflicht hat, Andere zu diesen wichtigsten Anwendungen der gesammten höhern Mathematik (auf gründlichere Erforschung der Natur) vorzubereiten, darf vollends nicht hoffen, seinen Zweck vollständig zu erreichen, wenn er sich nicht selbst in die gesammte Theorie die klarste Einsicht verschafft hat.

Deshalb glaube ich ein gründliches Eingehen auch in die vorliegenden „Uebungen" empfehlen zu müssen — überzeugt, daß das Studium derselben keinem Anfänger in der jetzigen höhern Mathematik, ohne größeren Nutzen sein und bleiben wird.

Berlin, im August 1855.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß.

Uebungen

in der

Anwendung der Integral-Rechnung.

Vorbereitung.

§. 1.

Damit unsere Leser dem Vortrage immer leicht folgen mögen, wollen dieselben vor allen Dingen die nachstehenden Begriffe, so wie die Bezeichnungs- und Ausdrucks-Weisen festhalten:

1) In einer unendlichen Reihe, welche nach ganzen Potenzen irgend eines Buchstaben, z. B. h, fortläuft, verstehen wir immer unter dem n^{ten} Gliede dasjenige, welches mit h^n versehen ist. Das 0^{te} Glied ist daher dasjenige, welches den Faktor h^0 hat, d. h. welches h gar nicht hat, — und nach diesem 0^{ten} Gliede (welches auch das allererste genannt werden kann) folgt dann das 1^{te} Glied, welches h^1 d. h. h als Faktor hat.

In der Reihe

$$a+bh+ch^2+dh^3+eh^4+\cdots$$

ist also a das 0^{te} oder allererste, bh das erste, ch^2 das zweite, dh^3 das dritte Glied u. s. w. f. (nach unserer Redeweise).

2) Ist f_x irgend eine Funktion von x, so bezeichnen wir durch f_{x+h} oder f_b oder f_a 2c. 2c. bezüglich das, was aus ihr wird, wenn man überall bezüglich x+h, oder b, oder a 2c. 2c. statt x setzt.

So lange x ganz allgemein gedacht ist, läßt sich f_{x+h} allemal in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln; nämlich es ist allemal

$$\text{I.}\quad f_{x+h}=f_x+f_x^{\text{I}}\cdot h+f_x^{\text{II}}\cdot\frac{h^2}{2!}+f_x^{\text{III}}\cdot\frac{h^3}{3!}+f_x^{\text{IV}}\cdot\frac{h^4}{4!}+\cdots\ ^{*)}$$

*) Unter n! verstehen wir das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots n$, während wir, wenn $n=1$ oder $=0$ ist, allemal die 1 darunter verstehen; also $3!=1\cdot2\cdot3$; $1!=1$ und $0!=1$.

und in dieser Reihe ist allemal das allererste oder 0te Glied die Funktion f_x selbst; die übrigen Koeffizienten sind im Allgemeinen ebenfalls bestimmte, von f_x abhängige (endliche) Funktionen von x, deren jede aus den nächst vorhergehenden und der erste f^I_x aus dem allerersten oder 0ten f_x, nach bestimmt festgestellten Regeln, deren Anwendung das Deriviren oder Ableiten genannt wird, gefunden werden. — Diese Koeffizienten heißen daher die Derivationen von f_x, und zwar der Reihe nach die 1te, 2te, 3te, 2c. 2c.

Wenn man bloß „Derivation" sagt, so versteht man stillschweigend die erste darunter.

Also ist f^I_x die Derivation von f_x; aber f^{II}_x ist die (erste) Derivation von f^I_x und die zweite von f_x u. s. w. f.

Denkt man sich in der Gleichung I. h unendlichklein (d. h. immer kleiner noch als jede noch so klein gedachte bestimmte absolute Zahl) und dann durch dx bezeichnet, so liefert solche diese andere, nämlich

II. $f_{x+dx} - f_x = f^I_x \cdot dx$, oder $df = f^I_x \cdot dx$,

wenn die Differenz zwischen den zu $x+dx$ und x gehörigen Werthen der Funktion f_x, durch df bezeichnet wird. Wächst also x um dx, so wächst f um df (welches auch negativ sein kann). Diese zusammengehörigen Zuwachse dx und df, sind beide unendlichklein und werden deshalb Differentialien genannt.

Aus II. folgt noch

III. $\dfrac{df}{dx} = f^I_x$

d. h. die Derivation f^I_x von f_x, ist allemal gleich dem Quotienten $\dfrac{df}{dx}$ der zusammengehörigen Differentialien; sie wird daher häufig auch der Differential-Quotient von f_x genannt; und diejenigen, welche den (angezeigten) Quotienten $\dfrac{df}{dx}$ noch von dem Werthe desselben f^I_x unterscheiden wollen, nennen auch den letzteren, nämlich die Funktion f_x^I, den Differential-Koeffizienten, weil sie in den Gleichungen I. und II. als Koeffizient erscheint. *)

Diese Differential-Koeffizienten (Derivationen oder Ableitungen), d. h. diese (endlichen) Funktionen von x, nämlich

$$f_x^I,\quad f_x^{II},\quad f_x^{III},\quad f_x^{IV},\quad \text{rc. rc.}$$

bezeichnet der Verf. gewöhnlich durch die Zeichen

$$\partial f_x,\quad \partial^2 f_x,\quad \partial^3 f_x,\quad \partial^4 f_x,\quad \text{rc. rc.}$$

und er bedient sich stets dazu der (runden) ∂, weil er durch dx, dy, df, rc. rc. mit stehendem d, allemal unendlichkleine Zuwachse (Differentialien) bezeichnet, welche x, y, f, rc. rc. erleiden sollen oder erleiden.

Versteht man unter „Differentiiren" einer Funktion f_x (nach Leibnitz) das Auffinden des, zum unendlichkleinen Zuwachs dx gehörigen unendlichkleinen Zuwachses df, so lehrt die Gleichung II., daß das „Differentiiren" von dem „Deriviren" oder „Ableiten" wesentlich nicht verschieden ist, da man aus der gefundenen Auswerthung $f_x^I \cdot dx$ des Differentials df, sogleich auch die Ableitung oder Derivation f_x^I, und umgekehrt aus der letztern sogleich auch wieder das Differential df ohne Weiteres hinschreiben kann.

3) Durch das Zeichen $\int f_x^I \cdot dx$, wo jetzt f_x^I eine beliebig gegebene Funktion von x vorstellen mag, bezeichnen wir jede

---

*) Hätte man in II. und folglich auch in III. die übrigen Glieder in I. zur Rechten beibehalten, so würde die III. so aussehen, nämlich

$$\frac{df}{dx} = f_x^I + \tfrac{1}{2} f_x^{II} \cdot dx + \tfrac{1}{6} f_x^{III} \cdot (dx)^2 + \quad \text{rc. rc.}$$

Die Summe aller übrigen Glieder zur Rechten, die nach f_x^I folgen, ist also ein Unendlichkleines, welches mit dx von einerlei Ordnung ist, und da nichts so klein bestimmt gedacht werden kann, welches kleiner noch wäre, als das Unendlichkleine, so ist die gedachte Summe der Null nächst angrenzend, und deshalb ist die Gleichung III. (und mit ihr auch die Gleichung II.) eine genaue.

Funktion F_x, deren Ableitung, $= f^I_x$, d. h. die so ist, daß man

$$\partial F_x = f^I_x$$

hat. Ist aber f_x eine der durch F_x vorgestellten Funktionen, d. h. ist

$$\partial f_x = f^I_x,$$

so ist auch

$$\partial(f_x + c)_x = f^I_x,$$

so lange nur c einen ganz beliebigen Ausdruck (also eine ganz beliebige Funktion anderer Veränderlichen) vorstellt, der aber von x unabhängig (nach x constant) ist. Jede dieser unendlichvielen, durch F_x oder $f_x + c$ vorgestellten Funktionen nennen wir ein Integral der gegebenen Funktion f^I_x, nach x genommen; und in so ferne das Zeichen $\int f^I_x \cdot dx$ sie alle zugleich vorstellt, nennen wir solches das allgemeine Integral der beliebig gegebenen Funktion f^I_x, nach x genommen. — Jede einzelne bestimmte dieser Funktionen, — entweder f_x oder $f_x + c$, wo aber c bereits einen völlig bestimmten Werth erhalten hat, nennen wir ein besonderes Integral von f^I_x, nach x genommen *).

---

*) Ein besonderes Integral einer einförmigen Funktion f^I_x kann unendlichvielförmig erscheinen und wird dies allemal thun, so oft die einzelnen Werthe dieser unendlichvielförmigen Funktion nur um einen, von x unabhängigen Ausdruck (um eine Konstante nach x) von einander verschieden sind. — So ist z. B. für $f^I_x = \frac{1}{x}$, das Integral $\int f^I_x \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx = log\, x$ unendlichvielförmig; aber man erhält auch alle Werthe von $log\, x$, wenn man zu einem derselben Lx, alle Werthe von $log\, 1$ d. h. $2n\pi \cdot \sqrt{-1}$ addirt, wo n sowohl Null, als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt. — Eben so ist für $f^I_x = \frac{1}{1+x^2}$, das Integral $\int f^I_x \cdot dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx =$ Bog. dessen Tangente x ist. Wird nun einer

4) Drückt f_x irgend ein besonderes Integral der beliebig gegebenen Funktion f^I_x aus, und $f_x + c = F_x$ ein beliebiges

---

dieser unendlichvielen Bogen durch $Arc\,tg.x$ bezeichnet, so sind alle diese Bogen durch $n\pi + Arc\,tg.x$ ausgedrückt, wo n sowohl Null als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt, während π den halben Umfang des Kreises für den Radius 1 (die Ludolf'sche Zahl) vorstellt. Bezeichnet man nun alle diese Bogen durch $\frac{1}{Tg}x$, so hat man $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{Tg}x$ und man hat zur Rechten eine unendlichvieldeutige Funktion von x, als das Integral einer eindeutigen Funktion $\frac{1}{1+x^2}$, nach x. Und obgleich $log\,x$ und $\frac{1}{Tg}x$ unendlichviele besondere Integrale (von bezüglich $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{1+x^2}$ nach x genommen) vorstellen, so ist doch keine dieser Funktionen das allgemeine Integral, welches im Gegentheil erst erhalten wird, wenn man noch C addirt und unter C jeden Ausdruck versteht, der kein x enthält. Man hat also als allgemeine Integrale erst

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = log\,x + C = log\,x + log\,c = log\,(cx)$$

und $$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{Tg}x + C = \frac{1}{Tg}x + \frac{1}{Tg}c = \frac{1}{Tg}\frac{c+x}{1-cx}.$$

Diese Bemerkungen gelten, so oft das Integral eine logarithmische Funktion ist, also auch ein Bogen z. B. $Arc\,sin.$ oder $Arc\,cos.$ 2c. 2c. — In jedem anderen Falle ist dagegen jedes besondere Integral $f_x = \int f^I_x \cdot dx$ mit f^I_x zugleich nur einförmig, und sollte f^I_x mehrförmig gegeben sein, so ist das (besondere) Integral f_x eben so vielförmig, — dergestalt, daß zu jeder bestimmten Form von f^I_x auch nur eine bestimmte Form von f_x gehört.

Und damit man jedesmal die zusammengehörigen Formen von f^I_x und dessen besonderem Integral f_x kenne, darf man sich nur die Formeln für $\partial(x^m)_x$ und $\int x^m \cdot dx$ so schreiben, nämlich

$$\partial(x^m)_x = m\frac{x^m}{x} \quad \text{und} \quad \int x^m \cdot dx = \frac{x^m}{m+1} \cdot x$$

und dann statt x^m links und rechts jedesmal einen und denselben Werth von x^m gesetzt sich denken, ferner die Formeln für $\partial(a^x)_x$ und $\int a^x \cdot dx$ so schreiben, nämlich:

der übrigen besonderen Integrale derselben Funktion f^I_x, nach x genommen, — denkt man sich also unter c einen bestimmten, von x unabhängigen Ausdruck, — so ist nothwendig

$$F_b - F_a = f_b - f_a.$$

Diese Differenz, die stets denselben Werth behält, welches der unendlichvielen besonderen Integrale man auch immer unter F_x verstehen mag, bezeichnen wir stets durch

$$\int_{b \div a} f^I_x \cdot dx$$

und nennen dieses Zeichen ein allgemein-bestimmtes Integral der gegebenen Funktion f^I_x, nach x genommen.

Solches ist also mit f^I_x zugleich nur eindeutig, und, wenn f^I_x vielförmig sein sollte, für jede einzelne bestimmte Form von

---

$$\partial(a^x)_x = \partial(e^{x \cdot \log a})_x = e^{x \cdot \log a} \cdot \log a$$

und $$\int a^x \cdot dx = \int e^{x \cdot \log a} \cdot dx = \frac{e^{x \cdot \log a}}{\log a},$$

dann aber links und rechts unter $\log a$ stets und überall einen und denselben seiner unendlichvielen Werthe vorgestellt sich denken.

Da nämlich die Integrale aller übrigen entwickelt gegebenen Funktionen aus diesen dreien $\int x^m \cdot dx$, $\int \frac{1}{x} \cdot dx$ und $\int a^x \cdot dx$ abgeleitet werden, so kann man nach den vorstehenden Formeln stets mit Sicherheit beurtheilen, welche Formen von f^I_x und $\int f^I_x \cdot dx$ zusammengehören.

Und da man in jeder beliebig gegebenen Funktion f^I_x, auch wenn sie vielförmig sein sollte, jede einzelne Form derselben für sich betrachten kann, so kann man solche nöthigenfalls stets als einförmig ansehen und behandeln. Ihr besonderes Integral $\int f^I_x \cdot dx$ ist dann ebenfalls nur einförmig und von jedesmal völlig bestimmter Form, da in den Ausnahmsfällen, wo das Integral unendlichviele Formen bekommt (wie $\int \frac{1}{x} \cdot dx$, $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$, ꝛc. ꝛc.) diese letzteren nur um eine Konstante (nach x) von einander verschieden sind, also jede beliebige dieser Formen als ein richtiges, der gegebenen Differenzial-Funktion f^I_x allemal zukommendes besonderes Integral von f^I_x nach x, genommen werden kann.

f^I_x ebenfalls von einem einzigen bestimmten Werthe. Solches enthält den Veränderlichen x nicht mehr, ist aber, wenn a und b noch unbestimmt gelassen sind, im Allgemeinen eine Funktion von a und b.

5) Sind dx_1, dx_2, dx_3, 2c. 2c. Unendlichkleine von derselben Ordnung (die wir die erste Ordnung nennen können); — sind a und b beliebig gegebene reelle Zahlen und ist

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 + \cdots + dx_n = b - a,$$

wo die Anzahl n dieser Unendlichkleinen, unendlichgroß sein muß, wenn $b-a$ endlich, übrigens positiv oder negativ ist (d. h. wo $b>a$, aber auch $b<a$ gedacht sein kann); — werden alle diese Unendlichkleinen dx_1, dx_2, 2c. 2c. gleichzeitig positiv, oder gleichzeitig negativ gedacht, je nachdem $b-a$ positiv oder negativ gegeben ist; — setzt man endlich in die Gleichung II. nach und nach a, $a+dx_1$, $a+dx_1+dx_2$, $a+dx_1+dx_2+dx_3$, 2c. 2c. 2c. zuletzt aber $a+dx_1+dx_2+\cdots+dx_{n-1}$ (d. h. $b-dx_n$) statt x, und gleichzeitig bezüglich dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, 2c. 2c. zuletzt aber dx_n statt dx, — und addirt man alle entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$f_b - f_a = f^I_a \cdot dx_1 + f^I_{a+dx_1} \cdot dx_2 + f^I_{a+dx_1+dx_2} \cdot dx_3 + \cdots + f_{b-dx_n} \cdot dx_n.$$

Man bezeichnet diese Summe zur Rechten, aus unendlichvielen unendlichkleinen Produkten, — die alle durch $f^I_x \cdot dx$ vorgestellt sind und welche aus diesem letzteren Produkt hervorgehen, wenn man statt x nach und nach alle zwischen a und b liegenden, um unendlich wenig von einander verschiedenen Werthe setzt, statt dx aber den Unterschied des jedesmaligen Werthes von x, und seines nächstfolgenden gewöhnlich durch

$$\int_a^b f^I_x \cdot dx,$$

wo $\int_a^b$ als bloßes Summenzeichen angesehen werden muß; und man nennt solches schlechthin ein bestimmtes Integral. — Die so eben erhaltene Gleichung läßt sich dann, wenn man noch die Seiten derselben vertauscht, so schreiben, nämlich

$$\int_a^b f_x^I \cdot dx = f_b - f_a$$

oder (nach Nr. 4.)

$$\text{IV.} \qquad \int_a^b f_x^I \cdot dx = \int_{b \div a} f_x^I \cdot dx,$$

d. h. die durch das Zeichen zur Linken bezeichnete Summe wird ausgewerthet, wenn man die durch das Operations-Zeichen zur Rechten vorgeschriebenen Rechnungen ausführt *).

Dabei ist diese Gleichung IV. eine vollkommene Gleichung, d. h. eine solche, welche links und rechts stets gleichviel Werthe hat. Ist nämlich die gegebene Funktion f_x^I mehrförmig (mehrdeutig), so ist auch $f_x = \int f_x^I \cdot dx$ eben so vielförmig, und man hat nur (in der Anwendung) jede der zusammengehörigen Formen von f_x^I und f_x auch zusammen zu nehmen, um

---

*) Ist $y = f_x^I$ die zur Abscisse $x = OP$ gehörige Ordinate PM einer Kurve CMD (Fig. 1.); — ist ferner $OA = a$, $OB = b$, $PQ = dx_\mu$, so ist $f_x^I \cdot dx$ der Inhalt eines solchen Streifens PQMN, und das Zeichen $\int_a^b f_x^I \cdot dx$ bezeichnet die Summe aller der Streifen, vom ersten zu $x = a = OA$ gehörigen, bis zum letzten zu $x = OE = b - dx_n$ gehörigen, also den ganzen Inhalt ABDMC, während das Zeichen $\int_{b \div a} f_x^I \cdot dx$ angiebt, wie nun dieser Inhalt aus der gegebenen Funktion f_x^I wirklich berechnet wird.

Ist aber die Ordinate PM, zwar eine Funktion y_x von x, aber nicht die durch f_x^I bezeichnete, sondern stellt jetzt f_x^I den jedesmaligen positiven Werth der Funktion $\sqrt{1+\partial y_x^2}$ vor, so stellt das Produkt $f_x^I \cdot dx$ d. h. $\sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx$ d. h. (wegen $\partial y_x = \frac{dy}{dx}$ nach III.) $\sqrt{dx^2+dy^2}$, den unendlichkleinen Bogen MN vor, und das Zeichen $\int_a^b f_x^I \cdot dx$ d. h. $\int_a^b \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx$ bezeichnet nun die Summe aller dieser unendlichkleinen Bogen, vom ersten CF zu $x = a$ gehörigen, bis zum letzten DG zu $x = b - dx_n$ gehörigen, — also den ganzen Bogen CMD, — während das Zeichen $\int_{b \div a} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx$ es ausspricht, welche Rechnungen man vornehmen muß, um diesen Bogen auszurechnen.

zur Rechten (in IV.) die verschiedenen, zur Linken angezeigten Summen ausgewerthet zu haben.

§. 2.

Uebrigens geht aus der Definition dieses Summenzeichens $\int_a^b$ noch hervor, wenn f_x eine beliebig gegebene Funktion von x vorstellt, die wir stets als einförmig ansehen, wenn sie auch mehrförmig sein sollte, weil wir dann nur eine bestimmte ihrer Formen in's Auge fassen wollen, — daß allemal

$$\text{V.} \qquad \int_a^b f_x \cdot dx = -\int_b^a f_x \cdot dx$$

ist, weil die Werthe von f_x links und rechts dieselben bleiben, nur in umgekehrter Ordnung erscheinen, der andere Faktor dx aber links stets $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, rechts aber dann gleichzeitig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, je nachdem $b \gtrless a$ gedacht worden ist, in so ferne wir bei unserer eingeführten Bezeichnung, zur Bedingung gemacht haben, daß man stets von der untern zur obern Grenze (durch Hinzufügung der positiven oder negativen Zuwachse dx_1, dx_2, dx_3, $\cdots$ dx_{n-1}) übergehen wolle, so daß letztere positiv oder negativ genommen werden müssen, je nachdem die untere Grenze kleiner oder größer als die obere sich findet.

Ferner ist noch, wenn c eine ganz beliebige dritte reelle Zahl vorstellt,

$$\text{VI.} \qquad \int_a^b f_x \cdot dx = \int_a^c f_x \cdot dx + \int_c^b f_x \cdot dx$$

und

$$\text{VII.} \qquad \int_a^b f_x \cdot dx = \int_a^c f_x \cdot dx - \int_b^c f_x \cdot dx \; *).$$

Aehnliches, nur umgekehrt, wenn $c > b > a$ ist.

---

*) Ist aber z. B. $b > a$, so sind die dx in VI. und VII. zur Linken alle positiv gedacht; ist nun noch $a < c < b$, so sind die dx in den Zeichen $\int_a^c f_x \cdot dx$ zur Rechten von VI. und VII. positiv, wie auch noch in dem zwei-

§. 3.

Bei der Auffindung eines allgemeinen Integrals $\int f_x \cdot dx$ führt man häufig einen neuen Veränderlichen z ein, dadurch, daß man zwischen x und z eine beliebige Gleichung annimmt, so daß sie, nach x aufgelöst, für x eine, durch x_z ausgedrückte Funktion von z liefert; — und die nöthige Vorschrift des weiteren Verfahrens ist dann ausgedrückt durch die Gleichung

VIII. $\int f_x \cdot dx = \int [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$ *),

wo $f_{(z)}$ diejenige Funktion von z vorstellt, welche aus f_x hervorgeht, wenn man überall die Funktion x_z von z, statt x setzt.

---

ten Summanden zur Rechten in VI., dagegen sind gleichzeitig die dx negativ in dem Subtrahenden der Differenz zur Rechten von VII. — Wäre aber zwar $b > a$, also die dx zur Linken in VI. und VII. noch alle positiv; wäre dagegen $c < a < b$, so wären alle dx in dem Minuenden und Subtrahenden in VII. zur Rechten, wie in dem ersten Summanden in VI. zur Rechten alle negativ, und nur die dx wären alle positiv, welche sich im zweiten Summanden zur Rechten von VI. vorfinden.

*) Die Gleichung VIII. lehrt, daß, wenn man von $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ irgend ein besonderes Integral nach z nimmt, dasselbe auch allemal ein besonderes Integral von f_x nach x sein müsse. — Der Beweis dieser Formel wird so geführt:

Ist nämlich $F_x = \int f_x \cdot dx$, so ist $\partial F_x = f_x$. Nach einer Hauptformel der Ableitungs-(Differential-)Rechnung ist aber, wenn $F_{(z)}$ das vorstellt, was aus F_x wird, sobald man überall die Funktion x_z von z, statt des Buchstabens x setzt, — allemal

$$\partial F_{(z)} = \partial F_x \cdot \partial x_z \quad \left(\text{d. h. } \frac{dF_{(z)}}{dz} = \frac{dF_x}{dx} \cdot \frac{dx_z}{dz}\right);$$

also ist auch

$$\partial F_{(z)} = f_x \cdot \partial x_z = f_{(z)} \cdot \partial x_z, \quad \text{d. h. } F_{(z)} + c = \int f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz,$$

während $F_{(z)} = F_x$, also auch $= \int f_x \cdot dx$ ist. Q. E. D.

Nimmt man in VIII. links und rechts nicht die allgemeinen Integrale, sondern jedesmal nur ein beliebiges besonderes, so können allerdings die beiden Seiten der Gleichung VIII. um eine Konstante c (nach x oder z) von einander verschieden, also nicht einander gleich sein, weil wir blos bewiesen haben, daß beide Seiten der Gleichung VIII., nach z differentiirt, einerlei Resultat geben. Nimmt man aber auf der einen Seite ein be-

Wird f_x eindeutig vorausgesetzt, führt man aber eine Gleichung zwischen x und z ein (z. B. die Gleichung $x^2-2xz+1=0$), welche für x eine mehrförmige Funktion x_z von z liefert (in unserem Beispiel wird $x_z = z+\sqrt{z^2-1}$), — so ist nothwendig auch ∂x_z mit x_z gleichvielförmig (hier, $\partial x_z = \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}$, wo aber in x_z wie in ∂x_z die $\sqrt{z^2-1}$ überall einen und denselben ihrer Werthe vorstellt); und deshalb werden nun auch $f_{(z)}$ und $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$ mehrförmig werden, wie auch schon daraus hervorgeht, daß $F_{(z)}$ d. h. $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$ aus F_x entsteht, wenn man statt x die mehrförmige Funktion x_z substituirt.

Wird nun in dieser mehrförmigen Funktion $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$, statt z wieder sein Werth z_x in x ausgedrückt, gesetzt (nämlich in unserem Beispiele $z_x = \frac{1+x^2}{2x}$), so geht die eine der beiden Formen von $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$ wieder in die Form $\int f_x\cdot dx$ oder F_x über; höchstens ist das besondere Integral $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$ von dem besonderen Integral F_x nur um eine Konstante verschieden; die andere Form von $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$ ist aber im Allgemeinen von F_x wesentlich verschieden, d. h. nicht blos um eine Konstante.

Ist z. B. $f_x = 2x$, so ist $F_x = \int 2x\cdot dx = x^2$. — Für $x = z+\sqrt{z^2-1}$ wird nun $\partial x_z = \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}$ und

$f_{(z)} = 2z+2\sqrt{z^2-1}$, also

$$f_{(z)}\cdot\partial x_z = 2\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^2}{\sqrt{z^2-1}} = 2\frac{2z^2-1+2z\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}} = 4z+2\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}};$$

folglich ist

---

sonderes Integral, auf der anderen Seite dagegen ein besonderes nebst noch einer Konstante c, so kann c immer so gedacht werden, daß beide Seiten der Gleichung VIII. wirklich einander gleich sind, so daß die eine $F_{(x)}$, die andere dagegen $F_{(z)}$ ist.

$$\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz = 2z^2+2\int\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\cdot dz = 2z^2+2z\sqrt{z^2-1},$$

welches Resultat von $F_{(z)} = F_x = x^2 = (z+\sqrt{z^2-1})^2$
$= 2z^2-1+2z\sqrt{z^2-1}$, nur um die Konstante -1 verschieden ist.

So wie man nun hier herein statt z wieder seinen Werth $z_x, = \frac{1+x^2}{2x}$ substituirt, so erhält man

$$2z^2+2z\sqrt{z^2-1} = 2z(z+\sqrt{z^2-1}) = \frac{1+x^2}{x}\cdot\left[\frac{1+x^2}{2x}+\frac{\sqrt{(1-x^2)^2}}{2x}\right].$$

Es ist aber $\sqrt{(1-x^2)^2} = \pm(1-x^2)$; nimmt man nun das obere Zeichen $(+)$, so ist der vorstehende Ausdruck weiter

$$= \frac{1+x^2}{x}\cdot\left[\frac{1+x^2}{2x}+\frac{1-x^2}{2x}\right] = 1+x^{-2},$$

und dieses Resultat ist von F_x, nämlich von x^2 wesentlich (d. h. nicht blos um eine Konstante) verschieden; nimmt man aber das untere $(-)$ Zeichen, so ist der obere Ausdruck weiter

$$= \frac{1+x^2}{x}\cdot\left[\frac{1+x^2}{2x}-\frac{1-x^2}{2x}\right] = \frac{1+x^2}{x}\cdot x = x^2+1;$$

und dieser Ausdruck ist von F_x, nämlich von x^2, nur um eine Konstante verschieden.

„Die obige Gleichung VIII., nämlich

VIII. $\int f_x\cdot dx = \int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$

„ist daher im Allgemeinen keine vollkommene Gleichung, d. h. „beide Seiten derselben können nicht unbedingt für einander „gesetzt werden, weil die rechte Seite, auch wenn man die all„gemeinen Integrale nimmt, doch eine Reihe von Werthen ent„halten kann, welche auf der andern Seite nicht vorkommen."

Diese Wahrheit ist es aber, welche wir hier zunächst mit Nachdruck hervorheben wollten.

„Dagegen ist dieselbe Gleichung VIII. allemal eine vollkom„mene, d. h. beide Seiten können unbedingt für einander gesetzt „werden, so oft die Funktion x_z, welche statt x gesetzt wird, „nur einförmig ist."

Auch dies wollen wir besonders festhalten.

Zur Erläuterung der letzteren Behauptung mag noch das nachstehende Beispiel dienen.

Es sei $\varphi_z = 4z + 2\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}$,

— dieselbe Funktion, welche wir kurz vorher als den Werth von $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ gefunden haben — als eine zuerst gegebene Funktion von z angesehen, und es werde $\int \varphi_z \cdot dz$ dadurch gefunden, daß man einen neuen Veränderlichen x einführt mittelst derselben obigen Gleichung $x^2 - 2xz + 1 = 0$, welche $z = z_x = \frac{1+x^2}{2x}$ liefert, — so giebt die VIII. sogleich

$$\text{VIII}_1. \quad \int \varphi_z \cdot dz = \int [\varphi_{(x)} \cdot \partial z_x] \cdot dx,$$

wo $\varphi_{(x)}$ das bedeutet, was aus φ_z wird, wenn man statt z die Funktion z_x von x substituirt. Jetzt ist aber z_x, also auch ∂z_x nur eindeutig (einförmig); deshalb hat jetzt auch $\varphi_{(x)}$ nicht mehr und nicht weniger Werthe als φ_z und genau dieselben; dasmal ist also die obige Gleichung VIII_1. eine vollkommene Gleichung, d. h. eine Gleichung, deren beide Seiten unbedingt für einander gesetzt werden können.

Es wird nämlich

$$\sqrt{z^2-1} = \pm\frac{1-x^2}{2x} \quad \text{und} \quad 2z^2-1 = \frac{1+x^4}{2x^2}, \quad \text{folglich}$$

$$\varphi_{(x)} = 2\frac{(1-x^4) \pm (1+x^4)}{x(1-x^2)}; \quad \text{also entweder} \quad \varphi_{(x)} = \frac{4}{x(1-x^2)},$$

oder $\varphi_{(x)} = -\frac{4x^3}{1-x^2}$.

Ferner wird

$$\partial z_x = \partial\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)_x = -\frac{1-x^2}{2x^2};$$

folglich ist

$$\varphi_{(x)} \cdot \partial z_x \quad \text{entweder} \quad = -\frac{2}{x^3}, \quad \text{oder} \quad = 2x;$$

deshalb wird

$$\int [\varphi_{(x)} \cdot \partial z_x] \cdot dx = x^{\pm 2};$$

und so sieht man hier zur Rechten die beiden Formen des Integrals $\int\varphi_z\cdot dz$, in x ausgedrückt.

Wird daher $\int\varphi_z\cdot dz=\psi_z$ gesetzt, und versteht man unter $\psi_{(x)}$ das, was aus ψ_z hervorgeht, wenn die Funktion z_x statt z gesetzt wird, so erhält man zwei Formen für $\psi_{(x)}$, welche von den beiden Formen $x^{\pm 2}$ höchstens nur um eine Konstante verschieden sein können.

Und in der That findet sich durch direkte Integration, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben,
$\int\varphi_z\cdot dz=2z^2+2z\sqrt{z^2-1}$ $(=\psi_z)$; und diese Funktion von z geht in der That in $x^{\pm 2}$ über, sobald z_x d. h. $\frac{1+x^2}{2x}$ statt z gesetzt und die Quadratwurzel, wie dies sein muß, allgemein, also zweiförmig genommen wird.

Substituirt man endlich in dem, nach Anwendung der Gleichung VIII_1. für $\int\varphi_z\cdot dz$ gefundenen Resultat, $x^{\pm 2}$, statt x wieder die aus der angenommenen Gleichung $x^2-2xz+1=0$ für x zu entnehmende (zweiförmige) Funktion x_z von z, nämlich $z+\sqrt{z^2-1}$, so erhält man

sowohl $(z+\sqrt{z^2-1})^2$ d. h. $2z^2-1+2z\sqrt{z^2-1}$

als auch $(z+\sqrt{z^2-1})^{-2}$ d. h. $\left(\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)^2$

d. h. $(z-\sqrt{z^2-1})^2$ d. h. $2z^2-1-2z\sqrt{z^2-1}$

und jedes dieser beiden Resultate enthält das andere bereits in sich, weil $\sqrt{z^2-1}$ allgemein und daher zweiförmig ist. Jedes dieser Resultate ist von dem vorher gefundenen ψ_z nur um die Konstante 1 verschieden*).

*) Dies ließ sich vorher sehen; denn da die Gleichung zwischen x und z eine willkürliche ist, so kann man $x=z+\sqrt{z^2-1}$ mit der ausdrücklichen Bedingung annehmen, daß die $\sqrt{z^2-1}$ nur als eindeutig angesehen werden solle, ohne die Form näher zu bezeichnen. Jede der beiden Formen von $\int\varphi_z\cdot dz$, also auch von $\psi_{(x)}$, muß daher, sobald man statt x seinen Werth $z+\sqrt{z^2-1}$ setzt, die beiden Formen des Integrals $\int\varphi_z\cdot dz$ geben.

Anmerkung. Da, wo das praktische Integriren der entwickelt gegebenen Funktionen (gewöhnlich die Quadraturen genannt) gelehrt wird, wird die Integration der gebrochenen rationalen Funktionen auf die einfachsten Fälle, nämlich auf $\int \frac{1}{\alpha x+\beta}\cdot dx$ und $\int \frac{1}{(\alpha x+\beta)^n}\cdot dx$ zurückgeführt. Diese letzteren werden nun mittelst der vorstehenden Formel VIII. gefunden, indem man $\alpha x+\beta = z$, also $x = \frac{z-\beta}{\alpha}$ setzt. Weil aber nun x eine einförmige Funktion von z ist, so liefert dieser Weg für jedes dieser Integrale wiederum nur eine Form.

Bei der Integration derjenigen irrationalen Funktionen, welche bloß $\sqrt[n]{\alpha x+\beta}$ oder blos $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ enthalten, bewirkt man die Integration wieder mittelst der Gleichung VIII., indem man $\sqrt[n]{\alpha x+\beta} = z$ und $\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = z$ setzt, wodurch $x = \frac{z^n-\beta}{\alpha}$ und $x = \frac{\delta z^n-\beta}{\alpha-\gamma z^n}$, d. h. wodurch x_z jedesmal nur eindeutig wird. Auch hier erhält man also (für jede bestimmte Form der n^{ten} Wurzeln) doch immer nur einen eindeutigen Ausdruck in z.

Bei der Integration derjenigen irrationalen Funktionen, welche $\sqrt{ax^2+bx+c}$ enthalten, wird das Integral meist auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt durch Anwendung der Gleichung VIII., dadurch, daß man entweder $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+z$, oder $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+xz$ setzt, oder daß man vorher ax^2+bx+c in $a(x-p)(x-q)$ verwandelt und dann $\sqrt{a(x-p)(x-q)} = (x-p)z$ setzt. In allen drei Annahmen bekommt man aber für x eine einförmige Funktion von z, wodurch eben bewirkt wird, daß das neue Integral $\int[f_{(z)}\cdot \partial x_z]\cdot dz$ ein rationales ist. Die Quadratwurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ werden dabei eindeutig genommen. Also giebt auch in diesem Falle die Gleichung VIII., eben weil sie nun eine vollkommene ist, wiederum eine vollkommene Gleichung zum Resultat.

Bei der gewöhnlichen Integration der transcendenten Funktionen kann die Sache jedoch anders sich gestalten. Die hier vorkommenden transcendenten Funktionen sind aus exponentiellen, wie p^{ax+b}, e^{ax+b}, $Sin(ax+b)$, $Cos(ax+b)$, $Tg(ax+b)$, &c. &c. und aus logarithmischen, wie $log(ax+b)$, $Arc\,sin.(ax+b)$, $Arc\,cos.(ax+b)$, &c. &c. zusammengesetzt. Setzt man nun z. B. $Sin\,x = z$, so wird $\partial x_z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ schon zweideutig, und dies kommt daher, weil $x = Arc\,sin.\,z = \frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1-z^2} + z \cdot i)$ *) schon zweideutig **) ist, wenn man auch von den übrigen Werthen des *Arcus*, welche von einander nur um eine Konstante ($2n\pi$) verschieden sind, abstrahiren will und kann. Die Anwendung der Formel VIII. wird also in diesen Fällen für $\int[f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$ eine vielförmigere Funktion von z, liefern können, als $\int f_x \cdot dx = F_x$ es ist. — Und deshalb kann die Bemerkung, daß im Allgemeinen die Gleichung VIII. nur eine unvollkommene ist und nur mit Vorsicht benutzt werden darf, auch eine wesentliche praktische Nützlichkeit gewinnen.

§. 4.

Sind a und b beliebig reell und ist $a < b$; — sind bezüglich α und β die reellen Werthe von z, welche aus $x = x_z$ für $x = a$ und $x = b$ sich ergeben; — so ist nicht blos (nach §. 3.)

---

*) Unter i verstehen wir immer die $\sqrt{-1}$.

**) Ist nämlich $Arc\,sin.\,x = z$, so ist auch $Arc\,sin.\,x = \pi - z$; und diese letztere Form $\pi - z$ ist von der ersteren z, um etwas anders als um eine bloße Konstante verschieden. Die übrigen Werthe sind dann $2n\pi + z$ und $2n\pi + (\pi - z)$ d. h. $(2n+1)\pi - z$ und jeder der letztern Reihe ist von jedem der erstern Reihe um $c+2z$ verschieden.

VIII. $\int f_x \cdot dx = \int [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$,

sondern auch noch allemal (§. 1. Nr. 4.)

IX. $\int_{b \div a} f_x \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$,

im Allgemeinen eine nur unvollkommene Gleichung und nur dann eine vollkommene, wenn x_z einformig eingeführt ist; d. h. wird $\int f_x \cdot dx = F_x$ und $\int [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \varphi_z$ gefunden, so ist

IX. $F_b - F_a = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$

im Allgemeinen eine Gleichung, deren linke Seite nur einen einzigen Werth hat, weil wir f_x einformig voraussetzen, deren rechte Seite aber 1, oder 4, oder 9, ꝛc. Werthe hat, je nachdem die Funktion x_z, welche statt x gesetzt worden ist, nur einformig, oder zweiformig, oder dreiformig ist oder noch mehr Formen hat. — Es bleibt daher die Frage zu beantworten, welche der Formen von φ_β und φ_α genommen werden müssen, in jedem einzelnen Falle, damit die Differenz $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$ den Werth $F_b - F_a$ wirklich gebe; bei welcher Beantwortung sich herausstellen wird, daß den Werthen φ_β und φ_α, in der Differenz $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$, durchaus nicht immer ein und dieselbe Form von φ_z, zu Grunde gelegt werden darf.

Wir wollen aber bei dieser Untersuchung die Funktion x_z nur zweiformig voraussetzen, und z_x nur einformig (z. B. $x = z + \sqrt{z^2 - 1}$, welches $z = \frac{1 + x^2}{2x}$ liefert.

Bezeichnet man aber das, was aus F_x wird, wenn man x_z statt x setzt, durch $F_{(z)}$, so ist φ_z von $F_{(z)}$ höchstens nur um eine Konstante verschieden, d. h. $\varphi_z = F_{(z)} + c$, wodurch $\varphi_\beta - \varphi_\alpha = F_{(\beta)} - F_{(\alpha)}$ wird. Wir können also in der Untersuchung stets $F_{(z)}$ statt φ_z, nehmen.

Ist aber m ein Werth von x, und μ der zugehörige Werth von z, so hängt alles davon ab,

1) ob der Werth μ unter den mit x zugleich wachsenden Werthen von z, sich befindet, — oder ob

2) derselbe Werth μ unter einer Reihe abnehmender Werthe von z, sich befindet, während die zugehörigen Werthe von x wachsend gedacht worden sind.

Es ist nämlich $dx = \partial x_z \cdot dz$; da nun dx in beiden Fällen (1. und 2.) positiv gedacht ist, so ist ∂x_z mit dz zugleich positiv, oder zugleich negativ. Im Falle der 1.) ist aber dz positiv, also muß auch ∂x_z positiv genommen werden, — während im Falle der 2.) dz negativ ist, also auch ∂x_z dann negativ genommen werden muß. Da nun x_z eine zweiformige Funktion von z ist (der Voraussetzung zufolge), so ist auch ∂x_z zweiformig. Befindet sich nun unter den Werthen von z, welche zu den von $-\infty$ bis zu $+\infty$ hin stets wachsend gedachten Werthen von x gehören, ein Maximum-Werth γ, welcher zu $x = c$ gehören mag, — so befindet sich auf beiden Seiten der Reihe der Werthe von z, ein und derselbe Werth μ von z, welcher $<\gamma$ ist und zu welchem zwei Werthe von x gehören, der eine $m, <c$, der andere $m', >c$. — Gehört nun $z = \mu$ zu $x = m, <c$, so ist der Fall 1.) vorhanden und man muß nun in $F_{(z)}$ diejenige der beiden Formen von x_z sich denken, deren zugehörige Form von ∂x_z für $z = \mu$ positiv wird; gehört aber derselbe Werth $z = \mu$ zu $x = m' > c$, so ist der Fall 2.) vorhanden, und es muß nun die andere Form von x_z in $F_{(z)}$ genommen werden, diejenige nämlich, welche für $z = \mu$ negativ wird.

Ganz analoges gilt, wenn der zu $x = c$ gehörige Werth $z = \gamma$ ein Minimum-Werth von z wäre.

Danach bildet sich folgende Regel:

Befindet sich der zu x gehörige Werth von z, unter den, mit x zugleich wachsenden Werthen von z, so ist $F_{(z)}$ nur dann $= F_x$, also auch nur dann $\varphi_z = F_x + c$, wenn $F_{(z)}$ aus F_x dadurch hervorgegangen ist, daß statt x diejenige der beiden Formen von x_z gesetzt worden ist, deren zugehörige Ableitung ∂x_z, für diesen Werth von z, positiv wird.

Befindet sich aber der zu einem gegebenen Werthe von x, gehörige Werth von z, unter einer abnehmenden Reihe von Werthen von z, welche zu einer wachsend gedachten Reihe der

Werthe von x, gehören, — so muß, wenn $F_{(z)}$ den Werth F_x geben soll, d. h. wenn $\varphi_z = F_x + c$ werden soll, — statt x die andere Form von x_z gesetzt gedacht werden, diejenige nämlich, deren Ableitung ∂x_z, für diesen Werth von z, **negativ** ist.

Soll also $\int_{\beta \div \alpha}[f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$, d. h. $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$ dem $\int_{b \div a} f_x \cdot dx$, d. h. der Differenz $F_b - F_a$ gleich werden, so muß man die Werthe von φ_β und φ_α

A. den **positiven** Werthen von ∂x_z, für $z = \beta$ und für $z = \alpha$ entsprechend nehmen, so oft, während die Werthe von x, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin stets wachsend gedacht werden, die zugehörigen Werthe von z, von $z = \alpha$ an bis zu $z = \beta$ hin, entweder stets wachsen, oder doch zu Anfang (bei $z = \alpha$) und zu Ende (bei $z = \beta$) im Wachsen begriffen sind, wenn auch dazwischen ein Maximum- (aber dann auch noch ein Minimum-) Werth von z, liegt; — dagegen muß man φ_β und φ_α

B. den **negativen** Werthen von ∂x_z für $z = \alpha$ und $z = \beta$ entsprechend nehmen, wenn die zu den, von a bis b hin wachsenden Werthen von x, gehörigen Werthe von z, entweder stets abnehmen, oder doch zu Anfang (bei $z = \alpha$) und zu Ende (bei $z = \beta$) abnehmen, wenn auch dazwischen ein Minimum-Werth (aber dann auch noch ein Maximum-Werth) von z liegt. — Es muß aber

C. φ_β dem **negativen** Werth von ∂x_z entsprechend genommen werden (für $z = \beta$) und gleichzeitig φ_α dem **positiven** Werthe von ∂x_z (für $z = \alpha$) gemäß, — so oft die zu den wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von z, anfangs wachsen bis zu einem Maximum-Werth γ von z hin, dann aber bis zu $z = \beta$ wieder abnehmen.

Endlich muß

D. φ_β dem **positiven** Werth von ∂x_z (für $z = \beta$) entsprechend genommen werden, dagegen φ_α dem **negativen** Werth von ∂x_z (für $z = \alpha$) gemäß, — so oft die zu den wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von z, Anfangs (von $z=\alpha$ an) abnehmen, bis zu einem Minimum-Werth γ von z hin, dann aber wieder bis zu $z=\beta$ hin wachsen.

Ist x_z, wie wir vorausgesetzt haben, nur zweiformig, so wird $f_{(z)}$ und daher auch $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$ d. h. φ_z eine Quadratwurzel enthalten. In den Fällen A. und B. wird also diese Quadratwurzel in φ_α und in φ_β, stets ein und dasselbe Vorzeichen, — in den Fällen C. und D. dagegen stets verschiedene Vorzeichen haben müssen, wenn $\varphi_\beta-\varphi_\alpha=F_b-F_a$ werden soll. Da aber auch ∂x_z dieselbe Quadratwurzel enthalten wird, so wird man das jedesmal richtige Vorzeichen dieser Quadratwurzel allemal aus dem Ausdruck von ∂x_z, mit Leichtigkeit und Sicherheit bestimmen können, sobald man genau nach A.—D. bestimmt, ob ∂x_z für $z=\alpha$, oder für $z=\beta$, jetzt positiv, oder jetzt negativ werden müsse.

Dies ist aber das dritte, was wir hier besonders hervorheben wollten.

Beispiel. Wir wollen dies jetzt noch durch ein Beispiel erläutern. — Es sei wiederum $f_x=2x$, und $F_x=\int 2x\cdot dx=x^2$; ferner sei $x=z+\sqrt{z^2-1}=x_z$ gegeben, so daß $z=\frac{1+x^2}{2x}=z_x$ wird; so ist $\partial x_z=1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$, und $f_{(z)}=2z+2\sqrt{z^2-1}$, so wie

$$\varphi_z=\int\left(2z+2\sqrt{z^2-1}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz$$
$$=\int\left(4z+\frac{4z^2-2}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz=2z^2+2z\cdot\sqrt{z^2-1}.$$

Die Gleichung IX. geht daher in diesem Falle über in

$$\text{IX}_1.\qquad b^2-a^2=2\beta\cdot(\beta+\sqrt{\beta^2-1})-2\alpha\cdot(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}).$$

Untersuchen wir nun den Gang der, zu den stets wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von z, so müssen wir vor allen Dingen die Maxima und Minima von $z(=z_x)$ aufsuchen, indem wir $\partial z_x\left(=\frac{x^2-1}{2x^2}\right)$, $=0$ setzen, hieraus

$x = \pm 1$ finden, zuletzt aber jeden dieser beiden Werthe in $\partial^2 z_x \left(= \frac{1}{x^3}\right)$ substituiren, wo dann für $x = +1$, $\partial^2 z_x$ positiv sich zeigt, also z (ebenfalls $= +1$) als ein Minimum sich ausweist, während für $x = -1$, $\partial^2 z_x$ negativ wird, also z (ebenfalls $= -1$) als ein Maximum-Werth sich ausweist.

Es ist also für $x = -1$, der Werth $z (= -1)$ ein größter, dagegen für $x = +1$, der Werth $z (= +1)$ ein kleinster. — Weil aber die Werthe von z bei $x = 0$ ihre Stetigkeit unterbrechen, so wachsen, während die Werthe von x von $-\infty$ an bis zu -1 hin wachsen, die Werthe von z, ebenfalls von $-\infty$ an bis zu -1 hin; während aber dann die Werthe von x, von -1 an bis zu $-\frac{1}{\infty}$ fortwachsen, nehmen die Werthe von z, von -1 an bis zu $-\infty$ hin fortwährend wieder ab. — Für den nächst folgenden Werth 0 von x, hat z gar keinen Werth, weil $\frac{1}{0}$ keine Rechnungsform (kein Werth) ist. — Während aber dann x von $+\frac{1}{\infty}$ an bis zu $+1$ hin weiter wächst, nimmt die neue (von der erstern völlig getrennte) Reihe der Werthe von z, von $+\infty$ an bis zum Minimum-Werth $(+1)$ dieser neuen Reihe hin ab, um von da an mit den noch weiter wachsenden Werthen von x, stets mit zu wachsen, bis zu $x = +\infty$ auch $z = +\infty$ sich findet.

Bei der gegenwärtigen Untersuchung hat der Umstand, daß die Werthe von z (für $x = 0$) ihre Stetigkeit unterbrechen, nicht den geringsten Einfluß.

Die Gleichung IX_1. gilt also

1) sobald die beiden Grenzen a und b entweder beide kleiner als -1, oder beide größer als $+1$ genommen werden oder die eine < -1, die andere dagegen $> +1$, (z. B. $a = -4$, $b = -3$, oder $a = 2$ und $b = 3$, oder $a = -2$ und $b = +2$), nur dann (nach A.), wenn ∂x_z d. h. $1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}$, sowohl

für $z=\alpha$, wie für $z=\beta$, positiv wird. — Für $a=-4$ und $b=-3$, wird aber $\left(\text{aus } z=\frac{1+x^2}{2x}\right)$ $\alpha=-\frac{17}{8}$ und $\beta=-\frac{5}{3}$ und da für diese Werthe α und β von z, der Ausdruck $1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$ d. h. ∂x_z nur positiv wird, wenn man die Quadratwurzel $\sqrt{z^2-1}$ stets negativ nimmt, so folgt, daß die Gleichung IX_1. nur dann links und rechts ein und dasselbe liefert (sobald $a=-4$ und $b=-3$, also $\alpha=-\frac{17}{8}$ und $\beta=-\frac{5}{3}$ genommen wird), wenn man rechts in IX_1., statt beider Quadratwurzeln ihre negativen Werthe nimmt. — Ganz anders ist es, wenn $a=2$ und $b=3$ genommen wird; denn dann findet sich dazu $\alpha=\frac{5}{4}$ und $\beta=\frac{5}{3}$; und da für diese Werthe α und β von z, der Ausdruck ∂x_z nur dann jedesmal positiv wird, wenn man auch die Quadratwurzel $\sqrt{z^2-1}$ jedesmal positiv nimmt, so folgt, daß die Gleichung IX_1. für $a=2$ und $b=3$, also für $\alpha=\frac{5}{4}$ und $\beta=\frac{5}{3}$, nur dann eine richtige sein wird, wenn man zur Rechten beide Quadratwurzeln positiv nimmt. — Für $a=-2$ und $b=+2$ dagegen wird $\alpha=-\frac{5}{4}$ und $\beta=+\frac{5}{4}$, und es wird daher ∂z_x nun für $x=\alpha$ positiv, wenn $\sqrt{\alpha^2-1}$ negativ genommen wird; daher gilt die Gleichung IX_1. für $a=-2$ und $b=+2$ nur dann, wenn $\sqrt{\beta^2-1}$ positiv, dagegen $\sqrt{\alpha^2-1}$ negativ genommen wird.

2) Nimmt man dagegen die Grenzen a und b zwischen -1 und $+1$, so daß die Werthe von z, stets abnehmen, während die von x wachsen, so muß ∂x_z d. h. $1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$, für

$z = \alpha$ und für $z = \beta$ (nach B.) negativ werden, also die Quadratwurzel $\sqrt{z^2-1}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, je nachdem z $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist.

Nimmt man also z. B. $a = -0{,}9$ und $b = -0{,}7$, so daß $\alpha = -\frac{181}{180}$ und $\beta = -\frac{149}{140}$ wird, so muß man in der Gleichung IX_1., beide Quadratwurzeln zur Rechten positiv nehmen, wenn die Gleichung eine richtige sein soll.

Nimmt man aber $a = 0{,}1$ und $b = 0{,}3$, so daß $\alpha = \frac{101}{20}$ und $\beta = \frac{109}{60}$ wird, so muß man in der Gleichung IX_1. beide Quadratwurzeln negativ nehmen, wenn sie keinen Widerspruch enthalten soll.

Nimmt man endlich $a = -0{,}7$ und $b = +0{,}1$, so daß $\alpha = -\frac{149}{140}$ und $\beta = \frac{101}{20}$ wird, so muß man in der Gleichung IX_1. $\sqrt{\beta^2-1}$ negativ, dagegen $\sqrt{\alpha^2-1}$ positiv nehmen, wenn man keinen Widerspruch erfahren will.

3) Nimmt man $a < -1$, dagegen $b > -1$, so daß der Maximum-Werth von z (nämlich -1) zwischen α und β liegt, so muß ∂x_z für $z = \beta$ negativ, für $z = \alpha$ dagegen positiv werden. Es muß also $\sqrt{\beta^2-1}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ genommen werden, je nachdem β $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist; dagegen muß $\sqrt{\alpha^2-1}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ genommen werden, je nachdem α ebenfalls $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist. — Ist also z. B. $a = -2$ und $b = -\frac{1}{2}$, so daß $\alpha = -\frac{5}{4}$ und auch $\beta = -\frac{5}{4}$ wird, so muß in der Gleichung IX_1., die $\sqrt{\beta^2-1}$ positiv, die $\sqrt{\alpha^2-1}$ dagegen negativ genommen werden, wenn sie keinen Widerspruch enthalten soll. — Für $a = -2$ und $b = +\frac{1}{2}$, welches $\alpha = -\frac{5}{4}$ und $\beta = +\frac{5}{4}$

giebt, muß dagegen (in IX_1.) $\sqrt{\beta^2-1}$, eben so wie $\sqrt{\alpha^2-1}$ **negativ** genommen werden.

4) Nimmt man endlich $a>-1$ aber $<+1$, und $b>+1$, so daß zwischen α und β der Minimum-Werth von $z(=+1)$ liegt, so muß ∂x_z für $z=\alpha$ **negativ**, für $z=\beta$ aber **positiv** werden; und da β jetzt stets positiv ist, so muß auch jetzt $\sqrt{\beta^2-1}$ stets **positiv** genommen werden. Dagegen muß jetzt $\sqrt{\alpha^2-1}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ genommen werden, je nachdem α $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist. — Für $a=-\frac{1}{2}$ z. B. wird $\alpha=-\frac{5}{4}$, folglich muß nun $\sqrt{\alpha^2-1}$ **positiv** genommen werden; — für $a=+\frac{1}{2}$ dagegen wird $\alpha=+\frac{5}{4}$; also muß man nun $\sqrt{\alpha^2-1}$ **negativ** nehmen.

Der Anfänger rechne dies durch, einmal für $a=-\frac{1}{2}$ und $b=2$; dann für $a=+\frac{1}{2}$ und $b=2$; eben so rechne der Anfänger auch die Beispiele der vorhergehenden Nummern nach, um zu prüfen, ob sich das Behauptete wirklich bewährt findet.

Anmerkung. Ist die zwischen x und z angenommene Gleichung, z. B. $x^2+1-2xz-z^2=0$, so, daß sie nicht bloß x_z zweiformig (oder mehrformig) giebt, sondern auch zu jedem Werth von x zwei (oder mehr) Werthe von z, liefert, so findet man α und β zwei- (oder mehr-) deutig, und dann entsteht auch noch überdies für die Gleichung

$$\int_{b\div a} f_x \cdot dx = \int_{\beta\div\alpha}[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz \quad \text{d. h.} \quad F_b - F_a = \varphi_\beta - \varphi_\alpha,$$

wenn $\int f_x \cdot dx = F_x$ und $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz = \varphi_z$ gefunden worden ist, — die Frage, welche der Werthe von α und β jetzt genommen werden müssen. — Diese Frage ist leicht dahin zu beantworten, daß man α und β jedesmal aus einer und derselben Form von $z_x=z$, zu nehmen habe, und daß man dazu eben so gut die eine Form nehmen könne, als die andere. — Nimmt man z. B. die obige Gleichung

$$1) \quad x^2+1-2xz-z^2=0$$

zwischen x und z an, so liefert sie sogleich

$$2) \quad z=-x\pm\sqrt{2x^2+1}=z_x,$$

und man kann nun

entweder $\alpha=-a-\sqrt{2a^2+1}$, muß aber dann $\beta=-b-\sqrt{2b^2+1}$,

oder $\alpha=-a+\sqrt{2a^2+1}$, muß aber dann $\beta=-b+\sqrt{2b^2+1}$

nehmen.

Der Grund davon ist der, daß die Gleichung zwischen x und dem neu eingeführten Veränderlichen z, ganz beliebig, also auch in der Form $z=z_x$ angenommen werden kann, daß man aber doch eine ganz bestimmte Annahme hinsichtlich der Abhängigkeit des neuen Veränderlichen z, von dem alten Veränderlichen x, treffen muß, folglich in dem Beispiel entweder

$$z=-x+\sqrt{2x^2+1}, \quad \text{oder} \quad z=-x-\sqrt{2x^2+1}$$

annehmen muß, und daß man endlich, wenn die Annahme festgesetzt ist, solche auch ein für allemal fest halten muß.

Um dies durch instruktive Fälle erläutern zu können, suchen wir zunächst aus der gegebenen Gleichung 1.) (indem wir sie nach allem x differentiiren und $\partial z_x=0$ nehmen) die Werthe von x, für welche z ein Maximum oder Minimum wird. Man findet aber durch das Differentiiren (der 1.)

$$3) \quad x-z-(x+z)\partial z_x=0,$$

und daraus für $\partial z_x=0$ die Werthgleichung $x-z=0$, welche, mit der 1.) verbunden,

$$x=z=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

liefert. Differentiirt man die Gleichung 3.) noch einmal nach allem x, und setzt man sogleich, nach dem Differentiiren, den für $x=z=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sich ergebenden Werth 0, statt ∂z_x, so findet sich (für $x=z=\frac{1}{2}\sqrt{2}$)

$$1-(x+z)\cdot\partial^2 z_x=0, \quad \text{d. h.} \quad \partial^2 z_x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

so daß $\partial^2 z_x$ mit $\sqrt{2}$ zugleich positiv oder negativ wird. Man findet also, daß

für $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, der Werth $z = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ein Maximum,
für $x = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$, der Werth $z = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ein Minimum

ist. Substituirt man aber den Werth $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ statt x, in die Gleichung 2.) so wird nur dann $z = x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, wenn $\sqrt{2x^2+1}$ mit dem $(-)$ Vorzeichen genommen wird; der andere Werth $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ statt x, in die 2.) gesetzt, giebt dagegen nur dann $z = x = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$, wenn man $\sqrt{2x^2+1}$ mit dem $(+)$ Vorzeichen nimmt.

E. Nimmt man also die Form

$$z = -x - \sqrt{2x^2+1},$$

so wachsen, während die Werthe von x, von $-\infty$ bis zu $+\infty$ hin wachsen, die zugehörigen Werthe von z, bis zum Maximum $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hin, um dann wieder ununterbrochen abzunehmen.

F. Nimmt man aber die andere Form

$$z = -x + \sqrt{2x^2+1},$$

so nehmen die zu den stets wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von z, anfänglich ab, bis zu dem Minimum $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hin, um dann wieder ununterbrochen zu wachsen.

Man findet ferner aus der Gleichung 1.)

$$4)\qquad x = z \pm \sqrt{2z^2-1},$$

folglich

$$5)\qquad \partial x_z = 1 + \frac{2z}{\pm\sqrt{2z^2-1}},$$

wo die obern, oder die untern Vorzeichen zugleich gelten. — Ist nun wieder

$$f_x = 2x \qquad \text{und} \qquad F_x = x^2,$$

so wird

$$\int [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = 3z^2 \pm 2z \cdot \sqrt{2z^2-1} = \varphi_z.$$

Die Gleichung IX. geht nun über in

$$\text{IX}_2. \quad b^2-a^2 = \left(3\beta^2 \pm 2\beta\sqrt{2\beta^2-1}\right)-\left(3\alpha^2 \pm 2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1}\right),$$

welche rechts 4 Werthe hat, von denen nun in jedem Einzelfalle (d. h. für die einzelnen Werthe von a, b, α und β) der jedesmalige wahre Werth (nach §. 4. A.—D.) herausgesucht werden muß.

1. 1) Will man nun die Form $z = -x-\sqrt{2x^2+1}$ zu Grunde legen und nimmt man a und b zwischen $-\infty$ und dem Maximum-Werth $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dieser Form, z. B. $a = -3$ und $b = -1$, so daß sich dazu findet $\alpha = 3-\sqrt{19}$ und $\beta = 1-\sqrt{3}$, so muß ∂x_z für $z = \alpha$ und für $z = \beta$ (nach §. 4. A.) positiv werden, also muß, da α und β negativ sind, in 5.) die Quadratwurzel, sowohl für $z = \alpha$, wie auch für $z = \beta$ mit dem (—) Vorzeichen genommen werden, so daß man jetzt die richtige Gleichung

$$6) \quad b^2-a^2 = \left(3\beta^2-2\beta\cdot\sqrt{2\beta^2-1}\right)-\left(3\alpha^2-2\alpha\sqrt{\alpha^2-1}\right)$$

haben wird (für diese Werthe von a, b, α und β)*), wobei die Quadratwurzeln jedesmal ihre positiven Werthe vorstellen.

2. 2) Nimmt man aber die Grenzen a und b so, daß die zugehörigen Werthe α und β jenseits des Maximum-Werthes von z liegen, — nimmt man z. B. $a = -\frac{1}{2}$ und $b = +1$, so muß (nach §. 4. B.) ∂x_z für $z = \alpha$ und für $z = \beta$ negativ werden. Nun wird aber jetzt $\alpha = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}$ und $\beta = -1-\sqrt{3}$, und da somit α und β wiederum negativ sind, so wird (nach 5.) ∂x_z nur dann negativ, wenn $\sqrt{2z^2+1}$ mit dem (+) Zeichen genommen wird. Man hat daher für diese Werthe von a, b α und β

---

*) In der That wird $\beta^2 = 4-2\sqrt{3}$; $2\beta^2-1 = 7-4\sqrt{3}$; also $\sqrt{2\beta^2-1} = 2-\sqrt{3}$, und $2\beta\sqrt{2\beta^2-1} = 10-6\sqrt{3}$; zuletzt $3\beta^2-2\beta\sqrt{2\beta^2-1} = 2$. — Eben so folgt aus $\alpha = 3-\sqrt{19}$, sofort $\alpha^2 = 28-6\sqrt{19}$; $2\alpha^2-1 = 55-12\sqrt{19}$; $\sqrt{2\alpha^2-1} = 6-\sqrt{19}$; $2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1} = 54-18\sqrt{19}$; also $3\alpha^2-2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1} = 10$; und so sieht sich die obige Gleichung 6.) bestätigt.

7) $\quad b^2-a^2 = (3\beta^2+2\beta\cdot\sqrt{2\beta^2-1})-(3\alpha^2+2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1})$,

wobei die Quadratwurzeln jedesmal ihre positiven Werthe vorstellen *).

3. 3) Nimmt man endlich die Grenzen a und b so, daß die erstere diesseits, die andere aber jenseits des Werthes $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ fällt, zu welchem der Maximum-Werth von z gehört, — nimmt man z. B. $a=-1$ und $b=0$, so daß $\alpha = 1-\sqrt{3}$ und $\beta = -1$ wird, so muß ∂x_z für $z=\alpha$ positiv, folglich $\sqrt{2\alpha^2-1}$ mit dem (—) Zeichen, — dagegen muß ∂x_z für $z=\beta$ negativ, folglich $\sqrt{2\beta^2-1}$ mit dem (+) Zeichen genommen werden. Man hat also jetzt

8) $\quad b^2-a^2 = (3\beta^2+2\beta\sqrt{2\beta^2-1})=(3\alpha^2-2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1})$,

für diese Werthe von a, b, α und β; wobei jede Quadratwurzel ihren positiven Werth vorstellt.

4. 4) Legt man aber die andere Form $z=-x+\sqrt{2x^2+1}$ zu Grunde, so wird, wenn, wie in 1. 1), $a=-3$ und $b=-1$ genommen wird, $\alpha = 3+\sqrt{19}$ und $\beta = 1+\sqrt{3}$; und da jetzt die Werthe von z im Abnehmen begriffen sind, während die von x wachsen (nach F.), so muß (nach §. 4. B.) ∂x_z negativ werden für $z=\alpha$ und für $z=\beta$; deshalb folgt aus 5.) und weil α und β jetzt positiv sind, daß sowohl $\sqrt{2\alpha^2-1}$ als auch $\sqrt{2\beta^2-1}$ mit dem (—) Zeichen genommen werden müssen. Die Gleichung 6.) bleibt also auch jetzt noch die richtige.

Hätte man aber b jenseits des Werthes $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ genommen, zu welchem der Minimum-Werth von z gehört, z. B. $b=+2$,

---

*) In der That folgt aus $\beta = -1-\sqrt{3}$, sofort $\beta^2 = 4+2\sqrt{3}$; $2\beta^2-1 = 7+2\sqrt{3}$; $\sqrt{2\beta^2-1} = 2+\sqrt{3}$; $2\beta\sqrt{2\beta^2-1} = -10-6\sqrt{3}$; folglich $3\beta^2+2\beta\sqrt{2\beta^2-1} = 2$. — Eben so folgt aber aus $\alpha = \frac{1}{2}(1-\sqrt{6})$, sofort $\alpha^2 = \frac{1}{4}(7-2\sqrt{6})$; $2\alpha^2-1 = \frac{1}{4}(10-4\sqrt{6})$; folglich $\sqrt{2\alpha^2-1} = \frac{1}{2}(-2+\sqrt{6})$ und nicht $=\frac{1}{2}(2-\sqrt{6})$, weil diese Quadratwurzel ihren positiven Werth vorstellt; dann $2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1} = -4+\frac{3}{2}\sqrt{6}$; zuletzt aber $3\alpha^2+2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1} = \frac{5}{4}$. — Die Gleichung 7.) findet sich also bestätigt.

also $\beta = +1$, so würde (nach §. 4. D.) ∂x_z für $z = \beta$ positiv, demnach auch $\sqrt{2\beta^2+1}$, weil β positiv ist, mit dem (+) Zeichen genommen werden müssen. Jetzt würde also nur die Gleichung 8.) die richtige sein*).

5. 5) Nimmt man, wie in 2. 2), $a = -\frac{1}{2}$, $b = +1$, so wird bei dieser andern Form von z, $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ und $\beta = -1+\sqrt{3}$; und da b über den Werth $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hinaus liegt, so muß (nach F. und §. 4. D.) jetzt ∂x_z negativ werden für $z = \alpha$, aber positiv für $z = \beta$; also muß, da α und β positiv sind, jetzt $\sqrt{2\alpha^2-1}$ mit dem (—) Zeichen, dagegen $\sqrt{2\beta^2-1}$ wiederum mit dem (+) Zeichen genommen werden, so daß jetzt wieder die 8.) die richtige wird.

Hätte man $b < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ genommen, so wäre die Gleichung 6.) wieder die richtige geworden; denn es hätte dann (nach F.) ∂x_z für $z = \alpha$ und für $z = \beta$ negativ werden, — also hätten, da α und β positiv werden, auch beide Quadratwurzeln $\sqrt{2\alpha^2-1}$ und $\sqrt{2\beta^2-1}$ (aus 5.) mit dem (—) Zeichen genommen werden müssen.

Diese Beispiele werden ausreichen, das was hier gelehrt werden sollte, völlig klar zu machen.

Es ist aber dadurch die, mit den Ansichten vieler Analysten in Widerspruch stehende Thatsache außer Zweifel gesetzt, daß wenn $\int[f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz = \varphi_z$ gesetzt wird, in der Differenz $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$, nicht immer eine und dieselbe Form von φ_z, genommen werden darf, wenn der Werth $F_b - F_a$ (der aus $\int f_x \cdot dx = F_x$ hervorgeht) richtig ausgedrückt sein soll.

§. 4ᵇ.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir nun zu den Uebungen

---

*) In der That geht aus $\alpha = 3+\sqrt{19}$ sofort hervor $\alpha^2 = 28+6\sqrt{19}$; $2\alpha^2-1 = 55+12\sqrt{19}$; $\sqrt{2\alpha^2-1} = 6+\sqrt{19}$; $2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1} = 74+18\sqrt{19}$; folglich $3\alpha^2-2\alpha\sqrt{2\alpha^2-1} = 10$. — Dagegen giebt $\beta = 1$ sofort $2\beta\sqrt{2\beta^2-1} = 2$ und $3\beta^2+2\beta\sqrt{2\beta^2-1} = 5$; und so sieht sich die 8.) bestätigt.

selbst übergehen. — Weil aber in der zweiten und dritten Uebung ein besonderes Gewicht auf die richtige Behandlung von Ungleichungen gelegt werden muß, so wollen wir den Anfänger in dem nachstehenden noch auf die dazu nöthigen Lehrsätze aufmerksam machen.

Hat man es nämlich mit lauter reellen (positiven, negativen oder Null-) Ausdrücken zu thun, so folgt

I. aus $a > b$,
allemal $a + c > b + c$ und $a - c > b - c$
dagegen $c - a < c - b$.

II. Dagegen folgt
aus $a > b$,
nur dann $ac > bc$ und $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, wenn c positiv ist,
aber $ac < bc$ und $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, sobald c negativ ist.

Will man also z. B. aus der Ungleichung

$$r \cdot Cos\,\varphi > b,$$

Folgerungen für r ziehen, so muß man sofort zwei Fälle unterscheiden,
einmal, wenn $Cos\,\varphi$ positiv, und dann folgt $r > \frac{b}{Cos\,\varphi}$,
hierauf, wenn $Cos\,\varphi$ negativ, und dann folgt $r < \frac{b}{Cos\,\varphi}$.

Eben so folgt
aus $r < \frac{a}{Cos\,\varphi}$
nur dann $r \cdot Cos\,\varphi < a$, so lange $Cos\,\varphi$ positiv ist,
dagegen $r \cdot Cos\,\varphi > a$, sobald $Cos\,\varphi$ negativ wird.

III. Sind a und b positiv, so folgt
aus $a > b$
sofort $+\sqrt{a} > +\sqrt{b}$; dagegen $-\sqrt{a} < -\sqrt{b}$.

Hat man also, während r positiv gedacht ist und p und q beliebig reell sind, die Ungleichung

$$r^2 < (p - q)^2$$

so kann man nicht so unbedingt daraus folgern,

daß $r < p-q$

sein müsse; sondern man muß sofort zwei Fälle unterscheiden,

einmal, wenn $p-q$ positiv ist,

und dann folgt $r < p-q$ und $-r > q-p$;

dagegen, wenn $p-q$ negativ ist,

folgt $r < q-p$ und $-r > p-q$.

IV. Sind a und b reell, so folgt

aus $a > b$,

nur dann $a^2 > b^2$, wenn $a+b$ positiv ist,

dagegen $a^2 < b^2$, wenn $a+b$ negativ ist;

endlich aber $a^2 = b^2$, wenn $a+b = 0$ ist.

Denn es ist $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$; folglich ist, da $a-b$ positiv vorausgesetzt worden (nämlich $a > b$) a^2-b^2 mit dem Faktor $a+b$ zugleich positiv, oder zugleich negativ, oder zu gleicher Zeit $= 0$.

Aus $2 > -5$ folgt also $2^2 < (-5)^2$, weil $2+(-5)$ negativ;
aus $5 > -2$ folgt aber $5^2 > (-2)^2$, weil $5+(-2)$ positiv ist;
aus $5 > 4$ folgt $5^2 > 4^2$, weil $5+4$ positiv ist,
und aus $-4 > -5$ folgt $(-4)^2 < (-5)^2$, weil $(-4)+(-5)$ negativ ist.

Aus $3 > -3$, folgt endlich $3^2 = (-3)^2$, weil $3+(-3)$ der Null gleich ist.

V. Aus $a > b$ folgt

endlich $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$, wenn $\frac{c}{ab}$ positiv ist,

dagegen $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$, wenn $\frac{c}{ab}$ negativ ist.

Denn es ist $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{c}{ab}(b-a)$, folglich

$\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, je nachdem $\frac{c}{ab}$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist.

Diese Sätze muß der Anfänger stets lebendig vor Augen haben, um in der zweiten und dritten „Uebung" mit Leichtigkeit sich zurecht finden zu können.

Erste Uebung.

Berechnung von $\Sigma f \cdot dx$ unter verschiedenen Voraussetzungen.

§. 5.

Soll die Summe $\Sigma f_x \cdot dx$ der unendlichvielen unendlichkleinen Produkte berechnet werden, welche alle durch das einzige Produkt $f_x \cdot dx$ vorgestellt sind, wenn in letzterem dx ein unendlichkleiner und von x unabhängiger Faktor ist, während f_x nach und nach alle die Werthe dieser Funktion vorstellt, welche für eine gegebene Reihe, nach und nach um diesen, positiv oder negativ gedachten Faktor dx, fortschreitender (reeller) Werthe von x, sich ergeben; — so muß man unterscheiden:

I. ob die Werthe, welche statt x gesetzt werden sollen, vom ersten a an bis zum letzten b hin, immerfort wachsen, oder immerfort abnehmen.

In diesem Falle und nur in diesem Falle, wird diese Summe durch das sogenannte bestimmte Integral $\int_a^b f_x \cdot dx$ bezeichnet; und man hat die Gleichung IV. des §. 1., nämlich

$$(\odot)\cdots \qquad \int_a^b f_x \cdot dx = \int_{b \div a} f_x \cdot dx = F_b - F_a,$$

(wenn F_x irgend ein Integral der Funktion f_x, nach x integrirt, vorstellt) als Vorschrift für die Auswerthung (Berechnung) dieser Summe; und es ist dabei in den zu summirenden unendlichkleinen Produkten, der Faktor dx **positiv** gedacht, wenn $a<b$, — dagegen **negativ** gedacht, wenn $a>b$ ist. — In diesem Sinne ist nämlich das Zeichen $\int_a^b f_x \cdot dx$ für diese Summe eingeführt worden (§. 1.).

