10. V

15. XII

699
+ 20
± 20

12840

D/322

23. I. 1920

ZASADY
RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO
I CAŁKOWEGO

Paryż - Warszawa 1870.

PARYŻ. — DRUKARNIA BRACI ROUGE, DUNON I FRESNÉ
ULICA DU FOUR-ST-GERMAIN, 43.

SPIS RZECZY

TOMU PIERWSZEGO

CZĘŚĆ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE.

CZĘŚĆ II

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

CZĘŚĆ III

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO TEORJI FUNKCYJ.

CZĘŚĆ IV

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO GEOMETRJI.

PRZEDMOWA

PRZEDMOWA

« Je ne vois partout que des infinis. »
PASCAL.

Objawy otaczającego nas świata zewnętrznego, działając na zmysły nasze, wyradzają w nas pewne *pojęcia* : władza umysłowa za pomocą któréj umiemy pojęcia te wiązać pomiędzy sobą, składać w systematy, wytwarzać z nich nowe pojęcia złożone, nazywa się *rozumowaniem*. Posiadamy nadto możność tworzenia całkiem nowych pojęć, niezostających w ścisłym związku z pojęciami zrodzonemi przez badania świata przyrodzonego, często nawet wprost sprzecznych z temi ostatniemi, lecz często także uprzedzających je niejako, zgadujących, że tak powiem, pojęcia istniejące : możność tę nazywamy *wyobraźnią*.

Rozumowanie i wyobraźnia stanowią więc wybitne cechy różniące umysł ludzki od materjalnego narzędzia; to ostatnie jest wprawdzie w stanie odebrać i uwydatniać wpływy objawów zewnętrznych, lecz pierwszy tylko umie wyciągnąć z tych wpływów konieczne ich następstwa, lub wyobrazić sobie inne objawy różne od bezpośrednio odebranych.

Tak termometr wskazuje nam zmianę temperatury z większą może dokładnością niż zmysły nasze : lecz skutki wynikające z téj zmiany temperatury jak zmarznięcie wody, zwiększenie lub zmniejszenie objętości ciał i t. p. tylko za pomocą rozumowania zastosowanego do ugrupowanych w pewną całość badań, umysłem naszym wyprowadzić jesteśmy w stanie.

Lecz umysł nasz oprócz pojęć wynikających wprost z wrażeń otrzymanych, wytwarza sobie za pomocą wyobraźni nowe pojęcia, jak również nowe sposoby składania tych pojęć i dochodzi w ten sposób do pojęć złożonych, które z przyczyny koniecznéj niedoskonałości naszych władz umysłowych mogą być niekoniecznie bezwarunkowo prawdziwe, ale także w największéj części tylko prawdopodobne, lub nawet całkiem fałszywe.

W zwykłéj niemożliwości natychmiastowego przekonania się, czy pewne wytworzone pojęcie jest prawdziwém, prawdopodobném, lub fałszywém, zaczęto szukać sposobów rozumowania za pomocą których możnaby było dojść do pojęć złożonych równie pewnych, równie prawdziwych, równie nieomylnych, jak są pewnemi, prawdziwemi, nieomylnemi pojęcia pierwsze na których rozumowanie osnutém zostało.

Sposoby te znalezione przez twórczość wyobraźni mistrzów, wydoskonalone, uproszczone, ułatwione za pomocą pewnych przyjętych wyrażeń ustnych i znaków piśmiennych, stanowią ogół *nauk matematycznych* : wspaniałą całość, potężną dźwignię rozumu ludzkiego, olbrzymie narzędzie, za pomocą którego każde nowe spostrzeżenie wyradza nową teorję, każde ziarnko zdobyte w dziedzinie wszechświata rozrasta się w rozłożyste drzewo, tak obfite i użyteczne wydające owoce. Nauki matematyczne są czystym objawem wielkości rozumu naszego, tak jak nauki przyrodzone dają nam poznać wielkość i niezmierzoność otaczającego nas świata: dziedzina jednych i drugich wydaje się być nieograniczoną, bo tak jak to, cośmy poznali z przyrody i praw, które nią rządzą, jest niczém w porównaniu z całością wszechświata i jego objawów, tak sposoby jakiemi możemy rozumować, układać te objawy, wyprowadzić z nich wnioski, są niezliczone i przedstawiają dla wyobraźni myślicieli niczém nieograniczone pole.

Jeżeli spojrzymy na tę wielką, piękną, harmonijną, na niewzruszonych opartą podstawach całość, jaką przedstawiają nam dziś nauki matematyczne, zgodzić się musimy, że prace mistrzów, którzy całość tę stworzyli (we właściwém znaczeniu wyrazu stworzyć), nie są wynikiem saméj tylko *wiedzy* (scientia), lecz że to co nazywamy *sztuką* (ars), ważną jeżeli nie najważniejszą odegrały w nich rolę. Sztuką bowiem nazwać musimy wszelki utwór wyobraźni, czy to będzie przedstawienie na płótnie, lub wyrycie z kamienia postaci wytworzonéj w umyśle artysty, czy też opisanie w harmonijnych wyrazach prawdy historycznéj lub sceny z życia wymarzonéj w myśli poety, czy też wynalezienie i przedstawienie w dotykalny sposób nowego sposobu dochodzenia do prawdy, grupowania pojęć, jedném słowem rozumowania w dziedzinie nauk matematycznych. Po bliższém zastanowieniu spostrzegamy z łatwością, że twórczość ta wyobraźni jest może najwybitniejszą w tym ostatnim przypadku, a w każdym razie najmniéj zaprzeczalne wydającą owoce; sztuka przebija się tu nie tylko w samym wynalazku ale także i w jego należytém przedstawieniu, tak jak utwór malarza, lub poety zależy nie tylko na pomyśle ale i na wykonaniu: przyznać jednak trzeba, że twórczość w dziedzinie rozumu jest nierównie rzadszą i trudniejszą niż w dziedzinie czystéj wyobraźni; mistrz jest tam niejako architektem skreślającym w ogólnych zarysach podstawy i plan wspaniałéj budowy, która następnie wznosi się przez wieki cegiełka po cegiełce mozolną pracą rzemieślników dokładających tu i owdzie tylko pojedyncze ozdoby własnego pomysłu.

Historja postępu nauk matematycznych nie może wejść w zakres niniejszego ustępu; zastanowimy się tylko w krótkości nad stanowiskiem jakie rachunek różniczkowy zajmuje w całości tych nauk, aby dać czytelnikowi choć pobieżne wyobrażenie o nowéj sferze wiedzy w którą go wprowadzić zamierzamy.

Jak w historji politycznéj znajdujemy pewne ważne wypadki, które wpływając na całą ludzkość nowy nadały jéj kierunek, wskazując jéj nowe cele i wyprowadzając na scenę nowe żywioły, i podług tych wypadków dzielimy historję ogólną na *okresy*, tak i w historji szczególnéj każdéj nauki spotykamy ważne odkrycia nadające nauce danéj nowy popęd, otwierające jéj nowe pole, wprowadzające w nią nowe czynniki. Cały postęp nauk matematycznych można sobie przedstawić podzielonym na trzy okresy: typem charakterystycznym pierwszego okresu jest *Arytmetyka*, drugiego *Algebra*, trzeciego *Rachunek różniczkowy*. Co się tyczy *Geometrji*, ta stanowi niejako typ ogólny trwający i kształcący się przez wszystkie czasy, mniéj ogólny, więcéj ograniczony od trzech poprzedzających, rozwijający się, to sam przez się, to przez wpływ tamtych, którym znów często wskazuje drogę postępu, lub dla których staje się bodźcem do nowych odkryć.

Kolebką nauk rozumowanych była bez wątpienia *arytmetyka*: jak tylko człowiek spostrzegł, że pewne wrażenia, pewne pojęcia, powtarzają się po wiele razy pozostając temi samemi lub przynajmniéj podobnemi, zaczął je niewątpliwie *liczyć*, zbierać w pewną całość, porównywać tak otrzymane wypadki. Pierwszą skalą służącą do takowego porównania były zapewne, jak są jeszcze dotąd dla wielu, palce u rąk, których liczba jest dziesięć: ztąd to u wszystkich narodów nawet nie zdających się być w początkach w porozumieniu pomiędzy sobą (Chińczyki), znajdujemy układ liczenia dziesiętny. Dalszy rozwój arytmetyki był zapewne nader szybki w miarę potrzeb: wprowadzenie cyfr i liczenia pisanego było prawdopodobnie nieledwie współczesném z odkryciem pisma; przypisują je Fenicjanom. Z filozofów Greckich, którzy naukę tę wydoskonalili, zasługują na uwagę Thales z Miletu, Pitagores, Eratosthenes, Hippathia (panna) i inni.

Ze wszystkich pojęć uderzających zmysły nasze, jedném z najdotykalniéjszych jest pojęcie *wielkości*, to jest rozmiarów, objętości, rozciągłości, otaczających nas przedmiotów; nie dziw więc, że jak tylko zaczęto porównywać, liczyć pojęcia, zaraz zwrócono uwagę na mierzenie rozciągłości pod rozmaitemi jéj formami; ztąd powstała *Geometrja*, która, jak nazwisko jéj wskazuje, ograniczała się tylko z początku na sposobach mierzenia rozciągłości, na jéj że tak się wyrazimy, *liczeniu*, co podchodzi pod ogólny typ Arytmetyki.

Lecz tu spostrzeżono niebawem że twórczość rozumu ludzkiego jest w możności przekroczenia tych ciasnych granic, że nie tylko liczyć i mierzyć, ale także jesteśmy w stanie porównywać pojęcia pomiędzy sobą, badać zachodzące pomiędzy niemi związki, rozbierać własności pojęć złożonych, wyprowadzając je ścisłém rozumowaniem z własności pojęć składających, chociażby pojęcia te nie były lub nie mogły być zmierzonemi lub obliczonemi we właściwém znaczeniu tego wyrazu. Tak naprzykład choć nie zdołano zmierzyć okręgu, lub powierzchni koła jego promieniem, znaleziono związki ścisłe zachodzące pomiędzy temi pojęciami. Spostrzeżenie to zastosowano nasamprzód do badania przestrzeni, rozciągłości : geometrja stała się najdoskonalszą ze znanych podówczas nauk rozumowanych, uważano ją nawet długo za obejmującą pozostałe i uczyniono równoznaczną z matematyką. « Niech nikt tu nie wchodzi kto nie jest geometrą, » było napisano na szkole Platona. Postęp ten tak uderzył wielkością swoją umysły starożytnych, że wielu filozofów uważało geometrję za najprzedniejsze zajęcie mędrca : tenże sam Platon, pytany przez uczniów swoich co Pan Bóg w Niebie robi, odpowiedział : « Bawi się Geometrją. »

Długo geometrja stała na szczycie wiedzy rozumowéj ; wiele czasu minęło zanim spostrzeżono że badanie ścisłe nie potrzebuje się ograniczać na samém pojęciu rozciągłości, że wszelkie inne pojęcia dają się także podciągnąć pod ścisłe rozumowanie. Przyczyną tego opóźnienia rozwoju nauk matematycznych była bezwątpienia trudność w określeniu, w wyrażeniu ścisłém pojęć nie dających się przedstawić w cyfrach, a zatém podciągnąć pod Arytmetykę. A nawet te, które mogły być wyrażone cyframi, poddane wielu działaniom arytmetycznym, wydawały wypadki liczebne, w których nie pozostawało śladu ani pojęć pierwszych, ani działań, rozumowań na nich dokonanych, przez które wypadek ostateczny otrzymanym został; ztąd trudność badania związków, zależności, wyników : konieczność rozpoczynania całego rozumawania w każdym szczególnym przypadku. Stworzono wprawdzie naukę filozoficzną obejmującą rozumowaniem wszelkiego rodzaju pojęcia, mającą na celu ujęcie wszelkich nauk rozumowanych w jednolitą ogólną całość : naukę tę nazwano *logiką* ; lecz niedostatek znakowań tych pojęć i sposobów łatwego i pewnego wiązania ich w nieprzerwaną nić, był powodem że nauka ta niezmierzonéj rozległości celu swego dosięgnąć nie była w stanie i ograniczyć się musiała na wypowiedzeniu pewnych prawideł, sposobów elementarnych rozumowania, które zdrowy rozsądek bezpośrednio i bez żadnéj nauki podaje. Dziś jeszcze każde rozumowanie matematyczne opieramy na tych prawidłach ; lecz mamy środek utwierdzenia już nabytych przez te prawidła wniosków, zastosowania znów prawideł logiki do tych wniosków i tak daléj : możemy powiedzieć że logika daje nam możność tworzenia ogniw, które matematycznemi sposobami łączymy w nierozerwany łańcuch. Gdyby umysł, pojęcie nasze było bystrzejszém, niż jest w rzeczywistości, pamięć doskonalszą, nie potrzebowalibyśmy może używać zawikłanych działań matematycznych, aby dojść do prawd któreby były dla nas tak widocznemi jak są widocznemi pojęcia pierwsze np. równości dwóch wielkości równych trzeciej.

Trudność powyższa, ów niedostatek w możności ścisłego rozumowania na pojęciach nie dających się wyrazić cyframi, usuniętemi zostały w ważnéj części (jeżeli niestety! nie w zupełności) przez stworzenie nowéj nauki, *Aglebry*. Pojęcia oznaczono przez skrócenie znakami, również jak sposoby wiązania tych pojęć pomiędzy sobą. Zauważano że jedno i to samo pojęcie złożone może być wynikiem różnych pojęć składających, związanych w różny sposób pomiędzy sobą: ztąd powstały *równania*, wyrażające tożsamości ostatecznych wyników, związków. Określono ściśle sposoby jakiemi można zmieniać, przekształcać te związki nie naruszając ostatecznego wypadku rozumowania; algebra jest właściwie nauką *przekształceń*. Tak naprzykład, jeżeli dwa pojęcia złożone w różny sposób z różnych żywiołów wychodzą na jedno, *są równemi pomiędzy sobą*, mamy możność za pomocą szeregu przekształceń dojścia w jaki sposób którekolwiek z pojęć składających zależy od wszystkich pozostałych: jest to *rozwiązywanie równań*.

W tych przekształceniach najważniejszą zaletą jest ta okoliczność, że w ostatecznym wyniku pozostają wszystkie pojęcia pierwsze, że zatém zostaje ślad całego rozumowania, które więc nie koniecznie powtarzać jesteśmy zmuszeni w każdym szczególnym przypadku: dość jest podstawić zamiast znaków różne szczególne pojęcia w ostatecznym wypadku.

Początki algebry giną w ciemności wieków. Znajdujemy ślady rozumowań tego rodzaju u starożytnych greckich filozofów: Euklidesa, Archimedesa, Apoloniusza i t. p; za prawdziwych twórców algebry uważają niektórzy Arabów, którzy już w arytmetyce przewyższyli spółczesne im narody, i nauki te przejęli może od Indjan. Lecz przedstawienie algebry w dzisiejszym jéj kształcie, z dzisiejszém znakowaniem, (z niektóremi modyfikacjami), zawdzięczamy dopiero francuzkiemu matematykowi VIÈTE (ur. 1540 r., um. 1603 r).

Przyznać należy że rozumowania nie wiele różne od algebraicznych używane były znacznie dawniéj w geometrji, która była zapewne główną pobudką tego wynalazku : algebra wywdzięczyła jéj się sowicie, stworzywszy w zastosowaniu geometrję analityczną (DESCARTES 1637 r.), która rozszerzyła w tak olbrzymi sposób naukę rozciągłości, czyniąc ją szczególnym przypadkiem daleko ogólniejszéj nauki, *analizy algebraicznéj*.

Z wynalazkiem sposobu wprowadzania pojęć ogólniejszych niż liczby i przestrzenie, w rozumowanie matematyczne, horyzont nauk ścisłych rozszerzył się do nieznanych im dotąd granic : geometrja, mechanika, astronomja, fizyka dostarczyły obfitego materjału do rozumowań algebraicznych. Nie ograniczono się wkrótce na prostém zestawianiu i wiązaniu pojęć prostych, zawartych w ścisłych granicach, skończonych; spostrzeżono, że pewne pojęcia zmieniają się ustawicznie, zależnie od innych pojęć, z któremi w ścisłym pozostają związku. Tak droga przebieżona przez przedmiot w ruchu zmienia się zależnie od czasu i prędkości z jaką przedmiot się porusza; objętość kuli zmienia się, jeżeli zmieniać będziemy jéj średnicę, iloczyn zmienia się zależnie od czynników. Zaczęto brać pod uwagę samą *zmienność* zależnych od siebie pojęć, a sposób téj zmienności brać za miarę saméj zależności jednych od drugich. Badanie téj zmienności przeprowadzono w ten sposób, że jedne ze zmieniających się pojęć, zwykle najprostsze, uważano za mogące się zmieniać niezależnie i nazwano *zmiennemi niezależnemi*; zmienność innych zależy ściśle od zmienności pierwszych, nazwano je zmiennemi zależnemi, lub *funkcjami* : tak w powyższym przykładzie, czas można wziąść za zmienną niezależną; droga przebieżona przez przedmiot ruchomy będzie funkcją czasu; w podobny sposób objętość kuli jest funkcją jej średnicy, iloczyn funkcją swych czynników.

Aby lepiéj rozpoznać sposób zmienności, sposób zależności związanych ze sobą pojęć, brano pod uwagę szczególne stany pierwszego, uważanego za niezależne pojęcia, i szukano za pomocą algebry czém będą w tych szczególnych stanach odpowiednie pojęcia zależne złożone, czyli funkcje : im więcéj szczególnych stanów brano pod uwagę, tém dokładniejsze dawano wyobrażenie o sposobie zmienności. Tak jeżeli przedmiot ruchomy przebiega pewną drogę z różną prędkością, aby dać dokładne wyobrażenie o ruchu, wyznaczono miejsce gdzie przedmiot się znajdował w danym czasie, potém znów w innym czasie, i tak daléj : im ustępy czasu pomiędzy pewném z wyznaczonych położeń a następującém były krótsze, tém ruch był dokładniej wyznaczony; nie można było jednak powiedzieć, żeby ruch ten był dokładnie znanym, bo nie wiedziano co się działo między temi ustępami, które wyłącznie brano pod uwagę. W ogólności, brakowało cechy po któréj zmienność samą w sobie możnaby było rozpoznać, rozróżnić, porównać, zbadać, a ztąd wynikała konieczna trudność dokładnego badania zależności pojęć zależących jedne od drugich w tak rozliczny, rozmaity, nieregularny na pozór sposób : niedostatek ten nie mógł być zastąpionym nawet twórczością i genjuszem pomysłów mistrzów takich jak Descartes (1596-1650), Pascal (1623-1662), Huygens (1625-1695), Fermat (1590-1633), Wallis (1616-1703), Roberval (1602-1675), Barrow (1630-1677), którzy silili się napróżno nad ogólnością rozwiązania pewnych zadań za pomocą znanych im podówczas środków algebry.

Nareszcie w końcu XVII wieku nowy wynalazek, może najznakomitszy z utworów umysłu ludzkiego jakie kiedykolwiek nauką wstrząsnęły, tak ze względu swéj istoty jako też rozlicznych zastosowań, przełamał wszystkie nagromadzone znane podówczas zapory : dzielność rozumowania uzbrojona w ten misterny instrument rozlała potoki wiedzy na wszystkie strony i ogarnęła nawet te przestrzenie, które dotąd za niedostępne dla ścisłego rozumowania uważać zwykli. Ogólność i harmonja środków zbliżyły najwięcéj rozdzielone i na pozór niezależne jedne od drugich teorje. Rozum ludzki przestaje się miotać bezładnie jako igraszka przypadku i bawić się zgadywaniem emigmów : genjusz wynalazców zbudował mu wspaniały okręt uzbrojony w bussolę i żagle, na którym swobodnie żeglować może na wielkim oceanie wiedzy we wskazanym pewnym kierunku, dochodzić do prawd szukanych wiadomą i niechybną drogą. Tym cudownym wynalazkiem, jakiemu równego w całéj historji wieków znaleźć trudno, jest wynalazek *rachunku różniczkowego*.

Rachunek różniczkowy był wynalezionym jednocześnie przy końcu XVII wieku przez Newtona (1642-1727) i Lubienieckiego (Leibniz'a), (1646-1716).

Dwa te najznakomitsze genjusze, jakiemi ludzkość poszczycić się może, wpadli na myśl nowego wynalazku dwoma różnymi sposobami i wyrazili istotę jego przez dwa różne na pozór pojęcia, *algorytmy*, które ostatecznie, jak zobaczymy, wychodzą na jedno, choć do dziś dnia w wykładzie naukowym współzawodniczyły ze sobą o pierwszeństwo prostoty lub ścisłości jaką wprowadzając je w rozumowanie osiągnąć można.

Newton, nieporównanéj i niedościgniętéj do dziś dnia bystrości, twórczości i głębokości pojęć, « który genjuszem swym przewyższył rodzaj ludzki » (*), który jedną pojedynczą, prostą, dotykalną przyczyną, pierwszy wytłumaczyć potrafił budowę świata i ruchy ciał niebieskich przez wynalazek zasady *przyciągania powszechnego*, który stworzył nowoczesną mechanikę rozumowaną, uczyniwszy naukę tę dotąd ograniczoną na prostéj obserwacji i najwięcéj elementarnych często niedokładnie zrozumianych pojęciach, równie ścisłą, równie nieomylną, równie racjonalną, jak czysta matematyka, to jest algebra i geometrja, który w algebrze, geometrji, fizyce stworzył sam jeden, można powiedzieć więcéj niż wszyscy jego poprzednicy razem wzięci — pierwszy zaczął badać samą w sobie zmienność i zależność związanych ze sobą pojęć, zwracając uwagę już nie na wielkość, stan, porządek rzeczy, ale na sposób w jaki rzeczy te zależnie jedne od drugich się zmieniają, i wynalazł środek podciągnięcia téj zmienności pod badanie matematyczne. Przyrównywał on zmienność do ruchu : jak *prędkość* w prze-

(*) *Qui genus humanum ingenio superavit* (napis na pomniku Newtona w świątyni Westminsterskiéj, w Londynie.)

bieganiu drogi jest uważaną za główną cechę danego ruchu, tak zmienność wszelkiego rodzaju może zachodzić prędzéj lub wolniéj : wszelka więc zmienność ma więc także prędkość *sui generis*; prędkość ta jest znanym algorytmem zwanym w języku matematycznym *pochodną*, a wyprowadzenie tego nowego pojęcia, *prędkości zmienności*, z danego pojęcia saméj *zmienności*, jest zadaniem *rachunku różniczkowego*.

Leibniz (urodzony w Niemczech potomek polskiéj Lubienieckich rodziny), ów wszechstronny, wysoki, piękny, doniosły umysł, równie daleko sięgający we wszystkich najmniéj na pozór ze sobą związanych gałęziach uprawianéj podówczas wszechwiedzy, w czystéj filozofji i metafizyce równy Platonom i Arystotelesom, wyższy może od nich racjonalnością i przenikliwością poglądów, ogarnął olbrzymiemi skrzydły swego genjuszu i tę część wiedzy, która czyste rozumowanie i sposoby zastosowania jego do badania wszechrzeczy ma na celu. Badając zmienność zależnych od siebie pojęć, Lubieniecki zwrócił uwagę, że zmienność ta tém dokładniéj jest nam znaną, im więcéj wyznaczyć potrafimy pojedynczych stanów jednoczesnych pojęć sobie odpowiadających, zmieniających się. Tak naprzykład, droga przebieżona przez przedmiot ruchomy, tém dokładniéj jest nam znaną, im więcéj znamy szczególnych położeń jakie przedmiot ruchomy zajmował na téj drodze w ustępach czasu do siebie dość zbliżonych. Nic nie przeszkadza ustępy te uczynić tak małemi jak się podoba, czyli poznać drogę tak dokładnie jak się podoba : ztąd do zupełnie dokładnego, matematycznie ścisłego poznania drogi, niedaleko : przestrzeń tę przebył Lubieniecki nie bez pewnéj trudności, stwarzając nowe pojęcie, nowy algorytm *nieskończenie małéj* i *różniczki*. Powstały wprawdzie zarzuty niedokładności i nieścisłości metody Lubienieckiego : zarzuty te dziś w zupełności usunięte zostały i metoda nieskończenie małych, jest równie ścisłą, równie dokładną, równie nieomylną, jak wszelka inna metoda używana w rozumowaniach zasadniczych : ma nadto tę zaletę, że jest nierównie prostszą, nierównie łatwiéj i szybciéj prowadzącą do celu niż jakakolwiek inna z metod, któremi ją zastąpić usiłowano.

Wielkość *nieskończenie mała* nie jest to bynajmniéj, jak sobie niektórzy mylnie wyobrażają, wielkość tak mała, że nic od niéj mniejszego wyobrazić sobie nie można : pojęcie takiéj wielkości byłoby po prostu niedorzeczném. Przeciwnie, jakąkolwiek wielkość weźmiemy pod uwagę, wielkość tę możemy zmieniać naprzykład zmniejszając ją, i nie możemy oznaczyć granicy, poza którą zmniejszanie to nie mogłoby przekroczyć. Otóż wielkość taką, którą zmniejszamy w naszéj wyobraźni nieograniczenie nazywamy *wielkością nieskończenie małą* : nazwaćby ją należało właściwiéj może *nieograniczenie zmniejszającą się*. W podobny sposób, wielkość którą powiększać możemy tak daleko, jak nam się podoba, nazywamy *nieskończenie wielką*, zamiast *nieograniczenie zwiększającą się*. Zwracamy uwagę, że pojęcia te nieskończenie wielkiéj, nieskończenie małéj, nie wyrażają stanu trwałego wielkości ograniczonéj, lecz raczéj sposób zmieniania wielkości zmiennéj.

Pojęcie *nieskończenie małych* Lubienieckiego, prowadzi do tego samego co pojęcie *pochodnych* Newtona : jakoż w przykładzie podanym powyżéj przedmiotu ruchomego, prędkość jest stosunkiem drogi do czasu w przypadku ruchu jednostajnego, bez względu jak wielki czas i drogę uważać będziemy: w przypadku ruchu zmiennego, biorąc czas coraz zmniejszającym się i stosunek również zmniejszającéj się drogi do tego czasu, stosunek ten będzie się zbliżał do prędkości w każdéj danéj chwili, od któréj liczymy ten czas.

Pochodna jest więc granicą stosunku lub ilorazu dwóch nieskończenie małych, z których jedna jest różnicą dwóch po sobie następujących, coraz mniéj od siebie różnych stanów zmiennéj niezależnéj, a druga różnicą dwóch odpowiednich stanów zmiennéj zależnéj, czyli *funkcji*. Ztąd powstał algorytm Lubienieckiego *różniczki* i nazwisko *rachunku różniczkowego*; pochodna jest stosunkiem różniczki funkcji do różniczki zmiennéj niezależnéj; metoda Lubienieckiego sprowadza się od razu do metody Newtona, lecz pierwsza daje nam łatwiéjszy sposób znalezienia pochodnéj (czyli *prędkości zmienności*) dostarczając nam do tego poszukiwania żywiołów, które mamy gotowe biorąc różnicę dwóch po sobie następujących stanów zmiennéj, i zmniéjszając tę różnicę nieograniczenie. Obie metody zostały zresztą od razu zastosowane do zadania mającego na celu prowadzenie prostych stycznych do krzywych, na którém zadaniu nowy rachunek się nasamprzód wydoskonalił.

Komu teraz przyznać należy pierwszeństwo w wynalezieniu rachunku rożniczkowego?

Lubieniecki pierwszy ogłosił swe odkrycie w *Acta Eruditorum* w Lipsku w miesiącu Październiku 1684 r. Nieśmiertelny ustęp, który po raz pierwszy oznajmił publicznie uczonemu światu nową naukę, zawarty na sześciu stronach, nosi tytuł:

Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fracta nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus. Z drugiéj strony mamy ślady z listu Newtona pisanego jeszcze w 1676 roku, że rachunek pochodnych nie był mu wówczas obcym : żezatém znał go znacznie przed ogłoszeniem metody Lubienieckiego w Aktach Lipskich. Lecz ogłoszenie drukiem pomysłów Newtona w tym względzie nastąpiło dopiero 1686 r. w dziele niezrównanéj doniosłości, wydaném pod tytułem : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, którego głównem zadaniem był wykład za pomocą spostrzeżeń i rozumowań ważniéjszych objawów świata przyrodzonego a szczególnie ruchu ciał niebieskich.

