PROGYMNASIUM ZU WIPPERFÜRTH.
BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT ÜBER DAS SCHULJAHR 1894—1895.

DAS NOTWENDIGSTE

ÜBER DIE

NATÜRLICHEN LOGARITHMEN

VON

PETER JOSEPH BREUER,
DIREKTOR.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1895.

1895. Progr. Nr. 479.

In der Programmbeilage des Progymnasiums zu Wipperfürth von 1890 hat der Verfasser der vorliegenden Abhandlung an die Schulmathematik die Forderung gestellt, den Schülern solle eine einfache Berechnung der gemeinen Logarithmentafeln gezeigt und für die beim Gebrauch der Tafeln zu beachtenden Regeln ein Beweis geliefert werden. Zugleich hat er die Ansicht ausgesprochen, dafs es erlaubt sein müsse, den Beweis für einen auf irgend einer Unterrichtsstufe nicht zu entbehrenden Satz, wenn derselbe für diese Stufe zu schwierig erschiene, auf eine höhere Stufe zu verschieben. In dieser Ansicht ist er durch die neuen preufsischen Lehrpläne von 1891, welche die Systematik entschieden in den Hintergrund treten lassen, bestärkt worden. In einer Programmbeilage von 1894 hat er daher einen (hier in § 10 bei Nr. I. wiedergegebenen) Lehrsatz ohne Beweis eingeführt und aus demselben sowohl die höchst einfache Berechnung der gemeinen Logarithmentafeln als auch die Begründung der für den Gebrauch der Tafeln geltenden Regeln in einer schon für reife Obertertianer verständlichen Weise abgeleitet.

Die jetzt vorliegende Abhandlung liefert einen elementaren Beweis für die Gültigkeit des eben erwähnten Satzes, wobei auf die natürlichen Logarithmen zurückgegriffen werden mufs.

Die Grenze des „Notwendigsten" hat der Verfasser in einigen Berechnungen (cf. § 4 und 9) absichtlich weit überschritten, um die Brauchbarkeit des in § 7 bei Nr. 13 ausgesprochenen Fundamentalsatzes nebenher auch durch einige sehr weit gehenden Forderungen entsprechende Anwendungen und Proben zu illustrieren. Selbstverständlich dürfen solche Berechnungen den Schülern nicht zugemutet werden, auch nicht in mäfsigem Umfange. Sie sind fertig vorzuzeigen. Es genügt vollständig, wenn der Schüler einen Einblick in den Gang derselben und die Überzeugung gewinnt, dafs sie sein Wissen und Können nicht übersteigen.

Wipperfürth, den 7. Juni 1895.

Der Verfasser.

§ 1. **Erklärung der Ausdrücke: $n!$ und $\binom{\alpha}{\varkappa}$, („die n“ und „α über $\varkappa$“).**

(Der binomische Lehrsatz für ganzzahlige Exponenten.)

I. $$1! = 1; \quad 2! = 1 \cdot 2; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so bedeutet $n!$ das Produkt der n ersten ganzen Zahlen.

II.

$\binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 1$	$\binom{3}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = 1$
$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$	$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$
$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$	$\binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$
$\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$	$\binom{2}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2!} = 1; \quad \binom{2}{1} = \frac{2}{1}.$

Wenn α und $\varkappa$ positive ganze Zahlen sind und $1 < \varkappa < \alpha + 1$ ist, so bedeutet $\binom{\alpha}{\varkappa}$ denjenigen gemeinen Bruch, in welchem sowohl der Zähler als auch der Nenner ein Produkt von soviel ganzzahligen Faktoren ist, als die untere Zahl $\varkappa$ angiebt, während der gröſste Faktor im Zähler die obere Zahl α, im Nenner die untere Zahl $\varkappa$ ist. Es ist also

$$\binom{\alpha}{\varkappa} = \frac{(\alpha + 1 - 1) \cdot (\alpha + 1 - 2) \cdot (\alpha + 1 - 3) \cdot \cdots\cdots (\alpha + 1 - \varkappa)}{1 \quad \cdot \quad 2 \quad \cdot \quad 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \varkappa}.$$

Doch ist stets $\binom{\alpha}{1} = \alpha$ und $\binom{\alpha}{0} = 1$ zu nehmen.

III. Es ist $(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2;$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3;$$

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $(a + b)$, so erhält man:

$$\begin{aligned}(a + b)^5 &= \binom{4}{0} a^5 b^0 + \binom{4}{1} a^4 b^1 + \binom{4}{2} a^3 b^2 + \binom{4}{3} a^2 b^3 + \binom{4}{4} a^1 b^4 + \\ &\qquad + \binom{4}{0} a^4 b^1 + \binom{4}{1} a^3 b^2 + \binom{4}{2} a^2 b^3 + \binom{4}{3} a^1 b^4 + \binom{4}{4} a^0 b^5 \\ &= \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5;\end{aligned}$$

denn es ist

$$\binom{4}{0} = 1 = \binom{5}{0}; \quad \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 5 = \binom{5}{1};$$

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \frac{4}{1} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \binom{5}{2};$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{5}{3};$$

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{5}{4};$$

$$\binom{4}{4} = 1 = \binom{5}{5}.$$

IV. Allgemein ist

1) $\binom{\alpha}{0} = 1 = \binom{\alpha+1}{0}$,

2) $\binom{\alpha}{\alpha} = 1 = \binom{\alpha+1}{\alpha+1}$,

3) $\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} = 1 + \alpha = \binom{\alpha+1}{1}$,

4) $\binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2} = \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} = \binom{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1+2}{2} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha+1}{2} = \binom{\alpha+1}{2}$,

5) $\binom{\alpha}{2} + \binom{\alpha}{3} = \binom{\alpha}{2} \cdot \left[1 + \frac{\alpha+1-3}{3}\right] = \binom{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha+1}{3} = \binom{\alpha+1}{3}$,

6) $\binom{\alpha}{x} + \binom{\alpha}{x+1} = \binom{\alpha}{x} \cdot \left[1 + \frac{\alpha+1-(x+1)}{x+1}\right] = \binom{\alpha}{x} \cdot \frac{\alpha+1}{x+1} = \binom{\alpha+1}{x+1}$.

Wenn daher

$$(a+b)^\alpha = \binom{\alpha}{0} a^\alpha b^0 + \binom{\alpha}{1} a^{\alpha-1} b^1 + \binom{\alpha}{2} a^{\alpha-2} b^2 + \cdots\cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1} a^{\alpha-(\alpha-1)} b^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} a^{\alpha-\alpha} \cdot b^\alpha$$

ist, so mufs (man vergleiche die Berechnung der 5^{ten} Potenz von $(a+b)$ aus der 4^{ten} unter Nr. III.)

$$(a+b)^{\alpha+1} = \binom{\alpha+1}{0} a^{\alpha+1} b^0 + \binom{\alpha+1}{1} a^{\alpha+1-1} b^1 + \binom{\alpha+1}{2} a^{\alpha+1-2} b^2 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \binom{\alpha+1}{m} a^{\alpha+1-m} b^m + \cdots\cdots + \binom{\alpha+1}{\alpha+1} a^{\alpha+1-(\alpha+1)} b^{\alpha+1} \quad \textbf{sein.}$$

Hieraus folgt, dafs ganz ähnliche Formeln, wie die oben unter Nr. III. für die 2^{te}, 3^{te}, 4^{te} und 5^{te} Potenz von $(a+b)$ angegebenen, auch für die 6^{te}, 7^{te}, 8^{te} u. s. w., also überhaupt für jede echte Potenz der Summe gelten müssen, dafs daher folgender Satz seine Gültigkeit hat:

V. Für jeden positiven ganzzahligen Wert von n ist („Binomischer Lehrsatz“)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + \cdots\cdots + \binom{n}{x} a^{n-x} b^x + \cdots\cdots + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n.$$

Anmerkung. Der binomische Lehrsatz ist durch die Lehrpläne von 1891 in die Lehraufgabe der Oberprima gestellt. Dennoch kann der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung in Unterprima bei Gelegenheit der für diese Stufe vorgeschriebenen Wiederholungen zur Sprache gebracht werden, wofern man den Satz Nr. V. unter Hinweisung auf die bei Nr. III. gemachten Erfahrungen vorläufig als Grundsatz hinstellt. Ein solcher Verstofs gegen die Systematik ist durchaus erlaubt und in Untersekunda bei der Besprechung der gemeinen Logarithmen sogar unvermeidlich.