II. Soll aber die Summe $\Sigma f_x \cdot dx$ aller dieser Produkte gefunden werden, unter der Voraussetzung, daß der Faktor dx stets positiv bleiben soll, während x nach und nach alle um dx von einander verschiedene Werthe bekommt, von a an wachsend bis zu g hin, dann aber von da wieder abnehmend bis zu b zurück, während f_x überhaupt nur eindeutig ist, oder doch für alle die Werthe, welche x erhalten soll, stets eine und dieselbe bestimmte ihrer Formen behält, — so kann man diese Summe durch

$$\Sigma f_x \cdot dx \atop {a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} g \overline{\overline{>}} x \overline{\overline{>}} b}$$

bezeichnen (B.). — Es ist aber offenbar diese jetzige Summe, in bestimmten Integralen, wie folgt, auszudrücken, nämlich:

1) $\quad \Sigma f_x \cdot dx = \int_a^g f_x \cdot dx + \int_b^g f_x \cdot dx;$

und da $\int_a^g f_x \cdot dx = \int_a^b f_x \cdot dx + \int_b^g f_x \cdot dx$ gefunden wird (nach §. 2. VI.), so wird auch noch dieselbe Summe so ausgedrückt sein, nämlich

2) $$\Sigma f_x \cdot dx = \int_a^b f_x \cdot dx + 2\int_b^g f_x \cdot dx = 2\int_b^g f_x \cdot dx - \int_b^a f_x \cdot dx$$
$$= 2\int_a^g f_x \cdot dx - \int_a^b f_x \cdot dx = 2\int_a^g f_x \cdot dx + \int_b^a f_x \cdot dx$$

(nach §. 2. V.), während jedes einzelne der bestimmten Integrale nach der Formel (⊙) berechnet wird.

Soll aber dieselbe Summe $\Sigma f_x \cdot dx$ unter derselben Voraussetzung gefunden werden, jedoch mit der noch hinzugefügten Bedingung, daß f_x zweiförmig ist, und daß von $x = a$ bis zu $x = g$ hin, die eine Form von f_x, von $x = g$ aber bis zu $x = b$ zurück, die andere Form von f_x gesetzt werden soll, — so muß man diese beiden Formen von f_x von einander unterscheiden; wir wollen die erstere durch f_x^{I}, die andere durch f_x^{II} bezeichnen, und dann hat man natürlich

3) $\quad \Sigma f_x \cdot dx = \int_a^g f_x^{I} \cdot dx + \int_b^g f_x^{II} \cdot dx,$

während die beiden bestimmten Integrale zur Rechten des = Zeichens, nach der Formel (⊙) ausgewerthet werden müssen.

III. Soll endlich die Summe aller $f_x \cdot dx$ gefunden werden, unter der Voraussetzung, daß der Faktor dx stets positiv bleiben soll, während statt x nach und nach alle, um dx von einander verschiedene Werthe gesetzt werden, welche von a an bis zu k hin abnehmen, von da ab aber wieder bis zu b hin wachsen, — so kann diese Summe durch

$$\underset{a \geqq x \geqq k \leqq x \leqq b}{\Sigma f_x \cdot dx}$$

bezeichnet werden; und man hat

$$4) \quad \Sigma f_x \cdot dx = \int_k^a f_x \cdot dx + \int_k^b f_x \cdot dx$$
$$= 2\int_k^a f_x \cdot dx + \int_a^b f_x \cdot dx = 2\int_k^a f_x \cdot dx - \int_b^a f_x \cdot dx$$
$$= 2\int_k^b f_x \cdot dx + \int_b^a f_x \cdot dx = 2\int_k^b f_x \cdot dx - \int_a^b f_x \cdot dx,$$

während die einzelnen bestimmten Integrale nach der Formel (⊙) ausgewerthet werden müssen.

Wäre aber in derselben Aufgabe f_x zweiförmig und die Bedingung gemacht, daß Anfangs, während die Werthe von x, von a bis k hin, stets abnehmen, die eine f_x^{I} der beiden Formen, — dagegen, so wie die Werthe von x, (von k bis b hin) wachsen, die andere f_x^{II} dieser beiden Formen genommen werden soll, — so würde man haben

$$5) \qquad \Sigma f_x \cdot dx = \int_k^a f_x^{I} \cdot dx + \int_k^b f_x^{II} \cdot dx.$$

In allen 5 Nummern 1.–5.) kann aber $a<b$, oder $a>b$ gedacht werden*).

---

*) Nur muß man nie aus den Augen lassen, daß, nach der im §. 1. eingeführten Bezeichnung, in den einzelnen Produkten $f_x \cdot dx$, deren Summe das bestimmte Integral $\int_b^a f_x \cdot dx$ anzeigt, der Faktor dx stets negativ gedacht ist, so wie $b>a$, dagegen positiv gedacht ist, so wie $b<a$ vorausgesetzt wird. — Nur weil man ausdrücklich die Bedeutung der Zeichen so und nicht anders genommen hat, finden die im §. 1. aufgestellten Formeln für bestimmte Integrale statt.

Beispiele ad I. — Soll der Inhalt der durch die Gleichung $(y-\alpha-\beta x)^2-p(\gamma-x)=0$

oder $y=\alpha+\beta x\pm\sqrt{p(\gamma-x)}$

gegebenen Parabel DFGEC (Fig. 1) berechnet werden, und zwar von der zur Abscisse $OA=a$ gehörigen Ordinate AD an, — entweder bis zur Ordinate BF hin, welche zur Abscisse $OB=b$ gehört, — oder bis zur Ordinate HG hin, während $OH=\gamma$ ist (denn nur für $x=\gamma$, werden beide Werthe von y einander gleich), so ist für $OP=x$,

$$PM=\alpha+\beta x-\sqrt{p(\gamma-x)} \quad \text{und} \quad PN=\alpha+\beta x+\sqrt{p(\gamma-x)}$$

also $$MN=2\sqrt{p(\gamma-x)};$$

und es ist daher der Inhalt des unendlich schmalen Streifens an MN, von der Breite dx,

$$=2\sqrt{p(\gamma-x)}\cdot dx;$$

diese Funktion von x liefert aber nun den Inhalt eines jeden dieser Streifen; — für $x=a$, den ersten an CD liegenden, — für $x=b-dx$ den letzten an EF liegenden, und für jeden andern der Werthe von x den zugehörigen; und deshalb ist

$$\text{Inh. } CDEF=\int_a^b 2\sqrt{p(\gamma-x)}\cdot dx$$

und

$$\text{Inh. } CEGFDE=\int_a^\gamma 2\sqrt{p(\gamma-x)}\cdot dx.$$

Nun ist $\int\sqrt{p(\gamma-x)}\cdot dx=-\sqrt{p}\cdot(\gamma-x)^{\frac{3}{2}}$; folglich findet sich

$$\text{Inh. } CDEF=2\sqrt{p}[(\gamma-a)^{\frac{3}{2}}-(\gamma-b)^{\frac{3}{2}}]$$

und

$$\text{Inh. } CEGFDE=2\sqrt{p}\cdot(\gamma-a)^{\frac{3}{2}}.$$

Beispiele ad II. 3. und III. 5. Soll die Länge des Bogens DFGE gefunden werden, derselben Parabel, so ist die Länge eines Bogen-Elements, welches zu den Abscissen x und $x+dx$ gehört, und wenn $y+dy$ die zur Abscisse $x+dx$ gehörige Ordinate vorstellt,

$$=\sqrt{dx^2+dy^2} \quad \text{d. h.} \quad =\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx,$$

wo wir uns dx positiv denken, so daß die Quadratwurzel $\sqrt{1+\partial y_x^2}$ stets ihren positiven Werth vorstellen muß, weil ein Bogentheilchen, so wie überhaupt eine Größe, nie negativ werden kann. Dagegen ist es nothwendig, daß, wenn das Bogen-Element ein Theilchen des oberen Zweiges der Kurve vorstellen soll, in $$y = \alpha+\beta x+\sqrt{p(\gamma-x)}$$

und in $$\partial y_x = \beta - \frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{p(\gamma-x)}}$$

die Quadratwurzel $\sqrt{p(\gamma-x)}$ ihren positiven Werth vorstellt; dagegen ihren negativen, sobald das Bogen-Element des unteren Zweiges ausgedrückt werden soll. Die Summe aller Bogen-Elemente $\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx$, von $x = OH = a$ an bis zu $OH = \gamma$ hin für den oberen Zweig, und dann von $x = \gamma$ an bis zu $x = OB = b$ wieder zurück für den unteren Zweig, d. h. Bog. DFGE ist daher

$$= \int_a^\gamma \sqrt{\frac{(1+\beta^2)(\gamma-x)+\frac{1}{4}p-\beta\sqrt{p(\gamma-x)}}{\gamma-x}}\cdot dx$$
$$+\int_b^\gamma \sqrt{\frac{(1+\beta^2)(\gamma-x)+\frac{1}{4}p+\beta\sqrt{p(\gamma-x)}}{\gamma-x}}\cdot dx,$$

wo wir im zweiten Integral rechts, der Wurzel das entgegengesetzte Vorzeichen gegeben haben, damit sie überall ihren positiven Werth vorstelle. Findet man nun das erste unbestimmte Integral, so darf man nur in selbigem jedes Glied, welches die Wurzel $\sqrt{p(\gamma-x)}$ enthält, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen und die Wurzel selbst dann wieder positiv sich denken, um das unbestimmte Integral des zweiten Summanden obiger Summe zu haben; daraus finden sich dann die Werthe der einzelnen bestimmten Integrale nach der Formel (⊙) *).

---

*) Um das obige unbestimmte Integral zu finden, wird man wohl thun $\gamma-x = z^2$ zu setzen, so daß $\partial x_z = -2z$, oder $dx = \partial x_z \cdot dz = -2z\cdot dz$

Soll die Länge des Bogens DFGE (Fig. 2.), der durch die Gleichung

$$y = \sqrt{p(\gamma - x)}$$

gegebenen Parabel, gefunden werden, so ist wiederum

$$f_x = \sqrt{1 + \partial y_x^2},$$

aber

$$\partial y_x = -\frac{p}{\sqrt{p(\gamma - x)}}$$

und das Quadrat von ∂y_x, welches in f_x vorkommt, behält dasmal einen und denselben Werth, man mag die Quadratwurzel $\sqrt{p(\gamma - x)}$ positiv nehmen (für den obern Zweig der Kurve) oder negativ (für den untern Zweig). Folglich kann man dasmal auch nehmen

$$\text{Bog. DFGE} = \int_a^b \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx + 2 \int_b^\gamma \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx,$$

---

wird; dann Zähler und Nenner innerhalb des Wurzelzeichens mit dem Zähler zu multipliciren, so daß man ein Integral von der Form

$$\int \frac{a + bz + cz^2}{z \cdot \sqrt{a + bz + cz^2}} \cdot dz$$

erhält. Dies wird man dann zerlegen in

$$\int \frac{a}{z \cdot \sqrt{a + bz + cz^2}} \cdot dz + \int \frac{b + cz}{\sqrt{a + bz + cz^2}} \cdot dz.$$

Setzt man nun in dem erstern dieser Integrale noch $z = \frac{1}{y}$, so wird man ein Integral haben von der Form $\int \frac{1}{\sqrt{ay^2 + by + c}} \cdot dy$; während das andere Integral, nämlich

$$\int \frac{b + cz}{\sqrt{a + bz + cz^2}} \cdot dz, = A \cdot \sqrt{a + bz + cz^2} + B \int \frac{1}{\sqrt{a + bz + cz^2}} \cdot dz$$

gesetzt, dann die Gleichung auf beiden Seiten differentiirt und identisch gemacht wird, um die unbestimmten Koeffizienten A und B zu finden. — Zuletzt hat man nur $\int \frac{1}{\sqrt{ay^2 + by + c}} \cdot dy$ und $\int \frac{1}{\sqrt{a + bz + cz^2}} \cdot dz$ aus einer Tabelle zu entnehmen.

wenn wiederum $OA = a$ und $OB = b$ gedacht ist, während die Gleichung der Parabel $OG = \gamma$ liefert. Dies giebt

$$\text{Bog. } DFGE = \int_a^b \sqrt{\frac{p+\gamma-x}{\gamma-x}} \cdot dx + 2\int_b^\gamma \sqrt{\frac{p+\gamma-x}{\gamma-x}} \cdot dx \text{ *)}.$$

§. 6.

Soll die Summe $\sum_{a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} b} f_x \cdot dx$ **) d. h. die Summe aller $f_x \cdot dx$, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin, gefunden werden, während die Werthe von x immerfort wachsen und die Summe selbst auch durch das bestimmte Integral $\int_a^b f_x \cdot dx$ bezeichnet ist, wobei f_x eindeutig gedacht wird, — will man aber einen neuen Veränderlichen z statt x, einführen, durch eine Gleichung zwischen x und z, welche, nach x aufgelöst,

1) $$x = x_z$$

liefert, — so daß x_z eine bloße Funktion von z vorstellt, — so hat man

2) $$dx = \partial x_z \cdot dz \quad \text{und} \quad f_x \cdot dx = [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz,$$

wenn $f_{(z)}$ das bedeutet, was aus f_x hervorgeht, sobald x_z statt x gesetzt wird, und dann ist offenbar

3) $$\sum_{a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} b} f_x \cdot dx = \int_a^b f_x \cdot dx = \sum_{a \overline{\overline{<}} x_z \overline{\overline{<}} b} (f_{(z)} \cdot \partial x_z) \cdot dz,$$

wenn in der Summe Σ, statt z nach und nach alle Werthe gesetzt werden, welche aus der Gleichung 1.) zwischen x und z,

---

*) Das unbestimmte Integral wird hier gefunden, wenn man vorher

$$\sqrt{\frac{p+\gamma-x}{\gamma-x}} \quad \text{in} \quad \frac{-x+(\gamma+p)}{\sqrt{(x-\gamma)(x-\gamma-p)}}$$

umformt.

**) Wir drücken in der Folge noch oft durch solche, unter das Summenzeichen gesetzte Ungleichungen, wie hier $a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} b$, die Grenzen aus, innerhalb deren die Veränderlichen, wie hier x, sich so bewegen sollen, daß sie alle, diesen Ungleichungen nicht widersprechende Werthe erhalten.

für z sich ergeben, sobald man x nach und nach von a an bis zu b hin stetig wachsen läßt.

I. Ist nun die Funktion x_z nur eindeutig, und sind die Werthe von z, welche zu den Werthen a und b von x gehören, bezüglich durch α und β bezeichnet, so werden die Werthe von z, die zu den stets wachsend gedachten Werthen von x sich finden, entweder ebenfalls stets wachsen, oder doch stets abnehmen, aber nie eine Zeit lang $\left\{\begin{matrix}\text{wachsen}\\ \text{abnehmen}\end{matrix}\right\}$, um dann wieder $\left\{\begin{matrix}\text{abzunehmen}\\ \text{zu wachsen}\end{matrix}\right\}$; denn geschähe dies letztere, so würden auf beiden Seiten des $\left\{\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ Werthes von z, zwei gleiche Werthe von z liegen, zu denen zwei verschiedene Werthe von x gehören, welche die Funktion x_z für diesen Werth von z, liefern müßte, was sie nicht thun kann, so lange die Funktion x_z einförmig vorausgesetzt ist.

Deshalb ist unter dieser Voraussetzung, die Gleichung

$$\text{X.} \qquad \int_a^b f_x \cdot dx = \int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$$

eine vollkommene, d. h. eine solche, welche links und rechts genau ein und dasselbe ausdrückt, und welche auf keiner Seite mehr Werthe hat, als auf der andern.

Es ist daher einerlei, ob man die durch das Integral zur Linken in X. angezeigte Summe (nach der Formel ⊙) auswerthet, oder die durch das Integral zur Rechten in X. vorgestellte Summe (nach derselben Formel ⊙) berechnet.

Giebt die Gleichung 1.) $x = x_z$, für z eine mehrförmige Funktion von x (wie solches z. B. der Fall sein würde, wenn $x = 2z + z^2 = x_z$ gesetzt worden wäre, weil dies $z = -1 \pm \sqrt{x+1} = z_x$ geliefert haben würde, — so müssen α und β aus einer und derselben Form von z_x berechnet werden, jedoch gleichgültig aus welcher, da man die Gleichung zwischen z und x beliebig annimmt, also sie z. B. so: $z = -1 + \sqrt{x+1}$, oder auch so: $z = -1 - \sqrt{x+1}$, annehmen kann.

Die Funktion x_z haben wir also hier einförmig vorausgesetzt.

II. Ist aber die Funktion x_z, und sind folglich auch ∂x_z und $f_{(z)}$ zweiförmig, so kann die obige Gleichung X. nur unter der Beschränkung zugelassen werden,

1) daß die zu den stets wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von z, zwischen dem ersten (α) und dem letzten (β), weder ein Maximum noch ein Minimum haben, sondern ebenfalls stets wachsen (wenn $\beta > \alpha$), oder stets abnehmen (wenn $\beta < \alpha$ gefunden wird), und

2) daß für die Ableitung ∂x_z allemal diejenige ihrer beiden Formen gesetzt wird, welche ∂x_z von $z = \alpha$ an bis zu $z = \beta$ hin stets $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ werden läßt, je nachdem die Werthe von z, von α an bis zu β hin stets $\left\{\begin{matrix}\text{wachsen}\\ \text{abnehmen}\end{matrix}\right\}$; endlich

3) daß gleichzeitig mit einer andern Form von ∂x_z, auch die entsprechende Form von x_z, in f_x gesetzt gedacht wird, so daß also auch statt $f_{(z)}$ nur die entsprechende Form gesetzt werden darf.

Da nämlich dx stets positiv gedacht ist, so verlangt die Gleichung $dx = \partial x_z \cdot dz$, daß der jedesmalige Werth von ∂x_z mit dz stets einerlei Vorzeichen habe.

Findet man aber $\int f_x \cdot dx = F_x$, also
$\int [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = F_{(z)} + c$ *) $= \varphi_z$, so muß auch von φ_z die, der für ∂x_z genommenen Form, entsprechende Form genommen werden, wenn (nach der Formel ⊙) die Differenz $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$ den richtigen Werth der Summe $\int_a^b f_x \cdot dx$ liefern soll.

Ohne diese Beschränkung, also an sich, ist die Gleichung X.

---

*) Das Zeichen $F_{(z)}$ stellt allemal das vor, was aus F_x hervorgeht, wenn man x_z statt x setzt.

jetzt eine unvollkommene, weil sie links nur eine einzige, rechts aber zwei verschiedene Summen angezeigt enthält.

III. Ist noch x_z zweiförmig, finden sich aber zu den Werthen $a<c<b$ von x,
die Werthe $\alpha<\gamma>\beta$ von z,
und so, daß der zu $x=c$ gehörige Werth γ von z, ein Maximum-Werth ist (während c zwischen a und b gedacht worden ist), so ist die Gleichung X. unter keiner Bedingung mehr zuzulassen, sondern man findet jetzt (nach II.)

$$\int_a^c f_x \cdot dx = \int_\alpha^\gamma [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz, \text{ wo } \partial x_z \text{ positiv,}$$

und

$$\int_c^b f_x \cdot dx = \int_\gamma^\alpha [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz, \text{ wo } \partial x_z \text{ negativ}$$

ist (innerhalb der Grenzen des Integrals), während auch $f_{(z)}$, zugleich mit ∂x_z, ihre Form verändern muß, in so ferne zu einer andern Form von ∂x_z, auch eine andere Form von x_z gehört.

Addirt man nun diese beiden Gleichungen, so erhält man jetzt

$$\text{XI.} \quad \int_a^b f_x \cdot dx = \int_\alpha^\gamma [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz + \int_\gamma^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$$
$$= \int_\alpha^\gamma [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz - \int_\beta^\gamma [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz,$$

wenn in dem erstern Integral eines jeden der beiden Ausdrücke zur Rechten, ∂x_z diejenige der beiden Formen von ∂x_z, vorstellt, welche (innerhalb der Grenzen α und γ) stets einen positiven Werth hat, während in dem andern Integral, ∂x_z diejenige Form der Ableitung ∂x_z vorstellt, welche (innerhalb der Grenzen β und γ) stets negativ wird*); und wo mit

---

*) Der Anfänger wolle der größern Verständlichung wegen nicht übersehen:

1) daß diejenige Form von ∂x_z, welche für einen der zwischen α und γ liegenden Werthe von z, positiv wird, auch für jeden andern dieser Werthe von z, positiv werden muß, — dagegen für andere Werthe von z, die außerhalb dieser Grenzen liegen, negativ werden kann;

2) daß diejenige Form von ∂x_z, welche für einen der zwischen β und γ liegenden Werthe von z, negativ wird, auch für jeden andern

einer andern Form von ∂x_z auch allemal die andere Form von $f_{(z)}$ eintreten muß, und zwar jedesmal die entsprechende.

IV. Ist x_z immer noch zweiförmig; finden sich aber zu den Werthen $a<c<b$ von x,
die Werthe $\alpha>\gamma<\beta$ von z,
und so, daß γ der Minimum-Werth von z ist (während der zugehörige Werth c von x, zwischen a und b liegt), so findet sich, wenn man ganz eben so wie in III. verfährt, (statt der Formel X.) jetzt

$$\text{XII.}\quad \int_a^b f_x\cdot dx = \int_\alpha^\gamma [f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz + \int_\gamma^\beta [f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz$$
$$= -\int_\gamma^\alpha [f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz + \int_\gamma^\beta [f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz,$$

wo aber das Produkt $f_{(z)}\cdot\partial x_z$ im jedesmaligen erstern Integral, diejenige seiner Formen vorstellt, in welcher ∂x_z innerhalb der Grenzen α und γ von z, negativ wird, während dasselbe Produkt in dem andern Integral die andere seiner Formen vorstellt, in welcher ∂x_z, innerhalb der Grenzwerthe β und γ von z, positiv wird.

---

dieser Werthe negativ werden muß, — dagegen für andere Werthe von z, positiv werden kann;

3) daß die Werthe von z, welche zwischen α und γ liegen, auch zum Theil oder ganz, zwischen β und γ liegen, je nachdem (während γ ein Maximum ist) $\alpha<\beta$ oder $\alpha \overline{\overline{>}} \beta$ ist; — daß daher in der Gleichung XI. zur Rechten, im erstern Integral unter $f_{(z)}\cdot\partial x_z$ stets eine andere der beiden Formen verstanden werden muß, als in dem anderen Integral, weil sonst nicht ∂x_z das erstemal positiv, das andere Mal negativ werden würde, wie es die Formel XI. doch verlangt; — daß man aber im Allgemeinen die jedesmalige Form von $f_{(z)}\cdot\partial x_z$ in diesen beiden Integralen nicht angeben kann, da sie von den Grenzwerthen selbst mit abhängt. — Ist z. B. $\partial x_z = 1+\frac{z}{\pm\sqrt{z^2-1}}$, so wird, wenn man das (+) Zeichen gelten läßt, ∂x_z mit z zugleich positiv oder negativ; eben so wird, wenn man das (−) Zeichen gelten läßt, ∂x_z $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, je nachdem z $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ genommen wird.

Auch hier sind in den Summanden zur Rechten, die zu summirenden Elementchen $f_{(z)} \cdot \partial x_z \cdot dz$, allemal verschiedene, wenn man auch im Allgemeinen nicht angeben kann, welche der Formen jedesmal zuerst genommen werden muß.

Anmerkung. Dies stimmt ganz mit dem überein, was wir im §. 4. festgestellt haben. Ist nämlich

$$\int f_x \cdot dx = F_x \quad \text{und} \quad \int [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \varphi_z$$

gefunden, so ist φ_z mit $f_{(z)}$ zugleich zweiförmig, und bezeichnen wir die zur Form $f^{I}_{(z)}$ und zur Form ∂x^{I}_{z} von ∂x_z, welche innerhalb der Grenzwerthe von z, positive Werthe liefert, gehörige Form von φ_z durch φ^{I}_{z}, dagegen durch φ^{II}_{z} die andere Form, welche der andern Form $f^{II}_{(z)}$ und derjenigen Form ∂x^{II}_{z} von ∂x_z entspricht, welche innerhalb der Grenzwerthe von z negative Werthe liefert, so liefert die Formel (⊙) die Werthe der einzelnen, durch die bestimmten Integrale ausgedrückten Summen, wie folgt, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad \int_\alpha^\gamma [f^{I}_{(z)} \cdot \partial x^{I}_{z}] \cdot dz = \varphi^{I}_{\gamma} - \varphi^{I}_{\alpha} \\ 2)\quad \int_\gamma^\beta [f^{II}_{(z)} \cdot \partial x^{II}_{z}] \cdot dz = \varphi^{II}_{\beta} - \varphi^{II}_{\gamma} \end{array}\right\}, \text{ wo } \gamma \text{ ein Maximum,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\quad \int_\alpha^\gamma [f^{II}_{(z)} \cdot \partial x^{II}_{z}] \cdot dz = \varphi^{II}_{\gamma} - \varphi^{II}_{\alpha} \\ 4)\quad \int_\gamma^\beta [f^{I}_{(z)} \cdot \partial x^{I}_{z}] \cdot dz = \varphi^{I}_{\beta} - \varphi^{I}_{\gamma} \end{array}\right\}, \text{ wo } \gamma \text{ ein Minimum.}$$

Nun ist aber stets $\varphi^{I}_{\gamma} = \varphi^{II}_{\gamma}$, es mag γ ein Maximum- oder ein Minimum-Werth von z sein *); addirt man also 1.) und 2.),

*) Zu dem Maximum- oder Minimum-Werth γ von z, gehört ein einziger Werth c von x; zu einem und demselben anderen Werth von z, welcher unter den, zu den von a bis b hin stets wachsend gedachten Werthen von x, gehörigen Werthen von z, auf beiden Seiten von γ gefunden wird, — gehören zwei Werthe von x, der eine kleiner als c, der andere größer als c, welche die beiden Formen von x_z für diesen Werth von z, liefern. Die Werthe dieser beiden Formen von x_z werden also für $z = \gamma$ einander gleich und $= c$; folglich werden auch φ^{I}_{γ} und φ^{II}_{γ} einander gleich, weil sie die beiden Formen von φ_{γ} sind.

so zeigt sich der Werth der angezeigten Summen in XI. zur Rechten, $=\varphi^{II}_{\beta}-\varphi^{I}_{\alpha}$, und im §. 4. haben wir gefunden, daß dieser Werth (im Falle γ ein Maximum ist) dem Werthe F_b-F_a der angezeigten Summe $\int_a^b f_x \cdot dx$ gleich ist. Dadurch ist die Gleichung XI. noch einmal gefunden.

Addirt man aber die 3.) und 4.), so zeigt sich der Werth der angezeigten Summen in XII. zur Rechten, $=\varphi^{I}_{\beta}-\varphi^{II}_{\alpha}$, und im §. 4. haben wir gefunden, daß gerade in diesem Falle, wo γ ein Minimum ist, dieser Werth $\varphi^{I}_{\beta}-\varphi^{II}_{\alpha}$, dem Werthe F_b-F_a, der durch das Integral $\int_a^b f_x \cdot dx$ angezeigten Summe, genau gleich ist; dadurch ist aber die Gleichung XII. noch einmal gefunden.

Wachsen die Werthe von z, mit denen von x zugleich und ununterbrochen von α bis β, so daß die Formel X. nun die richtige ist, wenn $f^{I}_{(z)} \cdot \partial x^{I}_{z}$ statt $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ gesetzt wird, — so erhält man für die in X. zur Rechten angezeigte Summe, den Werth $\varphi^{I}_{\beta}-\varphi^{I}_{\alpha}$; derselbe Werth ist aber nach §. 4. dem Werthe F_b-F_a der angezeigten Summe in X. zur Linken gleich (in diesem Falle); folglich ist die Gleichung X. mittelst des §. 4. (und der Formel ⊙) noch einmal gefunden (für diesen Fall).

Nehmen endlich die Werthe von z, von α bis zu β ununterbrochen ab, so daß die Formel X. jetzt die richtige ist, sobald $f^{II}_{(z)} \cdot \partial x^{II}_{z}$ statt $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ gesetzt wird, — so erhält man für die angezeigte Summe zur Rechten in X. (mittelst der Formel ⊙) den Werth $\varphi^{II}_{\beta}-\varphi^{II}_{\alpha}$, und gerade dieser Werth ist jetzt (nach §. 4.) dem Werthe F_b-F_a gleich, welchen die Formel (⊙) für die in X. zur Linken angezeigte Summe giebt. So liefert also der §. 4. auch die Formel X. noch einmal (für den jetzigen Fall) *).

*) Dabei ist aber $f^{I}_{(z)} \cdot \partial x^{I}_{z}$ selbst bald die eine, bald die andere der Formen von $f_{(z)} \cdot \partial x_z$, und hängt dies von den Grenzwerthen von z, ab.

Beispiel 1. Nehmen wir $f_x = x$, so daß $F_x = \int x \cdot dx = \frac{1}{2}x^2$ wird; und setzen wir zwischen x und z noch einmal die Gleichung $x^2 - 2xz + 1 = 0$ an, so daß

$$x_z = z \pm \sqrt{z^2-1} \quad \text{und} \quad \partial x_z = 1 + \frac{z}{\pm\sqrt{z^2-1}}, \text{ also}$$

$$f_{(z)} = z \pm \sqrt{z^2-1} \quad \text{und} \quad f_{(z)} \cdot \partial x_z = 2z \pm \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \text{wird,}$$

wo alle oberen Vorzeichen zugleich gelten, oder alle unteren zugleich.

Für die Funktion $x_z = z \pm \sqrt{z^2-1}$, welche $z_x = \frac{1+x^2}{2x}$ liefert, haben wir schon früher (§. 4.) den Gang der Werthe von z, wie folgt gefunden. Während nämlich die Werthe von x, von $-\infty$ an durch -1 und 0 hindurch bis zu $+1$ und weiter bis zu $+\infty$ hin, stets wachsend gedacht werden, wachsen die zugehörigen Werthe von z, von $-\infty$ an bis zu einem Maximum-Werth -1 hin (welcher zu $x = -1$ gehört), um von da an bis zu $-\infty$ hin (welcher Werth von z, zu $x = -\frac{1}{\infty}$ gehört) wieder abzunehmen. — Für $x = 0$ unterbrechen die Werthe von z, ihre Stetigkeit, so daß zu $x = 0$ gar kein Werth von z gehört; dann aber fangen die Werthe von z, von $+\infty$ an (welcher Werth zu $x = +\frac{1}{\infty}$ gehört) und nehmen wieder fortwährend ab, bis zu einem Minimum-Werth $+1$ hin (welcher Werth zu $x = +1$ gehört), um von da an mit x zugleich wiederum bis zu $+\infty$ hin zu wachsen.

Man hat also (nach X., XI. und XII.), je nach den folgenden vier verschiedenen Fällen, die nachstehenden vier verschiedenen (vollkommenen) Gleichungen, nämlich:

A. Nimmt man beide Grenzen a und b (es ist stets $b > a$ gedacht) kleiner als -1, zu welchem letzteren Werth von x, der Maximum-Werth von z (auch $= -1$) gehört, — oder beide größer als $+1$, zu welchem letztern Werth von x, der Minimum-Werth von z (auch $= +1$) gehört, — so wachsen die Werthe von z, von α an bis zu β hin ununterbrochen; es findet daher jetzt die Gleichung X. unter der daselbst gegebenen Beschränkung statt; und diese liefert

$$1)\quad \int_a^b x\cdot dx = \int_\alpha^\beta \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz,$$

wenn a und b beide größer als +1 sind; dagegen findet sich

$$2)\quad \int_a^b f_x\cdot dx = \int_\alpha^\beta \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz,$$

wenn a und b kleiner als −1 sind *).

B. Nimmt man aber beide Grenzen a und b, >-1, dagegen <0, oder >0 aber $<+1$, so nehmen die Werthe von z, von α an bis zu β hin, ununterbrochen ab, und die nun mit der Beschränkung eintretende Gleichung X., daß ∂x_z negativ werden muß, giebt daher jetzt

$$3)\quad \int_a^b x\cdot dx = \int_\alpha^\beta \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz,$$

wenn a und b, >0, aber $<+1$ sind; dagegen

$$4)\quad \int_a^b x\cdot dx = \int_\alpha^\beta \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz,$$

wenn a und b, <0 aber >-1 sind **).

C. Nimmt man $a<-1$, aber $b>-1$, jedoch noch <0, so liegt zwischen a und b der Werth $x = c = -1$, zu welchem

---

*) Da nämlich $\partial x_z = 1 + \frac{z}{\pm\sqrt{z^2-1}}$ ist, so wird ∂x_z positiv, so lange z positiv ist, wenn man $+\sqrt{z^2-1}$ nimmt; dagegen wird ∂x_z, so lange z negativ ist, nur dann positiv, wenn man $-\sqrt{z^2-1}$ gelten läßt.

**) In diesem Falle B. muß ∂x_z d. h. $1 + \frac{z}{\pm\sqrt{z^2-1}}$ negativ werden; dies wird aber in 3.), wo die Grenzwerthe von z, positiv sind, nur dann möglich sein, wenn man das untere Vorzeichen gelten läßt; in 4.) dagegen, wo die Grenzwerthe von z negativ sind, muß man das obere Vorzeichen gelten lassen, wenn man ∂x_z negativ haben will.

$z = \gamma = -1$ als ein Maximum-Werth gehört. Dasmal wachsen also die Werthe von z, von α an bis zu γ hin, nehmen aber dann wieder von γ an bis zu β hin ab; es tritt daher jetzt die Gleichung XI. ein, und diese liefert

$$5) \int_a^b x \cdot dx = \int_\alpha^{-1} \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz + \int_{-1}^{\beta} \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz$$
$$= \int_\alpha^{-1} \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz - \int_\beta^{-1} \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz.$$

D. Nimmt man $a > 0$ aber $< +1$, dagegen $b > +1$, so nehmen die Werthe von z, von α an bis zum Minimum-Werth $\gamma = +1$ ab, um von da an bis zu β hin stets zu wachsen. Die nun geltende Gleichung XII. liefert daher jetzt

$$6) \int_a^b x \cdot dx = \int_\alpha^{+1} \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz + \int_{+1}^{\beta} \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz$$
$$= -\int_{+1}^{\alpha} \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz + \int_{+1}^{\beta} \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz.$$

Wegen der (für $x = 0$) statt findenden Unterbrechung der Stetigkeit der Werthe von z, kann man hier auch noch folgende Fälle betrachten, die im Paragraphen selbst nicht berührt worden sind, deren Betrachtung und Erledigung aber im Geiste des Paragraphen keine weitere Schwierigkeit hat; nämlich:

E. Nimmt man $a > -1$, aber < 0, und $b > 0$ aber $< +1$, so nehmen die Werthe von z, von α an bis zu $-\infty$ stets ab, fangen dann plötzlich bei $+\infty$ wieder an, nehmen aber dann wieder stets ab, bis zu β hin; daher tritt die Formel X. zweimal ein, jedesmal mit der Beschränkung, daß ∂x_z negativ werden muß; und man hat daher nun die richtige Gleichung

$$7) \int_a^b x \cdot dx = \int_\alpha^{-\infty} \left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz + \int_{+\infty}^{\beta} \left(2z - \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \cdot dz \, *),$$

*) Da im erstern Integral zur Rechten, die Grenzwerthe von z negativ sind, so wird ∂x_z für dieselben nur dann negativ, wenn man das obere Vorzeichen nimmt; im andern Integral dagegen sind die Grenzwerthe von

also auch $= -\int_{-\infty}^{\alpha}\left(2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz + \int_{\beta}^{+\infty}\left(-2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz$ *).

F. Nimmt man $a<-1$, aber $b>+1$, so daß α negativ und <-1, β dagegen positiv und >1 wird, und zwischen α und β zuerst der Maximum-Werth -1 von z, dann die Unterbrechung der Stetigkeit, zuletzt aber auch noch der Minimum-Werth $+1$ von z, liegt, so muß statt der Gleichungen X., XI. oder XII. die nachstehende kommen, nämlich:

$$8)\quad \int_a^b x\cdot dx = \int_{\alpha}^{-1}\left(2z-\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz + \int_{-1}^{-\infty}\left(2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz$$
$$+\int_{+\infty}^{+1}\left(2z-\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz + \int_{+1}^{\beta}\left(2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz$$
$$=\int_{\alpha}^{-1}\left(2z-\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz - \int_{-\infty}^{-1}\left(2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz$$
$$-\int_{+1}^{+\infty}\left(2z-\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz + \int_{+1}^{\beta}\left(2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz.$$

Im erstern Integral (zur Rechten) muß nämlich ∂x_z innerhalb der Grenzwerthe α und -1, positiv werden; weil aber diese

---

z positiv, daher mußte hier das untere Vorzeichen genommen werden, wenn ∂x_z, für diese Grenzwerthe, ebenfalls negativ werden sollte.

*) Man braucht hier nicht zu fürchten, daß eines dieser bestimmten Integrale, wegen der unendlichgroßen Grenze, selbst unendlichgroß werden, d. h. gar keinen Werth mehr haben dürfte, oder, wie man sagt divergent sein wird. — Im erstern Integral zur Rechten ist $\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}$ stets positiv, und für $z=-\infty$, dem positiven Werthe $-2z$ unendlich nahe gleich; daher ist $2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}$ für $z=-\infty$ unendlich nahe der Null gleich, oder $=-\frac{1}{\infty}$. — In dem andern Integral zur Rechten in der zweiten Zeile, ist für $z=+\infty$, der Ausdruck $-2z+\frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}$ ebenfalls unendlich nahe der Null gleich, nämlich $=+\frac{1}{\infty}$. Außerdem aber kann (und muß) die Convergenz beider Integrale noch bewiesen werden.

Grenzwerthe negativ sind, so wird ∂x_z d. h. $1 + \frac{z}{\pm\sqrt{z^2-1}}$ nur dann positiv, wenn man das untere Vorzeichen nimmt. — Im zweiten Integral und noch im dritten muß ∂x_z negativ werden, innerhalb der Grenzen eines jeden derselben; weil aber im zweiten Integral diese Grenzwerthe negativ, im dritten dagegen positiv sind, so muß im zweiten Integral die $\sqrt{z^2-1}$ mit dem obern (+) Zeichen, im dritten Integral dagegen mit dem untern (—) Zeichen genommen werden, wenn jedesmal ∂x_z negativ werden soll. Im vierten Integral muß ∂x_z positiv werden, innerhalb der positiven Grenzen +1 und β, und deshalb muß hier $\sqrt{z^2-1}$ wieder mit dem obern (+) Zeichen vorkommen.

In allen Gleichungen 1.—8.) stellt aber $\sqrt{z^2-1}$ selbst, jetzt stets ihren absoluten (positiven) Werth vor.

In der Gleichung 8.) ist aber die Summe der zwei erstern bestimmten Integrale zur Rechten, wenn

$$\int\left(2z + \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2-1}}\right)\cdot dz = z^2 + z\sqrt{z^2-1} = \varphi_z \quad \text{gefunden worden}$$

ist, und wenn man durch φ^{I}_z und φ^{II}_z die beiden Formen von φ_z bezeichnet, wo $\sqrt{z^2-1}$ bezüglich negativ und positiv genommen wird, (nach der Formel ⊙),

$$9)\cdots \quad = (\varphi^{\mathrm{I}}_{-1} - \varphi^{\mathrm{I}}_{\alpha}) + (\varphi^{\mathrm{II}}_{-\infty} - \varphi^{\mathrm{II}}_{-1}) = \varphi^{\mathrm{II}}_{-\infty} - \varphi^{\mathrm{I}}_{\alpha},$$

in so ferne $\varphi^{\mathrm{I}}_{-1} = \varphi^{\mathrm{II}}_{-1}$ sein muß, weil -1 der Maximum-Werth von z ist. Eben so ist die Summe der beiden folgenden bestimmten Integrale in 8.) zur Rechten

$$10)\cdots \quad = (\varphi^{\mathrm{I}}_{+1} - \varphi^{\mathrm{I}}_{\infty}) + (\varphi^{\mathrm{II}}_{\beta} - \varphi^{\mathrm{II}}_{+1}) = \varphi^{\mathrm{II}}_{\beta} - \varphi^{\mathrm{I}}_{\infty},$$

in so ferne auch $\varphi^{\mathrm{I}}_{+1} = \varphi^{\mathrm{II}}_{+1}$ sein muß, weil +1 der Minimum-Werth von z ist. — Addirt man aber die Resultate 9.) und 10.), so findet sich die Summe aller vier bestimmten Integrale zur Rechten in 8.),

$$= (\varphi^{II}_{\beta} - \varphi^{I}_{\infty}) + (\varphi^{II}_{-\infty} - \varphi^{I}_{\alpha}) = \varphi^{II}_{\beta} - \varphi^{I}_{\alpha},$$

in so ferne $\varphi^{I}_{\infty} = \varphi^{II}_{-\infty} = \delta^2 - \delta\sqrt{\delta^2-1}$ für $\delta = \infty$,

d. h. $= \delta^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\delta^4} +$ in inf.

für $\delta = \infty$, d. h. $= \frac{1}{2}$ ist.

Dies stimmt wieder genau mit dem §. 4. überein. Es ist nämlich nach der Formel (⊙)

$$\int_a^b f_x \cdot dx = \int_{b \div a} f_x \cdot dx \quad \text{d. h.} \quad = F_b - F_a;$$

nach §. 4. ist aber wieder

$$\int_{b \div a} f_x \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz \quad \text{d. h.} \quad = \varphi_\beta - \varphi_\alpha,$$

sobald man statt der vier Werthe von $\varphi_\beta - \varphi_\alpha$ denjenigen nimmt, welcher nach Anleitung des §. 4. gefunden wird und welcher in dem letztgedachten Fall der Nr. 8., eben als der oben durch $\varphi^{II}_{\beta} - \varphi^{I}_{\alpha}$ ausgedrückte sich ausweist.

Beispiel 2. Nehmen wir noch, als neues Beispiel, $f_x = (Sin\, x)^2$. Will man nun $\int_a^b (Sin\, x)^2 \cdot dx$ dadurch finden, daß man

1) $Sin\, x = z$, also $x = x_z = \frac{1}{Sin} z$ *)

setzt, — so hat x_z, nämlich $\frac{1}{Sin} z$ zwei Reihen von Werthen von denen jede unendlichviele Werthe enthält und welche durch

2) $2n\pi + Arc\, sin.\, z$ und $(2n+1)\pi - Arc\, sin.\, z$

ausgedrückt sind, wo n sowohl 0 als auch jede positive und auch jede negative ganze Zahl vorstellt, während π die Ludol-

---

*) Unter $\frac{1}{Sin} z$ verstehen wir alle Bogen, deren Sinuswerth $= z$ gefunden wird; durch $Arc\, sin.\, z$ dagegen bezeichnen wir stets den an sich kleinsten, übrigens $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ dieser Bogen, je nachdem z selbst $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

phi'sche Zahl (die Länge des Halbkreises für den Radius 1) bezeichnet. — Zu diesen Werthen von x_z findet sich nun

$$3)\quad \partial x_z = \frac{1}{\pm\sqrt{1-z^2}}\cdot dz \quad \text{zweiförmig,}$$

wo das (+) oder (—) Zeichen der Quadratwurzel bezüglich der erstern oder der andern Form von x_z angehört. Ferner wird dasmal $f_{(z)} = z^2$ nur einförmig, aber

$$4)\ \int [f_{(z)}\cdot\partial x_z]\cdot dz = \int \frac{z^2}{\pm\sqrt{1-z^2}}\cdot dz = \mp\tfrac{1}{2}(z\cdot\sqrt{1-z^2} - Arc\ sin.z)$$

wiederum zweiförmig, wo die obern Vorzeichen zugleich gelten, oder die unteren zugleich, wie die Integralrechnung beweist.

Aus der Gleichung $Sin\,x = z$, wenn man sie nach allem x differentiirt und dann $\partial z_x = 0$ setzt, erhält man $Cos\,x = 0$, also $x = (2n \pm \tfrac{1}{2}\pi)$; und weil $\partial^2 z_x = -Sin\,x \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist, je nachdem $x = (2n \pm \tfrac{1}{2})\pi$, so folgt, daß z den Maximum-Werth +1 haben wird, wenn $x = (2n + \tfrac{1}{2})\pi$, dagegen den Minimum-Werth —1 hat, für $x = (2n - \tfrac{1}{2})\pi$ oder $= (2n + \tfrac{3}{2})\pi$.

Nimmt man also z. B. beide Grenzen a und b zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}\pi$, so muß ∂x_z fortwährend positiv bleiben, also müssen nun alle obern Vorzeichen genommen werden, weil dasmal der positive oder negative Zustand von ∂x_z nicht zugleich von den speciellen Werthen von z, sondern blos davon abhängt, daß man in ∂x_z d. h. in $\frac{1}{\pm\sqrt{1-z^2}}$, die Quadratwurzel mit dem (+) oder (—) Zeichen nimmt. Man hat daher jetzt (nach X. in der erstern Beschränkung)

$$1.\,1)\quad \int_a^b (Sin\,x)^2\cdot dx = \int_\alpha^\beta \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz.$$

Nimmt man a und b zwischen $+\tfrac{1}{2}\pi$ und $+\pi$, so muß ∂x_z an beiden Grenzen α und β negativ werden, man hat daher nun (nach X. in der andern Beschränkung)

$$2.\ 2)\quad \int_a^b (Sin\,x)^2\cdot dx = \int_\alpha^\beta \frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}}\cdot dz.$$

Nimmt man a zwischen 0 und $+\frac{1}{2}\pi$, dagegen b zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $+\pi$, so muß ∂x_z für $z=\alpha$ positiv, für $z=\beta$ dagegen negativ werden; also hat man nun, da der dazwischen liegende Maximum-Werth von z, $=+1$ ist, nach XI.

$$3.\ 3)\quad \int_a^b (Sin\,x)^2\cdot dx = \int_\alpha^{+1} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz + \int_{+1}^\beta \frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$
$$= \int_\alpha^{+1} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz + \int_\beta^{+1} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz.$$

Nimmt man a zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, dagegen b zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π, so daß der Minimum-Werth -1 von z, zwischen α und β liegt, — so muß ∂x_z für $z=\alpha$ negativ, für $z=\beta$ dagegen positiv werden, und man hat daher nun (nach XII.)

$$4.\ 4)\quad \int_a^b (Sin\,x)^2\cdot dx = \int_\alpha^{-1} \frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}}\cdot dz + \int_{-1}^\beta \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$
$$= \int_{-1}^\alpha \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz + \int_{-1}^\beta \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz.$$

Nimmt man a zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, aber b zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π, so daß zwischen α und β zuerst der Maximum-Werth $+1$, und dann noch der Minimum-Werth -1 von z, liegt, — so gewinnt man leicht im Geiste des Paragraphen die Ueberzeugung, daß man jetzt

$$5.\ 5)\quad \int_a^b (Sin\,x)^2\cdot dx = \int_\alpha^{+1} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz + \int_{+1}^{-1} \frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$
$$+ \int_{-1}^\beta \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$

nehmen müsse, wenn man die richtige Gleichung haben wolle. Weil aber

$$\int_{-1}^\beta \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz = \int_{-1}^\alpha \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz + \int_\alpha^\beta \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$

und $\int_{-1}^{\alpha}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz+\int_{\alpha}^{+1}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz=\int_{+1}^{-1}\frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$

ist, so giebt das letzte Resultat der Gleichung 5. 5) auch noch

$$5)\ \int_a^b(Sin\,x)^2\cdot dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz+2\int_{-1}^{+1}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz;$$

und weil $\int_{-1}^{0}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz=\int_{0}^{+1}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$ ist (weil $\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}$ denselben Werth behält, man mag z positiv, oder z negativ nehmen), so findet sich auch noch

$$6)\ \int_a^b(Sin\,x)^2\cdot dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz+4\int_{0}^{1}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz,$$

wenn nur a zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, dagegen b zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegt.

Es ist leicht zu sehen, wie statt $\int_a^b(Sin\,x)^2\cdot dx$ die Summe von noch mehr als drei bestimmten Integralen in z, gefunden werden würde (im Geiste des Verfahrens des Paragraphen), wenn man a und b so nehmen wollte, daß zwischen a und b noch mehr Maxima und Minima lägen.

Vergessen wir aber nicht, daß die bestimmten Integrale zur Rechten der Gleichungen 1. 1.) — 5. 5.) nur angezeigte Summen der unendlichvielen Werthe der, unter dem Integralzeichen stehenden unendlichkleinen Elemente sind, und daß solche nun noch nach der Formel (⊙) ausgewerthet werden müssen.

Es findet sich aber das Integral in 1. 1.) zur Rechten, aus 4.) und nach der Formel (⊙), wie folgt, nämlich

$$7)\ \int_{\alpha}^{\beta}\frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}}\cdot dz,=\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}-\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{1-\beta^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}Arc\ sin.\beta-\tfrac{1}{2}Arc\ sin.\alpha.$$

Weil aber $\alpha=Sin\,a$ und $\beta=Sin\,b$ ist, und a und b im ersten Quadranten liegen, so ist $+\sqrt{1-\alpha^2} = Cos\,\mathrm{a}$ und $+\sqrt{1-\beta^2} = Cos\,\mathrm{b}$, so wie $Arc\,sin.\alpha = \mathrm{a}$ und $Arc\,sin.\beta = \mathrm{b}$; und man erhält daher statt des Ausdrucks zur Rechten in 7.) auch noch (weil $\frac{1}{2}Sin\,\mathrm{x}\cdot Cos\,\mathrm{x} = \frac{1}{4}Sin\,2\mathrm{x}$ ist)

8)... $\quad \frac{1}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a})+\frac{1}{4}(Sin\,2\mathrm{a}-Sin\,2\mathrm{b})$;

und dies ist in der That der Werth des Integrals $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}(Sin\,\mathrm{x})^2\cdot d\mathrm{x}$ in 1. 1.) zur Linken; denn man findet direkt (weil $(Sin\,\mathrm{x})^2 = \frac{1}{2}(1-Cos\,2\mathrm{x})$ ist),

$$\int(Sin\,\mathrm{x})^2\cdot d\mathrm{x} = \int(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}Cos\,2\mathrm{x})\cdot d\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{x}-\tfrac{1}{4}Sin\,2\mathrm{x},$$

woraus der Werth des letztern bestimmten Integrals gerade so hervorgeht.

Nach 4.) findet sich ferner das Integral zur Rechten in 2. 2.)

9)... $\quad = \frac{1}{2}\beta\cdot\sqrt{1-\beta^2}-\frac{1}{2}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+\frac{1}{2}Arc\,sin.\alpha-\frac{1}{2}Arc\,sin.\beta.$

Weil aber jetzt a und b im zweiten Quadranten liegen, so ist jetzt $-\sqrt{1-\alpha^2} = Cos\,\mathrm{a}$ und $-\sqrt{1-\beta^2} = Cos\,\mathrm{b}$, so wie

$$Arc\,sin.\alpha = \pi-\mathrm{a} \quad \text{und} \quad Arc\,sin.\beta = \pi-\mathrm{b},$$

in so ferne wir unter $Arc\,sin.$ allemal einen $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ aber an sich (d. h. abgesehen vom Vorzeichen) im ersten Quadranten liegenden Bogen verstehen müssen. Substituiren wir daher diese Werthe in 9.), so erhalten wir wieder denselben Ausdruck wie in 8.), welcher auch direkt für $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}(Sin\,\mathrm{x})^2\cdot d\mathrm{x}$ gefunden worden ist.

Suchen wir nun die Werthe der bestimmten Integrale in 3. 3). — Man findet sofort (nach 4.)

$$\int_\alpha^1 \frac{\mathrm{z}^2}{+\sqrt{1-\mathrm{z}^2}}\cdot d\mathrm{z} = \tfrac{1}{2}\alpha\cdot\sqrt{1-\alpha^2}+\tfrac{1}{2}Arc\,sin.1-\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\alpha$$

und

$$\int_\beta^1 \frac{\mathrm{z}^2}{+\sqrt{1-\mathrm{z}^2}}\cdot d\mathrm{z} = \tfrac{1}{2}\beta\cdot\sqrt{1-\beta^2}+\tfrac{1}{2}Arc\,sin.1-\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\beta.$$

Addirt man daher beide letzteren Gleichungen, so findet sich die Summe der beiden bestimmten Integrale zur Rechten in 3. 3.)

$$10) \cdots \quad = \tfrac{1}{2}\beta\cdot\sqrt{1-\beta^2}+\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\sqrt{1-\alpha^2}+\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\beta-\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\alpha.$$

Weil aber jetzt a im ersten, b dagegen im zweiten Quadranten liegt, so ist $+\sqrt{1-\alpha^2} = Cos\,\mathrm{a}$, dagegen $-\sqrt{1-\beta^2} = Cos\,\mathrm{b}$; ferner $Arc\,sin.\alpha = \mathrm{a}$, aber $Arc\,sin.\beta = \pi-\mathrm{b}$; folglich geht der Werth 10.), nach der Substitution dieser Werthe, genau wieder in den Ausdruck 8.) über, welcher sich auch direkt als der Werth des bestimmten Integrals zur Linken in 3. 3.) findet.

Betrachten wir jetzt den Werth der Summe der beiden bestimmten Integrale in 4. 4.) zur Rechten. Nach 4.) findet man

$$\int_{-1}^{\alpha}\frac{\mathrm{z}^2}{+\sqrt{1-\mathrm{z}^2}}\cdot d\mathrm{z} = -\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\sqrt{1-\alpha^2}+\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\alpha-\tfrac{1}{2}Arc\,sin.(-1)$$

und

$$\int_{-1}^{\beta}\frac{\mathrm{z}^2}{+\sqrt{1-\mathrm{z}^2}}\cdot d\mathrm{z} = -\tfrac{1}{2}\beta\cdot\sqrt{1-\beta^2}+\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\beta-\tfrac{1}{2}Arc\,sin.(-1).$$

Addirt man daher beide letzteren Gleichungen, so erhält man die Summe der bestimmten Integrale in 4. 4.) zur Rechten (weil $Arc\,sin.(-1) = -\tfrac{1}{2}\pi$ ist)

$$11) \cdots \quad = -\tfrac{1}{2}\alpha\cdot\sqrt{1-\alpha^2}-\tfrac{1}{2}\beta\cdot\sqrt{1-\beta^2}+\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\alpha+\tfrac{1}{2}Arc\,sin.\beta+\tfrac{1}{2}\pi.$$

Weil aber jetzt a im zweiten, und b im vierten Quadranten liegt, so ist $-\sqrt{1-\alpha^2} = Cos\,\mathrm{a}$ und $+\sqrt{1-\beta^2} = Cos\,\mathrm{b}$; eben so $Arc\,sin.\alpha = \pi-\mathrm{a}$ und (weil jetzt $\beta = Sin\,\mathrm{b}$ negativ ist, also $Arc\,sin.\beta$ auch negativ sein muß, aber an sich im ersten Quadranten liegend) $Arc\,sin.\beta = \mathrm{b}-2\pi$. — Substituirt man aber nun diese Werthe in den Werth 11.), so kommt genau wieder der Ausdruck 8.), welcher auch direkt für $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}(Sin\,\mathrm{x})^2\cdot d\mathrm{x}$ gefunden wird.

Suchen wir jetzt noch den Werth der Summe der bestimmten Integrale zur Rechten, in der Gleichung 5. 5). — Das Integral 4.) liefert

$$\int_{\alpha}^{1} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = +\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} + \tfrac{1}{2} Arc\ sin.1 - \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\alpha,$$

$$\int_{+1}^{-1} \frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = -\tfrac{1}{2} Arc\ sin.(-1) + \tfrac{1}{2} Arc\ sin.1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_{-1}^{\beta} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = -\tfrac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{1-\beta^2} + \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\beta - \tfrac{1}{2} Arc\ sin.(-1).$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so ergiebt sich für die Summe der drei bestimmten Integrale in 5. 5.) zur Rechten,

12)... $+\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} - \tfrac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{1-\beta^2} + \pi + \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\beta - \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\alpha.$

Weil aber jetzt a im ersten Quadranten, b dagegen im vierten Quadranten liegt, so hat man $+\sqrt{1-\alpha^2} = Cos\,a$, $+\sqrt{1-\beta^2} = Cos\,b$, ferner $Arc\ sin.\alpha = a$ und $Arc\ sin.\beta = b - 2\pi$. Werden nun diese Werthe in 12.) substituirt, so erhält man genau den Ausdruck 8.) wieder, wie derselbe direkt für $\int_a^b (Sin\,x)^2 \cdot dx$ zur Linken in 5. 5.), gefunden wird. So sehen sich also alle Resultate 1. 1.) — 5. 5.) bestätigt.

Suchen wir noch den Werth der Summe der bestimmten Integrale in 6.) zur Rechten. — Man findet (aus 4.)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = -\tfrac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{1-\beta^2} + \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} + \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\beta - \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\alpha$$

und

$$\int_{0}^{1} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = \tfrac{1}{2} Arc\ sin.1 - \tfrac{1}{2} Arc\ sin.0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Addirt man zu der erstern dieser Gleichungen die 4fache zweite, so erhält man für die Summe der bestimmten Integrale in 6.) zur Rechten,

13)... $\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} - \tfrac{1}{2}\beta \cdot \sqrt{1-\beta^2} + \pi + \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\beta - \tfrac{1}{2} Arc\ sin.\alpha.$

Weil aber a im ersten, b dagegen im vierten Quadranten liegt, so ist $+\sqrt{1-\alpha^2} = Cos\,a$, $+\sqrt{1-\beta^2} = Cos\,b$, ferner $Arc\ sin.\alpha = a$ und $Arc\ sin.\beta = b - 2\pi$. Substituirt man nun diese Werthe in das Resultat 13.), so kommt abermals das Resultat 8.).

Anmerkung. Wir wollen den Anfänger vor dem unvorsichtigen Gebrauch unvollkommener Gleichungen noch durch das nachstehende warnen.

Es ist nach der Formel (⊙)

1) $\int_a^b f_x \cdot dx = \int_{b \div a} f_x \cdot dx$,

und

2) $\int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_{\beta \div \alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$,

und auch noch (nach §. 4.)

3) $\int_{b \div a} f_x \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$.

Wenn nun der Anfänger diese Gleichungen als vollkommene behandeln und aus der Verbindung dieser drei Gleichungen den Schluß ziehen wollte, daß auch allemal

$$\int_a^b f_x \cdot dx = \int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$$

sein müsse, so würde er ein, den Gleichungen XI. und XII. widersprechendes d. h. unrichtiges Resultat haben. Von den drei Gleichungen 1.–3.) ist aber nur die 1.) eine vollkommene (deren beide Seiten unbedingt für einander gesetzt werden können). Die Gleichung 2.) dagegen hat, wenn z. B. x_z zweiförmig ist, links zwei, rechts vier Werthe, und lehrt also blos, daß von den vier Werthen zur Rechten, in jedem besonderen Falle zwei herausgesucht werden können, welche die beiden Summen zur Linken ausdrücken. — Die Gleichung 3.) endlich hat zur Linken nur einen Werth, zur Rechten aber deren vier; sie lehrt also blos, daß von den vier Werthen zur Rechten, in jedem besonderen Falle einer herausgesucht werden kann, welcher der zur Linken ist. Folgert man daher aus 1.) und 3.)

4) $\int_a^b f_x \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$

so sagt diese Gleichung weiter nichts, als daß von den vier Werthen zur Rechten, in jedem besonderen Falle einer herausgesucht werden kann, welcher wirklich der Werth des (eindeutigen) bestimmten Integrals zur Linken ist. Die noch übrige Gleichung 2.) sagt nun, daß von denselben vier Werthen zur Rechten, zweie herausgesucht werden können, welche die beiden Werthe des (zweideutigen) bestimmten Integrals zur Linken sind. Man begreift nun leicht, daß jener Werth, welcher in 4.) als Werth von $\int_a^b f_x \cdot dx$ sich findet, von diesen letztern beiden Werthen verschieden, nämlich der dritte oder vierte Werth von $\int_{\beta \div \alpha}[f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$ sein kann.

Niemand wird aus

5) $\sqrt{(a^2)} = a$ und 6) $\sqrt{(a^2)} = -a$,

welche Gleichungen beide unvollkommene sind, schließen, daß auch $a = -a$ sein müsse, weil das Resultat augenblicklich als ein unrichtiges in die Augen fällt. — Dagegen haben einige der größten Mathematiker in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts aus

7) $log(a^2) = 2log\,a$ und 8) $log(a^2) = log[(-a)^2] = 2log(-a)$

gefolgert, daß auch

$$2log\,a = 2log(-a), \text{ d. h. } log(-a) = log\,a$$

sein müsse, welche Behauptung erst beinahe ein halbes Jahrhundert später von Euler als eine entschieden unrichtige nachgewiesen wurde. Es drücken bekanntlich $2log\,a$ und $2log(-a)$ von einander verschiedene Werthe des $log(a^2)$ aus, gerade so wie a und $-a$ zwei verschiedene Werthe von $\sqrt{(a^2)}$ sind. Die Gleichungen 7.) und 8.) sind eben so unvollkommene wie die Gleichungen 5.) und 6.); d. h. beide Seiten dieser Gleichungen drücken nicht genau ein und dasselbe aus, können daher nicht unbedingt für einander gesetzt werden, und deshalb kann man in $\sqrt{(a^2)} = -a$, statt $\sqrt{(a^2)}$ nicht unbedingt a setzen; und eben so wenig in $log(a^2) = 2log(-a)$ statt $log(a^2)$ nicht unbedingt setzen $2log\,a$.

Der Verf. hat deshalb in der neuesten (dritten) Auflage des zweiten Theils der „Analysis des Endlichen" (Versuch e. v.

f. Systems der Mathematik, 2ter Th. 3te Aufl. 1855.) alle Grundgleichungen, nach denen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, ferner mit Sinus, Kosinus und Arcus gerechnet wird, einer genauen Revision unterworfen, um die unvollkommenen Gleichungen von den vollkommenen abzusondern, und an den erstern die nöthigen Korrektionen angebracht, wodurch sie in vollkommene verwandelt werden, d. h. in solche, deren beide Seiten unbedingt für einander gesetzt werden können.

Alle früher sogenannten paradoxen Resultate des Kalkuls, — alle unrichtigen Rechnungs-Resultate, die man bei den anerkannt größten Analysten des vorigen Jahrhunderts und selbst noch einer späteren Zeit, vorfindet, sind einzig und allein dem Umstande zuzuschreiben, daß man unvollkommene Gleichungen für vollkommene angesehen, oder doch wie letztere behandelt hat.

Anmerk. 2. Denkt man sich in XI. zur Rechten, im Minuenden und Subtrahenden, unter $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ eine und dieselbe Form, so ist der ganze Ausdruck zur Rechten (nach §. 2. VII.) $= \int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$.

Dieses bestimmte Integral ist aber dem anderen $\int_a^b f_x \cdot dx$ nicht mehr gleich, und es entsteht daher nun die Frage, welchem Theile der letztern Summe die erstere gleich ist? —

Um diese Frage zu beantworten, sei zuerst $\beta > \alpha$ gedacht und es seien die zu
den Werthen von z, nämlich $\alpha < \beta < \gamma > \beta > \alpha$,
gehörigen Werthe von x bezüglich $a < b_1 < c < b < a_1$;
dann fällt in die Augen (nach X.), daß

$$\text{XIII.} \quad \int_a^{b_1} f_x \cdot dx = \int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$$

sein werde, unter der Voraussetzung, daß das Produkt $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ diejenige seiner beiden Formen vorstelle, für welche ∂x_z positiv wird (von $z = \alpha$ bis $z = \beta$).

Dagegen findet sich unter derselben Voraussetzung (daß $\beta > \alpha$ ist) nach derselben Formel X.,

$$\int_{b}^{a_1} f_x \cdot dx = \int_{\beta}^{\alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz,$$

also auch (nach §. 2. V.)

XIV. $\int_{\alpha}^{\beta} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_{a_1}^{b} f_x \cdot dx = -\int_{b}^{a_1} f_x \cdot dx,$

unter der Voraussetzung, daß unter $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ jetzt diejenige Form verstanden wird, für welche ∂x_z (von $z = \alpha$ an bis $z = \beta$ hin) negativ wird.

Ist aber $\beta < \alpha$, und finden sich die zu den Werthen von z, $= \beta < \alpha < \gamma > \alpha > \beta$ gehörigen Werthe von x, bezüglich $b_1 < a < c < a_1 < b$, so findet sich (nach X.)

$$\int_{b_1}^{a} f_x \cdot dx = \int_{\beta}^{\alpha} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz,$$

also auch (nach §. 2. V.)

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_{a}^{b_1} f_x \cdot dx = -\int_{b_1}^{a} f_x \cdot dx,$$

wenn man $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ so nimmt, daß ∂x_z von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ positiv wird, dagegen ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_{a_1}^{b} f_x \cdot dx,$$

wenn man statt $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ ihre andere Form nimmt, für welche ∂x_z von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ stets negativ wird.

Und dies sind die Resultate XIII. und XIV. noch einmal, so daß letztere gelten, es mag $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ sein, wenn nur a und b_1, oder a_1 und b solche Werthe von x sind (zu denen $z = \alpha$ und $z = \beta$ gehört), welche auf einer und derselben Seite desjenigen Werthes von x liegen, zu welchem der Maximum-Werth von z gehört.

Denkt man sich auch in der Gleichung XII., wo γ ein Minimum-Werth von z, ist, wiederum, in den beiden bestimmten Integralen zur Rechten, die Form $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ als eine und dieselbe, so ist der ganze Ausdruck zur Rechten, $= \int_{\alpha}^{\beta} [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz$, aber jetzt nicht mehr $= \int_{a}^{b} f_x \cdot dx$; sondern es ist jetzt, wenn $\beta > \alpha$ und wenn die

zu den Werthen von z, $= \beta > \alpha > \gamma < \alpha < \beta$
gehörigen Werthe von x, bezüglich $b_1 < a < c < a_1 < b$
sind (nach der X. in ihrer ersten Beschränkung)

XV. $\int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_{a_1}^b f_x \cdot dx$

sobald statt $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ diejenige ihrer beiden Formen gesetzt wird, welche ∂x_z von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ positiv macht; dagegen ist

XVI. $\int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_a^{b_1} f_x \cdot dx = -\int_{b_1}^a f_x \cdot dx,$

wenn unter $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ ihre andere Form verstanden wird, welche ∂x_z negativ hat, von $z = \alpha$ bis $z = \beta$; (nach X. in ihrer zweiten Beschränkung).

Wenn aber $\beta < \alpha$ ist, und die
zu den Werthen von z, $= \alpha > \beta > \gamma < \beta < \alpha$
gehörigen Werthe von x, bezüglich $a < b_1 < c < b < a_1$
sind, so hat man (nach X. in der ersten Beschränkung)

$$\int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_{a_1}^b f_x \cdot dx = -\int_b^{a_1} f_x \cdot dx,$$

so lange ∂x_z, in $f_{(z)} \cdot \partial x_z$, positiv genommen ist; dagegen (nach X. in der zweiten Beschränkung)

$$\int_\alpha^\beta [f_{(z)} \cdot \partial x_z] \cdot dz = \int_a^{b_1} f_x \cdot dx,$$

sobald unter $f_{(z)} \cdot \partial x_z$ die andere Form verstanden wird, in welcher ∂x_z, von $z = \alpha$ bis $z = \beta$ stets negativ wird.

Die Resultate XV. und XVI. gelten also, es mag $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ sein, wenn nur a_1 und b, oder a und b_1 solche Werthe von x sind (zu denen $z = \alpha$ und $z = \beta$ gehört), welche auf einer und derselben Seite desjenigen Werthes von x liegen, zu welchem der Minimum-Werth von z gehört.

Aus den vorher mitgetheilten Beispielen, namentlich sehr anschaulich aus dem zweiten Beispiel, kann man sich die etwa noch wünschenswerthen Proben entnehmen. Während nämlich der Bogen x (in $\int (Sin\, x)^2 \cdot dx$) von 0 an durch $\frac{1}{2}\pi$ hindurch, bis π hin und dann weiter durch $\frac{3}{2}\pi$ hindurch, bis 2π wächst, — nehmen die Werthe von $z\ (= Sin\, x)$ von 0 an bis 1 hin zu, von da an wieder bis 0 hin ab, um von da an noch weiter abzunehmen bis zu -1 hin, dann aber wieder bis zu 0 hin zu wachsen. — Jeder positive Werth $\alpha (< 1)$ kommt also zweimal vor, eben so jeder negative Werth α, der an sich kleiner als 1 ist; — und zu demselben Werth α, gehören also zwei verschiedene Werthe von x, einer im ersten, der andere im zweiten Quadranten, wenn α positiv ist; — oder der eine im dritten, der andere im vierten Quadranten, wenn α negativ ist. — Ganz das Gleiche gilt für den Werth β. — Da nun, der einmal angenommenen Bezeichnungsweise zufolge, $\int_\alpha^\beta \varphi_z \cdot dz$ stets nur die Summe der Elementchen $\varphi_z \cdot dz$ vorstellt, welche man erhält, wenn statt z nur alle von α bis β stets wachsenden, oder stets abnehmenden Werthe gesetzt werden (wobei der Faktor dz im erstern Fall immer positiv, im andern Fall immer negativ gedacht werden muß), so folgt von selbst, daß die durch $\int_\alpha^\beta \frac{z^2}{\pm\sqrt{1-z^2}} \cdot dz$ ausgedrückten beiden Summen, nach den beiden Formen $\frac{z^2}{\pm\sqrt{1-z^2}} \cdot dz$ der einzelnen Summanden, zwei verschiedene Werthe haben werden, und daß die Summe $\int_p^q (Sin\, x)^2 \cdot dx$ nur dann der einen oder der andern der Summen $\int_\alpha^\beta \frac{z^2}{\pm\sqrt{1-z^2}} \cdot dz$ gleich werden kann, wenn die Bogen-Werthe p und q von x, die nächsten sind, die zu $z = \alpha$ und $z = \beta$ gehören, nicht aber entferntere (in andern Quadranten liegende), welche dieselben Werthe α und β von $z\ (= Sin\, x)$ haben.

Ist also z. B. a im ersten Quadranten, b dagegen im zweiten, so ist $\alpha = Sin\, a$ und $\beta = Sin\, b$, aber auch $\beta = Sin(\pi - b)$, während $\pi - b = b_1$ wie a, im ersten Quadranten liegt, also α und β auch Werthe sind von z, welche zu den Werthen a und b_1 $(= \pi - b)$ von x gehören, die beide im ersten Quadranten liegen. — Gleichzeitig mit $\alpha = Sin\,a$ ist aber auch $\alpha = Sin(\pi - a)$, während $\pi - a = a_1$ im zweiten Quadranten liegt. Es sind also auch α und β Werthe von z, welche zu den Werthen a_1 $(= \pi - a)$ und b von x gehören, die beide in dem zweiten Quadranten liegen.

Daher findet sich (nach XIII. und XIV.)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{z^2}{+\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = \int_{a}^{\pi-b} (Sin\,x)^2 \cdot dx$$

und

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{z^2}{-\sqrt{1-z^2}} \cdot dz = \int_{\pi-a}^{b} (Sin\,x)^2 \cdot dx.$$

Und gerade so kann man die übrigen Fälle durchnehmen.

Anmerk. 3. Nach dem Gesagten ist es leicht die Formeln hinzustellen, durch welche $\int_a^b f_x \cdot dx$ in eine Reihe bestimmter Integrale nach z, ausgedrückt wird, wenn zwischen dem ersten Werth α von z, und dessen letzten Werth β, zwei oder mehrere Maxima und Minima γ, γ_1, γ_2 2c. 2c. sich ergeben.

Anmerk. 4. Ist nicht blos x_z zweideutig, sondern auch z_x, so daß zu jedem Werth a oder b von x, zwei Werthe α und zwei Werthe β sich ergeben, so ist es gleichgültig, welches der beiden Paare von Werthen, die aus einer und derselben Form von z_x, für $x = a$ und $x = b$, hervorgehen, man statt α und β nimmt.

Endlich ist alles Gesagte auch leicht über den Fall zu erstrecken, wo die Funktion x_z mehr als zweiförmig sein sollte.

Zweite Uebung.

Berechnung von $\Sigma f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$ unter verschiedenen Voraussetzungen.

§. 7. Erste Aufgabe.

Betrachten wir jetzt die Summe von unendlichmal unendlichvielen unendlichkleinen Produkten, welche alle aus dem einen

$$f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$$

hervorgehen, indem man dem x eine, um unendlichkleine dx, von a bis b hin wachsende Reihe von Werthen giebt, gleichzeitig aber auch statt y, unabhängig von den Werthen von x, die von m bis n hin, um unendlichkleine dy wachsende (unendliche) Reihe von Werthen nimmt. Diese Produkte sind alle unendlichklein von der zweiten Ordnung; und die fragliche Summe wollen wir durch

$$\underset{a\leqq x\leqq b,\ m\leqq y\leqq n}{\Sigma f\cdot dx\cdot dy} \quad \text{oder auch blos durch} \quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy$$

bezeichnen, indem man die Grenzbedingungen im Gedächtniß behält.

Man kann die unendlichmal unendlichvielen zu summirenden Produkte in Form eines Rechtecks geschrieben sich denken, so daß alle in einer und derselben Horizontalreihe stehenden Glieder zu einem und demselben Werthe von x, aber zu allen Werthen von y gehören, während von oben nach unten in den einzelnen Horizontalreihen der Werth von x nach und nach vom kleinsten a an bis zum größten b hin wächst; die Werthe von y mögen in jeder Horizontalreihe von der Linken zur Rechten gehend, vom kleinsten m an bis zum größten n hin wachsend, gedacht werden.

1) Man kann nun zuerst die Summe aller Glieder in jeder Horizontal-Reihe finden; nachher diese Summen alle wieder summiren.

2) Man kann aber auch zuerst die Summe aller Glieder in jeder Vertikalreihe auffinden, und dann noch diese Summen wiederum alle zu einander addiren.

In beiden Fällen bekommt man natürlich stets ein und dasselbe Resultat und zwar die verlangte Summe.