W dziele tém Newton następujące daje pochodnych określenie :

Ultimæ rationes ille, quibuscum quantitates evanescunt, re vera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos qnantitantum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant et quas propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia.

Walka o pierwszeństwo jaka powsłała tak pomiędzy samemi wynalazcami, którzy jak się zdaje, nie spostrzegli zrazu ogromnéj doniosłości nowego rachunku, a następnie pomiędzy ich uczniami, może się streścić w następujących ostatecznych swych wynikach :

1° Lubieniecki pierwszy swój wynalazek drukiem ogłosił w 1684 roku :

2° Dowiedzioném jest piśmiennemi dokumentami a mianowicie listem pisanym przez Newtona w 1676 r. do przyjaciela swego Oldenburga, że Newton znał nowy rachunek przynajmniéj kilka a może kilkanaście lat przed ogłoszeniem Lubienieckiego, choć nie komunikował nikomu swéj metody, dając tylko wypadki w enigmatycznej formie :

3° Obaj wynalazcy nie uważając na chronologiczną różnicę, doszli do odkrycia, nie wiedząc jeden o pracach drugiego, a zatém samodzielnie, nie pożyczając jeden od drugiego wzajemnych pomysłów.

Ten ostatni punkt zdaje się być w tym razie najważniéjszym : obu mistrzom należy się równa zasługa i równa wdzięczność uczonego świata ; pierwszeństwo chronologiczne lat kilku jest w obec tego czystą igraszką przypadku.

Odkrycie Newtona i Lubienieckiego otworzyło dla następców wielkich tych geniuszy niezmierzone przestrzenie. Lubieniecki sądził przez chwilę, że matematyka czysta powiedziała ostatnie swe słowo podając tę metodę rozumowania, i że umysł ludzki będzie potrzebował odtąd tylko silić się nad zastosowaniem podanych sposobów do badania praw natury; lecz przekonano się wkrótce, że tak tu jak wszędzie, pole poszukiwań jest nieograniczone, chyba tylko przez potęgę geniuszu myślicieli na niém pracujących. Liczba tych ostatnich tak się zwiększyła, że chcąc oddać każdemu sprawiedliwość, niepodobna prawie byłoby ich tu wyliczyć : wspomnimy tylko o tych, którzy w nauce niezatarte pozostawili piętno przewodnicząc niejako massie uczonych, wskazując im drogę i otwierając nowe środki ; temi są : bracia Jakób (1654-1705) i Jan (1667-1748) Bernouilli, Taylor (1685-1731), Fagnani (1682-1766) Riccati (1690-1735), Euler (1707-1783), Clairaut (1713-1765), d'Alembert (1717-1783), Condorcet (1743-1794), Landen (1719-

1790), Lagrange (1736 - 1813), Laplace (1749 - 1827), Carnot (1753 - 1823), Monge (1749-1818), Legendre (1752-1833), Gauss (1777-1855), Abel (1802-1829), Cauchy (1789-1857), Jakobi z Królewca (1804-1851). Dziś nie ma nauki na ścisłém opartéj rozumowaniu, w któréjby rachunek różniczkowy najważniéjszéj nie grał roli, nie był najpewniéjszą podstawą i najnieomylniéjszym środkiem : tak ze względu łatwości z jaką najróżnorodniéjsze pojęcia w sposób właściwy do ścisłego rozumowania wyrazić możemy, jako też ze względu przeprowadzenia samego rozumowania, po pewnéj wprost do celu wiodącéj drodze i zastosowania wyprowadzonych wyników do danego badania.

Podając na widok publiczny obecną pracę, miałem jeden główny cel w myśli : *być pożytecznym*; a jako najpewniéjszy środek dojścia do tego celu uważałem *przystępność* dla o ile można największéj liczby czytelników. Starałem się więc o ile możności używać sposobów wykładu pewnych i doświadczonych : wtedy tylko podawałem nowe zamiast dotąd powszechnie używanych, gdym był głęboko przekonanym, że uczący się na tem skorzysta i że mu to nieprzerwie ciągu nauk poprzedzających, równoległych, lub późniejszych od nauki, która jest przedmiotem niniejszego dzieła. Niech mi wzgląd ten będzie wymówką przed tymi z czytelników którym wykład początków szczególniéj, wydawałby się za nadto obszernym, którymby ciągłe przypominanie znanych już prawd wydało się przykrém : pisałem dla nieumiejętnych w przekonaniu, że inni bez méj pracy objeść się potrafią. Niech mi również wybaczoném zostanie, jeżeli zerwawszy ostatecznie z propagowaną przez wielu metodą dochodzenia do wyników otrzymanych przez badanie nieskończenie małych, za pomocą naciąganych dowodzeń początkowéj algebry, (metody, którą uważam za uwłaczającą wielkości nauki i zmniejszającą jéj doniosłość) nie wprowadziłem jednak do wykładu niektórych zbyt nowych jeszcze nie wyprobowanéj siły metod, pozostawiając je do dalszego doświadczenia; jak również żem nieprzyjął zbyt nowych, jeszcze nie utartych w mowie naszéj wyrazów i zwrotów. Język nasz taki, jakim dziś powszechnie mówią, uważałem nietylko za wystarczający, ale nawet za nierównie zdolniejszy do wyrażenia ścisłych rozumowań od wielu obcych, szczycących się kwitnącém piśmiennictwém w dziedzinie matematyki. Jeżeli się do całéj wysokości jego wyrobienia w innych gałęziach piśmiennictwa wznieść nie uda, jest to z pewnością winą piszącego, nie zaś winą języka. Wyrazów nowych nietylko wynajdować nie miałem potrzeby, ale znalazłszy często wiele równoznacznych, zmuszony byłem, dla raz przyjętéj zasady, wybrać te, które najpowszechniéj są znane; czytelnik nie znajdzie w całym ciągu dzieła żadnego słowa nieznanego mu bądź to z potocznéj mowy, bądź z wyrobionego do téj pory naukowego języka.

Rozmiary pierwszego tomu, zawierającego sam tylko rachunek różniczkowy i jego zastosowania niech również nie przerażają przystępującego po raz pierwszy do téj nauki. Czwartą blizko część tomu zajmują *wiadomości wstępne,* któremi starałem się wprowadzić początkującego na nieznane mu dotąd pole; połowę zastosowania i przykłady, z których czytelnik może wziąść to tylko, co mu się wyda ciekawém, lub pożyteczném. Zresztą unikając postronnych, lub zbyt małéj wagi rozwinięć, starałem się zawrzeć w wykładzie tym wszystko, co dla teoretycznego i praktycznego obeznania się z przedmiotem uważałem za niezbędne; wybierałem raczéj to, co jest więcéj nauczającém, lub więcéj użyteczném w zastosowaniach. Zamiarem moim było postawienie najbardziéj początkującego czytelnika na stopniu takim, aby dalsze prace jego nie były mu utrudnionemi brakiem dokładnéj znajomości zasad, i utwory mistrzów mogły mu być przystępnemi bez wielkiego wysilenia. Wykład początków rachunku różniczkowego był do téj pory tak niedoskonałym, że uczący się już daleko nawet posunięty w nauce, często nie był z niemi dostatecznie obznajomiony, nie mógł z całą konieczną zręcznością używać danego mu w rękę nowego narzędzia. Ztąd tyle wahań, tyle zniechęceń, tyle odstępstw przy wejściu na tę tak daleko zaprowadzić mogącą drogę. Metodę nieskończenie małych, dotąd wielu uważa albo za niezrozumiałą, albo za nieścisłą, lub tylko przybliżoną: najpierwsi mistrze długo ją za taką uważali (Lagrange); Carnot pierwszy w dziele swém *Refléxions sur la métaphysique des infiniments petits* wyjaśnił tę kwestję w sposób specjalny. Mimo to, w ostatnich dopiero czasach metoda ta ostatecznie wprowadzoną została do wykładu elementarnego: między innymi wiele się do tego przyczynił p. Duhamel swoim wstępem do drugiego wydania dzieła p. t. *Éléments du calcul infiinitésimal*, (Wyd. 2gie, Paryż 1860 roku), i swemi wykładami kilkunastoletniemi w Sorbonie.

Zdaje mi się, żem w ostatnim Rozdziale Części Iéj dostateczną zgromadził liczbę objaśnień aby nie pozostawić żadnéj wątpliwości w umyśle najbardziej początkującego czytelnika pod względem ścisłości metody nieskończenie małych.

Pierwsze pięć rozdziałów *wiadomości wstępnych* mają na celu przypomnienie niektórych teoryj mniéj lub więcéj znanych z nauk początkowych, w ściślejszym zostających związku z dalszym ciągiem i na które ciągle daléj powoływać się będziemy.

Już z tego cośmy powyżéj powiedzieli widać jak wielkiego znaczenia w naszéj teorji jest pojęcie funkcji: poświęciliśmy dwa pierwsze rozdziały rozjaśnieniom tego pojęcia. Rozdział III, *o ilościach urojonych*, był koniecznym dla wyjaśnienia tych ilości, których teorja jest dziś jedną z najważniejszych w postępie nauki, jak to widzieć można z niektórych zastosowań podanych w ostatnim rozdziale Części II$^{\text{éj}}$: ilości te odstraszające niestosownie wybraném nazwiskiem, są równie łatwe nawet często łatwiejsze do użycia, niż wszelkie inne; a jednak ich teorji niezbędnéj w badaniach następnych, ile razy chodzi o ich zmienność, nie widzieliśmy nigdzie podanéj w sposób przystępny w elementarnych traktatach.

Rozdział IV, *metoda granic*, jest ściśle związanym z rozdziałem VI, *o nieskończenie małych*: lecz służy zarazem za podstawę do teorji zbieżności szeregów, któréj daliśmy wystarczające rozwinięcie w Rozdziale V.

Część II, właściwy *Rachunek Różniczkowy*, zawiera teorję tak już dziś wykończoną i wydoskonaloną, że nie wiele modyfikacji w niéj zaprowadzićby można: zwracamy tylko uwagę na wielką liczbę przykładów i ćwiczeń któreśmy w niéj podali, i których przerobienie jest niezbędnym dla początkującego warunkiem, do dalszego postępu w téj nauce.

Część III zawiera zastosowanie rachunku Różniczkowego do *teorji funkcyj*: teorja ta tak ściśle jest związaną z istotą samego rachunku, że niepodobna dwóch tych rzeczy od siebie rozdzielić.

Wzór Taylor'a, na którym cała ta część zastosowań się opiera, jest zwykle wyprowadzonym w sposób naciągany, często niedokładny, lub za mało ogólny: jestto zwykle najsłabsza strona bardzo zresztą szacownych traktatów Rachunku Różniczkowego. Wyprowadziliśmy go w Rozdziale XIV w sposób najbardziéj zbliżony do sposobu podanego przez wynalazcę, udoskonalony tylko i uogólniony. Daliśmy w następnym rozdziale obszerne zastosowanie tego wzoru do rozwijania funkcyj na szeregi, przyczém zwracaliśmy ciągle uwagę na ścisłość i ogólność, względy tak często zaniedbywane w tego rodzaju kwestjach. Następnie idą zastosowania do wyznaczenia wyrażeń nieoznaczonych, gdzie staraliśmy się usunąć niektóre niedokładności; potém teorja największości i najmniéjszości traktowana w całéj obszerności, jaką dziś jéj w elementarném dziele nadać można, objaśniona licznemi przykładami, dającemi miarę jéj bezpośredniego praktycznego zastosowania. Część ta kończy się rozdziałem zawierającym teorję funkcyj zmiennych urojonych, o któréj wyżéj wspomnieliśmy i która ważną nam będzie pomocą w dalszych częściach niniejszego dzieła.

Część IV, zawiera *zastosowania geometryczne*. Teorje podane w téj części wchodzą właściwie w zakres *Geometrji Analitycznéj*: lecz że zwykle uczącego się obznajmiają z tym ostatnim przedmiotem, zanim zasady Rachunku Różniczkowego są mu znane, w większości dzieł elementarnych dopełnienia włączanemi dotąd bywały w wykład samego Rachunku. Zanim ostatecznie rozstrzygniętém zostanie, czy z Geometrji Analitycznéj zrobić należy przedmiot oddzielnéj nauki wykładanéj umiejącym już Rachunek Różniczkowy, lub jakby najwłaściwiéj było, wykładanéj równolegle i współcześnie z Rachunkiem, tak jak Geometrja zwykła jest wykładaną współcześnie z Arytmetyką i Algebrą, nie byłoby na swojém miéjscu wyłączać zastosowań Geometrycznych z dzieła naszego; tém bardziéj że zastosowania te rozjaśniają przedmiot więcéj jak jakiekolwiekbądź inne, i że przez nie tylko dochodzimy do zastosowań do Mechaniki, Fizyki matematycznéj i t. p. Wszakże podaliśmy z zastosowań Geometrycznych tylko te, które z Rachunkiem w najbliższym zostają związku i to w sposób taki, że wyłączywszy je, całość dzieła na tém nie straci i uczący się według odmiennéj metody nie znajdzie trudności w czytaniu pozostałych części tego dzieła.

Co do innych zastosowań do Mechaniki, Fizyki, Astronomji i t. d., te wymagając po większéj części rachunku odwrotnego różniczkowemu, to jest *rachunku całkowego* znajdą miejsce w następstwie, gdy pierwsze zasady tego ostatniego rachunku wyłożonemi zostaną.

Prawdziwą ozdobą tego tomu stanowi dołączony do niego przypisek o Wyznacznikach, przez p. Trzaske odznaczające się sumiennémwypracowaniem, głęboką znajomością rzeczy i wysoką erudycją autora. Przypisek ten zawiera wszystko, co jest godném uwagi w téj pięknéj teorji i co można było streścić w tak szczupłym zakresie: zawiera nadto wiele całkiem oryginalnych dowodzeń twierdzeń, na których prostém wysłowieniu inni autorowie zwykli poprzestawać.

Z traktatów Rachunku Różniczkowego do dziś dnia w polskim języku drukowanych, wiadomy nam jest tylko: 1° traktat Buchowskiego. 2° Tłumaczenie skróconego traktatu Lacroix, przez Zacharjasza Niemczewskiego, wydany przez Michała Pełkę Polińskiego; od wydania tych dwóch traktatów upłynęło już lat kilkadziesiąt; wykład, metody i potrzeby dziś się zmieniły; nauka postąpiła; dzieła te pozostają niemniéj szacowną pamiątką literatury naszéj i dowodem, że po wszystkie czasy starano się o dostarczanie uczącym się środków w narodowym języku. Z nowszych, zanotować należy początek Rachunku Różniczkowego Romana Żulińskiego wydany w Warszawie w 1857 roku; lecz śmierć przedwczesna tego szlachetnego męża, nie pozwoliła mu pracy swéj wykończyć i w należytéj całości publiczności przedstawić. Wreszcie zasługują na zaszczytną wzmiankę litografowane kursa Szkoły Applikacyjnéj Warszawskiéj Skulimowskiego i Szkoły Głównéj Warszawskiéj p. T. Babczyńskiego.

Ważniéjsze źródła pomocnicze, któremi autor się posiłkował w ciągu swéj pracy, znajdzie czytelnik spisane poniżéj: zawdzięczam także niemało wykładom profesorów p. p. Dienger i Clebsch, w Carlsuhe, p. p. Lefebure de Fourcy, Duhamel, Liouville, Bertrand, Lamé, Briot i Bouquet, w Paryżu: lecz szczególniéj winienem wiele p. J. A. Serret, którego nie tylko dzieła i wymowne wykłady w Sorbonnie i Kollegium Francuzkiém w Paryżu, odznaczające się elegancją sposobów, wykończeniem teoryj i zręcznością ich przedstawienia, ale i osobiste rady i pomoc udzielana z rzadką względnością były mi ważną wskazówką i niemałą pomocą w uzupełnieniu systematyczném całości i obrobieniu należytém szczegółów.

Niech mi wolno będzie nadewszystko złożyć tu w swojém imieniu i w imieniu wszystkich, którzy sądzą, że praca ta nie będzie bez pożytku dla ogółu, publiczne podziękowanie HR. JANOWI DZIAŁYŃSKIEMU, który podjął na siebie cały nakład wydawnictwa niniejszego dzieła i którego nietylko materjalnemu ale i moralnemu wpływowi literatura nasza zawdzięcza już kilka szacownych wydań w dziedzinie nauk ścisłych.

Pisałem w Paryżu dnia 29 Listopada 1869 roku.

Władysław Folkierski.

DZIEŁA I PUBLIKACJE POMOCNICZE.

ABEL (N. H.). *Œuvres complètes* rédigées par B. Holmboe, 2 vol. Christiania, 1839.

BERTRAND (J.). *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul intégral*. Paris, 1864 — 1869.

BOOLE. A treatise on the Calculus of finite Differences. London, 1860.

BOOLE. A treatise on Differential Equations, 2 vol. London, 1865.

BORDONI. *Lezioni di Calcolo sublime.*

BRIOT ET BOUQUET. *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques.* Paris, 1859.

CAUCHY. *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.* 4 vol. Paris, 1840 — 1847.

COURNOT. *Traité élémentaire de la Théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal.* Paris, 1857.

DIENGER. *Die Differential und Integralrechnung.* Stuttgard, 1857.

DUHAMEL. *Eléments du Calcul infinitésimal.* Paris, 1860 .

FRENET. *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.* Paris, 1856.

GREGORY. *Examples of the principles of the Differential and Integral Calculus.* Edited by W. Walton. Cambridge, 1845.

HOUTAIN. *Des solutions singulières des équations différentielles.*

JELLETT. *Elementary treatise on the Calculus of variations.* 1850.

KULIK. *Tablice wycinków hyperbolicznych tudzież długości łuków i ćwierć okręgów eliptycznych.* Praga, 1851.

MORGAN (AUGUSTUS DE). *The differential and integral Calculus.* London, 1842.

O'BRIEN. *An elementary treatise on the differential Calculus.* London, 1842.

PRICE. *A treatise on infinitesimal Calculus.* Oxford, 1857.

RAABE. *Die Differential und Integralrechnung.* Zurich, 1839 — 1847.

SALMON. *A treatise on Conic Sections.* London, 1863.

SALMON. *A treatise on the Analytic Geometry of three dimensions.* Dublin, 1865.

SERRET (J. A.). *Cours de Calcul différentiel et intégral.* Paris, 1868.

STURM. *Cours d'Analyse.* Paris, 1857.

TODHUNTER. *A treatise on the differential Calculus.* Cambridge, 1864.

TODHUNTER. *A treatise on the integral Calculus.* Cambridge, 1868.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris.
Mémoires de l'Académie des sciences. Paris.
Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des sciences. Paris.
Philosophical transactions of the Royal Society. London.
Transactions of the Cambridge philosophical Society.
Transactions of the Dublin philosophical Society.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Borchardt als Fortsetzung des Journal's von CRELLE. Berlin.
Journal de l'École Polytechnique. Paris.
Journal des Mathématiques pures et appliquées, publié par M. LIOUVILLE. Paris.
The Quarterly Journal on pure and applied Mathematics, ed. by Sylvester. London.
Giornale di Matematiche, publicato p. G. Bataglini, Jani e N. Trudi. Napoli.
Annali di Matematica pura ed applicata dal Barnaba Tortolini, pub. Brioschi e Cremona. Milano.

CZĘŚĆ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

CZĘŚĆ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

ROZDZIAŁ I

O FUNKCJACH.

Określenia. — Różne rodzaje funkcyj — : Funkcje algebraiczne, — Funkcje przestępne. — Funkcje funkcyj. — Zamiana zmiennych. — Różnice, czyli przyrostki ilości zmiennych. — Różnice funkcyj. — Ciągłość zmiennych i funkcyj. — Wyznaczenia funkcyj czyniących zadosyć pewnym warunkom. — Wzory interpolacyjne Newtona i Lagrange'a.

Określenia.

1. Badanie za pomocą ścisłego rozumowania związków zachodzących pomiędzy wielkościami, jest jedném z najważniejszych zadań nauk matematycznych.

Wielkości zależące od siebie, mogą być zresztą jakiemikolwiek: *dotykalnemi*, znajdującemi się w naturze, lub też *oderwanemi* pojęciami naszego rozumu, byleby pojęcia te były ściśle oznaczonemi, to jest nie przedstawiały żadnéj niepewności lub dwuznaczności. Ponieważ zachodzi zwykle możność wyrażenia takiéj wielkości za pomocą *liczby*, jako wypadku porównania jéj z jednością tego samego co wielkość dana rodzaju, nazywamy ją pospolicie *ilością*.

Związki zachodzące pomiędzy wielkościami możemy badać w dwojaki sposób :

a. przez *doświadczenie* jak w naukach przyrodzonych, albo,

b. przez *ścisłe rozumowanie*, wychodząc z danych bardzo prostych, widocznych, które nazywamy *pewnikami* lub *pojęciami pierwszemi*, nie potrzebującemi dowodzenia i wyprowadzając z nich ścisłe wnioski; to ostatnie badanie może wyłącznie wchodzić w zakres nauk matematycznych.

Tak naprzykład, szukając związku zachodzącego pomiędzy okręgiem koła i jego średnicą, możnaby postępując pierwszym sposobem doświadczalnym, mierzyć za pomocą narzędzi materjalnych mniéj lub więcéj dokładnych, różne okręgi i ich średnice, i znaleźć dotykalnie że jakiegokolwiek promienia okrąg koła jest zawsze przeszło trzy razy dłuższym od średnicy; ułamek jaki dodać należy do liczby 3, aby otrzymać stosunek okręgu koła do średnicy, będzie tém dokładniejszym, im narzędzia używane do mierzenia będą dokładniejszemi : lecz będzie zawsze tym samym w granicy dokładności narzędzi, czy weźmiemy koło mniejsze lub większe. Ztąd wnieśćby można, lecz tylko z *wielkiém prawdopodobieństwem*, że stosunek okręgu koła do średnicy, jest zawsze tym samym i że może być wyrażonym przez liczbę 3 z ułamkiem.

W matematyce postępujemy jak wiadomo, zupełnie w inny sposób : określamy naprzód ściśle koło; tak ściśle, że figura ta staje się niejako oderwaném pojęciem, do którego koło materjalne zbliżać się może tylko mniéj lub więcéj; następnie przez szereg twierdzeń, które są tylko ścisłemi wnioskami widocznych pewników, dochodzimy do wypadku *całkiem pewnego* (a nie prawdopodobnego tylko, jak poprzednio), że stosunek okręgu koła do średnicy, jest stałym, niezależnym od wielkości koła, i że może być wyrażonym przez liczbę 3 z ułamkiem tak przybliżonym jak się podoba;

czegobyśmy poprzednim sposobem za pomocą najdokładniejszych narzędzi nigdy otrzymać nie byli w stanie.

2. Badanie matematyczne związków, zachodzących pomiędzy wielkościami, może się odbywać w dwojaki sposób:

a. Można, uważając pewne z zależnych od siebie wielkości jako *znane*, szukać w jaki sposób pozostałe *nieznane* wyrazić za pomocą pierwszych, to jest uczynić znanemi.

W arytmetyce sposoby te sprowadzamy zwykle do *proporcji*, w algebrze do *równań* lub *wzorów*, które są po prostu wyrażeniem szukanych zależności za pomocą właściwych znaków, głosek, służących jedynie do ułatwienia rozumowania, jak w ogóle pismo służy do wyrażenia myśli.

b. Można, badając przedewszystkiém sposób, w jaki jedna wielkość zależy od drugich, uważać te ostatnie jako zmieniające się i szukać jak zmienność ta wpływa na zmienianie się pierwszéj wielkości; jestto zadaniem *analizy*.

Jeżeli dwie wielkości zmieniają się zależnie jedna od drugiej, jednę z tych wielkości nazywamy *funkcją* drugiéj.

Aby zależność jednéj zmiennéj od drugiéj była matematyczną, w tém znaczeniu, jakeśmy powyżej określili, trzeba żeby nadawszy jednéj zmiennéj pewną wartość stałą, można było otrzymać wartość drugiéj zmiennéj za pomocą *równania* lub *wzoru* w znaczeniu algebraiczném: w takim razie powiadamy, że jedna zmienna iest *funkcja analityczną* drugiéj. Zajmować się będziemy wyłącznie temi ostatniemi funkcjami, i ile razy używać będziemy wyrazu *funkcja* ròzumieć będziemy funkcję analityczną.

Mając naprzykład równanie

$$y = 3x^2 + 2x + 5$$

w którém x i y uważamy jako zmienne, y będzie funkcją analityczną zmiennéj x; bo nadawszy zmiennéj x wartości *stałe*:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2 \ldots$$

otrzymamy wartości odpowiednie funkcji y

$$y = 5, \quad y = 10, \quad y = 21 \ldots$$

Okrąg koła jest funkcją analityczną średnicy, droga przebieżona przez ciało w ruchu, jest funkcją analityczną czasu, wstawa jest funkcją analityczną łuku i t. p.; lecz temperatura pewnego miejsca nie jest funkcją analityczną czasu, jakkolwiek zmienia się zależnie od czasu, bo zależności téj nie możemy wyrazić matematycznie za pomocą równania lub wzoru; ludność pewnego kraju nie jest funkcją analityczną jego rozległości i t. d.

Z pomiędzy wielu ilości zależących matematycznie od siebie, możemy rozróżnić naprzykład dwie, i badać jak zmienność jednéj z nich wpływa na zmienność drugiéj, gdy pozostałe zostają temi samemi; dwie te ilości uważamy w takim razie jako *zmienne*, pozostałe jako *stałe*. Jednę ze zmiennych zmieniać możemy jak nam się podoba: nazywamy ją zatém *zmienną niezależną*; wtedy druga będzie zmienną zależną, czyli *funkcją* pierwszéj. Ilości *stałe*, muszą niezależéć od zmiennéj niezależnéj, kiedy mogą pozostawać temi samemi, gdy zmieniamy zmiennę niezależną; późniéj możemy znów uważać że i te stałe przybierają różne wartości. *Stałemi nazywać więc będziemy nie tylko ilości, które bezwzględnie się zmieniać nie mogą, lecz w ogóle ilości niezależne od zmiennej niezależnéj.*

3. Zamiast uważać zależność dwóch ilości zmiennych pomiędzy sobą, uważać możemy od razu zależność kilku zmiennych; pewna ilość może zależéć od razu od kilku ilości. Tak objętość walca zależy od promienia jego podstawy i od wysokości; gdy zmieniamy dowolnie jednę lub drugą, albo od razu jednę i drugą, objętość walca zmienia się zależnie od sposobu w jaki zmieniamy jednę i drugą, jest więc funkcją jednéj i drugiéj. Przestrzeń przebieżona przez ciało w ruchu zależy od czasu i od prędkości, z jaką ciało się porusza. Dochód od kapitału jest funkcją samego kapitału, czasu przez jaki kapitał zostawał na procencie i stopy procentu i t. p. Uważając kilka zmiennych, jeżeli między niemi zachodzi jeden tylko związek, jedno równanie, możemy zmieniać dowolnie wszystkie zmienne z wyjątkiem jednéj, którą nazywamy funkcją pozostałych zmiennych, uważanych jako zmienne niezależne. Rozróżniamy więc *funkcje jednej, dwóch, trzech,... wielu zmiennych niezależnych.*

4. Weźmy naprzykład równanie

$$ax + by + c = 0$$

W skład tego równania wchodzi pięć ilości a, b, c, x i y. Gdy cztery z tych pięciu ilości są danemi, otrzymać możemy piątą rozwiązując równanie. Lecz jeżeli zamierzamy sobie badanie zależności dwóch z nich np. x i y od siebie, uważamy x i y jako zmienne, a, b, c jako stałe, które zresztą mogą być jakiemikolwiek. Równanie powyższe daje nam

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

y możemy uważać jako funkcję zmiennéj niezależnéj x. Tę zmiennę niezależną x możemy zmieniać w sposób dowolny, nadawać jéj dowolne wartości jak 0, 1, 2, 3.... otrzymamy odpowiednie wartości na y. I tak:

gdy $x = 0,\quad x = b,\quad x = -\frac{b}{a},\quad x = -\frac{c}{a}\ldots$

to $y = -\frac{c}{b},\quad y = -a - \frac{c}{b},\quad y = 1 - \frac{c}{b},\quad y = 0\ldots$

Przeciwnie, moglibyśmy uważać y jako zmiennę niezależną, a x jako funkcję :

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

W ogólności, gdy dwie zmienne zależą od siebie, mamy wybór dowolny, którą z nich chcemy uważać jako niezależną.