VI. Wenn man in den unter Nr. III. gegebenen Formeln die Faktoren $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, a^0 und b^0, von denen jeder gleich 1 ist, wegläfst, so ergiebt sich, dafs

$$\frac{a^2}{2!} + \frac{a^1 b^1}{1!\,1!} + \frac{b^2}{2!} = \frac{(a+b)^2}{2!},$$

$$\frac{a^3}{3!} + \frac{a^2 b^1}{2!\,1!} + \frac{a^1 b^2}{1!\,2!} + \frac{b^3}{3!} = \frac{(a+b)^3}{3!},$$

$$\frac{a^4}{4!} + \frac{a^3 b^1}{3!\,1!} + \frac{a^2 b^2}{2!\,2!} + \frac{a^1 b^3}{1!\,3!} + \frac{b^4}{4!} = \frac{(a+b)^4}{4!}.$$

Es ist aber allgemein, wenn v und x ganze positive Zahlen sind und $0 < x < v$ ist,

$$\frac{1}{x!\,(v-x)!} = \frac{(v-x+1)\,(v-x+2)\,(v-x+3)\cdots\cdots(v-x+x)}{x!\,(v-x)!\,(v-x+1)\,(v-x+2)\,(v-x+3)\cdots\cdots(v-x+x)}$$

$$= \frac{(v-x+1)\,(v-x+2)\,(v-x+3)\cdots\cdots(v-x+x)}{v!\;\;x!}$$

$$= \frac{1}{v!}\cdot\binom{v}{x},$$

und daher

$$\frac{a^v}{v!} + \frac{a^{v-1}b^1}{1!\,(v-1)!} + \frac{a^{v-2}b^2}{2!\,(v-2)!} + \frac{a^{v-3}b^3}{3!\,(v-3)!} + \frac{a^{v-4}b^4}{4!\,(v-4)!} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + \frac{a^1 b^{v-1}}{(v-1)!\,1!} + \frac{b^v}{v!} = \frac{(a+b)^v}{v!}.$$

§ 2. Etwas über einige endlose Summen.

I. Eine endlose Summe ist eine Summe von unendlich vielen Summanden oder Gliedern.

Bemerkungen: 1) Wenn die Glieder einer solchen Summe bisweilen durch „G_1, G_2, G_3“ u. s. w. bezeichnet werden, so ist zu lesen: „erstes Glied, zweites Glied, drittes Glied“ u. s. w.

2) Der periodische Dezimalbruch 0,2 125 125 125...... ist nichts andres als

$$\frac{2}{10^1} + \frac{125}{10^4} + \frac{125}{10^7} + \frac{125}{10^{10}} + \frac{125}{10^{13}} + \cdots\cdots \text{(u. s. w. ohne Ende).}$$

Er ist also eine endlose Summe. Dennoch ist sein Wert durch den gemeinen Bruch $\frac{2123}{9990}$ genau angegeben. (Periodische Dezimalbrüche, geschlossene Dezimalbrüche und ganze Zahlen sind „rationale Zahlen“.)

3) Die durch π bezeichnete Zahl, welche angiebt, wie oft in der Fläche eines Kreises das Quadrat seines Radius enthalten ist, ist ein unperiodischer Dezimalbruch ohne Ende, also ein solcher, dessen wahrer Wert durch keine endliche Anzahl von Ziffern genau angegeben werden kann („irrationale Zahl"); und doch genügt es zu wissen, dafs $3{,}14159 < \pi < 3{,}1416$ ist, dafs also der wahre Wert von π zwischen zwei sehr wenig verschiedenen angebbaren „Näherungswerten" liegt und beim Rechnen durch diese ersetzt werden kann.

II. Die endlose Summe „$\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \frac{a}{2^4} + \frac{a}{2^5} + \cdots\cdots$ u. s. w."

1) Wenn der wahre Wert dieser endlosen Summe $= w$ sein soll, so mufs

$$2 \cdot w = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \cdots\cdots \text{(u. s. w. ohne Ende)}$$ sein, während

$$w = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \cdots\cdots \text{(u. s. w. ohne Ende)}$$ ist. Daher mufs

$2 \cdot w - w = a$, also $w = a$ sein. Folglich ist (vergleiche I. 2)

2) $$\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \frac{a}{2^4} + \cdots\cdots \text{(u. s. w. ohne Ende)} = a.$$

3) Wie heifst das n^{te}, wie das $(n+1)^{\text{te}}$, wie das $(n+\nu)^{\text{te}}$ Glied dieser Summe?

4) Dividiert man die Gleichung Nr. 2) durch 2^n, wobei n eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll, so erhält man:

5) $$\frac{a}{2^{n+1}} + \frac{a}{2^{n+2}} + \frac{a}{2^{n+3}} + \frac{a}{2^{n+4}} + \cdots\cdots \text{(u. s. w. ohne Ende)} = \frac{a}{2^n}.$$

Aus Nr. 2 und 5 ergiebt sich der folgende Satz:

6) Wenn in einer endlosen Summe vom 1ten Gliede an jedes folgende Glied gleich der Hälfte des zunächst vorhergegangenen Gliedes ist, so ist die ganze Summe genau zweimal so grofs als ihr erstes Glied — und jedes beliebige (n^{te}) Glied genau gleich der endlosen Summe aller ihm folgenden Glieder.

III. Die endlose Summe

„$S = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \cdots\cdots + G_n + G_{n+1} + G_{n+2} + \cdots\cdots$ (u. s. w. ohne Ende)“,

in welcher vom ersten Gliede an jedes folgende **kleiner** als die Hälfte des zunächst vorhergegangenen Gliedes sein soll.

1. In einer solchen Summe ist jedes beliebige n^{te} Glied G_n so beschaffen, dafs

$$G_n > 2 \cdot G_{n+1} > 4 \cdot G_{n+2} > 8 \cdot G_{n+3} > 2^4 \cdot G_{n+4} > 2^5 \cdot G_{n+5} \text{ u. s. w. } > 2^z \cdot G_{n+z}$$

ist. Folglich ist die endlose Summe

$$\frac{G_n}{2} + \frac{G_n}{2^2} + \frac{G_n}{2^3} + \frac{G_n}{2^4} + \frac{G_n}{2^5} + \cdots\cdots \text{ u. s. w.,}$$

welche nach II. Nr. 2 genau gleich G_n ist, notwendig gröfser als

$$G_{n+1} + G_{n+2} + G_{n+3} + G_{n+4} + G_{n+5} + \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende).}$$

2. In der unter Nr. III. beschriebenen Summe S ist daher **jedes beliebige Glied gröfser als die endlose Summe aller ihm folgenden Glieder.**

3. Es ist also auch

$$(G_1 + G_2 + \cdots\cdots + G_n) < S < (G_1 + G_2 + \cdots\cdots + G_n) + G_n.$$

Wenn nun die geschlossene Summe „$G_1 + G_2 + \cdots\cdots + G_n$“ bis zu einem solchen Gliede der endlosen Summe S reicht, welches nachweisbar einen sehr geringen Wert hat, so ist durch Nr. 3 der wahre Wert der Summe S zwischen zwei sehr wenig verschiedene Näherungswerte gestellt. (Man vergleiche I. 3.) Es fragt sich daher nur noch, ob in der endlosen Summe S in endlicher Entfernung vom Anfangsgliede G_1 ein nachweislich sehr geringwertiges Glied bezeichnet werden kann. Hierüber folgendes:

Selbst wenn G_1 sehr grofs ist, giebt es eine angebbare echte Potenz von 2, etwa 2^α, die entweder ebenso grofs oder noch gröfser als $2 \cdot G_1$ ist. Dann ist

$$2^\alpha \geqq 2 \cdot G_1 > 2^2 \cdot G_2 > 2^3 \cdot G_3 > 2^4 \cdot G_4 > \cdots\cdots \text{ (u. s. w.) und } > 2^\alpha \cdot G_\alpha$$

und daher

$$1 > G_\alpha > 2 \cdot G_{\alpha+1} > 2^2 \cdot G_{\alpha+2} > 2^3 \cdot G_{\alpha+3} > \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende).}$$

Also auch $1 > 2^z \cdot G_{\alpha+z}$, wobei z jede beliebige positive ganze Zahl bedeuten soll.

