DIE GRUNDLEHREN

DER

HÖHEREN ANALYSIS.

EIN LEHR- UND HANDBUCH

FÜR DEN

ERSTEN UNTERRICHT IN DER HÖHEREN MATHEMATIK.

ZUM GEBRAUCHE

AN LEHRANSTALTEN SOWIE ZUM SELBSTUNTERRICHTE.

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DERER, WELCHE EINEM TECHNISCHEN BERUFE SICH WIDMEN

VON

DR. JULIUS WENCK,

DIRECTOR DER GEWERBESCHULE ZU GOTHA.

MIT 140 FIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

VORWORT.

Diese Grundlehren der höheren Analysis setzen nichts weiter voraus als diejenigen Kenntnisse in der niedern Mathematik, welche auf Gymnasien so wie in Real- und Gewerbeschulen erlangt werden, und erstrecken sich einestheils auf das, was für den vollständigen wissenschaftlichen Zusammenhang nothwendig, anderntheils aber auf das, was für die Anwendung der höheren Analysis auf die technischen Fachwissenschaften erforderlich ist, indem sie alles darüber hinausgehende ausschliessen. Sie eignen sich daher nicht nur für den ersten Unterricht in der höheren Mathematik überhaupt, sondern auch ganz besonders für solche, welche sich durch Selbstunterricht oder unter Mitwirkung eines Lehrers zum Besuche einer polytechnischen Schule vorbereiten wollen, indem sie dieselben in den Stand setzen, die für die technischen Fachwissenschaften erforderlichen Kenntnisse in der höheren Mathematik ohne grossen Zeitaufwand sich aneignen zu können.

Was die gewählte Behandlung des Stoffes anlangt, so ist dieselbe auf mehrjährige und besonders beim Privatunterrichte gewonnene Erfahrungen gegründet.

Gotha, im Mai 1872.

Dr. Wenck.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

I. Von den Funktionen im Allgemeinen.

Die niedere Mathematik beschäftigt sich mit bekannten und unbekannten Zahlen und zeigt, wie die letzteren durch die ersteren ausgedrückt und gefunden werden. Die höhere Mathematik dagegen beschäftigt sich mit unveränderlichen oder constanten und mit veränderlichen oder variabelen Zahlen und unterscheidet die letzteren wieder als unabhängige und als abhängige Veränderliche. Die Constanten werden mit den ersten, die Variabelen mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

Unter Constanten versteht man solche Zahlen, welche eine Veränderung nicht erleiden; die unabhängigen Veränderlichen sind solche Zahlen, denen beliebige willkürliche Werthe beigelegt werden können, und die abhängigen Veränderlichen endlich sind Zahlen, deren veränderlicher Werth immer von denjenigen Veränderungen abhängt, denen die unabhängigen Veränderlichen unterliegen. Die Beziehungen zwischen den Constanten, den unabhängigen und den abhängigen Veränderlichen werden immer durch eine Gleichung dargestellt.

In der Gleichung

$$y = 2x^2 + 3x + 4$$

sind 2, 3 und 4 die Constanten, x ist die unabhängige und y die abhängige Veränderliche. Die Zahlen 2, 3 und 4, wofür man auch allgemein a, b und c setzen könnte, behalten immer denselben Werth, die Zahl x kann beliebige willkürliche Werthe annehmen, und der Werth von y wird immer durch diejenigen Werthe bedingt, welche der Zahl x beigelegt worden sind.

So ist z. B. für $x = 0$, $y = 4$; für $x = +1$, $y = 9$; für $x = -1$, $y = 3$; für $x = +2$, $y = 18$; für $x = -2$, $y = 6$ u. s. f.

Dass die Werthe der Zahl y von den jedesmaligen Werthen der Zahl x abhängen, drückt man auch dadurch aus, dass man sagt: „y ist eine Funktion von x", und hiernach ist jede Zahl, deren Werth von dem Werthe einer andern Zahl abhängt, eine Funktion von dieser andern Zahl.

Die Art und Weise, wie eine Funktion oder abhängige Veränderliche von der unabhängigen Veränderlichen abhängt, geht stets aus der Natur und Beschaffenheit der betreffenden Gleichung hervor. Will man daher nur allgemein andeuten, dass die Zahl y eine Funktion von der Zahl x ist, ohne dabei auf die specielle Art der Abhängigkeit Rücksicht zu nehmen, so drückt man dieses aus durch die Gleichung

$$y = f(x),$$

welche „y gleich Funktion x" gelesen wird.

In den Gleichungen

$$y = ax + b; \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}; \; y = \sqrt{px}$$

ist überall y eine Funktion von x, obwol die Art der Abhängigkeit überall eine andere ist. Daher gilt für jede derselben die allgemeiue Form der Gleichung

$$y = f(x).$$

Anstatt $f(x)$ setzt man auch $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ u. s. w. Bedient man sich dieser verschiedenen Zeichen gleichzeitig für mehrere Funktionen, so wird damit angedeutet, dass es zwar allgemein Funktionen von x, aber verschiedene Funktionen von x sind.

Hat eine Gleichung auf der einen Seite nur die abhängige Veränderliche z, kommen dagegen auf der andern Seite die unabhängigen Veränderlichen x und y in irgend welchen Verbindungen mit beliebigen Constanten vor, so sagt man, es sei z eine Funktion von x und y, und drückt dieses allgemein durch die Gleichung aus

$$z = f(x, y).$$

Es ist daher z eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen. In gleicher Weise stellt die Gleichung

$$u = f\,(x, y, z)$$

dar, dass u eine Funktion von den drei unabhängigen Veränderlichen x, y und z ist.

Hiernach unterscheidet man Funktionen von einer und Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Wenn eine Gleichung die unabhängige Veränderliche x und die abhängige Veränderliche y enthält, wenn sie aber für y nicht aufgelöst ist oder nicht aufgelöst werden kann, so stellt sie eine unentwickelte Funktion von x dar. Da man nun eine solche Gleichung stets auf Null reduciren kann, so ist dem entsprechend

$$f(x, y) = 0$$

die allgemeine Form einer solchen unentwickelten Funktion. Ebenso wird eine unentwickelte Funktion von drei Veränderlichen dargestellt durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0.$$

Dasselbe gilt von Funktionen von mehr Veränderlichen.

Im Gegensatze hierzu werden Gleichungen, welche für die eine Veränderliche aufgelöst sind, entwickelte Funktionen genannt.

Wenn z eine Funktion von y und y wieder eine Funktion von x ist, so nennt man z eine Funktion von einer Funktion.

Ist also

$$z = F(y) \text{ und } y = f(x),$$

so ist auch

$$z = F(f(x))$$

Sind y und z Funktionen von x, und ist u eine Funktion von y und z, so nennt man eine solche Funktion eine Funktion von Funktionen oder eine zusammengesetzte Funktion. Im Gegensatze hierzu werden diejenigen Funktionen, welche nicht Funktionen von Funktionen sind, als einfache Funktionen bezeichnet.

Man unterscheidet noch algebraische und transcendente Funktionen. Die ersteren gehen aus den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so wie aus der Potenzirung mit constanten Exponenten, die letzteren aus allen übrigen arithmetischen Operationen und aus der Potenzirung mit veränderlichen Exponenten hervor.

II. Die goniometrischen und cyclometrischen Funktionen.

Die Funktionen sin α, cos α, tan α und cot α beziehen sich in der Trigonometrie auf einen Winkel α, welcher in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt ist, und stellen bekanntlich für den Halbmesser 1 gewisse Linien dar. Wenn dagegen diese Funktionen in der Analysis gebraucht werden, so bedeutet α nicht einen Winkel, sondern einen Bogen des mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises, und die Funktionen sin α, cos α, tan α und cot α stellen die goniometrischen Linien dieses Bogens dar. Da nun die Längenzahl eines solchen Bogens sich in Theilen des Halbmessers, also durch eine absolute Zahl ausdrücken lässt, so kann auch umgekehrt eine jede absolute Zahl als Längenzahl eines solchen Bogens angesehen werden, welchem gewisse goniometrische Linien entsprechen. Hiernach hat aber jede absolute Zahl ihren Sinus, Cosinus u. s. w.

Ist nun in diesem Sinne sin $\alpha = x$, also der Sinus der Zahl α gleich der Zahl x, so ist auch α derjenige Bogen des mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises, dessen Sinus gleich der Zahl x ist. Man drückt dieses durch die Gleichung aus

$$\alpha = \text{arc}\,(\sin = x).$$

Dasselbe gilt für den Cosinus, die Tangente und die Cotangente.

Während also sin α, cos α, tan α, cot α, die goniometrischen Funktionen der Zahl α sind, so sind

$$\text{arc}\,(\sin = x)\,;\ \text{arc}\,(\cos = x)\,;$$
$$\text{arc}\,(\tan = x)\,;\ \text{arc}\,(\cot = x)$$

die cyclometrischen Funktionen der Zahl x, und es ist rücksichtlich der Bedeutung derselben noch Folgendes zu bemerken.

Die Funktionen

$$\text{arc}\,(\sin = x) \text{ und } \text{arc}\,(\tan = x)$$

stellen Zahlen dar, welche zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen, und zwar liegen sie zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$, wenn x positiv ist, dagegen zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, wenn x negativ ist.

Die Funktionen

$$\text{arc}\,(\cos = x) \text{ und } \text{arc}\,(\cot = x)$$

stellen Zahlen dar, welche zwischen 0 und π liegen, und zwar liegen sie zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn x positiv ist, dagegen zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, wenn x negativ ist.

Aus den vorstehenden Erklärungen ergeben sich aber die Gleichungen

$$\text{arc}(\sin = -x) = -\text{arc}(\sin = x)$$

$$\text{arc}(\tan = -x) = -\text{arc}(\tan = x);$$

da nun bekanntlich für wachsende x die Werthe von $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. periodisch wiederkehren, so ist auch klar, dass einem gewissen Werthe von $\sin x$ mehrere Werthe von x entsprechen, die in Intervallen von 2π beziehungsweise π einander folgen.

III. Stetigkeit der Funktionen.

Es ist bereits gesagt worden, dass die unabhängigen Veränderlichen solche Zahlen sind, denen beliebige willkürliche Werthe beigelegt werden können. Es sind also Zahlen, welche jeden Werth der unendlichen Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können. Wir können uns daher auch vorstellen, dass eine solche unabhängige Veränderliche, indem sie entweder die ganze unendliche Zahlenreihe durchläuft, oder auch nur eine endliche Strecke derselben, ihren Werth stetig oder continuirlich ändert, so dass also jeder folgende Werth dem vorhergehenden Werthe unendlich nahe liegt und zwar so nahe wie jeder folgende Punkt dem vorhergehenden Punkte in einer Linie.

Ist nun eine Funktion so beschaffen, dass wenn die unabhängige Veränderliche ihren Werth stetig ändert, die abhängige Veränderliche ihren Werth ebenfalls stetig ändert, so sagt man, die Funktion sei stetig oder continuirlich; wenn dagegen die unabhängige Veränderliche von einem Werthe zum nächsten unendlich nahe liegenden Werthe übergeht, und bei diesem Uebergange die abhängige Veränderliche ihren Werth nicht auch um den nächsten unendlich nahe liegenden Werth, sondern um einen endlichen Werth ändert, oder wenn sie unendlich oder imaginär wird, so erleidet die Funktion an dieser Stelle eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit, und man sagt dann, die Funktion sei unstetig oder discontinuirlich.

IV. Grenzwerthe der Funktionen.

Es gibt Funktionen, welche die Eigenschaft besitzen, dass sich ihr Werth einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn die unabhängige Veränderliche entweder beständig wächst oder beständig abnimmt, und dass die Funktion diesen Grenzwerth wirklich erreicht, wenn die unabhängige Veränderliche in dem einen Falle unendlich gross wird, oder wenn sie in dem andern Falle in Null übergeht. Solche Werthe werden dann **Grenzwerthe der Funktionen** genannt.

Manche Funktionen erscheinen in der Form einer unendlichen Reihe oder lassen sich in dieser Form darstellen. Bei solchen unendlichen Reihen sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nähert sich der Werth der Reihe, d. h. die Summe ihrer Glieder, immer mehr einer bestimmten endlichen Grenze, je mehr Glieder der Reihe genommen werden, und erreicht diese Grenze für eine unendlich grosse Anzahl von Gliedern, oder der Werth der Reihe nähert sich keiner solchen Grenze. Im ersten Falle nennt man die Reihe **convergent** und bezeichnet den Grenzwerth, welchen sie erreicht, als ihre Summe, im zweiten Falle nennt man die Reihe **divergent**; denn ihre Summe ist nicht, auch nicht einmal näherungsweise angebbar. Nur wenn eine Reihe convergirt, ist sie brauchbar, mit divergirenden Reihen kann man nicht operiren. Daher müssen alle Reihen rücksichtlich ihrer Convergenz untersucht werden.

Wird die Summe einer endlichen geometrischen Progression von n Gliedern

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-1}$$

mit S bezeichnet, so ist bekanntlich

$$S = a\frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Lassen wir hier n fortwährend wachsen und unendlich gross werden, so geht die Reihe in eine unendliche geometrische Progression über. Um zu erfahren, ob und unter welchen Bedingungen eine solche Reihe convergirt, haben wir daher zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen der Ausdruck

$$a\frac{e^n - 1}{e - 1}$$

für ein unendlich wachsendes n sich einem bestimmten endlichen Werthe nähert oder nicht. Nähert sich der Ausdruck einem solchen bestimmten endlichen Werthe, so convergirt die Reihe und jener Werth, ist die Summe derselben, nähert sich der

Ausdruck keinem solchen bestimmten endlichen Werthe, so divergirt die Reihe, und ihre Summe ist nicht angebbar.

Wir haben hierbei die Fälle zu unterscheiden

$$e > 1;\ e = 1;\ e < 1.$$

Ist $e > 1$, so wächst e^n, wenn n wächst, und wird unendlich gross, wenn n unendlich gross wird. Daher wird für diesen Fall auch die Summe der Reihe unendlich gross; mithin divergirt die Reihe.

Ist $e = 1$ so nimmt der Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, die Reihe aber wird

$$a + a + a + \ldots$$

daher ist die Summe der Reihe von n Gliedern gleich na, und wenn nun n unendlich gross wird, so wird auch das Produkt na unendlich gross. Die Summe der Reihe wird also unendlich gross; mithin divergirt die Reihe.

Ist $e < 1$ also ein positiver ächter Bruch, so wird e^n immer kleiner, je grösser n wird. Die auf einander folgenden Glieder der Reihe nehmen beständig ab, und es kann, wenn n gross genug genommen wird, der Werth von e^n der Null nahe genug gebracht werden, so dass für ein unendlich grosses n der Werth von e^n in Null übergeht. Für diesen Grenzwerth wird aber der obige Ausdruck gleich

$$a. \frac{1}{1 - e}$$

also gleich einem bestimmten endlichen Werthe. Daher wird auch die Summe der Reihe gleich diesem bestimmten endlichen Werthe, und folglich convergirt die unendliche geometrische Progression für $e < 1$ während sie für jeden anderen Werth von e divergirt.

Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

convergirt, wenn der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

für ein unendlich wachsendes n kleiner als 1 ist, sie divergirt dagegen, wenn dieser Quotient grösser als 1 ist.

Ist dagegen dieser Quotient nur um unendlich wenig kleiner als die Einheit, so muss die Untersuchung auf andere Weise geführt werden.

Hat eine Reihe positive und negative Glieder, so convergirt sie, wenn dieselbe Reihe mit lauter positiven Gliedern convergirt. Eine Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern convergirt auch dann, wenn der Quotient

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

für ein unendlich wachsendes n nur um unendlich wenig kleiner als die Einheit ist.

V. Besondere Grenzwerthe.

Wenn α einen Bogen des ersten Quadranten eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises bezeichnet, so ist die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

für den Fall zu ermitteln, dass α in Null übergeht. Es ist offenbar

$$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha,$$

daher auch

$$\frac{1}{\sin\alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\tan\alpha}$$

oder

$$\frac{1}{\sin\alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Multiplicirt man mit $\sin\alpha$, so folgt hieraus

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha,$$

und es ist mithin das Verhältniss

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

zwischen den Werthen 1 und $\cos\alpha$ eingeschlossen. Geht nun der Bogen α in Null über, so geht $\cos\alpha$ in 1 über; daher erhalten wir für einen in Null übergehenden Bogen α

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > 1.$$

Alsdann fallen aber die beiden Grenzen, zwischen denen das Verhältniss $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ eingeschlossen ist, zusammen, und folglich ist der Grenzwerth von

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

für ein in Null übergehendes α.

Es ist der Grenzwerth des Ausdruckes

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

zu ermitteln, wenn m über alle Grenzen hinaus wächst, also unendlich gross wird.

Da wir m als eine absolute ganze Zahl ansehen können, auf welcher nur die Bedingung ruht, dass sie unendlich gross wird, so ist nach dem binomischen Lehrsatze für absolute ganze Exponenten, welcher hier als bekannt vorausgesetzt wird, und von dessen Richtigkeit man sich durch successive Multiplication leicht überzeugen kann,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Lassen wir nun m unendlich gross werden, so gehen alle Glieder, welche m zum Nenner haben, in Null über. Es ist daher für diesen Fall

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$$= 2{,}71828 \ldots$$

Allgemein bezeichnet man diese Zahl mit e, und es ist mithin der Grenzwerth von

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

für ein unendlich wachsendes m.

Diese Zahl e ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen. Wenn wir also den natürlichen Logarithmus mit l bezeichnen, während der gemeine Logarithmus stets mit log bezeichnet werden soll, und ist

$$l(x) = z,$$

so ist

$$x = e^z.$$

Geht man von dieser Gleichung zu den gemeinen Logarithmen über, so erhält man

$$\log x = z \log e,$$

daher

$$z = \frac{\log x}{\log e}$$

oder auch

$$l(x) = \frac{\log x}{\log e}.$$

Hieraus folgt, dass man den natürlichen Logarithmus einer Zahl erhält, wenn man den gemeinen Logarithmus dieser Zahl durch den gemeinen Logarithmus von e dividirt. Aus der letzten Gleichung folgt weiter

$$\log e . \, l(x) = \log x.$$

Man erhält demnach den gemeinen Logarithmus einer Zahl, wenn man den natürlichen Logarithmus dieser Zahl mit dem gemeinen Logarithmus von e multiplicirt.

Setzen wir in der letzten Gleichung b für x, und verstehen wir unter b die Basis der gemeinen Logarithmen, so ist, weil $\log b = 1$

$$\log e . \, l(b) = 1,$$

mithin

$$l(b) = \frac{1}{\log e}.$$

Für $b = 10$ ist $\log e = 0{,}4342945$, also $\frac{1}{\log e} = 2{,}3025851$ und daher auch $l(10) = 2{,}3025851$.

I. Abschnitt.

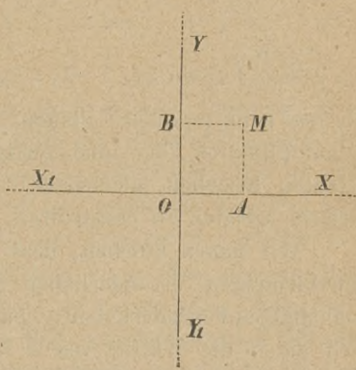
Geometrische Bedeutung und Darstellung der Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 1.

Die Coordinatensysteme der Ebene.

Das rechtwinkelige Coordinatensystem der Ebene wird durch zwei in der Ebene liegende gerade Linien gebildet, welche unter einem rechten Winkel sich schneiden. Fig. 1. Die eine dieser geraden Linien XX_1 wird als XAxe oder Abscissenaxe, die andere YY_1 wird als YAxe oder Ordinatenaxe, und der Durchschnittspunkt O derselben wird als Anfangspunkt der Coordinaten bezeichnet. Von O nach rechts und oben liegen die positiven Richtungen, und von O nach links und unten liegen die negativen Richtungen.

Fig. 1.



Es ist nun leicht einzusehen, dass die Lage eines jeden Punktes M in der Ebene bestimmt ist, wenn seine Abstände von den Coordinatenaxen gegeben sind. Die Abstände in der Richtung der XAxe werden mit x, und die Abstände in der Richtung der YAxe werden mit y bezeichnet. Zwei zusammengehörige Abstände x und y, welche die Lage eines Punktes bestimmen, werden die Coordinaten dieses Punktes genannt.

Für den Punkt M ist

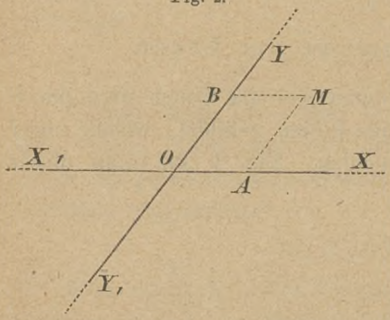
$$OA = BM = x; \quad OB = AM = y.$$

Sind die Coordinaten eines Punktes in Zahlen gegeben, so trägt man nach einer gewählten Maasseinheit den Werth von x

auf der XAxe vom Anfangspunkte O aus auf und zwar nach rechts oder links, jenachdem x positiv oder negativ ist. In derselben Weise trägt man den Werth von y auf der YAxe auf. Legt man nun durch die beiden hierdurch in den Axen erhaltenen Punkte Parallele zu den Axen, so schneiden sich diese, und der Durchschnittspunkt ist dann der durch seine Coordinaten bestimmte Punkt in der Ebene.

Beim schiefwinkeligen Coordinatensysteme, Fig. 2, ist es ebenso, nur ist der Coordinatenwinkel kein rechter, sondern ein beliebiger anderer Winkel. Der Winkel, den die positiven Richtungen der Axen mit einander machen, also der Winkel XOY, wird als Coordinatenwinkel bezeichnet. Beide, die rechtwinkeligen und die schiefwinkeligen Coordinaten, werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Parallelcoordinaten bezeichnet.

Fig. 2.

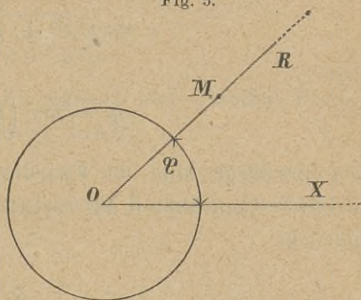


Ein solches Coordinatensystem kann nun dazu dienen, die Beziehungen, welche zwischen einer Funktion, der unabhängigen Veränderlichen und den Constanten bestehen, geometrisch darzustellen und dasjenige geometrische Gebilde zu construiren, welches der Gleichung entspricht.

Wir haben gesehen, dass einem jeden Werthe, welcher der unabhängigen Veränderlichen x beigelegt wird, ein Werth der abhängigen Veränderlichen y, oder der Funktion, entspricht. Tragen wir daher die Werthe von x in der Richtung der XAxe und die Werthe von y in der Richtung der YAxe, vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgehend, auf, so bekommen wir für je zwei zusammengehörige Werthe von x und y einen Punkt, indem diese Werthe die Coordinaten des fraglichen Punktes sind oder doch als solche angesehen werden können. Lassen wir nun den Werth von x von irgend einer Stelle an sich stetig ändern, und ist die Funktion stetig, so dass also auch die Werthe von y sich stetig ändern, so erhalten wir eine stetige Folge von unendlich nahe liegenden Punkten, also eine Linie, welche je nach der Beschaffenheit der Gleichung gerade oder krumm sein kann, und welche dasjenige geometrische Gebilde ist, welches der Gleichung entspricht, d. h. dasjenige geometrische Gebilde, dessen Bildungsgesetz in der Gleichung enthalten ist, oder durch welches die zwischen der Funktion, der unabhängigen Veränderlichen und den Constanten bestehenden Beziehungen geometrisch dargestellt werden. Eine solche Gleichung wird dann auch die Gleichung der fraglichen Linie genannt.

Das Polarcoordinatensystem der Ebene, Fig. 3, wird auf folgende Weise gebildet. Von einem festen Punkte O aus, dem Pole, ziehen wir eine Gerade OX, die Axe, welche in O begrenzt, über X hinaus aber unbegrenzt ist, und beschreiben um O mit dem Halbmesser 1 einen Kreis. Lassen wir nun eine zweite Gerade OR, welche ebenfalls in O begrenzt, über R hinaus aber unbegrenzt ist, von OX aus um O sich drehen, so durchläuft sie den um O beschriebenen Kreis und überstreicht alle Punkte der Ebene.

Fig. 3.



Die Lage eines Punktes M in der Ebene ist nun bestimmt, wenn die Grösse der Drehung, also der Bogen φ oder der Winkel XOR, die Anomalie, sowie die Drehungsrichtung und die Länge der Geraden OM, das ist der *radius vector* oder Leitstrahl, gegeben ist, indem der Bogen φ und der Leitstrahl r die Polarcoordinaten des Punktes M darstellen.

Auch ein solches Coordinatensystem kann dazu dienen, das geometrische Gebilde einer Gleichung zu construiren, wenn wir den Bogen φ als die unabhängige und den Leitstrahl r als die abhängige Veränderliche ansehen. Denn lassen wir den Werth von φ sich stetig ändern, und ist die Funktion stetig, so dass auch der Werth des Leitstrahles r sich stetig ändert, so beschreibt der stetig veränderliche Endpunkt des Leitstrahles eine Linie, welche dasjenige geometrische Gebilde ist, welches der Gleichung entspricht. Eine solche Gleichung wird dann die Polargleichung der fraglichen Linie genannt.

Es ist nun leicht, von einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme zu einem Polarcoordinatensysteme und umgekehrt über zu gehen. Lassen wir den Pol O des Polarcoordinatensystems mit dem Anfangspunkte O des rechtwinkeligen Coordinatensystems und die Axe des ersteren mit der positiven Seite der Abscissenaxe des letzteren zusammenfallen, sowie den Winkel von OX nach OY hin wachsen, so ergeben sich für denselben Punkt M sehr leicht folgende Beziehungen. Es ist nämlich

$$y = r \sin \varphi; \; x = r \cos \varphi,$$

und hierdurch sind die Coordinaten des rechtwinkeligen Coordinatensystems durch die Coordinaten des Polarcoordinatensystems ausgedrückt. Es ist aber auch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \; \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

also

$$\varphi = \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{y}{x}\right),$$

und hierdurch sind die Coordinaten des Polarcoordinatensystems durch die Coordinaten des rechtwinkeligen Coordinatensystems ausgedrückt.

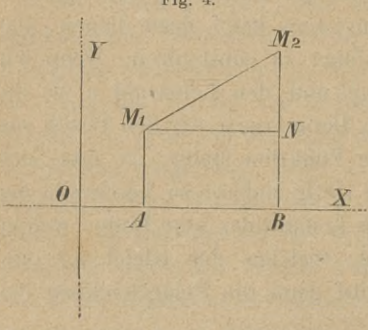
§ 2.

Zwei Punkte in der Ebene.

Um den Abstand zweier Punkte in der Ebene zu bestimmen, haben wir Folgendes.

Sind Fig. 4 $x_1 y_1$ die Coordinaten des Punktes M_1 sowie $x_2 y_2$ die Coordinaten des Punktes M_2; zieht man die Gerade $M_1 M_2$ und legt durch M_1 eine Parallele $M_1 N$ zur Abscissenaxe, so ist $M_1 M_2 N$ ein rechtwinkeliges Dreieck, und man hat

Fig. 4.



$$\overline{M_1 M_2}^2 = \overline{M_1 N}^2 + \overline{M_2 N}^2.$$

Es ist aber

$$M_1 N = OB - OA,$$
$$M_2 N = BM_2 - BN$$

und weiter

$$OB = x_2; \; OA = x_1; \; BM_2 = y_2; \; BN = y_1,$$

daher

$$M_1 N = x_2 - x_1; \; M_2 N = y_2 - y_1.$$

Bezeichnen wir nun den Abstand beider Punkte, also $M_1 M_2$ mit s, so ist

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

oder

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

und hiermit ist der Abstand beider Punkte durch die Coordinaten derselben ausgedrückt.

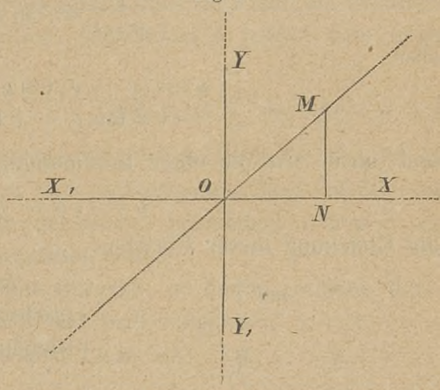
§ 3.

Die gerade Linie.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der geraden Linie, dass sie fortwährend dieselbe Richtung behält.

Geht nun die Gerade, Fig. 5, durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und macht sie mit der positiven Richtung der Abscissenaxe den Winkel α, so besteht für irgend einen beliebigen Punkt M der Geraden, dessen Coordinaten x und y sein mögen, die Gleichung

Fig. 5.



$$\frac{y}{x} = \tan \alpha,$$

also

$$y = x \tan \alpha,$$

oder wenn wir $\tan \alpha$ mit a bezeichnen,

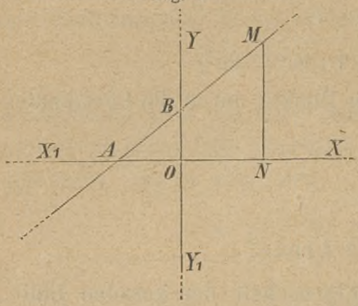
$$y = ax.$$

Da diese Gleichung für irgend einen beliebigen Punkt der Geraden gilt, so gilt sie auch für jeden Punkt der Geraden und ist mithin die Gleichung dieser Geraden. Für jeden Werth, den wir dem x beilegen, erhalten wir einen solchen Werth von y, dass dadurch ein Punkt in der Geraden bestimmt wird. Lassen wir x sich stetig ändern, so erzeugt die stetige Veränderung von y die Gerade.

Geht die Gerade nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so schneidet sie die Abscissenaxe entweder auf der linken oder auf der rechten Seite vom Anfangspunkte. Sie schneide die

Abscissenaxe links vom Anfangspunkte in der Entfernung e, Fig. 6, so haben wir für einen beliebigen Punkt M der Geraden, dessen Coordinaten x und y sein mögen, die Gleichung

Fig. 6.



$$\frac{y}{e+x} = \tan\alpha,$$

also

$$\begin{aligned} y &= (e + x) \tan\alpha, \\ &= x \tan\alpha + e \tan\alpha, \end{aligned}$$

und wenn wir $\tan\alpha$ mit a sowie $e \tan\alpha$ mit b bezeichnen, so ist

$$y = a x + b$$

die Gleichung dieser Geraden.

Schneidet die Gerade die Abscissenaxe rechts vom Anfangspunkte in der Entfernung e, (Fig. 7), so haben wir für einen beliebigen Punkt M der Geraden die Gleichung

$$\frac{y}{x-e} = \tan\alpha,$$

also

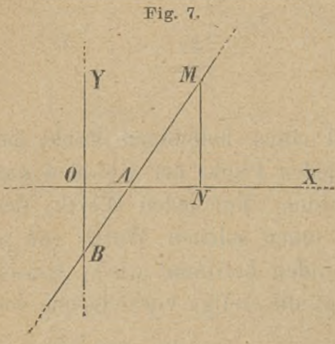
$$\begin{aligned} y &= (x - e) \tan\alpha, \\ &= x \tan\alpha - e \tan\alpha, \end{aligned}$$

und führen wir die obige Bezeichnung ein, so ist,

$$y = a x - b$$

die Gleichung dieser Geraden.

Fig. 7.



Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, dass die Gleichung

$$y = a x + b$$

die allgemeine Gleichung der Geraden ist, denn die vorstehenden drei Gleichungen gehen daraus hervor, jenachdem b null, positiv oder negativ ist.

Die Constante a ist die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die Gerade mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bildet, und ist also positiv oder negativ, jenachdem dieser Winkel spitz oder stumpf ist. Dieser Winkel ist aber spitz und daher a positiv, wenn die Gerade, indem sie durch den Anfangspunkt geht, diejenigen Felder durchschneidet, für welche die Coordinaten gleiche Vorzeichen haben. Dieser Winkel ist dagegen stumpf und a negativ, wenn die Gerade, indem sie durch den Anfangspunkt geht, diejenigen Felder durchschneidet, für welche die Coordinaten entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die Constante b ist null, wenn die Gerade durch den Anfangspunkt geht, sie ist positiv, wenn die Gerade die YAxe auf der positiven Seite schneidet, und sie ist negativ, wenn die Gerade die YAxe auf der negativen Seite schneidet.

Wollen wir den Durchschnittspunkt der Geraden mit der YAxe bestimmen, so haben wir $x = 0$ zu setzen, und wollen wir den Durchschnittspunkt der Geraden mit der XAxe bestimmen, so haben wir $y = 0$ zu setzen.

Ist $x = 0$, so ist $y = b$, daher ist b der Abstand desjenigen Punktes vom Anfangspunkte, in welchem die Gerade die YAxe schneidet, und dieser Durchschnittspunkt liegt auf der positiven oder negativen Seite derselben, jenachdem b positiv oder negativ ist.

Ist $y = 0$, so ist $x = -\frac{b}{a}$, daher ist $\frac{b}{a}$ der Abstand desjenigen Punktes vom Anfangspunkte, in welchem die Gerade die XAxe schneidet, und dieser Durchschnittspunkt liegt auf der positiven oder negativen Seite derselben, jenachdem a und b verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben.

Um die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, hat man Folgendes.

Die Gleichung der geraden Linie sei

$$y = ax + b,$$

sind nun x_1 und y_1 die Coordinaten des gegebenen Punktes, so muss die Gleichung auch für diese Coordinaten gelten, da die Gerade durch den Punkt gehen soll. Es besteht daher auch die Gleichung

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Subtrahirt man, um die Constante b zu eliminiren, die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man

$$y - y_1 = a\,(x - x_1),$$

und dieses ist die gesuchte Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht und mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist.

Es versteht sich hier von selber, dass a gegeben sein muss; denn wäre a nicht gegeben, so wäre die Richtung der Geraden nicht bestimmt, und in diesem Falle gehen durch den fraglichen Punkt beliebig viele gerade Linien.

Für $x = 0$ ergibt sich der Abstand des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ordinatenaxe vom Anfangspunkte der Coordinaten, nämlich

$$y = y_1 - ax_1,$$

und für $y = 0$ ergibt sich der Abstand des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Abscissenaxe vom Anfangspunkte der Coordinaten, nämlich

$$x = x_1 - \frac{y_1}{a}.$$

Um ferner die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht, sei wieder

$$y = ax + b \tag{1}$$

die Gleichung der Geraden. Sind nun $x_1 y_1$ die Coordinaten des einen, sowie $x_2 y_2$ die Coordinaten des andern der gegebenen Punkte, so bestehen auch, weil die Gerade durch beide Punkte gehen soll, die Gleichungen

$$y_1 = ax_1 + b, \tag{2}$$

$$y_2 = ax_2 + b, \tag{3}$$

Subtrahirt man die Gleichung 2 von der Gleichung 1, so erhält man

$$y - y_1 = a(x - x_1), \tag{4}$$

und dieses ist die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $x_1 y_1$ geht, und deren Richtung durch a bestimmt wird. Hier ist aber a nicht gegeben, sondern ein zweiter Punkt $x_2 y_2$, durch den die Gerade ebenfalls gehen soll, und es muss mithin a so bestimmt werden, dass die Gerade auch durch diesen zweiten Punkt geht; es muss also a durch die Coordinaten beider Punkte ausgedrückt werden. Subtrahirt man aber Gleichung 3 von Gleichung 2, so erhält man

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2),$$

und hieraus folgt weiter

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

wo nun a durch die Coordinaten beider Punkte ausgedrückt ist.

Setzt man diesen Werth von a in die Gleichung 4, so erhält man

(5) $$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

und dieses ist die Gleichung derjenigen Geraden, welche durch die beiden gegebenen Punkte geht.

Hätte man Gleichung 3 von Gleichung 1 subtrahirt, so hätte man erhalten

$$y - y_2 = a(x - x_2),$$

und dieses ist die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $x_2 y_2$ geht. Setzt man hier den Werth von a ein, so folgt

(6) $$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2).$$

Diese ist aber von Gleichung 5 nicht verschieden, da es gleichgiltig ist, welchen Punkt man zuerst nimmt.

Löst man eine dieser Gleichungen für y auf, so erhält man

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Für $x = 0$ ergibt sich der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ordinatenaxe; sein Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten ist

$$y = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Für $y = 0$ ergibt sich der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Abscissenaxe; sein Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten ist

$$x = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}.$$

§ 4.

Zwei Gerade.

Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so sind die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes zu bestimmen; ferner ist der Winkel zu bestimmen, den sie mit einander machen.

Sind

$$y = a_1 x + b_1$$
$$y = a_2 x + b_2$$

die Gleichungen dieser beiden Geraden, und bezeichnet man mit x_1 und y_1 die zu bestimmenden Coordinaten ihres Durchschnittspunktes, so müssen, da beide Gerade den Durchschnittspunkt gemein haben, auch beide Gleichungen für diese Coordinaten bestehen; es muss also sein

$$y_1 = a_1 x_1 + b_1$$
$$y_1 = a_2 x_1 + b_2.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen das einemal y_1 das anderemal x_1 so erhält man für die gesuchten Coordinaten

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}; \quad y_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}.$$

Ist $b_1 = b_2$ so ist $x_1 = 0$ und es liegt dann der Durchschnittspunkt der beiden Geraden in der Ordinatenaxe, oder beide Gerade schneiden die Ordinatenaxe in demselben Punkte.

Ist

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \text{ also } \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1},$$

so liegt der Durchschnittspunkt der beiden Geraden in der Abscissenaxe, oder beide Gerade schneiden die Abscissenaxe in demselben Punkte.

Ist $a_1 = a_2$ so werden x_1 und y_1 unendlich, wie es sein muss, da in diesem Falle die Geraden parallel sind.

Bezeichnet man die Winkel, welche die beiden Geraden mit der Abscissenaxe machen, mit α_1 und α_2 und den Winkel, den die beiden Geraden mit einander machen, mit β, so ist

$$\beta = \pm (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es ist aber dann auch

$$\tan \beta = \tan (\alpha_1 - \alpha_2),$$

und weil

$$\tan (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$$

aber

$$\tan \alpha_1 = a_1; \ \tan \alpha_2 = a_2,$$

so ist

$$\tan \beta = \pm \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}.$$

Ist $a_1 = a_2$, so ist $\tan \beta = 0$ also $\beta = 0$ oder $\beta = 180^0$. Die Geraden sind daher parallel.

Ist $1 + a_1 a_2 = 0$, so ist $\tan \beta = \infty$ also $\beta = 90^0$. Die

Geraden schneiden sich daher rechtwinkelig oder stehen auf einander senkrecht.

Aus der Gleichung

$$1 + a_1 a_2 = 0$$

folgt aber

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} \text{ oder } a_2 = -\frac{1}{a_1},$$

d. h. wenn zwei gerade Linien auf einander senkrecht stehen, so besteht zwischen den trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche beide Linien mit der Abscissenaxe machen, die Beziehung, dass die eine stets gleich dem umgekehrten und mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Werthe der andern ist.

Wenn eine Gerade auf einer anderen Geraden senkrecht stehen und durch einen gegebenen Punkt gehen soll, so findet man die Gleichung derselben auf folgende Weise. Es sei

$$y = ax + b$$

die Gleichung der gegebenen Geraden, ferner mögen x_1 und y_1 die Coordinaten des gegebenen Punktes sein, so ist die Gleichung einer Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht

$$y - y_1 = a_1 (x - x_1),$$

und wenn sie auf der gegebenen Geraden senkrecht stehen soll, so muss sein

$$a_1 = -\frac{1}{a},$$

daher ist die gesuchte Gleichung

$$y - y_1 = -\frac{1}{a} (x - x_1).$$

§ 5.

Die Polargleichung der Geraden.

Um die Gleichung der Geraden für Polarcoordinaten zu bekommen, haben wir in die Gleichung

$$y = ax + b$$

die Werthe

$$y = r \sin \varphi; \; x = r \cos \varphi$$

einzusetzen. Dieses gibt

$$r \sin \varphi = ar \cos \varphi + b$$
$$r \sin \varphi - ar \cos \varphi = b$$
$$r (\sin \varphi - a \cos \varphi) = b$$

$$r = \frac{b}{\sin\varphi - a\cos\varphi},$$

welches die Gleichung der Geraden für Polarcoordinaten ist.

Für $\varphi = 0$ ist $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$, daher

$$r = -\frac{b}{a};$$

dieses entspricht dem Durchschnittspunkte der Geraden mit der Abscissenaxe.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, daher

$$r = b;$$

dieses entspricht dem Durchschnittspunkte der Geraden mit der Ordinatenaxe.

§ 6.

Die Gleichung vom ersten Grade.

Jede Gleichung vom ersten Grade lässt sich auf die allgemeine Form

$$Ay + Bx + C = 0$$

bringen, wo A, B und C alle diejenigen Constanten in sich begreifen, welche in der Gleichung vorkommen, x und y aber die Veränderlichen sind. Lösen wir die Gleichung für y auf, so erhalten wir

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

und setzen wir $-\frac{B}{A} = a$ so wie $-\frac{C}{A} = b$, so geht die Gleichung über in

$$y = ax + b,$$

welches die Gleichung der geraden Linie ist.

Es geht aber hieraus hervor, dass jede Gleichung vom ersten Grade die Gleichung einer geraden Linie ist.

§ 7.

Der Kreis.

Es ist eine bekannte Eigenschaft des Kreises, dass alle Punkte von dem Mittelpunkte gleich weit abstehen, dass also der Abstand eines jeden Punktes vom Mittelpunkte gleich einer Constanten, dem Halbmesser, ist. Legen wir daher den Mittelpunkt des Kreises in den Coordinatenanfang, und bezeichnen wir den Halbmesser mit r, so haben wir für einen beliebigen Punkt M, Figur 8, die Gleichung

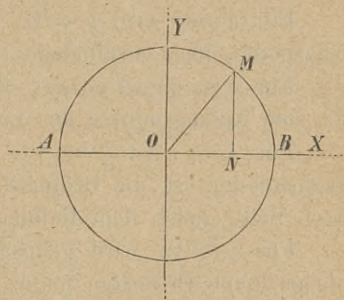
$$r^2 = x^2 + y^2$$

und hieraus

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Dieses ist die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Fig. 8.



Das obere Zeichen gilt für diejenigen Werthe von y, welche über der Abscissenaxe liegen, und das untere Zeichen für diejenigen Werthe von y, welche unter der Abscissenaxe liegen.

Für $x = 0$ wird $y = \pm r$. Die YAxe, wird also sowol auf der positiven als negativen Seite in der Entfernung r geschnitten.

Für $y = 0$ wird $x = \pm r$, daher wird auch die XAxe sowol auf der positiven als negativen Seite in der Entfernung r geschnitten.

Für jeden positiven oder negativen Werth von x kleiner als r gibt es zwei gleiche und entgegengesetze Werthe von y, welche von $x = 0$ bis $x = r$ beständig abnehmen.

Für x grösser als r wird y imaginär, daher gibt es über $x = \pm r$ hinaus keine Ordinaten mehr.

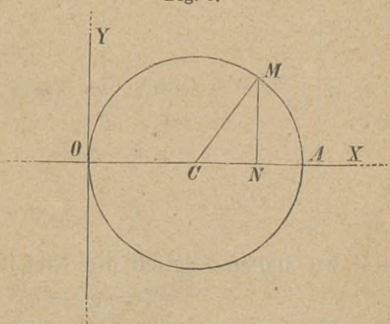
Schreibt man die Gleichung so

$$y^2 = (r + x)(r - x),$$

so folgt hieraus die Proportion

$$(r + x) : y = y : (r - x).$$

Fig. 9.



Nun sind aber $r + x$ und $r - x$ die beiden Abschnitte des Durchmessers AN und BN, Figur 8, daher folgt hieraus der bekannte Satz, dass die Ordinate y die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers ist.

Verlegen wir den Coordinatenanfang in den Endpunkt eines Durchmessers, Figur 9, so ist $ON = x$ und daher $CN = x - r$;

mithin haben wir für einen beliebigen Punkt M des Kreises die Gleichung

$$r^2 = y^2 + (x - r)^2$$

oder

$$r^2 = y^2 + x^2 - 2rx + r^2$$

und hieraus

$$y = \pm \sqrt{2rx - x^2}.$$

Dieses ist die Scheitelgleichung des Kreises.

Für $x = 0$ wird $y = 0$. Der Kreis geht also durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Für $x = 2r$ ist $y = 0$; die XAxe wird also in dem Abstande $2r$ vom Anfangspunkte der Coordinaten geschnitten.

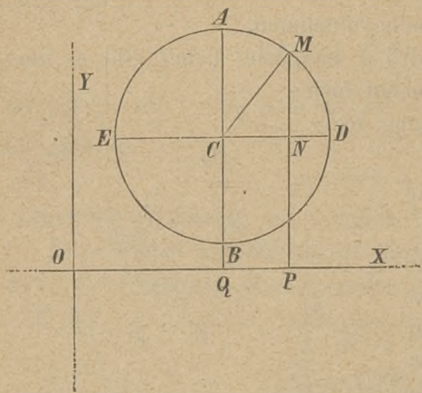
Für $x = r$ ist $y = \pm r$, d. h. im Abstande r vom Coordinatenanfange ist die Ordinate sowol auf der positiven als negativen Seite gleich dem Halbmesser.

Für $x > 2r$ wird y imaginär, daher gibt es über $x = 2r$ hinaus keine Ordinaten mehr.

Wird x negativ, so wird y ebenfalls imaginär. Auf der negativen Seite der XAxe gibt es daher keine Ordinaten.

Nimmt der Kreis in Beziehung auf die Coordinatenaxen eine ganz beliebige Lage ein, so müssen, ausser seinem Halbmesser, auch die Coordinaten seines Mittelpunktes gegeben sein. Werden diese Coordinaten mit a und b bezeichnet, so ist für einen beliebigen Punkt M des Kreises nach Figur 10

Fig. 10.



$$OQ = a,\ CQ = b,$$
$$OP = x,\ MP = y,$$

daher

$$CN = QP = x - a$$
$$MN = y - PN =$$
$$y - CQ = y - b,$$

und wir haben folglich die Gleichung

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Dieses ist die allgemeine Gleichung des Kreises. Wird diese Gleichung für y aufgelöst, so erhält man

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}.$$

Für $x = a$ wird $y = b \pm r$, dieses gibt die Punkte A und B.

Für $x = a + r$ wird $y = b$, dieses gibt den Punkt D.

Für $x = a - r$ wird $y = b$, dieses gibt den Punkt E.

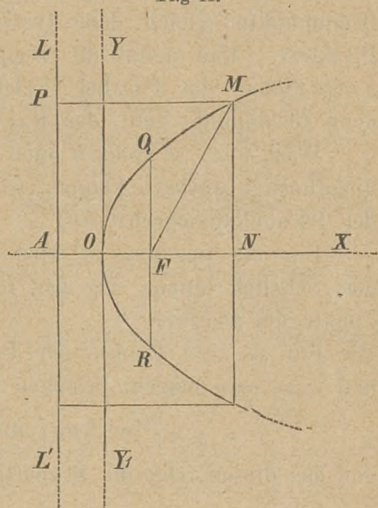
Wird x grösser als $a + r$ oder kleiner als $a - r$, so wird y imaginär.

§ 8.

Die Parabel.

Die Parabel besitzt die Eigenschaft, dass ein jeder ihrer Punkte von einer in der Ebene liegenden festen Geraden, der Leitlinie oder Direktrix und von einem ebenfalls in der Ebene liegenden festen Punkte, dem Brennpunkte gleich weit absteht.

Fi.g 11.



Es sei nun Figur 11, LL' die Leitlinie und F der Brennpunkt. Legen wir durch F eine Gerade so, dass sie auf der Leitlinie senkrecht steht und nehmen sie als Abscissenaxe, so wie die Mitte des Abstandes des Brennpunktes von der Leitlinie, also die Mitte von AF, zum Anfangspunkte der Coordinaten, so lässt sich, wenn M ein beliebiger Punkt der Parabel ist, die Gleichung derselben auf folgende Weise bestimmen.

Bezeichnen wir den Abstand AF mit p so ist $FN = x - \frac{1}{2}p$ und weil ferner

$$FM = PM = AN = x + \tfrac{1}{2}p$$

so wie

$$MN = y,$$

so haben wir die Gleichung

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2$$

und hieraus nach gehöriger Entwickelung

$$y^2 = 2px$$

oder

$$y = \pm \sqrt{2px},$$

welches die Gleichung der Parabel ist.

Für jeden positiven Werth von x erhält y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe; daher theilt die Abscissenaxe die Kurve in zwei symmetrische Aeste, und es wird deshalb die Gerade, welche durch den Brennpunkt geht und auf der Leitlinie senkrecht steht, die Axe der Parabel genannt.

Für $x = 0$ wird $y = 0$, die Kurve geht mithin durch den Anfangspunkt der Coordinaten, also durch die Mitte von AF. Diesen Punkt nennt man den Scheitel der Parabel.

Für $x = \frac{1}{2}p$ wird $y = \pm p$, mithin ist die Ordinate des Brennpunktes gleich dem Abstande des Brennpunktes von der Direktrix. Man nennt die Doppelordinate $QR = 2p$ oder diejenige Sehne der Parabel, welche parallel zur Direktrix durch denn Brennpunkt geht, den Parameter der Parabel.

Wächst x, so wächst auch y, und da beide Veränderliche unaufhörlich wachsen können, so gehen mithin die beiden Zweige der Parabel unbegrenzt fort.

Für ein negatives x wird y imaginär, daher gibt es über den Scheitel hinaus auf der negativen Seite der XAxe keine Punkte der Parabel.

Für je zwei Punkte der Parabel, deren Coordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ sein mögen, bestehen die Gleichungen

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ und } y_2^2 = 2px_2,$$

und aus diesen folgt die Proportion

$$x_1 : x_2 = y_1^2 : y_2^2,$$

d. h. bei der Parabel verhalten sich die Abscissen wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten.

Aus der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

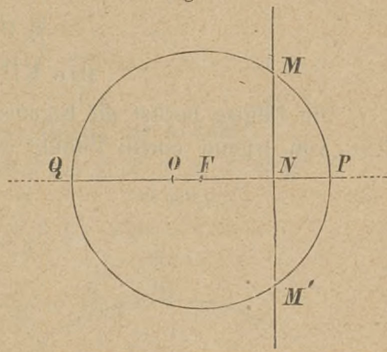
lässt sich die Proportion ableiten

$$2x : y = y : p,$$

so dass y die mittlere Proportionale zwischen $2x$ und p ist. Hierdurch ergibt sich ein Verfahren die Parabel zu construiren, wenn der Parameter derselben, $2p$, gegeben ist.

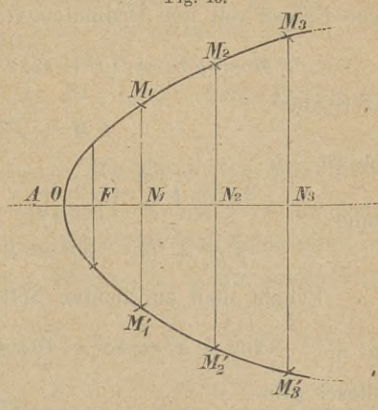
Auf einer Geraden, welche man als Axe der Parabel ansehen will, Figur 12, nehme man den Punkt O als Scheitel derselben an und ferner einen beliebigen Punkt N, durch welchen man eine Senkrechte auf die erstere Gerade legt, so kann ON als Abscisse irgend eines Parabelpunktes M angesehen und also $ON = x$ gesetzt werden. Macht man hierauf $OQ = ON$, so ist $QN = 2x$. Macht man endlich $NP = p$, also gleich dem halben Parameter, halbirt QP und beschreibt aus dem Halbirungspunkte F einen Kreis, so schneidet dieser die durch N gehende Senkrechte in den Punkten M und M', und es ist daher $NM = NM'$ die mittlere Proportionale zwischen QN und NP. Weil aber $QN = 2x$ und $NP = p$ ist, so ist $NM = NM' = y$, und M und M' sind Punkte der Parabel, deren Scheitel O ist.

Fig. 12.



Der Durchmesser des Kreises QP ist $2x + p$, daher ist der Halbmesser QF desselben gleich $x + \frac{1}{2}p$; nun ist $OQ = x$, daher ist $OF = \frac{1}{2}p$ und mithin F der Brennpunkt der Parabel. Dasselbe gilt für jedes x, und es ist daher der Brennpunkt der Parabel der Mittelpunkt aller zu beschreibenden Kreise, und da der Halbmesser eines jeden Kreises, d. h. für jedes x stets $x + \frac{1}{2}p$ ist, so lässt sich die Construction der Parabel auf folgende einfache Weise bewirken.

Fig. 13.



Auf einer Geraden, Figur 13, welche die Axe der Parabel sein soll, nimmt man den Punkt O als Scheitel an und macht $OF = OA = \frac{1}{2}p$, dann ist F der Brennpunkt und Mittelpunkt aller zu beschreibenden Kreise, und AN_1, AN_2, AN_3 . . . sind die Halbmesser derselben. Werden daher durch die Punkte

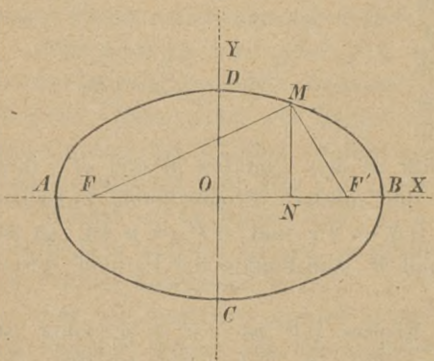
N_1 N_2 . . . Senkrechte auf die Axe gelegt und mit den zugehörigen Halbmessern von F aus geschnitten, so sind M_1 M_2 . . . Punkte der Parabel.

§ 9.

Die Ellipse.

Die Ellipse besitzt die Eigenschaft, dass die Summe der beiden, von irgend einem Punkte nach den Brennpunkten gezogenen Leitstrahlen gleich der grossen Axe ist. Der Abstand eines Brennpunktes vom Durchschnittspunkte der Axen wird die Excentricität genannt.

Fig. 14.



Bezeichnen wir die halbe grosse Axe $OA = OB$, Figur 14, mit a und die halbe kleine Axe $OC = OD$ mit b so wie die Excentricität $OF = OF'$ mit e; legen wir den Coordinatenanfang in den Durchschnittspunkt der Axen, so dass die grosse Axe der Ellipse mit der Abscissenaxe und die kleine Axe der Ellipse mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, so ist

$$FM = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}; \quad F'M = \sqrt{y^2 + (e - x)^2},$$

weil aber

$$FM + F'M = 2a,$$

so ist

$$2a = \sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$$

oder

$$\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (e + x)^2}.$$

Erhebt man auf beiden Seiten zur zweiten Potenz, so folgt

$$y^2 + e^2 - 2ex + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + y^2 + e^2 + 2ex + x^2;$$

dieses gibt

$$a\sqrt{y^2 + (e + x)^2} = a^2 + ex.$$

Wird hier wieder jede Seite der Gleichung zur zweiten Potenz erhoben, so folgt

$$a^2(y^2 + e^2 + 2ex + x^2 = a^4 + 2a^2ex + e^2x^2,$$

das ist

$$a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2 = a^4 + e^2x^2.$$

Es ist aber, weil

$$DF = DF' = a,$$

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Wird dieses in die Gleichung eingesetzt, so kommt

$$a^2y^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 = a^4 + a^2x^2 - b^2x^2,$$

woraus endlich

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dieses ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Wird diese Gleichung für y aufgelöst, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Für $x = 0$ wird $y = \pm b$, dieses gibt die beiden Endpunkte der kleinen Axe.

Für $y = 0$ wird $x = \pm a$, dieses gibt die beiden Endpunkte der grossen Axe.

Für jedes positive oder negative x kleiner als a gibt es einen positiven und einen negativen reellen Werth von y, und diese Werthe nehmen von $x = 0$ bis $x = \pm a$ beständig ab.

Für jedes positive oder negative x grösser als a wird y imaginär, daher gibt es über $x = \pm a$ hinaus keine Punkte der Kurve.

Für $x = \pm e$ wird $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Die durch den Brennpunkt gehende auf der grossen Axe senkrechte Sehne wird der Parameter der Ellipse genannt. Bezeichnen wir den Parameter mit $2p$, so ist der zuletzt bestimmte Werth von y der halbe Parameter also p, daher

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$p : b = b : a,$$

d. h. die halbe kleine Axe ist die mittlere Proportionale zwischen dem halben Parameter und der halben grossen Axe, oder die kleine Axe der Ellipse ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der grossen Axe.

Bezeichnen wir den einen Leitstrahl FM mit r und den andern $F'M$ mit r', so ist

$$r + r' = 2a.$$

Ferner ist

$$r^2 = y^2 + (e + x)^2,$$
$$r'^2 = y^2 + (e - x)^2,$$

daher

$$r^2 - r'^2 = (e + x)^2 - (e - x)^2$$

oder

$$(r + r')(r - r') = 4ex.$$

Setzen wir hier für $r + r'$ seinen Werth $2a$, so erhalten wir

$$r - r' = \frac{2ex}{a}.$$

Wird aus dieser Gleichung und der Gleichung

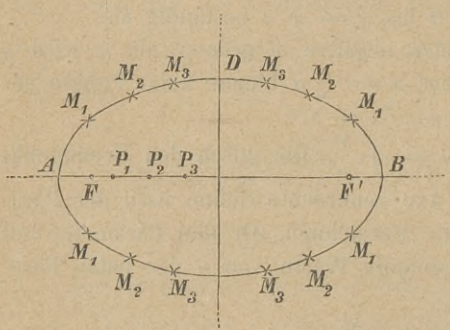
$$r + r' = 2a$$

das einemal r', das anderemal r eliminirt, so erhalten wir

$$r = \frac{a^2 + ex}{a}; \quad r' = \frac{a^2 - ex}{a}.$$

Sind die beiden Axen der Ellipse gegeben, und man beschreibt mit der halben grossen Axe vom Endpunkte der kleinen Axe aus Bögen, welche die grosse Axe in den Punkten F und F' schneiden, so sind dieses die Brennpunkte der Ellipse, Figur 15. Nimmt man dann auf der grossen Axe beliebige Punkte P_1, P_2, P_3 ... an und beschreibt einmal mit AP_1 und das anderemal mit BP_1 von F und F' aus Bögen, so schneiden sich diese in den Punkten M_1, und es sind dieses Punkte der Ellipse. Ebenso findet man die Punkte M_2, wenn man mit den Abständen AP_2, BP_2 auf gleiche Weise verfährt. Man kann durch dieses Verfahren beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmen und diese dann stetig verbinden.

Fig. 15.

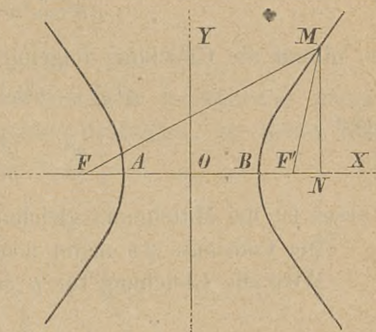


§ 10.

Die Hyperbel.

Die Hyperbel besitzt die Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände eines jeden ihrer Punkte von zwei festen Punkten gleich einer Constanten ist. Die Constante nennt man die Hauptaxe und die beiden festen Punkte die Brennpunkte der Hyperbel. Die Hälfte des Abstandes der beiden Brennpunkte von einander wird die Excentricität genannt.

Fig. 16.



Bezeichnen wir die Constante mit $2a$, die Excentricität mit e, legen wir die Abscissenaxe durch die beiden Brennpunkte, und machen wir den Mittelpunkt zwischen den beiden Brennpunkten zum Anfangspunkte der Coordinaten, so ist für einen beliebigen Punkt M der Hyperbel, Figur 16, dessen Abstände von F und F' mit r und r' bezeichnet werden mögen,

$$r^2 = y^2 + (x + e)^2$$
$$r'^2 = y^2 + (x - e)^2.$$

Subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man

$$(r + r')(r - r') = 4ex.$$

Nun ist aber

$$r - r' = 2a,$$

daher, wenn man dieses in die Gleichung einsetzt,

$$r + r' = \frac{2ex}{a}.$$

Wird nun aus den beiden letzten Gleichungen das einemal r', das anderemal r eliminirt, so ergibt sich

$$r = \frac{ex + a^2}{a}; \quad r' = \frac{ex - a^2}{a}.$$

Setzt man diesen Werth von r in die erste der obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$\frac{(ex + a^2)^2}{a^2} = y^2 + (x + e)^2$$

und hieraus

$$e^2x^2 + 2a^2ex + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 + 2a^2ex + a^2e^2$$

oder

$$a^2y^2 - (e^2 - a^2)x^2 = -(e^2 - a^2)a^2.$$

Setzt man nun

$$e^2 - a^2 = b^2,$$

so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dieses ist die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel.

Die Constante $2b$ nennt man die Nebenaxe der Hyperbel.

Wird die Gleichung für y aufgelöst, so ist

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Für $y=0$ wird $x=\pm a$. Diese beiden Punkte, welche um die Entfernung $2a$ also um die Grösse der Hauptaxe von einander abstehen und mit den Brennpunkten in derselben geraden Linie liegen, werden die Scheitel der Hyperbel genannt.

Für jedes positive oder negative x, kleiner als a, wird y imaginär, daher gibt es zwischen den beiden Scheiteln der Hyperbel keine Ordinaten mehr.

Für jedes positive oder negative x, grösser als a, gibt es zwei gleiche und entgegengesetzte Ordinaten. Die Hyperbel besteht aus zwei getrennten, gegen die Abscissenaxe symmetrisch liegenden Theilen.

Für $x = \pm e$ wird $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Die durch den Brennpunkt gehende auf der Hauptaxe senkrechte Sehne wird der Parameter der Hyperbel genannt. Bezeichnen wir den Parameter mit $2p$, so ist der zuletzt bestimmte Werth von y der halbe Parameter also p, daher

$$p = \frac{b^2}{a},$$

und es ist mithin die Nebenaxe die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Hauptaxe.

Die Nebenaxe lässt sich auf folgende Weise construiren. Figur 17. Wenn man mit der Excentricität OF von A oder B aus die Ordinatenaxe in den Punkten C und D schneidet, so ist

$$OC = OD = b$$

und mithin CD die Nebenaxe. Denn es ist nach der Figur

$$\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OB}^2,$$

das ist aber

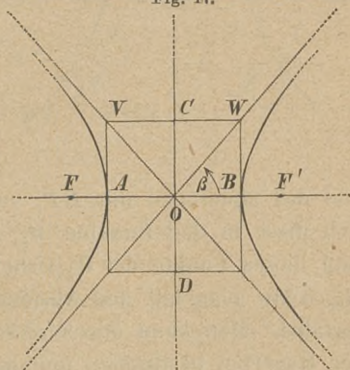
$$\overline{OC}^2 = e^2 - a^2,$$

also

$$OC = b.$$

Wenn eine Kurve sich einer Geraden fortwährend nähert ohne jedoch jemals mit ihr zusammenzutreffen, so nennt man eine solche Gerade eine Asymptote der Kurve. Die Hyperbel hat zwei Asymptoten, welche durch den Mittelpunkt der Hauptaxe gehen, und denen sich die Zweige der Hyperbel beständig nähern ohne sie aber jemals zu erreichen.

Fig. 17.



Dass eine solche Gerade eine Asymptote sei, hängt offenbar von der Lage der Geraden also von dem Winkel ab, den die Gerade mit der Hauptaxe macht. Für die Asymptote ist dieser Winkel nun von der Beschaffenheit, dass seine Tangente gleich ist dem Quotienten aus der halben Nebenaxe durch die halbe Hauptaxe. Bezeichnen wir diesen Winkel mit β, so ist

$$\tan \beta = \frac{b}{a}.$$

Die Gleichung der Asymptote ist mithin

$$y = \frac{b}{a} x,$$

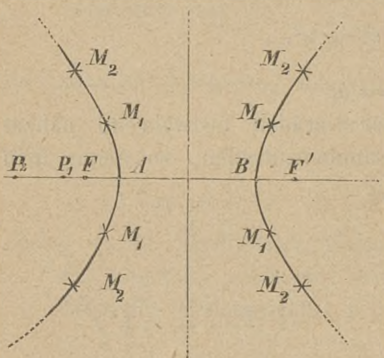
und es lassen sich hiernach die Asymptoten sehr leicht construiren. Errichtet man in den Scheiteln der Hyperbel Senkrechte auf die Hauptaxe, s. Figur 17, und macht $AV = BW = b$, legt hierauf durch O und V so wie durch O und W Gerade, so sind diese die Asymptoten der Hyperbel, denn es ist

$$\frac{BW}{OB} = \frac{b}{a} = \tan \beta.$$

Sind die beiden Axen der Hyperbel einander gleich, ist also $b = a$, so ist tan $\beta = 1$ also $\beta = 45^0$ und mithin der Winkel, den die Asymptoten mit einander machen, ein rechter. Eine solche Hyperbel wird eine gleichseitige genannt.

Aus der Eigenschaft der Hyperbel, dass die Differenz der Abstände eines jeden ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten gleich der Hauptaxe ist, folgt eine leichte Construktion der Hyperbel, wenn die Hauptaxe und die Brennpunkte gegeben sind.

Fig. 18.



Ist AB, Figur 18, die Hauptaxe und sind F und F' die Brennpunkte, so nehme man auf der Verlängerung der Hauptaxe beliebige Punkte P_1 P_2 an und beschreibe das einemal mit AP_1 und das anderemal mit BP_1 aus F und F' Bögen, so schneiden sich diese in den Punkten M_1, und weil $BP_1 - AP_1 = AB$, so sind dieses Punkte der Hyperbel. Ebenso findet man die Punkte M_2, wenn man mit den Abständen AP_2, BP_2 auf gleiche Weise verfährt. Man kann durch dieses Verfahren beliebig viele Punkte der Hyperbel bestimmen und diese dann stetig verbinden.

§ 11.

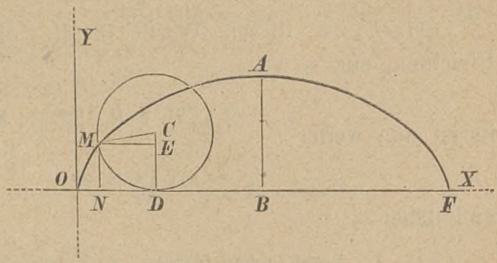
Die Cycloide.

Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie fortrollt, so beschreibt ein Punkt der Kreislinie eine krumme Linie, welche man Cycloide nennt. Wenn der Kreis hierbei eine Umdrehung gemacht hat, so ist die Strecke, welche er auf der Geraden zurücklegte, gleich dem Umfange des Kreises.

Nehmen wir als den erzeugenden Punkt denjenigen an, in welchem beim Beginne der Bewegung die Gerade den Kreis berührt, legen wir in diesen Punkt den Anfangspunkt der Coordinaten und nehmen die Gerade als Abscissenaxe an, so ergibt sich Folgendes.

Ist M, Figur 19, ein beliebiger Punkt der Kurve so ist $MN = y$, $ON = x$. Ist der Kreis um die Strecke OD fortgerollt, so ist die Gerade OD gleich dem Bogen MD. Wird der Halbmesser des erzeugenden Kreises mit r und der dem Centriwinkel DCM entsprechende mit dem Halbmesser 1 beschriebene Bogen mit φ bezeichnet, so ist der Bogen $MD = r\varphi$. Es ist nun weiter

Fig. 19.



$$ON = OD - DN;\ MN = CD - CE,$$

und weil

$$OD = r\varphi;\ DN = ME = r \sin \varphi;$$

$$CD = r;\quad CE = r \cos \varphi,$$

so hat man die Gleichungen

$$x = r\varphi - r \sin \varphi = r\,(\varphi - \sin \varphi)$$
$$y = r\quad - r \cos \varphi = r\,(1 - \cos \varphi),$$

und es stellen sich hier die Veränderlichen x und y als Funktionen von φ dar. Für jeden Werth von φ ergeben sich zusammengehörige Werthe von x und y, welche einen Punkt der Kurve bestimmen.

Für $\varphi = 0$ ist $x = 0$ und $y = 0$. Die Kurve geht also durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Für $\varphi = \pi$ ist $x = r\pi$ und $y = 2r$. Dieses entspricht dem Punkte A.

Für $\varphi = 2\pi$ ist $x = 2r\pi$ und $y = 0$. Dieses entspricht dem Punkte F.

Man kann die Drehung beliebig weit fortgehen lassen, und für jede Umdrehung des Kreises wiederholt sich die Kurve OAF.

Will man durch Elimination von φ eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y haben, so ist zunächst

$$\cos \varphi = \frac{r - y}{r};$$

da nun

$$\sin \varphi = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \varphi},$$

so ist, wenn wir den soeben bestimmten Werth von $\cos\varphi$ einsetzen,

$$\sin\varphi = \pm \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}.$$

Setzen wir diesen Werth in die oben für x gefundene Gleichung ein, so ist

$$x = r\varphi \mp \sqrt{2ry - y^2}.$$

Es ist nun weiter

$$\varphi = \text{arc}\left(\cos = \frac{r-y}{r}\right)$$

und daher

$$x = r \text{ arc}\left(\cos = \frac{r-y}{r}\right) \mp \sqrt{2ry-y^2}.$$

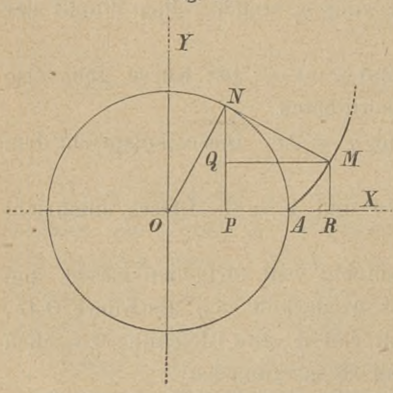
Dieses ist die Gleichung der Cycloide. Man bedient sich aber dieser Gleichung zwischen x und y nicht, sondern vielmehr der oben gefundenen, zwischen x und φ und y und φ bestehenden Gleichungen, da sie für den Gebrauch bequemer und zweckmässiger sind.

§ 12.

Die Kreisevolvente.

Wenn eine Gerade, welche einen Kreis berührt, sich an diesem Kreise wälzend fortbewegt, ohne zu gleiten, so dass sie beständig den Kreis berührt, und also der Berührungspunkt auf dem Kreise stetig fortschreitet, so beschreibt der ursprüngliche Berührungspunkt der Geraden eine Kurve, welche man Kreisevolvente oder Abwickelungslinie des Kreises nennt, weil hierbei der Kreisbogen, den der Berührungspunkt durchläuft, gleichsam vom Kreise abgewickelt und in eine Gerade verwandelt wird.

Fig. 20.



Ist A, Figur 20, der ursprüngliche Berührungspunkt, und ist er durch Abwickelung des Bogens AN nach M gekommen, so ist die Gerade MN eine in N an den Kreis gelegte Tangente, und ihre Länge ist gleich der Länge des Bogens AN. Wird der Halbmesser des erzeugenden Kreises mit r und der dem Centriwinkel AON entsprechende mit dem Halbmesser 1 beschriebene Bogen mit φ bezeichnet, so ist der Bogen $AN = r\varphi$, und folglich ist auch die Gerade $MN = r\varphi$.

Für den Punkt M der Kurve ist nun

$$OR = x, \ MR = y;$$

es ist aber

$$OR = OP + PR; \ MR = NP - NQ;$$

ferner ist

$$OP = r \cos \varphi; \ NP = r \sin \varphi,$$

und weil der Winkel MNQ gleich dem Winkel NOP ist, indem ON und MN senkrecht auf einander stehen, so ist

$$MQ = PR = MN \sin \varphi; \ NQ = MN \cos \varphi,$$

oder wenn wir für MN seinen Werth setzen, so ist

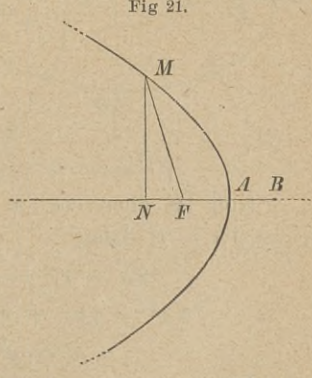
$$PR = r\varphi \sin \varphi; \ NQ = r\varphi \cos \varphi.$$

Setzen wir alle diese Werthe in die beiden Gleichungen ein, so erhalten wir

$$x = r \cos \varphi + r\varphi \sin \varphi$$
$$y = r \sin \varphi - r\varphi \cos \varphi.$$

Dieses sind die Gleichungen für die Kreisevolvente, indem hier die Veränderlichen x und y als Funktionen von φ erscheinen. Für jeden Werth von φ ergeben sich zusammengehörige Werthe von x und y, welche einen Punkt der Kurve bestimmen.

Fig 21.



§ 13.

Polargleichungen der Kegelschnitte. Polargleichung der Parabel.

Nimmt man den Brennpunkt zum Pol und die Axe der Parabel zur Polaraxe, Figur 21, rechnet man ferner die Drehung vom Scheitel A aus; so ist, wenn $AB = AF = \frac{1}{2}p$,

$$FM = BF + FN.$$

Es ist aber

$$BF = p,$$

und wenn wir den dem Winkel BFM entsprechenden Bogen des mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises mit φ bezeichnen, so ist der dem Winkel NFM entsprechende Bogen $\pi - \varphi$; es ist aber dann

$$FN = FM \cos(\pi - \varphi) = - FM \cos\varphi.$$

Bezeichnet man nun FM mit r und setzt die Werthe von BF und FN in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$r = p - r\cos\varphi$$

und hieraus

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

Dieses ist die Polargleichung der Parabel.

Für $\varphi = 0$ wird $r = \frac{1}{2}p$. Dieses entspricht dem Punkte A.

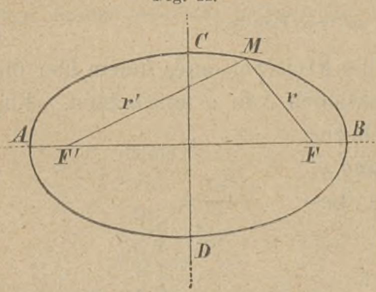
Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $r = p$.

Für $\varphi = \pi$ wird $r = \infty$.

Polargleichung der Ellipse.

Nimmt man den Brennpunkt F, Figur 22, zum Pol, die grosse Axe der Ellipse zur Polaraxe und rechnet die Drehung vom Scheitel B aus, so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie, wenn wieder der dem Winkel BFM entsprechende Bogen mit φ und der Leitstrahl FM mit r bebezeichnet wird, für einen beliebigen Punkt M der Ellipse

Fig. 22.



$$r'^2 = r^2 + (2e)^2 - 2r(2e)\cos(\pi - \varphi).$$

Nun ist aber $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$; $r' + r = 2a$; $r' = 2a - r$, daher

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4e^2 + 4re\cos\varphi,$$

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4e^2 + 4re\cos\varphi,$$

$$a^2 - e^2 = r(a + e\cos\varphi)$$

und hieraus

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi}.$$

Nun ist

$$a^2 - e^2 = b^2,$$

daher

$$r = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi}.$$

Dividirt man rechts Zähler und Nenner mit a, so wird

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{e}{a} \cos \varphi}.$$

Es ist aber $\frac{b^2}{a} = p$, und bezeichnet man den Quotienten $\frac{e}{a}$, welcher die numerische Excentricität genannt wird, mit ε, so wird endlich

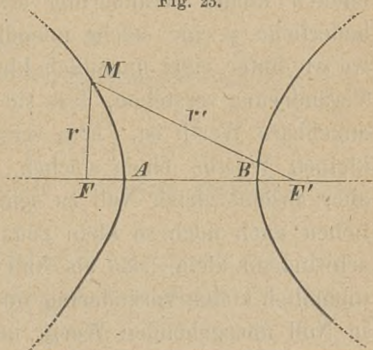
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

und dieses ist die Polargleichung der Ellipse.

Polargleichung der Hyperbel.

Nimmt man den Brennpunkt F, Figur 23, zum Pol, die Hauptaxe der Hyperbel zur Polaraxe und rechnet die Drehung vom Scheitel A aus, so ist für einen beliebigen Punkt M der Hyperbel

Fig. 23.



$$r'^2 = r^2 + (2e)^2 - 2r(2e)\cos\varphi,$$

und weil $r' - r = 2a$, also $r' = 2a + r$

$$(2a + r)^2 = r^2 + 4e^2 - 4re\cos\varphi,$$

$$4a^2 + 4ar + r^2 = r^2 + 4e^2 - 4re\cos\varphi$$

$$ar + re\cos\varphi = e^2 - a^2$$

und hieraus

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos\varphi}.$$

Es ist aber $e^2 - a^2 = b^2$, daher

$$r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}.$$

Dividiren wir rechts Zähler und Nenner mit a, so kommt

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{e}{a}\cos\varphi}.$$

Nun ist $\frac{b^2}{a} = p$; $\frac{e}{a} = \varepsilon$, daher

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

und dieses ist die Polargleichung der Hyperbel.

II. Abschnitt.

Differentiation der Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 14.

Allgemeines Verfahren.

Es ist bereits früher bemerkt worden, dass bei einer stetigen Funktion dann, wenn die unabhängige Veränderliche x eine unendlich kleine Veränderung erleidet, auch die abhängige Veränderliche y eine solche unendlich kleine Veränderung erleidet, wo wir unter einer unendlich kleinen Veränderung eine so kleine Veränderung verstehen, dass sie kleiner als jeder noch so kleine angebbare Werth ist. Man versteht auch unter einem unendlich kleinen Werthe einen solchen, welcher in Null übergeht ohne aber absolut gleich Null zu sein; er kann nur einem jeden endlichen auch noch so klein gedachten Werthe gegenüber als verschwindend klein, also als Null angesehen werden. Eine solche unendlich kleine Veränderung oder einen solchen unendlich kleinen in Null übergehenden Werth nennt man ein Differential und zwar ein Differential desjenigen Werthes der Veränderlichen, aus welchem er durch stetige Veränderung derselben hervorgeht. Die stetige, unendlich kleine Veränderung des x ist also das Differential von x, und die stetige unendlich kleine Veränderung des y ist das Differential von y. Man bezeichnet das erstere mit dx, das letztere mit dy, und es ist hierbei nur noch zu bemerken, dass dx mit x und dy mit y stets gleichartig ist, so dass wenn x oder y z. B. Linien, Flächen oder Körper sind, auch dx und

dy Linien, Flächen oder Körper von unendlich kleiner Ausdehnung bedeuten.

Die Differentialrechnung betrachtet nun die Funktion und ihre unabhängige Veränderliche im Zustande der stetigen Veränderung und bestimmt den Werth der ersteren, wenn die letztere eine unendlich kleine Veränderung erleidet, so wie den Werth der unendlich kleinen Veränderung der Funktion selbst, also ihr Differential, endlich das Verhältniss des Differentials der Funktion zum Differential der unabhängigen Veränderlichen, das ist den Werth von $\frac{dy}{dx}$, welcher dann als Differentialverhältniss oder Differentialquotient bezeichnet wird.

Lässt man in irgend einer, zwischen den Veränderlichen x und y bestehenden und für y aufgelösten Gleichung die Veränderliche x um einen endlichen Werth sich ändern, der im allgemeinen mit Δx bezeichnet werden mag, setzt man also in der Gleichung anstatt x überall $x + \Delta x$, so wird y ebenfalls um einen endlichen Werth sich ändern, der entsprechend mit Δy bezeichnet werden mag, und wodurch y also in $y + \Delta y$ übergeht.

Ist z. B. die Gleichung

$$y = 2x^2 + 3x + 4$$

gegeben, so geht daraus durch die Veränderungen von x und y die Gleichung

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 4$$

hervor. Wenn man die rechte Seite derselben entwickelt, so erhält man

$$y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 4.$$

Subtrahirt man sodann von der so veränderten Gleichung die ursprüngliche Gleichung

$$y = 2x^2 + 3x + 4,$$

so erhält man den Werth derjenigen Veränderung, welche die Funktion, also y, dadurch erlitten hat, dass x in $x + \Delta x$ übergegangen ist, nämlich den Werth von Δy; also im vorstehenden Falle

$$\Delta y = (4x + 3)\,\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Dividirt man endlich auf beiden Seiten mit Δx, so erhält man das Verhältniss der Veränderung der Funktion zur Veränderung der unabhängigen Veränderlichen nämlich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 3 + 2\Delta x.$$

Dieses Verhältniss wird das Differenzenverhältniss oder der Differenzenquotient der beiden Veränderlichen y und x genannt.

Dasselbe Verfahren gilt aber auch, wenn statt der endlichen Veränderungen Δy und Δx der Funktion und ihrer unabhängigen Veränderlichen die unendlich kleinen Veränderungen dy und dx genommen werden. Die linke Seite der letzten Gleichung wird dann $\frac{dy}{dx}$, und da auf der rechten Seite das Glied $2\Delta x$ in $2dx$ übergeht, aber dx und also auch $2dx$ unendlich klein, also so klein ist, dass es gegen jeden endlichen Werth verschwindet, so verschwindet es auch gegen $4x + 3$, so dass die rechte Seite der Gleichung in diesen endlichen Werth übergeht. Die obige Gleichung wird dann aber

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3.$$

Man kann auch in dem Ausdrucke

$$4x + 3 + 2\Delta x$$

das endliche Δx fortwährend abnehmen und in Null übergehen lassen; dann ist für diesen Uebergang des Δx in Null $4x + 3$ der Grenzwerth von

$$4x + 3 + 2\Delta x;$$

da aber auch

$$4x + 3 + 2\Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

so ist $\frac{dy}{dx}$ überhaupt der Grenzwerth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für ein in Null übergehendes Δx.

Es geht hieraus das bemerkenswerthe Resultat hervor, dass, während die Differentiale der beiden Veränderlichen dy und dx unendlich kleine Werthe, also Werthe sind, welche in Null übergehen, ohne natürlich absolut Null zu sein, das Verhältniss derselben also $\frac{dy}{dx}$ in einen endlichen bestimmten Grenzwerth übergeht, welcher im allgemeinen wieder eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen ist, wie das gegebene Beispiel zeigt.

Diese Funktion nennt man die abgeleitete oder die derivirte Funktion der ursprünglichen; man nennt sie aber auch, wie bereits bemerkt wurde, das Differentialverhältniss oder den Differentialquotienten der ursprünglich gegebenen Funktion und bezeichnet sie mit $\frac{dy}{dx}$ oder $f'(x)$.

Es lässt sich diese an einem Beispiele gezeigte Ableitung allgemein auf folgende Weise darstellen.

Ist die gegebene Gleichung

$$y = f(x),$$

und lässt man x um Δx sich ändern, so erleidet y die Veränderung Δy so dass die Gleichung übergeht in

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die ursprüngliche

$$y = f(x),$$

so erhält man

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit Δx, so kommt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

und bestimmt man nun den Grenzwerth von

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

für den Fall, dass Δx immer kleiner wird und in Null übergeht, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \text{Gr.}\ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

für ein Null übergehendes Δx; oder wenn man diesen Grenzwerth mit $f'(x)$ bezeichnet

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Hieraus folgt dann weiter

$$dy = f'(x)\, dx,$$

und hiermit ist das Differential der Funktion bestimmt.

Es ist also das Differential der Funktion ein Produkt aus dem Differentialquotienten oder der abgeleiteten Funktion und dem Differential der unabhängigen Veränderlichen.

Man schreibt die letzte Gleichung auch so

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx \text{ oder einfach } dy = \frac{dy}{dx}\, dx,$$

wobei aber die Bedeutung von $\frac{dy}{dx}$ als Grenzwerth von

$$\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

stets festzuhalten ist, wonach es sich von selbst versteht, dass der Faktor dx gegen den Divisor dx nicht gehoben werden kann.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen lassen sich die Differentiale und Differentialquotienten der verschiedenen Funktionen ableiten und bestimmen.

§. 15.

Einfache Funktionen.

1. Es sei

$$y = x,$$

so ist auch

$$y + \varDelta y = x + \varDelta x,$$

und wenn man von dieser Gleichung die ursprüngliche subtrahirt, so ergiebt sich

$$\varDelta y = \varDelta x,$$

woraus weiter folgt

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = 1.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist constant für ein ganz beliebiges $\varDelta x$, sie muss es daher auch sein, wenn $\varDelta x$ in dx übergeht. Da hierbei auch $\varDelta y$ in dy übergeht, so ist auch

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

oder

$$dy = dx.$$

Wenn daher die Funktion gleich der unabhängigen Veränderlichen ist, so ist auch jede Veränderung der ersteren gleich der Veränderung der letzteren, und folglich ist auch das Differential der Funktion gleich dem Differential der unabhängigen Veränderlichen, weil ja die Differentiale nichts weiter als unendlich kleine Veränderungen sind; der Differentialquotient aber ist gleich der Einheit, also constant.

2. Es sei

$$y = ax + b,$$

so ist

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$$
$$= ax + a\Delta x + b.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die ursprüngliche, so erhält man

$$\Delta y = a\Delta x$$

und mithin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist constant und bleibt es für jeden Werth von Δx, also auch dann, wenn Δx in dx übergeht, wodurch Δy zu dy wird. Demnach ist auch

$$\frac{dy}{dx} = a$$

so wie

$$dy = a\,dx,$$

oder wenn man für y seinen Werth setzt, so ist das Differential

$$d(ax + b) = a\,dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d(ax + b)}{dx} = a.$$

Es geht hieraus hervor, dass eine Constante, welche in der Funktion als Posten auftritt, bei der Differentiation verschwindet, und dass ein constanter Faktor der unabhängigen Veränderlichen unverändert bleibt. Es liegt dieses in der Natur der Constanten, welche eine Veränderung nicht erleiden: da nun das Differential der Funktion die unendlich kleine Veränderung ist, welche die Funktion erleidet, wenn die unabhängige Veränderliche eine unendlich kleine Veränderung erlitten hat, so muss bei der Subtraction der ursprünglichen Gleichung von der veränderten Gleichung ein constanter Posten verschwinden und ein constanter Faktor unverändert bleiben.

3. Es sei

$$y = \log x,$$

so ist

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x)$$

so wie

$$\begin{aligned}\varDelta y &= \log(x + \varDelta x) - \log x \\ &= \log \frac{x + \varDelta x}{x} \\ &= \log\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right),\end{aligned}$$

und wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{x}{\varDelta x}$ multiplicirt,

$$\begin{aligned}\varDelta y \cdot \frac{x}{\varDelta x} &= \frac{x}{\varDelta x} \log\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right) \\ &= \log\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^{\frac{x}{\varDelta x}}\end{aligned}$$

oder

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^{\frac{x}{\varDelta x}}.$$

Um den Grenzwerth der rechten Seite dieser Gleichung für ein gegen Null gehendes $\varDelta x$ zu bestimmen, haben wir zu berücksichtigen, dass wenn $\varDelta x$ gegen Null geht, auch $\frac{\varDelta x}{x}$ gegen Null geht, während dagegen $\frac{x}{\varDelta x}$ unendlich gross wird. Schreiben wir daher m für $\frac{x}{\varDelta x}$ und $\frac{1}{m}$ für $\frac{\varDelta x}{x}$, wo nun m eine Zahl ist, auf welcher die Bedingung ruht, dass sie für ein gegen Null gehendes $\varDelta x$ unendlich gross wird, so geht der Ausdruck

$$\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^{\frac{x}{\varDelta x}}$$

über in

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Wir wissen aber, dass der Grenzwerth von $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$ für ein unendlich grosses m die Zahl e, also die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Gehen wir daher bei unserer letzten Gleichung zur Grenze über, d. h. lassen wir $\varDelta x$ zu dx werden, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e$$

so wie

$$dy = \frac{1}{x} \log e \,.\, dx.$$

Setzen wir für y seinen Werth, so ist das Differential

$$d(\log x) = \frac{1}{x} \log e \, dx = \frac{dx}{x} \log e$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x} \log e.$$

Das Differential des Logarithmus einer veränderlichen Zahl wird mithin gefunden, wenn man das Differential der Zahl durch die Zahl dividirt und diesen Quotienten mit dem Logarithmus von e multiplicirt.

Ist nun weiter

$$y = l(x),$$

so ist

$$dy = \frac{1}{x} l(e) \, dx,$$

und weil

$$l(e) = 1,$$

$$dy = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Setzen wir für y seinen Werth, so ist das Differential

$$d\, l(x) = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d\, l(x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Das Differential des natürlichen Logarithmus einer veränderlichen Zahl ist daher gleich dem Differential der Zahl dividirt durch die Zahl.

4. Es sei

$$y = x^m.$$

Nehmen wir zu beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhalten wir

$$l(y) = m \,.\, l(x).$$

Es ist aber

$$d\, l(y) = \frac{dy}{y}$$

und

$$d\,m\,l(x) = m\,.\,\frac{dx}{x},$$

daher

$$\frac{dy}{y} = m\,.\,\frac{dx}{x}$$

$$dy = m\,.\,y\,\frac{dx}{x},$$

und wenn wir für y seinen Werth setzen, das Differential

$$d\,x^m = m\,.\,x^{m-1}\,d\,x$$

so wie der Differentialquotient

$$\frac{d\,x^m}{dx} = m\,.\,x^{m-1}.$$

Hiernach wird das Differential einer Potenz mit veränderlicher Grundzahl erhalten, wenn man den Exponenten um die Einheit verkleinert und die so erhaltene Potenz mit dem ursprünglichen Exponenten und dem Differential der Grundzahl multiplicirt.

5. Es sei

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

so ist nach dem soeben gefundenen Gesetze

$$dy = \tfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Setzen wir für y seinen Werth, so ist das Differential

$$d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Das Differential der Wurzel einer veränderlichen Zahl wird daher erhalten, wenn man das Differential des Radicanden durch die doppelte Wurzel dividirt.