Zamiast uważać w równaniu powyższém zależność dwóch ilości od siebie, moglibyśmy uważać zależność trzech, czterech, lub wszystkich pięciu z nich od razu. Wziąwszy np. pod uwagę w równaniu powyższém trzy zmienne x, y i c, oznaczywszy dla odróżnienia zmiennę $c = z$, mamy :

$$ax + by + z = 0$$

jednę z trzech zmiennych np. z możemy uważać za funkcję dwóch drugich x i y, uważanych jako zmienne niezależne; a i b są stałemi ; mamy

$$z = -ax - by$$

na x i y możemy nadawać dowolne wartości, z będzie przybierało wartości zależne od tych wartości, w podobny sposób jak powyżéj.

Moglibyśmy również uważać np. x jako funkcję zmiennych niezależnych y i z :

$$x = -\frac{by + z}{a}$$

5. Dla oznaczenia, że pewna zmienna y jest funkcją zmiennéj niezależnéj x, używamy znaku

$$y = F(x)$$

który czytamy: y równe funkcji x, gdzie F oznacza nie ilość, lecz po prostu znak, jak *log. wst. st.* i t. p. W podobny sposób, na oznaczenie funkcyj różnego rodzaju używamy różnych głosek

$$y = f(x) \qquad y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x).....$$

które oznaczają różny sposób zależności y od x.

Tak np. możemy oznaczyć przez skrócenie

$$y = \frac{a + bx^2 + cx}{2x - a}, \text{ pisząc } y = F(x);$$

$$y = \frac{\text{wst}\, x + \log(x^2 + a)}{\text{st}\,(x + a)}, \text{ pisząc } y = \varphi(x); \text{ i t. p.}$$

lecz uważać trzeba, że w takim razie np. $F(a)$ oznaczać będzie wypadek podstawienia a za x, w pierwsze wyrażenie: to jest będzie

$$F(a) = \frac{a + ba^2 + ca}{2a - a} = 1 + ab + c$$

W podobny sposób, podstawiając 0 za x:

$$F(0) = -1, \qquad \varphi(0) = \frac{\log a}{\text{st}\, a}$$

lub podstawiając $z^2 + \alpha^2$ za x

$$F(z^2 + \alpha^2) = \frac{a + b(z^2 + \alpha^2)^2 + c(z^2 + \alpha^2)}{2(z^2 + \alpha^2) - a} \qquad \text{i t. p.}$$

Piszemy także niekiedy

$$y = F(x, a), \quad y = f(x, a, b....)$$

szczególniéj jeżeli stałe a, b... zamierzamy w następstwie uważać za zmienne. Pisanie to jest uzasadnioném, jeżeli funkcja y zależy nietylko od zmiennéj niezależnéj x, ale i eszcze i od wartości jakie nadamy na stałe a, b....

Jeżeli zmienna y jest funkcją kilku zmiennych niezaleźnych x, z..... piszemy

$$y = F(x, z \ldots)$$

lub jeszcze

$$y = F(x, z \ldots, a, b \ldots)$$

Tak np. funkcję

$$y = \sqrt{\frac{a^2x^2 + b^2z^2 + r^2}{c^2}}$$

możemy napisać przez skrócenie

$$y = f(x, z)$$

lub, jeżeli zamierzamy następnie wziąść pod uwagę jednę ze stałych np. r:

$$y = f(x, z, r)$$

lecz uważać należy, że wtedy będzie

$$f(x, z, 0) = \sqrt{\frac{a^2\,x^2 + b^2\,z^2}{c^2}}, \; f(a, b, r) = \sqrt{\frac{a^4 + b^4 + r^2}{c^2}} \text{ i t. d.}$$

Różne rodzaje funkcyj.

6. Funkcje analityczne, to jest takie których zależność od zmiennéj niezależnéj daną jest przez równanie, mogą być *wyraźne* lub *niewyraźne*. Funkcja będzie *wyraźną*, jeżeli wartość jéj otrzymaną być może z wartości zmiennéj niezależnéj za pomocą działań wskazanych, możebnych do wykonania; czyli innemi słowy, jeżeli równanie jest rozwiązaném co do funkcji : i tak funkcje

$$y = a^2x, \quad y = \frac{ax^2\sqrt{b - x^3}}{(x - a)^5}, \quad y = \frac{\text{wst}\, x.\, \log x}{\sqrt{\text{wst}^2 x - \log x}}$$

są funkcjami wyraźnemi zmiennéj niezależnéj x. W przeciwnym razie, funkcja będzie *niewyraźną;* i tak, z równań

$$ax+by=c, \qquad \text{wst}\, x=\log y, \qquad a^x=y^x \,\text{st}\, x \dots$$

wnosimy że y jest funkcją x, lecz niewyraźną; jakkolwiek czasami łatwo jest uczynić funkcję wyraźną, rozwiązując równanie : np. z pierwszego równania otrzymujemy

$$y=\frac{c-ax}{b}$$

y jako funkcję wyraźną zmiennéj niezależnéj x.

Wszelką funkcję niewyraźną jednéj zmiennéj niezależnéj można oznaczyć przez równanie

$$F(x,y)=0$$

które oznacza że y jest funkcją zmiennéj x, lub x funkcją zmiennéj y; jak wszelką funkcją niewyraźną ilukolwiek zmiennych niezależnych przez równanie

$$F(x,y,z\dots)=0$$

które oznacza, że jedna ze zmiennych np. z jest funkcją pozostałych zmiennych x, y ....

7. Powiedzieliśmy wyżéj, że mając równanie pomiędzy dwoma zmiennemi, którąkolwiek z nich możemy uważać za zmienną niezależną; jeżeli tę którąśmy naprzód uważali jako funkcję, obierzemy za zmienną niezależną, pozostała będzie *funkcją odwrotną* poprzedniéj; i tak, jeżeli

$$y=\frac{c-ax}{b}$$

funkcją odwrotną będzie

$$x=\frac{c-by}{a}$$

W ogólności, jeżeli

(1) $$y = F(x)$$

funkcją odwrotną nazywać będziemy

(2) $$x = \varphi(y)$$

w założeniu, że równanie (2) otrzymaliśmy z (1)go.

8. Jeżeli funkcja wyraża jedno tylko działanie wykonane na zmiennéj niezależnéj, nazywamy ją *funkcją prostą*. W przeciwnym razie, funkcja jest *złożoną*; np. funkcje

$$y = x^m,\quad y = a^x,\quad y = \log x,\quad y = \operatorname{wst} x$$

są funkcjami prostemi; funkcje zaś

$$y = \frac{x^2(a + \sqrt{x^3})}{a^2 - x^2},\quad y = \frac{x^m \log x}{\log(x-a)},\quad y = \frac{\operatorname{wst} x.\log x}{x^m - a^x}$$

są funkcjami złożonemi zmiennéj niezależnéj x.

9. Jeżeli zależność funkcji od zmiennéj niezależnéj daną jest przez równanie algebraiczne pomiędzy zmiennemi, funkcja nazywa się algebraiczną. Tak

(1) $$y = \frac{x^m - a(x^2 - b)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(2) $$ax^m + bx^{m-1}y + cx^{m-2}y^2 + \ldots + ky^m + l = 0$$

są funkcjami algebraicznemi, pierwsza wyraźną, druga niewyraźną. Wszelka funkcja algebraiczna jak (1), może być związaną ze zmienną, od któréj zależy za pomocą równania takiego jak (2), będącego wielomianem całkowitym, równym zeru : lecz wtedy przestaje być wyraźną. Funkcja jest również algebraiczną, chociaż nie możemy rozwiązać równania algebraicznego w sposób ogólny; wiemy, że równania algebraiczne stopnia wyższego nad czwarty nie mają ogólnego rozwiązania algebraicznego, mimo to funkcje określone takiemi równaniami, dla podobieństwa własności, uważane są za algebraiczne. Funkcje, które nie mogły być wyrażone przez równania algebraiczne, nazywamy *funkcjami przestępnemi*. Takiemi są np. funkcje

$$y = \log x, \quad y = a^x, \quad y = \operatorname{wst} x$$

i wszystkie funkcje złożone z przestępnych w połączeniu z algebraicznemi, jak

$$y = x^m \operatorname{wst} x, \quad y = x^2 \log x, \quad a^x \operatorname{wst} x = \log x$$

Rozumie się, że powyższe rozgraniczenie ma miejsce tylko co do zmiennych; stałe mogą wchodzić w funkcje algebraiczne lub przestępne w jakikolwiek bądź sposób.

10. Funkcje algebraiczne. Jeżeli funkcja algebraiczna jest *niewyraźną*, to jest daną przez równanie nierozwiązane, równanie to można sprowadzić do wyrażenia niezawierającego zmiennych ani w mianowniku, ani pod pierwiastkami.

Funkcje algebraiczne *wyraźne* nazywać będziemy *całkowitemi*, jeżeli zmienne nie znajdują się, ani w mianownikach ani pod pierwiastkami; *ułamkowemi*, jeżeli zmienna znajduje się w mianowniku : *wymiernemi*, jeżeli zmienne nie znajdują się pod pierwiastkami; funkcja wymierna może być zresztą całkowitą lub ułamkową : *niewymiernemi* lub *pierwiastkowemi*, jeżeli zawierają zmienną pod pierwiastkiem.

Najogólniejsze wyrażenie funkcji całkowitéj wymiernéj jednéj zmiennéj niezależnéj, jest następujące :

$$(1) \qquad y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + px^2 + qx + r$$

Funkcja taka ma wartość oznaczoną, skończoną, jedyną dla każdéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj x.

Najprostszą z tych funkcyj jest funkcja:

$$y = ax + b \tag{2}$$

którą nazywają pospolicie *linijną*.

Ogólném wyrażeniem funkcji wymiernéj ułamkowéj będzie:

$$y = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots + qx + r}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + q'x + r'} \tag{3}$$

Wiemy z algebry że funkcja (1) może stać się równą zeru dla m różnych wartości zmiennéj x. Funkcja (3) może stać się również zerem dla m wartości zmiennéj x, dla których licznik staje się zerem, lub dla n różnych wartości x, dla których mianownik staje się nieskończenie wielkim. Nadto funkcja (3) może stać się nieskończenie wielką dla n wartości x, dla których mianownik staje się zerem, lub dla wartości x, dla których licznik staje się nieskończenie wielkim. Nakoniec pomiędzy powyższemi wartościami mogą być takie, dla których licznik i mianownik są jednocześnie równemi zeru, lub równemi ilości nieskończenie wielkiéj: funkcya y dla tych wartości jest w ogólności *nieoznaczona*. Szczegółowy rozbiór tego rodaju funkcyj należy do Algebry.

Funkcja niewymierna nakoniec, może zawierać pierwiastki jakiegokolwiek stopnia, tak ze zmiennéj, jak z funkcyj téjże zmiennéj; np.

$$y = \sqrt{x}, \quad y = a\sqrt[3]{x} + b\sqrt[5]{x}.$$

$$y = \frac{a\sqrt[5]{ax^2 + b} + \sqrt{bx^3 + c}}{\sqrt[5]{ax^3 + c} - \sqrt{bx^2 + a}}$$

są funkcjami niewymiernemi.

Gdy się ma do czynienia z podobnego rodzaju funkcjami, pilnie zwracać należy uwagę, na znak z jakim każdy pierwiastek ma być wziętym, jakoteż na wartości zmiennéj niezależnéj, dla których funkcja przybiera wartości rzeczywiste lub urojone.

11. Funkcje przestępne. Liczbę sposobów zależności jednéj zmiennéj od drugiéj, można sobie przedstawić nieograniczoną; liczba zatem rodzajów i funkcyj przestępnych może być również nieograniczoną. Jakoż, w miarę jak postępujemy coraz daléj w poszukiwaniach matematycznych, natrafiamy na coraz nowe funkcje przestępne. Podamy tu tylko te, które nam są znanemi z nauk początkowych to jest: *logarytmowe* i *wykładnicze*, *trygonometryczne* i *kołowe*.

Funkcya *logarytmowa* prosta przedstawia się pod postacią

$$y = \log x$$

gdzie zasada może być jakąkolwiek, na czém zresztą nie wiele zależy, bo zasadę uważać będziemy w tego rodzaju funkcjach zawsze jako stałą a.

W razie układu logarytmów naturalnego czyli Nepera, zasadą będzie liczba e, a logarytmy brane wedle téj zasady, oznaczać będziemy jedną głoską l, zamiast *log*.

$$y = \mathrm{l}(x) \quad \text{lub} \quad y = \mathrm{l}.x$$

Funkcja *wykładnicza* prosta jest odwrotną funkcji logarytmowéj i przedstawia się pod postacią

$$y = a^x \quad \text{lub} \quad y = e^x$$

Funkcje te, które znane nam są z algebry, lecz tylko naprzód z pewnemi ograniczeniami (jak np. w razie $y = \log x$ dla wartości rzeczywistych dodatnych zmiennéj niezależnéj x) otrzymały następnie ogólniejsze znaczenie, o którém wspomniemy poniżéj.

Funkcye trygonometryczne proste uważać można następujące:

$$y = \text{wst}\, x \text{ (wstawa } x)$$
$$y = \text{dos}\, x \text{ (dostawa } x)$$
$$y = \text{st}\, x \text{ (styczna } x)$$
$$y = \text{dot}\, x \text{ (dotyczna } x)$$
$$y = \text{sie}\, x \text{ (sieczna } x)$$
$$y = \text{dosie}\, x \text{ (dosieczna } x)$$

Właściwie możnaby dwie z nich, lub nawet tylko jednę, naprzykład wstawę, uważać za funkcję prostą, a inne za złożone, za pomocą tak zwanych pięciu związków trygonometrycznych.

Dla uniknienia nieporozumień, wyniknąć mogących z rozmaitych metod uważania tak zwanych *linij trygonometrycznych*, określić należy ściśle, co rozumieć będziemy pod powyższemi funkcjami: $y = \text{wst}\, x$, $y = \text{dos}\, x$... Wstawą, dostawą, styczną... nazywać będziemy nie *linje* podobnego nazwiska w kole, lecz *stosunki* tych linij do promienia; będą to więc liczby *oderwane*. Np. wst $x = \frac{1}{2}$, st $x = 10$, znaczyć będzie nie, że wstawą jest pół jedności linijnéj, lub styczną 10 jedności linijnych, lecz że wstawa jest połową promienia, lub styczna równa dziesięciu promieniom, jakikolwiekby był ten promień. Podobnież *łuk* x nie będziemy uważać jako wyrażony w stopniach, minutach lub sekundach, lecz *łuk* x wyrażać będzie stosunek łuku wyprostowanego do promienia; będzie to więc znów liczba oderwana. Tak jeżeli napiszemy:

$$\text{wst}\; 0{,}5235987\ldots = 0{,}5$$

to się znaczy, że wstawa łuku, który wyprostowany jest 0,5235987.... promienia, jest znów połową tego samego promienia, którego wielkość zostaje całkiem nieokreśloną;

~~łuk~~ zatem jest liczbą oderwaną 0,5, któréj, odpowiada inna liczba oderwana 0,5235987.... wyrażająca wstawę.

Zamiana łuku wyrażonego w stopniach, na łuk wyrażony przez liczbę oderwaną, jest zresztą bardzo łatwą; wiemy bowiem że stosunek półokręgu koła wyprostowanego do promienia

$$\frac{180^\circ}{R} = \pi = 3,1415926...$$

ztąd

$$\frac{1^\circ}{R} = \frac{\pi}{180}, \quad \frac{1'}{R} = \frac{\pi}{180 \times 60}, \quad \frac{1''}{R} = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}$$

Mając więc wyrazić łuk np. $24^\circ\ 27'\ 15''$ w liczbie oderwanéj x, mamy biorąc stosunek $\dfrac{24^\circ + 27' + 15''}{R}$

$$x = \pi\left(\frac{24}{180} + \frac{27}{180 \times 60} + \frac{15}{180 \times 60 \times 60}\right) = 0,427\ ...$$

Odwrotnie, mając łuk x wyrażony jako liczbę oderwaną, a szukając łuku x° wyrażonego w stopniach, mamy

$$x = \frac{\pi x^\circ}{180^\circ}, \quad \text{a więc } x^\circ = \frac{180^\circ x}{\pi}$$

Tak łuk równy 1, czyli równy promieniowi ma $\dfrac{180}{\pi}$ stopni czyli $57^\circ\ 16'$... Łuk uważany jako zmienna, przybierać może nie tylko wartości zawarte pomiędzy 0 i 2π, lecz jakiekolwiek wartości dodatne lub odjemne; funkcje trygonometryczne łuku uważanego za zmienną niezależną będą przybierać te same wartości, ile razy łuk zwiększy się o liczbę całkowitą okręgów, czyli o wielokrotność 2π. Funkcje te dla tego nazywają się *okresowemi*, a ilość która dodana do zmiennéj niezależnéj daje tą samą wartość funkcji, *okresem*.

Okres jest niekoniecznie równy 2π, mamy np.

$$y = \text{st}\, x = \text{st}\,(x+\pi) = \text{st}\,(x+2\pi) = \ldots = \text{st}\,(x+n\pi)$$

okresem stycznéj jest π.

Funkcje kołowe odwrotne funkcyj trygonometrycznych są następujące:

$y =$ łuk wst x (łuk, którego wstawa równa jest x)
$y =$ łuk dos x (łuk, którego dostawa równa jest x)
$y =$ łuk st x (łuk, którego styczna równa jest x)
$y =$ łuk dot x (łuk, którego dotyczna równa jest x)
$y =$ łuk sie x (łuk, którego sieczna równa jest x)
$y =$ łuk dosie x (łuk, którego dosieczna równa jest x)

Uwagi powyższe co do znaczenia w jakiém należy brać łuki, wstawy, dostawy, ... stosują się również do funkcyj odwrotnych.

12. Zamiana zmiennych. Funkcje funkcyj. Zdarza się często, że dla ułatwienia rachunku, postać funkcji zmieniamy na inną, podstawiając za zmienną niezależną, inną zmienną, któréj zależność od zmiennéj niezależnéj jest ściśle określoną za pomocą równania danego. Niech będzie np.

(1) $$y = F(x)$$

a równanie określające zależność zmiennéj niezależnéj x od nowéj zmiennéj z, którą za x podstawić chcemy

(2) $$f(x, z) = 0$$

Z tego równania (2) wyciągnąć możemy

$$x = \varphi(z)$$

a zatem (1) stanie się przez podstawienie

$$y = F(\varphi(z)) \tag{3}$$

czyli y jest w takim razie *funkcją funkcji* zmiennéj z. Wykonywając działanie, otrzymalibyśmy z łatwością y wprost, jako funkcję zmiennéj z.

Niech będzie naprzykład funkcja całkowita

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px^2 + qx + r$$

Za pomocą zamiany zmiennéj x na inną, wyrugować możemy z téj funkcji jeden wyraz którykolwiek, z wyjątkiem pierwszego; załóżmy bowiem

$$x = z + h$$

będziemy mieli podstawiając

$$y = az^m + (amh + b)z^{m-1} + \left[\frac{am(m-1)}{2}h^2 + b(m-1)h + c\right]z^{m-2}$$
$$+ \ldots + (ah^m + bh^{m-1} + \ldots qh + r)$$

chcąc wyrugować naprzykład wyraz stopnia $m - 1$go, dość jest założyć

$$amh + b = 0 \quad \text{czyli wziąść } h = -\frac{b}{am}$$

a więc

$$x = z - \frac{b}{am}$$

ponieważ $\frac{b}{am}$ jest stałą, zmienność x ściśle określa zmienność z i odwrotnie; ostatnia funkcja y jest więc równie dobrze wyznaczoną jak poprzednie, a o tyle prostszą, że nie zawiera potęgi $m - 1$éj zmiennéj.

W podobny sposób, mając daną funkcję zmiennéj niezależnéj, tak funkcję, jak zmienną niezależną, można zastąpić przez dwie inne zmienne, związane z pierwszemi za pomocą dwóch równań. Niech będzie

(1) $$y = F(x)$$

funkcja dana; z i t dwie nowe zmienne wyznaczone przez dwa równania

(2) $$\varphi(x, y, z, t) = 0 \qquad \psi(x, y, z, t) = 0$$

Z tych dwóch równań wyciągnąć możemy

$$x = \Phi(z, t) \qquad y = \Psi(z, t)$$

będziemy więc mieli, podstawiając w (1)

$$\Psi(z, t) = F[\Phi(z, t)]$$

Wykonywając wskazane działania, otrzymać możemy z tego ostatniego równania :

(3) $$z = f(t)$$

t. j. związek wyrażający, że z jest funkcją t, przez który zastąpić mamy związek (1). Przekształcenie to o tyle może być pożyteczném, o ile związek (3) jest prostszym, lub łatwiejszym do badania jak (1); zresztą z (3), można z łatwością przejść napowrót do (1), wyciągnąwszy wartości na z i t z równań (2).

Różnice czyli przyrostki ilości zmiennych

13. Niech będzie

(1) $$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots\ u_n, \ldots$$

układ różnych wartości, nadawanych zmiennéj u; załóżmy :

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0 \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1 \ldots \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

Wartości

(2) $\Delta u_0, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \ldots \quad \Delta u_n \ldots$

otrzymane przez odejmowanie każdéj z wartości układu (1) od wartości zaraz po niéj następującéj, nazywamy *różnicami pierwszemi*, lub *różnicami 1go rzędu* wartości (1). Załóżmy daléj :

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 \quad \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 \ldots$$
$$\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n \ldots$$

wartości :

(3) $\Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1, \quad \Delta^2 u_2, \quad \Delta^2 u_n \ldots$

które są różnicami pierwszemi wartości (2), nazywamy *różnicami drugiemi*, czyli *różnicami 2go rzędu* wartości (1). W podobny sposób tworzyć możemy różnice 3go, 4go... rzędu, wartości (1). W ogólności, różnice *m*tego rzędu wartości (1), oznaczać będziemy przez

(4) $\Delta^m u_0, \quad \Delta^m u_1, \quad \Delta^m u_2, \ldots \quad \Delta^m u_n \ldots$

które to różnice będą różnicami piewrszemi różnic $m-1$go rzędu, różnicami drugiemi różnic $m-2$go rzędu... ; zbyteczną jest uwaga, że Δ oznacza tu tylko symbol, jak *wst. dos. log.* lub F (t) a nie ilość; jak również Δ^2, $\Delta^3 \ldots \Delta^m$ oznacza nie *potęgę* 2gą, 3cią, *m*tę..., a *rzęd* różnicy; t. j. że

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \quad \Delta^3 u = \Delta(\Delta^2 u), \ldots \quad \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1} u).$$

Wziąwszy naprzykład różne wartości zmiennéj x^2, gdy na x nadajemy wartości 1, 2, 3, 4,... otrzymamy układ kwadratów liczb całkowitych po sobie następujących

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Różnicami pierwszemi tego układu będą liczby :

3, 5, 7, 9, 11 ..

Różnicami drugiemi

$$2, \quad 2, \quad 2, \quad 2 \ldots$$

Różnice 3cie i następne będą zerami.

Tworzenie różnic rozmaitych rzędów można ułatwić sobie układając w tabliczkę

u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$	$\Delta^5 u$
u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$	$\Delta^5 u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	$\Delta^3 u_1$	$\Delta^4 u_1$	.
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	$\Delta^3 u_2$	.	.
u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$	.	.	.
u_4	Δu_4	.	.	.	.
u_5	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

tak np.

$u=x^2$	Δu	$\Delta^2 u$
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	2
25	11	.
36	.	.
.	.	.
.	.	.

Widzimy zarazem, że wziąwszy wartości w liczbie skończonéj, np. m wartości :

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2 \ldots u_{m-1}$$

będziemy mieli $m-1$ różnic pierwszego rzędu, $m-2$ różnic drugiego rzędu... jednę tylko różnicę $m-1$go rzędu, a nic otrzymamy wcale różnic rzędu $m$go i następnych.

14. *Różnica summy, równa jest summie algebraicznéj różnic części.* Niech będą zmienne u, v, z ... powiadam że

$$\Delta(u+v-z+\ldots)=\Delta u+\Delta v-\Delta z+\ldots$$

w rzeczy saméj :

$$\begin{aligned}
&\Delta(u_n+v_n-z_n+\ldots)\\
&=(u_{n+1}+v_{n+1}-z_{n+1}+\ldots)-(u_n+v_n-z_n+\ldots)\\
&=(u_{n+1}-u_n)+(v_{n+1}-v_n)-(z_{n+1}-z_n)+\ldots\\
&=\quad \Delta u_n \quad + \quad \Delta v_n \quad - \quad \Delta z_n \quad +\ldots
\end{aligned}$$

a że n jest jakiekolwiek, twierdzenie jest dowiedzioném.

Różnica ilości stałéj jest zerem; niech będzie a ilością stałą : mamy

$$\Delta(a+u)=\Delta u$$

bo

$$\Delta a=0.$$

Mamy również,

$$\Delta(au) = a\,\Delta u$$

bo

$$\Delta a u_n = a u_{n+1} - a u_n = a(u_{n+1}-u_n) = a\,\Delta u_n$$

15. Wyrażenie *m*téj **różnicy** $\Delta^m u$. Niech będzie układ wartości

(1) $$u, \quad u_1, \quad u_2, \ldots u_n \ldots$$

bierzemy pierwszą wartość u_0, za wartość ogólną u zmiennéj, co jest zupełnie obojętném, bo możemy zacząć układ (1), od którejkolwiek wartości zmiennéj u.

Mamy [**13**]

$$\Delta u = u_1 - u \qquad 2u_1 - u - u_2 + u_1$$
$$\Delta u_1 = u_2 - u_1$$

a więc

(2) $$\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u = u_2 - 2u_1 + u$$

W podobny sposób otrzymamy :

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1$$

a więc

(3) $$\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u$$

Otrzymalibyśmy postępując tak daléj,

(4) $$\Delta^4 u = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u$$

Spostrzegamy wkrótce, że spółczynniki liczebne tego rozwinięcia są te same, co spółczynniki odpowiedniéj potęgi dwumianu; ztąd naprowadzeni zostajemy na napisanie wzoru ogólnego

$$(5)\qquad \Delta^m u = u_m - m u_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} u_{m-2} - \ldots \pm u$$

Uważając, że wykładniki u w rozwinięciu $m$téj potęgi dwumianu $u-1$ są te same, co wskaźniki porządkowe w rozwinięciu $m$téj różnicy, możemy napisać wzór symboliczny

$$(6)\qquad \Delta^m u = (u-1)^{(m)}$$

z zastrzeżeniem, że rozwijając $(u-1)^{(m)}$ w podobny sposób jak $(u-1)^m$ zamiast wykładników u^0, u^1, u^2, u^3 ... u^m, pisać należy wskaźniki porządkowe u_0 czyli u, u_1, u_2, u_3 ... u_m.

Lecz wzór ten, na który zostaliśmy naprowadzeni, należy jeszcze udowodnić. Dowodzenie będzie dostateczném, jeżeli przypuszczając, że wzór ten zachodzi dla $m=k$, dowiedziemy, że zachodzi również dla $m=k+1$; gdyż w takim razie wzór (5) czyli (6) zachodząc dla $m=4$, zachodzić będzie dla $m=5$, a zatém i dla $m=6$ i t. d. będzie więc ogólnym.