Wenn daher $G_1 \leqq 2^{\alpha-1}$ ist, ist in der Summe S allgemein nachweislich wenigstens

a) schon das α^{te} Glied $G_\alpha < 1$,

b) „ „ $(\alpha + 10)^{\text{te}}$ Glied $G_{\alpha+10} < \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10^3}$,

c) „ „ $(\alpha + 20)^{\text{te}}$ Glied $G_{\alpha+20} < \frac{1}{2^{20}} < \frac{1}{10^6}$,

d) „ „ $(\alpha + 30)^{\text{te}}$ Glied $G_{\alpha+30} < \frac{1}{2^{30}} < \frac{1}{10^9}$,

e) „ „ $(\alpha + \nu \cdot 10)^{\text{te}}$ Glied $G_{\alpha+\nu\cdot 10} < \frac{1}{2^{10\nu}} < \frac{1}{10^{3\nu}}$,

f) im allerungünstigsten Falle erst das $(\alpha + 200)^{\text{te}}$ Glied $G_{\alpha+200}$ (— dieses aber sicher —) $< \frac{1}{10^{60}}$.

4. In jedem Falle kann daher in der unter Nr. III. beschriebenen endlosen Summe S in endlicher Entfernung vom Anfangsgliede ein Glied ($G_{\alpha+10\nu}$) nachgewiesen werden, dessen Wert sogar im ungünstigsten Falle kleiner ist, als jeder angebbare geringwertige positive Dezimalbruch (cf. e)). Die Entfernung der sehr kleinen Glieder vom 1^{ten} Gliede ist jedoch nicht von der Gröſse des Anfangsgliedes allein abhängig; denn sie ist auch um so kleiner, je gröſser das Verhältnis je eines Gliedes zum nächstfolgenden Gliede ist; sie ist z. B. in der Summe „$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\cdots$ (u. s. w. ohne Ende)" doppelt so groſs als in der Summe „$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots\cdots$ u. s. w." Ein ungünstiger Fall ist demnach derjenige, in welchem das erwähnte Verhältnis nur wenig gröſser als 2 ist.

Aus der ganzen unter Nr. III. angestellten Untersuchung ergiebt sich der folgende Satz:

5. **Wenn in einer endlosen Summe „$S = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots\cdots$ u. s. w." das erste Glied nicht gröſser ist als die echte Potenz $2^{\alpha-1}$, jedes folgende Glied aber kleiner als die Hälfte des zunächst vorhergegangenen Gliedes ist, so steht fest,**

a) **daſs jedes beliebige n^{te} Glied gröſser ist als die endlose Summe aller ihm folgenden Glieder,**

$$G_n > G_{n+1} + G_{n+2} + \cdots\cdots \text{(u. s. w. ohne Ende)};$$

b) **daſs die ganze endlose Summe S zwar gröſser als die geschlossene Summe ihrer n ersten Glieder, aber kleiner als die um das n^{te} Glied vermehrte Summe der n ersten Glieder ist,**

$$(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots\cdots + G_n) < S < (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots\cdots + G_n) + G_n;$$

c) **dafs sogar im ungünstigsten Falle die endlose Summe** S **zwar gröfser als die geschlossene Summe ihrer** $(\alpha + 10\nu)$ **ersten Glieder, aber kleiner als die um** $\frac{1}{10^{3\nu}}$ **vermehrte Summe ihrer** $(\alpha + 10\nu)$ **ersten Glieder ist;** und dafs hierbei ν jede beliebige positive ganze Zahl bedeuten kann.

$$(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots\cdots + G_{\alpha+10\nu}) < S < (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots\cdots + G_{\alpha+10\nu}) + \frac{1}{10^{3\nu}}.$$

IV. Wenn in einer endlosen Summe nicht schon vom ersten, sondern erst von einem spätern, etwa erst vom ν^{ten} Gliede an jedes folgende Glied kleiner als die Hälfte des zunächst vorhergegangenen Gliedes ist, so ist die ganze endlose Summe gleich der geschlossenen Summe „$(G_1 + G_2 + \cdots\cdots + G_\nu)$“ vermehrt um die endlose Summe „$(G_{\nu+1} + G_{\nu+2} + G_{\nu+3} + \cdots\cdots$ u. s. w.)“, auf welche der unter III. bei Nr. 5 ausgesprochene Satz anwendbar ist.

V. Die endlose Summe

$$„\Sigma = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\cdots \text{(u. s. w.)}“.$$

1. In dieser Summe ist jedes beliebige $(\nu + 1)^{\text{te}}$ Glied gleich $\frac{x}{\nu+1}$ mal dem zunächst vorangegangenen ν^{ten} Gliede, $G_{\nu+1} = \frac{x}{\nu+1} \cdot G_\nu$. Ist nun x positiv und irgend ein $G_{\nu+1}$ kleiner als $\frac{1}{2} \cdot G_\nu$, so mufs $\frac{x}{\nu+1} < \frac{1}{2}$ und folglich $\frac{1}{2} > \frac{x}{\nu+1} > \frac{x}{\nu+2} > \frac{x}{\nu+3} > \cdots\cdots$ u. s. w. $> \frac{x}{\nu+\alpha}$ sein; und daher mufs dann $G_{\nu+\alpha}$, welches $= \frac{x}{\nu+\alpha} \cdot G_{\nu+\alpha-1}$ ist, kleiner als $\frac{1}{2} \cdot G_{\nu+\alpha-1}$ sein.

Wenn also in der endlosen Summe Σ irgend ein Glied kleiner als die Hälfte des zunächst vorangegangenen Gliedes ist, so gilt dieses auch von jedem folgenden Gliede.

Ersetzt man aber x durch eine beliebige ganze Zahl n, so wird $\frac{x}{2n+1} < \frac{1}{2}$ und daher $G_{2n+1} = \frac{x}{2n+1} \cdot G_{2n} < \frac{1}{2} \cdot G_{2n}$; und dieses ist um so mehr der Fall, wenn man für x irgend einen Wert setzt, der kleiner als n ist. Hieraus folgt:

2. Wenn man in der endlosen Summe Σ das x durch irgend eine positive Zahl ersetzt, die nicht gröfser als die ganze Zahl n ist, so ist wenigstens vom $(2n)^{\text{ten}}$ Gliede an jedes folgende kleiner als die Hälfte des zunächst vorangegangenen Gliedes und daher Σ gleich der geschlossenen Summe „$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$“ vermehrt um die endlose Summe „$\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\cdots \text{ u. s. w.}\right)$“, deren Wert nach dem unter III. bei Nr. 5 ausgesprochenen Satze angegeben werden kann.

§ 3. Die Zahl *e* und ihre Potenzen mit positiven Exponenten.

1. Das Produkt der beiden endlosen Summen

$$„K = 1 + \frac{\varkappa}{1} + \frac{\varkappa^2}{2!} + \frac{\varkappa^3}{3!} + \frac{\varkappa^4}{4!} + \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende)}“$$

und

$$„\Omega = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^4}{4!} + \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende)}“$$

ist gleich einer Summe von unendlich mal unendlich vielen Gliedern, die dadurch entstehen, dafs jedes Glied der Summe K mit jedem Gliede der Summe Ω multipliziert wird.

2. Um diese unendlich mal unendlich vielen Glieder zunächst in einer bestimmten Ordnung zusammenstellen und dann wieder in anders bestimmter Ordnung sammeln zu können, denken wir uns in einer vertikal vor uns stehenden Ebene zuerst eine „erste Felderzeile“ von unendlich vielen, in horizontaler Richtung von links nach rechts dicht neben einander stehenden kongruenten Quadraten, und dann unter jedem Quadrate dieser „ersten Felderzeile“ unendlich viele dicht unter einander stehende Quadrate von derselben Gröfse. Alsdann haben wir in der Ebene sowohl unendlich viele (von links nach rechts gehende) „Felderzeilen“, die von oben nach unten zu zählen sind, als auch unendlich viele (von oben nach unten gerichtete) „Feldersäulen“, welche von links nach rechts gezählt werden.

3. Denken wir uns nun diejenigen Einzelprodukte, die durch Multiplikation der einzelnen Glieder der Summe K mit dem ersten Gliede der Summe Ω entstehen, der Reihe nach in die Felder der ersten Felderzeile, die durch Multiplikation der einzelnen Glieder der Summe K mit einem n^{ten} Gliede der Summe Ω entstehenden Produkte aber der Reihe nach in die n^{te} Felderzeile eingetragen, so stimmt die oben links liegende Ecke des beschriebenen Teiles der Ebene überein mit der Tafel Nr. II.

4. Bei dieser Anordnung ist leicht zu erkennen,

a) dafs jedes Glied der $(w+1)^{\text{ten}}$ Zeile den Faktor „$\frac{\omega^w}{w!}$“ enthält,

b) dafs jedes Glied der $(v+1)^{\text{ten}}$ Säule den Faktor „$\frac{\varkappa^v}{v!}$“ enthält,

c) dafs dasjenige Glied, in dessen Felde die $(w+1)^{\text{te}}$ Zeile und die $(v+1)^{\text{te}}$ Säule sich kreuzen, nichts anderes sein kann als „$\frac{\omega^w \cdot \varkappa^v}{w!\,v!}$“.