Summirt man aber zuerst alle Glieder in einer und derselben Horizontalreihe (in denen x einen und denselben Werth hat, so hat jedes Glied die Form $\varphi_y \cdot dy$, wenn man das Produkt $dx \cdot f_{x,y}$ durch φ_y bezeichnet (weil nicht blos dx, sondern jetzt auch x konstant ist). Daher wird diese Summe durch $\int_m^n \varphi_y \cdot dy$, also durch $\int_m^n (dx \cdot f) \cdot dy$ ausgedrückt sein, während dx als konstanter Faktor herausgerückt werden kann, so daß man $dx \cdot \int_m^n f \cdot dy$ oder $\mathfrak{X}_x \cdot dx$ erhält, wenn das bestimmte Integral $\int_m^n f \cdot dy$, — welches kein y mehr enthält, sondern nur noch eine Funktion von x ist, — durch $\mathfrak{X}_x$ bezeichnet wird. Dieses Resultat $\mathfrak{X}_x \cdot dx$ ist zwar noch unendlichklein, aber nur noch von der ersten Ordnung, und liefert nach und nach die Summen der Glieder in jeder Horizontalreihe, wenn man unter x nach und nach alle seine Werthe sich denkt, von a an, um dx wachsend, bis b hin. Die Summe der Summen aller Horizontalreihen wird daher durch das bestimmte Integral

$\int_a^b \mathfrak{X}_x \cdot dx$ oder $\int_a^b (\int_m^n f \cdot dy) \cdot dx$ ausgedrückt sein.

Summirt man (nach 2.) in umgekehrter Ordnung, so erhält man den Ausdruck $\int_m^n (\int_a^b f \cdot dx) \cdot dy$.

Man drückt daher die gesuchte Summe häufig auch so aus, nämlich durch das Zeichen

$$\int_a^b \int_m^n f \cdot dx \cdot dy,$$

indem man das erste Integralzeichen auf den ersten Faktor dx, das andere auf den andern Faktor dy bezieht, und dem Leser überläßt, in welcher Ordnung er die Integrationen will auf einander folgen lassen.

Jedes einzelne dieser auf einander folgenden bestimmten Integrale, in so ferne es eine bloße Bezeichnung der Summe ist, muß dann nach der Formel (⊙) des §. 5. (d. h. nach IV. des §. 1.) ausgewerthet werden.

Beispiel. Werden in einem Rechteck CDEF (Fig. 3.), die beiden Seiten CD und CF in unendlichviele Theile getheilt, so daß jeder Theil von CD durch dx und jeder Theil von CF durch dy bezeichnet wird; denkt man sich dann das ganze Rechteck durch Parallelen mit den Seiten, welche durch die Theilpunkte gelegt werden, in unendlichmal unendlichviele Rechteckchen zerlegt, deren jedes den Inhalt $dx \cdot dy$ hat; legt man ferner parallel mit den Seiten zwei Koordinaten-Axen O$\mathfrak{X}$ und O$\mathfrak{Y}$; sind nun a und b die Abscissen-Werthe (OA und OB) der Ecken C und D, desgleichen m und n die Ordinaten-Werthe (AC und AF) der Ecken C und F; und denkt man sich zuletzt auf jedes dieser Rechteckchen $dx \cdot dy$, welches an der Stelle liegt, deren Koordinaten-Werthe x und y sind, ein Gewicht gelegt, welches durch $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ ausgedrückt ist, so daß $f_{x,y}$ das Gewicht vorstellt, welches eine Flächen-Einheit treffen würde, wenn sie in allen ihren Theilen von der Größe $dx \cdot dy$, mit dem gleichen Gewichte $f \cdot dx \cdot dy$ (für einen und denselben Werth von x und y) belastet wäre; so drückt das Doppel-Integral

$$\int_a^b \int_m^n f \cdot dx \cdot dy$$

das Gesammtgewicht aus, womit das ganze Rechteck CDEF belastet ist. — Ist aber $f_{x,y}$ die Dichtigkeit des Flächenstückchens $dx \cdot dy$, welches an der durch x und y gegebenen Stelle liegt, — so ist $f \cdot dx \cdot dy$ die Masse dieses Flächenstückchens, und das gedachte Doppel-Integral liefert dann die Masse des ganzen Rechtecks CDEF. — Ist endlich $f_{x,y} = 1$, so drückt das Doppel-Integral den Inhalt des Rechtecks CDEF aus und solcher findet sich dann $=(n-m)(a-b)$. — Ist aber z. B. $f_{x,y}=xy^2$, so ist $\int f_{x,y}\cdot dy=\frac{1}{3}xy^3$,

$\int_m^n f\cdot dy=\frac{1}{3}(n^3-m^3)x=\mathfrak{X}$, und $\int\mathfrak{X}\cdot dx=\frac{1}{6}(n^3-m^3)x^2$,

also $\int_a^b\mathfrak{X}\cdot dx=\frac{1}{6}(n^3-m^3)(b^2-a^2)$

d. h. $\int_a^b\int_m^n f\cdot dx\cdot dy=\frac{1}{6}(n^3-m^3)(b^2-a^2)$;

und dasselbe Resultat ergiebt sich nun auch, wenn man in umgekehrter Ordnung integrirt.

§. 8. Zweite Aufgabe.

Man suche jetzt die Summe derselben Produkte $f\cdot dx\cdot dy$ für dieselben Werthe von x und y, jedoch mit Ausnahme derer, für welche

$$(y-h)^2<p(x-c)$$

ist, während c zwischen a und b, und h zwischen m und n liegen soll, so daß man $a<c<b$ und $m<h<n$ hat; dabei sollen a, c, b, m, h, n reell, p dagegen positiv sein. — Man kann diese Summe so bezeichnen, nämlich

$$\sum_{a\leqq x\leqq b,\ m\leqq y\leqq n,\ (y-h)^2-p(x-c)\geqq 0} f\cdot dx\cdot dy,$$

weil die Bedingung, daß $(y-h)^2\geqq p(x-c)$ sein soll, eben alle Werthe von x und y ausschließt, in denen $(y-h)^2<p(x-c)$ ist.

Erste Auflösung. Summirt man zuerst für einen und denselben bestimmten Werth von y, indem man dem x alle ihm erlaubten Werthe giebt, so hat jeder Werth von x, drei Bedingungen zu erfüllen, nämlich

$$1)\ x\geqq a;\quad 2)\ x\leqq b \text{ und } 3)\ x\leqq c+\frac{1}{p}(y-h)^2,$$

von denen die beiden letzteren mit einander in den Kampf treten. — Giebt man daher dem x alle Werthe, welche zwischen a und b liegen, so muß (der 3. wegen)

$$b\leqq c+\frac{1}{p}(y-h)^2 \quad \text{d. h.} \quad (y-h)^2\geqq p(b-c)$$

sein, d. h., wenn man der Kürze wegen

4) $+\sqrt{p(b-c)}$ durch q bezeichnet,

es darf dann y nicht zwischen $h-q$ und $h+q$ genommen werden. Wird aber y zwischen $h-q$ und $h+q$ genommen, so ist $(y-h)^2 < p(b-c)$ d. h. $b > c + \frac{1}{p}(y-h)^2$ und man kann und darf dann die Werthe von x nur von a an bis zu $c + \frac{1}{p}(y-h)^2$ gehen lassen, für welche Werthe von x allein wieder alle drei Bedingungen 1.–3.) zugleich erfüllt sind.

Man muß daher, da m und n als die Grenzwerthe von y gegeben sind, sofort vier verschiedene Fälle von einander unterscheiden, nämlich:

I. Liegen die gegebenen Grenzwerthe m und n von y, selbst zwischen $h-q$ und $h+q$, so können die Werthe von x nie bis zu b hin genommen werden, sondern immer (d. h. für jeden der Werthe von y) nur bis zu $c + \frac{1}{p}(y-h)^2 (< b)$ hin, und man hat dann unsere gesuchte Summe

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_m^n \left(\int_a^{c+\frac{1}{p}(y-h)^2} f \cdot dx \right) \cdot dy.$$

II. Liegt m unter $h-q$, aber noch n zwischen $h-q$ und $h+q$, so sondert sich ein Theil der Summe Σ ab, in welchem y von m bis $h-q$, und x von a bis b fortgeht, während in dem anderen Theil derselben Summe Σ, die Werthe von y, von $h-q$ bis n fortgehen, aber gleichzeitig die Werthe von x nur von a an bis zu $c + \frac{1}{p}(y-h)^2$ hin; in diesem Falle findet man daher unsere Summe

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_m^{h-q} \left(\int_a^b f \cdot dx \right) \cdot dy + \int_{h-q}^n \left(\int_a^{c+\frac{1}{p}(y-h)^2} f \cdot dx \right) \cdot dy.$$

III. Liegt m (wie in I.) zwischen $h-q$ und $h+q$, aber n über $h+q$, so findet sich

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_{h+q}^{n} \left(\int_{a}^{b} f \cdot dx \right) \cdot dy + \int_{m}^{h+q} \left(\int_{a}^{c+\frac{1}{p}(h-y)^2} f \cdot dx \right) \cdot dy.$$

IV. Liegt endlich m unter $h-q$, und gleichzeitig n über $h+q$, so zerfällt unsere Summe in drei Theile, einmal in den Theil, wo y von m bis $h-q$, und x von a bis b geht; dann in den andern Theil, wo y von $h+q$ bis n, und x von a bis b geht; endlich in den dritten Theil, wo y von $h-q$ bis $h+q$, dagegen x nur von a an bis zu $c+\frac{1}{p}(y-h)^2$ hin geht. Man findet daher jetzt unsere Summe

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_{m}^{h-q} \left(\int_{a}^{b} f \cdot dx \right) \cdot dy + \int_{h+q}^{n} \left(\int_{a}^{b} f \cdot dx \right) \cdot dy$$
$$+ \int_{h-q}^{h+q} \left(\int_{a}^{c+\frac{1}{p}(y-h)^2} f \cdot dx \right) \cdot dy.$$

Nur im ersten Fall kann also die verlangte Summe durch ein einziges bestimmtes Doppel-Integral ausgedrückt werden, bei welchem überdies die Ordnung der Integration nicht beliebig ist.

Die Formel (⊙) des §. 5. oder §. 1. IV. lehrt übrigens allemal, durch welche Rechnung die durch die einzelnen bestimmten Integrale angezeigten Summen ausgewerthet werden.

§. 9.

Zweite Auflösung der zweiten Aufgabe. Man kann aber dieselbe Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ auch noch dadurch in bestimmte Doppel-Integrale ausdrücken, daß man zuerst für einen und denselben (unbestimmten, aber) konstanten Werth von x, die Glieder summirt, welche zu allen Werthen von y gehören, und dann erst für alle Werthe von x, die Summe dieser Summen nimmt.

Bei diesem Gange sind, der dritten Bedingung

$$(y-h)^2 \overline{\overline{>}} p(x-c)$$

gemäß, alle Werthe von y ausgeschlossen, welche zwischen $h-\sqrt{p(x-c)}$ und $h+\sqrt{p(x-c)}$ liegen, so lange $x \overline{\overline{>}} c$ ist.

Ist aber $x<c$, so ist die Bedingung $(y-h)^2 \gtreqqless p(x-c)$ für jeden Werth von y erfüllt, so daß kein einziger derselben durch diese Bedingung ausgeschlossen wird. Daher sondert sich jetzt sogleich ein Theil unserer Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch das Doppel-Integral

$$\int_a^c\left(\int_m^n f\cdot dy\right)\cdot dx.$$

So wie aber $x>c$ wird, so gehen die Werthe von y, nur von m an bis zu $h-\sqrt{p(x-c)}$ hin, und dann erst wieder von $h+\sqrt{p(x-c)}$ an bis zu n hin. Weil dies aber

$$5)\quad m \leqq h-\sqrt{p(x-c)} \quad \text{d. h.} \quad x \geqq c+\frac{1}{p}(h-m)^2$$

$$\text{und}\quad 6)\quad n \geqq h+\sqrt{p(x-c)} \quad \text{d. h.} \quad x \leqq c+\frac{1}{p}(h-n)^2$$

voraussetzt, so hat man für x neue Bedingungen, welche mit der Bedingung $x<b$ in den Kampf treten, d. h. mit der Bedingung $x<c+\frac{1}{p}q^2$, wenn man wieder $\sqrt{p(b-c)}=q$ setzt, so daß $b=c+\frac{1}{p}q^2$ wird.

Bezeichnet man daher

$$7)\quad c+\frac{1}{p}(h-m)^2 \quad \text{durch} \quad b''$$

$$\text{und}\quad 8)\quad c+\frac{1}{p}(h-n)^2 \quad \text{durch} \quad b',$$

so wird man die Werthe von x, von c an nur bis zu b'' nehmen dürfen, so oft $h-m \leqq q$ d. h. $m \geqq h-q$ gegeben ist, weil dann $b''<b$ ist; dagegen wird man die Werthe von x, von c an nur bis zu b' hin nehmen dürfen, so oft $n-h \leqq q$ d. h. $n \leqq h+q$ gegeben sein sollte. Ist daher $m \gtrless h-q$, so gehen die Werthe von x, von c an bis zu $\begin{Bmatrix} b'' \\ b \end{Bmatrix}$ hin, während die Werthe von y, von m an bis zu $h-\sqrt{p(x-c)}$

hin gehen. — Eben so darf man die Werthe von x, von c an nur bis zu $\begin{Bmatrix} b' \\ b \end{Bmatrix}$ hin gehen lassen, je nachdem $n \lessgtr h+q$ gegeben ist.

Es müssen daher abermals vier Fälle von einander unterschieden werden, nämlich: entweder

1) der allergrößte $h+q$ und der allerkleinste $h-q$ der ausgeschlossenen Werthe von y, liegen beide zwischen m und n so daß $m \overline{\overline{<}} h-q < h+q \overline{\overline{<}} n$ ist); dann hat man offenbar

$$\text{V.}\quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_a^c \left(\int_m^n f \cdot dy\right) \cdot dx + \int_c^b \left(\int_{h+\sqrt{p(x-c)}}^n f \cdot dy\right) \cdot dx + \int_c^b \left(\int_m^{h-\sqrt{p(x-c)}} f \cdot dy\right) \cdot dx;$$

oder

2) der Werth $h+q$ liegt über n hinaus (ist $>n$), während noch $h-q \geqq m$ ist; dann muß man in dem vorstehenden zweiten Doppel-Integral statt der obern Grenze b von x, die kleinere b′ setzen (weil für jeden größeren, zwischen b′ und b liegenden Werth von x, die untere Grenze $h+\sqrt{p(x-c)}$ des innern Integrals (nach y) gleich oder größer werden würde, als die obere Grenze n, was nicht sein darf); man findet also nun

$$\text{VI.}\quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_a^c \left(\int_m^n f \cdot dy\right) \cdot dx + \int_c^{b'} \left(\int_{h+\sqrt{p(x-c)}}^n f \cdot dy\right) \cdot dx + \int_c^b \left(\int_m^{h-\sqrt{p(x-c)}} f \cdot dy\right) \cdot dx;$$

oder

3) der Werth $h-q$ liegt unter m (ist $<m$), während wie in 1.), $h+q \overline{\overline{<}} n$ ist; dann muß man in V., im dritten Doppel-Integral, statt der obern Grenze b von x, blos die kleinere Grenze b″ setzen (weil für jeden größeren, zwischen b″ und b liegenden Werth von x, die obere Grenze $h-\sqrt{p(x-c)}$ des innern Integrals (nach y), gleich oder kleiner als die untere Grenze m sein würde, was nicht sein darf); man findet daher nun

$$\text{VII.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_a^c \left(\int_m^n f\cdot dy\right)\cdot dx + \int_c^b \left(\int_{h+\sqrt{p(x-c)}}^n f\cdot dy\right)\cdot dx + \int_c^{b''} \left(\int_m^{h-\sqrt{p(x-c)}} f\cdot dy\right)\cdot dx;$$

oder endlich

4) es liegen $h-q$ und $h+q$ außerhalb des Raumes von m bis n, d. h. es ist $h-q \overline{\overline{<}} m$ und $h-q \overline{\overline{>}} n$; dann muß man in den beiden letztern Doppel-Integralen in V., die obere Grenze b von x ändern und zwar statt des erstern b jetzt b', statt des andern b aber jetzt b'' setzen; und man hat also jetzt

$$\text{VIII.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_a^c \left(\int_m^n f\cdot dy\right)\cdot dx + \int_c^{b'} \left(\int_{h+\sqrt{p(x-c)}}^n f\cdot dy\right)\cdot dx + \int_c^{b''} \left(\int_m^{h-\sqrt{p(x-c)}} f\cdot dy\right)\cdot dx.$$

Anmerk. 1. Während also bei der ersten Anordnung des Summirens (im §. 8.), in einem Falle wenigstens (nämlich im §. 8. I.), es möglich geworden ist, die verlangte Summe durch ein einziges bestimmtes Doppel-Integral auszudrücken, wird dies bei der zweiten Anordnung des Summirens (nach §. 9.) unmöglich, sondern es sind dann in jedem Falle drei bestimmte Doppel-Integrale erforderlich, um die gedachte Summe $\Sigma f\cdot dx\cdot dy$ auszudrücken, und solche dann nach Anleitung der Formel ⊙ des §. 5., oder der IV. des §. 1., auch auswerthen zu können.

Anmerk. 2. Der im §. 8. gegebenen analytischen Aufgabe kann das nachstehende geometrische Gewand gegeben werden. Ist nämlich (Fig. 3.) $OA = a$, $AC = m$, $AF = n$, $OH = c$, $GH = h$; sind alle Geraden entweder mit der Axe OX, oder mit der Axe OY parallel; ist GK der Hauptdurchmesser einer Parabel $M'GL$, deren Parameter p ist; sind x und y' Koordinatenwerthe eines beliebigen Punkts M' der Parabel, so ist die Gleichung dieser Parabel, nämlich $UM'^2 = p\cdot GU$, die nachstehende:

$$(y'-h)^2 = p(x-c).$$

Sind ferner x und y die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M, in der Ebene, und ist $f_{x,y}$ die Dichtigkeit des an

M liegenden Rechteckchens vom Inhalte $dx \cdot dy$, so daß $f \cdot dx \cdot dy$ die Masse des Rechteckchens $dx \cdot dy$ vorstellt, — und sucht man nun die Masse des Rechtecks CDEF mit Ausnahme des innerhalb der Parabel liegenden Theils desselben, während $OB = b$ ist, — so hat man genau die Aufgabe des §. 8. — In der Behandlung des §. 8. hat man zuerst die Masse der einzelnen mit OX parallelen Streifen von der Breite dy, nachher die Summe der Massen aller dieser Streifen gefunden. Im Falle I. hat die Seite DE des Rechtecks die Lage $D'''E'''$, so daß $OB''' = b$ ist; es ist hier $m' = B'''N$ und $n' = B'''Q$; — und das erste Doppel-Integral in I., drückt die Masse des Rechtecks $CD'''NW$, — das andere Doppel-Integral die Masse der Figur NGQVW, — das dritte Doppel-Integral endlich die Masse des Rechtecks $VQE'''F$ aus. Im Falle III. hat die Seite DE des Rechtecks die Lage $D'E'$ oder $D''E''$, so daß $b = OB'$ oder $= OB''$ ist, und es ist dann $m' = B'R$ oder $= B''S$. — Der Fall IV. endlich ist der, wo $OB = b$ ist. — Der Fall II. kommt in der Figur 3.) nicht vor, würde aber vorkommen (während dann der Fall III. ausfallen würde), wenn der Hauptdurchmesser GK der Parabel näher an der Seite CD als an der Seite EF des Rechtecks läge, d. h. wenn $h < \frac{m+n}{2}$ wäre, während in der Fig. 3.) $h > \frac{m+n}{2}$ gedacht worden ist.

Im §. 9. dagegen ist zuerst die Masse der einzelnen mit OY parallelen Streifen von der Breite dx gefunden, nachher die Summe der Massen aller dieser Streifen. In allen 4 Fällen, welche im §. 9. aufgezählt worden sind, drückt das erste Doppel-Integral allemal die Masse des Rechtecks CIZF aus. Das zweite Doppel-Integral in V. drückt im Falle 1.), wo $OB''' = b$ gedacht ist (oder $OB'' = b$), die Masse der Figur $GQE'''Z$ (oder der Figur $GE''Z$) aus; während in demselben Falle das dritte Doppel-Integral in V., die Masse der Figur $GID'''N$ (oder der Figur $GID''S$) vorstellt. — Im Falle 2.), wo $OB' = b$ gedacht ist, drücken das zweite und das dritte

Doppel-Integral bezüglich die Massen der Figuren $GE''Z$ und $GID'R$ aus, in so ferne im zweiten Doppel-Integrale, $b' = OB''$ statt b zu stehen kommt. — Der Fall 3.) kommt in dieser Figur nicht vor, würde aber vorkommen, wenn $h < \frac{m+n}{2}$ wäre, während jetzt in der Figur, $h > \frac{m+n}{2}$ gedacht ist. — Der Fall 4.) tritt ein, wenn $OB = b$ ist; der Grenzwerth b', welcher im zweiten Doppel-Integral (in V.) statt b zu stehen kommen muß, ist dann wiederum $= OB''$; der Grenzwerth b'', welcher nun im dritten Doppel-Integral (in V.) statt b gesetzt werden muß, ist dann $= OB_1$; und das dritte Doppel-Integral selbst giebt dann die Masse der Figur GD_1I.

§. 10. Dritte Aufgabe.

Stellen wir jetzt die Aufgabe: dieselbe Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ zu finden, wenn x und y blos alle diejenigen reellen Werthe erhalten sollen, für welche $(y-h)^2 \overset{=}{<} p(x-c)$ ist, während x alle Werthe bekommen soll, welche nicht größer als b sind, unter der Voraussetzung, daß p positiv, c und b reell sind und daß $c < b$ ist; — also zu finden die Summe

$$\underset{x \overset{=}{<} b,\ (y-h)^2 \overset{=}{<} p(x-c)}{\Sigma f \cdot dx \cdot dy},$$

Erste Auflösung. Summirt man zuerst alle die Glieder, in denen x einen und denselben (konstanten) Werth hat, so erhält y nothwendig alle Werthe von $h - \sqrt{p(x-c)}$ an bis zu $h + \sqrt{p(x-c)}$ *) hin. Also hat man

---

*) Aus der Bedingung $(y-h)^2 \overset{=}{<} p(x-c)$, folgt nämlich (nach §. 4b) je nachdem $y-h$ negativ oder positiv genommen wird, bezüglich

$$y-h \overset{=}{>} -\sqrt{p(x-c)} \quad \text{und} \quad y-h \overset{=}{<} +\sqrt{p(x-c)}$$

d. h.

$$y \overset{=}{>} h - \sqrt{p(x-c)} \quad \text{und} \quad y \overset{=}{<} h + \sqrt{p(x-c)}$$

so daß $h - \sqrt{p(x-c)}$ als der kleinste, und $h + \sqrt{p(x-c)}$ als der größte

$$\text{I.} \quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_c^b \left(\int_{h-\sqrt{p(x-c)}}^{h+\sqrt{p(x-c)}} f \cdot dy \right) \cdot dy.$$

Zweite Auflösung. Summirt man aber zuerst alle die Glieder, in denen y einen und denselben (konstanten) Werth hat, während dem x alle seine Werthe gegeben werden, — so muß man wiederum vor Allem nachsehen, welche Werthe x überhaupt annehmen kann. Die Bedingung

$$(y-h)^2 \overline{\overline{<}} p(x-c)$$

giebt aber $$x \overline{\overline{>}} c + \frac{1}{p}(y-h)^2.$$

Es gehen also die Werthe von x, welche zu einem und demselben Werth von y genommen werden dürfen, von

$x = c + \frac{1}{p}(y-h)^2$ an bis zu $x = b$ hin. Die Summe aller Glieder von $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$, die zu einem und demselben Werthe von y gehören, ist daher $= dy \cdot \int_{c+\frac{1}{p}(y-h)^2}^{b} f \cdot dx$; und dieser Ausdruck ist eine bloße Funktion von y, mit dem unendlichkleinen Faktor dy noch multiplicirt.

Jetzt muß man untersuchen, welche Werthe y erhalten kann. — Weil aber in dem vorstehenden Integral, die untere Grenze $c + \frac{1}{p}(y-h)^2$, die obere Grenze b, nie überschreiten darf, so giebt die Gleichung

$$c + \frac{1}{p}(y-h)^2 = b,$$

aus welcher

$$(y-h)^2 = p(b-c) = q^2$$

hervorgeht, die Grenzwerthe von y, nämlich

$$y = h \pm q,$$

Werth erscheint, welcher der Bedingung gemäß, für einen und denselben Werth von x, dem y beigelegt werden kann.

so daß die Werthe von y von $h-q$ an bis zu $h+q$ hin, genommen werden müssen. Deshalb findet sich jetzt

$$\text{II.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_{h-q}^{h+q}\left(\int_{c+\frac{1}{p}(y-h)^2}^{b} f\cdot dx\right)\cdot dy,$$

wo $q = +\sqrt{p(b-c)}$ ist.

Für jeden Werth von y nämlich, welcher $< h-q$ oder $> h+q$ ist, wird $y-h < -q$ oder $> +q$, folglich $(y-h)^2 > q^2$ und deshalb $c+\frac{1}{p}(y-h)^2 > c+\frac{1}{p}q^2$ d. h. $> b$, was mit der gegebenen Grundbedingung im Widerspruch steht.

§. 11. Der dritten Aufgabe

dritte Auflösung. Um dieselbe Summe nämlich

$$\sum_{x \leqq b,\ (y-h)^2 \leqq p(x-c)} f\cdot dx\cdot dy$$

zu finden, kann man auch statt x einen neuen Veränderlichen r einführen, durch die Gleichung $x = x_r$, wo x_r irgend eine Funktion von r, vorstellt. Dann hat man den Faktor dx, $= \partial x_r \cdot dr$, und deshalb auch $f\cdot dx\cdot dy = f_{(r,y)}\cdot\partial x_r\cdot dr\cdot dy$, wenn $f_{(r,y)}$ das vorstellt, was aus $f_{x,y}$ wird, sobald man die Funktion x_r statt x, substituirt. — Man hat dann

$$\text{A.)}\cdots \sum_{x \leqq b,\ (y-h)^2 \leqq p(x-c)} f\cdot dx\cdot dy = \sum_{x_r \leqq b,\ (y-h)^2 \leqq p(x_r-c)} [f_{(r,y)}\cdot\partial x_r]\cdot dr\cdot dy.$$

Man muß aber nun vor allen Dingen untersuchen, welche Werthe r und y in der Summe zur Rechten, überhaupt annehmen können; dann erst kann man die Doppel-Integrale (nach r, und nach y) angeben, durch welche diese Summe sich ausdrücken läßt.

Es sei z. B. $x_r = c-\frac{1}{4}p+r^2$, also $\partial x_r = 2r$; — dann geht die Bedingung $x_r \leqq b$ über in $c-\frac{1}{4}p+r^2 \leqq b$. — Die Bedingung, daß y reell werden muß, giebt aber $x_r \geqq c$, oder $-\frac{1}{4}p+r^2 \geqq 0$; daher hat man jetzt zunächst die beiden Bedingungen, nämlich

$$1)\quad \tfrac{1}{4}p \stackrel{=}{<} r^2 \stackrel{=}{<} \tfrac{1}{4}p+b-c,$$

so daß r, dieser Bedingung gemäß, alle positiven und negativen Werthe bekommen kann; von $\pm\frac{1}{2}\sqrt{p}$ an bis zu $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p+(b-c)}$ hin. Weil aber x schon alle seine Werthe bekommt, wenn man statt r alle seine positiven Werthe setzt, so müssen die negativen Werthe von r weggelassen werden, um nicht Werthe von x zweimal zu bekommen. Die andere Bedingung, nämlich $(y-h)^2 \stackrel{=}{<} p(x_r-c)$ wird jetzt

$$2)\quad (y-h)^2 \stackrel{=}{<} p(r^2-\tfrac{1}{4}p).$$

Die Gleichung A.) geht also für unsere besondere Funktion $x_r = c-\frac{1}{4}p+r^2$, über in

$$\text{B.)}\cdots \qquad \underset{x \stackrel{=}{<} b,\ (y-h)^2 \stackrel{=}{<} p(x-c)}{\Sigma f\cdot dx\cdot dy} = \underset{\frac{1}{4}p \leqq r^2 \leqq \frac{1}{4}p+(b-c),\ (y-h)^2 \stackrel{=}{<} p(r^2-\frac{1}{4}p)}{\Sigma 2f_{(r,y)}\cdot r\cdot dr\cdot dy.}$$

Summirt man nun für ein konstantes r, so erhält man zunächst

$$dr\cdot\int_{h-\sqrt{p(r^2-\frac{1}{4}p)}}^{h+\sqrt{p(r^2-\frac{1}{4}p)}} 2r\cdot f_{(r,y)}\cdot dy \quad \text{oder} \quad 2r\cdot dr\cdot\int_{h-\sqrt{p(r^2-\frac{1}{4}p)}}^{h+\sqrt{p(r^2-\frac{1}{4}p)}} f_{(r,y)}\cdot dy;$$

und summirt man wiederum alle diese Produkte für alle Werthe von r, so findet sich

$$\text{I.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_{+\frac{1}{2}\sqrt{p}}^{+\sqrt{\frac{1}{4}p+(b-c)}} 2r\cdot\left(\int_{h-\sqrt{p(r^2-\frac{1}{4}p)}}^{h+\sqrt{p(r^2-\frac{1}{4}p)}} f_{r,y}\cdot dy\right)\cdot dr.$$

Vierte Auflösung. Summirt man aber in umgekehrter Ordnung, nämlich zuerst für ein konstantes y und für alle Werthe von r, so giebt die Bedingung 2.), jetzt $r^2 \stackrel{=}{>} \frac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y-h)^2$, welche der andern Bedingung $r^2 > \frac{1}{4}p$ nicht widerspricht; es darf aber (der Bedingung 1.) gemäß) auch nicht $r^2 > \frac{1}{4}p+(b-c)$ werden; die Werthe von r^2 fangen daher bei $\frac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y-h)^2$ an und hören bei $\frac{1}{4}p+(b-c)$ auf. Ferner muß der größte und kleinste Werth von y, so sein, daß

$\frac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y-h)^2 = \frac{1}{4}p+(b-c)$, d. h. der Anfang der Werthe von r^2, dem Ende derselben gleich wird; dies giebt diesen größten und kleinsten Werth von y, $= h \pm \sqrt{p(b-c)} = h \pm q$. — Man hat daher jetzt die verlangte Summe wie folgt, nämlich

$$\text{II.}\quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_{h-q}^{h+q} \left(\int_{+\sqrt{\frac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y-h)^2}}^{+\sqrt{\frac{1}{4}p+b-c}} 2r \cdot f_{(r,y)} \cdot dr \right) \cdot dy.$$

Diese auf einander folgenden bestimmten Integrale, welche wiederum nur angezeigte Summen vorstellen, müssen aber nun nach der Formel (⊙) des §. 5, d. h. nach der Formel **IV.** des §. 1., ausgewerthet werden.

§. 12. Der dritten Aufgabe

fünfte Auflösung. Man wähle nun die Gleichung zwischen x und r, durch welche statt des Veränderlichen x, der neue Veränderliche r, eingeführt wird, so, daß sie auch noch y in sich aufnimmt; man nehme z. B. die Gleichung

$$1)\qquad (x-c-\tfrac{1}{4}p)^2+(y-h)^2 = r^2,$$

so daß

$$2)\qquad x_r = c+\tfrac{1}{4}p \pm \sqrt{r^2-(y-h)^2},$$

also

$$3)\qquad \partial x_r = \frac{r}{\pm\sqrt{r^2-(y-h)^2}}$$

wird. — Auch bei dieser Gleichung zwischen x und r, ergeben sich bereits alle Werthe von x, wenn man r blos positiv nimmt; also darf man auch jetzt statt r nicht noch negative Werthe setzen, wenn man nicht Werthe von x, doppelt nehmen will.

Die beiden Grenzbedingungen

$$x \overset{=}{<} b \quad \text{und} \quad (y-h)^2 \overset{=}{<} p(x-c)$$

gehen jetzt über in

$$4)\qquad \pm\sqrt{r^2-(y-h)^2} \overset{=}{<} b-c-\tfrac{1}{4}p$$

und in

$$5)\qquad (y-h)^2 \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}p^2 \pm p \cdot \sqrt{r^2-(y-h)^2},$$

zu welchen sich noch die Bedingung

$$6) \quad (y-h)^2 \overline{\overline{<}} r^2$$

gesellt, weil die vorstehenden Quadratwurzeln nicht imaginär werden dürfen.

Summiren wir nun zunächst für einen konstanten Werth von y, und für alle Werthe von r, so zeigt die Bedingung 6.), daß $\mp(y-h)$ der kleinste Werth ist, den r überhaupt annehmen kann und zwar ist derselbe

$= -(y-h)$, so lange $y<h$ oder $y-h$ negativ,

und $= +(y-h)$, so wie $y>h$ oder $y-h$ positiv

wird; während gleichzeitig die Bedingung 5.) sehen läßt, daß die Existenz dieses Minimum-Werthes von r, $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$ voraussetzt, so daß r diesen Minimum-Werth $\mp(y-h)$ nur so lange erreicht, als $y-h$ zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegt; so wie also $(y-h)^2 > \frac{1}{4}p^2$ wird, d. h. (nach §. 4.) so wie $y-h < -\frac{1}{2}p$, oder $> +\frac{1}{2}p$ wird, erreicht der Werth von r, diesen Minimum-Werth $\mp(y-h)$ nicht.

Die Gleichung 2.) läßt sehen, daß, während x von c an bis zu $c+\frac{1}{4}p$ hin wächst, das $(-)$ Zeichen der Quadratwurzel genommen werden muß, so daß auch $f_{x,y}$ in $f^{I}_{(r,y)}$ übergeht, wenn wir durch f^{I} das bezeichnen wollen, was aus $f_{x,y}$ hervorgeht, wenn man $c+\frac{1}{4}p-\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ statt x setzt; — daß aber, wenn x über $c+\frac{1}{4}p$ hinauswächst das $(+)$ Zeichen der Quadratwurzel gilt, so daß auch $f_{x,y}$ nun in $f^{II}_{(r,y)}$ übergeht, wenn unter letzterem Zeichen das verstanden wird, was aus $f_{x,y}$ hervorgeht, sobald man $c+\frac{1}{4}p+\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ statt x setzt.

Man wird daher sofort zwei Fälle unterscheiden müssen, einmal wenn $b \overline{\overline{<}} c+\frac{1}{4}p$, und dann wenn $b>c+\frac{1}{4}p$ ist.

Erster Fall. — Ist $b \overline{\overline{<}} c+\frac{1}{4}p$, so darf überall nur das $(-)$ Zeichen der Quadratwurzel genommen werden, weil nun der größte Werth b von x, den Werth $c+\frac{1}{4}p$ noch nicht (oder doch gerade nur) erreicht. — Die Bedingung 4.), da in ihr links und rechts nur *negative* Zahlen vorkommen, giebt (nach §. 4^b.)

7) $r \geqq r''$, wenn $r'' = +\sqrt{(b-c-\frac{1}{4}p)^2+(y-h)^2}$

angenommen wird. Die Bedingung 5.) dagegen giebt, wenn man $\frac{1}{4}p^2$ subtrahirt, so daß links und rechts negative Zahlen kommen, und dann quadrirt, (nach §. 4^b.)

$$[(y-h)^2-\tfrac{1}{4}p^2]^2 \geqq p^2[r^2-(y-h)^2].$$

Addirt man daher $p^2(y-h)^2$ auf beiden Seiten, so erhält man

$$[(y-h)^2+\tfrac{1}{4}p^2]^2 \geqq p^2r^2$$

woraus hervorgeht

8) $r \leqq r'$, wenn $r' = \frac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y-h)^2$

genommen wird.

Und da die Bedingung 7.) jetzt die noch übrige Bedingung 6.) in sich schließt, so bleiben dasmal die Bedingungen 7.) und 8.) allein zu erfüllen, und diese lassen sehen, daß für jeden konstanten Werth von y, die Werthe von r, von r'' an bis zu r' hin wachsen, oder vielmehr, von r' an bis zu r'' hin abnehmen, während die Werthe von x, von c an bis zu b hin wachsend gedacht werden, weil $\partial r_x \left(=\frac{1}{\partial x_r}\right)$ mit der *negativen* Quadratwurzel zugleich *negativ* ist (nach 3.).

Weil aber die beiden Grenzwerthe r' und r'' von r, Funktionen von y sind, also nach den verschiedenen Werthen von y, weiter aus einander, oder näher zusammen rücken werden, — die kleinere Grenze r'' aber die größere Grenze r' nie übersteigen darf, — so giebt natürlich die Gleichung

$$r' \geqq r'' \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y-h)^2 \geqq +\sqrt{(b-c-\tfrac{1}{4}p)^2+(y-h)^2}$$

eine Grenzbestimmung für die Werthe von y. — Diese Gleichung liefert aber, wenn man sie quadrirt und dann auf beiden Seiten $(y-h)^2$ subtrahirt, endlich auf beiden Seiten die *positive* Wurzel nimmt

$$\tfrac{1}{4}p - \frac{1}{p}(y-h)^2 \overline{\overline{>}} c + \tfrac{1}{4}p - b \quad \text{d. h.} \quad (y-h)^2 \overline{\overline{<}} p(b-c)$$

so daß, wenn man wieder

$$9) \qquad +\sqrt{p(b-c)} = q$$

setzt, (nach §. 4^b.) $h-q$ und $h+q$ als der kleinste und größte Werth von y, hervorgeht.

Man findet also in diesem Falle, wo $b \overline{\overline{<}} c+\frac{1}{4}p$ vorausgesetzt worden ist,

$$\text{I.} \qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_{h-q}^{h+q}\left(\int_{r''}^{r'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}}\cdot dr\right)\cdot dy$$

wo wir die kleinere Grenze r'' zur untern genommen haben, um in dem Faktor ∂x_r, die Quadratwurzel positiv nehmen zu können (nach §§. 1. und 2.).

Für $b = c+\frac{1}{4}p$, wird $r'' = +\sqrt{(y-h)^2} = \mp(y-h)$, je nachdem $y-h$ selbst $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist, weil r'' stets positiv sein muß; dabei wird aber $q = \frac{1}{2}p$. Will man jedoch die letztere Form $\mp(y-h)$ statt r'' setzen, so muß man das Integral in zweie zerlegen, — in einen Theil, in welchem $y-h$ stets negativ bleibt, wo also y von $h-q$ an bis zu h hin wächst, während die Werthe von r, von $-(y-h)$ an bis zu r' hin wachsen; — und in einen zweiten Theil, in welchem $y-h$ stets positiv ist, in welchem also die Werthe von y, von h an bis zu $h+q$ hin wachsen, die Werthe von r dagegen, von $+(y-h)$ an bis zu r' hin gehen.

Ist also $b = c+\frac{1}{4}p$, so kann man auch schreiben, wenn man gleichzeitig $\frac{1}{2}p$ statt q setzt,

$$\text{A.)}\cdots \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_{h-\frac{1}{2}p}^{h}\left(\int_{-(y-h)}^{r'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}}\cdot dr\right)\cdot dy$$
$$+\int_{h}^{h+\frac{1}{2}p}\left(\int_{y-h}^{r'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}}\cdot dr\right)\cdot dy.$$

Schriebe man, wenn $b = c+\frac{1}{4}p$ ist, dafür (nach I.) lieber

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_{h-\frac{1}{2}p}^{h+\frac{1}{2}p} \left(\int_{+\sqrt{(y-h)^2}}^{r'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dr \right) \cdot dy,$$

so wäre dies eben so richtig; nach beendigter Auswerthung dieses Doppel-Integrals (durch zweimalige Anwendung der Formel ⊙ des §. 5.) aber, würde man in dem Resultat die positive Quadratwurzel $+\sqrt{(y-h)^2}$ mit aufgenommen haben, in welche statt y beide Grenzwerthe $h-\frac{1}{2}p$ und $h+\frac{1}{2}p$ gesetzt werden müßten, so daß sie einmal in $+\sqrt{(-\frac{1}{2}p)^2}$, das andere Mal aber in $+\sqrt{(\frac{1}{2}p)^2}$ übergehen würde; man müßte zuletzt stets $+\frac{1}{2}p$ nehmen, sowohl statt $\sqrt{(-\frac{1}{2}p)^2}$ als auch statt $\sqrt{(\frac{1}{2}p)^2}$, und dann würde das Endresultat dasselbe werden, was auch die A.) liefert.

Zweiter Fall. — Ist $b > c+\frac{1}{4}p$, so muß man zuerst einen Theil unserer Summe Σ, absondern, der sich zu den Werthen von x ergiebt, welche von c an bis zu $c+\frac{1}{4}p$ hin wachsen; und dieser ist durch die beiden vorstehenden Doppel-Integrale A.) ausgedrückt. — Für die von $c+\frac{1}{4}p$ an bis zu b hin weiter wachsenden Werthe von x, muß die Quadratwurzel $\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ stets mit dem (+) Zeichen genommen werden. Der §. 4ᵇ. giebt nun aus der Bedingung 4.) nicht mehr $r \overline{\overline{>}} r''$, sondern

10) $r \overline{\overline{<}} r''$, wenn $r'' = +\sqrt{(b-c-\frac{1}{4}p)^2+(y-h)^2}$ ist.

Die Bedingung 5.) wird jetzt diese, nämlich:

$(y-h)^2-\frac{1}{4}p^2 \overline{\overline{<}} +p \cdot \sqrt{r^2-(y-h)^2}$, und beschränkt gar nicht, so lange $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$ ist, weil sie dann für jeden der nach 6.) zulässigen Werthe von r, erfüllt ist, sie giebt aber, so wie $(y-h)^2 > \frac{1}{4}p^2$ wird (nach §. 4ᵇ.)

11) $r \overline{\overline{>}} r'$, wenn $r' = \frac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y-h)^2$;

und mit dieser letzteren Bedingung tritt dann auch noch in den Kampf die Bedingung

6) $r \geqq \mp(y-h)$, je nachdem $y \lessgtr h$ ist.

So lange also $(y-h)^2 \leqq \frac{1}{4}p^2$ ist, gehen die Werthe von r, von $\mp(y-h)$ an bis zu r'' hin (weil die Bedingung 11. dann nicht existirt). — So wie aber $(y-h)^2 > \frac{1}{4}p^2$ wird, ist auch allemal $r' \geqq \mp(y-h)$, nämlich $r'^2 \geqq (y-h)^2$, d. h.

$\left[\frac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y-h)^2\right]^2 \geqq (y-h)^2$, weil jedenfalls

$\left[\frac{1}{4}p - \frac{1}{p}(y-h)^2\right]^2 \geqq 0$ d. h. positiv ist; folglich ist die Bedingung 6.) zugleich mit der Bedingung 11.) erfüllt (aber nicht umgekehrt); folglich gehen nun die Werthe von r, von r' an bis zu r'' hin. — Es folgt also nun, daß

α) die Werthe von r, von $\mp(y-h)$ an bis zu r'' hin genommen werden müssen, so lange $(y-h)^2 \leqq \frac{1}{4}p^2$ ist; — dagegen

β) die Werthe von r, von r' an bis zu r'' hin gehen, so lange $(y-h)^2 \geqq \frac{1}{4}p^2$ ist.

Im Falle α.) gehen also die Werthe von $y-h$, von $-\frac{1}{2}p$ bis zu $+\frac{1}{2}p$, weil eine andere Grenzbestimmung für die Werthe von y nicht existirt, in so ferne die untere Grenze $\mp(y-h)$ von r, seine obere Grenze r'', wie der Anblick des letztern Werthes sehen läßt, ohnedies nie erreichen kann. Es sondert sich also ein Theil unserer Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch die Doppel-Integrale

$$\text{B.})\cdots \int_{h-\frac{1}{2}p}^{h}\left(\int_{-(y-h)}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dr\right) \cdot dy$$
$$+\int_{h}^{h+\frac{1}{2}p}\left(\int_{y-h}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dr\right) \cdot dy,$$

und dieser Theil kann auch durch das einzige Doppel-Integral

$$\int_{h-\frac{1}{2}p}^{h+\frac{1}{2}p}\left(\int_{+\sqrt{(y-h)^2}}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dr\right) \cdot dy$$

ausgedrückt werden.

Im Falle β.), wo für die Werthe von y, bereits die eine Grenzbedingung

$$(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{4}p^2$$

statt findet, giebt die Nothwendigkeit, daß $r' \overline{\overline{<}} r''$ bleiben muß, wiederum die neue Grenzbedingung

$$(y-h)^2 \overline{\overline{<}} q^2,$$

für die Werthe von y. — Die erstere giebt $y \overline{\overline{>}} h + \tfrac{1}{2}p$ und $y \overline{\overline{<}} h - \tfrac{1}{2}p$; die andere giebt $y \overline{\overline{<}} h+q$ und $y \overline{\overline{>}} h-q$, je nachdem $y-h$ positiv oder negativ ist. Es gehen also, während die Werthe von r, von r' an bis zu r'' hin schreiten, die Werthe von y einmal von $h-q$ bis zu $h-\tfrac{1}{2}p$ hin, und dann wieder von $h+\tfrac{1}{2}p$ an bis zu $h+q$ hin. Dies giebt noch zwei Theile unserer Summe Σ, welche ausgedrückt sind durch die Doppel-Integrale

$$\text{C.)} \cdots \int_{h-q}^{h-\frac{1}{2}p}\left(\int_{r'}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dr\right) \cdot dy$$
$$+\int_{h+\frac{1}{2}p}^{h+q}\left(\int_{r'}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dr\right) \cdot dy.$$

Man hat also nun in diesem zweiten Falle, wo $b > c + \tfrac{1}{4}p$ vorausgesetzt wurde, gefunden

$$\text{II.} \qquad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \text{A.} + \text{B.} + \text{C.},$$

während die Doppel-Integrale A., B. und C. nun, mittelst zweimaliger Anwendung der Formel ⊙ des §. 5., ihrer Auswerthung entgegen sehen können.

§. 13. Der dritten Aufgabe sechste Auflösung.

Wollen wir nun dieselbe Summe

$$\underset{x_r \overline{\overline{<}} b, \; (y-h)^2 \overline{\overline{<}} p(x_r - c)}{\Sigma}[f_{(r,y)} \cdot \partial x_r] \cdot dr \cdot dy$$

des vorhergehenden Paragraphen, — wo $f_{r,y}$ zweiförmig ist, nämlich bald $f^{I}_{(r,y)}$ bald $f^{II}_{(r,y)}$ vorstellt, — dadurch finden, daß wir in umgekehrter Ordnung summiren, nämlich zuerst für einen konstanten Werth von r, und für alle Werthe von y, — so müssen wir zuerst aus den beiden Bedingungen 4.) und 5.), zu welcher noch die 6.) tritt, die Grenzwerthe von y, als Funktionen von r herleiten.

Erster Fall. — Ist $b \overline{\overline{<}} c+\frac{1}{4}p$, so kann überall $\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ nur mit dem (—) Zeichen genommen werden. Die Bedingung 4.) giebt daher nun, da links und rechts alles negativ ist, wenn man quadrirt (nach §. 4^b.)

12) $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} y'^2$, wenn $+\sqrt{r^2-(b-c-\frac{1}{4}p)^2} = y'$

gesetzt wird; während die Bedingung 5.), welche jetzt mit der 8.) zusammenfällt,

13) $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} y''^2$, — wenn $+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)} = y''$

gesetzt wird, — liefert.

Man hat also nun die Bedingungen 12.), 13.) und 6.) zu erfüllen; weil aber, wenn die 12.) erfüllt wird, dann allemal auch schon die Bedingung 6.), nämlich $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} r^2$, zugleich mit erfüllt ist, so kommt letztere hier nicht weiter in Betrachtung.

Die Bedingung 12.) setzt

14) $r \overline{\overline{>}} c+\frac{1}{4}p-b$

voraus, weil y nicht imaginär werden darf; dadurch ist der kleinste Werth von r festgestellt.

Da die Bedingung 13.), nämlich $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} p(r-\frac{1}{4}p)$, für jeden Werth von y, erfüllt ist, so oft $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ ist, so bleibt für diese Werthe von r, nur die Bedingung 12.) allein übrig. — Also sondert sich ein Theil der Summe Σ, ab, in welchem die Werthe von y, von $h-y'$ an bis zu $h+y'$ hin gehen, während r von $\frac{1}{4}p$ an abnimmt bis zu dem kleinsten Werth von r hin, welcher $=c+\frac{1}{4}p-b$ ist, weil sonst y' imaginär werden würde. Dieser Theil ist ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$\text{D.)}\cdots \int_{c+\frac{1}{4}p-b}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{h-y'}^{h+y'} f^{I}_{(r,y)}\cdot dy\right)\cdot dr.$$

Für die Werthe von r, welche $>\frac{1}{4}p$ sind, treten beide Bedingungen 12.) und 13.) beschränkend auf. Die 12.) giebt (nach §. 4^b.)

$y-h \overline{\overline{>}} -y'$, so lange $y-h$ negativ ist,

und

$y-h \overline{\overline{<}} +y'$, so lange $y-h$ positiv.

Die 13.) dagegen giebt

$y-h \overline{\overline{<}} -y''$, so lange $y-h$ negativ,

und

$y-h \overline{\overline{>}} +y''$, so lange $y-h$ positiv ist.

Es gehen daher die Werthe von y, von $h-y'$ an bis zu $h-y''$ hin, so lange $y<h$; dagegen von $h+y''$ an bis zu $h+y'$ hin, so lange $y>h$ ist.

Weil aber sonach stets

$h-y' \overline{\overline{<}} h-y''$ und $h+y'' \overline{\overline{<}} h+y'$

bleiben muß; beide Vergleichungen aber zu der einzigen

$y'' \overline{\overline{<}} y'$, d. h. $y''^2 \overline{\overline{<}} y'^2$, d. h. zur Vergleichung

$$p(r-\tfrac{1}{4}p) \overline{\overline{<}} r^2-(b-c-\tfrac{1}{4}p)^2$$

führen, diese aber in

$$(r-\tfrac{1}{2}p)^2 \overline{\overline{>}} (b-c-\tfrac{1}{4}p)^2$$

übergeht, — so erhält man hieraus (nach §. 4^b.), wenn man links und rechts die positive Wurzel nimmt,

entweder $r-\frac{1}{2}p \overline{\overline{>}} c+\frac{1}{4}p-b$, im Falle $r>\frac{1}{2}p$

oder $\frac{1}{2}p-r \overline{\overline{>}} c+\frac{1}{4}p-b$, im Falle $r<\frac{1}{2}p$

sein sollte. Die erstere Annahme, daß $r>\frac{1}{2}p$ werden kann, würde zur Folge haben $r \overline{\overline{>}} c+\frac{3}{4}p-b$, und dieses Resultat würde mit der 14.) im Widerspruch stehen, weil (nach 14.) $c+\frac{1}{4}p-b$ der kleinste Werth von r ist, und nicht $c+\frac{3}{4}p-b$. Es kann also r nicht größer als $\frac{1}{2}p$ werden; also kann nur die andere Annahme $r < \frac{1}{2}p$ (oder $= \frac{1}{2}p$) statt finden, und deshalb findet sich

15) $$r \overline{\overline{<}}\, b - c + \tfrac{1}{4}p$$

als die obere Grenze von r, während $\frac{1}{4}p$, für diese Theile der Summe Σ, die untere Grenze der Werthe von r sein muß. Die beiden letzten Theile unserer Summe Σ, sind daher jetzt ausgedrückt durch die Doppel-Integrale

$$\text{E.)} \cdots \int_{\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p+b-c} \left(\int_{h-y'}^{h-y''} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy + \int_{h+y''}^{h+y'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Man findet daher in diesem ersten Fall, wo $b \overline{\overline{<}}\, c + \frac{1}{4}p$ vorausgesetzt ist,

I. $$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = D. + E.,$$

wenn y′ und y″, in diesen Doppel-Integralen, aus 12. und 13.), als Funktionen von r, entnommen werden.

Für $b = c + \frac{1}{4}p$, wird $\frac{1}{4}p + b - c = \frac{1}{2}p$ und $y' = r$; und in diesem Falle findet sich also die Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ auch einfacher noch so ausgedrückt, nämlich

$$\text{F.)} \cdots = \int_0^{\frac{1}{4}p} \left(\int_{h-r}^{h+r} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy \right) \cdot dr + \int_{\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{2}p} \left(\int_{h-r}^{h-y''} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy + \int_{h+y''}^{h+r} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Wir haben aber überall (in D., E. und F.), obgleich jede Wurzel $\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ nur mit ihrem (−) Zeichen genommen werden darf, die Grenzen der Integrale nach r, mit einander vertauscht und die kleinere statt der größeren als die untere genommen, um in ∂x_r d. h. in $\frac{r}{\pm\sqrt{r^2-(y-h)^2}}$, dieselbe Quadratwurzel mit dem (+) Zeichen nehmen zu können (§§. 1. 2.)

Zweiter Fall. — Ist $b > c + \frac{1}{4}p$, — so betrachtet man zuerst den Theil der Summe Σ, in welchem x von c an bis zu $c + \frac{1}{4}p$ hin wächst, und für welchen die Quadratwurzel $\sqrt{r^2 - (y-h)^2}$ überall nur ihren negativen Werth haben kann. Dieser Theil ist aber so eben in F.), durch Doppel-Integrale ausgedrückt worden.

Betrachtet man nun den ferneren Theil der Summe Σ, wo x von $c + \frac{1}{4}p$ an bis zu b hin wächst und wo (nach 2. und 3.) die Wurzel $\sqrt{r^2 - (y-h)^2}$ überall mit dem $(+)$ Zeichen zu nehmen ist (so daß auch jetzt $f_{x,y}$ in $f^{II}_{(r,y)}$ und nicht mehr in $f^{I}_{(r,y)}$ übergeht), so geben die Bedingungen 4.) und 5.) (welche nun nicht mehr mit 7.) und 8.), sondern mit 10.) und 11.) zusammenfallen) statt der Ungleichungen 12.) und 13.) (nach §. 4^b.) jetzt (aus 4.)

16) $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} y'^2$, wo $y' = +\sqrt{r^2 - (b - c - \frac{1}{4}p)^2}$

und (aus 5.)

17) $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} y''^2$, wo $y'' = +\sqrt{p(r - \frac{1}{4}p)}$,

wobei wir aber nicht übersehen dürfen, daß die Bedingung 5.), nämlich $(y-h)^2 - \frac{1}{4}p^2 \overline{\overline{<}} + p \cdot \sqrt{r^2 - (y-h)^2}$ sich für jeden Werth von y, erfüllt sieht, so oft $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$ ist, folglich dann gar nicht beschränkt. Die Bedingung 17.) tritt also nur dann erst auf, wenn $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$ ist. Dagegen tritt jetzt wieder die Bedingung

6) $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} r^2$

hinzu. — So lange also $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$ ist, so lange tritt die Bedingung 6.) auf und nicht die Bedingung 17.). — So wie aber $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$ wird, so treten die Bedingungen 6.) und 17.) zugleich auf; und dann möglicher Weise mit einander in den Kampf. Dann muß man also sofort unterscheiden,

ob $r^2 < y''^2$, oder ob $r^2 \overline{\overline{>}} y''^2$

ist; denn im erstern Fall wäre wiederum von den beiden Bedingungen 6.) und 17.), nur die Bedingung 6.) allein zu berücksichtigen, — weil mit ihr die Bedingung 17.) zugleich erfüllt ist; im andern Fall dagegen ist nnr die Bedingung 17.) allein zu berücksichtigen, weil mit ihr dann die 6.) zugleich erfüllt ist. So wie aber $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$ ist, so folgt auch (aus 6.)

$$r^2 \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{4}p^2 \quad \text{d. h.} \quad r \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2}p.$$

Die erstere Annahme $r^2 < y''^2$, führt aber zu

$$r^2 < pr - \tfrac{1}{4}p^2 \quad \text{d. h. zu} \quad (r - \tfrac{1}{2}p)^2 < 0,$$

welches, da das Quadrat zur Linken stets positiv oder 0 ist, einen Widerspruch enthält; also kann diese erstere Annahme nicht Platz greifen; folglich bleiben nur die beiden Bedingungen 16.) nnd 17.) allein maßgebend, so lange $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$ ist; dagegen bleiben die Bedingungen 16.) und 6.) allein bestimmend, so lange $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$ ist.

Wegen der 6.) ist aber, so oft $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ ist, auch $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$; und, so oft $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$ ist, auch $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$; woraus auch noch indirekt hervorgeht, daß umgekehrt, so oft $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ ist, auch nothwendig $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$; und so oft $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$ ist, auch nothwendig $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ sein müsse.

Die Bedingung 16.) ist stets erfüllt und beschränkt daher die Werthe von y nicht, so oft

$$r \overline{\overline{<}} b - c - \tfrac{1}{4}p$$

ist, wie die bloße Ansicht derselben lehrt. So lange also $r \overline{\overline{<}} b-c-\frac{1}{4}p$ ist, so lange findet nur die Beschränkung 6.) allein statt, im Falle $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$, (also auch $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$) ist; — oder nur die Bedingung 17.) allein, so wie $(y-h)^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2$ (also auch $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ wird. — So wie aber $r \overline{\overline{>}} b-c-\frac{1}{4}p$ wird, so tritt die Bedingung 16.) beschränkend auf.

Man sieht sich daher nun veranlaßt, zwei Unterfälle von einander zu unterscheiden, einmal, wenn $b-c-\frac{1}{4}p \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ und dann, wenn $b-c-\frac{1}{4}p > \frac{1}{2}p$ ist, d. h. je nachdem $b \overline{\overline{<}} c+\frac{3}{4}p$ oder $b > c+\frac{3}{4}p$ ist.

Erster Unterfall. — Ist $b \overline{\overline{<}} c+\frac{3}{4}p$ (aber noch $> c+\frac{1}{4}p$), so sondert sich sofort ein Theil unserer Summe Σ, ab, in welchem r von 0 an bis zu $b-c-\frac{1}{4}p$ hin geht; r ist dann noch $\overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$; folglich ist auch $(y-h)^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2$; folglich tritt nun die Bedingung 6.) allein beschränkend auf, und es gehen also gleichzeitig die Werthe von y, von $h-r$ an bis zu $h+r$ hin. Dieser Theil der Summe Σ, ist nun ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$\text{G.)} \cdots \int_0^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_{h-r}^{h+r} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Gehen nun die Werthe von r, von $b-c-\frac{1}{4}p$ an bis zu $\frac{1}{2}p$ weiter fort, so tritt die Bedingung 16.) mit der 6.) zugleich auf. Die erstere giebt (nach §. 4[b].)

$y-h \overline{\overline{<}} -y'$, so lange $y<h$, und

$y-h \overline{\overline{>}} +y'$, so bald $y>h$ wird.

Die andere Bedingung 6.) dagegen giebt (nach §. 4[b].)

$y-h \overline{\overline{>}} -r$, so lange $y<h$, und

$y-h \overline{\overline{<}} +r$, so wie $y>h$ wird.

Es gehen also, so lange $y<h$ ist, die Werthe von y, von $h-r$ an bis zu $h-y'$ fort; so wie aber $y>h$ wird, von $h+y'$ an bis zu $h+r$ fort. — Folglich sondern sich zwei weitere Theile unserer Summe Σ, ab, welche ausgedrückt sind durch die Doppel-Integrale

$$\text{H.)} \cdots \int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{2}p} \left(\int_{h-r}^{h-y'} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy + \int_{h+y'}^{h+r} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Für alle Werthe von r endlich, welche $>\frac{1}{2}p$ sind, tritt, weil mit $r>\frac{1}{2}p$, auch $(y-h)^2>\frac{1}{4}p^2$ wird, statt der 6.) die 17.) ein, welche (nach §. 4b.) liefert

$$y-h \geqq -y'', \quad \text{so lange} \quad y<h \quad \text{ist; und}$$

$$y-h \leqq +y'', \quad \text{so wie} \quad y>h \quad \text{wird.}$$

Es gehen also nun, so lange $y<h$ ist, die Werthe von y, von $h-y''$ an bis zu $h-y'$ hin; so wie aber $y>h$ ist, von $h+y'$ an bis zu $h+y''$ hin. Und da sonach stets

$$h-y \leqq h-y' \quad \text{und} \quad h+y' \leqq h+y''$$

also $\quad y' \leqq y''$ d. h. $+\sqrt{r^2-(b-c-\frac{1}{4}p)^2} \leqq +\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}$

bleiben muß, so liefert diese Vergleichung noch

$(r-\frac{1}{2}p)^2 \leqq (b-c-\frac{1}{4}p)^2$, oder da $r-\frac{1}{2}p$ jetzt positiv ist,

$$r-\tfrac{1}{2}p \leqq b-c-\tfrac{1}{4}p, \quad \text{d. h.} \quad r \leqq b-c+\tfrac{1}{4}p;$$

wodurch der obere Grenzwerth von r bestimmt ist.

Diese letzten Theile der Summe Σ, sind daher ausgedrückt durch die Doppel-Integrale

$$\text{J.)}\cdots \int_{\frac{1}{2}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{h-y''}^{h-y'} f''_{(r,y)}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}}\cdot dy + \int_{h+y'}^{h+y''} f''_{(r,y)}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}}\cdot dy\right)\cdot dr,$$

wo überall y' und y'' die in 16.) und 17.) stehenden Funktionen von r, vorstellen.

Man findet daher in diesem ersten Unterfalle des zweiten Falles, d. h., wenn $b>c+\frac{1}{4}p$, aber $\leqq c+\frac{3}{4}p$ ist.

$$\text{II.} \qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = F.+G.+H.+J.$$

Zweiter Unterfall. — Ist $b>c+\frac{3}{4}p$, d. h. $b-c-\frac{1}{4}p>\frac{1}{2}p$; so kann man zuerst die Werthe von r, von 0 an bis zu $\frac{1}{2}p$ fortschreiten lassen; dann ist $r\leqq\frac{1}{2}p$, folglich $(y-h)^2\leqq\frac{1}{4}p^2$; folglich tritt nun die Bedingung 17.) nicht auf, sondern die 6.); und die Bedingung 16.) tritt noch nicht auf, weil noch $r \overline{\overline{<}} b-c-\frac{1}{4}p$ ist. Die Bedingung 6.) zeigt aber, daß die Werthe von y, von $h-r$ an bis zu $h+r$ hin fortgehen. — Es sondert sich also nun ein Theil der Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch das Doppel-Integral

$$\text{K.)}\cdots \quad \int_0^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{h-r}^{h+r} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy\right) \cdot dr.$$

Läßt man nun die Werthe von r, von $\frac{1}{2}p$ an bis zu $b-c-\frac{1}{4}p$ hin weiter fort gehen, so tritt die Bedingung 16.) immer noch nicht auf, dagegen die Bedingung 17.), statt der 6.). — Diese liefert aber für y, alle Werthe von $h-y''$ an bis zu $h+y''$ hin. Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$\text{L.)}\cdots \quad \int_{\frac{1}{2}p}^{b-c-\frac{1}{4}p}\left(\int_{h-y''}^{h+y''} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy\right) \cdot dr.$$

Für die weiteren Werthe von r, tritt zu der Bedingung 17.), auch noch die Bedingung 16.) hinzu, und es gehen daher nun, so lange $y<h$ ist, die Werthe von y wiederum von $h-y''$ an bis zu $h-y'$ hin, und, so lange $y>h$ ist, von $h+y'$ an bis zu $h+y''$ hin; während wieder

$$r \overline{\overline{<}} b-c+\tfrac{1}{4}p$$

bleiben muß, damit eben diese letzteren Grenzbedingungen keinen Widerspruch erleiden, d. h. damit $y' \overline{\overline{<}} y''$ bleibt; aus welcher letzteren Vergleichung also dieser obere Grenzwerth $b-c+\frac{1}{4}p$ von r, hervorgehen muß.

Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch die Doppel-Integrale

$$\text{M.)}\cdots \quad \int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{h-y''}^{h-y'} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy \right.$$
$$\left. + \int_{h+y'}^{h+y''} f''_{(r,y)} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \cdot dy\right) \cdot dr.$$

In diesem zweiten Unterfall des zweiten Falles, d. h. wenn $b > c + \frac{3}{4}p$ gegeben ist, findet sich daher

$$\text{III.} \qquad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = F. + K. + L. + M.$$

So wie aber die gesuchte Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ in lauter solche Theilsummen zerlegt ist, welche durch sogenannte bestimmte Integrale ausgedrückt d. h. angezeigt werden, so lehrt dann die Formel ⊙. des §. 5., durch welches Rechnungs-Verfahren diese Summen ausgewerthet werden können.

§. 14. Erste allgemeine Aufgabe.

Es soll die Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ unter irgend gegebenen Grenzbedingungen, dadurch gefunden werden, daß man statt x und y, zwei neue Veränderliche r und θ einführt mittelst der beiden Gleichungen

$$1) \qquad x = \varphi_{r,\theta} \qquad \text{und} \qquad 2) \qquad y = \psi_{r,\theta}.$$

Vorbereitung. Bezeichnen dr und $d\theta$ die mit dx, dy zusammen gehörigen unendlichkleinen Zuwachse, — so daß die neuen Werthe $x+dx$, $y+dy$, $r+dr$ und $\theta+d\theta$, statt der alten Werthe x, y, r und θ gesetzt, den Gleichungen 1.) und 2.) abermals genügen, — so hat man nach den Regeln der Differential-Rechnung (aus 1. und 2.)

$$dx = \partial\varphi_r \cdot dr + \partial\varphi_\theta \cdot d\theta \quad \text{und} \quad dy = \partial\psi_r \cdot dr + \partial\psi_\theta \cdot d\theta;$$

folglich

$$dx \cdot dy = \partial\varphi_r \cdot \partial\psi_r \cdot dr^2 + (\partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta + \partial\varphi_\theta \cdot \partial\psi_r) dr \cdot d\theta + \partial\varphi_\theta \cdot \partial\psi_\theta \cdot d\theta^2;$$

also wird

$$\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot \partial\varphi_r \cdot \partial\psi_r \cdot dr^2 + \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot (\partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta + \partial\varphi_\theta \cdot \partial\psi_r) \cdot dr \cdot d\theta + \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot \partial\varphi_\theta \cdot \partial\psi_\theta \cdot d\theta^2,$$

wenn $f_{(r,\theta)}$ das vorstellt, was aus $f_{x,y}$ wird, sobald die Funktionen $\varphi_{r,\theta}$ und $\psi_{r,\theta}$ bezüglich statt x und y gesetzt werden.

Obgleich aber jetzt die gesuchte Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ in drei Summen zerlegt ist, welche blos r, θ, dr und $d\theta$ enthalten, so besitzen wir doch keinen Lehrsatz, durch welchen wir die erste und dritte derselben, nämlich Summen von der Form $\Sigma F_{r,\theta} \cdot dr^2$ und $\Sigma F_{r,\theta} \cdot d\theta^2$, auswerthen könnten; — wenn wir auch die mittlere dieser Summen durch bestimmte Doppel-Integrale ausdrücken und dann durch wiederholte Anwendung der Formel ⊙. des §. 5. auswerthen können. — Der einzige Ausnahmsfall tritt ein, wenn die Funktionen φ und ψ nur einen einzigen der beiden neuen Veränderlichen enthalten, z. B. φ blos r, und ψ blos θ, oder φ blos θ, und ψ blos r, — weil dann gleichzeitig $\partial\varphi_\theta = 0$ und $\partial\psi_r = 0$, oder gleichzeitig $\partial\varphi_r = 0$ und $\partial\psi_\theta = 0$ wird, so daß die nicht auszuwerthenden beiden Theile ganz wegfallen.

Dann ist entweder

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot \partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta \cdot dr \cdot d\theta$$

oder

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot \partial\varphi_\theta \cdot \partial\psi_r \cdot dr \cdot d\theta.$$

In allen übrigen Fällen muß man aber, wie folgt, verfahren.

Wirkliche Auflösung. Man muß nämlich einen neuen Veränderlichen nach dem andern einführen und nicht beide auf einmal. — Man eliminirt also aus den beiden Gleichungen 1.) und 2.), den Veränderlichen θ, so daß man eine einzige Gleichung zwischen x, y und r enthält, welche, nach x aufgelöst, die Form

$$3) \qquad x = x_r$$

annimmt, wo x_r eine Funktion von r (und y) vorstellt, in welcher x selbst nicht vorkommt. Führt man nun statt x den neuen Veränderlichen r mittelst dieser Gleichung 3.) ein, so hat man

$$dx = \partial x_r \cdot dr;$$

also hat man nun genau den Fall der §§. 12. und 13.; und es wird daher

$$4) \qquad \Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dr \cdot dy,$$

wenn $f_{(r,y)}$ wiederum das bedeutet, was aus $f_{x,y}$ wird, sobald man die Funktion x_r (von r und y) statt x substituirt; wo aber, wie wir in den §§. 12. und 13. gesehen haben, unter

$f_{(r,y)}$, in den verschiedenen Abtheilungen dieser Summe zur Rechten, verschiedene Formen vorgestellt sein können.

Hierauf führt man erst statt y den neuen Veränderlichen θ ein, mittelst der Gleichung 2.), welche

$$5) \qquad dy = \partial\psi_\theta \cdot d\theta$$

giebt. — Die Gleichung 4.) geht dann über in diese, nämlich

$$6) \qquad \Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot \partial x_r \cdot \partial\psi_\theta \cdot dr \cdot d\theta,$$

wo $f_{(r,\theta)}$ das wieder vorstellt, was aus (den verschiedenen Formen von) $f_{(r,y)}$ wird, wenn man noch $\psi_{r,\theta}$ statt y setzt, welches dasselbe ist, was aus $f_{x,y}$ hervorgeht, wenn man statt x und y bezüglich die Funktionen φ und ψ (von r und θ) substituirt; — während auch noch ψ_θ und $\partial\psi_\theta$ verschiedene Formen haben können, je nachdem unter den, zu den stets wachsend gedachten Werthen von y, gehörigen Werthen von θ, wiederum ein kleinster oder ein größester Werth vorkommt, oder keines von beiden statt findet.

Man kann aber ∂x_r in die, in 1.) und 2.) für x und y gegebenen Funktionen $\varphi_{r,\theta}$ und $\psi_{r,\theta}$ leicht ausdrücken. — Denkt man sich nämlich in

$$1) \qquad x = \varphi_{r,\theta},$$

unter θ diejenige Funktion von y und r, welche aus der Gleichung

$$2) \qquad y = \psi_{r,\theta}$$

für θ hervorgeht, und welche diese letztere identisch macht, so daß sie in $y = y$ übergeht (in so ferne r in ihr von selber sich weghebt) — so wird (aus 1.) unter dieser Voraussetzung

$$7) \qquad \partial x_r = \partial\varphi_r + \partial\varphi_\theta \cdot \partial\theta_r,$$

während die Gleichung 2.) unter derselben Voraussetzung nach r differentiirt,

$$8) \qquad 0 = \partial\psi_r + \partial\psi_\theta \cdot \partial\theta_r.$$

giebt. Eliminirt man nun aus 7.) und 8.) die Ableitung $\partial\theta_r$, so erhält man

$$9)\qquad \partial x_r = \frac{\partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta - \partial\psi_r \cdot \partial\varphi_\theta}{\partial\psi_\theta}.$$

Die Gleichung 6.) giebt dann

$$(\mathfrak{C})\cdots\qquad \Sigma f_{x,y}\cdot dx\cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)}\cdot(\partial\varphi_r\cdot\partial\psi_\theta - \partial\psi_r\cdot\partial\varphi_\theta)\cdot dr\cdot d\theta,$$

wo aber in der Summe zur Rechten, sowohl $f_{(r,\theta)}$ als auch der zweite Faktor $\partial\varphi_r\cdot\partial\psi_\theta - \partial\psi_r\cdot\partial\varphi_\theta$ verschiedene, jedoch zusammengehörige Formen vorstellen können, in den verschiedenen Theil-Summen, in welche die Total-Summe (in $\mathfrak{C}$. zur Rechten), den jedesmaligen Grenz-Bedingungen gemäß, zerfällt. Um aber dies letztere noch näher bestimmen zu können, muß man erst die Funktionen $\varphi_{r,\theta}$ und $\psi_{r,\theta}$ bestimmt angenommen haben, so wie natürlich auch die Grenz-Bedingungen für die Werthe von x und y bestimmt gegeben sein müssen.

Anmerkung. Man kann natürlich auch, nachdem θ eliminirt und die Gleichung zwischen x, r und y erhalten ist, statt dieser letzteren die Form 3.) zu geben, solche (nicht nach x, sondern nach y auflösen, so daß man

$$10)\qquad y = y_r$$

erhält, wo y_r eine Funktion von r und x vorstellt, (welche natürlich y selbst, nicht enthält). Man kann nun zuerst statt des Veränderlichen y, den neuen Veränderlichen r einführen, — hat dann

$$dy = \partial y_r \cdot dr$$

und

$$11)\qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \Sigma f_{(x,r)}\cdot\partial y_r\cdot dx\cdot dr.$$

Hierauf wird dann statt x, der neue Veränderliche θ eingeführt, mittelst der Gleichung 1.) und diese giebt nun

$$dx = \partial\varphi_\theta \cdot d\theta,$$

so daß nun gefunden wird

$$12)\qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)}\cdot\partial y_r\cdot\partial\varphi_\theta\cdot dr\cdot d\theta,$$

wobei $f_{(r,\theta)}$ genau dieselbe Bedeutung hat wie oben.

Drückt man nun ∂y_r in φ und ψ aus, indem man sich aus der Gleichung

$$1)\qquad x = \varphi_{r,\theta}$$

θ in r und x ausgedrückt, gefunden und in diese, wie in die andere Gleichung

$$2)\qquad y = \psi_{r,\theta},$$

substituirt denkt, so daß die Gleichung 1.) identisch $x = x$ wird, und nach r differentiirt

$$13)\qquad 0 = \partial\varphi_r + \partial\varphi_\theta \cdot \partial\theta_r$$

liefert, während die Gleichung 2.) durch dieselbe Substitution, in die 10.) übergeht und nach r differentiirt

$$14)\qquad \partial y_r = \partial\psi_r + \partial\psi_\theta \cdot \partial\theta_r$$

liefert; — eliminirt man dann aus 13.) und 14.) die Unbekannte $\partial\theta_r$, so ergiebt sich

$$15)\qquad \partial y_r = \frac{\partial\psi_r \cdot \partial\varphi_\theta - \partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta}{\partial\varphi_\theta};$$

folglich geht jetzt die 12.) über in

$$(\mathfrak{C}_1)\qquad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{r,\theta} \cdot (\partial\psi_r \cdot \partial\varphi_\theta - \partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta) \cdot dr \cdot d\theta.$$

Vergleicht man aber dieses Resultat mit dem oben gefundenen ($\mathfrak{C}$), so zeigt sich eine kleine Verschiedenheit in beiden Ausdrücken zur Rechten, die jedoch nur in einer Umänderung des Vorzeichens besteht. Da $f_{(r,\theta)} = f_{x,y}$ ist, so ist nämlich im Paragraphen

$$dx \cdot dy = +(\partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta - \partial\psi_r \cdot \partial\varphi_\theta) \cdot dr \cdot d\theta$$

jetzt aber

$$dx \cdot dy = -(\partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta - \partial\psi_r \cdot \partial\varphi_\theta) \cdot dr \cdot d\theta$$

gefunden worden.