Przypuśćmy zatém, że mamy

$$(8)\qquad \Delta^k u = u_k - k u_{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} u_{k-2} \ldots \pm u$$

czyli

$$(9)\qquad \Delta^k u = (u-1)^{(k)}$$

wiemy nadto że [**13**]

$$(10)\qquad \Delta^{k+1} u = \Delta^k u_1 - \Delta^k u$$

stosując wzór (8) do rozwinięcia $\Delta^k u_1$, należy zastąpić w nim u przez u_1, u_1 przez u_2, u_2 przez u_3 ..., u_k przez u_{k+1};

a więc

$$(11)\quad \Delta^k u_1 = (u_1 - 1)^{(k)} = u_{k+1} - k u_k + \frac{k(k-1)}{1.2} u_{k-1} \dots \pm u_1$$

Podstawiając wartość tę we wzór (10) otrzymamy

$$(12)\quad \Delta^{k+1} u = (u_{k+1} - u_k) - k(u_k - u_{k-1}) + \frac{k(k-1)}{1.2}(u_{k-1} - u_{k-2}) - \dots \pm (u_1 - u)$$

porównywając wzór ten z (8) widziemy, że mnożąc symbolicznie wyraz po wyrazie wzoru (8) przez $(u_1 - 1)$, to jest uważając w mnożeniu wskaźniki jako wykładniki, otrzymamy wzór (12); jakoż:

$$u_k(u_1 - 1) = u_{k+1} - u_k$$
$$u_{k-1}(u_1 - 1) = u_k - u_{k-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u(u_1 - 1) = u_1 - u$$

a więc, zważywszy iż $(u_1 - 1) = (u - 1)^{(1)}$, z określenia symbolu, będzie:

$$\Delta^{k+1} u = (u-1)^{(1)}\,(u-1)^{(k)} = (u-1)^{(k+1)} \qquad c.b.d.d.$$

Mamy więc w ogólności

$$\Delta^m u = (u-1)^{(m)}$$

16. Wyrażenie wyrazu ogólnego u_m, przez wyraz pierwszy u i różnice. Mamy z określenia [**13**]

$$u_1 = u + \Delta u$$
$$u_2 = u_1 + \Delta u_1$$
$$\Delta u_1 = \Delta u + \Delta^2 u$$

Dodając $\quad u_2 = u + 2\Delta u + \Delta^2 u$

W podobny sposób

$$\Delta u_2 = \Delta u + 2\Delta^2 u + \Delta^3 u$$

a zatém

$$u_3 = u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u$$

i tak daléj. Rozumując jak powyżéj [**15**] możemy napisać w ogólności

$$u_m = u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 u + \ldots + \Delta^m u$$

czyli w sposób symboliczny

$$u_m = (1+\Delta)^{(m)} u$$

tak jakby Δ było ilością, a nie znakiem, a m wykładnikiem całkowitym, a nie wskaźnikiem porządkowym. Ogólności tego wzoru dowieść można jak powyżéj [**15**].

17. Różnice funkcji. Niech będzie

$$y = f(x)$$

nadając zmiennéj niezależnéj x różne wartości

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2 \ldots x_n \ldots$$

otrzymamy wartości odpowiednie funkcji

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2 \ldots y_n \ldots$$

Zmiennéj niezależnéj x możemy nadawać wartości dowolne; wartości te $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ tworzą zwykle postęp różnicowy, tak że

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{n+1} - x_n = \ldots$$

czyli innemi słowy, różnice pierwsze zmiennéj niezależnéj

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \ldots = \Delta x_n = \ldots$$

są sobie równe, a różnice następne po pierwszych są zerami.

Wziąwszy pierwszą wartość x_0, za wartość ogólną x zmiennéj niezależnéj, *różnica stała* (t. j. niezależna od wartości x)

$$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots$$

nazywa się niekiedy *przyrostkiem* stałym zmiennéj niezależnéj, a różnica odpowiednia

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

funkcji, *przyrostkiem* odpowiednim funkcji.

18. Przyrostki, czyli różnice pierwsze funkcji, w ogólności nie są sobie równe, chociaż przyrostki zmiennéj niezależnéj są równemi; chyba w razie jeżeli funkcja jest linijną [**10**]

$$y = ax + b;$$

bo wtedy

$$\Delta y = a\Delta x$$

a że Δx jest stałém, więc i Δy jest stałém. W ogóle, dla wszystkich innych funkcji różnica ta jest *zmienną* t. j. zależną od wartości x; odwrotnie bowiem, przypuściwszy przyrostki y stałe dla przyrostków stałych zmiennéj niezależnéj, mamy

dla

$$x = x_0, \quad x_0 + \Delta x, \quad x_0 + 2\Delta x, \ \ldots \ x_0 + n\Delta x \ldots$$

wartości

$$y = y_0, \quad y_0 + \Delta y, \quad y_0 + 2\Delta y, \ \ldots \ y_0 + n\Delta y \ldots$$

przyrostki Δx i Δy stałe, są w stosunku stałym a $a\Delta y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \quad , \quad \Delta y = a\Delta x$$

a więc jakakolwiek wartość funkcji staje się

$$y = y_0 + n\Delta y = y_0 + an\Delta x = y_0 + a(x - x_0)$$

czyli

$$y = ax + (y_0 - ax_0)$$

a że $y_0 - ax_0$ jest stałém, więc y jest funkcją linijną zmiennéj niezależnéj x. Widzimy zatém że :

Aby przyrostek funkcji był stałym dla przyrostku stałego *zmiennéj niezależnéj, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby funkcja była linijną.*

19. Różnice pierwsze wszystkich innych funkcji są zmiennemi (zawsze w przypuszczeniu różnic pierwszych zmiennéj niezależnéj stałych); możemy więc tworzyć różnice drugie, trzecie... *n*te... wiadomym sposobem [**13**]. Ułożyć możemy tabliczkę tych różnic:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1' - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$	$\Delta^5 y_0 = \Delta^4 y_1' - \Delta^4 y^0$
$x_0 + \Delta x$	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$	. .
$x_0 + 2\Delta x$	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$	. .	. .
$x_0 + 3\Delta x$	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	. .	. .	
$x_0 + 4\Delta x$	y_4	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	. .	. .		
$x_0 + 5\Delta x$	y_5	. .	. .			
.	.	. .				
.	.					

Mamy również [**15**] wzór następujący na różnicę $m$go rzędu, czyli na przyrostek funkcji odpowiedający przyrostkowi $m\Delta x$ zmiennéj niezależnéj:

$$\Delta^m y = y_m - \frac{m}{1} y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} y_{m-2} - \dots \pm y$$

czyli

$$(1)\quad \Delta^m f(x) = f(x + m\Delta x) - \frac{m}{1} f[x + (m-1)\Delta x] + \frac{m(m-1)}{1.2} f[x + (m-2)\Delta x] - \dots \pm f(x)$$

Wartość szczególną mtą funkcji, odpowiedającą przyrostkom $m\Delta x$ zmiennéj niezależnéj wyrazić możemy przez [**16**]

$$y_m = y + \frac{m}{1}\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \dots + \Delta^m y$$

czyli przez

$$(2)\quad f(x + m\Delta x) = f(x) + \frac{m}{1}\Delta f(x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 f(x) + \dots + \Delta^m f(x)$$

20. Różnice funkcyj całkowitych. Niech będzie funkcja całkowita [**10**]

$$(1)\quad y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots$$

biorąc różnicę pierwszą [**13**]

$$\Delta y = a[(x+\Delta x)^m - x^m] + b[(x+\Delta x)^{m-1} - x^{m-1}] + c[(x+\Delta x)^{m-2} - x^{m-2}] + \dots$$

rozwijając potęgi dwumianów, i układając podług potęg zmniéjszających się x, otrzymamy wyrażenie następującego kształtu:

$$(2)\quad \Delta y = ma\Delta x\, x^{m-1} + b'x^{m-2} + c'x^{m-3} + \dots$$

spółczynnik pierwszego wyrazu tego wielomianu stopnia $m-1$go co do x, tworzy się mnożąc spółczynnik pierwszego wyrazu wielomianu danego (1), przez wykładnik zmiennéj x, i przez Δx.

W podobny sposób otrzymamy

$$(3)\begin{cases} \Delta^2 y = m(m-1)\,a\Delta x^2\, x^{m-2} + b'' x^{m-3} + c'' x^{m-4} + \ldots \\ \Delta^3 y = m(m-1)(m-2)\,a\,\Delta x^3 x^{m-3} + b''' x^{m-4} + c''' x^{m-5} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^m y = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1\; a\,\Delta x^m \end{cases}$$

Δx^2, $\Delta x^3 \ldots \Delta x^m$ oznaczają potęgi 2gą, 3cią, ... mtą przyrostku Δx; t.j. $\Delta x^2 = (\Delta x)^2, \Delta x^3 = (\Delta x)^3, \ldots \Delta x^m = (\Delta x)^m$; odróżnić je należy od $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots \Delta^m y$, które oznaczają różnice t.j. $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y), \Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y), \ldots \Delta^m y = \Delta(\Delta^{m-1} y)$.

Mamy więc różnicę mtą

$$(4)\qquad \Delta^m y = 1.2.3\ldots m a\,\Delta x^m$$

czyli, *że różnice* m*tego rzędu funkcji całkowitéj* m*go stopnia są stałemi, jeżeli różnice* Δx *zmiennéj niezależnéj przyjmiemy stałemi.*

Różnice rzędów wyższych są oczywiście zerami.

21. Przykład I. *Znaleźć kwadraty z liczb całkowitych po sobie następujących.* Weźmiemy

$$y = x^2$$

Wiemy że druga różnica jest stałą $\Delta^2 y = 1.2\,\Delta x$, a że $\Delta x = 1$ więc $\Delta^2 y = 2$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	0	1	2
1	1	3	2
2	4	5	2
3	9	7	2
4	16	.	.
.	.	.	.
.	.		

W ostatniéj kolumnie, pod $\Delta^2 y$ wypisuję tyle razy 2 ile się spodoba, a następnie przez dodawanie tworzę kolumnę Δy : $2+1=3$, $2+3=5$, $2+5=7\ldots$; z któréj znów przez dodawanie tworzę kolumnę y : $1+0=1$, $3+1=4$, $5+4=9$, $7+9=16\ldots$, tak, przez dodawanie otrzymam tyle kwadratów po sobie następujących, ile mi się spodoba.

22. Przykład II. *Znaleźć summę kwadratów początkowych* n *liczb po sobie następujących, wyrażoną przez funkcję* n.

Weźmiemy szereg wartości nieznanéj funkcji y

$$y_0=0^2,\ y_1=0^2+1^2\ \ y_2=0^2+1^2+2^2\ \ y_3=0^2+1^2+2^2+3^2\ldots$$
$$y_n=0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2,$$

Różnice pierwsze będą stanowić szereg kwadratów

$$\Delta y_0=1^2\qquad \Delta y_1=2^2\qquad \Delta y_2=3^2\ldots,\ \Delta y_{n-1}=n^2$$

a zatém różnice drugie różnic pierwszych, czyli różnice trzecie funkcji danéj, będą stałemi i równemi 2, jakeśmy widzieli w poprzedzającym przykładzie; różnice 4te i wyższe będą zerami; wzór zatém

$$y_m=y+\frac{m}{1}\Delta y+\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y+\ldots+\Delta^m y$$

[**19**], staje się

$$y_n=y_0+\frac{n}{1}\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0$$

bo różnice $\Delta^4 y_0$, $\Delta^5 y_0\ldots$ są wszystkie zerami; lecz mamy

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$y_0=0^2$	$\Delta y_0=1$	$\Delta^2 y_0=3$	$\Delta^3 y_0=2$
$y_1=0^2+1^2$	$\Delta y_1=4$	$\Delta^2 y_1=5$	
$y_2=0^2+1^2+2^2$	$\Delta y_2=9$		
$y_3=0^2+1^2+2^2+3^2$			

podstawiając we wzór powyższy za y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ wartości, otrzymamy

$$y_n = n + \frac{3\,n\,(n-1)}{1.2} + \frac{2\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}$$

czyli

$$y_n = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

funkcję szukaną, która będzie 3go stopnia co do n, co było do przewidzenia, wiedząc że 3cia różnica jest stałą. Tak summa kwadratów 100 liczb początkowych jest $\frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338350$.

23. Różnice niektórych funckyj przestępnych. Niech będzie funkcja wykładnicza :

$$y = a^x$$

różnica pierwsza $\Delta\, y = a^x\,(a^{\Delta x} - 1)$

różnica druga $\Delta^2 y = a^x\,(a^{\Delta x} - 1)^2$

. . . .

w ogólności $\Delta^n y = a^x\,(a^{\Delta x} - 1)^n$

Niech będzie jeszcze funkcja trygonometryczna :

$$\left.\begin{aligned} y &= wst\,(a\,x + b) \\ \Delta y &= wst\,(a\,x + a\,\Delta\,x + b) - wst\,(a\,x + b) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

czyli

$$(2) \qquad \Delta\, wst\,(a\,x + b) = 2wst\,\tfrac{1}{2}\,a\,\Delta\,x\,dos\left(a\,x + b + \frac{a\,\Delta\,x}{2}\right)$$

lub jeszcze

$$(3) \qquad \Delta\, wst\,(a\,x + b) = 2\,wst\,\frac{a\,\Delta\,x}{2}\,wst\left(a\,x + b + \frac{a\Delta x + \pi}{2}\right)$$

Znajdziemy daléj

$$\Delta^2\, wst\,(a\,x + b) = 2wst\frac{a\,\Delta\,x}{2}\left[\Delta wst\left(ax + b + \frac{a\Delta x + \pi}{2}\right)\right]$$

a podstawiając na zasadzie (3)

$$\Delta wst\left(ax+b+\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)=2wst\frac{a\Delta x}{2}wst\left(ax+b+2\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)$$

otrzymamy

$$\Delta^2 wst\,(a x + b)=2^2 wst^2\frac{a\,\Delta\,x}{2}\,wst\,\left(a x+b+2\;\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)$$

Otrzymalibyśmy podobnie

$$\Delta^3 wst\,(a x + b)=2^3 wst^3\frac{a\,\Delta\,x}{2}\,wst\,\left(a x+b+3\;\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)$$

i w ogólności

$$(4)\quad \Delta^n wst(a x + b)=2^n wst^n\frac{a\,\Delta\,x}{2}\,wst\,\left(a x+b+n\;\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)$$

Dla dostawy, otrzymać możemy z łatwością wzór następujący

$$(5)\quad \Delta^n \operatorname{dos}\,(a x + b)=2^n \operatorname{wst}\frac{a\,\Delta\,x}{2}\operatorname{dos}\left(a x+b+n\;\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)$$

wprost, lub też podstawiając w (4) za b, wartość $b+\frac{\pi}{2}$.

24. Uwaga. Różnice funkcyj uważane powyżéj, służyć nam mogą do badania saméj zmienności funkcyj. Nadając zmiennéj niezależnéj przyrostki stałe np. dodatne, różnice pierwsze funkcji, odpowiadające tym przyrostkom mogą być dodatne, lub odjemne; w pierwszym razie funkcja się zwiększa, jeżeli zwiększamy zmienną niezależną, w drugim razie, zwiększając zmienną niezależną, funkcja się zmniéjsza. Daléj, czém różnice te funkcji są większemi, tém funkcja więcéj się zwiększa w pierwszym razie, zmniéjsza w drugim, dla tego samego zwiększenia zmiennéj niezależnéj. Jeżeli dwie różnice po sobie następujące są znaków przeciwnych, *w ogólności* dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj, zawartéj pomiędzy dwoma wartościami szczególnemi odpowiadającemi powyższym przyrostkom, funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniéjszać, lub odwrotnie t. j. staje się *największością* lub *najmniéjszością*.

Weźmy naprzykład funkcję

$$y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$$

nadając zmiennéj niezależnéj x przyrostki stałe równe np. 0,01, począwszy od $x = 1$, otrzymamy

x	y	Δy	x	y	Δy
1,00	+0, 00000	+0,00555	6,00	+0,00000	−0,01256
1,01	+0, 00555	+0,00554	6,01	−0,01256	−0,01267
1,02	+0, 01109	+0,00553	6,02	−0,02523	−0,01278
1,03	+0 ,01662	....	6,03	−0,03801	....
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
3,99	+0,999983	+0,000027	15,99	25,000017	−0,000017
4,00	+1,000000	−0,000017	16,00	25,00000	+0,000017
4,01	+0,999983	....	16,01	25,00002	....

Od wartości $x = 1$ różnice są dodatne, funkcja się zwiększa. Pomiędzy $x = 3,99$ a $x = 4,01$ różnica zmienia znak z dodatnego na odjemny, funkcja przestaje się zwiększać, a zaczyna zmniéjszać.

Od wartości $x = 6$ różnice są odjemne, funkcja się zmniéjsza.

Pomiędzy $x = 15,99$ a $x = 16,01$ różnica zmienia znak z odjemnego na dodatny: funkcja przestaje się zmniéjszać a zaczyna zwiększać i t. d.

Z przybliżeniem więc 0,01 możemy wnieść tu, że funkcja ma swoją *największość* dla $x=4$, a *najmniéjszość* dla $x=16$: przybliżenie to możemy posunąć tak daleko jak się podoba, biorąc np. od 3,99 do 4,01 różnice 0,001 i t. d.

Różnice drugie pokazałyby nam zmienność różnic pierwszych: różnice drugie równe zeru wskazują, że funkcja jest linijną [**18**]; jeżeli różnice te są bardzo małemi, funkcja bardzo mało różni się od funkcji linijnéj, to jest takiéj, dla któréj przyrostki funkcji są proporcjonalnemi do przyrostków zmiennéj niezależnéj. Widzimy np. w powyższym przykładzie, że dla bardzo małych przyrostków x, jak 0,01 różnice drugie są bardzo małemi: mnéijszemi od 0,0001, gdy zaczynamy od wartości $x=1$, mniéjszemi od 0,001 gdy zaczynamy od wartości $x=6$; ztąd wnosimy, że funkcja zmienia się więcéj dla tych ostatnich wartości, niż dla pierwszych. W blizkości tych wartości, jak $x=4$ lub $x=16$, dla których różnica pierwsza zmienia znak, to jest funkcja przechodzi przez największość lub najmniéjszość, różnica druga jest jeszcze mniéjszą, mniéjszą od 0,000001.

Ciągłość.

25. *Ilość zmienna może zmieniać się w sposób ciągły, lub nieciągły: jeżeli zmienna, przechodząc z jednéj wartości w drugą, przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie, mówimy, że zmienia się w sposób ciągły.*

Funkcją ciągłą zmiennéj danéj nazywamy funkcję, która zmienia się w sposób ciągły, gdy zmienna ta zmienia się w sposób ciągły. Zmienna dana może być niezależną, bezwzględnie, lub być niezależną tylko względem funkcji danéj, sama będąc funkcją innéj zmiennéj [**12**]; w tym ostatnim razie, zachodzić musi możność zmieniania zmiennéj danéj w sposób ciągły.

Mówiąc, że zmienna przechodząc z jednéj wartości w drugą, przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie, rozumiemy wartości te tak dodatne jak odjemne. I tak jeżeli zmienna przechodzi z wartości odjemnéj $-a$, do wartości dodatniéj $+b$, winna przejść przez wszystkie wartości odjemne zmniéjszające się bez względu na znak, zacząwszy od a aż do 0, przejść przez wartość 0, i następnie zacząwszy od 0, przez wszystkie wartości dodatne, zwiększające się aż do b. Przechodząc więc z wartości odjemnéj do dodatnéj, lub odwrotnie, zmienna ciągła winna przéjść koniecznie przez wartość 0.

Funkcja może być ciągłą dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x, zawartych pomiędzy pewnemi dwoma wartościami x_0 i X, a przestać być ciągłą, gdy zmienna przybiera te wartości. Mówimy wtedy, że funkcja jest ciągłą tylko pomiędzy pewnemi granicami zmiennéj niezależnéj. Tak np. wstawa jest funkcją ciągłą łuku, dla wszelkich wartości nadanych na łuk: lecz styczna jest funkcją ciągłą łuku tylko między wartościami $-\frac{\pi}{2}$ i $+\frac{\pi}{2}$ tegoż łuku; przestaje bowiem być ciągłą dla tych wartości, dla których jest nieskończoną i w blizkości których przeskakuje z bardzo wielkich wartości dodatnych, do bardzo wielkich odjemnych, i odwrotnie.

26. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym ciągłości funkcji, jest możność nadawania zmiennéj niezależnéj przyrostku tak małego, żeby przyrostek funkcji mógł się stać i pozostać mniéjszym od pewnéj ilości naznaczonéj, tak małéj jak się podoba.* Warunkiem koniecznym, bo funkcje nie mogąc otrzymać dość małego przyrostku, przeskakiwałyby z jednéj wartości w drugą nie przechodząc przez wartości pośrednie; dostatecznym, bo jeżeli przyrostek funkcji stał się tak małym jak się podoba, nie ma wartości pośredniéj, przez którąby funkcja przejść nie musiała, przechodząc z jednéj wartości w drugą. Żeby udowodnić ciągłości funkcji, nadajemy zmiennéj pewien przyrostek; obliczamy odpowiedni przyrostek funkcji, i dowodzimy, że przyrostek zmiennéj można wziąść dość małym, żeby przyrostek odpowiedni funkcji mógł się stać mniéjszym od pewnéj naznaczonéj ilości, tak małéj jak się podoba.

Niech będzie funkcja

$$y = F(x)$$

funkcja y będzie ciągłą dla wszelkich wartości zmiennéj nie zależnéj x, zawartych pomiędzy x_0 i X, jeżeli będziemy mogli nadać wszelkiéj wartości x zawartéj między temi granicami, przyrostek Δx dość mały, aby przyrostek odpowiedni funkcji

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$$

mógł się stać mniéjszym od dowolnie małéj naznaczonéj ilości ε.

27. Ciągłość funkcyj algebraicznych. Niech będzie funkcja

$$u = av + bw - cz$$

gdzie v, w, z, są same zmiennemi niezależnemi, lub funkcjami ciągłemi zmiennéj niezależnej x; przyrostki więc Δv, Δw, Δz, możemy uważać tak małemi, jak się podoba. Lecz mamy [**14**]

$$\Delta u = a\,\Delta v + b\,\Delta w - c\Delta z$$

możemy widocznie wziąść Δv, Δw, Δz dość małemi

$$\Delta v < \frac{\varepsilon}{3a}, \quad \Delta w < \frac{\varepsilon}{3b}, \quad \Delta z < \frac{\varepsilon}{3c}$$

żeby $\Delta u < \varepsilon$, gdzie ε oznacza pewną oznaczoną ilość, zresztą tak małą, jak się podoba. *Summa więc algebraiczna jest funkcją ciągłą swych części.*

28. Niech będzie, w podobném znaczeniu jak powyżéj, iloczyn

$$u = vw$$

mamy

$$\Delta u = (v + \Delta v)(w + \Delta w) - vw$$

czyli

$$\Delta u = v\,\Delta w + w\,\Delta v + \Delta v\,\Delta w$$

Możemy wziąść Δv, Δw dość małemi, żeby każdy z trzech wyrazów, których summa równa się Δu, był mniéjszym od $\frac{1}{3}\varepsilon$, a zatém żeby $\Delta u < \varepsilon$. Podobnież, gdybyśmy zamiast dwóch, wzięli ilekolwiek czynników. *Iloczyn więc jest funkcją ciągłą czynników.*

29. Niech będzie iloraz

$$u = \frac{v}{w}$$

gdzie v i w mogą zależyć od pewnéj zmiennéj niezależnéj x, i zmieniać się tylko w sposób ciągły, gdy x zmienia się w sposób ciągły. Dla wartości x, dla któréj $w = 0$, iloraz pewnéj ilości v, przez 0, nie ma żadnego znaczenia : bo nie można dzielić przez 0. Zresztą jeżeli weźmiemy bardzo małe, a zatém bardzo mało się od siebie różniące wartości w, jedną odjemną, drugą dodatną, funkcja u, dla pierwszéj z nich jest bardzo wielką ilością odjemną, dla drugiéj, bardzo wielką dodatną; (w przypuszczaniu że v nie jest zerem, a ilością dodatną; gdyby v było odjemném rzeczy miałyby się odwrotnie; gdyby $v = 0$, gdy $w = 0$, funkcja miałaby kształt niewyznaczony) funkcja więc przeskakuje w blizkości $w = 0$ z bardzo wielkich odjemnych wartości, w bardzo wielkie dodatne, nie przechodząc przez 0; funkcja więc $u = \frac{v}{w}$ nie jest ciągłą, gdy w przechodzi z jednéj wartości w drugą, jeżeli te wartości zawierają pomiędzy sobą wartość $w=0$, to jest jeżeli jedna z tych wartości ostatecznych jest dodatną, druga odjemną.

Przypuśćmy więc że gdy zmienna niezależna przechodzi z jednéj wartości w drugą, funkcja ciągła w, téj zmiennéj niezależnéj (jeżeli w samo nie jest tą zmienną niezależną), nie przechodzi przez wartość 0. Mamy wtedy

$$\Delta u = \frac{v+\Delta v}{w+\Delta w} - \frac{v}{w} = \frac{w\,\Delta v - v\,\Delta w}{w\,(w+\Delta w)}$$

licznik tego ostatniego ułamku może stać się tak małym jak się podoba [**27**], gdy weźmiemy Δv, Δw dość małémi; mianownik jest zawsze większym od w^2, które nie może być zerem z założenia; ułamek sam, czyli Δu, może być tak małym jak się podoba, a więc można uczynić $\Delta u < \varepsilon$. *Iloraz jest funkcją ciągłą, dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj, nie zawierających pomiędzy sobą wartości, dla których dzielnik staje się zerem.*

30. Niech będzie potęga

$$y = ax^m$$

gdzie a i m są stałemi, x zmienną niezależną, lub funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj.

Przypuśćmy naprzód że m jest liczbą całkowitą n; mamy

$$\Delta y = a\,(x+\Delta x)^n - ax^n$$

czyli

$$\Delta y = a\left(n\,x^{n-1}\,\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,x^{n-2}\,\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n\right)$$

każdy z wyrazów wielomianu w nawiasie może stać się mniéjszym od dowolnie małéj ilości δ, biorąc Δx dość małém; jakoż, ażeby wyraz ogólny był mniéjszym od δ t. j.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.2.3.\dots p}x^{n-p}\Delta x^p < \delta$$

dość jest wziąść

$$\Delta x < \sqrt[p]{\frac{1.2\dots p.\delta}{n(n-1)n-2)\dots(n-p+1)x^{n-p}}}$$

a wtedy, wziąwszy Δx mniéjsze (lub równe) od najmniéjszego z powyższych wyrażeń, można otrzymać

$$\Delta y < an\delta.$$

Wziąwszy $an\delta = \varepsilon$ czyli $\delta = \frac{\varepsilon}{an}$, ($\delta$ jest dotąd dowolném) można uczynić Δy mniéjszém od dowolnie małéj lecz oznaczonéj ilości ε; funkcja więc $y = ax^n$, gdzie n całkowite i dodatne, jest funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj x, dla wszelkiéj wartości téj zmiennéj niezależnéj.

Funkcja całkowita

$$y = ax^u + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + r$$

któréj każdy wyraz jest funkcją ciągłą x, jest również funkcją ciągłą dla wszelkiéj wartości zmiennéj niezależnéj.

Przypuśćmy powtóre wykładnik ułamkowym,

$$m = \frac{\mu}{\nu}$$

(μ i ν całkowite i dodatne) funkcja

$$y = x^{\frac{\mu}{\nu}}$$

może być napisaną, zakładając $x^u = \xi$

$$y = \sqrt[\nu]{\xi}$$

ξ jest funkcją ciągłą x na zasadzie poprzedzającego dowodzenia; jeżeli więc dowiedziemy że y jest funkcią ciągłą ξ, uważanego za zmiennę niezależną, dowiedziemy przez to samo, że y jest funkcją ciągłą x.

Mamy

$$\Delta y = \sqrt[\nu]{\xi + \Delta\xi} - \sqrt[\nu]{\xi}$$

czyli

$$\sqrt[\nu]{\xi} + \Delta y = \sqrt[\nu]{\xi + \Delta\xi}$$

powiadam, że można wziąść $\Delta\xi$ dość małém, aby Δy było mniejszém od dowolnie małéj, lecz oznaczonéj ilości ε.

W przeciwnym bowiem razie, gdyby dla jakkolwiek małego $\Delta\xi$, Δy miało być koniecznie większém lub równém ε, mielibyśmy

$$\sqrt[\nu]{\xi + \Delta\xi} \geqq \sqrt[\nu]{\xi} + \varepsilon$$

czyli

$$\xi + \Delta\xi \geqq \left(\sqrt[\nu]{\xi} + \varepsilon\right)^{\nu}$$

co jest niemożebném, bo pierwsza strona zbliżając się do ξ nieograniczenie, biorąc $\Delta\xi$ dość małém, staje się *mniéjszą* od drugiéj, stale większéj od ξ, a nie *większą* ani *równą*; y jest więc funkcją ciągłą ξ, a zatém i x, *c. b. d. d.*

Przypuśćmy nakoniec wykładnik całkowitym, lub ułamkowym, lecz odjemnym

$$m = -q$$

gdzie q dodatne; funkcja

$$y = x^{-q}$$

może być napisaną, zakładając $x^q = \xi$:

$$y = \frac{1}{\xi}$$

a że funkcja ξ jest ciągłą, funkcja y będzie również ciągłą [**29**], dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x, zawartych między granicami, między któremi nie znajduje się wartość x, dla któréj ξ staje się zerem t. j. wartość $x=0$.