5. Sammeln wir nun aus der so beschriebenen Ebene die in den unendlich mal unendlich vielen Quadraten stehenden Produkte in der Weise, dafs wir jedesmal die Inhalte derjenigen Quadrate, deren von oben rechts nach unten links gerichtete Diagonalen eine gerade Linie bilden, in eine besondere Summe zusammenstellen, so finden wir, dafs

$$
\begin{aligned}
K\cdot\Omega = 1 &+ \left(\frac{\varkappa}{1}+\frac{\omega}{1}\right) + \left(\frac{\varkappa^2}{2!}+\frac{\omega^1\cdot\varkappa^1}{1\cdot 1}+\frac{\omega^2}{2!}\right) + \\
&+ \left(\frac{\varkappa^3}{3!}+\frac{\omega^1\varkappa^2}{1!\,2!}+\frac{\omega^2\varkappa^1}{2!\,1!}+\frac{\omega^3}{3!}\right) + \left(\frac{\varkappa^4}{4!}+\frac{\omega^1\varkappa^3}{1!\,3!}+\frac{\omega^2\varkappa^2}{2!\,2!}+\frac{\omega^3\varkappa^1}{3!\,1!}+\frac{\omega^4}{4!}\right) + \\
&+ \left(\frac{\varkappa^5}{5!}+\frac{\omega^1\varkappa^4}{1!\,4!}+\frac{\omega^2\varkappa^3}{2!\,3!}+\frac{\omega^3\varkappa^2}{3!\,2!}+\frac{\omega^4\varkappa^1}{4!\,1!}+\frac{\omega^5}{5!}\right) + \cdots\cdots \text{ u. s. w.} \\
&+ \left(\frac{\varkappa^{10}}{10!}+\frac{\omega^1\varkappa^9}{1!\,9!}+\frac{\omega^2\varkappa^8}{2!\,8!}+\frac{\omega^3\varkappa^7}{3!\,7!}+\frac{\omega^4\varkappa^6}{4!\,6!}+\frac{\omega^5\varkappa^5}{5!\,5!}+\frac{\omega^6\varkappa^4}{6!\,4!}+\frac{\omega^7\varkappa^3}{7!\,3!}+\frac{\omega^8\varkappa^2}{8!\,2!}+\frac{\omega^9\varkappa^1}{9!\,1!}+\frac{\omega^{10}}{10!}\right) + \\
&+ \cdots\cdots \text{ u. s. w.} + \text{(allgemein:)} \\
&+ \left(\frac{\varkappa^v}{v!}+\frac{\omega^1\varkappa^{v-1}}{1!\,(v-1)!}+\frac{\omega^2\varkappa^{v-2}}{2!\,(v-2)!}+\frac{\omega^3\varkappa^{v-3}}{3!\,(v-3)!}+\frac{\omega^4\varkappa^{v-4}}{4!\,(v-4)!}+\cdots\cdots+\frac{\omega^{v-1}\varkappa^1}{(v-1)!\,1!}+\frac{\omega^v}{v!}\right) + \\
&+ \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende).}
\end{aligned}
$$

6. Von den in dieser Weise gebildeten Teilsummen ist aber nach § 1 Nr. VI. die $1^{\text{te}} = \frac{\varkappa+\omega}{1}$, die $2^{\text{te}} = \frac{(\varkappa+\omega)^2}{2!}$, die $3^{\text{te}} = \frac{(\varkappa+\omega)^3}{3!}$, die $4^{\text{te}} = \frac{(\varkappa+\omega)^4}{4!}$, die $5^{\text{te}} = \frac{(\varkappa+\omega)^5}{5!}$, u. s. w., und allgemein die $v^{\text{te}} = \frac{(\varkappa+\omega)^v}{v!}$.

Folglich ergiebt sich der Satz:

7. **Das Produkt der beiden endlosen Summen**

$$„K = 1 + \frac{\varkappa}{1} + \frac{\varkappa^2}{2!} + \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots\cdots \text{(u. s. w.)“} \quad \text{und} \quad „\Omega = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \cdots\cdots \text{(u. s. w.)“}$$

ist gleich der endlosen Summe

$$„1 + \frac{\varkappa + \omega}{1} + \frac{(\varkappa + \omega)^2}{2!} + \frac{(\varkappa + \omega)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(\varkappa + \omega)^v}{v!} + \cdots\cdots \text{(u. s. w.)“.}$$

8. Hieraus folgt weiter bezüglich der echten Potenzen der endlosen Summe Ω, dafs

$$\alpha)\ \Omega^2 = 1 + \frac{2\,\omega}{1} + \frac{(2\,\omega)^2}{2!} + \frac{(2\,\omega)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$\beta)\ \Omega^3 = 1 + \frac{3\,\omega}{1} + \frac{(3\,\omega)^2}{2!} + \frac{(3\,\omega)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$\gamma)\ \Omega^4 = 1 + \frac{4\,\omega}{1} + \frac{(4\,\omega)^2}{2!} + \frac{(4\,\omega)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

und dafs endlich für jeden ganzzahligen Wert von z

$$\delta)\ \Omega^z = 1 + \frac{z\,\omega}{1} + \frac{(z\,\omega)^2}{2!} + \frac{(z\,\omega)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

9. Dann ist aber auch, wofern n irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$\left(1 + \frac{\frac{z}{n} \cdot \omega}{1} + \frac{\left(\frac{z}{n} \cdot \omega\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{z}{n} \cdot \omega\right)^3}{3!} + \cdots\cdots [\text{u. s. w. ohne Ende}]\right)^n = \Omega^z$$

und daher

$$10.\quad \Omega^{\frac{z}{n}} = 1 + \frac{\frac{z}{n}\cdot\omega}{1} + \frac{\left(\frac{z}{n}\cdot\omega\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{z}{n}\cdot\omega\right)^3}{3!} + \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende).}$$

11. Wenden wir dieses endlich auf den Fall an, in welchem $\omega = 1$ ist, und beachten wir dabei, daſs der wahre Wert der endlosen Summe „$1 + \frac{1}{1} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \cdots\cdots$ (u. s. w.)“ durch e bezeichnet wird, während wir die rationale Zahl „$\frac{z}{n}$“ durch x andeuten, so kommen wir zu folgendem Satze:

12. **Für jeden positiven rationalen Wert des Exponenten x ist**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots \text{ (u. s. w. ohne Ende).}$$

13. Hiernach können auch die gebrochenen Potenzen der Grundzahl e ohne weiteres durch rein natürliches Rechnen (nämlich durch Multiplizieren, Dividieren und Addieren) nach Belieben genau berechnet werden. In diesem Sinne nennen wir die Zahl e die **„natürliche Grundzahl unnatürlicher** (d. i. unechter) **Potenzen“.**

§ 4. Einige Potenzen von *e*.

Nach § 3 Nr. 12 ergiebt sich folgendes:

I. $2{,}71828\,18284\,59 < e^1 < 2{,}71828\,18284\,60$. Daher kann $e^1 = 2{,}71828\,18285$ gesetzt werden.

II. $e^{0,000\,0001} = 1,000\,000\,100\,000\,005\,000\,000\,166 \ldots\ldots$

$e^{0,00\,001} = 1,000\,010\,000\,050\,000\,166\,667\,083 \ldots\ldots$

III. $7,38 < e^2 < 7,39;$ $\quad 8,16 < e^{2,1} < 8,17;$

$9,02 < e^{2,2} < 9,03;$ $\quad 9,97 < e^{2,3} < 9,98;$

$13,46 < e^{2,4} < 13,47.$

IV. Es ist $A < e^{2,3} < A + 60 : 10^{65}$, wofern

$$A = 9,97418\,24548\,14720\,73995\,76151\,56908\,85800\,14787\,01193 + \frac{0,68402\,95636\,91421\,91687}{10^{45}};$$

V. Es ist $B < e^{0,002585} < B + 16 : 10^{65}$, wofern

$$B = 1,00258\,83439\,93286\,73858\,54938\,90820\,31241\,98619\,92867 + \frac{0,42521\,87239\,26015\,22155}{10^{45}};$$

VI. Es ist $C < e^{0,00000\,00929\,94045\,684} < C + 6 : 10^{65}$, wofern

$$C = 1,00000\,00929\,94050\,00794\,64003\,72694\,83904\,14678\,48662 + \frac{0,07767\,92925\,77081\,51283}{10^{45}};$$