6. Es sei

$$y = a^x$$

so erhält man, wenn man zu beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt

$$l(y) = x\,.\,l(a)$$

und wenn man auf beiden Seiten differentiirt

$$\frac{dy}{y} = dx\, l(a)$$

$$dy = y\, dx\, l(a).$$

Setzt man nun für y seinen Werth, so erhält man das Differential

$$d\, a^x = a^x\, l(a)\, dx$$

so wie den Differentialquotienten

$$\frac{d\, a^x}{dx} = a^x\, l(a).$$

Das Differential der Exponentialgrösse wird daher gefunden, wenn man die Exponentialgrösse mit dem natürlichen Logarithmus der Grundzahl multiplicirt.

Ist x negativ, so haben wir

$$y = a^{-x}$$

$$l(y) = -x\, l(a)$$

$$\frac{dy}{y} = -dx\, l(a)$$

$$dy = -y\, dx\, l(a),$$

und wenn man für y seinen Werth setzt, das Differential

$$d\, a^{-x} = -a^{-x}\, l(a)\, dx$$

und den Differentialquotienten

$$\frac{d\, a^{-x}}{dx} = -a^{-x}\, l(a).$$

Ist nun weiter

$$y = e^x,$$

so ist

$$dy = y\, dx\, l(e).$$

Setzt man für y seinen Werth und berücksichtigt, dass $l(e) = 1$ ist, so wird das Differential

$$d\, e^x = e^x\, dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d\, e^x}{dx} = e^x.$$

Es ist also hier der Differentialquotient gleich der gegebenen Funktion.

Ist x negativ, also

$$y = e^{-x},$$

so ist das Differential

$$d\, e^{-x} = - e^{-x}\, dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d\, e^{-x}}{dx} = - e^{-x}.$$

7. Es sei

$$y = \sin x,$$

so ist

$$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)$$

und

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x.$$

Wird der Ausdruck rechts nach dem bekannten trigonometrischen Satze entwickelt, so ist

$$\Delta y = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x$$

oder

$$\Delta y = (\sin x \cos \Delta x - \sin x) + \cos x \sin \Delta x.$$

Dividirt man mit Δx so kommt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x \cos \Delta x - \sin x}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Geht man zur Grenze über, so ist der Grenzwerth von $\cos \Delta x = 1$, daher der Grenzwerth des ersten Gliedes gleich Null; ferner ist der Grenzwerth von $\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$, daher der Grenzwerth des zweiten Gliedes gleich $\cos x$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$dy = \cos x\, dx.$$

Setzt man für y seinen Werth, so ist das Differential

$$d \sin x = \cos x\, dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Das Differential des Sinus einer veränderlichen Zahl wird daher erhalten, wenn man den Cosinus dieser Zahl mit dem Differential der Zahl multiplicirt.

8. Es sei

$$y = \cos x,$$

so ist

$$y + \Delta y = \cos (x + \Delta x)$$

und

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Wendet man hier den bekannten trigonometrischen Satz an, so ist

$$\Delta y = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x$$

oder

$$\Delta y = (\cos x \cos \Delta x - \cos x) - \sin x \sin \Delta x.$$

Dividirt man mit Δx, so kommt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos x \cos \Delta x - \cos x}{\Delta x} - \sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Beim Uebergange zur Grenze ist der Grenzwerth des ersten Gliedes Null; der Grenzwerth des zweiten Gliedes aber $- \sin x$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = - \sin x$$

$$dy = - \sin x \, dx.$$

Setzt man für y seinen Werth, so ist das Differential

$$d \cos x = - \sin x \, dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x.$$

Das Differential des Cosinus einer veränderlichen Zahl wird daher erhalten, wenn man den negativen Sinus dieser Zahl mit dem Differential der Zahl multiplicirt.

9. Es sei

$$y = \text{arc}(\sin = x),$$

so ist

$$x = \sin y,$$

und wenn wir auf beiden Seiten differentiiren

$$dx = \cos y \, dy,$$

hieraus folgt

$$dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

Drücken wir nun den Cosinus durch den Sinus aus, so ist

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

daher

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und wenn wir für y seinen Werth setzen, das Differential

$$d \operatorname{arc} (\sin = x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

so wie der Differentialquotient

$$\frac{d \operatorname{arc} (\sin = x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Es sei

$$y = \operatorname{arc} (\cos = x),$$

so ist

$$x = \cos y,$$

und wenn wir auf beiden Seiten differentiiren

$$dx = -\sin y \, dy,$$

hieraus folgt

$$dy = -\frac{dx}{\sin y}.$$

Drücken wir den Sinus durch den Cosinus aus, so ist

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$

daher

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und wenn wir für y seinen Werth setzen, das Differential

$$d \operatorname{arc} (\cos = x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

so wie der Differentialquotient

$$\frac{d \operatorname{arc} (\cos = x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 16.

Funktionen von Funktionen.

1. Ist z eine Funktion von y und y eine Funktion von x, und man will das Differential von z bestimmen, wenn x sich ändert, oder den Differentialquotienten von z nach x ermitteln, so hat man Folgendes. Es ist

(1) $$z = F(y); \quad y = f(x),$$

daher

(2) $$dz = F'(y) \, dy; \quad dy = f'(x) \, dx$$

oder auch

(3) $$\frac{dz}{dy} = F'(y); \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Aus den Gleichungen 2 folgt durch Substitution das Differential

$$dz = F'(y) \cdot f'(x)\, dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{dz}{dx} = F'(y) \cdot f'(x),$$

oder wenn man für $F'(y)$ und $f'(x)$ die gleichen Ausdrücke aus 3 setzt, so ist das Differential

$$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

2. Ist u eine Funktion von z, z eine Funktion von y und y eine Funktion von x, so hat man wie vorher

(1) $$u = F(z); \quad z = f(y); \quad y = \varphi(x),$$

folglich

(2) $$du = F'(z)\, dz; \quad dz = f'(y)\, dy; \quad dy = \varphi'(x)\, dx$$

oder auch

(3) $$\frac{du}{dz} = F'(z); \quad \frac{dz}{dy} = f'(y); \quad \frac{dy}{dx} = \varphi'(x).$$

Aus den Gleichungen 2 ergibt sich durch Substitution das Differential

$$du = F'(z) \cdot f'(y) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{du}{dx} = F'(z) \cdot f'(y) \cdot \varphi'(x),$$

oder wenn man für $F'(z)$; $f'(y)$ und $\varphi'(x)$ die gleichen Ausdrücke aus 3 setzt, so ist das Differential

$$du = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Beispiele.

1. Es sei

$$z = (a + bx^2)^m,$$

Setzt man

$$a + bx^2 = y,$$

so ist

$$z = y^m; \quad y = a + bx^2$$

und folglich

$$dz = my^{m-1}\,dy; \quad dy = 2bx\,dx,$$

daher durch Substitution

$$dz = my^{m-1} \,.\, 2bx\,dx,$$

und wenn man den Werth von y einsetzt, so ist das gesuchte Differential

$$dz = 2mbx\,(a + bx^2)^{m-1}\,dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{dz}{dx} = 2mbx\,(a + bx^2)^{m-1}.$$

2. Es sei

$$u = l\,(\sin\sqrt{a - x}).$$

Man setze

$$\sin\sqrt{a-x} = z; \quad \sqrt{a-x} = y,$$

so ist

$$u = l(z); \quad z = \sin y; \quad y = \sqrt{a - x}$$

und mithin

$$du = \frac{dz}{z}; \; dz = \cos y\,dy; \; dy = -\frac{dx}{2\sqrt{a-x}},$$

daher durch Substitution

$$du = \frac{1}{z} \,.\, \cos y \,.\, - \frac{dx}{2\sqrt{a-x}}.$$

Setzt man zunächst für z seinen Werth, so ist

$$du = -\frac{\cot y}{2\sqrt{a-x}}\,dx,$$

und setzt man weiter für y seinen Werth, so ist das Differential

$$du = -\frac{\cot\sqrt{a-x}}{2\sqrt{a-x}}\,dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\cot\sqrt{a-x}}{2\sqrt{a-x}}.$$

§ 17.

Zusammengesetzte Funktionen.

1. Ist

$$y = v + w,$$

und sind v und w Funktionen von x, so ist y eine aus den Funktionen v und w zusammengesetzte Funktion von x. Aendert sich x um Δx, so ändert sich v um Δv, und w um Δw so wie y um Δy, und die Gleichung wird

$$y + \Delta y = v + \Delta v + w + \Delta w.$$

Subtrahirt man die ursprüngliche Gleichung, so erhält man

$$\Delta y = \Delta v + \Delta w,$$

und wird mit Δx dividirt, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Geht man zur Grenze über, so wird hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

oder

$$dy = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dw}{dx} dx.$$

Es ist aber

$$\frac{dv}{dx} dx = dv; \quad \frac{dw}{dx} dx = dw,$$

daher

$$dy = dv + dw$$

und folglich das Differential

$$d(v + w) = dv + dw.$$

Das Differential einer Summe ist also gleich der Summe der Differentiale ihrer Posten.

2. Ist

$$y = v - w,$$

wo v und w Funktionen von x sind, so erhält man ebenso wie vorher

$$d(v - w) = dv - dw.$$

Dasselbe gilt, wenn beliebig viele Funktionen von x durch Addition und Subtraction mit einander verbunden sind.

Beispiel.

Es sei

$$y = ax^3 + l(bx) - \sin x,$$

so können wir setzen

$$a x^3 = u; \quad l\,(b x) = v; \quad \sin x = w,$$

wo nun u, v und w Funktionen von x sind. Es ist dann

$$du = 3 a x^2\, dx; \quad dv = \frac{dx}{x}; \quad dw = \cos x\, dx,$$

mithin das Differential

$$dy = \left(3 a x^2 + \frac{1}{x} - \cos x\right) dx$$

und der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = 3 a x^2 + \frac{1}{x} - \cos x.$$

3. Ist

$$y = v w,$$

und sind v und w Funktionen von x, und ändert sich x um Δx, so ändert sich v um Δv, w um Δw und y um Δy, die Gleichung aber wird

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (v + \Delta v)\,(w + \Delta w) \\ &= v w + v \Delta w + (w + \Delta w)\, \Delta v. \end{aligned}$$

Wird hiervon die ursprüngliche Gleichung subtrahirt, so erhält man

$$\Delta y = v \Delta w + (w + \Delta w)\, \Delta v$$

und wenn man mit Δx dividirt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} + (w + \Delta w)\, \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Beim Uebergange zur Grenze geht Δw in dw über, welches gegen w verschwindet, daher erhält man

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{dw}{dx} + w \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder

$$dy = v \cdot \frac{dw}{dx}\, dx + w \cdot \frac{dv}{dx}\, dx.$$

Nun ist

$$\frac{dw}{dx}\, dx = dw; \quad \frac{dv}{dx}\, dx = dv,$$

folglich

$$dy = v\, dw + w\, dv$$

oder das Differential

$$d\,(v w) = v\, dw + w\, dv.$$

Beispiel.

Es sei
$$y = (a + bx)\sqrt{a-x},$$
so können wir setzen
$$a + bx = v; \quad \sqrt{a-x} = w,$$
dann ist
$$b\,dx = dv; \quad -\frac{dx}{2\sqrt{a-x}} = dw,$$
folglich
$$dy = (a + bx) \cdot -\frac{dx}{2\sqrt{a-x}} + \sqrt{a-x} \cdot b\,dx$$
$$= \frac{2ab - a - 3bx}{2\sqrt{a-x}}\,dx.$$

4. Ist
$$y = \frac{v}{w},$$
und sind v und w Funktionen von x, so gelten dieselben Betrachtungen wie vorher, und wir erhalten
$$y + \Delta y = \frac{v + \Delta v}{w + \Delta w}.$$
Subtrahirt man von dieser Gleichung die ursprüngliche, so ist
$$\Delta y = \frac{v + \Delta v}{w + \Delta w} - \frac{v}{w}$$
$$= \frac{vw + w\Delta v - vw - v\Delta w}{(w + \Delta w)\,w}$$
$$= \frac{w\Delta v - v\Delta w}{(w + \Delta w)\,w};$$
dividirt man mit Δx, so kommt
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{w\,\frac{\Delta v}{\Delta x} - v\,\frac{\Delta w}{\Delta x}}{(w + \Delta w)\,w}.$$
Beim Uebergange zur Grenze wird im Nenner Δw zu dw, welches gegen w verschwindet; daher ergibt sich
$$\frac{dy}{dx} = \frac{w\,\frac{dv}{dx} - v\,\frac{dw}{dx}}{w^2}$$
oder
$$dy = \frac{w\,\frac{dv}{dx}\,dx - v\,\frac{dw}{dx}\,dx}{w^2},$$

und weil

$$\frac{dv}{dx}\,dx = dv; \quad \frac{dw}{dx}\,dx = dw,$$

so ist

$$dy = \frac{w\,dv - v\,dw}{w^2},$$

mithin das Differential

$$d\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{w\,dv - v\,dw}{w^2}.$$

Beispiel.

Es sei

$$y = \frac{x^3 - a}{x^4},$$

so können wir setzen

$$x^3 - a = v; \quad x^4 = w,$$

dann ist

$$3x^2\,dx = dv; \quad 4x^3\,dx = dw$$

und folglich

$$dy = \frac{x^4 \,.\, 3x^2\,dx - (x^3 - a) \,.\, 4x^3\,dx}{x^8}$$

$$= \frac{4a - x^3}{x^5}\,dx.$$

5. Ist

$$y = \tan x,$$

so ist

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Setzen wir nun

$$\sin x = v; \quad \cos x = w,$$

so ist

$$\cos x\,dx = dv; \quad -\sin x\,dx = dw,$$

daher

$$dy = \frac{\cos x \,.\, \cos x\,dx + \sin x \sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\,dx,$$

mithin das Differential

$$d\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. Ist

$$y = \cot x,$$

so ist

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Setzen wir nun

$$\cos x = v; \quad \sin x = w,$$

so ist

$$-\sin x\, dx = dv; \quad \cos x\, dx = dw,$$

daher

$$dy = \frac{-\sin^2 x\, dx - \cos^2 x\, dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx,$$

mithin das Differential

$$d \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. Ist

$$y = \operatorname{arc}(\tan = x),$$

so ist

$$x = \tan y,$$

daher

$$dx = \frac{1}{\cos^2 y}\, dy$$

und

$$dy = \cos^2 y\, dx.$$

Drücken wir den Cosinus durch die Tangente aus, so ist

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

daher

$$dy = \frac{1}{1 + x^2}\, dx,$$

mithin das Differential

$$d \operatorname{arc}(\tan = x) = \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{dx}{1 + x^2}$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d \operatorname{arc}(\tan = x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

8. Ist

$$y = \text{arc}\,(\cot = x),$$

so ist

$$x = \cot y,$$

daher

$$dx = -\frac{1}{\sin^2 y}\,dy$$

und

$$dy = -\sin^2 y\,dx.$$

Drücken wir den Sinus durch die Cotangente aus, so ist

$$\sin^2 y = \frac{1}{1+\cot^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

daher

$$dy = -\frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

mithin das Differential

$$d\,\text{arc}\,(\cot = x) = -\frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{dx}{1+x^2}$$

und der Differentialquotient

$$\frac{d\,\text{arc}\,(\cot = x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

9. Ist

$$y = u^z,$$

wo u und z Funktionen von x sind, und nimmt man zu beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$l(y) = z\,l(u),$$

wird nun auf beiden Seiten differentiirt, so kommt

$$\frac{dy}{y} = z\,\frac{du}{u} + l(u)\,dz,$$

also

$$dy = y\left(z\,\frac{du}{u} + l(u)\,dz\right),$$

und wenn wir für y seinen Werth setzen, so ist das Differential

$$du^z = u^z\left(\frac{z}{u}\,du + l(u)\,dz\right).$$

Beispiel.

Es sei

$$y = (a + bx)^{mx},$$

so können wir setzen

$$a + bx = u; \quad mx = z,$$

dann ist

$$b\,dx = du; \quad m\,dx = dz,$$

mithin

$$dy = (a + bx)^{mx} \left[\frac{mx}{a + bx}\, b\,dx + l\,(a + bx)\, m\,dx\right]$$

$$= m\,(a + bx)^{mx} \left[\frac{bx}{a + bx} + l(a + bx)\right] dx.$$

§ 18.

Geometrische Bedeutung der Differentiale und des Differentialquotienten.

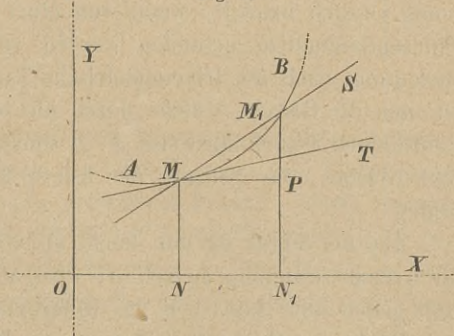
Wir haben früher gesehen, welche geometrische Bedeutung eine Funktion hat, und wie diejenigen Beziehungen, welche zwischen einer Funktion und ihrer unabhängigen Veränderlichen so wie den Constanten bestehen, sich geometrisch darstellen lassen. Wir können nun aber auch den ganzen Hergang, durch welchen aus einer gegebenen Funktion der Differentialquotient abgeleitet wird, geometrisch darstellen und sowol die geometrische Bedeutung der Differentiale und des Differentialquotienten, als auch die Bedeutung, welche der Differentialquotient für die Art der Veränderung der Funktionen im allgemeinen hat, kennen lernen.

Zu diesem Zwecke sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer ebenen Kurve AB, Figur 24, ferner sei $ON = x$ irgend ein Werth der unabhängigen Veränderlichen x und MN der diesem entsprechende Werth von y oder $f(x)$, sowie M derjenige Kurvenpunkt, welcher durch diese Werthe von x und y bestimmt wird, so dass also ON und MN die Coordinaten des Punktes M sind. Es sei weiter

Fig. 24.



$NN_1 = \Delta x$ die von diesem Punkte ausgehende Veränderung von x und M_1N_1 der hierdurch veränderte Werth der Funktion, also

$y + \varDelta y$ oder $f(x + \varDelta x)$, und M_1 derjenige Kurvenpunkt, welcher den veränderten Coordinaten $ON_1 = x + \varDelta x$ und $M_1 N_1 = y + \varDelta y$ entspricht.

Macht man MP parallel zur Abscissenaxe OX, so ist

$$MP = NN_1 = \varDelta x \text{ und } PN_1 = MN = y;$$

daher $M_1 P = \varDelta y = f(x + \varDelta x) - f(x)$, so wie

$$\frac{M_1 P}{MP} = \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber derjenige Ausdruck, um dessen Grenzbestimmung es sich handelt, wenn aus einer gegebenen Funktion der Differentialquotient abgeleitet werden soll.

Es ist nun

$$\frac{M_1 P}{MP} = \tan M_1 MP,$$

das ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die durch die Punkte M und M_1 gelegte Secante SM mit der Abscissenaxe bildet. Hiernach ist aber auch der Differenzenquotient $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ oder der ihm gleiche Ausdruck

$$\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

gleich der trigonometrischen Tangente dieses Winkels oder

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \tan M_1 MP.$$

Es folgt hieraus, dass der Werth, um dessen Grenzbestimmung es sich handelt, wenn von einer gegebenen Funktion der Differentialquotient gefunden werden soll, seiner geometrischen Bedeutung nach die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ist, den die Gerade, welche durch die beiden Punkte geht, deren Coordinaten beziehungsweise x, y und $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$ sind, und welches eine Secante der Kurve ist, mit der Abscissenaxe bildet.

Aus der Figur ist nun leicht ersichtlich, was vorgeht, wenn die Grenzbestimmung ausgeführt wird, d. h. wenn wir $\varDelta x$ gegen Null gehen oder besser in das Differential dx übergehen lassen.

Rückt der Punkt N_1 näher an den Punkt N, so rücken auch die Punkte M_1 und P näher an den Punkt M, indem der Punkt P auf der Geraden MP und der Punkt M_1 auf der Kurve AB sich bewegt, so dass, wenn der Punkt N_1 dem Punkte N unendlich nahe liegt, so nahe, dass er der nächstfolgende Punkt in der Abscissenaxe ist, auch die Punkte M_1 und P dem Punkte M in derselben Weise unendlich nahe liegen, und M_1P oder Δy ebenfalls gegen Null oder vielmehr in das Differential dy übergeht.

Fielen die Punkte N_1 und N in einen einzigen Punkt zusammen, so wäre der absolute Werth Null erreicht; allein die Differentiale sollen nicht absolut Null sein, sondern sich nur dem Werthe Null über alle Grenzen nähern, so dass sie kleiner sind als jeder noch so kleine angebbare endliche Werth, und dass sie also jedem endlichen Werthe gegenüber als verschwindend klein oder als Null angesehen werden können.

Hiernach ist die geometrische Bedeutung des Differentials der Abstand zweier unmittelbar aufeinander folgenden Punkte in einer Linie; denn dieser Abstand lässt sich absolut nicht mehr angeben, er ist daher kleiner als jeder noch so kleine angebbare endliche Werth; er ist eben unendlich klein und entspricht dem Begriffe der stetigen Veränderung.

Wenn nun aber der Punkt M_1 dem Punkte M unendlich nahe gekommen ist, so ist die durch M und M_1 gehende Secante in die dem Punkte M zugehörige Tangente übergegangen, also in diejenige Gerade, welche die Richtung der Kurve im Punkte M charakterisirt, indem sie die beiden unendlich nahe liegenden Punkte M und M_1 mit der Kurve gemein hat.

Wenn also der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

in den Grenzwerth

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

das ist in den Differentialquotienten übergeht, so bedeutet dieses geometrisch, dass die durch die beiden durch ihre Coordinaten x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ gegebenen Punkte gelegte Secante in die im Punkte x, y an die Kurve gelegte Tangente, und der Winkel, den die Secante mit der Abscissenaxe einschliesst, in den Winkel, den die Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst, übergeht.

Da nun der Differenzenquotient die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ist, den die Secante mit der Abscissenaxe macht, so ist der Differentialquotient oder die derivirte Funktion die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die Tangente mit der Abscissenaxe macht, oder auch die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die Kurvenrichtung an derjenigen Stelle, auf welche die Differentiation sich bezieht, und welche durch den jedesmaligen Werth von x bestimmt wird, mit der Abscissenaxe bildet.

Der Differentialqnotient bestimmt daher die Richtung der Kurve an derjenigen Stelle, auf welche die Differentiation sich bezieht. Legen wir also dem x specielle Werthe bei, so gibt der Differentialquotient die Richtung an, welche die Kurve in den, diesen speciellen Werthen von x entsprechenden, Punkten hat.

Wenn x und y die Coordinaten desjenigen Punktes der Kurve sind, auf welchen die Differentiation sich bezieht, so sind $x + dx$ und $y + dy$ die Coordinaten desjenigen Punktes der Kurve, welcher unmittelbar darauf folgt, und es ist dx die unendlich kleine Differenz beider Abscissen, dy die unendlich kleine Differenz beider Ordinaten. dx kann immer als positiv vorausgesetzt werden; ist nun dy positiv, so ist die folgende Ordinate grösser als die vorhergehende, und ist dy negativ, so ist die folgende Ordinate kleiner als die vorhergehende. Im ersten Falle steigt daher die Kurve von der Abscissenaxe aus gerechnet, im zweiten Falle fällt sie. Es ist aber dy positiv oder negativ, jenachdem $\frac{dy}{dx}$ oder $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Daher können wir sagen, dass die Kurve in demjenigen Punkte, auf welchen die Differentiation sich bezieht, steigt oder fällt, jenachdem der Differentialquotient positiv oder negativ ist. Hieraus folgt aber unmittelbar weiter, dass die Kurve weder steigt noch fällt, dass sie also parallel mit der Abscissenaxe sein muss, wenn der Differentialquotient und mithin auch dy Null ist. Einen solchen Punkt nennt man einen Culminationspunkt der Kurve.

Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ drückt aber auch das Verhältniss der unendlich kleinen Veränderung der Ordinate zur unendlich kleinen Veränderung der Abscisse aus, und es ist mithin die Ordinatenveränderung um so grösser oder kleiner, je grösser oder kleiner dieses Verhältniss oder der Differentialquotient ist. Hiernach ist der Differentialquotient auch der Ausdruck für den Grad der Veränderung der Ordinate oder für die Grösse der Geschwindigkeit, mit welcher die Ordinate an derjenigen Stelle der Kurve sich ändert, auf welche die Differentiation sich bezieht.

Es ist aber hiermit zugleich die Bedeutung gefunden, welche der Differentialquotient für die Art der Veränderung einer Funktion im Allgemeinen hat; denn er gibt nicht nur an, ob die Funktion an derjenigen Stelle, auf welche die Differentiation sich bezieht, wächst oder abnimmt, sondern er ist auch gleichzeitig das Maass für die Geschwindigkeit, mit welcher der Werth der Funktion an der fraglichen Stelle sich ändert. Da man nun die Differentiaton auf jede Stelle der Kurve oder der Funktion beziehen kann, also auf jeden Werth, den x anzunehmen im Stande ist, so erhält man durch den Differentialquotienten ein vollständiges Urtheil darüber, wie die Veränderung der Funktion im Allgemeinen stattfindet.

III. Abschnitt.

Die Methode der Tangenten.

§ 19.

Allgemeines Verfahren.

Ist

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer Kurve AB, Figur 25, und M ein Punkt dieser Kurve, welcher durch seine Coordinaten

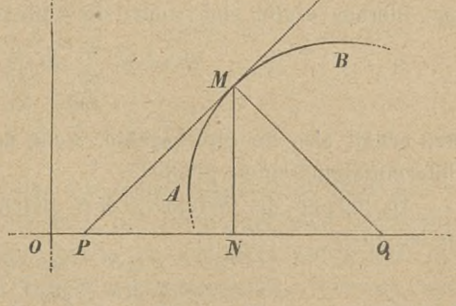
$$ON = x$$

und

$$MN = y$$

bestimmt ist, und man legt durch diesen Punkt eine Tangente an die Kurve und errichtet im Punkte M eine Senkrechte oder Normale auf die Tangente, so heisst das Stück der Tangente, vom Berührungspunkte bis zum Durchschnitte mit der Abscissenaxe, also MP, die Tangente; das Stück der Normalen, vom Berührungs-

Fig. 25.



punkte bis zum Durchschnitte mit der Abscissenaxe, also MQ, die Normale; das Stück der Abscissenaxe, vom Durchschnitte der Tangente bis zum Fusspunkte der Ordinate, also PN, die Subtangente; und das Stück der Abscissenaxe, vom Durchschnitte der Normalen bis zum Fusspunkte der Ordinate, also QN, die Subnormale des Kurvenpunktes M.

Es ist leicht einzusehen, dass diese vier Linien von der Lage des Punktes M abhängen, so dass sie sich ändern, wenn die Lage des Punktes M sich ändert, oder dass einem jeden Kurvenpunkte auch eine bestimmte Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale entsprechen muss; sowie dass diese vier Linien bestimmt sein müssen, wenn die Lage des Berührungspunktes bestimmt ist, wenn also die Coordinaten dieses Punktes gegeben sind.

Die Bestimmung dieser vier Linien, nach Grösse und Richtung für einen gegebenen Punkt der Kurve wird die Methode der Tangenten genannt.

Zunächst ist

$$\frac{MN}{PN} = \tan MPN;$$

es ist aber MPN derjenige Winkel, den die Curvenrichtung im Punkte M mit der Abscissenaxe macht; daher ist

$$\tan MPN = \frac{dy}{dx},$$

und weil $MN = y$, so ist, wenn wir die Subtangente PN mit S_t bezeichnen

$$\frac{y}{S_t} = \frac{dy}{dx},$$

und hieraus ergibt sich sofort die Subtangente

$$S_t = y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Man erhält also die Subtangente, wenn man die Ordinate mit dem Differentialquotienten dividirt.

Da ferner der Winkel QMN gleich ist dem Winkel MPN, so ist auch

$$\frac{QN}{MN} = \frac{dy}{dx},$$

und wenn wir die Subnormale QN mit S_n bezeichnen, so ist also

$$\frac{S_n}{y} = \frac{dy}{dx},$$

und hieraus ergibt sich die Subnormale

$$S_n = y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Man erhält also die Subnormale, wenn man die Ordinate mit dem Differentialquotienten multiplicirt.

Nachdem nun so die Subtangente und Subnormale bestimmt sind, ist es leicht auch die Tangente und Normale zu bestimmen. Bezeichnen wir die Tangente PM mit T, so folgt aus dem Dreiecke PMN sofort

$$T = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{PN}^2};$$

es ist aber

$$MN = y; \quad PN = y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

daher

$$T = \sqrt{y^2 + y^2 \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$= y \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Ebenso ergibt sich, wenn man die Normale mit N bezeichnet, aus dem Dreiecke MNQ

$$N = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{QN}^2},$$

und weil

$$MN = y; \; QN = y \cdot \frac{dy}{dx},$$

so ist

$$N = \sqrt{y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Bestimmt man daher aus der gebenen Gleichung einer Kurve den Differentialquotienten, so kann für jeden speciellen Werth von x, sofern dieser überhaupt einem Curvenpunkte entspricht, die diesem Punkte zugehörige Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale bestimmt werden.

Um noch die Gleichungen für die Tangente und Normale aufzustellen haben wir zu berücksichtigen, dass dieses gerade

Linien sind, welche durch einen gegebenen Punkt, den Berührungspunkt, geben. Bezeichnen wir daher die Coordinaten des Berührungspunktes, welche also gegeben sein müssen, mit x_1 und y_1, so ist die Gleichung einer durch den Berührungspunkt gehenden Geraden

$$y - y_1 = a\,(x - x_1).$$

Solcher Geraden gibt es natürlich unendlich viele, so lange der Werth von a kein bestimmter ist, so lange also die Tangente desjenigen Winkels, den die Gerade mit der positiven Richtung der Abscissenaxe macht, nicht gegeben ist. Wenn aber die Gerade eine Tangente der Kurve im Punkte $x_1\ y_1$ sein soll, so muss die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den sie mit der Abscissenaxe macht, gleich dem Differentialquotienten für den Berührungspunkt sein. Dieser Differentialquotient ist aber $\frac{dy_1}{dx_1}$. Führen wir also diesen Werth für a in die obige Gleichung der durch den Punkt $x_1\ y_1$ gehenden Geraden ein, so erhalten wir die Gleichung der Tangente, nämlich

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}\,(x - x_1).$$

Um ferner die Gleichung für die Normale zu bekommen, haben wir zu berücksichtigen, dass sie im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht, und dass also für sie sein muss

$$a = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Setzen wir diesen Werth für a in die Gleichung der durch den Punkt $x_1\ y_1$ gehenden Geraden ein, so erhalten wir die Gleichung der Normalen, nämlich

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\,(x - x_1).$$

§ 20.

Der Kreis.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist

$$y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

daher ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Für $x = 0$ wird $y = \pm r$ und $\frac{dy}{dx} = 0$; die Tangente ist daher in diesen beiden Punkten parallel zur Abscissenaxe, und beide Punkte sind Culminationspunkte der Kurve.

Für $x = \pm r$ wird $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \infty$. Die Tangente steht daher in diesen beiden Punkten auf der Abscissenaxe senkrecht.

Für jedes positive x kleiner als r ist $\frac{dy}{dx}$ negativ, daher fällt die Kurve, und der Winkel, den die Tangente mit der Abscissenaxe macht, ist ein stumpfer; für jedes negative x kleiner als r ist $\frac{dy}{dx}$ positiv, daher steigt die Kurve und der Winkel, den die Tangente mit der Abscissenaxe macht, ist ein ein spitzer.

Dieses gilt von dem über der Abscissenaxe liegenden Theil der Kurve, für den unter der Abscissenaxe liegenden Theil der Kurve findet überall das Umgekehrte statt.

Für die Subtangente haben wir nun

$$S_t = y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = y \cdot - \frac{y}{x} = - \frac{y^2}{x}.$$

Ist $x = 0$, so wird die Subtangente unendlich; es liegt also der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenaxe im Unendlichen, was nur der Fall sein kann, wenn die Tangente mit der Abscissenaxe parallel ist.

Ist $x = \pm r$, so ist $y = 0$, daher die Subtangente Null; es fällt also der Durchschnittspunkt der Tangente mit dem Fusspunkte der Ordinate zusammen; daher steht in diesen beiden Punkten die Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht.

Für jedes positive x kleiner als r ist die Subtangente negativ, und für jedes negative x kleiner als r ist die Subtangente positiv.

Aus der Gleichung

$$S_t = \frac{y^2}{x}$$

folgt die Proportion

$$\frac{S_t}{y} = \frac{y}{x};$$

daher ist die Ordinate die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und der Abscisse.

Für die Subnormale haben wir

$$S_n = y\,\frac{dy}{dx} = y \cdot -\frac{x}{y} = -x$$

die Subnormale ist daher immer gleich und entgegengesetzt der Abscisse.

Für die Tangente haben wir

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}\,r.$$

Ist $x = 0$, so ist die Tangente unendlich, sie ist daher mit der Abscissenaxe parallel.

Ist $x = \pm r$, so ist $y = 0$, daher die Tangente Null. Der Berührungspunkt liegt in der Abscissenaxe und fällt mit dem Punkte, in welchem die Tangente die Abscissenaxe schneidet, zusammen.

Bilden wir die Proportion

$$\frac{T}{r} = \frac{y}{x},$$

so heisst dieses, die Tangente verhält sich zum Halbmesser, wie die Ordinate zur Abscisse.

Für die Normale endlich haben wir

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = r.$$

Die Normale ist daher immer gleich dem Halbmesser, also constant.

Es geht hieraus hervor, dass die Tangente auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht steht.

Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

oder wenn mit y_1 multiplicirt und die Klammer aufgelöst wird,

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2,$$

und weil

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

$$yy_1 + xx_1 = r^2.$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe zu bekommen, $y = 0$ so wird

$$x = \frac{r^2}{x_1};$$

dieses gibt aber die Proportion

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{x_1},$$

und es ist also der Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des Durchschnittspunktes und der Abscisse des Berührungspunktes der Tangente.

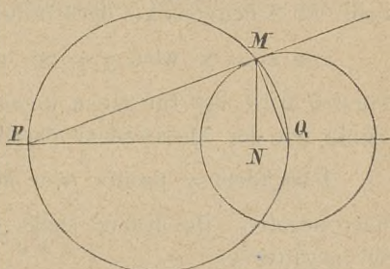
Die Gleichung der Normalen ist

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1).$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normalen mit der Abscissenaxe zu bekommen, $y = 0$, so wird auch $x = 0$. Der Durchschnittspunkt der Normalen fällt also mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, also mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen, was auch schon daraus folgt, dass die Normale immer gleich dem Halbmesser ist.

Soll an einen Kreis eine Tangente gezogen werden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, so zieht man nach dem Berührungspunkte einen Halbmesser, und errichtet auf diesem im Berührungspunkte eine Senkrechte, so ist dieses die verlangte Tangente; denn es ist diejenige Gerade, welche im Berührungspunkte auf der Normalen senkrecht steht.

Fig. 26.



Soll von einem Punkte P, Figur 26, welcher ausserhalb des Kreises liegt, eine Tangente an den Kreis construirt werden, so kann man stets durch diesen Punkt die Abscissenaxe legen, und dann ist der Abstand PQ des Punktes P vom Mittelpunkte des Kreises die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe. Da nun der Halbmesser des Kreises die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des Durchschnittspunktes und der Abscisse des Berührungspunktes ist, so liegt der Berührungspunkt in der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Abscisse des Durchschnittspunktes, und dessen eine Kathete der Halbmesser ist. Beschreibt man daher über der Abscisse des Durchschnittspunktes einen Kreis, so schneidet dieser den gegebenen Kreis im gesuchten Berührungspunkte, denn es ist

$$PQ \cdot QN = \overline{QM}^2;$$

da aber die beiden Kreise sich in zwei Punkten schneiden, so geht hieraus hervor, dass man von einem jeden ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte zwei Tangenten an den Kreis construiren kann.

§ 21.

Die Parabel.

Die Scheitelgleichung der Parabel ist

$$y = \sqrt{2px};$$

daher ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \infty$; die Tangente steht daher im Scheitelpunkte der Parabel auf der Abscissenaxe senkrecht.

Für $x = \infty$ wird $y = \infty$, und $\frac{dy}{dx} = 0$. Die Tangente der Parabel wird also für einen in unendlicher Entfernung liegenden Punkt mit der Abscissenaxe parallel.

Jenachdem y positiv oder negativ ist, ist auch $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ. Die Kurve steigt daher für positive y und fällt für negative y.

Wir haben nun für die Subtangente

$$S_t = y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = y \cdot \frac{y}{p} = \frac{y^2}{p};$$

aber aus der Gleichung

$$S_t = \frac{y^2}{p}$$

folgt die Proportion

$$\frac{S_t}{y} = \frac{y}{p},$$

und es ist daher die Ordinate die mittlere Proportionale zwischen der Subtangente und dem halben Parameter.

Setzt man $\sqrt{2px}$ für y, so ist

$$S_t = \frac{2px}{p} = 2x;$$

die Subtangente ist daher stets gleich der doppelten Abscisse, und es wird also die Subtangente vom Scheitel der Parabel halbirt. Ferner haben alle Parabeln, welche die Axe und den Scheitel gemein haben, für gleiche Abscissen auch gleiche Subtangenten.

Beschreibt man daher über derselben Axe mehrere Parabeln, welche den Scheitel mit einander gemein haben, so fallen die zu derselben Abscisse gehörigen Ordinaten in eine und dieselbe Gerade hinein. Legt man nun an diejenigen Punkte, in welchen die Parabeln von der Ordinate geschnitten werden, Tangenten, so treffen diese alle in demselben Punkte der Abscissenaxe zusammen.

Für die Subnormale ist

$$S_n = y.\frac{dy}{dx} = y.\frac{p}{y} = p.$$

Die Subnormale ist also constant und immer gleich dem halben Parameter.

Für die Tangente ist

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}$$

$$= \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

Setzt man dagegen $\sqrt{2px}$ für y, so ist

$$T = \sqrt{(2p + 4x)x}.$$

Für $x = 0$ wird die Tangente Null; der Berührungspunkt und der Durchschnittspunkt der Axe fallen also mit dem Scheitel zusammen.

Für die Normale ist

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{p^2 + y^2},$$

und wenn man $\sqrt{2px}$ für y setzt, so ist

$$N = \sqrt{(p + 2x)p}.$$

Ist $x = 0$, so ist $N = p$, also die Normale gleich dem halben Parameter und auch gleich der Subnormalen.

Aus den Gleichungen,

$$T = \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + y^2} \text{ und } N = \sqrt{p^2 + y^2}$$

folgt die Proportion

$$\frac{T}{N} = \frac{y}{p};$$

die Tangente verhält sich also zur Normalen wie die Ordinate zum halben Parameter.

Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

oder

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1;$$

es ist aber

$$y_1^2 = 2px_1,$$

daher

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes zu bekommen, $y = 0$, so wird

$$x = -x_1;$$

die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe ist demnach gleich und entgegengesetzt der Abscisse des Berührungspunktes.

Die Gleichung der Normalen ist

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

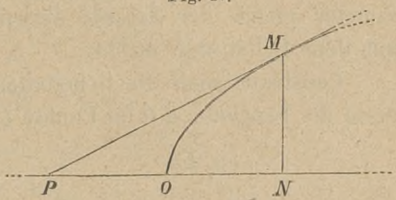
Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes zu bekommen, $y = 0$, so ist

$$x = x_1 + p,$$

die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normalen mit der Abscissenaxe ist gleich der Summe aus der Abscisse des Berührungspunktes und dem halben Parameter.

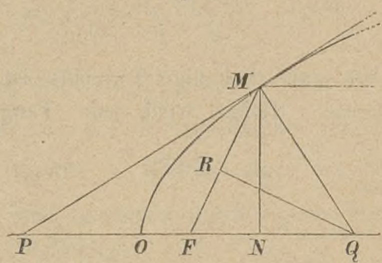
Soll an eine Parabel eine Tangente gezogen werden, wenn der Berührungspunkt M gegeben ist, Figur 27, so construire man zuerst die Ordinate MN und mache hierauf $OP = ON = x$, so ist $PN = 2x$, also die Subtangente. Zieht man nun die Gerade PM, so ist dieses die verlangte Tangente.

Fig. 27.



Zieht man, nachdem die Tangente construirt ist, den Radius vector FM, Figur 28, so ist dieser gleich $x + \frac{1}{2}p$; es ist aber $OP = x$ und $OF = \frac{1}{2}p$, daher ist auch $PF = x + \frac{1}{2}p$; mithin ist $PF = FM$ und das Dreieck PFM gleichschenkelig. Hieraus folgt weiter, dass der Winkel FPM gleich dem Winkel FMP ist. Es ist also der Winkel, den der nach dem Berührungspunkte gezogene Radius vector mit der Tangente macht, gleich dem Winkel, den die Tangente mit der Abscissenaxe macht.

Fig. 28.



Zieht man durch den Berührungspunkt eine Parallele zur Abscissenaxe, so ist der Winkel, den diese Parallele mit der Tangente macht, auch gleich dem Winkel, den der Radius vector mit der Tangente macht. Construirt man endlich die Normale, so sind auch die Winkel gleich, welche die Normale mit dem Radius vector und mit der Parallelen zur Abscissenaxe macht, und ebenso sind die Winkel einander gleich, welche die Normale mit der Axe und mit dem Radius vector macht. Zieht man daher QR senkrecht auf FM, so sind die Dreiecke MNQ und RQM congruent, also ist auch

$$MR = NQ.$$

Hieraus ergiebt sich aber Folgendes:

Wenn man vom Fusspunkte der Normalen eine Senkrechte auf den nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahl zieht, so schneidet diese vom Berührungspunkte aus ein Stück ab, welches gleich dem halben Parameter ist. Bezeichnet man den Winkel, den die Normale mit dem Leitstrahle macht, mit γ, so ist

$$\frac{N}{p} = \sec \gamma.$$

Es ist also der Quotient aus der Normalen und dem halben Parameter gleich der Secante desjenigen Winkels, den die Normale mit dem Leitstrahle macht.

Construirt man die Scheiteltangente, Figur 29, so schneidet diese die Tangente MP im Punkte Q. Da nun die Scheiteltangente mit der Ordinate parallel und $PO = ON$ ist, so ist auch $PQ = QM$, und folglich wird die Tangente MP von der Scheiteltangente halbirt. Zieht man endlich vom Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte Q eine Gerade, so steht diese auf der Tangente MP senkrecht. Weil aber MP eine ganz beliebige Tangente ist, so gilt dieses von jeder Tangente. Daher wird jede Tangente von der Scheiteltangente halbirt, und der Fusspunkt der vom Brennpunkte auf die Tangente gezogenen Senkrechten liegt in der Scheiteltangente.

Fig. 29.

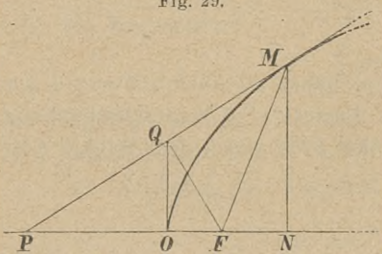
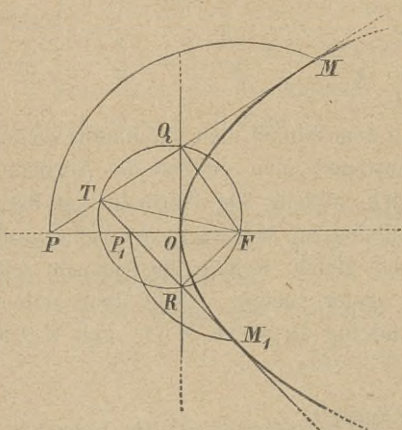


Fig. 30.



Wenn von einem ausserhalb einer Parabel liegenden Punkte T, Figur 30, eine Tangente an die Parabel gezogen werden soll, so verbinde man den Punkt T mit dem Brennpunkte F, construire die Scheiteltangente und beschreibe über TF als Durchmesser einen Kreis. Dieser Kreis schneidet die Scheiteltangente in den Punkten Q und R. Legt man nun von T aus durch Q und R Gerade, so sind dieses Tangenten an die Parabel. Denn zieht man FQ und FR, so sind TQF und TRF rechte Winkel. Die Berührungspunkte M und M_1 dieser Tangenten endlich findet man, wenn man von F aus mit FP und FP_1 Kreisbögen beschreibt.

§ 22.

Die Ellipse.

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

daher ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Für $x = 0$ wird $y = \pm b$, und $\frac{dy}{dx} = 0$; in den Endpunkten der kleinen Axe ist daher die Tangente mit der Abscissenaxe parallel, und die Kurve hat an diesen Stellen Culminationspunkte.

Für $x = \pm a$ wird $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \infty$; in den Endpunkten der grossen Axe steht daher die Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht.

Für jedes positive x kleiner als a ist $\frac{dy}{dx}$ negativ; daher fällt die Kurve, und es macht die Tangente mit der Abscissenaxe einen stumpfen Winkel; für jedes negative x kleiner als a ist $\frac{dy}{dx}$ positiv, daher steigt die Kurve, und es macht die Tangente mit der Abscissenaxe einen spitzen Winkel.

Dieses gilt von der über der Abscissenaxe liegenden Hälfte der Kurve; für die unter der Abscissenaxe liegende Hälfte der Kurve findet überall das Gegentheil statt.

Es ist nun die Subtangente

$$S_t = y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = y \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x},$$

und wenn man für y seinen Werth setzt

$$S_t = \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Die Subtangente ist demnach nur von der grossen Axe und der Abscisse abhängig; daher haben alle Ellipsen, welche dieselbe grosse Axe besitzen, für gleiche Abscissen auch gleiche Subtangenten.

Beschreibt man über derselben grossen Axe mehrere Ellipsen, deren kleine Axen verschieden sind, so fallen die zu derselben

Abscisse gehörigen Ordinaten in eine und dieselbe Gerade hinein; legt man nun an diejenigen Punkte, in welchen die Ellipsen von der Ordinate geschnitten werden, Tangenten, so treffen diese alle in demselben Punkte der Abscissenaxe zusammen.

Für $x = 0$ wird die Subtangente unendlich, für $x = \pm a$ wird die Subtangente Null.

Ferner ist die Subnormale

$$S_n = y \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2}x.$$

Die Subnormale ist daher der Abscisse stets proportional, und für positive x negativ, für negative x positiv.

Für $x = 0$ ist die Subnormale Null, und für $x = \pm a$ ist die Subnormale gleich $\frac{b^2}{a}$. also gleich dem halben Parameter p.

Weiter ist die Tangente

$$T = y \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{ax} \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2},$$

oder wenn man e einführt, und e^2 für $a^2 - b^2$ setzt, so ist

$$T = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{ax} \sqrt{a^4 - e^2 x^2}.$$

Für $x = 0$ wird die Tangente unendlich, also mit der Abscissenaxe parallel, und für $x = \pm a$ wird die Tangente Null.

Endlich ist die Normale

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)\,x^2},$$

oder wenn man e einführt

$$N = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2 x^2}.$$

Für $x = 0$ wird $N = b$, also die Normale gleich der halben kleinen Axe, und für $x = \pm a$ wird $N = \frac{b^2}{a}$, also gleich dem halben Parameter p; für diese Punkte sind also Normale und Subnormale einander gleich.

Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

oder umgestaltet

$$a^2 y y_1 - a^2 y_1{}^2 = -b^2 x x_1 + b^2 x_1{}^2,$$

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2;$$

es ist aber zufolge der Gleichung der Ellipse

$$a^2 y_1{}^2 + b^2 x_1{}^2 = a^2 b^2,$$

daher wird die Gleichung

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2$$

oder

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe zu bekommen, $y = 0$, so folgt

$$x = \frac{a^2}{x_1}.$$

Hieraus ergibt sich die Proportion

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x_1},$$

und es ist mithin die halbe grosse Axe der Ellipse die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des Durchschnittspunktes und der Abscisse des Berührungspunktes.

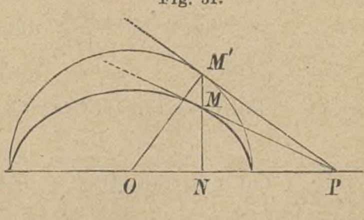
Die Gleichung der Normalen ist

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normalen mit der Abscissenaxe zu bekommen, $y = 0$, so ist

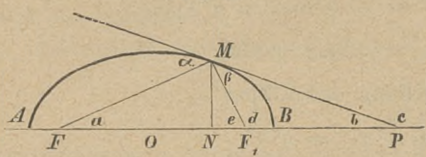
$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1.$$

Fig. 31.



Soll an eine Ellipse eine Tangente gezogen werden, wenn der Berührungspunkt M gegeben ist, Figur 31, so haben wir zu berücksichtigen, dass alle Ellipsen, welche dieselbe grosse Axe besitzen, für gleiche Abscissen auch gleiche Subtangenten haben, und dass die Tangenten, deren Berührungspunkte in derselben Ordinate liegen, in demselben Punkte der Abscissenaxe zusammentreffen. Da nun der Kreis als ein specieller Fall von der Ellipse angesehen werden kann, so gilt dieses auch von einem Kreise und einer Ellipse, wenn der Durchmesser des Kreises gleich der grossen Axe der Ellipse ist.

Fig. 32.



Man beschreibe daher über der grossen Axe der gegebenen Ellipse einen Halbkreis, verlängere die Ordinate des Berührungspunktes M bis zum Durchschnitte M' mit dem Kreise, lege in M' eine Tangente an den Kreis und verbinde den Durchschnittspunkt P derselben mit der Abscissenaxe, mit dem Berührungspunkte M der Ellipse, so ist dieses die verlangte Tangente.

Wenn man in einer Ellipse nach dem Berührungspunkte M, Figur 32, die Leitstrahlen FM und F_1M zieht, so schliessen diese mit der Tangente die Winkel α und β ein. Es ist nun

$$\alpha = a + b; \ \beta = c - d,$$

daher auch

$$\tan \alpha = \tan (a + b); \quad \tan \beta = \tan (c - d).$$

Weiter ist,

$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b},$$

$$\tan (c - d) = \frac{\tan c - \tan d}{1 + \tan c . \tan d}.$$

Nun ist aber nach der Figur

$$\tan a = \frac{y}{e + x}, \ \tan b = \frac{y}{S_t} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$\tan c = \tan (180^0 - b) = - \tan b = - \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$\tan d = \tan (180^0 - e) = - \tan e = - \frac{y}{e - x}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{e+x} + \frac{b^2 x}{a^2 y}}{1 - \frac{y}{e+x} \cdot \frac{b^2 x}{a^2 y}}$$

$$= \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 + b^2 e x}{a^2 e y + (a^2 - b^2) x y}$$

$$= \frac{a^2 b^2 + b^2 e x}{a^2 e y + e^2 x y}$$

$$= \frac{b^2 (a^2 + e x)}{e y (a^2 + e x)}$$

$$= \frac{b^2}{e y}.$$

Ferner ist

$$\tan\beta = \frac{-\frac{b^2 x}{a^2 y} + \frac{y}{e-x}}{1 + \frac{b^2 x}{a^2 y} \cdot \frac{y}{e-x}}$$

$$= \frac{-b^2 e x + b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 e y - (a^2 - b^2) x y}$$

$$= \frac{a^2 b^2 - b^2 e x}{a^2 e y - e^2 x y}$$

$$= \frac{b^2 (a^2 - e x)}{e y (a^2 - e x)}$$

$$= \frac{b^2}{e y}.$$

Es ist also

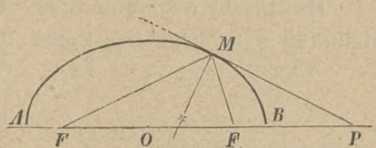
$$\tan\alpha = \tan\beta$$

und daher auch

$$\alpha = \beta.$$

Es geht hieraus hervor, dass die nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen mit der Tangente gleiche Winkel bilden, und weiter, dass die Normale den Winkel der Leitstrahlen halbirt.

Fig. 33.

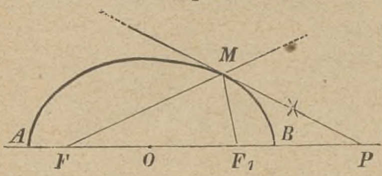


Es knüpfen sich hieran die folgenden Tangentenconstruktionen.

Zieht man nach dem Berührungspunkte M, Figur 33, die Leitstrahlen und halbirt den Winkel derselben, so ist die Halbirungslinie die Normale; errichtet man auf dieser im Berührungspunkte eine Senkrechte, so ist dieses die Tangente.

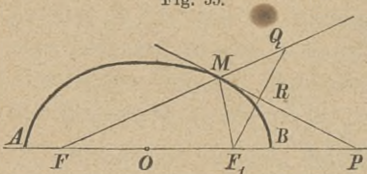
Zieht man nach dem Berührungspunkte M, Figur 34, die Leitstrahlen und verlängert einen derselben über den Berührungspunkt hinaus, so entsteht ein Nebenwinkel des Winkels, welchen die Leitstrahlen am Berührungspunkte einschliessen. Halbirt man diesen Nebenwinkel, so ist die Halbirungslinie die gesuchte Tangente.

Fig. 34.



Zieht man nach dem Berührungspunkte M, Figur 35, die Leitstrahlen FM und F_1M, verlängert den einen, etwa FM, über den Berührungspunkt hinaus und macht die Verlängerung MQ gleich dem andern Leitstrahle MF_1, zieht hierauf F_1Q, halbirt diese Linie und legt durch den Halbirungspunkt R und den Berührungspunkt M eine Gerade, so ist dieses die Tangente.

Fig. 35.



Zieht man, nachdem die letzte Construktion gemacht ist, Figur 36, OR, so ist, weil

$$OF_1 = \tfrac{1}{2}FF_1 \text{ und } F_1R = \tfrac{1}{2}F_1Q,$$

$$OR = \tfrac{1}{2}FQ$$

und folglich OR parallel mit FQ.

Es ist aber

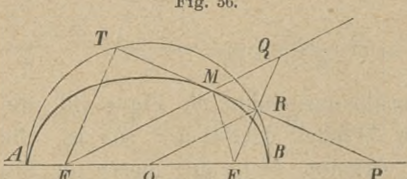
$$FQ = FM + MF_1 = AB,$$

daher auch

$$OR = \tfrac{1}{2}AB.$$

Beschreibt man nun über der grossen Axe der Ellipse einen Halbkreis, so liegt der Punkt R in der Peripherie desselben. Dasselbe gilt vom Punkte T, welchen man erhält, wenn man den andern Leitstrahl F_1M über M hinaus verlängert und die Verlängerung gleich MF macht. Da nun F_1R und FT, die von den

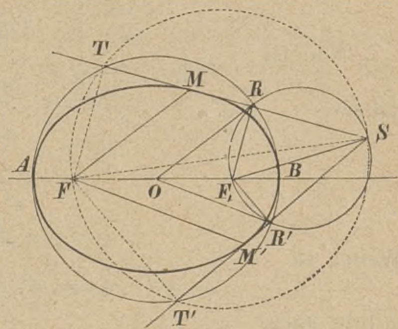
Fig. 36.



Brennpunkten auf die Tangente gefällten Senkrechten sind, so geht hieraus hervor, dass die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf eine Tangente gezogenen Senkrechten in der Peripherie desjenigen Kreises liegen, welcher über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser beschrieben ist.

Soll von einem ausserhalb der Ellipse liegenden Punkte S, Figur 37, eine Tangente an die Ellipse gezogen werden, so hat man auf dem Umfange des die Ellipse umschliessenden Kreises einen Punkt so zu bestimmen, dass wenn man von dem gegebenen Punkte S und einem der Brennpunkte, nach diesem Punkte gerade Linien zieht, diese Geraden einen rechten Winkel mit einander bilden.

Fig. 37.

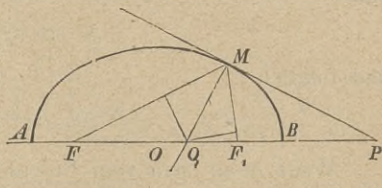


Zu diesem Zwecke verbindet man den Punkt S mit einem der Brennpunkte, etwa F_1, durch eine Gerade und beschreibt über derselben als Durchmesser einen Kreis. Dieser schneidet den die Ellipse umschliessenden Kreis in zwei Punkten R und R'. Legt man nun durch S und R, so wie durch S und R' Gerade, so sind dieses Tangenten an die Ellipse. Hätte man über der Geraden SF einen Kreis beschrieben, so hätte man die Punkte T und T' bekommen, welche dann mit S zu verbinden gewesen wären.

Es geht hieraus hervor, dass von einem ausserhalb einer Ellipse liegenden Punkte zwei Tangenten an die Ellipse gezogen werden können.

Die Berührungspunkte M und M' findet man endlich, wenn man die Geraden OR und OR' zieht, und sodann durch F die Parallelen FM und FM'.

Fig. 38.



Bezeichnen wir, Figur 38, den Winkel den die Normale mit einem jeden der Leitstrahlen macht mit γ, also den Winkel, den die Leitstrahlen einschliessen mit 2γ, so ist nach einem Satze der Trigonometrie

$$\cos 2\gamma = \frac{r^2 + r_1^2 - (2\,e)^2}{2\,r\,r_1}.$$

Es ist aber

$$\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1,$$

also auch

$$\cos^2\gamma = \frac{2\,r\,r_1 + r^2 + r_1^2 - (2\,e)^2}{4\,r\,r_1}$$

$$= \frac{(r + r_1)^2 - (2\,e)^2}{4\,r\,r_1}.$$

Nun ist

$$r + r_1 = 2\,a,$$

daher

$$\cos^2\gamma = \frac{4a^2 - 4\,e^2}{4\,r\,r_1}$$

$$= \frac{a^2 - e^2}{r\,r_1}.$$

Weiter ist

$$a^2 - e^2 = b^2,$$

mithin auch

$$\cos^2\gamma = \frac{b^2}{r\,r_1}.$$

Für die Normale besteht die Gleichung

$$N^2 = \frac{b^2}{a^4}(a^4 - e^2 x^2);$$

multipliciren wir diese mit der vorhergegangenen, so erhalten wir

$$N^2 \cos^2\gamma = \frac{b^4}{r\,r_1\,a^4}(a^4 - e^2 x^2).$$

Nach § 9 ist aber

$$r\,r_1 = \frac{(a^2 + e\,x)\,(a^2 - e\,x)}{a^2} = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2},$$

daher

$$N^2 \cos^2\gamma = \frac{b^4}{a^2}$$

und folglich

$$N \cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p.$$

Wenn man also vom Fusspunkte der Normalen Senkrechte auf die Leitstrahlen zieht, so sind die vom Berührungspunkte aus abgeschnittenen Stücke der Leitstrahlen gleich dem halben Parameter.

Aus der Gleichung

$$N \cos \gamma = p$$

folgt weiter

$$\frac{N}{p} = \frac{1}{\cos \gamma},$$

oder

$$\frac{N}{p} = \sec \gamma.$$

Es ist mithin der Quotient aus der Normalen und dem halben Parameter, gleich der Secante desjenigen Winkels, den die Normale mit dem Leitstrahle einschliesst.

§ 23.

Die Hyperbel.

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

daher ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Für $x = \pm a$, wird $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \infty$. In den Scheitelpunkten der Hyperbel steht demnach die Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht.

Für jedes x kleiner als a wird y imaginär; dagegen gibt es für jedes x grösser als a ein reelles positives und negatives y und folglich auch einen Werth von $\frac{dy}{dx}$.

Dividirt man in der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit x, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}.$$

Mit wachsendem x wird der Quotient $\left(\frac{a}{x}\right)^2$ fortwährend kleiner und hat für ein ins Unendliche wachsendes x die Null zur Grenze. Daher wird für diesen Grenzfall

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Für ein unendlich grosses x geht aber die Tangente in die Asymptote über, und es ist daher $\frac{b}{a}$ die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die Asymptote der Hyperbel mit der Abscissenaxe einschliesst. Vergl. § 10.

Wir haben nun für die Subtangente

$$S_t = y \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = y \cdot \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x},$$

und wenn wir für y seinen Werth setzen,

$$S_t = \frac{x^2 - a^2}{x}.$$

Die Subtangente ist daher von der Nebenaxe unabhängig, und mithin haben alle Hyperbeln, welche dieselbe Hauptaxe besitzen, für gleiche Abscissen auch gleiche Subtangenten.

Beschreibt man über derselben Hauptaxe mehrere Hyperbeln, deren Nebenaxen verschieden sind, so fallen die zu derselben Abscisse gehörigen Ordinaten in eine und dieselbe Gerade hinein; legt man nun an diejenigen Punkte, in welchen die Hyperbeln von der Ordinate geschnitten werden, Tangenten, so treffen diese alle in demselben Punkte der Abscissenaxe zusammen.

Für $x = 0$ wird y imaginär, daher gibt es keine Subtangente; und da für x kleiner als $\pm a$, y imaginär bleibt, so gibt es für dieses Intervall auch keine Subtangente.

Für $x = \pm a$ wird die Subtangente Null. In diesen Punkten steht die Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht. Von hier an wächst die Subtangente beständig mit x.

Ferner ist die Subnormale

$$S_n = y \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{b^2}{a^2} x,$$

die Subnormale ist daher der Abscisse stets proportional.

Ist $x = 0$, so ist die Subnormale Null, und ist $x = \pm a$, so ist die Subnormale $\pm \frac{b^2}{a}$, also gleich dem halben Parameter.

Die Tangente ist

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a x}\sqrt{(b^2 + a^2)\,x^2 - a^4}$$

oder auch

$$T = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a x}\sqrt{e^2 x^2 - a^4}.$$

Die Normale ist

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$$

$$= \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2 + b^2)\,x^2 - a^4}$$

oder auch

$$N = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2 x^2 - a^4}.$$

Für $x = \pm a$ wird

$$N = \frac{b^2}{a} = p,$$

also gleich dem halben Parameter. Für diese Punkte sind also Normale und Subnormale einander gleich.

Die Gleichung der Tangente ist

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1),$$

oder wenn man die Gleichung umgestaltet,

$$a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = b^2 x x_1 - b^2 x_1^2,$$

$$a^2 y y_1 - b^2 x x_1 = a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2.$$

Es ist aber zufolge der Gleichung der Hyperbel

$$a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 = - a^2 b^2,$$

daher

$$a^2 y y_1 - b^2 x x_1 = - a^2 b^2$$

oder

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe zu bekommen, $y = 0$, so folgt

$$x = \frac{a^2}{x_1}$$

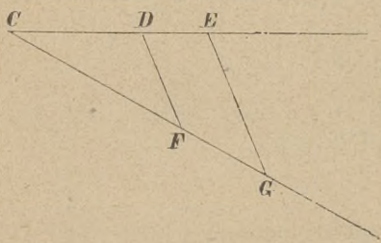
und hieraus die Proportion

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x_1}.$$

Es ist daher die halbe Hauptaxe die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe und der Abscisse des Berührungspunktes.

Der kleinste Werth, den x_1 annehmen kann, ist a, und für diesen wird auch x gleich a, d. h. Berührungspunkt und Durchschnittspunkt fallen mit dem Scheitel der Hyperbel zusammen.

Fig. 39.



Je grösser x_1 wird, um so kleiner wird x; aber x kann nur Null werden, wenn x_1 unendlich wird. In diesem Falle geht die Tangente durch den Mittelpunkte der Hauptaxe und wird zur Asymptote.

Der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenaxe liegt daher stets zwischen dem Scheitel und dem Mittelpunkte der Hauptaxe.

Die Gleichung der Normalen ist

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normalen mit der Abscissenaxe zu bekommen, $y = 0$, so ist

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x_1.$$

Soll an eine Hyperbel eine Tangente gezogen werden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, so haben wir für die Subtangente die Gleichung

$$S_t = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

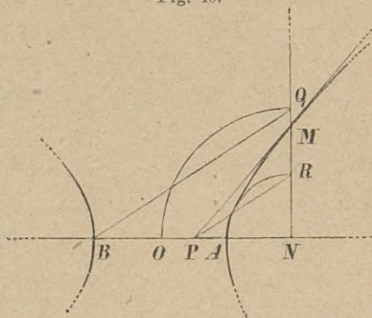
und hieraus lässt sich die Proportion ableiten,

$$\frac{x}{x - a} = \frac{x + a}{S_t}.$$

Sucht man nun in der bekannten Weise, Figur 39, zu den drei in Figur 40 gegebenen Geraden $CD = x$, $DE = x - a$, $CF = x + a$ die vierte Proportionale, so findet man $FG = S_t$. Macht man hierauf in der Abscissenaxe $NP = FG$, und zieht nach dem Berührungspunkte M die Gerade PM, so ist dieses die verlangte Tangente.

Oder man mache, Figur 40, auf der Ordinate $NR = NA = x - a$, und $NQ = NO = x$, ziehe BQ und hierzu durch R eine Parallele, so erhält man den Punkt P, welches der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Abscissenaxe ist. Denn es ist $NQ = x$, $NR = x - a$, $NB = x + a$ und folglich $NP = S_t$. Zieht man daher PM, so ist dieses die verlangte Tangente.

Fig. 40.



Zieht man nach dem Berührungspunkte M, Figur 41, die Leitstrahlen FM und F_1M, so schliessen diese mit der Tangente die Winkel α und β ein. Es ist nun

$$\alpha = a - b;\ \beta = c - a,$$

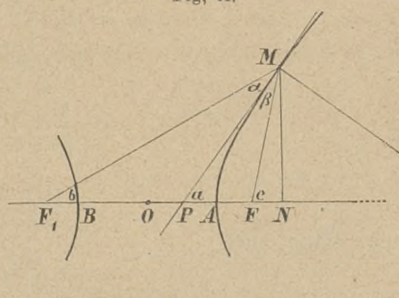
daher auch

$$\tan \alpha = \tan (a - b);$$

$$\tan \beta = \tan (c - a);$$

weiter ist

Fig, 41.



$$\tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b},$$

$$\tan (c - a) = \frac{\tan c - \tan a}{1 + \tan c . \tan a}.$$

Es ist aber nach der Figur

$$\tan a = \frac{y}{S_t} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$\tan b = \frac{y}{x + e};\ \tan c = \frac{y}{x - e}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man

$$\tan\alpha = \frac{\frac{b^2 x}{a^2 y} - \frac{y}{x+e}}{1 + \frac{b^2 x}{a^2 y}\cdot\frac{y}{x+e}}$$

$$= \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2 + b^2 e x}{a^2 x y + a^2 y e + b^2 x y}$$

$$= \frac{a^2 b^2 + b^2 e x}{(a^2 + b^2) x y + a^2 y e}$$

$$= \frac{b^2 (a^2 + e x)}{e y\, (a^2 + e x)}$$

$$= \frac{b^2}{e y}.$$

Ferner ist

$$\tan\beta = \frac{\frac{y}{x-e} - \frac{b^2 x}{a^2 y}}{1 + \frac{y}{x-e}\cdot\frac{b^2 x}{a^2 y}}$$

$$= \frac{a^2 y^2 - b^2 x^2 + b^2 e x}{a^2 x y - a^2 e y + b^2 x y}$$

$$= \frac{b^2 e x - a^2 b^2}{(a^2 + b^2) x y - a^2 e y}$$

$$= \frac{b^2 (e x - a^2)}{e y\, (e x - a^2)}$$

$$= \frac{b^2}{e y}.$$

Es ist also

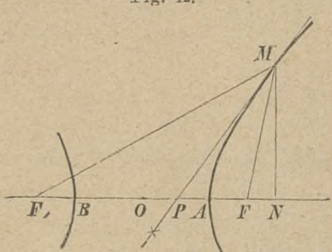
$$\tan\alpha = \tan\beta,$$

und daher auch

$$\alpha = \beta.$$

Es geht hieraus hervor, dass die Tangente den Winkel halbirt, den die Leitstrahlen am Berührungspunkte mit einander bilden, und dass die Normale den Winkel halbirt, den ein jeder Leitstrahl mit der Verlängerung des andern einschliesst.

Fig. 42.

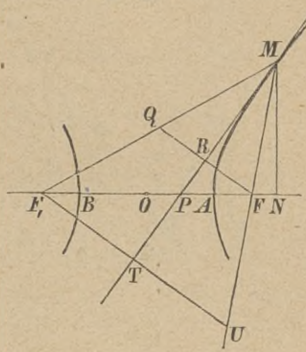


Hieraus ergeben sich folgende Tangentenconstruktionen.

Zieht man nach dem gegebenen Berührungspunkte M, Figur 42, die Leitstrahlen und halbirt den

Winkel, den sie am Berührungspunkte bilden, so ist die Halbirungslinie die gesuchte Tangente.

Fig. 43.



Man ziehe nach dem gegebenen Berührungspunkte M, Figur 43, die Leitstrahlen und trage den kleineren auf dem grösseren, oder den grösseren auf der Verlängerung des kleineren ab; ziehe FQ oder F_1U, halbire diese und verbinde den Halbirungspunkt mit dem Berührungspunkte, so ist diese Verbindungslinie die gesuchte Tangente.

Zieht man, nachdem diese Construktion ausgeführt worden ist, in Figur 44 OR, so ist, weil

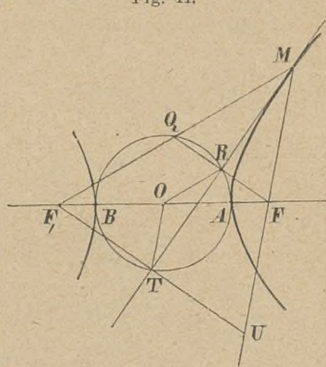
$$OF = \tfrac{1}{2}F_1F \text{ und } FR = \tfrac{1}{2}FQ,$$
$$OR = \tfrac{1}{2}F_1Q = \tfrac{1}{2}(F_1M - FM) = \tfrac{1}{2}AB.$$

Zieht man ferner OT, so ist, weil

$$F_1O = \tfrac{1}{2}F_1F \text{ und } F_1T = \tfrac{1}{2}F_1U,$$
$$OT = \tfrac{1}{2}FU = \tfrac{1}{2}(F_1M - FM) = \tfrac{1}{2}AB.$$

Beschreibt man daher über der Hauptaxe AB einen Kreis, den sogenannten Hauptkreis, so liegen die Punkte R und T auf der Peripherie desselben.

Fig. 44.

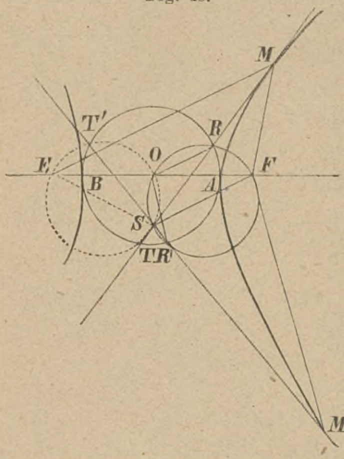


Da nun FR und F_1T die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Senkrechten sind, so geht hieraus hervor, dass die Fusspunkte der von den Brennpunkten auf eine Tangente gezogenen Senkrechten in der Peripherie des Hauptkreises liegen.

Soll von einem ausserhalb der Hyperbel liegenden Punkte S, Figur 45, eine Tangente an die Hyperbel gezogen werden, so hat man auf dem Umfange des Hauptkreises einen Punkt so zu bestimmen, dass wenn man von dem gegebenen Punkte S und einem der Brennpunkte nach diesem Punkte gerade Linien zieht, diese Geraden einen rechten Winkel mit einander bilden.

Zu diesem Zwecke verbindet man den Punkt S mit einem der Brennpunkte, etwa F, durch eine Gerade und beschreibt über derselben als Durchmesser einen Kreis. Dieser schneidet den Hauptkreis der Hyperbel in zwei Punkten R und R'. Legt man nun durch S und R so wie durch S und R' Gerade, so sind dieses Tangenten an die Hyperbel. Hätte man S mit F_1 verbunden und über der Geraden SF_1 einen Kreis beschrieben, so hätte man die Punkte T und T' bekommen, welche mit S zu verbinden gewesen wären.

Fig. 45.

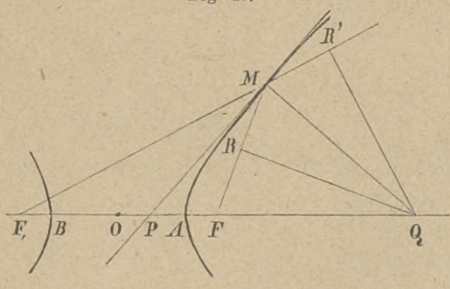


Es geht hieraus hervor, dass von einem ausserhalb einer Hyperbel liegenden Punkte zwei Tangenten an die Hyperbel gezogen werden können.

Die Berührungspunkte M und M' findet man endlich, wenn man die Geraden OR und OR' zieht und sodann die Parallelen F_1M und FM', oder wenn man die Geraden OT und OT' zieht und sodann die Parallelen FM und F_1M'.

Construirt man die Asymptoten, so theilen diese die Ebene der Hyperbel in vier Theile, so dass zwei solche Theile von der Hauptaxe, die andern beiden Theile aber von der Nebenaxe durchschnitten werden. Liegt nun der Punkt in einem derjenigen beiden Theile, durch welche die Hauptaxe geht, so treffen beide Tangenten denselben Hyperbelast; liegt dagegen der Punkt in einem derjenigen Theile, durch welche die Nebenaxe geht, so trifft eine Tangente den einen, die andere Tangente den anderen Hyperbelast.

Fig. 46.



Bezeichnen wir den Winkel, den die Normale mit einem jeden der Leitstrahlen macht, mit γ, Figur 46, und den Winkel, den die Leitstrahlen einschliessen mit 2δ, so ist

$$\cos 2\delta = \frac{r^2 + r_1^2 - (2e)^2}{2rr_1}.$$

Es ist aber

$$2\delta = 180^0 - 2\gamma,$$

daher

$$\cos 2\delta = \cos(180^0 - 2\gamma) = -\cos 2\gamma;$$

weiter ist

$$-\cos 2\gamma = -2\cos^2\gamma + 1,$$

daher

$$-2\cos^2\gamma = \frac{r^2 + r_1^2 - (2e)^2 - 2rr_1}{2rr_1}$$

$$= \frac{(r - r_1)^2 - (2e)^2}{2rr_1}$$

$$= \frac{(2a)^2 - (2e)^2}{2rr_1},$$

also

$$-\cos^2\gamma = \frac{a^2 - e^2}{rr_1}$$

oder

$$-\cos^2\gamma = -\frac{e^2 - a^2}{rr_1};$$

das ist aber

$$\cos^2\gamma = \frac{b^2}{rr_1}.$$

Nun haben wir für die Normale die Gleichung

$$N^2 = \frac{b^2}{a^4}(e^2x^2 - a^4).$$

Multipliciren wir die beiden letzten Gleichungen mit einander, so erhalten wir

$$N^2\cos^2\gamma = \frac{b^2}{rr_1} \cdot \frac{b^2}{a^4}(e^2x^2 - a^4).$$

Es ist aber

$$rr_1 = \frac{ex + a^2}{a} \cdot \frac{ex - a^2}{a} = \frac{e^2x^2 - a^4}{a^2},$$

daher, wenn man dieses einsetzt,

$$N^2\cos^2\gamma = \frac{b^4}{a^2}$$

oder

$$N\cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p.$$

Wenn man also vom Fusspunkte der Normalen Senkrechte auf die Leitstrahlen zieht, so sind die vom Berührungspunkte aus abgeschnittenen Stücke der Leitstrahlen gleich dem halben Parameter.

Aus der Gleichung

$$N \cos \gamma = p$$

folgt weiter

$$\frac{N}{p} = \frac{1}{\cos \gamma}$$

oder

$$\frac{N}{p} = \sec \gamma.$$

Es ist mithin der Quotient aus der Normalen und dem halben Parameter gleich der Secante desjenigen Winkels, den die Normale mit dem Leitstrahle einschliesst.

§ 24.

Die Cycloide.

Die Gleichungen der Cycloide sind

$$x = r\,(\varphi - \sin \varphi)$$

$$y = r\,(1 - \cos \varphi).$$

Werden diese Gleichungen differentiirt, indem man dabei φ als die unabhängige Veränderliche betrachtet, so erhält man

$$dx = r\,(1 - \cos \varphi)\,d\varphi$$

$$dy = r \sin \varphi\,d\varphi,$$

daher aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

Es ist aber

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}$$

$$\cos \varphi = \frac{r - y}{r};$$

werden diese Ausdrücke eingesetzt, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

Für $\varphi = 0$ wird $x = 0$ und $y = 0$ so wie $\frac{dy}{dx} = \infty$. Die Tangente steht daher in diesem Punkte auf der Abscissenaxe senkrecht.

Für $\varphi = \pi$ wird $x = r\pi$ und $y = 2r$, daher $\frac{dy}{dx} = 0$; die Tangente ist daher in diesem Punkte mit der Abscissenaxe parallel.

Wird $y = r$, so wird $\frac{dy}{dx} = 1$; in diesem Punkte macht also die Tangente mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45^0.

So lange φ kleiner ist als π, bleibt $\frac{dy}{dx}$ positiv; wird aber φ grösser als π, so wird $\frac{dy}{dx}$ negativ, und wird $\varphi = 2\pi$, so wird $\frac{dy}{dx}$ wieder unendlich. In der ersten Hälfte steigt daher die Kurve; hat sich der Kreis bis zur Hälfte abgewälzt, so erreicht die Kurve einen Culminationspunkt und fällt von hier an wieder so lange, bis der Kreis sich ganz abgewälzt hat. Dieselbe Kurve wird für jede folgende Umwälzung des Kreises erzeugt.

Die Subtangente ist

$$S_t = y \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}}.$$

Die Subnormale ist

$$S_n = y \frac{dy}{dx} = \sqrt{2ry - y^2}.$$

Die Tangente ist

$$T = y \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y \sqrt{\frac{2r}{2r - y}}.$$

Die Normale ist

$$N = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{2ry}.$$

Die Gleichung der Tangente ist

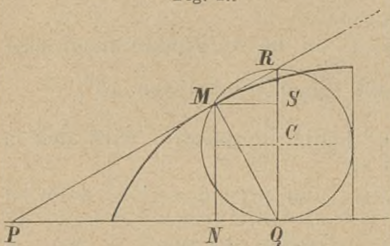
$$y - y_1 = \sqrt{\frac{2r}{y_1} - 1}\,(x - x_1),$$

und die Gleichung der Normalen ist

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{\sqrt{2ry_1 - y_1^2}}(x - x_1).$$

Soll in einem gegebenen Punkte M, Figur 47, eine Tangente an die Cycloide gelegt werden, so haben wir für die Normale

Fig. 47.



gefunden

$$N = \sqrt{2ry},$$

daher ist

$$N^2 = 2ry.$$

Dieses gibt die Proportion

$$\frac{2r}{N} = \frac{N}{y},$$

und es ist also die Normale die mittlere Proportionale zwischen der Ordinate und dem Durchmesser des Rollkreises. Dieses führt zu folgender Construktion. Man lege durch den Berührungspunkt einen Rollkreis und zu diesem Zwecke im Abstande r eine Parallele zur Abscissenaxe, welche man von M aus mit dem Halbmesser in C schneidet, so ist C der Mittelpunkt desjenigen Kreises, der durch den Punkt M geht und die Abscissenaxe in Q berührt. Hierauf ziehe man den vertikalen Durchmesser QR so wie die Geraden MQ und MR, so ist MQ die Normale und MR die Tangente für den Kurvenpunkt M. Denn das Dreieck QMR hat bei M einen rechten Winkel, weil er ein Peripheriewinkel im Halbkreise ist. Legt man durch M eine Parallele zur Abscissenaxe, so ist MS das aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse herabgelassene Perpendikel, und es ist also

$$\overline{MQ}^2 = QR \,.\, QS,$$

weil aber $QR = 2r$; $QS = y$, so ist

$$\overline{MQ}^2 = 2r \,.\, y,$$

also

$$MQ = N.$$

Es geht hieraus hervor, dass die Normale stets durch den tiefsten und die Tangente stets durch den höchsten Punkt desjenigen Rollkreises geht, welcher durch den Berührungspunkt gelegt wird.

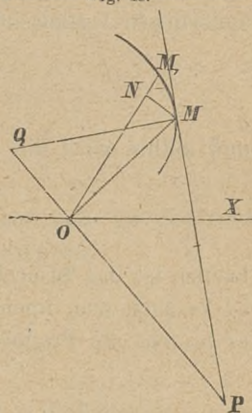
Um daher in einem gegebenen Punkte eine Tangente an die Cycloide zu legen, lege man durch den Berührungspunkt einen Rollkreis, ziehe den vertikalen Durchmesser desselben und lege durch den höchsten Punkt dieses Durchmessers und den Berührungspunkt eine Gerade, so ist dieses die gesuchte Tangente.

§ 25.

Tangenten und Normalen für Polarcoordinaten.

Ist O, Figur 48, der Pol, OX die Polaraxe und M ein Punkt einer auf Polarcoordinaten bezogenen Kurve, so ist OM der Radius vector dieses Punktes, also gleich r und der Winkel MOX derjenige Winkel, den der Radiusvector mit der Polaraxe macht, also gleich φ. Legt man im Punkte M an die Kurve eine Tangente und construirt die zugehörige Normale, so ist, wenn man durch O eine Senkrechte auf den Leitstrahl legt, welche die Tangente in P und die Normale in Q schneidet, die Strecke OP die dem Punkte M zugehörige Polarsubtangente und die Strecke OQ die ebenfalls dem Punkte M zugehörige Polarsubnormale.

Fig. 48.



Um diese Linien zu bestimmen, lasse man den, dem Winkel MOX entsprechenden, mit dem Radius 1 beschriebenen Bogen φ um den unendlich kleinen, dem Winkel NOM entsprechenden Bogen $d\varphi$ sich ändern. Beschreibt man nun mit dem Halbmesser OM den unendlich kleinen Kreisbogen MN, so ist $MN = r\,d\varphi$, während NM_1 die unendlich kleine Veränderung des Leitstrahles r, also dr ist. Man kann nun annehmen, dass der unendlich kleine Kreisbogen MN mit der Geraden PQ parallel sei, und dass der unendlich kleine Bogen MM_1 in die Richtung der Tangente PM hineinfällt; dann ist aber der Winkel NMM_1 gleich dem Winkel OPM; weil man aber ferner das unendlich kleine Dreieck NMM_1 als ein bei N rechtwinkeliges ansehen kann, so sind die Dreiecke OPM und NMM_1 ähnlich, und es besteht die Proportion

$$\frac{OP}{OM} = \frac{NM}{NM_1},$$

woraus folgt

$$OP = OM \cdot \frac{NM}{NM_1}.$$

Nun ist OP die Polarsubtangente S_t, OM der Leitstrahl r, $NM = r\,d\varphi$ und $NM_1 = dr$, daher, wenn wir dieses einsetzen,

$$S_t = r \cdot \frac{r\,d\varphi}{dr} = r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr}.$$

In dieser Form würde r die unabhängige, φ dagegen die abhängige Veränderliche sein. Wir haben aber bei den oben angestellten Betrachtungen φ als die unabhängige und r als die abhängige Veränderliche angesehen, folglich muss der Differentialquotient die Form $\frac{dr}{d\varphi}$ erhalten. Werden die unabhängigen Veränderlichen vertauscht, s. § 66, so ist

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\frac{dr}{d\varphi}},$$

und mithin wird die Polarsubtangente

$$S_t = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Ferner ist das Dreieck OMQ dem Dreiecke OMP ähnlich, daher ist es auch dem unendlich kleinen Dreiecke MNM_1 ähnlich, und es besteht die Proportion

$$\frac{OQ}{OM} = \frac{NM_1}{NM},$$

woraus folgt

$$OQ = OM \cdot \frac{NM_1}{NM}.$$

Nun ist OQ die Polarsubnormale S_n, mithin ist, wenn wir die oben angegebenen Werthe einsetzen,

$$S_n = r \cdot \frac{dr}{r\,d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Bildet man aus der gegebenen Polargleichung einer Kurve

$$r = f(\varphi)$$

den Differentialquotienten $\frac{dr}{d\varphi}$, so kann man die Polarsubtangente und die Polarsubnormale bestimmen.

Beispiel.

Die Polargleichung der Parabel ist

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi},$$

daher

$$dr = -p\,(1 + \cos\varphi)^{-2} \,.\, -\sin\varphi\, d\varphi$$

und

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p \sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}.$$

Für die Polarsubtangente haben wir daher

$$S_t = \frac{\frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2}}{\frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}} = \frac{p}{\sin\varphi}$$

und für die Polarsubnormale

$$S_n = \frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}.$$

IV. Abschnitt.

Entwickelung der Funktionen in Reihen nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten.

§ 26.

Allgemeines Verfahren.

Das Verfahren, Funktionen nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten in Reihen zu entwickeln, besteht darin, dass man die Funktion gleich der Summe einer Reihe setzt, deren Glieder nach ganzen positiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten und mit constanten, aber noch unbekannten Faktoren, den unbestimmten Coëfficienten, behaftet sind, welche sodann auf irgend eine Weise bestimmt werden. Es versteht sich von selbst, dass das Verfahren überhaupt nur dann angewendet werden kann, wenn die Natur und Beschaffenheit der Funktion eine solche Reihenentwickelung gestattet, und nur dann brauchbar und von Nutzen ist, wenn die Reihe convergirt.

Wenn sich eine Funktion von x in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lässt, so ist das erste Glied der Reihe immer gleich $f(0)$, das ist gleich demjenigen Werthe, den die Funktion annimmt, wenn man die unabhängige Veränderliche gleich Null setzt.

Das Verfahren selbst stützt sich auf folgende Sätze:

Wenn die Summe einer nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitenden Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

für jeden Werth von x Null sein soll, so ist dieses nur dann möglich, wenn jeder Coëfficient für sich gleich Null ist, denn wäre dieses nicht der Fall, so würde die Summe der Reihe nur für gewisse Werthe von x gleich Null sein.

Wenn zwei nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen einander gleich sein sollen, so müssen die Coëfficienten derjenigen Glieder beider Reihen einander gleich sein, welche gleiche Potenzen von x enthalten. Denn wenn beide Reihen einander gleich sind, so ist ihre Differenz gleich Null. Hieraus folgt aber, dass die Differenzen der Coëfficienten derjenigen Glieder beider Reihen gleich Null sind, welche gleiche Potenzen von x enthalten, und hieraus weiter, dass diese Coëfficienten gleich sind.

Ist also

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + \ldots,$$

so ist auch

$$a = a_1;\ b = b_1;\ c = c_1 \text{ u. s. f.}$$

§ 27.

Die Exponentialreihe.

Es sei

$$f(x) = a^x.$$

Wir setzen

1. $$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

wo A, B, C, D, u. s. f. die unbestimmten Coëfficienten sind.

Zuerst ist nun

$$f(o) = a^o = 1, \text{ daher } A = 1,$$

und folglich

2. $$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so ergiebt sich

3. $$a^x\, l(a)\, dx = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + \ldots,$$

also auch

4. $$a^x = \frac{1}{l(a)}(B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots).$$

Die linken Seiten dieser Reihe und der Reihe 1. sind einander gleich, und folglich müssen es auch die rechten Seiten sein. Hierdurch erhalten wir für die Coëfficienten beider Reihen folgende

Gleichungen:

$$A = \frac{B}{l(a)},$$

$$B = \frac{2C}{l(a)},$$

$$C = \frac{3D}{l(a)}$$

u. s. f.

Durch successive Substitution und mit Rücksicht darauf, dass $A = 1$ ist, erhalten wir für die unbestimmten Coëfficienten folgende Werthe

$$A = 1,$$

$$B = l(a),$$

$$C = \frac{1}{2}\,(l(a))^2,$$

$$D = \frac{1}{2\,.\,3}\,(l(a))^3,$$

$$E = \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\,(l(a))^4$$

u. s. f.

Hiermit ist das Bildungsgesetz für die Coëfficienten der Reihe gegeben, und es ist

5. $$a^x = 1 + l(a)\,x + \frac{1}{1\,.\,2}(l(a))^2 x^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}(l(a))^3 x^3 + \dots$$

Setzen wir $a = e$, so ist $l(e) = 1$, und es geht die Reihe 5. in folgende über

6. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \dots,$$

Setzen wir nun in dieser letzten Reihe $x = 1$, so erhalten wir den schon früher gefundenen Werth von e, nämlich

7. $$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \dots = 2{,}71828\dots$$

Für die Reihe 5. ist

$$u_n = \frac{(l(a)\,x)^n}{1\,.\,2 \dots n}$$

und

$$u_{n+1} = \frac{(l(a)\,x)^{n+1}}{1\,.\,2 \dots \overline{n+1}},$$

daher

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{l(a)\,x}{n+1}.$$

Die Reihe convergirt also, wenn

$$l(a) \cdot x < n + 1.$$

Da nun n unendlich gross werden kann, so convergirt die Exponentialreihe für jeden endlichen Werth von a und x.

§ 28.

Die Binomialreihe.

Es sei

$$f(x) = (1 + x)^m.$$

Wir setzen

1. $$(1 + x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

Zunächst ist $f(o) = 1^m = 1$, daher $A = 1$ und mithin

2. $$(1 + x)^m = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

Wird diese Gleichung differentiirt, so ergibt sich

3. $$m(1 + x)^{m-1}\,dx = B\,dx + 2Cx\,dx + 3Dx^2\,dx + 4Ex^3\,dx + \ldots,$$

also auch

4. $$(1 + x)^{m-1} = \frac{1}{m}(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots).$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $1 + x$, so folgt

5. $$(1 + x)^m = \frac{1}{m}\,[B + (B + 2C)x + (2C + 3D)x^2 + (3D + 4E)x^3 + \ldots],$$

Aus der Vergleichung dieser Reihe und der Reihe 1. folgt nun weiter für die Coëfficienten

$$A = \frac{B}{m},$$

$$B = \frac{B + 2C}{m},$$

$$C = \frac{2C + 3D}{m},$$

$$D = \frac{3D + 4E}{m}$$

u. s. f.

und hieraus

$$B = mA,$$

$$C = \frac{m-1}{2}\,B,$$

$$D = \frac{m-2}{3}\,C,$$

$$E = \frac{m-3}{4}\,D$$

u. s. f.