W ogólności więc funkcja

$$y=x^n$$

lub funkcja

$$y=(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+r)^m$$

gdzie wielomian w nawiasie jest funkcją całkowitą, a m *jakąkolwiek stałą dodatną, całkowitą lub ułamkową, jest funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj, dla wszelkich wartości rzeczywistych, jakie zmienna ta przybrać może; w razie gdy* m *odjemne całkowite lub ułamkowe, funkcja* y *jest również funkcją ciągłą dla wartości zmiennéj niezależnéj, zawartych między granicami nie zawierającemi wartości* x, *dla których funkcja która ma być podniesioną do potęgi* m *staje się zerem* [**29**].

Funkcja ułamkowa

$$y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots+r}{a'x^p+b'x^{p-1}+\ldots+r'}$$

gdzie n i p są całkowite i dodatne, jest funkcją ciągłą dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x, zawartych między granicami, nie zawierającemi wartości x, dla których wielomian w mianowniku staje się zerem.

Niech będzie np. funkcja

$$y=\frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x^2-110a^2x+1000a^4}$$

Równanie $x^2-110a^2x+1000a^2=0$ daje na x dwie wartości $10a^2$ i $100a^2$; funkcja y jest ciągłą, gdy x się zmienia między granicami $x=10a^2$ i $x=100a^2$ wyłącznie; lub między granicami $x=-\infty$, i $x=10a^2$, lub wreszcie między granicami $x=100a^2$ i $x=+\infty$, lecz przestaje być ciągłą gdy x zmienia się między granicami, zawierającemi wartości szczególne $x=10a^2$, lub $x=100a^2$.

31. Ciągłość niektórych funkcyj przestępnych. Niech będzie funcja wykładnicza.

$$(1) \qquad y=a^x$$

Wziąwszy logarytm obu stron

$$(2) \qquad \mathrm{l}.\, y=x\,\mathrm{l}.\, a$$

a nadawszy zmiennéj x przyrostek Δx

$$(3) \qquad \mathrm{l}\,(y+\Delta y)=(x+\Delta x)\,\mathrm{l}.\, a$$

odéjmując (2) od (3)

$$\mathrm{l}\,(y+\Delta y)-\mathrm{l}.\, y=\mathrm{l}\,\frac{y+\Delta y}{y}=\Delta x\,\mathrm{l}.\, a$$

Biorąc Δx dość małém, możemy uczynić $\mathrm{l}\,\frac{y+\Delta y}{y}$ dowolnie małym, czyli $\frac{y+\Delta y}{y}$ dowolnie mało różném od jedności :

$$\frac{y+\Delta y}{y}=1+\delta$$

a więc

$$\Delta y=y\delta;$$

biorąc $\delta<\frac{\varepsilon}{y}$,otrzymamy Δy mniéjszém od dowolnie małéj, lecz oznaczonéj ilości ε. Funkcja wykładnicza (1) jest więc funkcją ciągłą, dla wszelkich wartości rzeczywistych zmiennéj niezależnéj x.

Wiemy z algebry, że funkcja logarytmowa jest funkcją ciągłą dla wszelkich wartości dodatnych zmiennéj niezależnéj.

Wiemy również z trygonometrji, że wstawa jest zawsze funkcją ciągłą łuku; że styczna jest funkcją ciągłą tylko w granicach, nie zawierających łuku $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ lub $2n\pi-\frac{\pi}{2}$ i t. d.

Znając warunki ciągłości funkcyj prostych, łatwo jest w każdym przypadku znaleźć ciągłość funkcji złożonéj.

Naprzykład funkcja

$$y=\frac{x^m-\log x+a\operatorname{st}(x^2-1)}{a^x\operatorname{wst}(x-a)}$$

jest ciągłą dla wszelkich wartości x, zawartych pomiędzy granicami, nie zawierającemi wartości

$$x=a,\ \text{lub}\ x=2n\pi+a,\ \text{lub jeszcze}\ x^2-1=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\text{czyli}\ x=\pm\sqrt{2n\pi\pm\frac{\pi}{2}+1}$$

gdzie n całkowite dodatne lub odjemne, dla których wartości mianownik staje się zerem, lub licznik przestaje być ciągłym.

32. Ciągłość funkcyj wielu zmiennych niezależnych. — Jeżeli funkcja

$$u=f(x,y,z,\ldots)$$

zmiennych niezależnych x, y, z ... jest ciągłą względem każdéj z nich po szczególe, uważając pozostałe jako stałe, powiadamy, że funkcja ta jest funkcją ciągłą wszystkich zmiennych niezależnych. Ciągłość ta może mieć miéjsce, dla wszelkich wartości zmiennych niezależnych, lub tylko dla wartości, zawartych pomiędzy pewnemi granicami, jak x_0 i X, dla zmiennéj x, y_0 i Y dla zmiennéj y, i t. d.

O Jednorodności.

33. Funkcję

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$$

nazywamy *funkcją jednorodną* zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$, jeżeli podstawiwszy za każdą zmienną iloczyn z téjże zmiennéj, przez ilość nieoznaczoną t, wypadek będzie ten sam, jak gdybyśmy pomnożyli funkcję y przez pewną potęgę m ilości nieoznaczonéj t. Warunek aby funkcja y była jednorodną jest więc następujący :

$$f(tx_1, \quad tx_2, \dots \quad tx_n) = t^m f(x_1, \quad x_2, \dots x_n)$$

Wykładnik m, całkowity lub ułamkowy, dodatny, zero, lub odjemny, nazywa się *stopniem jednorodności* funkcji.

Tak naprzykład przekonaliśmy się z łatwością że, funkcje

$$x_1^2 + 2x_1 x_2, \quad \frac{x_1 \sqrt{x_2} + x_2 \sqrt{x_3} \operatorname{wst} \frac{x_3}{x_1}}{x_1 + x_2}, \quad \frac{x_1 + \sqrt{x_1 x_2}}{x_1 + x_3}, \quad \frac{x_1}{x_1^3 - x_2^3}$$

są jednorodnemi : pierwsza stopnia 2go, druga stopnia $\frac{1}{2}$ trzecia stopnia 0, czwarta sotpnia -2.

Z łatwością udowodnić możemy następujących własności funkcyj jednorodnych :

1° Summa algebraiczna kilku funkcyj jednorodnych jednakowego stopnia, jest funkcją jednorodną tegoż stopnia ;

2° Iloczyn kilku funkcyj jednorodnych jakichkolwiek stopni, jest funkcją jednorodną stopnia, równego summie stopni jednorodności czynników ;

3° Iloraz dwóchj funkcy jednorodnych jest funkcją jednorodną stopnia równego różnicy stopnia jednorodności dzielnéj i dzielnika ;

4° Potęga funkcji jednorodnéj, jest funkcją jednorodną stopnia równego iloczynowi wykładnika, przez stopień jednorodności funkcji danéj;

5° Funkcja przestępna funkcji jednorodnéj stopnia 0, jest funkcją jednorodną stopnia 0. Jakoż funkcje

$$\text{wst}\left(\frac{x_1\,x_2}{x_1^2+x_2^2}\right),\qquad \log\left(\frac{x_2+\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_1+x_2}\right)$$

są jednorodnemi stopnia 0; bo podstawiwszy za x_1, tx_1 za x_2, tx_2, ilość t znika w funkcji; możemy więc uważać samą funkcję jako pomnożoną przez 1, czyli przez t z wykładnikiem 0. Lecz gdyby funkcja, któréj funkcja przestępna jest funkcją, nie była stopnia 0, nie moglibyśmy po podstawieniu założyć wypadku równego funkcji danéj przez pewną potęgę t; funkcja przestałaby być jednorodną. Tak funkcja

$$\text{wst}\left(x_1+\sqrt{x_1\,x_2}\right)$$

nie jest jednorodną, jakkolwiek funkcja $x_1+\sqrt{x_1\,x_2}$ jest jednorodną;

6° Wszelka funkcja jednorodna ilukolwiek zmiennych, może być przekształconą na inną funkcję stosunków wszystkich zmiennych do jednéj z nich, pomnożoną przez potęgę jednorodności téjże zmiennéj; lecz wtedy nowa funkcja nie będzie już jednorodną. W saméj rzeczy z założenia

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

t jest nieoznaczoném, możemy więc założyć $t = \frac{1}{x_n}$: podstawiając, otrzymamy:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_n^m f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots 1\right) \quad c.b.d.d.$$

Odwrotnie, jeżeli zachodzi warunek

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_n^m\,\varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \ldots\right)$$

powiadam, że funkcja f jest jednorodną; bo wtedy z założenia

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m x^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \ldots\right)$$

rugując funkcję φ z tych dwóch równań

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2 \ldots x_n) \quad c.\,b.\,d.\,d.$$

Każdą funkcję można więc uczynić jednorodną, wprowadzając nową zmienną, i wyrażając wszystkie zmienne jako stosunki do téj nowéj zmiennéj.

Naprzykład, funkcja wyrażona przez równanie

$$yx^3 - x^2 + y^2 x - 1 = 0$$

nie jest jednorodną; lecz podstawiając $\frac{y}{z}$ za y, $\frac{x}{z}$ za x, otrzymamy:

$$\frac{y}{z} \cdot \frac{x^3}{z^3} - \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} \cdot \frac{x}{z} - 1 = 0$$

czyli

$$yx^3 - x^2 z^2 + y^2 xz - z^4 = 0$$

równanie jednorodne między trzema zmiennémi x, y, z, z których z jest uważaną za zupełnie dowolną.

Wyznaczenie funkcyj, czyniących zadość pewnym warunkom.

34. Mając daną funkcję, wiemy już jak znaleźć pewne jéj własności, jak ciągłość, jednorodność, różnice różnych rzędów, wartości szczególne odpowiadające wartościom szczególnym zmiennéj niezależnéj i t. p. Możemy sobie postawić zadanie odwrotne: *mając dane pewne własności funkcji, wyznaczyć samą funkcję.* Byle własności dane nie były ze sobą w sprzeczności, zadanie to powinno być zawsze podobném do rozwiązania; własności dane mogą wyznaczać w zupełności funkcję, lub pozostawiać jeszcze dowolnemi niektóre warunki, którym funkcja oprócz warunków danych zadość czynić może; w tym ostatnim razie, wyrażenie znalezionéj funkcyj zawiera zwykle tak zwane *ilości dowolne*, które mogą być albo *stałemi dowolnemi* albo *funkcjami dowolnemi* zmiennéj niezależnéj. Funkcja szukana może być wreszcie złożoną z funkcyj prostych znanych poprzednio, lub też wyrażenie jéj przez te funkcje może być niepodobném; w tym ostatnim razie szukać należy innych własności nieznanéj funkcji, oprócz własności jakim funkcja czyni zadość z założenia. Określiwszy dobrze tę funkcją, znalazłszy główniéjsze jéj własności, wprowadzamy ją w szereg funkcyj znanych i używamy jéj na równi z innemi, już poprzednio znanemi.

Tak początkowo algebra daje nam funkcje *summy*, *różnicy*, *iloczynu* i *ilorazu*; wykładniki wprowadzone naprzód jako uproszczenie iloczynów, uogólnionymi zostają następnie i tworzą nową funkcję, *funkcję wykładniczą*. Tak następnie funkcja odwrotna, funkcji wykładniczéj nie dająca się wyrazić przez powyższe, może mieć jednak wszystkie swe własności ściśle określone i jako *funkcja logarytmowa* wchodzi w skład funkcyj znanych. W podobny sposób wprowadzonemi zostają *funkcje trygonometryczne* i im odwrotne, *kołowe*. Te są wszystkie funkcje znane nam z nauk początkowych: jeszcze te ostatnie, któreśmy policzyli do przestępnych, jako nie przedstawiające się w rozwiązaniu równań algebraicznych, nie są dostatecznie uogólnionemi w algebrze i trygonometrji: żadna z powyższych funkcyj nie była określoną dla wartości urojonych, a funkcja logarytmowa nawet dla wartości odjemnych zmiennéj niezależnéj, choć tak ilości odjemne, jak ilości zwane urojonemi, zostały wprowadzonemi właśnie dla uogólnienia wypadków. Zobaczymy poniżéj, jak nietylko uogólnienia powyższe, ale wprowadzenie coraz nowych funkcyj przestępnych, będzie konieczném następstwem czyto badania związków między funkcjami już znanemi, czy też poszukiwania funkcyj czyniących zadosyć pewym warunkom. Tymczasem ograniczymy się na paru przykładach, w których pokażemy, jak szukając pewnych funkcyj, znaleźć możemy funkcje znane nam już poprzednio, i ich niektóre własności.

35. *Znaleźć funkcję* F *taką żeby*

$$F(x).F(y)=F(x+y) \tag{1}$$

t. j. żeby podstawiwszy za jakąkolwiek wartość x *zmiennéj niezależnéj, inną jakokolwiek wartość* y *i pomnożywszy odpowiednie wartości funkcji* F *przez siebie, wypadek był ten sam, co wypadek otrzymany wprost przez podstawienie w funkcję* F *za zmienną niezależną, summy dwóch powyższych wartości.*

Załóżmy

$$y=z+u$$

będziemy mieli

$$F(x).F(z+u)=F(x+z+u)$$

a że z założenia (1) funkcja F jest taką, że

$$F(z+u)=F(z).F(u)$$

będzie, podstawjąc:

$$F(x).F(z).F(u)=F(x+z+u)$$

W podobny sposób postępując, otrzymalibyśmy

$$F(x).F(z).F(v).F(w)\ldots=F(x+z+v+w+\ldots);$$

ponieważ z, v, w ... są nieokreślonémi, możemy założyć

$$x=z=v=w=\ldots$$

otrzymamy, przypuszczając liczbę tych zmiennych m :

(2) $$[F(x)]^m = F(mx)$$

gdzie m jest jakiekolwiek, lecz całkowite i dodatne.

Dla $x = 1$ mamy

$$[F(1)]^m = F(m)$$

F (1) jest stałą; nazwijmy ją a

(3) $$a^m = F(m)$$

Wzór ten ma miéjsce dla wszelkiéj wartości m całkowitéj dodatnéj.

Nadajmy na x w (2) wartość ułamkową $\frac{p}{q}$

$$\left[F\left(\frac{p}{q}\right)\right]^m = F\left(\frac{mp}{q}\right)$$

m jest jakiekolwiek całkowite dodatne; załóżmy $m = q$:

$$\left[F\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = F(p)$$

ztąd

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = [F(p)]^{\frac{1}{q}}$$

W równaniu (3) podstawiwszy za m, całkowitą dodatną p :

$$F(p) = a^p$$

a zatém

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = (a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$$

czyli

(4) $$a^{\frac{p}{q}} = F\left(\frac{p}{q}\right)$$

Nazwawszy więc n jakąkolwiek ilość całkowitą lub ułamkową byle dodatną, mamy na zasadzie (3) i (4)

$$F(n)=a^n$$

Załóżmy teraz w (1) $x=+r$, $y=-r$; mamy

$$F(r).F(-r)=F(r-r)=F(0)$$

Lecz z (5)

$$a^0=F(0)=1$$

więc

$$F(r).F(-r)=1$$

$$F(-r)=\frac{1}{F(r)}$$

Lecz, ponieważ r dodatne, na zasadzie (5)

$$F(r)=a^r$$

czyli

(6) $$F(-r)=a^{-r}$$

Widzimy więc z (5) i (6), że jakąkolwiek ilością rzeczywistą będzie zmienna x, zawsze będziemy mieli

(7) $$F(x)=a^x$$

Funkcja szukana, czyniąca zadosyć warunkowi (1), jest funkcją wykładniczą i nie może być inną. Jakoż, warunek (1) jest znaną własnością funkcyj wykładniczych

$$a^x.a^y=a^{x+y}$$

Ilość a jest stałą dowolną: t. j. gdy za a podstawimy jakąkolwiek ilość niezależną od x, zawsze funkcja (7) czynić będzie zadosyć warunkowi (1).

36. *Znaleźć funkcję taką, żeby różnica pomiędzy funkcją* *summy, a summą funkcyj, była stałą daną* a; t. j. żeby

$$F(x+y)=F(x)+F(y)+a \tag{1}$$

Znajdziemy w podobny sposób jak powyżéj, zakładając $x=y=\ldots$

$$F(mx)=mF(x)+(m-1)a \tag{2}$$

g dzie m oznacza całkowitą dodatną

Założywszy $x=1$

$$F(m)=mF(1)+(m-1)a$$

F (1) jest stałą; nazwijmy ją b :

$$F(m)=mb+(m-1)a \tag{3}$$

a to dla jakiéjkolwiek wartości m całkowitéj, dodatnéj.

Założmy $x=\frac{p}{q}$ w (2)

$$F\left(m\frac{p}{q}\right)=mF\left(\frac{p}{q}\right)+(m-1)a$$

a gdy $m=q$

$$F(p)=qF\left(\frac{p}{q}\right)+(q-1)a$$

ztąd

$$F\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{F(p)}{q}-(q-1)\frac{a}{q}$$

czyli

$$F\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{bp+(p-1)a}{q}-(q-1)\frac{a}{q}=b\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}-1\right)a \tag{4}$$

zważywszy że p całkowite dodatne, że zatém za F(p) podstawić można wartość otrzymaną za pomocą (3).

Nazwawszy n jakąkolwiek ilość dodatną całkowitą lub ułamkową, mamy z (3) i (4)

$$F(n) = bn + (n-1)a = (a+b)n - a \tag{5}$$

Z łatwością, postępując jak powyżéj, rozciągnąć można wzór ten do wartości odjemnych zmiennéj; więc dla jakiéjkolwiek wartości rzeczywistéj x, funkcja czyniąca zadosyć warunkowi (1) jest

$$F(x) = (a+b)x - a \tag{6}$$

co zresztą można sprawdzić z łatwością.

W funkcję tę, oprócz stałéj a, wchodzi stała dowolna b.

37. Interpolacja. Interpolacją nazywamy działanie, mające na celu znalezienie funkcji, któraby dla pewnych danych wartości zmiennéj niezależnéj, przybierała pewne dane wartości. Zadanie to jest w ogólności niewyznaczoném, to jest może mieć nieokreśloną liczbę rozwiązań; staje się wyznaczoném, jeżeli ogólny kształt funkcji szukanéj jest danym, i jeżeli w tym ogólnym kształcie znajduje się co najmniéj tyle stałych dowolnych, ile jest wartości danych funkcji.

Ograniczymy się tu na funkcjach algebraicznych całkowitych. Funkcja całkowita $m$go stopnia

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

zawiera $m+1$ stałych, a_0, $a_1 \ldots a_m$; możemy zawsze wyznaczyć stałe te w taki sposób, żeby dla $m+1$ wartości zmiennéj niezależnéj:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2 \ldots x_m$$

funkcja przybierała $m+1$ wartości danych:

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2 \ldots y_m$$

Podamy na to dwa sposoby: Newtona i Lagrange'a.

Wzór Newtona. Przypuśćmy, że wartości dane zmiennéj niezależnéj, mają różnicę stałą Δx; to jest że wartości te są następujące:

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \Delta x,\quad x_2 = 2\Delta x \ldots\quad x_m = m\Delta x$$

możemy zawsze za pomocą zamiany zmiennéj, przypuścić wartość pierwszą $x_0 = 0$.

Niech będą wartości odpowiednie funkcji szukanéj

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m$$

Mamy, dla jakiegokolwiek n [**16**]

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots\ldots + \Delta^n y_0$$

Możemy napisać również, jakąkolwiek liczbą całkowitą będzie m, byleby $m > n$:

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.\ldots m}\Delta^m y_0$$

zważywszy, że gdy $n < m$ rozwinięcie to i tak się skończy na wyrazie $\Delta^n y_0$, bo spółczynniki wyrazów następujących będą zerami; wzór więc (1) jakkolwiek zawiera $m - n$ niepotrzebnych napozór wyrazów, jest niemniéj prawdziwym.

Podstawmy we wzór powyższy $n = \frac{x}{\Delta x}$ i załóżmy równą y wartość y_n odpowiednią $x = n\Delta x$

$$(2)\qquad y = y_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta y_0 + \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2.} + \ldots$$
$$+ \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\ldots\left(\frac{x}{\Delta x} - m + 1\right)\frac{\Delta^m y_0}{1.2\ldots m}$$

Wielomian ten jest funkcją szukaną; tak Δx jak y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0 \dots \Delta^m y_0$ są dane, lub łatwe do otrzymania z danych wartości $y_0, y_1, y_2 \dots y_m$ [19]; wielomian (2) jest $m$go stopnia co do x dla ostatniego wyrazu; wartości jego dla

$$x=0, \quad x=\Delta x, \quad x=2\Delta x \dots \qquad x=m\Delta x$$

stają się widocznie

$$y_0, \; y_0+\Delta y_0=y_1, \; y_1+\Delta^2 y_0=y_2 \dots \; y_{m-1}+\Delta^m y_0=y^m$$

wielomian (2) nie zawiera przytém żadnéj ilości dowolnéj, jest więc funkcją całkowitą szukaną.

Wzór (2) za pomocą którego przez proste podstawienie znajdujemy funkcję całkowitą stopnia $m$go, przybierającą $m+1$ wartości danych, dla $m+1$ wartości zmiennéj niezależnéj, różniących się każda następująca od poprzedzającéj, o ilość stałą daną, znanym jest pod nazwizkiem *wzoru interpolacyjnego Newtona*.

38. Wzór Lagrange'a. Niech będą wartości szczególne jakiekolwiek zmiennéj niezależnéj x w liczbie $m+1$ dane:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \dots x_m$$

i wartości odpowiednie funkcji szukanéj dane:

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \dots y_m$$

powiadam, że można wyznaczyć spółczynniki $a_m, a_{m-1}, \dots a$ funkcji całkowitéj stopnia $m$go:

$$(1) \qquad y=a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tak, że funkcja y dla powyższych wartości szczególnych zmiennéj niezależnéj, przybierać będzie powyższe wartości szczególne dane.

Jakoż, aby zadość uczynić temu założeniu, winniśmy mieć

$$(2) \quad \begin{cases} y_0 = a_m x_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \\ y_1 = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_m x_m^m + a_{m-1} x_m^{m-1} + \ldots + a_1 x_m + a_0 \end{cases}$$

m równań piewszego stopnia o m nieznanych a_0, a_1, ... a_m. W ogólności, równania te dadzą się rozwiązać co do a_0, a_1, ... a_m i wyznaczają dla tych spółczynników wartości jedyne, oznaczone, zawierające y_0, y_1, ... y_m w pierwszym stopniu. W szczególnym przypadku, gdy rozwiązanie jest nie podobném, lub niewyznaczoném, funkcja szukana y będzie również niemożebną, lub niewyznaczoną. Roztrząsanie tych szczególnych przypadków sprowadzoném jest do teorji równań 1go stopnia o wielu nieznanych.

Ograniczając się na przypadku ogólnym, przypuśćmy żeśmy znaleźli z (2) wartości a_0, a_1, ... a_m wyrażone przez x_0, x_1, ... x_m i y_0, y_1, ... y_m; te ostatnie znajdować się będą w pierwszym stopniu w każdém z wyrażeń na a_0, a_1, ... a_m; podstawiając je w (1) i łącząc wyrazy zawierające y_0, y_1, ... y_m, możemy napisać :

$$(3) \qquad y = p_0 y_0 + p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_m y_m$$

p_0, p_1, ... p_m zawierają x_0, x_1 ... x_m jakoteż x w $m$tym $m-1$ym ... stopniu, z równania (1), lecz nie zawierają y_0, y_1,... y_m. Zakładając $x = x_0$ winniśmy mieć $y = y_0$ z założenia, a zatém :

$$p_0 = 1 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \ \ldots \ p_m = 0, \quad \text{dla } x = x_0$$

zważywszy że y_0, y_1,... y_m są od siebie niezależnemi. Zakładając $x = x_1$, winniśmy mieć $y = y_1$, a zatém

$$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad p_2 = 0 \ldots \ p_m = 0, \quad \text{dla } x = x_1$$

i tak daléj:

$$p_0 = 0 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = 0 \ldots \quad p_m = 1, \quad \text{dla } x = x_m.$$

Funkcja p_0, która jest $m$go stopnia co do x, i staje się zerem dla m wartości szczególnych x, mianowicie: x_0, $x_2 \ldots x_m$ winna być następującego kształtu

$$p_0 = A(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

gdzie A jest spółczynnikiem liczebnym niezależnym od x; dla wyznaczenia tego spółczynnika, zauważmy że dla $x = x_0$, $p_0 = 1$; a więc

$$1 = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_m)$$

ztąd

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_m)}$$

a więc podstawiając

$$p_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_m)}$$

W podobny sposób otrzymamy

$$p_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_m)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_m = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \ldots (x_m - x_{m-1})}$$

podstawiając wartości te w (3) otrzymamy

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_m)} y_0 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_m)} y_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \ldots (x_m - x_{m-1})} y_m \end{aligned} \right.$$

Funkcja ta jest funkcją szukaną : w rzeczy saméj, dla każdéj szczególnéj wartości $x=x_0$, $x=x_1$ ... $x=x_m$ wszystkie spółczynniki ułamkowe y_0, y_1 ... y_m w jéj rozwinięciu stają się zerami z wyjątkiem tego, któren właśnie jest spółczynikiem odpowiedniéj wartości szczególnéj y : spółczynnik ten jest równym jedności, a zatém funkcja y równa téj wartości szczególnéj. Funkcja jest nadto całkowitą stopnia m co do x, i nie zawiera żadnéj ilości dowolnéj.

Nie ma innéj funkcji całkowitéj $m$go stopnia, którąby zadość uczyniła warunkom danym; bo gdyby funkcja taka istniała pod postacią

$$y=a'_m x^m+a'_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a'_0$$

biorąc różnicę tego wyrażenia i wyrażenia (1)

$$0=(a_m-a'_m)x^m+(a_{m-1}-a'_{m-1})x^{m-1}+\ldots+(a_0-a'_0)$$

otrzymalibyśmy równanie, któremu z założenia zadosyćby uczynić można było $m+1$ wartościami x : x_0, $x_1 \ldots x_m$; co jest niemożebném, bo równanie $m$go stopnia może mieć tylko m pierwiastków; chyba jeżeli $a_0=a'_0$, ... $a_m=a'_m$.

Wzór (4) znany pod nazwiskiem *wzoru Lagrange'a* z łatwością z pamięci wypisanym być może, uważając że rozwinięcie funkcji szukanéj składa się z $m+1$ wyrazów; każdy wyraz jest pomnożonym przez jednę z danych $m+1$ wartości szczególnych funkcji y, któréj spółczynnikiem jest ułamek, mający za licznik, iloczyn m czynników będących różnicami x i m z pomiędzy $m+1$ wartości szczególnych x danych, z wyjątkiem téj, która odpowiada właśnie w tym wyrazie znajdującéj się wartości y, a za mianownik wypadek z podstawienia w liczniku za x, wartości szczególnéj x, która się nie znajduje w liczniku.

Wzór Lagrange'a ma tę zaletę, że wartości dane zmiennéj niezależnéj nie potrzebują mieć różnic stałych, jak we wzorze Newtona, a mogą być jakiemikolwiek.

PRZYKŁAD. *Znaleźć funkcję całkowitą* y, *którąby dla wartości szczególnych* 1, 2, 3, 4,*zmiennéj niezależnéj* x, *przybierała wartości szczególne* 6, 8, 10, 12.

Podstawiając we wzorze (4)

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = x_m = 4$$
$$y_0 = 6 \quad y_1 = 8 \quad y_2 = 10 \quad y_3 = y_m = 12$$

otrzymamy

$$y = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\,6 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}\cdot 8$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\,10 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}\cdot 12$$

funkcja ta jest trzeciego stopnia i żadna inna funkcja całkowita nie może czynić zadość powyższym warunkom (jakeśmy to dopiero co udowodnili).

Nie wykonywamy działań, bo postać pod jaką nam się powyższa funkcja przedstawia, jest bardzo dogodną do obliczenia innych jéj szczególnych wartości : dość jest podstawić za x daną wartość szczególną zmiennéj niezależnéj. Nadto, wzór ten składając się z iloczynów, jest dogodnym do liczenia przez logarytmy.