Aus dieser Vergleichung folgt aber:

1) So lange die Werthe von r und θ so sind, daß sie den Ausdruck $\partial\varphi_r \cdot \partial\psi_\theta - \partial\psi_r \cdot \partial\varphi_\theta$ positiv machen, können bei der Anwendung der Formel ($\mathfrak{C}$) im Paragraphen, sowohl dr, als $d\theta$, beide negativ oder beide positiv gedacht werden, während bei der Anwendung der hiesigen Formel ($\mathfrak{C}_1$), dr und $d\theta$

nie zugleich negativ und nie zugleich positiv gedacht werden dürfen.

2) So wie aber solche Werthe von r und von θ eintreten, welche denselben Ausdruck $\partial\varphi_r\cdot\partial\psi_\theta-\partial\psi_r\cdot\partial\varphi_\theta$ negativ machen, müssen in der Formel (C) dr und $d\theta$ als verschiedene Vorzeichen habend, gedacht werden, in der Formel (C_1) aber als einerlei Vorzeichen habend.

3) Ist derselbe Ausdruck $\partial\varphi_r\cdot\partial\psi_\theta-\partial\psi_r\cdot\partial\varphi_\theta$ für alle Werthe von r und θ stets positiv, so ist die Formel (C) die bequemere; dagegen wird die Formel (C_1) die bequemere, so oft derselbe Ausdruck für alle Werthe von r und θ, stets negativ wird.

§. 15. Der dritten Aufgabe

siebente Auflösung. Nehmen wir nun unsere dritte Aufgabe noch einmal vor; suchen wir also noch einmal die Summe

$$\sum_{x \gtreqless b,\ (y-h)^2 \gtreqless p(x-c)} f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$$

in Doppel-Integrale auszudrücken, aber jetzt durch Einführung von zwei neuen Veränderlichen r und θ.

Es sei nämlich gegeben

1) $\quad x=\varphi_{r,\theta}=c+\frac{1}{4}p+r\cdot Cos\,\theta$

und

2) $\quad y=\psi_{r,\theta}=\quad h+r\cdot Sin\,\theta;$

so hat man

$$\partial\varphi_r=Cos\,\theta;\qquad \partial\varphi_\theta=r\cdot Sin\,\theta;$$

$$\partial\psi_r=Sin\,\theta\qquad\text{und}\qquad \partial\psi_\theta=r\cdot Cos\,\theta;$$

also

$$\partial\varphi_r\cdot\partial\psi_\theta-\partial\psi_r\cdot\partial\varphi_\theta=r\quad\text{und}\quad \partial\psi_r\cdot\partial\varphi_\theta-\partial\varphi_r\cdot\partial\psi_\theta=-r.$$

Die Gleichung C. des §. 14. ist nun folgende, nämlich

3) $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$ *),

wo man dr und $d\theta$ stets positiv sich denken kann und wo glücklicher Weise der Faktor $f_{(r,\theta)}$, wie der andere Faktor r, nur eindeutig ist, so daß die Verwickelungen, welche die Vieldeutigkeit der Formen veranlaßt, jetzt gar nicht eintreten. Da $r \cdot Cos\,\theta$ und $r \cdot Sin\,\theta$, alle positiven und alle negativen Werthe haben, vom kleinsten bis zum größten, wenn man θ zwischen 0 und 2π, und r positiv nimmt; und für weitere Werthe von θ und r, also auch für negative dieselben Werthe nur wiederkehren, — so folgt aus den Gleichungen 1.) und 2.), daß man r nur positiv oder der Null gleich nehmen darf, und θ höchstens zwischen 0 und 2π, wenn nicht Werthe von x oder von y, doppelt erscheinen sollen **).

Die Bedingungen für die Grenzwerthe von x und y, nämlich

$$x \overline{\overline{<}} b \quad \text{und} \quad (y-h)^2 \overline{\overline{<}} p(x-c),$$

gehen jetzt über in

5) $r \cdot Cos\,\theta \overline{\overline{<}} b-c-\frac{1}{4}p$ und 6) $r^2 \cdot Sin\,\theta^2 \overline{\overline{<}} p(\frac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\theta)$;

subtrahirt man aber die letztere Ungleichung von $r^2 = r^2$, so erhält man statt ihrer,

$$(r \cdot Cos\,\theta)^2 \overline{\overline{>}} r^2 - pr \cdot Cos\,\theta - \tfrac{1}{4}p^2$$

oder

$$(r \cdot Cos\,\theta + \tfrac{1}{2}p)^2 \overline{\overline{>}} r^2.$$

Hieraus folgt wieder, weil aus 5.) hervorgeht, daß $r \cdot Cos\,\theta + \frac{1}{2}p \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p$, folglich positiv ist (nach §. 4^b.)

---

*) Nach der Formel C_1 würde man erhalten haben

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \Sigma f_{r,\vartheta} \cdot (-r) \cdot dr \cdot d\vartheta.$$

Dann hätte man dr oder $d\vartheta$ stets negativ, das andere Differential aber stets positiv sich denken müssen; und bei der Zerlegung der Summe Σ, in Doppel-Integrale müßte man dann die größere Grenze des abnehmend gedachten Veränderlichen (nach §. 1.) als die untere nehmen.

**) Man kann ϑ innerhalb beliebiger 4 auf einander folgenden Quadranten nehmen, also auch negativ; aber nicht weiter.

7) $r \cdot Cos\,\theta + \frac{1}{2}p \overline{\gtrless} r$ oder $\frac{1}{2}p \overline{\gtrless} r(1 - Cos\,\theta)$.

Die Bedingungen 5.) und 7.) sind nun die einzig maßgebenden.

Summiren wir nun zuerst für einen konstanten Werth von θ, und für alle Werthe von r, so müssen wir vor allen Dingen aus diesen Bedingungen 5.) und 7.) die Grenzwerthe von r, als Funktionen von y, herleiten.

Aus der Bedingung 5.) folgt aber (nach §. 4ᵇ.)

8) $r \overline{\geq} \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta}$, so lange $Cos\,\theta$ negativ, — aber

9) $r \overline{\leq} \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta}$, so wie $Cos\,\theta$ positiv wird.

Aus der Bedingung 7.) dagegen geht, da $1-Cos\,\theta$ stets positiv ist, allemal

10) $r \overline{\leq} \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta}$

hervor. — Weil aber, wegen der 5.), $Cos\,\theta$ nie positiv sein kann, wenn $b \overline{\leq} c + \frac{1}{4}p$ ist, — dagegen eben sowohl positiv als negativ werden kann, so wie $b > c + \frac{1}{4}p$ ist, so muß man sofort wieder die früheren beiden Fälle von einander unterscheiden.

Erster Fall. — Ist $b \overline{\leq} c + \frac{1}{4}p$, — so ist $Cos\,\theta$ nie positiv; es finden daher jetzt nur die beiden Grenzbedingungen 8.) und 10.) statt; daher gehen die Werthe von r, von

11) $\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} = r''$

an, bis zu

12) $\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta} = r'$

hin. Und weil stets $r'' \overline{\leq} r'$ bleiben muß, so giebt die Gleichung

$$r'' \overline{\leq} r' \quad \text{d. h.} \quad \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} \overline{\leq} \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta},$$

eine Grenzbedingung für die Werthe von θ. Sie giebt

$$Cos\,\theta \overline{\underline{<}} \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{b-c+\frac{1}{4}p}$$

und sie liefert für den Grenzwerth von θ, zwei Werthe, einen Werth θ' im zweiten Quadranten, nämlich

$$13)\qquad \theta' = Arc\,cos.\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{b-c+\frac{1}{4}p},$$

und den andern $2\pi-\theta'$ im dritten Quadranten, so daß die Werthe von θ, von θ' an bis zu $2\pi-\theta'$ hin gehen, in so ferne für diese Werthe von θ allein, stets $r'' \overline{\underline{<}} r'$ bleibt. — Man findet daher für diesen Fall, wo $b \overline{\underline{<}} c+\frac{1}{4}p$ ist,

$$\text{I.}\qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_{\theta'}^{2\pi-\theta'}\left(\int_{r''}^{r'} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta,$$

wenn nur r'' und r' und θ' aus 11.), 12.) und 13.) ihre Bestimmung finden.

Ist namentlich $b = c+\frac{1}{4}p$, so ist $r'' = 0$ und $\theta' = Arc\,cos.\,\theta = \frac{1}{2}\pi$, und für diesen ganz bestimmten Werth von b, findet sich daher unsere Summe Σ,

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_{0}^{r'} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta.$$

Zweiter Fall. — Ist $b > c+\frac{1}{4}p$, — so ist die Bedingung 5.) allemal erfüllt und sie beschränkt nicht, so lange $Cos\,\theta$ negativ ist, d. h. so lange θ, von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ geht. Für $Cos\,\theta$ positiv tritt sie dagegen (in der Form 9.) wieder auf, während die andere Bedingung 7.) in der Form 10.) beschränkt. Die Bedingungen 9.) und 10.) treten aber dergestalt mit einander in den Kampf, daß die 10.) allein zu erfüllen bleibt, so lange $\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} > \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta}$ ist, weil mit ihr dann die 9.) zugleich erfüllt ist; — daß dagegen die 9.) allein zu erfüllen bleibt, so lange $\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} < \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta}$ ist, weil dann mit der 9.) die 10.) zugleich erfüllt ist. Die Gleichung

$$\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} = \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta}$$

giebt die Scheidewand zwischen den einen und den andern Werthen von θ; und sie liefert wieder für θ zwei Werthe, nämlich den Werth θ' aus 13.), der aber dasmal im ersten Quadranten liegt, und den Werth $2\pi-\theta'$ im vierten Quadranten. Für alle Werthe von θ, welche von θ' an, wachsend, bis $2\pi-\theta'$ gehen, ist also r' (aus 12.) der Grenzwerth von r; für die übrigen Werthe von θ aber, nämlich von 0 an bis θ' hin, und von $2\pi-\theta'$ an bis zu 2π hin, ist dagegen r'' (aus 11.) der Grenzwerth von r *). Und da weiter keine beschränkende Bedingung übrig ist, so ist 0 (Null) der untere Grenzwerth von r. — Man findet daher jetzt

$$\Sigma f\cdot dx\cdot dy = \int_{\theta'}^{2\pi-\theta'}\left(\int_0^{r'} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta$$
$$+\int_0^{\theta'}\left(\int_0^{r''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta+\int_{2\pi-\theta'}^{2\pi}\left(\int_0^{r''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta.$$

Da $f_{(r,\theta)}$ den Veränderlichen θ nur als $Cos\,\theta$ und $Sin\,\theta$

---

*) Für alle Werthe von θ, welche von 0 bis θ' und von $2\pi-\theta'$ bis 2π liegen, zeigt sich nämlich $Cos\,\theta$ positiv und $\geqq Cos\,\theta'$ d. h. $\geqq \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{b-c+\frac{1}{4}p}$, und daraus folgt dann wieder $1-Cos\,\theta \leqq \frac{\frac{1}{2}p}{b-c+\frac{1}{4}p}$ und $\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} \leqq b-c+\frac{1}{4}p$, und noch $\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta} \geqq b-c+\frac{1}{4}p$; folglich auch um so mehr $\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} \leqq \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta}$; folglich ist mit der Bedingung 9.) die 10.) zugleich erfüllt und eben deshalb liefert nun die 9.) den obern Grenzwerth von r. — Für die Werthe von θ aber, welche zwischen θ' und $\frac{1}{2}\pi$, ferner zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und $2\pi-\theta'$ liegen, ist $Cos\,\theta$ noch immer positiv, aber $< Cos\,\theta'$; und daraus folgt dann wieder (ganz analog wie kurz vorher), daß dann allemal $\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{Cos\,\theta} > \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\theta}$; und deshalb bleibt jetzt r' als die obere Grenze von r, weil nun die Bedingung 10.) allein maaßgebend wird, in so ferne jetzt mit der 10.), die 9.) zugleich erfüllt ist. Und da, so lange $Cos\,\theta$ negativ ist, also von $\theta=\frac{1}{2}\pi$ an bis zu $\theta=\frac{3}{2}\pi$ hin, ohnedies bereits vorher r' als die obere Grenze von r erkannt wurde, so sieht man klar, daß r' diese obere Grenze bleibt, von $\theta=\theta'$ an bis zu $\theta=2\pi-\theta'$ (ohne alle Unterbrechung) hin.

enthält (nach 1. und 2.), diese letzteren aber sich nicht ändern, wenn $2\pi+\theta$ statt θ geschrieben wird; da ferner $d(2\pi+\theta)$ ebenfalls wieder in $d\theta$ übergeht; da endlich die Grenzwerthe dieses neuen Buchstaben θ, um 2π kleiner sind, als die des alten (wenn $2\pi+$ neues θ, statt des alten θ, gesetzt werden) — so zeigt sich das letzte dieser drei Doppel-Integrale auch noch

$$=\int_{-\theta'}^{0}\left(\int_{0}^{r'} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta$$

und kann nun (nach §. 2.) mit dem zweiten, in Eins zusammengefaßt werden, so daß man schließlich erhält

$$\text{II.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy=\int_{\theta'}^{2\pi-\theta'}\left(\int_{0}^{r'} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta$$
$$+\int_{-\theta'}^{\theta'}\left(\int_{0}^{r''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta,$$

wenn nur $b>c+\frac{1}{4}p$ ist, und wenn r'', r' und θ' aus 11.), 12.) und 13.) ihre Bestimmung erhalten.

§. 16. Der dritten Aufgabe

achte Auflösung. Summiren wir aber in umgekehrter Ordnung, nämlich zuerst für einen konstanten Werth von r, und für alle Werthe von θ, — so müssen wir aus den vorhandenen Bedingungen 5.) und 7.) zunächst die Grenzwerthe von θ, als Funktionen von r, herstellen. — Man erhält aus diesem Gesichtspunkt, als die zu erfüllenden Bedingungen (da r nie negativ ist)

$$14)\quad Cos\,\theta \overline{\overline{<}} \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r} \quad\text{und}\quad 15)\quad Cos\,\theta \overline{\overline{>}} 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r}.$$

Erster Fall. — Wenn $b\overline{\overline{<}}c+\frac{1}{4}p$ ist. — Da $Cos\,\theta$ nie kleiner als -1 und nie größer als $+1$ werden kann, so muß (wegen 14.) stets

$$r\overline{\overline{>}}c+\tfrac{1}{4}p-b$$

bleiben, wodurch die untere Grenze von r feststeht. — Die Bedingung 15. dagegen ist für jeden Werth von θ, erfüllt, so daß sie dann gar nicht beschränkt, so oft $1-\frac{\frac{1}{2}p}{r} \overline{\gtrless} -1$, d. h. $r \overline{\gtrless} \frac{1}{4}p$ ist. — Für alle Werthe von r, welche zwischen $c+\frac{1}{4}p-b$ und $\frac{1}{4}p$ liegen, hat man also blos die Bedingung 14.) allein zu berücksichtigen. — Findet man also aus der Gleichung $Cos\,\theta = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r}$ die Grenzwerthe von θ, nämlich θ_1 im zweiten Quadranten aus der Gleichung

$$16) \quad \theta_1 = Arc\,cos.\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r}$$

und dann den zweiten Werth $2\pi-\theta_1$ im dritten Quadranten, — so überzeugt man sich bald, daß für alle Werthe von θ, welche von θ_1 an bis zu $2\pi-\theta_1$ hin gehen, $Cos\,\theta \overline{\gtrless} Cos\,\theta'$, d. h., daß die Bedingung 14.) erfüllt ist; für die übrigen Werthe von θ (zwischen 0 und θ_1, und noch zwischen $2\pi-\theta_1$ und 2π) aber nicht. — Es sondert sich also nun ein Theil der Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch das Doppel-Integral

$$A.)\cdots \int_{c+\frac{1}{4}p-b}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr.$$

So wie $r>\frac{1}{4}p$ wird, so tritt die Bedingung 15.) beschränkend auf. Findet man also aus $Cos\,\theta \overline{\gtrless} 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r}$ diese Grenzwerthe von θ, nämlich den einen θ'' aus der Gleichung

$$17) \quad \theta'' = Arc\,cos.\left(1-\frac{\frac{1}{2}p}{r}\right)\,^{*)}$$

und den andern $2\pi-\theta''$, — so zeigen die Bedingungen 14.) und 15.), daß die Werthe von θ, von θ_1 bis zu θ'', und dann wieder von $2\pi-\theta''$ bis zu $2\pi-\theta_1$ fortgehen können und müssen, in so ferne für alle diese Werthe von θ, $Cos\,\theta \overline{\gtrless} Cos\,\theta_1$ und

*) Dieser Werth θ'' liegt im zweiten oder ersten Quadranten, je nachdem r zwischen $\frac{1}{4}p$ und $\frac{1}{2}p$ liegt, oder $r>\frac{1}{2}p$ ist; $2\pi-\theta''$ liegt dann gleichzeitig im dritten oder vierten Quadranten.

$\overline{\overline{>}} Cos\,\theta''$ wird, wie solches die gedachten Bedingungen verlangen. — Da aber doch immer $\theta_1 \overline{\overline{<}} \theta''$ und (was aber eben darauf zurückführt) auch $2\pi-\theta'' \overline{\overline{<}} 2\pi-\theta_1$ bleiben muß, so giebt die Gleichung $\theta_1 \overline{\overline{<}} \theta''$ d. h. $Cos\,\theta_1 \overline{\overline{>}} Cos\,\theta''$, d. h.

$$\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r} \overline{\overline{>}} 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r}$$

den oberen Grenzwerth von r, nämlich

$$r \overline{\overline{<}} b-c+\tfrac{1}{4}p.$$

Es finden sich also die beiden übrigen Theile der Summe Σ, noch ausgedrückt durch die Doppel-Integrale

$$\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta+\int_{2\pi-\theta''}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

oder durch

$$B.)\cdots \int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta+\int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

indem man in dem einen der Integrale wieder $2\pi+\theta$ statt θ geschrieben hat.

Man hat also nun in diesem Falle, wo $b \overline{\overline{<}} c+\frac{1}{4}p$ ist, gefunden

$$\text{I.} \qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy = A.+B.$$

Zweiter Fall. — Wenn $b>c+\frac{1}{4}p$ ist. — Auch in diesem Falle beschränkt die Bedingung 15.) die Werthe von θ nicht, so lange $\frac{\frac{1}{2}p}{r} \overline{\overline{>}} 2$, d. h. $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ ist; diese letzteren gehen daher von 0 bis 2π fort, wenn sie nicht durch die 14.) eine Beschränkung erfahren, welches aber nicht der Fall ist, so lange man $r \overline{\overline{<}} b-c-\frac{1}{4}p$ hat, weil dann die 14.) allemal erfüllt ist.

Man muß daher sofort zwei Unterfälle dieses zweiten Falles unterscheiden, nämlich

wenn $\frac{1}{4}p \overline{\overline{<}} b-c-\frac{1}{4}p$ d. h. wenn $b \overline{\overline{>}} c+\frac{1}{2}p$
und wenn $\frac{1}{4}p > b-c-\frac{1}{4}p$ d. h. wenn $b < c+\frac{1}{2}p$ (aber noch $b > c+\frac{1}{4}p$) ist.

Im ersten Unterfall des zweiten Falles, d. h. wenn $b-c \geqq \frac{1}{2}p$ ist, liegen nämlich alle Werthe von r, welche zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ sich aufhalten, auch zwischen 0 und $b-c-\frac{1}{4}p$, und die Werthe von θ bleiben dann auf beiden Seiten ganz unbeschränkt, gehen also von 0 bis 2π, so oft r zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ liegt. Es sondert sich also jetzt von unserer Summe Σ, zunächst ein Theil ab, welcher ausgedrückt ist durch das Doppel-Integral

$$\text{A.)} \cdots \quad \int_0^{\frac{1}{4}p} \left(\int_0^{2\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr.$$

Für alle Werthe von r, welche zwischen $\frac{1}{4}p$ und $b-c-\frac{1}{4}p$ liegen, bleiben die Werthe von θ durch die Bedingung 14.) noch ganz unbeschränkt; die Bedingung 15.) dagegen giebt

$$Cos\,\theta \overline{\overline{>}} Cos\,\theta'',$$

wenn θ'' aus der Gleichung 17.) berechnet wird, wodurch $\theta < \theta''$ und $> 2\pi - \theta''$ wird, so daß die Werthe von θ zwischen 0 und θ'' und wiederum zwischen $2\pi-\theta''$ und 2π liegen. — Es lösen sich also nun von der Summe Σ, zwei neue Stücke ab, welche ausgedrückt sind durch die beiden Doppel-Integrale

$$\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_0^{\theta''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr$$

und $$\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_{2\pi-\theta''}^{2\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr.$$

Weil aber $f_{(r,\theta)}$ blos $Cos\,\theta$ und $Sin\,\theta$ enthält, welche sich nicht ändern, wenn man $2\pi+\theta$ statt θ setzt, so geht dieses letztere Doppel-Integral noch in

$$\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_{-\theta''}^{0} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr$$

über und kann dann mit dem ersteren in eines zusammengefaßt werden, so daß die Summe dieser beiden Theile ausgedrückt ist durch das Doppel-Integral

$$B.)\cdots \quad \int_{\frac{1}{4}p}^{b-c-\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

wo θ'' die durch die Gleichung 17.) gegebene Funktion von r, vorstellt.

Endlich kommt der Theil der Summe Σ, in welchem r jeden Werth hat, der größer als $b-c-\frac{1}{4}p$ ist. — Jetzt sind die Werthe von θ auf beiden Seiten begrenzt, einmal durch die Bedingung 15.), welche zu den Grenzwerthen θ'' (in 17.) und $2\pi-\theta''$ von θ, führt, und dann noch durch die zweite Bedingung 14.), welche zu den Grenzwerthen θ_1 (aus 16.) im ersten Quadranten, und $2\pi-\theta_1$ im vierten Quadranten, führt, so daß, weil (nach 14.) $Cos\,\theta \overline{\overline{<}} Cos\,\theta_1$ ist, $\theta > \theta_1$ und $< 2\pi-\theta_1$ ist. Es gehen also jetzt die Werthe von θ, einmal von $2\pi-\theta''$ bis zu $2\pi-\theta_1$ und dann noch von $+\theta_1$ bis zu $+\theta''$. — Und da die Reihe der Werthe von θ, von $2\pi-\theta''$ bis zu $2\pi-\theta_1$, um 2π vermindert werden kann, so gehen sie auch, wenn man will, von $\theta=-\theta''$ bis zu $\theta=-\theta_1$ hin.

Der Umstand, daß stets $\theta_1 \overline{\overline{<}} \theta''$ (und $-\theta'' \overline{\overline{<}} -\theta_1$), daß also $Cos\,\theta_1 \overline{\overline{>}} Cos\,\theta''$ bleiben muß, nämlich

$$\frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r} \overline{\overline{>}} 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r}$$

führt zuletzt noch zu

$$r \overline{\overline{<}} b-c+\tfrac{1}{4}p,$$

wodurch die obere Grenze von r, sich ergiebt. — Dieser Theil der Summe Σ, wird also ausgedrückt sein durch zwei Doppel-Integrale, welche sich so zusammenfassen lassen, nämlich

$$C.)\cdots \quad \int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

während θ'' und θ_1 aus den Gleichungen 17.) und 16.) als Funktionen von r ausgedrückt gefunden und als im ersten oder zweiten Quadranten liegend gedacht werden müssen.

Ist also $b-c \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$, so findet sich

$$\text{II.}\quad \Sigma f_{x,y}\cdot dx\cdot dy = \int_0^{\frac{1}{4}p}\left(\int_0^{2\pi} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$
$$+\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c-\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$
$$+\int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

wenn θ_1 und θ'' aus den Gleichungen 17.) und 16.) genommen werden.

Im zweiten Unterfall des zweiten Falles, d. h. wenn $b-c<\frac{1}{2}p$ (jedoch noch $\overline{\overline{>}}\frac{1}{4}p$) ist, bleiben die Werthe von θ, jetzt nur auf beiden Seiten ganz unbeschränkt, so lange r zwischen 0 und $b-c-\frac{1}{4}p$ liegt; liegt r zwischen $b-c-\frac{1}{4}p$ und $\frac{1}{4}p$, so werden die Werthe von θ, die durch die Gleichung 16.) gegebenen Werthe θ_1 und $2\pi-\theta_1$ zu Grenzen haben, und da (nach 14.) $Cos\,\theta \overline{\overline{<}} Cos\,\theta_1$ werden muß, so muß jeder Werth $\theta, > \theta_1$ aber $<2\pi-\theta_1$ werden (wo θ_1 wie oben, im ersten Quadranten gedacht wird). — Liegt endlich r zwischen $\frac{1}{4}p$ und $b-c+\frac{1}{4}p$, so werden die Werthe von θ wieder auf beiden Seiten begrenzt. — Man findet daher jetzt (wo $b-c<\frac{1}{2}p$ aber $>\frac{1}{4}p$ ist)

$$\text{III.}\quad \Sigma f_{x,y}\cdot dx\cdot dy = \int_0^{b-c-\frac{1}{4}p}\left(\int_0^{2\pi} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$
$$+\int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$
$$+\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

wenn θ'' und θ_1 aus den Gleichungen 17.) und 16.), wie oben ihre Bestimmung finden.

§. 17.

Führt man nach dem Verfahren des §. 14., statt x und statt y, zwei neue Veränderliche ein, so lassen sich die Auflösungen der einzelnen Aufgaben (also auch die der 1ten des §. 7., der 2ten des §. 8. und der 3ten des §. 10.) oft viel einfacher gestalten.

Lösung der ersten Aufgabe (des §. 7.). — Es wurde im §. 7. die Summe

$$1) \qquad \sum_{a \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} b,\ m \overline{\gtrless} y \overline{\gtrless} n} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$$

in Doppel-Integrale auszudrücken gesucht.

Führt man hier zwei neue Veränderliche x' und y', mittelst der Gleichungen

$$x = x' + a \qquad \text{und} \qquad y = y' + m$$

ein, so findet sich ohne Weiteres als Ausnahmsfall der „Vorbereitung" des §. 14.,

$$dx = dx', \quad dy = dy' \quad \text{und} \quad dx \cdot dy = dx' \cdot dy',$$

welches letztere Resultat natürlich auch erhalten wird, wenn man genau nach §. 14. verfährt; — und die obige Summe 1.), wenn man der Kürze wegen

$$b - a = g \qquad \text{und} \qquad n - m = k$$

setzt, findet sich augenblicklich

$$2) \qquad = \sum_{0 \overline{\gtrless} x' \overline{\gtrless} g,\ 0 \overline{\gtrless} y' \overline{\gtrless} k} f_{x'+a,\ y'+m} \cdot dx' \cdot dy';$$

und diese findet sich dann wieder (wenn man nach §. 7. verfährt)

$$3) \qquad = \int_0^g \left(\int_0^k f_{x'+a,\ y'+m} \cdot dy' \right) \cdot dx',$$

$$\text{oder} \quad 4) \qquad = \int_0^k \left(\int_0^g f_{x'+a,\ y'+m} \cdot dx' \right) \cdot dy'.$$

Neue Lösung derselben Aufgabe. Man konnte auch

$$\frac{a+b}{2} = g_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{m+n}{2} = k_1$$

setzen, so wie noch

$$\frac{-a+b}{2} = g \quad \text{und} \quad \frac{-m+n}{2} = k, -$$

so daß

$$a = g_1 - g, \quad b = g_1 + g, \quad m = k_1 - k \quad \text{und} \quad n = k_1 + k$$

wurde, und dann

$$x = x' + g_1 \qquad \text{und} \qquad y = y' + k_1$$

nehmen. Dann fand sich die obige Summe 1.)

$$5) \qquad = \sum_{-g \lesseqgtr x' \lesseqgtr g,\ -k \lesseqgtr y' \lesseqgtr k} f_{x'+g_1,\ y'+k_1} \cdot dx' \cdot dy';$$

und, wenn man nach §. 7. verfährt, diese Summe 5.) wieder

$$6) \qquad = \int_{-g}^{g} \left(\int_{-k}^{k} f_{x'+g_1,\ y'+k_1} \cdot dy' \right) \cdot dx',$$

oder

$$6) \qquad = \int_{-k}^{k} \left(\int_{-g}^{g} f_{x'+g_1,\ y'+k_1} \cdot dx' \right) \cdot dy' \text{ *)}.$$

Lösung der zweiten Aufgabe (des §. 8.). — Bei dieser Aufgabe, wo

$$7) \qquad \sum_{a \lesseqgtr x \lesseqgtr b,\ m \lesseqgtr y \lesseqgtr n,\ (y-h)^2 \gtreqless p(x-c)} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$$

in Doppel-Integrale ausgedrückt werden soll, — kann man entweder die neuen Veränderlichen x' und y' so einführen, wie in der einen oder der andern nächstvorstehenden Lösung der ersten Aufgabe geschehen ist, oder man kann auch sie einführen mittelst der beiden nachstehenden Gleichungen, nämlich

$$x = x' + c \qquad \text{und} \qquad y = y' + h.$$

Wird dann der Kürze wegen

$$a-c = -a', \quad b-c = b', \quad m-h = -m' \quad \text{und} \quad n-h = n'$$

gesetzt, so ist die Summe in 7.)

$$8) \qquad = \sum_{-a' \lesseqgtr x' \lesseqgtr b',\ -m' \lesseqgtr y' \lesseqgtr n',\ y'^2 \gtreqless px'} f_{x'+c,\ y'+h} \cdot dx' \cdot dy';$$

---

*) Wäre die Aufgabe als eine geometrische gegeben gewesen, nämlich die Masse eines Rechtecks zu finden, dessen Kanten bezüglich die Längen $b-a$ und $m-n$ haben (s. das Beispiel zu §. 7.), so hätte man diesen Zweck der Vereinfachung oder der eleganteren Form der Darstellung, auch geometrisch dadurch erreichen können, daß man im erstern Fall durch die Ecke C (Fig. 3.), im andern Fall aber durch den Mittelpunkt des Rechtecks, neue Koordinaten-Axen parallel mit den alten (OX und OY) gelegt hätte.

und nun kann man sie, genau das Verfahren des §. 8. oder des §. 9. befolgend, in Doppel-Integrale zerlegen und erhält, während der Diskussion und in den Endresultaten einfachere Formen *).

§. 18. Der dritten Aufgabe neue Lösungen.

— Um die Summe

$$1) \qquad \sum_{x \overline{\gtrless} b,\ (y-h)^2 \overline{\gtrless} p(x-c)} f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$$

in Doppel-Integrale zu verwandeln, kann man zunächst

$$b-c=a, \quad x-c=x' \quad \text{und} \quad y-h=y'$$

setzen, und sie verwandelt sich sogleich in

$$2) \qquad \sum_{x' \overline{\gtrless} a,\ y'^2 \overline{\gtrless} px'} f_{x'+c,\ y'+h} \cdot dx' \cdot dy'.$$

mit der Bedingung, daß x' nur positive Werthe bekommen darf, weil y' nur reelle Werthe haben soll.

Wird sie nun in dieser einfacheren Gestalt nach dem Verfahren des §. 10. behandelt, so erhält man selbige eleganter ausgedrückt durch

$$\text{I.} \qquad \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{px'}}^{+\sqrt{px'}} f_{x'+c,\ y'+h} \cdot dy' \right) \cdot dx$$

und durch (wenn $+\sqrt{p(b-c)}$ oder $+\sqrt{pa}$ durch q bezeichnet bleibt)

$$\text{II.} \qquad \int_{-q}^{q} \left(\int_{\frac{1}{p}y'^2}^{a} f_{x'+c,\ y'+h} \cdot dx' \right) \cdot dy'.$$

---

*) Betrachtet man die Aufgabe selbst geometrisch, wie in der Anmerk. 2. zu §. 9., so kann dasselbe auch blos auf geometrischem Wege geschehen, dadurch, daß man durch den Scheitel G der Parabel (Fig. 3.) zwei neue Koordinaten-Axen parallel mit den alten Axen OX und OY, legt, welche dann bezüglich mit dem Hauptdurchmesser GK und mit der darauf senkrechten GZ zusammenfallen; und wenn man dann die Behandlung der Aufgabe, von diesen neuen Axen ausgehend, unternimmt.

Löst man dann die Aufgabe nach §. 11., indem man einen neuen Veränderlichen r statt x′ einführt, durch eine Gleichung zwischen x′ und r, die kein y enthält, so darf man nur

$$x' = x'_r = r^2 - \tfrac{1}{4}p$$

nehmen, um sofort die Auflösung, wie im §. 11. zu haben, aber, während der Behandlung und in den Endresultaten, in einfacherer und eleganterer Form.

Will man dann dieselbe Aufgabe nach den §§. 12. 13. lösen, indem man r statt x′ durch eine Gleichung zwischen x′ und r einführt, welche auch noch y in sich aufnimmt, so darf man jetzt nur die Gleichung

$$(x' - \tfrac{1}{4}p)^2 + y'^2 = r^2$$

statt der 1.) des §. 12. nehmen, um sofort, während der Behandlung sowohl als in den Endresultaten, einfacher und eleganter vorgeschritten zu sein.

Führt man aber wie im §. 15. zwei neue Veränderliche r und θ, statt der x′ und y′, ein, so darf man nur statt der dortigen Gleichungen 1.) und 2.), jetzt diese anderen, nämlich

$$x' = \tfrac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\theta \quad \text{und} \quad y' = r \cdot Sin\,\theta$$

einführen, um statt der dortigen Behandlung ebenfalls eine einfachere zu erhalten.

Wir empfehlen dem Anfänger, zu seiner Uebung, die Diskussion jener Aufgabe mit der jetzigen Vereinfachung zu wiederholen und zwar in allen ihren verschiedenen Lösungen.

Anmerkung. In den drei Aufgaben der §§. 7. 8. und 10. waren theils zwei, theils drei Grenzbedingungen gegeben. — Betrachten wir daher jetzt noch eine Aufgabe, in welcher nur eine Grenzbedingung gegeben ist, jedoch so, daß durch sie keiner der Veränderlichen bis in's Unendliche unbegrenzt bleibt, wie letzteres z. B. der Fall sein würde, wenn man blos die einzige Grenzbedingung

$$(y-h)^2 \overline{\overline{<}} p(x-c)$$

geben wollte, weil zwar durch sie $x \overset{=}{>} c$ gegeben wäre, in so ferne sonst y imaginär würde, dagegen gleichzeitig x von c ab bis in's Unendliche wachsen könnte, und mit x dann auch y. — Eine solche Aufgabe wäre zwar nicht unmöglich und von der dritten Aufgabe des §. 10. nicht verschieden, wenn daselbst $b = \infty$ gedacht wird; es müßte aber dann die Funktion $f_{x,y}$ nicht blos so sein, daß sie für $x = \infty$ und $y = \infty$ einen unendlichkleinen Werth annimmt, sondern die unendlichmal unendlichvielen Glieder von $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ müßten auch eine konvergente Doppelreihe bilden, wenn die gedachte Summe einen endlichen Werth haben sollte.

§. 19. Vierte Aufgabe.

Macht man aber z. B. die einzige (Grenz-) Bedingung, nämlich, daß sich die Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ über alle reellen Werthe von x und von y erstrecken soll, welche der Bedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \overset{=}{<} 1$$

entsprechen, so liegen alle Werthe von x, zwischen $-a$ und $+a$, weil sonst y imaginär werden würde, — während gleichzeitig alle Werthe von y zwischen $-b$ und $+b$ liegen müssen, weil sonst x imaginär werden würde*). — Für jeden bestimmten Werth von x liegen aber alle Werthe von y zwischen $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, — während für jeden bestimmten Werth von y alle Werthe von x zwischen $-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ und $+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ liegen werden. — Die

*) Zu der Bedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \overset{=}{<} 1$, kann man daher noch die beiden andern darin enthaltenen Bedingungen, nämlich

$$-a \overset{=}{<} x \overset{=}{<} +a \quad \text{und} \quad -b \overset{=}{<} y \overset{=}{<} +b,$$

wenn man will, noch offen hinzuschreiben, was bei Einführung neuer Veränderlichen dazu dienen kann, dieselben nicht zu übersehen.

jetzt durch Doppel-Integrale auszudrückende Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ hat also nun immer einen endlichen bestimmten Werth, so lange nur $f_{x,y}$ selbst stets einen bestimmten Werth hat*). Man findet dann sogleich, wenn der Kürze wegen $+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = \mathfrak{X}$ gesetzt wird

$$\text{I.} \quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}} f \cdot dy\right) \cdot dx$$

und, wenn man $+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} = \mathfrak{Y}$ setzt,

$$\text{II.} \quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_{-b}^{b}\left(\int_{-\mathfrak{Y}}^{\mathfrak{Y}} f \cdot dx\right) \cdot dy.$$

§. 20. Der vierten Aufgabe

neue Lösungen. Führt man aber bei derselben Aufgabe, in welcher $\Sigma f_{x',y'} \cdot dx' \cdot dy'$ in Doppel-Integrale ausgedrückt werden soll, unter der Voraussetzung, daß x' und y' alle reellen Werthe bekommen sollen, welche der Bedingung

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \overline{<} 1$$

nicht widersprechen, — führt man also bei derselben Aufgabe zuvor zwei neue Veränderliche x und y, statt der alten x' und y', ein und zwar mittelst der Gleichungen

$$\frac{x'}{a} = x \quad \text{und} \quad \frac{y'}{b} = y,$$

so erhält man (weil hier wieder der Ausnahmsfall der „Vorbereitung" des §. 14. eintritt) sogleich direkt $dx = a \cdot dx$ und

*) Die Integralrechnung weist jedoch nach, daß die Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ auch noch einen endlichen Werth hat, wenn für Werthe α und β, bezüglich von x und y, welche innerhalb der Grenzen noch liegen, $f_{x,y}$ auch die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so lange nur diese Form aus einer allgemeinen Form $\frac{F_{x,y}}{(x-\alpha)^{\mu}(y-\beta)^{\nu}}$ hervorgeht, in welcher μ und ν kleiner als 1 sind.

$dy' = b \cdot dy$; also $dx' \cdot dy' = ab \cdot dx \cdot dy$, und dasselbe hätte man auch durch genaue Anwendung des §. 14.) erhalten; folglich ist

$$f_{x',y'} \cdot dx' \cdot dy' = f_{ax,by} \cdot ab \cdot dx \cdot dy;$$

und deshalb ist jetzt

$$\odot \cdots \quad \underset{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2} \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{x',y'} \cdot dx' \cdot dy'} = ab \cdot \underset{x^2+y^2 \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{ax,by} \cdot dx \cdot dy},$$

so daß die Aufgabe selbst auf eine viel einfachere zurückgeführt ist. Diese letztere aufgelöst, giebt aber unmittelbar

$$\text{I.} \quad \Sigma f_{ax,by} \cdot dx \cdot dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f_{ax,by} \cdot dy \right) \cdot dx$$

oder

$$\text{II.} \quad \Sigma f_{ax,by} \cdot dx \cdot dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f_{ax,by} \cdot dx \right) \cdot dy,$$

welche letzteren beiden Resultate noch mit ab multiplicirt werden müssen (nach $\odot$), wenn man die in der vierten Aufgabe gegebene Summe ausgedrückt haben will.

§. 21.

Führt man aber, um diese einfachere Aufgabe zu lösen, d. h. um $\underset{x^2+y^2 \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{ax,by} \cdot dx \cdot dy}$ in Doppel-Integrale auszudrücken, statt x einen neuen Veränderlichen r ein mittelst der Gleichung

1) $x^2+y^2 = r^2$, welche $dx = \partial x_r \cdot dr = \frac{r}{x} \cdot dr$ giebt, so erhält man diese Summe Σ,

$$= \underset{r \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{a\sqrt{r^2-y^2},\, by} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy \cdot dr},$$

in so ferne alle positiven Werthe von r, bereits alle Werthe von x, geben, — also r nicht negativ genommen werden darf, wenn man die Werthe von x nicht zweimal haben will.

Die Werthe von y bleiben nun durch die Bedingung $r \overline{\overline{<}} 1$ ganz unbeschränkt, sind aber dadurch beschränkt, daß $\sqrt{r^2-y^2}$

d. h. x, imaginär werden würde, wenn man $y^2 > r^2$ nehmen wollte *); man hat daher noch die beiden Bedingungen, nämlich

$$2)\quad r \overline{\overline{<}} 1 \quad \text{und} \quad 3)\quad y^2 \overline{\overline{<}} r^2.$$

Summiren wir nun wieder zuerst für einen konstanten Werth von y, und für alle Werthe von r; hierauf aber diese Summen erst wieder für alle Werthe von y.

Man findet nun aber wieder aus der Gleichung 1.), wenn man die Untersuchung nach dem Muster der §§. 12. 13. weiter fortführt, daß, so lange x von -1 an bis zu 0 hin wächst, die Werthe von r, für einen konstant gedachten Werth von y, immer abnehmen, daß also ∂x_r d. h. $\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}$, also überall auch $\sqrt{r^2-y^2}$, negativ genommen werden muß, — während für alle weiterhin wachsenden Werthe von x (von 0 an bis zu $+1$ hin), auch die Werthe von r wachsen (für einen konstant gedachten Werth von y), daß folglich jetzt ∂x_r d. h. $\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}$, also auch $\sqrt{r^2-y^2}$, positiv genommen werden muß. Gleichzeitig geben zwei verschiedene Werthe (z. B. $-c$ und $+c$) von x, einen und denselben Werth von r, so daß jeder (positive) Werth von r, zweimal genommen werden muß, einmal für den negativen Werth der Quadratwurzel $\sqrt{r^2-y^2}$, das andere Mal für ihren positiven Werth.

---

*) In der ganzen Analysis kommen fortwährend Bedingungen vor, welche weder durch Gleichungen noch durch Ungleichungen ausgesprochen, und nichts destoweniger vorhanden und zu beachten sind. — Zu diesen Bedingungen gehören: wenn gewisse Ausdrücke stets ganze Zahlen geben sollen, oder stets positive, oder stets reelle, u. dgl. m. — Ferner gehören zu diesen Bedingungen, daß, wenn $Cos\,\varphi$ oder $Sin\,\varphi$ vorkommt, dieser $Cos\,\varphi$ oder dieser $Sin\,\varphi$ nie größer als $+1$, und nie kleiner als -1 sein darf, wenn φ als reell vorausgesetzt ist; u. dgl. m. — Der Anfänger muß daher gerade auf solche, mehr versteckte, Bedingungen zuerst sehen, damit sie eben von ihm nicht ganz übersehen werden mögen.

Die Bedingung 3.) giebt

$r \overline{\overline{>}} -y$, so lange y negativ, — und

$r \overline{\overline{>}} +y$, so wie y positiv wird.

Es gehen also die Werthe von r, von $-y$ bis zu $+1$ hin, so lange y negativ ist; aber von $+y$ bis zu $+1$ hin, so lange y positiv ist. Jeder Werth von r muß aber zweimal genommen werden, einmal während $\sqrt{r^2-y^2}$ negativ genommen wird, also $f_{ax,by}$ in $f_{-a\sqrt{r^2-y^2},y} = f^{I}$ übergeht, und dann noch einmal, während $\sqrt{r^2-y^2}$ positiv genommen wird, folglich $f_{ax,by}$ in $f_{+a\sqrt{r^2-y^2},y} = f^{II}$ übergeht. — Und weil die untere Grenze $-y$ von r, nie größer als die obere $+1$ werden darf, so giebt die Gleichung $-y \overline{\overline{<}} +1$, d. h. $y \overline{\overline{>}} -1$, die untere Grenze von y dazu. — Eben so darf aber auch die untere Grenze $+y$ von r, die obere $+1$ nie überschreiten; folglich giebt die Gleichung $+y \overline{\overline{<}} +1$, die obere Grenze von y dazu.

Man findet daher jetzt

$$\text{III.} \quad \Sigma f_{ax,by} \cdot dx \cdot dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-y}^{1} (f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy$$
$$+ \int_{0}^{1} \left(\int_{+y}^{1} (f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy,$$

wo wir in dem erstern Integrale nach r, die Grenzen der Integrale umgekehrt haben (nach §. 2. V.), um dr und damit auch $\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}$, überall positiv uns denken zu können.

Summirt man aber in umgekehrter Ordnung, d. h. erst für einen konstanten Werth von r, und für alle Werthe von y, — um nachher noch die zweite Summation für alle Werthe von r, folgen lassen zu können, — so muß man jeden konstanten Werth von r, wiederum zweimal, und das eine Mal $\sqrt{r^2-y^2}$ negativ, das andere Mal dagegen dieselbe Quadratwurzel positiv nehmen. — Und weil für jeden konstanten Werth von r, die Werthe von y nicht weiter beschränkt sind, als daß y^2 nicht größer als r^2 werden darf, so erhält man jetzt sogleich

$$\text{IV.}\quad \Sigma f_{ax,by}\cdot dx\cdot dy = \int_0^1 \left(\int_{-r}^{r} (f^{I}+f^{II})\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dy\right)\cdot dr,$$

wo wir wieder im erstern Theil die Grenzen des Integrals nach r, umgekehrt haben (nach §. 2. V.), um dr und $\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}$ überall positiv uns denken zu können, wodurch es noch ermöglicht wurde, die beiden Integrale nach r, in ein einziges zusammen zu fassen.

Multiplicirt man zuletzt die Resultate in III. oder IV. noch mit ab, so hat man abermals Lösungen der vierten Aufgabe (des §. 19.).

§. 22.

Führt man, um $\underset{x^2+y^2 \overline{\gtrless} 1}{\Sigma f_{ax,by}\cdot dx\cdot dy}$ zu finden, zwei neue Veränderliche r und θ ein, mittelst der Gleichungen

1) $x = r\cdot Cos\,\theta$ und 2) $y = r\cdot Sin\,\theta$,

so giebt der §. 14.) sofort die gedachte Summe Σ,

$$= \underset{r \overline{\gtrless} 1}{\Sigma f_{ar\cdot Cos\,\theta,\ br\cdot Sin\,\theta} \times r\cdot dr\cdot d\theta},$$

wo die Werthe von r blos positiv (oder $=0$) zu nehmen sind, von 0 bis 1, — die Werthe von θ aber von 0 bis 2π, oder von $-\pi$ bis $+\pi$, oder überhaupt innerhalb vier nächst auf einander folgender Quadranten, — weil die Gleichungen 1.) und 2.) dann alle reellen Werthe von x und y liefern, welche dieselben ursprünglich haben sollen.

Man findet daher nun ohne Weiteres

$$\text{V.}\quad \Sigma f_{ax,by}\cdot dx\cdot dy = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 r\cdot f_{ar\cdot Cos\,\theta,\ br\cdot Sin\,\theta}\cdot dr\right)\cdot d\theta$$

oder auch

$$\text{VI.}\quad \Sigma f_{ax,by}\cdot dx\cdot dy = \int_0^1\left(\int_{-\pi}^{\pi} r\cdot f_{ar\cdot Cos\,\theta,\ br\cdot Sin\,\theta}\cdot d\theta\right)\cdot dr;$$

und nach diesen Formeln wird sich dasmal die verlangte Summe am leichtesten berechnen lassen, weil sowohl die Grenzen des Integrals nach r, wie die des Integrals nach θ, beide konstant sind, wodurch die zweite Integration in der Regel bedeutend erleichtert wird.

Werden aber diese Resultate noch mit ab multiplicirt, so hat man jedesmal auch die in der vierten Aufgabe des §. 19. verlangte Summe.

§. 23.

Wir wollen jetzt alle die vom §. 10. bis zum §. 22. auf rein analytischem Wege gewonnenen Resultate (und den Anfänger gerade in diesen rein analytischen Untersuchungen zu üben, ist der Zweck dieser Blätter) auch noch auf geometrischem Wege veranschaulichen.

So lange nämlich x und y alle stetig neben einander liegenden reellen Werthe bekommen sollen, welche einer oder mehreren Grenzbedingungen genügen, so lange kann man sich x und y als rechtwinklige Koordinaten-Werthe denken; und die Grenzbedingungen geben dann die ebene Figur, deren Punkte (im Innern bis zu den Grenzlinien) zu Koordinaten-Werthen, alle die Werthe von x und y haben, welche sie in der verlangten Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ nach und nach erhalten sollen. — Ferner kann die Funktion $f_{x,y}$ irgend eine quantitative Bedeutung der durch x und y gegebenen Stelle dieser Flächenfigur haben, so daß das Produkt $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ eine entsprechende quantitative Bedeutung des an dieser Stelle liegenden unendlichkleinen Rechtecks hat, dessen Dimensionen bezüglich dx und dy sind, während dx und dy die unendlichkleinen Werthe sind, um welche x und y bezüglich, wachsend gedacht werden; so daß die ganze ebene Figur, wie sie in ihren Grenzen durch die gegebenen Grenzbedingungen bestimmt ist, mittelst unendlich vieler mit den Koordinaten-Axen OX und OY paralleler, bezüglich um dx und dy von einander abstehender Geraden, in unendlichmal unendlich-viele solcher Rechtecke zertheilt ist. Die Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$

ist nun die Summe aller auf jedes dieser Rechtecke vom Inhalte $dx \cdot dy$ kommenden, jener quantitativen Bedeutungen.

Ist z. B. $f_{x,y}$ die Dichtigkeit, also $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ die Masse eines, an der durch x und y gegebenen Stelle liegenden dieser Rechtecke (vom Inhalte $dx \cdot dy$), so drückt $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ die Masse der ganzen ebenen Figur aus (wobei die ebene Figur aus neben einander liegenden materiellen Atomen gebildet gedacht wird).

Drückt $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ das unendlichkleine Gewicht aus, womit das an der, durch x und y gegebenen Stelle, liegende Rechteckchen $dx \cdot dy$ belastet ist, so drückt $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ die Gesammtbelastung der ganzen ebenen Figur aus.

Ist $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ ein Produkt, aus der Masse des Rechteckchens $dx \cdot dy$, in die Entfernung desselben von irgend einer gegebenen Geraden (Schwerpunktsmoment), oder in das Quadrat dieser Entfernung (Trägheitsmoment) oder in eine beliebig gegebene Funktion dieser Entfernung, — so drückt die Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ die Summe aller dieser Produkte aus für die Massen aller der Rechteckchen, wie solche die ganze, mittelst der Grenzbedingungen gegebene ebene Figur erfüllen.

Nimmt man endlich $f_{x,y} = 1$, so drückt die Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ d. h. $\Sigma 1 \cdot dx \cdot dy$ die Summe der Inhalte aller dieser Rechteckchen, d. h. den Gesammt-Inhalt der gedachten ebenen Figur aus.

Wir wollen uns in dem folgenden, um etwas bestimmtes zu haben, unter $f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ allemal die Masse des Rechteckchens $dx \cdot dy$ denken, welches an der durch x und y gegebenen Stelle liegt, so daß $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ allemal die Masse der ganzen, durch die Grenzbedingungen in ihren Grenzlinien gegebenen ebenen Figur vorstellt. — Der Ausdruck für diese Masse ist also, nach den verschiedenen Umständen in Doppel-Integrale zu zerlegen, weil jedes der letztern dann durch zweimalige Anwendung des Lehrsatzes ⊙) des §. 5., oder der Formel IV. des §. 1., ausgewerthet werden kann.

Betrachten wir nun aus diesem geometrischen Gesichtspunkt den Inhalt der §§. 10–13., 15–22., so werden wir (mit einer einzigen Ausnahme) überall allen gewonnenen Resultaten eine geometrische Bedeutung unterlegen können, so daß dieselben Resultate, welche wir oben auf rein analytischem Wege gefunden haben, nun auch mit Hilfe geometrischer Betrachtung und von jenen allgemeinen Untersuchungen unabhängig, gefunden werden.

Unter den gemachten Voraussetzungen, ist die dritte Aufgabe (des §. 10.) keine andere, als: die Masse des Stückes GCDG (Fig. 4.) einer Parabel zu finden, welche durch die Gleichung $(y'-h)^2 = p(x-c)$ gegeben ist, wo c und h die Koordinaten-Werthe OH und GH des Scheitels G der Parabel, x und y' die Koordinaten-Werthe OP und $\pm PM'$ eines beliebigen Punktes M' der Grenzlinie vorstellen, während die positiv gedachte Zahl p ihr Parameter, die Grenze CD dagegen die zum Abscissen-Werth $OB = b$ gehörige Ordinatenrichtung ist. — Unter $x = OP$ und $y = \pm PM$ werden die Koordinaten-Werthe irgend eines Punktes M im Innern dieser Parabel verstanden. In der ersten Auflösung (I. §. 10.) giebt das erste Integral (nach y) die Masse des an $M'M'$ liegenden Streifens von der Breite dx, während dieser Streifen jedweder der Streifen ist, welche zwischen G und CD liegen, wenn man dem x nach und nach alle Werthe gegeben sich denkt, welche zwischen c und b liegen. Die zweite Integration (nach x) giebt dann die Summe der Massen aller dieser Streifen, d. h. die Masse des Parabelstücks GCDG.

In der zweiten Auflösung (II. des §. 10.) giebt die erste Integration (nach x) zuerst die Masse des mit der OX parallelen Streifens von der Breite dy, die andere Integration (nach y) dann die Masse des parabolischen Stücks GCDG. — Dabei ist $KD = KC = \sqrt{p(b-c)} = q$, so daß $h-q = BC$, und $h+q = BD$ ist.

§. 24.

Ist (Fig. 4.) FK der Hauptdurchmesser der Parabel und F ihr Brennpunkt, so folgt aus der Definition und aus den Eigenschaften des Brennpunktes, daß $FR = \frac{1}{2}p$, $FG = \frac{1}{4}p$ und $FM' = x-c+\frac{1}{4}p$, also auch $FD = b-c+\frac{1}{4}p$ ist. Sind nun $OP = x$ und $PM = y$ die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M im Innern der Parabel; wird dann $FM = r$ gesetzt, so ist $FM^2 = FA^2+AM^2$; aber $FA = c+\frac{1}{4}p-x$ und $AM = y-h$; also hat man

$$1) \qquad r^2 = (c+\tfrac{1}{4}p-x)^2+(y-h)^2;$$

und aus dieser Gleichung folgt wieder

$$2) \qquad x = x_r = c+\tfrac{1}{4}p \pm \sqrt{r^2-(y-h)^2}.$$

Will man nun statt der Koordinaten-Werthe $x = OP$ (Fig. 5.) und $y = PM$ des beliebigen Punktes M im Innern der Parabel, lieber die Koordinaten-Werthe $FM = r$ und $PM = y$ einführen (so daß der Punkt M geometrisch sich dadurch findet, daß man mit $FM = r$ aus F als Mittelpunkt, eine Kreislinie beschreibt, dann aber $OQ = y$ von O aus auf OY abträgt und durch Q die Parallele QM mit OX zieht, wodurch sich zwei Punkte M zugleich finden, der eine links der Ordinate RFV, der andere rechts derselben) — so darf man nur aus F als Mittelpunkt mit Radien r und $r+dr$ (wo dr auch negativ sein kann, während r nach und nach alle seine Werthe durchläuft) unendlichviele concentrische Kreise und Kreisbogen beschreiben, um das ganze Parabel-Stück GCDG in lauter concentrische Kreisringe und Ringstücke zerlegt zu haben, jedes von der Breite $\pm dr$. — Die mit OX parallelen, um dy von einander abstehenden Geraden, zerlegen dann diese Ringe und Ringstücke in lauter schiefe Parallelogramme wie MNUT *). — Das Produkt $f_{x,y} \cdot MNUT$ ist dann die Masse dieses Parallelogramms MNUT, und die Summe dieser Massentheilchen aller dieser schiefwinkligen Paral-

*) Weil die Bogen, welche die Figur MNUT begrenzen helfen, unendlichklein sind, so können sie nach Leibnitz als gerade Linien, und weil sie beide auf dem Radius FM senkrecht stehen, auch als unter sich parallel angesehen werden.

lelogramme, ist dann wiederum die Masse des ganzen Parabelstücks GCDG.

Nimmt man nun die zwischen den Parallelen MT und NU liegende Höhe $\pm dr$ *), des Parallelogramms MNUT so, daß gerade $MN = dx$ wird, so ist für den Punkt M zur Linken $dr = -MS$, dagegen für den Punkt M zur Rechten, $dr = MS$.

Der Winkel TMN ist gleich dem Winkel $180^0 - MFA$ für den Punkt M zur Linken, dagegen $= 270^0 - FMA$ für den Punkt M zur Rechten. Nun ist aber $Cos\, MFA = \frac{y}{r}$ für den Punkt M zur Linken, und $= -\frac{y}{r}$ für den Punkt M zur Rechten; folglich ist für beide Punkte

$$Cos\, TMN = -\frac{y}{r}$$

und $\quad Sin\, TMN = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \frac{c + \frac{1}{4}p - x}{r}$ für den Punkt M links und $= \frac{x - (c + \frac{1}{4}p)}{r}$ für den Punkt M rechts. Da nun $MT \cdot Sin\, TMN =$ der Höhe dy des Parallelogramms ist, wenn $MN = dx$ als Grundlinie genommen wird, so ist

$$MT = \frac{dy}{Sin\, TMN} = \frac{r \cdot dy}{c + \frac{1}{4}p - x} \text{ für den Punkt M links,}$$

$$\text{und} \quad = \frac{r \cdot dy}{x - (c + \frac{1}{4}p)} \text{ für den Punkt M rechts.}$$

Der Inhalt des Parallelogramms MTUN ist $= MT \times MS$, folglich $= \frac{r \cdot dy \cdot dr}{x - (c + \frac{1}{4}p)}$, der Punkt M mag der zur Linken oder der zur Rechten sein, weil MS im erstern Fall $= -dr$, im andern Fall $= +dr$ ist; — liegt aber der Punkt M links, so ist dr im Zähler und $x - (c + \frac{1}{4}p)$ im Nenner, zugleich negativ; und liegt der Punkt M zur Rechten, so sind dr und

---

*) Die Höhe als Länge ist nie negativ; sie ist daher durch $-dr$ ausgedrückt, so oft dr selbst negativ gedacht wird.

$x-(c+\frac{1}{4}p)$ zugleich positiv. Da nun
$x-(c+\frac{1}{4}p)=\mp\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ ist (aus 1.), so folgt, daß in dem Ausdruck

$$\frac{r\cdot dy\cdot dr}{\mp\sqrt{r^2-(y-h)^2}} \text{ für den Inhalt MTUN,}$$

die Quadratwurzel mit dr zugleich negativ genommen werden muß für den Punkt M zur Linken, beide aber positiv genommen werden müssen für den Punkt M zur Rechten. — Multiplicirt man nun diesen Inhalt, — welcher auch $=\partial x_r\cdot dr\cdot dy$ ist, in so ferne aus 1.) oder 2.) $\partial x_r=\dfrac{r}{\mp\sqrt{r^2-(y-h)^2}}$ gefunden wird, — mit der Dichtigkeit $f_{x,y}$, welche aber für den Punkt M zur Linken eine andere ist, als für den Punkt M zur Rechten, weil der Abscissen-Werth x für jeden der beiden Punkte M ein anderer ist, nämlich

$$c+\tfrac{1}{4}p-\sqrt{r^2-(y-h)^2} \text{ für den Punkt M links}$$

und $$c+\tfrac{1}{4}p+\sqrt{r^2-(y-h)^2} \text{ für den Punkt M rechts,}$$

welche daher durch $f^{I}_{(r,y)}$ für den Punkt M links, und durch $f^{II}_{(r,y)}$ für den Punkt M zur Rechten ausgedrückt sein mag, wo $f^{I}_{(r,y)}$ das vorstellt, was aus $f_{x,y}$ wird, wenn man $c+\frac{1}{4}p-\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ statt x setzt, während $f^{II}_{(r,y)}$ das bedeutet, was aus $f_{x,y}$ wird, wenn man den andern Werth $c+\frac{1}{4}p+\sqrt{r^2-(y-h)^2}$ statt x substituirt, wie solcher der andern Stelle zukommt, — multiplicirt man also den Inhalt des Parallelogramms mit der Dichtigkeit der Stelle, so findet sich die Masse des Rechteckchens

$$\text{MTUN zur Linken,} \quad = f^{I}_{(r,y)}\cdot\frac{r\cdot dr\cdot dy}{-\sqrt{r^2-(y-h)^2}}$$

$$\text{und desjenigen zur Rechten,} \quad = f^{II}_{(r,y)}\cdot\frac{r\cdot dr\cdot dy}{+\sqrt{r^2-(y-h)^2}}$$

wo im erstern Ausdruck dr negativ, im andern dagegen (wie die Figur zeigt, da dx stets positiv, der Punkt N also stets rechts von M gedacht worden ist), positiv.

Summirt man nun zuerst die Massen aller der schiefwinkligen Parallelogramme, welche in dem von OX um einen konstanten Werth von y, entfernten Streifen von der Breite dy liegen, so ist die auf diesem Streifen senkrechte FL, der kleinste, und FE der größte Radius der Kreisbogen, welche diese zu summirenden Parallelogramme links von RV bilden, während die rechts von RV in demselben Streifen liegenden Parallelogramme $MTUN$, bis zu dem mit FJ beschriebenen Bogen reichen. Bezeichnet man aber FE durch r', und FJ durch r'', so ist r' der Werth von r, welcher dem Punkte E, also dem Abscissen-Werth x' dieses Punktes entspricht, dessen Ordinaten-Werth y', $=$ dem konstant gedachten Werth y ($= PM$) ist, und welcher aus der Gleichung der Parabel $(y'-h)^2 = p(x-c)$ gefunden wird, wenn man y statt y', und x' statt x setzt. Man findet daher $x' = c + \frac{1}{p}(y-h)^2$, folglich $r' = \frac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y-h)^2$.

Ferner ist

$$r'' = FJ = \sqrt{\overline{FK}^2 + \overline{JK}^2} = +\sqrt{(b-c-\tfrac{1}{4}p)^2 + (y-h)^2}.$$

Der kleinste Werth LF von r, der zu dem konstanten Werth von y gehört, findet sich aus der Ansicht der Figur (Fig. 5.) $= y-h$, so lange L oberhalb F liegt, so lange also $y > h$ ist, — dagegen $= h-y$, so wie der Punkt L, unterhalb F liegt, d. h. auf der unteren Seite des Hauptdurchmessers GK, nämlich in L_1.

Man findet daher die Masse des Streifens (von der Breite dy) von E bis L, oberhalb des Hauptdurchmessers, d. h. so lange $y \overline{\overline{>}} h$ ist

$$= dy \cdot \int_{y-h}^{r'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dr,$$

so lange aber $y \overline{\overline{<}} h$ ist, d. h. unterhalb des Hauptdurchmessers

$$= dy \cdot \int_{h-y}^{r'} f^{\mathrm{I}}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dr,$$

wo wir jedesmal die Grenzen der Integrale (nach §. 2. V.) umgekehrt haben, um dr und ∂x_r positiv nehmen zu können. — Wir finden daher die Masse des Parabelstücks GRVG

$$=\int_{h}^{h+\frac{1}{2}p}\left(\int_{y-h}^{r'} f^{I}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy+\int_{h-\frac{1}{2}p}^{h}\left(\int_{h-y}^{r'} f^{I}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy,$$

und dies ist der Ausdruck A.) im §. 12.

Rechts von RV ist die Masse des Streifens von L bis J, oberhalb des Hauptdurchmessers,

$$= dy\cdot\int_{y-h}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr,\quad \text{so lange}\quad y>h,$$

aber unterhalb des Hauptdurchmessers

$$= dy\cdot\int_{h-y}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr,\quad \text{so lange}\quad y<h \quad \text{ist.}$$

Diese Streifen reichen aber nur bis $R\alpha$ und $V\beta$, so daß die Werthe von y nur von $h-\frac{1}{2}p$ bis $h+\frac{1}{2}p$ hingehen. Die Summe der Massen aller dieser Streifen giebt die Masse des Rechtecks $RV\alpha\beta$, und diese findet sich also

$$=\int_{h}^{h+\frac{1}{2}p}\left(\int_{y-h}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy+\int_{h-\frac{1}{2}p}^{h}\left(\int_{h-y}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy,$$

und dies ist der Ausdruck B.) des §. 12.

Oberhalb $R\alpha$, und unterhalb $V\beta$, gehen die Streifen, welche mit dem Hauptdurchmesser parallel laufen (und die Breite dy haben) nur von der Kurve bis zur Geraden CD; ihre Masse ist daher bezüglich

$$= dy\cdot\int_{r'}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr.$$

Diese Streifen liegen bezüglich zwischen $h+\frac{1}{2}p$ und $h+q$, und zwischen $h-q$ und $h-\frac{1}{2}p$. — Die Massen der beiden Theile $DR\alpha D$ und $CV\beta C$ sind daher bezüglich

$$=\int_{h+\frac{1}{2}p}^{h+q}\left(\int_{r'}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy$$

und

$$=\int_{h-q}^{h-\frac{1}{2}p}\left(\int_{r'}^{r''} f^{II}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy;$$

und die Summe dieser beiden Doppel-Integrale giebt den Ausdruck C.) im §. 12.

Die ganze Summe Σ, d. h. die Masse des ganzen Parabelstücks GCDG wird daher nun genau eben so gefunden, wie solche auch in II. des §. 12. auf rein analytischem Wege gefunden worden ist.

Liegt aber CD links von RFV, d. h. ist $b < c + \frac{1}{4}p$, so fällt der Punkt M zur Rechten ganz aus, während auch nicht mehr FL, oder FL_1, d. h. $y-h$ oder $h-y$, der kleinste Werth von r ist, sondern FJ oder r'', indem natürlich nun auch J links von FL liegt. Daher fallen jetzt nicht nur alle Doppel-Integrale fort, in denen f^{II} vorkommt, sondern es gehen nun auch in den beiden erstern Doppel-Integralen die beiden unteren Grenzen $y-h$ und $h-y$ in eine und dieselbe r'' über, weshalb nun die Masse des (jetzigen) ganzen Parabelstücks GCDG durch ein einziges Doppel-Integral sich ausdrücken läßt, nämlich durch

$$\int_{h-q}^{h+q}\left(\int_{r''}^{r'} f^{I}\cdot\partial x_r\cdot dr\right)\cdot dy,$$

genau so wie in I. des §. 12.

Summiren wir aber zuerst die Massen der Parallelogramme MTUN für einen und denselben Werth von r, so erhalten wir die Masse der ringförmigen Streifen von der Breite $\pm dr$ zuerst, und müssen die Massen dieser Streifen (für alle Werthe von r) wieder summiren, um die Masse der ganzen Parabel GCDG auf's Neue zu haben.

Liegt nun wieder CD rechts von RFV, d. h. ist $b > c + \frac{1}{4}p$, so erhält man wieder zu jedem Paar Werthe von y und r, so lange $r < FR$, d. h. $< \frac{1}{2}p$ ist, zwei Punkte M, während der zur Linken ausfällt, wenn $r \overline{\overline{>}} FR$, d. h. $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ ist. — Beschreiben wir aber mit $FR = \frac{1}{2}p$ einen Halbkreis, so wird solcher den Punkt K rechts lassen, wie in Fig. 6., oder links, wie in Fig. 7., während auf der andern Seite von RFV ein zweiter Halbkreis, mit $FG = \frac{1}{2}FR = \frac{1}{4}p$ als Radius beschrieben, den Raum zur Linken in beiden Fällen in 3 Theile zerlegt, von denen die beiden andern, den ersteren Halbkreis und die Parabel zur Grenze haben.

Betrachten wir diese drei Theile (zur Linken von RFV in Fig. 7., oder) oberhalb RFV in Fig. 6. zuerst. Ein halber Ring vom Radius $Fg = r$ und von der Breite dr, gehört zu allen Werthen von y, welche zwischen $F_1g' = h-r$ und $F_1g = h+r$ liegen; seine Masse ist daher

$$= dr \cdot \int_{h-r}^{h+r} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy,$$

wenn ∂x_r und dr positiv gedacht werden. Die Masse des Halbkreises g_1Gg_2 ist daher der Summe der Massen aller dieser Ringstücke gleich, von $r = 0$ an bis zu $r = \frac{1}{4}p$ hin, d. h.

$$\text{A.)} \cdots \quad = \int_0^{\frac{1}{4}p} \left(\int_{h-r}^{h+r} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Ein Ringstück kl vom Radius $Fl = r$ und der Breite dr, gehört zu allen Werthen von y, welche zwischen Ek und $F_1l = h \pm r$ liegen, je nachdem l (in Fig. 6.) $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\\text{links}\end{matrix}\right\}$ des Durchmessers GK liegt; während Ek der Werth von y' ist, welcher aus der Gleichung der Parabel

$$(y'-h)^2 = p(x-c)$$

und aus der Gleichung zwischen x und r, nämlich

$$r^2 = (c + \tfrac{1}{4}p - x)^2 + (y-h)^2$$

hervorgeht, wenn in letzterer der Werth y' statt y gesetzt worden ist. Aus diesen beiden Gleichungen findet sich aber

$$r^2 = \left[\tfrac{1}{4}p - \frac{1}{p}(y'-h)^2\right]^2 + (y'-h)^2 = \left[\tfrac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y'-h)^2\right]^2$$

d. h. $\quad r = \frac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y'-h)^2 \quad$ d. h. $\quad Ek = y' = h \pm \sqrt{p(r - \frac{1}{4}p)},$

je nachdem k $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\\text{links}\end{matrix}\right\}$ des Durchmessers GK liegt.

Die Masse dieses Ringstückes kl ist daher

$$= dr \cdot \int_{h-r}^{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy, \text{ wenn kl \textit{links} von GK}$$

und

$$= dr \cdot \int_{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h+r} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy, \text{ wenn kl \textit{rechts} von GK}$$

liegt, während ∂x_r und dr positiv gedacht sind.

Die Massen der Theile Gg_2V und Gg_1R, sind daher nun bezüglich

$$\text{B.)} \cdots \quad = \int_{\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{2}p} \left(\int_{h-r}^{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr$$

und

$$\text{C.)} \cdots \quad = \int_{\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{2}p} \left(\int_{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h+r} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr;$$

und dies bleibt für die Fig. 7. eben so gültig wie für die Fig. 6.

Auf der andern Seite von RFV dagegen muß man nun die beiden, in den Fig. 6. und 7. ausgesprochenen Fälle genau von einander unterscheiden, obgleich in beiden $b > c + \frac{1}{4}p$ ist. Die Fläche RFVCKD zerspaltet sich in der Fig. 6., wo $b > c + \frac{3}{4}p$ ist, (also im **zweiten** Unterfall des §. 13.) einmal in den Halbkreis, dessen Radius $FR = Fm = FV = \frac{1}{2}p$ ist, dann in das Ringstück von der Breite mK, zuletzt aber in die beiden Theile, welche von der Parabel begrenzt sind und von dem Halbkreise, dessen Radius $FK = b - c - \frac{1}{4}p$ ist.

Die Masse des Halbkreises findet sich nun, dem vorangegangenen analog,

$$\text{D.)} \cdots \quad = \int_{0}^{\frac{1}{2}p} \left(\int_{h-r}^{h+r} f^{II}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr;$$

die Masse des darauf folgenden Ringstückes ist dagegen

$$\text{E.)} \cdots \quad = \int_{\frac{1}{2}p}^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f^{II}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr,$$

weil zu jedem konstanten Werth $Fn = Fn' = Fn_1$ von r, die Grenzwerthe von y, der Parabel angehören, also aus der Gleichung $(y'-h)^2 = p(r-\frac{1}{4}p)$ der Parabel, als Werthe von y' hervorgehen *).

Was nun die Ringstücke cd und cd betrifft, welche von der Breite dr sind, und deren Radius r einen beliebigen konstanten Werth hat, so sind sie einerseits begrenzt durch die Parabel, also durch die Werthe von y, $= y'$, wie letztere aus der Gleichung der Parabel

$$(y'-h)^2 = p(r-\tfrac{1}{4}p),$$

gefunden werden; — andererseits aber durch die gerade Linie CD, so daß die zugehörigen Grenzwerthe von y, jetzt $Bd = BK \pm Kd$ sind, je nachdem d $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ von K liegt, während

$$Kd = \sqrt{Fd^2-Fk^2} = \sqrt{r^2-(b-c-\tfrac{1}{4}p)^2} = \sqrt{r^2-r_2^2}$$

ist, wenn

$$b-c-\tfrac{1}{4}p = r_2, \quad \text{wie} \quad b-c+\tfrac{1}{4}p = r_1$$

gesetzt wird. — Die Massen dieser Ringstücke cd sind daher

$$= dr \cdot \int_{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h-\sqrt{r^2-r_2^2}} f''_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \quad \text{für das links liegende}$$

und

$$= dr \cdot \int_{h+\sqrt{r^2-r_2^2}}^{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f''_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \quad \text{für das rechts liegende.}$$

Diese Ringstücke gehen vom Bogen W_1K bis zu C hin und vom Bogen WK bis zu D hin, d. h. von $r = b-c-\frac{1}{4}p = r_2$ an bis zu $r = FC = FD = b-c+\frac{1}{4}p = r_1$ hin. Die Massen der beiden Flächenstücke W_1KC und WKD sind daher bezüglich

$$F.) \cdots \quad = \int_{r_2}^{r_1} \left(\int_{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h-\sqrt{r^2-r_2^2}} f''_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr$$

---

*) Es ist nämlich $(y'-h)^2 = p(x-c)$ die Gleichung der Parabel. Weil aber für jeden Punkt der parabolischen Grenzlinie, $r = x-c+\frac{1}{4}p$, also $x-c = r-\frac{1}{4}p$ ist, so geht diese Gleichung der Parabel sogleich in die obige über und viel schneller, als wir sie kurz vorher schon einmal gefunden haben.

und $G.)\cdots = \int_{r_2}^{r_1}\left(\int_{h+\sqrt{r^2-r_2^2}}^{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f''_{(r,y)}\cdot\partial x_r\cdot dy\right)\cdot dr.$

Und da die Masse des ganzen Parabelstücks GCDG aus den Massen der 7 Theile (A.—G.) besteht, in welche die stetige Veränderung von r das ganze Flächenstück zerlegt hat (mit Rücksicht auf die Möglichkeit, die Grenzwerthe von y auszudrücken), so finden wir dasselbe Resultat, welches (im §. 13. III.) für denselben Fall, wo $b > c + \frac{3}{4}p$ ist, auf rein analytischem Wege gefunden worden ist.