Durch successive Substitution und mit Rücksicht darauf, dass $A = 1$ ist, erhalten wir für die Coëfficienten folgende Werthe

$$A = 1,$$
$$B = m,$$
$$C = \frac{m(m-1)}{2},$$
$$D = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3},$$
$$E = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. f.

Hiermit ist das Bildungsgesetz für die Coëfficienten gegeben, und die Reihe 1. nimmt nun folgende Gestalt an

$$6. \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \ldots$$

Dieses ist die Binomialreihe, und die Coëfficienten sind die Binomialcoëfficienten.

Da M eine positive ganze Zahl ist, so muss ein Glied kommen, welches den Factor $m - m = 0$ hat; mit diesem Gliede hört dann die Reihe auf. Es ist mithin die Binomialreihe für einen positiven ganzen Exponenten eine endliche Reihe, und zwar hat die Reihe $m + 1$ Glieder.

Die Coëfficienten sind von beiden Enden der Reihe ausgehend einander gleich, also der erste gleich dem letzten, der zweite gleich dem vorletzten, der dritte gleich dem drittletzten u. s. f., wovon man sich leicht durch Bildung der Coëfficienten überzeugen kann. Die Coëfficienten wachsen daher bis zur Mitte der Reihe und nehmen von da an wieder ab.

Für ein gerades m ist die Anzahl der Glieder ungerade, und der Coëfficient des mittelsten Gliedes ist der grösste, für ein ungerades m ist die Anzahl der Glieder gerade, und die Coëfficienten der beiden mittelsten Glieder sind am grössten und einander gleich.

Setzt man in 6. $\frac{b}{a}$ für x, so erhält man

$$7. \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{b^3}{a^3} + \ldots,$$

und multiplicirt man nun 7. auf beiden Seiten mit a^m und berücksichtigt, dass

$$a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = (a+b)^m,$$

so bekommt man folgende Reihe

8. $$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \ldots,$$

welches nun die eigentliche Binomialreihe ist.

§ 29.

Reihen für den Logarithmus.

Es sei

$$f(x) = l(1+x).$$

Wir setzen

1. $$l(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

Nun ist $f(o) = l(1) = o$, also $A = o$, daher

2. $$l(1+x) = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{dx}{1+x} = B\,dx + 2Cx\,dx + 3Dx^2\,dx + 4Ex^3\,dx + \ldots,$$

und wenn mit dx beiderseits dividirt wird

3. $$\frac{1}{1+x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$

Wird die Division von $\frac{1}{1+x}$ nach den gewöhnlichen arithmetischen Gesetzen ausgeführt, so ist

4. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

Da die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen einander gleich sind, so müssen auch die rechten Seiten einander gleich sein. Hierdurch erhalten wir für die Coëfficienten beider Reihen die folgenden Gleichungen:

$$B = 1,$$
$$2C = -1,$$
$$3D = 1,$$
$$4E = -1.$$

u. s. f.

und hieraus weiter

$$B = 1,$$
$$C = -\tfrac{1}{2},$$
$$D = \tfrac{1}{3},$$
$$E = -\tfrac{1}{4}$$

u. s. f.

Hierdurch ist aber das Bildungsgesetz für die Coëfficienten der Reihe gegeben, so dass wir haben

5. $$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Diese Reihe convergirt für $x = 1$, so wie für alle Werthe von x, welche zwischen $+1$ und -1 liegen. Sie ist daher zur Berechnung der Logarithmen noch nicht so brauchbar, als es wünschenswerth ist. Setzen wir in der Reihe 5. $-x$ für x, so erhalten wir

6. $$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Subtrahiren wir 6. von 5., so erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass

$$l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

folgende Reihe

7. $$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right).$$

Diese Reihe convergirt, wenn x ein positiver echter Bruch ist. Setzen wir nun

$$\frac{1+x}{1-x} = v,$$

so ist

$$x = \frac{v-1}{v+1},$$

mithin ist x für einen jeden positiven Werth von $\frac{1+x}{1-x}$, das ist für einen jeden positiven Werth von v ein positiver echter Bruch. Setzen wir nun v für $\frac{1+x}{1-x}$ und $\frac{v-1}{v+1}$ für x in die Gleichung 7. ein, so nimmt sie folgende Gestalt an

8. $$l(v) = 2\left[\frac{v-1}{v+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^7 + \dots\right.$$

Diese Reihe convergirt für jeden positiven Werth von v; allein sie convergirt um so langsamer, je grösser v ist.

Um daher aus ihr eine Reihe abzuleiten, welche schneller convergirt, setzen wir

$$v = \frac{z+u}{z},$$

so wird

$$l(v) = l(z+u) - l(z)$$

und

$$\frac{v-1}{v+1} = \frac{\frac{z+u}{z} - 1}{\frac{z+u}{z} + 1} = \frac{u}{2z+u}.$$

Setzen wir dieses in die letzte Reihe 8. ein, und bringen $l(z)$ auf die rechte Seite, so erhalten wir die Reihe

$$9.\ l(z+u) = l(z) + 2\left[\frac{u}{2z+u} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{u}{2z+u}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{u}{2z+u}\right) + \ldots\right].$$

Mit Hilfe dieser Reihe lässt sich nun der Logarithmus von $z+u$ berechnen, wenn der Logarithmus von z bekannt ist.

Diese Reihe convergirt um so stärker, je kleiner u im Verhältniss zu $2z$ ist.

§ 30.

Reihen für den Sinus und Cosinus.

Es sei

$$\varphi(x) = \sin x; \quad \psi(x) = \cos x.$$

Wir setzen

1. $$\sin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

2. $$\cos x = A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + D_1 x^3 + \ldots,$$

so ist zunächst

$$\varphi(0) = \sin 0 = 0; \text{ daher } A = 0,$$

$$\psi(0) = \cos 0 = 1; \text{ daher } A_1 = 1.$$

Demnach ist

3. $$\sin x = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

4. $$\cos x = 1 + B_1 x + C_1 x^2 + D_1 x^3 + \ldots$$

Werden beide Gleichungen differentiirt, so ergibt sich aus 3.

5. $$\cos x\, dx = B dx + 2Cx\, dx + 3Dx^2\, dx + \ldots$$

und aus 4.

6. $\quad -\sin x\,dx = B_1\,dx + 2C_1 x\,dx + 3D_1 x^2\,dx + \ldots$

Wird auf beiden Seiten mit dx dividirt und 6. mit -1 multiplicirt, so folgt aus 5.

7. $$\cos x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

und aus 6.

8. $$\sin x = -B_1 - 2C_1 x - 3D_1 x^2 - \ldots$$

Aus der Vergleichung der beiden Reihen 1. und 8. für den Sinus, erhalten wir für die Coëfficienten folgende Gleichungen

$$A = -B_1,$$
$$B = -2C_1,$$
$$C = -3D_1,$$
$$D = -4E_1,$$
$$E = -5F_1$$

u. s. f.,

und aus der Vergleichung der beiden Reihen 2. und 7. für den Cosinus erhalten wir für die Coëfficienten folgende Gleichungen

$$A_1 = B,$$
$$B_1 = 2C,$$
$$C_1 = 3D,$$
$$D_1 = 4E,$$
$$E_1 = 5F$$

u. s. f.

Nun ist $A = 0$; hieraus folgt aber $B_1 = 0$, aus $B_1 = 0$ folgt $C = 0$, aus $C = 0$ folgt $D_1 = 0$, aus $D_1 = 0$ folgt $E = 0$, aus $E = 0$ folgt $F_1 = 0$ u. s. w.

Ferner ist $A_1 = 1$; hieraus folgt $B = 1$, aus $B = 1$ folgt $C_1 = -\frac{1}{2}$; hieraus $D = -\frac{1}{2.3}$; hieraus $E_1 = \frac{1}{2.3.4}$; hieraus $F = \frac{1}{2.3.4.5}$ u. s. w.

Setzen wir diese Werthe der Coëfficienten in die Gleichungen 1. und 2. ein, so erhalten wir

9. $$\sin x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \ldots$$

10. $$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4 - \ldots,$$

woraus das Bildungsgesetz für beide Reihen hervorgeht. Sie convergiren für jeden endlichen Werth von x.

V. Abschnitt.

Die höheren Differentiale und Differentialquotienten der Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen.

§ 31.

Allgemeines Verfahren.

Wir haben gesehen, dass der Differentialquotient oder die abgeleitete Funktion einer Funktion von x, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

im Allgemeinen wieder eine Funktion von x ist. Es kann daher von dieser Funktion wieder das Differential und der Differentialquotient oder die abgeleitete Funktion gebildet werden. Dieses Differential ist dann das zweite Differential, und dieser Differentialquotient ist der zweite Differentialquotient oder auch die zweite abgeleitete der ursprünglichen Funktion. Da dieses im Allgemeinen wieder eine Funktion von x ist, so kann auch von ihr das Differential und der Differentialquotient gebildet werden. Man erhält dann das dritte Differential und den dritten Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion. In dieser Weise kann man fortfahren und das $n$te Differential so wie den $n$ten Differentialquotienten einer Funktion bilden, wenn n aufeinanderfolgende Differentiationen möglich sind.

Die Ableitung und Bildung der auf einander folgenden Differentiale und Differentialquotienten geschieht nach denselben Gesetzen und Regeln, welche wir bei der Bildung des ersten Differentials und des ersten Differentialquotienten aus der ursprünglichen Funktion kennen gelernt haben.

Die Veränderung von x findet immer in derselben Weise statt wie bei der Bildung des ersten Differentials, indem x sich stets um den unendlich kleinen Werth dx ändert; daher sind auch alle diese unendlich kleinen Veränderungen von x einander gleich.

In der Gleichung

$$dy = f'(x)\,dx$$

ist nur der Faktor $f'(x)$ eine Funktion von x; der Faktor dx ist constant und von x unabhängig, da auf ihn eine weitere Veränderung der unabhängigen Veränderlichen x ohne Einfluss ist. Jede neue Veränderung, welche das x bei fortgesetzter Differentiation erleidet, zieht auch eine Veränderung der Funktion nach sich, und diese Veränderungen werden durch die Differentiale von y dargestellt. Während nun die aufeinanderfolgenden Differentiale von x stets einander gleich sind, so ist dieses bei den aufeinanderfolgenden Differentialen von y durchaus nicht der Fall, da, wie wir bereits früher gesehen haben, die Veränderungen der Funktion nach Art und Grösse sehr verschieden sein können. Denn die Veränderungen der Funktion werden zwar durch die Veränderungen von x herbeigeführt und sind in dieser Beziehung von der Veränderung des x abhängig; aber die Art und Grösse der Veränderung, welche die Funktion hierbei erleidet, hängt nicht von der Veränderung des x, sondern lediglich von der Natur und Beschaffenheit der Funktion selbst ab.

Aus der Gleichung

$$y = f(x)$$

ging durch die erste Differentiation die Gleichung

$$dy = f'(x)\,dx$$

hervor. Dem entsprechend hat man für die zweite Differentiation

$$d(dy) = d((f'(x))\,dx;$$

für $d(dy)$ schreibt man d^2y, und für $d(f'(x))$ der früheren Bezeichnung entsprechend $f''(x)dx$; daher ist die Gleichung für das zweite Differential

$$d^2y = f''(x)dx\,.\,dx = f''(x)dx^2$$

und für den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Auf dieselbe Weise erhält man für das dritte Differential

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3$$

und für den dritten Differentialquotienten

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x).$$

Allgemein hat man daher für das $n$te Differential

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

und für den $n$ten Differentialquotienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

§ 32.

Einfache Funktionen.

1. Bei denjenigen Funktionen, deren erster Differentialquotient gleich einer Constanten ist, ist eine weitere Differentiation nicht möglich. Daher haben Funktionen wie

$$y = x \text{ und } y = ax + b$$

nur ein Differential und einen Differentialquotienten, und die Veränderung, welche eine Funktion durch Differentiation erleidet, ist überall oder für jede Stelle dieselbe.

Dieses lässt sich auch geometrisch leicht erklären, indem alle Gleichungen, welche x nur zur ersten Potenz enthalten, Gleichungen gerader Linien sind. Die gerade Linie hat aber stets dieselbe Richtung, also macht sie mit der Abscissenaxe auch stets denselben Winkel, und folglich muss $\frac{dy}{dx}$, da es die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ist, den die Kurvenrichtung mit der Abscissenaxe bildet, stets denselben Werth haben, also constant sein.

2. Ist

$$y = x^m,$$

so ist das erste Differential

$$dy = mx^{m-1}\,dx$$

und der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}.$$

Demnach ist nun weiter das zweite Differential

$$d^2 y = m\,dx\,.\,d(x^{m-1}),$$

aber es ist

$$d\,(x^{m-1}) = (m - 1)\,x^{m-2}dx,$$

daher

$$d^2 y = m\,dx \,.\, (m-1)\, x^{m-2} dx$$
$$= m\,(m-1)\, x^{m-2} dx^2$$

und folglich der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m-1)\,x^{m-2},$$

Auf dieselbe Weise erhält man für das dritte Differential

$$d^3 y = m\,(m-1)\,(m-2)\,x^{m-3} dx^3$$

und für den dritten Differentialquotienten

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = m\,(m-1)\,(m-2)\,x^{m-3},$$

und es ist leicht einzusehen, wie das Verfahren fortzusetzen ist. Wir erhalten demnach allgemein, für das $n$te Differential

$$d^n y = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})\,x^{m-n} dx^n$$

und für den $n$ten Differentialquotienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})\,x^{m-n}.$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so erscheint ein Factor $m - m = 0$. Es ist daher das $m$te Differential

$$d^m y = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1\,dx^m$$

und der $m$te Differentialquotient

$$\frac{d^m y}{dx^m} = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1,$$

also gleich einer Constanten.

Ist dagegen m eine negative oder eine gebrochene oder eine Irrationalzahl, so kann die Differentiation beliebig weit fortgesetzt werden.

3. Ist

$$y = a^x,$$

so ist das erste Differential

$$dy = a^x\, l(a)\, dx$$

und der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = a^x\, l(a).$$

Demnach ist das zweite Differential

$$d^2 y = l(a)\, dx.\; d(a^x);$$

aber es ist

$$d(a^x) = a^x l(a) dx,$$

daher

$$d^2 y = l(a) dx. a^x l(a) dx$$
$$= a^x (l(a))^2 dx^2$$

und folglich der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^x (l(a))^2.$$

Ebenso erhält man das dritte Differential

$$d^3 y = a^x (l(a))^3 dx^3$$

und den dritten Differentialquotienten

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = a^x (l(a))^3.$$

Man hat daher allgemein für das $n$te Differential

$$d^n y = a^x (l(a))^n dx^n$$

und für den $n$ten Differentialquotienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (l(a))^n.$$

Wenn dagegen x negativ ist, so wird das $n$te Differential

$$d^n y = \pm a^{-x} (l(a))^n dx^n$$

und der $n$te Differentialquotient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \pm a^{-x} (l(a))^n,$$

und es ist nun das positive oder negative Zeichen zu setzen, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

4. Ist

$$y = e^x,$$

so ist das erste Differential

$$dy = e^x dx$$

und der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = e^x;$$

demnach ist das zweite Differential

$$d^2 y = d(e^x) dx = e^x dx^2,$$

und der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x,$$

es ist daher allgemein das $n$te Differential

$$d^n y = e^x dx^n$$

und der $n$te Differentialquotient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x.$$

Ist x negativ, so ist das $n$te Differential

$$d^n y = \pm e^{-x} dx^n$$

und der $n$te Differentialquotient

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \pm e^{-x},$$

und es ist das positive oder negative Zeichen zu setzen, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

5. Ist

$$y = \log x,$$

so ist das erste Differential

$$dy = \frac{1}{x} \log e \, dx = x^{-1} \log e \, dx$$

und der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e = x^{-1} \log e.$$

Demnach ist das zweite Differential

$$d^2y = \log e \, dx \, . \, d(x^{-1}),$$

aber es ist

$$d(x^{-1}) = - x^{-2} dx,$$

daher

$$d^2y = - x^{-2} \log e \, dx^2 = - \frac{1}{x^2} \log e \, dx^2$$

und folglich der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - x^{-2} \log e = - \frac{1}{x^2} \log e.$$

Ferner ist für das dritte Differential

$$d^3y = - \log e \, dx^2 \, . \, d(x^{-2}),$$

aber es ist

$$d\,(x^{-2}) = -\,2x^{-3}\,dx,$$

daher

$$d^3y = 2\,x^{-3}\log e\;dx^3 = \frac{2}{x^3}\log e\;dx^3$$

und folglich der dritte Differentialquotient

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\,x^{-3}\log e = \frac{2}{x^3}\log e.$$

Ferner ist für das vierte Differential

$$d^4y = 2\log e\;dx^3\,.\,d\,(x^{-3}),$$

und weil

$$d\,(x^{-3}) = -\,3\,x^{-4}\,dx,$$

so ist

$$d^4y = -\,2\,.\,3\,.\,x^{-4}\log e\;dx^4$$

$$= -\,\frac{2\,.\,3}{x^4}\log e\;dx^4$$

und folglich der vierte Differentialquotient

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\,2\,.\,3\,x^{-4}\log e$$

$$= -\,\frac{2\,.\,3}{x^4}\log e.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für das fünfte Differential

$$d^5y = 2\,.\,3\,.\,4\,x^{-5}\log e\;dx^5$$

$$= \frac{2\,.\,3\,.\,4}{x^5}\log e\;dx^5$$

und für den fünften Differentialquotienten

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2\,.\,3\,.\,4\,x^{-5}\log e$$

$$= \frac{2\,.\,3\,.\,4}{x^5}\log e.$$

Wir haben daher allgemein für das $n$te Differential

$$d^ny = \pm\,\frac{2\,.\,3\,\ldots\,\overline{n-1}}{x^n}\log e\;dx^n$$

und für den $n$ten Differentialquotienten

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \pm\,\frac{2\,.\,3\,\ldots\,\overline{n-1}}{x^n}\log e,$$

und es ist nun das positive oder negative Zeichen zu nehmen, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

6. Für den natürlichen Logarithmus hat man nach dem Vorhergehenden ohne weiteres

$$y = l(x)$$

$$dy = \frac{1}{x} dx; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$d^2 y = -\frac{1}{x^2} dx^2; \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$d^3 y = \frac{2}{x^3} dx^3; \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$d^4 y = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} dx^4; \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$d^n y = \pm \frac{2 \cdot 3 \ldots \overline{n-1}}{x^n} dx^n; \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \pm \frac{2 \cdot 3 \ldots \overline{n-1}}{x^n},$$

und es ist hier ebenfalls das positive oder negative Zeichen zu nehmen, jenachdem n ungerade oder gerade ist.

7. Ist

$$y = \sin x,$$

so ist das erste Differential

$$dy = \cos x\, dx$$

und der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Das zweite Differential ist daher

$$d^2 y = -\sin x\, dx^2$$

und der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x.$$

Hieraus folgt ohne weiteres für das dritte Differential

$$d^3 y = -\cos x\, dx^3$$

und für den dritten Differentialquotienten

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x,$$

und das vierte Differential ist

$$d^4 y = \sin x\, dx^4$$

so wie der vierte Differentialquotient

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \sin x,$$

das ist aber wieder die ursprüngliche Funktion.

8. Ist

$$y = \cos x,$$

so ist das erste Differential

$$dy = -\sin x\, dx$$

und der erste Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x;$$

demnach ist das zweite Differential

$$d^2 y = -\cos x\, dx^2$$

und der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x.$$

Ferner ist das dritte Differential

$$d^3 y = \sin x\, dx^3$$

und der dritte Differentialquotient

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \sin x.$$

Endlich ist das vierte Differential

$$d^4 y = \cos x\, dx^4$$

und der vierte Differentialquotient

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \cos x;$$

das ist aber wieder die ursprüngliche Funktion.

§ 33.

Zusammengesetzte Funktionen.

1. Ist

$$y = v \pm w,$$

so ist

$$dy = dv \pm dw$$

und daher

$$d^2 y = d^2 v \pm d^2 w$$

u. s. f.

2. Ist

$$y = vw,$$

so ist

$$dy = v\,dw + w\,dv.$$

Ferner ist

$$d^2y = d(v\,dw) + d(w\,dv),$$

und weil

$$d(v\,dw) = v\,d^2w + dv\,dw$$
$$d(w\,dv) = w\,d^2v + dv\,dw,$$

so ist

$$d^2y = v\,d^2w + 2\,dv\,dw + w\,d^2v.$$

Weiter ist

$$d^3y = d(v\,d^2w) + d(2\,dv\,dw) + d(w\,d^2v),$$

und weil

$$d(v\,d^2w) = v\,d^3w + dv\,d^2w$$
$$d(2\,dv\,dw) = 2\,dv\,d^2w + 2\,d^2v\,dw$$
$$d(w\,d^2v) = w\,d^3v + d^2v\,dw,$$

so ist

$$d^3y = v\,d^3w + 3\,dv\,d^2w + 3\,d^2v\,dw + w\,d^3v.$$

Auf gleiche Weise kann man die folgenden Differentiale bilden. Die hierbei sich ergebenden Zahlencoëfficienten sind die bekannten Binomialcoëfficienten.

3. Ist

$$y = \text{arc}\,(\sin = x),$$

so ist

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

daher

$$d^2y = -\tfrac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\,.\,-2x\,dx^2$$
$$= (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\,.\,x\,dx^2$$
$$= \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}\,dx^2$$

u. s. f.

4. Ist

$$y = \text{arc}\,(\tan = x),$$

so ist

$$dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx = (1 + x^2)^{-1}\,dx.$$

daher

$$d^2y = -(1 + x^2)^{-2}\,.\,2x\,dx^2$$
$$= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx^2$$

u. s. f.

§ 34.

Beziehungen zwischen einer Funktion und den von ihr abgeleiteten Funktionen oder den Differentialquotienten.

Wir haben gesehen, dass aus einer jeden Funktion von x durch Differentiation eine neue Funktion von x, die abgeleitete Funktion oder der Differentialquotient hervorgeht, auf welchen die Operation des Differentiirens wieder angewendet werden kann, so dass hieraus wieder eine neue Funktion von x hervorgeht, und dass diese Operation so lange fortgesetzt werden kann, als der erhaltene Differentialquotient eine Funktion von x ist, dass aber das Verfahren ein Ende hat, wenn ein Differentialquotient erscheint, welcher gleich einer Constanten ist. Es ist daher jeder folgende Differentialquotient der Differentialquotient des vorhergehenden, diesen als Funktion betrachtet, und mithin bestehen auch alle diejenigen Beziehungen, welche zwischen einer Funktion und ihrem ersten Differentialquotienten bestehen, zwischen einem jeden Differentialquotienten und dem darauf folgenden.

Wir haben ferner gesehen, dass die Veränderungen, welche die unabhängige Veränderliche hierbei erleidet, lediglich darin bestehen, dass sie bei jeder folgenden Differentiation um den unendlich kleinen constanten Werth dx wächst, so dass bei der ersten Differentiation der Werth von x in den Werth $x + dx$, bei der zweiten Differentiation der Werth von $x + dx$ in den Werth $x + 2dx$, bei der dritten Differentiation der Werth von $x + 2dx$ in den Werth $x + 3dx$ und sofort übergeht, so dass bei der $n$ten Differentiation der Werth von $x + (n - 1)dx$ in den Werth $x + ndx$ übergeht.

Die Veränderungen dagegen, welche die Funktionswerthe hierbei erleiden, sind die aufeinanderfolgenden Differentiale der Funktion; und es bestehen daher die aufeinanderfolgenden Funktionswerthe stets aus der Summe des vorausgegangenen Funktionswerthes und aus dem Differential des vorausgegangenen Funktionswerthes.

Ist

$$f(x) = y$$

der ursprüngliche Funktionswerth, so ist

$$dy$$

die Aenderung dieses Funktionswerthes bei der ersten Differentiation, und

$$y + dy$$

ist der erste folgende Werth der Funktion; oder es ist

$$f(x + dx) = y + dy.$$

Ferner ist

$$d(y + dy) = dy + d^2 y$$

die Aenderung dieses Funktionswerthes bei der zweiten Differentiation und daher

$$y + dy + dy + d^2 y = y + 2\,dy + d^2 y$$

der zweite folgende Werth der Funktion, oder es ist

$$f(x + 2\,dx) = y + 2\,dy + d^2 y.$$

Ferner ist

$$d(y + 2\,dy + d^2 y) = dy + 2\,d^2 y + d^3 y$$

die Aenderung dieses Funktionswerthes bei der dritten Differentiation und daher

$$y + 2\,dy + d^2 y + dy + 2\,d^2 y + d^3 y = y + 3\,dy + 3\,d^2 y + d^3 y$$

der dritte folgende Werth der Funktion, oder es ist

$$f(x + 3\,dx) = y + 3\,dy + 3\,d^2 y + d^3 y.$$

Weiter ist

$$d(y + 3\,dy + 3\,d^2 y + d^3 y) = dy + 3\,d^2 y + 3\,d^3 y + d^4 y$$

die Aenderung dieses Funktionswerthes bei der vierten Differentiation und daher

$$y + 3\,dy + 3\,d^2 y + d^3 y + dy + 3\,d^2 y + 3\,d^3 y + d^4 y$$
$$= y + 4\,dy + 6\,d^2 y + 4\,d^3 y + d^4 y$$

der vierte folgende Werth der Funktion, oder es ist

$$f(x + 4\,dx) = y + 4\,dy + 6\,d^2 y + 4\,d^3 y + d^4 y.$$

Auf diese Weise kann man fortfahren, und für jeden folgenden veränderten Werth der unabhängigen Veränderlichen den zugehörigen Funktionswerth bestimmen. Man erkennt aber leicht aus dem Vorstehenden das Gesetz, nach welchem die Reihen, welche die aufeinanderfolgenden Funktionswerthe darstellen, gebildet sind. Denn die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihen, sind die aufeinanderfolgenden Differentiale der Funktion, und die Vorzahlen, mit welchen die Glieder multiplicirt sind, sind die

Binomialcoëfficienten, entsprechend der sovielten Potenz als Differentiationen statt gefunden haben.

Es ist daher der $n$te folgende Werth der Funktion

$$y + ndy + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, d^2y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, d^3y + \cdots + d^n y.$$

Da nun hierbei x in $x + ndx$ übergegangen ist, so ist offenbar

$$f(x + ndx) = y + ndy + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\, d^2y$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, d^3y + \cdots + d^n y.$$

Dafür können wir auch schreiben

$$f\,(x + ndx) = y + \frac{n}{1}\, dy + \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2}\, d^2y$$
$$+ \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} d^3y + \cdots + d^n y.$$

Da dx ein constanter, wenn auch unendlich kleiner Werth ist, so können wir das zweite Glied der Reihe mit dx, das dritte mit dx^2, das vierte mit dx^3 u. s. f., das $(n + 1)$te mit dx^n multipliciren und dividiren und daher der vorstehenden Reihe folgende Gestalt geben

$$f(x + ndx) = y + \frac{(ndx)}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{(ndx)^2}{1\,.\,2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ \frac{(ndx)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots + \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Wenn nun auch dx ein unendlich kleiner von Null kaum verschiedener Werth ist, so ist es doch immer ein Werth und nicht absolut Null. Wenn man daher recht viele solcher unendlich kleiner Werthe nimmt, so muss ihre Summe um so mehr einem endlichen, also angebbaren Werthe sich nähern, jemehr solcher Werthe man nimmt, und diese Summe muss in einen endlichen, also angebbaren, Werth übergehen, wenn die Anzahl dieser unendlich kleinen Werthe unendlich gross wird. Lassen wir daher n, also die Anzahl der aufeinanderfolgenden Differentiationen und also auch die Anzahl der unendlich kleinen Werthe dx unendlich gross werden, so geht ndx in einen endlichen Werth über. Bezeichnen wir diesen Werth mit h und berücksichtigen, dass alle Glieder der letzten Reihe, welche n zum Nenner haben, in Null übergehen, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an

$$f(x+h) = y + \frac{h}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1\,.\,2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots,$$

oder auch, wenn man die andere Bezeichnung der Differentialquotienten einführt,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(x) + \cdots.$$

Diese Gleichung zeigt, wie der geänderte Werth einer Funktion ausgedrückt und bestimmt werden kann, wenn man sich vorstellt, dass durch eine unendlich grosse Anzahl von aufeinanderfolgenden Differentiationen der Werth der unabhängigen Veränderlichen, auf welchen die erste Differentiation sich bezieht, um einen endlichen angebbaren Werth gewachsen ist.

Die Möglichkeit, durch die vorstehende Reihe den in der angegebenen Weise geänderten Funktionswerth zu bestimmen, ist natürlich an die Bedingung gebunden, dass die ursprüngliche Funktion sowol als jede von ihr abgeleitete Funktion innerhalb desjenigen Intervalles, auf welches die Differentiationen sich beziehen, continuirlich oder endlich und stetig bleibt.

Die Beschaffenheit der Reihe, welche man die Taylor'sche Reihe nennt, hängt von der Beschaffenheit der Funktion ab. Ist die Funktion von der Art, dass sie nur eine endliche Anzahl von Differentiationen zulässt, so ist auch die Reihe endlich und ihr Werth ein absolut bestimmter; lässt aber die Funktion eine unendliche Anzahl von Differentiationen zu, so ist die Reihe unendlich und daher nur brauchbar, wenn sie convergirt und sich ihr Grenzwerth bestimmen lässt.

Nimmt man zum Ausgangspunkte der Differentiationen denjenigen Funktionswerth, welcher für $x = 0$ sich ergibt, so hat man in der obigen Gleichung überall $x = 0$ zu setzen. Hierdurch erhalten wir aber die Gleichung

$$f(0+h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(0) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(0) + \cdots$$

Schreibt man nun x für h, wo x dann diejenige Zunahme ist, welche die unabhängige Veränderliche von Null aus erhalten hat, so wird die Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(0) + \cdots,$$

und hier stellt die Reihe diejenige Veränderung des Funktionswerthes dar, welche einer Zunahme der unabhängigen Veränderlichen von 0 bis zu dem Werthe x entspricht.

Auch die Giltigkeit dieser Reihe, welche man die Maclaurin'sche Reihe nennt, ist an die Bedingung gebunden, dass die Funktion und ihre Abgeleiteten endlich und stetig bleiben, wenn die unabhängige Veränderliche das Intervall von 0 bis x durchläuft.

VI. Abschnitt.

Entwickelung von Funktionen in Reihen nach dem Taylor'schen und Maclaurin'schen Satze.

§ 35.

Die Binomialreihe.

Es sei

$$f(x) = x^n,$$

so ist

$$f(x + h) = (x + h)^n.$$

Nun ist

$$f'(x) = n x^{n-1},$$
$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2},$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2) x^{n-3}.$$

u. s. f.

Setzt man diese Werthe in die Taylor'sche Reihe ein, so erhält man

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} x^{n-2} h^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^{n-3} h^3 + \cdots$$

Hier ist n eine ganz beliebige Zahl; es geht also hieraus hervor, dass der binomische Satz nicht nur für positive ganze Exponenten, sondern dass er für jeden beliebigen Exponenten gilt. Für positive ganze Exponenten ist die Reihe endlich, für jeden andern Exponenten aber unendlich; daher ist sie im letzteren Falle nur brauchbar, wenn sie convergirt. Die Reihe convergirt aber, wenn h kleiner als x, wenn also der zweite Theil des Binomiums kleiner als der erste ist.

Für den Fall dass

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}},$$

hat man

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots$$

Diese Reihe convergirt, wenn x kleiner ist als 1, und ihre Summe ist für hinlänglich kleine Werthe von x nahezu

$$1 + \frac{x}{2}.$$

§ 36.

Die logarithmische Reihe.

Es sei

$$f(x) = \log x,$$

so ist

$$f(x + h) = \log (x + h).$$

Nun ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log e$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \log e$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \log e,$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \log e$$

u. s. f.

Setzt man diese Werthe in die Taylor'sche Reihe ein, so erhält man

$$\log (x + h) = \log x + \log e \left(\frac{1}{x} h - \frac{1}{2x^2} h^2 + \frac{1}{3x^3} h^3 - \frac{1}{4x^4} h^4 + \cdots\right).$$

Setzt man $x = 1$, so geht die Reihe in folgende über

$$\log (1 + h) = \log e \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots\right).$$

Für den natürlichen Logarithmus ist $l(e) = 1$, daher ist für diesen

$$l(x + h) = l(x) + \frac{1}{x} h - \frac{1}{2x^2} h^2 + \frac{1}{3x^3} h^3 - \frac{1}{4x^4} h^4 + \cdots,$$

und wenn man $x = 1$ setzt,

$$l(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots$$

§ 37.

Die Exponentialreihe.

Es sei

$$f(x) = a^x,$$

so ist

$$f'(x) = a^x l(a),$$
$$f''(x) = a^x (l(a))^2,$$
$$f'''(x) = a^x (l(a))^3,$$
$$f^{IV}(x) = a^x (l(a))^4$$

u. s. f.

Demnach ist für $x = 0$

$$f(0) = a^0 = 1,$$
$$f'(0) = l(a),$$
$$f''(0) = (l(a))^2,$$
$$f'''(0) = (l(a))^3$$

u. s. f.

Werden diese Werthe in die Maclaurin'sche Reihe eingesetzt, so folgt

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} l(a) + \frac{x^2}{1\,.\,2} (l(a))^2 + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} (l(a))^3 + \cdots$$

Setzt man e für a, so ist $l(e) = 1$, und die Reihe wird

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

Wird endlich in der letzten Reihe $x = 1$ gesetzt, so kommt

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

§ 38.

Die Sinusreihe.

Es sei

$$f(x) = \sin x,$$

so ist

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{IV}(x) = \sin x$$

u. s. f.,

daher für $x = 0$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \sin 0 = 0, \\
f'(0) &= \cos 0 = 1, \\
f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\
f'''(0) &= -\cos 0 = -1, \\
f^{IV}(0) &= \sin 0 = 0
\end{aligned}
$$

u. s. f.

Nach der Maclaurin'schen Reihe hat man daher

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

§ 39.

Die Cosinusreihe.

Es sei

$$f(x) = \cos x,$$

so ist

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x, \\
f''(x) &= -\cos x, \\
f'''(x) &= \sin x, \\
f^{IV}(x) &= \cos x
\end{aligned}
$$

u. s. f.,

daher für $x = 0$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \cos 0 = 1, \\
f'(0) &= -\sin 0 = 0, \\
f''(0) &= -\cos 0 = -1, \\
f'''(0) &= \sin 0 = 0 \\
f^{IV}(0) &= \cos 0 = 1
\end{aligned}
$$

u. s. f.

Nach der Maclaurin'schen Reihe hat man daher

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

§ 40.

Reihe für arcus sinus.

Es sei

$$f(x) = \operatorname{arc}(\sin = x),$$

so ist

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = x\,(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x) = (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\,(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f^{IV}(x) = 9x\,(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} + 15x^3\,(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}},$$

$$f^{V}(x) = 9\,(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} + 90x^2\,(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}} + 105x^4\,(1 - x^2)^{-\frac{9}{2}}$$

u. s. f.,

daher für $x = 0$

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(0) = 1; \quad f^{IV}(0) = 0; \quad f^{V}(0) = 9$$

u. s. f.

Setzt man dieses in die Maclaurin'sche Reihe, so erhält man

$$\text{arc}\,(\sin = x) = x + \frac{x^3}{2\,.\,3} + \frac{3x^5}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{3\,.\,5\,.\,x^7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \cdots$$

§ 41.

Reihe für arcus tangens.

Es sei

$$f(x) = \text{arc}\,(\tan = x),$$

so ist

$$f'(x) = (1 + x^2)^{-1},$$

$$f''(x) = -2x\,(1 + x^2)^{-2},$$

$$f'''(x) = -2\,(1 + x^2)^{-2} + 8x^2\,(1 + x^2)^{-3},$$

$$f^{IV}(x) = 24x\,(1 + x^2)^{-3} - 48x^3\,(1 + x^2)^{-4},$$

$$f^{V}(x) = 24\,(1 + x^2)^{-3} - 288x^2\,(1 + x^2)^{-4} + 384x^4\,(1 + x^2)^{-5}$$

u. s. f.,

daher für $x = 0$

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(0) = -2; \quad f^{IV}(0) = 0; \quad f^{V}(0) = 24$$

u. s. f.

Wird dieses in die Maclaurin'sche Reihe eingesetzt, so erhält man

$$\text{arc}\,(\tan = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Setzt man $x = 1$, so ist

$$\text{arc}\ (\tan = 1) = \frac{\pi}{4},$$

daher

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Mit Hilfe dieser, allerdings sehr langsam convergirenden, Reihe kann die Zahl π berechnet werden.

§ 42.

Die Moivre'sche Binomialformel.

Wenn man in der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots$$

$-x$ für x setzt, so erhält man

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so ist

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \cdots\right),$$

und subtrahirt man diese Gleichungen, so ist

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\right).$$

Setzt man in den so erhaltenen Gleichungen $x\sqrt{-1}$ für x und beachtet, dass $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^2 = -1$; $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^4 = +1$; $(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$ u. s. w., so ergibt sich

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \frac{x^8}{1.2\ldots.8} - \cdots\right),$$

$$e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = 2\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \cdots\right)\sqrt{-1}.$$

Vergleicht man diese letzteren Reihen mit den Reihen für den Sinus und den Cosinus, so ist

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x,$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \sin x\sqrt{-1}.$$

Addirt man die beiden Gleichungen, so kommt

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x\sqrt{-1}.$$

Setzt man in diese Gleichung mx für x, wo m irgend eine reelle Zahl bedeutet, so erhält man

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1}.$$

Erhebt man dagegen die Gleichung zur $m$ten Potenz, so wird

$$e^{mx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt aber

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$

und diese Gleichung wird die Moivre'sche Binomialformel genannt.

VII. Abschnitt.

Weitere Anwendungen der Taylor'schen Reihe.

§ 43.

Von den grössten und kleinsten Werthen der Funktionen.

Wir haben gesehen, dass der Werth einer Funktion überall da im Wachsen begriffen ist, wo $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, und dass er überall da abnimmt, wo $\frac{dy}{dx}$ negativ ist, so wie, dass an denjenigen Stellen, wo $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, weder eine Zunahme noch eine Abnahme der Funktion stattfindet. Das Nullwerden des ersten Differentialquotienten zeigt also an, dass an derjenigen Stelle, wo dieses geschieht, die Funktion weder im Zunehmen noch im Abnehmen begriffen ist.

Es sind nun hier zwei Fälle möglich. Entweder war die Funktion vorher, ehe sie diese Stelle erreichte, im Zunehmen begriffen und sie nimmt nachher ab, oder sie war vorher im Abnehmen begriffen und nimmt von dieser Stelle an wieder zu. Im ersteren Falle hat sie an der fraglichen Stelle einen grössten

Werth oder ein Maximum, im zweiten Falle hat sie an der fraglichen Stelle einen kleinsten Werth oder ein Minimum erreicht. Hierbei ist aber unter dem Maximum nicht der absolut grösste und unter dem Minimum nicht der absolut kleinste Werth der Funktion überhaupt zu verstehen; denn eine Funktion kann mehrere Maximal- und Minimalwerthe erreichen. Das Maximum oder Minimum bezieht sich nur auf diejenigen Funktionswerthe, welche in der Nähe desjenigen liegen, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ wird. Denn es kann recht gut vorkommen, dass der absolute Werth eines Minimum grösser als der absolute Werth eines Maximum ist.

Ist der Funktionswerth, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, ein Maximum, so sind die unmittelbar daneben liegenden Funktionswerthe, der unmittelbar vorausgehende sowol als der unmittelbar folgende, kleiner, und ist der Funktionswerth, für welchen $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, ein Minimum, so sind die unmittelbar daneben liegenden Funktionswerthe, der unmittelbar vorausgehende sowol als der unmittelbar folgende, grösser als derjenige Funktionswerth, für welchen das Nullwerden des ersten Differentialquotienten eintritt.

Um nun zu untersuchen, ob eine Funktion Maximal- und Minimalwerthe besitzt, bildet man ihre abgeleiteten Funktionen oder die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten. Setzt man sodann den ersten Differentialquotienten gleich Null und bestimmt die Wurzeln dieser Gleichung d. h. diejenigen Werthe von x, für welche der erste Differentialquotient Null wird, so sind das auch diejenigen Werthe von x, für welche die Funktion Maximal- oder Minimalwerthe besitzt.

Um aber weiter zu untersuchen, ob die für x gefundenen Werthe Maximal- oder Minimalwerthen der Funktion entsprechen, verfahren wir auf folgende Weise.

Bezeichnen wir einen solchen Werth von x mit a und mit h eine sehr kleine Zu- oder Abnahme von x in der Nähe von a, so sind $f(a - h)$ und $f(a + h)$ Funktionswerthe, welche zu beiden Seiten des Funktionswerthes $f(a)$ liegen; und man kann den Werth von h so klein nehmen, als nöthig ist, um dem Funktionswerthe $f(a)$ von beiden Seiten her so nahe zu kommen, als man nur will.

Man hat aber nach dem Taylor'schen Satze

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots$$

$$f(a-h) = f(a) - \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) - \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots$$

und hieraus, so wie mit Rücksicht darauf, dass $f'(a) = 0$ ist,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots$$

$$f(a-h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a) - \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots$$

Gehört nun a einem Maximalwerthe der Funktion an, so ist $f(a)$ grösser als $f(a+h)$ und auch grösser als $f(a-h)$; deshalb sind die linken Seiten der beiden vorstehenden Gleichungen negativ, und folglich müssen auch die rechten Seiten negativ sein; gehört dagegen a einem Minimalwerthe der Funktion an, so ist $f(a)$ kleiner als $f(a+h)$ und auch kleiner als $f(a-h)$; deshalb sind die linken Seiten der beiden vorstehenden Gleichungen positiv, und folglich müssen auch die rechten Seiten positiv sein.

Es ist bereits bemerkt worden, dass man den Werth von h so klein nehmen kann, als man nur will oder für nöthig hält. Wir können daher den Werth von h so klein annehmen, dass alle Glieder rechts, welche mit h^3 und den höheren Potenzen von h multiplicirt sind, gegen das erste Glied, welches mit h^2 multiplicirt ist, verschwinden; und dann hängt das Vorzeichen auf der rechten Seite, weil h^2 stets positiv ist, lediglich von dem Vorzeichen von $f''(a)$ ab. Ist daher $f''(a)$ negativ, so gehört a einem Maximalwerthe, und ist $f''(a)$ positiv, so gehört a einem Minimalwerthe der Funktion an.

Man hat daher bei der Untersuchung der Maximal- oder Minimalwerthe einer Funktion in folgender Weise zu verfahren. Man bildet den ersten und zweiten Differentialquotienten der Funktion, setzt den ersten Differentialquotienten gleich Null und bestimmt diejenigen Werthe von x, welche das Nullwerden des ersten Differentialquotienten bewirken; diese Werthe setzt man für x in den zweiten Differentialquotienten. Diejenigen Werthe von x, welche den zweiten Differentialquotienten negativ machen, entsprechen Maximalwerthen, und diejenigen Werthe von x, welche den zweiten Differentialquotienten positiv machen, entsprechen Minimalwerthen der Funktion. Setzt man endlich diese Werthe von x in die ursprüngliche oder die Stammfunktion ein, so erhält man diese Maximalwerthe oder Minimalwerthe selbst.

Wenn diejenigen Werthe von x, welche aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ hervorgehen, auch den zweiten Differentialquotienten zu Null machen, so müssen die höheren Differentialquotienten entscheiden. Nun haben aber die ungeradzahligen Differentialquotienten in beiden Reihen entgegengesetzte Vorzeichen, daher muss auch für die fraglichen Werthe der dritte Differentialquotient Null sein; und nun entscheidet das Vorzeichen des vierten Differentialquotienten, ob ein solcher Werth von x einem Maximum oder einem Minimum der Funktion entspricht. Wird der dritte Differentialquotient nicht zu Null, so entsprechen die fraglichen Werthe von x weder einem Maximum noch einem Minimum. Dasselbe gilt von den folgenden Differentialquotienten.

Wir können daher allgemein sagen: die aus $\frac{dy}{dx} = 0$ hervorgehenden Werthe von x entsprechen nur dann einem Maximum oder Minimum der Funktion, wenn der erste, nicht zu Null werdende Differentialquotient ein geradzahliger ist; ist dagegen der erste, nicht zu Null werdende Differentialquotient ein ungeradzahliger, so entsprechen die fraglichen Werthe von x weder einem Maximum noch einem Minimum der Funktion.

Beispiele.

1. Es sei

$$y = ax - x^2,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x,$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

Aus

$$a - 2x = 0$$

folgt

$$x = \tfrac{1}{2}a,$$

und da der zweite Differentialquotient negativ ist, so entspricht dieser Werth von x einem Maximalwerthe der Funktion. Setzt man daher diesen Werth von x in die gegebene Gleichung, so wird

$$y = \tfrac{1}{4}a^2,$$

und dieses ist ein Maximalwerth von y.

2. Es sei

$$y = x(a - x)^2,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = a^2 - 4ax + 3x^2$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4a + 6x.$$

Aus der Gleichung

$$a^2 - 4ax + 3x^2 = 0$$

ergeben sich für x die Werthe von $x = a$ und $x = \frac{1}{3}a$.

Es wird nun für $x = a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a,$$

daher entspricht dieser Werth von x einem Minimum der Funktion; ferner wird für $x = \frac{1}{3}a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2a,$$

daher entspricht dieser Werth von x einem Maximum der Funktion.

Setzt man in der gegebenen Gleichung $x = a$, so wird

$$y = 0,$$

und dieses ist der Minimalwerth der Funktion; setzt man dagegen in der gegebenen Gleichung $x = \frac{1}{3}a$, so wird

$$y = \frac{4}{27}a^3,$$

und dieses ist der Maximalwerth der Funktion.

3. Mit zwei constanten Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen veränderlichen Winkel soll dasjenige Dreieck construirt werden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Bezeichnet man den veränderlichen Winkel mit x, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$y = \frac{1}{2}ab\sin x,$$

demnach ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}ab\cos x$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}ab\sin x.$$

Aus der Bedingung

$$\frac{1}{2}ab\cos x = 0$$

folgt $\cos x = 0$, also $x = 90^0$, und da für diesen Werth von x $\sin x = 1$ ist, so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\,ab,$$

mithin entspricht der Werth $x = 90^0$ einem Maximum der Funktion; für $x = 90^0$ wird aber

$$y = \tfrac{1}{2}\,ab,$$

und folglich ist das Dreieck dann am grössten, wenn der von den constanten Seiten eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

§ 44.

Die unbestimmten Formen.

1. Wenn in dem Quotienten $\frac{f(x)}{F(x)}$ für irgend einen Werth von x, etwa für $x = a$, beide Funktionen zu Null werden, so erhält man

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

welches aber nicht Null, sondern eine unbestimmte oder vieldeutige Form ist. Um den wahren Werth zu erhalten, den der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ annimmt, legen wir dem x einen Werth bei, welcher in der Nähe von a sich befindet, indem wir $a + h$ für x setzen, und bestimmen den Grenzwerth, in welchen der Bruch $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ übergeht, wenn h gegen Null geht oder unbegrenzt abnimmt; wobei aber vorausgesetzt werden muss, dass die Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ in der Nähe des Werthes $x = a$ stetig bleibt. Wir haben dann nach dem Taylor'schen Satze

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots}{F(a) + \frac{h}{1} F'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a) + \ldots},$$

weil aber $f(a)$ und $F(a)$ Null sind, so erhalten wir, wenn wir die rechte Seite im Zähler und Nenner mit h dividiren,

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a) + \frac{h}{1.2} f''(a) + \ldots}{F'(a) + \frac{h}{1.2} F''(a) + \ldots},$$

und lassen wir nun h in Null übergehen, so wird

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Der Werth der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, welche die gebrochene Funktion für $x = a$ annimmt, wird sonach ermittelt, wenn man die ersten abgeleiteten Funktionen des Zählers und Nenners bildet und in diesen $x = a$ setzt.

Wenn hierbei auch $f'(a)$ und $F'(a)$ zu Null werden, so hat man weiter

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{\frac{h}{1.2} f''(a) + \frac{h^2}{1.2.3} f'''(a) + \ldots}{\frac{h}{1.2} F''(a) + \frac{h^2}{1.2.3} F'''(a) + \ldots}.$$

Dividirt man hier wieder auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit h und lässt sodann h in Null übergehen, so wird

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)},$$

und es wird dann der Werth der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ gleich dem Quotienten aus den zweiten abgeleiteten Funktionen, wenn man in diesen $x = a$ setzt.

Dieses Verfahren kann man, so weit als nöthig ist, fortsetzen, und der wahre Werth der gebrochenen Funktion ist der Quotient aus denjenigen beiden abgeleiteten Funktionen derselben Ordnung, welche für $x = a$ nicht zu Null werden.

Sind die ersten nicht zu Null werdenden abgeleiteten Funktionen in Zähler und Nenner nicht von derselben Ordnung, so wird die gebrochene Funktion entweder Null oder unendlich.

Beispiele.

1. Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Für $x = 1$ wird

$$\frac{f(1)}{F(1)} = \frac{0}{0}.$$

Es ist aber

$$f'(x) = \frac{d(1-x^n)}{dx} = -nx^{n-1},$$

$$F'(x) = \frac{d(1-x)}{dx} = -1,$$

daher

$$\frac{f'(1)}{F'(1)} = \frac{-n}{-1} = n,$$

folglich ist auch

$$\frac{f(1)}{F(1)} = n,$$

oder der wahre Werth von

$$\frac{1-x^n}{1-x}$$

für $x = 1$ ist n.

2. Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Für $x = 0$ wird

$$\frac{f(0)}{F(0)} = \frac{0}{0}.$$

Es ist nun

$$f'(x) = \frac{d\,(1-\cos x)}{d\,x} = \sin x,$$

$$F'(x) = \frac{d(x^2)}{d\,x} = 2\,x,$$

daher

$$\frac{f'(0)}{F'(0)} = \frac{0}{0}.$$

Weiter ist

$$f''(x) = \frac{d^2\,(1-\cos x)}{d\,x^2} = \frac{d\sin x}{d\,x} = \cos x,$$

$$F''(x) = \frac{d^2(x^2)}{d\,x^2} = \frac{d(2\,x)}{d\,x} = 2,$$

daher

$$\frac{f''(0)}{F''(0)} = \frac{1}{2}.$$

und der wahre Werth von

$$\frac{1-\cos x}{x^2}$$

für $x = 0$ ist $\frac{1}{2}$.

2. Werden $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ unendlich, so wird $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{\infty}{\infty}$, welches ebenfalls eine unbestimmte Form ist. Setzen wir nun voraus, es sei $\frac{f(x)}{F(x)}$ stetig, wenn x Werthe hat, welche in der Nähe von a liegen, so können wir setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

und dann ist für $x = a$

$$\frac{\frac{1}{F(a)}}{\frac{1}{f(a)}} = \frac{0}{0},$$

daher auch

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

Der erste Differentialquotient von $\frac{1}{F(x)}$ ist aber $-\frac{F'(x)}{F(x)^2}$ und der erste Differentialquotient von $\frac{1}{f(x)}$ ist $-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$, daher haben wir nach dem Vorhergegangenen

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{-\frac{F'(a)}{F(a)^2}}{-\frac{f'(a)}{f(a)^2}} = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot \frac{f(a)^2}{F(a)^2},$$

oder wenn man zu beiden Seiten mit $\frac{f(a)}{F(a)}$ dividirt

$$1 = \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot \frac{f(a)}{F(a)};$$

hieraus folgt aber

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Man hat also bei der Bestimmung des Werthes der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ebenso zu verfahren wie bei der Bestimmung des Werthes der Form $\frac{0}{0}$.

3. Wenn in dem Produkte $f(x) \cdot F(x)$ für $x = a$ die Funktion $f(a) = 0$ und die Funktion $F(a) = \infty$ wird, so entsteht die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$, welche sich aber auch auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückführen lässt. Denn es ist

$$f(x) \cdot F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}},$$

daher auch

$$f(a) \cdot F(a) = \frac{f(a)}{\frac{1}{F(a)}} = \frac{0}{0}.$$

Es ist mithin auch hier dasselbe Verfahren anwendbar.

4. Wenn bei der Differenz

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

die Funktionen $F(x)$ und $\psi(x)$ für $x = a$ zu Null werden, während $f(x)$ und $\varphi(x)$ endliche Werthe erhalten, so wird

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty - \infty.$$

Es ist aber

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,F(x)}{F(x)\,\psi(x)},$$

daher auch

$$\frac{f(a)\,\psi(a) - \varphi(a)\,F(a)}{F(a)\,\psi(a)} = \frac{0}{0}.$$

Folglich ist auch hier dasselbe Verfahren anzuwenden.

5. Wenn in dem Ausdrucke y^z, wo y und z Funktionen von x sind, für einen gewissen Werth $x = a$, sowol y als z Null werden, so hat man die unbestimmte Form 0^0; wird y unendlich und z zu Null, so hat man die Form ∞^0, und wird $y = 1$ und z unendlich, so hat man die Form 1^∞. Nun ist

$$l(y^z) = z\,l(y),$$

daher

$$y^z = e^{z\,l(y)};$$

bestimmt man daher den Werth, den $z\,l(y)$ für $x = a$ annimmt, und ist dieser Werth $= m$, so hat man

$$y^z = e^m$$

für $x = a$.

§ 45.

Auflösung numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die Auflösung einer numerischen Gleichung $f(x) = 0$ besteht bekanntlich darin, ihre Wurzeln aufzusuchen, also diejenigen Werthe von x zu bestimmen, welche, in die Gleichung eingesetzt, dieselbe wirklich zu Null machen.

Bezieht man die Gleichung auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, so kann man diejenige Kurve construiren, welche der Gleichung entspricht, wenn man dem x beliebige Werthe beilegt und die daraus hervorgehenden Funktionswerthe berechnet. Eine hinlängliche Anzahl von Punkten, welche auf diese Weise gefunden werden, charakterisiren den Lauf der Kurve, welche man erhält, wenn man diese Punkte stetig verbindet. Es ergeben sich aber hierbei auch näherungsweise diejenigen Punkte, in welchen die Kurve die Abscissenaxe schneidet, für welche also $f(x) = 0$ ist. Diejenigen Werthe von x, welche diesen Punkten entsprechen, sind daher angenäherte Werthe der Wurzeln der Gleichung, die man nach der der Zeichnung zu Grunde gelegten Maasseinheit als Zahlen ausdrücken kann.

Ist nun a ein solcher angenäherter Wurzelwerth und $a + h$ die wirkliche Wurzel, also h derjenige Fehler, um welchen die angenäherte Wurzel von der wirklichen Wurzel abweicht, so hat man nach dem Taylor'schen Satze

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 . 2} f''(a) + \cdots$$

Weil aber $a + h$ eine wirkliche Wurzel der Gleichung ist, so ist

$$f(a+h) = 0.$$

Setzt man daher voraus, der Fehler h sei so klein, dass die Glieder mit h^2 und den höheren Potenzen von h vernachlässigt werden können, so hat man

$$0 = f(a) + h f'(a)$$

und hieraus

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Man findet also näherungsweise den Fehler, wenn man den Näherungswerth der Wurzel in die Funktion und ihre erste Abgeleitete einsetzt, die erstere durch die letztere dividirt und diesem Quotienten das entgegengesetzte Vorzeichen gibt.

Entweder ist nun der so gefundene Wurzelwerth $a + h$ genau genug, oder es ist eine grössere Genauigkeit erforderlich. Im letzteren Falle setze man $a + h = b$, betrachte b als einen angenäherten Wurzelwerth und verfahre mit b genau so wie vorher mit a. Man findet dann als zweite Correction der Wurzel

$$h_1 = -\frac{f(b)}{f'(b)}$$

und als zweiten noch genaueren Werth der Wurzel $b + h_1$.

Dieses Verfahren kann man fortsetzen, so weit es nöthig erscheint.

VIII. Abschnitt.

Das Zerlegen gebrochener rationaler Funktionen in Partialbrüche.

§ 46.

Allgemeines.

Eine Funktion von der Form

$$a + bx + cx^2 + \dots$$

wird eine ganze rationale Funktion von x genannt, und der höchste Exponent von x bestimmt den Grad derselben. Der Quotient zweier solcher Funktionen ist eine gebrochene rationale algebraische Funktion von x und zwar eine echt gebrochene, wenn der Nenner von höherem Grade als der Zähler ist, dagegen eine unecht gebrochene, wenn der Zähler von höherem Grade als der Nenner ist.

Wenn man eine Summe von Brüchen vereinigt, welche sämmtlich Funktionen von x sind, so erhält man eine gebrochene Funktion von x, deren Nenner gleich dem Produkte aus den Nennern sämmtlicher vereinigter Brüche ist, oder deren Nenner doch so beschaffen ist, dass jeder Nenner der vereinigten Brüche darin als Faktor enthalten ist. Wenn wir z. B. die Brüche

$$\frac{m}{x-a} \text{ und } \frac{n}{x-b},$$

welche Funktionen von x sind, durch Addition vereinigen, so erhalten wir

$$\frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} = \frac{(m+n)x - (mb+na)}{x^2 - (a+b)x + ab},$$

also eine gebrochene Funktion von der Form

$$\frac{Mx+N}{x^2+Px+Q},$$

oder wenn wir die Brüche

$$\frac{m}{(x-a)^2} \text{ und } \frac{n}{x-a},$$

welche Funktionen von x sind, durch Addition vereinigen, so erhalten wir

$$\frac{m}{(x-a)^2} + \frac{n}{x-a} = \frac{m+nx-na}{(x-a)^2},$$

also eine gebrochene Funktion von der Form

$$\frac{Mx + N}{(x - a)^2}.$$

Hat man nun eine solche gebrochene Funktion von x, deren Nenner ein Produkt ist, und kann man die Faktoren dieses Produktes bestimmen, so lässt sich umgekehrt die gebrochene Funktion in eine Summe von so vielen Brüchen zerlegen, als der Nenner der gebrochenen Funktion Faktoren hat. Man nennt diese Operation das Zerlegen echt gebrochener Funktionen in Partialbrüche.

Die Funktionen werden stets als echt gebrochene Funktionen vorausgesetzt; denn jede unecht gebrochene Funktion würde sich durch Division in eine ganze und in eine echt gebrochene Funktion zerlegen lassen.

Es sei nun

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

eine echt gebrochene Funktion von x, so dass sich der Nenner, also $F(x)$, in ein Produkt von reellen Faktoren zerlegen lässt, welche vom ersten oder zweiten Grade sind. Diese Faktoren können sämmtlich ungleich sein; es können aber auch mehrere gleiche Faktoren vorkommen.

Um diese Zerlegung zu bewirken, setzt man den Nenner, also $F(x) = 0$ und bestimmt die Wurzeln dieser Gleichung, welches stets möglich ist, wenn die Constanten wirkliche Zahlen sind, die Gleichung also eine numerische ist. Diese Wurzeln sind nun entweder reell oder imaginär. Die reellen Wurzeln haben die Form a, die imaginären Wurzeln aber kommen stets paarweise vor und haben die Form

$$\alpha \pm \beta \sqrt{-1}.$$

Die reellen Wurzeln geben Faktoren von der Form $(x - a)$, wenn sie nur einmal vorkommen, und Faktoren von der Form $(x - a)^m$, wenn sie $m$mal vorhanden sind.

Je zwei zusammengehörige imaginäre Wurzeln geben die Faktoren

$$[x - (\alpha + \beta \sqrt{-1})] \text{ und } [x - (\alpha - \beta \sqrt{-1})];$$

werden aber diese beiden Faktoren mit einander multiplicirt, so verschwinden die imaginären Glieder, und man erhält den reellen quadratischen Faktor

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

Um daher in den Partialbrüchen den imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ zu vermeiden, werden solche reelle quadratische Faktoren nicht weiter zerlegt. Kommen dieselben imaginären Wurzelpaare $m$mal vor, so erhält man quadratische Faktoren von der Form

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m.$$

Die Partialbrüche, deren Summe der gebrochenen Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ gleich gesetzt wird, haben die Faktoren von $F(x)$ zu Nennern und gewisse Constanten, welche noch unbestimmt sind, zu Zählern; und zwar hat der Zähler die Form A, wenn der Nenner vom ersten Grade ist, und die Form $Ax+B$, wenn der Nenner vom zweiten Grade ist.

§ 47.

Bestimmung der Constanten nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten.

Um die Constanten zu bestimmen, bringt man sämmtliche Partialbrüche auf gleiche Benennung, oder man multiplicirt die Gleichung mit $F(x)$, wodurch alle Nenner verschwinden. Man erhält dann eine Gleichung, deren linke Seite $f(x)$, und deren rechte Seite ebenfalls eine ganze Funktion von x ist, in welcher die zu bestimmenden Constanten als Faktoren enthalten sind. Werden daher die Produkte der rechten Seite entwickelt und die Glieder nach Potenzen von x geordnet, so können beide Seiten nur dann einander gleich sein, wenn die constanten Faktoren gleich hoher Potenzen von x einander gleich sind.

Durch Gleichsetzung dieser Coëfficienten erhält man aber ebenso viele Gleichungen, als Constanten zu bestimmen sind, und aus diesen Gleichungen werden die Constanten dann bestimmt.

Wir wollen jetzt die verschiedenen Fälle der Reihe nach betrachten.

1. Es habe $F(x)$ nur reelle ungleiche Faktoren vom ersten Grade, so ist die Form der aufzustellenden Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots$$

Beispiel.

Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 + 5x - 10}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}.$$

Es ist nun

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x+2)(x-4),$$

wir setzen daher

$$\frac{x^2 + 5x - 10}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}.$$

Hieraus folgt zunächst durch Multiplication mit $F(x)$, oder indem man die rechte Seite auf gleiche Benennung bringt,

$$x^2 + 5x - 10 = A(x+2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+2).$$

Führt man auf der rechten Seite die Multiplication aus und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man die Gleichung

$$x^2 + 5x - 10 = (A+B+C)x^2 + (-2A - 5B + C)x + (-8A + 4B - 2C).$$

Zur Bestimmung der Constanten A, B und C haben wir nun die folgenden Gleichungen

$$A + B + C = 1,$$
$$-2A - 5B + C = 5,$$
$$-8A + 4B - 2C = -10$$

und aus diesen folgt weiter

$$A = \frac{4}{9}; \quad B = -\frac{8}{9}; \quad C = \frac{13}{9}.$$

Demnach ist

$$\frac{x^2 + 5x - 10}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8} = \frac{4}{9(x-1)} - \frac{8}{9(x+2)} + \frac{13}{9(x-4)}.$$

2. Es habe $F(x)$ nur reelle Faktoren vom ersten Grade, von denen aber mehrere gleich sind, so ist die Form der aufzustellenden Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B}{x-b}.$$

Beispiel.

Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24}.$$

Es ist aber

$$x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24 = (x+2)^3 (x-3).$$

Wir stellen daher die folgende Gleichung auf

$$\frac{2x^3-3x^2+5}{x^4+3x^3-6x^2-28x-24}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3}+\frac{B}{x-3}.$$

Hieraus folgt

$$2x^3-3x^2+5=A_1(x+2)^2(x-3)+A_2(x+2)(x-3)$$
$$+A_3(x-3)+B(x+2)^3.$$

Führt man auf der rechten Seite die Multiplication aus und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man die Gleichung

$$2x^3-3x^2+5=(A_1+B)\,x^3+(A_1+A_2+6B)\,x^2$$
$$+(-8A_1-A_2+A_3+12B)\,x+(-12A_1-6A_2-3A_3+8B).$$

Zur Bestimmung der Constanten A_1, A_2, A_3 und B ergeben sich hieraus die folgenden Gleichungen

$$A_1+B=2,$$
$$A_1+A_2+6B=-3,$$
$$-8A_1-A_2+A_3+12B=0,$$
$$-12A_1-6A_2-3A_3+8B=5.$$

Aus diesen folgt aber weiter

$$A_1=\frac{218}{125};\quad A_2=-\frac{157}{25};\quad A_3=\frac{23}{5};\quad B=\frac{32}{125}.$$

Demnach ist

$$\frac{2x^3-3x^2+5}{x^4+3x^3-6x^2-28x-24}=\frac{218}{125(x+2)}-\frac{157}{25(x+2)^2}+\frac{23}{5(x+2)^3}$$
$$+\frac{32}{125(x-3)}.$$

3. Es habe $F(x)$ Faktoren vom ersten und zweiten Grade, welche sämmtlich ungleich sind, so ist die Form der aufzustellenden Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{Cx+D}{(x-\gamma)^2+\delta^2}+\frac{E}{(x-a)}+\frac{F}{(x-b)}.$$

Beispiel.

Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{2x^2+3x}{x^3+3x^2+4x+2}.$$

Nun ist

$$x^3+3x^2+4x+2=(x^2+2x+2)(x+1).$$

Die Funktion hat also einen Faktor vom ersten und einen Faktor vom zweiten Grade. Wollte man den quadratischen Faktor

$$x^2 + 2x + 2$$

noch weiter zerlegen, so gibt die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

die Wurzeln

$$x' = -1 + \sqrt{-1}; \quad x'' = -1 - \sqrt{-1},$$

weshalb der quadratische Faktor nicht weiter zerlegt wird.

Wir stellen daher folgende Gleichung auf

$$\frac{2x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Hieraus folgt weiter

$$2x^2 + 3x = (Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 2).$$

Führt man die Multiplication aus und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man die Gleichung

$$2x^2 + 3x = (A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 2C).$$

Zur Bestimmung der Constanten A, B und C haben wir sodann die folgenden Gleichungen

$$A + C = 2,$$
$$A + B + 2C = 3,$$
$$B + 2C = 0.$$

Aus diesen folgt dann weiter

$$A = 3, \quad B = 2; \quad C = -1.$$

Demnach ist

$$\frac{2x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2} = \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{x + 1}.$$

4. Hat $F(x)$ ausser andern Faktoren denselben quadratischen Faktor mehr als einmal, so ist die Form der aufzustellenden Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2} + \ldots$$
$$+ \frac{A_n x + B_n}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n} + \frac{C}{x - a}.$$

Beispiel.

Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x^3 - 2x^2 + 4x + 5}{x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 21x - 9}.$$

Nun ist

$$x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 21x - 9 = (x^2 - 2x + 3)^2 (x - 1).$$

Wir stellen daher folgende Gleichung auf

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 4x + 5}{x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 21x - 9} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - 2x + 3}$$
$$+ \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 - 2x + 3)^2} + \frac{C}{x - 1}.$$

Hieraus folgt

$$3x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = (A_1 x + B_1)(x^2 - 2x + 3)(x - 1)$$
$$+ (A_2 x + B_2)(x - 1) + C(x^2 - 2x + 3)^2.$$

Führt man die Multiplication aus und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 3x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = {} & (A_1 + C)\, x^4 \\ & + (B_1 - 3A_1 - 4C)\, x^3 \\ & + (5A_1 - 3B_1 + A_2 + 10C)\, x^2 \\ & + (5B_1 - 3A_1 + B_2 - A_2 - 12C)\, x \\ & + (-3B_1 - B_2 + 9C). \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich zur Bestimmung der Constanten $A_1\, B_1\, A_2\, B_2$ und C die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} & A_1 + C = 0, \\ & B_1 - 3A_1 - 4C = 3, \\ & 5A_1 - 3B_1 + A_2 + 10C = -2, \\ & 5B_1 - 3A_1 + B_2 - A_2 - 12C = 4, \\ & -3B_1 - B_2 + 9C = 5. \end{aligned}$$

Aus diesen ergibt sich weiter

$$A_1 = -\frac{5}{2}; \quad B_1 = \frac{11}{2}; \quad A_2 = 2; \quad B_2 = 1; \quad C = \frac{5}{2}.$$

Demnach ist

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 4x + 5}{x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 21x - 9} = -\frac{5x - 11}{2(x^2 - 2x + 3)}$$
$$+ \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 3)^2} + \frac{5}{2(x - 1)}.$$

§ 48.

Bestimmung der Constanten mit Anwendung von Differentialrechnung.

1. Hat $F(x)$ nur reelle ungleiche Faktoren vom ersten Grade,

so ist die Form der Zerlegung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots$$

Setzen wir nun

$$\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

so erhalten wir

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

und es ist

$$F(x) = (x-a)\,\psi(x).$$

Differentiiren wir die letzte Gleichung, so kommt

$$F'(x) = \psi(x) + (x-a)\,\psi'(x),$$

und setzen wir nun $x = a$, so wird

$$f(a) = A\,\psi(a)$$

und

$$F'(a) = \psi(a).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt aber sofort

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},$$

und somit ist diese Constante bestimmt. Auf gleiche Weise ist aber auch

$$B = \frac{f(b)}{F'(b)},$$

$$C = \frac{f(c)}{F'(c)}$$

u. s. f.

Das hierher gehörige Beispiel ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 + 5x - 10}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}.$$

Die Wurzeln von $F(x) = 0$ sind 1, -2 und 4, und die aufzustellende Gleichung ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}.$$

Nun ist

$$f(1) = 1 + 5 - 10 = -4,$$

$$f(-2) = 4 - 10 - 10 = -16,$$

$$f(4) = 16 + 20 - 10 = 26;$$

ferner ist

$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 6,$$

daher

$$F'(1) = 3 - 6 - 6 = -9,$$

$$F'(-2) = 12 + 12 - 6 = 18,$$

$$F'(4) = 48 - 24 - 6 = 18$$

und folglich nach den entwickelten Formeln

$$A = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9},$$

$$B = \frac{-16}{18} = -\frac{8}{9},$$

$$C = \frac{26}{18} = \frac{13}{9}.$$

2. Hat $F(x)$ nur reelle Faktoren vom ersten Grade, von denen aber mehrere gleich sind, so ist die Form der Zerlegung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{C}{x-c} + \ldots$$

Setzen wir nun

$$\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{C}{x-c} + \ldots = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

so erhalten wir

$$f(x) = A_1(x-a)^{n-1}\,\psi(x) + A_2(x-a)^{n-2}\,\psi(x) + \ldots$$
$$+ A_n\,\psi(x) + (x-a)^n\,\varphi(x)$$

so wie

$$F(x) = (x-a)^n\,\psi(x).$$

Wir können aber auch schreiben

$$f(x) = (A_1(x-a)^{n-1} + A_2(x-a)^{n-2} + \ldots + A_n)\,\psi(x)$$
$$+ (x-a)^n\,\varphi(x),$$

und setzen wir der Abkürzung wegen

$$A_1(x-a)^{n-1} + A_2(x-a)^{n-2} + \ldots + A_n = Z_a,$$

so wird

$$f(x) = Z_a\,\psi(x) + (x-a)^n\,\varphi(x).$$

Differentiiren wir diese Gleichung sovielmal hintereinander, als es nöthig ist, und setzen in ihr sowol als in ihren Ableitungen überall $x = a$, so erhalten wir eine Reihe Gleichungen von der

Form

$$f(a) = Z_a\,\psi(a),$$
$$f'(a) = Z_a\,\psi'(a) + Z'_a\,\psi(a),$$
$$f''(a) = Z_a\,\psi''(a) + 2\,Z'_a\,\psi'(a) + Z''_a\,\psi(a),$$
$$f'''(a) = Z_a\,\psi'''(a) + 3\,Z'_a\,\psi''(a) + 3\,Z''_a\,\psi'(a) + Z'''_a\,\psi(a).$$

u. s. f.

Bilden wir nun die Ableitungen von $\psi(x)$ und ebenso die Ableitungen von Z_a, setzen überall $x = a$ und substituiren die erhaltenen Werthe in die vorstehenden Gleichungen, so sind in diesen Gleichungen nur die Unbekannten $A_1\ A_2 \ldots A_n$ enthalten, welche sich daraus bestimmen lassen.

Setzen wir in gleicher Weise

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{x-a^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{C}{x-c} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

so erhalten wir

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

und es ist alles wie vorher. Wir bekommen dann Gleichungen, welche nur die Unbekannten $B_1\ B_2 \ldots B_m$ enthalten, und welche sich daraus bestimmen lassen. Endlich haben wir zur Bestimmung der Constanten C wie früher

$$C = \frac{f(c)}{F'(c)}.$$

Das hierher gehörige Beispiel ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24},$$

und es ist weiter

$$F(x) = (x+2)^3\,(x-3),$$

daher

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} + \frac{B}{x-3}.$$

Wird

$$\frac{B}{x-3} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

gesetzt, so folgt

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Nun ist

$$F(x) = (x + 2)^3 \psi(x)$$

und

$$f(x) = (A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3)\,\psi(x) + (x+2)^3\,\varphi(x),$$

ferner ist

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x,$$
$$f''(x) = 12x - 6,$$

daher, wenn man $x = a = -2$ setzt,

$$f(-2) = -16 - 12 + 5 = -23,$$
$$f'(-2) = 24 + 12 = 36,$$
$$f''(-2) = -24 - 6 = -30.$$

Weiter ist

$$Z_a = A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3,$$
$$Z'_a = 2A_1(x+2) + A_2,$$
$$Z''_a = 2A_1,$$

daher, wenn $x = a = -2$ gesetzt wird,

$$Z_a = A_3; \quad Z'_a = A_2; \quad Z''_a = 2A_1;$$

endlich ist

$$\psi(x) = x - 3,$$
$$\psi'(x) = 1,$$

daher, wenn $x = a = -2$ gesetzt wird,

$$\psi(a) = -5,$$
$$\psi'(a) = 1.$$

Nun haben wir durch Substitution dieser Werthe in die betreffenden Gleichungen

$$-23 = -5A_3,$$
$$36 = A_3 - 5A_2,$$
$$-30 = 2A_2 - 10A_1$$

und hieraus

$$A_3 = \frac{23}{5}; \quad A_2 = -\frac{157}{25}; \quad A_1 = \frac{218}{125}.$$

Zur Bestimmung von B haben wir nun noch die Gleichung

$$B = \frac{f(3)}{F'(3)},$$

es ist aber

$$f(3) = 54 - 27 + 5 = 32,$$

$$F'(3) = 108 + 81 - 36 - 28 = 125,$$

mithin

$$B = \frac{32}{125}.$$

3. Hat $F(x)$ quadratische Faktoren von der Form $(x-\alpha)^2+\beta^2$, so zerlegen wir diese weiter in die Faktoren $x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})$ und $x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})$ und wenden das unter 1. oder 2. angegebene Verfahren an, jenachdem der quadratische Faktor nur einmal oder mehrmal in $F(x)$ enthalten ist.

Ein Beispiel sei noch das folgende

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2x^2+3x}{x^3+3x^2+4x+2},$$

und zwar ist

$$F(x) = (x^2+2x+2)(x+1).$$

Die weitere Zerlegung des quadratischen Faktors gibt aber

$$F(x) = (x+1-\sqrt{-1})(x+1+\sqrt{-1})(x+1),$$

so dass wir haben

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x+1-\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{x+1+\sqrt{-1}} + \frac{B}{x+1}.$$

Nun ist

$$f(x) = 2x^2 + 3x,$$

daher

$$f(-1+\sqrt{-1}) = 2(-1+\sqrt{-1})^2 + 3(-1+\sqrt{-1})$$
$$= -3 - \sqrt{-1},$$
$$f(-1-\sqrt{-1}) = 2(-1-\sqrt{-1})^2 + 3(-1-\sqrt{-1})$$
$$= -3 + \sqrt{-1},$$
$$f(-1) = 2 - 3 = -1.$$

Ferner ist

$$F(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2,$$

daher

$$F'(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

und folglich

$$F'(-1+\sqrt{-1}) = 3(-1+\sqrt{-1})^2 + 6(-1+\sqrt{-1}) + 4 = -2,$$

$F'(-1-\sqrt{-1})=3(-1-\sqrt{-1})^2+6(-1-\sqrt{-1})+4=-2$

$F'(-1)=3-6+4=1.$

Hieraus ergibt sich

$$A_1=\frac{-3-\sqrt{-1}}{-2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

$$A_2=\frac{-3+\sqrt{-1}}{-2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1},$$

$$B=\frac{-1}{1}=-1,$$

daher ist

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}}{x+1-\sqrt{-1}}+\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}}{x+1+\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+1}.$$

Werden endlich die beiden ersten Partialbrüche vereinigt, so erhält man

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{3x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{x+1}$$

wie früher.

IX. Abschnitt.

Lauf und Krümmung ebener Kurven.

§ 49.

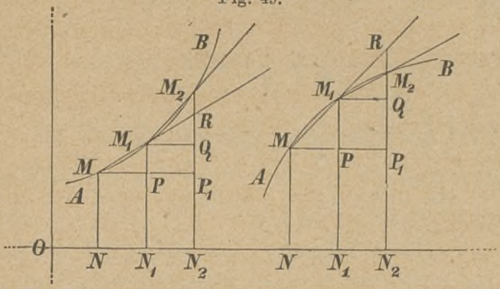
Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten.

Wir haben bereits, § 18, die geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten kennen gelernt und dabei gesehen, dass er die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ist, den die Kurvenrichtung an der betreffenden Stelle mit der Abscissenaxe bildet, so wie dass die Kurve steigt, wenn $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, dass die Kurve dagegen fällt, wenn $\frac{dy}{dx}$ negativ ist, und dass die Kurve mit der Abscissenaxe parallel ist, wenn $\frac{dy}{dx}$ Null ist.

Kehrt nun die Kurve ihre erhabene oder convexe Seite der

Abscissenaxe zu, so liegt die Kurve über der an den Punkt M, Figur 49, gelegten Tangente, und kehrt die Kurve ihre hohle oder concave Seite der Abscissenaxe zu, so liegt die Kurve unter der an den Punkt M gelegten Tangente.

Fig. 49.



Wir haben ferner gesehen, dass bei der ersten Differentiation der Funktionswerth y in den Funktionswerth

$$y + dy,$$

und dass dieser bei der zweiten Differentiation in den Funktionswerth

$$y + 2\,dy + d^2y$$

übergeht.

Ist in der Figur $ON = x$, $MN = y$ und $NN_1 = \varDelta x$ so ist $M_1 N_1 = y + \varDelta y$. Legen wir aber durch M eine Parallele zur Abscissenaxe, so ist $N_1 P = y$ und $PM_1 = \varDelta y$. Lassen wir nun das bereits um den endlichen Werth $\varDelta x$ gewachsene x, dem der Funktionswerth

$$y + \varDelta y$$

entspricht, nochmals um denselben endlichen Werth $\varDelta x$ wachsen, so wird der hierdurch veränderte Werth der Funktion

$$y + 2\varDelta y + \varDelta^2 y.$$

Ist daher $N_1 N_2 = \varDelta x$ die zweite Veränderung des x, so ist der zugehörige Funktionswerth

$$N_2 M_2 = y + 2\varDelta y + \varDelta^2 y.$$

Legen wir wieder durch M_1 eine Parallele zur Abscissenaxe und durch M und M_1 die Secante, so ist $N_2 P_1 = y$, $P_1 Q$ und auch QR gleich $\varDelta y$ also $P_1 R$ gleich $2\varDelta y$ und RM_2 gleich $\varDelta^2 y$.

Es ist nun aus der Figur ersichtlich, dass RM_2 und folglich auch $\varDelta^2 y$ positiv ist, wenn die Kurve ihre erhabene Seite der Abscissenaxe zukehrt, dass dagegen RM_2 und folglich auch $\varDelta^2 y$ negativ ist, wenn die Kurve ihre hohle Seite der Abscissenaxe zukehrt.

Lassen wir die Punkte N_1 und N_2 unendlich nahe an den Punkt N rücken, so rücken auch die Punkte M_1 und M_2 unendlich nahe an den Punkt M, die durch M und M_1 gelegte Secante geht in die an den Punkt M gelegte Tangente, und die Differenzen Δx, Δy und $\Delta^2 y$ gehen in die Differentiale dx, dy und $d^2 y$ über, während aber die für die Differenzen ermittelten Beziehungen auch für die Differentiale dieselben bleiben.

Hiernach lässt sich aus dem Vorzeichen des zweiten Differentials $d^2 y$ beurtheilen, ob die Kurve ihre erhabene, oder ob sie ihre hohle Seite der Abscissenaxe zukehrt.

Weil aber

$$d^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} dx^2 = f''(x)\ dx^2$$

und dx^2 stets positiv ist, so hängt das Vorzeichen von $d^2 y$ vom Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten oder der zweiten abgeleiteten Funktion ab. Wir können daher sagen, die Kurve kehrt in demjenigen Punkte, auf welchen die Differentiationen sich beziehen, ihre erhabene oder hohle Seite der Abscissenaxe zu, jenachdem der zweite Differentialquotient für den betreffenden Werth von x positiv oder negativ ist.

Es folgt aber hieraus unmittelbar weiter, dass die Kurve weder die erhabene noch die hohle Seite der Abscissenaxe zukehrt, wenn der zweite Differentialquotient Null ist. Einen Punkt, für welchen der zweite Differentialquotient Null wird, nennt man einen Inflexionspunkt oder Wendepunkt der Kurve. In einem solchen Punkte ändert die Kurve ihre Krümmung. Kehrte sie vorher die erhabene Seite der Abscissenaxe zu, so kehrt sie nachher ihre hohle Seite der Abscissenaxe zu oder umgekehrt.

§ 50.

Lauf ebener Kurven.

Fassen wir die Ergebnisse für die geometrische Bedeutung des ersten und zweiten Differentialquotienten zusammen, so ergibt sich für den Lauf einer ebenen Kurve Folgendes.

Ist der erste Differentialquotient positiv, so steigt die Kurve; ist nun ausserdem der zweite Differentialquotient positiv, so kehrt sie die erhabene Seite der Abscissenaxe zu, ist aber der zweite Differentialquotient negativ, so kehrt sie die hohle Seite der Abscissenaxe zu, und ist der zweite Differentialquotient Null, so hat sie einen Wendepunkt und ändert ihre Krümmung.

Ist der erste Differentialquotient negativ, so fällt die Kurve; ist nun ausserdem der zweite Differentialquotient positiv, so kehrt sie die erhabene Seite der Abscissenaxe zu, ist aber der zweite Differentialquotient negativ, so kehrt sie die hohle Seite der Abscissenaxe zu, und ist der zweite Differentialquotient Null, so hat sie einen Wendepunkt und ändert ihre Krümmung.

Ist der erste Differentialquotient Null, so hat die Kurve einen Culminationspunkt; ist nun ausserdem der zweite Differentialquotient positiv, so kehrt sie die erhabene Seite der Abscissenaxe zu, der Punkt ist ein unterer Culminationspunkt; die Kurve war vor diesem Punkte gefallen und nach diesem Punkte steigt sie wieder. Der Punkt entspricht also einem Minimalwerthe der Funktion.

Ist der erste Differentialquotient Null und ausserdem der zweite Differentialquotient negativ, so kehrt die Kurve ihre hohle Seite der Abscissenaxe zu, der Punkt ist ein oberer Culminationspunkt; die Kurve war vor diesem Punkte gestiegen, und nach diesem Punkte fällt sie wieder. Der Punkt entspricht also einem Maximalwerthe der Funktion.

Ist endlich der erste Differentialquotient Null und auch der zweite Differentialquotient Null, so hat die Kurve einen Wendepunkt und ändert ihre Krümmung.

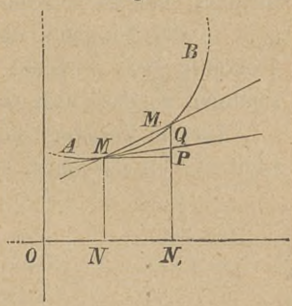
Hiernach ist es leicht den Lauf einer Kurve zu bestimmen, wenn ihre Gleichung gegeben ist.

§ 51.

Das Bogendifferential.

Sind $ON = x$ und $MN = y$ die Coordinaten des Punktes M einer Kurve AB, Figur 50, und wir lassen x um Δx wachsen, wodurch auch y um Δy wächst, so sind $ON_1 = x + \Delta x$ und $M_1 N_1 = y + \Delta y$ die Coordinaten des Punktes M_1, und es ist $NN_1 = \Delta x$ so wie $M_1 P = \Delta y$. Es ist aber hierbei auch der Bogen AM um das Stück MM_1 gewachsen, und da überhaupt der Bogen AM durch jede Veränderung des x ebenfalls eine Veränderung erleidet, so ist auch der Bogen eine Funktion von x. Bezeichnen wir also den Bogen AM mit s, so können wir die Veränderung welche er erlitten hat, also das Stück MM_1 entsprechend mit Δs bezeichnen. Legen wir durch die Punkte M und M_1 die Sehne und an den Punkt M die Tangente, welche die Ordinate $N_1 M_1$ im Punkte Q schneidet, so ist offenbar der Bogen MM_1 grösser als die Sehne MM_1; aber er ist kleiner als $MQ + QM_1$.

Fig. 50.



Nun ist die Sehne

$$MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

ferner ist

$$MQ = \Delta x \sec QMP,$$

weiter ist

$$M_1 Q = M_1 P - PQ,$$

und weil

$$M_1 P = \Delta y;\; PQ = \Delta x \tan QMP,$$

so ist

$$M_1 Q = \Delta y - \Delta x \tan QMP.$$

Es ist also

$$\text{Bogen } MM_1 > \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

und

$$\text{Bogen } MM_1 < \Delta x \sec QMP + \Delta y - \Delta x \tan QMP,$$

oder weil

$$\text{Bogen } MM_1 = \Delta s,$$

so besteht die folgende Ungleichung

$$\Delta x \sec QMP + \Delta y - \Delta x \tan QMP > \Delta s > \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

und wenn wir mit Δx dividiren und berücksichtigen, dass

$$\sec QMP = \sqrt{1 + \tan^2 QMP},$$

so erhalten wir

$$\sqrt{1 + \tan^2 QMP} + \frac{\Delta y}{\Delta x} - \tan QMP > \frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Zwischen diesen beiden Grenzen ist also der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ eingeschlossen und bleibt es auch, wenn Δx abnimmt und gegen das Differential dx geht. Rückt nun der Punkt N_1

unendlich nahe an den Punkt N, so rückt, wie wir bereits früher gesehen haben, auch der Punkt P, indem er auf der Geraden PM fortgeht, und der Punkt M_1 indem er auf dem Bogen $M_1 M$ fortgeht, unendlich nahe an den Punkt M, und die Sehne MM_1 geht in die Tangente über. Der Punkt Q aber, welcher auf der Tangente QM fortgeht, fällt mit dem Punkte M_1 absolut zusammen, so dass also QM_1 absolut Null wird.

Diesem Vorgange entspricht nun auch die obige Ungleichung. Geht Δx in dx über, so geht über

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ in } \frac{dy}{dx},$$

$$\tan QMP \text{ in } \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \text{ in } \frac{ds}{dx}.$$

Die obige Ungleichung wird daher

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} > \frac{ds}{dx} > \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

das ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} > \frac{ds}{dx} > \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

das heisst aber, die Grenzen, zwischen denen $\frac{ds}{dx}$ enthalten ist, fallen zusammen, wenn man von den Differenzen zu den Differentialen übergeht; folglich fallen sie auch mit $\frac{ds}{dx}$ zusammen, welches zwischen diesen Grenzen enthalten ist. Es ist daher

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder auch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Die drei Differentiale ds, dx und dy oder das Differential der Abscisse, das Differential der Ordinate und das Differential des Bogens bilden ein unendlich kleines rechtwinkeliges Dreieck, in welchem das Differential des Bogens die Hypotenuse ist, die Differentiale der Coordinaten aber die beiden Katheten sind.

Bezeichnet man den Winkel, den die im Punkte M an die Kurve gelegte Berührende mit der Abscissenaxe macht, mit δ, so ist

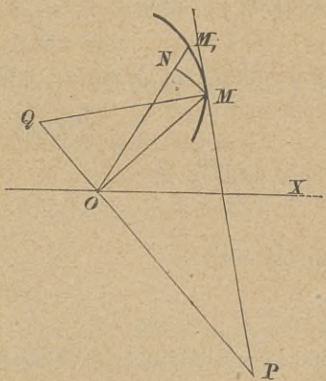
$$\tan\delta = \frac{dy}{dx},$$

es ist dieses aber derselbe Winkel, den das Differential des Bogens ds mit dem Differential der Abscisse dx einschliesst. Wir haben daher auch

$$\sin\delta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\delta = \frac{dx}{ds},$$

welches mit der obigen Gleichung zwischen den drei Differentialen übereinstimmt.

Fig. 51.



Um das Bogendifferential in Polarcoordinaten auszudrücken ergiebt sich, Figur 51, aus dem unendlich kleinen Dreiecke MNM_1, in welchem $MM_1 = ds$, $MN = r\,d\varphi$ und $M_1N = dr$ ist, ohne weiteres

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2$$

also

$$ds = d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

§ 52.

Krümmung ebener Kurven.

Wenn man sich durch drei aufeinanderfolgende Punkte einer Kurve einen Kreis beschrieben denkt, so gibt dieser Kreis die Krümmung der Kurve an der betreffenden Stelle an.

Man nennt deshalb einen solchen Kreis **Krümmungskreis** und seinen Halbmesser **Krümmungshalbmesser**.

Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises mit α und β und seinen Halbmesser mit ϱ, so ist die Gleichung des Kreises

1. $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2,$$

und da er durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve geht, deren gegenseitige Lage durch x und y so wie durch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$

bestimmt ist, so müssen die unbekannten Constanten α, β und ϱ durch diese bestimmenden Werthe ausgedrückt werden.

Lösen wir die Gleichung des Kreises für y auf, so erhalten wir

$$y = \beta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x - \alpha)^2},$$

und hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{\sqrt{\varrho^2 - (x - \alpha)^2}}$$

oder weil

$$\sqrt{\varrho^2 - (x - \alpha)^2} = y - \beta,$$

so ist auch

2. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}.$$

Durch nochmalige Differentiation erhalten wir weiter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varrho^2}{\left(\sqrt{\varrho^2 - (x - \alpha)^2}\right)^3}$$

oder

3. $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varrho^2}{(y - \beta)^3},$$

und wenn wir für ϱ seinen Werth aus 1 setzen,

4. $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}{(y - \beta)^3}.$$

Durch diese Gleichungen lassen sich nun α, β und ϱ bestimmen.