UWAGA. Wiemy, że wszelka funkcja całkowita $m$go stopnia, która staje się zerem dla $m+1$ szczególnych wartości zmiennéj niezależnéj, jest równą zeru dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj : w przeciwnym bowiem razie wyrazićby się mogła przez iloczyn

$$(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m)$$

z $m+1$ czynników zawierających x i byłaby $m+1$go stopnia.

Założmy we wzorze (4)

$$y_0 = y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 1$$

funkcja $y - 1$ staje się w tym przypadku zerem, dla $m+1$ wartości szczególnych x, odpowiadających powyższym wartościom y: zatém y równa się jedności, dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj : a więc

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)}+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}=1$$

summa spółczynników ułamkowych we wzorze Lagrange'a równa est iedności, dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj.

ROZDZIAŁ II

PRZEDSTAWIENIE GEOMETRYCZNE FUNKCYJ (1)

Funkcje jednéj zmiennéj niezależnéj. — Różne układy spółrzędnych na płaszczyźnie. — Spółrzędne prostolinijne. — Spółrzędne biegunowe. — Spółrzędne trzylinijne. — Zmiana spółrzędnych. — Jednorodność. — Funkcje dwóch zmiennych niezależnych. — Przedstawienie funkcyj linijnych; płaszczyzna, prosta w przestrzeni. — Przedstawienie funkcji 2go stopnia dwóch zmiennych niezależnych. — Różne układy spółrzędnych w przestrzeni. — Przykłady.

Funkcje jednéj zmiennéj niezależnéj.

39. Powiedzieliśmy na wstępie [**1**], że ilości wyrażają wypadek porównania wielkości matematycznéj z pewną jednością. Jedność ta, tego samego rodzaju co wielkość uważana, może być zresztą jakąkolwiek. Jednym z najwydatniéjszych sposobów przedstawienia sobie jedności jest przedstawienie jéj, jako linji prostéj ograniczonéj, odnosząc wielkości uważane do téj obranéj jedności linijnéj. Geometrja daje nam sposoby kreślenia wszelkich wielokrotności całkowitych lub ułamkowych, a nawet *niewymiernych* (to jest niedających się wyrazić przez liczby całkowite lub ułamkowe) danéj jedności linijnéj.

Algebra, wprowadzając ilości odjemne, daje nam sposób ich przedstawienia geometrycznego na zasadzie umowy, polegającéj na odcinaniu ilości dodatnych na prostéj nieograniczonéj w pewnym przyjętym kierunku, a ilości odjemnych

(1) Rozdział ten streszcza w sobie wiadomości z geometrji analitycznéj niezbędne do zastosowań i przykładów podanych w dalszym ciągu dzieła.

w kierunku wprost przeciwnym. Ta umowa daje nam możność otrzymania summy algebraicznéj danych wielkości linijnych, nawet w razie gdyby summa ta była odjemną. Chcąc naprzykład przedstawić geometrycznie summę algebraiczną

$$a + b - c$$

bierzemy na linji nieograniczonéj od pewnego punktu O jako *początku* (fig 1.) długość OA $= a$ w pewnym kierunku np. od ręki lewéj ku prawéj, następnie w tym samym kierunku długość AB $= b$, nakonicc w kierunku przeciwnym t. j. od ręki prawéj ku lewéj długość BC $= c$

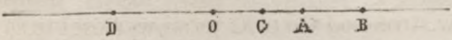


fig. 1.

a summa otrzymana będzie

$$OC = OA + AB - BC = a + b - c$$

w tym razie dodatną, bo punkt C leży po prawéj stronie punktu O. Lecz gdybyśmy mieli

$$a + b - c - d$$

odciąwszy długość CD $= d$ ciągle od prawéj ku lewéj, otrzymalibyśmy summę

$$OD = a + b - c - d$$

odjemną, bo punkt D znajduje się po lewéj stronie punktu O.

40. Funkcję daną

(1) $$y = f(x)$$

możemy również przedstawić geometrycznie na zasadzie pewnéj umowy. Nakreślmy na płaszczyznie dwie proste XX_1, YY_1 (fig. 2) przecinające się z sobą, które nazywa-

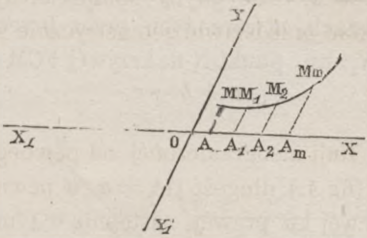


fig. 2.

my *osiami*. Od punktu ich przecięcia się O jako początku, odcinamy na linji XX_1 wartości szczególne zmiennéj niezależnéj x, w stronę od O ku X, jeżeli wartości te są dodatne, w stronę od O ku X_1, jeżeli wartości te są odjemnemi :

$$x_1 = O\,A_1 \quad x_2 = O\,A_2 \ldots \quad x_m = O\,A_m$$

z punktów A_1, A_2... A_m prowadzimy równoległe do osi OY, i na tych równoległych odcinamy wartości szczególne odpowiednie funkcji

$$y_1 = A_1\,M_1 \quad y_2 = A_2\,M_2 \ldots \quad y_m = A_m\,M_m$$

w stronę od O ku Y jeżeli wartości te są dodatnemi, w stronę od O ku Y_1 jeżeli wartości te są odjemnemi : otrzymamy w ten sposób szereg punktów M_1, M_2 ... M_m, wyznaczonych wielkościami linijnemi OA_1, $A_1\,M_1$; OA_2, $A_2\,M_2$; ... OA_m, $A_m\,M_m$ które nazywamy *spółrzędnemi* tych punktów, a mianowicie pierwsze *odciętemi*, na osi XX_1 drugie *rzędnemi*, równoległe do osi YY_1. Jeżeli punkt A posuwać się będzie od O ku X przechodząc przez A_1, A_2 ... A_m i przez punkta pośrednie, punkt M zakreślać będzie w ogólności krzywą M M_m przechodzącą przez punkta M_1, M_2 ... M_m : powiadamy, że krzywa ta, którą nazywamy *miéjscem geometryczném* punktu M, *przedstawia geome-*

trycznie funkcję (1), bo własności funkcji są ściśle związanemi z własnościami krzywéj.

Krzywa może przechodzić przez punkta znajdujące się w czterech kątach, utworzonych przez przecięcie się osi XX_1 z osią YY_1; np. punkt N na krzywéj FCM (fig. 3) odpo-

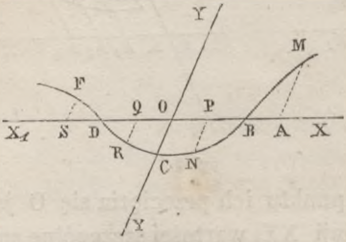


fig. 3.

wiada wartości funkcji PN odjemnéj, odpowiadającéj wartości zmiennéj niezależnéj OP dodatnéj; punkt R wartości odjemnéj RQ, odpowiadającéj wartości odjemnéj OQ; punkt F wartości dodatnéj SF funkcji, odpowiadającéj wartości OS odjemnéj zmiennéj niezależnéj. Punkta B, D, gdzie krzywa przecina oś odciętych, odpowiadają wartościom OB, OD zmiennéj niezależnéj, dla których funkcja staje się zerem: otrzymamy je więc, rozwiązując równanie (1) co do x, założywszy w niém poprzednio $y = 0$ t. j. równanie

$$0 = f(x)$$

wartości x z tego równania dadzą OB i OD. Punkt C odpowiada wartości odjemnéj OC funkcji, odpowiadającéj wartości $x = 0$ zmiennéj niezależnéj; czyli z równania (1):

$$OC = f(o)$$

41. Nadając zmiennéj x przyrostki (fig. 4)

$$A_0 A_1 = \Delta x_1 \qquad A_1 A_2 = \Delta x_2 \ldots$$

otrzymamy przyrostki odpowiednie czyli różnice pierwsze

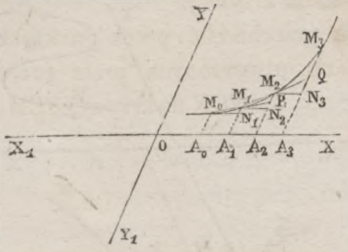


fig. 4.

funkcji [13] wyrażone przez

$$M_1N_1 = \Delta y_1 \quad M_2N_2 = \Delta y_2 \ldots$$

przyrostki zmiennéj niezależnéj bierzemy zwykle równemi

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = \Delta x$$

różnice drugie wyrażonemi będą przez

$$\Delta^2 y_1 = M_2P = M_2N_2 - M_1N_1, \quad \Delta^2 y_2 = M_3Q = M_3N_3 - M_2N_2 \ldots$$

gdzie punkta P, Q... otrzymujemy przedłużając cięciwy M_0M_1, M_1M_2... aż do przecięcia się z rzędnemi A_2M_2 A_3M_3... następującemi.

Jeżeli różnice drugie są zerami, punkta M_0, M_1, M_2 M_3... znajdują się na jednéj linji prostéj : bo gdy $M_2P = 0$, punkt M_2 przypada w punkcie P, na przedłużeniu prostéj M_0M_1; gdy $M_3Q = 0$, punkt M_3 przypada w punkcie Q na dalszém przedłużeniu téjże prostéj i t. d.

42. Jeżeli jednéj wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj odpowiadają dwie, lub więcéj wartości funkcji, rzędna wyprowadzona dla odpowiednéj odciętéj, przecina krzywą w dwóch, lub więcéj punktach (fig. 5).

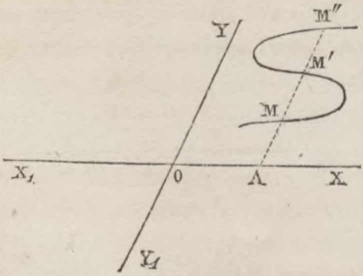


fig. 5.

Jeżeli funkcja jest ciągłą [**25**] krzywa przedstawiająca funkcję jest nieprzerwaną: lecz jeżeli ciągłość funkcji zostaje przerwaną, krzywa zostaje również przerwaną: tak dla $x = OA$ (fig. 6) rzędna przechodzi nagle z wartości AN do wartości

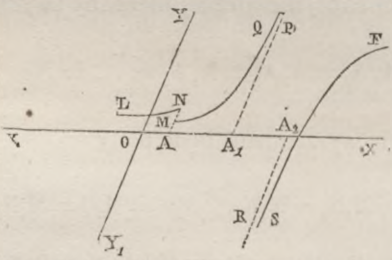


fig. 6.

AM; dla $x = OA_1$ rzędna A_1P spotyka krzywą MQ w odległości nieskończenie wielkiéj, w stronie rzędnych dodatnych; dla x zawartego pomiędzy OA_1 a OA_2 rzędna wcale nie spotyka krzywéj; dla $x = OA_2$ rzędna A_2R spotyka krzywą w odległości nieskończenie wielkiéj w stronie odjemnéj: dla wszystkich tych wartości zmiennéj niezależnéj, ciągłość funkcji zostaje zerwaną, również jak ciągłość krzywéj.

43 Jeżeli krzywa przedstawia funkcję

$$y = f(x) \tag{1}$$

odwrotnie, równanie (1) nazywamy *równaniem krzywéj*. W ogólności, ponieważ funkcja może być niewyraźną, równanie krzywéj przedstawia się pod kształtem

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

Wykreślić funkcję, jestto wykreślić krzywę przedstawiającą tę funkcję. *Znalezienie równania krzywéj*, znając pewne jéj własności, odpowiada wyznaczeniu funkcji czyniącéj zadosyć pewnym warunkom [34].

Krzywe nazywamy *algebraicznemi* lub *przestępnemi*, od funkcyj, jakie te krzywe przedstawiają: podobnież mówimy, krzywe 1go, 2go... *n*go stopnia, jeżeli równania tych krzywych są równaniami 1go, 2go... *n*go stopnia o dwóch niezanych. Zmiennéj niezależnéj nadawać tu będziemy tylko wartości rzeczywiste; w razie, gdyby wartości zmiennéj rzeczywistéj odpowiadała wartość funkcji urojona, uważać będziemy, że dla téj wartości ciągłość funkcji jest zerwaną geometrycznie, że gdy dla téj wartości odciętéj wystawimy rzędną, rzędna nie spotka krzywéj, jak między A_1 a A_2 (fig. 6).

W dalszym ciągu zobaczymy, jak przedstawienie geometryczne funkcji rozciągnąć można i do wartości urojonych, jakie funkcja przybrać może, dla wartości rzeczywistych lub urojonych zmiennéj niezależnéj.

44. Funkcja jednéj zmiennéj niezależnéj może być daną przez dwa równania pomiędzy trzema zmiennemi x, y, t

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

z których możemy otrzymać, rozwiązując co do x i y

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{2}$$

przyczém uważamy t za zmienną niezależną; nadając na t różne wartości, (2) da nam wartości odpowiednie x i y.

Geometrycznie, uważając ciągle x za odciętą, y za rzędną, krzywa przedstawiająca układ (1), będzie wykreśloną za pomocą (2), nadając na t dowolne wartości i otrzymując wartości odpowiednie na odciętą x i zmienną y z (2). Zresztą, rugując t pomiędzy dwoma równaniami (1), sprowadzimy tę postać, do uważanéj poprzednio [43].

45. Przykład I. *Wykreślić funkcję algebraiczną piewszego stopnia daną przez równanie*

$$(1) \qquad ax + by + c = 0$$

Ponieważ przyrostek funkcji y jest stałym, dla przyrostku stałego zmiennéj niezależnéj x [18], różnice drugie są zerami, a więc wszystkie punkta odpowiadające wartościom szczególnym x i y znajdują się na jednéj prostéj [41]. Linja przedstawiająca funkcję (1) jest więc linją prostą: y wyznaczone przez równanie (1) nazywamy dla tego *funkcją linijną*.

Aby wykreślić tę prostą, (fig. 7) dość jest znaleźć dwa jéj punkta:

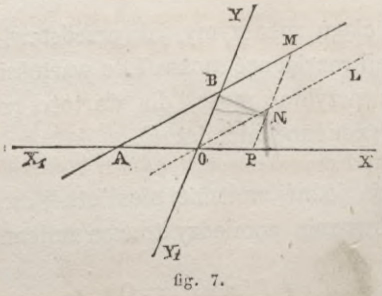


fig. 7.

najłatwiéj jest znaleźć punkt A przecięcia się prostéj z osią XX_1, który otrzymamy [40] zakładając w równaniu (1) $y = 0$, co nam da

$$x = AO = -\frac{c}{a}$$

i punkt B przecięcia się prostéj z osią YY_1, który otrzymamy zakładając w równaniu (1) $x = 0$, co nam da

$$y = OB = -\frac{c}{b}$$

Rozwiązując równanie (1) co do y, aby uczynić funkcję wyraźną otrzymamy :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

czyli, nazywając przez skrócenie $-\frac{a}{b} = m$, $-\frac{c}{b} = n$

(2) $$y = mx + n$$

gdzie n oznacza OB, odległość przecięcia się prostéj z osią YY_1 od początku. Jeżeli przez początek poprowadzimy równoległą OL do AB, aby otrzymać rzędną NP téj równoległéj odpowiadającą pewnéj odciętéj OP, dość jest zmniéjszyć rzędną MP prostéj AB, odpowiadającéj téjże odciętéj, o ilość stałą $MN = OB = n$: równanie więc prostéj OL otrzymamy z (2), odéjmując od y stałą n; równanie to będzie

(3) $$y = mx \quad \text{czyli} \quad \frac{y}{x} = m$$

Stała m wyraża więc stosunek rzędnéj do odciętéj prostéj przechodzącéj przez początek, równoległéj do prostéj danéj przez równanie (2) : stała ta wyznacza więc kąt jaki prosta dana tworzy z osią XX_1, nazywamy ją dla tego *spółczynnikiem kątowym*.

Spółczynnik kątowy m wyraża *stosunek wstaw kątów, jakie prosta dana tworzy z osią odciętych i z osią rzędnych* : w rzeczy saméj, na zasadzie (3)

$$m = \frac{NP}{OP} = \frac{\text{wst NOP}}{\text{wst ONP}} = \frac{\text{wst MAP}}{\text{wst AMP}}$$

W razie spółrzędnych prostokątnych, (fig. 8) gdy $YOX = 90°$, kąty MAP,

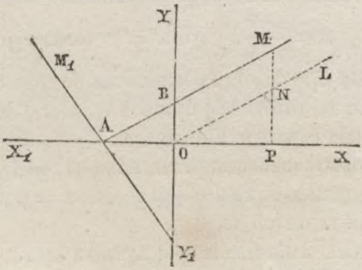


fig. 8.

AMP są dopełniającémi, a więc spółczynnik kątowy

$$m = \frac{\text{wst MAP}}{\text{dos MAP}} = \text{st MAP}$$

jest *styczną trygonometryczną kąta, jaki prosta tworzy z osią odciętych*, co do wartości i znaku, licząc kąt ten od strony odciętych dodatnych ku stronie rzędnych dodatnych : np. w położeniu prostéj AM_1, stała m jest odjemną, równą stycznéj kąta rozwartegtego XAM_1.

Odwrotnie wszelka prosta wyraża funkcję linijną, bo przyrostki jéj rzędnych są stałemi, dla przyrostków stałych zmiennéj niezależnéj, a funkcja która ma różnice stałe dla różnic stałych zmiennéj niezależnéj, jest algebraiczną pierwszego stopnia [18].

W szczególnych przypadkach funkcji danéj przez równanie (1), widzimy z łatwością że :

1° Gdy $a = 0$, funkcja $y = -\frac{c}{b}$, czyli $y = n$ przedstawioną jest (fig. 9) przez prostą LP lub L'P' (stosownie do tego, czy n jest do-

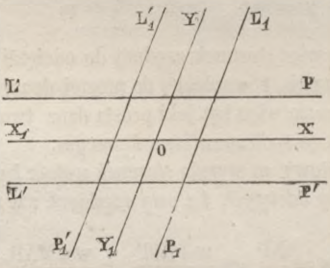


fig. 9.

datném lub odjemném) równoległą do osi odciętych XX_1, któréj wszystkie rzędne mają wartość stałą n, i odwrotnie.

2° Gdy $b = 0$, $x = -\frac{c}{a}$, czyli $x = p$ (oznaczjąc $-\frac{c}{a} = p$) przedstawia prostą L_1P_1 lub $L_1'P_1'$ (stosownie do tego czy stała p jest dodatną lub odjemną) równoległą do osi YY_1, któréj jakakolwiek rzędna ma odciętą stałą równą p, i odwrotnie.

3° $y = 0$ przedstawioném jest przez samą oś odciętych XX_1, dla któréj wszystkich punktów, rzędna jest zerem; $x = 0$ przedstawionem jest przez samą oś rzędnych YY_1.

Widzimy również z określenia spółczynnika kątowego m, że dwie proste równoległe, tworząc kąty równe z osiami spółrzędnych, mają spółczynniki kątowe równe $m = m'$; że w razie układu spółrzędnych prostokątnych dwie proste AB, CD, tworzące ze sobą kąt (fig. 10).

$$\mu = \mathrm{BED} = \mathrm{DCX} - \mathrm{BAX}$$

mają spółczynniki kątowe

$$m = \mathrm{st\,DCX} \qquad m' = \mathrm{st\,BAX}$$

a więc

$$\mathrm{st}\,\mu = \frac{m' - m}{1 + m'm}$$

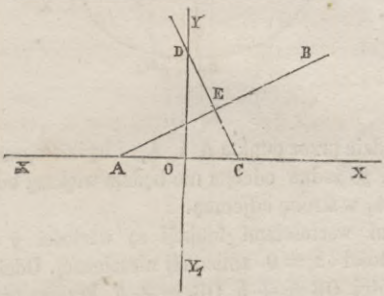


fig. 10.

Jeżeli proste są prostopadłemi,

$$\mu = 90^0 \qquad \mathrm{st}\,\mu = \infty \qquad \text{a więc} \quad 1 + m'm = 0$$

przypuszczając, że żadna z prostych nie jest równoległą do osi: zatem w razie spółrzędnych prostokątnych

$$m = -\frac{1}{m'}$$

spółczynniki kątowe dwóch prostych prostopadłych są odwrotnemi jeden drugiemu i znaków przeciwnych. Twierdzenie to ma miéjsce nawet dla prostych równoległych do osi : bo wtedy jeden z tych spółczynników jest zerem, drugi nieskończonością.

46. Przykład II. *Wykreślić funkcję daną przez równanie*

$$(1) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Rozwiązując co do y, aby uczynić funkcję wyraźną, otrzymamy;

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

Zmienna niezależna x może przybierać tylko wartości zawarte pomiędzy $+a$ i $-a$, aby wartości y były rzeczywistemi; dla $x = \pm a$ wartość $y = 0$. Odciąwszy więc (fig. 11) $OA = +a$ $OA_1 = -a$, krzywa

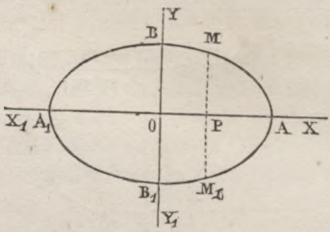


fig. 11.

przechodzić będzie przez punkta A i A_1, i będzie ograniczoną w tych punktach; t. j. że żadna odcięta nie będzie większą od OA w stronę dodatną, od OA_1 w stronę odjemną.

Największemi wartościami funkcji są wartości $y = \pm b$ odpowiadające wartości $x = 0$ zmiennéj niezależnéj. Odciąwszy więc na osi YY_1 wartości $OB = +b$ $OB_1 = -b$, krzywa przechodzić będzie przez punkta B, B_1 i żadna rzędna nie będzie większą od OB w stronę dodatną, od OB_1 w stronę odjemną.

Funkcja (2) jest ciągłą dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj, zawartych pomiędzy $+a$ i $-a$: krzywa więc nie jest przerwaną w żadnym punkcie, a że jest ograniczoną w punktach A, B, A_1, B_1, więc jest krzywą zamkniętą.

Każdéj wartości zmiennéj niezależnéj x odpowiadają dwie wartości rzędnéj y, równe i znaków przeciwnych: każdéj odciętéj OP odpowiadają więc dwie rzędne PM_1 PM' równe i znaków przeciwnych: krzywa jest symetryczną względem osi XX_1. Podobnież, rozwiązując równanie (1) co do x, zobaczylibyśmy, że każdéj rzędnéj odpowiadają dwie odcięte równe i znaków przeciwnych: krzywa więc jest również symetryczną co do osi YY_1.

Krzywa ta jest *elipsą*; $AA_1 = 2a$, $BB_1 = 2b$ są jéj *średnicami*, a w razie ich prostopadłości, *osiami*. W szczególnym przypadku, jeżeli $a = b$ a spółrzędne obierzemy prostokątne, równanie (1)

$$y^2 + x^2 = a^2$$

przedstawia *koło*, którego promieniem jest a.

47. Przykład III. *Wykreślić funkcję daną przez równanie,*

(1) $$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

Rozwiązuiąc co do y, aby uczynić fynkcję wyraźną otrzymamy :

(2) $$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Dla x zawartego pomiędzy $+a$ a $-a$, y jest urojoném : odciąwszy na osi XX_1 odległości $OA = +a$, $OA_1 = -a$ (fig. 12) rzędne wy-

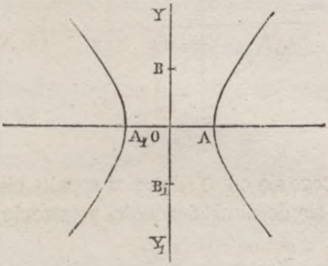


fig. 12.

prowadzone dla odciętych mniéjszych od OA w stronę dodatną, lub od OA_1 w stronę odjemną, nie spotykają krzywéj. Oś YY_1 nie spotyka również krzywéj, bo dla $x = 0$ wartość y jest urojoną.

Dla wartości zmiennéj niezależnéj x dodatnych, od $+a$ do nieskończoności, i odjemnych od $-a$ do nieskończonności odjemnéj, funkcja zmienia się w sposób ciągły, od 0 do nieskończoności dodatnéj i odjemnéj w obu razach : krzywa więc składa się z dwóch gałęzi ciągłych, przecinających oś XX_1 w odległościach $+a = OA$ i $-a = OA_1$ od początku, i rozciągających się do nieskończoności w stronę dodatną i odjemną.

Dla każdéj wartości x, otrzymamy z (2) dwie wartości równe i znaków przeciwnych y : krzywa więc jest symetryczną względem osi XX_1. Wartości y są te same, czy weźmiemy x dodatném, czy odjemném : dwie gałęzie krzywéj są więc sobie równe.

Krzywa ta jest *hyperbolą* : w razie spółrzędnych prostokątnych $AA_1 = 2a$ jest jéj *osią ogniskową* (rzeczywistą), zaś $BB_1 = 2b$ *osią nieogniskową* (urojoną) nie spotykającą krzywéj.

48. Przykład IV. *Wykreślić funkcję daną przez równanie*

(1) $$y^2 = 2px$$

gdzie p przypuszczamy stałą dodatną. Funkcja wyraźna będzie

$$y = \pm \sqrt{2px}$$

Dla $x = 0$, $y = 0$; krzywa przechodzi przez początek O (fig. 13).

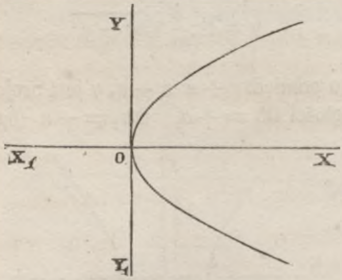


fig. 13.

Dla x zmieniającego się od 0 do ∞ w sposób ciągły, krzywa jest ciągłą, i rozciąga się do nieskończoności po stronie odciętych dodatnych.

Dla wartości x odjemnych, y jest urojoném : krzywa nie przechodzi wcale na stronę odciętych odjemnych.

Dla każdéj wartości x funkcja ma dwie wartości równe i znaków przeciwnych : krzywa jest symetryczną względem osi XX_1.

Krzywa ta jest *parabolą*, $2p$ jéj *parametrem*.

49 Przykład v. *Wykreślić funkcję*

$$y = \text{wst}\, x$$

Dla $x = 0$, $y = 0$: krzywa przechodzi przez początek O (fig. 14).

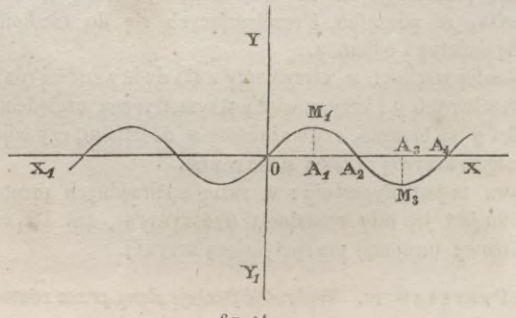


fig. 14.

Gdy x zwiększa się od 0 do $\frac{\pi}{2}$, funkcja zwiększa się od 0 do 1 : odcinając $OA_1 = \frac{\pi}{2}$ rzędna $A_1M_1 = 1$.

Gdy x zwiększa się daléj od $\frac{\pi}{2}$ do π, funkcja zmniéjsza się od 1 do 0, krzywa przecina oś OX_1 w odległości $OA_2 = 2OA_1 = \pi$.

Gdy x zwiększa się po za wartość π, funcja nie przestając być ciągłą, staje się odjemną i przybiera te same wartości co poprzednio, lecz ze znakiem przeciwnym : krzywa ma część swą $A_2\ M_3\ A_4$ równą części $OM_1\ A_2$ lecz położoną po stronie rzędnych odjemnych ; $OA_3 = \frac{3\pi}{2}$; $OA_4 = 2\pi$ i t. d., krzywa rozciąga się do nieskończoności, w stronę odciętych dodatnych, idąc na przemian po stronie rzędnych dodatnych i odjemnych.

Gdy x zwiększa się odjemnie od 0 do $-\frac{\pi}{2}$, y zwiększa się odjemnie od 0 do -1 ; dla $x = -\pi$, $y = 0$ i t. d., krzywa rozciąga się w stronę odciętych odjemnych, w podobny, sposób jak w stronę dodatnych, lech jest odwrotnie położoną.