Gehen wir nun zur Fig. 7., wo $b > c + \frac{1}{4}p$ aber $< c + \frac{3}{4}p$ ist und welche dem ersten Unterfall des §. 13. entspricht.

In diesem Falle sondert man erst einen Halbkreis fKf ab, dessen Radius $FK = b - c - \frac{1}{4}p = r_2$ ist; seine Masse findet sich offenbar ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$H.)\cdots \int_0^{r_2}\left(\int_{h-r}^{h+r} f''_{(r,y)}\cdot\partial x_r\cdot dy\right)\cdot dr.$$

Hierauf folgen die beiden concentrischen Ringstücke VK_2Kf und RK_1Kf, deren Massen offenbar bezüglich durch

$$J.)\cdots \int_{r_2}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{h-r}^{h-\sqrt{r^2-r_2^2}} f''_{(r,y)}\cdot\partial x_r\cdot dy\right)\cdot dr$$

und

$$K.)\cdots \int_{r_2}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{h+\sqrt{r^2-r_2^2}}^{h+r} f''_{(r,y)}\cdot\partial x_r\cdot dy\right)\cdot dr$$

ausgedrückt sein müssen; weil F_1V und HK_2 die Grenzwerthe von y für das untere Stück VK_2Kf, dagegen HK_1 und F_1R die Grenzwerthe von y für das obere Stück RK_1Kf sind.

In den beiden noch übrigen Stücken der paraboloidischen Fläche GCDG geht r, von $\frac{1}{2}p$ an bis zu $b - c + \frac{1}{4}p$ oder r_1 (nämlich FC oder FD) hin, und für jeden Werth von r, geht y von dem Punkt A an bis zu dem Punkt B hin, oder (unten) von dem Punkte B an bis zu dem Punkte A hin, während die Ordinaten-Werthe der Punkte B der Parabel,

$= h \pm \sqrt{p(r - \frac{1}{4}p)}$ sind, je nachdem B $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ liegt,

und die Ordinaten-Werthe der Punkte A,

$= h \pm \sqrt{r^2 - r_2^2}$ sind, je nachdem A $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ liegt.

Diese beiden letztern Theile von GCDG sind daher offenbar ausgedrückt durch die Doppel-Integrale

$$\text{L.)}\cdots \int_{\frac{1}{4}p}^{r_1}\left(\int_{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h-\sqrt{r^2-r_2^2}} f^{II}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right.$$
$$\left. + \int_{h+\sqrt{r^2-r_2^2}}^{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f^{II}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy\right) \cdot dr.$$

Man findet daher jetzt die Masse des ganzen Parabelstückes GCDG, wenn man die in A., B., C., H., J., K. und L. gefundenen Massen der jetzigen acht einzelnen Theile addirt. — Und dies giebt für $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ genau dasselbe, was wir auch im §. 13. I. für denselben Fall auf rein analytischem Wege gefunden haben.

In der Fig. 8. endlich ist $GK = b - c < \frac{1}{4}p$, welches letztere $= FG$ ist. Der kleinste Werth r_3 von r, ist jetzt $= FK = \frac{1}{4}p - (b - c)$; der größte dagegen $= FD = b - c + \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}p + b - c = r_1$. Die Masse des Theiles (des Segments) Ggg′ besteht aus der Masse aller Ringstücke EEE von der Breite dr und vom Radius FE. Die zu diesem Radius $FE = r$ gehörigen Grenzwerthe $\mp KE$ von $y - h$ sind daher ausgedrückt durch $\mp\sqrt{FE^2 - FK^2} = \mp\sqrt{r^2 - r_3^2}$, wenn $r_3 = \frac{1}{4}p - (b - c)$ gedacht wird. Die Masse dieses Ringstückes EEE ist daher

$$= dr \cdot \int_{h-\sqrt{r^2-r_3}}^{h+\sqrt{r^2-r_3^2}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy$$

und deshalb ist die Masse des Segments Ggg

$$\text{M.)}\cdots = \int_{r_3}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{h-\sqrt{r^2-r_3^2}}^{h+\sqrt{r^2-r_3^2}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy\right) \cdot dr.$$

Die beiden andern Räume GgD und Gg′C haben den Kreis und die Parabel zur Grenze. Jedes Ringstück cc von der Breite dr, hat daher zu Grenzwerthen von y, einen der beiden Werthe $h \mp \sqrt{r^2 - r_3^2}$ als Ordinate des Kreises und einen der beiden Werthe $h \mp \sqrt{p(r - \frac{1}{4}p)}$ als Ordinate der Parabel. Die Masse eines solchen Ringstücks cc ist daher

$$= dr \cdot \int_{h-\sqrt{r^2-r_3^2}}^{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy$$

oder

$$= dr \cdot \int_{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h-\sqrt{r^2-r_3^2}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy,$$

je nachdem das Ringstück cc links oder rechts liegt. Die Massen der beiden Theile Gg′C und GgD sind daher bezüglich

N.)... $$= \int_{\frac{1}{4}p}^{r_1} \left(\int_{h-\sqrt{r^2-r_3^2}}^{h-\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr$$

und

P.)... $$= \int_{\frac{1}{4}p}^{r_1} \left(\int_{h+\sqrt{p(r-\frac{1}{4}p)}}^{h+\sqrt{r^2-r_3^2}} f^{I}_{(r,y)} \cdot \partial x_r \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Und die Summe dieser drei Theile L., M. und N., ist nun die gesuchte Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$, d. h. die gesuchte Masse des ganzen Parabelstücks GCDG.

Gerade dasselbe Resultat haben wir auch im §. 13. I. auf rein analytischem Wege gefunden.

§. 25.

Suchen wir jetzt noch die Masse derselben durch die Gleichung

1) $$(y' - h)^2 = p(x - c)$$

gegebenen Parabel und zwar des Stückes von $x = c = OH$ an bis $x = b = OB$ (Fig. 9.) hin, d. h. des Stückes GCDG; — führen wir aber statt der rechtwinkligen Koordinaten x und y eines jeden beliebigen Punktes M im Innern (oder an der Grenze), jetzt lieber die Polar-Koordinaten $r = FM$ und

$\theta = W.\ X'FM$ ein, wo dieser Winkel im Bogen ausgedrückt sein mag, für den Radius 1 genommen, während F der Brennpunkt, also $GF = \frac{1}{4}p$ und $FR = FV = \frac{1}{2}p$ ist.

Man hat nun (aus der Figur):

$$2)\quad x - c - \tfrac{1}{4}p = r \cdot Cos\,\theta \quad \text{und} \quad 3)\quad y - h = r \cdot Sin\,\theta.$$

Setzt man die hieraus für x und y hervorgehenden Werthe statt x und y' in die Gleichung 1.) der Parabel, so erhält man, wenn man noch $r' = FM'$ statt r schreibt (weil jetzt der Punkt M in den Grenzpunkt M' übergegangen ist), die neue (Polar-) Gleichung der Parabel, nämlich

$$4)\qquad r' = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\theta},$$

welche sich übrigens aus der Eigenschaft der Parabel, nach welcher allemal $FM' = GA + \frac{1}{4}p$, d. h. $r' = x - c + \frac{1}{4}p$ ist, noch leichter ergiebt, weil diese sogleich zu $r' = r' \cdot Cos\,\theta + \frac{1}{2}p$ führt.

Läßt man nun den Winkel θ, von 0 an bis zu 2π hin um $d\theta$ wachsen, und r um dr, — so wird das Parabelstück GCD durch die unendlichvielen von F ausgehenden Strahlen (wie FM, FN, 2c., welche den Winkel $MFN = d\theta$ mit einander machen) nnd durch die unendlichvielen Kreise und Kreisstücke, welche alle den gemeinschaftlichen Mittelpnnkt F haben, und deren Radien $FM = r$ und $FU = r + dr$, um dr von einander verschieden sind, — in lauter Viereckchen zerlegt wie MNUT, welche von zwei Kreisbogen und von zwei Strahlen begrenzt werden, während, weil alles unendlichklein gedacht ist, diese Kreisbogen (nach Leibnitz) als gerade und unter sich parallel gedacht werden können, so daß das Viereckchen MNUT demnach als ein Rechteck angesehen werden kann, dessen eine Seite $MN = r \cdot d\theta$, dessen andere Seite aber $MU = dr$, — dessen Inhalt also $= r \cdot dr \cdot d\theta$ *), und dessen Masse

---

*) Gründlicher findet sich der Inhalt dieses Viereckchens als die Differenz der beiden Kreissektoren TUF und NMF, also

$$= \tfrac{1}{2}(r + dr)^2 \cdot d\theta - \tfrac{1}{2}r^2 \cdot d\theta = r \cdot dr \cdot d\theta + \tfrac{1}{2}dr^2 \cdot d\theta.$$

$$= f_{x,y} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

sein wird; wenn $f_{(r,\theta)}$ das bedeutet, was aus $f_{x,y}$ wird, wenn man bezüglich $c + \frac{1}{4}p - r \cdot Cos\,\theta$ und $r \cdot Sin\,\theta$, statt x und y, setzt.

Finden wir nun zuerst die Massen der einzelnen, von zwei auf einander folgenden Strahlen gebildeten Zwickel, welche entweder bis zur Parabel DGC oder bis zur Geraden CD reichen, je nachdem, — wenn

5) $\quad$ W. DFK = W. CFK = θ'

gesetzt wird, — $\theta \begin{matrix} > \theta' \\ < 2\pi - \theta' \end{matrix}$, oder $\theta \begin{matrix} > 0 \\ < \theta' \end{matrix}$ und $\begin{matrix} > 2\pi - \theta' \\ < 2\pi \end{matrix}$ ist. — Im erstern Fall, wenn θ zwischen θ' und π, oder zwischen π und $2\pi - \theta'$ liegt, müssen die Werthe von r, von $r = 0$ an bis zu $r = FM' = r' = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\theta}$ genommen werden; im andern Fall dagegen, wo θ entweder zwischen 0 und θ', oder zwischen $2\pi - \theta'$ und 2π liegt, gehen die Zwickel bis zur Geraden CD, und für sie ist der Grenzwerth r'' von r, $= FM_1 = \frac{FK}{Cos\,\theta} = \frac{b - c - \frac{1}{4}p}{Cos\,\theta}$.

Die Masse des erstern Zwickels ist daher

$$= d\theta \cdot \int_0^{r'} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr;$$

die Masse des andern dagegen

$$= d\theta \cdot \int_0^{r''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr.$$

Die Masse des Parabelstücks FDGCF ist daher

$$\text{A.)} \cdots \qquad = \int_{\theta'}^{2\pi - \theta'} \left(\int_0^{r'} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\theta;$$

die Masse des Dreiecks FDK dagegen

$$\text{B.)} \cdots \qquad = \int_0^{\theta'} \left(\int_0^{r''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\theta;$$

Weil aber $\frac{1}{2}dr^2 \cdot d_\theta$ unendlichklein von der höhern (dritten) Ordnung ist, so muß es nach den Principien der Differential-Rechnung außer Acht gelassen werden.

so wie die Masse des anderen Dreiecks FCK

$$\text{C.)} \quad = \int_{2\pi-\theta'}^{2\pi} \left(\int_0^{r''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\theta$$
$$= \int_{-\theta'}^{0} \left(\int_0^{r_1} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\theta \text{ *)}.$$

Faßt man die beiden letztern Theile zusammen, so erhält man (nach §. 2. VI.) für die Masse des gleichschenkligen Dreiecks FCDF, das einzige Doppel-Integral

$$\text{D.)} \quad \int_{-\theta'}^{\theta'} \left(\int_0^{r''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\theta.$$

Und die Masse des ganzen Parabelstücks GCDG ist daher jetzt = A.+D.; und gerade so haben wir die Summe $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$ für diesen Fall, wo $b > c + \frac{1}{4}p$ ist, mit Hilfe des allgemeinen Hauptsatzes des §. 14. im §. 15. II. auf rein analytischem Wege gefunden, wie man sofort erkennt, wenn man bedenkt, daß

$$\operatorname{Cos} \mathrm{DFK} = \frac{\mathrm{FK}}{\mathrm{FD}} = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{b-c+\frac{1}{4}p}$$

ist, und daß wir hier unter θ' diesen Winkel DFK, also den spitzen Winkel verstanden haben, der durch die Gleichung $\operatorname{Cos} \theta' = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{b-c+\frac{1}{4}p}$ gegeben ist, gerade so wie dort.

Tritt aber der Fall der Fig. 10. ein, wo $b-c = \mathrm{GK} < \mathrm{GF}$, d. h. wo $b < c + \frac{1}{4}p$ ist, so wird zuerst die Masse des zwischen M' und N liegenden Zwickels gefunden

$$= d\theta \cdot \int_{r''}^{r'} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr,$$

wenn $r'' = \mathrm{FN} = \frac{\mathrm{FK}}{\operatorname{Cos} \mathrm{NFK}} = \frac{\mathrm{FK}}{-\operatorname{Cos} \theta} = \frac{\frac{1}{4}p-(b-c)}{-\operatorname{Cos} \theta} = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{\operatorname{Cos} \theta}$

---

*) Da nämlich x und y in r und θ ausgedrückt (nach den Gleichungen 2. und 3.) sich nicht ändern, wenn man $2\pi + \theta$ statt θ schreibt, so ändert sich auch dadurch $f_{(r,\theta)}$ $(= f_{x,y})$ nicht, eben so wenig als sich $d\theta$ dadurch ändert. Dadurch aber werden die Grenzen dieses neuen θ um 2π vermindert, so daß sie jetzt $-\theta'$ und 0 werden, gegen die Grenzen des alten θ, welche $2\pi - \theta'$ und 2π gewesen sind.

genommen wird. Die Werthe von θ, gehen von $\theta' = \text{DFX}'$ an, bis zu $2\pi - \text{CFX}' = 2\pi - \text{DFX}' = 2\pi - \theta'$ hin, wo $Cos\,\theta' = -\frac{\text{FK}}{\text{FD}} = -\frac{\frac{1}{4}p-(b-c)}{b-c+\frac{1}{4}p} = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{b-c+\frac{1}{4}p}$ gefunden wird, so daß θ' durch diese Gleichung gegeben ist. Daher ist die Masse des Parabelstücks GDCG jetzt

$$=\int_{\theta'}^{2\pi-\theta'}\left(\int_{r''}^{r'} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot dr\right)\cdot d\theta;$$

d. h. gerade so wie die Summe $\Sigma f\cdot dx\cdot dy$ für diesen Fall im §. 15. I. auf rein analytischem Wege gefunden worden ist.

§. 26.

Will man aber zuerst die Masse eines Ringes oder eines Ringstückes finden, welches mit dem konstanten Radius r beschrieben ist und die Breite dr hat, so muß man die Fälle der Fig. 11., 12. und 13. von einander unterscheiden.

In der Fig. 11. ist $\text{FK} = b-c-\frac{1}{4}p > \frac{1}{4}p$ d. h. $b-c > \frac{1}{2}p$ gedacht. — In diesem Falle läßt sich das Parabelstück GDCG zerlegen,

α) in den Kreis, dessen Radius $\text{FG} = \frac{1}{4}p$ und dessen Masse offenbar

$$\text{A.)} \cdots \qquad =\int_{0}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{0}^{2\pi} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr$$

ist;

β) in das Ringstück zwischen diesem Kreise und dem mit $\text{FK} = b-c-\frac{1}{4}p$ aus F beschriebenem Kreise; endlich

γ) in die beiden Theile kKD und kKC.

Denkt man sich in Bezug auf den Theil β), mit einem konstanten Radius $\text{Fg} = r$ einen Kreisbogen beschrieben, und dann das an selbigem liegende Ringstück gg′g″ von der Breite dr, — so besteht solches aus einer oberhalb GK liegenden Hälfte, für welche θ alle Werthe zwischen 0 und $\text{KFg} = \theta''$ hat, wo $Cos\,\theta'' = -\frac{\text{Fa}}{\text{Fg}} = -\frac{\text{Fa}}{r}$ ist, so daß man wegen der Eigenschaft der Parabel, nach welcher $Fg = Ga + \frac{1}{4}p$ ist, $Ga = r - \frac{1}{4}p$, also $Fa = \frac{1}{2}p - r$ und deshalb

$$Cos\,\theta'' = \frac{r - \frac{1}{2}p}{r} = 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r}$$

hat. Dieses Ringstück gg' von der Breite dr, hat daher die Masse

$$dr \cdot \int_0^{\theta''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta.$$

Die andere (untere) Hälfte $g'g''$ des ganzen Ringstücks wird man finden, wenn man θ, von $2\pi - KFg''$ d. h. von $2\pi - \theta''$ bis 2π, oder (was den kurz vorher mitgetheilten Betrachtungen gemäß, auf dasselbe herauskommt) von $-\theta''$ bis 0 nimmt, so daß der Ausdruck für diese Masse auch so:

$$dr \cdot \int_{-\theta''}^{0} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta$$

sein kann. Das ganze Ringstück $gg'g''$ von der Breite dr, hat also die Masse $dr \cdot \int_{-\theta''}^{\theta''} f_{(r,\theta)} r \cdot d\theta$. — Deshalb ist nun die Masse des ganzen Ringstücks GkKkG ausgedrückt durch das Doppel-Integral

$$B.) \cdots \quad \int_{\frac{1}{4}p}^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_{-\theta''}^{\theta''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr.$$

Es bleiben nun noch zu bestimmen übrig die Massen der beiden Theile KkD und KkC. — Ein Ringstück mn von der Breite dr, grenzt in m an die Parabel, in n an die Gerade CD. Die Werthe von θ, gehen für diesen Werth von r, von $\theta = KFn = \theta_1$ bis $\theta = KFm$, während

$$Cos\,\theta_1 = Cos\,KFn = \frac{FK}{Fn} = \frac{b - c - \frac{1}{4}p}{r}$$

und

$$Cos\,KFm = \frac{Fq}{Fm} = \frac{Fq}{r} = \frac{Gq - \frac{1}{4}p}{r} = \frac{r - \frac{1}{2}p}{r} = Cos\,\theta''$$

gefunden wird, in so ferne, nach der Eigenschaft der Parabel, $Gq + \frac{1}{4}p = r$ ist, so daß KFm den obigen Werth θ'' hat,

d. h. dieselbe bereits oben gefundene Funktion von r ist; — dabei kann r alle Werthe haben von $r = FK$ an bis zu $r = FD = \sqrt{FK^2 + KD^2}$ hin, während $KD = KC$ der positive Werth von $y-h$ ist, welcher aus der Gleichung der Parabel

$$(y-h)^2 = p(x-c)$$

für $x-c = GK = b-c$ hervorgeht, so daß dieser größte Werth von r, $= b-c+\frac{1}{4}p$ gefunden würde, wenn er nicht früher schon aus der Eigenschaft des Brennpunktes der Parabel eben so gefunden worden wäre. — Die Masse des Ringstücks mn von der Breite dr, ist daher $= dr \cdot \int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta$, und die Masse des Stückes KkD ist deshalb ausgedrückt durch

$$\text{C.)} \cdots \quad \int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p} \left(\int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr.$$

Die Masse des unteren Stückes KkC findet sich nun, da für einerlei r, W. $KFm' = 2\pi - \theta''$ und W. $KFn' = 2\pi - \theta_1$ wird, auf demselben Wege

$$\text{D.)} \cdots \quad = \int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p} \left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr,$$

weil man hier, wie oben bereits gezeigt worden, statt der Grenzen $2\pi - \theta''$ und $2\pi - \theta_1$, die um 2π verminderten Grenzen $-\theta''$ und $-\theta_1$ setzen kann.

Die Summe A.+B.+C.+D. drückt nun die Masse des ganzen Parabelstücks GCDG aus.

Die im §. 16. rein analytisch gelöste Aufgabe fällt mit der hier gelösten geometrischen Aufgabe genau zusammen; man wird aber bei angestellter Vergleichung finden, daß auch die Endresultate genau mit einander übereinstimmen, nämlich das hiesige Resultat für den Fall, daß $b-c > \frac{1}{2}p$ ist, mit §. 16. I. für denselben Fall.

Betrachten wir jetzt den andern Fall, wo $b-c < \frac{1}{2}p$, aber noch $> \frac{1}{4}p$ vorausgesetzt wird und der in der Fig. 12. vorgestellt ist, in welcher wir $FK < FG$ angenommen haben. — Jetzt wird der mit FK beschriebene Kreisbogen ein vollständiger Kreis, dessen Masse offenbar

$$\text{F.)} \cdots \quad = \int_0^{b-c-\frac{1}{4}p} \left(\int_0^{2\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr$$

ist. Zieht man nun einen zweiten Kreisbogen gGg mit dem Radius $FG = \frac{1}{4}p$, so erhält man ein von diesen beiden Kreisen begrenztes Flächenstück, in welchem für einen bestimmten Werth Fk von r, der Werth von θ, von $KFk = \theta_1$ bis zu $\theta = 2\pi - \theta_1$ fortgeht, so daß die Masse dieses Flächenstückes offenbar

$$\text{G.)} \cdots \quad = \int_{b-c-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p} \left(\int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr$$

gefunden wird, während θ_1 selbst, spitz und durch die Gleichung

$$Cos\,\theta_1 = \frac{FK}{Fk} = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r}$$

bestimmt ist.

Endlich bleiben noch die beiden Theile GgD und GgC zu bestimmen übrig. — Für irgend einen Werth $Fn = Fm$ von r, geht θ von $KFn = \theta_1$ bis $KFm = \theta''$, während θ'' und θ_1 genau die vorher durch dieselben Buchstaben bezeichneten Ausdrücke (Funktionen von r) sind und wo θ_1 blos spitz, θ'' aber ebensowohl stumpf als spitz werden kann. Die Masse dieses Stückes GgD ist daher offenbar

$$\text{H.)} \cdots \quad = \int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p} \left(\int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr,$$

da r von $FG = Fg = \frac{1}{4}p$ an bis zu $FD = b-c+\frac{1}{4}p$ hin genommen werden muß.

Das untere Stück GgC hat dann offenbar, weil hier θ von $2\pi-\theta''$ an bis $2\pi-\theta_1$ hin geht, die Masse

$$\text{J.)} \cdots \quad \int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p} \left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr.$$

Die Summe F.+G.+H.+J. drückt nun die Masse des ganzen Parabelstückes GDCG aus, und dies stimmt mit §. 16. III. genau überein, wo derselbe Fall vorausgesetzt worden ist.

Betrachten wir endlich den letzten Fall, wo $GK = b-c < GF$

d. h. $<\frac{1}{4}p$, also wo $b-c<\frac{1}{4}p$ ist und welchen die Fig. 13. vorstellen mag. — Beschreibt man jetzt mit $FG=\frac{1}{4}p$ einen Kreisbogen gGg', so zerfällt das ganze Parabelstück GCDG in die drei Theile, nämlich $gGg'Kg$, GgDG und $Gg'CG$. Für ein Ringstück $m'mm''$ des Segments $gGg'Kg$, welches einem konstant gedachten Werth Fm von r, angehört, erstrecken sich die Werthe von θ für die obere Hälfte, von $\theta = X'Fm' = \theta_1$ an bis zu $\theta = 2\pi - X'Fm'' = 2\pi - \theta_1$ hin, während jeder konstante Werth von r, von $r = FK = \frac{1}{4}p-(b-c) = c+\frac{1}{4}p-b$ an bis zu $r = FG = \frac{1}{4}p$ hin sich erstrecken muß. Während daher die Masse des Ringstücks $m'mm''$ von der Breite dr,

$$= dr \cdot \int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta$$

ist, muß die Masse des ganzen Kreissegments $gGg'Kg$ offenbar durch

$$K.) \cdots \quad \int_{c+\frac{1}{4}p-b}^{\frac{1}{4}p} \left(\int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr$$

ausgedrückt sein, während θ_1 im zweiten Quadranten liegt und aus der Gleichung

$$Cos\,\theta_1 = Cos\,X'Fm' = -\frac{FK}{r} = \frac{b-c-\frac{1}{4}p}{r}$$

gefunden werden muß.

Ein Ringstück nn' des Theils GgDG, von der Breite dr gedacht, während Fn ein konstanter Werth von r ist, fängt bei der Parabel an und hört in der Geraden KD auf. Die Werthe von θ für dieses Ringstück fangen daher mit $\theta = \theta_1 = X'Fn'$ an und hören mit $\theta = X'Fn = \theta''$ auf, während θ_1 der kurz vorher gefundene Werth ist (der konstante Werth r ist jetzt ein größerer als vorher, der Winkel θ_1 deshalb ein kleinerer als vorher, aber θ_1 ist stets dieselbe Funktion von r) — und θ'' im zweiten Quadranten liegt und berechnet wird durch die Gleichung

$$Cos\,\theta'' = Cos\,X'Fn = -\frac{Fa}{r} = -\frac{\frac{1}{4}p-Ga}{r} = -\frac{\frac{1}{2}p-r}{r} = 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r},$$

in so ferne in der Parabel allemal $Ga+\frac{1}{4}p = Fn = r$ ist.

Die Masse dieses Ringstücks nn' von der Breite dr, ist daher

$$=dr\cdot\int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta.$$

Die konstanten Werthe von r liegen zwischen FG und FD, d. h. zwischen $\frac{1}{4}p$ und $b-c+\frac{1}{4}p$; folglich ist die Masse des ganzen Flächenstücks GgDG offenbar

$$\text{L.)}\cdots\quad =\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\theta_1}^{\theta''} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr.$$

Die Masse des andern Flächenstücks findet sich auf dieselbe Weise

$$=\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{2\pi-\theta''}^{2\pi-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr,$$

also auch

$$\text{M.)}\cdots\quad =\int_{\frac{1}{4}p}^{b-c+\frac{1}{4}p}\left(\int_{-\theta''}^{-\theta_1} f_{(r,\theta)}\cdot r\cdot d\theta\right)\cdot dr;$$

und da die Masse des ganzen Parabelstücks GCDG der Summe K.+L.+M. gleich ist, so findet sich hier diese Masse gerade so, wie sie für denselben Fall im §. 16. I., wo dieselbe Aufgabe rein analytisch behandelt worden ist, gefunden wurde.

Anmerkung. Legt man sich die rechtwinkligen Koordinaten-Axen bequemer, nämlich GX' und GY' mit den alten Axen OX und OY parallel, und nimmt man nun x und y vom Scheitel G aus, so ist die Gleichung der Parabel viel einfacher, nämlich

$$y'^2 = px,$$

und die Masse der Parabel ist dann, wenn $b-c=a$ gesetzt wird, ausgedrückt durch die Summe

$$\sum_{0\overline{\gtrless}x=a,\ y^2-px\overline{\gtrless}0} f_{x,y}\cdot dx\cdot dy,$$

wenn jetzt $f_{x,y}$ das bedeutet, was aus dem früheren $f_{x,y}$ wird, wenn man $c+x$ und $h+y$ bezüglich statt der (alten) x und y setzt. — Nun kann man diese Summe

$$\sum_{x\overline{\gtrless}a,\ y^2-px\overline{\gtrless}0} f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$$

nach Anleitung der §§. 10. 12. 13. 15. u. 16. auf rein analytischem Wege finden (wie solches im §. 18. ebenfalls auf rein analytischem Wege angedeutet ist), oder man kann auch geometrische Betrachtungen zu Hilfe nehmen, analog denen in den §§. 24—26. gebrauchten, um dieselbe Summe mit Zuziehung geometrischer Hilfe, zu erhalten.

§. 27.

Der vierten Aufgabe (des §. 19.) kann man folgende geometrische Bedeutung unterstellen. — Es ist gegeben eine Ellipse (Fig. 14.) durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Jede durch x und y gegebene Stelle M im Innern (oder an der Grenze) derselben hat die durch $f_{x,y}$ gegebene Dichtigkeit, so daß $f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$ die Masse des unendlichkleinen Rechteckchens $dx\cdot dy$ ausdrückt. Soll nun die Masse der ganzen Ellipse gefunden werden, so ist solche offenbar durch

$$\sum_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\overline{\lessgtr}1} f_{x,y}\cdot dx\cdot dy$$

vorgestellt, und ihre Berechnungsweise ist daher in dem §. 19. auf rein analytischem Wege bereits nachgewiesen worden. Wir wollen aber diese Masse jetzt noch mit Zuziehung geometrischer Betrachtungen auf's Neue berechnen, d. h. in bestimmten Integralen ausdrücken, welche dann nach der Formel ⊙ des §. 5. (oder §. 2. V.) ausgewerthet werden können.

Ist nämlich AEBD (Fig. 14.) die durch obige Gleichung vorgestellte Ellipse, $CP=x$, $\pm PM'=y'$, $PM=y$, ferner $CA=CB=a$ und $CD=CE=b$, — so ist die Masse des an $CP=x$ liegenden Streifens M'M' von der Breite dx, — wenn, des bequemeren Schreibens wegen,

$$PM'=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\mathfrak{X}$$

gesetzt wird, — nothwendig

$$=dx\cdot\int_{-\mathfrak{X}}^{+\mathfrak{X}} f_{x,y}\cdot dy,$$

und daher die Summe der Massen aller dieser Streifen, wie sie von A an bis B hin neben einander liegen, d. h. die Masse der ganzen Ellipse

$$=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}} f_{x,y}\cdot dy\right)\cdot dx.$$

Eben so findet sich aber die Masse des Streifens N'N, von der Breite dy, welcher an $CQ = PM = y$ anliegt, — wenn der Kürze wegen

$$QN = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} = \mathfrak{Y}$$

gesetzt wird, — ausgedrückt durch

$$dy\cdot\int_{-\mathfrak{Y}}^{\mathfrak{Y}} f_{x,y}\cdot dx;$$

und deshalb ist die Summe der Massen aller dieser Streifen, von E an bis D hin, d. h. die Masse der ganzen Ellipse wiederum

$$=\int_{-b}^{b}\left(\int_{-\mathfrak{Y}}^{\mathfrak{Y}} f_{x,y}\cdot dx\right)\cdot dy;$$

und dies sind die beiden Auflösungen des §. 19., hier aus der Betrachtung der Figur herausgeholt.

§. 28.

Der §. 20. läßt sehen, daß die vorliegende geometrische Aufgabe (aber nur auf rein analytischem Wege) auf eine andere wiederum geometrische Aufgabe zurückgeführt werden kann, in so ferne die Formel ⊙ des §. 20. erkennen läßt, daß die hier gesuchte Masse der Ellipse, das ab fache der Masse eines Kreises ist, der den Radius 1 hat, (welcher also durch die Gleichung $x^2+y'^2=1$ gegeben ist) und dessen jede, durch x und y gegebene Stelle (im Innern) eine neue, durch $f_{ax,by}$ ausgedrückte Dichtigkeit hat. Diese letztere Masse wird dann gerade so gefunden, wie so eben die Masse der Ellipse, und so ergeben sich die beiden Auflösungen I. und II. des §. 20. noch einmal.

Im §. 21. ist die Masse des Kreises AEBD (Fig. 15.), dessen Radius $CA = CB = CD = CE = 1$ ist und welcher an jeder, durch x und y gegebenen Stelle M, die durch $f_{ax, by}$ ausgedrückte Dichtigkeit hat, dadurch gefunden, daß statt der Koordinate $\pm CP = x$, die neue Koordinate $CM = r$ eingeführt worden ist, so daß der Punkt M der Kreisfläche jetzt durch CM und PM gegeben ist. Indem nun r und y, um bezüglich dr und dy wachsen, bilden sich die schiefen Parallelogramme, welche wir bereits im §. 24. betrachtet haben und deren Inhalt $= \partial x_r \cdot dy \cdot dr$ ist, wo ∂x_r und dr für den Punkt M zur Linken von CY, beide negativ, — für den Punkt M zur Rechten von CY aber, beide positiv sind, wenn man nämlich dx ein für allemal positiv voraussetzt. Man findet dann zunächst die Massen der Streifen QN′ und QN im obern Halbkreis, die zu einem konstanten y gehören, aber zu allen verschiedenen Werthen von r, von $r = CQ = y$ an bis zu $r = CN' = CN = 1$ hin. Nachher summirt man die Massen aller dieser parallelen Streifen, von $y = 0$ an bis zu $y = 1$ hin, d. h. von AB an bis zu D hin. — Dies giebt das Resultat in der zweiten Zeile der III. des §. 21., die also die Masse des obern Halbkreises ausdrückt. Die erste Zeile derselben Formel bekommt man, wenn auf ganz gleiche Weise die Masse des unteren Halbkreises berechnet wird.

In der IV. des §. 21. sind zuerst die Massen aller der schiefen Parallelogramme summirt, die den halben Kreisring zur Linken oder zur Rechten von CY, bilden, in welchen zwei Stellen M, links und rechts von CY, im Allgemeinen verschiedene Dichtigkeiten haben (so daß beide halbkreisförmige Ringe, von der Breite dr, im Allgemeinen verschiedene Massen haben werden), während dann die zweite Integration nach r, die Summe der Massen aller dieser, zu den verschiedenen, zwischen 0 und 1 liegenden Werthen von r, gehörigen Ringe, d. h. wiederum die Masse des ganzen Kreises liefert; — deren ab faches dann wiederum die im §. 23. gesuchte Masse der dortigen Ellipse ist.

Im §. 22. ist die Masse des Kreises, dessen Radius 1 ist (der also durch die Gleichung $x^2+y'^2=1$ gegeben ist und) welcher an jeder durch x und y gegebenen Stelle die Dichtigkeit $f_{ax,by}$ hat, — dadurch gefunden, daß statt x und y zwei neue Koordinaten-Werthe $\theta = XCM$ und $r = CM$ eingeführt wurden, so daß $y = r \cdot Sin\,\theta$ und $x = r \cdot Cos\,\theta$ ist, — daß man dann die Werthe von θ, um $d\theta$, — die von r, um dr wachsen ließ, und dann die Massen der Rechteckchen vom Inhalte $r \cdot dr \cdot d\theta$, wie wir solche im §. 25. betrachtet haben, entweder zuerst zu der Masse des Ringstücks, dessen Breite dr ist, an einander reiht, um dann, nach r integrirend, die Masse des Kreises, wie in VI. des §. 22., zu erhalten, — oder daß man die Massen derselben Rechteckchen (eigentlich von zwei concentrischen Kreisbogen ausgeschnittene Stücke des unendlichkleinen Winkels $d\theta$) zuerst für alle Werthe von r, von $r=0$ an bis $r=1$ hin, zu der Masse des von dem Winkel $d\theta$ gebildeten Kreis-Sektors an einander reiht, um zuletzt nach θ zu integriren und so die Masse des ganzen Kreises wie in der V. des §. 22., zu erhalten.

§. 29.

Suchen wir noch einmal die Masse der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

gegebenen Ellipse AEBD (Fig. 14.), in welcher $CA = CB = a$, $CD = CE = b$, $CP = x$, $PM = y$, $\pm PM' = y'$ ist, und welche an jeder durch x und y gegebenen Stelle die Dichtigkeit $f_{x,y}$ hat. — Es seien F und G die beiden Brennpunkte der Ellipse, so daß $\frac{CF}{CA} = e$ die Excentricität der Ellipse vorstellt. Dann hat man $CG = CF = ae = \sqrt{a^2-b^2}$, also $b^2 = a^2(1-e^2)$, und die obige Gleichung der Ellipse geht dann über in

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

Setzt man nun den Winkel $XFM = \theta$ und $FM = r$, so hat man

$$2)\quad x = -ae + r \cdot Cos\,\theta \quad \text{und} \quad 3)\quad y = r \cdot Sin\,\theta,$$

und, wenn man θ eliminirt,

$$4)\qquad (x+ae)^2 + y^2 = r^2.$$

I. Führt man nun zuerst statt der einen Koordinate x, die einzige neue Koordinate r ein, so daß der Punkt M durch $y = FH = PM$ und $r = FM$ gegeben ist, so kann man nun zuerst die Masse der, zu einem konstanten y gehörigen Streifen N'H und NH, oder der ganzen Streifen N'N, sobald $y > Fk$ genommen wird, finden, indem man sich wieder die schiefen Parallelogramme bildet, wie im §. 24., — ihren Inhalt $= \partial x_r \cdot dy \cdot dr$ findet, während ∂x_r aus der Gleichung 4.) gefunden werden muß, aus welcher man

$$x = -ae \pm \sqrt{r^2 - y^2}, \quad \text{also} \quad \partial x_r = \pm \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

erhält, — zuletzt aber die Massen dieser Parallelogramme von N' bis H (wo ∂x_r und dr beide negativ sind) und noch von H bis N (wo ∂x_r und dr beide positiv sind), oder auch von N' bis N summirt, sobald $y > FK$ genommen worden ist. — Die Summe der Massen dieser Streifen N'H, von $y = 0$ bis $y = FK = a(1-e^2)$, giebt dann die Masse des ganzen Stückes AFKA; die Summe der Massen der Streifen HN, von $y = 0$ an bis $y = FK = a(1-e^2)$, giebt die Masse des Stückes FKK'BF; die Summe der Massen der Streifen N'N (sobald $y > FK$ wird) von $y = FK$ bis zu $y = CD = b$, giebt zuletzt die Masse des Stückes KDK'K. Alle drei Resultate zu einander addirt, liefern aber die Masse der obern halben Ellipse. Wird dann die untere Hälfte der Ellipse ganz analog behandelt, so bekommt man noch die Massen der drei übrigen Theile AFL, BFLL'B und LEL'L. — Die Ausführung ist nun folgende:

Es sind FN' wie FN Werthe von r, welche zunächst in y ausgedrückt werden müssen; zu dem Ende muß man in der Gleichung 1.) der Ellipse, dieses y statt y' setzen, dann aber aus ihr und der Gleichung 4.) den Veränderlichen x eliminiren. Diese Rechnung wird etwas verwickelt, wenn man sie nicht wie folgt, ausführt.

Man eliminirt nämlich aus den gedachten beiden Gleichungen, d. h. aus

$$1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \quad \text{und} \quad 4)\quad (x+ae)^2+y^2=r^2$$

zuerst y^2 und erhält

$$r^2=(a+ex)^2 \quad \text{d. h.} \quad r=\pm(a+ex).$$

Weil aber $e<1$ und der größte absolute Werth von x, den Werth a nie übersteigt, so ist $a+ex$ stets positiv, also darf man nur

$$r=a+ex$$

nehmen, weil r nie negativ ist. Nimmt man nun hieraus $x=\frac{r-a}{e}$ und substituirt man diesen Werth von x, in die 4.), so erhält man

$$5)\qquad y^2=(1-e^2)\left(a^2-\frac{(r-a)^2}{e^2}\right)$$

als die Gleichung der Ellipse, zwischen den jetzigen Koordinaten y und r der elliptischen Grenzlinie. Sie giebt für r zwei Werthe, nämlich

$$r=a\pm\sqrt{a^2-\frac{e^2}{1-e^2}y^2},$$

wovon (für $y=FH$) der kleinere die Länge von FN', der größere dagegen die Länge von FN liefert. — Man hat daher

$$6)\qquad FN'=a-\sqrt{a^2-\frac{e^2}{1-e^2}y^2}=r'$$

$$7)\qquad FN=a+\sqrt{a^2-\frac{e^2}{1-e^2}y^2}=r'',$$

wenn

$$8)\qquad y=FH$$

genommen wird.

Bezeichnet man nun das, was aus $f_{x,y}$ hervorgeht, wenn (aus der zwischen x und r, angenommenen Gleichung 4.)

$$-ae-\sqrt{r^2-y^2} \quad \text{und} \quad -ae+\sqrt{r^2-y^2}$$

statt x gesetzt wird, bezüglich durch

$$f^{I}_{(r,y)} \quad \text{und} \quad f^{II}_{(r,y)}$$

so drückt $f^{I}_{(r,y)}$ die Dichtigkeit der Stellen aus, welche links von KFL liegen, während $f^{II}_{(r,y)}$ die Dichtigkeit der Stellen ausdrückt, welche rechts von KFL liegen; und es findet sich

die Masse des Streifens N'H, $= dy\cdot\int_y^{r'} f^{I}_{(r,y)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dr$

und die des Streifens NH, $= dy\cdot\int_y^{r''} f^{II}_{(r,y)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dr$,

wo wir im erstern Ausdruck absichtlich die Grenzen des Integrals umgekehrt haben, um dr und damit zugleich $\sqrt{r^2-y^2}$ ebenfalls *positiv* nehmen zu müssen, wie in dem andern Ausdruck.

Die Masse des Streifens N'N (sobald $y>FK$ genommen wird) findet sich dagegen

$$= dy\cdot\int_{r'}^{r''} f^{II}_{(r,y)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dr.$$

Daher ist nun die Masse des Stückes AFKA,

$$\text{A.)}\cdots \qquad = \int_0^{a(1-e^2)}\left(\int_y^{r'} f^{I}_{(r,y)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dr\right)\cdot dy;$$

dagegen die Masse des Stückes FKK'BF,

$$\text{B.)}\cdots \qquad = \int_0^{a\sqrt{1-e^2}}\left(\int_y^{r''} f^{II}_{(r,y)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dr\right)\cdot dy.$$

Die Masse des Stückes KDK'K findet sich zuletzt

$$\text{C.)}\cdots \qquad = \int_{a(1-e^2)}^{b}\left(\int_{r'}^{r''} f^{II}_{(r,y)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot dr\right)\cdot dy.$$

Für die untere Hälfte der Ellipse ist alles fast eben so, nur daß der positive Werth von r, welcher $=FJ$ ist, durch $-y$

ausgedrückt sich sieht, weil an der Stelle J, der durch y bezeichnete Koordinaten-Werth y, negativ ist, also $-y$ positiv wird. Es ist daher die Masse

des Streifens JR', $= dy \cdot \int_{-y}^{r'} f^{I}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr,$

des Streifens JR, $= dy \cdot \int_{-y}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr,$

und die des Streifens R'R (sobald $-y > FL$ d. h. $> a(1-e^2)$ genommen wird),

$$= dy \cdot \int_{r'}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr.$$

Und weil die Massen der Streifen JR' und JR, von $y = -FL$ an bis zu $y = 0$, endlich die der ganzen Streifen R'R unterhalb LL', von $y = -FE = -b$ an bis $y = -FL = -a(1-e^2)$ summirt werden müssen, so findet sich jetzt die Masse des Stückes AFLA,

$$\text{D.)} \cdots \quad = \int_{-a(1-e^2)}^{0} \left(\int_{-y}^{r'} f^{I}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy,$$

während die Masse des Stückes FLL'BF

$$\text{E.)} \cdots \quad = \int_{-a\sqrt{1-e^2}}^{0} \left(\int_{-y}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy,$$

endlich aber die Masse des Stückes LL'EL

$$\text{F.)} \cdots \quad = \int_{-b}^{-a(1-e^2)} \left(\int_{r'}^{r''} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy$$

ist.

Die Summe A.+B.+C.+D.+E.+F. dieser sechs Doppel-Integrale drückt nun die Masse der ganzen Ellipse aus. — Ueberall ist dabei $\sqrt{r^2-y^2}$ positiv zu nehmen, weil in den Integralen nach r, überall dr positiv (d. h. die untere Grenze kleiner als die obere) genommen ist.

II. Während aber noch immer statt x blos r eingeführt bleibt, kann man auch zuerst die Massen der unendlichkleinen schiefen Parallelogramme summiren, die zu einem und demselben $FM = r$ gehören, so daß man zuerst die Massen von Ringen und Ringstücken von der Breite dr findet.

Sucht man nun zuerst die Masse des Theiles RAVR (Fig. 16.), in welchem die Dichtigkeit der einzelnen Stellen durch $f^{I}_{(r,y)}$ ausgedrückt ist, so sondert sich zunächst ein Halbkreis mAnm ab, der den Radius $FA = a(1-e)$ hat, und in welchem die Ringstücke ppp vollkommene Halbkreise sind, und dann hat man noch die beiden Stücke mARm und nAVn, deren Ringstücke qq, q′q′ von der elliptischen Grenze bis zur Geraden RV reichen.

Die Masse des Halbkreises mAnm ist nun

$$\text{G.)} \cdots \quad = \int_0^{a(1-e)} \left(\int_{-a(1-e)}^{a(1-e)} f^{I}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dr;$$

die Masse des Stückes mARm ist dagegen

$$\text{H.)} \cdots \quad = \int_{a(1-e)}^{a(1-e^2)} \left(\int_{y_1}^{r} f^{I}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dr,$$

wo y_1 den positiven Werth der Funktion von r, vorstellt, welche aus der Gleichung 5.) für y hervorgeht, nämlich

$$9) \quad y_1 = + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{(r-a)^2}{e^2}};$$

die Masse des Stückes nAVn findet sich dagegen

$$\text{J.)} \cdots \quad = \int_{a(1-e)}^{a(1-e^2)} \left(\int_{-r}^{-y_1} f^{I}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dr.$$

Auf der rechten Seite von RV sondert sich zuerst der Halbkreis RSVR ab; dessen Masse ist

$$\text{K.)} \cdots \quad = \int_0^{a(1-e^2)} \left(\int_{-a(1-e^2)}^{a(1-e^2)} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dr;$$

und dann bleibt noch das Stück RBVSR, dessen Masse

$$\text{L.)} \cdots \quad = \int_{a(1-e^2)}^{a(1+e)} \left(\int_{-y_1}^{y_1} f^{II}_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dr$$

gefunden wird, wenn man y_1 aus 9.) nimmt.

Die Summe G.+H.+J.+K.+L. dieser 5 Theile ist nun wiederum die Masse der ganzen Ellipse.

III. Denken wir uns aber jetzt statt x und y, zwei neue Koordinaten-Werthe r und θ eingeführt (nämlich Fig. 17. $XFM = \theta$ und $FM = r$) mittelst der Gleichungen 2.) und 3.), nämlich

$$2)\quad x = ae + r \cdot Cos\,\theta \quad \text{und} \quad 3)\quad y = r \cdot Sin\,\theta,$$

so geht die Gleichung 1.) der Ellipse, sobald man diese Werthe von x und y in sie statt x und y' setzt, über in

$$10)\quad r' = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cdot Cos\,\theta}\ ^{*)},$$

wo θ und r' einem Punkte der elliptischen Grenze angehören.

Die von dem Wachsen von θ und r (bezüglich um $d\theta$ und dr) gebildeten unendlichkleinen Viereckchen MNUT (Fig. 17.) haben nun (nach §. 25.) den Inhalt $r \cdot dr \cdot d\theta$ und deshalb die Masse $f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$, wenn $f_{(r,\theta)}$ das bedeutet, was aus $f_{x,y}$ hervorgeht, sobald statt x und y deren Werthe aus 2.) und 3.) gesetzt werden. — Summirt man nun zuerst die Masse aller der Viereckchen MNUT, welche zu einem und demselben Werthe von r gehören, so sondert sich zuerst ein Kreis ab, der den Radius $FA = a(1-e)$ hat, und dessen Masse

$$M.)\cdots \quad = \int_0^{a(1-e)} \left(\int_0^{2\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr$$

ist. Für den übrigen Theil der Ellipse haben die Ringstücke pMq von der Breite dr, zu Grenzwerthen von θ, die Winkel XFp und 2π—XFq, während $XFp = \theta_r$ diejenige Funktion von r vorstellt, welche aus der Gleichung 10.) hervorgeht, wenn solche nach θ aufgelöst, zugleich aber r statt r' gesetzt wird,

---

*) Man erhält dies Resultat am bequemsten, wenn man aus 2.) und 3.) θ eliminirt, dadurch die Gleichung 4.) erhält, — dann aus 4.) und 1.) y eliminirt, um die Gleichung

$$r = a + ex$$

zu erhalten, — dann aber hier herein $ae + r \cdot Cos\,\theta$ statt x substituirt.

wobei θ_r, in so ferne diese Funktion unendlichvieldeutig ist, zwischen 0 und π genommen werden muß. Die Werthe von θ gehen also für diesen konstanten Werth von r, welcher $>$FA d. h. $>a(1-e)$ ist, von $-\theta_r$ bis $+\theta_r$ *).

Die Masse des anderen Theils der Ellipse ist daher

$$\text{N.)}\cdots\quad = \int_{a(1-e)}^{a(1+e)} \left(\int_{-\theta_r}^{\theta_r} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr,$$

in so ferne für diesen Theil die Werthe von r, von $FA = a(1-e)$ an bis $FB = a(1+e)$ hin gehen.

Die Summe M.+N. dieser beiden Doppel-Integrale drückt nun wieder die Masse der ganzen Ellipse aus.

IV. Summirt man dagegen zuerst die Viereckchen MNUT (Fig. 17.) die zu einem und demselben θ gehören, so erhält man die Masse des Sektorchens vom Winkel $d\theta$,

$$= d\theta \cdot \int_0^{r'} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr,$$

---

*) Wie wir oben schon einige Male gezeigt haben, ist das Wahre an der Sache dies. Die Werthe von θ werden von 0 an (d. h. von FX an) nach Fp, FA, Fq hin wachsend gedacht; das Ringstück pMq muß daher als aus zwei Theilen bestehend angesehen werden, nämlich aus der Hälfte Hp und aus der andern Hälfte Hq. — Für die erstere Hälfte gehen die Werthe von θ, von 0 an bis zu $XFp = \theta_r$ hin; für die andere Hälfte Hq gehen sie dagegen von $2\pi - \theta_r$ an bis 2π hin. Weil aber unser hiesiges $f_{(r,\theta)}$ blos $Cos\,\theta$ und $Sin\,\theta$ enthält, deren Werthe sich nicht ändern, wenn die Werthe von θ um 2π vermindert werden, so ist

$$\int_{2\pi-\theta_r}^{2\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta = \int_{-\theta_r}^{0} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta$$

und deshalb kann man sagen, daß für das ganze Ringstück pMHq, die Werthe von θ, von $-\theta_r$ an bis zu $+\theta_r$ hin gehen. — Von einem negativen Winkel (oder Bogen) kann nie und nirgends die Rede sein. Auch würde das ganz unrichtig sein, d. h. ein unrichtiges Resultat liefern, wenn $f_{r,\theta}$ außer $Cos\,\theta$ und $Sin\,\theta$, noch θ explicit enthielte, und man nun doch ohne Weiteres an den Grenzen eines bestimmten Integrals, etwa $-\theta_2$ statt $2\pi - \theta_2$ setzen wollte.

wenn r' die in der Gleichung 10.) gefundene Funktion von θ vorstellt. Die Masse der ganzen Ellipse ist daher nun

$$\text{P.)}\cdots \qquad = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r'} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\theta.$$

Anmerkung. Wir fordern nun unsere Leser, welche sich in rein analytischen, von jeder geometrischen Betrachtung unabhängigen Untersuchungen üben wollen, auf, dieselbe Aufgabe (der §§. 28. 29.) so aufzufassen, nämlich

„Die Summe

$$\underset{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \overline{\underline{<}} 1}{\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy}$$

„zu finden (d. h. (in ein einziges oder) in die Summe mehrerer „Doppel-Integrale auszudrücken), in welcher x und y nach und „nach alle, um bezüglich dx und dy wachsenden reellen „Werthe bekommen sollen, welche der untergesetzten Bedingung „nicht widersprechen"

(ohne daß man der Aufgabe irgend eine geometrische Bedeutung unterlegt) und sie dann nach Anleitung der §§. 8.–19. zu lösen; denn, unsere Leser in solchen rein analytischen Untersuchungen zu üben ist der Hauptzweck dieser Blätter*).

Will man genau dieselben Resultate wie in §. 29. I. und II. erhalten, so muß man natürlich den neuen Veränderlichen r, statt des alten x, durch dieselbe Gleichung, nämlich

---

*) Die rein analytische Behandlung dieser Aufgabe ist deshalb viel leichter, als die des §. 10. oder die der §§. 8. 9., weil hier nur einer einzigen Bedingung zu genügen ist, während dort zwei, auch drei Bedingungen gegeben waren. — Man kann aber auch hier noch eine zweite Bedingung hinzufügen, etwa die Bedingung $m \overline{\underline{<}} x \overline{\underline{<}} n$, während $m \overline{\underline{>}} -a$ und $n \overline{\underline{<}} +a$ angenommen wird. Dies käme, sobald man die Aufgabe, wie im vorhergehenden Paragraphen, geometrisch auffaßt, darauf hinaus, die Masse eines von zwei auf AB senkrechten Geraden begrenzten Stückes der Ellipse zu finden, während die Abscissenwerthe dieser Geraden bezüglich m und n sind.

$$(ae+x)^2+y^2 = r^2$$

einführen.

Und will man genau dieselben Resultate erhalten, wie in §. 29. III. und IV., so muß man die neuen Veränderlichen r und θ, statt der alten x und y, mittelst derselben beiden Gleichungen, nämlich

$$x = -ae+r \cdot Cos\,\theta \quad \text{und} \quad y = r \cdot Sin\,\theta,$$

einführen und den wichtigen allgemeinen Satz des §. 14. in Anwendung bringen.

Ist es dem Anfänger gelungen, auf diesem Wege und ohne Zuziehung irgend einer geometrischen Betrachtung dieselben Resultate, wie in den §§. 28. 29. zu erhalten, so möge derselbe noch die zusammengesetztere Aufgabe, wie solche hier in der Note näher bezeichnet worden ist, auf beiden Wegen lösen, einmal aus dem geometrischen Standpunkt, und in 6 verschiedenen Resultaten, und dann noch aus dem rein analytischen Standpunkte ebenfalls in 6 verschiedenen Resultaten. Dabei wird man aber sich gezwungen sehen, Fälle von einander zu unterscheiden, ob z. B. $m < -ae$ oder ob $m > -ae$ ist, u. dergl.

§. 30.

Man kann auch die Werthe, welche x und y in der Summe $\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy$ erhalten sollen, darauf beschränken, daß sie blos positiv oder Null (dagegen nie negativ) sein sollen. Es werden zu den Ungleichungen, welche die Werthe von x und y überhaupt innerhalb bestimmter Grenzen halten, nur noch diese neuen, nämlich

$$0 \leqq x \quad \text{und} \quad 0 \leqq y$$

hinzugefügt, und dann wird, wie in den §§. 7.—10., allen Bedingungen zu genügen gesucht.

A. Soll z. B. die Summe

$$\underset{x^2+y^2 \leqq a^2}{\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy}$$

wo a positiv gedacht ist, mit der Bedingung ausgewerthet werden, daß x und y nur alle positiven oder Nullwerthe erhalten sollen, so hat man die drei Bedingungen zu erfüllen, nämlich

1) $x^2+y^2 \overline{\overline{<}} a^2$, 2) $0 \overline{\overline{<}} x$, 3) $0 \overline{\overline{<}} y$.

Man erhält daher sogleich

I. $$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_0^a \left(\int_0^{+\sqrt{a^2-x^2}} f.dy\right) \cdot dx$$

oder

II. $$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_0^a \left(\int_0^{+\sqrt{a^2-y^2}} f \cdot dx\right) \cdot dy.$$

B. Führt man aber statt x, den neuen Veränderlichen r ein, mittelst der Gleichung

4) $x^2+y^2=r^2$, (also $x \cdot \partial x_r = r$),

so hat man, wegen $x \overline{\overline{>}} 0$,

5) $x=+\sqrt{r^2-y^2}$, also 6) $\partial x_r = \dfrac{r}{+\sqrt{r^2-y^2}}$,

so daß jetzt x und ∂x_r nur eindeutig werden, also auch

$$f_{x,y} = f_{+\sqrt{r^2-y^2},\, y} = f_{(r,y)}$$

nur eindeutig wird. Man hat dann noch zu erfüllen die Bedingungen 1.) und 3.), nämlich

7) $r \overline{\overline{<}} a$ und $y \overline{\overline{>}} 0$;

man erhält daher jetzt sogleich, da $+r$ der größte Werth von y ist, weil sonst (aus 4.) x imaginär werden würde,

III. $$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_0^a \left(\int_0^r f_{r,y} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy\right) \cdot dr,$$

oder, wenn man in umgekehrter Ordnung summirt, weil a der größte Werth von y und für einen konstanten Werth von y, (wegen 4.) y selbst der kleinste Werth von r ist,

IV. $$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_0^a \left(\int_y^a f_{r,y} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr\right) \cdot dy.$$

C. Führt man statt x und y zwei neue Veränderliche r und θ ein, mittelst der Gleichungen

9) $x = r \cdot Cos\,\theta$ und 10) $y = r \cdot Sin\,\theta$,

so daß $f_{x,y} = f_{r \cdot Cos\,\theta,\, r \cdot Sin\,\theta} = f_{(r,\theta)}$

und $dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\theta$ (nach §. 14.)

wird, so gehen die Bedingungen 1.—3.) über in

11) $r \overline{\overline{<}} a$, 12) $0 \overline{\overline{<}} r \cdot Cos\,\theta$ und 13) $0 \overline{\overline{<}} r \cdot Sin\,\theta$,

während r nur positiv genommen wird. Die Bedingungen 12.) und 13.) geben $Cos\,\theta \overline{\overline{>}} 0$ und $Sin\,\theta \overline{\overline{>}} 0$, d. h. $Cos\,\theta$ und $Sin\,\theta$ positiv oder 0; weshalb jetzt θ blos von 0 bis zu $\frac{1}{2}\pi$ gehen kann. Man hat daher sogleich

$$\text{V.}\qquad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta\right) \cdot dr$$

oder

$$\text{VI.}\qquad \Sigma f \cdot dx \cdot dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\int_0^a f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot dr\right) \cdot d\theta.$$

Anmerk. 1. Ist z. B. $f_{x,y} = e^{-(x^2+y^2)}$,

also $f_{(r,y)} = e^{-r^2}$ und auch $f_{(r,\theta)} = e^{-r^2}$,

so hat man (aus III.)

$$\int f_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy = \int e^{-r^2} \cdot r \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy$$
$$= e^{-r^2} \cdot r \cdot Arc\,sin.\frac{y}{r},$$

folglich

$$\int_y^a f_{(r,y)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dy = \tfrac{1}{2}\pi \cdot e^{-r^2} \cdot r;$$

also auch, weil

$$\int e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = -\tfrac{1}{2} e^{-r^2}$$

ist,

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy = \tfrac{1}{4}\pi \cdot (1 - e^{-a^2}).$$

Eben so findet sich aus V.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2} \cdot r \cdot d\theta = \tfrac{1}{2}\pi \cdot e^{-r^2} \cdot r,$$

also, weil $\int e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2}$ ist,

$$\int_0^a \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f_{(r,\theta)} \cdot r \cdot d\theta \right) \cdot dr = \tfrac{1}{4}\pi \cdot (1 - e^{-a^2}).$$

Eben dasselbe findet sich nach VI. für $\Sigma f \cdot dx \cdot dy$, in diesem Falle.

Man findet also

$$\sum_{x^2+y^2 \overline{\overline{<}} a^2,\ 0 \overline{\overline{<}} x,\ 0 \overline{\overline{<}} y} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy = \int_0^a \left(\int_0^{+\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dy \right) \cdot dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{+\sqrt{a^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \right) \cdot dy,$$

$$\text{(nach III.)} \quad = \tfrac{1}{4}\pi (1 - e^{-a^2}),$$

$$\text{(nach IV.)} \quad = \int_0^a \left(\int_y^a \frac{e^{-r^2} \cdot r}{+\sqrt{r^2 - y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy,$$

$$\text{(nach V. oder VI.)} \quad = \tfrac{1}{4}\pi \cdot (1 - e^{-a^2}) \text{ *)}.$$

---

*) Ist $e^{-(x^2+y^2)}$ oder e^{-r^2} die Dichtigkeit des an der, durch die positiven Werthe x und y, gegebenen Stelle, liegenden Rechteckchens $dx \cdot dy$, so drückt die hier gesuchte Summe Σ, die Masse der Fläche eines Kreisquadranten aus, dessen Radius $= a$ ist und bei welchem die Dichtigkeit in gleichen Entfernungen r vom Mittelpunkte, gleich groß ist, und immer kleiner wird, je mehr man sich vom Mittelpunkte des Quadranten entfernt.

Ist aber $e^{-(x^2+y^2)} = z$ die dritte, auf der Ebene des Kreisquadranten senkrechte (stets positive) Ordinate, so stellt die Summe Σ, den Inhalt eines Körpers vor, welcher begrenzt ist, erstens von der vorerwähnten Fläche des Kreisquadranten, dann von zweien durch die Koordinaten-Axen **OX** und **OY** hindurchgehenden, auf der vorgedachten Fläche senkrecht stehenden Ebenen **XOZ** und **YOZ**, welche sich in der dritten Koordinaten-Axe **OZ**, schneiden; ferner von einer durch den Bogen-Quadranten gelegten und auf der Ebene **XOY** senkrechten Cylinderfläche; zuletzt aber durch die krumme Fläche, welche mittelst der Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ gegeben ist und welche in **OZ** selbst ihren höchsten Punkt hat, in gleichen Entfernungen r, von **OZ**, gleich hoch, aber immer niedriger gelegene Punkte liefert, je größer r wird; — für $r = a$ aber am niedrigsten liegt (die Worte „niedrig" und „hoch" auf die horizontal gedachte Lage der Ebene **XOY** bezogen).

Jene Masse, oder dieser Körper-Inhalt, ist also gefunden worden $= \frac{1}{4}\pi (1 - e^{-a^2})$ und solcher nähert sich ohne Ende fort, mit dem ohne Ende

Anmerk. 2. Denkt man sich zuletzt $a = +\infty$ (in dem vorstehenden Beispiele), so beschränkt die Bedingung $x^2 + y^2 = a^2$ die Werthe von x und y, gar nicht mehr, und die gesuchte Summe ist daher jetzt völlig übereinstimmend mit

$$\sum_{0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} \infty,\ 0 \overline{\gtrless} y \overline{\gtrless} \infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy;$$

und diese letztere wird deshalb

(nach I. und II.) $= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy,$

(nach III.) $= \frac{1}{4}\pi,$

(nach IV.) $= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty \frac{e^{-r^2} \cdot r}{+\sqrt{r^2-y^2}} \cdot dr \right) \cdot dy,$

(und nach V. und VI.) wiederum $= \frac{1}{4}\pi.$

Weil aber

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \cdot dx \cdot dy$$
$$= \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} \cdot dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx \right)^2$$

ist, so folgt aus diesem hier gefundenen Resultat noch

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \text{also} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}\ {}^{*}).$$

---

fortwachsenden Radius a des Kreisquadranten, dem Werthe $\frac{1}{4}\pi$, weil $e^{-a^2} = \frac{1}{\infty}$ wird für $a = \infty$.

*) Dies ist der Werth des sogenannten „bestimmten Integrals von Laplace“. — Setzt man $x^2 = z$, so findet sich daraus sogleich das von Euler, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{e\sqrt{z}} \cdot dz = \sqrt{\pi},$$

welches auch der Werth der sogenannten Gamma-Funktion Γ_x, für $x = \frac{1}{2}$, oder auch der Werth der Fakultät $(-\frac{1}{2})!$ ist (S. d. System d. Mathem. Th. VIII. und IX.) Diese Resultate, aus denen die Werthe aller Laplace-schen und Euler'schen bestimmten Integrale abgeleitet werden können, sind also hier oben auf rein analytischem Wege gefunden (ohne Zuziehung geometrischer Betrachtungen), wodurch ein Vorwurf beseitigt ist, der von Einigen dem Laplace, wegen einer analogen Auswerthung seines Integrals gemacht worden ist.

Dritte Uebung.

Wie die Summe $\Sigma f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ unter verschiedenen Voraussetzungen, in dreifache bestimmte Integrale ausgedrückt werden kann.

§. 31. Aufgabe.

Man soll die Summe

$$\underset{z^2+y^2-px \overline{\overline{<}} 0,\ x \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

wo p und b positiv gedacht sind, auswerthen, unter der Voraussetzung, daß x, y und z nur reelle Werthe erhalten sollen.

Erste Auflösung. Summirt man zuerst für konstante Werthe von x und y, und für alle Werthe von z, so liegen letztere zwischen $z = -\sqrt{px-y^2}$ und $z = +\sqrt{px-y^2}$. Diese einzelnen Summen werden daher ausgedrückt durch

$$dx \cdot dy \cdot \int_{-\sqrt{(px-y^2)}}^{+\sqrt{(px-y^2)}} f \cdot dz.$$

Summirt man nun diese Theilsummen, für einen konstanten Werth von x, aber für alle Werthe von y, — welche, da $\sqrt{px-y^2}$ reell werden muß, da also $y^2 \overline{\overline{<}} px$ bleiben muß, zwischen $y = -\sqrt{px}$ und $y = +\sqrt{px}$ liegen, — so erhält man für diesen konstanten Werth von x, die Theilsumme

$$= dx \cdot \int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} \left(\int_{-\sqrt{(px-y^2)}}^{+\sqrt{(px-y^2)}} f \cdot dz \right) \cdot dy,$$

welche alle diese einzelnen Theilsummen liefert, wenn man statt x alle Werthe setzt, welche x haben kann. — Und da x nicht negativ werden darf, weil sonst $\sqrt{px}$ imaginär würde, so liegen alle Werthe von x, zwischen 0 und b, und man hat daher nun gefunden:

$$\text{I.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^b \left(\int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} \left(\int_{-\sqrt{(px-y^2)}}^{+\sqrt{(px-y^2)}} f\cdot dz\right)\cdot dy\right)\cdot dx.$$

Und es ist nicht schwer einzusehen, daß man auch erhalten wird

$$\text{II.}\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^b \left(\int_{-\sqrt{px}}^{+\sqrt{px}} \left(\int_{-\sqrt{(px-z^2)}}^{+\sqrt{(px-z^2)}} f\cdot dy\right)\cdot dz\right)\cdot dx.$$

Summirt man in noch anderer Ordnung, nämlich zuerst für konstante Werthe von y und z, und für alle Werthe von x, so giebt die Bedingung $y^2+z^2 \overline{\overline{<}}\, px$,

sofort $$x \overline{\overline{>}} \frac{1}{p}(y^2+z^2),$$

so daß x alle Werthe haben kann, welche von $\frac{1}{p}(y^2+z^2)$ bis b gehen; diese einzelnen Theilsummen werden daher ausgedrückt durch

$$dy\cdot dz\cdot \int_{\frac{1}{p}(y^2+z^2)}^{b} f\cdot dx,$$

wo y und z nach und nach alle Werthe vorstellen, welche sie erhalten können. Summirt man nun diese Theilsummen für einen konstanten Werth von z, aber für alle Werthe von y, so folgt, daß, da y^2+z^2 zwischen 0 und pb liegt, y alle Werthe bekommen kann, welche zwischen $-\sqrt{pb-z^2}$ und $+\sqrt{pb-z^2}$ liegen. Diese Summation giebt daher

$$dz\cdot \int_{-\sqrt{(pb-z^2)}}^{+\sqrt{(pb-z^2)}} \left(\int_{\frac{1}{p}(y^2+z^2)}^{b} f\cdot dx\right)\cdot dy,$$

wo z nach und nach alle seine Werthe erhalten muß. Summirt man endlich diese Summen wieder für alle Werthe von z, so ist klar, daß z^2 nicht größer als pb werden darf, daß also die Werthe von z, zwischen $-\sqrt{pb}$ und $+\sqrt{pb}$ liegen; man findet daher unsere Summe auch noch so ausgedrückt, nämlich:

III. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_{-\sqrt{pb}}^{+\sqrt{pb}} \left(\int_{-\sqrt{(pb-z^2)}}^{+\sqrt{(pb-z^2)}} \left(\int_{\frac{1}{p}(y^2+z^2)}^{b} f \cdot dx \right) \cdot dy \right) \cdot dz.$$

Und eben so findet sich

IV. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_{-\sqrt{pb}}^{+\sqrt{pb}} \left(\int_{-\sqrt{pb-y^2}}^{+\sqrt{pb-y^2}} \left(\int_{\frac{1}{p}(y^2+z^2)}^{b} f \cdot dx \right) \cdot dz \right) \cdot dy.$$

Und da überhaupt drei Elemente α, β, γ, oder x, y, z, auf sechs verschiedene Arten angeordnet werden können, — so kann man die gedachte Summe Σ, auch wenn keine neuen Veränderlichen eingeführt werden, doch auf sechs verschiedene Arten durch ein dreifaches bestimmtes Integral ausdrücken.

Für die gegenwärtige Aufgabe findet man daher noch

V. $$\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_{-\sqrt{(pb)}}^{\sqrt{(pb)}} \left(\int_{\frac{1}{p}y^2}^{b} \left(\int_{-\sqrt{(px-y^2)}}^{+\sqrt{(px-y^2)}} f \cdot dz \right) \cdot dx \right) \cdot dy,$$

da durch die Grenzen des ersten Integrals (nach z) der gegebenen Bedingung $y^2+z^2 \overline{\overline{<}} px$, schon genügt ist, dieselbe Ungleichung aber den kleinsten Werth von px, also auch von x, offenbar für $z=0$ liefert, während b nach der andern Bedingung der größte Werth von x ist; da endlich aus $y^2 \overline{\overline{<}} px-z^2$, der größte Werth von y^2 offenbar aus dem größten Werth (b) von x, und dem kleinsten Werth (0) von z sich ergiebt, während dieser größte Werth pb von y^2, offenbar unter den negativen Werthen von y, (nach §. 4[b].) $-\sqrt{pb}$ als den kleinsten, und unter den positiven Werthen von y, $+\sqrt{pb}$ als den größten liefert.

Endlich findet man noch

VI. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_{-\sqrt{(pb)}}^{+\sqrt{(pb)}} \left(\int_{\frac{1}{p}z^2}^{b} \left(\int_{-\sqrt{(px-z^2)}}^{+\sqrt{(px-z^2)}} f \cdot dy \right) \cdot dx \right) \cdot dz.$$

§. 32.

Führt man aber z. B. statt x einen neuen Veränderlichen r, ein mittelst der Gleichung $x = x_r$, wo x_r irgend eine Funktion von r (ohne x), welche auch noch y und z enthalten kann, vorstellt, — so hat man sogleich

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma [f_{(r,y,z)} \cdot \partial x_r] \cdot dr \cdot dy \cdot dz,$$

wenn $f_{(r,y,z)}$ das bedeutet, was aus $f_{x,y,z}$ hervorgeht, sobald x_r statt x gesetzt wird.

Ist aber x_r (und daher auch ∂x_r) zweiförmig, so daß beide Formen, welche zu einem gegebenen Werth r, den kleineren und größeren Werth von x geben, durch x_r^I und x_r^{II} von einander unterschieden werden, so nimmt auch die einförmig gedachte Funktion $f_{x,y,z}$ im Allgemeinen zwei verschiedene Formen an, welche bezüglich durch $f^I_{(r,y,z)}$ und $f^{II}_{(r,y,z)}$ bezeichnet werden mögen, so daß in $\Sigma [f_{(r,y,z)} \cdot \partial x_r] \cdot dr \cdot dy \cdot dz$, statt $f_{(r,y,z)} \cdot \partial x_r$ bald $f^I_{(r,y,z)} \cdot \partial x_r^I$, bald $f^{II}_{(r,y,z)} \cdot \partial x_r^{II}$ gesetzt werden muß, — in so ferne zu jedem Werth von r, zwei Werthe von x gehören, so daß jeder Werth von r zweimal genommen werden muß, einmal statt des kleineren Werthes von x, und dann noch einmal statt des größeren Werthes von x, vorausgesetzt, daß jeder dieser Werthe den gegebenen Grenzbedingungen noch genügt. Genügt nur noch einer der beiden Werthe von x, den Grenzbedingungen, so ist natürlich auch r nur einmal zu nehmen, und dazu diejenige der beiden Formen von $f_{(r,y,z)} \cdot \partial x_r$, welche dem noch zulässigen (kleinern oder größern) Werth von x, entspricht. — Dabei können die durch x_r^I und x_r^{II} bezeichneten Formen, für verschiedene Werthe von r, mit einander vertauscht werden müssen, da eine und dieselbe Form von x_r, für einen Werth von r, den kleinern, für einen andern Werth von r aber, den größern der beiden Werthe von x, liefern kann, so daß für diesen letzteren Werth von r, dann die andere Form statt x_r^I genommen werden muß, wenn man die zu dem kleinern Werth von x, gehörige Form, jetzt wieder haben will. — Alles genau so, wie wir solches in den Beispielen der beiden vorhergehenden Uebungen namentlich aber im §. 6. klar nachgewiesen haben.

Nach der neuen Form der Grenzbedingungen

$$y^2+z^2 \overline{\overline{<}}\, px_r \quad \text{und} \quad x_r \overline{\overline{<}}\, b,$$

entscheidet es sich dann, wie viele dreifache Integrale jetzt dazu gehören, um die gedachte Summe Σ, auszudrücken.

§. 32b.

Führen wir z. B. zwischen x und r die Gleichung

$$1) \qquad (x-\tfrac{1}{4}p)^2+y^2+z^2=r^2,$$

ein, so daß

$$2)\quad x_r=\tfrac{1}{4}p\pm\sqrt{r^2-y^2-z^2} \quad \text{und} \quad 3)\quad \partial x_r=\frac{r}{\pm\sqrt{r^2-y^2-z^2}}$$

wird. — Für $x=\frac{1}{4}p$ erhält dann r seinen Minimum-Werth und dieser ist $=+\sqrt{y^2+z^2}$, in so ferne die Gleichung 1.) sehen läßt, daß man r blos positiv (oder Null) nehmen darf. Ist $b<\frac{1}{4}p$, so nehmen die Werthe von r blos ab, und kommen nicht einmal bis zu dem Minimumwerth hin; ist aber $b>\frac{1}{4}p$, so wachsen die Werthe von r, wieder, so wie die wachsend gedachten Werthe von x, $>\frac{1}{4}p$ werden. Im letztern Fall muß daher jeder Werth von r doppelt genommen werden, so lange noch den vorhandenen Bedingungen genügt ist, einmal

für $x<\frac{1}{4}p$, $\partial x_r=\partial x_r^{\mathrm{I}}=\dfrac{r}{-\sqrt{r^2-y^2-z^2}}$ und $f_{x,y,z}=f^{\mathrm{I}}_{(r,y,z)}$;

und das andere Mal für $x>\frac{1}{4}p$, $\partial x_r=\partial x_r^{\mathrm{II}}=\dfrac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}$ und $f_{x,y,z}=f^{\mathrm{II}}_{(r,y,z)}$.