Aus 2. folgt

$$(x - \alpha)^2 = (y - \beta)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

und wird dieses in 4. eingesetzt, so ergibt sich

5. $$y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Weiter folgt aus (2)

$$x - \alpha = -(y - \beta)\frac{dy}{dx},$$

daher wenn wir für $y - \beta$ seinen Werth aus 5. setzen

6. $$x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Endlich folgt aus 3.

$$\varrho^2 = -(y-\beta)^3 \frac{d^2y}{dx^2},$$

und wird hier für $y-\beta$ sein Werth aus 5. gesetzt, so folgt

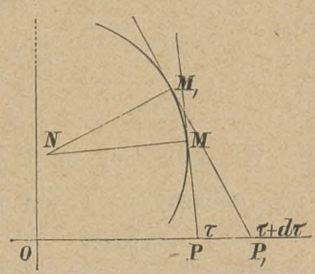
$$\varrho^2 = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

so wie endlich

$$\varrho = \pm \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und hierdurch sind sowol die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises als auch der Krümmungshalbmesser bestimmt.

Fig. 52



Eine andere Ableitung für den Krümmungshalbmesser ergibt sich auf folgende Weise. Ist, Figur 52, τ der Winkel, den die im Punkte M an die Kurve gelegte Tangente MP mit der Abscissenaxe bildet, so ändert sich τ mit x und ist daher eine Funktion von x. Geht man nun vom Punkte M zu dem unendlich nahe liegenden Punkte M_1 der Kurve über, so beschreibt der Krümmungshalbmesser $MN = \varrho$ den unendlich kleinen Bogen MM_1, die Tangente geht aus der Lage MP in die Lage M_1P_1, und der Winkel τ geht in den Winkel $\tau + d\tau$ über, so dass der Winkel, den die beiden Tangenten MP und M_1P_1 einschliessen, gleich $d\tau$ ist. Dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel MNM_1, den die beiden Krümmungshalbmesser MN und M_1N mit einander bilden. Daher ist der unendlich kleine Bogen MM_1 gleich $\varrho\, d\tau$. Dieser Bogen ist aber auch gleich ds, und mithin hat man die Gleichung

$$\varrho\, d\tau = ds$$

also

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist daher gleich dem Quotienten aus dem Differential des Bogens und dem Differential des Winkels, den die diesem Bogendifferential zugehörige Tangente mit der Abscissenaxe bildet.

Nun ist

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ferner ist

$$\tan \tau = \frac{dy}{dx},$$

also

$$\tau = \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{dy}{dx}\right),$$

daher

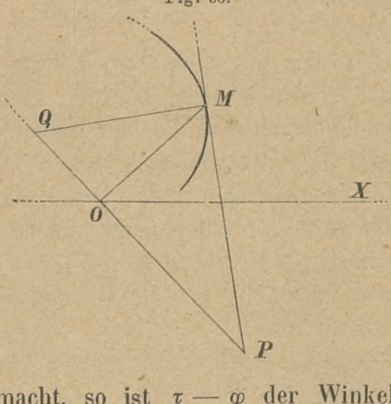
$$d\tau = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx.$$

Setzt man diese Ausdrücke für ds und $d\tau$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Will man nun die Krümmung einer Kurve an irgend einer Stelle untersuchen, so hat man die Werthe von x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, wie sie aus der Gleichung der fraglichen Kurve für die betreffende Stelle sich ergeben, in die vorstehenden Gleichungen einzusetzen.

Fig. 53.



Um den Krümmungshalbmesser für Polarcoordinaten zu bestimmen, sei, Figur 53, τ der Winkel, den die Tangente mit der Polaraxe macht, und φ der Winkel, den der Leitstrahl mit der Polaraxe macht, so ist $\tau - \varphi$ der Winkel, den die Tangente mit dem Leitstrahle macht, und es ist

$$\cot(\tau - \varphi) = \frac{OM}{OP} = \frac{r}{S_t}$$

daher, wenn man für die Subtangente ihren Werth setzt,

$$\cot(\tau - \varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

so wie

$$\tau - \varphi = \operatorname{arc}\left(\cot = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}\right).$$

Wird diese Gleichung differentiirt, wobei zu beachten ist, dass τ und r Funktionen von φ sind, so erhält man

$$d\tau - d\varphi = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varphi}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\varphi^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

daher

$$d\tau = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\varphi^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Nun ist

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau};$$

wenn man daher die Werthe von ds und $d\tau$ setzt, so erhält man

$$\varrho = \frac{d\varphi\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) - r\frac{d^2 r}{d\varphi^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi}$$

$$= \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\varphi^2}}.$$

X. Abschnitt.

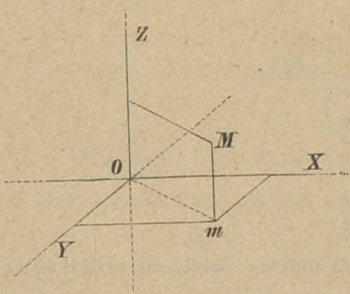
Geometrische Bedeutung und Darstellung der Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.

§ 53.

Das rechtwinkelige Coordinatensystem des Raumes.

Das rechtwinkelige Coordinatensystem des Raumes wird durch drei in einem Punkte unter rechten Winkeln sich schneidende Ebenen XY, XZ und YZ gebildet, Figur 54. Die Durchschnittslinien dieser Coordinatenebenen, nämlich OX, OY, OZ stehen ebenfalls beziehungsweise senkrecht auf einander und werden die Coordinatenaxen genannt; und zwar wird OX als die XAxe, OY als die YAxe und OZ als die ZAxe bezeichnet. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt O ist der Anfangspunkt der Coordinaten. Die Ebene XY stellt man sich gewöhnlich auch in horizontaler Lage vor, so dass die Ebenen XZ und YZ in vertikaler Lage sich befinden. Man bezeichnet dann die Ebene XY als die Horizontalebene, die Ebene XZ als die Vertikalebene und die Ebene YZ als die Seitenebene. Von O nach rechts, nach vorn und nach oben liegen die positiven Richtungen, und von O nach links, nach hinten und nach unten liegen die negativen Richtungen.

Fig. 54.



Die acht körperlichen Winkel, welche um den Punkt O herumliegen, und von denen vier auf der rechten Seite und vier auf der linken Seite der YZ Ebene sich befinden, lassen sich durch die Vorzeichen der Axen leicht unterscheiden. Es liegt

$+x+y+z$ rechts vorn oben,
$+x+y-z$ „ „ unten,
$+x-y+z$ „ hinten oben,
$+x-y-z$ „ „ unten,

$-x+y+z$ links vorn oben,
$-x+y-z$ „ „ unten,
$-x-y+z$ „ hinten oben,
$-x-y-z$ „ „ unten.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Lage eines jeden Punktes M im Raume bestimmt ist, wenn seine Abstände von den drei Coordinatenebenen gegeben sind. Die Abstände in der Richtung der XAxe werden mit x, die Abstände in der Richtung der YAxe werden mit y und die Abstände in der Richtung der ZAxe werden mit z bezeichnet. Drei zusammengehörige Abstände x, y, z, welche die Lage eines Punktes bestimmen, werden die Coordinaten dieses Punktes genannt.

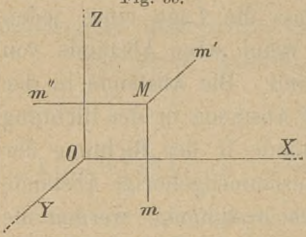
So wird z. B. durch die beiden Coordinaten x und y die Lage des Punktes m in der XY Ebene bestimmt. Errichtet man nun in m eine Senkrechte auf dieser Ebene und macht $mM = z$, so ist die Lage des Punktes M durch seine Coordinaten x, y, z bestimmt.

Beim schiefwinkeligen Coordinatensystem ist es ebenso; nur sind die Coordinatenwinkel keine rechte, sondern beliebige andere Winkel.

Ein solches Coordinatensystem kann nun dazu dienen, eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen geometrisch darzustellen und dasjenige geometrische Gebilde im Raume zu construiren, welches der Gleichung entspricht. Sind x und y die unabhängigen Veränderlichen, und ist z die abhängige Veränderliche oder die Funktion, so bestimmen je zwei beliebig angenommene Werthe von x und y einen Punkt in der XYEbene. Wird nun derjenige Werth von z, welcher für diese Werthe von x und y aus der Gleichung sich ergibt, in der Richtung der ZAxe aufgetragen, so bekommen wir einen Punkt im Raume, indem diese Werthe von x, y und z die Coordinaten des fraglichen Punktes sind. Lassen wir die Werthe von x und y sich stetig ändern, und ist die Funktion stetig, so dass also auch die Werthe von z sich stetig ändern, so beschreibt der stetig veränderliche Endpunkt der Ordinate z eine Fläche, deren Gestalt und Eigenschaften von der Beschaffenheit der zwischen x, y und z bestehenden Gleichung abhängen, und welche nun dasjenige geometrische Gebilde ist, welches der Gleichung entspricht. Eine solche Gleichung wird dann auch die Gleichung der fraglichen Fläche genannt.

Wenn man von einem Punkte M, Figur 55, im Raume Senkrechte nach den Coordinatenebenen zieht, so nennt man die Punkte, in welchen diese Senkrechten die Ebenen treffen, die Projektionen des Punktes M auf die betreffenden Ebenen; und zwar ist m die XY Projektion oder die Horizontalprojektion, m' die XZ Projektion oder die Vertikalprojektion und m'' die YZ-Projektion oder die Seitenprojektion des Punktes M im Raume. Die Coordinatenebenen werden in diesem Sinne auch die Projektionsebenen genannt.

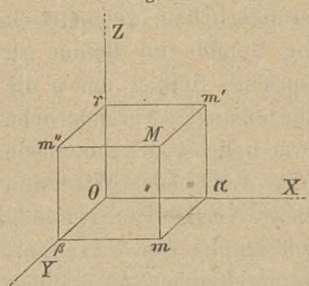
Fig. 55.



Sind nun zwei Projektionen eines Punktes gegeben, so ist die Lage des Punktes im Raume dadurch bestimmt; denn errichtet man in den fraglichen Punkten, also den Projektionen, Senkrechte auf den Projektionsebenen, so schneiden sich diese in dem projicirten Punkte, welcher auf diese Weise bestimmt wird.

Legt man durch den Punkt M, Figur 56, und je zwei seiner Projektionen Ebenen, so steht eine jede dieser Ebenen auf je zwei Projektionsebenen senkrecht und ist der dritten Projektionsebene parallel, so dass ein rechtwinkeliges Parallelepiped entsteht. Daher sind die durch diese Ebenen auf den Axen gebildeten Abschnitte immer gleich dem Abstande des Punktes von derjenigen Ebene, auf welcher die Axe senkrecht steht; sie sind also gleich den Coordinaten des Punktes M. Oder, die Abstände einer Projektion von den beiden Axen in einer der Ebenen sind immer gleich den Abständen des Punktes von den beiden anderen Ebenen.

Fig. 56.



Während also die Lage des Punktes M im Raume durch drei Coordinaten bestimmt wird, wird die Lage einer jeden seiner Projektionen in der betreffenden Ebene durch zwei Coordinaten bestimmt. So ist m bestimmt durch x und y, m' ist bestimmt durch x und z, und m'' ist bestimmt durch y und z.

Was hier von einem Punkte im Raume gilt, das gilt auch von beliebig vielen Punkten und folglich auch von jeder Linie im Raume, mag sie nun gerade, einfach oder doppelt gekrümmt sein.

Eine jede Linie im Raume wird, wenn sie auf die Coordinatenebenen projicirt wird, auf einer jeden derselben im Allgemeinen eine Linie als Projektion geben, und es kann daher eine solche Projektion durch eine Gleichung zwischen den beiden Coordinaten dieser Ebene dargestellt werden, wenn sie eine nach einem analytischen Gesetze gebildete Linie ist. Da nun durch zwei Projektionen die Lage eines Punktes im Raume bestimmt wird, so wird auch eine Linie im Raume durch zwei ihrer Projektionen bestimmt. Sind diese Projektionen gesetzmässig gebildete Linien, so dass eine jede durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten ihrer Ebene dargestellt wird, so nennt man diese Gleichungen die Projektionsgleichungen der Linie im Raume.

Es geht hieraus hervor, dass eine Linie im Raume durch zwei Projektionsgleichungen dargestellt wird. Besteht für die XY Projektion die Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

und für die XZ Projektion die Gleichung

$$z = \psi(x),$$

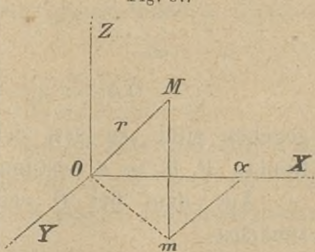
so erhält man für einen und denselben Werth von x stets zwei zusammengehörige Werthe von y und z, und diese bestimmen dann denjenigen Punkt der Linie im Raume, dessen Coordinaten diese speciellen Werthe von x, y und z sind.

§ 54.

Punkte im Raume.

Ist ein Punkt M im Raume, Figur 57, durch seine Coordinaten $O\alpha = x_1$, $\alpha m = y_1$, $mM = z_1$ gegeben, so lässt sich leicht sein Abstand $OM = r$ vom Anfangspunkte O der Coordinaten bestimmen. Zieht man in der XY Ebene die Gerade Om, so ist diese die Hypotenuse des bei α rechtwinkeligen Dreiecks $O\alpha m$ und daher

Fig. 57.



$$\overline{Om}^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

Ebenso ist $OM = r$ die Hypotenuse des bei m rechtwinkeligen Dreiecks OmM, daher

$$\overline{OM}^2 = \overline{Om}^2 + z_1^2.$$

Setzt man hier den Werth von $\overline{Om}^2$ aus der vorigen Gleichung ein, so ergibt sich

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

oder

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel MOX mit α, den Winkel MOY mit β und den Winkel MOZ mit γ so ist

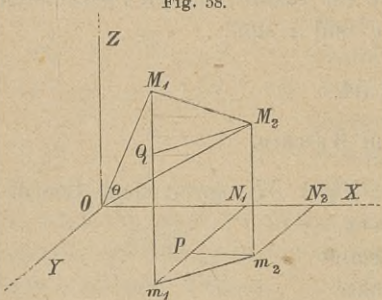
$$\frac{x_1}{r} = \cos\alpha;\ \frac{y_1}{r} = \cos\beta;\ \frac{z_1}{r} = \cos\gamma.$$

Werden diese drei Gleichungen zur zweiten Potenz erhoben und addirt, so ergibt sich mit Rücksicht auf den so eben bebestimmten Werth von r

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Durch diese Gleichungen ist nun die Linie OM sowol ihrer Grösse als auch ihrer Richtung nach vollkommen bestimmt. Da r absolut, d. h. ohne Rücksicht auf ein Vorzeichen genommen wird, so hängen die Vorzeichen der Cosinus nur von den Vorzeichen der Coordinaten x_1, y_1, z_1 ab, und hieraus ergibt sich ohne Weiteres, welche von den Winkeln α, β, γ spitz oder stumpf sind.

Fig. 58.



Sind M_1 und M_2, Figur 58, zwei Punkte im Raume, welche durch ihre Coordinaten

$$ON_1 = x_1,\ N_1m_1 = y_1,$$

$$m_1M_1 = z_1$$

und

$$ON_2 = x_2,\ N_2m_2 = y_2,\ m_2M_2 = z_2$$

gegeben sind, so lässt sich zunächst der Abstand dieser beiden Punkte $M_1M_2 = a$ bestimmen.

Aus dem bei Q rechtwinkeligen Dreiecke M_1QM_2 folgt zunächst

$$a^2 = \overline{M_1Q}^2 + \overline{QM_2}^2.$$

Nun ist $QM_2 = m_1 m_2$, und aus dem bei P rechtwinkeligen Dreiecke $m_1 P m_2$ folgt weiter

$$\overline{m_1 m_2}^2 = \overline{m_1 P}^2 + \overline{m_2 P}^2,$$

daher ist auch

$$a^2 = \overline{M_1 Q}^2 + \overline{m_1 P}^2 + \overline{m_2 P}^2;$$

aber es ist

$$M_1 Q = z_1 - z_2;\ m_1 P = y_1 - y_2;$$
$$m_2 P = -(x_1 - x_2),$$

folglich ist

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

oder

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

und hierdurch ist der Abstand der beiden Punkte im Raume bestimmt.

Um ferner den Winkel θ zu bestimmen, den die beiden Geraden OM_1 und OM_2 einschliessen, hat man für die drei Seiten des Dreiecks $OM_1 M_2$, nämlich

$$OM_1 = r_1,\ OM_2 = r_2 \text{ und } M_1 M_2 = a$$

die folgenden Gleichungen

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$
$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$
$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Ferner hat man für den Winkel θ die Gleichung

$$\cos\theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2 r_1 r_2}.$$

Wenn man daher in diese letzte Gleichung für r_1, r_2 und a die Werthe setzt, welche aus den vorhergehenden Gleichungen folgen, so erhält man

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}.$$

Bezeichnen wir die Winkel, welche OM_1 mit den Axen X, Y, Z macht, beziehungsweise mit α_1, β_1, γ_1 und die Winkel, welche OM_2 mit den Axen X, Y, Z macht, beziehungsweise mit α_2, β_2, γ_2, so ist

$$\frac{x_1}{r_1} = \cos\alpha_1;\ \frac{y_1}{r_1} = \cos\beta_1;\ \frac{z_1}{r_1} = \cos\gamma_1,$$

$$\frac{x_2}{r_2} = \cos\alpha_2;\ \frac{y_2}{r_2} = \cos\beta_2;\ \frac{z_2}{r_2} = \cos\gamma_2;$$

hieraus erhalten wir durch Multiplikation

$$\frac{x_1 x_2}{r_1 r_2} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2,$$

$$\frac{y_1 y_2}{r_1 r_2} = \cos\beta_1 \cos\beta_2,$$

$$\frac{z_1 z_2}{r_1 r_2} = \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

Addiren wir diese drei Gleichungen und drücken r_1 und r_2 durch die Coordinaten aus, so erhalten wir

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

und folglich ist auch

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

Sollen die beiden Linien OM_1 und OM_2 einen rechten Winkel mit einander machen, so muss $\cos\theta = 0$ sein. Die Bedingung, unter welcher diese beiden Linien aufeinander senkrecht stehen, ist daher

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

oder

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

§ 55.

Die Gerade im Raume.

Da die Projektionen einer Geraden im Raume im Allgemeinen wieder gerade Linien sind, so sind auch die Projektionsgleichungen einer Geraden im Raume die Gleichungen gerader Linien in den Projektionsebenen. Die Projektionsgleichung für die XY Ebene hat daher die Form

$$y = ax + b,$$

die Projektionsgleichung für die XZ Ebene ebenso

$$z = a'x + b'$$

und die Projektionsgleichung für die YZ Ebene

$$z = a''y + b''.$$

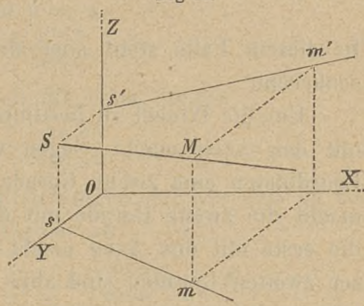
Da aber zur Bestimmung einer Geraden im Raume zwei Projektionen ausreichen, so nehmen wir hierzu die Projektionen der XYEbene und der XZEbene und können sagen, die Projektionsgleichungen

$$y = ax + b \text{ und } z = a'x + b',$$

sind die Gleichungen der Geraden im Raume.

Hier ist a die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Horizontalprojektion sm, Figur 59, mit der XAxe macht und a' die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Projektion $s'm'$ mit der XAxe macht. Ferner ist b der Abstand desjenigen Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, in welchem die Horizontalprojektion die YAxe schneidet, also Os; und b' ist der Abstand desjenigen Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, in welchem die Vertikalprojektion die ZAxe schneidet, also Os'. Daher sind auch b und b' die Coordinaten desjenigen Punktes S, in welchem die YZEbene von der Geraden im Raume geschnitten wird.

Fig 59.



Den Punkt, in welchem eine Gerade im Raume eine Coordinatenebene schneidet, nennt man die Spur der Geraden in der betreffenden Ebene. Es ist mithin der Punkt S die YZSpur der Geraden SM.

Geht die Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so gehen auch ihre Projektionen durch den Anfangspunkt der Coordinaten; es ist dann

$$b = 0 \text{ und } b' = 0,$$

und die Gleichungen einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden sind

$$y = ax \text{ und } z = a'x.$$

Ist die Gerade mit einer der Projektionsebenen parallel, so ist ihre Projektion auf die andere Ebene mit der XAxe parallel.

Ist daher die Gerade parallel mit der XYEbene, so ist ihre Projektion auf der XZEbene mit der XAxe parallel; es ist mithin $a' = 0$, und die Gleichungen der Geraden sind

$$y = ax + b \text{ und } z = b'.$$

Ist die Gerade parallel mit der XZEbene, so ist ihre Projektion auf der XYEbene mit der XAxe parallel; es ist mithin $a = 0$, und die Gleichungen der Geraden sind

$$y = b \text{ und } z = a'x + b'.$$

Ist endlich die Gerade mit beiden Ebenen parallel, so sind auch beide Projektionen mit der XAxe parallel; es ist dann $a = 0$ und $a' = 0$, und die Gleichungen der Geraden sind

$$y = b \text{ und } z = b'.$$

In diesem Falle steht aber die Gerade auf der dritten Ebene senkrecht.

Um die Winkel zu bestimmen, welche die Gerade im Raume mit den Axen macht, legen wir durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine zweite Gerade parallel mit der ersteren. Dann macht die zweite Gerade mit den Axen dieselben Winkel, welche die erste mit den Axen macht. Die Projektionsgleichungen dieser zweiten Geraden sind aber, weil ihre Projektionen den Projektionen der ersten Geraden parallel sind,

$$y = ax \text{ und } z = a'x.$$

Nehmen wir in der Geraden einen Punkt M an, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1, sind und dessen Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten r ist, und bezeichnen wir die gesuchten Winkel, welche die Gerade mit den Axen X, Y, Z macht, beziehungsweise mit α, β, γ, so ist

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r}; \ \cos\beta = \frac{y_1}{r}; \ \cos\gamma = \frac{z_1}{r},$$

und weil

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so ist

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Es ist aber

$$y_1 = ax_1; \quad z_1 = a'x_1,$$

daher, wenn wir dieses in die Gleichungen einsetzen,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+a'^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+a'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a'}{\sqrt{1+a^2+a'^2}},$$

und somit sind die Winkel bestimmt, welche die Gerade im Raume mit den Axen bildet.

Wenn man von diesen Gleichungen die zweite durch die erste dividirt, so erhält man

$$a = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

und wenn man die dritte durch die erste dividirt,

$$a' = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

Setzt man dieses in die Gleichungen der Geraden im Raume ein, so nehmen sie folgende Gestalt an

$$y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x + b; \ z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x + b',$$

und in dieser Form stellen sie die Gleichungen einer Geraden dar, welche in demjenigen Punkte, dessen Coordinaten b und b' sind, durch die YZEbene hindurch geht, und welche mit den Axen X, Y, Z, beziehungsweise die Winkel α, β, γ bildet.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Geraden, so bestehen auch die Gleichungen

$$y_1 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x_1 + b; \ z_1 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x_1 + b';$$

werden diese von den vorhergehenden subtrahirt, so kommt

$$y - y_1 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - x_1); \ z - z_1 = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - x_1),$$

und dieses sind die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt x_1, y_1, z_1 geht und mit den Axen X, Y, Z, beziehungsweise die Winkel α, β, γ, macht.

Sind x_1, y_1, z_1 so wie x_2, y_2, z_2 die Coordinaten von zwei Punkten, durch welche eine Gerade geht, so hat man, um die Gleichungen dieser Geraden zu bestimmen, Folgendes. Die Gleichungen der Geraden mögen sein

$$y = ax + b; \quad z = a'x + b',$$

wo nun die Constanten a, a', b, b' durch die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte auszudrücken sind.

Für diese beiden Punkte bestehen dann die Gleichungen

$$y_1 = ax_1 + b; \quad z_1 = a'x_1 + b',$$

$$y_2 = ax_2 + b; \quad z_2 = a'x_2 + b',$$

durch Subtraction erhält man aus diesen

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2),$$

$$z_1 - z_2 = a'(x_1 - x_2)$$

und hieraus weiter

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \quad a' = \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2},$$

und hiermit sind die Constanten a und a' durch die Coordinaten der beiden Punkte ausgedrückt.

Ferner folgt aus den Gleichungen

$$b = y_1 - ax_1; \quad b' = z_1 - a'x_1,$$

und nach Substitution der Werthe von a und a'

$$b = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}; \quad b' = \frac{z_2 x_1 - z_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

und hiermit sind auch die Constanten b und b' durch die Coordinaten der beiden Punkte ausgedrückt.

Setzt man nun die Werthe der Constanten a, a', b, b' in die Gleichungen der Geraden ein, so nehmen sie folgende Gestalt an

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

$$z = \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} x + \frac{z_2 x_1 - z_1 x_2}{x_1 - x_2},$$

und dieses sind die Gleichungen einer Geraden, welche durch die beiden Punkte geht, deren Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 sind.

Aus den Gleichungen lassen sich aber auch noch die folgenden ableiten

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1); \quad z - z_1 = \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2); \quad z - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}(x - x_2).$$

Sind wieder

$$y = ax + b \text{ und } z = a'x + b'$$

die Gleichungen einer Geraden, so wie x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes, durch den eine zweite Gerade geht, welche mit der ersten parallel ist, so lassen sich die Gleichungen dieser zweiten Geraden auf folgende Weise bestimmen. Die Gleichungen mögen sein

$$y = a_1 x + b_1; \quad z = a'_1 x + b'_1,$$

wo nun die Constanten a_1, b_1, a'_1, b'_1 zu bestimmen sind.

Weil aber diese zweite Gerade der ersten parallel sein soll, so müssen auch die Projektionen der zweiten Geraden den Projektionen der ersten Geraden parallel sein; es muss also sein

$$a_1 = a \text{ und } a'_1 = a'.$$

Weil ferner die zweite Gerade durch den Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gehen soll, so bestehen auch für sie die Gleichungen

$$y_1 = a_1\, x_1 + b_1; \quad z_1 = a'_1\, x_1 + b'_1.$$

Aus diesen folgt nun

$$b_1 = y_1 - a_1 x_1; \quad b'_1 = z_1 - a'_1 x_1.$$

Setzen wir die Werthe für a_1, a'_1, b_1, b'_1 in die Gleichungen der Geraden ein, so erhalten wir

$$y = ax + y_1 - ax_1; \quad z = a'x + z_1 - a'x_1,$$

oder

$$y - y_1 = a\,(x - x_1); \quad z - z_1 = a'\,(x - x_1).$$

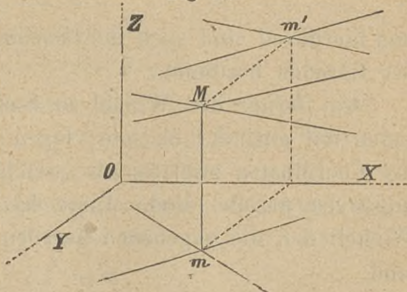
Dieses sind demnach die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ geht und mit der ersten Geraden parallel ist.

§ 56.

Zwei Gerade.

Wenn zwei gerade Linien im Raume sich schneiden, Figur 60, so gehören die Coordinaten des Durchschnittspunktes beiden Linien gemeinschaftlich an, und die Durchschnittspunkte ihrer Projektionen sind die Projektionen des Durchschnittspunktes der Geraden im Raume.

Fig 60.



Sind daher $y = ax + b$ und $z = a'x + b'$ die Gleichungen der einen, so wie

$$y = cx + d \text{ und } z = c'x + d'$$

die Gleichungen der andern Geraden und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Durchschnittspunktes M, so bestehen auch die Gleichungen

$$y_1 = ax_1 + b; \quad z_1 = a'x_1 + b',$$
$$y_1 = cx_1 + d; \quad z_1 = c'x_1 + d'.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun

$$ax_1 + b = cx_1 + d,$$
$$a'x_1 + b' = c'x_1 + d',$$

und aus diesen weiter

$$x_1 = \frac{d-b}{a-c} \text{ und } x_1 = \frac{d'-b'}{a'-c'},$$

so wie endlich hieraus

$$\frac{d-b}{a-c} = \frac{d'-b'}{a'-c'}$$

oder

$$(d-b)(a'-c') = (a-c)(d'-b').$$

Diese Gleichung spricht also die Bedingung aus, unter welcher die beiden Geraden im Raume sich schneiden.

Setzt man die Werthe von x_1 in die obigen Gleichungen ein, so folgt

$$y_1 = a\frac{d-b}{a-c} + b$$
$$= \frac{ad-bc}{a-c},$$
$$z_1 = a'\frac{d'-b'}{a'-c'} + b'$$
$$= \frac{a'd'-b'c'}{a'-c'},$$

und hierdurch sind auch die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden bestimmt.

Um ferner den Winkel zu bestimmen, den die beiden Geraden mit einander machen, legen wir durch den Anfangspunkt der Coordinaten zwei Gerade, welche mit den gegebenen beziehungsweise parallel sind. Diese letzteren bilden dann denselben Winkel, den die gegebenen Geraden mit einander bilden; und es sind

$$y = ax; \quad z = a'x$$

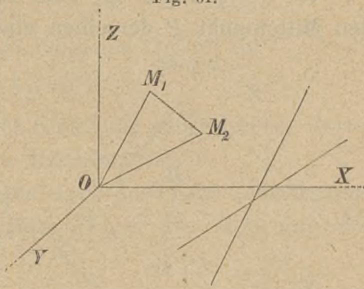
die Gleichungen der einen, so wie

$$y = cx; \quad z = c'x$$

die Gleichungen der andern dieser Geraden. Figur 61.

Nehmen wir nun auf der einen die Strecke $OM_1 = r_1$, auf der andern die Strecke $OM_2 = r_2$, und sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes M_1 so wie x_2, y_2, z_2 die Coordinaten des Punktes M_2, so ist

Fig. 61.



$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$
$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Bezeichnen wir ferner den Abstand $M_1 M_2$ mit a, so ist

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bezeichnen wir endlich den gesuchten Winkel mit θ, so ist

$$\cos\theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - a^2}{2 r_1 r_2},$$

und wenn wir für r_1, r_2 und a die Werthe einsetzen, so erhalten wir

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}.$$

Aus den Projektionsgleichungen folgt aber

$$y_1 = a x_1; \quad z_1 = a' x_1,$$

so wie

$$y_2 = c x_2; \quad z_2 = c' x_2,$$

daher ist

$$y_1 y_2 = a c x_1 x_2; \quad z_1 z_2 = a' c' x_1 x_2.$$

Werden diese Werthe eingesetzt, so wird

$$\cos\theta = \frac{1 + ac + a'c'}{\sqrt{(1 + a^2 + a'^2)(1 + c^2 + c'^2)}}.$$

Wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel erhält man für θ zwei Werthe, und diese entsprechen den beiden Nebenwinkeln, welche die Geraden mit einander machen.

Stehen die beiden geraden Linien senkrecht auf einander, so ist $\theta = 90^0$, also $\cos\theta = 0$. Es wird aber $\cos\theta = 0$, wenn

$$1 + ac + a'c' = 0$$

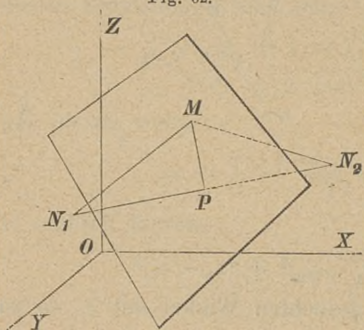
ist. Daher enthält diese letztere Gleichung die Bedingung, unter welcher zwei Gerade im Raume auf einander senkrecht stehen.

§ 57.

Die Ebene.

Ist $N_1 N_2$, Figur 62, eine Gerade im Raume, und geht durch den Mittelpunkt P derselben eine Ebene, welche auf $N_1 N_2$ senkrecht steht, so ist jeder beliebige Punkt M der Ebene von N_1 und N_2 gleich weit entfernt, d. h. es ist für jede beliebige Lage des Punktes M in der Ebene stets

Fig. 62.



$$MN_1 = MN_2.$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes N_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten des Punktes N_2 so wie x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes M in der Ebene, so ist

$$\overline{MN_1}^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2,$$
$$\overline{MN_2}^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2,$$

und weil

$$MN_1 = MN_2,$$

so ist auch

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2.$$

Hieraus folgt aber weiter

$$(x_2-x_1)\,x + (y_2-y_1)\,y + (z_2-z_1)\,z = \frac{x_2^2+y_2^2+z_2^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2}{2}.$$

Setzen wir nun

$$x_2 - x_1 = A,$$
$$y_2 - y_1 = B,$$
$$z_2 - z_1 = C,$$
$$\frac{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}{2} = D,$$

so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an

$$Ax + By + Cz = D,$$

und dieses ist die Gleichung einer Ebene, deren Lage durch die Constanten A, B, C und D bestimmt ist.

Lösen wir diese Gleichung für z auf, so erhalten wir

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y + \frac{D}{C},$$

und setzen wir

$$-\frac{A}{C} = a; \quad -\frac{B}{C} = b; \quad \frac{D}{C} = c,$$

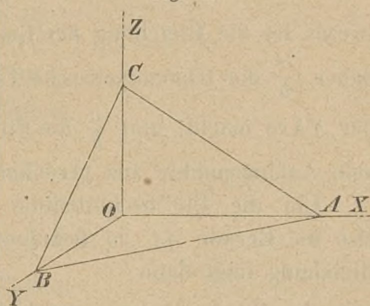
so nimmt die Gleichung der Ebene folgende Gestalt an

$$z = ax + by + c,$$

und dieses ist die übliche Form der Gleichung einer Ebene, deren Lage durch die Constanten a, b, c bestimmt ist.

Diese Ebene schneidet im Allgemeinen sowol die Coordinatenaxen als auch die Coordinatenebenen. Figur 63. Um nun die Durchschnittspunkte mit den Axen und die Durchschnittslinien mit den Ebenen zu bestimmen, haben wir auf folgende Weise zu verfahren.

Fig. 63.



Um den Durchschnittspunkt der Ebene mit der ZAxe, also den Punkt C zu bekommen, setzen wir $x = 0$ und $y = 0$; aus der Gleichung folgt dann

$$z = c.$$

Es ist also die Constante c der Abstand des Durchschnittspunktes der Ebene mit der ZAxe vom Anfangspunkte der Coordinaten, oder die Strecke OC, welche die Ebene auf der ZAxe, vom Anfangspunkte O aus gerechnet, abschneidet.

Um ferner den Durchschnittspunkt der Ebene mit der YAxe, also den Punkt B zu bekommen, setzen wir $x = 0$ und $z = 0$; aus der Gleichung folgt dann

$$by + c = 0,$$

also

$$y = -\frac{c}{b}.$$

Der Quotient $\frac{c}{b}$ ist also die Strecke OB, welche die Ebene auf der YAxe vom Anfangspunkte O aus gerechnet, abschneidet.

Um endlich den Durchschnittspunkt der Ebene mit der XAxe, also den Punkt A zu bekommen, setzen wir $y = 0$ und $z = 0$;

aus der Gleichung folgt dann

$$ax + c = 0,$$

also

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Der Quotient $\frac{c}{a}$ ist demnach die Strecke OA, welche die Ebene auf der XAxe, vom Anfangspunkte O aus gerechnet, abschneidet.

Um die Durchschnittslinie der Ebene mit der XYEbene, also die Gerade AB, zu bestimmen, setzen wir $z = 0$; aus der Gleichung folgt dann

$$ax + by + c = 0$$

oder

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Dieses ist die Gleichung der Geraden AB in der XYEbene, und daher $\frac{a}{b}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den sie mit der XAxe macht, und $\frac{c}{b}$ die Strecke, welche sie auf der YAxe, vom Anfangspunkte aus gerechnet, abschneidet.

Um die Durchschnittslinie der Ebene mit der XZEbene, also die Gerade AC zu bekommen, setzen wir $y = 0$; aus der Gleichung folgt dann

$$z = ax + c.$$

Dieses ist die Gleichung der Geraden AC in der XZEbene und daher a die trigonometrische Tangente des Winkels, den sie mit der XAxe macht, und c die Strecke, welche sie auf der ZAxe, vom Anfangspunkte aus gerechnet, abschneidet.

Um endlich die Durchschnittslinie der Ebene mit der YZEbene also die Gerade BC, zu bekommen, setzen wir $x = 0$; aus der Gleichung folgt sodann

$$z = by + c.$$

Dieses ist die Gleichung der Geraden BC in der YZEbene, und daher b die trigonometrische Tangente des Winkels, den sie mit der YAxe macht, und c die Strecke, welche sie auf der ZAxe, vom Anfangspunkte aus gerechnet, abschneidet.

Die Durchschnittslinien einer Ebene mit den Projektionsebenen werden die Spuren der Ebene genannt. Eine Ebene ist daher durch zwei Spuren bestimmt.

Da die Constanten a, b, c die Lage der Ebene bestimmen, so ergeben sich für diese Constanten noch folgende Betrachtungen.

Ist $c = 0$, so folgt aus der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$z = ax + by.$$

Dieses ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt O der Coordinaten geht.

Setzt man in dieser Gleichung

$$y = 0,$$

so ist

$$z = ax$$

die Gleichung der XZ Spur der Ebene.

Setzt man

$$x = 0,$$

so ist

$$z = by$$

die Gleichung der YZ Spur der Ebene,

und setzt man

$$z = 0,$$

so ist

$$y = -\frac{a}{b}x$$

die Gleichung der XY Spur der Ebene.

Ist $b = 0$, so folgt aus der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$z = ax + c,$$

und dieses ist die Gleichung der XZ Spur einer Ebene, welche auf der XZ Ebene senkrecht steht und mit der Y Axe parallel ist.

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so ist

$$z = c$$

die Gleichung der YZ Spur der Ebene, und setzt man $z = 0$, so ist

$$x = -\frac{c}{a}$$

die Gleichung der XY Spur der Ebene; beide Spuren sind daher mit der Y Axe parallel.

Ist $a = 0$, so folgt aus der allgemeinen Gleichung der Ebene

$$z = by + c,$$

und dieses ist die Gleichung der YZ Spur einer Ebene, welche auf der YZ Ebene senkrecht steht und mit der X Axe parallel ist.

Setzt man in dieser Gleichung $y = 0$, so ist

$$z = c$$

die Gleichung der XZ Spur der Ebene, und setzt man $z = 0$, so ist

$$y = -\frac{c}{b}$$

die Gleichung der XY Spur der Ebene; beide Spuren sind daher mit der X Axe parallel.

Ist endlich

$$ax + by + c = 0,$$

so ist

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

die Gleichung der XY Spur einer Ebene, welche auf der XY Ebene senkrecht steht und mit der Z Axe parallel ist.

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so ist

$$y = -\frac{c}{b}$$

die Gleichung der YZ Spur der Ebene, und setzt man $y = 0$, so ist

$$x = -\frac{c}{a}$$

die Gleichung der XZ Spur der Ebene; beide Spuren sind daher mit der Z Axe parallel.

Sind M_1, M_2, M_3 drei Punkte im Raume, deren Coordinaten beziehungsweise x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 sind, so ist durch diese drei Punkte die Lage einer Ebene bestimmt.

Die Gleichung der Ebene sei

$$z = ax + by + c,$$

so haben wir zur Bestimmung der drei Constanten a, b, c die folgenden drei Gleichungen

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c,$$

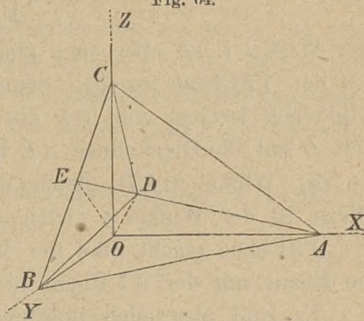
$$z_2 = ax_2 + by_2 + c,$$

$$z_3 = ax_3 + by_3 + c.$$

Werden hieraus die Constanten a, b, c bestimmt und in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man die gesuchte Gleichung der Ebene.

Wenn man, Figur 64, vom Anfangspunkte O der Coordinaten eine Senkrechte OD auf die Ebene ABC zieht, so nennt man die Winkel, welche diese Senkrechte mit den Axen einschliesst, die Stellungswinkel der Ebene. Bezeichnet man den Winkel AOD mit α, den Winkel BOD mit β und den Winkel COD mit γ, so ist

Fig. 64.



$$\cos\alpha = \frac{OD}{OA}; \quad \cos\beta = \frac{OD}{OB};$$

$$\cos\gamma = \frac{OD}{OC}.$$

Es ist aber

$$OA = -\frac{c}{a}; \quad OB = -\frac{c}{b}; \quad OC = c;$$

bezeichnen wir daher OD, also den Abstand der Ebene vom Anfangspunkte der Coordinaten mit d, so ist auch

$$\cos\alpha = -\frac{ad}{c}; \quad \cos\beta = -\frac{bd}{c}; \quad \cos\gamma = \frac{d}{c}.$$

Wenn wir diese Gleichungen zur zweiten Potenz erheben und addiren, so erhalten wir

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = a^2\frac{d^2}{c^2} + b^2\frac{d^2}{c^2} + \frac{d^2}{c^2},$$

weil aber

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

so ist weiter

$$\frac{d^2}{c^2}(1 + a^2 + b^2) = 1,$$

und hieraus

$$d = \frac{c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

und hierdurch ist der Abstand der Ebene vom Anfangspunkte der Coordinaten bestimmt.

Setzen wir diesen Werth von d in die obigen Gleichungen ein, so folgt

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Der Winkel α ist aber auch gleich dem Winkel, den die Ebene mit der YZEbene macht; denn es ist OAE ein bei O rechtwinkeliges Dreieck und OD die aus der Spitze des rechten Winkels O auf die Hypotenuse AE herabgelassene Senkrechte; daher ist der Winkel OED gleich dem Winkel DOA. Auf gleiche Weise ist der Winkel β gleich dem Winkel, den die Ebene mit der XZEbene macht, und der Winkel γ gleich dem Winkel, den die Ebene mit der XYEbene macht.

Es sind also auch hierdurch die Winkel bestimmt, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen macht.

Aus den Gleichungen folgt noch

$$a = -\frac{c}{d}\cos\alpha;\; b = -\frac{c}{d}\cos\beta;\; c = \frac{d}{\cos\gamma},$$

oder wenn wir für $\frac{c}{d}$ überall $\frac{1}{\cos\gamma}$ setzen,

$$a = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma};\; b = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma};\; c = \frac{d}{\cos\gamma}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung der Ebene

$$z = ax + by + c$$

eingesetzt, so erhalten wir

$$z = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}x - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}y + \frac{d}{\cos\gamma},$$

und hieraus weiter

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d,$$

und dieses ist die Gleichung einer Ebene, welche durch ihren Abstand vom Coordinatenanfange und durch ihre Stellungswinkel oder durch die Winkel bestimmt ist, welche sie mit den Coordinatenebenen macht.

§ 58.

Die Ebene und die Gerade.

Eine Gerade liegt bekanntlich in einer Ebene, wenn sie zwei Punkte mit der Ebene gemein hat. Ist nun

$$z = ax + by + c$$

die Gleichung einer Ebene, sind ferner

$$y = mx + n \text{ und } z = m'x + n'$$

die Projektionsgleichungen einer Geraden und x_1, y_1, z_1 so wie x_2, y_2, z_2 die Coordinaten derjenigen beiden Punkte, welche die Gerade mit der Ebene gemein hat, so lassen sich die Bedingungen, unter welchen eine Gerade in einer Ebene liegt, auf folgende Weise ermitteln.

Da die beiden Punkte der geraden Linie angehören, so gelten für die Gerade auch die Gleichungen

$$y_1 = mx_1 + n; \quad z_1 = m'x_1 + n';$$
$$y_2 = mx_2 + n; \quad z_2 = m'x_2 + n'.$$

Da ferner die beiden Punkte auch der Ebene angehören, so gelten für die Ebene die folgenden Gleichungen

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c,$$
$$z_2 = ax_2 + by_2 + c.$$

Setzen wir nun für y_1 und z_1 so wie für y_2 und z_2 die Werthe aus den ersteren Gleichungen in die letzteren ein, weil für diese beiden Punkte die Gerade und die Ebene dieselben Coordinaten besitzen, so erhalten wir

$$m'x_1 + n' = ax_1 + bm\,x_1 + bn + c,$$
$$m'x_2 + n' = ax_2 + bm\,x_2 + bn + c,$$

oder

$$(a + bm - m')\,x_1 + (c + bn - n') = 0,$$
$$(a + bm - m')\,x_2 + (c + bn - n') = 0.$$

Bestehen also diese Gleichungen, so liegt die Gerade in der Ebene. Da aber diese Gleichungen für jeden Werth von x gelten müssen, so ist dieses nur möglich, wenn

$$a + bm - m' = 0,$$
$$c + bn - n' = 0.$$

Wenn also für eine Gerade und eine Ebene diese letzten beiden Gleichungen bestehen, so liegt die Gerade in der Ebene.

Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn die Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet, gleich den Stellungswinkeln der Ebene sind.

Bezeichnen wir die Stellungswinkel der Ebene für die Axen X, Y, Z beziehungsweise mit α, β, γ, so ist

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Bezeichnen wir ferner die Winkel, welche die Gerade mit den Axen X, Y, Z macht, beziehungsweise mit α', β', γ', so ist

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+m'^2}},$$

$$\cos\beta' = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+m'^2}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{m'}{\sqrt{1+m^2+m'^2}}.$$

Es muss daher sein

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+m'^2}},$$

$$\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+m'^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \frac{m'}{\sqrt{1+m^2+m'^2}}.$$

Dividirt man von diesen letzten Gleichungen die zweite durch die erste, so folgt

$$\frac{b}{a} = m,$$

und dividirt man die dritte Gleichung durch die erste, so folgt

$$\frac{1}{a} = m'.$$

Die Projektionsgleichungen einer Geraden, welche auf der Ebene

$$z = ax + by + c$$

senkrecht steht, müssen also sein

$$y = \frac{b}{a}x + n; \quad z = \frac{1}{a}x + n'.$$

Die Gleichung für die XY Spur der Ebene ist aber

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

und die Gleichung für die XZ Spur der Ebene ist

$$z = ax + c.$$

Da nun die Coëfficienten von x in den Projektionsgleichungen der Geraden die umgekehrten Werthe der Coëfficienten von x in den Gleichungen der Spuren der Ebene sind, so geht hieraus hervor, dass die Projektionen der Geraden auf den gleichnamigen Spuren der Ebene senkrecht stehen, wenn die Gerade auf der Ebene senkrecht steht.

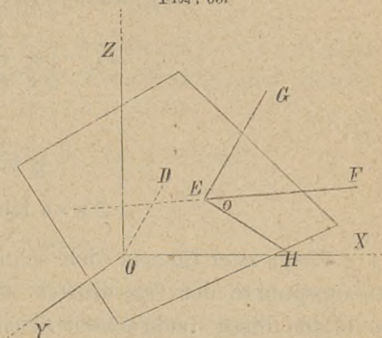
Macht die Gerade EF, Figur 65, mit der Ebene den beliebigen Winkel θ, und errichten wir im Durchschnittspunkte E auf der Ebene die Senkrechte EG, so ist der Winkel

$$GEF = 90^0 - \theta,$$

daher

$$\cos GEF = \sin \theta.$$

Fig. 65.



Es macht nun die Gerade GE, weil sie auf der Ebene senkrecht steht, mit den Coordinatenaxen Winkel, welche gleich den Stellungswinkeln der Ebene sind, also die Winkel α, β, γ, während die Gerade EF mit den Axen die Winkel α', β', γ' macht. Für den Winkel aber, den die beiden Geraden EG und EF mit einander machen, besteht nach § 54 die Gleichung

$$\cos GEF = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'.$$

Setzen wir nun für die Cosinus die Werthe, wie sie aus den vorhin aufgestellten Gleichungen sich ergeben, so erhalten wir

$$\sin \theta = \frac{a + bm + m'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + m^2 + m'^2)}}.$$

Setzen wir hier

$$m = \frac{b}{a}; \quad m' = \frac{1}{a},$$

so folgt

$$\sin \theta = 1, \text{ also } \theta = 90^0,$$

die Gerade steht also auf der Ebene senkrecht.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ebene mit x_1, y_1, z_1, so bestehen für die Gerade die Gleichungen

$$y_1 = mx_1 + n; \quad z_1 = m'x_1 + n',$$

und für die Ebene besteht die Gleichung

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c.$$

Aus diesen drei Gleichungen aber lassen sich die Coordinaten des Durchschnittspunktes bestimmen. Es ist

$$x_1 = \frac{n' - bn - c}{a + bm - m'},$$

$$y_1 = \frac{an - cm + mn' - m'n}{a + bm - m'},$$

$$z_1 = \frac{an' - cm' + bmn' - bm'n}{a + bm - m'}.$$

§ 59.

Zwei Ebenen.

Wenn zwei Ebenen sich schneiden, und man construirt vom Anfangspunkte der Coordinaten aus Senkrechte auf die Ebenen, so bilden diese Senkrechten denselben Winkel mit einander, den die Ebenen mit einander einschliessen.

Sind

$$z = ax + by + c$$

und

$$z = a_1 x + b_1 y + c_1$$

die Gleichungen dieser beiden Ebenen, bezeichnet man die Stellungswinkel der ersteren mit α, β, γ, und die Stellungswinkel der letzteren mit α_1, β_1, γ_1, so wie den Winkel, den die Senkrechten und folglich auch die Ebenen mit einander machen, mit θ, so ist

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Es ist aber

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

sowie

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{b_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}},$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}.$$

Setzen wir daher diese Werthe in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\cos \theta = \frac{a a_1 + b b_1 + 1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a_1^2 + b_1^2)}}.$$

Sind beide Ebenen parallel, so ist $\theta = 0$ und $\cos \theta = 1$; es sind aber dann die Stellungswinkel beider Ebenen einander gleich; also ist auch

$$\cos \alpha = \cos \alpha_1; \ \cos \beta = \cos \beta_1; \ \cos \gamma = \cos \gamma_1,$$

woraus weiter folgt, dass

$$a = a_1 \text{ und } b = b_1.$$

Werden diese Werthe in die Gleichungen für die Spuren eingesetzt, so ergibt sich, dass die gleichnamigen Spuren beider Ebenen parallel sind.

Stehen die Ebenen senkrecht auf einander, so ist $\theta = 90^0$ und $\cos \theta = 0$. Es wird aber $\cos \theta = 0$, wenn

$$1 + a a_1 + b b_1 = 0$$

ist. Hiermit ist also die Bedingung ausgesprochen, unter welcher zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen.

§ 60.

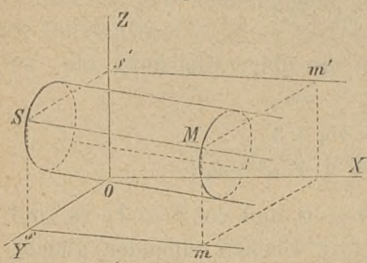
Die Cylinderfläche.

Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, dass sie mit ihrer ursprünglichen Richtung immer parallel bleibt und hierbei beständig eine Kurve schneidet, so beschreibt sie eine Cylinderfläche. Die Gerade wird die Erzeugende, und die Kurve, welche gleichsam die Bewegung der Geraden leitet, wird die Leitlinie oder Direktrix der Cylinderfläche genannt.

Wenn es sich nun darum handelt, für die Cylinderfläche eine Gleichung aufzustellen, so muss diese aus den Gleichungen der Erzeugenden und der Direktrix hervorgehen.

Ist, Figur 66, SM die Erzeugende einer Cylinderfläche, ist sm ihre Projektion auf die XYEbene, $s'm'$ ihre Projektion auf die XZEbene und S ihre YZSpur, und erzeugt die Gerade SM, indem sie sich parallel mit sich fortbewegt und an der Leitlinie hingleitet, die Cylinderfläche, so erzeugt ihre Spur S in der YZEbene eine Kurve, welche die YZSpur der Cylinderfläche ist, und deren Gestalt von der Gestalt und Lage der Direktrix so wie von der Lage der Erzeugenden gegen die Coordinatenebenen abhängt.

Fig. 66.



Sind nun

$$y = ax + b \text{ und } z = a'x + b'$$

die Projektionsgleichungen der Geraden SM, so sind b und b' die Coordinaten des Punktes S in der YZEbene; und ist die vom Punkte S beschriebene Kurve eine gesetzmässige, was der Fall sein wird, wenn die Direktrix eine gesetzmässige Kurve ist, so sind b und b' die veränderlichen Coordinaten der YZSpur der Cylinderfläche, und es besteht zwischen b und b' eine Gleichung

$$f(b, b') = 0,$$

welche die Gleichung dieser Kurve, also die Gleichung der YZSpur der Cylinderfläche ist.

Aus den Projektionsgleichungen der Erzeugenden folgt aber

$$b = y - ax; \quad b' = z - a'x.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung der YZSpur der Cylinderfläche eingesetzt, so erhalten wir eine Gleichung zwischen x, y und z, nämlich

$$f(y - ax, z - a'x) = 0,$$

welches die Gleichung der Cylinderfläche ist.

Die Gleichung der YZSpur der Cylinderfläche muss nun entweder direkt gegeben sein, oder sie muss aus den Gleichungen der Direktrix sich bestimmen lassen. Diese Gleichung ist aber direkt gegeben, wenn die YZSpur der Cylinderfläche gleichzeitig die Direktrix ist; denn dann ist die Gleichung der Spur auch die Gleichung der Direktrix. Dieser Fall liegt aber stets vor, wenn die Direktrix eine ebene Kurve ist, welche in eine der Coordinatenebenen gelegt werden kann. Die fragliche Gleichung muss aber erst abgeleitet werden, wenn die Direktrix durch zwei Projektionsgleichungen gegeben ist; welcher Fall vorliegt, wenn die Direktrix eine Kurve von doppelter Krümmung ist. Sind aber

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ und } \psi(x, z) = 0$$

die Projektionsgleichungen der Direktrix und

$$y = ax + b \text{ und } z = a'x + b'$$

die Projektionsgleichungen der Erzeugenden, so gelten für irgend einen Punkt der Cylinderfläche, in welchem die Direktrix von der Erzeugenden geschnitten wird, die vorstehenden vier Gleichungen. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses Punktes mit x', y', z' so haben wir

$$\varphi(x', y') = 0; \quad \psi(x', z') = 0,$$
$$y' = ax' + b; \quad z' = a'x' + b'.$$

Werden die Coordinaten x', y', z' aus diesen Gleichungen eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen b und b', welches die Gleichung der YZSpur der Cylinderfläche ist. Werden hierauf in diese Gleichung wieder die Werthe von b und b' aus den Projektionsgleichungen der Erzeugenden eingesetzt, so erhält man die Gleichung der Cylinderfläche.

Ist die Direktrix ein Kreis, welcher in der YZEbene liegt, ist r der Halbmesser dieses Kreises, und sind m und n die Coordinaten seines Mittelpunktes, so ist die Gleichung dieses Kreises

$$(b - m)^2 + (b' - n)^2 = r^2,$$

und daher ist weiter, wenn für b und b' ihre Werthe aus den Projektionsgleichungen der Erzeugenden eingesetzt werden,

$$[(y - ax) - m]^2 + [(z - a'x) - n]^2 = r^2$$

die Gleichung der Cylinderfläche.

Fällt der Mittelpunkt des Kreises mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammen, so ist

$$m = n = 0,$$

und daher

$$(y - ax)^2 + (z - a'x)^2 = r^2$$

die Gleichung der Cylinderfläche; oder wenn man die Gleichung für x auflöst,

$$x = \frac{ay + a'z \pm \sqrt{(a^2 + a'^2)\, r^2 - (az - a'y)^2}}{a^2 + a'^2},$$

Ist die Erzeugende mit der XAxe parallel, so ist $a = a' = 0$ und daher

$$y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung der Cylinderfläche für jedes beliebige x.

§ 61.

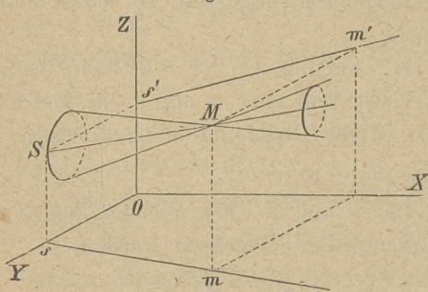
Die Kegelfläche.

Wenn eine gerade Linie, welche durch einen festen Punkt geht, sich so bewegt, dass sie, ohne diesen festen Punkt zu verlassen, beständig eine Kurve schneidet, so beschreibt sie eine Kegelfläche. Die Gerade wird die Erzeugende, der feste Punkt wird der Mittelpunkt, und die Kurve, welche die Bewegung der Geraden leitet, wird die Leitlinie oder Direktrix der Kegelfläche genannt.

Soll für die Kegelfläche eine Gleichung aufgestellt werden, so muss diese aus den Gleichungen der Erzeugenden und der Direktrix hervorgehen.

Ist, Figur 67, SM die Erzeugende der Kegelfläche, M der feste Punkt, ist sm die Projektion der Erzeugenden in der XYEbene, $s'm'$ ihre Projektion in der XZEbene und S ihre YZSpur, und erzeugt die Gerade SM, indem sie sich so bewegt, dass sie beständig durch den festen Punkt M geht und an der Leitlinie hingleitet, die Kegelfläche, so erzeugt ihre Spur S in der YZEbene eine Kurve, welche die YZSpur der Kegelfläche ist, und deren Gestalt von der Gestalt und Lage der Direktrix so wie von der Lage der Erzeugenden, beziehungsweise des festen Punktes M, gegen die Projektionsebenen abhängt.

Fig. 67.



Sind nun

$$y = ax + b \text{ und } z = a'x + b'$$

die Projektionsgleichungen der Geraden SM, so sind b und b' die Coordinaten des Punktes S in der YZEbene; und ist die vom Punkte S beschriebene Kurve eine gesetzmässige, was der

Fall sein wird, wenn die Direktrix eine gesetzmässige Kurve ist, so sind b und b' die veränderlichen Coordinaten der YZ Spur der Kegelfläche, und es besteht zwischen b und b' eine Gleichung

$$f(b,\ b') = 0,$$

welche die Gleichung dieser Kurve, also die Gleichung der YZ Spur der Kegelfläche ist.

Da aber die erzeugende Gerade, indem sie beständig durch den festen Punkt M geht, ihre Richtung fortwährend ändert, so sind auch a und a' veränderlich und von den Coordinaten x, y, z sowol als von den Coordinaten des festen Punktes M abhängig. Bezeichnen wir mit ξ, η und ζ die Coordinaten des Punktes M, so bestehen für die Projektionen der Erzeugenden auch die Gleichungen

$$\eta = a\xi + b; \quad \zeta = a'\xi + b',$$

und werden diese von den obigen Projektionsgleichungen der Erzeugenden subtrahirt, so erhält man die Gleichungen

$$y - \eta = a\,(x - \xi); \quad z - \zeta = a'\,(x - \xi),$$

also die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt M geht.

Aus diesen Gleichungen folgt aber weiter

$$a = \frac{y - \eta}{x - \xi}; \quad a' = \frac{z - \zeta}{x - \xi},$$

wodurch die jedesmaligen Werthe von a und a' ausgedrückt sind.

Aus den Projektionsgleichungen der Erzeugenden folgt nun

$$b = y - ax; \quad b' = z - a'x,$$

und wenn wir für a und a' die so eben gefundenen Werthe setzen, so ist

$$b = y - \frac{y - \eta}{x - \xi}\,x = \frac{\eta x - y\xi}{x - \xi},$$

$$b' = z - \frac{z - \zeta}{x - \xi}\,x = \frac{\zeta x - z\xi}{x - \xi}.$$

Werden diese Werthe von b und b' in die Gleichung der YZ Spur der Kegelfläche eingesetzt, so erhalten wir eine Gleichung zwischen x, y, z, nämlich

$$f\left(\frac{\eta x - y\xi}{x - \xi},\ \frac{\zeta x - z\xi}{x - \xi}\right) = 0,$$

welches die Gleichung der Kegelfläche ist.

Die Gleichung

$$f(b,\ b') = 0$$

ist nun direkt gegeben, wenn die YZ Spur gleichzeitig die Direktrix der Kegelfläche ist; denn dann ist die Gleichung der Spur auch die Gleichung der Direktrix. Dieser Fall liegt aber stets vor, wenn die Direktrix eine ebene Kurve ist, welche in eine der Coordinatenebenen gelegt werden kann. Die Gleichung

$$f(b, b') = 0$$

muss aber erst abgeleitet werden, wenn die Direktrix durch zwei Projektionsgleichungen gegeben ist, welcher Fall vorliegt, wenn die Direktrix eine Kurve von doppelter Krümmung ist.

Sind dann

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ und } \psi(x, z) = 0,$$

die Projektionsgleichungen der Direktrix und

$$y = ax + b \text{ und } z = a'x + b'$$

die Projektionsgleichungen der Erzeugenden; oder wenn wir die Werthe von a und a' einführen

$$y = \frac{y - \eta}{x - \xi} x + b; \quad z = \frac{z - \zeta}{x - \xi} x + b',$$

so gelten alle diese Gleichungen für irgend einen Punkt der Kegelfläche, in welchem die Direktrix von der Erzeugenden geschnitten wird. Bezeichnen wir daher die Coordinaten eines solchen Punktes mit x' y' z', so haben wir auch die Gleichungen

$$\varphi(x', y') = 0; \quad \psi(x', z') = 0;$$

$$y' = \frac{y' - \eta}{x' - \xi} x' + b; \quad z' = \frac{z' - \zeta}{x' - \xi} x' + b'.$$

Werden die Coordinaten x' y' z' aus diesen Gleichungen eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen b und b', welche die Gleichung der YZ Spur der Kegelfläche ist. Werden in diese Gleichung wieder die Werthe von b und b' aus den Projektionsgleichungen der Erzeugenden eingesetzt, so erhält man die Gleichung der Kegelfläche.

Ist die Direktrix ein Kreis, welcher in der YZ Ebene liegt, ist r der Halbmesser dieses Kreises, und sind m und n die Coordinaten seines Mittelpunktes, so ist die Gleichung dieses Kreises

$$(b - m)^2 + (b' - n)^2 = r^2,$$

und wenn man für b und b' die aus den Projektionsgleichungen der Erzeugenden sich ergebenden Werthe setzt, so ist

$$\left(\frac{\eta x - y\xi}{x - \xi} - m\right)^2 + \left(\frac{\zeta x - z\xi}{x - \xi} - n\right)^2 = r^2.$$

die Gleichung der Kegelfläche.

Fällt der Mittelpunkt des Kreises mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammen, so ist $m = n = 0$ und daher die Gleichung der Kegelfläche

$$\left(\frac{\eta x - y\xi}{x - \xi}\right)^2 + \left(\frac{\zeta x - z\xi}{x - \xi}\right)^2 = r^2.$$

Lässt man endlich den Mittelpunkt der Kegelfläche oder die Spitze des Kegels mit der X Axe zusammenfallen, so wird $\eta = \zeta = 0$ und daher die Gleichung der Kegelfläche

$$\frac{\xi^2(y^2 + z^2)}{(x - \xi)^2} = r^2.$$

§ 62.

Die Umdrehungsflächen.

Wenn eine gerade oder krumme Linie gegen eine feste Gerade eine bestimmte Lage hat und sich so um die feste Gerade dreht, dass ein jeder ihrer Punkte einen Kreis beschreibt, dessen Ebene auf der festen Geraden senkrecht steht, und dessen Mittelpunkt mithin in dieser festen Geraden liegt, so beschreibt sie eine Drehungs- oder Rotationsfläche. Die feste Gerade wird die Axe derselben genannt, die Kreise, deren Ebenen auf der Axe senkrecht stehen, und deren Mittelpunkte in der Axe liegen, heissen Parallelkreise. Wird eine Ebene durch die Drehungsaxe gelegt, so nennt man den Schnitt dieser Ebene mit der Fläche einen Meridian der Fläche. Man kann daher auch annehmen, dass durch Drehen des Meridians um die Axe die Umdrehungsfläche entstanden sei.

Um die Gleichung einer Rotationsfläche aufzustellen, nimmt man gewöhnlich die Z Axe als Drehungsaxe an, so dass die Ebenen sämmtlicher Parallelkreise mit der XY Ebene parallel sind. Bezeichnet man daher den Halbmesser irgend eines Parallelkreises mit ϱ, so gilt für jeden Parallelkreis die Gleichung

$$\varrho^2 = x^2 + y^2.$$

Es ist aber für einen jeden Meridian

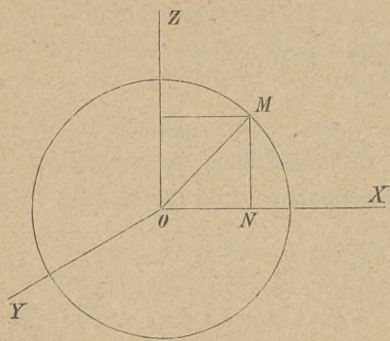
$$\varrho = f(z),$$

wo diese letztere Gleichung die Gleichung des Meridianes selbst, also derjenigen Kurve ist, durch deren Drehung um die Axe die Rotationsfläche erzeugt wird. Wird nun aus beiden Gleichungen ϱ eliminirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 = (f(z))^2,$$

und dieses ist die Gleichung der Rotationsfläche.

Fig. 68.

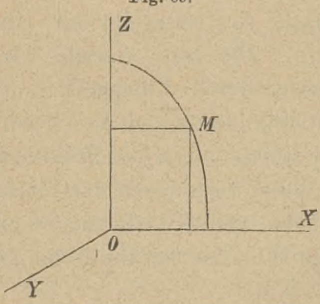


Ist die rotirende Kurve ein Kreis, Figur 68, welcher durch Drehen um einen Durchmesser die Kugelfläche erzeugt; nehmen wir die XZ-Ebene als diejenige an, in welcher die Kurve in ihrer ursprünglichen Lage sich befindet, und lassen wir den Mittelpunkt des Kreises mit dem Coordinatenanfange zusammenfallen, so ist

$$f(z) = \sqrt{r^2 - z^2}.$$

Mithin, wenn wir dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsfläche einsetzen,

Fig. 69.



$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2$$

oder

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und dieses ist mithin die Gleichung der Kugelfläche.

Ist die rotirende Kurve eine Ellipse, welche ursprünglich in der XZ Ebene liegt, Figur 69, und lassen wir ihren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, so wie ihre grosse Axe mit der Z Axe zusammenfallen, so ist

$$f(z) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - z^2}.$$

Setzen wir dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen ein, so erhalten wir

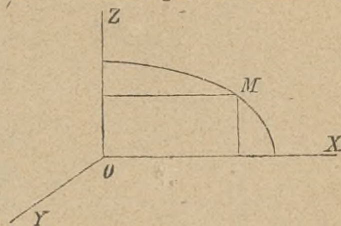
$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2)$$

oder

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

und dieses ist die Gleichung des gestreckten Rotationsellipsoides, welches also durch Drehung der Ellipse um die grosse Axe entsteht.

Fig. 70.



Lassen wir dagegen die kleine Axe der Ellipse mit der ZAxe zusammenfallen, Figur 70, so ist

$$f(z) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2},$$

und wenn wir dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen einsetzen, so erhalten wir

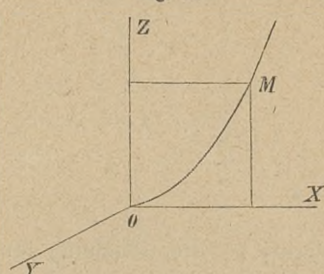
$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2)$$

oder

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

und dieses ist die Gleichung des abgeplatteten Rotationsellipsoides, welches also durch Drehung der Ellipse um die kleine Axe entsteht.

Fig. 71.



Ist die rotirende Kurve eine Parabel, welche ursprünglich in der XZEbene liegt, Figur 71, und lassen wir ihren Scheitel mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, so wie ihre Axe mit der ZAxe zusammenfallen, so ist

$$f(z) = \sqrt{2pz}.$$

Wird dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen eingesetzt, so kommt

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

oder

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2p},$$

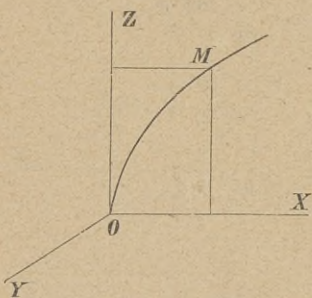
und dieses ist die Gleichung des Rotationsparaboloides.

Lassen wir dagegen die Axe der Parabel mit der XAxe zusammenfallen, Figur 72, so ist

$$f(z) = \frac{z^2}{2p},$$

und setzen wir dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen ein, so erhalten wir

Fig. 72.

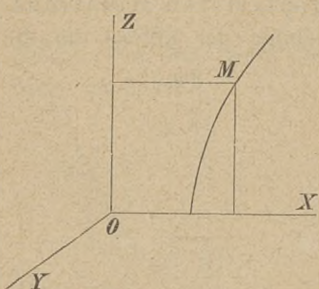


$$x^2 + y^2 = \frac{z^4}{4p^2},$$

welches die Gleichung der hierdurch entstehenden Umdrehungsfläche ist.

Ist die rotirende Kurve eine Hyperbel, Figur 73, welche ursprünglich in der XZEbene liegt, und lassen wir den Durchschnittspunkt ihrer Axen mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, so wie ihre Hauptaxe mit der XAxe und ihre Nebenaxe mit der ZAxe zusammenfallen, so dass also die Drehung um die Nebenaxe erfolgt, so ist

Fig. 73.



$$f(z) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}.$$

Wird dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen eingesetzt, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + z^2)$$

oder

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Dieses ist die Gleichung für das einfache Rotationshyperboloid.

Lassen wir dagegen die Nebenaxe der Hyperbel mit der XAxe und ihre Hauptaxe mit der ZAxe zusammenfallen, so dass die Drehung um die Hauptaxe erfolgt, Figur 74, so ist

$$f(z) = \frac{b}{a}\sqrt{z^2 - a^2},$$

und wenn dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen eingesetzt wird, so kommt

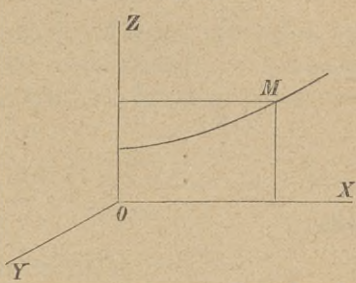
$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(z^2 - a^2)$$

oder

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

und dieses ist die Gleichung der Fläche, welche aus zwei getrennten Theilen besteht und deshalb das getheilte Rotationshyperboloid genannt wird.

Fig. 74.



Ist die rotirende Linie eine Gerade, Figur 75, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und ursprünglich in der XZ-Ebene liegt, so dass sie mit der ZAxe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist, so ist

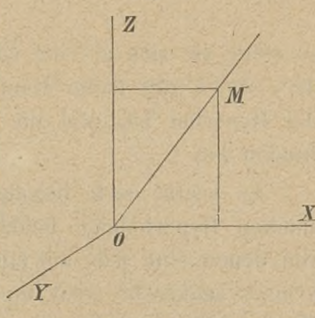
$$f(z) = a\,z,$$

und daher, wenn dieses in die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen eingesetzt wird,

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Dieses ist die Gleichung der Fläche eines geraden Kreiskegels, der mit seinem Mittelpunkte im Anfangspunkte der Coordinaten sich befindet.

Fig. 75.

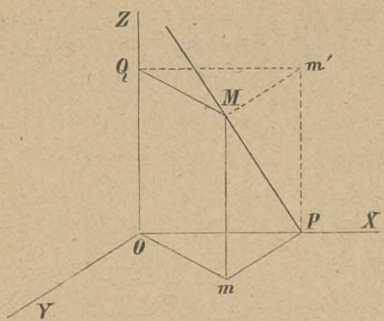


Ist die rotirende Linie eine Gerade, welche mit der ZAxe nicht in derselben Ebene liegt, und ist der kürzeste Abstand dieser Geraden von der ZAxe gleich a, so wie der constante Winkel, den sie mit der XYEbene macht, gleich α, so haben wir, um die Gleichung der von der Geraden erzeugten Rotationsfläche abzuleiten, Folgendes.

Ist MP, Figur 76, die rotirende Gerade und $OP = a$ ihr kürzester Abstand von der ZAxe, den wir in der ursprünglichen Lage der Geraden mit der XAxe zusammenfallen lassen; ist ferner M ein beliebiger Punkt der Geraden, also auch ein beliebiger Punkt der von ihr erzeugten Rotationsfläche, so ist $MQ = f(z)$. Lassen wir von M die Senkrechte Mm auf die

XYEbene herab und ziehen Pm, so ist diese mit der YAxe parallel, und MPm ist der constante Winkel, den die Gerade mit der XYEbene macht, also gleich α. Ziehen wir ferner die Gerade mO, so ist diese gleich der Geraden MQ also gleich $f(z)$. Da aber mOP ein bei P rechtwinkeliges Dreieck ist, so ist

Fig. 76.



$$\overline{mO}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{mP}^2.$$

Nun ist

$$mO = f(z); \quad OP = a \text{ und}$$

$$mP = Mm \cot \alpha = z \cot \alpha,$$

daher

$$(f(z))^2 = a^2 + z^2 \cot^2 \alpha,$$

und folglich

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2 \cot^2 \alpha$$

die Gleichung der erzeugten Rotationsfläche.

Gibt man der Gleichung die Form

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{(a \tan \alpha)^2} = 1,$$

so stellt sie sich als die Gleichung eines Rotationshyperboloides dar, wo a die halbe Hauptaxe und $a \tan \alpha$ die halbe Nebenaxe der Hyperbel ist, und die Drehung um die Nebenaxe statt gefunden hat.

Es ergibt sich hieraus noch, dass man auf einem jeden solchen Hyperboloide beliebig viele gerade Linien ziehen kann, von denen eine jede auf einem Halbmesser des kleinsten Parallelkreises senkrecht steht und mit der Ebene dieses Kreises einen Winkel bildet, welcher durch die Gleichung

$$a \tan \alpha = b,$$

also

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

bestimmt ist.

§ 63.

Das dreiaxige Ellipsoid.

Bezeichnet man die drei Halbaxen des Ellipsoides, Figur 77, nämlich OA mit a, OB mit b und OC mit c, so gilt für die Ellipse ABA' die Gleichung

1. $$a^2 \overline{PR}^2 + b^2 \overline{OR}^2 = a^2 b^2.$$

Ist nun M ein beliebiger Punkt der Fläche, und legen wir durch diesen Punkt und die ZAxe eine Ebene, so schneidet diese die Fläche in einer Ellipse CMP, und für diese Ellipse besteht die Gleichung

2. $$c^2 . \overline{SM}^2 + \overline{OP}^2 . \overline{OS}^2 = c^2 . \overline{OP}^2.$$

Es ist aber

$$OS = MN = z.$$

Ferner ist

$$SM = ON,$$

und weil

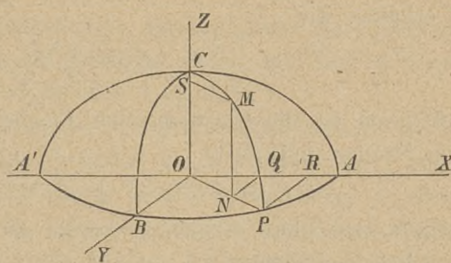
$$\overline{ON}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QN}^2,$$

aber

$$OQ = x; \quad QN = y,$$

so ist auch

Fig. 77.



$$\overline{ON}^2 = \overline{SM}^2 = x^2 + y^2.$$

Setzen wir dieses in die Gleichung 2. ein, so erhalten wir

$$c^2 (x^2 + y^2) + \overline{OP}^2 . z^2 = c^2 . \overline{OP}^2$$

und hieraus

3. $$\overline{OP}^2 = \frac{c^2 (x^2 + y^2)}{c^2 - z^2}.$$

Aus der Figur ergibt sich die Proportion

$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{QN}^2} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{PR}^2}$$

und hieraus

$$\overline{PR}^2 = \frac{\overline{OP}^2 . \overline{QN}^2}{\overline{ON}^2},$$

und setzen wir auf der rechten Seite die bereits gefundenen Werthe ein, so ist

4. $$PR^2 = \frac{c^2 y^2}{c^2 - z^2}.$$

Aus der Figur ergibt sich ferner die Proportion

$$\frac{\overline{OQ}^2}{\overline{QN}^2} = \frac{\overline{OR}^2}{\overline{PR}^2}$$

und hieraus

$$\overline{OR}^2 = \frac{\overline{OQ}^2 \cdot \overline{PR}^2}{\overline{QN}^2}.$$

Setzen wir auf der rechten Seite die gefundenen Werthe, so ist

5. $$\overline{OR}^2 = \frac{c^2 x^2}{c^2 - z^2}.$$

Führen wir endlich die Werthe von $\overline{PR}^2$ und $\overline{OR}^2$, wie sie sich aus den Gleichungen 4. und 5. ergeben, in die Gleichung 1. ein, so erhalten wir

$$a^2 \cdot \frac{c^2 y^2}{c^2 - z^2} + b^2 \cdot \frac{c^2 x^2}{c^2 - z^2} = a^2 b^2,$$

und dieses ist die Gleichung der Fläche. Oder wenn man mit dem Nenner multiplicirt,

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die rechte Seite derselben, so erhält man endlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welches die übliche Form der Gleichung ist.

XI. Abschnitt.

Differentiation der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen und Anwendungen derselben.

§ 64.

Differentiation der Funktionen.

Hat man zunächst eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen

$$z = f(x, y),$$

so sind rücksichtlich der Veränderungen welche die Funktion erleiden kann, wenn die unabhängigen Veränderlichen x und y sich ändern, drei verschiedene Fälle möglich. Es kann x allein sich ändern, y aber ungeändert bleiben, oder es kann y allein sich ändern und x ungeändert bleiben, oder endlich es können x und y sich gleichzeitig ändern. In einem jeden dieser drei Fälle ändert sich aber die Funktion z.

Die Aenderung welche die Funktion dadurch erleidet, dass x allein sich ändert, wird die partielle Aenderung der Funktion nach x, und die Aenderung, welche die Funktion dadurch erleidet, dass y allein sich ändert, wird die partielle Aenderung der Funktion nach y genannt; während diejenige Aenderung, welche die Funktion erleidet, wenn x und y sich gleichzeitig ändern, als die totale Aenderung der Funktion bezeichnet wird.

Sind diese Aenderungen der unabhängigen Veränderlichen unendlich klein, und ist die Funktion stetig, was immer vorausgesetzt werden soll, so ergibt sich Folgendes.

Aendert sich x allein um das Differential dx, so erleidet auch die Funktion z eine unendlich kleine Veränderung; und es ist hier genau so, als ob z nur eine Funktion von x, aber y eine Constante wäre. Es geht also hieraus ein Differential von z in Beziehung auf x als unabhängige Veränderliche hervor; und dieses Differential wird das partielle Differential der Funktion nach x genannt. Dieses Differential wird ebenso abgeleitet und bestimmt, wie dieses bei einer Funktion von nur einer unabhängigen Veränderlichen geschieht.

Aendert sich ebenso y allein, um das Differential dy, so erleidet die Funktion z ebenfalls eine unendlich kleine Veränderung, und es ist hier dann so, als ob z nur eine Funktion von y, aber x eine Constante wäre. Es geht dann hieraus ein Differential von z in Beziehung auf y als unabhängige Veränderliche hervor; und dieses Differential wird das partielle Differential der Funktion nach y genannt. Auch dieses Differential wird ebenso abgeleitet und bestimmt, wie dieses bei einer Funktion von nur einer unabhängigen Veränderlichen geschieht.

Aendern sich nun x und y gleichzeitig um die Differentiale dx und dy, so erleidet die Funktion z ebenfalls eine unendlich kleine Veränderung, welche, da x und y sich unabhängig von einander ändern, also die Aenderung der einen dieser Veränderlichen auf die Aenderung der andern Veränderlichen ohne allen Einfluss ist, gleich der Summe derjenigen Veränderungen sein muss, welche durch die partiellen Aenderungen von x und y erzeugt werden. Diese unendlich kleine Aenderung der Funktion wird das totale Differential der Funktion genannt.

Dieselben Betrachtungen gelten, wenn die Funktion mehr als zwei unabhängige Veränderliche hat, so dass wir sagen können: Das totale Differential einer Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Um also eine Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen zu differentiiren, differentiirt man die Funktion für jede unabhängige Veränderliche so wie eine Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen, indem man alle übrigen unabhängigen Veränderlichen wie Constante ansieht und addirt die so erhaltenen partiellen Differentiale.

Den partiellen Differentialquotienten oder die partielle abgeleitete Funktion von z nach x bezeichnet man mit

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ oder mit } f'_x(z),$$

und ebenso den partiellen Differentialquotienten oder die partielle abgeleitete Funktion von z nach y mit

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ oder mit } f'_y(z),$$

indem man sich für die partiellen Differentiale und Differentialquotienten des ∂ anstatt des d bedient, während man mit dem letzteren Buchstaben stets ein totales Differential bezeichnet.

Demnach bezeichnet man das partielle Differential der Funktion nach x mit

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx \text{ oder mit } f'_x(z)\,dx$$

und das partielle Differential der Funktion nach y mit

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,dy \text{ oder mit } f'_y(z)\,dy,$$

endlich wird das totale Differential der Funktion bezeichnet mit

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

oder

$$dz = f'_x(z)\,dx + f'_y(z)\,dy.$$

Ist hiernach

$$u = f(x, y, z),$$

so ist

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

oder auch

$$du = f'_x(u)\,dx + f'_y(u)\,dy + f'_z(u)\,dz.$$

Da jeder partielle Differentialquotient oder jede partielle abgeleitete Funktion einer Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen im Allgemeinen wieder eine Funktion von denselben unabhängigen Veränderlichen ist, so wiederholt sich dasselbe Verfahren bei fortgesetzter Differentiation oder bei der Ableitung der höheren Differentiale.

Für eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen

$$z = f(x, y),$$

ist das erste Differential

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

und es sind

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}$$

im Allgemeinen wieder Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y, so dass jede derselben sowol nach x als nach y differentiirt werden kann. Eine jede dieser ersten abgeleiteten Funktionen gibt daher wieder ein partielles Differential nach x und ein partielles Differential nach y, so dass das zweite totale Differential der Funktion z aus der Summe von vier partiellen Differentialen besteht, welche genau ebenso gebildet werden, wie das bei den Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen geschieht, indem man bei der Bildung des Differentials nach irgend einer der unabhängigen Veränderlichen alle andern unabhängigen Veränderlichen wie Constante ansieht und behandelt.

Der eingeführten Bezeichnung entsprechend ist nun

$$d^2 z = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{\partial y}\,dy,$$

oder wie man es auch schreiben kann,

$$d_2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\, dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Da es aber für das Resultat ohne Einfluss ist, ob man erst nach x und hierauf nach y oder erst nach y und hierauf nach x differentiirt, indem ja bei jeder Differentiation nach der einen Veränderlichen die andere Veränderliche wie eine Constante angesehen und behandelt wird, so sind die beiden mittleren Glieder gleich, so dass wir auch schreiben können

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Auch hier gelten rücksichtlich der fortgesetzten Differentiation dieselben Betrachtungen, so dass das dritte totale Differential der Funktion z aus der Summe von acht partiellen Differentialen besteht. Die allgemeine Formel ist

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

§ 65.

Differentiation unentwickelter Funktionen.

Ist eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y gegeben, ist sie aber für keine derselben aufgelöst oder auch nicht auflösbar, so ist doch die eine dieser Veränderlichen eine Funktion von der andern; denn wenn man der einen Veränderlichen einen bestimmten Werth beilegt, so geht aus der Gleichung für die andere Veränderliche ebenfalls ein bestimmter Werth hervor. Ist nun x die unabhängige Veränderliche, so ist y eine Funktion von x. Solche Funktionen nennt man unentwickelte Funktionen.

Um das Differential und den Differentialquotienten einer solchen Funktion zu bilden, hat man zu beachten, dass die Gleichung stets auf Null reducirt werden kann, dass man ihr also stets die Form

$$0 = f(x, y)$$

geben kann; und es stellt nun hier die Gleichung eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y dar, auf welchen die Bedingung ruht, dass je zwei zusammengehörige Werthe derselben den Funktionswerth Null geben müssen.

Da der Funktionswerth stets Null ist, oder da Null eine Funktion von x und y ist, so ist auch das Differential dieser Funktion stets Null, und wir haben, wenn wir u für $f(x, y)$ setzen,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Diese Gleichung ist also das Differential der Funktion, und es wird dieses ebenso gebildet, wie das totale Differential einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen. Dividiren wir diese Gleichung mit dx, so erhalten wir

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

und hieraus ergibt sich der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

oder auch

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}.$$

Man findet also den Differentialquotienten einer unentwickelt gegebenen Funktion, wenn man den partiellen Differentialquotienten in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche durch den partiellen Differentialquotienten in Beziehung auf die abhängige Veränderliche dividirt und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nimmt.

Um das zweite Differential abzuleiten, hat man zu berücksichtigen, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ als Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y zu betrachten sind, dass dy nur eine Funktion von x ist, dass es aber in Beziehung auf y constant ist, und dass dx überhaupt constant ist.

Hiernach besteht das zweite Differential aus den Differentialen von $\frac{\partial u}{\partial x}$ nach x und y, multiplicirt mit dem constanten Faktor dx; aus den Differentialen von $\frac{\partial u}{\partial y}$ nach x und y, multiplicirt mit dem Faktor dy, und aus dem Differentiale von dy nach x, multiplicirt mit dem Faktor $\frac{\partial u}{\partial y}$. Dieses gibt

$$dx \,.\, \partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = dx\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dy\right)$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy,$$
$$\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy\right) = dy\,.\,\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\partial(dy)$$
$$= dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot d^2 y$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\,d^2 y.$$

Addirt man diese partiellen Differentiale, so erhält man

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot d^2 y.$$

Dividirt man mit dx^2, so ergibt sich hieraus der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$. In gleicher Weise werden die höheren Differentiale abgeleitet.

Beispiele.

1. Es sei

$$0 = x^4 - 4\,axy + y^4,$$

so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 4x^3 dx - 4\,ay\,dx$$
$$= 4(x^3 - ay)\,dx,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\,dy = -4\,ax\,dy + 4\,y^3 dy$$
$$= 4(y^3 - ax)\,dy,$$

daher das vollständige Differential

$$0 = 4(x^3 - ay)\,dx + 4(y^3 - ax)\,dy$$

und der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 - ay}{y^3 - ax}.$$

2. Es sei

$$0 = y - xl(y),$$

so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = -l(y)\,dx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy,$$

daher das vollständige Differential

$$0 = -\,l(y)\,dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy.$$

Aus der Gleichung folgt aber

$$l(y) = \frac{y}{x},$$

daher ist auch das Differential

$$0 = -\frac{y}{x}\,dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy$$

und der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(y-x)}.$$

§ 66.

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Wenn aus der Gleichnng

$$y = f(x)$$

die Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. unter der Voraussetzung abgeleitet worden sind, dass y die abhängige, x aber die unabhängige Veränderliche ist, und wenn nun x selber als eine Funktion einer andern unabhängigen Veränderlichen t angesehen werden soll, so wird y eine Funktion von einer Funktion; denn es ist nun

$$y = f(x); \quad x = \varphi(t),$$

und an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. treten andere Ausdrücke. Denn während bei der Ableitung dieser Differentialquotienten dx als constant angesehen wurde, kann dieses jetzt nicht mehr geschehen, weil

$$dx = \varphi'(t)\,dt,$$

also eine Funktion von t ist.

Um nun mit Rücksicht darauf, dass y eine Funktion von x und x eine Funktion von t ist, die anderen, den obigen Differentialquotienten gleichen Werthe zu bestimmen, hat man zunächst die Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Wendet man auf die linke Seite dieser Gleichung den vorhergegangenen Satz noch einmal an, so ist

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

und weil

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

so ist

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Wird ferner die rechte Seite der obigen Gleichung differentiirt, so erhält man

$$d\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Folglich ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

so wie endlich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Auf gleiche Weise erhält man die höheren Differentialquotienten.

Aus diesen Gleichungen folgt nun aber auch, wie die Differentialquotienten von

$$y = f(x)$$

sich gestalten, wenn man x und y miteinander vertauscht, wenn man also setzt

$$x = f(y)$$

und somit y als die unabhängige und x als die abhängige Veränderliche ansieht. Es tritt dann in den vorstehenden Ausdrücken y an die Stelle von t. Daher wird

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dy} = 1$$

und folglich

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

wie alle folgenden Differentialquotienten von y nach t.

Wir erhalten demnach für diesen Fall

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

u. s. w.

§ 67.

Die Taylor'sche Reihe für Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Wir haben § 34 die Werthe bestimmt, welche die Funktion bei den aufeinanderfolgenden Differentiationen annimmt, und gefunden, dass der Funktionswerth nach n aufeinanderfolgenden Differentiationen ausgedrückt wird durch

$$y + n\,dy + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3y + \cdots + d^ny.$$

Hierbei war y eine Funktion der einen unabhängigen Veränderlichen x. Dieser Ausdruck gilt aber auch für eine Funktion von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen, wo dann dy, d^2y u. s. w. die totalen Differentiale bedeuten. Denn auch bei Funktionen von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen bestehen die aufeinanderfolgenden Funktionswerthe stets aus dem vorausgegangenen Funktionswerthe und aus dem Differentiale des vorausgegangenen Funktionswerthes. Ist nun z eine Funktion von x und y, so ist der Funktionswerth nach n aufeinanderfolgenden Differentiationen

$$z + n dz + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d^3 z + \cdots + d^n z,$$

und es ist

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

u. s. w.