Funkcja dana jest ciągłą dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj; krzywa więc jest także ciągłą i rozciąga się do nieskończoności. Funkcja jest okresową [**11**], krzywa więc składa się z nieskończonéj liczby części równych i przecina oś XX_1 w nieskończonéj liczbie punktów, odpowiadających odciętym dodatnym

$$0, \quad \pi, \quad 2\pi, \ldots n\pi \ldots$$

i odciętym odjemnym

$$-\pi, \quad -2\pi, \ldots -n\pi \ldots$$

50. Przykład vi. *Wykreślić funkcję*

$$y = \mathrm{st}\, x$$

Gdy

$$x = 0 \quad y = 0$$

krzywa przechodzi przez początek (fig. 15).

Gdy

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{2n+1}{2}\pi \ldots$$

funkcja $y = \infty$ przestaje być ciągłą, dla tych wartości zmiennéj niezależnéj, jak również dla wartości odjemnych

$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \ldots \quad \frac{2n+1}{2}\pi \ldots$$

Pomiędzy temi wartościami funkcja jest ciągłą, a gdy zmienna niezależna przechodzi przez przez jedną z powyższych wartości, funkcja z bardzo wielkiéj dodatnéj przeskakuje w bardzo wielką odjemną wartość.

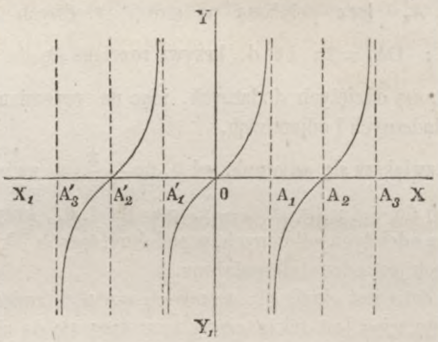


fig. 15.

Biorąc

$$0A_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 \ldots = \frac{\pi}{2} = 0A'_1 = A'_1 A'_2 = \ldots$$

i wystawiając w punktach A_1, A_2... A_1... rzędne te nie spotykają krzywéj, chyba w odległości nieskończenie wielkiéj t. j. są jéj *assymptotami* : krzywa składa się z nieskończenie wielkiéj liczby gałęzi równych, rozciągających się do nieskończoności w stronę rzędnych dodatnych i odjemnych, i nie spotykających się z sobą.

Każda z tych gałęzi jest ciągłą i spotyka oś XX_2 w punkt 0, A_2, A'_2...

51. Przykład VII. *Wykreślić funkcję*

$$y = \text{łuk wst } x$$

Funkcja ta jest odwrotną funkcji uważanéj w przykładzie V (fig. 14). przedstawia ją również, zastępując tylko oś XX_1 przez oś YY_1 i odwrotnie.

52. Wartości wspólne dwóm funkcjom. Przecięcia się linij pomiędzy sobą. Mając dwie funkcje

$$(1) \qquad F(x,y)=o$$
$$(2) \qquad f(x,y)=o$$

można szukać, dla jakich wartości szczególnych zmiennéj niezależnéj dwie te funkcje przybierają wartości szczególne równe. Jestto to samo, co szukać wartości zadość czyniących dwóm równaniom o dwóch nieznanych. Jeżeli np. obiedwie funkcje są linijne

$$(3) \qquad ax+by+c=o$$
$$(4) \qquad a'x+b'y+c'=o$$

dla wartości zmiennéj niezależnéj

$$(5) \qquad x_0=\frac{c'b-cb'}{ab'-a'b}$$

obiedwie funkcje przybierają tę samą wartość

$$(6) \qquad y_0=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

wartość ta wspólna jest tylko jedna, lub nie istnieje wcale jeżeli $ab'=a'b$, a liczniki (5) i (6) nie stają się zerami; jeżeli i liczniki i mianowniki wyrażeń (5) i (6) stają się zerami, $a=a'$ $b=b'$ $c=c'$ funkcje mają wszystkie wartości wspólne. W razie gdy jedna z funkcji jest algebraiczną $m$go stopnia, a druga $n$go stopnia, może istnieć $m.n$ takich wspólnych wartości, bo rugowanie sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego $m.n$go stopnia; może istnieć mniéj, bo niektóre z pierwiastków tego równania mogą być urojonemi.

Geometrycznie, wartości wspólne dwóch funkcyj, dla tych samych wartości zmiennéj niezależnéj, odpowiadają punktom przecięcia się linij pomiędzy sobą.

I tak dwie proste (fig. 16) LP, L'P' przedstawiające funk-

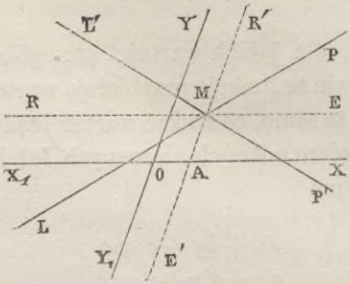


fig. 16.

cje (3) i (4) przecinają się w punkcie M, którego spółrzędne

$$OA = x_0 = \frac{c'b - cb'}{ab' - a'b} \qquad AM = y_0 = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$$

Jeżeli $ab' = a'b$ proste są równoległe, punkt przecięcia nie istnieje. Równania (3) i (4) razem wzięte przedstawiają punkt M. Równania te nazywamy wtedy *równaniami punktu* M.

Prosta może przecinać krzywę 2go stopnia w dwóch tylko punktach, krzywą algebraiczną *m*go stopnia najwięcéj w *m* punktach; dwie krzywe 2go stopnia mogąsię przecinać najwięcéj w 4ech punktach i t. p.

Ażeby punkt, którego równaniami są

(7) $$x = p \qquad y = q$$

znajdował się na krzywéj

(8) $$f(y, x) = 0$$

warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby wartości szczególne (7) czyniły zadosyć równaniu (8).

53. Różne układy spółrzędnych. Jedną i tę samą funkcję można przedstawić geometrycznie w rozmaity sposób. Krzywa przedstawiająca pewną funkcję już będzie miała kształt odmienny, jeżeli zmienimy nachylenie osi spółrzędnych.

Tak krzywa przedstawiająca funkcję

$$y = \operatorname{wst} x$$

ma kształt (fig. 14) biorąc osie prostopadłe; jeżeli osie będą pochylone kształt ten będzie (fig. 17) :

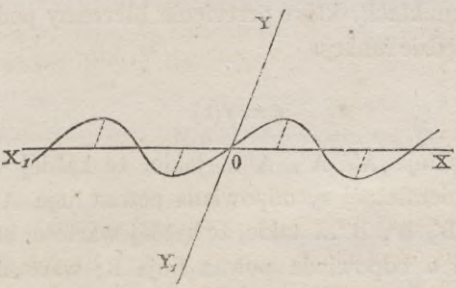


fig. 17.

Odwrotnie, jedna i ta sama krzywa wyrażoną jest przez odmienne równanie, jeżeli odmienimy kąt, jaki osie spółrzędnych tworzą pomiędzy sobą, lub punkt w którym się osie te przecinają.

Oprócz układów spółrzędnych powyższego rodzaju, różniących się położeniem początku i nachyleniem osi, mogą być jeszcze układy spółrzędnych najrozmaitszych rodzajów. W ogólności, punkt na płaszczyznie wyznaczonym być może przez przecięcie się dwóch linji prostych, lub krzywych.

Niech będzie A′, A″, A‴... (fig. 18) pierwszy układ krzywych pewnego rodzaju B′, B″, B‴... drugi układ krzywych innego lub tego samego rodzaju co pierwszy; każda krzywa A pierwszego układu, przecinając się z krzywą B drugiego układu, wyznaczyć może punkt M na płaszczyznie,

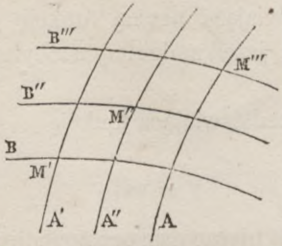


fig. 18.

bylebyśmy zastrzegli w razie gdyby krzywe przecinały się w kilku punktach, które przecięcie bierzemy pod uwagę.

Niech będzie funkcja

$$u = f(v)$$

niech będą linje A′, A″, A‴... takie, że każdéj wartości zmiennéj niezależnéj v, odpowiada pewna linja A; niech będą linje B′, B″, B‴... takie, że każdéj wartości szczególnéj funkcji u odpowiada pewna linja B; wartość szczególna zmiennéj niezależnéj, wraz z wartością odpowiednią funkcji wyznaczają punkt, którego miéjscem geometryczném jest linja przedstawiająca funkcją daną.

W układzie spółrzędnych prostolinijném, linje A′, A″, A‴... są prostemi równoległemi do pewnego kierunku; linje B′, B″, B‴... są również prostemi równoległemi do innego kierunku.

Wrazie gdy linje A′, A″, A‴... B′, B″, B‴... nie są prostemi, układ nazywa się układem *spółrzędnych krzywolinijnych.*

54. Spółrzedne biegunowe. Z układów krzywolinijnych, najczęściéj używanym jest układ spółrzędnych biegunowych. Układ linij A′, A″, A‴... składa się z prostych (fig. 19) 0A′,

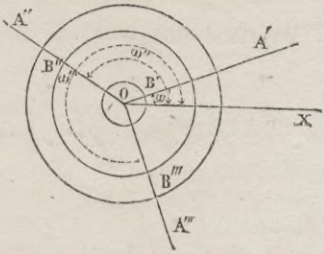


fig. 19.

0A″, 0A‴... przecinających się w jednym punkcie 0; drugi układ linij B′, B″, B‴ ... stanowią koła spółśrodkowe w 0 różnych promieni. Jednę z prostych A, niech będzie 0X, obieramy za początkową i nazywamy ją *osią*, punkt 0 nazywamy *biegunem*; proste 0A′, 0A″, 0A‴ ... wyznaczamy za pomocą kątów ω', ω'', ω''' jakie proste te tworzą z osią 0X; kąty te liczonemi być mają w kierunku od osi ku prostéj. Koła spółśrodkowe wyznaczamy za pomocą promieni $\rho' = 0B'$, $\rho'' = 0B''$, $\rho''' = 0B'''$ ... Gdy kąt ω zwiększa się od 0 do 2π, w sposób ciągły, a promień ρ od 0 do ∞ również w sposób ciągły, wszystkie punkta na płaszczyznie mogą być wyznaczone, przez ω zawarte pomiędzy 0 i 2π i przez ρ zawarte między 0 i ∞; ograniczając w ten sposób wartości nadawane na ρ i ω, które nazywamy *spółrzędnemi biegunowemi*, ρ *promieniem wodzącym*, ω *kątem biegunowym*, uniknąćby można dwuznaczności, wynikającéj z tego, że każda prosta właściwie w dwóch a nie w jednym punkcie przecina się z kołem; jednakże robiąc stanowcze zastrzeżenia, możemy tak na ω jak na ρ nadawać wszelkie wartości rzeczywiste między $-\infty$ a $+\infty$. Uważając np. ω za zmiennę niezależną a ρ za funkcję

$$\rho = f(\omega)$$

możemy nadawać na ω wszelkie wartości od 0 do ∞ i od 0 do $-\infty$ i obliczać odpowiednie wartości ρ, które mogą być jakiekolwiek, zawarte między $-\infty$ i $+\infty$.

55. Przykład. *Wykreślić funkcję*

(1) $$\rho = a\omega$$

Biorąc oś 0X (fig. 20) i licząc kąty ω od téj osi, widzimy że dla

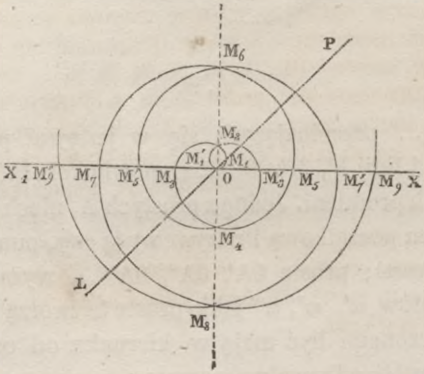


fig. 20.

$\omega = 0$, $\rho = 0$; krzywa przechodzi więc przez początek 0.

Gdy $\omega = 1$ t. j. kąt biegunowy równy 57° 16... [11] $\rho = a$, kreśląc więc kąt $M_1 0X = 57^\circ$ 16... i biorąc $M_1 0 = a$, otrzymamy punkt M_1 na krzywéj. Mamy nadto

dla

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \qquad \pi, \qquad \frac{3\pi}{2}, \qquad 2\pi$$

$$\rho = \frac{a\pi}{2} = 0M_2, \quad a\pi = 0M_3, \quad \frac{3\,a\pi}{2} = 0M_4, \quad 2\,a\pi = 0M_5$$

które dadzą punkta

$$M_2 \qquad M_3 \qquad M_4 \qquad M_5$$

Między temi punktami możemy w podobnyż sposób otrzymać tyle punktów ile nam się podoba; funkcja jest ciągłą, krzywa $0M_1$ M_2 M_3 M_4 M_5 będzie również ciągłą.

Nadając na ω wartości większe od 2π, mamy

$$\text{dla } \omega = 2\pi + \frac{\pi}{2}, \quad 3\pi, \quad 2\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad 4\pi$$

$$\rho = a\omega = OM_6, \quad OM_7, \quad OM_8, \quad OM_9$$

co nam da dalszy ciąg krzywéj : $M_5\ M_6\ M_7\ M_8\ M_9$; w ten sposób możemy przedłużyć krzywę do nieskończoności.

Nadając na ω wartości odjemne mielibyśmy ρ odjemne, t. j. należałoby odcinać wartość ρ, w stronę przeciwną promienia wodzącego, téj która tworzy kąt $-\omega$ z osią. Otrzymalibyśmy w ten sposób drugą gałęź krzywéj $OM_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5\ M_6\ M_7 \ldots$ zupełnie równą pierwszéj tylko obróconą w przeciwną stronę. Ciągłość nie jest zerwaną między dwoma gałęziami w punkcie O. Krzywa ta nazywa się *spiralną Archimedesa* lub *kabłąkiem*; jest utworzoną przez punkt M, który posuwa się ruchem jednostajnym po prostéj LP, obracającéj się jednocześnie i jednostajnie około punktu O; jakoż, założywszy że punkt M znajdował się początkowo w O, a prosta w OX, nazywając stosunek prędkości ruchu pierwszego do drugiego przez a, mamy w rzeczy saméj, po czasie jakimkolwiek, drogi przebieżone w stosunku prędkości

$$\frac{\rho}{\omega} = a \quad \text{czyli} \quad \rho = \omega a$$

Gdybyśmy chcieli nadawać na ω tylko wartości zawarte pomiędzy 0 i 2π, każda z części krzywéj $OM_2\ M_5$, $M_5\ M_6\ M_9, \ldots\ OM_2\ M'_5$, $M'_5\ M'_6\ M'_9 \ldots$ przedstawiaćby musiała inne równanie; oznaczając $b = OM_5 = OM'_5 = M_5M_9 = M'_5M'_9 = 2\pi a$ równania te byłyby

$$\rho = a\omega \quad \rho = b + a\omega \ldots \quad \rho = b - a\omega \quad \rho = 2b - a\omega \ldots$$

W ogólności więc wszelka funkcja dana przez równanie algebraiczne pierwszego stopnia między dwoma zmiennemi, w spółrzędnych biegunowych przedstawioną jest przez *spiralnę Archimedesa.*

56. Spółrzędne trzylinijne. Położenie punktu może być wyznaczoném na płaszczyznie, przez odległości jego od trzech prostych danych, nie przecinających się w jednym punkcie. Proste te stanowią trójkąt spółrzędny ABC (fig. 21),

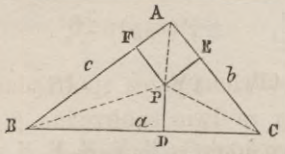


fig. 21.

którego boki są danemi $BC=a$ $AC=b$ $AB=c$: odległości punktu uważanego P od tych trzech boków $PD=\alpha$, $PE=\beta$ $PF=\gamma$ nazywają się *spółrzędnemi trzylinijnemi* punktu P; każda spółrzędna α będzie dodatną, jeżeli punkt P leży po téj samćj stronie boku trójkąta odpowiednego BC, co trzeci wierzchołek A; odjemną jeżeli punkt ten znajduje się po stronie przeciwnéj.

Oznaczając przez Δ powierzchnię trójkąta ABC mamy zawsze po między trzema spółrzędnemi jednego punktu związek

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta \tag{1}$$

jak się z łatwością przekonać można łącząc punkt P z wierzchołkami A, B, C, i uważając trójkąt ABC jako summę trzech trójkątów BPC, APC, APB.

Równanie jakiéjkolwiek linji danćm będzie przez równanie pomiędzy trzema spółrzędnemi

$$f(\alpha, \beta, \gamma)=0 \tag{2}$$

w połączeniu z równaniem (1); lub też rugując jednę ze spółrzędnych z równania (2) za pomocą (1), przez

$$F(\beta, \gamma)=0 \tag{3}$$

tak, że zawsze jest jedna tylko zmienna niezależna [**44**].

Każda więc funkcja jednéj zmiennéj niezależnéj

$$F(x, y) = 0$$

może być przedstawioną przez spółrzędne trzylinijne biorąc zmienne x, y za dwie spółrzędne β, γ, i łącząc z tak otrzymaném równaniem (3), warunek (1).

Przykład. Aby znaleźć równanie prostéj RQ (fig. 22), w układzie

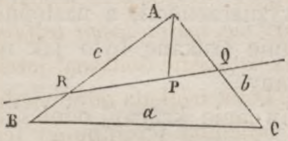


fig. 22.

spółrzędnych trzylinijnych ABC, uważamy, że dla jakiegokolwiek punktu P prostéj mamy summę trójkątów RAP, PAQ (lub ich różnicę jeżeli punkt P na zewnątrz trójkąta) stałą i równą trójkątowi RAQ; oznaczając więc $AR = r$ $AQ = q$, otrzymamy, zważając na znak spółrzędnych β, γ, gdziekolwiekby był punkt P:

$$q\beta + r\gamma = \frac{2\,qr}{bc}\,\Delta$$

a zważywszy na warunek (1):

$$q\beta + r\gamma = \frac{qr}{bc}(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

równanie prostéj w spółrzędnych trzylinijnych.

Oznaczając przez skrócenie

$$\frac{qra}{bc} = l \quad \frac{qr}{c} - q = m \quad \frac{qr}{b} - r = n$$

równanie te przedstawi się jako

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

równanie ogólne *jednorodne* pierwszego stopnia pomiędzy spółrzędnemi.

57. Zmiana spółrzędnych. Tak jak dla ułatwienia badania własności funkcji, zastępujemy zmienne przez inne, które znajdują się z pierwszemi w ściśle określonym związku, tak samo dla łatwiéjszego badania własności krzywéj możemy zmienić spółrzędne na inne tego samego lub nawet innego rodzaju. Dla tego, zostawiając krzywę nienaruszoną, kreślimy na płaszczyznie inny układ spółrzędnych i staramy się znaleźć równanie krzywéj odniesionéj do tego nowego układu. Zwykle ilości wyznaczające nowy układ zostawiamy z początku niewyznaczonemi, a następnie wyznaczamy je tak, żeby równanie szukane było jak najprostszem, lub miało kształt żądany.

Mając dane równanie krzywéj odniesionéj do pewnego układu spółrzędnych, aby znaleźć jéj równanie odniesione do innego układu, dość jest znaleźć związek pomiędzy spółrzędnemi pierwszego układu jakiegokolwiek punktu, a spółrzędnemi drugiego układu tegoż samego punktu; zupełnie tak samo jak mając dane wyrażenie pomiędzy pewnemi zmiennemi, z których jedna jest funkcją drugiéj, jeżeli chcemy znaleźć wyrażenie pomiędzy innemi zmiennemi, zależnemi od pierwszych, dość jest znaleźć związek pomiędzy jednemi a drugiemi zmiennemi taki, aby jedne zmienne można było wyrazić w funkcji drugich.

58. Zmiana spółrzędnych prostolinijnych na prostolinijne. Przypuśćmy naprzód, że dwa układy prostolinijne XOY i X'O'Y są równoległe: (fig. 23)

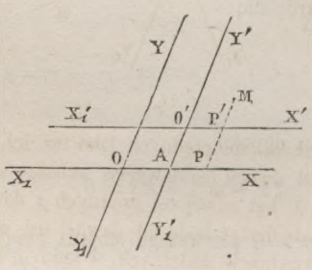


fig. 23.

oznaczmy przez

$$0A = m \qquad 0'A = n$$

spółrzędne nowego początku $0'$ względem dawnego układu; niech będą

$$x = 0P \qquad y = MP, \qquad x' = 0'P' \qquad y' = MP'$$

spółrzędne jakiegokolwiek punktu M względem dawnego i nowego układu; mamy

$$(1) \qquad x = m + x' \qquad y = n + y'$$

dla przejścia z dawnego układu do nowego; t. j. że mając równanie krzywéj odniesionéj do dawnego układu

$$f(x, y) = 0$$

krzywa ta odniesiona do nowego układu, będzie przedstawiała równanie

$$f(x' + m, \quad y' + n) = 0$$

Przypuśćmy powtóre (fig. 24), że dwa układy mają początek 0

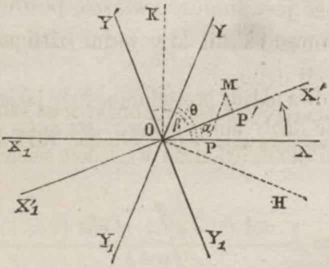


fig. 24.

wspólny, lecz kierunek osi spółrzędnych jako też ich nachylenie różne; nazwijmy θ kąt dwóch osi dawnego układu; α kąt nowéj osi odciętych z dawną; β kąt nowéj osi rzędnych z dawną osią odciętych; wszystkie te kąty liczyć będę od dawnéj osi odciętych dodatnych ku dawnéj osi rzędnych dodatnych, w jednym kierunku, od 0 do 360°.

Niech będą spółrzędne jakiegokolwiek punktu M

$$x = OP \quad y = MP \quad \text{względem dawnego układu}$$
$$x' = OP' \quad y' = MP' \quad \text{względem nowego układu}$$

Wyprowadźmy w punkcie O prostopadłę OH do OY: rzuty dwóch linij łamanych OPM i OP'M na OH będą równe, licząc kąty jak powyżéj; otrzymamy równając te rzuty

$$x \text{ wst } \theta = x' \text{ dos } \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) + y' \text{ dos } \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \beta\right)$$

czyli

$$x \text{ wst } \theta = x' \text{ wst } (\theta - \alpha) + y' \text{ wst } (\theta - \beta)$$

W podobny sposób, wyprowadzając OK prostopadłą do osi OX rzucając na tę prostopadłą dwie linje łamane OPM, OP'M, równając rzuty, otrzymamy

$$y \text{ wst } \theta = x' \text{ wst } \alpha + y' \text{ wst } \beta$$

a ztąd wzory:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x' \text{ wst } (\theta - \alpha) + y' \text{ wst } (\theta - \beta)}{\text{wst } \theta} \\ y &= \frac{x' \text{ wst } \alpha + y' \text{ wst } \beta}{\text{wst } \theta} \end{aligned} \right.$$

dla przejścia z dawnego układu do nowego, jeżeli początek jest wspólnym.

W razie gdyby dwa układy prostolinijne były jakiemikolwiek względem siebie t. j. nie miały ani wspólnego początku, ani nie były równoległemi, ani równonachylonemi względem siebie, łącząc wzór (1) z (2):

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x' \text{ wst } (\theta - \alpha) + y' \text{ wst } (\theta - \beta)}{\text{wst } \theta} + m \\ y &= \frac{x' \text{ wst } \alpha + y' \text{ wst } \beta}{\text{wst } \theta} + n \end{aligned} \right.$$

otrzymamy wzór (3) ogólny, na przejście z jednego jakiegokolwiek układu prostolinijnego spółrzędnych, do drugiego. Jeżeli więc krzywa wyraża w pierwszym układzie funkcję

$$f(x, y) = 0$$

a w drugim funkcję

$$F\,(x',\ y',)$$

mamy

$$F\,(x',\,y') = f\left(\frac{x'\,\mathrm{wst}\,(\theta-\alpha)+y'\,\mathrm{wst}\,(\theta-\beta)}{\mathrm{wst}\,\theta}+m,\ \frac{x'\,\mathrm{wst}\,\alpha+y'\,\mathrm{wst}\,\beta}{\mathrm{wst}\,\theta}+n\right)$$

Równania (3) są linijnemi; zmieniając więc układ prostolinijny na prostolinijny, nie zmieniamy *stopnia* równania algebraicznego wyrażającego krzywę : t. j. krzywa 2go, 3go... $n$go stopnia względem pewnego układu, pozostanie krzywą 2go 3go... $n$go stopnia względem każdego innego układu prostolinijnego.

Położenie nowych spółrzędnych względem dawnych jest wyznaczoném za pomocą czterech ilości m, n, α, β, z których dwie pierwsze wyznaczają położenie początku, a dwie drugie nachylenie osi nowych do dawnéj osi odciętych.

Mając daną funkcję zawierającą pewne ilości stałe, można zmienić zmienne tak, że niektóre z tych stałych zostaną wyrugowanemi [**12**]. Geometrycznie : za pomocą zmiany spółrzędnych, możemy rozporządzać czterema powyższemi stałemi m, n, α, β nie zmieniając krzywéj, a tylko zmieniając układ spółrzędnych tak, że z równania krzywéj cztery spółczynniki mogą być wyrugowanemi, podstawiając za x i y wzory (3) i wyznaczając powyższe stałe jeżeli można, w sposób, aby te spółczynniki były równemi zeru. Może się zdarzyć, że otrzymamy w ten sposób wyrazy nieskończone lub nieoznaczone : w takim razie ograniczyć się musimy na wyrugowaniu trzech, dwóch... zamiast czterech spółczynników. Jeżeli układ spółrzędnych nowych ma być prostokątnym, możemy rozporządzać tylko trzema stałemi, bo w takim razie $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Tak naprzykład, mając krzywę daną przez równanie ogólne drugiego stopnia

$$(4)\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

geometrja analityczna uczy nas, że podstawiając za x i y wartości (3), i wyznaczając stosownie m, n, α, β t. j. zmieniając w stosowny sposób osie spółrzędnych, równanie to sprowadzić można do jednego z trzech następujących kształtów

$$(5)\quad a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2 \text{ a mianowicie jeżeli } B^2 - 4AC < 0$$

$$(6)\quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad \text{jeżeli } B^2 - 4AC > 0$$

$$(7)\quad y^2 = 2px \qquad \text{jeżeli } B^2 - 4AC = 0$$

pierwsze z tych równań przedstawia *elipsę* [**46**] drugie *hyperbolę* [**47**] trzecie *parabolę* [**48**.] Zamiast sześciu spółczynników stałych A, B, C, D, E, F znajdujących się w równaniu (4), czyli pięciu stosunków tych spółczynników do jednego z nich (dzieląc równanie (4) przez ten ostatni) równanie (5) i (6) zawierają tylko dwa : a i b ; równanie (7) tylko jeden : p ; spółczynniki te wyznaczają zupełnie krzywe, które nazywają pospolicie krzywemi *drugiego stopnia*, bo wszelkie równanie drugiego stopnia jak (4) przedstawia jedną z nich, stosownie czy $B^2 - 4AC$ jest większém, mniéjszém lub równém 0. Spółrzędne do których odniesione krzywe przedstawiają się pod postacją (5), (6), (7) mogą być zawsze prostokątnemi.

59. Przykład. Niech będzie funkcja dana przez równanie

$$(8)\qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

Zamiast zmiennych y, x podstawmy inne zmienne x', y' związane z poprzedniemi przez równania

$$(9)\qquad \begin{cases} x = x' \operatorname{dos}\alpha + y' \operatorname{dos}\beta \\ y = x' \operatorname{wst}\alpha + y' \operatorname{wst}\beta \end{cases}$$

gdzie α, β są kątami stałemi, które następnie wyznaczyć zamierzamy tak, aby nowa funkcja przybrała kształt żądany.