Summiren wir daher zuerst für konstante Werthe von y und z und für alle Werthe von r, so muß man sogleich wieder unterscheiden, einmal ob $b \leqq \frac{1}{4}p$ und dann ob $b>\frac{1}{4}p$ ist.

Erster Fall. Ist $b \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$, so findet sich sogleich

I. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_{-\sqrt{(pb)}}^{\sqrt{(pb)}} \left(\int_{-\sqrt{(pb-z^2)}}^{\sqrt{pb-z^2}} \left(\int_{r_2}^{r_1} f^1 \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}} \cdot dr \right) \cdot dy \right) \cdot dz,$$

wenn

4) $$+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p-b)^2+y^2+z^2} = r_2$$

und

5) $$\tfrac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y^2+z^2) = r_1$$

gesetzt wird.

Es geht nämlich die Bedingung $y^2+z^2 \overline{\overline{<}} px$ jetzt über in

6) $$y^2+z^2 \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}p^2 - p\sqrt{r^2-y^2-z^2};$$

und die andere Bedingung $x \overline{\overline{<}} b$ wird jetzt diese, nämlich

7) $$\tfrac{1}{4}p - \sqrt{r^2-y^2-z^2} \overline{\overline{<}} b \quad \text{d. h.} \quad +\sqrt{r^2-y^2-z^2} \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{4}p - b.$$

Quadrirt man die Bedingung 6.), nachdem $p \cdot \sqrt{r^2-y^2-z^2}$ zur Linken, y^2+z^2 dagegen auf die rechte Seite gebracht ist, — addirt man dann auf beiden Seiten $p^2(y^2+z^2)$ und zieht man zuletzt wieder die Quadratwurzel aus, — so erhält man, da alles positiv ist, statt der 6.) diese, nämlich

8) $$r \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y^2+z^2) \quad \text{d. h.} \quad r \overline{\overline{<}} r_1,$$

während die Bedingung 7.) übergeht, weil ebenfalls alles positiv ist, in

9) $$r \overline{\overline{>}} +\sqrt{(\tfrac{1}{4}p-b)^2+y^2+z^2} \quad \text{d. h.} \quad r \overline{\overline{>}} r_2,$$

so daß man sogleich erkennt, daß die Werthe von r, von r_2 an bis zu r_1 hin, gehen *).

---

*) Man hat zwar auch noch die Bedingung, daß $\sqrt{r^2-y^2-z^2}$ nie imaginär werden darf, daß also $r \overline{\overline{>}} +\sqrt{y^2+z^2}$ ist; allein diese Bedingung ist zugleich mit der 9.) erfüllt, also nicht weiter zu erwähnen.

Und da r_2 den Werth r_1 nie übersteigen darf, so giebt die Gleichung

$$r_2 \overline{\overline{<}} r_1 \quad \text{d. h.} \quad +\sqrt{(\tfrac{1}{4}p-b)^2+y^2+z^2} \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y^2+z^2),$$

d. h. $$y^2+z^2 \overline{\overline{<}} pb$$

(nach §. 4b.) die beiden Grenzwerthe $-\sqrt{pb-z^2}$ und $+\sqrt{pb-z^2}$ von y, während dieselbe Gleichung, pb als den größten Werth von z^2, folglich $-\sqrt{pb}$ und $+\sqrt{pb}$ als die Grenzwerthe von z, dazu liefert. — Dabei haben wir (oben in I.) die Grenzen des Integrals nach r, mit einander vertauscht, um im Ausdruck des Elementes die Quadratwurzel positiv nehmen zu können.

Zweiter Fall. — Ist $b>\frac{1}{4}p$ und nehmen wir zuerst die abnehmenden Werthe von r, welche zu $x \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ gehören, so tritt letztere Ungleichung an die Stelle der zweiten Bedingung $x \overline{\overline{<}} b$, und man erhält daher für diesen Theil der Summe Σ, genau das, was aus dem dreifachen Integral I. wird, wenn man überall $\frac{1}{4}p$ statt b setzt, wodurch pb und $\pm\sqrt{pb}$ bezüglich in $\frac{1}{4}p^2$ und $\pm\frac{1}{2}p$, und r_2 in

10) $$r_3 = +\sqrt{y^2+z^2}$$

übergeht.

Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch

$$A_1 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-z^2)}}^{\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-z^2)}}\left(\int_{r_3}^{r_1} f^1 \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-y^2-z^2}} \cdot dr\right) \cdot dy\right) \cdot dz,$$

wo $r_1 = \frac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y^2+z^2)$ und $r_3 = +\sqrt{y^2+z^2}$ ist.

Gehen wir nun zu den wachsenden Werthen von r, zu denen $x>\frac{1}{4}p$ gehört, so gehen jetzt die zwei Bedingungen, nämlich $y^2+z^2 \overline{\overline{<}} px$ und $x \overline{\overline{<}} b$; über in

11) $$y^2+z^2 \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}p^2+p\sqrt{r^2-y^2-z^2}$$

12) $$\tfrac{1}{4}p+\sqrt{r^2-y^2-z^2} \overline{\overline{<}} b.$$

Die 11.) giebt, wenn man $\frac{1}{4}p^2$ auf die linke Seite bringt, dann quadrirt, dann $p^2(y^2+z^2)$ auf beiden Seiten addirt, zuletzt aber wieder die positiven Wurzeln nimmt, jetzt

13) $$r \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y^2+z^2) \quad \text{d. h.} \quad r \overline{\overline{>}} r_1.$$

Die 12.) dagegen giebt

14) $$r \overline{\overline{<}} + \sqrt{(b-\tfrac{1}{4}p)^2+y^2+z^2} \quad \text{d. h.} \quad r \overline{\overline{<}} r_2,$$

in so ferne $(\frac{1}{4}p-b)^2 = (b-\frac{1}{4}p)^2$ ist.

Weil aber $\sqrt{r^2-y^2-z^2}$ nie imaginär werden darf, so hat man auch noch die Bedingung

15) $$r \overline{\overline{>}} + \sqrt{y^2+z^2} \quad \text{d. h.} \quad r \overline{\overline{>}} r_3,$$

welche noch berücksichtigt werden muß. — Und da diese letztere Bedingung 15.) mit der 13.) in den Kampf tritt, so muß man zunächst die Werthe $\pm y'$ von y, suchen, für welche $r_1 = r_3$ wird, und welche also gefunden werden aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{4}p + \frac{1}{p}(y'^2+z^2) = + \sqrt{y'^2+z^2};$$

diese liefert

16) $$y'^2+z^2 = \tfrac{1}{4}p^2 \quad \text{oder} \quad y' = + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-z^2}.$$

So lange nun $y^2 > y'^2$ ist, so lange ist $r_1 > r_3$; und die Erfüllung der Bedingung 13.) zieht dann die Erfüllung der 15.) als eine nothwendige Folge nach sich, und es ist daher dann die 13.) allein zu erfüllen. So lange aber $y^2 < y'^2$ ist, so lange ist $r_1 < r_3$, und man muß nun die Bedingung 15.) allein erfüllen, um die 13.) bereits mit erfüllt zu haben.

So lange also die Werthe von y, von $-y'$ an bis zu $+y'$ hin gehen, folglich $y^2 \overline{\overline{<}} y'^2$ ist, — so lange gehen die Werthe von r, von r_3 an bis zu r_2 hin; und die Gleichung 16.) liefert dann $\frac{1}{4}p^2$ als den größten Werth von z^2, dazu, so daß eben so lange die Werthe von z, von $-\frac{1}{2}p$ anfangen und mit $+\frac{1}{2}p$ aufhören. Dadurch sondert sich ein weiterer Theil der Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch das dreifache Integral

$$A_2 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{-y'}^{y'}\left(\int_{r_3}^{r_2} f^{II}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dy\right)\cdot dz,$$

wo r_2 aus 4.), r_3 aus 10.) und y' aus 16.) bestimmt wird.

Ist aber $y^2 \overline{\overline{>}} y'^2$, so gehen die Werthe von r, von r_1 an bis zu r_2 hin, und die Gleichung $r_1 = r_2$ giebt wieder den größten Werth y''^2, den y^2 erreichen kann, nämlich

$$17)\qquad y'' = +\sqrt{pb-z^2},$$

so daß $-y''$ der kleinste, und $+y''$ der größte Werth ist, den y erreichen kann; während die 17.) noch sehen läßt, daß pb der allergrößte Werth ist, den z^2 erreichen kann. Die Grenzen $-y'$ und $+y'$ existiren aber (nach 16.) nur so lange als z zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegt; so wie daher z^2 zwischen $\frac{1}{4}p^2$ und pb liegt, so gehen die Werthe von y, von $-y''$ an bis zu $+y''$ hin *); so lange aber z^2 zwischen 0 und $\frac{1}{4}p^2$ liegt, gehen die Werthe von y, von $-y''$ an bis zu $-y'$ hin, und dann wieder von $+y'$ an bis zu $+y''$ hin.

Es bilden sich also noch vier abgesonderte Theile unserer Summe Σ, nämlich

$$A_3 \cdots \int_{-\sqrt{(pb)}}^{-\frac{1}{2}p}\left(\int_{-y''}^{y''}\left(\int_{r_1}^{r_2} f^{II}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dy\right)\cdot dz$$
$$+\int_{\frac{1}{2}p}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{-y''}^{y''}\left(\int_{r_1}^{r_2} f^{II}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dy\right)\cdot dz$$

und

$$A_4 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{-y''}^{-y'}\left(\int_{r_1}^{r_2} f^{II}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dy\right)\cdot dz$$
$$+\int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{y'}^{y''}\left(\int_{r_1}^{r_2} f^{II}\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dy\right)\cdot dz.$$

Man findet also jetzt, wo $b > \frac{1}{4}p$ ist,

$$\text{II.}\qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

---

*) Da der Ausdruck für y'^2 jetzt negativ wird, so ist natürlich noch immer $y^2 > y'^2$, selbst für den Werth $y = 0$.

Anmerkung. Wir überlassen es nun dem Anfänger zur äußerst nützlichen Uebung in analytischen Zergliederungen, alle die dreifachen Integrale herzustellen, welche, im Falle sie addirt werden, jedesmal die Summe Σ liefern,

einmal in dem Falle, daß zuerst für konstante Werthe von r und z, und für alle Werthe von y, — hierauf diese Summen wieder für einen konstanten Werth von z, und für alle Werthe von r; — zuletzt aber diese Summen wieder für alle Werthe von z, summirt werden sollen; und

dann noch, wenn die Summation zuerst nach y, hierauf nach z, zuletzt aber nach r, statt finden soll.

Und sollte es ihm noch nicht gelingen, diese Aufgaben befriedigend zu Ende zu führen, so wolle derselbe zuvor noch die folgenden Paragraphen lesen und dann zu diesen eben vorgelegten Aufgaben zurückkehren.

Man kann auch der Aufgabe des §. 31. wieder eine geometrische Bedeutung unterlegen.

Denkt man sich nämlich die durch die Gleichung $u^2 = px$ gegebene Parabel um ihren Hauptdurchmesser OX herumgedreht, so beschreibt sie ein Umdrehungs-Paraboloid, dessen Oberfläche durch die Gleichung $y_1^2 + z_1^2 = px$ gegeben ist, welches seinen Scheitel in dem Durchschnittspunkt 0 der drei auf einander senkrecht gedachten Axen OX, OY und OZ hat *), seinen Brennpunkt F in OX, rechts, von O um $\frac{1}{4}p$ entfernt, während die durch F, senkrecht auf OX gelegte Ebene, diese Umdrehungsfläche in einem Kreise schneidet, dessen Radius $= \frac{1}{2}p$ ist, — jede andere mit ihr parallele rechts von O um b, entfernte Ebene aber,

---

*) Wir denken uns hier stets OX und OY horizontal liegend, und zwar X rechts im Unendlichen, Y aber vorwärts im Unendlichen, natürlich aber auch alle Axen jenseits O ebenfalls bis in's Unendliche fortgehend. Die dritte Axe OZ denken wir uns dann nicht nur stets vertikal, sondern auch Z oben im Unendlichen, so aber daß OZ nach unten ebenfalls in's Unendliche verlängert gedacht wird.

einen Durchschnittskreis bildet, dessen Radius $= \sqrt{pb}$ und $\lesseqgtr \frac{1}{2}p$ ist, je nachdem $b \lesseqgtr \frac{1}{4}p$, d. h. je nachdem diese neue Ebene $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right\}$ von F liegt. Nehmen wir nun diese neue Ebene als Grenz-Ebene des Paraboloids, und suchen wir die Masse des von ihr abgeschnittenen Theils dieses Paraboloids, welcher zwischen ihr und dem Scheitel O liegt, unter der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit einer jeden durch x, y, z gegebenen Stelle M, im Innern (oder an der Oberfläche) des Körpers, durch $f_{x,y,z}$ ausgedrückt ist, — so hat man genau die Aufgabe des §. 31.

In dem Resultate I. des §. 31. giebt dann die erste Integration (nach z), die Masse einer mit OZ parallelen materiellen Linie, deren Querschnitt den Inhalt $dx \cdot dy$ hat, und welche an der durch x und y gegebenen Stelle auf XOY senkrecht steht und auf beiden Seiten bis zur Umdrehungs-Oberfläche reicht. — Die zweite Integration giebt dann die Summe der Massen aller dieser Linien, die zu einem und demselben x gehören und zu allen Werthen von y, d. h. die Masse einer Scheibe, welche von O um x abstehend, auf der Axe OX senkrecht steht, die Dicke dx hat und rings herum bis zur Umdrehungs-Oberfläche reicht. — Die dritte Integration giebt endlich die Summe der Massen aller dieser Scheiben, welche von O an bis zur begrenzenden Ebene neben einander liegen und den ganzen Umdrehungskörper erfüllen.

In dem Resultate III. dagegen giebt die erste Integration (nach x) die Masse einer materiellen, mit OX parallelen Linie, welche von der paraboloidischen Umdrehungsfläche bis zur begrenzenden Ebene geht, welche den Querschnitt $dy \cdot dz$ hat und welche in ihrer Verlängerung die Ebene YOZ in dem durch y und z gegebenen Punkte trifft. — Die zweite Integration (nach y) giebt dann die Summe der Massen aller dieser Linien, wie sie eine paraboloidische Scheibe erfüllen, welche mit XOY parallel läuft und von letzterer Ebene um $\pm z$ absteht, dabei aber die Dicke dz hat und auf beiden Seiten bis zur Umdrehungs-Oberfläche, auf der dritten Seite aber bis zur begrenzenden Ebene reicht. — Die dritte Integration (nach z) giebt zuletzt die Summe der Massen aller dieser Scheiben, wie sie den ganzen Körper erfüllen.

Auf gleiche Weise lassen sich die Resultate II., IV., V. und VI. deuten.

Wollte man statt der Koordinate x, lieber die Entfernung $FM = r$ der Stelle M, vom Brennpunkt F, einführen, so daß die Stelle M durch die drei Koordinaten-Werthe r, y und z gegeben wäre, d. h. der Punkt M als der Durchschnittspunkt der durch r gegebenen Kugel-Oberfläche (welche ihren Mittelpunkt in F hat) und der beiden, durch y und z gegebenen, bezüglich mit den Koordinaten-Ebenen ZOX und YOX parallelen Ebenen, — so müßte man ein Körper-Elementchen an M, dadurch bilden, daß man eine zweite Kugelfläche mit dem Radius $r + dr$ beschrieben sich dächte und zwei neue mit ZOX und YOX parallele, aber durch $y + dy$ und $z + dz$ gegebene Ebenen. Der Inhalt dieses, zwischen diesen sechs Ebenen*) liegenden unendlichkleinen schiefwinkligen Parallelopipedums müßte nun zunächst berechnet werden**). Betrachtet man aber dr als die Höhe desselben, so ist die Grundfläche das schiefe Parallelogramm, dessen beide Seiten durch den Durchschnitt der mit r beschriebenen Kugelfläche, mit den drei um dy und dz von einander abstehenden, mit einander und mit OX parallelen Kanten gebildet werden.

---

*) Auch die Kugelflächen können in diesem unendlichkleinen Stückchen als zwei mit einander parallele und auf FM senkrechte Ebenen angesehen werden.

**) Der ganze Körper wird nämlich in lauter solche Elementchen zertheilt gedacht, durch Kugelflächen, deren Radien von 0 an um dr bis zum größten $b + \frac{1}{4}p$ hin wachsen; — durch Ebenen, welche von $-\sqrt{pb}$ an bis zu $+\sqrt{pb}$ hin, mit ZOX parallel liegen und um dy von einander entfernt sind; — endlich noch durch unendlichviele mit YOX parallele und um dz von einander entfernte Ebenen.

Dieses schiefe Parallelogramm auf die durch M senkrecht auf OX gedachte Ebene projicirt, giebt das Rechteck $dy \cdot dz$; folglich wird sein Inhalt gefunden, wenn man den Inhalt des letztern durch den Kosinus des Winkels dividirt, welchen die Kugelfläche mit der YOZ macht, d. h. des Winkels, den die auf diese Flächen senkrechten Geraden FM und FX mit einander machen und dieser Kosinus ist $= \frac{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}{r}$; folglich ist der Inhalt der Grundfläche des Körper-Elements $= \frac{r \cdot dy \cdot dz}{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}$ und der Inhalt des Körper-Elements selbst $= \frac{r \cdot dy \cdot dz \cdot dr}{\sqrt{r^2-y^2-z^2}}$, weil dr seine Höhe ist. Liegt nun dieses Elementchen links von der durch F auf OX senkrecht gedachten Ebene, so ist $\frac{1}{4}p - \sqrt{r^2-y^2-z^2}$ in $f_{x,y,z}$ statt x zu setzen, wenn man die Dichtigkeit desselben haben will; liegt aber das Elementchen rechts der gedachten Ebene, so ist $\frac{1}{4}p + \sqrt{r^2-y^2-z^2}$ zu setzen, in $f_{x,y,z}$, wenn man die Dichtigkeit desselben ausgedrückt sehen will. Bezeichnen wir nun durch $f^{I}_{(r,y,z)}$ und durch $f^{II}_{(r,y,z)}$ diese Dichtigkeiten, so sind die Massen dieser Elementchen bezüglich

$$f^{I} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}} \cdot dr \cdot dy \cdot dz \quad \text{und} \quad f^{II} \cdot \frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}} \cdot dr \cdot dy \cdot dz,$$

je nachdem das Elementchen links oder rechts der durch den Brennpunkt F, auf OX senkrecht gedachten Ebene liegt.

Denkt man sich nun y und z konstant, so hat man eine mit OX parallele Gerade AB, und die Entfernungen ihrer Endpunkte A und B von F, sind dann die Grenzen, zwischen denen alle Werthe von r liegen, die allen Punkten dieser Geraden zukommen.

Liegt nun die Grenz-Ebene des Paraboloids links von F oder in F selbst, d. h. ist $b < \frac{1}{4}p$ oder $= \frac{1}{4}p$, so ist $BF^2 = (\frac{1}{4}p - b)^2 + y^2 + z^2$, (weil B in der Grenz-Ebene liegt, die von F um $\frac{1}{4}p - b$ absteht), und dies BF sei durch r_2 bezeichnet. Der Punkt A liegt in der paraboloidischen Oberfläche, und wenn wir AF durch r_1 bezeichnen, so ergiebt sich die Gleichung für einen jeden solchen Punkt A der gedachten Oberfläche, zwischen den jetzigen Koordinaten r_1, y_1 und z_1 desselben, wenn man in der früheren Gleichung $y_1^2+z_1^2=px$, statt x seinen Werth $\frac{1}{4}p-\sqrt{r_1^2-y_1^2-z_1^2}$ setzt. Dies führt aber zu der Gleichung

$$r_1=\tfrac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y_1^2+z_1)^2 \text{ *)}$$

und giebt für $y_1=y$ und $z_1=z$, sofort

$$r_1=FA=\tfrac{1}{4}p+\frac{1}{p}(y^2+z^2).$$

Das Integral $\int_{r_2}^{r_1} f^1\cdot\frac{r}{+\sqrt{r^2-y^2-z^2}}\cdot dr$ noch mit $dy\cdot dz$ multiplicirt, giebt also die Masse der materiellen Geraden AB. Die zweite Integration nach y, giebt dann die Masse einer Scheibe, welche die Dicke dz hat, mit YOX parallel läuft und von letzterer um $\pm z$ absteht. Diese (materielle) Ebene schneidet das Paraboloid in einer Parabel, deren Gleichung (zwischen x und y_1, oder zwischen r_1 und y_1) aus der der Fläche hervorgeht, wenn man $z_1=z$ nimmt; die Gleichung dieser Parabel ist also

entweder $y_1^2=px-z^2$ oder $y_1^2=p(r_1-\frac{1}{4}p)-z^2$.

In der Grenz-Ebene, wo $x=b$, oder wo r_1 (nach der bekannten Eigenschaft des Brennpunktes der Parabel $u^2=px$) den Werth $x+\frac{1}{4}p$ für $x=b$ hat, d. h. wo $r_1=b+\frac{1}{4}p$ ist, findet sich (aus der einen oder der andern Gleichung dieser

---

*) Da der Punkt A ein Punkt der durch die Gleichung $u^2=px$ gegebenen Umdrehungs-Parabel ist, so ist sein Abstand FA vom Brennpunkt, $=\frac{1}{4}p+x$, aber $x=\frac{1}{p}u^2=\frac{1}{p}(y_1^2+z_1^2)$; und dies stimmt mit dem im Texte gefundenen, vollkommen überein.

Parabel) der kleinste und größte Werth von y_1, nämlich $\mp\sqrt{pb-z^2}$, und dies sind die Grenzwerthe, zwischen denen nach y integrirt werden muß, wenn man die Masse dieser Scheibe haben will.

Die dritte Integration (nach z) giebt dann die Summe der Massen aller dieser, mit YOX parallelen Scheiben von der untersten an bis zur obersten hin, welche letzteren von YOX um $\sqrt{pb}$ entfernt sind, so daß diese letzte Integration zwischen den Grenzen $-\sqrt{pb}$ und $+\sqrt{pb}$ gemacht werden muß, wenn man die Masse des Umdrehungs-Paraboloids haben will. — Dies giebt aber genau wieder das Resultat I. des vorstehenden Paragraphen.

Denkt man sich aber $b>\frac{1}{4}p$ gegeben, so daß die Grenz-Ebene rechts von F liegt, so zertheilt man den Körper vor allen Dingen mittelst einer durch F auf OX senkrecht gedachten Ebene, in zwei Theile und findet die Masse des Theils zur Linken, genau auf dem Wege, der so eben beschrieben worden, nur daß man $\frac{1}{4}p$ statt b setzt, wodurch $\sqrt{pb}$ in $\pm\frac{1}{2}p$ übergeht. Man findet dann für die Masse dieses Theils unseres jetzigen Körpers das dreifache Integral A_1.) im vorstehenden Paragraphen.

Der Körpertheil zur Rechten von F, wird von zwei parallelen Kreis-Ebenen begrenzt, deren Radien bezüglich $\frac{1}{2}p$ und $\sqrt{pb}$ $(>\frac{1}{2}p)$ sind; außerdem aber von der paraboloidischen Oberfläche. Die oben erwähnte, durch y und z gegebene Gerade AB stößt an beide Grenz-Ebenen an, so lange sie sich in dem über den kleinern der beiden Kreise beschriebenen Cylinder befindet, dessen Axe OX ist. Es ist dann $FA=\sqrt{y^2+z^2}=r_3$ und $FB=\sqrt{(b-\frac{1}{4}p)^2+y^2+z^2}=r_2$. — Die durch z gegebene mit YOX parallele Ebene schneidet diese Cylinderfläche in zwei geraden Linien, deren Abstand $\pm y'$ von der Ebene ZOX, durch die Gleichung $z^2+y'^2=\frac{1}{4}p^2$ gegeben ist. — Die Masse dieses Cylinders findet sich also ohne Weiteres durch dreifache Integration, und man findet dafür genau den Ausdruck A_2.) des vorstehenden Paragraphen.

Denkt man sich nun zwei von YOX um $\frac{1}{2}p$ entfernte und mit ihr parallele Ebenen E_1 und E_2, welche den eben gedachten Cylinder berühren, so schneiden diese oben und unten zwei Stücke unseres Körpers aus, in welchen die obgedachte, durch y und z gegebene Gerade AB, mit A an die paraboloidische Oberfläche stößt, mit B aber an die Grenz-Ebene, so daß $FA = r_1$ und $FB = r_2$ ist. Oben ist $\frac{1}{2}p$ der kleinste, unten $-\frac{1}{2}p$ der größte Werth von z; oben ist $+\sqrt{pb}$ der größte, unten ist dagegen $-\sqrt{pb}$ der kleinste Werth von z. — Zu jedem Werth von z gehen die y in der Grenz-Ebene von $-\sqrt{pb-z^2}$ bis zu $+\sqrt{pb-z^2}$ und bilden den weitesten Raum zwischen sich. — Die Massen dieser beiden Theile ergeben sich daher ohne Weiteres; man findet aber auf diesem Wege für sie genau die beiden dreifachen Integrale in A_3.) des vorstehenden Paragraphen.

Zwischen den Ebenen E_1 und E_2, zwischen der Cylinderfläche und der paraboloidischen liegen jetzt noch zwei Theile unseres Körpers, in denen z von $-\frac{1}{2}p$ bis zu $+\frac{1}{2}p$ geht (d. h. in denen die durch z gegebene Ebene, von E_2 an bis zu E_1 hin liegen kann), während in dem einen Theil, y, von y' an bis zu y'' hin, in dem rückwärts gelegenen Theil dagegen, von $-y''$ an bis zu y' hin geht, während ebenfalls $FA = r_1$ und $FB = r_2$ ist. — Die Massen dieser letzten beiden Theile des Körpers finden sich daher genau so wie sie A_4) im Paragraphen ausdrückt.

So findet sich also aus dem rein geometrischen Standpunkte die Masse des ganzen Körpers genau so, wie sie in II. des Paragraphen auch von dem rein analytischen Standpunkte aus gefunden worden ist.

Denkt man sich zuerst konstante Werthe von r und z, d. h. eine bestimmte Kugelfläche und eine bestimmte, mit YOX parallele Ebene, so hat man einen bestimmten Kreis als Durchschnitt dieser beiden Flächen, dessen verschiedenen Punkte sich durch die verschiedenen Werthe von y, von einander unterscheiden. Summirt man also zuerst die Massen-Elementchen in diesem Kreisbogen, so bekommt man die Masse des letztern (materiell gedachten). — Summirt man dann nach r, für einen und denselben Werth von z, so bekommt man die Summe der Massen aller der Kreisbogen, welche aus dem Durchschnitt der verschiedenen Kugeln, mit derselben Ebene entstehen, d. h. die Masse einer mit YOX parallelen und durch z gegebenen Scheibe, welche die Dicke dz hat. — Summirt man aber statt nach r, lieber zuerst nach z, für einen und denselben Werth von r, so bekommt man die Summe der Massen aller dieser (materiellen) Kreisbogen in der durch r gegebenen Kugelfläche, so weit sie als Durchschnitte derselben mit den sich über einander lagernden Ebenen, welche durch die verschiedenen Werthe von z, gegeben sind, existiren.

Im erstern Fall giebt die (dritte) Summation nach z, die Masse des ganzen Körpers als die Summe der Massen aller mit XOY parallelen Scheiben; im andern Fall giebt die (dritte) Summation nach r, die Summe der Massen aller dieser (materiellen) Kugelflächen (und Theile derselben) wie sie den ganzen Körper erfüllen.

Man begreift aber, daß man in beiden letzterwähnten Fällen, den Körper selbst zweckmäßig in solche Theile zerlegt denken müsse, die sich durch dreifache Integration des Körper-Elementes gerade ausfüllen lassen. — Man muß z. B. links der durch den Brennpunkt F, auf OX senkrecht gedachten Ebene E, eine Halbkugel sich denken aus F als Mittelpunkt und mit dem Radius $\frac{1}{4}p$ beschrieben, welche den Körper in O berührt. Rechts derselben Ebene muß man sich dagegen aus F als Mittelpunkt und mit dem Radius $\frac{1}{2}p$ eine Halbkugel beschrieben denken, welche entweder über die Grenz-Ebene noch rechts hinausragt (wenn $b > \frac{1}{4}p$ aber $< \frac{3}{4}p$ ist), so daß innerhalb unsers Körpers nur eine Zone derselben liegt, — oder welche ganz im Körper liegt (wenn $b > \frac{3}{4}p$). — Daher muß man sofort zwei Hauptfälle von einander unterscheiden, nämlich

1) wenn $b \leqq \frac{1}{4}p$ und

2) wenn $b > \frac{1}{4}p$

ist; und im letztern Fall müssen dann wieder zwei Unterfälle von einander unterschieden werden, nämlich

2. α) wenn $b > \frac{1}{4}p$ aber $b \overline{\overline{<}} \frac{3}{4}p$ ist, und

2. β) wenn $b > \frac{3}{4}p$ ist.

Ist $b < \frac{1}{4}p$, so bleibt von der Halbkugel zur Linken nur ein Segment innerhalb unsers Körpers, dessen Masse nun zuerst gefunden werden muß. Das übrige rings herum liegende Stück des Körpers muß dann, je nachdem man nach r zuerst, oder zuerst nach z integriren will (nachdem zu allererst nach y integrirt worden ist) wiederum jedesmal erst in solche Stücke zerlegt gedacht werden, die sich durch dreifache Integration ausfüllen.

Ist $b > \frac{1}{4}p$, — so muß man zuerst die Masse des links von F, liegenden Theils des Körpers ausdrücken, wie kurz vorher beschrieben steht. — Ist dann $b \overline{\overline{<}} \frac{3}{4}p$, so kommt die Reihe zunächst an die rechts liegende Kugelzone, die jedoch selbst wieder in eine Halbkugel, deren Radius $b - \frac{1}{4}p$ ist, und in den Rest, zerlegt werden muß; dann an den links herum um die Kugelzone liegenden Rest des Körpers, welcher aber wieder zerlegt gedacht werden muß, durch Ebenen die mit YOZ parallel so gelegt werden, daß sie beide Kreise der Kugelzone (von denen der größte den Radius $\frac{1}{2}p$, der kleinere aber den Radius $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - (b - \frac{1}{4}p)^2}$ hat) berühren, und in dem einen Fall auch durch Ebenen, die den aus F, in der Ebene E mit dem Radius $b - \frac{1}{4}p$, beschriebenen Kreis berühren.

Ist endlich $b > \frac{3}{4}p$, so wird zuerst die Masse der ganzen Halbkugel zur Rechten und dann noch die Masse des übrig bleibenden, und noch weiter zweckmäßig zu zerlegenden Theils des Körpers, ausgedrückt.

Wir überlassen es dem Anfänger, diese Untersuchung zu beendigen und die Resultate mit den, nach dem Anfange dieser Anmerkung auf rein analytischem Wege zu findenden, zu vergleichen; und thun dies um so lieber, als wir in den folgenden Paragraphen analoge Fragen vollständig beantwortet vorlegen wollen.

§. 33.

Führt man statt x und y zwei neue Veränderliche ein, nämlich r und φ, mittelst der Gleichungen

1) $x = G_{r,\varphi}$ und 2) $y = H_{r,\varphi}$,

wo $G_{r,\varphi}$ und $H_{r,\varphi}$ zwei beliebige Funktionen von r und φ vorstellen, so ist (nach §. 14.)

3) $dx \cdot dy = (\partial G_r \cdot \partial H_\varphi - \partial G_\varphi \cdot \partial H_r) \cdot dr \cdot d\varphi$,

wo der Ausdruck zur Rechten positiv genommen werden muß, wie das Produkt $dx \cdot dy$ zur Linken, es, der Voraussetzung zufolge, allemal ist; und man erhält daher nun

4) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma(\partial G_r \cdot \partial H_\varphi - \partial G_\varphi \cdot \partial H_r) \cdot f_{(r,\varphi,z)} \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ *),

wo $f_{(r,\varphi,z)}$ das bedeutet, was aus $f_{x,y,z}$ hervorgeht, wenn in letzterer Funktion, statt x und y, ihre Werthe (aus 1. und 2.) gesetzt werden, und wo $f_{(r,\varphi,z)}$ mit den Funktionen G und H auch zwei- oder mehrdeutig geworden sein kann.

Nimmt man z. B.

4) $(x - \frac{1}{4}p)^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und 5) $x - \frac{1}{4}p = r \cdot Cos\,\varphi$,

so wird

6) $x = \frac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\varphi = G_{r,\varphi}$

und

7) $y = \pm\sqrt{r^2 \cdot (Sin\,\varphi)^2 - z^2} = H_{r,\varphi}$,

und $f_{(r,\varphi,z)}$ mit H zugleich zweideutig. — Die Gleichung 6.) läßt sehen, daß man alle reellen Zahlen für x erhält, wenn man φ zwischen 0 und π, dagegen r blos positiv oder Null nimmt, während die Gleichung 7.) alle reellen Werthe für y dazu liefert. Man darf also nicht auch noch r negativ, und

---

*) Ist $\partial G_r \cdot \partial H_\varphi - \partial G_\varphi \cdot \partial H_r$ negativ, so muß auch $dr \cdot d\varphi$ negativ gedacht werden, also $dr \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$, aber $d\varphi$ dann $\begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$, weil $dx \cdot dy$ (aus 3.), nach unserer ein für allemal gemachten Annahme (nach welcher dx, dy und dz stets positiv gedacht sein sollen), stets positiv werden muß.

eben so wenig φ über π hinaus nehmen, weil man sonst die Werthe von x und von y mehreremale bekommen würde.

Man hat nun

$$\partial G_r = Cos\,\varphi, \qquad \partial H_\phi = \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi}{\pm\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}},$$

$$\partial G_\phi = -r \cdot Sin\,\varphi \quad \text{und} \quad \partial H_r = \frac{r \cdot Sin\,\varphi^2}{\pm\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}};$$

folglich ist

$$9) \qquad \partial G_r \cdot \partial H_\phi - \partial G_\phi \cdot \partial H_r = \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{\pm\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}}.$$

Zu jedem Werth von r gehören aber zwei Werthe von y; folglich muß jeder Werth von r, doppelt genommen werden und das einemal muß in $f_{(r,\phi,z)}$ die negative Wurzel $-\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}$, das anderemal aber die positive Wurzel $+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}$ gesetzt werden. Diese beiden Formen von $f_{(r,\phi,z)}$, wollen wir bezüglich durch f^{I} und f^{II} bezeichnen. Und da statt $\partial G_r \cdot \partial H_\phi - \partial G_\phi \cdot \partial H_r$ stets $\frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}}$ geschrieben werden kann, in so ferne man dr oder dφ entsprechend positiv oder negativ denken muß, so enthält die Summe Σ, immer je zwei Elemente, welche in den Ausdruck

$$(f^{I}+f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}}\,dr \cdot d\varphi \cdot dz,$$

den wir, der Kürze wegen,

durch $F_{r,\phi,z} \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$

bezeichnen wollen, — vereinigt werden können.

Werden nun in den gegebenen Grenzbedingungen

$$y^2 + z^2 \overline{\overline{<}}\, px \quad \text{und} \quad x \overline{\overline{<}}\, b,$$

statt x und y dieselben Werthe (aus 4. und 5.) substituirt, so gehen sie über in

$$8) \quad r^2 \cdot (Sin\,\varphi)^2 \overline{\overline{<}}\, \tfrac{1}{4}p^2 + pr \cdot Cos\,\varphi \quad \text{und} \quad 9) \quad \tfrac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\varphi \overline{\overline{<}}\, b.$$

Da $y^2+z^2=r^2 \cdot Sin\varphi^2$ ist und zugleich $\overline{\overline{<}} px$, und da x den Werth b erreichen kann, so können z^2 und $r^2 \cdot Sin\varphi^2$ den Werth pb erreichen, aber nie übersteigen, so daß noch festzuhalten sind die Bedingungen

10) $r \cdot Sin\varphi \overline{\overline{>}} \pm z$, wo $\pm z$ stets positiv sein muß und $z^2 \overline{\overline{<}} pb$, also daß pb der größte Werth ist, den z^2 erreichen kann.

Subtrahirt man die Ungleichung 8.) von r^2, so erhält man

$$r^2 \cdot (Cos\varphi)^2 \overline{\overline{>}} r^2 - pr \cdot Cos\varphi - \tfrac{1}{4}p^2$$

oder

$$r^2 \cdot (Cos\varphi)^2 + pr \cdot Cos\varphi + \tfrac{1}{4}p^2 \overline{\overline{>}} r^2 \text{ d. h. } (\tfrac{1}{2}p + r \cdot Cos\varphi)^2 \overline{\overline{>}} r^2;$$

d. h., weil $\frac{1}{4}p + r \cdot Cos\varphi$ $(=x)$, um so mehr also $\frac{1}{2}p + r \cdot Cos\varphi$, stets positiv ist, (nach §. 6 b.)

11) $\frac{1}{2}p + r \cdot Cos\varphi \overline{\overline{>}} r$, oder $r \overline{\overline{<}} \dfrac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\varphi}$,

oder $$Cos\varphi \overline{\overline{>}} 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r},$$

indem man die eine oder die andere Form dieser Ungleichung nehmen wird, je nachdem man zuerst nach r, oder zuerst nach φ summiren will.

Summirt man also zuerst nach r, dann nach φ, und zuletzt nach z, — so hat man die Bedingungen 8. (oder 11.) und 9. in der nachstehenden Form zu erfüllen, nämlich

11) $$r \overline{\overline{<}} \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\varphi}$$

und

12) $$r \overline{\overline{<}} \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\varphi},$$ so lange $Cos\varphi$ positiv ist,

aber

13) $$r \overline{\overline{>}} \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\varphi},$$ so lange $Cos\varphi$ negativ ist.

Außerdem ist noch die Bedingung 10.), nämlich

10) $$r \overline{\overline{>}} \frac{\pm z}{Sin\varphi},$$ wo $\pm z$ stets positiv sein muß, zu erfüllen.

A. Ist nun $b-\frac{1}{4}p$ negativ oder Null, d. h. $b \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$, — so ist $Cos\,\varphi$ nie positiv, weil sonst die Bedingung 12.) einträte, diese aber r negativ geben würde, was nie der Fall sein kann. Es finden also jetzt nur die Bedingungen 11.), 13.) u. 10.) statt.

Setzt man nun

$$14)\ \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}=r_1,\quad 15)\ \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}=r_2\ \text{ und }\ 16)\ \frac{\pm z}{Sin\,\varphi}=r_3,$$

so sind die Bedingungen 11.), 13.) und 10.) jetzt so zu schreiben, nämlich

$$11)\ r \overline{\overline{<}} r_1,\qquad 13)\ r \overline{\overline{>}} r_2\ \text{ und }\ 10)\ r \overline{\overline{>}} r_3.$$

Daher ist r_1 unbestritten der größte Werth von r; dagegen wird r_2 oder r_3 der kleinste Werth von r sein, je nachdem $r_2 < r_3$ oder $r_3 < r_2$, d. h. je nachdem $\frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi} <$ oder $> \frac{\pm z}{Sin\,\varphi}$ ist, und dies hängt von den verschiedenen Werthen von φ ab. — Bestimmt man nämlich φ'' aus der Gleichung $r_2 = r_3$, d. h. aus

$$17)\quad \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi''}=\frac{\pm z}{Sin\,\varphi''},\quad \text{oder}\quad Tg\,\varphi''=\frac{\pm z}{b-\frac{1}{4}p},$$

wo $\pm z$ stets positiv genommen werden muß, — so wird für $\varphi > \varphi''$, allemal $r_2 < r_3$; daher ist jetzt r_3 der kleinste Werth von r, weil aus $r > r_3$ auch $r > r_2$ zugleich mit hervorgeht. Ist aber $\varphi < \varphi''$, so ist allemal $r_2 > r_3$ und daher ist dann r_2 der kleinste Werth von r.

Für jeden Werth von φ, $> \varphi''$, geht also r, von r_3 an bis zu r_1 hin; für jeden Werth von φ dagegen, welcher $< \varphi''$ ist, geht r, von r_2 an bis zu r_1 hin. Weil aber im erstern Fall, wo $\varphi > \varphi''$ ist, doch immer $r_3 \overline{\overline{<}} r_1$ bleiben muß, so giebt die Gleichung $r_3 = r_1$ den größten Werth φ_1 von φ, so daß man φ_1 erhält aus der Gleichung

$$18)\quad Cos\,\varphi_1=\frac{z^2-\frac{1}{4}p^2}{z^2+\frac{1}{4}p^2}\quad \text{oder}\quad Tg\,\varphi_1=\frac{\pm pz}{z^2-\frac{1}{4}p^2},$$

wo $\pm pz$ stets positiv genommen werden muß. — Im andern

Fall, wo $\varphi < \varphi''$ ist, muß doch immer $r_2 \overline{\overline{<}} r_1$ bleiben, so daß die Gleichung $r_2 = r_1$ den kleinsten Werth φ' von φ, liefert, nämlich

$$19)\quad Cos\,\varphi' = \frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p}, \text{ oder } Tg\,\varphi' = \frac{+\sqrt{pb}}{b-\frac{1}{4}p}.$$

Während also r, von r_2 an bis zu r_1 hin geht, schreitet φ, von φ' an bis zu φ'' fort; weil aber doch immer $\varphi' \overline{\overline{<}} \varphi''$, d. h. $Tg\,\varphi' \overline{\overline{<}} Tg\,\varphi''$ d. h. $\frac{+\sqrt{pb}}{b-\frac{1}{4}p} \overline{\overline{<}} \frac{\pm z}{b-\frac{1}{4}p}$ d. h. (weil $b-\frac{1}{4}p$ negativ ist, nach §. 4[b].) $+\sqrt{pb} \overline{\overline{>}} \pm z$ sein und bleiben muß, so folgt, daß die Werthe von z, gleichzeitig von $-\sqrt{pb}$ bis zu $+\sqrt{pb}$ hin gehen.

Während aber r, von r_3 an bis zu r_1 hin geht, schreitet φ, von φ'' an bis zu φ_1 hin fort; und weil doch immer $\varphi'' \overline{\overline{<}} \varphi_1$, also $Tg\,\varphi'' \overline{\overline{<}} Tg\,\varphi_1$, d. h. $\frac{\pm z}{b-\frac{1}{4}p} \overline{\overline{<}} \frac{\pm pz}{z^2-\frac{1}{4}p^2}$, also auch $\frac{1}{b-\frac{1}{4}p} \overline{\overline{<}} \frac{p}{z^2-\frac{1}{4}p^2}$ sein und bleiben muß, diese Ungleichung aber $z^2 \overline{\overline{<}} pb$ liefert, so liegen auch jetzt alle zugehörigen Werthe von z, zwischen $-\sqrt{pb}$ und $+\sqrt{pb}$.

Wir müssen aber nun auch noch die beiden Formen von φ_1 (aus 18.), φ'' (aus 17.) und von r_3 (aus 16.), von einander unterscheiden, und wir wollen

φ_{-1}, $\varphi^{-''}$ und r_{-3} schreiben, wenn z negativ,

dagegen φ_{+1}, $\varphi^{+''}$ und r_{+3} dafür setzen, wenn z positiv ist, so daß

$$20)\quad Tg\,\varphi_{-1} = \frac{-pz}{z^2-\frac{1}{4}p^2},\quad Tg\,\varphi^{-''} = \frac{-z}{b-\frac{1}{4}p}$$

$$\text{und } r_{-3} = \frac{-z}{Sin\,\varphi}, \text{ wenn z negativ,}$$

aber

$$21)\quad Tg\varphi_{+1} = \frac{+pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2},\quad Tg\varphi^{+''} = \frac{+z}{b - \frac{1}{4}p}$$

und $r_{+3} = \frac{+z}{Sin\varphi}$, wenn z positiv ist,

genommen wird *).

Man findet daher nun

$$\text{I.}\quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_{-\sqrt{(pb)}}^{0}\left(\int_{\varphi'}^{\varphi^{-''}}\left(\int_{r_2}^{r_1} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz$$
$$+\int_{0}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{\varphi'}^{\varphi^{+''}}\left(\int_{r_2}^{r_1} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz$$
$$+\int_{-\sqrt{(pb)}}^{0}\left(\int_{\varphi^{-''}}^{\varphi_{-1}}\left(\int_{r_{-3}}^{r_1} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz$$
$$+\int_{0}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{\varphi^{+''}}^{\varphi_{+1}}\left(\int_{r_{+3}}^{r_1} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz,$$

wenn nur $b \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ ist, und $F = (f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\varphi^2 - z^2}}$. **)

Es ist aber einleuchtend, daß dieselbe Formel auch noch gilt, wenn $b = \frac{1}{4}p$ ist; es wird dann $+\sqrt{(pb)} = \frac{1}{2}p$; ferner (aus 19., 20. und 21.) $\varphi' = \varphi^{-''} = \varphi^{+''} = \frac{1}{2}\pi$; weshalb

---

*) Für zwei Werthe von z, welche, abgesehen vom Vorzeichen, einander gleich sind, wird allemal

$$\varphi^{-''} = \varphi^{+''} \quad \text{und} \quad r_{-3} = r_3$$

werden. Weil aber das „Rechnen" stets mit Formen und nicht mit Werthen statt findet, so müssen die Formen allein berücksichtigt werden.

**) Die Werthe $\varphi^{-''}$, $\varphi^{+''}$, φ_{-1}, φ_{+1} und φ' liegen alle im zweiten Quadranten. Bezeichnet man daher, wie jetzt gewöhnlich ist, durch *Arc tg.* v, den kleinsten, im ersten Quadranten liegenden und $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ genommenen Bogen, je nachdem v $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, dessen Tangente, = v wird, so hat man

$$\varphi^{-''} = \pi + Arc\,tg. \frac{-z}{b - \frac{1}{4}p};\quad \varphi^{+''} = \pi + Arc\,tg. \frac{+z}{b - \frac{1}{4}p};$$

$$\varphi_{-1} = \pi + Arc\,tg. \frac{-pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2};\quad \varphi_{+1} = \pi + Arc\,tg. \frac{+pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2};$$

und $\varphi' = \pi + Arc\,tg. \frac{+\sqrt{pb}}{b - \frac{1}{4}p}$; wo jeder *Arc tg.* negativ ist.

dann die beiden erstern dreifachen Integrale den Werth 0 annehmen d. h. wegfallen.

B. Ist $b-\frac{1}{4}p$ positiv, also $b>\frac{1}{4}p$, so können, ohne daß den Bedingungen 10.–13. widersprochen wird, die Werthe von φ im zweiten und auch im ersten Quadranten liegen, und man muß vor Allem diese beiden Gattungen von Werthen von φ von einander unterscheiden.

So lange φ von $\frac{1}{2}\pi$ an wächst, also $Cos\,\varphi$ negativ ist, beschränkt die Bedingung 13.) die Werthe von φ gar nicht, weil sie stets erfüllt ist, auch wenn φ bis π fortschreiten sollte. Es bleiben also jetzt nur noch die Bedingungen 11.) und 10.) zu erfüllen, so daß jetzt wiederum r_1 (aus 14.) der obere Grenzwerth von r ist, dagegen r_{-3} oder r_{+3} (aus 20. und 21.) der untere, je nachdem z negativ oder positiv genommen ist.

Der größte Werth φ_1 von φ, geht wieder aus der Gleichung $r_3=r_1$ hervor, und ist daher wieder genau der (in 18.) bereits gefundene und in 20.) und 21.) als φ_{-1} und φ_{+1} näher bestimmte.

Die Bedingungen, daß

$$\tfrac{1}{2}\pi \overline{\overline{<}} \varphi_{-1} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\pi \overline{\overline{<}} \varphi_{+1}$$

sein und bleiben muß, führen, wenn man die Kosinusse nimmt, zu den Ungleichungen

$$0 \overline{\overline{>}} Cos\,\varphi_{-1} \quad \text{und} \quad 0 \overline{\overline{>}} Cos\,\varphi_{+1}$$

d. h. zur Ungleichung

$$0 \overline{\overline{>}} z^2-\tfrac{1}{4}p^2, \quad \text{d. h.} \quad z^2 \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4}p^2$$

und geben die Grenzwerthe $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ von z.

Es sondert sich daher von unserer Summe Σ, ein Theil ab, welcher ausgedrückt ist durch

$$B_1 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{0}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_{-1}}\left(\int_{r_{-3}}^{r_1} F\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dz$$
$$+\int_{0}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_{+1}}\left(\int_{r_{+3}}^{r_1} F\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dz;$$

und dies ist genau das, was aus dem Resultat I. zur Rechten wird, sobald man sich $b = \frac{1}{4}p$ denkt *).

Kommen wir nun zu den Werthen von φ, welche $< \frac{1}{2}\pi$ sind und für welche $Cos\,\varphi$ positiv ist, — so sind nun die Bedingungen

11) $r \overline{\overline{<}} r_1$, 12) $r \overline{\overline{<}} r_2$ und 10) $r \overline{\overline{>}} r_3$

gleichzeitig zu erfüllen, so daß

r_1 als der größte und r_3 als der kleinste Werth von r,

zu nehmen ist, so lange $r_1 < r_2$, d. h. $\frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi} < \frac{b - \frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ ist, weil dann $r \overline{\overline{<}} r_1 < r_2$ zugleich ist; dagegen ist

r_2 der größte und r_3 der kleinste Werth von r,

so lange $r_1 > r_2$, d. h. $\frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi} > \frac{b - \frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ ist, weil dann gleichzeitig $r \overline{\overline{<}} r_2 < r_1$ ist. Die Gleichung $r_2 = r_1$ d. h. die Gleichung 19.), liefert die Grenze φ' dieser Werthe von φ (welcher Werth φ' aber jetzt im ersten Quadranten liegt), so daß für $\varphi \gtrless \varphi'$, allemal $r_1 \lessgtr r_2$ wird.

So lange also φ, von φ' bis zu $\frac{1}{2}\pi$ hin geht, so lange gehen die Werthe von r, von r_3 an bis zu r_1 hin; so wie aber $\varphi < \varphi'$ genommen wird, so gehen die Werthe von r, von r_3 an bis zu r_2 hin. Den allerkleinsten Werth φ'' von φ, erhält man, da stets $r_3 \overline{\overline{<}} r_2$ bleiben muß, aus der Gleichung $r_2 = r_3$, d. h. aus der Gleichung 17.) oder vielmehr aus den Gleichungen 20.) und 21.), während aber jetzt auch φ'' stets im ersten Quadranten liegt.

Die Bedingung, daß die untere Grenze φ' die obere Grenze

---

*) Auch hier ist wieder

$$\varphi_{-1} = \pi + Arc\,tg.\frac{-pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2} \quad \text{und} \quad \varphi_{+1} = \pi + Arc\,tg.\frac{+pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2}$$

und jeder $Arc\,tg.$ negativ.

$\frac{1}{2}\pi$ nie übersteigen darf, also die Ungleichung $\varphi' \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$, ist für jeden Werth von z erfüllt. Man muß also, wenn r zwischen r_3 und r_1, und φ zwischen φ' und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, die Grenzwerthe von z aus der Bedingung 10.), wie folgt, herholen.

Nach ihr ist nämlich der größte Werth von $\pm z$, so lange r_1 der größte Werth von r ist (für jeden bestimmten Werth von φ), offenbar $= r_1 \cdot Sin\,\varphi = \frac{1}{2}p \cdot \frac{Sin\,\varphi}{1 - Cos\,\varphi} = \frac{1}{2}p \cdot Cotg\,\frac{1}{2}\varphi$, und der allergrößeste für denjenigen der Werthe von φ (die jetzt zwischen φ' und $\frac{1}{2}\pi$ liegen) für welchen $Cotg\,\frac{1}{2}\varphi$ am größten ist, was für den kleinsten φ' dieser Werthe von φ, der Fall ist; man erhält daher für den größten Werth von $\pm z$, den Werth $\frac{1}{2}p \cdot Cotg\,\frac{1}{2}\varphi'$ d. h. (nach 19.) den Werth $+\sqrt{pb}$.

So wie aber die Werthe von r, von r_3 an bis zu r_2 hin gehen, und dann gleichzeitig die Werthe von φ, von φ'' an bis zu φ' hin, giebt die Bedingung $\varphi'' \overline{\overline{<}} \varphi'$, d. h.

$$Tg\,\varphi'' \overline{\overline{<}} Tg\,\varphi', \quad \text{d. h.} \quad \frac{\pm z}{b - \frac{1}{4}p} \overline{\overline{<}} \frac{+\sqrt{pb}}{b - \frac{1}{4}p}, \quad \text{sogleich}$$

$\pm z \overline{\overline{<}} +\sqrt{pb}$, (nach §. 4^{b}., da jetzt $b - \frac{1}{4}p$ positiv ist). Daher gehen auch jetzt die Werthe von z, von $-\sqrt{pb}$ an bis zu $+\sqrt{pb}$ hin.

Deshalb ist der Rest der Summe Σ, noch ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} B_2 \cdots \quad & \int_{-\sqrt{(pb)}}^{0}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_{r_{-3}}^{r_1} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz \\ & + \int_{0}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_{r_{+3}}^{r_1} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz \\ & + \int_{-\sqrt{(pb)}}^{0}\left(\int_{\varphi''_{-}}^{\varphi'}\left(\int_{r_{-3}}^{r_2} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz \\ & + \int_{0}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{\varphi''_{+}}^{\varphi'}\left(\int_{r_{+3}}^{r_2} F \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz. \end{aligned}$$

Daher ist nun

$$\text{II.} \qquad \Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = B_1 + B_2,$$

wenn nur $b > \frac{1}{4}p$ ist.

Es gilt aber auch dieses Resultat noch, wenn auch $b = \frac{1}{4}p$ ist; es wird dann $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$, so daß die beiden ersten dreifachen Integrale in B_2.) der Null gleich werden; ferner wird auch $\varphi'' = \frac{1}{2}\pi = \varphi'$; folglich werden auch die beiden andern dreifachen Integrale in B_2., der Null gleich. Die ganze Summe Σ reducirt sich dann auf B_1; und dies ist dasselbe, was die I. für $b = \frac{1}{4}p$ liefert.

In allen diesen dreifachen Integralen ist aber

$$F = (f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot \mathit{Sin}\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot \mathit{Sin}\,\varphi^2 - z^2}},$$

so daß, wenn man f^{II} wegläßt, der Theil der Summe Σ, sich ergiebt, in welchem statt y blos alle negativen Werthe gesetzt sind; — wenn man aber f^{I} wegläßt, der Theil der Summe Σ, ausgedrückt sich sieht, in welchem statt y blos alle positiven Werthe gesetzt worden sind *).

Anmerk. 1. Betrachtet man auch diesen Fall aus demselben geometrischen Standpunkt, wie in der Anmerk. zu §. 32ᵇ., so giebt der bestimmte Werth von z, eine mit YOX parallele Ebene; der bestimmte Werth von φ aber, eine Kegelfläche, deren Spitze F, und deren Axe OX ist, in so ferne (nach der 6.) φ

---

*) Weil aber in B_1.) die Werthe φ_{-1} und φ_{+1} im zweiten Quadranten liegen, so ist, wie in A.)

$$\varphi_{-1} = \pi + \mathit{Arc\,tg.} \frac{-pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2} \quad \text{und} \quad \varphi_{+1} = \pi + \mathit{Arc\,tg.} \frac{+pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2},$$

und jeder dieser *Arc tg.* ist negativ.

In B_2.) dagegen, wo φ_{-1}, φ_{+1}, $\varphi^{-''}$, $\varphi^{+''}$ und φ' im ersten Quadranten liegen, ist, nach der angenommenen Bedeutung von *Arc tg.*,

$$\varphi_{-1} = \mathit{Arc\,tg.} \frac{-pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2}; \quad \varphi_{+1} = \mathit{Arc\,tg.} \frac{+pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2};$$

$$\varphi^{-''} = \mathit{Arc\,tg.} \frac{-z}{z^2 - \frac{1}{4}p^2}; \quad \varphi^{+''} = \mathit{Arc\,tg.} \frac{+z}{z^2 - \frac{1}{4}p^2};$$

und $$\varphi' = \mathit{Arc\,tg.} \frac{+\sqrt{pb}}{b - \frac{1}{4}p};$$

wo jeder *Arc tg.* positiv ist.

den Winkel bedeutet, den der Radius-Vektor $FM = r$, welcher nach dem durch x, y und z bestimmten Punkt M (vom Brennpunkt F aus) hin geht, mit der Axe FX macht. Diese Kegelfläche wird von der vorgedachten Ebene in einer Hyperbel geschnitten, und die Masse dieser einzelnen materiellen hyperbolischen Bogen (vom unendlichkleinen Querschnitt) wird nun durch die erste Integration (nach r) gefunden. Denkt man sich hierauf dem φ nach und nach alle seine Werthe gegeben, so erhält man eine unendliche Menge materieller Kegelflächen, welche alle die gemeinschaftliche Spitze F und die gemeinschaftliche Axe OX haben, und welche alle von der, durch denselben konstanten Werth von z gegebenen Ebene geschnitten werden, so daß die Durchschnitte eine mit XOY parallele Scheibe bilden, die aus allen diesen stetig neben einander liegenden (materiellen) hyperbolischen Bogen besteht. Die zweite Integration (nach φ) giebt also die Summe der Massen aller dieser hyperbolischen (materiellen) Bogen, d. h. die Masse dieser Scheibe, welche die Dicke dz hat. Die dritte Integration (nach z) giebt dann die Summe der Massen aller dieser, mit YOX parallelen Scheiben, d. h. die Masse des Körpers.

Aus diesem Gesichtspunkte angesehen, und in dem Falle A., wo $b < \frac{1}{4}p$, wo also die begrenzende (vom Scheitel 0 um b entfernte) Ebene, links vom Brennpunkte F liegt, — geben die beiden letztern dreifachen Integrale der Formel I., die Masse eines Körpers, der links von der paraboloidischen Oberfläche begrenzt ist, im Uebrigen aber von einer eigenthümlichen krummen Fläche*), welche von der begrenzenden Ebene längs einer auf YOX senkrecht stehenden Geraden berührt wird, und deren mit

---

*) Die Gleichung für diese begrenzende Fläche ist

$$y^2+z^2 = \frac{(\frac{1}{4}p-x)^2}{(\frac{1}{4}p-b)^2} \cdot z^2,$$

wenn x, y und z die auf die Koordinaten-Axen OX, OY und OZ bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes derselben vorstellen. — Diese Fläche gehört also zu den algebraischen Flächen der vierten Ordnung.

YOX parallelen Querschnitte stets Hyperbeln sind. Dieser Körper besteht aus zwei Theilen, einem unteren, dessen Masse durch das dritte (dreifache) Integral ausgedrückt ist, und einem oberen, dessen Masse das vierte (dreifache) Integral liefert, und diese beiden Theile stoßen blos in einem Stück der Axe OX aneinander. — Die beiden erstern (dreifachen) Integrale geben dagegen die Masse des Restes des Paraboloids, und zwar giebt das erste (dreifache) Integral, die Masse des untern Theils, das zweite aber die Masse des obern Theils. Von diesem Reste besteht sowohl sein unterer, wie sein oberer Theil, wieder aus zwei von einander durch den vorher erwähnten Körper getrennten Theilen, von welchen der hintere Theil dem Summanden f^{I}, der vordere Theil aber dem Summanden f^{II}, der in F enthaltenen Summe $f^{I}+f^{II}$, angehört.

In dem Falle B. dagegen, wo $b>\frac{1}{4}p$ ist, giebt die Summe der (dreifachen) Integrale des Theils B_1 in II., die Masse der unteren und der oberen Hälfte desjenigen Stücks des Paraboloids, welches von einer durch den Brennpunkt F auf OX senkrecht gedachten Ebene, zur Linken abgeschnitten wird. — Die beiden erstern dreifachen Integrale in B_2 geben dagegen die Masse des zur Rechten dieser Ebene gelegenen Theils desselben, mit Ausnahme des Kegels, welcher seine Spitze im Brennpunkt F hat und dessen Grundfläche der Kreis ist, in welchem das (Umdrehungs-) Paraboloid von der begrenzenden Ebene geschnitten wird. — Die beiden letztern (dreifachen) Integrale in B_2., geben endlich die Masse der unteren und der oberen Hälfte dieses zuletzt erwähnten Kegels.

Dies ist die geometrische Auslegung der im Paragraphen erhaltenen analytischen Resultate.

Anmerk. 2. Wollte man aber diese (statisch-) geometrische Aufgabe direkt geometrisch lösen, d. h. wollte man die Masse des Umdrehungs-Paraboloids, welches durch die Gleichung

$$y_1^2+z_1^2=px,$$

wo z_1 bis zur Oberfläche reicht, gegeben ist, direkt und dadurch finden, daß man den beliebigen, durch x, y und z gegebenen Punkt M, im Innern (oder an der Oberfläche) desselben, mittelst $FM = r$, Winkel $MFX = \varphi$ und dann noch durch den senkrechten Abstand $\pm z$, desselben von der Koordinaten-Ebene YOX, angiebt; und unter der Voraussetzung, daß $f_{x,y,z}$ die Dichtigkeit der Stelle M ist, so daß diese Dichtigkeit durch $f^{I}_{(r,\varphi,z)}$ ausgedrückt sich sieht, wenn der Punkt M rückwärts von ZOX liegt, dagegen durch $f^{II}_{(r,\varphi,z)}$, wenn der Punkt M vorwärts von ZOX liegt, — (denn die drei neuen Koordinaten-Werthe r, φ und z bestimmen immer diese beiden Punkte M zugleich) — so würde man die Masse der rückwärts gelegenen, von ZOX gebildeten Hälfte für sich, und dann die Masse der vorwärts gelegenen Hälfte des Paraboloids wieder für sich suchen müssen.

Hierauf müßte man jeden dieser beiden Theile (oder das ganze Umdrehungs-Paraboloid) durch unendlichviele Kugelflächen, welche alle ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt im Brennpunkte F haben, und deren Radien, alle, um dr von einander verschiedene Werthe von r haben, ferner durch unendlichviele Kegelflächen, welche alle die gemeinschaftliche Spitze F und die gemeinschaftliche Axe FX haben, und deren Seiten mit FX nach und nach alle Winkel bilden, welche durch alle, um $d\varphi$ von einander verschiedene Werthe von φ gegeben sind, — endlich durch eine unendliche Menge mit YOX paralleler Ebenen, welche alle um dz von einander entfernt sind, — in unendlich kleine Elemente (Molecüle) zerlegen, und den Inhalt eines derselben, welches bei M liegt (und deshalb jedes beliebige derselben ist) berechnen. Wegen der unendlichen Kleinheit seiner Dimensionen kann solches als ein (schiefwinkliges) Parallel-Epipedum angesehen und danach berechnet werden. — Die drei Höhen desselben sind bezüglich dr, $r \cdot d\varphi$ und dz. — Die eine der drei Grundflächen, zu welcher die Höhe dr gehört, steht senkrecht auf der Geraden FM; — die andere dieser Grundflächen, zu welcher die Höhe $r \cdot d\varphi$ gehort, steht senkrecht auf der Ebene MFX und schneidet diese letztere in der Geraden FM; — die dritte Grundfläche, zu welcher die Höhe dz gehört, läuft parallel mit YOX. Aus dieser bestimmten Lage der beiden erstern Grundflächen gegen die dritte, werden nun die Winkel berechnet (in x, y, z und daher auch in r, φ und z ausgedrückt, weil man $x-\frac{1}{4}p = r \cdot Cos\,\varphi$ und $r^2 = (x-\frac{1}{4}p)^2+y^2+z^2$ hat), welche die drei in M zusammenstoßenden Kanten mit einander machen, — und aus diesen und den drei Höhen, berechnet sich zuletzt der Inhalt des Körper-Elements; und er findet sich

$$= \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz.$$ — Wird nun dieser Inhalt einmal mit f^{I}, das andere Mal mit f^{II} multiplicirt, so hat man das erste Mal die Masse des Elementes, welches an dem rückwärts gelegenen Punkt M, sich befindet, das andere Mal aber die Masse des an dem vorwärts gelegenen Punkt M befindlichen Elementes.

Werden nun die Massen der Elemente summirt, welche zu einem und demselben Werth von z und φ gehören, d. h. welche in dem Durchschnitt der mit YOX parallelen und durch z gegebenen Ebene, und der durch φ gegebenen Kegelfläche liegen, — also in einer mit YOX parallelen Hyperbel, — so bestimmen der Anfangs- und der End-Punkt dieses hyperbolischen Bogens, die Grenzwerthe von r, welche von φ und von z abhängig sein werden. Und da muß man sogleich unterscheiden, einmal ob der Anfangspunkt mit dem Scheitel der Hyperbel zusammenfällt, oder mit der begrenzenden Ebene, und dann, ob der Endpunkt mit der parabolischen Fläche zusammenfällt, oder mit der begrenzenden Ebene.

Und um diese Unterscheidung gehörig anstellen zu können, muß man wieder zwei Fälle beachten, nämlich ob die begrenzende (von 0 um b entfernte) Ebene links, oder rechts, von F liegt, d. h. ob $b<\frac{1}{4}p$, oder ob $b>\frac{1}{4}p$ gegeben ist.

Ist $b<\frac{1}{4}p$, d. h. liegt die Grenz-Ebene des Paraboloids links vom Brennpunkt F, so schneidet die durch z gegebene Ebene, die Ebene XOZ in einer Geraden AB, welche in A an die paraboloidische Fläche, in B dagegen an die Grenz-Ebene anstößt. Ist dann BC in der durch z gegebenen Ebene senkrecht auf AB gezogen, und stößt sie in C an die paraboloidische Fläche an; sind A' und B' die Projektionen von A und B auf die Axe OX (also auch auf die Ebene YOX); so ist $AA' = BB' = +z$, wenn AB oben liegt, aber $= -z$, wenn AB unten liegt, weil dann z negativ, also $-z$ erst wieder positiv ist. Ferner ist $OA' = \frac{1}{p}z^2$ (weil $AA' = \pm z$ die Ordinate und OA' die Abscisse der durch die Gleichung $u^2 = px$ gegebenen Umdrehungs-Parabel ist); dann ist noch $OB' = b$ so wie $FB' = \frac{1}{4}p - b$ und $FA' = \frac{1}{4}p - \frac{1}{p}z^2$. — Der Kegel, dessen Seite mit FX einen Winkel macht, welcher $>(AFX = \varphi_1)$ ist, wird von der durch z gegebenen Ebene innerhalb des Paraboloids nicht mehr getroffen, also ist φ_1 der größte Werth von φ; der Winkel $BFX = \varphi''$ giebt den Kegel, welcher der letzte ist, dessen zugehöriger Hyperbel-Scheitel noch nicht über die Grenz-Ebene hinaustritt, also noch nicht außerhalb unseres begrenzten Körpers liegt; der Winkel $CFX = \varphi'$ endlich ist der kleinste, dessen Kegel noch von der durch z gegebenen Ebene (an der Grenz-Ebene) getroffen wird.

Während also φ zwischen φ' und φ'' liegt, liegt blos ein Stück GH der Hyperbel, welches nicht bis zum Scheitel geht, innerhalb des begrenzten Körpers; dieses Stück GH lehnt sich in G an die paraboloidische Fläche, so daß $FG = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi} = r_1$ (vermöge der bekannten Polar-Gleichung $r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi}$ der Umdrehungs-Parabel) der zu diesem Werth von φ, gehörige größte Werth von r ist; während der andere Endpunkt H sich an die Grenz-Ebene anlegt, so daß $\frac{FB'}{FH} = Cos\,\varphi$, also

$FH = \frac{\frac{1}{4}p - b}{Cos\,\varphi} = r_2$, der zu diesem Werth von φ gehörige kleinste Werth von r ist. — Für jeden Werth von φ dagegen, welcher zwischen φ'' und φ_1 liegt, entsteht aus dem Durchschnitt der durch z gegebenen Ebene, mit der Kegelfläche, ein Hyperbelstück G'H', welches sich in G' ebenfalls an die paraboloidische Fläche anlegt, so daß wieder $FG' = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi} = r_1$, der zu diesem Werth von φ gehörige größte Werth von r, ist; während dasselbe Stück mit dem Scheitel H' zwischen A und B in AB liegt, so daß $Sin\,\varphi = \frac{\pm z}{FH'}$, also $FH' = \frac{\pm z}{Sin\,\varphi} = r_3$, der zu diesem Werth von φ gehörige kleinste Werth von r ist, — wobei $-z$ gesetzt werden muß, wenn AB unten liegt, z also negativ, folglich $-z$ erst wieder positiv und die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen äußerer Winkel $= \varphi$ (und stumpf) ist.

Auf diese Weise sieht man die Stücke des Körpers sich absondern, deren Massen einzeln durch dreifache Integrale ausgedrückt werden können. Es sind deren viere unterhalb YOZ, und eben so viele oberhalb; von diesen je vier Stücken liegen jedesmal zwei rückwärts von der Ebene XOZ, und zwei vorwärts derselben. Diese letztern zwei Stücke werden oben und unten, vorwärts und rückwärts, von einander durch eine krumme Fläche getrennt, welche durch alle in den, durch die verschiedenen Werthe von z gegebenen parallelen Ebenen, liegenden Hyperbeln gebildet wird, die als Durchschnitte dieser Ebenen, mit den verschiedenen zugehörigen Kegelflächen gebildet werden, die durch den für jeden andern Werth von z anders (höher oder tiefer) liegenden Punkt B gehen, deren Seite also durch den Winkel $BFX = \varphi''$ gegeben ist. Die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x', y' und z', eines beliebigen Punktes dieser krummen Fläche findet man, sobald man bedenkt, daß dieser Punkt in der eben erwähnten Kegelfläche liegt, deren Gleichung

$$\sqrt{y'^2 + z'^2} = (\tfrac{1}{4} - x') \cdot Tg\,\varphi''$$

ist, und auch in der durch z gegebenen Ebene, welche durch die Gleichung

$$z' = z$$

ausgedrückt ist, während man noch $Tg\,\varphi'' = -\frac{BB'}{FB} = \frac{\mp z}{\frac{1}{4}p - b}$ hat. Eliminirt man daher aus diesen letztern drei Gleichungen, sowohl $Tg\,\varphi''$, als auch z, so erhält man

$$y'^2 + z'^2 = \frac{(\frac{1}{4}p - x')^2}{(\frac{1}{4}p - b)^2} \cdot z'^2$$

oder

$$(\tfrac{1}{4}p - b)^2 \cdot y'^2 = [x'^2 - b^2 - \tfrac{1}{2}p(x' - b)] \cdot z'^2;$$

so daß diese krumme Fläche als eine algebraische Fläche der vierten Ordnung erkannt wird (wie wir schon in der Note zur vorhergehenden Anmerkung erwähnt haben).

Findet man nun die Masse eines jeden einzelnen dieser acht Körpertheile durch dreifache Integration, — zuerst nach r, wodurch sich die Masse eines der (materiellen) hyperbolischen Bogen ergiebt, — dann nach φ, wodurch sich die Summe der Masse aller der hyperbolischen Bogen ergiebt, welche in der durch z gegebenen Ebene liegen, also die Masse der durch diese Ebene gebildeten Scheibe, — zuletzt nach z, wodurch die Summe der Massen aller dieser Scheiben, d. h. die Masse des ganzen Körperstücks gewonnen wird, — so erhält man acht dreifache Integrale, von denen vier das Element

$f^{I} \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$, die andern vier dagegen das Element $f^{II} \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ enthalten. Dann können je zwei davon, welche in jedem der drei auf einander folgenden Integrale dieselben Grenzen haben, in ein einziges zusammengefaßt werden, welches das Element

$(f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ hat, dasselbe, was im Paragraphen durch $F \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ bezeichnet worden ist.

Der Grenzwerth φ_1 = W. AFX findet sich aus der Gleichung

$Tg\varphi_1 = -\frac{AA'}{FA'} = -\frac{\pm z}{\frac{1}{4}p - \frac{1}{p}z^2} = \frac{\pm pz}{z^2 - \frac{1}{4}p^2}$. — Der größte Werth von $\pm z$, ist aber der Radius des Kreises, in welchem die Grenz-Ebene das Paraboloid schneidet, und dieser ist wieder die Ordinate u der Parabel $u^2 = px$, deren Umdrehung das Paraboloid erzeugt hat, welche zu dem Werthe b von x gehört; also daß derselbe $= +\sqrt{pb}$ ist; — folglich ist der kleinste Werth von z, $= -\sqrt{pb}$, der größte dagegen, $= +\sqrt{pb}$; und so sind alle Grenzwerthe auch gehörig ausgedrückt.

Das Resultat wird daher ganz genau dasselbe, was wir im Paragraphen auf rein analytischem Wege gefunden haben. — Dabei scheint es uns, als wenn die rein analytische Behandlung auch die einfachere sein dürfte, besonders wenn man bedenkt, wie viel Mühe und Arbeit die Auffindung des Inhaltes des Körper-Elements macht, die wir hier nur eingeleitet haben, so daß man den Umfang der weiteren nöthigen Arbeiten daraus kaum erkennen dürfte.

Wir aber wollen den Anfänger in der rein analytischen Behandlung solcher Fragen besonders deshalb üben, weil in den Anwendungen auf weitere analytische Untersuchungen, Fragen vorkommen können und vorkommen, welche hieher gehören und welche sich nicht immer auch in einem geometrischen Gewande darstellen lassen.

Betrachten wir jetzt den andern Fall, wo $b > \frac{1}{4}p$ ist, wo also die Grenz-Ebene rechts vom Brennpunkte F des Umdrehungs-Paraboloids liegt. In diesem Falle muß man durch F eine Ebene legen, welche senkrecht auf OX steht, und welche das Paraboloid in zwei Theile zerlegt, einen rechts liegenden und einen links liegenden. Die Masse des letztern wird nun gerade so gefunden, wie in dem vorher betrachteten Fall, wo $b < \frac{1}{4}p$ ist, nur daß jetzt der Punkt B so liegt, daß
W. $BFX = \varphi'' = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$ wird und die zugehörige Kegelfläche jetzt in eine ebene Fläche übergeht, und zugleich auch

W. $CFX = \varphi' = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$ wird, diese andere Kegelfläche also mit der vorigen in dieselbe ebene Fläche zusammenfällt. Dasmal liegen also alle Werthe von φ blos zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und φ_1; und für jeden Werth von φ liefert dasmal die durch z gegebene Ebene jedesmal einen hyperbolischen Bogen, welcher innerhalb des Körpers bis zum Scheitel geht (der in der Geraden AB selbst liegt); daher fallen dasmal die beiden (vorwärts und rückwärts gelegenen) äußersten Stücken ganz aus, und das Resultat wird um so viel einfacher; und der Ausdruck, den man für die Masse dieses links von F, liegenden Körpertheils erhält, stimmt genau mit dem Ausdruck B_1 im Paragraphen überein.