Setzt man dieses in den obigen Ausdruck ein, so nimmt der Funktionswerth folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
& z \\
& + n\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) \\
& + \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{d^2 z}{\partial y^2} dy^2\right) \\
& + \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3\right) \\
& + \cdots,
\end{aligned}$$

wofür wir auch schreiben können

$$\begin{aligned}
& z \\
& + \frac{\partial z}{\partial x}(n dx) + \frac{\partial z}{\partial y}(n dy) \\
& + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{(n dx)^2}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(n dx)(n dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{(n dy)^2}{2}\right) \\
& + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\frac{(n dx)^3}{2.3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\frac{(n dx)^2 (n dy)}{2}\right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\frac{(n dx)(n dy)^2}{2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\frac{(n dy)^3}{2.3}\right) \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

Lassen wir nun n unendlich gross werden, so gehen die Glieder, welche n im Nenner haben, in Null über, während die

Produkte $n\,dx$ und $n\,dy$ in endliche Werthe übergehen. Bezeichnen wir daher $n\,dx$ mit h und $n\,dy$ mit k, so dass h die Zunahme von x und k die Zunahme von y bedeutet, so ist, wenn wir gleichzeitig die Glieder in anderer Weise ordnen.

$$
\begin{aligned}
f(x+h, y+k) = z + \frac{\partial z}{\partial x} h + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \frac{h^3}{2.3} + \cdots \\
+ \frac{\partial z}{\partial y} k + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \frac{h^2 . k}{2} + \cdots \\
+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \frac{h k^2}{2} + \cdots \\
+ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \frac{k^3}{2.3} + \cdots
\end{aligned}
$$

Es ist leicht einzusehen, wie man bei Funktionen von drei und mehr unabhängigen Veränderlichen zu verfahren hat, um die Taylor'sche Reihe für Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen zu erhalten.

Nimmt man zum Ausgangspunkte der Differentiationen denjenigen Funktionswerth, welcher für $x = 0$ und $y = 0$ sich ergibt, und bezeichnet ihn mit z_0, schreibt sodann x für h und y für k, wo nun x und y diejenigen Zunahmen sind, welche die unabhängigen Veränderlichen von Null aus erhalten, so bekommt man

$$
\begin{aligned}
f(x, y) = z_0 + \frac{\partial z_0}{\partial x} h + \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 z_0}{\partial x^3} \frac{h^3}{2.3} + \cdots \\
+ \frac{\partial z_0}{\partial y} k + \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^3 z_0}{\partial x^2 \partial y} \frac{h^2 k}{2} + \cdots \\
+ \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} + \frac{\partial^3 z_0}{\partial x \partial y^2} \frac{h k^2}{2} + \cdots \\
+ \frac{\partial^3 z_0}{\partial y^3} \frac{k^3}{2.3} + \cdots
\end{aligned}
$$

und hier stellt die Reihe diejenige Veränderung des Funktionswerthes dar, welche einer Zunahme der unabhängigen Veränderlichen von 0 bis x und von 0 bis y entspricht.

§ 68.

Die grössten und kleinsten Werthe der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Auch bei Funktionen von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen kann der Fall eintreten, dass für gewisse zusammengehörige Werthe der unabhängigen Veränderlichen der Funktionswerth selbst ein Maximum oder ein Minimum wird.

Es sei nun

$$z = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, so findet man diejenigen zusammengehörigen Werthe von x und y, für welche möglicherweise der Funktionswerth zu einem Maximum oder Minimum wird, wenn man einen jeden der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ gleich Null setzt und also aus den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

diese zusammengehörigen Werthe von x und y bestimmt.

Es sei a der Werth von x, welcher aus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

und b der Werth von y, welcher aus

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

hervorgeht, so dass für diese Werthe der Funktionswerth möglicherweise ein Maximum oder ein Minimum wird, so muss $f(a, b)$ für ein Maximum grösser und für ein Minimum kleiner sein als $f(a \pm h, b \pm k)$, wo h eine beliebig kleine Zu- oder Abnahme des x in der Nähe von $x = a$ und k eine beliebig kleine Zu- oder Abnahme des y in der Nähe von $y = b$ bezeichnet.

Nach dem Taylor'schen Satze hat man

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x, y) &+ \frac{\partial z}{\partial x} h + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \cdots \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y} k + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} hk + \cdots \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

Da aber für $x = a$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ und für $y = b$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ist, so hat man weiter für $x = a$, $y = b$

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^3 z}{\partial y^2} \frac{k^2}{2} + \cdots$$

Sind h und k so klein, dass die Glieder mit den höheren Potenzen derselben vernachlässigt werden können, so ist

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{k^2}{2}.$$

Geben nun die Werthe $x = a$, $y = b$ einen Maximalwerth der Funktion, so ist die linke Seite der vorstehenden Gleichung negativ, und folglich muss auch die rechte Seite derselben negativ sein; geben dagegen die Werthe $x = a$, $y = b$ einen Minimalwerth der Funktion, so ist die linke Seite der vorstehenden Gleichung positiv, und folglich muss auch die rechte Seite derselben positiv sein.

Um also zu entscheiden, ob für $x = a$, $y = b$ die Funktion ein Maximum oder ein Minimum wird, hat man zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die rechte Seite der vorstehenden Gleichung negativ oder positiv wird.

Es sei nun für $x = a$, $y = b$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C,$$

so wird die rechte Seite der obigen Gleichung

$$A\frac{h^2}{2} + Bhk + C\frac{k^2}{2}.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit 2 und dividiren ihn mit k^2, so nimmt er folgende Gestalt an

$$A\frac{h^2}{k^2} + 2B\frac{h}{k} + C,$$

und nun können wir ihn auch schreiben

$$A\left(\frac{h^2}{k^2} + 2\frac{B}{A}\frac{h}{k} + \frac{C}{A}\right).$$

Wenn wir der Klammer $\frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{A^2}$ hinzufügen, wodurch nichts geändert wird, so erhalten wir

$$A\left(\frac{h^2}{k^2} + 2\frac{B}{A}\frac{h}{k} + \frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right),$$

und dieses ist

$$A\left[\left(\frac{h}{k} + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right].$$

Das Glied

$$\left(\frac{h}{k} + \frac{B}{A}\right)^2$$

ist stets positiv, und wenn daher auch

$$\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}$$

positiv oder Null ist, so hängt das Vorzeichen des ganzen Ausdruckes nur noch von dem Vorzeichen von A ab.

Es ist aber

$$\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}$$

positiv oder Null, wenn

$$AC - B^2$$

positiv oder Null ist.

Demnach muss das Produkt AC stets positiv sein, was nur möglich ist, wenn A und C gleiche Vorzeichen haben.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von A, B und C haben wir daher Folgendes:

Die Funktion wird für $x = a$, $y = b$ ein Maximum oder ein Minimum, wenn

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

dasselbe Vorzeichen haben und zugleich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

positiv oder Null ist, und zwar wird sie ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

negativ oder positiv sind.

Wenn die Werthe a und b, für welche die ersten Differentialquotienten Null werden, auch die zweiten Differentialquotienten zu Null machen, so müssen die höheren Differentialquotienten entscheiden; und es gelten hierbei dieselben Bemerkungen, welche bei den Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen gemacht worden sind.

XII. Abschnitt.

Geometrische Anwendungen der Differentiation der Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.

§ 69.

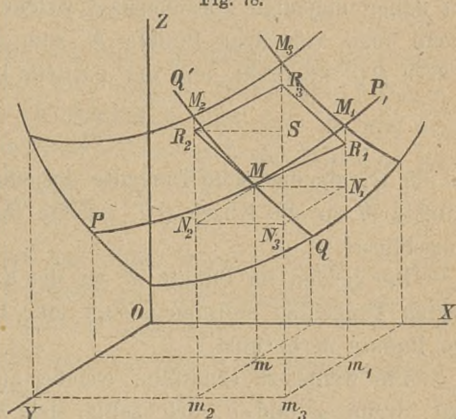
Geometrische Bedeutung der Differentialquotienten.

Es sei

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche und M, Figur 78, ein Punkt derselben, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind. Legen wir durch M eine Ebene parallel zur XZEbene, so schneidet sie die Fläche in einer Kurve PP', und legen wir ferner durch M eine Ebene parallel zur YZ-Ebene, so schneidet sie die Fläche in einer Kurve QQ', und es ist nun

Fig. 78.



$$z = f(x, y_1)$$

die Gleichung der Kurve PP' so wie

$$z = f(x_1, y)$$

die Gleichung der Kurve QQ', indem in der ersteren Gleichung y_1 in der letzteren x_1 den Charakter einer Constanten hat.

Es ist hiernach sehr leicht einzusehen, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

das einemal partiell nach x und das anderemal partiell nach y differentiirt wird.

Beim Differentiiren nach x wird y als Constante angesehen und nur x als unabhängige Veränderliche betrachtet. Das partielle Differential

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx$$

ist daher diejenige Veränderung, welche die Ordinate z erleidet, wenn man von dem Punkte M zum nächsten Punkte in der Kurve PP' übergeht; und der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

ist die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die im Punkte M an die Kurve PP' gelegte Berührende mit der XAxe einschliesst.

Beim Differentiiren nach y wird x als Constante angesehen und nur y als unabhängige Veränderliche betrachtet. Das partielle Differential

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy$$

ist daher diejenige Veränderung, welche die Ordinate z erleidet, wenn man von dem Punkte M zum nächsten Punkte in der Kurve QQ' übergeht, und der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

ist die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, den die im Punkte M an die Kurve QQ' gelegte Berührende mit der YAxe einschliesst.

Die beiden im Punkte M an die Kurven PP' und QQ' gelegten Tangenten bestimmen aber eine Ebene, welche die Fläche im Punkte M berührt.

Um weiter zu ermitteln, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn x und y gleichzeitig sich ändern, wollen wir diejenigen Veränderungen betrachten, welche die Ordinate z erleidet, wenn x um den endlichen Werth Δx und y um den endlichen Werth Δy sich ändert.

Aendert sich x um den Werth $mm_1 = \Delta x$, während y unverändert bleibt, so rückt der Punkt M in der Kurve PP' nach M_1, und machen wir MN_1 parallel mit mm_1 so ist M_1N_1 die hierdurch bewirkte Veränderung der Ordinate z, also Δz_x. Aendert sich ferner y um den Werth $mm_2 = \Delta y$, während x unverändert bleibt, so rückt der Punkt M in der Kurve QQ' nach M_2, und machen wir MN_2 parallel mit mm_2, so ist M_2N_2 die hierdurch bewirkte Veränderung der Ordinate z, also Δz_y. Finden nun die beiden Aenderungen von x und y gleichzeitig statt, so kommt der Punkt m in der XYEbene nach m_3 und der Punkt

M auf der Fläche nach M_3, und machen wir $N_1 N_3$ parallel mit $m_1 m_3$ so wie $N_2 N_3$ parallel mit $m_2 m_3$, so ist $M_3 N_3$ die totale Veränderung der Ordinate z, also Δz.

Ziehen wir die Tangenten MR_1 und MR_2, construiren in der durch sie bestimmten Ebene das Parallelogramm $MR_1 R_3 R_2$ und ziehen $R_2 S$ parallel mit $N_2 N_3$, so stimmen die rechtwinkeligen Dreiecke $MR_1 N_1$ und $R_2 R_3 S$ in den Seiten $MR_1 = R_2 R_3$ und $MN_1 = R_2 S$ überein; sie sind mithin congruent, und es ist demnach auch

$$R_3 S = R_1 N_1,$$

weil aber auch

$$SN_3 = R_2 N_2,$$

so ist

$$R_3 N_3 = R_1 N_1 + R_2 N_2.$$

Je kleiner nun Δx und Δy sind, je näher also die Punkte m_1 und m_2 und folglich auch der Punkt m_3 dem Punkte m liegen, um so näher liegen auch die Punkte M_1 und R_1, M_2 und R_2, M_3 und R_3, denn um so inniger schliesst sich die Ebene an die Fläche an, und um so mehr gilt dann auch die Gleichung

$$M_3 N_3 = M_1 N_1 + M_2 N_2.$$

Diese Gleichung gelangt aber zur vollen Geltung, wenn m_1 und m_2 unendlich nahe an m rücken, also die Differenzen Δx und Δy in die Differentiale dx und dy übergehen.

Für diesen Grenzfall ist dann $M_3 N_3$ das totale Differential dz, $M_1 N_1$ das partielle Differential

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

und $M_2 N_2$ das partielle Differential

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

und es geht die obige Gleichung über in

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Es besteht also hiernach die totale Aenderung der Ordinate z aus der Summe derjenigen partiellen Aenderungen, welche sie erleidet, wenn man das einemal nach x, das anderemal nach y differentiirt.

Während durch die gleichzeitigen Veränderungen von x und y, nämlich dx und dy, in der XYEbene ein unendlich kleines

Rechteck erzeugt wird, dessen Diagonale mm_3 der Punkt m hierbei durchläuft, entsteht auf der Fläche selbst ein unendlich kleines Parallelogramm, welches durch die unendlich kleinen Bögen der Kurven PP' und QQ' gebildet wird, und dessen Diagonale der Punkt M durchläuft, wenn die Ordinate aus dem Werthe z in den Werth $z + dz$ übergeht, und zwar ist jenes Rechteck in der XYEbene die Projektion dieses Parallelogramms.

Für die partiellen Differentiale und Differentialquotienten gelten in Beziehung auf die Kurven PP' und QQ' alle diejenigen Betrachtungen, welche früher für die Differentiale und Differentialquotienten der Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen angestellt worden sind. Die Kurven PP' und QQ' steigen, so lange $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ positiv sind, sie fallen dagegen, wenn diese Differentialquotienten negativ sind, sie erreichen einen Culminationspunkt für $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; sie kehren ferner ihre hohle Seite der XYEbene zu, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ negativ sind, und die erhabenen Seiten, wenn diese Differentialquotienten positiv sind; endlich besitzen sie Wendepunkte für $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Die beiden an die Kurven PP' und QQ' gelegten Tangenten bestimmen stets die Lage einer Ebene, welche die Fläche in demjenigen Punkte berührt, auf welchen die Differentiationen sich beziehen, und durch welche der Lauf der Fläche beurtheilt werden kann. Liegt diese Ebene mit der XYEbene parallel, was der Fall ist, wenn $\frac{\partial z}{\partial x}$ und auch $\frac{\partial z}{\partial y}$ gleichzeitig Null sind, so besitzt die Fläche einen höchsten Punkt, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ beide negativ sind und ihr Produkt nicht kleiner ist als $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2$; sie besitzt dagegen einen tiefsten Punkt, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ beide positiv sind und ihr Produkt nicht kleiner ist als $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2$.

§ 70.

Berührungsebenen und Normalen an Flächen.

Wir haben gesehen, dass die beiden an die Kurven PP'

und QQ' im Punkte M gelegten Tangenten eine Ebene bestimmen, welche die Fläche im Punkte M berührt. Um die Gleichung dieser Berührungsebene zu finden, haben wir zu berücksichtigen, dass sie durch die drei Punkte M, M_1 und M_2 geht, sobald diese unendlich nahe aneinander gerückt sind.

Die Coordinaten des Punktes M sind

$$x, \quad y, \quad z,$$

die Coordinaten des Punktes M_1 sind

$$(x + dx), \; y, \; \left(z + \frac{\partial z}{\partial x}\, dx\right),$$

und die Coordinaten des Punktes M_2 sind

$$x, \; (y + dy), \; \left(z + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right).$$

Ist nun

$$\zeta = a\xi + b\eta + c$$

die Gleichung der Berührungsebene, so haben wir zur Bestimmung der Constanten a, b, c die folgenden Gleichungen

$$z = ax + by + c,$$

$$z + \frac{\partial z}{\partial x}\, dx = a\,(x + dx) + by + c,$$

$$z + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = ax + b\,(y + dy) + c.$$

Aus der ersten und zweiten folgt

$$a = \frac{\partial z}{\partial x},$$

ebenso folgt aus der ersten und dritten

$$b = \frac{\partial z}{\partial y},$$

und endlich erhält man durch Substitution dieser Werthe in die erste Gleichung

$$c = z - \frac{\partial z}{\partial x}\, x - \frac{\partial z}{\partial y}\, y.$$

Die Gleichung der Berührungsebene wird nun

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial x}\, \xi + \frac{\partial z}{\partial y}\, \eta + z - \frac{\partial z}{\partial x}\, x - \frac{\partial z}{\partial y}\, y,$$

oder

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}\,(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}\,(\eta - y).$$

Errichtet man auf der Tangentialebene im Berührungspunkte eine Senkrechte, so wird diese eine Normale der Fläche genannt. Die Winkel, welche diese Normale mit den Coordinatenaxen macht, sind gleich den Stellungswinkeln der Ebene.

Nach § 57 werden die Stellungswinkel der Ebene bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Setzt man nun für a und b die oben bestimmten Werthe ein, so sind die Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen X, Y, Z macht, bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Die Projektionsgleichungen einer Geraden, welche auf der Ebene

$$\zeta = a\xi + b\eta + c$$

senkrecht steht, sind nach § 58

$$\eta = \frac{b}{a}\,\xi + n \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{1}{a}\,\xi + n',$$

und da die Gerade durch den Punkt x, y, z geht, so bestehen auch die Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}\,x + n \text{ und } z = \frac{1}{a}\,x + n'.$$

Hieraus erhält man

$$\eta - y = \frac{b}{a}\,(\xi - x),$$

$$\zeta - z = \frac{1}{a}(\xi - x),$$

oder

$$\xi - x = a(\zeta - z),$$

und aus der ersten und dritten noch die Projektionsgleichung auf die YZ Ebene

$$\eta - y = b(\zeta - z).$$

Setzt man nun für a und b die oben bestimmten Werthe, so folgt

$$\xi - x = \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z),$$

$$\eta - y = \frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z).$$

Ist die Gleichung der Fläche in der unentwickelten Form

$$f(x, y, z) = 0$$

gegeben, und bezeichnen wir $f(x, y, z)$ kurz mit f, so gibt die Differentiation nach x

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

und die Differentiation nach y

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

und hieraus erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung der Berührungsebene ein, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - z) = 0,$$

und setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen für die Winkel ein, welche die Normale mit den Coordinatenaxen macht, so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Setzt man endlich diese Ausdrücke in die Projektionsgleichungen der Normalen ein, so erhält man

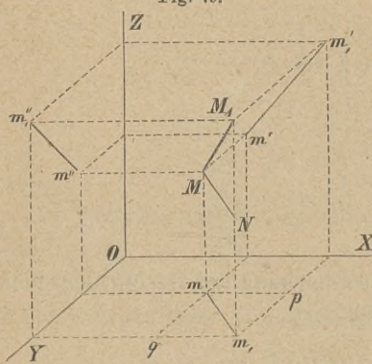
$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 71.

Tangenten und Normalebenen doppelt gekrümmter Kurven.

Ist M, Figur 79, ein Punkt einer doppelt gekrümmten Kurve, dessen Coordinaten x, y, z sind, und ist M_1 ein zweiter Punkt dieser Kurve, dessen Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sind, so ist, wenn wir die Gerade MM_1 ziehen, dieses eine Secante der Kurve. Bezeichnen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Secante mit ξ, η, ζ, so sind nach § 55 die Projektionsgleichungen der durch die Punkte M und M_1 gehenden Geraden

Fig. 79.



$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x),$$

$$\zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(\xi - x).$$

Rückt nun der Punkt M_1 unendlich nahe an den Punkt M, so geht die Secante in die an den Punkt M gelegte Tangente über; dann geht aber auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ in $\frac{dz}{dx}$ über, und es sind daher die Projektionsgleichungen der an den Punkt x, y, z gelegten Tangente

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

$$\zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x).$$

Es geht hieraus gleichzeitig hervor, dass die Projektionen der Tangente auch Tangenten an den gleichnamigen Projektionen der Kurve sind.

Für die Länge der Linie $MM_1 = \Delta s$ haben wir nach § 54 die Gleichung

$$\Delta s = \sqrt{[x-(x+\Delta x)]^2 + [y-(y+\Delta y)]^2 + [z-(z+\Delta z)]^2},$$

das ist aber

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Rückt nun der Punkt M_1 unendlich nahe an den Punkt M, so geht die Länge der Linie $MM_1 = \Delta s$ in das Bogendifferential ds der doppelt gekrümmten Kurve über, während Δx zu dx, Δy zu dy und Δz zu dz wird. Hiernach hat man für das Bogendifferential einer Kurve von doppelter Krümmung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

oder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Nach § 55 sind die Winkel, welche eine Gerade im Raume mit den Coordinatenaxen bildet, bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a'}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}},$$

wo a und a' die Coëfficienten von x in den Projektionsgleichungen der Geraden sind. Setzen wir daher

$$\frac{dy}{dx} \text{ für } a \text{ und } \frac{dz}{dx} \text{ für } a',$$

so erhalten wir diejenigen Gleichungen, welche die Winkel bestimmen, die eine im Punkte x, y, z an die Kurve im Raume gelegte Tangente mit den Coordinatenaxen bildet, nämlich

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Führen wir das Bogendifferential ds ein, so nehmen die Gleichungen folgende Gestalt an

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds};\ \cos\beta = \frac{dy}{ds};\ \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Wenn man durch den Berührungspunkt eine Ebene legt, so dass sie auf der Tangente senkrecht steht, so nennt man eine solche Ebene eine Normalebene der doppelt gekrümmten Kurve.

Bezeichnet man mit ξ, η und ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Ebene, so ist ihre Gleichung

$$\zeta = a\xi + b\eta + c;$$

da die Ebene aber durch den Punkt x, y, z gehen soll, so besteht auch die Gleichung

$$z = ax + by + c.$$

Aus beiden Gleichungen folgt aber als Gleichung der Ebene

$$\zeta - z = a(\xi - x) + b(\eta - y);$$

dividiren wir die vorstehende Gleichung mit a, so können wir sie auch so schreiben

$$(\xi - x) + \frac{b}{a}(\eta - y) + \frac{1}{a}(\zeta - z) = 0.$$

Da nun weiter die Ebene auf der Tangente senkrecht stehen soll, so muss nach § 58 mit Rücksicht auf die Projektionsgleichungen der Tangente sein

$$\frac{b}{a} = \frac{dy}{dx};\quad \frac{1}{a} = \frac{dz}{dx}.$$

Setzen wir also dieses in die vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$(\xi - x) + \frac{dy}{dx}(\eta - y) + \frac{dz}{dx}(\zeta - z) = 0,$$

und dieses ist die Gleichung der Normalebene.

§ 72.

Die Evoluten ebener Kurven.

Lässt man den Krümmungshalbmesser einer Kurve die Kurve stetig durchlaufen, so beschreibt der Krümmungsmittelpunkt, da der Krümmungshalbmesser sich stetig ändert, eine Kurve, welche die Evolute jener Kurve genannt wird, während man die ursprüngliche Kurve als die Evolvente ihrer Evolute bezeichnet.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes α und β, s. § 52, sind dann die Coordinaten der Evolute, und sie sowol als der Krümmungshalbmesser ϱ sind Funktionen von x, da jede Veränderung des x Veränderungen von α, β und ϱ nach sich zieht.

Die für den Krümmungskreis entwickelten Gleichungen enthalten daher diejenigen Beziehungen, welche zwischen einer Kurve und ihrer Evolute bestehen, und aus ihnen geht auch die Gleichung für die Evolute hervor.

Wenn wir die Gleichung

1. $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

differentiiren und beachten, dass x die unabhängige Veränderliche ist, während α, β, ϱ, y sämmtlich Funktionen von x sind, so erhalten wir

$$(x - \alpha)(dx - d\alpha) + (y - \beta)(dy - d\beta) = \varrho\, d\varrho.$$

Nun ist aber nach Gleichung 2. § 52

$$(x - \alpha)\, dx + (y - \beta)\, dy = 0,$$

daher ist auch

2. $$-(x - \alpha)\, d\alpha - (y - \beta)\, d\beta = \varrho\, d\varrho.$$

Ferner ist nach Gleichung 2. § 52

$$x\, dx - \alpha\, dx + y\, dy - \beta\, dy = 0.$$

Wird diese Gleichung differentiirt, wobei man zu beachten hat, dass dx constant ist, so erhält man

$$dx^2 - d\alpha\, dx + dy^2 + y\, d^2y - d\beta\, dy - \beta\, d^2y = 0$$

oder

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\, d^2y - d\alpha\, dx - d\beta\, dy = 0.$$

Aus Gleichung 5. § 52 folgt aber

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\, d^2y = 0,$$

daher ist auch

3. $$d\alpha\, dx + d\beta\, dy = 0,$$

und hieraus

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

d. h. wenn man an zwei zusammengehörige Punkte der Kurve und ihrer Evolute Tangenten zieht, so stehen diese aufeinander senkrecht. Nun steht aber der Krümmungshalbmesser stets auf der Tangente der Kurve senkrecht; folglich ist der Krümmungshalbmesser der Kurve stets eine Tangente an der Evolute.

Aus der Gleichung 2. § 52 und der zuletzt gefundenen Gleichung 3. folgt weiter

$$(x - \alpha)\, d\beta - (y - \beta)\, d\alpha = 0.$$

Wird diese Gleichung zur zweiten Potenz erhoben, so kommt

$$(x-\alpha)^2\, d\beta^2 + (y-\beta)^2\, d\alpha^2 - 2\,(x-\alpha)\,(y-\beta)\, d\alpha\, d\beta = 0,$$

und wird die Gleichung 2. zur zweiten Potenz erhoben, so kommt

$$(x-\alpha)^2\, d\alpha^2 + (y-\beta)^2\, d\beta^2 + 2\,(x-\alpha)\,(y-\beta)\, d\alpha\, d\beta = \varrho^2\, d\varrho^2.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]\,(d\alpha^2 + d\beta^2) = \varrho^2\, d\varrho^2,$$

also mit Rücksicht auf Gleichung 1.

4. $$d\alpha^2 + d\beta^2 = d\varrho^2.$$

Wird das Bogendifferential der Evolute mit $d\sigma$ bezeichnet, so ist auch

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = d\sigma^2,$$

daher

5. $$d\varrho = d\sigma,$$

d. h. das Differential des Krümmungshalbmessers ist immer gleich dem Differential des Bogens der Evolute.

Denkt man sich daher um die Evolute einen biegsamen Faden gelegt, dessen Ende gespannt ist und mit dem Krümmungshalbmesser zusammenfällt, so beschreibt der Endpunkt dieses Fadens, wenn er beständig gespannt bleibt und von der Evolute abgewickelt wird, die Evolvente.

Um endlich für eine gegebene Kurve die Gleichung ihrer Evolute zu bekommen, hat man die aus der Gleichung der Kurve sich ergebenden Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichungen 5.

und 6. § 52 einzusetzen und x und y zu eliminiren. Man erhält dann eine Gleichung zwischen α und β, welches die Gleichung der Evolute ist.

§ 73.

Beispiele für die Krümmung und die Evoluten ebener Kurven.

1. Der Kreis.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

daher ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Hiernach ist

$$y - \beta = -\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{-\frac{r^2}{y^3}} = y,$$

also $\beta = 0$,

$$x - \alpha = -y \,.\, -\frac{x}{y} = x,$$

also $\alpha = 0$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind demnach beide Null, und es liegt daher der Krümmungsmittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten; er fällt also mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen, und seine Lage ist unveränderlich. Für den Krümmungshalbmesser haben wir

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{r^2}{y^3}} = r.$$

Der Krümmungshalbmesser ist daher constant und dem Halbmesser des Kreises gleich, oder der Halbmesser des Kreises ist selbst der Krümmungshalbmesser. Die Krümmung des Kreises ist mithin überall dieselbe, oder für jede Stelle des Kreises fällt der Krümmungskreis mit dem Kreise selbst zusammen.

Endlich geht hieraus hervor, dass die Evolute des Kreises ein Punkt, nämlich der Mittelpunkt des Kreises ist.

2. Die Parabel.

Die Scheitelgleichung der Parabel ist

$$y = \sqrt{2px},$$

daher ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(\sqrt{2px})^3} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Hiernach ist

$$y - \beta = -\frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \frac{y(p^2 + y^2)}{p^2},$$

$$x - \alpha = -\frac{y(p^2 + y^2)}{p^2} \cdot \frac{p}{y} = -\frac{p^2 + y^2}{p},$$

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Setzt man $2px$ für y^2, so wird

$$\varrho = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

Es ist aber auch

$$\sqrt{p^2 + y^2} = N,$$

das ist gleich der Normalen; daher

$$\varrho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Für $x = 0$ wird $\varrho = p$, also der Krümmungshalbmesser gleich dem halben Parameter. Da dieses der kleinste Werth ist, den ϱ annehmen kann, so ist die Krümmung der Parabel im Scheitel am grössten.

Wenn x wächst, so wächst auch ϱ, und für $x = \infty$ ist auch $\varrho = \infty$, d. h. die Krümmung der Parabel nimmt vom Scheitel an immer mehr ab, und im Unendlichen geht die Parabel in eine gerade Linie über.

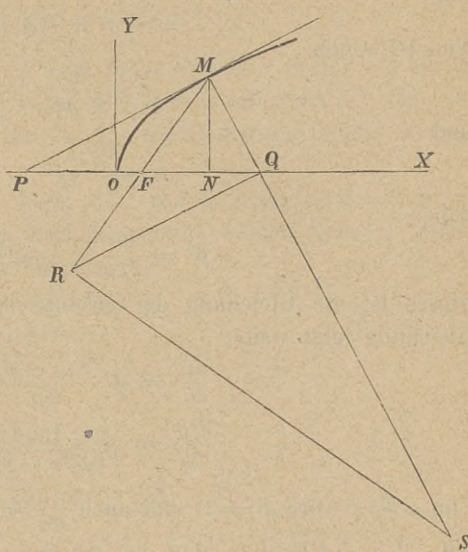
Mit Hilfe der letzten Gleichung lässt sich der Krümmungshalbmesser für irgend einen beliebigen Punkt der Parabel construiren, wenn wir ihr die Form geben

$$\varrho = N \cdot \left(\frac{N}{p}\right)^2 = N \sec{}^2\gamma.$$

Vergl. § 21.

Ist M, Figur 80, ein Punkt der Parabel, so ist MQ die Normale N und MF der Leitstrahl. Errichtet man in Q auf der Normalen eine Senkrechte, bis sie in R mit dem verlängerten Leitstrahle zusammentrifft, so ist

Fig. 80.



$$\frac{RM}{QM} = \sec\gamma = \frac{N}{p},$$

also

$$RM = QM \sec\gamma.$$

Errichtet man weiter in R eine Senkrechte auf dem Leitstrahle, bis sie in S mit der Verlängerung der Normalen zusammentrifft, so ist auch

$$\frac{SM}{RM} = \sec\gamma,$$

also

$$SM = RM \sec\gamma,$$

und wenn man aus der vorhergehenden Gleichung den Werth von RM hier einsetzt, so ist

$$SM = QM \sec^2\gamma.$$

Es ist aber

$$QM = N; \quad \sec^2\gamma = \left(\frac{N}{p}\right)^2,$$

daher

$$SM = N \,.\, \left(\frac{N}{p}\right)^2 = \varrho,$$

und S ist der Krümmungsmittelpunkt.

Man kann auf diese Weise beliebig viele Krümmungsmittelpunkte bestimmen, welches dann Punkte der Evolute sind.

Aus der Gleichung

$$y - \beta = \frac{y\,(p^2 + y^2)}{p^2}$$

folgt, wenn man $2px$ für y^2 setzt,

$$\beta = -\,2x\sqrt{\frac{2x}{p}},$$

und aus der Gleichung

$$x - \alpha = -\frac{p^2 + y^2}{p}$$

folgt

$$\alpha = p + 3x.$$

Nun ist weiter

$$\beta^2 = \frac{8x^3}{p}$$

und

$$x = \frac{\alpha - p}{3},$$

daher

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Dieses ist die Gleichung der Evolute der Parabel. Aus dieser Gleichung folgt weiter

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \sqrt{\frac{2(\alpha - p)}{3p}},$$

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{6p(\alpha - p)}}.$$

Für $\alpha = p$ wird $\beta = 0$ und auch $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$. In diesem Punkte fällt also die Evolute mit der Abscissenaxe zusammen und hat die Abscissenaxe zur Tangente.

Für $\alpha < p$ wird β imaginär, daher gibt es für jeden Werth von α, welcher kleiner als p ist, keine Ordinaten, die Kurve geht also nicht auf dieser Seite fort.

Für $\alpha > p$ gibt es für β stets zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, welche mit α wachsen und für $\alpha = \infty$ selbst unendlich werden. Die Kurve geht daher von dem Punkte $\alpha = p$ aus in zwei zur Abscissenaxe symmetrischen Zweigen ins Unendliche fort. Dabei bleibt $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und auch $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ stets positiv; daher steigt der über der Abscissenaxe liegende Zweig beständig, während der unter der Abscissenaxe liegende Zweig beständig fällt; beide Zweige aber kehren der Abscissenaxe die erhabene Seite zu.

Da die Ordinaten der Evolute schneller wachsen als die Ordinaten der Parabel, so müssen die Zweige beider Kurven zu beiden Seiten der Abscissenaxe sich schneiden. Für die Durchschnittspunkte sind die Coordinaten beider Kurven gleich, es ist also $\alpha = x$ und $\beta = y$; daher haben wir zur Bestimmung dieser Punkte die Gleichungen

$$y^2 = 2px \text{ und } y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3,$$

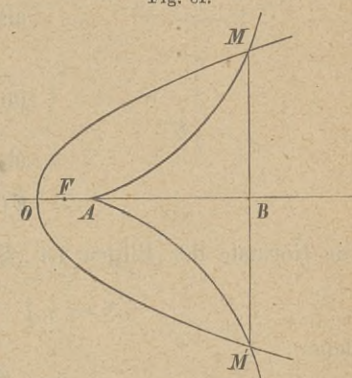
und hieraus folgt

$$\frac{27}{4}p^2 x = (x-p)^3.$$

Diese Gleichung gibt für x drei reelle Werthe; zweie, von denen jeder gleich $-\frac{1}{2}p$, und einen gleich $4p$. Hiervon ist nur der letzte brauchbar, weil für $-\frac{1}{2}p$ die Ordinaten beider Kurven imaginär sind.

Machen wir daher, Figur 81, $OA = p$ und $OB = 4p$, so sind M und M' die Durchschnittspunkte beider Kurven. Diese Evolute, welche zu den höheren Parabeln gehört, wird auch die Neil'sche oder semicubische Parabel genannt.

Fig. 81.



3. Die Ellipse.

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

ferner ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Hiernach ist

$$y - \beta = -\frac{1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\dfrac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4} \cdot y,$$

$$x - \alpha = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4}\, y \cdot \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4b^2} \cdot x,$$

$$\varrho = \frac{\left(1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Für die Endpunkte der grossen Axe ist $x = a$, $y = 0$, daher

$$\varrho = \frac{b^2}{a}.$$

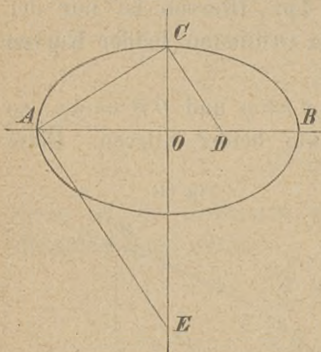
Für die Endpunkte der kleinen Axe ist $x = 0$, $y = b$, daher

$$\varrho = \frac{a^2}{b}.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht construiren. Figur 82.

Zieht man AC und errichtet in A und C Senkrechte auf AC bis zum Durchschnitte mit den Axen, so ist OD der Krümmungshalbmesser für die Endpunkte der grossen Axe und OE der Krümmungshalbmesser für die Endpunkte der kleinen Axe.

Fig. 82.



Denn es ist

$$OD \,.\, OA = \overline{OC}^2,$$

also

$$OD = \frac{b^2}{a},$$

und

$$EO \,.\, OC = \overline{AO}^2,$$

also

$$EO = \frac{a^2}{b}.$$

Die Normale der Ellipse ist (§ 22)

$$N = y \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{x^2}{y^2}},$$

daher

$$N^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}.$$

Wird dieses in die Gleichung für ϱ eingesetzt, so erhält man

$$\varrho = \frac{a^2}{b^4} N^3.$$

Es ist aber

$$\frac{b^2}{a} = p,$$

also

$$\frac{a}{b^2} = \frac{1}{p}$$

und

$$\frac{a^2}{b^4} = \frac{1}{p^2},$$

mithin

$$\varrho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Da nun auch bei der Ellipse $\frac{N}{p}$ gleich der Secante desjenigen

Winkels ist, den die Normale mit dem Leitstrahle macht, so kann der Krümmungshalbmesser auf dieselbe Weise, wie dies bei der Parabel gezeigt wurde, construirt und der Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden.

Es ist nun weiter

$$\beta = y\left(1 - \frac{a^4 y^2 - b^4 x^2}{a^2 b^4}\right);$$

wird hier

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\beta = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^3 = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3$$

und hieraus

$$y = -\left(\frac{\beta b}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} . b,$$

oder

$$y^2 = \left(\frac{\beta b}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} b^2.$$

Ferner ist

$$\alpha = x\left(1 - \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 b^2}\right);$$

wird hier

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3$$

und hieraus

$$x = \left(\frac{\alpha a}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} a,$$

oder

$$x^2 = \left(\frac{\alpha a}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} . a^2.$$

Werden diese Ausdrücke für x^2 und y^2 in die Gleichung der Ellipse eingesetzt, so erhält man

$$\left(\frac{\alpha a}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta b}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

und dieses ist die Gleichung der Evolute.

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Kurve gegen beide Axen symmetrisch ist. Sie besteht aus vier congruenten

Theilen, welche in vier in den Axen liegenden Spitzen zusammenlaufen.

Ist $\beta = 0$, so ist

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a},$$

daher ist

$$a - \alpha = a - \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Ist $\alpha = 0$, so ist

$$\beta = \frac{b^2 - a^2}{b},$$

daher ist

$$b - \beta = b - \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{a^2}{b}$$

wie das bereits schon gefunden wurde.

Es ist weiter

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{\alpha}}\sqrt{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (a\alpha)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{\alpha^4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2)^2}}{3\sqrt{(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (\alpha a)^{\frac{2}{3}}}}.$$

Für $\alpha = 0$ werden die Differentialquotienten unendlich; und weil für $\alpha = 0$, $\beta = \frac{b^2 - a^2}{b}$ wird, so ist die Ordinate in diesem Punkte Tangente der Kurve.

Für $\beta = 0$ wird $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \infty$, und weil für $\beta = 0$, $\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}$ wird, so ist die Abscissenaxe in diesem Punkte Tangente der Kurve.

Für positive Werthe von α ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ negativ, und für negative Werthe von α ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ positiv; daher steigt die Kurve auf der negativen Seite der Abscissenaxe, während sie auf der positiven Seite der Abscissenaxe fällt.

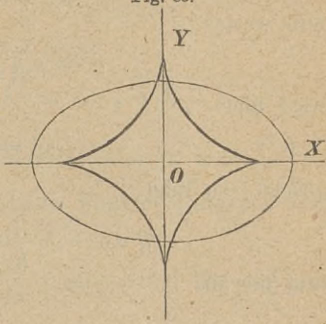
Dieses gilt von der über der Abscissenaxe liegenden Hälfte der Kurve; für die unter der Abscissenaxe liegende Hälfte der Kurve findet das Umgekehrte statt.

Dagegen ist $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ sowol für positive als negative Werthe von α

stets positiv; folglich kehrt die Kurve auch stets ihre erhabene Seite der Abscissenaxe zu. Figur 83.

4. Die Hyperbel.

Fig. 83.



Die Gleichung der Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

daher ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Hiernach ist nun

$$y - \beta = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 b^4}\, y,$$

$$x - \alpha = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 b^2}\, x,$$

$$\varrho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Für den Scheitel ist $x = a$ und $y = 0$, daher

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p.$$

Von hier wächst x und y beständig, folglich wächst auch ϱ beständig.

Die Normale der Hyperbel ist

$$N = y\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}},$$

daher

$$N^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4},$$

und wenn man dieses in die Gleichung für ϱ einsetzt, so wird

$$\varrho = \frac{a^2}{b^4} N^3.$$

Weiter ist

$$\frac{b^2}{a} = p, \text{ also } \frac{a}{b^2} = \frac{1}{p} \text{ und } \frac{a^2}{b^4} = \frac{1}{p^2},$$

daher

$$\varrho = \frac{N^3}{p^2},$$

und es kann nun der Krümmungshalbmesser in derselben Weise, wie dieses früher bei der Parabel gezeigt worden ist, construirt und der Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden.

Um die Gleichung für die Evolute aufzustellen, haben wir nun weiter

$$\beta = y\left(1 - \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 b^4}\right),$$

wird hier

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$$

gesetzt, so folgt

$$\beta = -\frac{b^2 + a^2}{b^4} y^3 = -\frac{a^2 + b^2}{b^4} y^3,$$

und hieraus

$$y = -\left(\frac{\beta b}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{1}{3}} . b$$

oder

$$y^2 = \left(\frac{\beta b}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} . b^2.$$

Ferner ist

$$\alpha = x\left(1 - \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 b^2}\right),$$

und wird hier

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

gesetzt, so folgt

$$\alpha = -\frac{a^2 + b^2}{a^4} x^3,$$

und hieraus

$$x = -\left(\frac{\alpha a}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{1}{3}} . a$$

oder

$$x^2 = \left(\frac{\alpha a}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} . a^2.$$

Werden diese Ausdrücke für x^2 und y^2 in die Gleichung der Hyperbel eingesetzt, so erhalten wir

$$\left(\frac{\alpha a}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\beta b}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

und dieses ist die Gleichung der Evolute.

Ist $\beta = 0$, so ist

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}.$$

Ist $\alpha = 0$, so ist β imaginär.

Weiter ist

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{b} \sqrt[3]{\frac{a^2}{\alpha}} \sqrt{(\alpha a)^{\frac{2}{3}} - (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{1}{b} \sqrt[3]{\frac{a^2}{\alpha^4}} \frac{\sqrt[3]{(a^2 + b^2)^2}}{3\sqrt{(\alpha a)^{\frac{2}{3}} - (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}}}.$$

Für $\beta = 0$ wird $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, und weil für $\beta = 0$, $\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a}$ wird, so ist die Abscissenaxe in diesem Punkte Tangente der Kurve.

Für positive Werthe von α ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ positiv, und für negative Werthe von α ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ negativ; daher steigt die Kurve auf der positiven Seite der Abscissenaxe, während sie auf der negativen Seite der Abscissenaxe fällt.

Dieses gilt von der über der Abscissenaxe liegenden Hälfte der Kurve; für die unter der Abscissenaxe liegende Hälfte der Kurve findet das Umgekehrte statt.

Dagegen ist $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ sowol für positive als negative Werthe von α stets positiv; folglich kehrt die Kurve auch stets ihre erhabene Seite der Abscissenaxe zu.

5. Die Cycloide.

Die Gleichungen der Cycloide sind

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = r(1 - \cos\varphi),$$

hieraus folgt

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\, d\varphi,$$

$$dy = r \sin\varphi\, d\varphi,$$

und aus diesen beiden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi},$$

oder wenn man für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die früher bestimmten Werthe setzt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

Behufs der nochmaligen Differentiation haben wir

$$dy = dx\sqrt{\frac{2r}{y} - 1},$$

hieraus

$$d^2y = dx \,.\, d\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}\,.$$

Es ist aber

$$d\sqrt{\frac{2r}{y} - 1} = \frac{-\frac{r}{y^2}\,dy}{\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}},$$

und weil

$$dy = dx\sqrt{\frac{2r}{y} - 1},$$

so ist

$$d\sqrt{\frac{2r}{y} - 1} = -\frac{r}{y^2}\,dx,$$

folglich

$$d^2y = -\frac{r}{y^2}\,dx^2$$

so wie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{y^2}.$$

Hiernach ist

$$y - \beta = -\frac{1 + \frac{2r}{y} - 1}{-\frac{r}{y^2}} = 2y,$$

$$x - \alpha = -2y\sqrt{\frac{2r}{y} - 1} = -2\sqrt{2ry - y^2},$$

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{2r}{y} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{r}{y^2}} = 2\sqrt{2ry}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt weiter

$$\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 = 2r\,.\,y.$$

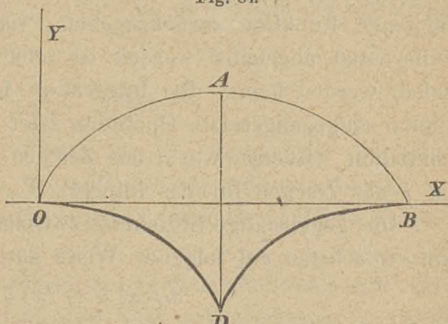
Es ist also der Krümmungshalbmesser gleich dem Doppelten der Normalen, und die Construction der Normalen, § 24, gilt daher auch für den Krümmungshalbmesser. Denn trägt man auf der Verlängerung der Normalen ihre Länge, vom Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe aus, noch einmal auf, so erhält man den Krümmungshalbmesser und den Krümmungsmittelpunkt, also einen Punkt der Evolute. Auch können wir sagen, dass der Krümmungshalbmesser von der Abscissenaxe stets halbirt wird, und dass er die Abscissenaxe in demjenigen Punkte schneidet, in welchem der durch den Krümmungspunkt gelegte Rollkreis die Abscissenaxe berührt.

Aus den obigen Gleichungen folgt nun weiter für die Coordinaten der Evolute

$$\beta = -y,$$
$$\alpha = x + 2\sqrt{2ry - y^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass die Ordinate der Evolute stets gleich und entgegengesetzt ist der Ordinate der Cycloide. Die Evolute ist demnach eine Cycloide, welche mit der Evolvente congruent ist; sie liegt unter der Abscissenaxe, und beide Kurven sind um die Hälfte gegen einander verschoben. Figur 84.

Fig. 84.



Nun ist

$$y = r(1 - \cos\varphi),$$
$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$2\sqrt{2ry - y^2} = 2r\sin\varphi.$$

Werden diese Ausdrücke in die obigen Gleichungen eingesetzt, so ist

$$\beta = -r(1 - \cos\varphi).$$
$$\alpha = r(\varphi + \sin\varphi),$$

und dieses sind die Gleichungen der Evolute.

Für $\varphi = 0$ ist

$$\beta = 0 \text{ und } \alpha = 0,$$

dieses gibt den Punkt 0.

Für $\varphi = \pi$ ist

$$\beta = -2r \text{ und } \alpha = r\pi,$$

dieses gibt den Punkt D.

Für $\varphi = 2\pi$ ist

$$\beta = 0 \text{ und } \alpha = 2r\pi,$$

dieses gibt den Punkt B.

XIII. Abschnitt.

Die Integration der Funktionen.

§ 74.

Allgemeines.

Während die Differentiation der Funktionen sich damit beschäftigt, von einer gegebenen Funktion das Differential und den Differentialquotienten oder die abgeleitete Funktion zu bilden, hat es die Integration der Funktionen damit zu thun, von dem Differential oder der abgeleiteten Funktion auf die ursprüngliche, also diejenige Funktion zurückzugehen, von welcher das vorgelegte Differential abgeleitet worden ist oder doch als abgeleitet angesehen werden kann. Die Integration ist daher die der Differentiation entgegengesetzte Operation oder die Umkehrung der Differentiation. Ebenso wie d das Zeichen für das Differential ist, so ist $\int$ das Zeichen für das Integral.

Die gegenseitige Beziehung zwischen beiden Operationen wird am einfachsten auf folgende Weise dargestellt. Wenn

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx,$$

so ist

$$f(x) = \int f'(x)\,dx,$$

d. h. wenn $f'(x)\,dx$ das Differential von $f(x)$ ist, so ist $f(x)$ das Integral von $f'(x)\,dx$.

Die Bildung des Differentials und des Differentialquotienten von einer gegebenen Funktion wird durch eine ganz bestimmte, für alle Fälle geltende Operation bewirkt; bei der Integration ist dieses nicht der Fall. Hier kann nicht die ursprüngliche Funktion aus dem gegebenen Differential durch eine allgemein geltende Operation abgeleitet werden, sondern man stützt sich lediglich auf die durch die vorstehenden Gleichungen ausgesprochenen Beziehungen. Wenn man weiss, dass $f'(x)\,dx$ das Differential von $f(x)$ ist, so muss nothwendig $f(x)$ das Integral von $f'(x)\,dx$ sein, Die Richtigkeit der Gleichung

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

kann auch lediglich nur dadurch bewiesen werden, dass man zeigt, es sei $f'(x)\,dx$ das Differential von $f(x)$.

Da bei der Differentiation constante Glieder der Funktion verschwinden, so hat man einem jeden Integrale eine Constante hinzuzufügen. Diese Constante ist im Allgemeinen völlig unbestimmt, also ganz willkürlich, sie lässt sich aber für jeden speciellen Fall bestimmen.

Man schreibt daher

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

wo C diese willkürliche Constante bedeutet.

Behufs der Bestimmung dieser Integrationsconstanten müssen gewisse Bedingungen gegeben sein. Man muss z. B. wissen, dass für irgend einen bestimmten Werth von x die Funktion oder das Integral ebenfalls einen bestimmten Werth annimmt. Wird also für $x = a$ das Integral $\int f'(x)\,dx = A$, so hat man die Gleichung

$$A = f(a) + C$$

und hieraus

$$C = A - f(a),$$

wodurch die Constante bestimmt ist. So lange eine derartige Bestimmung nicht vorliegt, ist auch das Integral unbestimmt, und es sind zwei Integrale einander gleich, wenn ihre Differenz gleich einer Constanten ist.

Die zur Integration vorgelegten Differentialfunktionen sind nun zum Theil so beschaffen, dass man sofort erkennt, aus welchen Funktionen sie durch Differentiation hervorgegangen sind. In diesem Falle kennt man also das Integral ohne Weiteres, und diese Integrale bilden die Fundamentalformeln für die weiteren Operationen, welche sich in dem Falle nothwendig machen, wo man der Differentialfunktion nicht ansehen kann, aus welcher Funktion sie durch Differentiation hervorgegangen ist oder als hervorgegangen angesehen werden kann.

Diese Operationen bestehen im Wesentlichen darin, dass man die vorgelegten Differentialfunktionen auf eine oder mehrere Fundamentalformeln oder überhaupt auf solche Differentialfunktionen zurückführt, deren Integrale bekannt sind; und hierbei werden vorzugsweise folgende Verfahrungsarten mit Erfolg angewendet; nämlich die Methode der theilweisen Integration, die Methode der Integration durch Umformung und die Integration durch unendliche Reihen.

Die Methode der theilweisen Integration geht von der Gleichung aus

$$d(vw) = v\,dw + w\,dv.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man

$$vw = \int (v\,dw + w\,dv).$$

Weil aber das Differential einer Summe gleich ist der Summe der Differentiale der einzelnen Glieder, so muss auch das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder sein. Demnach geht die Gleichung in die folgende über

$$vw = \int v\,dw + \int w\,dv,$$

woraus sich weiter ergibt

$$\int v\,dw = vw - \int w\,dv.$$

Der Gebrauch dieser Formel besteht nun darin, dass man die vorgelegte Differentialfunktion in zwei Theile, v und dw, zerlegt, so dass dw sich integriren lässt; man hat dann anstatt des Integrals $\int v\,dw$ das Integral $\int w\,dv$, und wenn dieses letztere durch die Wahl von v und dw ein bekanntes Integral wird, so ist durch diese Umgestaltung das Integral von $v\,dw$ gefunden.

Die Methode der Integration durch Umformung besteht darin, dass man eine neue Veränderliche einführt, wodurch die Differentialfunktion eine Form annimmt, deren Integral bekannt ist. Nach erfolgter Integration setzt man dann für die neue Veränderliche wieder ihren Werth.

Die Integration mittelst unendlicher Reihen besteht darin, dass man die Differentialfunktion in eine unendliche Reihe entwickelt und die Glieder derselben integrirt. Es wird natürlich dabei vorausgesetzt, dass die Funktion überhaupt in eine Reihe sich entwickeln lässt, und dass die Reihe convergirt.

§ 75.

Rationale, ganze und gebrochene Funktionen.

Die Fundamentalformel für die Integration rationaler ganzer Funktionen ist

1. $$\int x^n\,dx.$$

Wir wissen nun, es ist

$$dx^n = n\,x^{n-1}\,dx$$

daher muss auch sein

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Diese Formel gilt für alle Werthe von n; ausgenommen ist nur der Werth $n = -1$.

Man hat also bei der Integration einer Potenz den Exponenten um die Einheit zu erhöhen und mit diesem Exponenten zu dividiren.

Für das Integral

2. $$\int x^{-1}\,dx$$

ergibt sich leicht Folgendes. Es ist

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Nun wissen wir, dass

$$dl(x) = \frac{1}{x}\,dx,$$

folglich muss sein

$$\int \frac{1}{x}\,dx = l(x) + C.$$

3. $$\int \frac{1}{x^n}\,dx.$$

Es ist

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,dx + C$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C.$$

Hat die Differentialfunktion einen constanten Factor, so hat man zu beachten, dass bei der Differentiation constante Factoren unverändert bleiben, und dass folglich auch bei der Integration constante Faktoren unverändert zu lassen sind. Demnach ist

4. $$\int a x^n dx = a \int x^n\,dx = a\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Hat man die zusammengesetzte Formel

5. $$\int (a + bx)^m\,dx,$$

so setze man

$$a + bx = z,$$

dann ist

$$b\,dx = dz;\ dx = \frac{1}{b}\,dz.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\int (a + bx)^m dx = \int z^m \cdot \frac{1}{b}\,dz = \frac{1}{b}\int z^m\,dz$$

$$= \frac{1}{b}\cdot\frac{z^{m+1}}{m+1} + C,$$

und wenn man für z wieder seinen Werth setzt,

$$\int (a + bx)^m\,dx = \frac{1}{b}\cdot\frac{(a+bx)^m}{m+1} + C.$$

Ist m negativ, so liefert dasselbe Verfahren

6. $$\int \frac{1}{(a+bx)^m}\,dx = -\frac{1}{b(m-1)(a+bx)^{m-1}} + C.$$

Hat man zu integriren

7. $$\int (a + bx^m)^\mu x^{m-1}\,dx,$$

so setze man

$$a + bx^m = z,$$

dann ist

$$m b x^{m-1}\,dx = dz, \text{ also } dx = \frac{dz}{m b x^{m-1}}.$$

Dieses eingesetzt, erhält man

$$\int (a + bx^m)^\mu x^{m-1}\,dx = \int z^\mu \cdot \frac{dz}{mb}$$

$$= \frac{}{mb}\int z^\mu\,dz = \frac{1}{mb}\cdot\frac{z^{\mu+1}}{\mu+1} + C$$

und durch Einsetzung des Werthes von z

$$\int (a + bx^m)^\mu x^{m-1}\,dx = \frac{1}{mb}\cdot\frac{(a+bx^m)^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$$

Für ein Polynom hat man

8. $$\int (a + bx + cx^2 + \cdot\cdot)\,dx,$$

$$= \int a\,dx + \int bx\,dx + \int cx^2\,dx + \cdot\cdot\cdot,$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdot\cdot + C,$$

und ist zu ermitteln

9. $$\int (a + bx + cx^2 + \cdot\cdot\cdot)^m\,dx,$$

so hat man die Potenz zu entwickeln und die einzelnen Glieder zu integriren.

10. $$\int \frac{dx}{a+x}.$$

Man setze $a + x = z$ so ist $dx = dz$, daher

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{dz}{z} = l(z) + C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int \frac{dx}{a+x} = l(a + x) + C.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

11. $$\int \frac{dx}{a-x} = -l(a - x) + C.$$

12. $$\int \frac{dx}{a+bx}.$$

Man setze $a + bx = z$, so ist $b dx = dz$, also $dx = \frac{1}{b} dz$, daher

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{b} l(z) + C,$$

und wird der Werth von z gesetzt,

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} l(a + bx) + C.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

13. $$\int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b} l(a - bx) + C.$$

14. $$\int \frac{x dx}{a+bx}.$$

Es ist

$$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \int \frac{bx dx}{a+bx},$$

$$= \frac{1}{b} \int \frac{a + bx - a}{a + bx} dx,$$

$$= \frac{1}{b} \int \left(1 - \frac{a}{a+bx}\right) dx,$$

$$= \frac{1}{b}\left(\int dx - a \int \frac{dx}{a+bx}\right),$$

$$= \frac{1}{b}\left(x - \frac{a}{b} l(a + bx)\right) + C,$$

15. $$\int \frac{x\,dx}{a-bx}.$$

Es ist

$$\int \frac{x\,dx}{a-bx} = \frac{1}{b}\int \frac{b\,x\,dx}{a-b\,x},$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{b\,x - a + a}{a - b\,x}\,dx,$$

$$= \frac{1}{b}\int \left(\frac{-(a-b\,x)}{a-b\,x} + \frac{a}{a-b\,x}\right) dx,$$

$$= \frac{1}{b}\int \left(\frac{a}{a-b\,x} - 1\right) dx,$$

$$= \frac{1}{b}\left(a\int \frac{dx}{a-b\,x} - \int dx\right),$$

$$= \frac{1}{b}\left(-\frac{a}{b}\,l\,(a - b\,x) - x\right) + C,$$

$$= -\frac{1}{b}\left(x + \frac{a}{b}\,l\,(a - b\,x)\right) + C,$$

16. $$\int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Es ist

$$d\ \mathrm{arc}\ (\tan = x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

daher muss auch sein

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc}\ (\tan = x) + C.$$

17. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Man setze $\frac{x}{a} = z$, so ist $x = az$ und $dx = a\,dz$.

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\,dz}{a^2+a^2z^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{a}\ \mathrm{arc}\ (\tan = z) + C,$$

und wenn man für z wieder seinen Werth setzt,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arc}\ \left(\tan = \frac{x}{a}\right) + C,$$

18. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2}.$$

Es ist

$$a^2 - x^2 = (a + x)(a - x),$$

daher nach § 46

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x},$$

$$1 = A(a - x) + B(a + x),$$

$$1 = (A + B)a + (B - A)x,$$

also

$$B - A = 0, \text{ daher } A = B,$$

$$(A + B)a = 1, \text{ daher } A = B = \frac{1}{2a},$$

folglich

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a(a+x)} + \frac{1}{2a(a-x)}$$

und weiter

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+x} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a-x}$$

$$= \frac{1}{2a}l(a+x) - \frac{1}{2a}l(a-x) + C$$

$$= \frac{1}{2a}l\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C,$$

19. $$\int\frac{dx}{a+bx^2}.$$

Man setze $\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x = z$, so ist $x^2 = \frac{a}{b}z^2$, $dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot dz$.

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\int\frac{dx}{a+bx^2} = \int\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,dz}{a+b\cdot\frac{a}{b}z^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc}(\tan = z) + C,$$

und wenn man für z wieder seinen Werth setzt,

$$\int\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc}\left(\tan = x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C,$$

20. $$\int\frac{dx}{a-bx^2}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \int \frac{dx}{\frac{ab}{b} - bx^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\frac{a}{b} - x^2}$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - x^2}$$

daher nach 18.

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b}}}\, l\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x}\right) + C,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, l\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x}\right) + C.$$

21. $$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2}.$$

Man setze $a^2 + x^2 = z$, so ist $2x\,dx = dz$ also $dx = \frac{dz}{2x}$. Dieses eingesetzt gibt

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\, l(z) + C$$

und nach Einsetzung des Werthes von z

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\, l(a^2 + x^2) + C.$$

Auf dieselbe Weise ist

22. $$\int \frac{x\,dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2}\, l(a^2 - x^2) + C.$$

23. $$\int \frac{x\,dx}{a + bx^2}.$$

Man setze $a + bx^2 = z$, so ist $2bx\,dx = dz$, also $dx = \frac{dz}{2bx}$. Dieses eingesetzt gibt

$$\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2b}\, l(z) + C$$

und nach Einsetzung des Werthes von z

$$\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b}\, l(a + bx^2) + C.$$

Auf dieselbe Weise ist

24. $$\int \frac{x\,dx}{a - b x^2} = -\frac{1}{2b}\, l\,(a - b x^2) + C.$$

Ueberall wo der Zähler das Differential des Nenners ist, ist das Integral ein Logarithmus.

Die algebraischen gebrochenen Funktionen haben im allgemeinen die Form

25. $$\frac{a x^m + b x^{m-1} + \cdots + r}{p x^n + q x^{n-1} + \cdots + s},$$

wo $a, b \ldots p, q \ldots$ constante Faktoren und m und n positive ganze Zahlen sind, und zwar ist m kleiner als n.

Eine solche Funktion lässt sich stets, wie wir § 46 und folgende gesehen haben, in Partialbrüche zerlegen; und zwar haben die Partialbrüche die Formen

$$\frac{A}{x - a},\quad \frac{A}{(x - a)^n},\quad \frac{A x + b}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},\quad \frac{A x + B}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n}.$$

Soll nun eine Differentialfunktion von der Form

$$\frac{a x^m + b x^{m-1} + \cdots + r}{p x^n + q x^{n-1} + \cdots + s}\, dx$$

integrirt werden, so ist sie in Differentialfunktionen von der Form

$$\frac{A\,dx}{x - a},\quad \frac{A\,dx}{(x - a)^n},\quad \frac{A x + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}\, dx,\quad \frac{A x + B}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n}\, dx$$

zu zerlegen, welche sodann zu integriren sind.

Für die ersten beiden Formen hat man sofort nach dem Vorausgegangenen

$$\int \frac{A\,dx}{x - a} = A l.(x - a) + C,$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x - a)^n} = -\frac{A}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} + C.$$

Um die dritte Form

$$\frac{A x + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}\, dx$$

zu integriren, setze man $x - \alpha = y$ also $x = y + \alpha$, so ist $dx = dy$, und es wird durch diese Substitution

$$\frac{A x + B}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}\, dx = \frac{A y + A \alpha + B}{y^2 + \beta^2}\, dy$$

$$= \frac{A y\, dy}{y^2 + \beta^2} + \frac{A \alpha + B}{y^2 + \beta^2}\, dy.$$

Nun ist nach dem Vorausgegangenen

$$\int \frac{Ay\,dy}{y^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\,l\,(y^2+\beta^2) + C,$$

und wenn man wieder $x - \alpha$ für y setzt, so wird dieses Integral

$$\frac{A}{2}\,l\,((x-\alpha)^2 + \beta^2) + C.$$

Ferner ist

$$\int \frac{A\alpha + B}{y^2+\beta^2}\,dy = (A\alpha + B)\int \frac{dy}{y^2+\beta^2}.$$

Setzt man $\frac{y}{\beta} = z$; $y = \beta z$, so ist $dy = \beta\,dz$, und es wird

$$(A\alpha + B)\int \frac{dy}{y^2+\beta^2} = \frac{A\alpha + B}{\beta}\int \frac{dz}{1+z^2}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc}\,(\tan = z).$$

Setzt man $\frac{y}{\beta}$ für z, so ist

$$(A\alpha + B)\int \frac{dy}{y^2+\beta^2} = \frac{A\alpha + B}{\beta}\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{y}{\beta}\right) + C,$$

und wenn man endlich $x - \alpha$ für y setzt, so wird das Integral

$$\frac{A\alpha + B}{\beta}\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Hiernach erhält man aber für das Integral der dritten Form

$$\int \frac{Ax + B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{A}{2}\,l\,((x-\alpha)^2 + \beta^2)$$

$$+ \frac{A\alpha + B}{\beta}\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C.$$

Um die vierte Form

$$\frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx$$

zu integriren, setzen wir zunächst wieder $x - \alpha = y$ also $x = y + \alpha$, so ist $dx = dy$, und die Formel nimmt folgende Gestalt an

$$\frac{Ay + A\alpha + B}{(y^2+\beta^2)^n}\,dy.$$

Dieses lässt sich aber schreiben

$$\frac{Ay\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} + \frac{A\alpha + B}{(y^2+\beta^2)^n}\,dy.$$

Setzen wir nun, behufs der Integration des ersten Theils, $y^2 + \beta^2 = z^2$, so ist $y dy = z dz$, und es wird

$$\frac{Ay\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \frac{Az\,dz}{z^{2n}} = Az^{-2n+1}dz.$$

Es ist aber

$$\int Az^{-2n+1}\,dz = \frac{Az^{-2n+2}}{-2n+2} + C$$

$$= -\frac{A}{(2n-2)z^{2n-2}} + C,$$

so wie, wenn man $y^2 + \beta^2$ für z^2 setzt,

$$-\frac{A}{2(n-1)(y^2+\beta^2)^{n-1}},$$

Wird noch $x - \alpha$ für y gesetzt, so ist das Integral des ersten Theiles

$$-\frac{A}{2\,(n-1)\,[(x-a)^2+\beta^2]^{n-1}}.$$

Es ist nun noch das Integral des zweiten Theiles nämlich

$$(A\alpha + B)\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}$$

zu ermitteln, also das Integral

$$\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}.$$

Wenn man die Formel mit $y^2 + \beta^2$ multiplicirt und dividirt, so erhält man

$$\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \int\frac{y^2+\beta^2}{(y^2+\beta^2)^{n+1}}\,dy$$

oder

$$\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \int\frac{y^2dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}} + \beta^2\int\frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}}.$$

Wenn man nun

$$\int\frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}}$$

nach der Formel

$$\int v\,dw = vw - \int w\,dv$$

behandelt, indem man setzt

$$v = y;\quad dw = \frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}},$$

so ist nach der zuletzt ausgeführten Integration, wenn man $n+1$ für n setzt,

$$w = \int \frac{y\,dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2n(y^2+\beta^2)^n}.$$

Endlich ist

$$dv = dy.$$

Setzt man nun für v, w, dv, dw die Werthe in die Formel ein, so erhält man

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}} = -\frac{y}{2n(y^2+\beta^2)^n} + \int \frac{dy}{2n(y^2+\beta^2)^n}.$$

Setzt man die rechte Seite dieser Gleichung für die linke Seite in die obige Gleichung ein, so ist

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = -\frac{y}{2n(y^2+\beta^2)^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} + \beta^2 \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}}$$

oder wenn man die gleichartigen Integrale zusammenzieht und die Glieder versetzt,

$$\beta^2 \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n+1}} = \frac{y}{2n(y^2+\beta^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n}.$$

Dividirt man nun noch mit β^2 und schreibt $n-1$ für n, so erhält man

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \frac{y}{2(n-1)\beta^2(y^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2} \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}.$$

Dieses ist eine sogenannte Reduktionsformel; denn durch dieselbe ist das gesuchte Integral auf ein gleiches zurückgeführt worden, bei welchem der Potenzexponent des Nenners um eine Einheit niedriger ist. Bedient man sich also dieser Formel so vielmal hinter einander, als es nöthig ist, so kommt man schliesslich auf ein Integral von der Form

$$\int \frac{dy}{y^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{y}{\beta}\right).$$

Nach diesen Auseinandersetzungen ist das Integral der vierten Form der Partialbrüche

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = -\frac{A}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

wo nun das Integral rechts nach der zuletzt entwickelten Reduktionsformel weiter zu behandeln ist.

Für $n = 2$ hat man beispielsweise

$$\int \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2}\, dx = -\frac{A}{2[(x-\alpha)^2 + \beta^2]}$$

$$+ (A\alpha + B)\left[\frac{x-\alpha}{2\beta^2[(x-\alpha)^2+\beta^2]} + \frac{1}{2\beta^2}\,\mathrm{arc}\left(\tan = \frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]$$

$$= -\frac{A}{2[(x-\alpha)^2+\beta^2)} + \frac{A\alpha+B}{2\beta^2}\left[\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \mathrm{arc}\left(\tan = \frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right].$$

§ 76.

Irrationale Funktionen.

Als irrationale Differentialfunktionen werden im Allgemeinen solche bezeichnet, bei welchen die unabhängige Veränderliche unter einem Wurzelzeichen sich befindet. Das einfachste Integral dieser Art ist

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun wissen wir, dass

$$d\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

folglich muss auch sein

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc}\,(\sin = x) + C.$$

Die folgenden irrationalen Differentialfunktionen lassen sich durch einfache Substitutionen rational machen und integriren.

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Man setze $\frac{x}{a} = z$ also $x = az$, so ist $dx = a\,dz$ und daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$= \mathrm{arc}\,(\sin = z) + C,$$

so wie, wenn man den Werth von z wieder einführt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + C.$$

3. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Man setze $\sqrt{a^2+x^2} = z$, also $a^2 + x^2 = z^2$, so ist $x\,dx = z\,dz$, daher

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{z\,dz}{z}=\int dz=z+C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

4. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Man setze $\sqrt{a^2-x^2}=z$, also $a^2-x^2=z^2$, so ist $x\,dx=-z\,dz$, daher

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\frac{z\,dz}{z}=-\int dz=-z+C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

5. $$\int\frac{x\,dx}{(\sqrt{x-a})^3}.$$

Man setze $x-a=z$, also $x=z+a$, so ist $dx=dz$, daher

$$\int\frac{x\,dx}{(\sqrt{x-a})^3}=\int\frac{(z+a)\,dz}{z^{\frac{3}{2}}}=\int(z+a)\,z^{-\frac{3}{2}}\,dz$$

$$=\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz+a\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz$$

$$=\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{a z^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C$$

$$=2z^{\frac{1}{2}}-\frac{2a}{z^{\frac{1}{2}}}+C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int\frac{x\,dx}{(\sqrt{x-a})^3}=2\left(\sqrt{x-a}-\frac{a}{\sqrt{x-a}}\right)+C$$

$$=\frac{2(x-2a)}{\sqrt{x-a}}+C.$$

6. $$\int\sqrt{a+bx}\;dx.$$

Man setze $\sqrt{a+bx}=z$, also $a+bx=z^2$, so ist $dx=\frac{2z\,dz}{b}$, daher

$$\int\sqrt{a+bx}\;dx=\int z\,.\,\frac{2z\,dz}{b}=\frac{2}{b}\int z^2\,dz=\frac{2}{3b}z^3+C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int \sqrt{a + bx}\, dx = \frac{2}{3b} (\sqrt{a + bx})^3 + C,$$

7. $$\int \sqrt[n]{a + bx}\, dx.$$

Man setze $\sqrt[n]{a+bx} = z$, also $a + bx = z^n$, so ist $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$ daher

$$\int \sqrt[n]{a+bx}\, dx = \int z \,.\, \frac{nz^{n-1}dz}{b} = \frac{n}{b}\int z^n dz = \frac{n}{(n+1)b} z^{n+1} + C$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int \sqrt[n]{a + bx}\, dx = \frac{n}{(n+1)b} (\sqrt[n]{a + bx})^{n+1} + C.$$

8. $$\int x\sqrt{a+bx}\, dx.$$

Man setze $\sqrt{a + bx} = z$, so ist $a + bx = z^2$ so wie $x = \frac{z^2 - a}{b}$ und $dx = \frac{2zdz}{b}$, daher

$$\int x\sqrt{a + bx}\, dx = \int \frac{z^2 - a}{b} \,.\, z \,.\, \frac{2zdz}{b}$$

$$= \frac{2}{b^2}\int (z^2 - a)z^2\, dz$$

$$= \frac{2}{b^2}\left(\int z^4 dz - a\int z^2 dz\right)$$

$$= \frac{2}{b^2}\left(\frac{z^5}{5} - \frac{az^3}{3}\right) + C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int x\sqrt{a + bx}\, dx = \frac{2}{b^2}\left(\frac{(\sqrt{a + bx})^5}{5} - \frac{a(\sqrt{a + bx})^3}{3}\right) + C.$$

9. $$\int \frac{dx}{m + n\sqrt{a + bx}}.$$

Man setze $\sqrt{a + bx} = z$, so ist $a + bx = z^2$ und $dx = \frac{2zdz}{b}$, daher

$$\int \frac{dx}{m + n\sqrt{a + bx}} = \int \frac{\frac{2zdz}{b}}{m + nz} = \frac{2}{b}\int \frac{zdz}{m + nz}.$$

Es ist aber nach § 75, 14.

$$\int \frac{zdz}{m + nz} = \frac{1}{n}\left(z - \frac{m}{n}\, l\,(m + nz)\right) + C.$$

Setzen wir also für z seinen Werth, so ist

$$\int\frac{dx}{m+n\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{bn}\left(\sqrt{a+bx}-\frac{m}{n}\,l\,(m+n\sqrt{a+bx})\right)+C.$$

10. $$\int\frac{dx}{(m+nx)\sqrt{a+bx}}.$$

Man setze $\sqrt{a+bx}=z$, so ist $x=\frac{z^2-a}{b}$ und $dx=\frac{2z\,dz}{b}$, daher

$$\int\frac{dx}{(m+nx)\sqrt{a+bx}}=\int\frac{\frac{2z\,dz}{b}}{\left(m+n\frac{z^2-a}{b}\right)z}=2\int\frac{dz}{(mb-na)+nz^2}$$

und dieses ist nach 19. oder 20. § 75 zu integriren.

11. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Man setze $\sqrt{a^2-x^2}=z$, so ist $x^2=a^2-z^2$, $dx=-\frac{z\,dz}{x}$, daher

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\frac{dz}{a^2-z^2}.$$

Nun ist nach 18. § 75

$$-\int\frac{dz}{a^2-z^2}=-\frac{1}{2a}\,l\,(a+z)+\frac{1}{2a}\,l\,(a-z)+C$$
$$=\frac{1}{2a}\,l\left(\frac{a-z}{a+z}\right)+C,$$

und wenn für z sein Werth gesetzt wird,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2a}\,l\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)+C.$$

Bei dem Integrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

hat man drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem das Glied cx^2 Null, positiv oder negativ ist.

Ist $cx^2=0$ so hat man

12. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}.$$

Man setze $\sqrt{a+bx}=z$, so ist $a+bx=z^2$, $dx=\frac{2z\,dz}{b}$, daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \int \frac{2z\,dz}{bz} = \frac{2}{b}\int dz = \frac{2}{b}\,z + C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C.$$

Ist das Glied cx^2 positiv, so setze man

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = z - x\sqrt{c},$$

dann ist

$$a + bx + cx^2 = z^2 - 2zx\sqrt{c} + cx^2,$$

also

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2\sqrt{c}\,.\,z},$$

$$dx = \frac{2\,(bz + \sqrt{c}\,.\,z^2 + a\sqrt{c})}{(b + 2\sqrt{c}\,.\,z)^2}\,dz.$$

Durch diese Substitution wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{2\,dz}{b + 2\sqrt{c}\,.\,z}.$$

Es ist aber nach 12. § 75

$$\int \frac{2\,dz}{b + 2\sqrt{c}\,.\,z} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,(b + 2\sqrt{c}\,.\,z) + C$$

und

$$z = x\sqrt{c} + \sqrt{a+bx+cx^2},$$

daher

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\left(b + 2cx + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C,$$

oder

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\left[2\sqrt{c}\left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + x\sqrt{c} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right)\right] + C,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,(2\sqrt{c}) + \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + x\sqrt{c} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C,$$

und wenn man das Glied

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\,(2\sqrt{c})$$

mit der Constanten vereinigt,

14. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + x\sqrt{c} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right) + C.$$

Hiernach hat man auch

15. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Es ist zu setzen a^2 für a, 0 für b und 1 für c; dieses gibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = l\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

16. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Hier ist zu setzen 1 für a, 0 für b und 1 für c; dieses gibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = l\,(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

Ist das Glied $c\,x^2$ negativ, das Glied a aber positiv, so können wir auch setzen

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = xz - \sqrt{a},$$

woraus

$$a + bx - cx^2 = x^2 z^2 - 2xz\sqrt{a} + a,$$

also

$$b - cx = xz^2 - 2z\sqrt{a},$$

und hieraus folgt

$$x = \frac{b + 2\sqrt{a}\,.\,z}{c + z^2},$$

so wie

$$dx = \frac{2\,(c\sqrt{a} - bz - z^2\sqrt{a})}{(c + z^2)^2}\,dz.$$

Durch diese Substitution wird nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\,2\int \frac{dz}{c + z^2}.$$

Setzen wir $\frac{z}{\sqrt{c}} = y$, so ist $dz = \sqrt{c}\,dy$, daher

$$-2\int \frac{dz}{c + z^2} = -\frac{2}{\sqrt{c}}\int \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{2}{\sqrt{c}}\,\text{arc}\,(\tan = y) + C,$$

und wenn man für y seinen Werth setzt,

$$-2\int \frac{dz}{c + z^2} = -\frac{2}{\sqrt{c}}\,\text{arc}\left(\tan = \frac{z}{\sqrt{c}}\right) + C.$$

Es ist aber

$$z = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + bx - cx^2}}{x},$$

daher

$$17.\ \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + bx - cx^2}}{x\sqrt{c}}\right) + C.$$

Ist dagegen das Glied a nicht positiv, so ist die vorstehende Substitution nicht anwendbar, weil $\sqrt{a}$ imaginär sein würde. Wir haben aber dann Folgendes. Der Ausdruck

$$a + bx - cx^2$$

lässt sich stets in zwei Faktoren zerlegen, welche wir erhalten, wenn wir die Gleichung

$$a + bx - cx^2 = 0$$

auflösen. Sind nun α und α_1 die Wurzeln dieser Gleichung, so müssen das solche Werthe von x sein, welche die Wurzel $\sqrt{a + bx - cx^2}$ reell machen, da in der Anwendung nur reelle Werthe vorkommen können.

Wir können daher setzen

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = \sqrt{c\,(x - \alpha)(\alpha_1 - x)} = (x - \alpha)\, z \sqrt{c},$$

hieraus folgt nun

$$c\,(x - \alpha)(\alpha_1 - x) = (x - \alpha)^2 z^2 \,.\, c$$

$$\alpha_1 - x = (x - \alpha) z^2,$$

$$x = \frac{\alpha_1 + \alpha z^2}{z^2 + 1},$$

$$dx = \frac{2(\alpha - \alpha_1)\, z\, dz}{(z^2 + 1)^2},$$

und dieses gibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{dz}{1 + z^2} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}(\tan = z) + C.$$

Nun ist

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_1 - x}{x - \alpha}};$$

daher auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{\alpha_1 - x}{x - \alpha}}\right) + C.$$

Die Auflösung der Gleichung

$$a + bx - cx^2 = 0,$$

gibt aber

$$\alpha_1 = \frac{b + \sqrt{4ac + b^2}}{2c}, \quad \alpha = \frac{b - \sqrt{4ac + b^2}}{2c},$$

daher ist

$$\alpha_1 - x = \frac{b + \sqrt{4ac + b^2} - 2cx}{2c},$$

$$x - \alpha = \frac{-b + \sqrt{4ac + b^2} + 2cx}{2c}$$

und folglich

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{-2cx+b+\sqrt{4ac+b^2}}{2cx-b+\sqrt{4ac+b^2}}}\right) + C.$$

Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}}$$

lässt sich auch noch auf folgende Weise behandeln. Es ist

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = \sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x - x^2}.$$

Setzen wir

$$2 \cdot \frac{b}{2c} x \text{ für } \frac{b}{c} x$$

und fügen dem Ausdrucke unter dem Wurzelzeichen noch

$$\frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2}$$

hinzu, wodurch nichts geändert wird, so ist auch

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = \sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + 2\frac{b}{2c}x - x^2 + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2}},$$

$$= \sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \left(\frac{b^2}{4c^2} - 2 \cdot \frac{b}{2c}x + x^2\right)},$$

$$= \sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \left(x - \frac{b}{2c}\right)^2},$$

$$= \sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2}}\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2}}}\right)^2},$$

und mithin ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{\dfrac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}\right)^2}},$$

und weil

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}$$

das Differential von

$$\frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}$$

ist, so haben wir, wenn wir den letzten Ausdruck mit z bezeichnen, die Form

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc}\,(\sin = z) + C.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{\dfrac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}\right) + C,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right) + C,$$

so wie endlich

19. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc}\left(\sin = \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right) + C.$$

Setzt man in der letzten Gleichung $a = 0$ und $c = 1$, so ergibt sich sofort

20. $$\int \frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{2x-b}{b}\right) + C.$$

§ 77.

Binomische Differentiale.

Differentialfunktionen, welche die Form haben

$$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx$$

werden binomische Differentiale genannt, m, n, p und q bezeichnen positive ganze Zahlen. Die Integration wird entweder dadurch bewirkt, dass man durch geeignete Substitutionen die Funktion rational macht, oder dass man durch Anwendung der Methode der theilweisen Integration das Integral auf ein anderes einfacheres zurückführt.

Um eine solche Funktion rational zu machen, kann man setzen

$$a+bx^n=z^q,$$

dann ist

$$x=\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx=\frac{q}{bn}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot z^{q-1}\,dz.$$

Durch diese Substitution wird

$$1.\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx=\int\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m-1}{n}}\cdot z^p\cdot\frac{q}{bn}\cdot\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot z^{q-1}dz$$

$$=\frac{q}{bn}\int\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\cdot z^{p+q-1}\,dz,$$

und dieser Ausdruck ist rational, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Eine andere Substitution ist die folgende. Man setze

$$a+bx^n=x^n z^q,$$

dann ist

$$x=\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx=-\frac{aq}{n}\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot z^{q-1}\,dz,$$

Durch diese Substitution wird

$$2. \qquad \int x^{m-1}\,(a+b\,x^n)^{\frac{p}{q}}\,d\,x$$

$$= -\frac{a\,q}{n}\int\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{m-1}{n}}\cdot\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{p}{q}}\cdot z^p\cdot\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot z^{q-1}\,d\,z$$

$$= -\frac{a\,q}{n}\int\left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1}\cdot z^{p+q-1}\,d\,z$$

$$= -\frac{q}{n}\,a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}\int\frac{z^{p+q-1}}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1}}\,d\,z,$$

und dieser Ausdruck ist rational, wenn $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Ueberall wo das Rationalmachen nicht möglich ist, führt man unter Anwendung des Verfahrens der theilweisen Integration das Integral auf ein einfacheres zurück.

Um dieses auszuführen, geben wir dem binomischen Differentiale die Form

$$x^m\,(a\,x^n+b)^r\,d\,x,$$

indem wir m für $m-1$ und r für $\frac{p}{q}$ setzen, so dass wir nun das Integral

$$\int x^m\,(a\,x^n+b)^r\,d\,x$$

zu betrachten haben. Wir setzen

$$v=(a\,x^n+b)^r;\quad d\,w=x^m\,d\,x,$$

so ist

$$d\,v=r\,(a\,x^n+b)^{r-1}\,.\,n\,a\,x^{n-1}\,d\,x,$$

$$w=\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Dieses gibt

$$3. \qquad \int x^m\,(a\,x^n+b)^r\,d\,x=\frac{x^{m+1}\,(a\,x^n+b)^r}{m+1}$$

$$-\frac{n\,a\,r}{m+1}\int x^{m+n}\,(a\,x^n+b)^{r-1}\,d\,x.$$

Durch diese Formel wird der Exponent m vergrössert und der Exponent r verkleinert. Will man also diese Aenderung herbeiführen, so hat man sich der vorstehenden Formel zu bedienen.

Es ist nun weiter

$$\int x^{m+n}(ax^n+b)^{r-1}\,dx = \int x^m x^n (ax^n+b)^{r-1}\,dx.$$

Man kann aber setzen

$$x^n = \frac{ax^n}{a} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = \frac{ax^n+b}{a} - \frac{b}{a}.$$

Führt man dieses in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man

$$\int x^{m+n}(ax^n+b)^{r-1}\,dx = \int \frac{x^m(ax^n+b)^r}{a}\,dx$$
$$-\int \frac{b}{a}\,x^m(ax^n+b)^{r-1}\,dx,$$

und wenn man nun die rechte Seite dieser Gleichung statt ihrer linken Seite in die Gleichung 3. einsetzt, so kommt

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+1} - \frac{nr}{m+1}\int x^m(ax^n+b)^r\,dx$$
$$+\frac{nrb}{m+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\,dx.$$

Werden in dieser Gleichung die gleichen Integrale vereinigt, so ergibt sich

$$\left(1+\frac{nr}{m+1}\right)\int x^m(ax^n+b)^r\,dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+1}$$
$$+\frac{nrb}{m+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\,dx,$$

und hieraus weiter

4. $$\int x^m(ax^n+b)^r\,dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+nr+1}$$
$$+\frac{nrb}{m+nr+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\,dx.$$

Hier bleibt der Exponent m unverändert, während der Exponent r verkleinert wird.

Setzt man in dieser Gleichung überall $r+1$ für r, was man thun kann, weil r eine ganz beliebige Zahl ist, so erhält man

$$\int x^m(ax^n+b)^{r+1}\,dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{m+nr+n+1}$$
$$+\frac{nb(r+1)}{m+nr+n+1}\int x^m(ax^n+b)^r\,dx,$$

und es ergibt sich hieraus ohne Weiteres die folgende Gleichung

5. $$\int x^m (ax^n + b)^r\, dx = -\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{nb(r+1)} + \frac{m+nr+n+1}{nb(r+1)} \int x^m (ax^n+b)^{r+1}\, dx.$$

Hier bleibt der Exponent m unverändert, während der Exponent r vergrössert wird.

Setzt man in der Gleichung 3. überall $m-n$ für m und $r+1$ für r, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$\int x^{m-n} (ax^n + b)^{r+1}\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{m-n+1} - \frac{an(r+1)}{m-n+1} \int x^m (ax^n+b)^r\, dx,$$

und hieraus ergibt sich die folgende Gleichung

6. $$\int x^m (ax^n + b)^r\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)} - \frac{m-n+1}{an(r+1)} \int x^{m-n} (ax^n+b)^{r+1}\, dx.$$

Hier wird der Exponent m verkleinert und der Exponent r vergrössert.

Es ist nun

$$x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1} = x^{m-n}(ax^n+b)(ax^n+b)^r$$
$$= ax^m(ax^n+b)^r + bx^{m-n}(ax^n+b)^r,$$

daher auch

$$\int x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1}dx = a\int x^m (ax^n+b)^r\, dx + b\int x^{m-n}(ax^n+b)^r dx.$$

Setzt man die rechte Seite dieser Gleichung für ihre linke Seite in die Gleichung 6. ein, so kommt

$$\int x^m (ax^n + b)^r\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)}$$
$$-\frac{m-n+1}{n(r+1)}\int x^m(ax^n+b)^r\, dx - \frac{b(m-n+1)}{an(r+1)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^r dx.$$

Werden in dieser Gleichung die gleichen Integrale vereinigt, so ergibt sich

$$\left(1+\frac{m-n+1}{n(r+1)}\right)\int x^m (ax^n+b)^r\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)} - \frac{b(m-n+1)}{an(r+1)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^r\, dx,$$

und hieraus weiter

$$7. \qquad \int x^m (ax^n + b)^r\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{a(m+nr+1)}$$
$$- \frac{b(m-n+1)}{a(m+nr+1)} \int x^{m-n} (ax^n + b)^r\, dx.$$

Hier wird der Exponent m verkleinert, während der Exponent r unverändert bleibt.

Setzt man in der letzten Gleichung $m+n$ für m, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$\int x^{m+n} (ax^n + b)^r\, dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{a(m+n+nr+1)}$$
$$- \frac{b(m+1)}{a(m+n+nr+1)} \int x^m (ax^n + b)^r\, dx,$$

und hieraus folgt sofort

$$8. \qquad \int x^m (ax^n + b)^r\, dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{b(m+1)}$$
$$- \frac{a(m+n+nr+1)}{b(m+1)} \int x^{m+n} (ax^n + b)^r\, dx.$$

Hier wird der Exponent m vergrössert, während der Exponent r unverändert bleibt.

Die hier entwickelten Reduktionsformeln sind nicht anwendbar, wenn

$$m + 1 = 0; \quad m + nr + 1 = 0; \quad r + 1 = 0.$$

In diesen Fällen lassen sich aber die Funktionen in der oben angegebenen Weise rational machen.

Das Integral

$$\int (ax + b)^m (\alpha x + \beta)^r\, dx$$

lässt sich auf die so eben betrachtete Form auf folgende Weise zurückführen.

Man setze

$$ax + b = z; \quad x = \frac{z-b}{a}; \quad dx = \frac{dz}{a},$$

so wird

$$9. \quad \int (ax+b)^m (\alpha x+\beta)^r\, dx = \int z^m \left(\frac{\alpha}{a} z + \beta - \frac{\alpha b}{a}\right)^r \frac{dz}{a}$$
$$= \frac{1}{a} \int z^m \left(\frac{\alpha}{a} z + \beta - \frac{\alpha b}{a}\right)^r dz.$$

Ebenso wird das Integral

$$\int (a + bx + cx^2)^r\, dx$$

auf folgende Weise auf dieselbe Form gebracht. Es ist

$$a + bx + cx^2 = c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right).$$

Setzen wir

$$2\frac{b}{2c}x \text{ für } \frac{b}{c}x$$

und fügen noch

$$\frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2}$$

hinzu, wodurch nichts geändert wird, so ist auch

$$a + bx + cx^2 = c\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2c}x + \frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c} - \frac{b^2}{4c^2}\right)$$
$$= c\left(\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c^2}\right).$$

Setzt man nun

$$x + \frac{b}{2c} = z; \quad x = z - \frac{b}{2c}; \quad dx = dz,$$

so wird

10. $$\int (a + bx + cx^2)^r\, dx = c^r \int \left(z^2 + \frac{4ac - b^2}{4c^2}\right)^r dz.$$

Das Integral

$$\int x^m (a + bx + cx^2)^r\, dx$$

lässt sich durch Anwendung des Verfahrens der theilweisen Integration auf einfachere Integrale derselben Art zurückführen.