VII. Es ist $D < e^{1,79914\,54684\,36420\,76011\,014886 : 10^{20}} < D + 1 : 10^{65}$, wofern

$$D = 1,00000\,00000\,00000\,00001\,79914\,54684\,36420\,76012\,63334 + \frac{0,82082\,97653\,94479\,82271}{10^{45}};$$

VIII. Es ist $E < e^{0{,}28772\,97603\,33279\,00987\,59:10^{46}} < E + 1:10^{67}$, wofern

$$E = 1 + 0{,}02877\,29760\,33327\,90098\,75:10^{45}.$$

IX. Folgerungen aus Nr. IV. bis VIII.:

Berechnet man $F = A \cdot B$, $G = F \cdot C$, $H = G \cdot D$ und $N = H \cdot E$, so ergiebt sich, dafs (bis auf wenigstens 60 Dezimalbruchstellen zuverlässig):

1) $$F = 9{,}99999\,90700\,59586\,39928\,14085\,21791\,54858\,41457\,38741 + \frac{0{,}95514\,86646\,35863\,65262\,47}{10^{45}};$$

2) $e^{2{,}302585} = F$;

3) $$G = 9{,}99999\,99999\,99999\,99982\,00854\,53156\,35792\,39906\,03575 + \frac{0{,}92056\,78936\,11499\,80501\,94}{10^{45}};$$

4) $e^{2{,}30258\,50929\,94045\,684} = G$;

5) $H = 10 - \frac{1}{10^{45}} + \frac{0{,}71227\,02396\,66720\,99012\,41}{10^{45}}$;

6) $e^{2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488\,6} \doteq H$;

7) $10 - 1:10^{65} < N < 10 + 1:10^{61}$;

8) $e^{\lambda} = N = 10$, wofern

$$\lambda = 2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488 + \frac{0{,}62877\,29760\,33327\,90098\,759}{10^{45}}.$$

§ 5.

I. **Der natürliche Logarithmus einer Zahl** n (kurz geschrieben $\underset{e}{\Lambda}\overline{n}$) **ist derjenige Exponent, mit welchem man die Zahl** e (vergleiche § 3, 11 und § 4, 1) **potenzieren muss, um genau oder doch sehr annähernd jene Zahl** n (den sogenannten Numerus) **zu erhalten.**

Es ist z. B. $\underset{e}{\Lambda} 10 = \lambda$ (cf. § 4, 8).

II. **Je gröſser der Logarithmus, desto gröſser der Numerus** (cf. § 3, 12). **Je gröſser der Num., desto gröſser der Logarithmus.**

Weil $10 > 9{,}98 > e^{2,3}$ ist (cf. § 4, III.), so ist $\underset{e}{\Lambda} 10 > 2{,}3$.

III. **Die allgemeinen Sätze über Logarithmen gelten auch hier. Daher ist z. B. auch:**

IV. $\underset{10}{\Lambda}\overline{e} \cdot \underset{e}{\Lambda}\overline{10} = \underset{10}{\Lambda} 10 = 1$; $\quad \underset{10}{\Lambda} e = 1 : \underset{e}{\Lambda} 10$;

$\underset{10}{\Lambda} e < 1 : 2{,}3 < 0{,}44$.

§ 6. $\underset{e}{\Lambda}\overline{1 + \omega}$ für den Fall, daſs $\omega < 1$ ist.

Wenn ω positiv, aber kleiner als 1 ist, so ist auch $\omega - \omega^2$ positiv und < 1; und folglich in der endlosen Summe

$$„e^{\omega - \omega^2} = 1 + (\omega - \omega^2) + \frac{(\omega - \omega^2)^2}{2!} + \frac{(\omega - \omega^2)^3}{3!} + \cdots\cdots \text{(u. s. w.)}“$$

das 3^{te} Glied kleiner als die Hälfte des 2^{ten}, und überhaupt jedes $(n + 2)^{\text{te}}$ Glied kleiner als die Hälfte des $(n+1)^{\text{ten}}$. Daher mufs jedes $(n+1)^{\text{te}}$ Glied und also auch das 3^{te} gröfser sein als die endlose Summe aller folgenden Glieder. Folglich ist

$$e^{\omega - \omega^2} < 1 + (\omega - \omega)^2 + \frac{(\omega - \omega^2)^2}{2\,!} + \frac{(\omega - \omega^2)^2}{2\,!}, \quad \text{d. i.}$$

$$e^{\omega - \omega^2} < 1 + (\omega - \omega^2) + (\omega - \omega^2)^2, \quad \text{d. i.}$$

$$e^{\omega - \omega^2} < 1 + \omega - (2\,\omega^3 - \omega^4), \quad \text{d. i.}$$

$$e^{\omega - \omega^2} < 1 + \omega, \qquad \text{während} \qquad e^{\omega} > 1 + \omega \quad \text{ist.}$$

Weil nun $1 + \omega$ zwar kleiner als e^{ω}, aber gröfser als $e^{\omega - \omega^2}$ ist, so ist $\underset{e}{\Lambda}\overline{1 + \omega}$ zwar kleiner als ω, aber gröfser als $\omega - \omega^2$.

I. Hieraus folgt der Satz: **Wenn $\omega < 1$, aber positiv ist, so ist**

$$\omega > \underset{e}{\Lambda}\overline{1 + \omega} > \omega - \omega^2.$$

Anwendung:

Es ist $\quad 0{,}00000\,25 > \underset{e}{\Lambda}\,1{,}00000\,25 > 0{,}00000\,24999\,9375.$

Man vergleiche mit dem Satze I. die natürlichen Logarithmen der Zahlen B, C, D und E in § 4.

§ 7. $\underset{e}{\Lambda}\overline{a + z}$ für den Fall, dafs $a > z$ ist.

Wenn a und z positive rationale Zahlen sind, $a = m \cdot z$ und $m > 1$ ist, so gilt folgendes:

1) $a \cdot e^{\frac{2z}{2a+z}} = a \cdot e^{\frac{2}{2m+1}} = a \cdot \left(1 + \frac{2}{2m+1} + s\right)$, wofern

2) $s = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{2}{2m+1}\right)^3 + \cdots\cdots$ (u. s. w. ohne Ende) ist.

Weil aber $\frac{2}{2m+1} + s = \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m \cdot (2m+1)} - s\right)$ ist, so wird, wofern man

3) $\frac{1}{m \cdot (2m+1)} - s = \delta$ setzt,

$$4)\quad a \cdot e^{\frac{2z}{2a+z}} = a \cdot \left(1 + \frac{1}{m} - \delta\right)$$

$$= a \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{\delta}{1 + \frac{1}{m}}\right)$$

$$= a \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{m\delta}{m+1}\right)$$

$$= a \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \left(\frac{m + 1 - m\delta}{m+1}\right)$$

$$= a \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) : \frac{m+1}{m + 1 - m\delta}$$

$$= a \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) : \left(1 + \frac{m\delta}{m + 1 - m\delta}\right)$$

$$= (a + z) : \left(1 + \frac{m\delta}{m + 1 - m\delta}\right)$$

und daher

5) $\underset{e}{\bigwedge}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} = \underset{e}{\bigwedge}\underline{a+z} - \underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{m\delta}{m+1-m\delta}}$, sowie

6) $\underset{e}{\bigwedge}\underline{a+z} = \underset{e}{\bigwedge}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} + \underset{e}{\bigwedge}\underline{1+\frac{m\delta}{m+1-m\delta}}$.

Um aber den Wert des letzten Gliedes der 6ten Gleichung beurteilen zu können, müssen wir zuerst den Wert des s (cf. 2te Gleichung), dann denjenigen des δ (cf. 3te Gleichung) und endlich den des Quotienten $\frac{m\delta}{m+1-m\delta}$ untersuchen.

I. α) Die Summe s ist, weil ihre sämtlichen Glieder positiv sind, gröſser als die Summe ihrer beiden ersten Glieder. Hieraus ergiebt sich, daſs $s > \frac{12m+10}{3\cdot(2m+1)^3}$ ist.

β) Weil $m \geqq 1$ sein soll, so ist in der Summe s jedes beliebige Glied gröſser als das Zweifache des nächstfolgenden Gliedes und darum auch gröſser als die endlose Summe aller folgenden Glieder (cf. § 2, III, 5). Da ferner die Hälfte des 2ten Gliedes gröſser als das Zweifache des 3ten Gliedes ist, so muſs die Summe s nicht nur kleiner sein als das 1te + dem 2ten + dem zweifachen 3ten Gliede, sondern sogar kleiner als das um die dreifache Hälfte des 2ten Gliedes vermehrte 1te Glied. Hiernach ist $s < \frac{4m+4}{(2m+1)^3}$. Es ist also

7) $\frac{12m+10}{3\cdot(2m+1)^3} < s < \frac{4m+4}{(2m+1)^3}$.