Was nun den rechts von F liegenden Theil betrifft, so wird er von einer der Kegelflächen, deren Grundfläche der Durchschnittskreis ist, den die Grenz-Ebene mit dem Umdrehungs-Paraboloid bildet, und dessen Radius $= +\sqrt{pb}$ ist, — deren Seite also mit FX den Winkel φ' bildet, dessen Tangente $= \frac{+\sqrt{pb}}{b-\frac{1}{4}p}$ ist, so daß man $Cos\,\varphi' = \frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p}$ erhält, — in zwei Körpertheile zertheilt, nämlich in den letztgedachten Kegel und dann in das um diesen Kegel ausgehohlte Paraboloid, soweit es rechts von F liegt. In jedem dieser Theile gehen die durch die, von YOX um $\pm z$ abstehende Ebene gebildeten hyperbolischen Bogen stets bis zum Scheitel, während ihr anderes Ende sich im Kegel an die begrenzende Ebene anlegt, in dem Hohlkörper aber an die Fläche des Paraboloids. In dem Kegel hat φ den kleinsten Werth φ'', sobald die durch z gegebene Ebene die Kegelfläche innerhalb des Körpers nur gerade noch (an der Grenz-Ebene) trifft; daher ist $Tg\,\varphi'' = \frac{\pm z}{b-\frac{1}{4}p}$. — Im Hohlkörper gehen die Werthe von φ, von φ' an bis $\frac{1}{2}\pi$ hin, in dem ausgehohlten Kegel dagegen nur von φ'' an bis φ' hin. Im Hohlkörper ist für jeden Werth von φ, der Anfangswerth r_3 von r, — weil der entsprechende Scheitel der Hyperbel vertikal über der Axe OFX liegt, — offenbar

$= \frac{\pm z}{Sin\,\varphi}$; der Endwerth r_1 von r, ist dagegen durch die Polargleichung $r_1 = \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}$ der Umdrehungs-Parabel, gegeben. In dem herausgeholten Kegel ist noch immer $r_3 = \frac{\pm z}{Sin\,\varphi}$ der Anfangswerth von r, nur daß φ jetzt ganz andere Werthe hat; der Endwerth r_2 von r, ist dagegen, weil der zugehörige Punkt M in der Grenz-Ebene (also nicht mehr in der paraboloidischen Fläche) liegt, — gegeben als die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $= b - \frac{1}{4}p$, dessen Winkel aber φ ist, so daß man $r_2 \cdot Cos\,\varphi = b - \frac{1}{4}p$ oder $r_2 = \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ hat. Also findet man danach für die Masse des Hohlkörpers die Summe der beiden ersten (dreifachen) Integrale in B_2.; — für die Masse des ausgehohlten Kegels dagegen die Summe der beiden andern (dreifachen) Integrale ebendaselbst.

§. 34.

Suchen wir wieder wie im §. 31. die Summe

$$\sum_{y^2+z^2 \overline{\overline{<}} px,\ x \overline{\overline{<}} b} f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

führen wir wieder wie im §. 33. statt x und y, die beiden neuen Veränderlichen r und φ mittelst der Gleichungen

1) $x = \frac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\varphi$,

2) $r^2 = (x - \frac{1}{4}p)^2 + y^2 + z^2$ oder $r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 = y^2 + z^2$,

ein; so daß die Bedingungen $y^2+z^2 \overline{\overline{<}} px$ und $x \overline{\overline{<}} b$ übergehen in $r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2 + pr \cdot Cos\,\varphi$ und $r \cdot Cos\,\varphi \overline{\overline{<}} b - \frac{1}{4}p$, also auch (wenn man wie im §. 33. verfährt) in

3) $r(1 - Cos\,\varphi) \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ und 4) $r \cdot Cos\,\varphi \overline{\overline{<}} b - \frac{1}{4}p$,

während aus 2.) wiederum (wie im §. 33.) die Bedingung

5) $r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 \overline{\overline{>}} z^2$ oder $r \cdot Sin\,\varphi \overline{\overline{>}} \pm z$

hervorgeht, wo $\pm z$ stets eine positive Zahl vorstellt; — summiren wir aber jetzt die Elemente zuerst nach φ (für konstant gedachte Werthe von r und z), dann diese Summen wieder nach r (für den konstanten Werth von z); — zuletzt aber die so erhaltenen Summen noch für alle Werthe von z.

Bei dem jetzigen Verlangen müssen wir den zu erfüllenden Bedingungen 3.), 4.) u. 5.) die nachstehende Form geben, nämlich

$$6)\quad Cos\,\varphi \geqq 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r},\quad 7)\quad Cos\,\varphi \leqq \frac{b-\frac{1}{4}p}{r}\quad \text{und}\quad 8)\quad Sin\,\varphi \geqq \frac{\pm z}{r}.$$

Diese Bedingungen 6.), 7.) und 8.) sind also allein zu erfüllen. — Die Bedingung 8.) liefert (nach §. 4^b.)

$$9)\quad Cos\,\varphi \leqq +\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2},\quad \text{so lange}\quad \varphi<\tfrac{1}{2}\pi,$$

dagegen

$$10)\quad Cos\,\varphi \geqq -\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2},\quad \text{so lange}\quad \varphi>\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ist;}$$

also sind die Bedingungen 6.), 7.), und 9.) oder 10.) zu erfüllen. — Da $Cos\,\varphi$ immer zwischen -1 und $+1$ liegt, so ist die Bedingung 6.) allemal erfüllt, ohne daß dadurch der Werth von φ, eine Beschränkung erleidet, so oft

$$11)\quad 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r} \leqq -1,\quad \text{d. h.}\quad r \leqq \tfrac{1}{4}p$$

ist. — Die Bedingung 7.) ist aus demselben Grunde allemal erfüllt, ohne daß durch sie der Werth von φ eine Beschränkung erlitte, so oft

$$12)\quad \frac{b-\frac{1}{4}p}{r} \geqq 1 \quad \text{d. h.}\quad r \leqq b-\tfrac{1}{4}p, \text{ was } b>\tfrac{1}{4}p \text{ voraussetzt,}$$

weil r nie negativ sein darf.

Diese beiden Vergleichungen 11.) und 12.) finden gleichzeitig statt, so oft

$$\tfrac{1}{4}p = b-\tfrac{1}{4}p \quad \text{d. h.}\quad b=\tfrac{1}{2}p,\quad (\text{also auch}\quad b>\tfrac{1}{4}p)$$

ist. — Ist aber

$$\tfrac{1}{4}p > b-\tfrac{1}{4}p \quad \text{d. h.}\quad b<\tfrac{1}{2}p,$$

so enthält die Vergleichung 12.) allemal auch die Vergleichung 11.) in sich, welche Vergleichung 12.) ebenfalls $b > \frac{1}{4}p$ voraussetzt. — Ist aber

$$\tfrac{1}{4}p < b - \tfrac{1}{4}p \quad \text{d. h.} \quad b > \tfrac{1}{2}p,$$

so enthält umgekehrt die Vergleichung 11.) allemal zugleich die 12.) in sich.

Ist also $b < \frac{1}{2}p$, aber $> \frac{1}{4}p$, so erleiden die Werthe von φ, weder durch die Bedingung 6.), noch durch die Bedingung 7.) irgend eine Beschränkung, so lange r zwischen 0 und $b - \frac{1}{4}p$ $(< \frac{1}{4}p)$ liegt.

Ist aber $b > \frac{1}{2}p$, also ebenfalls $b > \frac{1}{4}p$, so findet dieselbe Nichtbeschränkung der Werthe von φ (durch die Bedingungen 6. und 7.) statt, so lange die Werthe von r, zwischen 0 und $\frac{1}{4}p\,(< b - \frac{1}{4}p)$ liegen.

Um zu wissen, ob die Bedingung 9.) oder die 10.) zu berücksichtigen ist, muß man untersuchen, wann $Cos\,\varphi$ negativ, wann er positiv wird. Die Bedingung 7.) läßt aber sehen, daß $Cos\,\varphi$ nie positiv sein kann, so lange $b < \frac{1}{4}p$ gegeben ist; daß aber $Cos\,\varphi$ auch positiv werden kann, sobald $b > \frac{1}{4}p$ gegeben sein sollte.

Erster Fall. Wenn $b < \frac{1}{4}p$ ist. —

In diesem Falle ist jeder Werth von $\varphi > \frac{1}{2}\pi$, und es ist daher jetzt die Bedingung 9.) nicht, sondern die Bedingung

$$10) \quad Cos\,\varphi \overset{=}{>} -\frac{1}{r} \cdot \sqrt{r^2 - z^2}$$

zugleich mit den Bedingungen

$$6) \quad Cos\,\varphi \overset{=}{>} 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r} \quad \text{und} \quad 7) \quad Cos\,\varphi \overset{=}{<} \frac{b - \frac{1}{4}p}{r}$$

zu erfüllen. Die 7.) giebt unbestritten den untern Grenzwerth φ'' von φ, nämlich die Gleichung

$$13) \quad Cos\,\varphi'' = \frac{b - \frac{1}{4}p}{r} = -\frac{\frac{1}{4}p - b}{r},$$

weil keine der beiden andern Bedingungen ihr widersprechen kann.

Da ferner, wie wir kurz vorher gesehen haben, so lange der Werth von r, $< \frac{1}{4}p$ ist, die Bedingung 6.) für jeden Werth von φ, sich erfüllt sieht, — so ist der obere Grenzwerth φ' von φ, dann aus der noch übrigen Bedingung 10.), nämlich aus der Gleichung

$$14) \qquad Cos\,\varphi' = -\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2}$$

zu entnehmen.

Und da stets $\varphi'' \overline{\overline{<}} \varphi'$ sein und bleiben muß, so giebt die Gleichung $\varphi'' = \varphi'$, d. h. $Cos\,\varphi'' = Cos\,\varphi'$ d. h. $\frac{\frac{1}{4}p-b}{r} = \frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2}$, den untern Grenzwerth r_2 von r, nämlich

$$15) \qquad r_2 = +\sqrt{z^2+(\tfrac{1}{4}p-b)^2},$$

während $\frac{1}{4}p$ der obere Grenzwerth bleibt. Da endlich stets $r_2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ bleiben muß, so giebt die Gleichung $r_2 = \frac{1}{4}p$ d. h. $\sqrt{z^2+(\frac{1}{4}p-b)^2} = \frac{1}{4}p^2$ den größten Werth z'^2 von z^2, nämlich

$$16) \qquad z' = +\sqrt{\tfrac{1}{2}bp-b^2} = +\sqrt{b(\tfrac{1}{2}p-b)},$$

so daß zu gleicher Zeit alle Werthe von z, zwischen $-z'$ und $+z'$ liegen.

Es sondert sich also ein Theil unserer Summe Σ ab, welcher ausgedrückt ist durch das dreifache Integral

$$A_1 \cdots \quad \int_{-z'}^{z'}\left(\int_{r_2}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz,$$

wenn wir wiederum den Ausdruck

$$17) \qquad (f^{I}+f^{II})\cdot\frac{r^2\cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2\cdot Sin\,\varphi^2-z^2}} \quad \text{durch F}$$

bezeichnen.

Kommen wir nun zu den Werthen von r, welche größer als $\frac{1}{4}p$ sind, und für welche die Bedingung 6.) mit der 10.) zugleich, die Werthe von φ beschränkt. Um diesen beiden Bedingungen, nämlich

$$6)\quad Cos\,\varphi \overline{\overline{>}} 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r} \quad \text{und} \quad 10)\quad Cos\,\varphi \overline{\overline{>}} -\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2}$$

gleichzeitig zu genügen, muß man vor Allem den Werth r_1 von r suchen, für welchen

$$1-\frac{\frac{1}{2}p}{r_1} = -\frac{1}{r_1}\cdot\sqrt{r_1^2-z^2}$$

ist, nämlich

$$18)\qquad r_1 = \tfrac{1}{4}p+\frac{1}{p}z^2;$$

dann ist für jeden Werth von r, welcher $\lesseqgtr r_1$ ist, auch

$$1-\frac{\frac{1}{2}p}{r} \lesseqgtr -\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2},$$

so daß, wenn $r<r_1$ genommen ist, man nur der Bedingung 10.) allein zu genügen hat, um der Bedingung 6.) mit genügt zu haben, — wenn aber $r>r_1$ ist, nur der Bedingung 6.) genügt werden muß, um der Bedingung 10.) zugleich genügt zu haben.

Liegt also der Werth von r, zwischen $\frac{1}{4}p$ und r_1, so bestimmt sich die obere Grenze φ' von φ, wiederum aus der 10.) d. h. aus der Gleichung 14.); so wie aber $r>r_1$ ist, so bestimmt sich der obere Grenzwerth φ_1 von φ, aus der 6.), d. h. aus der Gleichung

$$19)\qquad Cos\,\varphi_1 = 1-\frac{\frac{1}{2}p}{r}.$$

Nun muß aber immer, im Falle $r\overline{\overline{>}}\frac{1}{4}p$, aber $r\overline{\overline{<}}r_1$ ist, $\varphi''\overline{\overline{<}}\varphi'$ bleiben; daher giebt die Gleichung $Cos\,\varphi'' = Cos\,\varphi'$, jetzt noch einen zweiten untern Grenzwerth von r, nämlich wiederum r_2 aus 15., welches aber jetzt $r_2\overline{\overline{>}}\frac{1}{4}p$ d. h.

$z^2+(\frac{1}{4}p-b)^2\overline{\overline{>}}\frac{1}{16}p^2$ d. h. $z^2\overline{\overline{>}}z'^2$ voraussetzt. Wir haben also dasmal **zwei** untere Grenzwerthe von r, zu deren jedem der obere Grenzwerth r_1 von r, gehört; und dabei fällt r_2 mit $\frac{1}{4}p$ zusammen für $z^2 = z'^2$, mit welchem Werthe von z^2, die Werthe von z^2 beginnen, so oft r_2 als untere Grenze genommen wird. Die Werthe von r, gehen also beide Male von $\frac{1}{4}p$ bis r_1; da nun, wenn r_2 als untere Grenze genommen wird, die Werthe von z^2 alle, $\overline{\overline{>}} z'^2$ sind, so müssen, wenn $\frac{1}{4}p$ als untere Grenze genommen wird, die Werthe von z^2 alle, $< z'^2$ genommen werden, damit man zu allen zusammengehörigen Werthen von φ und r, alle Werthe von z hinzugefügt habe. Und weil da, wo $z^2 \overline{\overline{>}} z'^2$ genommen werden muß, die oberste Grenze von z^2 keine weitere Beschränkung erfährt, so muß solche der allergrößeste Werth sein, den z^2 überhaupt annehmen kann; dieser ist aber (nach den Bedingungen $y^2 + z^2 \overline{\overline{<}} px$ und $x \overline{\overline{<}} b$), offenbar $= pb$.

Es sondern sich daher Theile der Summe Σ, ab, welche ausgedrückt sind durch

$$A_2 \cdots \quad \int_{-z'}^{z'} \left(\int_{\frac{1}{4}p}^{r_1} \left(\int_{\varphi''}^{\varphi'} F \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot dz$$

und

$$A_3 \cdots \quad \int_{-\sqrt{(pb)}}^{-z'} \left(\int_{r_2}^{r_1} \left(\int_{\varphi''}^{\varphi'} F \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot dz$$
$$+ \int_{z'}^{\sqrt{(pb)}} \left(\int_{r_2}^{r_1} \left(\int_{\varphi''}^{\varphi'} F \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot dz.$$

Geht man nun zu den Werthen von r, welche größer als r_1 sind, so gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu φ_1 hin, und die Gleichung $Cos\,\varphi'' = Cos\,\varphi_1$ giebt

$$r = b + \tfrac{1}{4}p$$

als die obere Grenze von r; und da stets $r_2 \overline{\overline{<}} b + \frac{1}{4}p$ sein und bleiben muß, so giebt die Gleichung $r_2 = b + \frac{1}{4}p$ wiederum $z^2 = pb$, als den größten Werth von z^2.

Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch

$$A_4 \cdots \quad \int_{-\sqrt{(pb)}}^{\sqrt{(pb)}} \left(\int_{r_1}^{b+\frac{1}{4}p} \left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1} F \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot dz.$$

Man findet also jetzt, wo $b < \frac{1}{4}p$ vorausgesetzt ist,

$$\text{I.} \quad \Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

wenn nur φ', φ'', φ_1, z', r_2 und r_1 aus den Gleichungen 14.), 13.), 19.), 16.), 15.) und 18.) ihre Bestimmung finden*).

Zweiter Fall. Ist aber $b > \frac{1}{4}p$, so muß man sofort die Werthe von φ absondern, welche $> \frac{1}{2}\pi$ sind und für welche die Grenzbedingung 10.) eintritt, — von denen, welche $< \frac{1}{2}\pi$ sind, und für welche die Grenzbedingung 9.) statt findet.

Ist $\varphi > \frac{1}{2}\pi$, so ist die Bedingung 7.) stets erfüllt, selbst wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist; es bleibt also $\frac{1}{2}\pi$ der untere Grenzwerth von φ. — Liegt dann r zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$, so ist die Bedingung 6.) ebenfalls stets (d. h. für jeden Werth von φ) erfüllt; es bleibt daher nur noch die Bedingung 10.) zu erfüllen und diese liefert wieder den obern Grenzwerth φ' (aus 14.). — Und weil stets $\frac{1}{2}\pi \overline{\overline{<}} \varphi'$ bleiben muß, so giebt die Gleichung $\frac{1}{2}\pi = \varphi'$ oder $Cos\,\varphi' = 0$ den unteren Grenzwerth von r, nämlich

$$r = \pm z, \quad \text{je nachdem } z \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix} \text{ist.}$$

Die Grenzwerthe von z, ergeben sich aus der Gleichung zwischen dem obern und untern Grenzwerth von r, nämlich aus der Gleichung $\frac{1}{4}p = \pm z$, so daß alle Werthe von z jetzt zwischen $-\frac{1}{4}p$ und $+\frac{1}{4}p$ liegen.

Es sondert sich also ein Stück der Summe Σ, ab, welches ausgedrückt ist durch die Summe der dreifachen Integrale

$$B_1 \cdots \int_{-\frac{1}{4}p}^{0}\left(\int_{-z}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{z}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz,$$

---

*) Man hat danach

$$\varphi' = Arc\,cos.\left(-\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2 - z^2}\right); \qquad \varphi'' = Arc\,cos.\,\frac{b - \frac{1}{4}p}{r}$$

und
$$\varphi_1 = Arc\,cos.\left(1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r}\right),$$

wenn, wie dies jetzt gewöhnlich ist, unter $Arc\,cos.\,v$ der kleinste (im ersten oder) im zweiten Quadranten liegende Bogen verstanden wird, dessen Kosinus (den positiven oder) den negativen Werth v hat.

oder auch

$$\int_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{+\sqrt{(z^2)}}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\phi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz \text{ *)}.$$

Ist nun $r > \frac{1}{4}p$, so treten wieder die Bedingungen 6.) und 10.) zugleich auf, die sich gegenseitig beschränken. Man erhält daher wieder r_1 (aus 18.) so, daß, so lange $r < r_1$ ist, wiederum die obere Grenze von φ, $= \varphi'$ (aus 14.) gefunden wird, so wie aber $r > r_1$ wird, dann φ_1 (aus 19.) als der obere Grenzwerth von φ sich ergiebt. Die Gleichung $\frac{1}{2}\pi = \varphi_1$ giebt dann den allergrößten Grenzwerth von r, nämlich

$$r = \tfrac{1}{2}p.$$

So lange aber r zwischen $\frac{1}{4}p$ und r_1 liegt, muß doch immer $\varphi'' \overline{\overline{<}} \varphi'$ bleiben; daher giebt die Gleichung $Cos\,\varphi'' = Cos\,\varphi'$ abermals den zweiten unteren Grenzwerth r_2 (aus 15.), welcher für $z^2 = z'^2$ (aus 16.) mit $\frac{1}{4}p$ zusammenfällt, außerdem aber stets $z^2 > z'^2$ voraussetzt.

Es sondern sich daher noch drei Theile der Summe Σ, ab, welche ausgedrückt sind durch

$$B_2 \cdots \int_{-z'}^{z'}\left(\int_{\frac{1}{4}p}^{r_1}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\phi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz,$$

$$B_3 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{0}\left(\int_{r_2}^{r_1}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\phi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{r_2}^{r_1}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\phi'} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz$$

und

$$B_4 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{r_1}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\phi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz,$$

wenn nur φ', φ_1, z', r_2 und r_1 genau wie vorher bestimmt werden.

Auch diese Resultate B_2, B_3 und B_4 gehen bezüglich aus A_2, A_3 und A_4 hervor, wenn man in letzteren Ausdrücken $\frac{1}{4}p$

---

*) Dies Resultat ist dem gleich, was aus A_1 hervorgeht, wenn man daselbst $\frac{1}{4}p$ statt b setzt, wie die wirkliche Substitution sehen läßt.

statt b setzt, weil dann (aus 13.) $Cos\,\varphi'' = 0$ und $\varphi'' = \frac{1}{2}\pi$ wird, während pb in $\frac{1}{4}p^2$ übergeht.

Kommen wir nun zu den Werthen von φ, welche $<\frac{1}{2}\pi$ sind, so daß nun die Bedingung 10.) nicht mehr, dafür aber die Bedingung 9.) zu erfüllen bleibt, welche jetzt mit der Bedingung 7.) in gegenseitigen Kampf tritt. Man muß zu dem Ende wieder die beiden Ausdrücke zur Rechten in 7.) und 9.) einander gleich setzen, um denjenigen Grenzwerth r_2 von r, zu erhalten, nämlich

$$r_2 = +\sqrt{z^2+(b-\tfrac{1}{4}p)^2},$$

welcher so ist, daß, wenn man nimmt

$$r \lessgtr r_2, \quad \text{dann} \quad \frac{b-\frac{1}{4}p}{r} \gtrless \frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2}$$

sein muß, — also daß

für $r<r_2$ die Bedingung 9.) allein, aber

für $r>r_2$ die Bedingung 7.) allein

zu erfüllen bleibt, weil dann stets die andere zugleich schon mit erfüllt ist. Dieser Werth r_2 ist genau derselbe wie in 15.), weil $(\frac{1}{4}p-b)^2 = (b-\frac{1}{4}p)^2$ ist. — Der aus der Bedingung 9.) hervorgehende Grenzwerth φ' von φ, ist aber

$$20) \qquad Cos\,\varphi' = +\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-z^2}\ ^{*)},$$

während der aus der Bedingung 7.) hervorgehende Grenzwerth φ'' von φ, aus der Gleichung

$$Cos\,\varphi'' = \frac{b-\frac{1}{4}p}{r}$$

gefunden wird und derselbe ist, wie der aus 13.). — So lange also $r<r_2$ ist, tritt der Grenzwerth φ' (aus 20.) von φ auf; so wie aber $r>r_2$ wird, tritt der Grenzwerth φ'' von φ ein.

---

*) Dieser Werth von $Cos\,\varphi'$, ist von dem Werthe $Cos\,\varphi'$ in 14.) blos durch das Vorzeichen verschieden.

Nun ist aber auch noch die Bedingung 6.) zu erfüllen, nämlich die Bedingung $Cos\,\varphi \overline{\overline{>}} 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r}$. Da wir jetzt nur noch die Werthe von φ haben, für welche $Cos\,\varphi$ positiv ist, so ist diese Bedingung allemal (d. h. für jeden Werth von φ) erfüllt, so oft $\frac{\frac{1}{2}p}{r} \overline{\overline{>}} 1$, d. h. $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ ist. — So lange also $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ ist, so lange bleibt φ durch die Bedingung 6.) unbeschränkt, eben so lange ist also $\frac{1}{2}\pi$ die obere Grenze der Werthe von φ. — So wie aber $r > \frac{1}{2}p$ wird, so tritt diejenige obere Grenze φ_1 von φ, ein, welche gegeben ist durch die Gleichung 19.), nämlich

$$19)\qquad Cos\,\varphi_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r},$$

welche die Bedingung 6.) an die Hand giebt.

Ist also

α) $r \overline{\overline{<}} r_2$ und gleichzeitig $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$,

so gehen die Werthe von φ, von φ' an bis zu $\frac{1}{2}\pi$ fort.

Dieser Fall tritt ein

1) wenn $r \overline{\overline{<}} r_2$ und $r_2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ d. h. $z^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2 - (b - \frac{1}{4}p)^2$ ist, und

2) wenn $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ und $r_2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ d. h. $z^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2 - (b - \frac{1}{4}p)^2$ ist.

Ist ferner

β) $r \overline{\overline{<}} r_2$ und gleichzeitig $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$,

so gehen die Werthe von φ, von φ' an bis zu φ_1 fort.

Dieser Fall tritt ein, wenn r zwischen $\frac{1}{2}p$ und r_2 liegt und $r_2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ d. h. $z^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2 - (b - \frac{1}{4}p)^2$ ist.

Ist aber

γ) $r \overline{\overline{>}} r_2$ und gleichzeitig $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$,

so gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu $\frac{1}{2}\pi$ fort.

Dieser Fall tritt ein, wenn r zwischen r_2 und $\frac{1}{2}p$ liegt und wenn $r_2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ d. h. $z^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2 - (b - \frac{1}{4}p)^2$ ist. — Hat man endlich δ) $r \overline{\overline{>}} r_2$ und gleichzeitig $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$,

so gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu φ_1 hin.

Dieser Fall tritt ein

1) wenn $r \overline{\overline{>}} r_2$ und $r_2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ d. h. $z^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2-(b-\frac{1}{4}p)^2$ und

2) wenn $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}p$ und $r_2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ d. h. $z^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2-(b-\frac{1}{4}p)^2$ ist.

Die Fälle α. 1.), γ.) und δ. 2.) setzen $b-\frac{1}{4}p<\frac{1}{2}p$ d. h. $b<\frac{3}{4}p$ voraus, weshalb man von nun an zwei Unterfälle zu betrachten hat, einmal wenn $b \overline{\overline{<}} \frac{3}{4}p$ und dann, wenn $b>\frac{3}{4}p$ ist.

Erster Unterfall. Wenn $b \overline{\overline{<}} \frac{3}{4}p$ (aber noch $>\frac{1}{4}p$) ist. — Unter dieser Voraussetzung werden alle sechs Fälle α.—δ.) eintreten können. Bezeichnen wir der Kürze wegen

22) $+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-(b-\frac{1}{4}p)^2}$ durch z'',

so giebt in dem Falle α.), die Gleichung $Cos\,\varphi' = Cos\,\frac{1}{2}\pi = 0$, den Werth $r = \pm z$ je nachdem $z \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist, als unteren Grenzwerth, während in α. 1.) r_2 als der obere Grenzwerth dazu kommt, und gleichzeitig z''^2 der größte Werth von z^2 ist; dagegen ist in α. 2.) $\frac{1}{2}p$ der obere Grenzwerth von r, während gleichzeitig z''^2 der kleinste Werth von z^2 ist, und der andere Grenzwerth von z^2, aus der Gleichung $z^2 = r^2 \cdot Sin\,\varphi^2$ für den größten Werth $\frac{1}{2}\pi$ von φ, und für den größten Werth $\frac{1}{2}p$ von r hervorgeht, so daß er $= \frac{1}{4}p^2$ ist.

Der Fall α.) giebt uns also Theile der Summe Σ, welche ausgedrückt sind, wie folgt, nämlich

$$B_5 \text{ (aus } \alpha.\,1.) \cdots \int_{-z''}^{0}\left(\int_{-z}^{r_2}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz + \int_{0}^{z''}\left(\int_{z}^{r_2}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz$$

und

$$B_6 \text{ (aus } \alpha.2.) \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{-z''}\left(\int_{-z}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\phi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz$$
$$+\int_{z''}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{z}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\phi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz.$$

Im Falle β.) gehen die Werthe von φ, von φ' an bis zu φ_1 hin, — die von r aber von $\frac{1}{2}p$ an bis zu r_2 hin, während z''^2 der kleinste Werth von z^2 ist. Der größte Werth von z^2 geht dabei aus der Bedingung hervor, daß r_2 den allergrößten Werth $b+\frac{1}{4}p$ *) von r, nicht übersteigen darf, also aus der Gleichung $r_2 = b+\frac{1}{4}p$ oder $\sqrt{z^2+(b-\frac{1}{4}p)^2} = b+\frac{1}{4}p$, welche

$$z^2 = pb$$

liefert. Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch

$$B_7 \cdots \int_{-\sqrt{(pb)}}^{-z''}\left(\int_{\frac{1}{2}p}^{r_2}\left(\int_{\phi'}^{\phi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz$$
$$+\int_{z''}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{\frac{1}{2}p}^{r_2}\left(\int_{\phi'}^{\phi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz.$$

Im Falle γ.) geht φ, von φ'' an bis zu $\frac{1}{2}\pi$, während r, von r_2 an bis zu $\frac{1}{2}p$ geht, und z''^2 der größte Werth von z^2 ist. Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch

$$B_8 \cdots \int_{-z''}^{z''}\left(\int_{r_2}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\phi''}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz.$$

Im Falle δ.) endlich gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu φ_1 hin, während in δ. 1.) die Werthe von r, von r_2 an bis zu $b+\frac{1}{4}p$ hin gehen, und die zugehörigen Werthe von z^2, von z''^2 anfangen und bis zu dem Werth von z^2 fortgehen, welcher aus der Vergleichung der beiden Grenzwerthe

---

*) Nach 6.) ist der allergrößte Werth von r, $= \dfrac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}$ für den größten Werth von $Cos\,\varphi$, welcher nach 7.) $= \dfrac{b-\frac{1}{4}p}{r}$ ist, und welcher $\dfrac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}$, $= \dfrac{\frac{1}{2}pr}{r-b+\frac{1}{4}p}$ macht. Man erhält also den allergrößten Werth von r, aus der Gleichung $r = \dfrac{\frac{1}{2}pr}{r-b+\frac{1}{4}p}$, und diese giebt $r = b+\frac{1}{4}p$.

r_2 und $b+\frac{1}{4}p$ von r, nämlich aus der Gleichung $\sqrt{z^2+(b-\frac{1}{4}p)^2}=b+\frac{1}{4}p$ hervorgeht, welche Gleichung

$$z^2 = pb$$

liefert. — In δ. 2.) dagegen gehen die Werthe von r, von $\frac{1}{2}p$ an bis zu $b+\frac{1}{4}p$ fort, während gleichzeitig z''^2 der größte Werth von z^2 ist. — Diese beiden Fälle δ.) liefern daher noch Stücken der Summe Σ, welche ausgedrückt sind durch

$$B_9 \text{ (aus } \delta. 1.) \cdots \int_{-\sqrt{(pb)}}^{-z''}\left(\int_{r_2}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz$$
$$+\int_{z''}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{r_2}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz$$

und

$$B_{10} \text{ (aus } \delta. 2.) \cdots \int_{-z''}^{z''}\left(\int_{\frac{1}{2}p}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz,$$

wenn nur in B_5 bis B_{10}, φ' aus 20.), z'' aus 22.), dagegen φ'', φ_1, r_2, r_1 ganz so wie in B_1 bis B_4, ihre Bestimmung finden.

Man findet daher in diesem Falle, wo $b>\frac{1}{4}p$, aber $b<\frac{3}{4}p$ gegeben ist,

II. $\Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz$
$$=(B_1+B_2+B_3+B_4)+(B_5+B_6+B_7+B_8+B_9+B_{10}).$$

In B_5 bis B_{10} ist aber $\qquad \varphi' = Arc\,cos.\left(+\frac{1}{r}\sqrt{r^2-z^2}\right)$,

in B_1 bis B_4 dagegen ist $\qquad \varphi' = Arc\,cos.\left(-\frac{1}{r}\sqrt{r^2-z^2}\right)$.

Zweiter Unterfall. — Wenn $b>\frac{3}{4}p$ gegeben ist. — Unter dieser Voraussetzung ist $b-\frac{1}{4}p>\frac{1}{2}p$, und deshalb können nun die Fälle α. 1.), γ.) und δ. 2.) nicht mehr eintreten, weil z^2 nie negativ sein kann; die Bedingung $z^2 \overline{\overline{>}} \frac{1}{4}p^2-(b-\frac{1}{4}p)^2$ (in den Fällen α. 2., β. und δ. 1.), ist nun allemal von selbst (durch jeden Werth von z) erfüllt, so daß z durch diese Bedingung keine Beschränkung erfährt. Man erhält daher jetzt aus α. 2.) ein Stück der Summe Σ, welches ausgedrückt ist durch

$$C_1 \cdots \int_{-\frac{1}{2}p}^{0}\left(\int_{-z}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz + \int_{0}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{z}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz \; ^{*)}.$$

Hierauf erhält man (aus β.) ein zweites Stück der Summe Σ, ausgedrückt durch

$$C_2 \cdots \int_{-\sqrt{(pb)}}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{\frac{1}{2}p}^{r_2}\left(\int_{\varphi'}^{\varphi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz.$$

Zuletzt erhält man noch (aus δ. 1.) ein drittes Stück der Summe Σ, welches ausgedrückt ist durch

$$C_3 \cdots \int_{-\sqrt{(pb)}}^{\sqrt{(pb)}}\left(\int_{r_2}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz;$$

so daß man jetzt, wo $b > \frac{3}{4}p$ vorausgesetzt ist, erhält

$$\text{III.} \quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + C_1 + C_2 + C_3,$$

wo in B_1 bis B_4, der Werth φ' aus 14.), in C_1 bis C_3 dagegen der Werth φ' aus 20.) entnommen werden muß, so daß

in B_1 bis B_4, $\quad \varphi' = Arc\,cos.\left(-\frac{1}{r}\sqrt{r^2 - z^2}\right)$,

in C_1 bis C_3 dagegen $\quad \varphi' = Arc\,cos.\left(+\frac{1}{r}\sqrt{r^2 - z^2}\right)$

genommen werden muß.

Anmerkung. Wir überlassen es unsern Lesern, die Aufgabe aus dem geometrischen Standpunkte zu lösen. — Man muß das Umdrehungs-Paraboloid zuerst genau wie in der Anmerkung zu §. 33., in Körper-Elementchen zerlegen, — dann den Inhalt eines solchen Körper-Elementchens, welches an der durch r, φ und z, gegebenen Stelle M liegt, geometrisch berechnen, — dann aber (weil durch r, φ und z, zwei solche Stellen gegeben sind) diesen Inhalt mit f^{I} und mit f^{II} multipliciren, um die Massen der Elementchen an diesen beiden Stellen M, zu haben, von

---

*) Dies Stück ist auch ausgedrückt durch

$$\int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{+\sqrt{(z^2)}}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} F\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot dz.$$

denen die eine rückwärts der Ebene XOZ, die andere vorwärts derselben Ebene liegt. — Nun sollen aber jetzt zuerst die Elementchen an einander gereiht werden, welche in einer und derselben, durch r gegebenen Kugelfläche, und zugleich in einer und derselben durch z gegebenen Ebene liegen, — welche also den (materiellen) Kreisbogen bilden, in welchem diese Kugelfläche und diese Ebene sich schneiden. Hierauf werden alle diese Kreisbogen, welche zu allen verschiedenen Kugeln gehören, die noch von derselben, durch z gegebenen Ebene getroffen werden, — an einander gereiht, so daß man die Massen von den einzelnen Stücken der durch z gegebenen (materiellen) Ebene erhält, so weit sie innerhalb des Paraboloids liegen. Zuletzt werden alle diese (materiellen) Ebenen (von der Dicke dz) zum Paraboloid selbst an einander gereiht.

Man wird sich dabei überzeugen, daß die vorstehende analytische Zergliederung weit bequemer ist, als die geometrische Auffindung derjenigen einzelnen Theile des Paraboloids, die sich durch dreifache Integration gerade ausfüllen lassen.

Wir wollen hier nur noch die geometrische Bedeutung aller einzelnen im Paragraphen erhaltenen dreifachen Integrale nachweisen.

Im ersten Fall, wo $b<\frac{1}{4}p$ vorausgesetzt ist, liegt die Grenz-Ebene, welche vom Scheitel O um b entfernt ist, noch links vom Brennpunkt F; und es sei B der Punkt, in welchem solche die Axe OX schneidet. Das dreifache Integral A_1 drückt die Masse des Kugelsegments aus, welches die aus F mit $FO=\frac{1}{4}p$, beschriebene Kugel von dem paraboloidischen Segment ausschneidet. Den Radius der Grundfläche dieses Kugelsegments, deren Mittelpunkt B ist, drückt der Werth z′ aus. — Denkt man sich nun in der Entfernung z′ von YOX, zwei mit dieser letztgedachten, parallele Ebenen E_1 und E_2, und denkt man sich gleichzeitig eine durch die Gleichung

$$(x'-\tfrac{1}{4}p)^2+y^2+z^2-\left(\tfrac{1}{4}p+\frac{1}{p}z^2\right)^2=0$$

gegebene algebraische Fläche der vierten Ordnung, so schneidet diese zwischen den beiden parallelen Ebenen E_1 und E_2 ein Stück unseres Paraboloids aus, welches links durch dessen Oberfläche, rechts aber durch die Grenz-Ebene seine volle Begrenzung findet, und dessen Masse durch das dreifache Integral A_2 ausgedrückt ist.

Was diese Fläche der vierten Ordnung oberhalb der Ebene E_1 und unterhalb der Ebene E_2 noch ausschneidet, ist ausgedrückt durch A_3. — Zwischen der Außenseite dieser Fläche der vierten Ordnung (welche das zuerst abgeschnittene Kugelsegment längs des ganzen Bogens, den dessen Oberfläche mit der Ebene XOY gemein hat, berührt), ferner der rings herum gehend gedachten Oberfläche des Paraboloids, und der Grenz-Ebene, liegt endlich noch ein Stück unseres Körpers, dessen Masse durch A_4 ausgedrückt ist.

Dies gilt natürlich noch, wenn b dicht an $\frac{1}{4}p$, d. h., wenn die Grenz-Ebene des Paraboloids dicht an den Brennpunkt F hinrückt; es gilt auch noch, wenn $b=\frac{1}{4}p$, d. h. wenn die Grenz-Ebene in den Brennpunkt F hinein rückt. — Setzt man daher in A_1, A_2, A_3 und A_4, $b=\frac{1}{4}p$, wodurch sie bezüglich in B_1, B_2, B_3 und B_4 übergehen, so sieht man sogleich die geometrische Bedeutung dieser letztern vier dreifachen Integrale; — wie auch, daß $B_1+B_2+B_3+B_4$ die Masse des Paraboloids ausdrückt, welches von einer durch den Brennpunkt F, senkrecht auf OX gelegten Ebene E begrenzt wird. Die Masse des im zweiten Falle, in welchem $b>\frac{1}{4}p$ ist, zur Rechten dieser letztgedachten Ebene E liegenden Körpertheils ist also, im Falle $b<\frac{3}{4}p$ ist, durch die Summe

$$B_5+B_6+B_7+B_8+B_9+B_{10},$$

im Falle aber $b>\frac{3}{4}p$ sein sollte, durch die Summe

$$C_1+C_2+C_3$$

ausgedrückt.

Um aber die geometrische Bedeutung dieser letztern einzelnen dreifachen Integrale nachzuweisen, betrachten wir zuerst den ersten Unterfall, in welchem $b < \frac{3}{4}p$ vorausgesetzt wird. Denkt man sich in diesem Falle aus F mit dem Radius $\frac{1}{2}p$ des Kreises, in welchem die Ebene E von der Oberfläche des Paraboloids geschnitten wird, — zur Rechten eine Halbkugel beschrieben, so schneidet die Grenz-Ebene ein Stück davon ab, so daß zwischen ihr und E eine Kugelzone liegt, deren zweiter Kreis (in der Grenz-Ebene) den Radius z'' hat. Denkt man sich nun oberhalb und unterhalb YOX, Ebenen E_3 und E_4 von YOX um z'' abstehend und mit ihr parallel, dann noch zwei Ebenen E_5 und E_6 von ihr um $\frac{1}{2}p$ abstehend und mit ihr parallel; — denkt man sich ferner eine halbe Cylinderfläche Z zwischen den beiden Ebenen E_3 und E_4, welche von der YOX in einem Halbkreis geschnitten wird, dessen Mittelpunkt F und dessen Radius $FB = b - \frac{1}{4}p$ ist; — denkt man sich endlich noch eine Cylinderfläche Z′, welche mit der vorigen, die durch F gehende, auf YOX senkrechte Axe gemein hat, und die vorgedachte Halbkugel berührt, aber von der Grenz-Ebene mit der Halbkugel zugleich geschnitten wird, so daß der außerhalb des Körpers liegende Theil derselben nicht in Betracht kommt, während diese Cylinderfläche Z′ oben und unten bis zur Oberfläche des Paraboloids geht, — so drückt B_5 die Masse des Cylinders Z aus, während B_8 die Masse des Restes der Kugelzone ausdrückt, so weit sie zwischen den Ebenen E_3 und E_4 liegt. Der Ausdruck B_6 giebt die Massen der unterhalb E_4 und oberhalb E_3 noch liegenden Reste der Kugelzone; während B_7 die Massen der Körpertheile giebt, welche die Cylinderfläche Z′ unterhalb E_4 und oberhalb E_3 aus dem Paraboloid noch ausschneidet und welche zur Seite von dem unteren und oberen Theile der Kugelzone, so wie unten und oben von dem unteren und oberen Theile der paraboloidischen Oberfläche, begrenzt werden. Der Ausdruck B_9 giebt ferner die Masse der unterhalb E_6 und oberhalb E_5 noch übrigen Körpertheile; während B_{10} endlich die Masse des zwischen den Ebenen E_3 und E_4 noch übrigen Theils des Paraboloids liefert.

In dem zweiten Unterfall des zweiten Falles, wo $b > \frac{3}{4}p$ vorausgesetzt ist, geht die vorher gedachte Halbkugel nicht bis zur Grenz-Ebene. Von den Ebenen E_3 und E_4 kann daher jetzt nicht mehr die Rede sein, da der Durchschnittskreis (der Halbkugel mit der Grenz-Ebene), den sie (im vorigen Falle) oben und unten berührten, jetzt nicht mehr existirt, sondern nur noch der durch den Brennpunkt F gehende größte Kreis der Halbkugel, den die Ebenen E_5 und E_6 berühren. Eben so ist jetzt nicht mehr von der Cylinderfläche Z die Rede. — Der Ausdruck C_1 liefert nun die Masse der gedachten Halbkugel. Der Ausdruck C_3 liefert die Masse des Stückes, welches vorwärts und rückwärts, von der Cylinderfläche Z', links von der Oberfläche der Halbkugel, rechts von der Grenz-Ebene, unten und oben aber von der paraboloidischen Oberfläche begrenzt ist. Der Ausdruck C_2 endlich giebt den Rest des Körpers, d. h. die vorwärts und rückwärts gelegenen äußeren Stücke des Körpers, die von der Außenseite der Cylinderfläche Z' und von der Oberfläche des Paraboloids begrenzt sind.

§. 35.

Behalten wir noch immer dieselbe vierte Aufgabe (des §. 31.) wie im §. 34., summiren wir aber zuerst nach z, so hat man blos der Bedingung 8.) des §. 34.) nämlich

$$z^2 \overline{\overline{<}} r^2 \cdot Sin\,\varphi^2$$

zu genügen, so daß die Werthe von z stets von $-r \cdot Sin\,\varphi$ anfangen und mit $+r \cdot Sin\,\varphi$ aufhören, man mag nachher zuerst nach r, oder zuerst nach φ summiren.

Summiren wir aber nun zuerst nach r, und zuletzt nach φ, so muß man den noch übrigen Bedingungen 6.) und 7.) des §. 34. jetzt wieder die nachstehende Form geben, nämlich

$$1)\quad r \overline{\overline{<}} \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\varphi} \quad \text{und} \quad 2)\quad r \cdot Cos\,\varphi \overline{\overline{<}} b - \tfrac{1}{4}p.$$

Erster Fall. Ist nun $b < \frac{1}{4}p$, also $b - \frac{1}{4}p$ negativ, so ist $Cos\,\varphi$ der 2.) zu folge nur negativ, und die Bedingung 2.) giebt jetzt (nach §. 4ᵇ.)

$$3)\qquad r \overset{=}{>} \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$$

so daß sich, — wenn man

$$4)\qquad \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}=r_1 \qquad \text{und} \qquad 5)\qquad \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}=r_2$$

setzt, — die Werthe von r, zwischen r_2 und r_1 erstrecken. Die Gleichung $r_2=r_1$ giebt den Grenzwerth φ' von φ, nämlich

$$6)\qquad Cos\,\varphi'=\frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p} \quad \text{oder} \quad \varphi'=Arc\,cos.\frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p}.$$

Dieser Werth φ' befindet sich im zweiten Quadranten, und da sonst für φ keine weitere Beschränkung vorliegt, so gehen die Werthe von φ, von φ' an bis π fort. — Man findet daher jetzt

$$\text{I.}\qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz=\int_{\varphi'}^{\pi}\left(\int_{r_2}^{r_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi}F\cdot dz\right)\cdot dr\right)\cdot d\varphi,$$

wenn nur r_2, r_1 und φ' aus 4.), 5.) und 6.) ihre Bestimmung finden.

Zweiter Fall. — Ist aber $b>\frac{1}{4}p$, so können (nach 2.) die Werthe von $Cos\,\varphi$ positiv und negativ zugleich sein. Betrachten wir zuerst die Werthe von φ, welche von $\frac{1}{2}\pi$ an wachsen und für welche $Cos\,\varphi$ stets negativ ist. Für diese Werthe von φ, ist aber die Bedingung 2.) von selbst erfüllt, so daß aus ihr weder r noch φ, irgend eine Beschränkung erleiden. Es sondert sich also ein Theil der Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch

$$D_1\cdots\qquad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\left(\int_{0}^{r_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi}F\cdot dz\right)\cdot dr\right)\cdot d\varphi.$$

Für die übrigen Werthe von φ, für welche $Cos\,\varphi$ stets positiv ist, geht die Bedingung 2.) über in

$$7)\qquad r \overset{=}{<} \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi},$$

welche jetzt mit der andern Bedingung

$$1) \qquad r \overset{=}{<} \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}$$

in den Kampf tritt. Bestimmt man daher wieder aus der Gleichheit dieser letztern beiden Ausdrücke zur Rechten den Werth φ' von φ, welcher genau wieder so, wie in 6.) wird, so enthält für jeden Werth von φ, welcher $>\varphi'$ ist, die Bedingung 1.), die 7.) schon in sich, während die Bedingung 7.) die 1.) schon in sich schließt, für jeden Werth von φ, welcher $<\varphi'$ ist.

Gehen also die Werthe von φ, von φ' an bis zu $\frac{1}{2}\pi$ fort, so gehen die Werthe von r, von 0 an bis zu r_1 hin; gehen aber die Werthe von φ, von 0 an bis zu φ' hin, so gehen die Werthe von r, von 0 an bis zu r_2 fort. Man erhält also dadurch noch zwei Theile der Summe Σ, welche ausgedrückt sind durch

$$D_2 \cdots \quad \int_{\phi'}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_0^{r_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\phi}^{r\cdot Sin\,\phi} F\cdot dz\right)\cdot dr\right)\cdot d\varphi$$

und

$$D_3 \cdots \quad \int_0^{\phi'}\left(\int_0^{r_2}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\phi}^{r\cdot Sin\,\phi} F\cdot dz\right)\cdot dr\right)\cdot d\varphi.$$

Man hat also zuletzt

$$\text{II.} \qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = D_1 + D_2 + D_3.$$

Anmerkung. Der Ausdruck I. stellt, wenn man nach seiner geometrischen Bedeutung fragt, in dem ersten Integral (nach z), die Masse eines (materiellen) Kreis-Umfangs vor, welcher der Durchschnitt der mit r aus dem Brennpunkt F beschriebenen Kugel und der durch φ gegebenen Kegelfläche ist, die ihre Spitze in F hat. Die zweite Integration (nach r) giebt dann die Masse der letztgenannten (materiellen) Kegelfläche vom Scheitel O an bis zur Begrenzungs-Ebene, welche jetzt, wo $b<\frac{1}{4}p$ ist, links des Brennpunkts F liegt. Die dritte Integration (nach φ), giebt dann die Summe aller dieser Stücken aller dieser Kegelflächen, von der an gerechnet, deren Grundfläche die Begrenzungs-Ebene ist, bis zu der hin, deren Winkel φ, $=\pi$ ist, und welche in die Axe OX hinein fällt.

In dem andern Fall, wo $b > \frac{1}{4}p$ ist, liefert der Ausdruck D_1 die Masse des Theils des Paraboloids, welcher links der durch F, senkrecht auf OX gelegten Ebene E liegt. Der Ausdruck D_2 dagegen giebt die Masse des rechts dieser Ebene liegenden Theils des Paraboloids mit Ausnahme des Kegels, dessen Grundfläche durch die Grenz-Ebene gebildet wird, und rings herum bis zum Paraboloid reicht; die Masse dieses Kegels endlich giebt der Ausdruck D_3.

§. 36.

Summiren wir wieder wie im §. 35. zuerst nach z, also von $z = -r \cdot Sin\varphi$ an bis zu $z = +r \cdot Sin\varphi$ hin; summiren wir aber dann zuerst nach φ und zuletzt nach r, so muß man die Bedingungen 6.) und 7.) des §. 34. wieder in der dortigen Form beibehalten, nämlich in der Form

1) $Cos\varphi \overline{\overline{>}} 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r}$ und 2) $Cos\varphi \overline{\overline{<}} \frac{b - \frac{1}{4}p}{r}$.

Die Bedingung 1.) ist stets erfüllt, so lange $\frac{\frac{1}{2}p}{r} \overline{\overline{>}} 2$ d. h. $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ ist; sie beschränkt daher erst die Werthe von φ, so wie $r > \frac{1}{4}p$ wird, und dann ist der Grenzwerth φ_1 von φ gegeben durch die Gleichung

3) $Cos\varphi_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r}$.

Für $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}\pi$ bleibt dagegen π der obere Grenzwerth von φ.

Um der Bedingung 2.) zu genügen, muß man wieder unterscheiden, ob $b - \frac{1}{4}p$ negativ oder positiv ist.

Erster Fall. — Ist $b < \frac{1}{4}p$, so ist $Cos\varphi$ stets negativ; weil aber $Cos\varphi$ nie kleiner als -1 wird, so giebt diese Bedingung

$$r = \frac{1}{4}p - b$$

als den kleinsten Werth von r. — Die Gleichung

4) $$Cos\,\varphi'' = \frac{b-\frac{1}{4}p}{r}$$

giebt den kleinsten Werth φ'' von φ.

In diesem Falle, wo $b<\frac{1}{4}p$ ist, findet sich also

I. $$\Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \int_{\frac{1}{4}p-b}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\pi}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr + \int_{\frac{1}{4}p}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr,$$

da auf die früher beschriebene Weise leicht erkannt wird, daß $b+\frac{1}{4}p$ der größte Werth ist, den r überhaupt erreichen kann, weil höchstens $Cos\,\varphi'' = Cos\,\varphi_1$ werden kann, welche Gleichung zu $r = b+\frac{1}{4}p$ führt.

Zweiter Fall. — Ist $b>\frac{1}{4}p$, so kann $Cos\,\varphi$ aus der Bedingung 2.) negativ und positiv werden. Betrachtet man zuerst die Werthe von φ, welche von $\frac{1}{2}\pi$ an wachsen, so findet sich nach dem vorangegangenen leicht ein Theil unserer Summe Σ, wie der vorstehende, nur daß jetzt der Bedingung 2.) durch keinen Werth von r, widersprochen wird, so daß 0 der kleinste Werth von r bleibt, — während der größte Werth von r wiederum aus der Bedingung hervorgeht, daß die untere Grenze $\frac{1}{2}\pi$ und die obere Grenze φ_1 von φ, höchstens einander gleich werden können, welches $Cos\,\varphi_1 = 0$, d. h. $r = \frac{1}{2}p$ liefert. — Dieser Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch

$$G_1 \cdots \int_{0}^{\frac{1}{4}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr + \int_{\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr.$$

Kommen wir nun zu den Werthen von φ, welche von $\frac{1}{2}\pi$ an abnehmen und für welche $Cos\,\varphi$ stets positiv ist, so giebt die Bedingung 1.) keine weitere Beschränkung der oberen Grenze $\frac{1}{2}\pi$ von φ, so lange $\frac{\frac{1}{2}p}{r} \overline{\overline{>}} 1$, d. h. $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p$ ist; so wie aber $r>\frac{1}{2}p$ wird, tritt $\varphi_1 (<\frac{1}{2}\pi)$ als oberer Grenzwerth von φ auf. Die Bedingung 2.) dagegen ist stets erfüllt, so lange

$\frac{b-\frac{1}{4}p}{r} \geqq 1$ d. h. $r \leqq b-\frac{1}{4}p$ ist; dann ist also $\varphi=0$ die untere Grenze von φ; so wie aber $r > b-\frac{1}{4}p$ wird, so tritt wieder φ'' (aus 4.) als unterer Grenzwerth von φ, auf.

Man muß daher jetzt wieder zwei Unterfälle von einander unterscheiden; einmal wenn $\frac{1}{2}p \geqq b-\frac{1}{4}p$, d. h. $b \leqq \frac{3}{4}p$ ist, und dann wenn $\frac{1}{2}p < b-\frac{1}{4}p$, d. h. $b > \frac{3}{4}p$ ist.

Erster Unterfall. — Ist $b \leqq \frac{3}{4}p$ (aber noch $> \frac{1}{4}p$), also $\frac{1}{2}p > b-\frac{1}{4}p$, so gehen zuerst die Werthe von r, von 0 an bis zu $b-\frac{1}{4}p$ fort, und die Werthe von φ von 0 bis zu $\frac{1}{2}\pi$; und es sondert sich daher sofort ein Theil der Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch

$$G_2 \cdots \quad \int_0^{b-\frac{1}{4}p}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr.$$

Gehen dann die Werthe von r, von $b-\frac{1}{4}p$ an bis zu $\frac{1}{2}p$ fort, so gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu $\frac{1}{2}\pi$ fort; und es sondert sich daher ein neuer Theil unserer Summe Σ, ab, welcher ausgedrückt ist durch

$$G_3 \cdots \quad \int_{b-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\int_{\varphi''}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr.$$

Geht endlich r, von $\frac{1}{2}p$ an bis zu dem allergrößesten Werth $b+\frac{1}{4}p$ fort, den r überhaupt annehmen kann, so gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu φ_1 hin, und der letzte Theil der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch

$$G_4 \cdots \quad \int_{\frac{1}{2}p}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr.$$

Man hat daher jetzt

$$\text{II.} \qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = G_1+G_2+G_3+G_4,$$

wenn nur $b > \frac{1}{4}p$ aber $b \leqq \frac{3}{4}p$ ist.

Zweiter Unterfall. — Ist $b > \frac{3}{4}p$, also $\frac{1}{2}p < b-\frac{1}{4}p$, so gehen zuerst die Werthe von r, von 0 an bis zu $\frac{1}{2}p$ hin, und dazu gehen die Werthe von φ, von 0 an bis zu $\frac{1}{2}\pi$ fort.

— Gehen dann die Werthe von r weiter, von $\frac{1}{2}p$ an bis zu $b-\frac{1}{4}p$ hin, so gehen die Werthe von φ, von 0 an bis zu φ_1 hin. — Gehen endlich die Werthe von r, von $b-\frac{1}{4}p$ an bis zu $b+\frac{1}{4}p$ hin, so gehen die Werthe von φ, von φ'' an bis zu φ_1 hin. — Für alle Werthe von φ, welche $<\frac{1}{2}\pi$ sind, erhält man also drei Theile der Summe Σ, und diese sind

$$\text{H.}\cdots\quad \int_0^{\frac{1}{2}p}\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr$$
$$+\int_{\frac{1}{2}p}^{b-\frac{1}{4}p}\left(\int_0^{\varphi_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr$$
$$+\int_{b-\frac{1}{4}p}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi''}^{\varphi_1}\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi} F\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right).dr.$$

Und zuletzt ist

$$\text{III.}\qquad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = G_1 + H,$$

wenn nur $b>\frac{3}{4}p$ ist.

Anmerkung. Die geometrische Bedeutung dieser einzelnen dreifachen Integrale ist die folgende.

In I., wo $b<\frac{1}{4}p$ vorausgesetzt ist, und wo sich die Grenz-Ebene des Paraboloids links von F befindet, drückt das erste dreifache Integral die Masse eines Kugelsegments aus, welches mit dem Radius $\frac{1}{4}p$ aus F als Mittelpunkt, beschrieben ist, den Scheitel O berührt und von der Grenz-Ebene abgeschnitten wird. Das zweite dreifache Integral giebt aber die Masse des Restes des Körpers, der dieses Kugelsegment ringsherum umgiebt und von der paraboloidischen Oberfläche, wie theilweise von der Grenz-Ebene geschlossen wird.

In dem zweiten Falle drückt das erste dreifache Integral in G_1 die Masse einer Halbkugel aus, welche aus F mit dem Radius $\frac{1}{4}p$ beschrieben ist, den Scheitel O berührt und welche von der durch F, senkrecht auf OX gelegten Ebene E begrenzt wird. Das andere dreifache Integral giebt die Masse des Restes des, von der Ebene E abgeschnittenen und zur Linken liegenden Theils des Paraboloids. — In dem ersten Unterfall, wo $\frac{1}{2}p \overline{\gtrless} b-\frac{1}{4}p$, giebt das dreifache Integral G_2 die Masse der

Halbkugel, welche aus F mit dem Radius $b - \frac{1}{4}p$ beschrieben ist und welche die Grenz-Ebene berührt. — Das andere dreifache Integral G_3 giebt die Masse der mit dieser Kugelfläche concentrischen Schicht (von der Dicke $\frac{3}{4}p - b$) zwischen der erstgedachten Halbkugel und einer zweiten, deren größter Kreis der Durchschnittskreis der Ebene E, mit der paraboloidischen Fläche ist (welcher den Radius $\frac{1}{2}p$ hat), so weit diese Kugelschicht nicht rechts über die Grenz-Ebene hinausragt. Das letzte dreifache Integral G_4 giebt dann die Masse des Restes unseres Körpers. — In dem zweiten Unterfall dagegen reicht die über E liegende Halbkugel, deren Radius $\frac{1}{2}p$ ist, nicht (rechts) über die Grenz-Ebene hinaus. Das erstere der Integrale in H giebt ihre Masse. — Dann ist mit dem Radius $b - \frac{1}{4}p$ eine concentrische Kugelfläche zu beschreiben, welche die Grenz-Ebene berührt, aber keine vollständige Halbkugel mehr ist, in so ferne sie sich rings herum nicht mehr an die Ebene E, sondern blos noch an die paraboloidische Oberfläche anlegt. Die Masse der, zwischen dieser und der vorigen Kugelfläche liegenden Schicht (von der Dicke $b - \frac{3}{4}p$) ist nun durch das andere der Integrale in H, vorgestellt. — Das dritte dieser (dreifachen) Integrale giebt aber die Masse des Restes des Körpers.

§. 37. Zweite allgemeine Aufgabe.

Führt man statt der drei Veränderlichen x, y und z drei neue Veränderliche r, φ, θ ein, mittelst der drei Gleichungen

1) $x = G_{r,\varphi,\theta}$, 2) $y = H_{r,\varphi,\theta}$ und 3) $z = K_{r,\varphi,\theta}$,

wo G, H und K drei beliebige Funktionen von r, φ und θ vorstellen, so hat bereits die „Vorbereitung" im §. 14. hinreichend sehen lassen, daß und warum man einen der neuen Veränderlichen nach dem andern einführen muß.

Eliminirt man also zuerst φ und θ aus den drei gegebenen Gleichungen, und erhält man dadurch

4) $x = x_{r,y,z}$,

wo $x_{r,y,z}$ eine Funktion von r, y und z (ohne x) vorstellt, so hat man zunächst

$$dx = \partial x_r \cdot dr$$

und

5) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot dr \cdot dy \cdot dz$ *).

Hierauf führt man statt y, den neuen Veränderlichen φ ein, dadurch, daß man aus den Gleichungen 2.) und 3.) θ eliminirt, also etwa

6) $y = y_{r,\varphi,z}$ und $dy = \partial y_\varphi \cdot d\varphi$

findet, wo $y_{r,\varphi,z}$ eine Funktion von r, φ und z (ohne y) vorstellt. Dann erhält man

7) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ **).

Zuletzt erst wird der dritte neue Veränderliche θ statt z, eingeführt, mittelst der Gleichung 3.), welche $dz = \partial K_\theta \cdot d\theta$ liefert; und man hat dann schließlich gefunden

8) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial K_\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$ ***),

während die Grenzbedingungen zwischen x, y und z, in die neuen Grenzbedingungen zwischen r, φ und θ übergehen, wenn man in ersteren statt x, y und z bezüglich die Funktionen von r, φ und θ (aus 1.–3.) substituirt. — Diese Grenzbedingungen sind aber in dieser allgemeinen Aufgabe ganz beliebig gedacht.

Man kann sich die Herstellung der Gleichungen 4) $x = x_{r,y,z}$ und 6) $y = y_{r,\varphi}$ ersparen und das Produkt

---

*) Ist ∂x_r negativ, so muß auch dr negativ gedacht werden, da $\partial x_r \cdot dr$ (= dx) stets positiv gedacht worden ist.

**) Ist $\partial x_r \cdot dy_\varphi$ negativ, so muß auch $dr \cdot d\varphi$ negativ gedacht werden, also dr $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, aber $d\varphi$ dann $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, da $\partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot dr \cdot d\varphi$ (= dx·dy) stets positiv gedacht worden ist.

***) Ist $\partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial K_\theta$ negativ, so muß auch $dr \cdot d\varphi \cdot d^\theta$ negativ gedacht werden.

$\partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial K_\theta$ direkt in die gegebenen Funktionen G, H und K auswerthen, — wenn man sonst will. — Denkt man sich nämlich aus den beiden Gleichungen 2.) und 3.) φ und θ in r, y und z ausgedrückt, gefunden, und diese Funktionen von r, y und z, in die Gleichungen 1.–3. statt φ und θ substituirt, so ist die Gleichung 1.) keine andere als die 4.), während die Gleichungen 2.) und 3.) gleichzeitig identische Gleichungen werden, nämlich in $y = y$ und $z = z$ übergehen. Differenziirt man daher diese 3 Gleichungen 1.–3., unter dieser Voraussetzung, nach allem r, so erhält man

(aus 1.) ⋯ 9) $\partial x_r = \partial G_r + \partial G_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial G_\theta \cdot \partial \theta_r$

(aus 2.) ⋯ 10) $0 = \partial H_r + \partial H_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial H_\theta \cdot \partial \theta_r$

(aus 3.) ⋯ 11) $0 = \partial K_r + \partial K_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial K_\theta \cdot \partial \theta_r$.

Eliminirt man nun aus diesen letztern drei Gleichungen die beiden Ableitungen $\partial \varphi_r$ und $\partial \theta_r$, so erhält man ∂x_r unmittelbar in die gegebenen Funktionen G, H, K ausgedrückt, d. h. in deren Ableitungen nach r, φ und θ.

Denkt man sich ferner aus der 3.) θ in z, r und φ ausgedrückt gefunden und diese Funktion von z, r und φ statt z, in die 2.) und 3.) substituirt, so ist die 2.) keine andere mehr als die 6.), während die 3.) gleichzeitig in die identische Gleichung $z = z$ übergeht. Differenziirt man nun diese beiden Gleichungen, in diesem Sinne gedacht, nach allem φ, so erhält man

(aus 2.) ⋯ 12) $\partial y_\varphi = \partial H_\varphi + \partial H_\theta \cdot \partial \theta_\varphi$

(aus 3.) ⋯ 13) $0 = \partial K_\varphi + \partial K_\theta \cdot \partial \theta_\varphi$.

Wird nun aus diesen beiden Gleichungen $\partial \theta_\varphi$ eliminirt, so hat man ∂y_φ gefunden.

Diese letztere Elimination geschieht dadurch, daß die 12.) mit ∂K_θ, die 13.) aber mit ∂H_θ multiplicirt und dann das letztere Resultat von ersterem subtrahirt wird. Dies giebt sogleich

14) $\partial y_\varphi \cdot \partial K_\theta = \partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial H_\theta \cdot \partial K_\varphi$.

Die oben erwähnte Elimination (aus 9. — 11.) geschieht am bequemsten dadurch, daß man die 9.) mit p, die 10.) mit q, die 11.) mit n multiplicirt und die Resultate zusammen addirt, zuletzt aber die unbestimmten Faktoren q und n dadurch bestimmt, daß man in dem letzten Resultat die Koeffizienten von $\partial\varphi_r$ und $\partial\theta_r$, der Null gleich setzt, während p dann noch nach Belieben angenommen werden kann; — dies giebt

15) $\partial x_r \cdot p = p \cdot \partial G_r + q \cdot \partial H_r + n \cdot \partial K_r$

und

16) $0 = p \cdot \partial G_\varphi + q \cdot \partial H_\varphi + n \cdot \partial K_\varphi$

17) $0 = p \cdot \partial G_\theta + q \cdot \partial H_\theta + n \cdot \partial K_\theta$.

Eliminirt man nun aus den beiden letztern Gleichungen abwechselnd n und q, so findet sich

18) $0 = p \cdot (\partial G_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial G_\theta) + q \cdot (\partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta)$

19) $0 = p \cdot (\partial G_\theta \cdot \partial H_\varphi - \partial H_\theta \cdot \partial G_\varphi) + n \cdot (\partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta)$.

Nimmt man nun

20) $p = \partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta = \partial y_\varphi \cdot \partial K_\theta$ (nach 14.),

so findet sich dazu

21) $q = \partial K_\varphi \cdot \partial G_\theta - \partial G_\varphi \cdot \partial K_\theta$

und

22) $n = \partial G_\varphi \cdot \partial H_\theta - \partial H_\varphi \cdot \partial G_\theta$.

Die Gleichung 15.) giebt nun ohne Weiteres

23) $$\begin{aligned}\partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial K_\theta &= (\partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta) \cdot \partial G_r \\ &\quad + (\partial K_\varphi \cdot \partial G_\theta - \partial G_\varphi \cdot \partial K_\theta) \cdot \partial H_r + (\partial G_\varphi \cdot \partial H_\theta - \partial H_\varphi \cdot \partial G_\theta) \cdot \partial K_r \\ &= \partial G_r \cdot \partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial G_r \cdot \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta + \partial H_r \cdot \partial K_\varphi \cdot \partial G_\theta - \partial H_r \cdot \partial G_\varphi \cdot \partial K_\theta \\ &\quad + \partial K_r \cdot \partial G_\varphi \cdot \partial H_\theta - \partial K_r \cdot \partial H_\varphi \cdot \partial G_\theta \;{}^{*)},\end{aligned}$$

---

*) Dieses Resultat kann man, wie folgt, auf mechanischem Wege herstellen. Man denkt sich G, H, K im Kreise geschrieben, dann nimmt man jeden der drei Buchstaben zuerst, und die im Kreise folgenden beiden andern, erst in ihrer Ordnung und dann versetzt; zuletzt setzt man in jeder dieser Anordnungen jedem dieser Buchstaben das ∂ vor, die Buchstaben r, φ, θ

welchem Ausdruck übrigens noch ein $\pm$ Zeichen vorgesetzt werden muß, weil das eben beschriebene Verfahren der Einführung von

---

aber stets in derselben Ordnung rechts unten an; die Glieder selbst aber mit abwechselndem Vorzeichen.

Löst man die drei einfachen algebraischen Gleichungen

$$a_1x+b_1y+c_1z = d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z = d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z = d_3$$

nach x, y und z algebraisch auf, so erhält man für x, y und z drei Bruchformen, die einen gemeinschaftlichen Nenner haben, welcher die Determinante genannt wird. Setzt man nun in dieser Determinante

statt a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3,
bezüglich ∂G_r, ∂G_ϕ, ∂G_θ, ∂H_r, ∂H_ϕ, ∂H_θ, ∂K_r, ∂K_ϕ, ∂K_θ,

so erhält man denselben obigen Ausdruck, sogar auch mit dem $\pm$ Zeichen, weil dieselben Bruchformen, deren gemeinschaftlicher Nenner die Determinante genannt wurde, — ihren Werth nicht ändern, wenn man alle Glieder in den Zählern und im Nenner, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nimmt; so daß es von der Art der Ausführung der Auflösung abhängt, ob man den einen Nenner, oder denselben, jedes Glied aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, erhält.

Wendet man nämlich auf die Auflösung der drei vorstehenden Gleichungen die Methode der Multiplikatoren an, d. h. multiplicirt man die erstere Gleichung mit P, die andere mit Q, die dritte mit N, addirt man dann alle drei Gleichungen, und setzt man die Koeffizienten von y und z, der Null gleich, so findet sich z. B. der Koeffizient von x, also die Determinante D, sofort, nämlich

1) $D = a_1P+a_2Q+a_3N$,

zur Bestimmung von Q und N aber

2) $0 = b_1P+b_2Q+b_3N$, und 3) $0 = c_1P+c_2Q+c_3N$,

während die Gleichungen 15.–17. des Textes diese sind, nämlich

4) $\partial x_r \cdot p = a_1p+a_2q+a_3n$

5) $0 = b_1p+b_2q+b_3n$ und 6) $0 = c_1p+c_2q+c_3n$.

Während also die 2.) und 3.)

7) $Q = wP$ und 8) $N = w'P$

liefern, geht aus den Gleichungen 5.) und 6.)

drei neuen Veränderlichen, (einen nach dem andern) nach den sechs verschiedenen Anordnungen dieser letztern geschehen kann und dann dreimal das vorstehende Resultat, dreimal aber zwar dasselbe Resultat erhalten wird, aber jedes einzelne Glied mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. — Es muß dann, wenn man dr, $d\varphi$ und $d\theta$ stets positiv nimmt, von dem $\pm$ Vorzeichen dasjenige stets genommen werden, welches das obige $\partial x_r \cdot \partial y_\phi \cdot \partial K_\theta$ positiv macht, innerhalb der jedesmaligen Grenzwerthe von r, φ und θ.

Man hat übrigens nun

$$(\odot)\cdots \quad \Sigma f_{x,y,z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \Sigma \pm f_{(r,\phi,\theta)}\cdot(\partial G_r\cdot\partial H_\phi\cdot\partial K_\theta - \partial G_r\cdot\partial K_\phi\cdot\partial H_\theta + \partial H_r\cdot\partial K_\phi\cdot\partial G_\theta - \partial H_r\cdot\partial G_\phi\cdot\partial K_\theta + \partial K_r\cdot\partial G_\phi\cdot\partial H_\theta - \partial K_r\cdot\partial H_\phi\cdot\partial G_\theta)\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\theta,$$

---

9) $q = wp$ und 10) $n = w'p$

hervor, wo w in 7.) und 9.) ein und derselbe Werth ist, eben so w' in 8.) und 10.). — Während also die Gleichung 1.) nun

11) $D = (a_1 + a_2 w + a_3 w')\cdot P$

liefert, liefert die 4.)

12) $\partial x_r \cdot p = (a_1 + a_2 w + a_3 w')\cdot p.$

Nimmt man also noch $P = p$ und statt p den Nenner der Ausdrücke w und w', so wird

13) $D = \partial x_r \cdot p.$

Multiplicirt man aber nun die Gleichungen 12.) und 13.) des Textes, bezüglich mit α und β, — addirt man selbige und setzt man den Koeffizienten von $\partial\theta_\phi$, der Null gleich, so erhält man

14) $\partial y_\phi \cdot \alpha = b_2\alpha + b_3\beta$ und 15) $0 = c_2\alpha + c_3\beta;$

und da in diesen Gleichungen die Koeffizienten von α und β bezüglich dieselben sind, wie in 5.) und 6.) die von q und n, und der gemeinschaftliche Nenner p, von w und w' der Koeffizient ist, den q annimmt, wenn man aus 5.) und 6.) n (mittelst der Methode der Multiplikatoren) eliminirt, also auch der Koeffizient von α, wenn man β mittelst derselben Methode eliminirt, so daß dieser Koeffizient keine Bruchform annimmt, so erhält man hieraus

16) $p = \partial y_\phi \cdot c_3$, also (aus 13.) $D = \partial x_r \cdot \partial y_\phi \cdot c_3 = \partial x_r \cdot \partial y_\phi \cdot \partial z_\theta$,

welches nachzuweisen war.

wenn $f_{(r,\varphi,\theta)}$ das bedeutet, was aus $f_{x,y,z}$ hervorgeht, sobald statt x, y, z bezüglich die Funktionen G, H, K von r, φ und θ, gesetzt werden, und wenn die Grenzbedingungen hinzugefügt werden, welche aus den für x, y und z vorhandenen Grenzbedingungen, — welche übrigens in dieser allgemeinen Aufgabe ganz beliebig gedacht sind, — hervorgehen, dadurch, daß in letzteren statt x, y und z, dieselben Funktionen G, H und K substituirt werden. Dabei ist von dem (+) oder (−) Vorzeichen dasjenige zu nehmen, welches den Faktor von $dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$ positiv macht, damit man dr, $d\varphi$ und $d\theta$, jedes einzeln ebenfalls stets positiv sich denken könne, weil letzteres das bequemste ist.

§. 38.