Man setze zu diesem Zwecke

$$v = (a + bx + cx^2)^r; \quad dw = x^m\, dx,$$

so ist

$$dv = r\,(a + bx + cx^2)^{r-1}(b + 2cx)\, dx,$$

$$w = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Dieses gibt

$$\int x^m (a + bx + cx^2)^r\, dx = \frac{x^{m+1}(a + bx + cx^2)^r}{m+1}$$
$$- \frac{rb}{m+1}\int x^{m+1}(a + bx + cx^2)^{r-1}\, dx$$
$$- \frac{2cr}{m+1}\int x^{m+2}(a + bx + cx^2)^{r-1}\, dx,$$

oder wenn wir der Kürze wegen

$$a + bx + cx^2 = X$$

setzen,

11. $$\int x^m X^r dx = \frac{x^{m+1} X^r}{m+1} - \frac{rb}{m+1}\int x^{m+1} X^{r-1} dx - \frac{2cr}{m+1}\int x^{m+2} X^{r-1} dx.$$

Setzt man $m - 2$ für m und $r + 1$ für r, so erhält man

$$\int x^{m-2} X^{r+1} dx = \frac{x^{m-1} X^{r+1}}{m-1} - \frac{(r+1)b}{m-1}\int x^{m-1} X^r dx - \frac{2c(r+1)}{m-1}\int x^m X^r dx.$$

Es ist aber auch

$$\int x^{m-2} X^{r+1} dx = \int x^{m-2} X^r (a + bx + cx^2) dx$$

so wie

$$\int x^{m-2} X^r (a+bx+cx^2) dx = a\int x^{m-2} X^r dx + b\int x^{m-1} X^r dx + c\int x^m X^r dx.$$

Führt man die rechte Seite dieser Gleichung statt der linken in die vorletzte Gleichung ein und zieht die gleichen Integrale zusammen, so erhält man

12. $$\int x^m X^r dx = \frac{x^{m-1} X^{r+1}}{c(m+2r+1)} - \frac{b(m+r)}{c(m+2r+1)}\int x^{m-1} X^r dx - \frac{a(m-1)}{c(m+2r+1)}\int x^{m-2} X^r dx.$$

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so kommt man zuletzt auf die Integrale

$$\int x X^r dx \text{ und } \int X^r dx,$$

und ist m eine negative ganze Zahl, so kommt man zuletzt auf die Integrale

$$\int \frac{X^r}{x} dx \text{ und } \int X^r dx.$$

Das Integral

$$\int X^r dx$$

ist nach Formel 10. zu behandeln, und wenn man in der zuletzt aufgestellten Gleichung 12. $m = 1$ setzt, so erhält man

13. $$\int x X^r dx = \frac{X^{r+1}}{2c(r+1)} - \frac{b}{2c}\int X^r dx.$$

Es ist ferner

$$\int \frac{X^r}{x}\,dx = \int \frac{X^{r-1}(a+bx+cx^2)}{x}\,dx$$

$$= a\int \frac{X^{r-1}}{x}\,dx + b\int X^{r-1}\,dx + c\int x X^{r-1}\,dx,$$

und weil nach 13.

$$c\int x X^{r-1}\,dx = \frac{X^r}{2r} - \frac{b}{2}\int X^{r-1}\,dx,$$

so hat man

14. $$\int \frac{X^r}{x}\,dx = \frac{X^r}{2r} + a\int \frac{X^{r-1}}{x}\,dx + \frac{b}{2}\int X^{r-1}\,dx,$$

wodurch das Integral auf ein anderes zurückgeführt ist, in welchem der Exponent r um 1 vermindert ist.

Setzt man in 12. $m+2$ für m, so erhält man

$$\int x^{m+2} X^r\,dx = \frac{x^{m+1} X^{r+1}}{c(m+2r+3)} - \frac{b(m+r+2)}{c(m+2r+3)}\int x^{m+1} X^r\,dx$$

$$- \frac{a(m+1)}{c(m+2r+3)}\int x^m X^r\,dx,$$

und hieraus weiter

15. $$\int x^m X^r\,dx = \frac{x^{m+1} X^{r+1}}{a(m+1)} - \frac{b(m+r+2)}{a(m+1)}\int x^{m+1} X^r\,dx$$

$$- \frac{c(m+2r+3)}{a(m+1)}\int x^{m+2} X^r\,dx.$$

Setzt man in 14. $-r+1$ für r, so erhält man

$$\int \frac{dx}{x X^{r-1}} = -\frac{1}{2(r-1)X^{r-1}} + a\int \frac{dx}{x X^r} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{X^r},$$

und hieraus

16. $$\int \frac{dx}{x X^r} = \frac{1}{2a(r-1)X^{r-1}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X^r} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x X^{r-1}}.$$

§ 78.

Transcendente Funktionen.

I. Integrale mit Exponentialgrössen.

Versteht man unter

$$f(e^{ax})\,dx$$

eine Differentialfunktion, welche nur diese Exponentialgrösse enthält, so hat das Integral die allgemeine Form

$$\int f(e^{ax})\,dx.$$

Setzt man nun

$$e^{ax} = z\text{, so ist } x = \frac{l(z)}{a};\ dx = \frac{1}{a}\frac{dz}{z},$$

und daher

$$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(z)\,\frac{dz}{z}.$$

Hiernach ist

$$\int e^{ax}\,dx = \int z\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{dz}{z} = \frac{1}{a}\int dz$$

$$= \frac{1}{a}\,z + C,$$

und setzt man den Werth von z ein,

1. $$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C.$$

Auf das Integral

$$\int x^n\,e^{ax}\,dx$$

wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an und setzen

$$v = x^n; \qquad dw = e^{ax}\,dx,$$

so ist

$$dv = n\,x^{n-1}\,dx; \qquad w = \frac{1}{a}\,e^{ax}.$$

Dieses gibt

$$\int x^n\,e^{ax}\,dx = \frac{x^n\,e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\,e^{ax}\,dx;$$

in gleicher Weise ist

$$\frac{n}{a}\int x^{n-1}\,e^{ax}\,dx = \frac{n\,x^{n-1}\,e^{ax}}{a^2} - \frac{n\,(n-1)}{a^2}\int x^{n-2}\,e^{ax}\,dx$$

u. s. f.

Ist nun n eine positive ganze Zahl, so ist das letzte Integral

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C,$$

und folglich, wenn man die aufeinander folgenden Werthe einsetzt,

2. $$\int x^n\,e^{ax}\,dx$$

$$= \left\{\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{a^3} - \cdots (-1)^n\cdot\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^{n+1}}\right\}\,e^{ax} + C;$$

dasselbe Verfahren ist anzuwenden, wenn das Integral statt x^n eine Funktion von der Form $a + bx + cx^2 + \cdots$ enthält.

Setzt man in der obigen Reduktionsformel $-n+1$ für n, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$\int \frac{1}{x^{n-1}} e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a x^{n-1}} + \frac{n-1}{a} \int \frac{1}{x^n} e^{ax}\, dx,$$

und hieraus folgt weiter

$$3. \quad \int \frac{1}{x^n} e^{ax}\, dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{1}{x^{n-1}} e^{ax}\, dx.$$

Diese Formel gilt, wenn n eine ganze Zahl ist, für jeden Werth von n, mit Ausnahme des Werthes $n = 1$, und führt schliesslich auf das Integral

$$\int \frac{1}{x} e^{ax}\, dx.$$

S. § 79.

II. Logarithmische Integrale.

Versteht man unter

$$f(l(x))\, dx$$

eine Differentialfunktion, welche nur diesen Logarithmus enthält, so hat das Integral die allgemeine Form

$$\int f(l(x))\, dx.$$

Setzt man nun

$$l(x) = z; \quad x = e^z; \quad dx = e^z\, dz,$$

so wird durch diese Substitution

$$\int f(l(x))\, dx = \int f(z)\, e^z\, dz,$$

und hierauf ist wieder das Verfahren der theilweisen Integration anzuwenden.

Ist für ein positives ganzes n

$$f(l(x)) = (l(x))^n,$$

so hat man

$$\int (l(x))^n\, dx = \int z^n e^z\, dz.$$

Setzt man

$$v = z^n; \qquad dw = e^z\, dz,$$

so ist

$$dv = n z^{n-1}\, dz; \qquad w = e^z,$$

und man hat

$$\int z^n e^z\, dz = z^n e^z - n \int z^{n-1} e^z\, dz.$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so ist das letzte Integral

$$\int e^z\, dz = e^u,$$

und es wird

$$\int z^n e^z dz = \left\{ z^n - nz^{n-1} + n(n-1)z^{n-2} - \cdots (-1)^n \cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \right\} e^z + C,$$

und wenn man die Werthe von z und e^z einsetzt, so folgt

4. $$\int (l(x))^n \, dx =$$

$$\left\{ l(x)^n - n\, l(x)^{n-1} + n\,(n-1)\, l(x)^{n-2} - \cdots (-1)^n \cdot n\,(n-1)\cdots 2\cdot 1 \right\} x + C.$$

Für $n = 1$ erhält man hieraus

5. $$\int l(x)\, dx = x\, l(x) - x + C$$
$$= x\,(l(x) - 1) + C.$$

Setzt man in der Reduktionsformel $-n+1$ für n, so erhält man

$$\int \frac{1}{z^{n-1}}\, e^z\, dz = \frac{e^z}{z^{n-1}} + (n-1) \int \frac{1}{z^n}\, e^z\, dz,$$

und hieraus weiter

$$\int \frac{1}{z^n}\, e^z\, dz = -\frac{e^z}{(n-1)\, z^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{z^{n-1}}\, e^z\, dz.$$

Setzt man die Werthe von z und e^z ein, so erhält man

6. $$\int \frac{1}{l(x)^n}\, dx = -\frac{x}{(n-1)\, l(x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{l(x)^{n-1}}\, dx.$$

Diese Formel gilt, wenn n eine ganze Zahl ist, für jeden Werth von n, mit Ausnahme des Werthes $n = 1$, und führt zuletzt auf das Integral

$$\int \frac{1}{lx}\, dx.$$

S. § 79.

Wenden wir auf das Integral

$$\int x^m\, f(lx)\, dx$$

dieselben Substitutionen an und setzen

$$lx = z, \qquad x = e^z, \qquad dx = e^z\, dz,$$

so wird

$$\int x^m\, f(lx)\, dx = \int e^{(m+1)z}\, f(z)\, dz.$$

Hiernach ist

7. $$\int \frac{(lx)^m}{x}\, dx = \int \frac{z^m \cdot e^z}{e^z}\, dz = \int z^m\, dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C,$$

und wird für z sein Werth gesetzt,

$$\int \frac{(lx)^m}{x}\, dx = \frac{(lx)^{m+1}}{m+1} + C,$$

ferner

8. $$\int \frac{1}{x\,lx}\,dx = \int \frac{1}{e^z\,.\,z}\cdot e^z\,dz = \int \frac{dz}{z} = l\,z + C,$$

und wird für z sein Werth gesetzt,

$$\int \frac{(lx)^m}{x}\,dx = l\,(l\,x) + C,$$

ferner

9. $$\int \frac{1}{x\,(lx)^m}\,dx = \int \frac{e^z\,dz}{e^z\,z^m} = \int z^{-m}\,dz = \frac{z^{-m+1}}{-m+1} + C,$$

und wird für z sein Werth gesetzt,

$$\int \frac{1}{x\,(lx)^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)\,(lx)^{m-1}} + C.$$

Auf das Integral

$$\int x^m\,(l\,x)^n\,d\,x$$

kann man die vorstehenden Substitutionen ebenfalls anwenden. Man kann aber auch das Verfahren der theilweisen Integration in Anwendung bringen und setzen

$$v = (l\,x)^n; \qquad d\,w = x^m\,dx,$$

so ist

$$d\,v = n\,(l\,x)^{n-1}\,\frac{d\,x}{x}; \qquad w = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Dieses gibt

$$\int x^m\,(l\,x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,(l\,x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m\,(l\,x)^{n-1}\,dx,$$

und wenn man dieses Verfahren fortsetzt, so erhält man

10. $$\int x^m\,(l\,x)^n\,d\,x$$

$$= \left\{\frac{(lx)^n}{m+1} - \frac{n\,(lx)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n\,(n-1)\,(lx)^{n-2}}{(m+1)^3} - \cdots (-1)^n \cdot \frac{n\,(n-1)\ldots 2.1}{(m+1)^{n+1}}\right\} x^{m+1} + C.$$

Für $n = 1$ erhält man

11. $$\int x^m\,l\,x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(l\,x - \frac{1}{m+1}\right) + C.$$

Setzt man in der Reduktionsformel $-m$ für m, so erhält man

12. $$\int \frac{(l\,x)^n}{x^m}\,d\,x = -\frac{(lx)^n}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(lx)^{n-1}}{x^m}\,dx,$$

und es kann dieses Verfahren nun ebenfalls fortgesetzt werden. Für $n = 1$ folgt hieraus

13. $$\int \frac{lx}{x^m}\,dx = -\frac{lx}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2\,x^{m-1}} + C$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}}\left(l\,x + \frac{1}{m-1}\right) + C.$$

III. Goniometrische Integrale.

Als Fundamentalformeln hat man

1. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

2. $$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

3. $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C.$$

4. $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + C.$$

Es ist

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x},$$

und weil

$$d \cos x = -\sin x\, dx,$$

so ist

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -l(\cos x) + C,$$

daher

5. $$\int \tan x\, dx = -l(\cos x) + C.$$

Ebenso ist

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x},$$

und weil

$$d \sin x = \cos x\, dx,$$

so ist

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l(\sin x) + C,$$

daher

6. $$\int \cot x\, dx = l(\sin x) + C.$$

Das Integral

$$\int \sin ax\, dx$$

lässt sich leicht auf folgende Weise ermitteln. Man setze $ax = z$, so ist $\sin ax = \sin z$, $dx = \frac{1}{a}\, dz$, daher

$$\int \sin ax\, dx = \frac{1}{a} \int \sin z\, dz = -\frac{1}{a} \cos z + C,$$

und wenn man den Werth von z wieder einsetzt,

7. $$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C;$$

auf gleiche Weise ist

8. $$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C.$$

Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

findet sich auf folgende Weise. Wenn man den Nenner mit $\cos x$ multiplicirt und dividirt, so wird

9. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = \int \frac{d \tan x}{\tan x} = l(\tan x) + C.$$

Das Integral

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

lässt sich wie folgt bestimmen. Es ist

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

daher

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}.$$

Setzt man nun $\frac{x}{2} = z$, so ist $dx = 2dz$, und es wird

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dz}{\sin z \cos z} = l(\tan z) + C,$$

und setzt man für z seinen Werth, so ist

10. $$\int \frac{dx}{\sin x} = l\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C.$$

Das Integral

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

ergiebt sich wie folgt. Setzt man

$$x = \frac{\pi}{2} - z, \text{ so ist } \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$$

$$dx = -dz, \text{ daher}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dz}{\sin z} = -l\left(\tan \frac{z}{2}\right) + C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

11. $$\int \frac{dx}{\cos x} = -l\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Auf das Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

wo m und n beliebige positive oder negative Zahlen sind, wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an, indem wir setzen

$$v = \sin^{m-1} x; \quad dw = \cos^n x \sin x \, dx,$$

es ist dann

$$dv = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx,$$

$$w = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

Hierdurch erhalten wir nun

12. $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$
$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx.$$

Durch diese Formel wird der Exponent vom Sinus verkleinert, der Exponent vom Cosinus vergrössert.

Es ist ferner

$$\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x \cos^2 x,$$

und weil

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

so ist auch

$$\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x.$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung für ihre linke Seite in die Gleichung 12. ein, so erhalten wir

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1}$$
$$+ \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx - \frac{m-1}{n+1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

und wenn wir die gleichen Integrale zusammenziehen,

13. $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$
$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx.$$

Durch diese Formel wird der Exponent des Sinus verkleinert, während der Exponent des Cosinus unverändert bleibt.

Setzt man in der Gleichung 13. $m+2$ für m, so ergibt sich daraus

$$\int \sin^{m+2}x \cos^n x\, dx$$
$$= -\frac{\sin^{m+1}x \cos^{n+1}x}{m+n+2} + \frac{m+1}{m+n+2}\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

und hieraus weiter

14. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$
$$= \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n+1}x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2}x \cos^n x\, dx.$$

Durch diese Formel wird der Exponent des Sinus vergrössert, während der Exponent des Cosinus unverändert bleibt.

Setzt man in der ursprünglichen Formel

$$v = \cos^{n-1}x; \qquad dw = \sin^m x \cos x\, dx,$$

so ist

$$dv = -(n-1) \cos^{n-2}x \sin x\, dx,$$
$$w = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1}.$$

Dieses gibt nun

15. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$
$$= \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2}x \cos^{n-2}x\, dx.$$

Durch diese Formel wird der Exponent des Sinus vergrössert, der Exponent des Cosinus verkleinert.

Es ist nun

$$\sin^{m+2}x \cos^{n-2}x = \sin^m x \sin^2 x \cos^{n-2}x,$$

und weil

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

so ist auch

$$\sin^{m+2}x \cos^{n-2}x = \sin^m x \cos^{n-2}x - \sin^m x \cos^n x.$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung für ihre linke Seite in die Gleichung 15. ein, so erhalten wir

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n-1}x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^{n-2}x\, dx - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

und wenn wir die gleichen Integrale zusammenziehen,

16. $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$
$$= \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2}x\, dx.$$

Durch diese Formel wird der Exponent des Cosinus verkleinert, während der Exponent des Sinus unverändert bleibt.

Setzt man in der Gleichung 16. $n+2$ für n, so ergibt sich daraus

$$\int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{n+1}{m+n+2} \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

und hieraus weiter

17.
$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx.$$

Durch diese Formel wird der Exponent des Cosinus vergrössert, während der Exponent des Sinus unverändert bleibt.

Wenn m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, so gelangt man durch die vorstehenden Formeln zuletzt zu folgenden Integralen

$$\int dx; \quad \int \sin x\, dx; \quad \int \cos x\, dx; \quad \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx;$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx; \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}; \quad \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

welche sämmtlich früher angegeben worden sind.

Als besondere Fälle sind noch die folgenden zu bemerken.

Setzt man in der Formel 13. $n = 0$, so erhält man

18. $$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\, dx.$$

Setzt man in Formel 16. $m = 0$, so erhält man

19. $$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Setzt man in Formel 14. $n = 0$, und $-m$ für m, so erhält man

20. $$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}.$$

Setzt man in Formel 17. $m = 0$, und $-n$ für n, so erhält man

21. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Setzt man in Formel 12. $-m$ für n, so erhält man

22. $$\int \tan^m x\, dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\, dx.$$

Setzt man endlich in Formel 15. $-n$ für m, so erhält man

23. $$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx.$$

Um das Integral

$$\int x^m \sin bx\,dx$$

abzuleiten, wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an und setzen

$$v = x^m; \qquad dw = \sin bx\,dx,$$

dann ist

$$dv = m x^{m-1}\,dx; \quad w = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

und daher

24. $$\int x^m \sin bx\,dx = -\frac{x^m \cos bx}{b} + \frac{m}{b}\int x^{m-1}\cos bx\,dx.$$

Für $m = 1$ und $b = 1$ folgt hieraus

25. $$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Ebenso behandeln wir das Integral

$$\int x^m \cos bx\,dx.$$

Wir setzen

$$v = x^m; \qquad dw = \cos bx\,dx,$$

dann ist

$$dv = m x^{m-1}\,dx; \quad w = \frac{1}{b}\sin bx,$$

daher

26. $$\int x^m \cos bx\,dx = \frac{x^m \sin bx}{b} - \frac{m}{b}\int x^{m-1}\sin bx\,dx.$$

Für $m = 1$ und $b = 1$ folgt hieraus

27. $$\int x \cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Setzen wir in den Gleichungen 24. und 26. $-m+1$ für m, so folgt aus Gleichung 24.

28. $$\int \frac{\cos bx}{x^m}\,dx = -\frac{\cos bx}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{b}{m-1}\int \frac{\sin bx}{x^{m-1}}\,dx$$

und aus Gleichung 26.

29. $$\int \frac{\sin bx}{x^m}\,dx = -\frac{\sin bx}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{b}{m-1}\int \frac{\cos bx}{x^{m-1}}\,dx.$$

Die Formeln 24, 26, 28 und 29 führen zuletzt auf folgende Integrale

$$\int \sin bx\,dx; \quad \int \cos bx\,dx; \quad \int \frac{\sin bx}{x}\,dx; \quad \int \frac{\cos bx}{x}\,dx.$$

Die beiden ersten ergeben sich aus Formel 7. und 8. und wegen der beiden letzten, s. § 79.

Auf das Integral

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx$$

wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an und setzen

$$v = e^{ax}; \qquad dw = \sin bx\, dx,$$

dann ist

$$dv = a e^{ax}\, dx; \qquad w = -\frac{1}{b} \cos bx,$$

daher

$$30. \quad \int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Ebenso das Integral

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Wir setzen

$$v = e^{ax}; \qquad dw = \cos bx\, dx,$$

so ist

$$dv = a e^{ax}\, dx; \qquad w = \frac{1}{b} \sin bx,$$

daher

$$31. \quad \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Setzt man nun in Gleichung 30. die rechte Seite der Gleichung 31., so erhält man

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a e^{ax} \sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

und wenn man die gleichen Integrale zusammenzieht,

$$32. \quad \int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{b e^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + \frac{a e^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

$$= \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Setzt man ferner in die Gleichung 31. die rechte Seite der Gleichung 30., so erhält man

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{a e^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx\, dx,$$

und wenn man die gleichen Integrale zusammenzieht,

$$33. \quad \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b e^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} + \frac{a e^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C$$

$$= \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Um das Integral

$$\int e^{ax} \sin^n x \, dx$$

zu ermitteln, setzen wir

$$v = \sin^n x; \qquad dw = e^{ax} \, dx,$$

dann ist

$$dv = n \sin^{n-1} x \cos x \, dx; \qquad w = \frac{e^{ax}}{a},$$

und daher

34. $$\int e^{ax} \sin^n x \, dx = \frac{e^{ax} \sin^n x}{a} - \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x \, dx.$$

Setzen wir nun weiter

$$v = \sin^{n-1} x \cos x; \qquad dw = e^{ax} \, dx,$$

so ist

$$\begin{aligned} dv &= [(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x] \, dx \\ &= [(n-1) \sin^{n-2} x \, (1 - \sin^2 x) - \sin^n x] \, dx \\ &= [(n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x] \, dx, \\ w &= \frac{e^{ax}}{a}, \end{aligned}$$

daher

35. $$\int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x}{a} - \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, dx + \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^n x \, dx.$$

Wenn wir daher die rechte Seite der Gleichung 35. für die linke Seite in die Gleichung 34. einsetzen, so erhalten wir

$$\int e^{ax} \sin^n x \, dx = \frac{e^{ax} \sin^n x}{a} - \frac{n e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x}{a^2}$$

$$+ \frac{n\,(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, dx - \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \sin^n x \, dx,$$

und wenn wir die gleichen Integrale zusammenziehen,

36. $$\int e^{ax} \sin^n x \, dx$$

$$= \frac{a e^{ax} \sin^n x}{a^2+n^2} - \frac{n e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x}{a^2+n^2} + \frac{n\,(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x \, (a \sin x - n \cos x)}{a^2 + n^2} + \frac{n\,(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, dx.$$

Das Integral

$$\int e^{ax} \cos^n x \, dx$$

wird in derselben Weise ermittelt. Wir setzen

$$v = \cos^n x; \qquad dw = e^{ax} \, dx,$$

dann ist

$$dv = -n \cos^{n-1} x \sin x \, dx; \; w = \frac{e^{ax}}{a}$$

und mithin

37. $$\int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{e^{ax} \cos^n x}{a} + \frac{n}{a} \int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x \, dx,$$

und wenn wir weiter setzen

$$v = \cos^{n-1} x \sin x; \; dw = e^{ax} dx,$$

so ist

$$\begin{aligned} dv &= [-(n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x + \cos^n x] \, dx \\ &= [-(n-1) \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) + \cos^n x] \, dx \\ &= [-(n-1) \cos^{n-2} x + n \cos^n x] \, dx \end{aligned}$$

$$w = \frac{e^{ax}}{a},$$

daher

38. $$\int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x}{a} + \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx - \frac{n}{a} \int e^{ax} \cos^n x \, dx.$$

Setzen wir nun die rechte Seite der Gleichung 38. für die linke Seite in die Gleichung 37. ein, so erhalten wir

$$\int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{e^{ax} \cos^n x}{a} + \frac{n e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x}{a^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx - \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \cos^n x \, dx,$$

und wenn wir die gleichen Integrale zusammenziehen,

39. $$\int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{a e^{ax} \cos^n x}{a^2 + n^2}$$

$$+ \frac{n e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, dx.$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so gehen hieraus zuletzt die Integrale

$$\int e^{ax} \sin x \, dx; \; \int e^{ax} \cos x \, dx; \; \int e^{ax} \, dx$$

hervor,

Setzt man aber in den Gleichungen 36. und 39. $n = 1$ so ist

40. $$\int e^{ax} \sin x\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin x - \cos x)}{a^2 + 1} + C.$$

41. $$\int e^{ax} \cos x\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1} + C.$$

Die Gleichungen 40. und 41. erhält man auch, wenn man in den Gleichungen 32. und 33. $b = 1$ setzt.

Setzt man in 36. $-n + 2$ für n, so erhält man

$$\int \frac{e^{ax}\, dx}{\sin^{n-2} x} = \frac{e^{ax}(a \sin x + (n-2) \cos x)}{\sin^{n-1} x\, (a^2 + (n-2)^2)}$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)}{a^2 + (n-2)^2} \int \frac{e^{ax}\, dx}{\sin^n x}$$

und hieraus

42. $$\int \frac{e^{ax}\, dx}{\sin^n x} = - \frac{e^{ax}(a \sin x + (n-2) \cos x)}{(n-1)(n-2) \sin^{n-1} x}$$
$$+ \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax}\, dx}{\sin^{n-2} x}.$$

Setzt man in 39. $-n + 2$ für n, so erhält man ebenso

$$\int \frac{e^{ax}\, dx}{\cos^{n-2} x} = \frac{e^{ax}(a \cos x - (n-2) \sin x)}{\cos^{n-1} x\, (a^2 + (n-2)^2)}$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)}{a^2 + (n-2)^2} \int \frac{e^{ax}\, dx}{\cos^n x}$$

und hieraus

43. $$\int \frac{e^{ax}\, dx}{\cos^n x} = - \frac{e^{ax}(a \cos x - (n-2) \sin x)}{(n-1)(n-2) \cos^{n-1} x}$$
$$+ \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax}\, dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Diese Formeln sind, wie leicht ersichtlich, für $n = 1$ und $n = 2$ nicht brauchbar.

Um die Integrale

$$\int e^{ax} \sin^n bx\, dx \text{ und } \int e^{ax} \cos^n bx\, dx$$

abzuleiten, setze man $bx = z$, also

$$x = \frac{z}{b},\ dx = \frac{dz}{b}, \text{ so wird}$$

44. $$\int e^{ax} \sin^n bx\, dx = \frac{1}{b} \int e^{\frac{a}{b} z} \sin^n z\, dz,$$

45. $$\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{1}{b}\int e^{\frac{a}{b}z}\cos^n z\,dz,$$

und es sind somit die Integrale auf die Formeln 36. und 39. zurückgeführt.

IV. Cyclometrische Integrale.

Um das Integral

$$\int \operatorname{arc}(\sin = x)\,dx$$

abzuleiten, setzen wir

$$\operatorname{arc}(\sin = x) = z, \text{ so ist } x = \sin z$$
$$dx = \cos z\,dz,$$

und es wird

$$\int \operatorname{arc}(\sin = x)\,dx = \int z\cos z\,dz.$$

Es ist aber nach Formel 27. in III,

$$\int z\cos z\,dz = z\sin z + \cos z + C.$$

Setzen wir nun für z und $\sin z$ ihre Werthe und berücksichtigen, dass

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-x^2},$$

so ist

1. $$\int \operatorname{arc}(\sin = x)\,dx = x\operatorname{arc}(\sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Um ferner das Integral

$$\int \operatorname{arc}(\cos = x)\,dx$$

abzuleiten, setzen wir

$$\operatorname{arc}(\cos = x) = z, \text{ so ist } x = \cos z$$
$$dx = -\sin z\,dz,$$

und es wird

$$\int \operatorname{arc}(\cos = x)\,dx = -\int z\sin z\,dz.$$

Es ist aber nach Formel 25. III,

$$-\int z\sin z\,dz = z\cos z - \sin z + C.$$

Setzen wir nun für z und $\cos z$ ihre Werthe und berücksichtigen, dass

$$\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z} = \sqrt{1-x^2},$$

so ist

2. $$\int \operatorname{arc}(\cos = x)\,dx = x\operatorname{arc}(\cos = x) - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Wenn wir auf das Integral

$$\int x^{m-1} \operatorname{arc} (\sin = x)\, dx$$

das Verfahren der theilweisen Integration anwenden, indem wir setzen

$$v = \operatorname{arc} (\sin = x);\ dw = x^{m-1} dx$$

so ist

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad w = \frac{x^m}{m}$$

und es wird

$$3.\quad \int x^{m-1} \operatorname{arc} (\sin = x)\, dx = \frac{x^m \operatorname{arc} (\sin = x)}{m} - \frac{1}{m} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$4.\quad \int x^{m-1} \operatorname{arc} (\cos = x)\, dx = \frac{x^m \operatorname{arc} (\cos = x)}{m} + \frac{1}{m} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ebenso erhält man

$$5.\quad \int x^{m-1} \operatorname{arc} (\tan = x)\, dx = \frac{x^m \operatorname{arc} (\tan = x)}{m} - \frac{1}{m} \int \frac{x^m dx}{1+x^2}.$$

und

$$6.\quad \int x^{m-1} \operatorname{arc} (\cot = x)\, dx = \frac{x^m \operatorname{arc} (\cot = x)}{m} + \frac{1}{m} \int \frac{x^m dx}{1+x^2}.$$

Setzt man in den Formeln 3, 4, 5, 6 überall $m = 1$ und berücksichtigt, dass

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

und

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} l (1+x^2) + C,$$

so folgt

$$7.\quad \int \operatorname{arc} (\sin = x)\, dx = x \operatorname{arc} (\sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$8.\quad \int \operatorname{arc} (\cos = x)\, dx = x \operatorname{arc} (\cos = x) - \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$9.\quad \int \operatorname{arc} (\tan = x)\, dx = x \operatorname{arc} (\tan = x) - \tfrac{1}{2} l (1+x^2) + C,$$

$$10.\quad \int \operatorname{arc} (\cot = x)\, dx = x \operatorname{arc} (\cot = x) + \tfrac{1}{2} l (1+x^2) + C.$$

§ 79.

Integration durch Reihen.

Wenn in dem Integrale

$$\int f(x)\, dx$$

sich $f(x)$ in eine convergente Reihe entwickeln lässt, so kann die Integration auch dadurch bewirkt werden, dass man diese Reihe bildet und die aufeinanderfolgenden Glieder integrirt. Ist daher

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

wo nun u_1, u_2, $u_3 \cdots$ sämmtlich Funktionen von x sind, so ist auch

$$\int f(x)\,dx = \int u_1\,dx + \int u_2\,dx + \int u_3\,dx + \cdots,$$

und wenn die erstere Reihe convergirt, so convergirt auch diese letztere.

1. $$\int \frac{dx}{1+x}.$$

Es ist

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots,$$

daher

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int dx - \int x\,dx + \int x^2\,dx - \int x^3\,dx + \cdots$$

$$= C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Es ist aber

$$\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) + C,$$

daher auch

$$l(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Für $x = 0$ wird die linke Seite dieser Gleichung Null, folglich muss die rechte Seite derselben auch Null, also $C = 0$ sein. Demnach ist

$$\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,4} \cdot \frac{x^6}{6} + \cdots,$$

daher auch

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dx + \tfrac{1}{2}\int x^2\,dx + \frac{1.3}{1.2.4}\int x^4 dx + \frac{1.3.5}{1.2.4.6}\int x^6\,dx + \cdots$$

und hieraus

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Es ist aber

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\ (\sin = x)$$

und folglich, indem die Constante Null ist,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\ (\sin = x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{1.2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{1.2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Setzt man $x = 1$ so ist

$$\text{arc}\ (\sin = 1) = \frac{\pi}{2},$$

daher

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

3. $$\int\frac{dx}{1+x^2}.$$

Es ist

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

daher

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int x^2\,dx + \int x^4\,dx - \int x^6\,dx + \cdots$$

und folglich

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Es ist aber

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\ (\tan = x),$$

und mithin, weil die Constante Null ist,

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\ (\tan = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Diese Reihe convergirt nur, so lange x kleiner als 1 oder höchstens gleich 1 ist. Es lässt sich aber auch eine Reihe aufstellen, welche convergirt, wenn x grösser als 1 ist. Setzt man

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)},$$

so ist

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\cdots,$$

daher

$$\int\frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^4}+\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{x^8}+\cdots,$$

und dieses gibt

$$\operatorname{arc}(\tan=x)=C-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\cdots$$

Für $x=\infty$ werden sämmtliche Glieder der Reihe Null, und weil

$$\operatorname{arc}(\tan=\infty)=\frac{\pi}{2},$$

so ist $C=\frac{\pi}{2}$ und

$$\operatorname{arc}(\tan=x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\cdots$$

4. $$\int\frac{e^{ax}}{x}\,dx.$$

Es ist

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots,$$

daher auch

$$\frac{e^{ax}}{x}=\frac{1}{x}+a+\frac{a^2x}{1.2}+\frac{a^3x^2}{1.2.3}+\frac{a^4x^3}{1.2.3.4}+\cdots$$

und folglich

$$\int\frac{e^{ax}}{x}\,dx=\int\frac{dx}{x}+a\int dx+\frac{a^2}{1.2}\int x\,dx+\frac{a^3}{1.2.3}\int x^2\,dx+\cdots$$

so wie, wenn man die Integrationen auf der rechten Seite ausführt,

$$\int\frac{e^{ax}}{x}\,dx=C+l(x)+\frac{a}{1}x+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots$$

5. $$\int\frac{dx}{l(x)}.$$

Setzt man

$$l(x) = z, \text{ so ist } x = e^z; \quad dx = e^z\, dz,$$

daher

$$\int \frac{dx}{l(x)} = \int \frac{e^z}{z}\, dz.$$

Es ist aber nach 4.

$$\int \frac{e^z}{z}\, dz = C + l(z) + \frac{1}{1} z + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{z^3}{3} + \cdots$$

folglich, wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int \frac{dx}{l(x)} = C + l(lx) + \frac{1}{1} lx + \frac{1}{1.2} \frac{(lx)^2}{2} + \frac{1}{1.2.3} \frac{(lx)^3}{3} + \cdots$$

6.
$$\int \frac{\sin bx}{x}\, dx,$$

Es ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots,$$

daher auch

$$\sin bx = bx - \frac{b^3 x^3}{2.3} + \frac{b^5 x^5}{2.3.4.5} - \frac{b^7 x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots,$$

so wie

$$\frac{\sin bx}{x} = b - \frac{b^3 x^2}{2.3} + \frac{b^5 x^4}{2.3.4.5} - \frac{b^7 x^6}{2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

und

$$\int \frac{\sin bx}{x}\, dx = b \int dx - \frac{b^3}{2.3} \int x^2\, dx + \frac{b^5}{2.3.4.5} \int x^4\, dx - \cdots$$

Führt man auf der rechten Seite die Integrationen aus, so erhält man

$$\int \frac{\sin bx}{x}\, dx = bx - \frac{b^3}{2.3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{b^5}{2.3.4.5} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots + C.$$

7.
$$\int \frac{\cos bx}{x}\, dx.$$

Es ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$

daher auch

$$\cos bx = 1 - \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^4 x^4}{2.3.4} - \frac{b^6 x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$

so wie

$$\frac{\cos bx}{x} = \frac{1}{x} - \frac{b^2 x}{2} + \frac{b^4 x^3}{2.3.4} - \frac{b^6 x^5}{2.3.4.5.6} + \cdots$$

und

$$\int \frac{\cos bx}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{b^2}{2}\int x\,dx + \frac{b^4}{2\,.\,3\,.\,4}\int x^3\,dx - \cdots$$

Führt man auf der rechten Seite die Integrationen aus, so erhält man

$$\int \frac{\cos bx}{x}\,dx = l(x) - \frac{b^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{b^4}{2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{x^4}{4} - \cdots + C.$$

§ 80.

Das bestimmte Integral.

Wir haben bisher das Integral einer Differentialfunktion lediglich als diejenige Funktion betrachtet, aus welcher die Differentialfunktion durch Differentiation hervorgegangen ist oder doch als hervorgegangen angesehen werden konnte, und haben auch nur von diesem Gesichtspunkte aus die Integration vollzogen. Dabei haben wir dem Integrale, um es allgemein geltend zu machen, eine willkürliche Constante hinzugefügt.

Es ist aber bereits früher bemerkt worden, dass das Differential, rücksichtlich seiner Bedeutung, immer mit der differentiirten Funktion gleichartig ist, so dass, wenn die Funktion eine Linie, eine Fläche oder einen Körper darstellt, auch das Differential eine unendlich kleine Linie oder Fläche, oder einen unendlich kleinen Körper darstellt, dass also der Werth der Differentialfunktion gleichsam ein Element von dem ist, was der Werth ihres Integrals darstelllt.

Betrachtet man nun in diesem Sinne den Werth des Differentials als das Element des Werthes eines Integrals, so ist das Integral selbst eine Summe unendlich vieler solcher Elemente, also eine Summe einer unendlich grossen Anzahl von Werthen des Differentials. Hierbei hat man sich natürlich die Summirung von irgend einem Werthe der unabhängigen Veränderlichen x aus bis zu irgend einem andern Werthe dieser Veränderlichen ausgeführt zu denken und nennt dann das Integral ein Integral zwischen bestimmten Grenzen oder ein bestimmtes Integral.

Denn so lange nur ganz allgemein

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

ist das Integral unbestimmt und entspricht entweder lediglich der Bedingung dass

$$d\,(F(x) + C) = f(x)\,dx$$

oder stellt die Summe der unendlich vielen Werthe dieses Differentials dar, welche zwischen zwei unbestimmten Werthen von x liegen, indem sowol derjenige Werth von x unbestimmt ist, von welchem aus die Summirung beginnen soll, als auch derjenige Werth von x, mit welchem sie enden soll. Wird das Integral zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ genommen, so schreibt man so

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

wobei a als die untere Grenze, also als diejenige bezeichnet wird, von wo aus die Summirung beginnen soll, b aber als die obere Grenze, also als diejenige bezeichnet wird, mit welcher die Summirung enden soll.

Bei einer jeden solchen Summirung, muss aber als unerlässliche Bedingung vorausgesetzt werden, dass die Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und stetig bleibt.

Die Ermittelung bestimmter Integrale erfolgt nach denselben Methoden, nach welchen die unbestimmten Integrale ermittelt werden. Ist allgemein

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

so stellt $F(x) + C$ die Summe einer unendlich grossen Anzahl von Werthen des Differentials $f(x)\,dx$ dar, genommen von irgend einem noch nicht bestimmten Werthe von x bis zu demjenigen Werthe von x, welcher unter dem Funktionszeichen steht. Setzen wir daher $x = a$, so ist

$$F(a) + C$$

die Summe der Werthe des Differentials, genommen von irgend einem noch nicht bestimmten Werthe von x bis zu dem Werthe von $x = a$; und setzen wir $x = b$ so ist

$$F(b) + C$$

die Summe der Werthe des Differentials, genommen von irgend einem noch nicht bestimmten Werthe von x bis zu dem Werthe von $x = b$, wo in beiden Fällen C dieselbe Bedeutung hat. Bilden wir nun die Differenz beider Ausdrücke, so erhalten wir

$$F(b) - F(a),$$

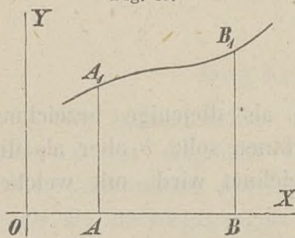
und diese Differenz stellt die Summe der Werthe des Differentials $f(x)\,dx$ dar, genommen von $x = a$ bis $x = b$, also derjenigen

Werthe des Differentials, welche zwischen diesen beiden Werthen der unabhängigen Veränderlichen liegen. Demnach ist also

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

und man findet das bestimmte Integral, wenn man in dem unbestimmten Integrale die beiden Integrationsgrenzen der unabhängigen Veränderlichen nach einander einsetzt und die beiden so erhaltenen Werthe des Integrals subtrahirt.

Fig. 85.



Es ergibt sich hieraus noch, dass bei der Integration zwischen Grenzen eine Constante nicht hinzuzufügen ist.

Das bestimmte Integral lässt sich leicht geometrisch darstellen, wenn man — das Integral bedeute sonst auch was es wolle, — die unabhängige Veränderliche als Abscisse und die Funktion als Ordinate eines rechtwinkeligen Coordinatensystems ansieht. Sind, Figur 85, $OA = a$, $OB = b$ Werthe von x, ist $AA_1 = F(a)$, $BB_1 = F(b)$, und durchläuft die unabhängige Veränderliche x das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ stetig, so durchläuft auch die Funktion alle diejenigen Werthe stetig, welche zwichen den Werthen $F(a)$ und $F(b)$ liegen, indem sie von dem einen zum andern stetig übergeht; und es stellt mithin die Differenz $F(b) - F(a)$ die Summe aller derjenigen unendlich kleinen Veränderungen dar, welche die Funktion erleidet, während x das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ stetig durchläuft. Eine jede solche unendlich kleine Veränderung ist aber der Werth eines Differentials, und folglich ist das Integral die Summe dieser unendlich grossen Anzahl von Werthen des Differentials zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$.

Für die bestimmten Integrale ergeben sich leicht folgende Sätze: Es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

und ebenso

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$
$$= -\,(F(b) - F(a)),$$

daher ist auch

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

d. h. wenn man die Grenzen eines bestimmten Integrals miteinander vertauscht, so ist das Integral, welches man hierdurch erhält, dem ersteren gleich und entgegengesetzt.

Wenn das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ in die kleineren Intervalle von $x = a$ bis $x = c$, von $x = c$ bis $x = e$ und von $x = e$ bis $x = b$ zerfällt, so ist auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx;$$

denn es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^e f(x)\,dx = F(e) - F(c),$$

$$\int_e^b f(x)\,dx = F(b) - F(e).$$

Addirt man die letzten drei Gleichungen, so erhält man

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt.

Führt man in ein bestimmtes Integral eine neue Veränderliche ein, so hat man auch die Grenzen demgemäss zu ändern, wie sie sich aus den bestimmenden Gleichungen ergeben.

XIV. Abschnitt.

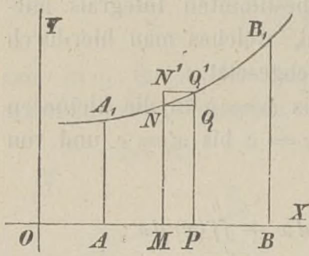
Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

§ 81.

Quadratur der Kurven.

Unter der Fläche einer ebenen Kurve versteht man diejenige Fläche, welche von der Kurve, der XAxe und zwei Ordinaten begrenzt wird. Die Bestimmung solcher Flächen wird die Quadratur der Kurven genannt. Um eine solche Fläche zu bestimmen, hat man eine Formel für das Differential der Fläche oder das Flächenelement aufzustellen und diese zu integriren.

Fig 86.



Zu diesem Zwecke sei

$$y = f(x),$$

die Gleichung einer Kurve, Figur 86; es sei $OM = x$ eine beliebige Abscisse und $MN = y$ die zugehörige Ordinate. Wächst nun x um $MP = \Delta x$, so ist $PQ' = y + \Delta y$ die neue Ordinate. Macht man NQ und $N'Q'$ parallel zur XAxe, so entstehen die beiden Rechtecke $MPQN$ und $MPQ'N'$, und zwar ist das erstere kleiner, das letztere grösser als das Flächenstück $MPQ'N$. Es ist aber

$$MPQN = y \,.\, \Delta x,$$

$$MPQ'N' = (y + \Delta y)\, \Delta x,$$

und wenn man die Fläche, um deren Bestimmung es sich handelt, und welche eine Funktion von x ist, mit u bezeichnet, so ist das Flächenstück

$$MPQ'N = \Delta u.$$

Nun ist

$$\Delta u > y \,.\, \Delta x \text{ und } \Delta u < (y + \Delta y)\, \Delta x,$$

oder

$$y + \Delta y > \frac{\Delta u}{\Delta x} > y.$$

Es liegt also der Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ zwischen den Grenzen y und $y + \Delta y$ eingeschlossen, was auch der Fall bleibt, wenn Δx abnimmt; denn mit Δx nehmen Δy und Δu ab, während y selbst ungeändert bleibt. Geht nun Δx in dx über, so wird auch Δy zu dy und Δu zu du, und weil dy gegen y verschwindet, so fallen die Grenzen, zwischen denen $\frac{du}{dx}$ liegt, zusammen. Es ist mithin

$$\frac{du}{dx} = y$$

und folglich das Flächenelement

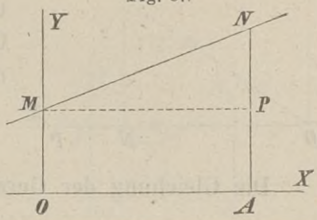
$$du = y\,dx$$

so wie die Fläche selbst

$$u = \int y\,dx$$

1. Die gerade Linie. Der Flächeninhalt des Trapezes $OANM$, Figur 87, lässt sich auf folgende Weise bestimmen. Die Gleichung der Geraden MN sei

Fig. 87.



$$y = ax + b,$$

so ist die Fläche

$$\begin{aligned} u &= \int (ax + b)\,dx \\ &= \int ax\,dx + \int b\,dx \\ &= \frac{ax^2}{2} + bx. \end{aligned}$$

Ist nun $OA = h$, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = h$ zu nehmen. Für $x = 0$ wird $u = 0$ also die Fläche Null, und für $x = h$ wird

$$\begin{aligned} u &= \frac{ah^2}{2} + bh \\ &= h\left(\frac{ah}{2} + b\right) \end{aligned}$$

Es ist nun $OM = b$, $AN = b + ah$, daher nach der Elementargeometrie der Flächeninhalt des Trapezes

$$\frac{OM + AN}{2}\,OA,$$

das ist aber, wenn man die Werthe setzt,

$$\frac{b + b + ah}{2}\,h = h\left(\frac{ah}{2} + b\right).$$

Geht die Gerade MN durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die von ihr gebildete Fläche ein rechtwinkeliges Dreieck. In diesem Falle ist $b = 0$, und die Integration ergibt

$$u = \frac{ah^2}{2} = h \cdot \frac{ah}{2}.$$

Um die Fläche des Dreiecks OMP, Figur 88, zu bestimmen, sei

$$MN = h,\ OP = a\ ON = \alpha\ .$$

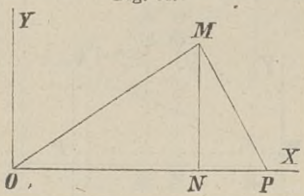
und folglich $PN = a - \alpha$.

Die Gleichung der Geraden OM ist dann

$$y = \frac{h}{\alpha}\, x,$$

daher die Fläche des Dreiecks OMN

Fig. 88.



$$u_1 = \int \frac{h}{\alpha} \cdot x\, dx = \frac{h}{\alpha} \cdot \frac{x^2}{2},$$

und wird das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = \alpha$ genommen, so ist

$$u_1 = \frac{h\alpha}{2}.$$

Die Gleichung der Geraden PM ist

$$y = -\frac{h}{a - \alpha}(x - a)$$

$$= \frac{h}{\alpha - a}(x - a),$$

daher die Fläche des Dreiecks PMN

$$u_2 = \int \frac{h}{\alpha - a}(x - a)\, dx$$

$$= \frac{h}{\alpha - a}\left(\frac{x^2}{2} - a x\right),$$

und wird das Integral zwischen den Grenzen von $x = \alpha$ bis $x = a$ genommen, so ist

$$u_2 = \frac{h}{\alpha - a}\left(\frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{\alpha^2}{2} + a\alpha\right)$$

$$= \frac{h}{\alpha - a}\left(\frac{a^2 - \alpha^2}{2} - a(a - \alpha)\right)$$

$$= \frac{h}{\alpha - a}(a - \alpha)\left(\frac{a + \alpha}{2} - a\right)$$

$$= \frac{h\,(a - \alpha)}{2}.$$

Die Fläche des Dreiecks OMP ist daher

$$u = u_1 + u_2$$

$$= \frac{h\alpha}{2} + \frac{h\,(a - \alpha)}{2}$$

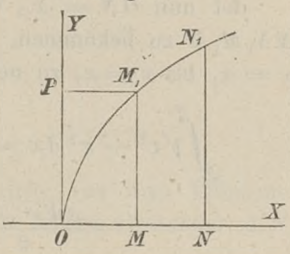
$$= \frac{ha}{2}.$$

2. Die Parabel. Die Fläche, welche von dem Parabelbogen $M_1 N_1$ der Abscisse MN und den Ordinaten MM_1 und NN_1 eingeschlossen wird, Figur 89, lässt sich auf folgende Weise bestimmen. Die Gleichung der Parabel ist

$$y = \sqrt{2px},$$

mithin ist die Fläche

Fig. 89.



$$\begin{aligned} u &= \int \sqrt{2px} \, . \, dx \\ &= \sqrt{2p} \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \tfrac{2}{3} \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{3}{2}} \\ &= \tfrac{2}{3} x \, . \, \sqrt{2px} = \tfrac{2}{3} xy. \end{aligned}$$

Ist nun $OM = x_1$, $ON = x_2$ so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt für die Fläche MNN_1M_1

$$u = \tfrac{2}{3} \left(x_2 \sqrt{2px_2} - x_1 \sqrt{2px_1} \right).$$

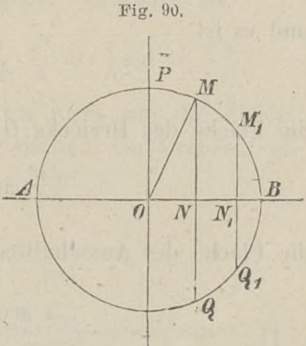
Will man dagegen die Fläche OMM_1 so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$u = \tfrac{2}{3} x_1 \sqrt{2px_1} = \tfrac{2}{3} x_1 y_1.$$

Es ist also die Fläche OMM_1 $\frac{2}{3}$ des Rechtecks OMM_1P und mithin die Fläche OM_1P gleich $\frac{1}{3}$ des Rechtecks OMM_1P.

3. Der Kreis. Die Fläche, welche von dem Kreisbogen MM_1, der Abscisse NN_1 und den Ordinaten MN und M_1N_1 begrenzt wird, Figur 90, lässt sich auf folgende Weise bestimmen.

Fig. 90.



Die Gleichung des Kreises ist

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

und daher die Fläche

$$u = \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$$

Es ist nun nach § 77 Formel 4.

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{x \sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

und weil weiter

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right),$$

so ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right).$$

Ist nun $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, so hat man um die Fläche NN_1M_1M zu bekommen, das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x_2\sqrt{r^2 - x_2^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_2}{r}\right)$$

$$- \frac{x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}}{2} - \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_1}{r}\right).$$

Der Flächeninhalt des Streifens MM_1Q_1Q ist demnach

$$x_2\sqrt{r^2 - x_2^2} + r^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_2}{r}\right) - x_1\sqrt{r^2 - x_1^2} - r^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_1}{r}\right).$$

Um die Fläche $ONMP$ zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int_0^{x_1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_1}{r}\right),$$

und es ist

$$\frac{x_1\sqrt{r^2 - x_1^2}}{2},$$

die Fläche des Dreiecks OMN und

$$\frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_1}{r}\right),$$

die Fläche des Ausschnittes OMP; denn es ist

$$r \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x_1}{r}\right),$$

der Bogen PM.

Um endlich die Fläche des Viertelkreises OBP zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{r^2}{2} \text{ arc } (\sin = 1).$$

Es ist aber

$$\text{arc } (\sin = 1) = \frac{\pi}{2},$$

daher die Fläche des Viertelkreises,

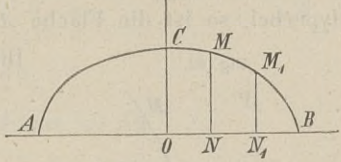
$$\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

und folglich die ganze Kreisfläche

$$4 \cdot \frac{r^2 \pi}{4} = r^2 \pi.$$

4. Die Ellipse. Die Fläche, welche von dem Ellipsenbogen MM_1 der Abscisse NN_1 und den beiden Ordinaten MN und $M_1 N_1$ begrenzt wird, Figur 91, ist auf folgende Weise zu bestimmen.

Fig. 91.



Die Gleichung der Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und daher die Fläche

$$u = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Dieses Integral ist wie das vorhergegangene. Demnach ist

$$\frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \text{ arc } \left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

Ist nun $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$ so hat man, um die Fläche MNN_1M_1 zu bekommen, das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{b}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{2a} \left(x_2 \sqrt{a^2 - x_2{}^2} - x_1 \sqrt{a^2 - x_1{}^2} + a^2 \text{arc}\left(\sin = \frac{x_2}{a}\right) - a^2 \text{arc}\left(\sin = \frac{x_1}{a}\right)\right).$$

Um die Fläche $ONMC$ zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{b}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left(x_1\sqrt{a^2-x_1{}^2}+a^2\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x_1}{a}\right)\right).$$

Um die Fläche OBC, also den vierten Theil der Ellipsenfläche, zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{b}{a}\int_0^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\cdot a^2\operatorname{arc}(\sin=1)$$

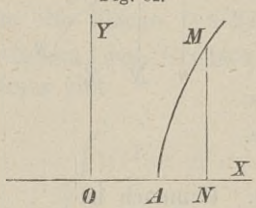
$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Demnach ist die ganze Ellipsenfläche

$$4\cdot\frac{ab\pi}{4} = ab\pi.$$

5. Die Hyperbel. Ist AM, Figur 92, der Bogen einer Hyperbel, so ist die Fläche AMN wie folgt zu berechnen.

Fig. 92.



Die Gleichung der Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

und folglich ist die Fläche

$$u = \frac{b}{a}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

Es ist aber

$$\frac{b}{a}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\,\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

und weiter

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = l\left(2x+2\sqrt{x^2-a^2}\right),$$

demnach ist

$$\frac{b}{a}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}\,\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{ab}{2}\,l\left(2x+2\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

Setzt man nun $ON = x_1$, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

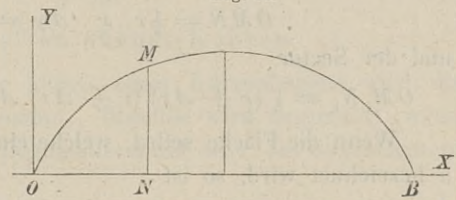
$$\frac{b}{a}\int_a^{x_1}\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{bx_1\sqrt{x_1^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}l\left[2\left(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}\right)\right]+\frac{ab}{2}l(2a)$$

$$=\frac{bx_1\sqrt{x_1^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}\left[l(2)+l(x_1+\sqrt{x_1^2-a^2})-l(2)-l(a)\right]$$

$$=\frac{bx_1\sqrt{x_1^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}}{a}\right).$$

6. **Die Cycloide.** Ist OM, Figur 93, ein Cycloidenbogen, so lässt sich die Fläche OMN wie folgt bestimmen.

Fig. 93.



Die Gleichungen der Cycloide sind

$$x=r\,(\varphi-\sin\varphi);$$
$$y=r\,(1-\cos\varphi),$$

daher

$$dx=r\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

und mithin die Fläche

$$u=\int r^2\,(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$
$$=r^2\int(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$
$$=r^2\left(\varphi-2\sin\varphi+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}+\tfrac{1}{2}\varphi\right)$$
$$=r^2\,(\tfrac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\tfrac{1}{4}\sin 2\varphi).$$

Setzt man $ON=x_1$, so ist

$$x_1=r\,(\varphi_1-\sin\varphi_1),$$

und das Integral ist zwischen den Grenzen von $\varphi=0$ bis $\varphi=\varphi_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r^2\int_0^{\varphi_1}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=r^2(\tfrac{3}{2}\varphi_1-2\sin\varphi_1+\tfrac{1}{4}\sin 2\varphi_1).$$

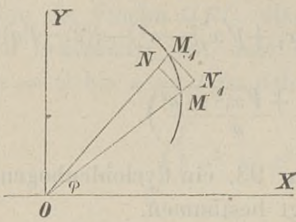
Um die Fläche der ganzen Cycloide zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=r^3\,.\,\tfrac{3}{2}\,.\,2\pi=3r^2\pi,$$

und es ist mithin diese Fläche dreimal so gross wie die Fläche des erzeugenden Kreises.

7. Das Flächenelement für Polarcoordinaten. Die Gleichung der Kurve, Figur 94, sei

Fig. 94.



$$r = f(\varphi).$$

MOX sei ein beliebiger Winkel φ und MO der zugehörige Leitstrahl r. Wächst nun φ um den Winkel $MOM_1 = \varDelta\varphi$, so ist $M_1O = r + \varDelta r$ der neue Leitstrahl. Beschreibt man mit OM und OM_1 die Bogen MN und M_1N_1, so ist der Sector

$$OMN = \tfrac{1}{2}r \,.\, r \,.\, \varDelta\varphi = \tfrac{1}{2}r^2 \,.\, \varDelta\varphi$$

und der Sector

$$OM_1N_1 = \tfrac{1}{2}(r + \varDelta r)(r + \varDelta r)\varDelta\varphi = \tfrac{1}{2}(r + \varDelta r)^2 \varDelta\varphi.$$

Wenn die Fläche selbst, welche eine Funktion von φ ist, mit u bezeichnet wird, so ist

$$MOM_1 = \varDelta u,$$

und es ist nun

$$\varDelta u > \tfrac{1}{2}r^2 \varDelta\varphi \text{ und } \varDelta u < \tfrac{1}{2}(r + \varDelta r)^2 \varDelta\varphi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(r + \varDelta r)^2 > \frac{\varDelta u}{\varDelta\varphi} > \tfrac{1}{2}r^2.$$

Es liegt also der Werth des Verhältnisses $\frac{\varDelta u}{\varDelta\varphi}$ zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}r^2$ und $\frac{1}{2}(r + \varDelta r)^2$ eingeschlossen, was auch der Fall bleibt, wenn $\varDelta\varphi$ abnimmt und in $d\varphi$ übergeht. Geht aber $\varDelta\varphi$ in $d\varphi$ über, so wird auch $\varDelta r$ zu dr und $\varDelta u$ zu du, und weil dr gegen r verschwindet, so fallen die Grenzen, zwischen denen $\frac{du}{d\varphi}$ liegt, zusammen. Es ist mithin

$$\frac{du}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}r^2$$

und folglich das Flächenelement

$$du = \tfrac{1}{2}r^2 \,.\, d\varphi$$

so wie die Fläche selbst

$$u = \int \tfrac{1}{2}r^2 \, d\varphi.$$

8. Die Archimedische Spirale. Die Gleichung dieser Linie ist

$$r = a\varphi,$$

daher ist die Fläche

$$u = \int \tfrac{1}{2} a^2 \varphi^2 \,.\, d\varphi = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\varphi^3}{3}$$

$$= \tfrac{1}{6} r^2 \varphi.$$

Für eine volle Umdrehung hat man das Integral zu nehmen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$. Dieses gibt

$$\tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi = \tfrac{1}{3} r^2 \pi.$$

§ 82.

Rectification ebener Kurven.

Die Bestimmung der Länge eines Kurvenbogens wird die Rectification desselben genannt. Dieselbe wird ausgeführt, wenn man die Formel für das Bogendifferential oder das Bogenelement integrirt.

Für das Bogenelement haben wir die Gleichung

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx,$$

daher ist der Bogen selbst

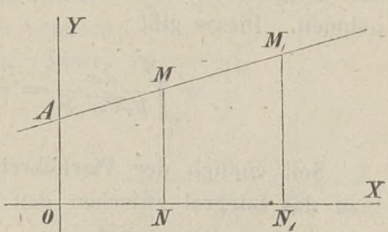
$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

1. **Die gerade Linie.** Die Gleichung der geraden Linie sei

$$y = ax + b,$$

so ist

Fig. 95.



$$\frac{dy}{dx} = a$$

und folglich die Länge

$$s = \int \sqrt{1 + a^2} \,.\, dx = \sqrt{1 + a^2} \,.\, x.$$

Soll nun die Länge der Strecke MM_1, Figur 95, bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

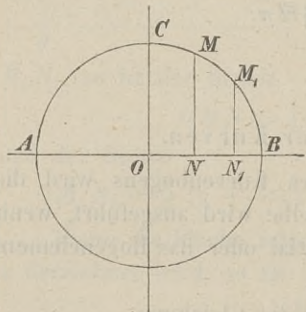
$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + a^2} \, dx = \sqrt{1 + a^2} \, (x_2 - x_1).$$

Soll dagegen die Länge der Strecke AM bestimmt werden, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1 + a^2}\, dx = \sqrt{1 + a^2} \,.\, x_1.$$

2. Der Kreis. Die Gleichung des Kreises ist

Fig. 96.



$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und folglich

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \,.\, dx = r \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Es ist aber

$$r \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{x}{r} \right).$$

Soll der Bogen MM_1, Figur 96, bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$ so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \left(\operatorname{arc} \left(\sin = \frac{x_2}{r} \right) - \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{x_1}{r} \right) \right).$$

Soll ferner der Bogen CM bestimmt werden, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{x_1}{r} \right).$$

Soll endlich der Viertelkreis CB bestimmt werden, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r \int_0^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \operatorname{arc} (\sin = 1)$$

$$= r \,.\, \frac{\pi}{2}.$$

Demnach hat man für den ganzen Kreis

$$4 \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = 2 r \pi.$$

3. Die Parabel. Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = 2 p x.$$

Am einfachsten gestaltet sich nun die Rectification, wenn man die Gleichung für x auflöst, wenn man also x zur abhängigen und y zur unabhängigen Veränderlichen macht. Man hat dann die Gleichung

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

daher

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$$

und folglich

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2}\, dy = \frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy.$$

Es ist aber zunächst

$$\frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{y \sqrt{p^2 + y^2}}{2p} + \frac{p}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}},$$

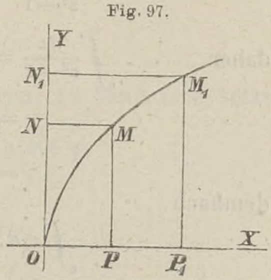
und weil ferner

$$\int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right),$$

so ist

$$\frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{y \sqrt{p^2 + y^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right).$$

Fig. 97.



Für den Bogen MM_1, Figur 97, hat man, wenn $ON = y_1$ und $ON_1 = y_2$ gesetzt wird, das Integral zwischen den Grenzen von $y = y_1$ bis $y = y_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{1}{p} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{p^2 + y^2}\, dy$$

$$\frac{y_2 \sqrt{p^2 + y_2^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\left(y_2 + \sqrt{p^2 + y_2^2}\right) - \frac{y_1 \sqrt{p^2 + y_1^2}}{2p} - \frac{p}{2}\, l\left(y_1 + \sqrt{p^2 + y_1^2}\right)$$

$$\frac{1}{2p}\left(y_2 \sqrt{p^2 + y_2^2} - y_1 \sqrt{p^2 + y_1^2}\right) + \frac{p}{2}\left[l\left(y_2 + \sqrt{p^2 + y_2^2}\right) - l\left(y_1 + \sqrt{p^2 + y_1^2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2p}\left(y_2 \sqrt{p^2 + y_2^2} - y_1 \sqrt{p^2 + y_1^2}\right) + \frac{p}{2}\, l\left(\frac{y_2 + \sqrt{p^2 + y_2^2}}{y_1 + \sqrt{p^2 + y_1^2}}\right).$$

Für den Bogen OM hat man das Integral zwischen den Grenzen von $y = 0$ bis $y = y_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{1}{p}\int_0^{y_1} \sqrt{p^2 + y^2}\, dy = \frac{y_1\sqrt{p^2 + y_1^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\left(\frac{y_1 + \sqrt{p^2 + y_1^2}}{p}\right).$$

Behält man x als unabhängige Veränderliche, so lässt sich die Rectification auf folgende Weise ausführen. Es ist

$$y = \sqrt{2px},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}},$$

und mithin

$$s = \int\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx.$$

Setzt man $\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = z$, so ist $x = \frac{p}{2(z^2 - 1)}$, und folglich

$$s = \int z\, dx.$$

Wendet man das Verfahren der theilweisen Integration an, so ist

$$\int z\, dx = xz - \int x\, dz,$$

also wenn man in das Integral auf der rechten Seite den Werth von x nach z setzt, so ist

$$\int z\, dx = xz - \frac{p}{2}\int \frac{dz}{z^2 - 1}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{z^2 - 1} = -\frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)},$$

daher

$$\int \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\, l(z+1) + \frac{1}{2}\, l(z-1)$$

$$= -\frac{1}{2}\, l\left(\frac{z+1}{z-1}\right),$$

demnach

$$\int z\, dx = xz + \frac{p}{4}\, l\left(\frac{z+1}{z-1}\right),$$

und wenn man wieder für z seinen Werth setzt,

$$\int\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = x\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} + \frac{p}{4}\, l\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{p}{2x}} - 1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{x(p + 2x)}{2}} + \frac{p}{4}\, l\left(\frac{\sqrt{p + 2x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{p + 2x} - \sqrt{2x}}\right).$$

Ist $OP = x_1$, so hat man für den Bogen OM das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = \sqrt{\frac{x_1(p + 2x_1)}{2}} + \frac{p}{4}\, l\left(\frac{\sqrt{p + 2x_1} + \sqrt{2x_1}}{\sqrt{p + 2x_1} - \sqrt{2x_1}}\right).$$

4. Die Ellipse. Die Gleichung der Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich ist

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}{a^2 - x^2}},$$

und wenn man die Excentricität einführt, so ist

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2,$$

also

$$s = \int \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Da nun x höchstens gleich a werden kann, so kann man setzen

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \text{ also } x = a\cos\varphi,$$

und dann ist

$$dx = -a\sin\varphi\, d\varphi.$$

Führt man dieses ein, so erhält man

$$s = -a\int \sin\varphi\, d\varphi \sqrt{\frac{a^2 - e^2 a^2 \cos^2\varphi}{a^2 - a^2\cos^2\varphi}}$$

$$= -a\int d\varphi \sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}.$$

Entwickelt man $\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe, so ist

$$(1 - e^2 \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2\varphi - \frac{1}{2.4} e^4 \cos^4\varphi$$
$$- \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \cos^6\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} e^8 \cos^8\varphi - \ldots,$$

und daher auch

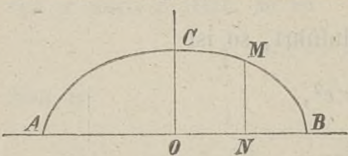
$$-a\int d\varphi \sqrt{1 - e^2 \cos^2\varphi} = -a\left(\int d\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int \cos^2\varphi\, d\varphi\right.$$
$$\left.- \frac{1}{2.4} e^4 \int \cos^4\varphi\, d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \int \cos^6\varphi\, d\varphi - \ldots\right).$$

Es ist aber

$$\int d\varphi = \varphi,$$
$$\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$$
$$\int \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1.3}{2.4} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi,$$
$$\int \cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{1}{6} \sin\varphi \cos^5\varphi + \frac{1.5}{4.6} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin\varphi \cos\varphi$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi$$

u. s. w.

Fig. 98.



Soll nun die Länge eines Bogens wie CM, Figur 98, ermittelt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x$ zu nehmen. Für $x = 0$ muss aber $\cos\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ werden. Es sind also die Integrale zwischen den Grenzen von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \varphi$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi = \varphi - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1.3}{2.4} \sin\varphi \cos\varphi - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{1}{6}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{1.5}{4.6}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

u. s. w.

Soll die Länge des vierten Theiles der Ellipse bestimmt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ zu nehmen. Für $x = 0$ muss $\cos\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für $x = a$ muss $\cos\varphi = 1$, also $\varphi = 0$ werden. Die Integrale sind daher zwischen den Grenzen von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = 0$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4\varphi\, d\varphi = -\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^6\varphi\, d\varphi = -\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{\pi}{2}$$

u. s. w.

Werden diese Werthe in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man für die Länge des vierten Theiles der Ellipse

$$s = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - ..\right].$$

5. Die Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

mithin ist

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (x^2 - a^2)}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\, x^2 - a^4}{a^2 (x^2 - a^2)}}\, dx,$$

und wenn man die Excentricität einführt, so ist

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} = e^2,$$

daher

$$s = \int \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx.$$

Da nun a der kleinste Werth ist, den x annehmen kann, sonst aber x immer grösser als a sein muss, so kann man setzen

$$\frac{a}{x} = \cos \varphi, \text{ also } x = \frac{a}{\cos \varphi},$$

dann ist

$$dx = \frac{a \sin \varphi\, d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Führt man dieses in die Formel ein, so erhält man

$$s = \int \sqrt{\frac{\frac{e^2 a^2}{\cos^2 \varphi} - a^2}{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - a^2}} \cdot \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= a \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{e^2 - \cos^2 \varphi}$$

$$= a e \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}}.$$

Entwickelt man $\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}}$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe, so erhält man

$$\left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{e^2} - \frac{1}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{e^4} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{\cos^6 \varphi}{e^6}$$
$$- \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} \cdot \frac{\cos^8 \varphi}{e^8} - \ldots,$$

demnach ist

$$a e \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}}$$

$$= a e \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{e^2} - \frac{1}{2 \,.\, 4} \frac{\cos^4 \varphi}{e^4} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{\cos^6 \varphi}{e^6} - \ldots\right)$$

$$= a e \tan \varphi - \frac{a}{2 e} \varphi - \frac{1}{2 \,.\, 4} \frac{a}{e^3} \int \cos^2 \varphi\, d\varphi - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{a}{e^5} \int \cos^4 \varphi\, d\varphi - \cdots$$

Die einzelnen Integrale werden dann in derselben Weise wie im vorigen Falle bestimmt.

6. **Die Cycloide.** Die Gleichungen der Cycloide sind

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi),$$

daher

$$dx = r(1 - \cos\varphi)\,d\varphi; \quad dy = r\sin\varphi\,d\varphi.$$

Nun ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und setzt man dafür die Ausdrücke ein, so ist

$$ds = r\sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \cdot d\varphi$$
$$= r\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\,d\varphi,$$

und weil

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

so ist auch

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

so wie

$$s = 2r\int \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Setzt man

$$\frac{\varphi}{2} = z; \quad \varphi = 2z; \quad d\varphi = 2dz,$$

so wird

$$2r\int \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4r\int \sin z\,dz,$$

und da

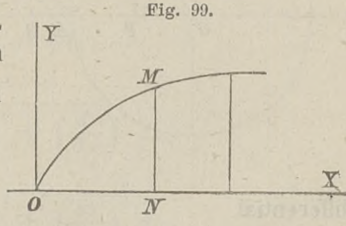
$$4r\int \sin z\,dz = -4r\cos z,$$

so ergibt sich, wenn man wieder $\frac{\varphi}{2}$ für z setzt,

$$2r\int \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4r\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Soll der Bogen OM, Figur 99, bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$ zu nehmen. Dieses gibt

Fig. 99.



$$2r\int_0^{\varphi_1} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4r\cos\frac{\varphi_1}{2} + 4r$$
$$= 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi_1}{2}\right).$$

Will man die Länge des ganzen Cycloidenbogens bestimmen, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8r.$$

Es ist also die Länge der ganzen Cycloide achtmal so gross wie der Halbmesser des erzeugenden Kreises.

7. Die Kreisevolvente. Die Gleichungen dieser Kurve sind

$$x = r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi;\quad y = r\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi,$$

daher

$$dx = r\varphi\cos\varphi\, d\varphi;\quad dy = r\varphi\sin\varphi\, d\varphi.$$

Nun ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

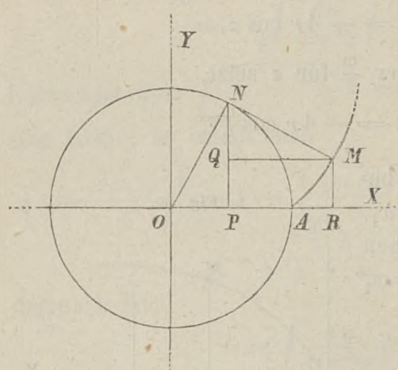
setzt man daher die vorstehenden Ausdrücke ein, so erhält man

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2\varphi^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 + r^2\varphi^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2} \\ &= r\varphi\, d\varphi, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} s &= r\int \varphi\, d\varphi \\ &= \frac{r\varphi^2}{2}. \end{aligned}$$

Fig. 100.



Soll die Länge des Bogens AM, Figur 100, bestimmt werden, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r\int_0^{\varphi_1} \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\, r\, \varphi_1{}^2.$$

8. Rectification für Polarcoordinaten. Für Polarcoordinaten ist das Bogendifferential

$$ds = d\varphi\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2},$$

daher der Bogen

$$s = \int d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

9. Die Archimedische Spirale. Die Gleichung dieser Linie ist

$$r = a\varphi,$$

daher

$$\frac{dr}{d\varphi} = a,$$

und folglich

$$s = \int d\varphi \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}$$
$$= a \int \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$

Nun ist zunächst

$$\int \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}},$$

und weil ferner

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = l\,(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}),$$

so ist

$$a \int \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + l\,(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\right) + C.$$

§ 83.

Rectification doppelt gekrümmter oder räumlicher Kurven.

Das Bogendifferential einer räumlichen Kurve ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

und zwar ist die Kurve selbst bestimmt durch zwei Projektionsgleichungen von der Form

$$y = \varphi(x); \quad z = \psi(x).$$

Setzt man daher

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx,$$

so ist

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Man hat daher die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ aus den Projektionsgleichungen abzuleiten und in die vorstehende Formel einzusetzen. Die Integration gibt dann die Länge der Kurve.

1. Die Gerade im Raume. Die Projektionsgleichungen der Geraden sind

$$y = ax + b; \quad z = a'x + b',$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = a; \quad \frac{dz}{dx} = a',$$

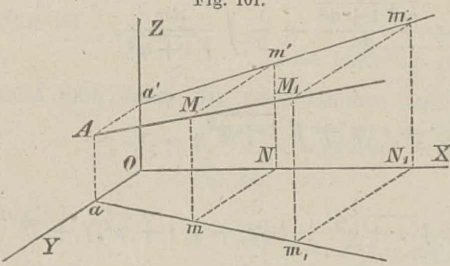
und folglich ist

$$ds = \sqrt{1 + a^2 + a'^2} \cdot dx,$$

also

$$s = \sqrt{1 + a^2 + a'^2} \int dx$$
$$= \sqrt{1 + a^2 + a'^2} \cdot x.$$

Fig. 101.



Soll die Länge der Strecke MM_1, Figur 101, bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\sqrt{1 + a^2 + a'^2} \int_{x_1}^{x_2} dx = \sqrt{1 + a^2 + a'^2}\, (x_2 - x_1).$$

Soll ferner die Länge AM bestimmt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\sqrt{1 + a^2 + a'^2} \int_0^{x_1} dx = \sqrt{1 + a^2 + a'^2} \cdot x_1.$$

2. Die Schraubenlinie. Der Halbmesser des geraden Kreiscylinders, auf welchem die Schraubenlinie sich befindet, sei r. Lässt man nun die Cylinderaxe mit der ZAxe zusammenfallen, so ist die Gleichung der Cylinderfläche für jedes beliebige z

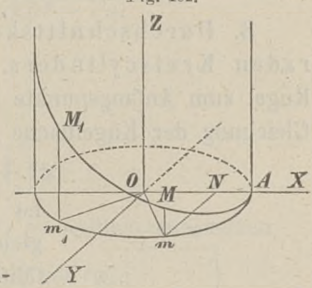
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ist M, Figur 102, ein beliebiger Punkt der Schraubenlinie, dessen Coordinaten $ON = x$, $Nm = y$; $Mm = z$ sind, so lassen sich diese Coordinaten auf folgende Weise ausdrücken. Ist φ der

Bogen des Winkels AOm für den Halbmesser 1, so ist der Bogen $Am = r\varphi$; ist ferner α der Steigungswinkel, so ist

$$\frac{z}{r\varphi} = \tan\alpha, \text{ also } z = r\tan\alpha \cdot \varphi,$$

Fig. 102.



ferner ist

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi,$$

daher

$$dx = -r\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = r\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dz = r\tan\alpha \cdot d\varphi.$$

Erhebt man diese Differentiale zur zweiten Potenz und setzt sie in die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ein, so erhält man

$$ds = \sqrt{r^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 + r^2\tan^2\alpha\, d\varphi^2}$$
$$= r\sqrt{1 + \tan^2\alpha} \cdot d\varphi,$$

und folglich ist

$$s = r\sqrt{1+\tan^2\alpha}\int d\varphi$$
$$= r\sqrt{1+\tan^2\alpha} \cdot \varphi.$$

Soll die Länge der Strecke MM_1 bestimmt werden, und ist φ_1 der Bogen, welcher dem Winkel AOm, so wie φ_2 der Bogen, welcher dem Winkel AOm_1 für den Halbmesser 1 entspricht, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $\varphi = \varphi_1$ bis $\varphi = \varphi_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r\sqrt{1+\tan^2\alpha}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = r\sqrt{1+\tan^2\alpha}\,(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Für einen ganzen Umgang ist das Integral zwischen den Grenzen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ zu nehmen. Dieses gibt

$$r\sqrt{1+\tan^2\alpha}\int_0^{2\pi} d\varphi = 2r\pi\sqrt{1+\tan^2\alpha}.$$

Es ist aber $2r\pi$ der Umfang des Schraubencylinders, den wir mit p bezeichnen wollen; ist nun h die Höhe des Schraubenganges, so ist

$$\frac{h}{p} = \tan\alpha.$$

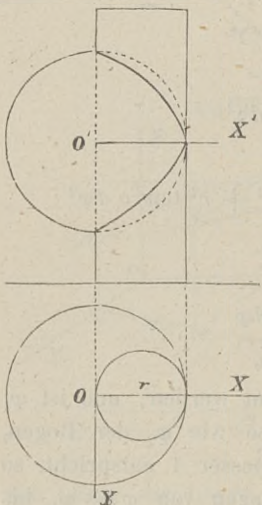
Setzen wir dieses ein, so ist die Länge des ganzen Schraubenganges

$$\sqrt{h^2 + p^2}.$$

3. **Durchschnittskurve einer Kugel und eines geraden Kreiscylinders.** Machen wir den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkte der Coordinaten, Figur 103, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Fig. 103.



Ist nun der Durchmesser des Cylinders gleich dem Halbmesser der Kugel, und fällt eine Mantellinie des Cylinders mit der ZAxe zusammen, so ist für jedes beliebige z die Gleichung der Cylinderfläche

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2} r\right)^2 = \left(\frac{1}{2} r\right)^2$$

also

$$y^2 + x^2 - rx = 0.$$

Für die Durchschnittskurve müssen die Coordinaten der Kugelfläche und die Coordinaten der Cylinderfläche gleich sein. Es können also die einen für die andern gesetzt werden.

Aus der Gleichung der Cylinderfläche folgt

$$y = \sqrt{rx - x^2},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r - 2x}{2\sqrt{rx - x^2}}.$$

Wird ferner der Werth von y^2, wie er sich aus der Gleichung der Cylinderfläche ergibt, nämlich

$$y^2 = rx - x^2$$

in die Gleichung der Kugelfläche eingesetzt, so erhalten wir

$$x^2 + rx - x^2 + z^2 = r^2,$$

und hieraus

$$z = \sqrt{r^2 - rx},$$

daher

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{r}{2\sqrt{r^2 - rx}}.$$

Mithin ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{1 + \frac{(r-2x)^2}{4(rx - x^2)} + \frac{r^2}{4(r^2 - rx)}} \cdot dx$$

$$= \sqrt{\frac{r(r+x)}{4x(r-x)}}\, dx,$$

und folglich der Bogen

$$s = \frac{\sqrt{r}}{2} \int \sqrt{\frac{r+x}{x(r-x)}}\, dx.$$

Da x nicht grösser als r werden kann, so können wir setzen

$$\frac{x}{r} = \cos^2\varphi, \text{ also } x = r\cos^2\varphi,$$

dann ist

$$dx = -2r\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi.$$

Setzen wir dieses ein, so erhalten wir

$$s = \frac{\sqrt{r}}{2} \int \sqrt{\frac{r + r\cos^2\varphi}{r\cos^2\varphi\,(r - r\cos^2\varphi)}} \cdot -2r\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -r\int \sqrt{1 + \cos^2\varphi} \cdot d\varphi.$$

Wird nun $\sqrt{1 + \cos^2\varphi}$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe entwickelt, so hat man

$$(1 + \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi - \frac{1}{2.4}\cos^4\varphi + \frac{1.3}{2.4.6}\cos^6\varphi$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^8\varphi + \ldots,$$

und daher

$$-r\int \sqrt{1 + \cos^2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$= -r\left(\int d\varphi + \frac{1}{2}\int \cos^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2.4}\int \cos^4\varphi\, d\varphi + \frac{1.3}{2.4.6}\int \cos^6\varphi\, d\varphi - \cdots\right).$$

Diese Integrale sind bereits § 82. 4. ausgeführt worden.

Um den vierten Theil der Schnittkurve zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Für $x = 0$ muss aber $\cos^2\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für $x = r$ muss $\cos^2\varphi = 1$, also $\varphi = 0$ werden. Es sind demnach die Integrale zwischen den Grenzen von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = 0$ zu nehmen, Man erhält also dieselben Werthe wie § 82. 4., und folglich ist

$$-r\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\cdot d\varphi$$

$$=\frac{r\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2+\cdots\right].$$

Dieses ist aber der vierte Theil einer Ellipse.

Aus der Gleichung

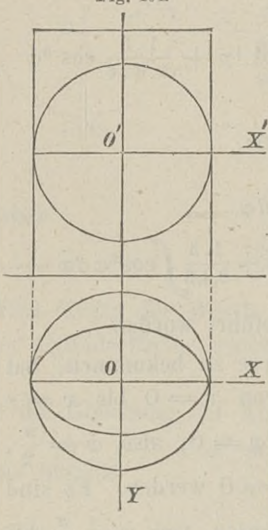
$$z=\sqrt{r^2-rx}$$

ergibt sich, dass die Vertikalprojektion der Durchschnittslinie eine Parabel ist, während die Horizontalprojektion derselben mit der Horizontalprojektion der Cylinderfläche zusammenfällt, also ein Kreis ist.

4. **Durchschnittskurve einer Kugel und eines elliptischen Cylinders.** Machen wir den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkte der Coordinaten, Figur 104, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Fig. 104.



Ist nun die grosse Axe der Ellipse gleich dem Durchmesser der Kugel, bezeichnen wir die halbe kleine Axe der Ellipse mit b, und lassen wir die Axe des Cylinders mit der ZAxe zusammenfallen, so ist für jedes beliebige z die Gleichung der Cylinderfläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

also

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

Für die Durchschnittskurve müssen die Coordinaten der Kugelfläche und die Coordinaten der Cylinderfläche gleich sein, so dass die einen für die andern gesetzt werden können.

Aus der Gleichung der Cylinderfläche folgt

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wird ferner der Werth von y^2, wie er sich aus der Gleichung der Cylinderfläche ergibt, nämlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

in die Gleichung der Kugelfläche eingesetzt, so erhalten wir

$$x^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + z^2 = a^2,$$

$$a^2 x^2 + a^2 b^2 - b^2 x^2 + a^2 z^2 = a^4.$$

$$(a^2 - b^2) x^2 + a^2 z^2 = a^2 (a^2 - b^2).$$

Setzen wir nun

$$a^2 - b^2 = e^2,$$

so erhalten wir

$$e^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 e^2.$$

Es geht aber hieraus hervor, dass die Vertikalprojektion der Schnittkurve eine Ellipse ist, deren Halbaxen a und e sind.

Aus der Gleichung folgt nun weiter

$$z = \frac{e}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

also

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{e}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Hiernach ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)} + \frac{e^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} \cdot dx$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

und folglich

$$s = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{x}{a}\right).$$

Um den vierten Theil der Schnittkurve zu bekommen, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ zu nehmen. Dieses gibt

$$a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \cdot \frac{\pi}{2},$$

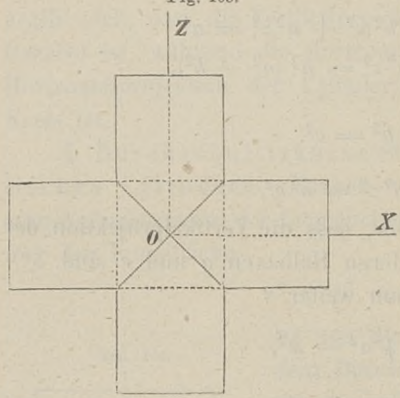
demnach ist die Länge der ganzen Schnittkurve

$$4 \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} = 2 a \pi,$$

also gleich dem Umfange eines grössten Kreises der Kugel.

5. Durchschnittskurve zweier Kreiscylinder von gleichem Halbmesser, deren Axen sich rechtwinkelig schneiden. Machen wir den Durchschnittspunkt der Cylinderaxen zum Anfangspunkte der Coordinaten, Figur 105, und lassen die Axe des einen Cylinders mit der XAxe, die Axe des andern Cylinders aber mit der ZAxe zusammenfallen, so ist die Gleichung des ersten Cylinders

Fig. 105.



$$y^2 + z^2 = r^2$$

für jedes beliebige x; und die Gleichung des zweiten Cylinders

$$x^2 + y^2 = r^2$$

für jedes beliebige z.

Für die Durchschnittskurve müssen die Coordinaten beider Cylinderflächen gleich sein, so dass die einen für die andern gesetzt werden können.

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

und wird dieses in die erste Gleichung eingesetzt, so folgt

$$r^2 - x^2 + z^2 = r^2,$$

mithin

$$z^2 = x^2,$$

also

$$z = \pm x.$$

Es geht hieraus hervor, dess die Projektion der Schnittkurve auf die XZEbene aus zwei geraden Linien besteht, welche sich im Anfangspunkte der Coordinaten unter einem rechten Winkel schneiden und folglich mit der XAxe sowol als mit der ZAxe Winkel von 45^0 bilden. Die Kurven liegen daher in Ebenen, welche auf der XZEbene senkrecht stehen und deren Durchschnittslinie mit der YAxe zusammenfällt; eine jede derselben ist eine Ellipse, deren kleine Halbaxe r und deren grosse Halbaxe $r\sqrt{2}$ ist. Sie schneiden sich daher in den Endpunkten der kleinen Axe.

Aus den Gleichungen folgt nun

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}; \quad \frac{dz}{dx} = 1.$$

Hiernach ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} + 1} \cdot dx$$

$$= \sqrt{\frac{2r^2 - x^2}{r^2 - x^2}}\, dx,$$

und folglich

$$s = \int \sqrt{\frac{2r^2 - x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx.$$

Da x nicht grösser als r werden kann, so können wir setzen

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi, \text{ also } x = r\cos\varphi,$$

demnach ist

$$dx = -r\sin\varphi\, d\varphi,$$

und es wird

$$s = \int \sqrt{\frac{2r^2 - r^2\cos^2\varphi}{r^2 - r^2\cos^2\varphi}} \cdot -\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -r\int \sqrt{2 - \cos^2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$= -r\sqrt{2}\int \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\varphi} \cdot d\varphi.$$

Wird $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\varphi}$ nach dem binomischen Satze entwickelt, so ist

$$\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4}\cos^2\varphi - \frac{1}{32}\cos^4\varphi - \frac{1}{128}\cos^6\varphi - \cdots,$$

daher

$$-r\sqrt{2}\int \sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$= -r\sqrt{2}\left(\int d\varphi - \frac{1}{4}\int \cos^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{32}\int \cos^4\varphi\, d\varphi - \cdots\right).$$

Für den vierten Theil einer Ellipse hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Wenn aber $x = 0$ werden soll, so muss $\cos\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ werden, und wenn $x = r$ werden soll, so muss $\cos\varphi = 1$, also $\varphi = 0$ werden. Die Integrale sind daher zwischen den Grenzen von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = 0$ zu nehmen.

Die Werthe der Integrale für diese Grenzen sind § 82. 4. bestimmt worden; werden sie eingesetzt, so ergibt sich für den vierten Theil einer Ellipse

$$r\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \cdots\right),$$

und folglich ist die Länge einer solchen Ellipse

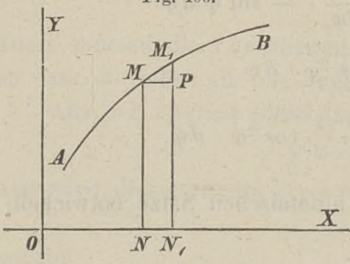
$$2\sqrt{2}\cdot r\pi\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \cdots\right).$$

§ 84.

Complanation der Rotationsflächen.

Die Bestimmung des Inhaltes einer Rotationsfläche wird die Complanation derselben genannt. Um dieselbe auszuführen, hat man eine Formel für das Differential oder das Element einer solchen Fläche aufzustellen und diese zu integriren.

Fig. 106.



Es sei AB, Figur 106, die erzeugende Kurve, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

ist, und M sei ein Punkt dieser Kurve, dessen Coordinaten $ON = x$ und $MN = y$ sind. Wächst x um $NN_1 = \varDelta x$, so wächst y um $PM_1 = \varDelta y$ und der Bogen $AM = s$ um $MM_1 = \varDelta s$. Dreht sich die Kurve AB um die XAxe als Drehungsaxe, so erzeugt der Bogen MM_1 eine Zone und die Sehne MM_1 den Mantel eines abgestumpften Kegels.