II. Für den Wert des δ ergiebt sich aus Nr. 3 und 7, daſs

$$\frac{1}{m\cdot(2m+1)} - \frac{4m+4}{(2m+1)^3} < \delta < \frac{1}{m\cdot(2m+1)} - \frac{12m+10}{3\cdot(2m+1)^3}$$ und daher

8) $0 < \frac{1}{m\,(2m+1)^3} < \delta < \frac{2m+3}{3m\,(2m+1)^3} < \frac{1}{12m^3+m} < \frac{1}{m} < 1$ ist.

III. Der Quotient $\frac{m\delta}{m+1-m\delta}$.

α) Weil $\delta < \frac{1}{m}$, und demnach $m\delta < 1$ ist, so ist

$$\frac{m\delta}{m+1-m\delta} < \frac{m\delta}{m} < \frac{1}{m}.$$

β) Ersetzt man das δ durch den Bruch $\frac{1}{12m^3+m}$, welcher gröfser als δ ist, so wird dadurch der Dividend vergröfsert und zugleich der Divisor verkleinert. Aus zwei Gründen ist daher

$$\frac{m\delta}{m+1-m\delta} < \frac{m \cdot \frac{1}{12m^3+m}}{m+1-m \cdot \frac{1}{12m^3+m}}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{m\delta}{m+1-m\delta} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)+m} < \frac{1}{12m^2 \cdot (m+1)} < \frac{1}{12m^3}.$$

γ) Ersetzt man endlich das δ durch den Bruch $\frac{2m+3}{3m\,(2m+1)^3}$, so wird

$$\frac{m\delta}{m+1-m\delta} < \frac{m \cdot \frac{2m+3}{3m\,(2m+1)^3}}{m+1-m \cdot \frac{2m+3}{3m\,(2m+1)^3}}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{m\delta}{m+1-m\delta} < \frac{2m+3}{3\,(m+1)\,(2m+1)^3-(2m+3)} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)+7m}.$$

Es ist also

9) $$\frac{m\delta}{m+1-m\delta} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)+7m} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)} < \frac{1}{12m^3},$$

und daher auch (cf. § 6, I.)

10) $$\bigwedge_e \underline{1+\frac{m\delta}{m+1-m\delta}} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)+7m} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)} < \frac{1}{12m^3}.$$

Aus Nr. 10 und 6 ergiebt sich der Satz:

11) Wenn a und z positive rationale Zahlen sind, und a **gleich** mz ist, während $m \geqq 1$ ist, so ist

$\bigwedge_e \underline{a+z}$ zwar **gröfser** als $\bigwedge_e \underline{a} + \frac{z}{2a+z}$,

aber **kleiner** als $\bigwedge_e \underline{a} + \frac{z}{2a+z} + \frac{1}{12\,(m^3+m^2)+7m}$.

12) Wenn nun aber, während $m \geqq 1$ ist, a **gröfser** als mz und etwa **gleich** $(m+\mu)\,z$ ist, so ist $m+\mu > 1$, und daher

$$\bigwedge_e \underline{a+z} < \bigwedge_e \underline{a} + \frac{2z}{2a+z} + \frac{1}{12\,([m+\mu]^3+[m+\mu]^2)+7\,(m+\mu)},$$

während

$$\frac{1}{12\,([m+\mu]^3+[m+\mu]^2)+7\,(m+\mu)} < \frac{1}{12\,(m^3+m^2)+7m} \quad \text{ist.}$$

Aus Nr. 12 und 11 folgt daher der Satz:

13) **Wenn a und z positive rationale Zahlen sind, und $a \geqq mz$ ist, während $m \geqq 1$ ist, so ist**

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{a+z} \quad \textbf{zwar größer als} \quad \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z},$$

$$\textbf{aber kleiner als} \quad \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} + \frac{1}{12(m^3+m^2)+7m}$$

$$\textbf{und kleiner als} \quad \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} + \frac{1}{12(m^3+m^2)}$$

$$\textbf{und kleiner als} \quad \underset{e}{\Lambda}\underline{a} + \frac{2z}{2a+z} + \frac{1}{12m^3}.$$

14) Anwendung des Satzes Nr. 13.

α) Weil $1 > 10^5 \cdot 0{,}0000025$ und $10^5 > 1$ ist, so ist

$$\underset{e}{\Lambda}\underline{1 + 0{,}0000025} \quad \text{zwar größer als} \quad \underset{e}{\Lambda}\underline{1} + \frac{2 \cdot 0{,}0000025}{2{,}0000025},$$

$$\text{aber kleiner als} \quad \underset{e}{\Lambda}\underline{1} + \frac{2 \cdot 0{,}0000025}{2{,}0000025} + \frac{1}{12 \cdot 10^{15}},$$

d. i. zwar größer als $0 + 0{,}00000\,24999\,96875\,00390\,6\ldots\ldots$

aber kleiner als $0 + \left\{\begin{array}{l} \ 0{,}00000\,24999\,96875\,00390\,6\ldots\ldots \\ + \ 0{,}00000\,00000\,00000\,08333\,3\ldots\ldots \end{array}\right\}.$

Also ist

$$0{,}00000\,24999\,96875\,00390\,6 \cdots < \underset{e}{\Lambda}\overline{1{,}00000\,25} < 0{,}00000\,24999\,96875\,0872 \ldots\ldots$$

Folglich ist $$\underset{e}{\Lambda}1{,}00000\,25 = 0{,}00000\,24999\,96875 \ldots\ldots$$

β) Weil $1 = 10^5 \cdot 0{,}00001$ und $10^5 > 1$ ist, so ist

$$\underset{e}{\Lambda}\overline{1 + 0{,}00001} \text{ zwar größer als } 0 + \tfrac{0{,}00002}{2{,}00001},$$

$$\text{aber kleiner als } 0 + \tfrac{0{,}00002}{2{,}00001} + \tfrac{1}{12 \cdot 10^{15}}, \quad \text{d. i.}$$

$$0{,}00000\,99999\,50000\,24999 \cdots < \underset{e}{\Lambda}\overline{1{,}00001} < 0{,}00000\,99999\,50000\,333 \ldots\ldots, \quad \text{d. i.}$$

$$\underset{e}{\Lambda}\overline{1{,}00001} = 0{,}00000\,99999\,50000 \ldots\ldots$$

15) Bemerkung zu Nr. 13. Durch den Satz Nr. 13 ist der wahre Wert des $\underset{e}{\Lambda}\overline{a+z}$ **zwischen** zwei Zahlen gestellt, welche, wenn m (d. i. das Verhältnis „$a:z$") grofs ist, nur wenig von einander verschieden sind. Diese sind alsdann die Näherungswerte des $\underset{e}{\Lambda}\overline{a+z}$; mit ihnen mufs, soweit sie, in Form von Dezimalbrüchen dargestellt, sich decken, der **wahre Wert** des $\underset{e}{\Lambda}\overline{a+z}$ übereinstimmen, sodafs dieser aus ihnen bis auf eine gewisse Anzahl von Dezimalbruchstellen abgelesen werden kann, wie in den unter Nr. 14 angegebenen Beispielen geschehen ist. Der Satz Nr. 13 ermöglicht es also, die natürlichen Logarithmen vieler Zahlen

annähernd sehr genau zu berechnen, sobald der natürliche Logarithmus irgend einer Zahl bekannt ist. Bekannt ist aber wenigstens, dafs $\underset{e}{\Lambda} 1 = 0$ ist. Derselbe Satz ist zugleich auch das Thor, durch welches ein bequemer Weg zum Gebiete der gemeinen Logarithmen führt.

§ 8. Schlüssel zum Gebiete der gemeinen Logarithmen.