Wendet man dies auf den Fall an, wo

1) $y^2+z^2 \overline{\overline{<}} px$ und 2) $x \overline{\overline{<}} b$

die gegebenen Grenzbedingungen sind, und führt man hier die drei neuen Veränderlichen mittelst der Gleichungen

3) $x = \frac{1}{4}p + r \cdot Cos\,\varphi = G_{r,\varphi,\theta}$,

4) $y = r \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\theta = H_{r,\varphi,\theta}$

und

5) $z = r \cdot Sin\,\varphi \cdot Sin\,\theta = K_{r,\varphi,\theta}$ *)

ein, so wird

$\partial G_r = Cos\,\varphi$, $\partial G_\varphi = -r \cdot Sin\,\varphi$ und $\partial G_\theta = 0$,

$\partial H_r = Sin\,\varphi \cdot Cos\,\theta$, $\partial H_\varphi = r \cdot Cos\,\varphi \cdot Cos\,\theta$ und $\partial H_\theta = -r \cdot Sin\,\varphi \cdot Sin\,\theta$,

$\partial K_r = Sin\,\varphi \cdot Sin\,\theta$, $\partial K_\varphi = r \cdot Cos\,\varphi \cdot Sin\,\theta$ und $\partial K_\theta = r \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\theta$.

Man hat daher jetzt (nach §. 34. ⊙)

*) Diese Gleichungen lassen sehen, einmal daß r blos positiv (oder Null) genommen werden darf, wenn man φ zwischen 0 und π, dagegen θ zwischen 0 und 2π nimmt, weil dann y und z alle reellen, und x alle positiven Werthe erhalten können, die ihnen zukommen. — Die vorhandenen Grenzbedingungen werden oder können doch, diese Werthe noch beschränken.

6) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma(f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta)$,

während die Grenzbedingungen 1.) und 2.) in diese übergehen, nämlich in

7) $r^2 \cdot Sin\varphi^2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p^2 + pr \cdot Cos\varphi$ und 8) $\frac{1}{4}p + r \cdot Cos\varphi \overline{\overline{<}} b$,

welche θ ganz unbeschränkt lassen, so daß, damit aus 4.) und 5.) y und z alle reellen Werthe erhalten, θ von 0 bis 2π genommen werden muß. — Addirt man zur 7.) auf beiden Seiten $r^2 \cdot Cos\varphi^2$, so ergiebt sich

9) $r^2 \overline{\overline{<}} (\frac{1}{2}p + r \cdot Cos\varphi)^2$,

oder, da x d. h. $\frac{1}{4}p + r \cdot Cos\varphi$, also auch $\frac{1}{2}p + r \cdot Cos\varphi$ stets positiv ist,

10) $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}p + r \cdot Cos\varphi$;

welche Ungleichung, in so ferne $1 - Cos\varphi$ allemal positiv ist, auch noch übergeht in

11) $r \overline{\overline{<}} \dfrac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\varphi}$.

Die zu erfüllenden Bedingungen sind also die 10.), oder 11.), (welche an die Stelle der 7. getreten ist) und die Bedingung 8.), welche so geschrieben werden kann, nämlich

12) $r \cdot Cos\varphi \overline{\overline{<}} b - \frac{1}{4}p$,

und welche übergeht in

13) $r \overline{\overline{<}} \dfrac{b - \frac{1}{4}p}{Cos\varphi}$, so lange $Cos\varphi$ positiv,

aber in

14) $r \overline{\overline{>}} \dfrac{b - \frac{1}{4}p}{Cos\varphi}$, so lange $Cos\varphi$ negativ ist.

Summirt man nun zuerst für konstante Werthe von θ und φ, und für alle Werthe von r, so können sich, so lange $Cos\varphi$ positiv ist, die beiden Bedingungen 11.) und 13.) widersprechen, und man muß daher nehmen

15) $r \overline{\overline{<}} \dfrac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\varphi}$, so lange $\dfrac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\varphi} \overline{\overline{<}} \dfrac{b - \frac{1}{4}p}{Cos\varphi}$ ist,

dagegen

16) $r \overset{=}{<} \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$, so lange $\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi} \overset{=}{>} \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ ist,

während jedesmal $Cos\,\varphi$ positiv, also φ im ersten Quadranten vorausgesetzt ist.

Ist aber $Cos\,\varphi$ negativ, so sind die Bedingungen 11.) (oder 15.) und 14.) einfach zu erfüllen.

Sucht man daher den Werth φ' von φ, welcher

$$\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi'} = \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi'}$$

macht, und für welchen hieraus

17) $Cos\,\varphi' = \frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p}$ oder $\varphi' = Arc\,cos.\frac{b-\frac{1}{4}p}{b+\frac{1}{4}p}$

gefunden wird und welcher deshalb im ersten Quadranten liegt, wenn $b>\frac{1}{4}p$, dagegen im zweiten, wenn $b<\frac{1}{4}p$ sein sollte, so folgt, daß man von nun ab zwei Fälle unterscheiden muß, nämlich einmal, wenn $b>\frac{1}{4}p$ und dann, wenn $b<\frac{1}{4}p$ gegeben ist.

Erster Fall. — Wenn $b \overset{=}{>} \frac{1}{4}p$ ist.

In diesem Falle ist $Cos\,\varphi'$ positiv, und für alle Werthe von φ, welche zwischen 0 und φ' liegen, ist die Bedingung 16.) allein zu erfüllen, weil für alle diese Werthe, $Cos\,\varphi > Cos\,\varphi'$, folglich

$$\frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi} < \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi'} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi} > \frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi'},$$

also auch $\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi} > \frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$ wird; so daß dann

18) $\frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi} = r_1$

der größte Werth von r ist. — Für alle Werthe von φ, von $\varphi = \varphi'$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, ist die Bedingung 15.) allein zu erfüllen, und für alle Werthe von φ, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegen, und für welche $Cos\,\varphi$ negativ wird, ist die Bedingung 14.), also 12.), von selber erfüllt, folglich wiederum die Bedingung 10.)

oder 15.) allein zu erfüllen; so daß für alle Werthe von φ, welche zwischen φ' und π liegen,

19) $$\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi} = r'$$

der größte Werth von r, ist. — Der absolut kleinste Werth 0 von r, erfüllt außerdem alle Bedingungen. — In diesem Falle hat man also

$$\text{I. } \Sigma f_{x,y,z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\varphi'}^{\pi}\left(\int_0^{r'} f_{(r,\varphi,\theta)}\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta$$
$$+\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\varphi'}\left(\int_0^{r_1} f_{(r,\varphi,\theta)}\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta,$$

wenn φ' aus 17.), r_1 und r' aber aus 18.) und 19.) gefunden werden *).

Zweiter Fall. — Wenn $b<\frac{1}{4}p$ ist.

Dann zeigt die Bedingung 12.), daß $Cos\,\varphi$ nur negativ sein kann, und die Bedingung 14.), daß $r \overline{\overline{>}} r_1$ sein müsse, während die Bedingung 11.) $r \overline{\overline{<}} r'$ liefert. Die Werthe von r liegen also dasmal alle zwischen dem kleinsten r_1 und dem größten r'. — Die Gleichung $r'=r_1$, d. h. $\frac{\frac{1}{2}p}{1-Cos\,\varphi}=\frac{b-\frac{1}{4}p}{Cos\,\varphi}$, giebt den kleinsten Werth φ', den φ jetzt haben kann, da für noch kleinere Werthe von φ, offenbar $Cos\,\varphi$ (weil negativ) an sich (d. h. abgesehen vom Vorzeichen) auch kleiner, der Quotient r_1 daher größer als der Quotient r' werden würde, was gegen die vorstehenden Bedingungen ist. Dieser Werth φ' wird also wieder aus der Gleichung 17.) gefunden. Es findet sich daher in diesem Falle

---

*) Behandelt man die Aufgabe aus dem geometrischen Gesichtspunkte, so erhält man das letztere dreifache Integral als die Masse des Kegels, der seine Spitze im Brennpunkte F, seine Grundfläche aber, deren Radius $=\sqrt{pb}$ ist, in der, das Umdrehungs-Paraboloid begrenzenden, vom Scheitel O um b entfernten Ebene, hat. — Das erstere dreifache Integral findet sich gleichzeitig als die Masse des Hohlkörpers, der von der paraboloidischen Umdrehungsfläche und dem Mantel des vorgedachten Kegels begrenzt ist.

II. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\varphi'}^{\pi}\left(\int_{r_1}^{r'} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot d\theta.$

In beiden Fällen I. und II. kann die Integration nach θ, da sie zwischen konstanten Grenzen statt hat und die Grenzen der übrigen Integrale, von θ ebenfalls ganz unabhängig (nach θ, konstant) sind, früher oder später erfolgen, entweder wie oben geschehen, als dritte, aber auch als zweite oder erste.

§. 39.

Läßt man alles wie im vorhergehenden §. 38., — will man aber zuerst für konstante Werthe von r und θ und für alle Werthe von φ summiren, — so muß man zunächst den zu erfüllenden Grenzbedingungen 10.) und 12.) die nachstehende Form geben, nämlich

$$20)\quad Cos\,\varphi \overset{=}{>} 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r} \quad \text{und} \quad 21)\quad Cos\,\varphi \overset{=}{<} \frac{b - \frac{1}{4}p}{r}.$$

Die 20.) ist allemal erfüllt, so oft $\frac{\frac{1}{2}p}{r} \overset{=}{>} 2$, d. h. $r \overset{=}{<} \frac{1}{4}p$ ist, weil jeder Kosinus größer als (oder gleich) -1 ist; die 21.) dagegen ist allemal erfüllt, so oft $\frac{b - \frac{1}{4}p}{r} \overset{=}{>} 1$, d. h. $r \overset{=}{<} b - \frac{1}{4}p$ ist, weil kein Kosinus größer als $+1$ wird (so lange nämlich, wie hier, nur reelle Werthe von φ vorausgesetzt werden). Es sind also beide Bedingungen allemal erfüllt, so oft

$$r \overset{=}{<} \tfrac{1}{4}p \quad \text{und gleichzeitig} \quad \tfrac{1}{4}p \overset{=}{<} b - \tfrac{1}{4}p, \quad \text{d. h.} \quad b \overset{=}{>} \tfrac{1}{2}p$$

ist.

Erster Fall. — Wenn $b \overset{=}{>} \frac{1}{2}p$ ist.

In diesem Falle hat, für jeden konstanten Werth von r, der zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ liegt, φ jeden Werth von 0 bis π, weil die Grenzbedingungen diese Werthe gar nicht beschränken. Es sondert sich daher von der Summe Σ, ein Theil ab, welcher ausgedrückt ist durch das dreifache Integral

$$A. \cdots \quad \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{4}p}\left(\int_0^{\pi} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi\right) \cdot dr\right) \cdot d\theta,$$

in welchem Integral, da alle Grenzen von den Werthen der übrigen Veränderlichen ganz unabhängig sind, die Ordnung des Integrirens ganz beliebig ist.

So wie $r > \frac{1}{4}p$ wird, ist der kleinste Werth $Cos\,\varphi''$ von $Cos\,\varphi$, aus der Bedingung 20.) gegeben durch die Gleichung

$$22)\quad Cos\,\varphi'' = 1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r} \quad \text{oder} \quad \varphi'' = Arc\,cos.\left(1 - \frac{\frac{1}{2}p}{r}\right),$$

welche Gleichung den größten Werth φ'' liefert, den φ jetzt haben kann. — Für $r = \frac{1}{2}p$, wird $\varphi'' = \frac{1}{2}\pi$; für $r \gtrless \frac{1}{2}p$ (aber $r > \frac{1}{4}p$) wird dagegen $\varphi'' \lessgtr \frac{1}{2}\pi$.

Auf der andern Seite bleibt, nach der Bedingung 21.), der Werth von φ ganz unbeschränkt, so lange noch $r \leqq b - \frac{1}{4}p$ ist; also sondert sich nun ein zweiter Theil der Summe Σ, ab, in welchem die Werthe von r, zwischen $\frac{1}{4}p$ und $b - \frac{1}{4}p$ liegen, und die zu jedem konstant gedachten (solchen) Werth von r, gehörigen Werthe von φ, von 0 bis φ'' gehen, weil (nach 20.) stets $Cos\,\varphi \geqq Cos\,\varphi''$ sein muß. Dieser Theil ist ausgedrückt durch das dreifache Integral

$$\text{B.} \cdots \quad \int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{1}{4}p}^{b-\frac{1}{4}p}\left(\int_0^{\varphi''} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi\right) \cdot dr\right) \cdot d\theta\,,$$

wo φ'' die durch die Gleichung 22.) gegebene Funktion von r, vorstellt, welche im $\left\{\begin{matrix}\text{zweiten}\\\text{ersten}\end{matrix}\right\}$ Quadranten liegt, je nachdem $r \lessgtr \frac{1}{2}p$ ist.

Die Werthe von r können aber auch noch zwischen $b - \frac{1}{4}p$ und $b + \frac{1}{4}p$ liegen, weil, wie wir bereits im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, $b + \frac{1}{4}p$ der größte Werth ist, den r überhaupt annehmen kann. Für jeden dieser Werthe von r, hat φ auch eine untere Grenze φ_2, welche nach der Bedingung 21.) gegeben ist durch die Gleichung

23) $Cos\,\varphi_2 = \frac{b-\frac{1}{4}p}{r}$ oder $\varphi_2 = Arc\,cos.\frac{b-\frac{1}{4}p}{r}$,

und welche (in unserem jetzigen ersten Fall) stets im ersten Quadranten liegt, weil $b-\frac{1}{4}p$ positiv ist. Der Rest der Summe Σ, ist daher ausgedrückt durch das dreifache Integral

$$C. \ldots \int_0^{2\pi}\left(\int_{b-\frac{1}{4}p}^{b+\frac{1}{4}p}\left(\int_{\varphi_2}^{\varphi''} f_{(r,\varphi,\vartheta)}\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot d\varphi\right)\cdot dr\right)\cdot d\theta.$$

Die Summe der drei Theile A., B. und C. ist nun der verlangte Ausdruck, so daß man hat

III. $\Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz = A.+B.+C.$ *).

Zweiter Fall. — Wenn $b \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ ist.

In diesem Falle enthält die Bedingung 21.) einen Widerspruch, sobald $r<\frac{1}{4}p-b$ ist, weil dann $Cos\,\varphi<-1$ werden müßte, was nie möglich; dasmal gehen die Werthe von r also nicht mehr bis zu 0 hin, sondern fangen mit $\frac{1}{4}p-b$ an und gehen bis zu $b+\frac{1}{4}p$ oder $\frac{1}{4}p+b$ fort.

In diesem Falle bildet sich aus der Bedingung 21.) die untere Grenze φ_2 wieder genau wie in 23.), nur daß jetzt φ_2 stets im zweiten Quadranten liegt, weil $b-\frac{1}{4}p$ negativ ist. — Die Bedingung 20.) beschränkt aber an der obern Grenze die Werthe von φ gar nicht, so lange $r \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}p$ ist; dagegen ist diese obere Grenze die durch die Gleichung 22.) gegebene Funktion von r, wenn $r>\frac{1}{4}p$, d. h. wenn r zwischen $\frac{1}{4}p$ und $b+\frac{1}{4}p$ liegt. — Man findet daher für diesen Fall

---

*) Aus dem geometrischen Standpunkte angesehen, drückt das Integral A. die Masse einer Kugel aus, welche den Brennpunkt F zum Mittelpunkt hat, und das Paraboloid im Scheitel berührt. Das Integral B. dagegen drückt die Masse des Stückes aus, welches die Oberfläche der eben gedachten Kugel, die Fläche des Paraboloids vom Scheitel bis zu einer zweiten concentrischen Kugelfläche (d. h. einem Stücke derselben), endlich diese letztere Kugelfläche, welche bis zur Grenz-Ebene des Paraboloids reicht, selbst zur Grenze hat. Das Integral C. endlich drückt die Masse des übrigen Theils des Körpers aus, welcher letztgedachte Ebene, letztgedachte Kugelfläche und noch den übrigen Theil der paraboloidischen Fläche zur Grenze hat.

$$\text{IV. } \Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{4}p-b}^{\frac{1}{4}p} \left(\int_{\varphi_2}^{\pi} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot d\theta$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{4}p}^{b+\frac{1}{4}p} \left(\int_{\varphi_2}^{\varphi''} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot d\theta \; *).$$

Es bleibt aber jetzt noch zu betrachten ein

Dritter Fall. — Wenn $b > \frac{1}{4}p$ aber $b < \frac{1}{2}p$ ist. — So lange r zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ liegt, sind die Werthe von φ an der oberen Grenze (nach 20.) ganz unbeschränkt; an der unteren Grenze dagegen sind sie nur dann ganz unbeschränkt (nach 21.), wenn $r \overline{\overline{<}} b - \frac{1}{4}p$ ist. — So wie aber r zwischen $b - \frac{1}{4}p$ und $\frac{1}{4}p$ liegt, tritt die untere Grenze φ_2 aus 23.) ein. — Liegt endlich r zwischen $\frac{1}{4}p$ und $b + \frac{1}{4}p$, so tritt nicht blos diese untere Grenze φ_2, sondern auch noch die obere Grenze φ'' aus 22.) auf. — Man findet daher jetzt

$$\text{V. } \Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{b-\frac{1}{4}p} \left(\int_0^{\pi} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot d\theta$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left(\int_{b-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p} \left(\int_{\varphi_2}^{\pi} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot d\theta$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{4}p}^{b+\frac{1}{4}p} \left(\int_{\varphi_2}^{\varphi''} f_{(r,\varphi,\theta)} \cdot r^2 \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi \right) \cdot dr \right) \cdot d\theta.$$

Der Anfänger wolle noch diese Untersuchung mit der des §. 13. vergleichen, mit welcher sie viel analoges hat **).

---

*) Aus dem geometrischen Standpunkte gesehen drückt das erstere dieser (dreifachen) Integrale, die Masse eines Kugelsegments aus, dessen Kreis in der begrenzenden Ebene liegt, dessen Höhe $= \frac{1}{4}p - b$ ist und dessen Scheitel mit dem Scheitel des Paraboloids zusammenfällt. Das andere (dreifache) Integral drückt dagegen die Masse des übrigen Theils aus, der von der kugeligen Oberfläche des eben gedachten Segments, der paraboloidischen Oberfläche und noch von dem in der begrenzenden Ebene liegenden concentrischen Kreisringstück begrenzt ist, welches von dem Kugelkreis und von dem Kreise gebildet wird, in welchem die paraboloidische Oberfläche von der gedachten Ebene geschnitten wird.

**) Aus dem geometrischen Standpunkte angesehen drückt das erstere dieser (dreifachen) Integrale die Masse einer aus dem Brennpunkte F beschriebenen Kugel aus, welche gerade bis zur begrenzenden Ebene reicht, aber nicht bis zum Scheitel des Paraboloids. Das nun folgende Integral drückt

§. 40. Fünfte Aufgabe.

Sind g, h, b und p positive Zahlen, und soll gefunden werden die Summe

$$\sum_{gy'^2+hz'^2 \overline{\gtrless} px,\ x \overline{\gtrless} b} f^{I}_{x,y',z'} \cdot dx \cdot dy' \cdot dz',$$

so wird man, wenn der Kürze wegen

1) $+\sqrt{g} = \alpha$ und 2) $+\sqrt{h} = \beta$

gesetzt wird, zunächst statt y' und z', zwei neue Veränderliche y und z einführen, mittelst der Gleichungen

$$\alpha y' = y \quad \text{und} \quad \beta z' = z,$$

so daß
$$dy' \cdot dz' = \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot dy \cdot dz$$

wird; und unsere gesuchte Summe Σ, ist nun wenn der Bequemlichkeit wegen,

3) $f^{I}_{x,\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\beta}}$ durch $f_{x,y,z}$

bezeichnet wird,

$$= \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot \sum_{y^2+z^2 \overline{\gtrless} px,\ x \overline{\gtrless} b} f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

d. h. diese neue Aufgabe ist auf die von uns in den letztern Paragraphen behandelte, zurückgeführt.

---

die Masse eines concentrischen Kugelstückes aus, welches von der Oberfläche der vorerwähnten Kugel und von einem Stück der Oberfläche einer zweiten, concentrischen Kugel, welche gerade bis zum Scheitel O des Paraboloids reicht und auf der andern Seite von der begrenzenden Ebene abgeschnitten wird, welche Ebene dann die Begrenzung dieses Stückes vollendet. Das dritte Integral drückt dagegen die Masse des noch übrigen Stückes des Körpers aus, nämlich des Stückes, welches von dieser letzterwähnten Kugel-Mütze (Calotte), von der gesammten paraboloidischen Oberfläche und von einem ebenen Kreis-Ringstück begrenzt wird, welches letztere in der begrenzenden Ebene liegt und von dem Kugelkreis, so wie von dem Kreise gebildet wird, in welchem die begrenzende Ebene die paraboloidische Oberfläche schneidet.

Anmerkung. Auch dieser letztern Aufgabe läßt sich die geometrische Bedeutung unterlegen,

> daß die Masse eines durch die Gleichung $\alpha y''^2 + \beta z''^2 = px$ gegebenen Paraboloids, gefunden werden soll, wenn solches von einer auf OX senkrechten und vom Scheitel O um b entfernten Ebene begrenzt ist und wenn die Dichtigkeit einer jeden, durch x, y′ und z′ gegebenen Stelle, im Innern (oder an der Oberfläche) des Körpers, durch $f^{\text{I}}_{x,y',z'}$ gegeben ist.

Dieses jetzige Paraboloid ist nicht mehr ein Umdrehungs-Paraboloid, sondern ein allgemeines; die Ebene YOX schneidet solches in der durch die Gleichung

$$y''^2 = \frac{p}{g} x$$

gegebenen Parabel, deren Parameter $= \frac{p}{g}$ ist, und deren Brennpunkt F, von O um $\frac{1}{4} \cdot \frac{p}{g}$ absteht; die Ebene XOZ dagegen schneidet die Oberfläche in einer anderen Parabel, welche durch die Gleichung

$$z''^2 = \frac{p}{h} x$$

gegeben ist, welche den Parameter $\frac{p}{h}$ hat, und deren Brennpunkt F′, von O um $\frac{1}{4} \cdot \frac{p}{h}$ absteht. Denkt man sich eine Ebene, welche zuerst mit YOX zusammenfällt, um OX allmälig herumgedreht, so entstehen lauter Parabeln als Durchschnitte, deren Parameter nach und nach von $\frac{p}{g}$ zu $\frac{p}{h}$ stetig übergehen, und deren Brennpunkte sämmtlich die Entfernung FF′ ausfüllen; das Paraboloid hat nun keinen Brenn-Punkt mehr, sondern eher, wenn man so sagen wollte, die Brenn-Linie FF′.

Die auf OX senkrechten Querschnitte bilden nun nicht mehr

Kreis-, sondern elliptische Durchschnitte, welche Ellipsen für jeden konstanten Werth von x, durch die Gleichung

$$\alpha^2 y''^2 + \beta^2 z''^2 = px$$

gegeben sind, so daß sie die halben Axen $\frac{\sqrt{px}}{\alpha}$ und $\frac{\sqrt{px}}{\beta}$ oder $\sqrt{\frac{px}{g}}$ und $\sqrt{\frac{px}{h}}$ haben.

Die Masse dieses allgemeinen Paraboloids ist also das $\frac{1}{\sqrt{(gh)}}$ fache von der Masse eines Umdrehungs-Paraboloids, welches durch die Gleichung

$$y_1^2 + z_1^2 = px$$

gegeben ist, dessen Grenz-Ebene denselben Abstand b von O hat, dessen Dichtigkeit aber an jeder durch x, y, z gegebenen Stelle durch $f^{\mathrm{I}}_{x,\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\beta}}$ ausgedrückt ist.

§. 41. Sechste Aufgabe.

Soll gefunden werden die Summe

$$\underset{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2} \overline{\gtrless} 1,}{\Sigma f_{x',y',z'} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'}$$

während x, y, z alle, der Bedingung entsprechenden reellen Werthe bekommen sollen, — so kann man damit beginnen, daß man drei neue Veränderliche einführt mittelst der drei Gleichungen

$$x' = ax, \qquad y' = by \qquad \text{und} \qquad z' = cz,$$

wodurch $dx' \cdot dy' \cdot dz' = abc \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

und die gedachte Summe $\Sigma f_{x',y',z'} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$

$$= abc \times \underset{x^2+y^2+z^2 \overline{\gtrless} 1}{\Sigma f_{ax,by,cz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}$$

wird. — Man hat dadurch die Aufgabe auf eine andere und einfachere zurückgeführt *).

---

*) Aus dem geometrischen Standpunkte gesehen drückt die erstere Summe

§. 42. Siebente Aufgabe.

A. Diese neue Summe

$$\sum_{x^2+y^2+z^2 \overline{\gtrless} 1} f_{ax,by,cz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

ist nun zunächst

$$\text{I.} \cdots = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2}} f_{ax,by,cz} \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx,$$

und noch 5 andern analogen Ausdrücken gleich; weil $1-x^2-y^2$ der größte Werth von z^2, folglich $-\sqrt{1-x^2-y^2}$ der kleinste, und $+\sqrt{1-x^2-y^2}$ der größte Werth von z, ist. Eben so ist x^2+y^2 am größten und $=1$, für $z=0$; folglich ist $1-x^2$ der größte Werth, den y^2 (bei der zweiten Integration) haben kann; also ist $-\sqrt{1-x^2}$ der kleinste, und $+\sqrt{1-x^2}$ der größte Werth, den y erhalten darf. — Der größte Werth von x^2, ergiebt sich für $y=z=0$, und solcher ist $=1$; folglich ist -1 der kleinste und $+1$ der größte Werth, den x (bei der dritten Integration) haben kann. — Daß endlich x, y, z bei den Integrationen gleiche Rechte haben, daß also die Integrationen im Ganzen sechs mal verschieden angeordnet werden können, versteht sich von selbst.

B. Führt man aber statt x einen neuen Veränderlichen r ein mittelst der Gleichung

$$1) \qquad x^2+y^2+z^2 = r^2, \quad \text{also} \quad x = \pm\sqrt{r^2-y^2-z^2},$$

---

die Masse eines Ellipsoids aus, welches bezüglich die halben Axen a, b und c hat, und an der durch x', y', z' gegebenen Stelle, die Dichtigkeit $f_{x',y',z'}$. — Die andere Summe dagegen drückt die Masse einer Kugel aus, deren Radius 1 ist, und welche an der durch x, y, z gegebenen Stelle die Dichtigkeit $f_{ax,by,cz}$ hat. — Die Masse des gedachten allgemeinen Ellipsoids ist also das $a \cdot b \cdot c$ fache der Masse einer Kugel, welche den Radius 1 hat, und deren Dichtigkeit an jeder durch x, y und z gegebenen Stelle, $= f_{ax,by,cz}$ ist, wenn die Dichtigkeit des allgemeinen Ellipsoids an einer durch x', y' und z' gegebenen Stelle, durch $f_{x',y',z'}$ ausgedrückt ist.

so ist, wenn man differentiirt,

2) $$\partial x_r = \frac{r}{\pm\sqrt{r^2-y^2-z^2}}.$$

Bezeichnet man nun durch $\partial x_r^{\mathrm{I}}$ und $f^{\mathrm{I}}_{(r,y,z)}$ das, was aus ∂x_r und $f_{ax,by,cz}$ bezüglich wird, wenn man das (—) Vorzeichen nimmt, dagegen durch $\partial x_r^{\mathrm{II}}$ und $f^{\mathrm{II}}_{(r,y,z)}$ das, was bezüglich aus ∂x_r und $f_{ax,by,cz}$ hervorgeht, wenn man das (+) Vorzeichen nimmt, so hat man, weil die Bedingung $x^2+y^2+z^2 \overline{\overline{<}} 1$, jetzt in

3) $$r \overline{\overline{<}} 1$$

übergeht, und r nur positiv (oder Null) genommen werden darf, zu jedem Werth von r aber zwei Werthe von x, gehören, — unsere Summe Σ,

$$= \int_1^0 \left(\int_{-r}^{+r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} f^{\mathrm{I}}_{(r,y,z)}\cdot\partial x_r^{\mathrm{I}}\cdot dz\right)\cdot dy\right)\cdot dr;$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_{-r}^{+r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} f^{\mathrm{II}}_{(r,y,z)}\cdot\partial x_r^{\mathrm{II}}\cdot dz\right)\cdot dy\right)\cdot dr;$$

denn es haben jetzt y und z keine andere Bedingung mehr zu erfüllen, als daß x (aus 1.) nicht imaginär wird; daher ist r^2-y^2 der größte Werth von z^2, bei der ersten Integration, — dagegen r^2 der größte Werth von y^2 bei der zweiten Integration, während, wegen $dx = \partial x_r \cdot dr$, der Faktor dr mit ∂x_r zugleich positiv oder negativ ist. — Weil aber hier allemal $\partial x_r^{\mathrm{I}} = -\partial x_r^{\mathrm{II}}$ ist, so kann man den obigen Ausdruck auch so schreiben, nämlich:

II. ... $\Sigma =$

$$\int_0^1 \left(\int_{-r}^{+r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} [f^{\mathrm{I}}_{(r,y,z)}+f^{\mathrm{II}}_{(r,y,z)}]\cdot\partial x_r\right)\cdot dz\right)\cdot dy\right)\cdot dr,$$

wo ∂x_r nur mit dem (+) Vorzeichen genommen wird. — Auch hier findet man sogleich noch fünf andere Anordnungen des Integrirens.

§. 43.

Führt man statt x und y, zwei neue Veränderliche r und φ ein mittelst der Gleichungen

4) $x = r \cdot Cos\,\varphi$ und $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

d. h.

5) $y = \pm\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}$

wo r blos positiv (oder Null), φ dagegen zwischen 0 und π genommen werden muß, damit x und y alle ihre reellen Werthe annehmen können; — so wird nun (nach §. 14.)

6) $$dx \cdot dy = \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{\pm\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr \cdot d\varphi,$$

wo $d\varphi$ durchweg positiv genommen werden kann, wo aber dr mit der Quadratwurzel zugleich positiv oder zugleich negativ genommen werden muß. — In so ferne zu jedem Werth von r, ein Werth von x und zwei Werthe von y gehören, muß jeder Werth von r, zweimal genommen werden, einmal aber der negative Werth der Quadratwurzel, das andere mal der positive Werth derselben Quadratwurzel; — so daß einmal die Funktion $f_{(r,\varphi,z)}$, welche aus $f_{ax,by,cz}$ durch Substitution der Werthe von x und y (aus 4. und 5.) hervorgeht, mit dem negativen Werth der Quadratwurzel genommen werden muß und dann durch f^{I} bezeichnet werden kann, das andere Mal aber mit dem positiven Werth der Quadratwurzel zu nehmen ist und dann durch f^{II} bezeichnet werden mag. — Die Grenzbedingung $x^2+y^2+z^2 \overline{\overline{<}} 1$ geht jetzt wieder in

7) $r \overline{\overline{<}} 1$

über, so daß die Werthe von φ gar nicht beschränkt sind, sondern sich über den ganzen Raum zwischen 0 und π erstrecken, die Werthe von z aber nur in so weit beschränkt sind, als y d. h. $\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}$ nicht imaginär werden darf, so daß die Werthe von z zwischen $-r \cdot Sin\,\varphi$ und $+r \cdot Sin\,\varphi$ liegen.

Man findet daher jetzt

III. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$=\int_0^1\left(\int_0^\pi\left(\int_{-r\cdot Sin\,\varphi}^{r\cdot Sin\,\varphi}(f^{\mathrm{I}}+f^{\mathrm{II}})\cdot\frac{r^2\cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2\cdot Sin\,\varphi^2-z^2}}\cdot dz\right)\cdot d\varphi\right)\cdot dr,$$

wo aber f^{I} und f^{II} andere Bedeutungen haben, als in II. und wo wir sogleich die beiden Integrale in ein einziges zusammengezogen haben. — Die beiden Integrationen nach φ und r, können sich dabei in beliebiger Anordnung folgen, da ihre Grenzen absolut konstant sind.

Will man aber nicht zuerst nach z summiren, sondern etwa zuerst nach φ, so giebt die Bedingung, daß y (aus 5.) nicht imaginär werden darf, sofort $Sin\,\varphi^2 \overline{\overline{>}} \frac{z^2}{r^2}$, d. h. $Sin\,\varphi \overline{\overline{>}} \frac{\pm z}{r}$, wo das $\pm$ Zeichen gilt, je nachdem z $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ gedacht ist, weil $\frac{\pm z}{r}$ in allen Fällen positiv bleiben soll und muß.

Bestimmt man also φ aus der Gleichung

8) $\quad Sin\,\varphi = \frac{\pm z}{r}$, je nachdem z $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist,

so ergiebt sich ein Werth φ_1 von φ, im ersten Quadranten und noch ein zweiter Werth $\pi-\varphi_1$ im zweiten Quadranten; und es ist dann, da $Sin\,\varphi \overline{\overline{>}} Sin\,\varphi_1$ und $Sin\,\varphi \overline{\overline{>}} Sin(\pi-\varphi_1)$ werden muß, $\varphi \overline{\overline{>}} \varphi_1$, aber $\varphi \overline{\overline{<}} \pi-\varphi_1$; folglich liegen jetzt die Werthe von φ zwischen φ_1 und $\pi-\varphi_1$, wo

9) $\quad \varphi_1 = Arc\,sin.\frac{\pm z}{r}$, je nachdem z $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist.

Die Werthe von z bleiben jetzt unbeschränkt, müssen aber alle (wegen $x^2+y^2+z^2 \overline{\overline{<}} 1$) zwischen -1 und $+1$ liegen. — Man hat daher jetzt

IV. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_{\phi_1}^{\pi-\phi_1} (f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot d\varphi \right) \cdot dz \right) \cdot dr$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{\phi_2}^{\pi-\phi_2} (f^{I} + f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot d\varphi \right) \cdot dz \right) \cdot dr,$$

wo wir zuletzt, der größeren Bestimmtheit wegen,

10) $\varphi = Arc\,sin.\frac{-z}{r}$ und 11) $\varphi_2 = Arc\,sin.\frac{+z}{r}$

angenommen haben und wo wir wiederum jedesmal die beiden Integrale, welche für den doppelten Werth von r, zu welchem einmal der negative, das andere Mal der positive Werth von y, d. h. von $\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}$, gehört, sich ergeben, — in ein einziges zusammengezogen haben.

Die Integrale nach z und r, können sich dabei in beliebiger Anordnung folgen, wenn nur die Integration nach φ, die erste ist.

Will man nach r zuerst summiren, so hat man die beiden Bedingungen

12) $r \overline{\overline{<}} 1$ und 13) $r^2 \overline{\overline{>}} \frac{z^2}{Sin\,\varphi^2}$

zunächst zu erfüllen.

Die Bedingung 13.) giebt

14) $r \overline{\overline{>}} \frac{-z}{Sin\,\varphi}$, so lange z negativ ist,

und

15) $r \overline{\overline{>}} \frac{+z}{Sin\,\varphi}$, so lange z positiv ist.

Setzt man also

16) $\frac{-z}{Sin\,\varphi} = r_1$, wenn z negativ ist,

und

17) $\frac{+z}{Sin\,\varphi} = r_2$, wenn z positiv ist,

so liegen die Werthe von r,

zwischen r_1 und 1, so lange z negativ ist, aber
zwischen r_2 und 1, so lange z positiv ist.

Außerdem sind aber nun noch die Bedingungen

18) $r_1 \overline{\overline{<}} 1$, d. h. $\frac{-z}{Sin\,\varphi} \overline{\overline{<}} 1$, so lange z negativ ist,

und

19) $r_2 \overline{\overline{<}} 1$, d. h. $\frac{+z}{Sin\,\varphi} \overline{\overline{<}} 1$, so lange z positiv ist,

zu erfüllen.

Summirt man also nun zunächst nach φ, und setzt man dann

20) $\varphi_1 = Arc\,sin.(-z)$, wenn z negativ ist,

21) $\varphi_2 = Arc\,sin.z$, wenn z positiv,

so liegen φ_1 und φ_2 im ersten Quadranten und man muß nehmen

22) $Sin\,\varphi > Sin\,\varphi_1$, wenn z negativ

und

23) $Sin\,\varphi > Sin\,\varphi_2$, wenn z positiv ist.

Die Werthe von φ liegen also

zwischen φ_1 und $\pi - \varphi_1$, so lange z negativ ist, aber
zwischen φ_2 und $\pi - \varphi_2$, so lange z positiv ist.

Man hat daher nun

V. ... $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\int_{\phi_1}^{\pi-\phi_1}\left(\int_{r_1}^{1}(f^{I}+f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz$$

$$+ \int_{0}^{+1}\left(\int_{\phi_2}^{\pi-\phi_2}\left(\int_{r_2}^{1}(f^{I}+f^{II}) \cdot \frac{r^2 \cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2 \cdot Sin\,\varphi^2 - z^2}} \cdot dr\right) \cdot d\varphi\right) \cdot dz.$$

Will man aber zunächst nach z summiren, so geben die Bedingungen 18.) und 19.)

$z \overline{\overline{<}} - Sin\,\varphi$, so lange z negativ ist,

aber

$z \overline{\overline{<}} + Sin\,\varphi$, so lange z positiv.

Es gehen daher die Werthe von z, von $-Sin\,\varphi$ bis 0, und dann noch von 0 bis $+Sin\,\varphi$, während φ unbeschränkt von 0 bis π geht. — Man hat daher jetzt

$$\text{VI.}\cdots\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$
$$=\int_0^\pi\left(\int_{-Sin\,\varphi}^0\left(\int_{r_1}^1(f^{I}+f^{II})\cdot\frac{r^2\cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2\cdot Sin\,\varphi^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dz\right)\cdot d\varphi$$
$$+\int_0^\pi\left(\int_0^{Sin\,\varphi}\left(\int_{r_2}^1(f^{I}+f^{II})\cdot\frac{r^2\cdot Sin\,\varphi}{+\sqrt{r^2\cdot Sin\,\varphi^2-z^2}}\cdot dr\right)\cdot dz\right)\cdot d\varphi,$$

wo jedesmal r_1 und r_2 aus den Gleichungen 16.) und 17.) zu entnehmen sind, und wo man die beiden Integrale nach φ, in ein einziges zusammenziehen kann.

§. 44.

Führt man statt x, y und z, drei neue Veränderliche r, φ und θ ein, mittelst der Gleichungen

$$24)\quad x=r\cdot Cos\,\varphi;\qquad 25)\quad y=r\cdot Sin\,\varphi\cdot Cos\,\theta$$
$$\text{und}\quad 26)\quad z=r\cdot Sin\,\varphi\cdot Sin\,\theta,$$

so kann man r blos positiv oder Null, φ zwischen 0 und π, dagegen θ zwischen 0 und 2π nehmen, um für x, y, z alle reellen Werthe zu erhalten. Die beschränkende Bedingung $x^2+y^2+z^2\overline{\overline{<}}1$ führt jetzt wieder zu

$$27)\qquad r\overline{\overline{<}}1$$

und man findet daher jetzt (nach §. 34.)

$$\text{VII.}\cdots\quad \Sigma f\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi\left(\int_0^1 f_{(r,\varphi,\theta)}\cdot r^2\cdot Sin\,\varphi\cdot dr\right)\cdot d\varphi\right)\cdot d\theta,$$

wenn $f_{(r,\varphi,\theta)}$ das bedeutet, was aus $f_{ax,by,cz}$ hervorgeht, wenn statt x, y und z die Werthe (aus 24.–26.) gesetzt werden. — Die Ordnung des Integrirens ist hier ganz beliebig, so daß noch fünf andere Anordnungen statt finden können.

§. 45.

Sieht man die Aufgabe des §. 42. aus dem geometrischen Gesichtspunkte an, so soll z. B. die Masse einer Kugel gefunden werden, deren Radius 1 ist und welche an der durch die Koordinatenwerthe x, y und z gegebenen Stelle, die Dichtigkeit $f_{ax,by,cz}$ hat.

In der Auflösung I. giebt das erste Integral nach z, die Masse eines Prisma vom unendlichkleinen Querschnitt $dx \cdot dy$ (und welches wir eine materielle Linie nennen möchten), welches mit der Axe OZ parallel läuft, auf beiden Seiten von der Kugelfläche begrenzt ist und welches sich an der durch x und y gegebenen Stelle befindet. — Die zweite Integration nach y summirt die Masse aller dieser Prismen, welche zu einem und demselben x gehören, aber zu allen verschiedenen Werthen von y; sie giebt daher die Masse einer Scheibe von der unendlichkleinen Dicke dx, welche mit der Koordinaten-Ebene YOZ parallel läuft und deren Lage durch den Abscissenwerth x, gegeben ist. — Die dritte Integration nach x, summirt endlich die Massen aller dieser Scheiben, wie sie die ganze Kugel erfüllen.

Der dann in der Gleichung 1.) eingeführte neue Veränderliche r, ist der Abstand des Punktes M, an welchem sich das Körper-Element befindet, vom Mittelpunkt O, der Kugel. Der Punkt M ist nun gegeben durch die drei neuen Koordinatenwerthe r, y und z; d. h. er wird jetzt als der Durchschnittspunkt angesehen, der mit r aus O beschriebenen Kugelfläche und zweier mit XOZ und XOY paralleler und von letzteren bezüglich um $\pm y$ und $\pm z$ abstehender Ebenen. — Das jetzige Körper-Element, dessen Inhalt $= \partial x_r \cdot dr \cdot dy \cdot dz$ ist, wird gebildet durch zwei Kugelflächen, welche die Radien r und $r + dr$ haben, welche in dem kleinen Umfange des Elements als zwei mit einander parallele und um dr von einander abstehende Ebenen angesehen werden können, von denen die eine an der Stelle M eine Tangential-Ebene an die kleinste dieser Kugelflächen ist; — die übrigen Grenzen des Körper-Elementes sind zwei Paare mit einander und bezüglich mit XOZ und XOY paralleler und von letzteren bezüglich um $\pm y$ und $\pm y+dy$, ferner um $\pm z$ und $\pm z+dz$ entfernter Ebenen. Es ist dies ein schiefes Parallelepipedum, dessen Grundfläche den Inhalt $dy \cdot dz$ hat und dessen Höhe $= \pm \partial x_r \cdot dr$ ist, natürlich nicht negativ. — In dem Resultate II. giebt die erste Integration (nach z) die Masse einer materiellen Kreislinie, deren mit XOY paralleler Querschnitt überall den Inhalt $\pm \partial x_r \cdot dr \cdot dy$ hat und zu welcher überall ein und derselbe Werth von r, und auch ein und derselbe Werth von y gehört, die also von den beiden vorgedachten Kugelflächen und von den beiden vorgedachten, mit XOZ parallelen Ebenen gebildet wird, und welche nach der Kugel-Oberfläche gebogen links die halbe und rechts die halbe Kugel (mit dem Radius r) umläuft, während für die Elemente der einen Hälfte die Dichtigkeit f^{I}, für die Elemente der anderen Hälfte aber die Dichtigkeit f^{II} besteht. — Die zweite Integration in II. (nach y) giebt nun die Masse der Kugelschicht, welche von den beiden vorgedachten Kugelflächen gebildet wird und deren Dicke dr ist. — Die dritte Integration (nach r) endlich giebt die Masse der ganzen Kugel, deren Radius $= 1$ ist.

Im §. 43. ist der neu eingeführte Veränderliche φ, der Winkel MOX, und r die Entfernung OM. — Das jetzige Körper-Element, dessen Inhalt $= \pm(\partial G_r \cdot \partial H_\varphi - \partial G_\varphi \cdot \partial H_r) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$ ist, ist gebildet von den beiden vorerwähnten Kugelflächen, von zwei Kegelflächen, deren Seiten mit ihrer gemeinschaftlichen Axe OX, die Winkel φ und $\varphi+d\varphi$ bilden, und von den beiden vorerwähnten, mit XOY parallelen Ebenen; auch dieses Element kann, weil alle seine Dimensionen unendlichklein sind, als ein schiefes Parallelepipedum angesehen und aus diesem Gesichtspunkt berechnet werden. — In dem Resultat III. giebt die erste Integration (nach z), die Masse einer materiellen Kreislinie, welche den Radius $r \cdot Sin\varphi$ hat und deren Ebene vom Mittelpunkte O, um $\pm r \cdot Cos\varphi$ ab- und senkrecht auf der Axe OX steht, deren Dichtigkeit endlich in der einen Hälfte durch f^{I}, in der andern Hälfte aber durch f^{II} ausgedrückt ist. — Die zweite Integration (nach φ), giebt wiederum die Masse der Kugelschicht zwischen den beiden mit r und r+dr beschriebenen Kugelflächen. — Die dritte Integration (nach r), giebt dann die Masse der ganzen Kugel, deren Radius $= 1$ ist.

Wollte man das zweite mal nach r integriren, und dann erst nach φ, so würde die zweite Integration die Masse einer zwischen den zwei oben erwähnten Kegel-Mänteln liegenden Schicht geben, die sich vom Mittelpunkte O bis zur Oberfläche der ganzen Kugel erstreckt, während dann die dritte Integration (nach φ), die Summe der Massen aller dieser Kegelschichten von $\varphi = 0$ an bis zu $\varphi = \pi$ hin, d. h. abermals die Masse der ganzen Kugel, giebt.

Das Resultat IV. besteht aus zwei dreifachen Integralen (eigentlich aus vieren, von denen aber je zwei in eines zusammengezogen worden sind). In jedem dieser beiden Theile giebt die erste Integration (nach φ) die Masse einer materiellen Kreislinie, deren Ebene mit der Ebene XOY parallel läuft, und im erstern (dreifachen) Integral auf der negativen Seite der z liegt, im andern (dreifachen) Integral aber auf der positiven Seite derselben, während auf der Seite der negativen y, die Dichtigkeit einer jeden Stelle durch f^{I}, auf der positiven Seite der y aber, durch f^{II} ausgedrückt ist. — Die zweite Integration (nach z) giebt dann im erstern (dreifachen) Integral die Masse der u n t e r n, im zweiten (dreifachen) Integral dagegen die Masse der o b e r n halben Kugelschicht, welche zwischen den mit r und r+dr beschriebenen Kugelflächen liegt. — Die dritte Integration (nach r) giebt dann im erstern (dreifachen) Integral die Masse der u n t e r n, im andern (dreifachen) Integral aber die Masse der o b e r n Halbkugel.

Vertauschte man die Ordnung der zweiten und dritten Integration mit einander, so würde dann die zweite Integration nach r, die Masse einer mit XOY parallelen von letzterer Ebene um $\pm z$ entfernten Kreisscheibe von der Dicke dz geben, deren

Radius $=\sqrt{1-z^2}$ ist, während dann die dritte Integration (nach z) wiederum die Masse der beiden Halbkugeln geben würde.

In dem Resultate V. giebt die erste Integration (nach r) in jedem der beiden Summanden die Masse einer aber hyperbolischen (materiellen) Linie, deren Ebene mit der Ebene XOY parallel läuft und von letzterer um $\pm z$ entfernt ist, und deren eine Hälfte an jeder ihrer Stellen die Dichtigkeit f^{I}, deren andere Hälfte aber die Dichtigkeit f^{II} hat, und deren Schenkel bis zur Oberfläche der ganzen Kugel reichen, deren Radius $=1$ ist. — Die zweite Integration (nach φ) giebt dann die Masse einer aus allen diesen neben einander liegenden hyperbolischen (materiellen) Linien gebildeten Kreisscheibe, welche die Dicke dz hat, mit XOY parallel läuft und von O um $\pm z$ absteht. — Die dritte Integration giebt dann die Massen der beiden Halbkugeln wieder.

In dem Resultat VI. giebt die erste Integration (nach r) wieder die Massen der vorerwähnten hyperbolischen (materiellen) Linien; die zweite Integration (nach z) giebt dann die Summe der Massen aller dieser hyperbolischen Linien, deren Ebenen längs eines und desselben Kegelmantels alle mit einander parallel laufen, d. h. die Masse der halben Kegelschicht, welche die beiden Kegelmäntel mit einander bilden, deren Seiten mit der gemeinschaftlichen Axe OX, bezüglich die Winkel φ und $\varphi+d\varphi$ bilden. — Die dritte Integration (nach φ) giebt dann wieder die Massen der beiden Halbkugeln, welche jetzt als die Summe dieser halben Kegelschichten betrachtet sind.

Im §. 44. haben r und φ noch dieselbe geometrische Bedeutung, wie im §. 43.; der neue Veränderliche θ ist aber der Winkel, den die Ebene MOX mit der Ebene YOX macht. — Die erste Integration (nach r) in dem Resultat VII. giebt nun die Masse einer vierseitigen Pyramide, die ihre Spitze in O, und ihre Grundfläche in der Oberfläche der Kugel hat, während die Seitenflächen einerseits zwei Kegelflächen sind, deren Seiten mit OX bezüglich die Winkel φ und $\varphi+d\varphi$ bilden, — andrerseits aber zwei Ebenen, welche mit YOX die Winkel θ und $\theta+d\theta$ bilden. — Die zweite Integration (nach φ) giebt die Masse des von den letztgedachten Ebenen gebildeten Ausschnitts der Kugel. — Die dritte Integration (nach θ) endlich giebt die Summe der Massen aller dieser Ausschnitte, d. h. die Masse der ganzen Kugel.

Hätte man also die Aufgabe des §. 42. aus dem geometrischen Standpunkte gegeben und, aus demselben angesehen, bei den verschiedenen Koordinaten-Systemen x, y, z, oder r, y, z, oder r, φ, z, oder r, φ, θ auch zu lösen versucht, so würde man genau zu denselben Resultaten gelangt sein (I.—VII. der §§. 42.—44.), zu denen man auf dem rein analytischen Wege bereits gelangt ist. Man hätte aber dann die Inhalte der jedesmaligen Körper-Elemente ebenfalls auf geometrischem Wege berechnen müssen und dies würde nur nach Ueberwindung mancher Schwierigkeiten geschehen sein.

Anmerkung. Die in den vorliegenden drei Uebungen betrachteten Beispiele und die aufgestellten Lehrsätze, reichen vollständig aus, um den Anfänger in den Stand zu setzen, auch in den Fällen, wo Summen auszudrücken sind, wie z. B. $\Sigma f_{x,y,z,u} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot du$, oder $\Sigma f_{x,y,z,u,v} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot du \cdot dv$, oder 2c., während die Veränderlichen in bestimmte und gegebene Grenzen eingeschlossen sind, — die nöthige Zergliederung vornehmen und die vierfachen, fünffachen 2c., Integrale angeben zu können, aus denen sich diese Summen, bei jeder beliebig gewählten Anordnung der Summation, zusammensetzen lassen.

In diesen letzterwähnten Fällen ist es allemal unmöglich, die Aufgabe auch aus dem geometrischen Standpunkte anzusehen und zu lösen, und man würde sich hier also ganz verlassen sehen, wenn man eben nicht in den einfacheren Fällen erlernt hätte, alle diese Aufgaben aus dem rein analytischen Standpunkte mit dem gewünschten Erfolge zu behandeln.

Aber auch in den drei einfacheren Fällen, wo Summen von der Form

$$\Sigma f_x \cdot dx, \qquad \Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy \quad \text{und} \quad \Sigma f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

in Integrale ausgedrückt werden sollen, können und werden Fälle eintreten, wo nur eine rein analytische Behandlung allein möglich ist, z. B. wenn

$$\underset{\frac{x^2}{a^2} \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_x \cdot dx} = a \cdot \underset{x'^2 \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_{ax'} \cdot dx'};$$

oder wenn

$$\underset{\frac{y^2}{a^2} \overline{\overline{<}} px,\ x \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy} = a \cdot \underset{y'^2 \overline{\overline{<}} px,\ x \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_{x,ay'} \cdot dx \cdot dy'};$$

oder

$$\underset{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{x,y} \cdot dx \cdot dy} = ab \cdot \underset{x'^2+y'^2 \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{ax',by'} \cdot dx' \cdot dy'};$$

oder wenn

$$\underset{\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} \overline{\overline{<}} px,\ x \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = ab \cdot \underset{y'^2+z'^2 \overline{\overline{<}} px,\ x \overline{\overline{<}} b}{\Sigma f_{x,ay',bz'} \cdot dx \cdot dy' \cdot dz'};$$

oder

$$\underset{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{x,y,z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = abc \cdot \underset{x'^2+y'^2+z'^2 \overline{\overline{<}} 1}{\Sigma f_{ax',by',cz'} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'}$$

gefunden werden soll, — ist solches nur auf rein analytischem Wege möglich; so wie überhaupt allemal da, wo neue Veränderliche eingeführt werden, welche mit den alten Veränderlichen nicht in einem solchen Zusammenhange stehen, daß erstere als neue Koordinatenwerthe desselben Punktes angesehen werden können, den die alten Veränderlichen geben, im Falle solche als Koordinatenwerthe angesehen werden, und als solche auch angesehen werden können.

§. 46. Dritte allgemeine Aufgabe.

Wollte man aber, im Falle z. B.

$$\Sigma f_{x,y,z,t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$$

gefunden werden sollte, statt aller vier Veränderlichen vier neue Veränderliche r, φ, ψ und θ einführen, so müßte man wieder aus den in der „Vorbereitung" zu §. 14. klar dargelegten Gründen, einen nach dem andern einführen.

Wären also gegeben die vier Gleichungen

1) $x = G_{r,\varphi,\psi,\theta}$; 2) $y = H_{r,\varphi,\psi,\theta}$;

3) $z = K_{r,\varphi,\psi,\theta}$ und 4) $t = L_{r,\varphi,\psi,\theta}$,

so würde man aus den vier Gleichungen 1.—4.) die Veränderlichen φ, ψ und θ eliminirt sich denken, und z. B. x, in r, y, z und t ausgedrückt gefunden; dies gäbe die Gleichung 1.) unter der Voraussetzung, daß φ, ψ, θ die Funktionen von y, z und t vorstellen, welche die Gleichungen 2.—4.) identisch machen. Diese Gleichung und die drei übrigen (als nach allem r, identische angesehen), geben aber, wenn man sie nach allem r differenziirt,

5) $\partial x_r = \partial G_r + \partial G_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial G_\psi \cdot \partial \psi_r + \partial G_\theta \cdot \partial \theta_r$

und

6) $0 = \partial H_r + \partial H_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial H_\psi \cdot \partial \psi_r + \partial H_\theta \cdot \partial \theta_r$

7) $0 = \partial K_r + \partial K_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial K_\psi \cdot \partial \psi_r + \partial K_\theta \cdot \partial \theta_r$

8) $0 = \partial L_r + \partial L_\varphi \cdot \partial \varphi_r + \partial L_\psi \cdot \partial \psi_r + \partial L_\theta \cdot \partial \theta_r$

und man hat dann noch

$$dx = \partial x_r \cdot dr$$

und

9) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot dr \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$

Hierauf führt man statt y, die durch die Gleichung 2.) gegebene Funktion von r, φ, y und z ein, indem man sich unter ψ und θ die Funktionen von z, t, r und φ denkt, welche die Gleichungen 3.) und 4.) identisch machen. Differenziirt man nun die Gleichung 2.) aus diesem Gesichtspunkt nach allem φ, so wie auch die Gleichungen 3.) und 4.) (als nach allem φ, identische), so erhält man

10) $\partial y_\varphi = \partial H_\varphi + \partial H_\psi \cdot \partial \psi_\varphi + \partial H_\theta \cdot \partial \theta_\varphi$

11) $0 = \partial K_\varphi + \partial K_\psi \cdot \partial \psi_\varphi + \partial K_\theta \cdot \partial \theta_\varphi$

12) $0 = \partial L_\varphi + \partial L_\psi \cdot \partial \psi_\varphi + \partial L_\theta \cdot \partial \theta_\varphi$

und man hat dann noch

$$dy = \partial y_\varphi \cdot d\varphi$$

und

13) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial r \cdot d\varphi \cdot dz \cdot dt.$

Hierauf führt man statt des Veränderlichen z, den dritten neuen Veränderlichen ψ ein, mittelst der Gleichung 3.), indem man sich statt θ die Funktion von z, r, φ und ψ gesetzt denkt, welche die 4.) identisch macht. Differentiirt man dann die 3.) und 4.) aus diesem Gesichtspunkte nach allem ψ, so erhält man

14) $\partial z_\psi = \partial K_\psi + \partial K_\theta \cdot \partial \theta_\psi$

15) $0 = \partial L_\psi + \partial L_\theta \cdot \partial \theta_\psi,$

und

$$dz = \partial z_\psi \cdot d\psi,$$

so wie

16) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot dt.$

Zuletzt wird θ mittelst der Gleichung 4.) statt t eingeführt und diese liefert

17) $\partial t_\theta = \partial L_\theta$

und

$$dt = \partial L_\theta \cdot d\theta,$$

so wie

18) $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \Sigma f \cdot \partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot dz_\psi \cdot dt_\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot d\theta.$

Eliminirt man nun aus 14.) und 15.) $\partial\theta_\psi$; ferner aus 10.), 11.) und 12.) $\partial\psi_\varphi$ und $\partial\theta_\varphi$; zuletzt aber aus 5.—8.) $\partial\varphi_r$, $\partial\psi_r$ und $\partial\theta_r$; und substituirt man dann die so gefundenen Werthe von ∂x_r, ∂y_φ und ∂z_ψ so wie aus 17.) den für dt_θ gefundenen Werth in die Gleichung 19.), so erhält man statt des Elementes von $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$, das neue Element von $\Sigma f \cdot \partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot dt_\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot dt$, aber jetzt blos in die Ableitungen der gegebenen Funktionen G, H, K und L, nach ihren einzelnen Veränderlichen r, φ, ψ und θ genommen, ausgedrückt.

Verfolgt man aber diese Elimination mittelst der Methode der Multiplikatoren, so kann man sich überzeugen, daß der dritte Faktor ∂z_ψ (des Produkts $\partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$) $= \cdots \partial K_\psi \cdot \partial L_\theta - \partial L_\psi \cdot \partial K_\theta$ wird, daß also ∂z_ψ eine Bruchform annimmt, deren Nenner der vierte Faktor dt_θ des obigen Produkts ist, daß also

$$\partial z_\psi \cdot \partial t_\theta = \partial K_\psi \cdot \partial L_\theta - \partial L_\psi \cdot \partial K_\theta$$

wird; daß dann ∂y_φ wiederum durch eine Bruchform ausgedrückt gefunden wird, deren Nenner gerade dieser so eben für $\partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$ gefundene Ausdruck ist, so daß das Produkt $\partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$ ein aus 6 Gliedern zusammengesetzter Ausdruck ist, deren jedes ein Produkt von drei Derivationen der drei Funktionen H, K und L, nach einem der drei neuen Veränderlichen φ, ψ oder θ genommen, wird, — während drei dieser Glieder addirt, dreie aber subtrahirt sind, so daß man findet

$$\begin{aligned}\partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot \partial t_\theta = \\ \partial H_\varphi \cdot \partial K_\psi \cdot \partial L_\theta - \partial H_\varphi \cdot \partial L_\psi \cdot \partial K_\theta + \partial K_\varphi \cdot \partial L_\psi \cdot \partial H_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\psi \cdot \partial L_\theta \\ + \partial L_\varphi \cdot \partial H_\psi \cdot \partial K_\theta - \partial L_\varphi \cdot \partial K_\psi \cdot \partial H_\theta\end{aligned}$$ *);

daß endlich für ∂x_r eine Bruchform gefunden wird, deren Nenner der so eben für $\partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$ gefundene Ausdruck ist, während der Zähler ein aus 24 Gliedern zusammengesetzter Ausdruck

*) Der oben für $\partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$ gefundene Ausdruck ist derselbe, welcher nach §. 14. für V gefunden wird, wenn man statt der dortigen x und y, zwei Funktionen K und L von ψ und θ, setzt und nun $dx \cdot dy = V \cdot d\psi \cdot d\theta$ herstellt.

Der für $\partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$ gefundene Ausdruck ist dagegen genau derselbe, den man nach §. 37. für W erhalten würde, wenn man statt der dortigen x, y und z, drei Funktionen H, K und L von φ, ψ und θ, setzte und nun $dx \cdot dy \cdot dz = W \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot d\theta$ herstellte.

wird, von denen 12 addirt, 12 subtrahirt sind, und deren jedes ein Produkt von 4 Derivationen der Funktionen G, H, K und L nach einem der 4 neuen Veränderlichen ist; — so daß eben dieser Zähler D, allein das ist, was für das ganze Produkt $\partial x_r \cdot \partial y_\varphi \cdot \partial z_\psi \cdot \partial t_\theta$ gefunden wird. Man erhält daher für dieses letztere Produkt den Ausdruck

$$\begin{aligned} D = {} & \partial G_r\cdot\partial H_\varphi\cdot\partial K_\psi\cdot\partial L_\theta - \partial G_r\cdot\partial H_\varphi\cdot\partial L_\psi\cdot\partial K_\theta \\ & + \partial G_r\cdot\partial K_\varphi\cdot\partial H_\psi\cdot\partial L_\theta - \partial G_r\cdot\partial K_\varphi\cdot\partial L_\psi\cdot\partial H_\theta \\ & + \partial G_r\cdot\partial L_\varphi\cdot\partial H_\psi\cdot\partial K_\theta - \partial G_r\cdot\partial L_\varphi\cdot\partial K_\psi\cdot\partial H_\theta \\ & + \partial H_r\cdot\partial K_\varphi\cdot\partial L_\psi\cdot\partial G_\theta - \partial H_r\cdot\partial K_\varphi\cdot\partial G_\psi\cdot\partial L_\theta \\ & + \partial H_r\cdot\partial L_\varphi\cdot\partial K_\psi\cdot\partial G_\theta - \partial H_r\cdot\partial L_\varphi\cdot\partial G_\psi\cdot\partial K_\theta \\ & + \partial H_r\cdot\partial G_\varphi\cdot\partial K_\psi\cdot\partial L_\theta - \partial H_r\cdot\partial G_\varphi\cdot\partial L_\psi\cdot\partial K_\theta \\ & + \partial K_r\cdot\partial L_\varphi\cdot\partial G_\psi\cdot\partial H_\theta - \partial K_r\cdot\partial L_\varphi\cdot\partial H_\psi\cdot\partial G_\theta \\ & + \partial K_r\cdot\partial G_\varphi\cdot\partial L_\psi\cdot\partial H_\theta - \partial K_r\cdot\partial G_\varphi\cdot\partial H_\psi\cdot\partial L_\theta \\ & + \partial K_r\cdot\partial H_\varphi\cdot\partial L_\psi\cdot\partial G_\theta - \partial K_r\cdot\partial H_\varphi\cdot\partial G_\psi\cdot\partial L_\theta \\ & + \partial L_r\cdot\partial G_\varphi\cdot\partial H_\psi\cdot\partial K_\theta - \partial L_r\cdot\partial G_\varphi\cdot\partial K_\psi\cdot\partial H_\theta \\ & + \partial L_r\cdot\partial H_\varphi\cdot\partial G_\psi\cdot\partial K_\theta - \partial L_r\cdot\partial H_\varphi\cdot\partial K_\psi\cdot\partial G_\theta \\ & + \partial L_r\cdot\partial K_\varphi\cdot\partial G_\psi\cdot\partial H_\theta - \partial L_r\cdot\partial K_\varphi\cdot\partial H_\psi\cdot\partial G_\theta \text{ *)}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck D, mit $dr\cdot d\varphi\cdot d\psi\cdot d\theta$ multiplicirt, ist nun dem Produkte $dx\cdot dy\cdot dz\cdot dt$ gleich.

Führt man die neuen Veränderlichen r, φ, ψ und θ nach und nach zwar, aber jedesmal in anderer Ordnung ein, so wird man eben so oft das obige Resultat erhalten, als man auch dasselbe Resultat zwar, aber jedes Glied mit dem entgegengesetzten Vorzeichen erhält. Man muß daher dem Ganzen noch ein $\pm$ Zeichen vorsetzen (wie im §. 37. und im §. 14., in jedem besonderen Falle aber dasjenige der beiden Vorzeichen nehmen,

*) Man erhält diesen Ausdruck auf mechanischem Wege, wenn man sich G, H, K, L im Kreise geschrieben denkt, dann jeden der vier Buchstaben voransetzt, die drei im Kreise aber folgenden in guter Ordnung auf alle möglichen Arten versetzt, dann jedem, ∂ vor- und r, φ, ψ, θ, immer in derselben Ordnung, rechts unter- setzt; zuletzt aber die so erhaltenen Glieder mit abwechselndem Vorzeichen nimmt.

welches den Ausdruck positiv macht, damit man auch dr, $d\varphi$, $d\psi$ und $d\theta$ alle, positiv sich denken könne *).

Anmerkung. Es ist nun sehr leicht, das neue Element auf ganz mechanischem Wege sich zu bilden, wenn statt n alter Veränderlichen, n neue Veränderliche eingeführt werden.

Hat man z. B. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot du$

und $\quad x = G_{r,s,\varphi,\psi,\theta}; \quad y = H_{r,s,\varphi,\psi,\theta}; \quad z = K_{r,s,\varphi,\psi,\theta}$

$$t = L_{r,s,\varphi,\psi,\theta}, \quad \text{so wie} \quad u = M_{r,s,\varphi,\psi,\theta}$$

gegeben, so würde

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot du = \Sigma f \cdot D \cdot dr \cdot ds \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot d\theta$$

sich ergeben, während D auf folgende Weise bestimmt wird. — Man denkt sich G, H, K, L, M im Kreise geschrieben, dann

---

*) Denkt man sich die 4 algebraischen einfachen Gleichungen

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1t = e_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2t = e_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3t = e_3$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4t = e_4$$

nach den vier Unbekannten x, y, z und t aufgelöst, so erhält man für x, y, z und t, Bruchformen, deren Zähler aus 24 Gliedern bestehen und die einen gemeinschaftlichen Nenner haben (welcher die Determinante genannt wird), der ebenfalls aus 24 Gliedern besteht. Setzt man nun in dieser Determinante

statt	a_1,	b_1,	c_1,	d_1,	a_2,	b_2,	c_2,	d_2,
bezüglich	∂G_r,	∂G_φ,	∂G_ψ,	∂G_θ,	∂H_r,	∂H_φ,	∂H_ψ,	∂H_θ,
statt	a_3,	b_3,	c_3,	d_3,	a_4,	b_4,	c_4,	d_4,
bezüglich	∂K_r,	∂K_φ,	∂K_ψ,	∂K_θ,	∂L_r,	∂L_φ,	∂L_ψ,	∂L_θ,

so erhält man den obigen Ausdruck D, entweder genau so, oder jedes Glied mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. — Die Determinante selbst, kann schon ein andermal mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gefunden werden, weil ein Bruch seinen Werth nicht ändert, wenn man im Zähler und im Nenner alle Glieder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nimmt. — Der Beweis wird ebenso geführt, wie der des analogen Satzes in der Note zu §. 37.

nach und nach jeden dieser 5 Buchstaben zuerst genommen, die 4 übrigen aber, in der Ordnung, wie sie im Kreise folgen, auf alle (24) Arten ordnungsmäßig versetzt; in diesen 120 Gliedern jedem dieser Buchstaben ∂ vorgesetzt, und r, s, φ, ψ, θ stets in derselben Ordnung den 5 Buchstaben G, H, K, L und M, in welcher Anordnung sie auch vorkommen mögen, in jedem Gliede bezüglich rechts unten angehängt, die Glieder dann mit abwechselndem (+) und (−) Zeichen genommen, zuletzt aber dem ganzen Ausdruck noch ein ± Zeichen vorgesetzt, — um in jeder einzelnen Anwendung D und somit auch dr, ds, $d\varphi$, $d\psi$ und $d\theta$ alle, positiv nehmen zu können.

§. 47.

In folgenden Fällen, — und dies sind häufig vorkommende, und bei Elementen mit mehr als zwei Veränderlichen, meist die praktisch allein durchzuführenden, — gestaltet sich die Auffindung des neuen Elementes bei Einführung neuer Veränderlichen, wie solche in den §. 14., §. 37., §. 45. und §. 46. statt gefunden hat, viel einfacher, und es sind daher diese nachstehenden Fälle besonders zu beherzigen.

A. Der allereinfachste Fall ist der, wo die neuen Veränderlichen, dadurch eingeführt werden, daß man statt der alten Veränderlichen, Funktionen je eines einzigen der neuen Veränderlichen einführt, wie dies bei zwei Veränderlichen bereits im §. 14., und bei drei Veränderlichen bereits im §. 37. bemerkt worden und in den §§. 17., 18., 20., 40. und 41. auch bereits in Anwendung gekommen ist.

Hat man z. B. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$ zu bestimmen und wird

$$x = G_r, \quad y = H_\varphi, \quad z = K_\psi \quad \text{und} \quad t = L_\theta$$

gesetzt, wo G, H, K und L blos Funktionen des einzigen der vier neuen Veränderlichen r, φ, ψ, θ sind, den man unten angehängt sieht, so hat man augenblicklich

$$dx = \partial G_r \cdot dr, \quad dy = \partial H_\varphi \cdot d\varphi, \quad dz = \partial K_\psi \cdot d\psi \quad \text{und} \quad dt = \partial L_\theta \cdot d\theta$$

folglich auch

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \Sigma f \cdot \partial G_r \cdot \partial H_\varphi \cdot \partial K_\psi \cdot \partial L_\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot d\theta.$$

Und in der That zeigen sich auch jetzt die übrigen 23 Glieder des, im Paragraphen für $dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt$ gefundenen Ausdrucks, der Null gleich, weil in jedem dieser Glieder mindestens eine der Derivationen, welche die Faktoren desselben bilden, der Null gleich ist.

B. Ein anderer einfacherer Fall findet statt, wenn statt zwei der alten Veränderlichen Funktionen zweier der neuen Veränderlichen, statt der übrigen alten Veränderlichen aber nur Funktionen eines einzigen, (und jedesmal eines andern) der neuen Veränderlichen substituirt werden.

Soll z. B. $\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ bestimmt werden, und führt man die drei neuen Veränderlichen r, φ und θ so ein, daß man z. B.

$$x = G_r, \quad \text{aber} \quad y = H_{\varphi,\theta} \quad \text{und} \quad z = K_{\varphi,\theta}$$

nimmt, so hat man sofort (nach §. 14.)

$$dy \cdot dz = \partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta;$$

und noch $\qquad dx = \partial G_r \cdot dr;$

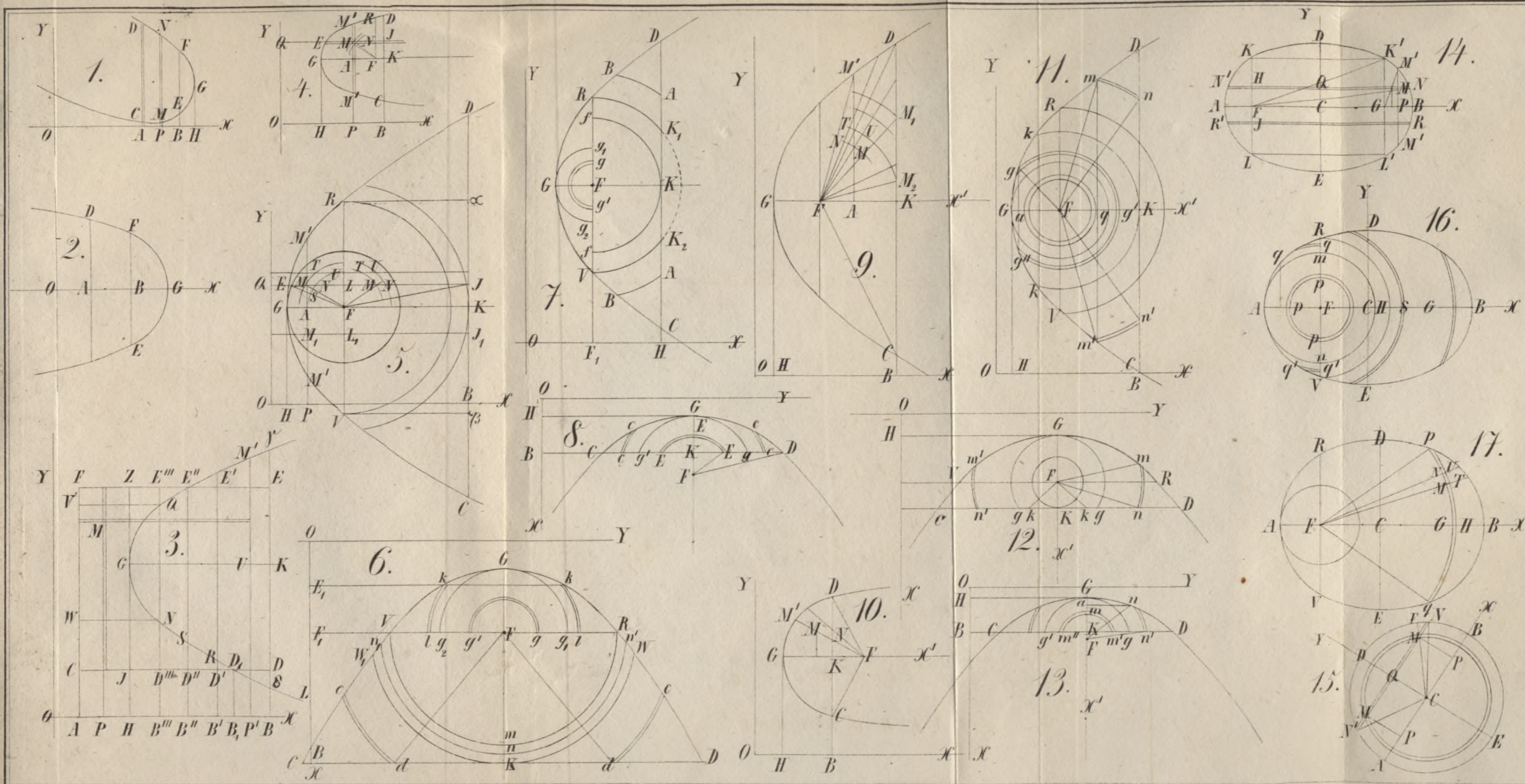
folglich

$$\Sigma f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \Sigma f \cdot \partial G_r (\partial H_\varphi \cdot \partial K_\theta - \partial K_\varphi \cdot \partial H_\theta) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Und in der That werden die vier übrigen der 6 im §. 37. gefundenen Glieder in dem Ausdruck zur Rechten, jetzt der Null gleich.

Die weiteren einfacheren Fälle, die noch gedacht werden können, sind aber dadurch augenfällig gemacht. — Der allgemeinste Fall dürfte bei mehr als drei Veränderlichen kaum je von irgend einem praktischen Nutzen sein.

Druck von Gebr. Unger in Berlin.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.