Es ist aber die Sehne

$$MM_1 = \sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2} = \varDelta x\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2},$$

und folglich ist der Mantel des abgestumpften Kegels

$$\pi\cdot\varDelta x\sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}\,(y + y + \varDelta y).$$

Bezeichnet man den Inhalt der Zone mit $\varDelta u$, so ist offenbar

$$\varDelta u > \pi \cdot \varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}\,(2y + \varDelta y),$$

oder auch

$$\frac{\varDelta u}{\varDelta x} > \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}\,(2y + \varDelta y).$$

Je mehr aber $\varDelta x$ abnimmt um so mehr nähert sich der Inhalt der Zone dem Inhalte des Kegelmantels und fällt mit ihm zusammen, wenn $\varDelta x$ in dx übergeht. Es geht aber dann $\frac{\varDelta u}{\varDelta x}$ in $\frac{du}{dx}$ und $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ in $\frac{dy}{dx}$ über, während dy gegen y verschwindet. Für diesen Grenzfall ist daher

$$\frac{du}{dx} = \pi \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot 2y,$$

oder es ist das Element der Rotationsfläche

$$du = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx,$$

oder es ist auch

$$du = 2\pi y\, ds,$$

endlich ist die Rotationsfläche selbst

$$u = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

1. Der gerade Kreiskegel. Die Gleichung der erzeugenden Geraden OA, Figur 107, sei

$$y = ax,$$

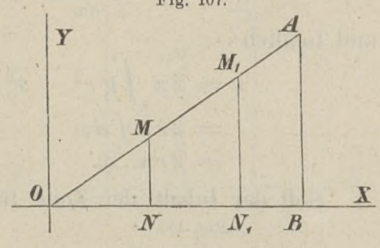
so ist

$$\frac{dy}{dx} = a$$

und folglich

$$\begin{aligned} u &= 2\pi \int ax \sqrt{1 + a^2}\,.\,dx \\ &= 2a\pi \sqrt{1 + a^2} \int x\,dx \\ &= a\pi \sqrt{1 + a^2}\,.\,x^2. \end{aligned}$$

Fig. 107.



Soll der Mantel des abgestumpften Kegels für die Strecke MM_1 bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$ so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2a\pi \sqrt{1 + a^2} \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = a\pi \sqrt{1 + a^2}\,(x_2{}^2 - x_1{}^2).$$

Den Mantel des Kegels für die Strecke OM erhält man, wenn man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ nimmt. Dieses gibt

$$2 a \pi \sqrt{1 + a^2} \int_0^{x_1} x \, dx = a \pi \sqrt{1 + a^2} \cdot x_1^2.$$

Ist der Kegel begrenzt und $OB = h$ seine Höhe so wie $AB = r$ der Radius seiner Grundfläche, und soll der Mantel des ganzen Kegels bestimmt werden, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = h$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2 a \pi \sqrt{1 + a^2} \int_0^{h} x \, dx = a \pi \sqrt{1 + a^2} \cdot h^2.$$

Es ist aber in diesem Falle

$$a = \frac{r}{h},$$

setzt man dieses ein, so wird der Kegelmantel

$$\frac{r}{h} \pi \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \cdot h^2,$$

das ist aber

$$r \pi \sqrt{h^2 + r^2}.$$

2. Die Kugel. Die Gleichung des erzeugenden Kreises sei

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

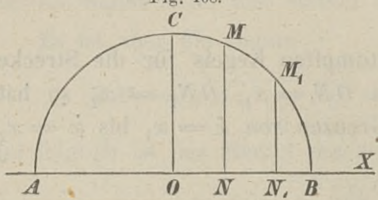
so ist

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und folglich

$$\begin{aligned} u &= 2\pi \int \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx \\ &= 2 r \pi \int dx \\ &= 2 r \pi \cdot x. \end{aligned}$$

Soll der Inhalt der Zone für die Strecke MM_1, Figur 108, bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

Fig. 108.


$$2 r \pi \int_{x_1}^{x_2} dx = 2 r \pi (x_2 - x_1).$$

Soll der Inhalt der Zone für die Strecke CM bestimmt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt.

$$2r\pi \int_0^{x_1} dx = 2r\pi \cdot x_1.$$

Soll der Inhalt der Kappe für die Strecke $M_1 B$ bestimmt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_2$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2r\pi \int_{x_2}^{r} dx = 2r\pi\,(r - x_2).$$

Soll die Fläche der Halbkugel bestimmt werden, also für den Bogen CB, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

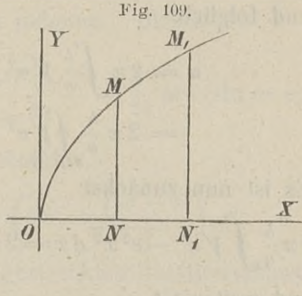
$$2r\pi \int_0^{r} dx = 2r\pi\,.\,r = 2r^2\pi.$$

Demnach ist die Oberfläche der ganzen Kugel

$$4r^2\pi.$$

3. Das Paraboloid. Die Gleichung der erzeugenden Parabel, Figur 109, ist

Fig. 109.



$$y = \sqrt{2px},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$$

und folglich

$$u = 2\pi \int \sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p^2}{2px}}\,.\,dx$$
$$= 2\pi\sqrt{p}\int\sqrt{2x + p}\,.\,dx.$$

Setzt man

$$2x + p = z,$$

so ist

$$dx = \tfrac{1}{2}dz$$

und daher

$$u = \pi\,.\sqrt{p}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,z^{\frac{3}{2}},$$

so wie, wenn man den Werth von z wieder einführt,

$$u = \tfrac{2}{3}\pi \sqrt{p}\,(2x + p)^{\frac{3}{2}}.$$

Soll die Zone für die Strecke MM_1 bestimmt werden und ist $ON = x$, $ON_1 = x_1$ so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

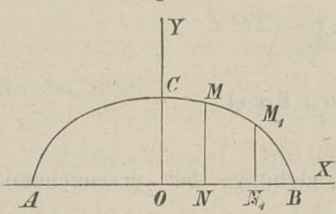
$$2\pi\sqrt{p}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2x + p}\,.\,dx = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,[(2x_2 + p)^{\frac{3}{2}} - (2x_1 + p)^{\frac{3}{2}}].$$

Soll dagegen die Fläche für den Bogen OM bestimmt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi\sqrt{p}\int_{0}^{x_1}\sqrt{2x + p}\,.\,dx = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{p}\,[(2x_1 + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}].$$

4. Das gestreckte Rotationsellipsoid. Hier findet die Drehung um die grosse Axe AB der Ellipse, Figur 110, statt.

Fig. 110.



Die Gleichung der Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich

$$u = 2\pi\int\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx$$
$$= 2\pi\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - e^2x^2}\,.\,dx.$$

Es ist nun zunächst

$$2\pi\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - e^2x^2}\,dx = 2\pi\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}\right],$$

und weiter ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - e^2x^2}} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{e^2x^2}{a^2}}}.$$

Setzt man

$$\frac{ex}{a} = z \text{ also } dx = \frac{a}{e}\,dz,$$

so wird

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}}=\frac{1}{e}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

und es ist

$$\frac{1}{e}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{e}\text{ arc }(\sin=z),$$

daher wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-e^2x^2}}=\frac{1}{e}\text{ arc }\left(\sin=\frac{ex}{a}\right).$$

Hiernach ist

$$2\pi\frac{b}{a}\int\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx$$

$$=2\pi\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-e^2x^2}}{2}+\frac{a^2}{2e}\text{ arc }\left(\sin=\frac{ex}{a}\right)\right].$$

Soll die Zone des Bogens MM_1 bestimmt werden, und ist $ON=x_1$, $ON_1=x_2$, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x=x_1$ bis $x=x_2$ zu nehmen.

Für die Zone des Bogens CM hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x=0$ bis $x=x_1$ zu nehmen, und für die Kappe des Bogens M_1B hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x=x_2$ bis $x=a$ zu nehmen.

Will man die halbe Oberfläche des Ellipsoides, welche dem Bogen CB entspricht, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x=0$ bis $x=a$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx=2\pi\frac{b}{a}\left[\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}+\frac{a^2}{2e}\text{ arc }(\sin=e)\right],$$

und wenn man den Werth von e einführt,

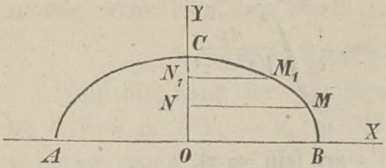
$$=b^2\pi+\frac{a^2b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc }\left(\sin=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

daher ist die ganze Oberfläche des gestreckten Rotationsellipsoides

$$2b^2\pi+\frac{2a^2b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc }\left(\sin=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

5. Das abgeplattete Rotationsellipsoid. Dieses wird erzeugt, wenn die Drehung um die kleine Axe der Ellipse, Figur 111, erfolgt. Nehmen wir x als abhängige, y als unabhängige Veränderliche, so ist die Gleichung der Ellipse

Fig. 111.



$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

daher

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b} \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}},$$

und folglich

$$u = 2\pi \int \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{a^2 y^2}{b^2 (b^2 - y^2)}}\, dy$$

$$= 2\pi \frac{a}{b^2} \int \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)\, y^2}\, dy,$$

und wenn man die Excentricität einführt, so ist

$$u = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + e^2 y^2}\, dy$$

$$= 2\pi \frac{}{b^2} \int \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2}\, dy.$$

Nun ist zunächst

$$2\pi \frac{a^2 e}{b^2} \int \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2}\, dy$$

$$= 2\pi \frac{a^2 e}{b^2} \left[\frac{y \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2}}{2} + \frac{b^4}{2 a^2 e^2} \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2}} \right],$$

und weiter ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2}} = l \left(y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2} \right),$$

daher

$$2\pi \frac{a^2 e}{b^2} \int \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2}\, dy$$

$$= 2\pi \frac{a^2 e}{b^2} \left[\frac{y}{2} \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2} + \frac{b^4}{2 a^2 e^2}\, l \left(y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2 e^2} + y^2} \right) \right].$$

Soll die Zone des Bogens MM_1 bestimmt werden, und ist $ON = y_1$, $ON_1 = y_2$, so hat man für das Integral die Grenzen von $y = y_1$ bis $y = y_2$. Für die Zone des Bogens BM hat man die Grenzen von $y = 0$ bis $y = y_1$ zu nehmen.

Für die Kappe des Bogens $M_1 C$ hat man die Grenzen von $y = y_2$ bis $y = b$ zu nehmen.

Für die halbe Oberfläche des Ellipsoides, welche dem Bogen BC entspricht, hat man das Integral zwischen den Grenzen von $y = 0$ bis $y = b$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi\,\frac{a^2 e}{b}\int_0^b \sqrt{\frac{b^4}{a^2e^2}+y^2}\,dy$$

$$= 2\pi\,\frac{a^2 e}{b^2}\left[\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b^4}{a^2e^2}+b^2}+\frac{b^4}{2a^2e^2}\,l\left(b+\sqrt{\frac{b^4}{a^2e^2}+b^2}\right)\right]$$

$$-\,2\pi\,\frac{a^2 e}{b^2}\left[\frac{b^4}{2a^2e^2}\,l\left(\frac{b^2}{ae}\right)\right]$$

$$= 2\pi\,\frac{a^2 e}{b^2}\left[\frac{b^2}{2}\,\frac{\sqrt{b^2+a^2e^2}}{ae}+\frac{b^4}{2a^2e^2}\left(l\left(b+\frac{b\sqrt{b^2+a^2e^2}}{ae}\right)-l\left(\frac{b^2}{ae}\right)\right)\right],$$

und wenn man unter den Wurzeln

$$a^2 - b^2 \text{ für } a^2 e^2$$

setzt,

$$= 2\pi\,\frac{a^2 e}{b^2}\left[\frac{b^2 a}{2ae}+\frac{b^4}{2a^2e^2}\left(l\left(b+\frac{b}{e}\right)-l\left(\frac{b^2}{ae}\right)\right)\right]$$

$$= a^2\pi + \frac{b^2\pi}{e}\,l\left(\frac{a}{b}\,(1+e)\right).$$

Es ist nun

$$l\left(\frac{a}{b}\,(1+e)\right) = l\left(\frac{a}{b}\right) + l\,(1+e),$$

und aus der Gleichung

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

folgt

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-e^2},$$

hieraus aber weiter

$$l\left(\frac{a}{b}\right) = -\tfrac{1}{2}\,l\,(1+e) - \tfrac{1}{2}\,l\,(1-e).$$

Dieses gibt nun

$$l\left(\frac{a}{b}\,(1+e)\right) = \tfrac{1}{2}\,l\,(1+e) - \tfrac{1}{2}\,l\,(1-e)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

Demnach wird das Integral

$$= a^2\pi + \frac{b^2\pi}{2e}\,l\left(\frac{1+e}{1-e}\right),$$

und für die ganze Oberfläche des Ellipsoides erhalten wir

$$2a^2\pi + \frac{b^2\pi}{e}\,l\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

Nun ist noch nach § 29. 7.

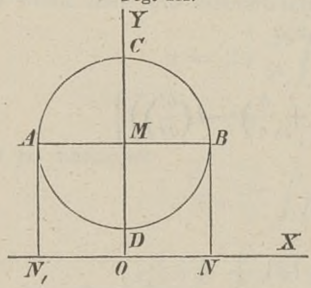
$$l\left(\frac{1+e}{1-e}\right) = 2\left(e + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} + \frac{e^7}{7} + \cdots\right),$$

daher haben wir endlich für die ganze Oberfläche des Ellipsoides

$$2a^2\pi + 2b^2\pi\left(1 + \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{5} + \frac{e^6}{7} + \cdots\right).$$

6. Der Ring. Dieser entsteht wenn ein Kreis sich um eine ausser ihm, aber in derselben Ebene liegende Gerade dreht. Figur 112. Nehmen wir die Drehungsaxe zur XAxe und legen den Mittelpunkt des Kreises in die YAxe, bezeichnen OM mit a, so sind 0 und a die Coordinaten seines Mittelpunktes und seine Gleichung ist

Fig. 112.



$$x^2 + (y-a)^2 = r^2,$$

daher

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

und zwar gilt

$$y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$$

für den Halbkreis ACB und

$$y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$$

für den Halbkreis ADB. Die beiden Halbkreise müssen daher gesondert betrachtet werden.

Die Gleichung

$$y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$$

gibt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

daher ist

$$\begin{aligned} u &= 2\pi\int (a + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx \\ &= 2\pi r\int\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1\right)dx \\ &= 2\pi r\left[a\int\frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \int dx\right] \\ &= 2\pi r\left[a \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right) + x\right]. \end{aligned}$$

Für den Bogen CB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi r \int_0^r \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1\right) dx = 2\pi r\,(a \cdot \tfrac{1}{2}\pi + r),$$

daher ist die vom Halbkreise ACB erzeugte Fläche

$$4\pi r\,(a \cdot \tfrac{1}{2}\pi + r).$$

Die Gleichung

$$y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$$

gibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

daher ist

$$\begin{aligned} u &= 2\pi \int (a - \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi r \int \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1\right) dx \\ &= 2\pi r \left[a \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \int dx\right] \\ &= 2\pi r \left[a \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right) - x\right]. \end{aligned}$$

Für den Bogen DB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi r \int_0^r \left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1\right) dx = 2\pi r\,(a \cdot \tfrac{1}{2}\pi - r),$$

daher ist die vom Halbkreis ADB erzeugte Fläche

$$4\pi r\,(a \cdot \tfrac{1}{2}\pi - r).$$

Die ganze Oberfläche des Ringes ist mithin

$$\begin{aligned} &4\pi r\,(a \cdot \tfrac{1}{2}\pi + r) + 4\pi r\,(a \cdot \tfrac{1}{2}\pi - r) \\ &= 4\pi r \cdot a\pi = 4ar\pi^2. \end{aligned}$$

Ist $a = r$, dreht sich also der Kreis um eine Tangente, so ist der Inhalt der erzeugten Fläche

$$4r^2\pi^2.$$

§ 85.

Kubatur der Rotationskörper.

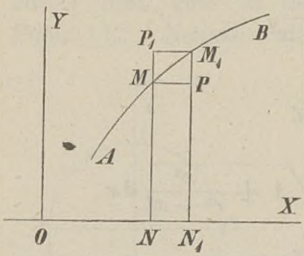
Die Bestimmung des Volumens eines Rotationskörpers wird die Kubatur desselben genannt. Um sie auszuführen, hat man eine Formel für das Differential oder das Element eines solchen Körpers aufzustellen und diese zu integriren.

Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung der Kurve AB, Figur 113, welche durch Drehung um die XAxe die den Rotationskörper umschliessende Fläche erzeugt, und M sei ein Punkt dieser Kurve, dessen Coordinaten $ON = x$ und $MN = y$ sein mögen. Wächst x um $NN_1 = \Delta x$, so wächst y um $PM_1 = \Delta y$. Macht man MP und M_1P_1 parallel zu NN_1, so erzeugt bei der Drehung ein jedes der Rechtecke MNN_1P und $P_1NN_1M_1$ einen Cylinder, während die Fläche MNN_1M_1 eine Schicht des Rotationskörpers erzeugt, welche mit Δv bezeichnet werden mag. Diese Körperschicht ist kleiner als der Cylinder, den das Rechteck $P_1NN_1M_1$, und grösser als der Cylinder, den das Rechteck MNN_1P erzeugt. Das Volumen des vom ersten Rechteck erzeugten Cylinders ist aber

Fig. 113.



$$\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x,$$

und das Volumen des vom letzten Rechtecke erzeugten Cylinders ist

$$\pi y^2 \Delta x,$$

es ist daher

$$\Delta v < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$$

und

$$\Delta v > \pi y^2 \Delta x,$$

oder es ist

$$\pi (y + \Delta y)^2 > \frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi y^2.$$

Es liegt also der Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ zwischen den Grenzen $\pi (y + \Delta y)^2$ und πy^2 und bleibt auch zwischen diesen Grenzen, wenn Δx abnimmt. Je kleiner aber Δx wird, um so kleiner wird auch Δy, um so näher rücken die Grenzen, und um so inniger schliessen sich die beiden Rechtecke MNN_1M_1 an. Geht nun Δx in dx über, so wird auch Δy zu dy und Δv

zu dv, und weil dy gegen y verschwindet, so fallen die Grenzen, zwischen denen $\frac{dv}{dx}$ liegt, zusammen, und es wird

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2.$$

Mithin ist das Volumenelement

$$dv = \pi\, y^2\, dx,$$

und das Volumen selbst

$$v = \pi \int y^2\, dx.$$

1. Der gerade Kreiskegel. Die Gleichung der erzeugenden Geraden, Figur 114, sei

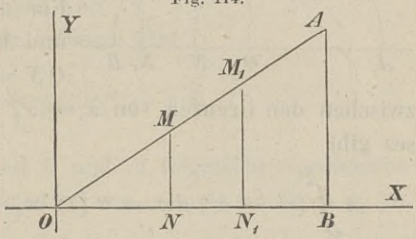
$$y = ax$$

so ist

$$v = \pi \int a^2 x^2\, dx$$

$$= \pi \cdot a^2\, \frac{x^3}{3}$$

Fig. 114.



Soll das zwischen M und M_1 liegende Volumen bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, so hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi a^2 \int_{x_1}^{x_2} x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\, \pi\, a^2\, ({x_2}^3 - {x_1}^3).$$

Soll das zwischen O und M liegende Volumen bestimmt werden, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi a^2 \int_0^{x_1} x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\, \pi a^2\, {x_1}^3.$$

Wird der Kegel von der durch AB erzeugten Ebene begrenzt, und ist $OB = h$, also die Höhe des Kegels, und $AB = r$, der Radius seiner Grundfläche, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = h$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi a^2 \int_0^{h} x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\, \pi a^2\, h^3.$$

Es ist aber dann

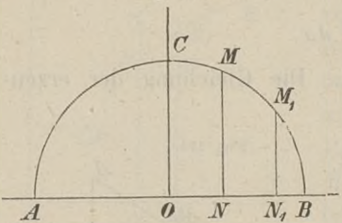
$$a = \frac{r}{h},$$

daher, wenn man dieses einsetzt, das Volumen des Kegels

$$\tfrac{1}{3}\, \pi\, r^2\, h.$$

2. Die Kugel. Die Gleichung des erzeugenden Kreises, Figur 115, sei

Fig. 115.



$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

so ist

$$v = \pi \int (r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Für das Volumen, der zwischen M und M_1 liegenden Schicht ist, wenn $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2 (x_2 - x_1) - \tfrac{1}{3} (x_2^3 - x_1^3)\right].$$

Für das Volumen der zwischen C und M liegenden Schicht ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^{x_1} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(r^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right).$$

Für das Volumen des von BM_1N_1 erzeugten Kugelabschnittes hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_2$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_{x_2}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2 (r - x_2) - \tfrac{1}{3} (r^3 - x_2^3)\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\, \pi \left[2 r^3 - 3 r^2 x_2 + x_2^3\right].$$

Für das Volumen der von OCB erzeugten Halbkugel ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(r^3 - \tfrac{1}{3} r^3\right)$$
$$= \tfrac{2}{3}\, \pi\, r^3,$$

und folglich ist das Volumen der ganzen Kugel

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

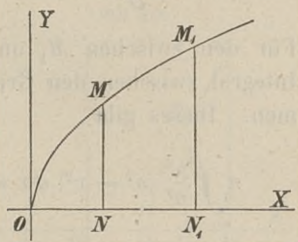
3. Das Paraboloid. Die Gleichung der erzeugenden Parabel, Figur 116, sei

$$y = \sqrt{2px},$$

so ist

$$v = \pi \int 2px\, dx = 2\pi p \int x\, dx$$
$$= \pi p x^2.$$

Fig. 116.



Soll das Volumen der zwischen M und M_1 liegenden Schicht bestimmt werden, und ist $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, so ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi p \int_{x_1}^{x_2} x\, dx = \pi p\, (x_2{}^2 - x_1{}^2).$$

Für das Volumen des zwischen O und M liegenden Abschnittes ist das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi p \int_0^{x_1} x\, dx = \pi p x_1{}^2.$$

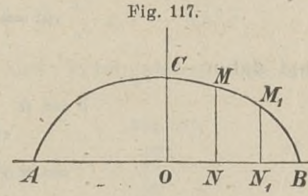
4. Das gestreckte Rotationsellipsoid. Die Gleichung der erzeugenden Ellipse, Figur 117, ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

daher hat man

$$v = \pi \int \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi b^2 \int dx - \pi \frac{b^2}{a^2} \int x^2\, dx$$
$$= \pi b^2 x - \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}.$$

Fig. 117.



Für die zwischen M und M_1 liegende Schicht hat man, wenn $ON = x_1$, $ON_1 = x_2$, das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \pi b^2 (x_2 - x_1) - \tfrac{1}{3}\pi \frac{b^2}{a^2}(x_2{}^3 - x_1{}^3).$$

Für die zwischen C und M liegende Schicht hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^{x_1} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx = \pi b^2 x_1 - \pi \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1^3}{3}.$$

Für den zwischen M_1 und B liegenden Abschnitt hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_2$ bis $x = a$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_{x_2}^{a} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx = \tfrac{2}{3} \pi a b^2 - \pi b^2 x_2^2 + \tfrac{1}{3} \pi \frac{b^2}{a^2} x_2^3.$$

Für das zwischen C und B liegende Volumen des halben Ellipsoides hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^{a} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx = \pi b^2 a - \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$= \tfrac{2}{3} a b^2 \pi,$$

und folglich ist das Volumen des ganzen Ellipsoides

$$\tfrac{4}{3} a b^2 \pi.$$

5. Das abgeplattete Rotationsellipsoid. Nimmt man x als abhängige, y als unabhängige Veränderliche, so ist die Gleichung der Ellipse

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

und daher

$$v = \pi \int \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)\, dy$$

$$= \pi a^2 y - \pi \frac{a^2}{b^2} \frac{y^3}{3},$$

und es gelten hier dieselben Betrachtungen wie vorher.

Für das Volumen des halben Ellipsoides hat man das Integral zwischen den Grenzen von $y = 0$ bis $y = b$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^{b} \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)\, dy = \pi a^2 b - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^3}{3}$$

$$= \tfrac{2}{3} a^2 b \pi,$$

und folglich ist das Volumen des ganzen Ellipsoides

$$\tfrac{4}{3}\, a^2 b \pi.$$

6. Das getheilte Rotationshyperboloid. Die Gleichung der Hyperbel, Figur 118, ist

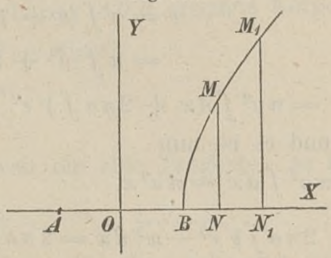
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

und daher

$$v = \pi \int \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)\,dx$$

$$= \pi \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^3}{3} - \pi b^2 x.$$

Fig. 118.



Für das Volumen der zwischen M und M_1 liegenden Schicht hat man, wenn $ON = x_1$ und $ON_1 = x_2$ ist, das Integral zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)\,dx = \tfrac{1}{3}\pi \frac{b^2}{a^2}\,(x_2{}^3 - x_1{}^3) - \pi b^2\,(x_2 - x_1).$$

Für das Volumen des zwischen B und M liegenden Abschnittes hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = x_1$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_{a}^{x_1} \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)\,dx = \tfrac{1}{3}\pi \frac{b^2}{a^2}\,(x_1{}^3 - a^3) - \pi b\,(x_1 - a)$$

$$= \tfrac{2}{3}\,\pi a b^2 + \tfrac{1}{3}\pi \frac{b^2}{a^2}\,x_1{}^3 - \pi b^2 x_1.$$

7. Der Ring. Die Gleichung des erzeugenden Kreises, Figur 119, ist

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2,$$

daher

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

und es gilt

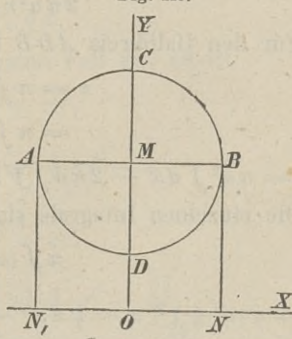
$$y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$$

für den Halbkreis ACB und

$$y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$$

für den Halbkreis ADB. Beide müssen gesondert betrachtet werden, denn

Fig. 119.



der Halbkreis ACB gibt den von der Fläche N_1ACBN erzeugten Körper, und der Halbkreis ADB gibt den von der Fläche N_1ADBN erzeugten Körper. Der durch die Kreisfläche erzeugte Rotationskörper ist daher die Differenz dieser beiden.

Für den Halbkreis ACB haben wir daher

$$v = \pi \int (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$$
$$= \pi \int (a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi a^2 \int dx + 2\pi a \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx + \pi r^2 \int dx - \pi \int x^2\, dx,$$

und es ist nun

$$\pi a^2 \int dx = \pi a^2 x,$$
$$2\pi a \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\pi a \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right)\right],$$
$$\pi r^2 \int dx = \pi r^2 x,$$
$$\pi \int x^2\, dx = \pi \frac{x^3}{3},$$

daher

$$\pi \int (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$$
$$= \pi (a^2 + r^2) x - \tfrac{1}{3}\pi x^3 + 2\pi a \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right)\right].$$

Für den Bogen CB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^r (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi (a^2 + r^2)\, r - \tfrac{1}{3}\pi r^3 + \pi a r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$= \pi a^2 r + \tfrac{2}{3}\pi r^3 + \tfrac{1}{2}\pi^2 a r^2,$$

daher ist der durch den Halbkreis ACB erzeugte Körper

$$2\pi a^2 r + \tfrac{4}{3}\pi r^3 + \pi^2 a r^2.$$

Für den Halbkreis ADB haben wir nun

$$v = \pi \int (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$$
$$= \pi \int (a^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi a^2 \int dx - 2\pi a \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx + \pi r^2 \int dx - \pi \int x^2\, dx.$$

Die einzelnen Integrale sind dieselben wie vorher; folglich ist

$$\pi \int (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$$
$$= \pi (a^2 + r^2)\, x - \tfrac{1}{3}\pi x^3 - 2\pi a \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right)\right].$$

Für den Bogen DB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^r (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi (a^2 + r^2)\, r - \tfrac{1}{3} \pi r^3 - \pi a r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi a^2 r + \tfrac{2}{3} \pi r^3 - \tfrac{1}{2} \pi^2 a r^2,$$

und folglich ist der durch den Halbkreis ADB erzeugte Körper

$$2\pi a^2 r + \tfrac{4}{3} \pi r^3 - \pi^2 a r^2.$$

Das Volumen des Ringes ist mithin

$$2\pi^2 a r^2.$$

Ist $a = r$, dreht sich also der Kreis um eine Tangente, so ist das Volumen des Ringes

$$2\pi^2 r^3.$$

Die vorstehende Aufgabe hätte auch noch anders behandelt werden können. Einem jeden Werthe von x entsprechen zwei Werthe von y. Bezeichnen wir die Werthe von y für die obere Kurve ACB mit y_1 und für die untere Kurve ADB mit y_2, so ist die zwischen beiden Kurven liegende Strecke $y_1 - y_2$. Das Volumenelement für die obere Kurve ist daher

$$\pi y_1^2\, dx,$$

und für die untere Kurve

$$\pi y_2^2\, dx,$$

mithin ist das zwischen beiden Kurven liegende Volumenelement die Differenz dieser beiden, also

$$\pi y_1^2\, dx - \pi y_2^2\, dx = \pi (y_1^2 - y_2^2)\, dx.$$

Für das Volumen desjenigen Rotationskörpers, welcher von der zwischen beiden Kurven liegenden Fläche erzeugt wird, hat man daher

$$\pi \int (y_1^2 - y_2^2)\, dx.$$

Wenden wir dieses auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2},$$

also

$$y_1^2 = a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2,$$

ferner ist

$$y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2},$$

also

$$y_2^2 = a^2 - 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2,$$

folglich

$$y_1^2 - y_2^2 = 4a\sqrt{r^2 - x^2},$$

demnach

$$\pi \int (y_1^2 - y_2^2)\, dx = 4\pi a \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Es ist aber

$$4\pi a \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi a \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right)\right].$$

Für das Flächenstück CBD ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$4\pi a \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi a \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2 a r^2,$$

und daher ist das Volumen des von der Kreisfläche erzeugten Ringes

$$2\pi^2 a r^2.$$

§ 86.

Oberflächen und Volumina von Körpern bei bekanntem Inhalte und Umfange paralleler Schnitte.

Ist ein Körper so beschaffen, dass sich sowol der Inhalt als auch der Umfang eines zu einer der Coordinatenebenen parallelen Schnittes als Funktion der unabhängigen Veränderlichen bestimmen lässt, so kann man sowol das Volumen als auch die Oberfläche eines solchen Körpers berechnen.

Legen wir parallel zur YZEbene, also senkrecht auf die XAxe, in der Entfernung x vom Anfangspunkte der Coordinaten durch den Körper einen Schnitt; ist F der Flächeninhalt dieses Schnittes, wo F eine Funktion von x ist, und legen wir sodann in der Entfernung dx von diesem einen zweiten parallelen Schnitt, so entsteht zwischen diesen beiden parallelen Ebenen eine unendlich dünne Körperschicht, welche als ein unendlich dünner Cylinder oder unendlich dünnes Prisma von der Grundfläche F und der Höhe dx angesehen werden kann, und dessen Volumen mithin Fdx ist. Dieses Volumen ist aber ein Volumenelement des Körpers und gleich dv, wenn mit v ein endliches Volumen des Körpers oder das Volumen des ganzen Körpers bezeichnet wird. Wir haben daher

$$dv = Fdx,$$

nnd folglich

$$v = \int F d x.$$

Ist ferner U der Umfang des ersten in der Entfernung x vom Anfangspunkte der Coordinaten gelegten Schnittes, wo U ebenfalls eine Funktion von x ist, und legen wir durch die XAxe eine Ebene, so dass diese Axe in die Ebene hineinfällt, so schneidet diese Ebene die Oberfläche des Körpers in einer Kurve, von welcher ein unendlich kleiner Bogen von der Länge ds zwischen den Umfängen des ersten und zweiten Schnittes liegt. Die zwischen beiden Schnitten liegende unendlich schmale Fläche ist daher Uds. Diese Fläche ist aber ein Flächenelement der Oberfläche des Körpers und gleich do, wenn mit o ein endlicher Theil der Fläche oder die ganze Oberfläche des Körpers bezeichnet wird. Wir haben daher

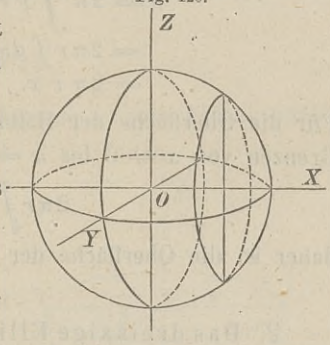
$$do = U ds,$$

und folglich

$$o = \int U ds.$$

1. Die Kugel. Legt man im Abstande x vom Anfangspunkte der Coordinaten eine Ebene durch die Kugel, Figur 120, so dass sie mit der YZEbene parallel ist und auf der XAxe senkrecht steht, so ist die Schnittfläche ein Kreis, dessen Halbmesser

Fig. 120.



$$y = z = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Demnach ist der Flächeninhalt dieses Kreises

$$F = (r^2 - x^2)\,\pi,$$

und folglich das Volumenelement der Kugel

$$dv = (r^2 - x^2)\,\pi\, dx,$$

so wie das Volumen selbst

$$v = \pi \int (r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Für das Volumen der Halbkugel hat man das Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \tfrac{2}{3}\pi r^3,$$

mithin ist das Volumen der ganzen Kugel

$$\tfrac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Der Umfang des betrachteten Schnittes ist

$$2\pi\sqrt{r^2-x^2},$$

daher ist das Flächenelement

$$do = 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,ds,$$

und die Fläche selbst

$$o = 2\pi\int\sqrt{r^2-x^2}\,ds.$$

Nun ist

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Es ist aber der Schnitt, welcher die XAxe aufnimmt ein grösster Kugelkreis, daher

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

und folglich

$$ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} o &= 2\pi\int\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \\ &= 2\pi r\int dx \\ &= 2\pi\, r\, x. \end{aligned}$$

Für die Oberfläche der Halbkugel ist das Integral zwischen den Grenzen von $x=0$ bis $x=r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi r\int_0^r dx = 2\pi r^2,$$

daher ist die Oberfläche der ganzen Kugel

$$4\pi r^2.$$

2. Das dreiaxige Ellipsoid. Die Gleichung desselben ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Construirt man im Abstande x vom Anfangspunkte der Coordinaten, Figur 121, einen Schnitt parallel mit der YZEbene, so ist derselbe eine Ellipse, deren Axen sind

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad\text{und}\quad z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist mithin

$$F = \frac{bc}{a^2}\,(a^2-x^2)\,\pi,$$

Demnach ist das Volumenelement

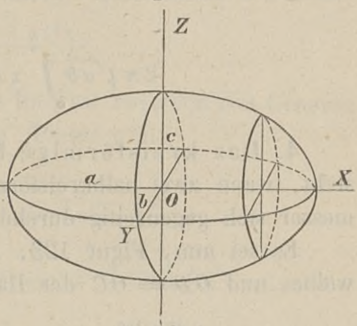
$$dv = \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx,$$

und das Volumen selbst

$$v = \pi \frac{bc}{a^2} \int (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \frac{bc}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right).$$

Fig. 121.



Für das Volumen des halben Ellipsoides ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\pi \frac{bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \pi \frac{bc}{a^2} (a^3 - \tfrac{1}{3} a^3)$$

$$= \tfrac{2}{3} \pi abc,$$

und mithin ist das Volumen des ganzen Ellipsoides

$$\tfrac{4}{3} \pi abc.$$

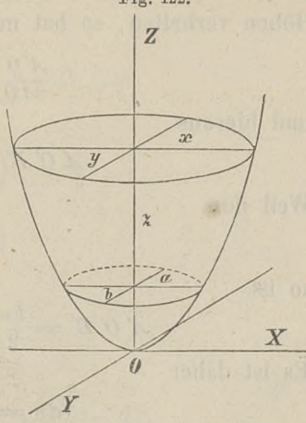
3. Das elliptische Paraboloid. Die Gleichung desselben ist

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$$

Construirt man, Figur 122, im Abstande z vom Anfangspunkte der Coordinaten einen Schnitt parallel mit der XYEbene, so ist derselbe eine Ellipse, deren Axen sind

$$x = \sqrt{2az} \text{ und } y = \sqrt{2bz}.$$

Fig. 122.



Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist daher

$$F = 2\pi \sqrt{ab} \cdot z,$$

demnach ist das Volumenelement

$$dv = 2\pi \sqrt{ab} \cdot z\, dz,$$

und das Volumen selbst

$$v = 2\pi \sqrt{ab} \int z\, dz$$

$$= \pi \sqrt{ab} \cdot z^2.$$

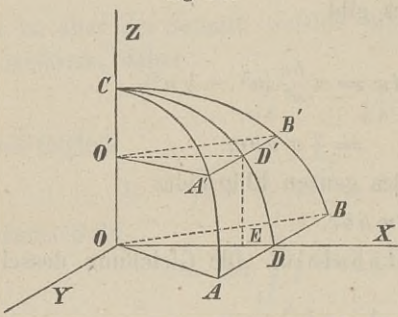
Für einen Schnitt im Abstande h vom Anfangspunkte der Coordinaten hat man das Integral zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = h$ zu nehmen. Dieses gibt

$$2\pi\sqrt{ab}\int_0^h z\,dz = \pi\sqrt{ab}\cdot h^2.$$

4. Das kreisförmige Klostergewölbe. Dasselbe entsteht, wenn zwei halbkreisförmige Cylinder von gleichem Halbmesser sich gegenseitig durchdringen.

Es sei nun, Figur 123, ABC ein Theil eines solchen Gewölbes und $OD = OC$ der Halbmesser des Wölbungskreises, so wie $AB = b$ eine Seite der Grundfläche. In der Entfernung $OO' = z$ befinde sich ein Schnitt $A'O'B'$ parallel zu AOB. Um den Flächeninhalt dieses Schnittes zu bekommen, hat man zu berücksichtigen, dass die Dreiecke $A'O'B'$ und AOB ähnlich sind. Betrachtet man AB und $A'B'$ als die Grundlinien dieser Dreiecke, so sind OD und $O'D'$ die Höhen derselben. Es ist aber $OD = r$ und $O'D' = OE = x = \sqrt{r^2 - z^2}$. Da sich nun die Flächen ähnlicher Dreiecke wie die zweiten Potenzen ihrer Höhen verhalten, so hat man die Proportion

Fig. 123.



$$\frac{A'O'B'}{AOB} = \frac{r^2 - z^2}{r^2},$$

und hieraus

$$A'O'B' = AOB\cdot\frac{r^2 - z^2}{r^2}.$$

Weil nun

$$AOB = \frac{br}{2},$$

so ist

$$A'O'B' = \frac{br}{2}\cdot\frac{r^2 - z^2}{r^2} = \frac{b}{2r}(r^2 - z^2).$$

Es ist daher

$$dv = \frac{b}{2r}(r^2 - z^2)\,dz,$$

und folglich

$$v = \frac{b}{2r}\int (r^2 - z^2)\, dz$$
$$= \frac{b}{2r}\left(r^2 z - \frac{z^3}{3}\right).$$

Für das Volumen $OABC$ ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{b}{2r}\int_0^r (r^2 - z^2)\, dz = \frac{b}{2r}\,(r^3 - \tfrac{1}{3}\, r^3)$$
$$= \frac{b}{2r} \cdot \tfrac{2}{3}\, r^3 = \tfrac{1}{3}\, b r^2.$$

Dieses kann man auch schreiben

$$\tfrac{2}{3} \cdot \frac{br}{2} \cdot r,$$

und dann heisst es: Das Volumen des Gewölbetheiles ist gleich $\frac{2}{3}$ desjenigen Prismas, welches das Dreieck OAB zur Grundfläche und den Radius des Wölbungskreises zur Höhe hat.

Um die Oberfläche des Gewölbetheiles, also die Fläche CAB zu bestimmen, hat man zu beachten, dass das Flächenelement ist

$$do = A'B' \cdot ds,$$

und mithin die Fläche selbst

$$o = \int A'B' \cdot ds.$$

Aus der Proportion

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r}$$

folgt

$$A'B' = \frac{AB \,.\, \sqrt{r^2 - z^2}}{r} = \frac{b}{r}\sqrt{r^2 - z^2}.$$

Ferner ist

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} \cdot dz,$$

und weil

$$x = \sqrt{r^2 - z^2},$$

so ist

$$\frac{dx}{dz} = - \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}},$$

daher ist weiter

$$ds = \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2 - z^2}}\, dz = \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}}\, dz.$$

Dieses eingesetzt, erhält man

$$o = \int \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - z^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \, dz$$

$$= b \int dz = bz.$$

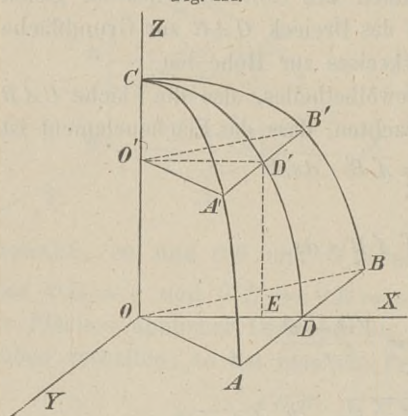
Für die Fläche OAB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$b \int_0^r dz = br.$$

Die Fläche ist daher gleich einem Rechtecke, welches die Seite des Gewölbes und den Radius des Wölbungskreises zu Seiten hat.

5. Das elliptische Klostergewölbe. Bei diesem ist die Wölbungskurve CD, Figur 124, eine Ellipse, deren Axen $OD = a$ und $OC = h$ sind. $O'A'B'$ ist ein Schnitt parallel mit OAB. Die Dreiecke $O'A'B'$ und OAB sind ähnlich, und es sind, wenn AB und $A'B'$ als die Grundlinien dieser Dreiecke angesehen werden, $OD = a$ und $O'D' = x$ die Höhen derselben. Es ist aber

Fig. 124.



$$x = \frac{a}{h} \sqrt{h^2 - z^2},$$

und da sich bei ähnlichen Dreiecken die Flächen wie die zweiten Potenzen der Höhen verhalten, so hat man die Proportion

$$\frac{O'A'B'}{OAB} = \frac{\frac{a^2}{h^2}(h^2 - z^2)}{a^2} = \frac{h^2 - z^2}{h^2},$$

und weil

$$OAB = \frac{ab}{2},$$

so ist

$$O'A'B' = \frac{ab}{2h^2}(h^2 - z^2).$$

Es ist also

$$dv = \frac{ab}{2h^2}(h^2 - z^2) \, dz,$$

und folglich

$$v = \frac{ab}{2h^2}\int (h^2 - z^2)\, dz$$
$$= \frac{ab}{2h^2}\left(h^2 z - \frac{z^3}{3}\right).$$

Für das Volumen $OABC$ hat man das Integral zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = h$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{ab}{2h^2}\int_0^h (h^2 - z^2)\, dz = \frac{ab}{2h^2}(h^3 - \tfrac{1}{3}h^3) = \frac{ab}{2h^2}\cdot \tfrac{2}{3}h^3$$
$$= \tfrac{1}{3}\, abh.$$

Dieses kann man auch schreiben

$$\tfrac{2}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot h,$$

d. h. das Volumen ist gleich $\frac{2}{3}$ eines Prismas, welches das Dreieck OAB zur Grundfläche und die Höhe OC zur Höhe hat.

Für die Oberfläche CAB ist das Flächenelement

$$do = A'B'\cdot ds,$$

und die Fläche selbst

$$o = \int A'B'\cdot ds.$$

Es ist aber

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{x}{a},$$

also

$$A'B' = AB\cdot\frac{x}{a},$$
$$= \frac{b\,.\,\frac{a}{h}\sqrt{h^2 - z^2}}{a}$$
$$= \frac{b}{h}\sqrt{h^2 - z^2}.$$

Ferner ist

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz,$$

nun ist

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{a}{h}\cdot\frac{z}{\sqrt{h^2 - z^2}},$$

daher

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a^2 z^2}{h^2(h^2 - z^2)}}\, dz$$
$$= \sqrt{\frac{h^4 - (h^2 - a^2)z^2}{h^2(h^2 - z^2)}}\, dz.$$

Setzt man diese Ausdrücke in das Integral für die Oberfläche ein, so erhält man

$$o = \int \frac{b}{h} \sqrt{h^2 - z^2} \sqrt{\frac{h^4 - (h^2 - a^2) z^2}{h^2 (h^2 - z^2)}}\, dz$$
$$= \frac{b}{h^2} \int \sqrt{h^4 - (h^2 - a^2) z^2} \cdot dz.$$

Setzt man

$$\frac{h^2 - a^2}{h^2} = e^2, \text{ also } h^2 - a^2 = e^2 h^2,$$

so wird

$$o = \frac{b}{h} \int \sqrt{h^2 - e^2 z^2}\, dz.$$

Nun ist zunächst

$$\frac{b}{h} \int \sqrt{h^2 - e^2 z^2}\, dz = \frac{b}{h} \left[\frac{z \sqrt{h^2 - e^2 z^2}}{2} + \frac{h^2}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{h^2 - e^2 z^2}} \right],$$

und weiter

$$\int \frac{dz}{\sqrt{h^2 - e^2 z^2}} = \frac{1}{e} \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{e z}{h} \right),$$

daher

$$\frac{b}{h} \int \sqrt{h^2 - e^2 z^2}\, dz = \frac{b}{h} \left[\frac{z \sqrt{h^2 - e^2 z^2}}{2} + \frac{h^2}{2e} \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{e z}{h} \right) \right].$$

Für die Fläche CAB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = h$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{b}{h} \int_0^h \sqrt{h^2 - e^2 z^2}\, dz = \frac{b}{h} \left[\frac{h \sqrt{h^2 - e^2 h^2}}{2} + \frac{h^2}{2e} \operatorname{arc} (\sin = e) \right]$$
$$= \frac{ab}{2} + \frac{bh}{2e} \operatorname{arc} (\sin = e).$$

Für ein gedrücktes Gewölbe ist a grösser als h, daher ist

$$h^2 - a^2 = - e^2 h^2,$$

und es ist die Fläche

$$o = \frac{b}{h} \int \sqrt{h^2 + e^2 z^2}\, dz = \frac{be}{h} \int \sqrt{\frac{h^2}{e^2} + z^2} \cdot dz.$$

Nun ist

$$\frac{be}{h} \int \sqrt{\frac{h^2}{e^2} + z^2}\, dz = \frac{be}{h} \left[\frac{z \sqrt{\frac{h^2}{e^2} + z^2}}{2} + \frac{h^2}{2 e^2} \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{h^2}{e^2} + z^2}} \right],$$

und weiter

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+z^2}} = l\left(z+\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+z^2}\right),$$

daher

$$\frac{be}{h}\int\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+z^2}\cdot dz = \frac{be}{h}\left[\frac{z\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+z^2}}{2}+\frac{h^2}{2\,e^2}\,l\left(z+\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+z^2}\right)\right].$$

Für die Fläche CAB ist dieses Integral zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = h$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{be}{h}\int_0^h\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+z^2}\,dz = \frac{be}{h}\left[\frac{h\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+h^2}}{2}+\frac{h^2}{2\,e^2}\,l\left(h+\sqrt{\frac{h^2}{e^2}+h^2}\right)-\frac{h^2}{2e^2}\,l\left(\frac{h}{e}\right)\right]$$

$$= \frac{ab}{2}+\frac{hb}{2e}\,l\left(e+\frac{a}{h}\right).$$

§ 87.

Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

Nicht immer ist man im Stande, bestimmte Integrale nach den angegebenen Methoden ermitteln zu können, und man muss sich dann mit einer näherungsweisen Berechnung des numerischen Werthes eines solchen Integrals begnügen. Es dienen hierzu die folgenden Betrachtungen.

Wir können eine jede Funktion, sie bezeichne auch sonst was sie wolle, geometrisch darstellen, wenn wir die unabhängige Veränderliche als Abscisse und die abhängige Veränderliche als Ordinate eines rechtwinkeligen Coordinatensystems betrachten. Es ist dann

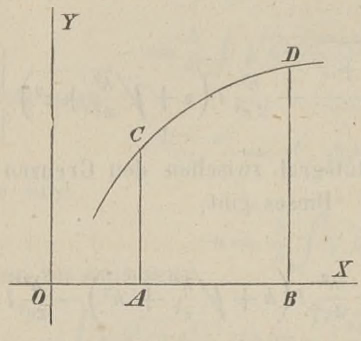
$$y = f(x)$$

stets der Werth derjenigen Ordinate, welche durch den dem x beigelegten Werth bestimmt wird oder diesem Werthe von x entspricht. Lassen wir nun x alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ stetig durchlaufen, und ist auch die Funktion innerhalb dieser Grenzen endlich und stetig, so überstreicht die veränderliche Ordinate eine Fläche $ABDC$, Figur 125, welche von der zwischen den Werthen von $x = a$ bis $x = b$ liegenden Strecke der Abscissenaxe, von den Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ so wie von derjenigen

Kurve eingeschlossen ist, welche der Endpunkt der veränderlichen Ordinate zwischen $f(a)$ und $f(b)$ beschreibt und deren Gleichung

$$y = f(x)$$

Fig. 125.



ist.

Diese Fläche ist aber ebenfalls eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, da sie mit x beständig sich ändert, und kann daher mit $F(x)$ bezeichnet werden. Betrachtet man nun $f(x)\,dx$ als das Differential von $F(x)$, so ist offenbar $f(x)\,dx$ ein Element dieser Fläche und

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

wo, wie das früher gezeigt worden ist, $f(x)$ eine Ordinate und dx eine unendlich kleine Strecke der Abscissenaxe, also $f(x)\,dx$ ein unendlich schmales Rechteck bezeichnet, dessen Seiten $f(x)$ und dx sind.

Lässt sich die Funktion

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

nach einer der angegebenen Methoden integriren, so erhalten wir die Fläche $F(x)$ zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ oder den numerischen Werth des Integrals; ist aber eine solche Integration nicht ausführbar, so können wir den Inhalt der fraglichen Fläche näherungsweise berechnen und mithin auch den numerischen Werth des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

näherungsweise bestimmen, da die Flächenzahl gleich dem numerischen Werthe des Integrals ist.

Denn theilen wir die Strecke AB in n gleiche Theile und construiren die den Theilpunkten zugehörigen Ordinaten, so zerfällt die Fläche in n Streifen, welche um so mehr als Trapeze angesehen werden können, je grösser n ist, je näher also die Theilpunkte bei einander liegen, je schmaler also diese Streifen sind.

Die Summe der Flächeninhalte dieser Trapeze ist dann näherungsweise die Fläche $F(x)$, also näherungsweise der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

und zwar um so mehr, je grösser n ist.

Es geht aber hieraus hervor, dass wir den numerischen Werth eines jeden Integrals von der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

wie den Inhalt einer Fläche, d. h. als eine Flächenzahl ansehen und nach der angegebenen Methode näherungsweise bestimmen können.

Bezeichnen wir den gesuchten Flächeninhalt, also den zu bestimmenden angenäherten numerischen Werth des Integrals mit F, die Anfangsordinate $f(a)$ mit y_0, die Endordinate $f(b)$ mit y_n, und die zwischenliegenden Ordinaten der Reihe nach mit $y_1, y_2, y_3 \ldots$ so wie den Abstand je zweier solcher Ordinaten mit h, so sind die Flächeninhalte der aufeinander folgenden Trapeze

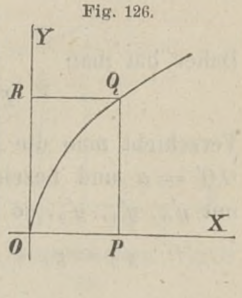
$$\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)h,\ \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)h,\ \tfrac{1}{2}(y_2+y_3)h \ldots \tfrac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h,$$

und mithin ist die gesuchte Fläche oder der angenäherte numerische Werth des Integrals gleich der Summe dieser Trapeze, also

$$F = h\left[\tfrac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}\right].$$

Hierbei werden diejenigen Kurventheile, welche zwischen je zwei Ordinaten liegen, als gerade Linien angesehen. Einen genaueren Werth als den vorstehenden gibt daher die Simpson'sche Formel, bei welcher die durch die Endpunkte dreier aufeinander folgender Ordinaten gehenden Kurventheile wie Parabelbögen angesehen werden.

Fig. 126.



Ist, Figur 126, OQ ein Parabelbogen, so ist die Fläche

$$OPQ = \tfrac{2}{3}xy,$$

und die Fläche

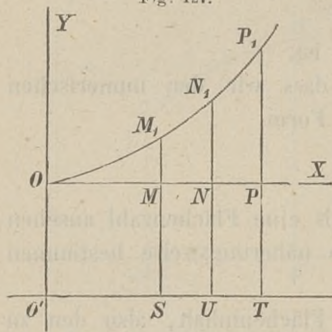
$$ORQ = \tfrac{1}{3}xy.$$

Es ist daher in Figur 127, bei welcher die Coordinatenaxen gegen die vorhergehende

Figur mit einander vertauscht sind, die Fläche

$$OMM_1 = \tfrac{1}{3} x y_0,$$

Fig. 127.



und wenn $MN = NP$ mit h bezeichnet wird, so ist die Fläche

$$OPP_1 = \tfrac{1}{3}(x+2h)\, y_2.$$

Nun ist die Fläche

$$MPP_1M_1 = OPP_1 - OMM_1,$$

daher, wenn wir MPP_1M_1 mit F bezeichnen,

$$F = \tfrac{1}{3}(x+2h)\, y_2 - \tfrac{1}{3} x y_0.$$

Es ist aber

$$y_0 = \frac{x^2}{2p} \text{ und } y_2 = \frac{(x+2h)^2}{2p},$$

daher

$$F = \tfrac{1}{3}\frac{(x+2h)^3}{2p} - \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{2p}$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2p}\left[(x+2h)^3 - x^3\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2p}\left(6x^2h + 12xh^2 + 8h^3\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2p}\left(6x^2 + 12xh + 8h^2\right).$$

Wir können aber schreiben

$$\frac{1}{2p}\left(6x^2 + 12xh + 8h^2\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\left[x^2 + 4(x^2 + 2xh + h^2) + x^2 + 2x(2h) + (2h)^2\right]$$

$$= \frac{x^2}{2p} + 4\,\frac{(x+h)^2}{2p} + \frac{(x+2h)^2}{2p},$$

das ist aber

$$= y_0 + 4y_1 + y_2.$$

Daher hat man

$$F = \tfrac{1}{3} h\,(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Verschiebt man die XAxe parallel mit sich selbst um die Strecke $OO' = a$ und bezeichnet die neuen Ordinaten SM_1, UN_1, TP_1 mit y'_0, y'_1, y'_2, so ist

$$y'_0 = y_0 + a;\quad y'_1 = y_1 + a;\quad y'_2 = y_2 + a,$$

oder

$$y_0 = y'_0 - a;\quad y_1 = y'_1 - a;\quad y_2 = y'_2 - a.$$

Die Fläche STP_1M_1 ist aber

$$STPM + MPP_1M_1,$$

das ist

$$a \cdot 2h + \tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

und wenn man die neuen Ordinaten einführt,

$$a \cdot 2h + \tfrac{1}{3}h\,[y'_0 - a + 4\,(y'_1 - a) + y'_2 - a]$$
$$= a \cdot 2h + \tfrac{1}{3}hy'_0 - \tfrac{1}{3}ha + 4 \cdot \tfrac{1}{3}y'_1h - 4 \cdot \tfrac{1}{3}ha + \tfrac{1}{3}y'_2h - \tfrac{1}{3}ha$$
$$= \tfrac{1}{3}h\,(y'_0 + 4y'_1 + y'_2).$$

Es geht hieraus hervor, dass, wenn man durch drei Punkte M_1, N_1, P_1, deren Ordinaten gleich weit von einander abstehen, eine Parabel so legt, dass die Axe derselben mit den Ordinaten parallel ist, der Flächeninhalt der beiden nebeneinander liegenden parabolischen Streifen aus den drei Ordinaten und dem Abstande je zweier derselben berechnet werden kann.

Betrachtet man die Kurventheile CE, EF, FD, u. s. w. Figur 128, als Parabelbögen, so ist die Fläche

$$AGEC = \tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

und die Fläche

$$GHFE = \tfrac{1}{3}h\,(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

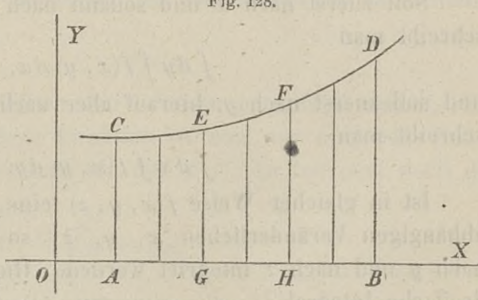
daher die Fläche

$$AHFC = \tfrac{1}{3}h\,[y_0 + 4\,(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4],$$

und nimmt man noch einen dritten solchen Doppelstreifen $HBDF$ dazu, so ist die Fläche $ABDC$

$$\tfrac{1}{3}h\,[y_0 + 4\,(y_1 + y_3 + y_5) + 2\,(y_2 + y_4) + y_6].$$

Fig. 128.



Hieraus ergibt sich aber das Bildungsgesetz der Simpson'schen Formel für beliebig viele solcher parabolischer Doppelstreifen.

Um also mittelst dieser Formel die einem bestimmten Integrale entsprechende Fläche zu berechnen oder den numerischen Werth des bestimmten Integrals näherungsweise zu ermitteln, theilt man die Strecke AB der Abscissenaxe oder das von der unabhängigen Veränderlichen zu durchlaufende Intervall in eine hinlängliche Anzahl gleicher Theile, jedoch so, dass die Anzahl derselben eine gerade Zahl ist, und bestimmt die den Theilpunkten zugehörigen Ordinaten oder Funktionswerthe. Der gesuchte Näherungswerth ist sodann

$$\tfrac{1}{3} h \left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\right].$$

XV. Abschnitt.

Die mehrfachen Integrale und ihre geometrischen Anwendungen.

§ 88.

Die mehrfachen Integrale.

Wenn $f(x, y)$ eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y ist, so kann dieselbe sowol nach x als auch nach y integrirt werden. Man bezeichnet dieses so

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

und nennt ein solches Integral ein Doppelintegral.

Diese zweifache Integration wird in der Weise ausgeführt, dass man die Funktion entweder zuerst nach x integrirt und dabei y wie eine Constante betrachtet, hierauf aber die Integration nach y ausführt; oder dass man zuerst nach y integrirt und dabei x wie eine Constante betrachtet; hierauf aber die Integration nach x ausführt.

Soll zuerst nach x und sodann nach y integrirt werden, so schreibt man

$$\int dy \int f(x, y)\, dx,$$

und soll zuerst nach y, hierauf aber nach x integrirt werden, so schreibt man

$$\int dx \int f(x, y)\, dy.$$

Ist in gleicher Weise $f(x, y, z)$ eine Funktion der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z, so kann dieselbe nach x, nach y und nach z integrirt werden. Hierdurch erhält man das dreifache Integral

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

und es wird die Integration der Reihe nach nach einer jeden der unabhängigen Veränderlichen ausgeführt, indem man die andern wie Constante betrachtet.

Die mehrfachen Integrale werden daher ebenso wie die einfachen Integrale behandelt, indem nur das Integrationsverfahren mehrere Male hintereinander angewendet wird.

Nach einer jeden Integration ist eine Constante hinzuzufügen.

Wir haben nun gesehen, dass das einfache bestimmte Integral die zwischen zwei bestimmten Werthen der unabhängigen Veränderlichen liegende Summe einer unendlich grossen Anzahl von Werthen des Differentials ist. Dem entsprechend ist das mehrfache bestimmte Integral die zwischen je zwei bestimmten Werthen einer jeden der unabhängigen Veränderlichen liegende Summe einer unendlich grossen Anzahl von Werthen des Differentials.

Sind y_1 und y_2 die bestimmten Werthe von y oder die Grenzen, zwischen denen das Integral nach y zu nehmen ist, und sind x_1 und x_2 die bestimmten Werthe von x oder die Grenzen, zwischen denen das Integral nach x zu nehmen ist, so hat das bestimmte Doppelintegral die Form

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy,$$

wobei nun entweder y_1 und y_2 constante Werthe oder Funktionen von x sind. In einem jeden Falle ermittelt man das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy,$$

wobei x als Constante anzusehen ist, indem man das unbestimmte Integral von

$$\int f(x, y)\, dy,$$

und dieses sodann zwischen den Grenzen y_1 und y_2 nimmt. Die auf diese Weise erhaltene Funktion ist nun nur noch eine Funktion von x; bezeichnet man sie mit $\varphi(x)$, so hat man noch das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx$$

zu ermitteln. Der erhaltene Werth ist dann

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

Dasselbe gilt, wenn das Integral ein dreifaches bestimmtes Integral ist.

§ 89.

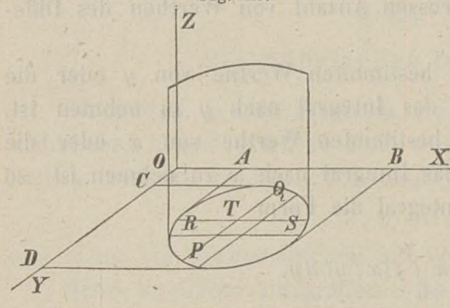
Bestimmung des Inhaltes krummer Oberflächen.

Wenn

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung irgend einer krummen Fläche ist, so lässt sich der Inhalt einer solchen Fläche oder eines Theiles derselben auf folgende Weise bestimmen. Es sei $PRQS$, Figur 129, die Projektion irgend eines Flächenstückes auf die XYEbene. Legen wir nun im Abstande x von der YZ Ebene und parallel mit ihr eine Ebene, so wie im Abstande dx von dieser eine zweite solche Ebene, so schliessen diese beiden Ebenen auf der Fläche einen unendlich schmalen Streifen ein, dessen Projektion PQ ist.

Fig. 129.



Legen wir ferner im Abstande y von der XZEbene und parallel mit ihr eine Ebene, so wie im Abstande dy von dieser eine zweite solche Ebene, so schliessen diese beiden Ebenen auf der Fläche einen unendlich schmalen Streifen ein, dessen Projektion RS ist. Diese vier Ebenen schneiden sich, und es entsteht dadurch auf der Fläche ein unendlich kleines Viereck, dessen Projektion das unendlich kleine Rechteck T ist. Der Inhalt dieses Rechtecks ist aber $dx\, dy$.

Legen wir durch den Punkt der Fläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, eine Berührungsebene, so fällt das unendlich kleine auf der Fläche befindliche Viereck mit dieser Ebene zusammen. Ist γ der Winkel, den die Berührungsebene mit der XYEbene bildet, und bezeichnen wir mit μ den Inhalt des unendlich kleinen Flächenstücks, so ist

$$dx\, dy = \mu \cos \gamma,$$

und folglich

$$\mu = \frac{dx\, dy}{\cos \gamma}.$$

Für den Berührungspunkt sind die Coordinaten der Fläche und die Coordinaten der Ebene einander gleich. Ist daher

$$z = ax + by + c$$

die Gleichung der Berührungsebene, so ist der Winkel, den sie mit der XYEbene macht, bestimmt durch die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Differentiiren wir die Gleichung der Ebene partiell nach x, so erhalten wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a,$$

und differentiiren wir diese Gleichung partiell nach y, so erhalten wir

$$\frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

Werden diese Werthe von a und b eingesetzt, so wird

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

und es ist das Flächenelement

$$\mu = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

der zu bestimmende Inhalt der Fläche ist aber

$$\int\!\!\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Sind $OA = x_1$ und $OB = x_2$ die Grenzen, zwischen denen das Integral nach x zu nehmen ist, sind ferner $OC = y_1$ und $OD = y_2$ die Grenzen, zwischen denen das Integral nach y zu nehmen ist, so hat man für den Inhalt des auf diese Weise begrenzten Flächenstückes das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3}\, dy.$$

1. Die Kugelfläche. Nehmen wir den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkte der Coordinaten, so ist die Gleich-

ung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Hieraus ergeben sich die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Es ist demnach der Ausdruck für das Flächenelement

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} \cdot dx\, dy$$

$$= \frac{r}{z}\, dx\, dy.$$

Es ist aber

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

daher das Flächenelement

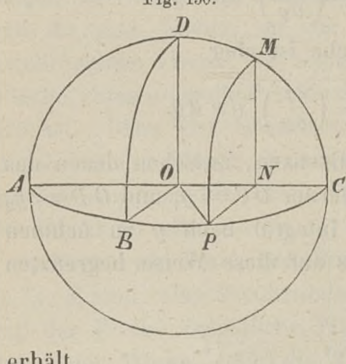
$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

so wie die Fläche selbst

$$r \int dx \int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Soll die Fläche für den achten Theil BCD, Figur 130, bestimmt werden, dessen Projektion auf die XYEbene der Viertelkreis OBC ist, und ist $ON = x$ $PN = y$, so hat man das Integral nach y, wo also x wie eine Constante angesehen wird, zu nehmen für die Strecke NP, das ist von $y = 0$ bis $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, und man erhält dadurch die unendlich dünne Zone MP. Ferner hat man das Integral nach x zu nehmen für die Strecke OC, das ist von $x = 0$ bis $x = r$, wodurch man dann die Fläche BCD erhält.

Fig. 130.



Es ist aber

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right),$$

daher

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = \tfrac{1}{2}\,\pi.$$

Hiernach ist nun weiter

$$r\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = \tfrac{1}{2}\,\pi r \int_0^r dx = \tfrac{1}{2}\,\pi r^2,$$

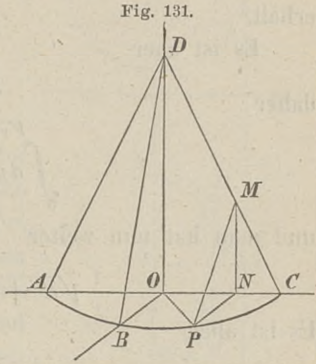
und folglich ist die Oberfläche der ganzen Kugel

$$8 \cdot \tfrac{1}{2}\,\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

2. Die Kegelfläche. Fällt der Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels mit dem Anfangspunkte der Coordinaten und seine Axe mit der Z Axe zusammen, Figur 131, so ist die Gleichung der Kegelfläche

$$\frac{h^2(x^2+y^2)}{(z-h)^2} = r^2,$$

Fig. 131.



wenn wir mit h den Abstand der Spitze vom Anfangspunkte der Coordinaten und mit r den Halbmesser der Grundfläche oder der Direktrix bezeichnen.

Lösen wir diese Gleichung für z auf, so erhalten wir

$$z = h \pm \frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2},$$

und wenn wir nur denjenigen Theil der Fläche betrachten, welcher zwischen der Spitze und der XY Ebene liegt, so haben wir zu setzen

$$z = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{h}{r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{h}{r}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Es ist sonach der Ausdruck für das Flächenelement

$$\sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{h^2}{r^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{h^2 + r^2}\, dx\, dy,$$

und mithin ist die Fläche selbst

$$\frac{1}{r} \sqrt{h^2 + r^2} \int dx \int dy.$$

Soll der vierte Theil der Kegelfläche, also die Fläche DBC bestimmt werden, deren Projektion auf die XYEbene der Viertelkreis OBC ist, und ist $ON = x$, $PN = y$, so hat man das Integral nach y, wo also x wie eine Constante zu betrachten ist, für die Strecke NP zu nehmen; das ist also zwischen den Grenzen von $y = 0$ bis $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Dadurch erhält man den unendlich schmalen Streifen MP. Hierauf hat man das Integral nach x für die Strecke OC zu nehmen, das ist also zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$, wodurch man die Fläche DBC erhält.

Es ist aber

$$\int dy = y,$$

daher

$$\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = \sqrt{r^2 - x^2},$$

und man hat nun weiter

$$\frac{1}{r} \sqrt{h^2 + r^2} \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Es ist aber

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right),$$

daher

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right),$$

und folglich

$$\frac{1}{r} \sqrt{h^2 + r^2} \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{h^2 + r^2} \left[\frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{r}\right)\right],$$

so wie

$$\frac{1}{r}\sqrt{h^2+r^2}\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{1}{r}\sqrt{h^2+r^2}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\pi r\sqrt{h^2+r^2},$$

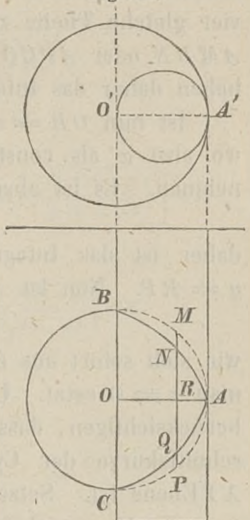
mithin ist die ganze Oberfläche des Kegels

$$4\cdot\tfrac{1}{4}\,\pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}.$$

3. Durchschnitt einer Kugel und eines geraden Kreiscylinders. Machen wir den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkte der Coordinaten, Figur 132, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Fig. 132.



Ist nun der Durchmesser des Cylinders gleich dem Halbmesser der Kugel, und fällt eine Mantellinie des Cylinders mit der YAxe zusammen, so ist für jedes beliebige y die Gleichung der Cylinderfläche

$$z^2+(x-\tfrac{1}{2}r)^2=(\tfrac{1}{2}r)^2.$$

also

$$z^2+x^2-rx=0.$$

Die Kugel schliesst hierbei einen Theil der Cylinderfläche und die Cylinderfläche einen Theil der Kugelfläche ein. Die Projektion des von der Cylinderfläche eingeschlossenen Theiles der Kugelfläche auf die XZEbene ist die Fläche des Kreises $O'A'$, und auf die XYEbene bildet sie die beiden sichelförmigen Flächen $AMBN$ und $APCQ$. Die Projektion des von der Kugelfläche eingeschlossenen Theiles der Cylinderfläche auf die XZEbene fällt mit der Projektion der Cylinderfläche, also mit dem Kreise $O'A'$ zusammen, und auf die XYEbene ist sie die Fläche $OCAB$. Diese beiden eingeschlossenen Flächenstücke der Kugel und des Cylinders lassen sich nun auf folgende Weise bestimmen.

Für das vom Cylinder eingeschlossene Flächenstück der Kugel ergeben sich aus der Gleichung der Kugelfläche die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

demnach ist das Flächenelement

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dx\,dy$$
$$=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

so wie die Fläche selbst

$$r\int dx\int\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Das Flächenstück wird aber sowol durch die XYEbene als auch durch die XZEbene halbirt, so dass es durch beide Ebenen in vier gleiche Theile zerfällt, und es ist die sichelförmige Fläche $AMBN$ oder $APCQ$ die Projektion eines solchen Viertels. Wir haben daher das Integral für ein solches Viertel zu ermitteln.

Ist nun $OR = x$, $RP = y$, so hat man das Integral nach y, wo also x als constant angesehen wird, für die Strecke QP zu nehmen. Es ist aber

$$QP = RP - RQ,$$

daher ist das Integral nach y zu nehmen von $y = RQ$ bis $y = RP$. Nun ist

$$RP = \sqrt{r^2-x^2},$$

wie sich sofort aus der Gleichung der Kugelfläche ergibt, wenn man $z = 0$ setzt. Um aber RQ zu bestimmen, haben wir zu berücksichtigen, dass die Kurve AQC die Projektion der Durchschnittskurve der Cylinderfläche mit der Kugelfläche auf die XYEbene ist. Setzen wir daher, um z zu eliminiren, den Werth von z, wie er sich aus der Gleichung der Cylinderfläche ergibt, nämlich

$$z^2 = rx - x^2$$

in die Gleichung der Kugel ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + rx - x^2 = r^2,$$

und hieraus für die Kurve AQC

$$y = \sqrt{r^2 - rx},$$

es ist also

$$RQ = \sqrt{r^2 - rx},$$

und das Integral nach y ist zu nehmen zwischen den Grenzen von $y = \sqrt{r^2 - rx}$ bis $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ferner hat man das Integral nach x zu nehmen für die Strecke OA, das ist von $x = 0$ bis $x = r$. Dieses gibt

$$r \int_0^r dx \int_{\sqrt{r^2 - r x}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right),$$

daher

$$\int_{\sqrt{r^2 - r x}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right),$$

und hiernach ist weiter

$$r \int_0^r dx \int_{\sqrt{r^2 - r x}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \int_0^r \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)\right] dx$$

$$= r \int_0^r \frac{\pi}{2}\, dx - r \int_0^r \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx.$$

Das erste Integral gibt

$$r \int_0^r \frac{\pi}{2}\, dx = \tfrac{1}{2} \pi r^2,$$

in Beziehung auf das zweite Integral aber haben wir zunächst

$$\frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{r} \cdot \sqrt{r - x}}{\sqrt{r + x} \cdot \sqrt{r - x}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r + x}},$$

und folglich wird das zweite Integral

$$r \int_0^r \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r + x}}\right) dx,$$

daher haben wir das Integral

$$\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r + x}}\right) dx$$

zu ermitteln.

Wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an, indem wir setzen

$$v = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+x}}\right); \quad dw = dx,$$

so ist

$$w = x,$$

$$dv = d \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+x}}\right)$$

$$= \frac{d\,\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+x}}}{\sqrt{1-\frac{r}{r+x}}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}(r+x)},$$

und folglich

$$\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+x}}\right) dx$$

$$= x \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+x}}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{r}\int \frac{\sqrt{x}}{r+x}\,dx.$$

Demnach ist

$$-r\int_0^r \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r+x}}\right) dx$$

$$= -r^2\cdot\frac{\pi}{4} - r\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\int_0^r \frac{\sqrt{x}}{r+x}\,dx.$$

Um das Integral

$$\int \frac{\sqrt{x}}{r+x}\,dx$$

zu ermitteln, setzen wir $\sqrt{x} = z$, so ist $x = z^2$; $dx = 2z\,dz$, daher

$$\int \frac{\sqrt{x}}{r+x}\,dx = 2\int \frac{z^2}{r+z^2}\,dz$$

und

$$2\int \frac{z^2}{r+z^2}\,dz = 2\int \frac{r+z^2-r}{r+z^2}\,dz = 2\int dz - 2r\int \frac{dz}{r+z^2}$$

$$2\int dz = 2z,$$

und setzen wir $\frac{z}{\sqrt{r}} = u$, $z^2 = ru^2$, $dz = \sqrt{r}\,du$, so ist

$$-2r\int\frac{dz}{r+z^2}=-2\sqrt{r}\int\frac{du}{1+u^2}=-2\sqrt{r}\ \mathrm{arc}\ (\tan=u),$$

und setzt man für u seinen Werth,

$$=-2\sqrt{r}\ \mathrm{arc}\left(\tan=\frac{z}{\sqrt{r}}\right),$$

daher

$$2\int\frac{z^2}{r+z^2}\,dz=2z-2\sqrt{r}\ \mathrm{arc}\left(\tan=\frac{z}{\sqrt{r}}\right),$$

und wird wieder $\sqrt{x}$ für z gesetzt, so erhält man

$$\int\frac{\sqrt{x}}{r+x}\,dx=2\sqrt{x}-2\sqrt{r}\ \mathrm{arc}\left(\tan=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}\right),$$

also

$$-r\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\int_0^r\frac{\sqrt{x}}{r+x}\,dx=-r\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\cdot 2\sqrt{r}+r\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\cdot 2\sqrt{r}\cdot\frac{\pi}{4}$$
$$=-r^2+r^2\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Nach diesem ist nun

$$r\int_0^r dx\int_{\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\tfrac{1}{2}\pi r^2-\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2+\tfrac{1}{4}\pi r^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi r^2-r^2,$$

daher ist das ganze eingeschlossene Flächenstück der Kugel

$$4\left(\tfrac{1}{2}\pi r^2-r^2\right)$$
$$=2\pi r^2-4r^2.$$

Für das von der Kugel eingeschlossene Flächenstück des Cylinders ergibt sich aus der Gleichung der Cylinderfläche

$$z=\sqrt{rx-x^2}$$

der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{r-2x}{2\sqrt{rx-x^2}},$$

während ein partieller Differentialquotient nach y nicht vorhanden ist. Das Flächenelement ist daher

$$\sqrt{1+\frac{(r-2x)^2}{4(rx-x^2)}}\,dx\,dy$$
$$=\frac{r}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{rx-x^2}}\,dx\,dy,$$

und die Fläche selbst

$$\frac{r}{2}\int\frac{1}{\sqrt{rx-x^2}}\,dx\int dy.$$

Das Flächenstück des Cylinders wird sowol durch die XYEbene als auch durch die XZEbene halbirt, so dass es durch beide Ebenen in vier gleiche Theile zerfällt, und es ist die Fläche $OANB$ oder $OAQC$ die Projektion eines solchen Viertels auf die XYEbene. Wir haben daher das Integral für ein solches Viertel zu ermitteln.

Ist wieder $OR = x$, $RQ = y$, so hat man das Integral nach y, wo also x als constant angesehen wird, für die Strecke RQ zu nehmen, und weil

$$RQ = \sqrt{r^2 - rx},$$

so ist das Integral nach y zwischen den Grenzen von $y = 0$ bis $y = \sqrt{r^2 - rx}$ zu nehmen. Ferner hat man das Integral nach x für die Strecke OA, also zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{r}{2}\int_0^r\frac{1}{\sqrt{rx-x^2}}\,dx\int_0^{\sqrt{r^2-rx}} dy.$$

Nun ist

$$\int dy = y,$$

daher

$$\int_0^{\sqrt{r^2-rx}} dy = \sqrt{r^2 - rx},$$

und hiernach weiter

$$\frac{r}{2}\int_0^r\frac{1}{\sqrt{rx-x^2}}\,dx\int_0^{\sqrt{r^2-rx}} dy = \frac{r}{2}\int_0^r\frac{1}{\sqrt{rx-x^2}}\cdot\sqrt{r^2-rx}\,dx$$

$$= \frac{r\sqrt{r}}{2}\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x},$$

also

$$\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{r},$$

und sonach

$$\frac{r\sqrt{r}}{2}\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{r\sqrt{r}}{2}\cdot 2\sqrt{r} = r^2,$$

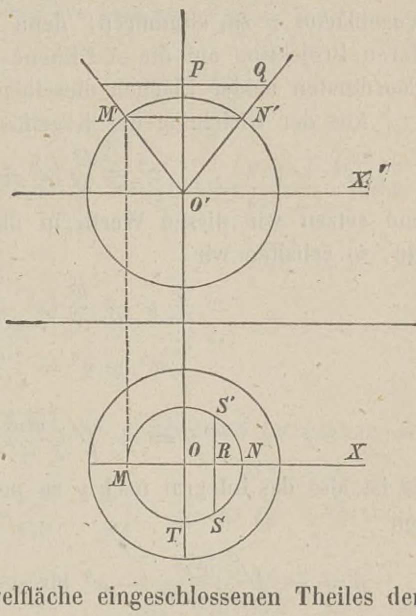
daher ist das ganze eingeschlossene Flächenstück des Cylinders

$$4r^2.$$

4. Durchschnitt einer Kugel und eines geraden Kreiskegels. Lassen wir den Mittelpunkt der Kugel mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallen, Figur 133, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Fig. 133.



Lassen wir ferner die Spitze des Kegels mit dem Anfangspunkte der Coordinaten und seine Axe mit der ZAxe zusammenfallen, bezeichnen wir den Halbmesser der Direktrix mit a und ihren Abstand vom Anfangspunkte der Coordinaten mit h, so ist die Gleichung der Kegelfläche

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2}z^2.$$

Hierbei schliesst die Kugel einen Theil der Kegelfläche, und der Kegel einen Theil der Kugelfläche ein. Die Projektion des von der Kegelfläche eingeschlossenen Theiles der Kugelfläche auf die XZEbene ist der Kreisabschnitt $M'N'$ und auf die XYEbene die Fläche des Kreises MN. Die Projektion des von der Kugelfläche eingeschlossenen Theiles der Kegelfläche auf die XZEbene ist die Fläche des Dreiecks $M'O'N'$ und auf die XYEbene die Fläche des Kreises MN.

Für das von der Kegelfläche eingeschlossene Flächenstück der Kugel ergeben sich aus der Gleichung der Kugelfläche die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

und demnach ist das Flächenelement wie bei 3.

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy,$$

so wie die Fläche selbst

$$r\int dx \int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Ist nun $OR = x$, $RS = +y$, $RS' = -y$, so hat man das Integral nach y, wo also x als constant angesehen wird, für die Strecke $S'S$ zu nehmen. Um diese Werthe von y zu bekommen, hat man aus den Gleichungen der Kegelfläche und der Kugelfläche z zu eliminiren; denn für die Durchschnittskurve, deren Projektion auf die XYEbene der Kreis MN ist, sind die Coordinaten beider Flächen dieselben.

Aus der Gleichung der Kegelfläche folgt

$$z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2),$$

und setzen wir diesen Werth in die Gleichung der Kugelfläche ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2) = r^2,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 r^2}{a^2 + h^2},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 r^2}{a^2 + h^2} - x^2}.$$

Es ist also das Integral nach y zu nehmen zwischen den Grenzen von

$$y = -\sqrt{\frac{a^2 r^2}{a^2 + h^2} - x^2} \text{ bis } y = +\sqrt{\frac{a^2 r^2}{a^2 + h^2} - x^2}.$$

Ferner ist das Integral nach x für die Strecke MN zu nehmen. Es ist aber ON der Halbmesser des Kreises MN, daher ist zufolge des vorstehenden Werthes von y

$$ON = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

und mithin ist das Integral nach x zu nehmen zwischen den Grenzen von

$$x = -\frac{ar}{\sqrt{a^2 + h^2}} \text{ bis } x = +\frac{ar}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Dieses gibt, wenn wir der Abkürzung wegen $\frac{a^2 r^2}{a^2+h^2} = m^2$ setzen,

$$r \int_{-m}^{+m} dx \int_{-\sqrt{m^2-x^2}}^{+\sqrt{m^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),$$

daher

$$\int_{-\sqrt{m^2-x^2}}^{+\sqrt{m^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = 2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),$$

und hiernach weiter

$$r \int_{-m}^{+m} dx \int_{-\sqrt{m^2-x^2}}^{+\sqrt{m^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = 2r \int_{-m}^{+m} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx.$$

Wir haben nun das Integral

$$2r \int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx$$

zu ermitteln.

Wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an, indem wir setzen

$$v = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right); \quad dw = dx,$$

so ist

$$w = x,$$

$$dv = d \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$$

$$= \frac{d\frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{m^2-x^2}{r^2-x^2}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{r^2-m^2}\,.\,x\,dx}{(r^2-x^2)\sqrt{m^2-x^2}},$$

und folglich

$$2r\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx$$

$$= 2rx \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) + 2r\sqrt{r^2 - m^2}\int \frac{x^2\, dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}}.$$

Weiter ist

$$\int \frac{x^2\, dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}} = \int \frac{r^2 - r^2 + x^2}{r^2 - x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{m^2 - x^2}}$$

$$= \int \left(\frac{r^2}{r^2 - x^2} - 1\right) \frac{dx}{\sqrt{m^2 - x^2}}$$

$$= r^2 \int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - x^2}}.$$

$$= r^2 \int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}} - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{m}\right),$$

daher ist nun

$$2r\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx$$

$$= 2r\, x \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) - 2r\sqrt{r^2 - m^2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{m}\right)$$

$$+ 2r^3\sqrt{r^2 - m^2}\int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}}.$$

Mit dem noch übrigen Integrale

$$\int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}}$$

haben wir auf folgende Weise zu verfahren. Setzen wir

$$\frac{x}{m} = \cos u,$$

was geschehen kann, weil x höchstens gleich m werden kann, so ist

$$x = m \cos u,$$

$$dx = -m \sin u\, du.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{m^2 - x^2}} = -\int \frac{m \sin u\, du}{(r^2 - m^2 \cos^2 u)\sqrt{m^2 - m^2 \cos^2 u}}$$

$$= -\int \frac{du}{r^2 - m^2 \cos^2 u}.$$

Es ist aber

$$r^2 - m^2 \cos^2 u = (r + m \cos u)(r - m \cos u),$$

daher

$$\frac{1}{r^2 - m^2 \cos^2 u} = \frac{A}{r + m \cos u} + \frac{B}{r - m \cos u},$$

$$1 = Ar - Am \cos u + Br + Bm \cos u,$$

mithin

$$-A + B = 0, \text{ also } A = B,$$

$$Ar + Br = 1; \quad 2Ar = 1,$$

$$A = B = \frac{1}{2r},$$

und folglich

$$-\int \frac{du}{r^2 - m^2 \cos^2 u} = -\frac{1}{2r}\int \frac{du}{r + m \cos u} - \frac{1}{2r}\int \frac{du}{r - m \cos u}.$$

Setzen wir nun

$$\cos u = y; \quad du = -\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

so wird

$$-\int \frac{du}{r + m \cos u} = \int \frac{dy}{(r + my)\sqrt{1 - y^2}},$$

und setzen wir weiter

$$\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = z; \quad y = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},$$

so wird

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{2z}{1 + z^2}; \quad dy = -\frac{4z\,dz}{(1 + z^2)^2}.$$

Dieses gibt aber

$$\int \frac{dy}{(r + my)\sqrt{1 - y^2}} = -2\int \frac{dz}{(r + m) + (r - m)z^2}$$

$$= -\frac{2}{r + m}\int \frac{dz}{1 + \left(\sqrt{\frac{r - m}{r + m}} \cdot z\right)^2}.$$

Setzen wir endlich

$$\sqrt{\frac{r - m}{r + m}} \cdot z = v,$$

so ist

$$dz = \sqrt{\frac{r + m}{r - m}} \cdot dv,$$

und daher das Integral

$$= -\frac{2}{\sqrt{r + m}\sqrt{r - m}}\int \frac{dv}{1 + v^2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{r^2 - m^2}} \operatorname{arc}(\tan = v).$$

Setzt man für v seinen Werth, so wird das Integral

$$= -\frac{2}{\sqrt{r^2 - m^2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r-m}{r+m}} \cdot z\right),$$

und setzt man für z seinen Werth

$$= -\frac{2}{\sqrt{r^2 - m^2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r-m}{r+m}} \cdot \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)$$

so wie, wenn man endlich den Werth von y setzt,

$$= -\frac{2}{\sqrt{r^2 - m^2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r-m}{r+m}} \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}\right),$$

und weil

$$\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} = \tan \tfrac{1}{2} u,$$

so ist

$$-\int \frac{du}{r + m\cos u} = -\frac{2}{\sqrt{r^2 - m^2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r-m}{r+m}} \cdot \tan \tfrac{1}{2} u\right).$$

In gleicher Weise ist

$$-\int \frac{du}{r - m\cos u} = -\frac{2}{\sqrt{r^2 - m^2}} \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r+m}{r-m}} \cdot \tan \tfrac{1}{2} u\right),$$

daher

$$-\int \frac{du}{r^2 - m^2 \cos^2 u} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2 - m^2}} \left[\operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r-m}{r+m}} \cdot \tan \tfrac{1}{2} u\right) + \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r+m}{r-m}} \tan \tfrac{1}{2} u\right)\right],$$

und folglich auch

$$2r^3\sqrt{r^2-m^2}\int \frac{dx}{(r^2-x^2)\sqrt{m^2-x^2}}$$

$$= -2r^2\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r-m}{r+m}} \tan \tfrac{1}{2} u\right) + \operatorname{arc}\left(\tan = \sqrt{\frac{r+m}{r-m}} \tan \tfrac{1}{2} u\right)\right].$$

Nach diesem ist nun

$$2r\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx = 2rx \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$$

$$-2r\sqrt{r^2-m^2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{m}\right)$$

$$-2r^2\left[\operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{r-m}}{\sqrt{r+m}} \tan \tfrac{1}{2} u\right) + \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{r+m}}{\sqrt{r-m}} \tan \tfrac{1}{2} u\right)\right].$$

Behufs der Grenzbestimmungen haben wir Folgendes:

Das erste Glied wird sowol für $x = + m$ als auch für $x = - m$ zu Null.

Das zweite Glied wird für $x = - m$

$$- 2r\sqrt{r^2 - m^2} \cdot - \frac{\pi}{2} = r\pi\sqrt{r^2 - m^2},$$

und für $x = + m$

$$- 2r\sqrt{r^2 - m^2} \cdot \frac{\pi}{2} = - r\pi\sqrt{r^2 - m^2}.$$

Für das dritte Glied sind folgende Betrachtungen anzustellen:

Für $x = - m$ muss sein $\cos u = - 1$, also $u = \pi$, daher wird $\tan \frac{1}{2} u = \tan \frac{1}{2} \pi$; es ist aber $\tan \frac{1}{2} \pi = \infty$, folglich erhalten wir arc ($\tan = \infty$). Es ist aber

$$\text{arc}\,(\tan = \infty) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

daher wird das dritte Glied für $x = - m$

$$- 2r^2 (\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi) = - 2r^2\pi.$$

Für $x = + m$ muss sein $\cos u = + 1$, also $u = 0$, daher wird $\tan \frac{1}{2} u = \tan 0$; es ist aber $\tan 0 = 0$, folglich erhalten wir arc ($\tan = 0$). Es ist aber

$$\text{arc}\,(\tan = 0) = 0,$$

daher wird das dritte Glied für $x = + m$ zu Null.