Bekanntlich ist $\underset{10}{\Lambda} e \cdot \underset{e}{\Lambda} n = \underset{10}{\Lambda} n$. Es ist aber $\underset{10}{\Lambda} e < 0{,}44$ (s. § 5, IV.). Multiplizieren wir daher in den Formeln des Satzes Nr. 13 des vorigen Paragraphen das letzte Glied eines jeden von den gröfsern Näherungswerten mit 0,44 und jedes andere Glied mit $\underset{10}{\Lambda} e$, so kommen wir zu folgendem Satze:

I. Wenn a und z positive rationale Zahlen sind, und $a \geqq mz$ ist, während $m \geqq 1$ ist, so ist

$$\underset{10}{\Lambda} \underline{a+z} \quad \text{zwar gröfser als} \quad \underset{10}{\Lambda} a + \frac{z \cdot 2 \cdot \underset{10}{\Lambda} e}{2a+z},$$

$$\text{aber kleiner als} \quad \underset{10}{\Lambda} a + \frac{z \cdot 2 \cdot \underset{10}{\Lambda} e}{2a+z} + \frac{0{,}44}{12(m^3+m^2)+7m}$$

$$\text{und kleiner als} \quad \underset{10}{\Lambda} a + \frac{z \cdot 2 \cdot \underset{10}{\Lambda} e}{2a+z} + \frac{0{,}44}{12(m^3+m^2)}$$

$$\text{und kleiner als} \quad \underset{10}{\Lambda} a + \frac{z \cdot 2 \cdot \underset{10}{\Lambda} e}{2a+z} + \frac{0{,}44}{12m^3}.$$

Bemerkung. Hierdurch ist auch der wahre Wert des gemeinen Logarithmus von $(a + z)$ **zwischen** zwei Näherungswerte gestellt, die, wenn m (d. i. das Verhältnis „$a : z$“) grofs ist, sowohl von dem wahren Werte des $\underset{10}{\Lambda}\underline{a + z}$ als auch von einander nur wenig verschieden sind. Um aber diese beiden Näherungswerte in Ziffern angeben zu können, müssen wir vor allem in der Lage sein, den $\underset{10}{\Lambda}e$ in Ziffern zu kennen.

II. „$\underset{10}{\Lambda}\underline{e}$“, d. i. (cf. § 5, IV.) „$\mathbf{1 : \underset{e}{\Lambda}\underline{10}}$“ ist also der Schlüssel zum Gebiete der gemeinen Logarithmen.

§ 9. $\underset{e}{\Lambda}\underline{\mathbf{10}}$ und $2 \cdot \underset{10}{\Lambda}\underline{e}$ in Ziffern.

I. Der Wert von $\underset{e}{\Lambda}\underline{10}$ ist aus § 4, Nr. 8 bereits bekannt. Hier ist nur noch zu zeigen, wie derselbe gefunden wird.

1) Nach § 4, III. ist $e^{2,3} < 10 < e^{2,4}$. Folglich mufs $\underset{e}{\Lambda}10$ zwar gröfser als 2, 3, aber kleiner als 2, 4 sein.

2) Weil $e^{2,3} = 9{,}97418\,24\ldots\ldots$ (cf. § 4, IV.) und daher

$$\underset{e}{\Lambda}\ 9{,}97418\,25 > 2,3$$

sein mufs und (nach § 7, 13)

$$\underset{e}{\Lambda}\begin{pmatrix} 9{,}97418\,25 \\ +\;0{,}02581\,75\end{pmatrix} > \underset{e}{\Lambda} 9{,}97418\,25 + \frac{2 \cdot 0{,}02581\,75}{\begin{pmatrix}2 \cdot 9{,}97418\,25\\ +\;0{,}02581\,75\end{pmatrix}}$$ ist, so ist

$$\underset{e}{\Lambda} 10{,}00000\,000 > 2{,}300000 + 0{,}002585, \quad \text{also} > 2{,}302585.$$

3) Weil

$$e^{2{,}302585} = 9{,}99999\,90700\,59586\,39928\,\ldots\ldots\ldots$$ ist, so mufs

$$\underset{e}{\Lambda}\, 9{,}99999\,90700\,59586\,39929 > 2{,}302585$$

sein. Daher ist

$$\underset{e}{\Lambda}\begin{pmatrix} 9{,}99999\,90700\,59586\,39929 \\ +\;0{,}00000\,09299\,40413\,60071\end{pmatrix} > 2{,}302585 + \frac{2 \cdot 0{,}00000\,09299\,40413\,60071}{\begin{pmatrix}2 \cdot 9{,}99999\,90700\,59586\,39929\\ +\;0{,}00000\,09299\,40413\,60071\end{pmatrix}},$$ d. i.

$$\underset{e}{\Lambda}\, 10 > 2{,}302585 + 0{,}00000\,00929\,94045\,684.$$

4) $$9{,}99999\,99999\,99999\,99982\,00854\,53156\,35792\,39906\,03575\,92056\,\ldots\ldots = \\ = e^{2{,}30258\,50929\,94045\,684}$$

$$\underset{e}{\Lambda}\;\; 9{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 92057 > \\ > 2{,}30258\,50929\,94045\,684$$

$$\underset{e}{\Lambda}\begin{pmatrix} 9{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 92057 \\ +\,0{,}00000\,00000\,00000\,00017\,99145\,46843\,64207\,60093\,96424\,07943\end{pmatrix} > \\ > 2{,}30258\,50929\,94045\,684 +$$

$$+\frac{2\cdot 0{,}00000\,00000\,00000\,00017\ldots\ldots\ldots\ldots 07943}{\begin{pmatrix}2\cdot 9{,}99999\,99999\,99999\,99982\ldots\ldots\ldots\ldots 92057\\ +0{,}00000\,00000\,00000\,00017\ldots\ldots\ldots\ldots 07943\end{pmatrix}},\quad \text{d. i.}$$

$$\underset{e}{\Lambda}10>\begin{pmatrix}2{,}30258\,50929\,94045\,68400\\ +0{,}00000\,00000\,00000\,00001\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488\,6\end{pmatrix}.$$

5) Wendet man das bei Nr. 2 beschriebene Verfahren nochmals an unter Berücksichtigung der in § 4 angegebenen Zahlen H, E, N und λ, so findet man, dafs

$$\underset{e}{\Lambda}10>2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488\,6+$$
$$+\frac{2\cdot 0{,}28772\,97603\,33279\,00987\,59:10^{45}}{20}$$

sein mufs, während

6) $$e^{2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488\,62877\,29760\,33327\,90098\,75}=N=10$$

wird. Hieraus folgt:

7) **Der wahre Wert des $\underset{e}{\Lambda}10$ ist bis auf wenigstens 60 Dezimalbruchstellen genau angegeben durch die in § 4 bei Nr. 8 angegebene Zahl λ.** (cf. oben Nr. 6.)

8) Bemerkung zu Nr. 7. Die Wahrheit des Satzes Nr. 7 ist zwar im Vorhergehenden bewiesen. Allein dieser Beweis beruht auf sehr umfangreichen Berechnungen, in die sich trotz aller Vorsicht ein Fehler (wenn auch nur ein Schreibfehler) eingeschlichen haben könnte. Darum wird hier auf den (auch für Uneingeweihte interessanten) Umstand hingewiesen, dafs

$$6 \cdot \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\cdots \text{ u. s. w. ohne Ende} \right\}$$

$$+ 2 \cdot \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7 + \cdots\cdots \text{ u. s. w. ohne Ende} \right\}$$

$$= 2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488\,62877\,29760\,33 + \omega \text{ ist,}$$

wobei ω zwar gröſser als $0{,}134 : 10^{57}$, aber kleiner als $0{,}576 : 10^{57}$ ist.

Die Übereinstimmung dieser Zahl mit der unter Nr. 7 angegebenen läſst darauf schlieſsen, daſs die dem Satze Nr. 7 zu Grunde liegenden Berechnungen im allerhöchsten Grade wahrscheinlich von jeglichem Fehler, der die 57 ersten Bruchstellen der Zahl λ berühren könnte, frei sind.

9) Hiernach wird $\underset{10}{\Lambda} e = 1 : \lambda = 0{,}43429\,44819 \cdots\cdots$ und

II. $2 \cdot \underset{10}{\Lambda} e = 2 : \lambda =$

$$0{,}86858\,89638\,06503\,65530\,22578\,37833\,21016\,45887\,94011$$

$$+ \frac{0{,}60733\,31322\,28907\,5663}{10^{45}}.$$

Bemerkung. Multipliziert man den hier angegebenen Dezimalbruch 0,86 ...... mit λ, so erhält man $2 - 0{,}1^{64}$.

§ 10. Offener Weg zum Gebiete der gemeinen Logarithmen.