Demnach ist

$$2r\int_{-m}^{+m} \text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{m^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx$$

$$= - r\pi\sqrt{r^2 - m^2} - r\pi\sqrt{r^2 - m^2} + 2r^2\pi$$

$$= 2r^2\pi - 2r\pi\sqrt{r^2 - m^2},$$

und führt man den Werth von m^2 ein,

$$= 2r^2\pi - 2r^2\pi\,\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Bezeichnet man mit α den Winkel, den die Mantellinie des Kegels mit der Axe desselben macht, so ist

$$\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \cos\alpha,$$

daher das Integral

$$2r^2\pi\,(1 - \cos\alpha),$$

und weil

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

so ist auch das Integral oder das Flächenstück der Kugel

$$4r^2\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Für das von der Kugelfläche eingeschlossene Flächenstück des Kegels ergeben sich aus der Gleichung der Kegelfläche die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

und demnach ist das Flächenelement

$$\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{h^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\, dx\, dy$$

so wie die Fläche selbst

$$\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} \int dx \int dy.$$

Ist nun $OR = x$, $RS = + y$; $RS' = - y$, so hat man das Integral nach y, wo also x als constant angesehen wird, für die Strecke $S'S$ zu nehmen. Es ist aber

$$y = \sqrt{\frac{a^2r^2}{a^2+h^2} - x^2} = \sqrt{m^2 - x^2},$$

demnach ist das Integral nach y zu nehmen von $y = -\sqrt{m^2 - x^2}$ bis $y = + \sqrt{m^2 - x^2}$. Ferner ist das Integral nach x für die Strecke MN, also zwischen den Grenzen von $x = -m$ bis $x = +m$ zu nehmen. Dieses gibt

$$\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} \int_{-m}^{+m} dx \int_{-\sqrt{m^2-x^2}}^{+\sqrt{m^2-x^2}} dy.$$

Es ist nun

$$\int_{-\sqrt{m^2-x^2}}^{+\sqrt{m^2-x^2}} dy = 2\sqrt{m^2 - x^2},$$

und hiernach weiter

$$\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} \int_{-m}^{+m} dx \int_{-\sqrt{m^2-x^2}}^{+\sqrt{m^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{a^2+h^2}}{a} \int_{-m}^{+m} \sqrt{m^2 - x^2}\, dx.$$

Nun ist

$$\int \sqrt{m^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{m^2 - x^2}}{2} + \frac{m^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{m}\right),$$

und folglich

$$\frac{2\sqrt{a^2+h^2}}{a}\int_{-m}^{+m} \sqrt{m^2 - x^2}\, dx = \frac{2\sqrt{a^2+h^2}}{a}\left(\frac{m^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{m^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\cdot m^2\pi,$$

und wenn für m^2 sein Werth gesetzt wird,

$$= \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\cdot\frac{a^2 r^2}{a^2+h^2}\pi$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot r^2\pi.$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Mantellinie des Kegels mit der Axe desselben bildet, mit α, so ist

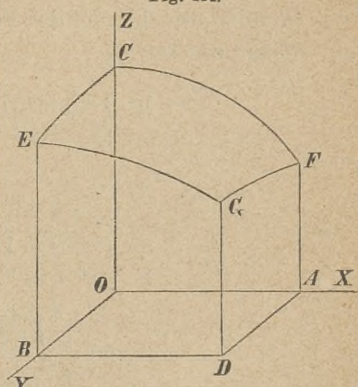
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} = \sin\alpha,$$

und daher auch die gesuchte Fläche

$$r^2\pi \sin\alpha.$$

5. Durchschnitt einer Kugel und eines geraden Parallelepipedes. Der Mittelpunkt der Kugel falle mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammen, ebenso ein Eckpunkt des Parallelepipedes, so dass drei Kanten desselben in die Coordinatenaxen zu liegen kommen. Figur 134. Es ist $OA = a$ die eine, $OB = b$ die andere Kante der Grundfläche des Prismas, endlich sei $OC = r$ der Halbmesser der Kugel. Das Prisma schneidet aus der Kugelfläche ein Stück $CEGF$ aus, dessen Projektion auf die XYEbene das Rechteck $OADB$ ist. Dieses Stück der Kugelfläche soll bestimmt werden. Die Gleichung der Kugelfläche ist

Fig. 134.



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und gibt die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

demnach ist das Flächenelement

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

so wie die Fläche selbst

$$r\int dx \int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Da das Integral nach y für die Strecke OB und nach x für die Strecke OA zu nehmen ist, so hat man für y die Grenzen 0 und b so wie für x die Grenzen 0 und a. Dieses gibt

$$r\int_0^a dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right),$$

daher

$$\int_0^b \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right),$$

und hiernach weiter

$$r\int_0^a dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r\int_0^a \text{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx.$$

Wenden wir hierauf das Verfahren der theilweisen Integration an, indem wir setzen

$$v = \text{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right); \quad dw = dx,$$

so ist

$$w = x,$$

$$dv = d\,\text{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{d\,\dfrac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{r^2 - x^2}}}$$

$$= \frac{b\,x\,dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}},$$

demnach

$$r\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx$$

$$= rx \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) - rb\int \frac{x^2\,dx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}.$$

Wir können nun setzen

$$-rb\int \frac{x^2\,dx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}$$

$$= -rb\int \frac{r^2-r^2+x^2}{(r^2-x^2)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{r^2-b^2-x^2}}$$

$$= -rb\int \left(\frac{r^2}{r^2-x^2} - 1\right) \frac{dx}{\sqrt{r^2-b^2-x^2}}$$

$$= -r^3 b\int \frac{dx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}} + rb\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-b^2-x^2}},$$

und weil

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-b^2-x^2}} = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{r^2-b^2}}\right),$$

so ist das Integral auch

$$= rb \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{r^2-b^2}}\right) - r^3 b\int \frac{dx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}},$$

so dass wir nun haben

$$r\int \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx = rx \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$$

$$+ rb \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{r^2-b^2}}\right)$$

$$- r^3 b\int \frac{dx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}.$$

Um das letzte Integral zu ermitteln, setzen wir

$$\frac{x}{\sqrt{r^2-b^2}} = \sin u,$$

dann ist

$$x = \sqrt{r^2-b^2}\sin u; \qquad dx = \sqrt{r^2-b^2}\cos u\,du,$$

und wenn wir dieses einsetzen, so erhalten wir

$$- r^3 b \int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}}$$

$$= - r^3 b \int \frac{\sqrt{r^2 - b^2} \cos u \, du}{(r^2 - (r^2 - b^2) \sin^2 u) \sqrt{r^2 - b^2 - (r^2 - b^2) \sin^2 u}}$$

$$= - r^3 b \int \frac{du}{r^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}$$

$$= r b \int \frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{1 + \left(\frac{b}{r} \tan u\right)^2}.$$

Setzen wir

$$\frac{b}{r} \tan u = z,$$

so ist

$$\frac{b}{r} \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = dz; \qquad \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{r}{b}\, dz,$$

demnach wird

$$- r b \int \frac{\frac{du}{\cos^2 u}}{1 + \left(\frac{b}{r} \tan u\right)^2} = - r^2 \int \frac{dz}{1 + z^2}$$

$$= - r^2 \operatorname{arc} (\tan = z),$$

und setzen wir den Werth von z ein,

$$= - r^2 \operatorname{arc} \left(\tan = \frac{b}{r} \tan u\right).$$

Es ist aber

$$\tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}},$$

daher

$$- r^3 b \int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}} = - r^2 \operatorname{arc} \left(\tan = \frac{bx}{r\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}}\right)$$

und es ist nun

$$r \int \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx = r x \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

$$+ r b \operatorname{arc} \left(\sin = \frac{x}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right)$$

$$- r^2 \operatorname{arc} \left(\tan = \frac{bx}{r\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}}\right)$$

so wie endlich

$$r\int_0^a \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) dx = ra \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}\right)$$
$$+ rb \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}\right)$$
$$- r^2 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{ab}{r\sqrt{r^2-b^2-a^2}}\right).$$

§ 90.

Bestimmung des Volumens von Körpern.

Wenn man durch einen Körper Ebenen legt, welche mit den drei Coordinatenebenen parallel sind und in gleichen Abständen sich befinden, so zerfällt er in lauter gerade vierseitige Prismen, mit Ausnahme derjenigen Körpertheile, welche an den Grenzen des Körpers entstehen. Je kleiner man aber die Abstände dieser Ebenen nimmt, um so kleiner werden auch die an den Grenzen des Körpers entstehenden unregelmässigen Körpertheile, und lässt man die Ebenen unendlich nahe an einander rücken, so verschwinden diese unregelmässigen Körpertheile gänzlich, und das Volumen des Körpers erscheint als eine Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Prismen.

Bezeichnet man nun den Abstand zweier Ebenen, welche senkrecht auf der XAxe stehen, mit dx, den Abstand zweier Ebenen, welche senkrecht auf der YAxe stehen, mit dy, und den Abstand zweier Ebenen, welche senkrecht auf der ZAxe stehen, mit dz, so ist

$$dx\ dy\ dz$$

das Volumen eines solchen unendlich kleinen Prismas; und folglich stellt das dreifache Integral

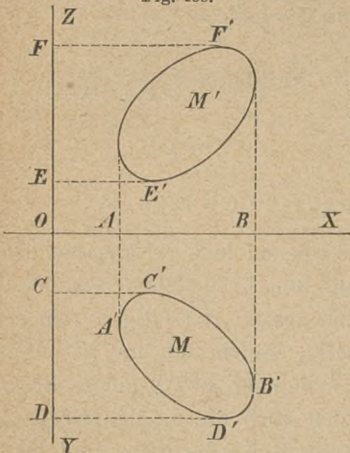
$$\int\int\int dx\ dy\ dz,$$

genommen zwischen den noch zu bestimmenden Grenzen, das Volumen des Körpers dar.

Ist M', Figur 135, die Projektion des Körpers auf die XZEbene, sind E' und F' die äussersten Punkte derselben in der Richtung der ZAxe, und bezeichnet man OE mit z_1 so wie OF mit z_2, so ist das Integral nach z zwischen den Grenzen von $z = z_1$ bis $z = z_2$ zu nehmen. Ist ferner M die Projektion des Körpers auf die XYEbene, sind C' und D' die äussersten Punkte derselben in der Richtung der YAxe, und bezeichnet man OC

mit y_1 so wie OD mit y_2, so ist das Integral nach y zwischen den Grenzen von $y = y_1$ bis $y = y_2$ zu nehmen. Sind endlich A' und B' die äussersten Punkte dieser letzteren Projektion in der Richtung der XAxe, bezeichnet man OA mit x_1 so wie OB mit x_2, so ist das Integral nach x zwischen den Grenzen von $x = x_1$ bis $x = x_2$ zu nehmen. Hiernach wird das dreifache Integral und das Volumen des Körpers

Fig. 135.



$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz,$$

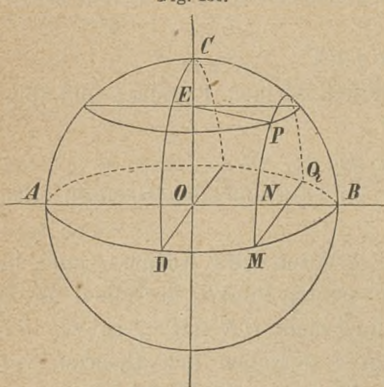
d. h. das Volumen des Körpers wird erhalten, wenn man die unendlich kleinen Prismen nach den Richtungen der drei Coordinatenaxen summirt, wobei es übrigens gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge diese Summirung vorgenommen wird.

1. Die Kugel. Die Gleichung der Kugel ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Ist nun, Figur 136, $ON = x$, $NM = y$, $OE = z$, so ist für die über der XYEbene liegende Halbkugel das Integral nach z, wo also x und y als constant anzusehen sind, für die Strecke $OE = z$ zu nehmen. Aus der Gleichung folgt aber

Fig. 136.



$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

daher ist das Integral nach z zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ zu nehmen. Es ist ferner das Integral nach y, wo also x als constant anzusehen ist, für die Strecke QM zu nehmen. Es ist aber $QN = -\sqrt{r^2 - x^2}$; $NM = +\sqrt{r^2 - x^2}$, daher ist das Integral nach y zwischen den Grenzen von $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ bis

$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ zu nehmen. Endlich ist das Integral nach x für die Strecke AB zu nehmen. Es ist aber $AO = -r$, $OB = +r$, daher ist das Integral nach x zwischen den Grenzen von $x = -r$ bis $x = +r$ zu nehmen. Dieses gibt für das Volumen der Halbkugel

$$\int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz.$$

Nun ist

$$\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz = \sqrt{r^2-x^2-y^2},$$

daher das Volumen

$$\int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dy.$$

Es ist aber weiter

$$\int \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dy = \frac{y\sqrt{r^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{r^2-x^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),$$

daher

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dy = \frac{r^2-x^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{r^2-x^2}{2}\pi,$$

und folglich das Volumen

$$\tfrac{1}{2}\pi \int_{-r}^{+r} (r^2-x^2)\, dx.$$

Es ist aber

$$\int (r^2-x^2)\, dx = r^2 x - \frac{x^3}{3},$$

daher

$$\tfrac{1}{2}\pi \int_{-r}^{+r} (r^2-x^2)\, dx = \tfrac{1}{2}\pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \tfrac{4}{3} r^3 = \tfrac{2}{3}\pi r^3,$$

und folglich ist das Volumen der ganzen Kugel

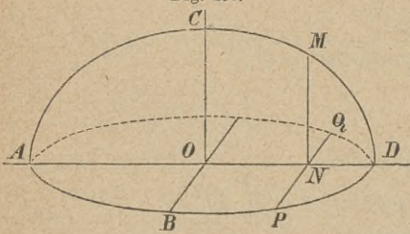
$$\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Das dreiaxige Ellipsoid. Die Gleichung desselben ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ist nun, Figur 137, $ON=x$, $NP=y$, $MN=z$, so ist für das über der XYEbene liegende halbe Ellipsoid das Integral nach z, wo also x und y als constant anzusehen sind, für die Strecke $MN=z$ zu nehmen. Aus der Gleichung folgt aber

Fig. 137.



$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

daher ist das Integral nach z zwischen den Grenzen von $z=0$ bis $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ zu nehmen. Es ist ferner das Integral nach y, wo also x als constant anzusehen ist, für die Strecke QP zu nehmen. Die Gleichung der in der XYEbene liegende Ellipse, für welche also $z=0$ ist, ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

und hieraus folgt

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Nun ist $QN=-y$, $NP=+y$, daher ist das Integral nach y zwischen den Grenzen von $y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ bis $y=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ zu nehmen. Endlich ist das Integral nach x für die Strecke AD zu nehmen. Nun ist $AO=-a$, $OD=+a$, daher ist das Integral nach x zwischen den Grenzen von $x=-a$ bis $x=+a$ zu nehmen. Dieses gibt für das Volumen des halben Ellipsoides

$$\int_{-a}^{+a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz.$$

Es ist aber

$$\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

daher das Volumen

$$\int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy.$$

Weiter ist

$$\int c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy = \frac{c}{b}\int\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}\, dy$$

und

$$\frac{c}{b}\int\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}\, dy$$

$$= \frac{c}{b}\left[\frac{y\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}}{2} + \frac{b^2(a^2-x^2)}{2a^2}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}\right)\right],$$

daher

$$\frac{c}{b}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}\, dy = \frac{bc\pi}{2a^2}(a^2-x^2),$$

und sonach das Volumen

$$\frac{bc\pi}{2a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\, dx.$$

Endlich ist

$$\int(a^2-x^2)\, dx = a^2x - \frac{x^3}{3},$$

daher

$$\begin{aligned}\frac{bc\pi}{2a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\, dx &= \frac{bc\pi}{2a^2}\left[\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)-\left(-a^3+\frac{a^3}{3}\right)\right]\\ &= \frac{bc\pi}{2a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}+a^3-\frac{a^3}{3}\right)\\ &= \tfrac{2}{3}\, abc\pi,\end{aligned}$$

und folglich ist das ganze Ellipsoid

$$\tfrac{4}{3} a b c \pi.$$

3. Der von einer Ebene geschnittene Cylinder. Lassen wir die Axe des Cylinders mit der ZAxe zusammenfallen, so ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

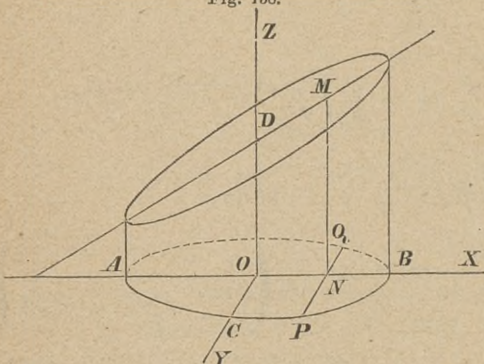
die Gleichung der Cylinderfläche für jedes beliebige z.

Ist nun, Figur 138, $ON = x$, $PN = y$, $MN = z$, so ist das Integral nach z, wo also x und y als constant angesehen werden, für die Streeke $MN = z$ zu nehmen. Ist daher

$$z = ax + by + c$$

die Gleichung der Ebene, so ist, weil für den Durchschnitt die Coordinaten des Cylinders und die Coordinaten der Ebene gleich sind, das Integral nach z zwischen den Grenzen von $z = 0$ bis $z = ax + by + c$ zu nehmen.

Fig. 138.



Ferner ist das Integral nach y, wo also x als constant angesehen wird, für die Strecke QP zu nehmen. Es ist aber $QN = -y$, $NP = +y$, und da aus der Gleichung des Cylinders folgt

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

so ist das Integral nach y zwischen den Grenzen von $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ bis $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ zu nehmen. Endlich ist das Integral nach x für die Strecke AB zu nehmen, und weil $AO = -r$, $OB = +r$, so ist das Integral nach x zwischen den Grenzen von $x = -r$ bis $x = +r$ zu nehmen. Dieses gibt für das Volumen des Cylinders

$$\int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^{ax+by+c} dz.$$

Zunächst ist

$$\int_0^{ax+by+c} dz = ax + by + c,$$

daher das Volumen

$$\int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} (ax + by + c)\, dy.$$

Weiter ist

$$\int (ax + by + c)\, dy = axy + \frac{by^2}{2} + cy,$$

und daher

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} (ax + by + c)\, dy$$

$$= \left(ax\sqrt{r^2-x^2} + \frac{b}{2}(r^2-x^2) + c\sqrt{r^2-x^2}\right)$$

$$-\left(-ax\sqrt{r^2-x^2} + \frac{b}{2}(r^2-x^2) - c\sqrt{r^2-x^2}\right)$$

$$= 2(ax + c)\sqrt{r^2-x^2},$$

mithin das Volumen

$$\int_{-r}^{+r} 2(ax + c)\sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$= 2a\int_{-r}^{+r} x\sqrt{r^2-x^2}\, dx + 2c\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx.$$

Es ist nun

$$2a\int x\sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{2ax^2\sqrt{r^2-x^2}}{3} + \frac{2ar^2}{3}\int \frac{x\, dx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

und weil

$$\frac{2ar^2}{3}\int \frac{x\, dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{2ar^2}{3}\sqrt{r^2-x^2},$$

so ist

$$2a\int x\sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{2a}{3}(x^2-r^2)\sqrt{r^2-x^2}$$

$$= -\frac{2a}{3}(\sqrt{r^2-x^2})^3.$$

Auf gleiche Weise ist

$$2c\int \sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{2cx\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \frac{2cr^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

und weil

$$\frac{2cr^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{2cr^2}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{r}\right),$$

so ist

$$2c\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=c\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{r}\right)\right].$$

Hiernach ist aber

$$\int 2(ax+c)\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{2a}{3}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^3+c\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{r}\right)\right],$$

so wie endlich

$$\int_{-r}^{+r}2(ax+c)\sqrt{r^2-x^2}\,dx=cr^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

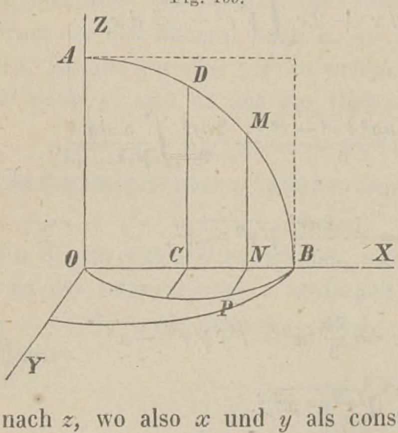
$$=cr^2\pi.$$

Da nun c der Abstand desjenigen Punktes, in welchem die ZAxe von der Ebene geschnitten wird, vom Anfangspunkte der Coordinaten ist, so ist c die mittlere Höhe des Cylinders.

4. Der von einer Kugelfläche geschnittene Cylinder. Lassen wir den Mittelpunkt der Kugel mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallen, Figur 139, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Fig. 139.



Fällt nun eine Mantellinie des Cylinders mit der ZAxe zusammen, und ist der Durchmesser des Cylinders gleich dem Halbmesser der Kugel, so ist die Gleichung der Cylinderfläche für jedes beliebige z

$$y^2+(x-\tfrac{1}{2}r)^2=(\tfrac{1}{2}r)^2,$$

$$y^2+x^2-rx=0.$$

Ist nun $ON=x$, $PN=y$, $MN=z$, so ist das Integral nach z, wo also x und y als constant angesehen werden, für die Strecke $MN=z$ zu nehmen. Aus der Gleichung der Kugelfläche folgt aber

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2},$$

daher ist das Integral nach z zwischen den Grenzen von $z=0$

bis $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ zu nehmen. Ferner ist das Integral nach y, wo also x als constant angesehen wird, für die Strecke NP zu nehmen. Es ist aber $NP = y$, und da aus der Gleichung der Cylinderfläche folgt

$$y = \sqrt{rx - x^2},$$

so ist das Integral nach y zwischen den Grenzen von $y = 0$ bis $y = \sqrt{rx - x^2}$ zu nehmen. Endlich ist das Integral nach x für die Strecke OB zu nehmen; es ist aber $OB = r$, daher ist das Integral nach x zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = r$ zu nehmen. Dieses gibt für das Volumen des Cylinders

$$\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{rx - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dz.$$

Nun ist

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

daher das Volumen

$$\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{rx - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy.$$

Weiter ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{y\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{2} + \frac{r^2 - x^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right),$$

und daher

$$\int_0^{\sqrt{rx - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{rx - x^2}\sqrt{r^2 - x^2 - (rx - x^2)}}{2} + \frac{r^2 - x^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{rx - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

$$= \frac{(r - x)\sqrt{rx}}{2} + \frac{r^2 - x^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r + x}}\right),$$

für das Volumen haben wir dann

$$\frac{1}{2}\int_0^r \left[(r - x)\sqrt{rx} + (r^2 - x^2) \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r + x}}\right)\right] dx.$$

Dieses ist aber

$$= \tfrac{1}{2}\, r\sqrt{r}\int\sqrt{x}\,dx - \tfrac{1}{2}\sqrt{r}\int x\sqrt{x}\,dx$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int (r^2 - x^2)\,\mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right) dx.$$

Um das hier noch übrig bleibende Integral zu ermitteln, wenden wir das Verfahren der theilweisen Integration an und setzen

$$v = \mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right); \quad dw = (r^2 - x^2)\,dx,$$

so ist

$$w = r^2 x - \frac{x^3}{3}$$

und

$$dv = \frac{d\sqrt{\frac{x}{r+x}}}{\sqrt{1-\frac{x}{r+x}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\frac{dx}{(r+x)\sqrt{x}}.$$

Hiernach ist nun

$$\tfrac{1}{2}\int (r^2 - x^2)\,\mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right) dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right) - \tfrac{1}{2}\int\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\frac{dx}{(r+x)\sqrt{x}},$$

und weiter ist

$$-\tfrac{1}{2}\int\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\tfrac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\frac{dx}{(r+x)\sqrt{x}}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\, r^2\sqrt{r}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{r+x} + \tfrac{1}{12}\sqrt{r}\int\frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{r+x}.$$

Um diese beiden Integrale zu ermitteln, setzen wir

$$\sqrt{x} = z; \quad x = z^2; \quad dx = 2z\,dz,$$

dann ist

$$-\tfrac{1}{4}\, r^2\sqrt{r}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{r+x} = -\tfrac{1}{2}\, r^2\sqrt{r}\int\frac{z^2\,dz}{r+z^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, r^2\sqrt{r}\int\frac{r - r + z^2}{r+z^2}\,dz$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, r^2\sqrt{r}\int\left(1 - \frac{r}{r+z^2}\right) dz$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, r^2\sqrt{r}\int dz + \tfrac{1}{2}\, r^3\sqrt{r}\int\frac{dz}{r+z^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, r^2\sqrt{r}\cdot z + \tfrac{1}{2}\, r^3\sqrt{r}\int\frac{dz}{r+z^2},$$

nun ist

$$\tfrac{1}{2}\, r^3 \sqrt{r} \int \frac{dz}{r+z^2} = \tfrac{1}{2}\, r^2 \sqrt{r} \int \frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{r}}\right)^2},$$

setzen wir daher

$$\frac{z}{\sqrt{r}} = u, \text{ so ist } dz = \sqrt{r}\, du,$$

und es wird das Integral

$$\tfrac{1}{2}\, r^3 \int \frac{du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2}\, r^3 \operatorname{arc}\,(\tan = u),$$

oder wenn wir für u seinen Werth setzen,

$$= \tfrac{1}{2}\, r^3 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{z}{\sqrt{r}}\right),$$

und setzen wir $\sqrt{x}$ für z, so ist

$$-\tfrac{1}{4}\, r^2 \sqrt{r} \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{r+x} = -\tfrac{1}{2}\, r^2 \sqrt{r} \cdot \sqrt{x} + \tfrac{1}{2}\, r^3 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}\right).$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{12} \sqrt{r} \int \frac{x^2 \sqrt{x}\, dx}{r+x} = \tfrac{1}{6} \sqrt{r} \int \frac{z^6\, dz}{r+z^2}$$

$$= \tfrac{1}{6} \sqrt{r} \int \frac{z^2}{r+z^2}\, z^4\, dz$$

$$= \tfrac{1}{6} \sqrt{r} \int \frac{r-r+z^2}{r+z^2}\, z^4\, dz$$

u. s. w.,

und wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, so erhalten wir zuletzt

$$= \tfrac{1}{6} \sqrt{r}\, \frac{z^5}{5} - \tfrac{1}{6}\, r \sqrt{r} \cdot \frac{z^3}{3} + \tfrac{1}{6}\, r^2 \sqrt{r} \cdot z - \tfrac{1}{6}\, r^3 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{z}{\sqrt{r}}\right),$$

setzen wir nun $\sqrt{x}$ für z, so ist

$$\tfrac{1}{12} \sqrt{r} \int \frac{x^2 \sqrt{x}}{r+x}\, dx = \tfrac{1}{6} \sqrt{r} \cdot \frac{(\sqrt{x})^5}{5} - \tfrac{1}{6}\, r \sqrt{r}\, \frac{(\sqrt{x})^3}{3}$$

$$+ \tfrac{1}{6}\, r^2 \sqrt{r} \cdot \sqrt{x} - \tfrac{1}{6}\, r^3 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}\right).$$

Nach diesem allen ist

$$\tfrac{1}{2} \int \left[(r-x) \sqrt{rx} + (r^2 - x^2) \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right) \right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\, r \sqrt{r} \,.\, \tfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} \sqrt{r} \cdot \tfrac{2}{5}\, x^{\frac{5}{2}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2} r^2 \sqrt{r} \cdot \sqrt{x} + \tfrac{1}{2} r^3 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}\right)$$
$$+\tfrac{1}{6}\sqrt{r}\,\frac{(\sqrt{x})^5}{5} - \tfrac{1}{6} r \sqrt{r}\,\frac{(\sqrt{x})^3}{3} + \tfrac{1}{6} r^2 \sqrt{r} \cdot \sqrt{x}$$
$$-\tfrac{1}{6} r^3 \operatorname{arc}\left(\tan = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}\right),$$

und hiernach weiter

$$\tfrac{1}{2}\int_0^r \left[(r-x)\sqrt{rx} + (r^2 - x^2) \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right)\right] dx$$
$$= \tfrac{1}{3} r^3 - \tfrac{1}{5} r^3 + \tfrac{1}{3} r^3 \operatorname{arc}(\sin = \sqrt{\tfrac{1}{2}}) - \tfrac{1}{2} r^3$$
$$+ \tfrac{1}{2} r^3 \operatorname{arc}(\tan = 1) + \tfrac{1}{30} r^3 - \tfrac{1}{18} r^3 + \tfrac{1}{6} r^3$$
$$- \tfrac{1}{6} r^3 \operatorname{arc}(\tan = 1),$$

und weil

$$\operatorname{arc}(\sin = \sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arc}(\tan = 1) = \frac{\pi}{4},$$

so folgt

$$= (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6})\,\frac{\pi}{4}\, r^3$$
$$+ (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{30} - \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{6})\, r^3$$
$$= (\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9})\, r^3.$$

XVI. Abschnitt.

Die Differentialgleichungen.

§ 91.

Allgemeines.

Eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y und dem Differentialquotienten derselben $\frac{dy}{dx}$ wird eine Differentialgleichung genannt. Jenachdem nun der Differentialquotient als erster, zweiter . . . $n$ter in der Gleichung vorkommt, unterscheidet man die Differentialgleichungen als solche von der ersten, zweiten,

. . . $n$ten Ordnung. Die allgemeine Form einer Differentialgleichung der ersten Ordnung ist

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Eine solche Differentialgleichung kann auf folgende Weise entstanden gedacht werden. Ist

$$F(x, y, a) = 0$$

eine Gleichung zwischen x und y, in welcher die Constante a enthalten ist, und wird diese Gleichung differentiirt, so erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

oder

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

In dieser Gleichung kann die Constante a ebenfalls noch enthalten sein. Wird nun aber aus dieser und der ursprünglichen Gleichung die Constante a eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, also eine Gleichung von der Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

das ist eine Differentialgleichung. Die Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

aber ist die Integralgleichung dieser Differentialgleichung.

Es geht hieraus hervor, dass die Integralgleichung einer Differentialgleichung eine willkürliche Constante enthalten muss, wenn sie ganz allgemein sein soll.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine vorgelegte Differentialgleichung zu integriren, also die Integralgleichung aus der Differentialgleichung abzuleiten.

Die geometrische Bedeutung dieser Operation lässt sich auf folgende Weise anschaulich machen. Wird die vorgelegte Differentialgleichung

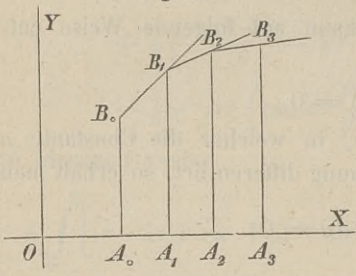
$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

für $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y).$$

Bezieht man nun die Veränderlichen x und y auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, Figur 140, legt dem x einen willkürlichen Werth $OA_0 = x_0$ und dem zugehörigen y den ebenfalls willkürlichen Werth $A_0B_0 = y_0$ bei, so ist B_0 ein Punkt der Kurve. Es ist aber durch die Gleichung

Fig. 140.



$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x_0, y_0)$$

der Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmt. Wir kennen also die Richtung, welche die Kurve im Punkte B_0 besitzt, da $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ist, den die Kurve im Punkte B_0 mit der Abscissenaxe macht, und können daher diese Tangente construiren. Lassen wir x um $A_0A_1 = \varDelta x$ wachsen, so ist $OA_1 = x_0 + \varDelta x = x_1$, und ziehen wir von A_1 aus eine Senkrechte, bis sie in B_1 mit jener Tangente zusammentrifft, so ist $A_1B_1 = y_1$, also die der Abscisse $OA_1 = x_1$ zugehörige Ordinate, weil für eine sehr kleine Strecke die Kurve mit der Tangente zusammenfällt. Da nun die Werthe von x_1 und y_1 gegeben sind, so ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x_1, y_1)$$

die Richtung, welche die Kurve im Punkte B_1 besitzt, und wir können daher von B_1 aus die Tangente construiren. Lassen wir x weiter um $A_1A_2 = \varDelta x$ wachsen, so ist $OA_2 = x_1 + \varDelta x = x_2$, und ziehen wir von A_2 aus eine Senkrechte, bis sie in B_2 mit der durch B_1 gelegten Tangente zusammentrifft, so ist $A_2B_2 = y_2$ also die der Abscisse $OA_2 = x_2$ zugehörige Ordinate. Durch die Werthe von x_2 und y_2 ist aber wieder die Richtung bestimmt, welche die Kurve im Punkte B_2 besitzt, und es ist leicht einzusehen, wie man auf diese Weise beliebig weit fortgehen kann.

Man erhält durch dieses Verfahren natürlich nicht die Kurve selbst, sondern nur ein Polygon, welches sich aber der Kurve um so mehr anschliesst, je kleiner $\varDelta x$ ist und mit ihr zusammenfällt, wenn $\varDelta x$ unendlich klein wird und in dx übergeht. Man kann also durch die Annahme von $\varDelta x$ der Kurve mit einem jeden beliebigen Grade von Genauigkeit sich nähern.

Da die Werthe von x_0 und y_0 willkürlich sind, so gibt es eine unzählige Anzahl von Kurven, welche der Gleichung

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

entsprechen; aber alle diese Kurven sind von derselben Natur und Beschaffenheit und nur der Lage und den Dimensionen nach verschieden. Durch die Annahme von y_0 wird aber die Kurve in einem jeden speciellen Falle bestimmt, und es ist daher y_0 die willkürliche Constante; d. h. dieses y_0 vertritt die Stelle derjenigen willkürlichen Constanten, welche eine jede Integralgleichung besitzen muss, wenn sie ganz allgemein sein soll.

§ 92.

Trennung der Veränderlichen.

Wenn in einer Differentialgleichung die Veränderlichen getrennt sind, so lässt sich die Integration ohne Weiteres an einem jeden Differentiale bewirken. Ist X nur eine Funktion von x und Y nur eine Funktion von y, und hat die Differentialgleichung die Form

$$X + Y\frac{dy}{dx} = 0,$$

so erhält man

$$X\,dx + Y\,dy = 0,$$

und hiernach weiter

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C,$$

wo C die willkürliche Constante bezeichnet.

Beispiel.

$$ax + by^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$ax\,dx + by^2\,dy = 0,$$

$$a\int x\,dx + b\int y^2\,dy = 0,$$

$$\frac{ax^2}{2} + \frac{by^3}{3} = C.$$

Die Constante der Integration wird wie früher bestimmt. Kennt man für einen bestimmten Werth der unabhängigen Veränderlichen x den zugehörigen Werth der abhängigen Veränderlichen y, und setzt man diese Werthe in die Integralgleichung ein, so erhält man den Werth der Constanten. Wäre in dem vorstehenden

Beispiele für $x = 0$ auch $y = 0$, so wäre die Constante Null; ist aber für $x = 0$, $y = m$, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{bm^3}{3} = C,$$

und die Gleichung wird

$$\frac{ax^2}{2} + \frac{b}{3}(y^3 - m^3) = 0.$$

Wenn in einer Differentialgleichung die Veränderlichen nicht getrennt sind, so muss eine Trennung der Veränderlichen bewirkt werden. Dieses geschieht auf mehrfache Weise.

1. Durch Umformung.

Hat die Differentialgleichung die Form

$$Y + X\frac{dy}{dx} = 0,$$

wo X nur eine Funktion von x und Y nur eine Funktion von y ist, so erhält man, indem man mit XY dividirt,

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

und weiter

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0$$

so wie durch Integration

$$\int\frac{dx}{X} + \int\frac{dy}{Y} = C.$$

Beispiel.

$$ay + (b + x)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{1}{b + x} + \frac{1}{ay} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dx}{b + x} + \frac{dy}{ay} = 0,$$

$$\int\frac{dx}{b + x} + \int\frac{dy}{ay} = 0,$$

$$l(b + x) + \frac{1}{a}\,l(y) = C,$$

$$l(y) = a\,(C - l(b + x)),$$

$$y = e^{a\,[C - l(b+x)]}$$

$$= e^{aC} \cdot e^{-a\,l(b+x)},$$

oder, wenn man e^{aC} mit A bezeichnet,

$$y = A\,e^{-a\,l(b+x)}.$$

Hat die Differentialgleichung die Form

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 \frac{dy}{dx} = 0,$$

wo X_1 und X_2 nur Funktionen von x, so wie Y_1 und Y_2 nur Funktionen von y sind, so dividire man die Gleichung mit $X_2 Y_1$. Dieses gibt

$$\frac{X_1}{X_2} + \frac{Y_2}{Y_1} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

oder

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0,$$

und wenn man integrirt,

$$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dy = C.$$

Beispiel.

$$x(ay^2 + m) + y(bx + n) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{x\,dx}{bx + n} + \frac{y\,dy}{ay^2 + m} = 0,$$

$$\int \frac{x\,dx}{bx + n} + \int \frac{y\,dy}{ay^2 + m} = 0.$$

Man setze $bx + n = z$, so ist $x = \frac{z - n}{b}$, $dx = \frac{dz}{b}$, dann wird

$$\int \frac{x\,dx}{bx + n} = \frac{1}{b^2} \int \frac{z - n}{z} dz$$

$$= \frac{1}{b^2} \int dz - \frac{n}{b^2} \int \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{b^2} z - \frac{n}{b^2} l(z) + C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt, so ist

$$\int \frac{x\,dx}{bx + n} = \frac{bx + n}{b^2} - \frac{n}{b^2} l(bx + n) + C.$$

Man setze ferner $ay^2 + m = z$, so ist $dy = \frac{dz}{2ay}$, daher

$$\int \frac{y\,dy}{ay^2 + m} = \frac{1}{2a} \int \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2a} l(z) + C,$$

und wenn man für z seinen Werth setzt,

$$\int \frac{y\,dy}{ay^2 + m} = \frac{1}{2a} l(ay^2 + m) + C,$$

daher wird die Integralgleichung

$$\frac{bx+n}{b^2} - \frac{n}{b^2}\, l\,(bx+n) + \frac{1}{2a}\, l\,(ay^2+m) = C,$$

oder

$$l\,(ay^2+m) = 2a\left[C + \frac{n}{b^2}\, l\,(bx+n) - \frac{bx+n}{b^2}\right],$$

und hieraus

$$ay^2 + m = e^{2a\left[C + \frac{n}{b^2}\, l\,(bx+n) - \frac{bx+n}{b^2}\right]}.$$

2. Durch Substitution einer neuen Veränderlichen. Wenn in der Differentialgleichung

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0,$$

P und Q Funktionen von x und y sind, und zwar von der Beschaffenheit, dass, wenn man $y = xz$ setzt, alle Glieder der Gleichung den Faktor x mit demselben Exponenten enthalten, so fällt dieser gemeinschaftliche Faktor durch Division heraus, und an die Stelle von P und Q treten Ausdrücke, welche nur noch Funktionen von z sind, und die wir mit Z und Z_1 bezeichnen wollen.

Gleichungen von einer solchen Beschaffenheit werden homogene Differentialgleichungen genannt.

Aus der Substitution

$$y = xz$$

folgt aber

$$dy = x\,dz + z\,dx,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

und es geht die Differentialgleichung in die folgende über

$$Z + Z_1\left(x\frac{dz}{dx} + z\right) = 0,$$

oder

$$Z + Z_1\,x\frac{dz}{dx} + Z_1\,z = 0,$$

$$Z + Z_1\,z = -\,Z_1\,x\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dx}{x} = -\,\frac{Z_1\,dz}{Z + Z_1 z},$$

mithin wenn man integrirt,

$$l\,(x) = -\int\frac{Z_1\,dz}{Z + Z_1 z} + C.$$

Nach erfolgter Integration ist sodann $z = \frac{y}{x}$ zu setzen.

Beispiel.

$$x^2 - y^2 + xy\frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man zunächst $y = xz$, so erhält man

$$x^2 - x^2z^2 + x^2z\frac{dy}{dx} = 0,$$

und nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Faktors x^2,

$$1 - z^2 + z\frac{dy}{dx} = 0,$$

und es ist nun

$$1 - z^2 = Z, \quad z = Z_1,$$

also

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{1 - z^2 + z^2} = -z\,dz,$$

daher wenn man integrirt,

$$l(x) = -\frac{z^2}{2} + C,$$

und setzt man $\frac{y}{x}$ für z, so ist

$$l(x) = -\frac{y^2}{2x^2} + C,$$

$$2x^2\,l(x) = -y^2 + 2Cx^2,$$

$$y^2 = 2x^2(C - l(x)).$$

Zu den homogenen Differentialgleichungen gehören auch Gleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man $\frac{y}{x} = z$, so ist $y = xz$ und

$$dy = x\,dz + z\,dx,$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,dz}{dx} + z,$$

und es ist

$$\frac{x\,dz}{dx} + z = f(z),$$

woraus

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}.$$

Integrirt man, so folgt

$$l(x) = \int\frac{dz}{f(z) - z} + C.$$

Nach erfolgter Integration ist wieder $\frac{y}{x}$ für z zu setzen.

Beispiel.

$$(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy,$$

dividirt man diese Gleichung mit x^2, so folgt

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{y}{x}$$

so wie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Setzt man $\frac{y}{x} = z$, so ist

$$f(z) = \frac{2z}{1 - z^2},$$

daher

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\frac{2z}{1 - z^2} - z}$$

$$= \frac{(1 - z^2)\,dz}{z + z^3},$$

und folglich

$$l(x) = \int \frac{(1 - z^2)\,dz}{z(1 + z^2)}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{(1 - z^2)\,dz}{z(1 + z^2)} = \int \frac{1 + z^2 - 2z^2}{z(1 + z^2)}\,dz$$

$$= \int \frac{dz}{z} - \int \frac{2z\,dz}{1 + z^2}$$

$$= l(z) - \int \frac{2z\,dz}{1 + z^2}.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, setze man $1 + z^2 = u$, so ist

$$2z\,dz = du,$$

also

$$\int \frac{2z\,dz}{1 + z^2} = \int \frac{du}{u} = l(u),$$

daher, wenn man wieder den Werth von u einsetzt,

$$\int \frac{2z\,dz}{1 + z^2} = l(1 + z^2),$$

und mithin

$$\int \frac{(1 - z^2)\,dz}{z(1 + z^2)} = l(z) - l(1 + z^2) + C,$$

also auch
$$l(x) = l(z) - l(1 + z^2) + C,$$
oder
$$l(x) - C = l(z) - l(1 + z^2).$$
Setzt man $C = l\left(\frac{1}{2a}\right)$, so erhält man
$$l\left(\frac{x}{2a}\right) = l\left(\frac{z}{1 + z^2}\right),$$
also auch
$$\frac{x}{2a} = \frac{z}{1 + z^2},$$
und wenn man wieder $\frac{y}{x}$ für z setzt,
$$\frac{x}{2a} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$
woraus folgt
$$y^2 - 2ay = -x^2,$$
und wird diese Gleichung für y aufgelöst, so ergibt sich
$$y = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

3. Durch Substitution von zwei neuen Veränderlichen. Hat die Differentialgleichung die Form
$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0,$$
wo X und X_1 nur Funktionen von x sind, so setze man $y = uv$, wo u und v zwei noch unbestimmte Funktionen von x sein sollen. Es ist dann
$$dy = u\,dv + v\,du$$
so wie
$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$
Dieses in die obige Gleichung eingesetzt, erhält man
$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Xuv + X_1 = 0,$$
oder
$$u\left(\frac{dv}{dx} + Xv\right) + v\frac{du}{dx} + X_1 = 0.$$
Setzt man nun, behufs der Bestimmung von v,
$$\frac{dv}{dx} + Xv = 0,$$

so muss auch sein

$$v\,\frac{du}{dx} + X_1 = 0,$$

so dass aus der letzten Gleichung auch u bestimmt werden kann. Sind aber u und v als Funktionen von x bestimmt, so ist auch y bestimmt, weil $y = uv$ gesetzt wurde.

Aus der Gleichung

$$\frac{dv}{dx} + Xv = 0$$

folgt

$$\frac{dv}{v} = -X\,dx,$$

und durch Integration

$$l(v) = -\int X\,dx + C,$$

daher

$$v = e^{C - \int X\,dx}$$

$$= e^{C} \cdot e^{-\int X\,dx},$$

und wenn wir $e^C = A$ setzen,

$$v = A e^{-\int X\,dx},$$

wodurch v bestimmt ist.

Setzt man diesen Werth von v in die Gleichung

$$v\,\frac{du}{dx} + X_1 = 0,$$

so erhält man

$$A e^{-\int X\,dx} \cdot \frac{du}{dx} + X_1 = 0,$$

und hieraus

$$du = -\frac{X_1\,dx}{A\,e^{-\int X\,dx}}$$

$$= -\frac{1}{A} \cdot X_1\,e^{\int X\,dx} \cdot dx$$

so wie, wenn man integrirt,

$$u = -\frac{1}{A}\int X_1\,e^{\int X\,dx}\,dx + C,$$

wodurch auch u bestimmt ist.

Weil nun $y = uv$, so ist

$$y = -e^{-\int X\,dx}\int X_1\, e^{\int X\,dx}\,dx + AC\,e^{-\int X\,dx}$$
$$= e^{-\int X\,dx}\left(AC - \int X_1\, e^{\int X\,dx}\cdot dx\right),$$

und dieses ist die Integralgleichung.

Beispiel.

$$\frac{dy}{dx} + y - ax = 0.$$

Hier ist $X = 1$ und $X_1 = -ax$, daher

$$\int X\,dx = \int dx = x.$$

Ferner ist

$$\int X_1\, e^{\int X\,dx}\,dx = -\int ax\, e^x\,dx$$
$$= -a e^x (x-1),$$

folglich die Integralgleichung

$$y = e^{-x}\left(AC + a e^x (x-1)\right),$$

oder, wenn man AC mit B bezeichnet,

$$y = B e^{-x} + a(x-1).$$

In gleicher Weise lässt sich auch eine Differentialgleichung von der Form

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + X f(y) + X_1 = 0$$

behandeln, wo $f(y)$ nur eine Funktion von y und $f'(y)$ der Differentialquotient derselben ist, während X und X_1 nur Funktionen von x sind. Es ist nämlich

$$f'(y)\,dy = d\,f(y),$$

daher

$$\frac{d\,f(y)}{dx} + X f(y) + X_1 = 0,$$

und folglich die Integralgleichung

$$f(y) = e^{-\int X\,dx}\left(B - \int X_1\, e^{\int X\,dx}\,dx\right).$$

Zu den Gleichungen von dieser Form gehört die folgende

$$y^{m-1}\frac{dy}{dx} + \frac{X}{m} y^m + \frac{X_1}{m} = 0;$$

denn multiplicirt man diese Gleichung mit m, so erhält man

$$m y^{m-1}\frac{dy}{dx} + X y^m + X_1 = 0,$$

die Integralgleichung ist daher

$$y^m = e^{-\int X\,dx}\left(B - \int X_1\, e^{\int X\,dx}\,dx\right).$$

Ebenso die folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1\, y^n = 0,$$

dividirt man diese Gleichung mit y^n, so erhält man

$$\frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} + X \frac{1}{y^{n-1}} + X_1 = 0,$$

oder

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + X\, y^{1-n} + X_1 = 0,$$

und wenn man mit $-(n-1)$ multiplicirt,

$$-(n-1)\, y^{-n} \frac{dy}{dx} - (n-1) \cdot X y^{1-n} - (n-1)\, X_1 = 0;$$

die Integralgleichung ist dann

$$y^{1-n} = e^{(n-1)\int X\, dx}\left(B + (n-1) \int X_1\, e^{-(n-1)\int X\, dx}\, dx\right).$$

§ 93.

Vom integrirenden Faktor.

Wenn eine Gleichung von der Form

$$f(x,\, y) = C$$

differentiirt wird, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

und dieses ist das vollständige Differential der Gleichung

$$f(x,\, y) = C.$$

Wenn daher umgekehrt eine Differentialgleichung

$$P + Q \frac{dy}{dx} = 0$$

das vollständige Differential einer Funktion der beiden Veränderlichen x und y sein soll, so muss sein

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Differentiirt man nun

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}$$

partiell nach y und

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

partiell nach x, so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

und weil

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

indem es für das Resultat gleichgiltig ist, ob man erst nach x und dann nach y, oder umgekehrt erst nach y und dann nach x differentiirt, so muss auch sein

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Wenn also diese Gleichung besteht und die damit ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, so ist die Differentialgleichung

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0$$

das vollständige Differential einer Gleichung

$$f(x, y) = C.$$

Um diese letztere aus der Differentialgleichung abzuleiten, hat man zunächst aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,$$

$$\partial f = P\,dx,$$

und folglich wenn man diese nach x integrirt, indem man y wie eine Constante ansieht, so erhält man

$$f = \int P\,\partial x + Y.$$

Hier ist Y die Constante der Integration, welche zwar x nicht enthält, welche aber eine Funktion von y sein kann. Um diese Funktion zu bestimmen, hat man die Gleichung partiell nach y zu differentiiren. Dieses gibt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y}\,\partial x + \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Es ist aber auch

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q,$$

mithin

$$Q = \int \frac{\partial P}{\partial y}\,\partial x + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

und hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x,$$

$$\partial Y = Q \partial y - \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x$$

so wie durch Integration

$$Y = \int Q \partial y - \int \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x + C.$$

Wird dieser Werth von Y in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man

$$f = \int P \partial x + \int Q \partial y - \int \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x + C$$

die gesuchte Integralgleichung ist daher

$$\int P \partial x + \int Q \partial y - \int \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = C.$$

Die einzelnen Integrale sind partielle und stets in Beziehung auf diejenige Veränderliche zu nehmen, deren Differential unter dem Integralzeichen steht.

Beispiel.

$$(x^m + y) + (y^n + x) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Hier ist

$$x^m + y = P; \quad y^n + x = Q;$$

differentiirt man den Werth von P partiell nach y und den Werth von Q partiell nach x, so ist

$$\partial y = \partial P; \quad \partial x = \partial Q,$$

daher

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Es ist also die Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

erfüllt, und folglich ist die Differentialgleichung das vollständige Differential einer Gleichung

$$f(x, y) = C.$$

Es ist aber

$$\int P \partial x = \int (x^m + y) \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + xy,$$

$$\int Q \partial y = \int (y^n + x) \partial y = \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy,$$

$$\int \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = \int \partial y \int \partial x = xy,$$

und folglich ist die Integralgleichung

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + xy + \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy - xy = C,$$

das ist

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy = C.$$

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass, wenn die Gleichung

$$f(x, y) = C$$

differentiirt wird, alle Glieder des Differentials einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so dass es unter der Form

$$\left(P + Q \frac{dy}{dx}\right) v = 0$$

erscheint, wo v im Allgemeinen eine Funktion von x und y ist. In diesem Falle fällt der Faktor v hinweg, und die Differentialgleichung

$$P + Q \frac{dy}{dx} = 0$$

ist nicht mehr das vollständige Differential der Gleichung

$$f(x, y) = C,$$

es ist also auch die Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

nicht mehr erfüllt, und die so eben angegebene Integrationsmethode ist nicht anwendbar. Kann man aber den Faktor v wieder herstellen, so wird die Differentialgleichung ein vollständiges Differential und kann nach der fraglichen Methode integrirt werden. In diesem Sinne nennt man diesen Faktor den integrirenden Faktor.

Zur Bestimmung des integrirenden Faktors haben wir aber die Gleichung

$$\frac{\partial (vP)}{\partial y} = \frac{\partial (vQ)}{\partial x},$$

also wenn man die Differentiation ausführt,

$$v \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial x},$$

oder

$$v \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die Bestimmung des integrirenden Faktors führt daher auf eine Differentialgleichung, deren Auflösung grösstentheils schwieriger ist, als die Auflösung der vorgelegten Differentialgleichung selbst. In speciellen Fällen jedoch lässt sich der integrirende Faktor daraus so bestimmen, dass das Verfahren mit Vortheil angewendet werden kann.

Wenn der Ausdruck

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

kein y enthält, so kann man annehmen, dass auch v unabhängig von y ist. In diesem Falle ist aber

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

und die Gleichung geht in die folgende über

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

oder

$$\frac{\partial v}{v}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q},$$

durch Integration erhält man hieraus

$$l(v)=\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q}+C,$$

$$v=e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q}+C},$$

und wenn man e^C mit A bezeichnet,

$$v=A\,e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q}}.$$

Wenn ferner der Ausdruck

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

kein x enthält, so kann man annehmen, dass auch v unabhängig von x ist. Dann ist aber

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

und die Gleichung geht in folgende über

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

oder

$$\frac{\partial v}{v} = -\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{P},$$

durch Integration erhält man hieraus

$$l(v) = -\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{P} + C$$

so wie

$$v = e^{-\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{P} + C},$$

und wenn man e^C mit B bezeichnet,

$$v = B\,e^{-\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{P}}.$$

Beispiel.

Die Differentialgleichung sei

$$-y + x\frac{dy}{dx} = 0,$$

so ist

$$P = -y; \quad Q = x,$$

also

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = +1.$$

Nun ist

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}(-1-1) = -\frac{2}{x}.$$

Dieser Ausdruck enthält also kein y, daher ist

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

und mithin

$$\begin{aligned} v &= A\,e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q}} \\ &= A\,e^{-2\int\frac{\partial x}{x}} \\ &= A\,e^{-2\,l(x)} \\ &= A\,e^{l(x^{-2})} \\ &= Ax^{-2} \\ &= \frac{A}{x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Differentialgleichung mit diesem Faktor, so erhält man

$$\left(-y + x\frac{dy}{dx}\right)\frac{A}{x^2} = 0,$$

$$\frac{A}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{Ay}{x^2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

folglich durch Integration

$$l(y) = l(x) + l(a)$$

wenn man mit $l(a)$ die Constante der Integration bezeichnet. Aus der Gleichung folgt aber weiter

$$l(y) - l(x) = l(a),$$

$$l\left(\frac{y}{x}\right) = l(a),$$

$$\frac{y}{x} = a,$$

und dieses ist das Integral der Differentialgleichung.

Wenn man die Gleichung differentiirt, so erhält man

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

und hieraus geht nach Hinweglassung des Faktors $\frac{1}{x^2}$ die Differentialgleichung

$$-y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

hervor.

§ 94.

Differentialgleichungen höherer Grade.

Wenn in Differentialgleichungen der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ in höheren Potenzen als der ersten vorkommt, so nennt man sie Differentialgleichungen höherer Grade und von der ersten Ordnung. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + F_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + F_n = 0,$$

wo F_1, $F_2 \ldots F_n$ Funktionen von x und y sind.

Um die Integralgleichung einer solchen Differentialgleichung zu bestimmen, hat man die Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen, wodurch man im Allgemeinen n Werthe für $\frac{dy}{dx}$ bekommt, welche sämmtlich Funktionen von x und y sind, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = f_1; \quad \frac{dy}{dx} = f_2; \quad \frac{dy}{dx} = f_3 \ldots$$

Es sind dann

$$\frac{dy}{dx} - f_1 = 0; \quad \frac{dy}{dx} - f_2 = 0; \quad \frac{dy}{dx} - f_3 = 0$$

u. s. w. die Faktoren der Differentialgleichung. Werden nun diese Differentialgleichungen, welche sämmtlich vom ersten Grade sind, integrirt, so ist ein jedes dieser Integrale ein Faktor der Integralgleichung, welche man folglich erhält, wenn man diese Integrale miteinander multiplicirt. Einem jeden dieser Integrale ist eine willkürliche Constante hinzuzufügen, welche man aber, unbeschadet der Allgemeinheit, alle mit demselben Zeichen bezeichnen kann, da sie ja eben willkürliche Constante sind.

Beispiele.

Die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$$

ist vom zweiten Grade und lässt sich in die Faktoren

$$\frac{dy}{dx} - a = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} + a = 0$$

zerlegen. Die Integrale dieser beiden Differentialgleichungen sind

$$y = ax + C; \quad y = -ax + C,$$

oder

$$y - ax - C = 0; \quad y + ax - C = 0,$$

daher ist die Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichgleichung

$$(y - ax - C)(y + ax - C) = 0,$$

oder wenn die Multiplication ausgeführt wird,

$$y^2 - a^2x^2 - 2Cy + C^2 = 0.$$

Wird diese Gleichung differentiirt, so erhält man

$$y\,dy - a^2x\,dx - C\,dy = 0.$$

Wenn man nun aus den letzten beiden Gleichungen die Constante C eliminirt, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0,$$

und dieses ist die vorgelegte Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0$$

lässt sich in die Faktoren

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{ax} = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} + \sqrt{ax} = 0$$

zerlegen. Das Integral von

$$\frac{dy}{dx} - \sqrt{ax} = 0 \quad \text{ist} \quad y - \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C = 0,$$

und das Integral von

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{ax} = 0 \quad \text{ist} \quad y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C = 0,$$

daher ist die Integralgleichung

$$\left(y - \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C\right)\left(y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} - C\right) = 0,$$

und nach erfolgter Multiplication

$$(y - C)^2 - \tfrac{4}{9}\,ax^3 = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung und eliminirt die Constante C, so erhält man wieder die vorgelegte Differentialgleichung.

Das so eben betrachtete Verfahren ist aber, da es die Auflösung höherer Gleichungen verlangt, deren Wurzeln zum Theil entweder nicht zu ermitteln sind oder schwer zu behandelnde Formen besitzen, nicht immer anwendbar, weshalb man sich noch anderer besonderer Methoden bedient, welche dem allgemeinen Verfahren auch um deswillen vorzuziehen sind, weil sie oft leichter zum Ziele führen.

Ein solches Verfahren besteht darin, dass man die vorgelegte Differentialgleichung entweder nach x oder nach y auflöst, wenn eine solche Auflösung überhaupt möglich ist. Man erhält dann eine Gleichung von der Form

$$y = \varphi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } x = \psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

oder wenn man $\frac{dy}{dx}$ mit u bezeichnet,

$$y = \varphi(x, u); \quad x = \psi(y, u).$$

Hat man die Differentialgleichung nach y aufgelöst, so ist die Gleichung

$$y = \varphi(x, u)$$

zu differentiiren. Dieses gibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx},$$

oder

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx},$$

und dieses ist eine Differentialgleichung, welche die Veränderlichen x und u enthält. Diese Gleichung ist zu integriren, wenn es möglich ist, wodurch man eine Gleichung von der Form

$$f(x, u, C) = 0$$

erhält. Wird nun aus den Gleichungen

$$y = \varphi\,(x, u) \text{ und } f(x, u, C) = 0$$

die Veränderliche u eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y, welches eine Integralgleichung ist.

Hat man die Differentialgleichung nach x aufgelöst, so ist die Gleichung

$$x = \psi\,(y, u)$$

zu differentiiren. Dieses gibt

$$dx = \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du,$$

oder

$$1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Es ist aber

$$\frac{dy}{dx} = u; \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u,$$

also auch

$$1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot u + \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} \cdot u.$$

Dieses ist eine Differentialgleichung, welche die Veränderlichen y und u enthält. Diese Gleichung ist zu integriren, wenn es möglich ist, wodurch man eine Gleichung von der Form

$$f(y, u, C) = 0$$

erhält. Wird nun aus den Gleichungen

$$x = \psi\,(y, u) \text{ und } f\,(y, u, C) = 0$$

die Veränderliche u eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y, welches eine Integralgleichung ist.

Beispiel.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = a$$

zu integriren. Löst man diese Gleichung für y auf, so erhält man

$$y = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + x\frac{dy}{dx},$$

und wird $\frac{dy}{dx} = u$ gesetzt,

1. $$y = a\sqrt{1+u^2} + xu = \varphi(x, u).$$

Nun ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + x,$$

daher

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} = \left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + x\right)\frac{du}{dx},$$

und weil die linke Seite der Gleichung 1. durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = u$$

gibt, so erhält man als Differential der Gleichung 1.

$$u = u + \left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + x\right)\frac{du}{dx},$$

das ist aber

$$0 = \left(\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + x\right)\frac{du}{dx}.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch die beiden Bedingungen

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + x = 0.$$

Aus der ersten Bedingung

$$\frac{du}{dx} = 0$$

folgt aber durch Integration

$$u = C,$$

und wird dieser Werth von u in die Gleichung 1. eingesetzt, so erhält man die Integralgleichung

$$y = a\sqrt{1 + C^2} + Cx.$$

Aus der zweiten Bedingung

$$\frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + x = 0$$

ergibt sich

$$x = -\frac{au}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$x^2 = \frac{a^2u^2}{1+u^2},$$

und hieraus

$$u = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wird dieser Werth von u in die Gleichung 1. eingesetzt, so erhält man die Integralgleichung

$$y = a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{a^2 \pm x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und für das untere Zeichen

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wir haben also hier zwei Integrale aus der vorgelegten Differentialgleichung erhalten, nämlich

$$y = a\sqrt{1 + C^2} + Cx \text{ und } y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

das eine derselben hat eine willkürliche Constante C, dem andern aber fehlt diese Constante.

Wenn in der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + F_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + F_n = 0$$

die Funktionen $F_1, F_2 \cdots F_n$ sämmtlich homogen sind, so dass durch die Substitution $y = xz$ alle den gemeinschaftlichen Faktor x^m erhalten, welcher hinwegfällt, so gehen durch diese Substitution sämmtliche Funktionen in Funktionen von z über, und es wird

$$\frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}.$$

Geht aus dieser Substitution auch $\frac{dy}{dx}$ als Funktion von z hervor, so dass

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(z),$$

so erhält man die Gleichung

$$\varphi(z) = z + x\frac{dz}{dx},$$

$$\varphi(z) - z = x\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z},$$

und wenn man integrirt,

$$l(x) = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C.$$

Nach erfolgter Integration ist $\frac{y}{x}$ für z zu setzen.

Lässt sich dagegen z als Funktion von $\frac{dy}{dx}$ darstellen und man setzt $\frac{dy}{dx} = u$, so wird $z = \varphi(u)$ und

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

oder wenn man $\varphi'(u)$ für $\frac{dz}{du}$ schreibt,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(u)\frac{du}{dx}.$$

Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

geht daher in folgende über

$$u = \varphi(u) + x\,\varphi'(u)\frac{du}{dx},$$

$$u - \varphi(u) = \frac{x}{dx} \cdot \varphi'(u)\,du,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\varphi'(u)\,du}{u - \varphi(u)},$$

also wenn man integrirt,

$$l(x) = \int \frac{\varphi'(u)\,du}{u - \varphi(u)} + C.$$

Es ist aber auch

$$\int \frac{\varphi'(u)\,du}{u - \varphi(u)} = -\int \frac{1 - \varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\,du + \int \frac{du}{u - \varphi(u)}$$

$$= -\int \frac{1 - \varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\,du - \int \frac{du}{\varphi(u) - u},$$

und weil $(1 - \varphi'(u))\,du$ das Differential von $u - \varphi(u)$ ist, so hat man

$$l(x) = l\,(u - \varphi(u)) - \int \frac{du}{\varphi(u) - u} + C.$$

Wird endlich aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$y = x\,\varphi(u)$$

u eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die Integralgleichung ist.

Beispiel.

Wird in der Differentialgleichung

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 - a\,x^2 = 0$$

$y = xz$ gesetzt, so erhält man, weil x^2 von allen Gliedern gemeinschaftlicher Faktor wird,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - z^2 - a^2 = 0,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a^2 + z^2} = \varphi(z),$$

und mithin

$$l(x) = \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2} - z} + C.$$

Es ist aber

$$\frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2} - z} = \frac{(\sqrt{a^2 + z^2} + z)\,dz}{a^2},$$

daher

$$l(x) = \frac{1}{a^2}\int (\sqrt{a^2 + z^2} + z)\,dz + C$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \sqrt{a^2 + z^2}\,dz + \frac{1}{a^2}\int z\,dz + C$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{z}{2}\sqrt{a^2 + z^2} + \frac{a^2}{2}\,l\left(z + \sqrt{a^2 + z^2}\right)\right] + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{z^2}{2} + C,$$

wo nun $\frac{y}{x}$ für z zu setzen ist.

§ 95.

Integration der Differentialgleichungen durch Reihen.

Wenn das Integral einer Differentialgleichung eine Funktion ist, die sich auf irgend eine Weise in eine endliche oder unendliche, aber convergente Reihe entwickeln lässt, so ist es auch möglich diese Reihe aus der gegebenen Differentialgleichung abzuleiten und auf diese Weise die Integration der Differentialgleichung zu bewirken.

Nach dem Taylor'schen Satze ist

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(x) + \cdots$$

Setzt man nun $x = a$ und $h = x - a$, wo a irgend einen Specialwerth von x bezeichnet, so erhält man

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(a) + \cdots,$$

nnd es ist $f(a)$ derjenige Specialwerth, den die Funktion für $x = a$ annimmt. Ist nun

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, so hat man sie für $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen und die successiven Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} \cdots$ zu bilden, in diese sodann den Specialwerth a für x einzusetzen und die auf diese Weiße erhaltenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ in die Reihe einzuführen, deren Summe sodann das gesuchte Integral ist.

Wird einer der Differentialquotienten Null, so werden auch alle folgenden Null, und die Reihe ist endlich; wird aber keiner der Differentialquotienten Null, so ist die Reihe unendlich und folglich nur brauchbar, wenn sie convergirt. Divergirt die Reihe aber, so folgt daraus, dass die Funktion einer solchen Reihe nicht gleich sein kann.

Der Werth $f(a)$ bleibt unbestimmt und vertritt also die Stelle der willkürlichen Constanten der Integration.

Beispiel.

Ist die Differentialgleichung

$$(1) \qquad x\frac{dx}{dy} - 3y + 4x^2 = 0$$

nach diesem Verfahren zu integriren, so folgt hieraus für den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\frac{y}{x} - 4x^2,$$

differentiirt man die Gleichung 1. weiter, so folgt

$$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 8x = 0,$$

das ist

(2) $$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 8x = 0,$$

und hieraus für den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - 8x.$$

Differentiirt man die Gleichung 2. weiter, so folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + 8 = 0,$$

das ist

(3) $$x\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 8 = 0,$$

und hieraus für den dritten Differentialquotienten

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{8}{x}.$$

Differentiirt man die Gleichung 3. weiter, so folgt

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

das ist

$$x\frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

und hieraus für den vierten Differentialquotienten

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

so dass auch alle folgenden Differentialquotienten Null werden.

Setzt man in diese Differentialquotienten den Specialwerth von x, also a, ein und nimmt $a = 1$, bezeichnet ferner den Specialwerth, den die Funktion für $x = a = 1$ annimmt, also den Werts von $f(a)$ mit C, so ist

$$\frac{dy}{dx} = 3C - 4,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6C - 16,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6C - 24,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Da nun auch alle folgenden Differentialquotienten Null sind, so ist die Reihe endlich und wird

$$f(x) = C + \frac{x-1}{1}(3C-4) + \frac{(x-1)^2}{1.2}(6C-16) + \frac{(x-1)^3}{1.2.3}(6C-24)$$
$$= C + (x-1)(3C-4) + (x^2-2x+1)(3C-8)$$
$$+ (x^3-3x^2+3x-1)(C-4)$$
$$= (C-4)x^3 + 4x^2,$$

dieses ist aber das gesuchte Integral.

Setzt man in der Taylor'schen Reihe $x = 0$ und schreibt x für h, so geht sie in die Maclaurin'sche Reihe über, und man hat

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \cdots$$

Bezeichnet man nun

$$f(0),\ \frac{f'(0)}{1},\ \frac{f''(0)}{1.2},\ \frac{f'''(0)}{1.2.3}, \ldots$$

beziehungsweise mit

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \cdots$$

so wie $f(x)$ mit y, so nimmt die Reihe folgende Gestalt an

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

Die Coëfficienten A_1, A_2, $A_3 \cdots$ können nun entweder ebenso bestimmt werden, wie das im vorhergegangenen Falle geschehen ist, oder man kann diese Gleichung differentiiren und die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, wie sie sich aus dieser und der zu integrirenden Differentialgleichung ergeben, einander gleich setzen, wodurch $\frac{dy}{dx}$ eliminirt wird, hierauf aber den Werth von y in die so erhaltene Gleichung einführen, wo dann die Coëfficienten gleicher Potenzen von x gleich sein müssen, und aus diesen Gleichungen A_1, A_2, $A_3 \cdots$ bestimmen. A_0 bleibt hierbei unbestimmt und ist die Constante der Integration.

Hat die Differentialgleichung die Form

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = X,$$

wo X nur eine Funktion von x ist, so folgt hieraus

$$\frac{dy}{dx} = X - y^2,$$

ferner gibt die Gleichung

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

wenn sie differentiirt wird,

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2\,A_2 x + 3\,A_3 x^2 + \cdots,$$

und folglich erhält man durch Gleichsetzung der Werthe von $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung

$$X - y^2 = A_1 + 2\,A_2 x + 3\,A_3 x^2 + \cdots$$

Es ist aber

$$y^2 = A_0{}^2 + 2\,A_0 A_1\,x + (A_1{}^2 + 2\,A_0 A_2)\,x^2 + (2\,A_0 A_3 + 2 A_1 A_2)\,x^3 + \cdots$$

Ist nun ferner

$$X = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots,$$

so ergibt sich

$$(a_0 - A_0{}^2) + (a_1 - 2\,A_0\,A_1)\,x + (a_2 - A_1{}^2 - 2\,A_0\,A_2)\,x^2 + \cdots$$
$$= A_1 + 2\,A_2 x + 3\,A_3 x^2 + \cdots,$$

hieraus aber folgen die Gleichungen

$$A_1 = a_0 - A_0{}^2,$$
$$2\,A_2 = a_1 - 2\,A_0 A_1,$$
$$3\,A_3 = a_2 - A_1{}^2 - 2\,A_0\,A_2$$

u. s. f.,

und aus diesen folgt weiter

$$A_1 = a_0 - A_0{}^2,$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}\,(a_1 - 2\,a_0\,A_0 + 2\,A_0{}^3),$$
$$A_3 = \tfrac{1}{3}\,(a_2 - a_0{}^2 - a_1 A_0 + 4\,a_0\,A_0{}^2 - 3\,A_0{}^4)$$

u. s. f.,

wodurch die Coëfficienten A_1, A_2, $A_3 \cdots$ bestimmt sind. Setzt man nun diese Werthe in die Gleichung für y ein, so erhält man das gesuchte Integral, nämlich

$$y = A_0 + (a_0 - A_0{}^2)\,x + \tfrac{1}{2}\,(a_1 - 2\,a_0\,A_0 + 2\,A_0{}^3)\,x^2 + \cdots$$

Beispiel.

Hat man die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = a\,x$$

nach diesem Verfahren zu integriren, so ist

$$a_0 = 0;\quad a_1 = a;\quad a_2 = a_3 = \cdots = 0.$$

Bezeichnen wir nun A_0 mit C, so ergibt sich

$$y = C - C^2 x + \tfrac{1}{2}\,(a + 2\,C^3)\,x^2 - \tfrac{1}{3}\,(a\,C + 3\,C^4)\,x^3 + \cdots$$

Zuweilen ist es zweckmässig für y, eine Reihe von folgender Form aufzustellen

$$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \cdots$$

und dann für α und etwaige Coëfficienten solche Bestimmungen zu treffen, dass der vorgelegten Gleichung entsprochen wird.

Beispiel.

Ist die gegebene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x},$$

so erhält man durch Differentiation der für y aufgestellten Reihe

$$\frac{dy}{dx} = A_0 \alpha\, x^{\alpha-1} + A_1 (\alpha+1)\, x^\alpha + A_2(\alpha+2)\, x^{\alpha+1} + \cdots,$$

und weiter durch Gleichsetzung der Werthe von $\frac{dy}{dx}$

$$2 - \frac{y}{x} = A_0 \alpha\, x^{\alpha-1} + A_1 (\alpha+1)\, x^\alpha + A_2(\alpha+2)\, x^{\alpha+1} + \cdots,$$

so wie wenn man auf der linken Seite für y die obige Reihe setzt,

$$2 - A_0 x^{\alpha-1} - A_1 x^\alpha - A_2 x^{\alpha+1} - \cdots$$
$$= A_0 \alpha\, x^{\alpha-1} + A_1 (\alpha+1)\, x^\alpha + A_2(\alpha+2)\, x^{\alpha+1} + \cdots$$

Nimmt man nun $\alpha = -1$ an, so folgt hieraus

$$2 - A_0 x^{-2} - A_1 x^{-1} - A_2 - A_3 x - A_4 x^2 - \cdots$$
$$= - A_0 x^{-2} + A_2 + 2 A_3 x + 3 A_4 x^2 + \cdots,$$

und hieraus ergibt sich behufs der Bestimmung der Coëfficienten Folgendes:

$$- A_0 = - A_0,$$

es bleibt also A_0 unbestimmt und ist mithin die Constante der Integration. Ferner

$$- A_1 = 0,$$
$$2 - A_2 = A_2, \text{ also } A_2 = 1,$$
$$- A_3 = 2 A_3; \quad 3 A_3 = 0, \text{ also } A_3 = 0,$$
$$- A_4 = 3 A_4; \quad 4 A_4 = 0, \text{ also } A_4 = 0,$$

und so für alle folgenden Coëfficienten. Setzt man nun $A_0 = C$, und die Werthe der Coëfficienten in die Gleichung für y ein, so erhält man

$$y = C x^{-1} + x,$$

und dieses ist das gesuchte Integral.

In manchen Fällen ist es vortheilhaft, die gesuchte Funktion als das Produkt oder den Quotienten zweier Funktionen zu betrachten und

$$y = \varphi(x)\,\psi(x) \quad \text{oder} \quad y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

zu setzen, wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Funktionen sind, welche sich in Reihen entwickeln lassen.

Beispiel.

Soll die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = ax$$

nach diesem Verfahren integrirt werden, so setze man

$$y = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

wo also $\varphi'(x)$ der Differentialquotient von $\varphi(x)$ ist, man erhält dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\,\varphi''(x) - \varphi'(x)^2}{\varphi(x)^2}$$

$$= \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2,$$

und es ist also

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$

$$= \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)},$$

demnach wird die Differentialgleichung

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = ax,$$

oder

$$\varphi''(x) = ax\,\varphi(x).$$

Setzt man nun weiter

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

so ist

$$\varphi'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \cdots$$

und

$$\varphi''(x) = 1 \cdot 2\,A_2 + 2 \cdot 3\,A_3 x + 3 \cdot 4\,A_4 x^2 + \cdots,$$

so wie, wenn man diese Reihen in die Gleichung einführt,

$$1 \cdot 2\,A_2 + 2 \cdot 3\,A_3 x + 3 \cdot 4\,A_4 x^2 + \cdots$$

$$= aA_0 x + aA_1 x^2 + aA_2 x^3 + \cdots$$

Hier bleiben A_0 und A_1 unbestimmt und sind also Constante der

Integration. Für die übrigen Coëfficienten ergeben sich aber die Gleichungen

$$A_2 = 0,$$

$$2 \,.\, 3\, A_3 = a A_0; \quad A_3 = \frac{a A_0}{2 \,.\, 3},$$

$$3 \,.\, 4\, A_4 = a A_1; \quad A_4 = \frac{a A_1}{3 \,.\, 4},$$

$$4 \,.\, 5 \,.\, A_5 = a A_2; \quad A_5 = 0,$$

$$5 \,.\, 6\, A_6 = a A_3; \quad A_6 = \frac{a^2 A_0}{2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6},$$

$$6 \,.\, 7\, A_7 = a A_4; \quad A_7 = \frac{a^2 A_1}{3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7},$$

$$7 \,.\, 8\, A_8 = a A_5; \quad A_8 = 0;$$

$$8 \,.\, 9\, A_9 = a A_6; \quad A_9 = \frac{a^3 A_0}{2 , 3 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 9},$$

$$9 \,.\, 10 \,.\, A_{10} = a A_7; \quad A_{10} = \frac{a^3 A_1}{3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 10},$$

$$10 \,.\, 11 \,.\, A_{11} = a A_8; \quad A_{11} = 0$$

u. s. w.

Werden diese Coëfficienten in die Reihe für $\varphi(x)$ eingesetzt, so folgt

$$\varphi(x) = A_0 \left[1 + \frac{a x^3}{2 \,.\, 3} + \frac{a^2 x^6}{2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6} + \frac{a^3 x^9}{2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 9} + \cdots\right]$$
$$+ A_1 \left[x + \frac{a x^4}{3 \,.\, 4} + \frac{a^2 x^7}{3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7} + \frac{a^3 x^{10}}{3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 10} + \cdots\right].$$

Diese Reihen sind unendlich, aber stets convergent. Setzt man

$$1 + \frac{a x^3}{2 \,.\, 3} + \frac{a^2 x^6}{2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6} + \frac{a^3 x^9}{2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 9} + \cdots = U,$$

$$x + \frac{a x^4}{3 \,.\, 4} + \frac{a^2 x^7}{3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7} + \frac{a^3 x^{10}}{3 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 10} + \cdots = V,$$

so ist

$$\varphi(x) = A_0 U + A_1 V,$$
$$\varphi'(x) = A_0 U' + A_1 V',$$

und daher

$$y = \frac{A_0 U' + A_1 V'}{A_0 U + A_1 V}$$

$$= \frac{U' + \frac{A_1}{A_0} V'}{U + \frac{A_1}{A_0} V},$$

oder wenn man $\frac{A_1}{A_0} = C$ setzt,

$$y = \frac{U' + CV'}{U + CV}.$$

§ 96.

Die besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen.

In § 94. führte die Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

zu den beiden Auflösungen

$$y = a\sqrt{1 + C^2} + Cx$$

und

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

von denen die erste eine willkürliche Constante besitzt, der letzteren hingegen diese willkürliche Constante fehlt. Die erste Auflösung ist daher das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung, während die letzte Auflösung als eine besondere Auflösung der Differentialgleichung oder als ein singuläres Integral derselben bezeichnet wird.

Das allgemeine Integral ist die Gleichung einer beliebigen Anzahl von Kurven derselben Art; denn für einen jeden speciellen Werth, den man der Constanten C beilegt, erhält man eine andere Kurve. Alle diese Kurven sind der Lage nach verschieden und können sich daher schneiden. Wenn dieses aber geschieht, und man lässt die Constante C sich stetig ändern, so bilden die Durchschnittspunkte je zweier aufeinander folgender Kurven, da sie einander unendlich nahe liegen, wieder eine Kurve, welche der geometrische Ort aller dieser Durchschnittspunkte ist. Die besondere Auflösung der Differentialgleichung oder ihr singuläres Integral ist aber die Gleichung dieser neuen Kurve, und da es nur eine einzige solche Kurve geben kann, so enthält die besondere Auflösung auch keine willkürliche Constante. Die durch das singuläre Integral bestimmte Kurve nennt man die einhüllende aller durch das allgemeine Integral charakterisirten Kurven, weil alle diese Kurven von jener berührt werden. Gibt eine Differentialgleichung keine besondere Auflösung, so besitzen die durch das allgemeine Integral charakterisirten Kurven auch keine einhüllende Kurve.

Das oben aufgeführte allgemeine Integral

$$y = a\sqrt{1 + C^2} + Cx$$

ist die Gleichung einer Geraden, deren Lage sich ändert, jenachdem man der Constanten C andere Werthe beilegt; das singuläre Integral

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und dessen Halbmesser a ist. Wenn daher durch stetige Aenderung der Constanten C die Gerade ihre Lage stetig ändert, so bilden die Durchschnittspunkte je zweier aufeinander folgender Geraden einen Kreis, und alle Geraden werden von diesem Kreise berührt.

Es ist bereits bemerkt worden, dass wenn die Constante C sich stetig ändert, je zwei aufeinander folgende und sich schneidende Kurven einander unendlich nahe liegen; es liegen daher auch die beiden Durchschnittspunkte je dreier aufeinander folgender Kurven unendlich nahe. Da nun diese beiden unendlich nahe liegenden Punkte der einhüllenden Kurve sowol als der eingehüllten Kurve angehören, so hat die einhüllende Kurve mit der eingehüllten Kurve im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente, und es muss daher $\frac{dy}{dx}$ für diese beiden Kurven, die einhüllende sowol als die eingehüllte, denselben Werth haben.

Geht man von einem bestimmten Werthe c der Constanten C aus, so entspricht die Gleichung

$$F(x, y, c) = 0$$

einer beliebig angenommenen Kurve, und lässt man c um dc sich ändern, so entspricht die Gleichung

$$F(x, y, c + dc) = 0,$$

oder auch die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

der unmittelbar folgenden Kurve. Beide Kurven haben aber den Durchschnittspunkt gemein, und da dieses ein Punkt der einhüllenden Kurve ist, so erhält man die Gleichung dieser einhüllenden Kurve, wenn man aus den Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0$$

und

$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

die Constante c eliminirt. Diese Gleichung ist aber die besondere Auflösung einer Differentialgleichung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$F(x, y, c) = 0$$

ist.

Die oben aufgeführte Gleichung gibt, wenn man darin c für C setzt,

$$y - cx - a\sqrt{1 + c^2} = F(x, y, c) = 0.$$

Wird nun die Gleichung

$$y - cx - a\sqrt{1 + c^2} = 0$$

nach c differentiirt, so ist

$$-x - \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} = \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0.$$

Wird daher aus den Gleichungen

$$y - cx - a\sqrt{1 + c^2} = 0$$

und

$$x + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} = 0$$

die Constante c eliminirt, so erhält man

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

welches die Gleichung der einhüllenden Kurve oder die besondere Auflösung der Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

ist.

Aus dem allgemeinen Integrale folgt

$$\frac{dy}{dx} = c,$$

und aus der besonderen Auflösung folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

aus der Gleichung

$$x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} = 0$$

folgt aber

$$c = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und es sind also die Differentialverhältnisse aus der Gleichung der einhüllenden Kurve und aus der Gleichung der eingehüllten Kurve für den Berührungspunkt einander gleich.

Wir haben hier die besondere Auflösung aus dem allgemeinen Integrale abgeleitet; sie lässt sich aber auch aus der Differentialgleichung auf folgende Weise ableiten.

Ist die Differentialgleichung

$$f(x, y, u) = 0,$$

wo $u = \frac{dy}{dx}$ und wird diese partiell nach u differentiirt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial f(x, y, u)}{\partial u} = 0.$$

Wenn man nun aus diesen beiden Gleichungen u eliminirt, so erhält man ebenfalls das singuläre Integral.

Unsere Differentialgleichung ist

$$y - xu - a\sqrt{1+u^2} = f(x, y, u) = 0,$$

differentiirt man dieselbe partiell nach u, so erhält man

$$-x - \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\partial f(x, y, u)}{\partial u} = 0,$$

und wird nun aus beiden Gleichungen u eliminirt, so erhält man

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

welches wieder die besondere Auflösung der Differentialgleichung ist.

§ 97.

Die einfachsten Formen der Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

Eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung hat im Allgemeinen die Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

und hieraus gehen die folgenden einfacheren Formen hervor,

1. $$f\left(x,\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

2. $$f\left(y,\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

3. $$f\left(\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

4. $$f\left(x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

5. $$f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Die Integration dieser einfachen Formen lässt sich dadurch bewirken, dass man für $\frac{dy}{dx}$ eine neue Veränderliche u einführt, wodurch die Differentialgleichung der zweiten Ordnung auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt wird. Lässt sich dieselbe integriren, und setzt man in dem erhaltenen Integrale wieder $\frac{dy}{dx}$ für u, so erhält man wieder eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, und wird diese ebenfalls integrirt, so erhält man das Integral der Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Es sind also hiernach zwei aufeinander folgende Integrationen erforderlich. Da nun bei einer jeden Integration eine willkürliche Constante hinzugefügt werden muss, so enthält das Integral einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwei willkürliche Constanten.

Zu 1. Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x).$$

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = u, \text{ so ist } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx},$$

und folglich

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x),$$

$$du = \varphi(x)\, dx,$$

$$u = \int \varphi(x)\, dx + C.$$

Setzt man nun wieder $\frac{dy}{dx}$ für u, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \int \varphi(x)\, dx + C,$$

$$dy = dx \int \varphi(x)\, dx + C\, dx,$$
$$y = \int dx \int \varphi(x)\, dx + Cx + C_1.$$

Nach der Methode der theilweisen Integration ist aber

$$\int x\, \varphi(x)\, dx = x \int \varphi(x)\, dx - \int dx \int \varphi(x)\, dx,$$

daher auch

$$\int dx \int \varphi(x)\, dx = x \int \varphi(x)\, dx - \int x\, \varphi(x)\, dx,$$

demnach ist

$$y = x \int \varphi(x)\, dx - \int x\, \varphi(x)\, dx + Cx + C_1.$$

Beispiel. Die Gleichung sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ax,$$

so hat man nach der Formel, indem man ax für $\varphi(x)$ setzt,

$$\begin{aligned} y &= x \int ax\, dx - \int x \,.\, ax\, dx + Cx + C_1 \\ &= x \cdot \frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + Cx + C_1 \\ &= \frac{ax^3}{2} - \frac{ax^3}{3} + Cx + C_1 \\ &= \frac{ax^3}{6} + Cx + C_1. \end{aligned}$$

Zu 2. Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(y).$$

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = u, \text{ so ist } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx},$$

und folglich

$$\frac{du}{dx} = \varphi(y),$$

es ist aber auch

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u,$$

daher

$$\frac{du}{dy} \cdot u = \varphi(y),$$
$$u\, du = \varphi(y)\, dy,$$
$$\frac{u^2}{2} = \int \varphi(y)\, dy + C,$$
$$u^2 = 2 \int \varphi(y)\, dy + 2C,$$

so wie wenn man $2C$ mit c bezeichnet,

$$u = \pm \sqrt{c + 2 \int \varphi(y)\, dy}.$$

Setzt man nun wieder $\frac{dy}{dx}$ für u, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{c + 2\int \varphi(y)\, dy},$$

woraus

$$dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{c + 2\int \varphi(y)\, dy}},$$

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{c + 2\int \varphi(y)\, dy}} + C_1.$$

Beispiel. Die Gleichung sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y,$$

so hat man nach der Formel, indem man y für $\varphi(y)$ setzt,

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{c + 2\int y\, dy}} + C_1.$$

Nun ist

$$2\int y\, dy = y^2,$$

daher

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{c + y^2}} + C_1,$$

$$x = l\left(y + \sqrt{c + y^2}\right) + C_1,$$

oder

$$x - C_1 = l\left(y + \sqrt{c + y^2}\right).$$

Um die Gleichung für y aufzulösen, hat man

$$e^{x - C_1} = y + \sqrt{c + y^2},$$

$$e^{x - C_1} - y = \sqrt{c + y^2}.$$

Wird diese Gleichung zur zweiten Potenz erhoben, so erhält man

$$e^{2(x - C_1)} - 2y e^{x - C_1} + y^2 = c + y^2,$$

$$2y e^{x - C_1} = e^{2(x - C_1)} - c,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(e^{x - C_1} - c\, e^{-(x - C_1)}\right).$$

Zu 3. Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = u, \text{ so ist } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx},$$

und folglich

$$\frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

$$dx = \frac{du}{\varphi(u)},$$

$$x = \int \frac{du}{\varphi(u)} + C.$$

Weiter ist nun

$$dy = u\, dx,$$

also auch

$$dy = \frac{u\, du}{\varphi(u)},$$

$$y = \int \frac{u\, du}{\varphi(u)} + C_1.$$

Wird endlich aus den beiden für x und y erhaltenen Gleichungen u eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die Constanten C und C_1 enthält und das allgemeine Integral ist.

Beispiel. Die Gleichung sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$

Man hat daher, wenn man $\varphi(u) = u$ in die Formeln einsetzt,

$$x = \int \frac{du}{u} + C$$

$$= l(u) + C,$$

$$y = \int du + C_1$$

$$= u + C_1.$$

Aus der ersteren Gleichung folgt

$$x - C = l(u),$$

$$e^{x-C} = u,$$

und wird dieser Werth von u in die zweite Gleichung eingesetzt, so folgt

$$y = e^{x-C} + C_1.$$

Zu 4. Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = u, \text{ so ist } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx},$$

und die Gleichung wird

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x,\ u),$$

dieses ist in Beziehung auf u eine Differentialgleichung der ersten Ordnung. Die Integration derselben gibt eine Gleichung von der Form

$$u = \psi(x, C) \text{ oder } x = \psi(u, C),$$

wo C die Constante der Integration ist. Erhält man die Form

$$u = \psi(x, C),$$

so hat man weiter $$\frac{dy}{dx} = \psi(x, C),$$

$$dy = \psi(x, C)\, dx,$$

$$y = \int \psi(x, C)\, dx + C_1.$$

Erhält man dagegen die Form

$$x = \psi(u, C),$$

so hat man auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{du}},$$

es ist aber zufolge der Gleichung

$$\frac{dx}{du} = \frac{d\,\psi(u, C)}{du},$$

daher auch $$\frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{\frac{d\,\psi(u, C)}{du}},$$

und mithin $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{\frac{d\,\psi(u, C)}{du}},$$

oder $$u = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{\frac{d\,\psi(u, C)}{du}},$$

hieraus folgt nun $$dy = u \cdot \frac{d\,\psi(u, C)}{du} \cdot du,$$

so wie endlich

$$y = \int u \frac{d\,\psi(u, C)}{du} \cdot du + C_1.$$

Wird nun aus den für x und y erhaltenen Gleichungen u eliminirt, so erhält man eine Gleichnng zwischen x und y, welche die Constanten C und C_1 enthält und das allgemeine Integral ist.

Zu 5. Es sei $$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = u$, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$,

und weil $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}\, u,$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{du}{dy}\, u = \varphi(y, u),$$

und diese führt auf eine der Gleichungen

$$u = \psi(y, C) \text{ oder } y = \psi(u, C),$$

wo C die Constante der Integration ist. Erhält man

$$u = \psi(y, C),$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y, C),$$

also

$$dx = \frac{dy}{\psi(y, C)},$$

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y, C)} + C_1$$

Erhält man aber

$$y = \psi(u, C),$$

so ist hieraus

$$\frac{dy}{du} = \frac{d\,\psi(u, C)}{du}.$$

Es ist aber auch

$$\frac{du}{dy} \cdot u = \frac{du}{dx},$$

oder

$$\frac{1}{\frac{dy}{du}} \cdot u = \frac{1}{\frac{dx}{du}},$$

woraus

$$u = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}},$$

das ist aber auch

$$u = \frac{\frac{d\,\psi(u, C)}{du}}{\frac{dx}{du}},$$

$$u \cdot \frac{dx}{du} = \frac{d\,\psi(u, C)}{du},$$

$$dx = \frac{d\,\psi(u, C)}{du} \cdot \frac{du}{u},$$

$$x = \int \frac{d\,\psi(u, C)}{du} \cdot \frac{du}{u} + C_1.$$

Wird nun aus den für x und y erhaltenen Gleichungen u eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die Constanten C und C_1 enthält und das allgemeine Integral ist.