Aus § 8, I. und § 9, II. ergiebt sich bei Berücksichtigung der Tafel Nr. I. der Satz:

I. Sind a und z positive rationale Zahlen, so ist $\underset{10}{\Lambda}\underline{a+z}$

$$\text{zwar größer als } \underset{10}{\Lambda} a+z \cdot \frac{0{,}86858\;89638\;06503\;65530\cdots\cdots}{2a+z},$$

$$\text{aber kleiner als } \underset{10}{\Lambda} a+z \cdot \frac{0{,}86858\;89638\;06503\;65530\cdots\cdots}{2a+z}+\omega,$$

1. wenn $a \geqq 1000\,z$ ist und $\omega = 0{,}00000\;00000\;40$ genommen wird; aber nicht nur in diesem Falle, sondern unter anderm auch:

2.	wenn	$a \geqq$	$10\,z$	ist	und	$\omega = 0{,}00004$	gesetzt	wird,
3.	„	$a \geqq$	$20\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;5$	„	„
4.	„	$a \geqq$	$50\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;03$	„	„
5.	„	$a \geqq$	$100\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;004$	„	„
6.	„	$a \geqq$	$900\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;6$	„	„
7.	„	$a \geqq$	$2\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;05$	„	„
8.	„	$a \geqq$	$3\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;02$	„	„
9.	„	$a \geqq$	$4\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;006$	„	„
10.	„	$a \geqq$	$5\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;003$	„	„
11.	„	$a \geqq$	$6\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;002$	„	„
12.	„	$a \geqq$	$8\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;0008$	„	„
13.	„	$a \geqq$	$9\,000\,z$	„	„	$\omega = 0{,}00000\;00000\;0006$	„	„
14.	„	$a \geqq$	$10\,000\,z$	„	„	$\omega = 4 : 10^{14}$	„	„

15.	wenn	$a \geqq$	$20\,000\,z$	ist und	$\omega = 5 : 10^{15}$	gesetzt	wird
16.	„	$a \geqq$	$40\,000\,z$	„ „	$\omega = 6 : 10^{16}$	„	„
17.	„	$a \geqq$	$80\,000\,z$	„ „	$\omega = 8 : 10^{17}$	„	„
18.	„	$a \geqq$	$100\,000\,z$	„ „	$\omega = 4 : 10^{17}$	„	„
19.	„	$a \geqq$	$200\,000\,z$	„ „	$\omega = 5 : 10^{18}$	„	„
20.	„	$a \geqq$	$400\,000\,z$	„ „	$\omega = 6 : 10^{19}$	„	„
21.	„	$a \geqq$	$800\,000\,z$	„ „	$\omega = 8 : 10^{20}$	„	„
22.	„	$a \geqq$	$1\,000\,000\,z$	„ „	$\omega = 4 : 10^{20}$	„	„
23.	„	$a \geqq q \cdot$	$1\,000\,000\,z$	„ „	$\omega = 3{,}6667 : (q^3 \cdot 10^{20})$	„	„

24. allgemein

wenn $a \geqq mz$ und $m \geqq 1$ ist und $\omega \geqq \frac{0.44}{12\,(m^3 + m^2) + 7m}$ gesetzt wird.

II. Ersetzt man z durch 1, so wird der Satz Nr. I. zum Wegweiser für die bequemste Berechnung jeder beliebigen Tafel gemeiner Logarithmen.

Derselbe Satz ist zugleich die Grundlage, auf welcher die beim Gebrauch einer gemeinen Logarithmentafel zu beachtenden Regeln beruhen (cf. Breuer, Die gemeinen Logarithmen. 2. Auflage. Leipzig bei Teubner 1894).

Tafel I.

Einzusetzende Werte für m	Werte, die der Bruch $\frac{0,44}{12(m^3+m^2)+7m}$ annimmt, wenn für m die in der ersten Spalte angegebenen Zahlen eingesetzt werden:	Einzusetzende Werte für m	Werte, die der Bruch $\frac{0,44}{12(m^3+m^2)+7m}$ annimmt, wenn für m die in der ersten Spalte angegebenen Zahlen eingesetzt werden:
10	0,00003 3157	6 000	$0,16972 : 10^{12}$
20	0,00000 4359	7 000	$0,10688 : 10^{12}$
50	0,00000 02875 2	8 000	$0,71606 : 10^{13}$
		9 000	$0,50291 : 10^{13}$
100	0,00000 00363 03		
500	0,00000 00002 9274	10 000	$0,36663 : 10^{13}$
900	0,00000 00000 50241	20 000	$0,45831 : 10^{14}$
		40 000	$0,57290 : 10^{15}$
1 000	$0,36630 : 10^{10}$	80 000	$0,71614 : 10^{16}$
2 000	$0,45810 : 10^{11}$		
3 000	$0,13575 : 10^{11}$	100 000	$0,36666 : 10^{16}$
4 000	$0,57277 : 10^{12}$	200 000	$0,45833 : 10^{17}$
5 000	$0,29328 : 10^{12}$	400 000	$0,57291 : 10^{18}$
		800 000	$0,71614 : 10^{19}$
		$x \cdot 1\,000\,000$	$0,36666 : (x^3 \cdot 10^{19})$.

Tafel II (cf. § 3, 3.).

1	$\frac{\varkappa}{1}$	$\frac{\varkappa^2}{2!}$	$\frac{\varkappa^3}{3!}$	$\frac{\varkappa^4}{4!}$	$\frac{\varkappa^5}{5!}$	$\frac{\varkappa^6}{6!}$	$\frac{\varkappa^7}{7!}$	$\frac{\varkappa^8}{8!}$	$\frac{\varkappa^9}{9!}$	$\frac{\varkappa^{10}}{10!}$	$\frac{\varkappa^{11}}{11!}$
$\frac{\omega}{1}$	$\frac{\omega^1\varkappa^1}{1\cdot 1}$	$\frac{\omega^1\varkappa^2}{1!\,2!}$	$\frac{\omega^1\varkappa^3}{1!\,3!}$	$\frac{\omega^1\varkappa^4}{1!\,4!}$	$\frac{\omega^1\varkappa^5}{1!\,5!}$	$\frac{\omega\varkappa^6}{1!\,6!}$	$\frac{\omega\varkappa^7}{1!\,7!}$	$\frac{\omega\varkappa^8}{1!\,8!}$	$\frac{\omega\varkappa^9}{1!\,9!}$	$\frac{\omega\varkappa^{10}}{1!\,10!}$	$\frac{\omega\varkappa^{11}}{1!\,11!}$
$\frac{\omega^2}{2!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^1}{2!\,1!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^2}{2!\,2!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^3}{2!\,3!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^4}{2!\,4!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^5}{2!\,5!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^6}{2!\,6!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^7}{2!\,7!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^8}{2!\,8!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^9}{2!\,9!}$	$\frac{\omega^2\varkappa^{10}}{2!\,10!}$	
$\frac{\omega^3}{3!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^1}{3!\,1!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^2}{3!\,2!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^3}{3!\,3!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^4}{3!\,4!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^5}{3!\,5!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^6}{3!\,6!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^7}{3!\,7!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^8}{3!\,8!}$	$\frac{\omega^3\varkappa^9}{3!\,9!}$		
$\frac{\omega^4}{4!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^1}{4!\,1!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^2}{4!\,2!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^3}{4!\,3!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^4}{4!\,4!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^5}{4!\,5!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^6}{4!\,6!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^7}{4!\,7!}$	$\frac{\omega^4\varkappa^8}{4!\,8!}$			
$\frac{\omega^5}{5!}$	$\frac{\omega^5\varkappa}{5!\,1!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^2}{5!\,2!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^3}{5!\,3!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^4}{5!\,4!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^5}{5!\,5!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^6}{5!\,6!}$	$\frac{\omega^5\varkappa^7}{5!\,7!}$				
$\frac{\omega^6}{6!}$	$\frac{\omega^6\varkappa}{6!\,1!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^2}{6!\,2!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^3}{6!\,3!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^4}{6!\,4!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^5}{6!\,5!}$	$\frac{\omega^6\varkappa^6}{6!\,6!}$					
$\frac{\omega^7}{7!}$	$\frac{\omega^7\varkappa}{7!\,1!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^2}{7!\,2!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^3}{7!\,3!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^4}{7!\,4!}$	$\frac{\omega^7\varkappa^5}{7!\,5!}$						
$\frac{\omega^8}{8!}$	$\frac{\omega^8\varkappa}{8!\,1!}$	$\frac{\omega^8\varkappa^2}{8!\,2!}$	$\frac{\omega^8\varkappa^3}{8!\,3!}$	$\frac{\omega^8\varkappa^4}{8!\,4!}$							
$\frac{\omega^9}{9!}$	$\frac{\omega^9\varkappa}{9!\,1!}$	$\frac{\omega^9\varkappa^2}{9!\,2!}$	$\frac{\omega^9\varkappa^3}{9!\,3!}$								

Inhalt.