Podstawiając wartości (9) w równanie (8) otrzymamy,

$$(10)\quad (a^2 \operatorname{wst}^2\alpha - b^2 \operatorname{dos}^2\alpha)x'^2 + 2\,(a^2 \operatorname{wst}\alpha \operatorname{wst}\beta - b^2 \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta)x'y' + (a^2 \operatorname{wst}^2\beta - b^2 \operatorname{dos}^2\beta)\,y'^2 = -a^2b^2$$

α i β możemy wyznaczyć tak aby spółczynniki x'^2, y'^2 były równemi zeru t. j.

$$(11)\qquad \begin{cases} a^2 \operatorname{wst}^2\alpha - b^2 \operatorname{dos}^2\alpha = 0 \\ a^2 \operatorname{wst}^2\beta - b^2 \operatorname{dos}^2\beta = 0 \end{cases}$$

dość jest wziąść dla tego na α i β jednę z wartości otrzymanych z równań (11) i danych przez

$$\text{st}\,\alpha = \pm\frac{b}{a} \qquad \text{st}\,\beta = \pm\frac{b}{a}$$

Weźmy naprzykład

$$\text{st}\,\alpha = +\frac{b}{a} \qquad \text{st}\,\beta = -\frac{b}{a} \tag{12}$$

uważając α i β mniejszemi od π: otrzymamy z łatwością

$$\text{wst}\,\alpha = \text{wst}\,\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{dos}\,\alpha = -\,\text{dos}\,\beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

uważając w wykazie znaków, że aby styczne były równe i znaków przeciwnych, jeden z kątów np. α musi być ostrym, drugi β rozwartym.

Podstawiając wartości te w równanie (10) otrzymamy po wykończeniu działań

$$x'y' = \mu^2 \tag{13}$$

oznaczając przez skrócenie

$$\mu^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$$

równanie (12) ma, jak widzimy, kształt daleko prostszy od danego (8), i zawiera jednę tylko stałą μ zamiast dwóch a i b.

Geometrycznie, równanie (8) przedstawia hyperbolę odniesioną do osi prostokątnych [**47**] XX_1, YY_1 (fig. 25); równania (9) są to ró-

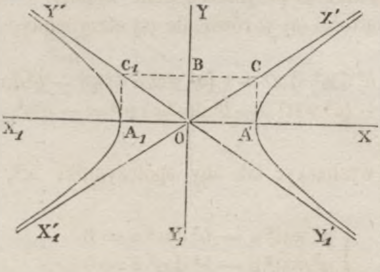


fig. 25.

wnania (3) (zakładając $\theta = \text{YOX} = 90^\circ$ $m = 0$ $n = 0$, bo niezmieniamy początku), na zmianę układu danego, na układ $X'X'_1$, $Y'Y'_1$ wyznaczony przez równania (12), biorąc

$$\text{st}\,\alpha = \text{st}\ \text{COX} = \frac{\text{CA}}{\text{OA}} = \frac{b}{a} \qquad \text{st}\,\beta = \text{st}\ \text{C}_1\text{OX}_1 = -\frac{b}{a}$$

równaniem hyperboli odniesionéj do osi $X'X'_1$, $Y'Y'_1$ będzie

(13) $$x'\,y' = \mu^2$$

z którego otrzymamy

$$y' = \frac{\mu^2}{x'} \qquad \text{lub} \qquad x' = \frac{\mu^2}{y'}.$$

Aby y' było zerem, trzeba żeby $x' = \infty$ i odwrotnie : krzywa więc nie spotyka nowych osi, chyba w odległości nieskończenie wielkiéj : to jest, krzywa zbliża się nieograniczenie do osi, oddalając się nieograniczenie od początku. Osie te są *assymptotami* hyperboli, równanie (13) równaniem hyperboli odniesionéj do assymptot.

60. Zmiana spółrzędnych prostolinijnych na spółrzędne biegunowe. Możemy przypuścić że spółrzędne prostolinijne są prostokątnemi mającemi początek w biegunie, oś odciętych skierowaną podług osi biegunowéj, i że kąt biegunowy liczy się od odciętych dodatnych ku rzędnym dodatnym; gdyby spółrzędne prostolinijne były inne, możemy je z łatwością sprowadzić do powyższych, za pomocą znanych wzorów [**58**, (3)].

Niech będą więc x, y spółrzędne prostolinijne jakiegokolwiek punktu M (fig. 26), którego spółrzędnemi biegunowemi są ρ i ω;

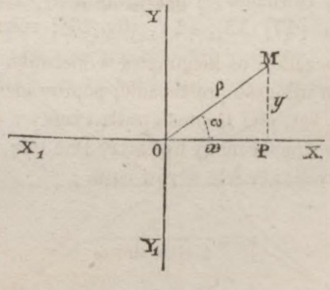


fig. 26.

mamy

(1) $$\begin{cases} x = \rho \ \text{dos}\ \omega \\ y = \rho \ \text{wst}\ \omega \end{cases}$$

na przejście z układu prostolinijnego, do układu biegunowego.

W przypadku ogólnym, oznaczając przez m i n spółrzędne prostolinijne bieguna, przez θ nachylenie osi spółrzędnych, przez α nachylenie osi biegunowéj do osi odciętych, otrzymalibyśmy wprost (fig. 27) :

$$\left\{\begin{aligned} x &= m + \frac{\rho \,\text{wst}\,(\theta - \alpha - \omega)}{\text{wst}\,\theta} \\ y &= n + \frac{\rho \,\text{wst}\,(\alpha + \omega)}{\text{wst}\,\theta} \end{aligned}\right.$$

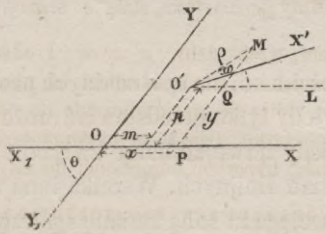


fig. 27.

Tak np. równanie prostéj

$$ax + by + c = 0$$

odniesionéj do spółrzędnych prostokątnych, stanie się w układzie spółrzędnych biegunowych

$$\rho = \frac{p}{\text{dos}\,(\omega - \alpha)}$$

biorąc biegun w początku, oś biegunową w kierunku osi odciętych, i oznaczając przez p długość prostopadłéj poprowadzonéj z bieguna na prostę, przez α kąt, jaki ta prostopadła tworzy z osią biegunową.

Krzywe drugiego stopnia mogą być wszystkie trzy, względem spółrzędnych biegunowych, zawarte w równaniu :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \,\text{dos}\,\omega}$$

biorąc za oś biegunową oś wielką, którąśmy wzięli poprzednio za oś odciętych, w spółrzędnych prostokątnych [**46**], [**47**], [**48**], a za biegun punkt zwany *ogniskiem*. Równanie to wyrażać będzie (a i b są *osiami* w układzie prostokątnym) :

Elipsę, jeżeli $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ jest mniéjszém od 1

Hyperbolę, jeżeli $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ jest większém od 1

Parabolę, jeżeli $e = 1$

Stałą p, równą $\frac{b^2}{a}$ w razie elipsy, lub hyperboli, a połowie spółczynnika x w razie paraboli [48], odniesionych do spółrzędnych prostokątnych, nazywamy *parametrem*, stałą e *mimośrodem* krzywéj.

61. W ogólności, zamiana spółrzędnych prostolinijnych na prostolinijne, wtedy tylko przedstawiać może zmianę zmiennych funkcji, kiedy nowe zmienne związane są z dawnemi za pomocą równań linijnych. Wszelka inna zmiana zmiennych funkcji, pociąga za sobą zmianę spółrzędnych na krzywolinijne, których rozmaitość może być nieograniczona; spółrzędne biegunowe są tylko jednym szczególnym przypadkiem spółrzędnych krzywolinijnych. Dla ułatwienia badania funkcji, zwykle wprowadzić można zmienne nowe takie, że funkcja przedstawi się pod kształtem nadzwyczaj prostym: lecz zmienne te rzadko kiedy mogą być związane ze zmiennemi dawnemi przez równania 1go stopnia. Tak samo dla każdéj krzywéj możnaby znaleźć układ spółrzędnych taki, żeby równanie krzywéj było jak najprostszém: lecz spółrzędne takie właściwe krzywéj zastosowane do innych krzywych, wydałyby równania jeszcze bardziéj złożone. Jednakże układ zmiennych, lub spółrzędnych właściwych funkcji lub krzywéj, przedstawia bardzo często znaczne korzyści w badaniu własności funkcji lub krzywéj, jak o tém w dalszym ciągu przekonać się nie raz będziemy mieli sposobność.

Widzimy zarazem jaką rolę grają ilości stałe wchodzące w skład funkcji; ilości te stałe, które nazywają niekiedy *parametrami*, tak jak u krzywych drugiego stopnia, oznaczają postać funkcji niezależnie od zmiennych. Stałe te tak nazwane dla tego, że niezależą od zmiennych, można również zmieniać w osobny sposób: np. zwiększając oś wielką a elipsy bez granic, zupełnie nie zależnie od spółrzędnych x i y jéj punktów, widzielibyśmy jak elipsa zbliża się nieograniczenie do paraboli mającéj z nią wspólne ognisko.

62. Jednorodność. Przedstawiając rozmaite ilości algebraiczne jako wielkości geometryczne, przypuszczamy zawsze pewną jednostkę, zresztą dowolną, zwykle nieoznaczoną, do któréj odnosimy te wielkości tak stałe, jak zmienne. Gdybyśmy chcieli uczynić tę jednostkę wyraźną, należałoby wyrazić ilości uważane wchodzące w równanie

$$f(a, b, c \ldots x, y) = 0 \tag{1}$$

jako stosunki do téj jednostki m; równanie wtedy przybierze kształt

$$f\left(\frac{a'}{m}, \frac{b'}{m}, \frac{c'}{m}, \ldots \frac{x'}{m}, \frac{y'}{m}\right) = 0 \tag{2}$$

i będzie jednorodném [33] względem $a', b', c' \ldots x', y', m$.

Jeżeli równanie (1) jest już jednorodném, możemy uważać jednostkę jako niewyznaczoną, i jeżeli za $a, b, c \ldots x, y$ podstawiemy ilości proporcjonalne: $ka, kb, kc \ldots kx, ky$ równanie nie przestanie być sprawdzoném; bo [33]

$$f(ka, kb, kc \ldots kx, ky) = k^m f(a, b, c \ldots x, y)$$

jeżeli więc $f(a, b, c \ldots x, y) = 0$, ponieważ k jest jakiemkolwiek

$$f(ka, kb, kc \ldots kx, ky) = 0$$

Często zależy nam tylko na tém, żeby równanie było jednorodném co do zmiennych; w takim razie wprowadzamy nową zmienną t zupełnie dowolną, tak, że zmieniając x możemy przypuścić t zmienném, lub stałém; wyrażamy zmienne jako stosunki x' i y' do t, a podstawiając te stosunki, otrzymamy równanie jednorodne co do trzech zmiennych x', y', t. Tak np. w równaniu 2go stopnia

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

podstawiając $\frac{x'}{t}$ za x, a $\frac{y'}{t}$ za y otrzymamy mnożąc przez t^2

$$ax'^2+bx'y'+cy'^2+dx't+ey't+ft^2=0$$

równanie jednorodne co do x', y', t. Jeżeli uważamy krzywę przedstawiającą to równanie, powiadamy że krzywa jest odniesioną do *spółrzędnych jednorodnych*. Zmienna t jest, jakeśmy wyżéj powiedzieli, zupełnie dowolną; można jéj się pozbyć w każdym czasie zakładając $t=1$, lub podstawiając xt za x', a yt za y'.

W spółrzędnych trzylinijnych [**56**] wszelkie wyrażenie może być uczynione jednorodném, mnożąc każden jego wyraz przez odpowiednią potęgę stosunku

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{2\Delta}$$

któren jest równy jedności [**56** (1)].

63. Interpolacja. Jużeśmy wyżéj [**43**] zauważyli, że wyznaczenie funkcji czyniącéj zadość pewnym warunkom, przedstawia się geometrycznie, jako wykreślenie krzywéj mając dane pewne jéj własności. Wyznaczenie funkcji któraby przybierała dane wartości odpowiednie wartościom danym zmiennéj niezależnéj [**36**] wychodzi na to samo, co wykreślenie krzywéj, przechodzącéj przez dane punkta. Każda para wartości szczególnych danych zmiennéj niezależnéj i funkcji

$$(1)\quad \begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases} \begin{cases} x=x_2 \\ y=y_2 \end{cases} \cdots \begin{cases} x=x_m \\ y=y_m \end{cases} \begin{cases} x=x_{m+1} \\ y=y_{m+1} \end{cases}$$

wyznacza pewien punkt na płaszczyznie; funkcja szukana ma zawierać te szczególne wartości : krzywa ma przechodzić przez dane punkta. Jak nieograniczona liczba funkcyj może zadość czynić tym warunkom, tak nieograniczoną liczbę krzywych możemy przeprowadzić przez punkta dane w jakiéjkolwiek liczbie. Jeżeli funkcja ma być algebraiczną całkowitą *m*go stopnia :

$$(2)\quad y=a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

i zadość czynić $m+1$ wartościom zmiennych (1), tak funkcja jak i krzywa przechodząca przez $m+1$ punktów (1) są wyznaczonemi. Krzywe różnego stopnia, których równania mają kształt (2) nazywają się w ogólności *parabolami* : parabola 2go stopnia jest szczególnym przypadkiem (2). Parametra krzywéj mogą być wyznaczonemi za pomocą wzoru Lagrange'a [**38**].

Przedstawienie geometryczne funkcji dwóch zmiennych niezależnych.

64. Niech będą trzy płaszczyzny, (fig. 28), przecinające

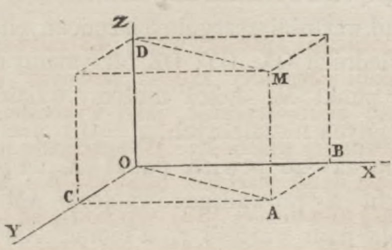


fig. 28.

się z sobą podług trzech prostych OX, OY, OZ, które nazywać będziemy *osiami spółrzędnych w przestrzeni*; niech będzie jakikolwiek punkt M w przestrzeni; poprowadźmy z tego punktu równoległę MA do osi OZ i przez punkt A przecięcia się téj równoległéj z płaszczyzną XOY, poprowadźmy równoległę AB do osi OY. Wielkości

$$OB = x \qquad AB = OC = y \qquad MA = OD = z$$

nazywamy *spółrzędnemi* punktu M w przestrzeni. Są to trzy krawędzie przyległe równoległościanu wystawionego na osiach przez punkt M. Spółrzędne te będą dodatnemi lub odjemnemi, stosownie do położenia punktu względem trzech płaszczyzn spółrzędnych : ośm układów (kombinacji) jakie utworzyć można biorąc spółrzędne te ze znakiem $+$ lub $-$, odpowiadają ośmiu kątom trójściennym, jakie trzy płaszczyzny spółrzędnych tworzą pomiędzy sobą. Każden punkt może mieć tylko jedyne spółrzędne względem danego układu osi, i odwrotnie, trzy spółrzędne, wzięte ze stosownemi znakami, wyznaczają zupełnie punkt w przestrzeni.

Niech będzie równanie

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

pomiędzy trzema zmiennemi, z których dwie np. x i y mogą być uważanemi jako zmienne niezależne, trzecia z będzie funkcją tych dwóch zmiennych niezależnych. Odcinając każdy układ wartości szczególnych zmiennych x, y, z na osiach odpowiednich OX, OY, OZ otrzymamy dla każdego z nich osobny punkt M. Jakoż możemy wziąść dowolnie wartości zmiennych niezależnych $x = OB$ $y = OC$, które wyznaczą nam zawsze pewien punkt A na płaszczyznie XOY : z punktu A prowadząc równoległę AM do osi OZ równanie (1) da nam wartość z, a biorąc AM równą téj wartości otrzymamy punkt M. Punkt M jest widocznie jednym z wierzchołków równoległościanu wystawionego na

$$x = 0B \qquad y = 0C \qquad z = 0D$$

Zbiór wszystkich wartości x, y, z, czyniących zadosyć równaniu (1), przedstawia zbiór punktów w przestrzeni określających *powierzchnię*. Spółrzędna z jakiegokolwiek punktu téj powierzchni, może być uważną jako przedstawiająca funkcję dwóch zmiennych niezależnych x i y, przedstawiających dwie inne spółrzędne tego punktu, czyli spółrzędne rzutu punktu na płaszczyznę XOY, uważane równolegle do osi OZ. Powierzchnia przedstawia więc funkcję (1), i odwrotnie równanie (1), nazywamy równaniem powierzchni.

Równanie

$$z = a \tag{2}$$

gdzie a jest stałą, przedstawiać będzie w przestrzeni płaszczyznę równoległą do XOY; bo x i y uważamy tu za niewyznaczone, jakiekolwiek, a z jest zawsze to samo; jestto więc płaszczyzna znajdująca się w odległości a, wziętéj równolegle do osi OZ, od płaszczyzny XOY.

Równanie

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

przedstawia pewną krzywę LK na płaszczyznie XOY (fig. 29).

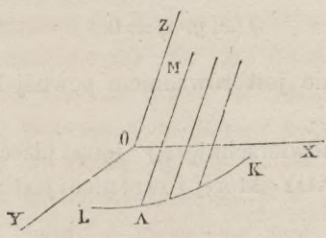


fig. 29.

Z jakiegokolwiek puktu A téj krzywéj przeprowadźmy równoległę AM do osi OZ, ponieważ spółrzędna z która nie wchodzi w równanie (3), jest nieoznaczoną, spółrzędne każdego punktu téj prostéj czynić będą zadość równaniu (3). Równanie to wyraża więc w przestrzeni *powierzchnię walcową*, któréj tworzącą jest równoległa do osi OZ, a kierownicą jest linja LK, dana na płaszczyznie XY przez równanie (3).

Równanie

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

przedstawia, jakieśmy powiedzieli powierzchnię jakąkolwiek. Przetnijmy tę powierzchnię płasczyzną ABC (fig. 30)

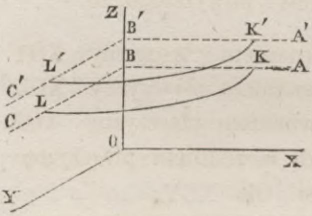


fig. 30.

równoległą do XOY; równaniem téj płasczyzny jest:

$$z = a \tag{2}$$

równaniem przecięcia będzie, przypuszczając że równania te razem zachodzą, i podstawiając za z wartość a w (1):

$$f(x, y, a) = 0 \tag{4}$$

które to równanie jest równaniem pewnéj linji LK na płasczyznie ABC.

Przecinając powierzchnię (1) inną płasczyzną A′B′C′ równoległą do XOY któréj równaniem jest:

$$z = a' \tag{2'}$$

otrzymamy inną krzywę

$$(4') \qquad f(x, y, a') = 0$$

jako przecięcie; możemy postępować tak dalćj i badać tym sposobem kształt powierzchni za pomocą przecięć powyższych, które mogą być tak zbliżonemi jak się podoba.

Zresztą wszystkie prawie uwagi co do ciągłości, wartości rzeczywistych i urojonych funkcji i t. p., któreśmy zrobili uważając funkcję jednéj zmiennéj niezależnéj i krzywą płaską ją przedstawiającą, dadzą się z łatwością zastosować do funkcyj dwóch zmiennych niezależnych i powierzchni przedstawiających te funkcje.

Widocznćm jest z powyższego, że

$z = 0$ jest równaniem płasczyzny XOY
$y = 0$ jest równaniem płasczyzny XOZ
$x = 0$ jest równaniem płasczyzny YOZ.
$y = ax + b$ jest równaniem płasczyzny równoległéj do osi OZ
$z = ax + b$ jest równaniem płasczyzny równoległéj do osi OY
$x = az + b$ jest równaniem płasczyzny równoległéj do osi OX.

65. Wartości wspólne dwóm funkcjom. Przecięcie się powierzchni. Niech będą dwie funkcje dwóch zmiennych niezależnych :

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0$$

szukając wartości szczególnych z równych, dla tych samych wartości zmiennych niezależnych w jednéj i drugiéj funkcji, założyć należy, że równania (1) i (2) razem zachodzą. Możemy wyrugować w takim razie jedną ze zmiennych, i otrzymamy:

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

funkcję taką, że dla wszelkich wartości szczególnych x i y, czyniących zadosyć (3), te same wartości z będą czynić zadosyć równaniom (1) i (2).

Każde z równań (1) i (2) jest równaniem powierzchni; równanie (3) jest równaniem rzutu krzywéj, będącéj ich wspólnem przecięciem na płaszczyznę XOY, (rzutu wziętego zawsze równolegle do osi OZ; wrazie osi prostokątnych rzuty te będą prostopadłemi).

Rugując x z dwóch równań (1) i (2) otrzymalibyśmy

$$(4) \qquad \psi(y, z) = 0$$

rzut przecięcia na płaszczyznę YOZ; rugując y

$$(5) \qquad \chi(x, z) = 0$$

rzut przecięcia na płaszczyznę XOZ.

W ogólności, krzywa w przestrzeni wyrażoną jest przez zbiór dwóch równań (1) i (2), czyli przez przecięcie się dwóch powierzchni. Może być również wyrażoną przez dwa z trzech równań (3), (4), (5), czyli przez dwa rzuty na dwie płaszczyzny spółrzędne, lub inaczéj przez przecięcie się dwóch powierzchni walcowych, równoległych do osi, wyrażonych przez powyższe równania: byleby, w razie gdyby powierzchnie walcowe przecinały się podług kilku krzywych, zastrzedz, które z nich bierzemy pod uwagę.

66. Kierunek linji prostéj, może być danym za pomocą kątów jakie prosta, lub równoległa do prostéj poprowadzona z początku O, tworzy z osiami. Dwa z tych kątów nie wyznaczają zupełnie prostéj; bo zakreśliwszy z początku, jako wierzchołka, dwa ostrokręgi na dwóch osiach spółrzędnych, mające u wierzchołka kąty dane, te dwa ostrokręgi przecinają się w ogólności podług dwóch tworzących, które obiedwie tworzą z osiami kąty dane. Kąt z trzecią osią pokaże, którą z tych dwóch tworzących wziąść należy. Lecz widzimy odwrotnie, że trzy kąty te nie mogą być dowolnemi, że musi zatem między niemi istnieć pewien związek, aby trzy ostrokręgi zakreślone w powyższy sposób koło trzech osi przecinały się tylko podług jednéj prostéj.

Przypuśćmy że układ spólrzędnych jest prostokątny t. j. że trzy osie OX, OY, OZ tworzą z sobą kąty proste, i niech będzie prosta jakakolwiek OL (fig. 31) przechodząca przez początek dana, lub równoległa do danéj, tworząca kąt α z osią OX, kąt β z osią OY, kąt γ z osią OZ.

Wziąwszy punkt M na prostéj w odległości $OM = l$ i nazwawszy spólrzędne punktu M : x, y i z, mamy

$$x = l \operatorname{dos} \alpha \qquad y = l \operatorname{dos} \beta \qquad z = l \operatorname{dos} \gamma$$

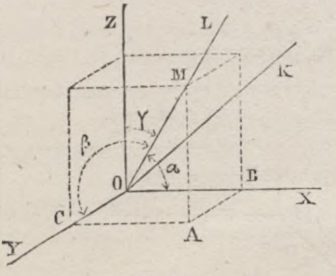


fig. 31.

lecz l jest przekątną równoległościanu wystawionego na x, y, z

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

a więc

$$\operatorname{dos}^2 \alpha + \operatorname{dos}^2 \beta + \operatorname{dos}^2 \gamma = 1 \tag{1}$$

jest to warunek konieczny, jakiemu muszą czynić zadosyć dostawy trzech kątów jakie prosta, jakakolwiek tworzy z osiami prostokątnemi.

Weźmy drugą prostę OK tworzącą kąty α', β', γ' z osiami i kąt V z prostą OL. Rzucając na tę prostą OM i OBAM otrzymamy rzuty równe

$$l \operatorname{dos} V = x \operatorname{dos} \alpha' + y \operatorname{dos} \beta' + z \operatorname{dos} \gamma'$$

czyli, podstawiając za $x, y, z,$ wartości

$$(2) \qquad \text{dos}\, V = \text{dos}\,\alpha\; \text{dos}\,\alpha' + \text{dos}\,\beta\; \text{dos}\,\beta' + \text{dos}\,\gamma\; \text{dos}\,\gamma'$$

wyrażenie dostawy kąta, jaki dwie proste tworzą pomiędzy sobą.

Aby dwie proste były prostopadłemi, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby dostawa ta była zerem, czyli

$$(3) \qquad \text{dos}\,\alpha\; \text{dos}\,\alpha' + \text{dos}\,\beta\; \text{dos}\,\beta' + \text{dos}\,\gamma\; \text{dos}\,\gamma' = 0$$

warunek prostopadłości.

67. Zmiana spółrzędnych. Przypuśćmy naprzód że nowy układ spółrzędnych $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (fig. 32) jest równoległym do

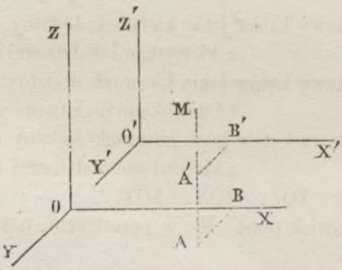


fig. 32.

dawnego OX, OY, OZ : nazywając m, n, p spółrzędne początku O' względem dawnego układu, x, y, z spółrzędne punktu jakiegokolwiek M, względem dawnego układu, x', y', z' spółrzędne tegoż punktu względem nowego układu, mamy widocznie

$$(1) \qquad x = m + x' \qquad y = n + y' \qquad z = p + z'$$

wartości, które podstawić należy w równaniu powierzchni odniesionéj do układu XYZ, chcąc otrzymać równanie téjże powierzchni odniesionéj do układu $X'Y'Z'$.

Przypuśćmy powtóre, że nowy układ $X'Y'Z'$ ma z dawnym XYZ

wspólny początek O : nazwijmy (fig. 33) :

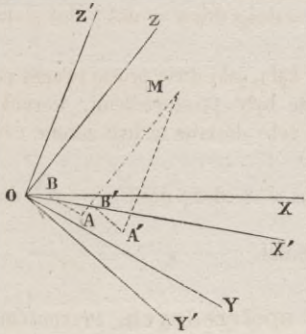


fig. 33.

a, b, c dostawy kątów jakie kierunek dodatny osi OX', tworzy z kierunkami dodatnemi osi OX, OY, OZ

a', b', c' dostawy kątów jakie kierunek dodatny osi OY', tworzy z kierunkami dodatnemi osi OX, OY, OZ

a'', b'', c'' dostawy kątów jakie kierunek dodatny osi OZ', tworzy z kierunkami dodatnemi osi OX, OY, OZ

λ, μ, ν kąty YOZ, ZOX, XOY.

Weźmy jakikolwiek punt M w przestrzeni, nazwijmy spółrzędne tego punktu

$$\mathrm{MA} = z \qquad \mathrm{AB} = y \qquad \mathrm{OB} = x$$
$$\mathrm{M'A'} = z' \qquad \mathrm{A'B'} = y' \qquad \mathrm{OB'} = x'$$

Rzuty linij łamanych OBAM, OB'A'M na trzy osie OX, OY, OZ są sobie równe; mamy więc :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y \operatorname{dos} \nu + z \operatorname{dos} \mu = ax' + a'y' + a''z' \\ x \operatorname{dos} \nu + y + z \operatorname{dos} \lambda = bx' + b'y' + b''z' \\ x \operatorname{dos} \mu + y \operatorname{dos} \lambda + z = cx' + c'y' + c''z' \end{array} \right.$$

równania Igo stopnia, z których z łatwością otrzymać można x, y, z wyrażone przez x', y', z', t. j. wzory dla przejścia z układu X Y Z do układu X' Y' Z' lub odwrotnie. Zauważyć należy, że a, b, c nie są dowolnemi, lecz czynić muszę zadosyć pewnemu warunkowi [**66** (1)]; toż samo powiedzieć można o $a', b', c', a'', b'', c''$;

między temi dziewięcioma spółczynnikami zachodzą, więc trzy równania warunkowe.

I tak, jeżeli osie OX, OY, OZ są prostopadlemi

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

wzory (2) stają się

$$(3) \qquad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z' \\ y = bx' + b'y' + b''z' \\ z = cx' + c'y' + c''z' \end{cases}$$

a trzy równania warunkowe są następujące [66 (1)]

$$(4) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{cases}$$

Jeżeli nietylko osie OX, OY, OZ ale także osie OX′, OY′, OZ′ są prostopadlemi, mamy [66 (3)] jeszcze

$$(5) \qquad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \\ a''a + b''b + c''c = 0 \end{cases}$$

Z tych wzorów wyprowadzić można z łatwością następujące

$$(6) \qquad \begin{cases} a = b'c'' - c'b'' \qquad a' = cb'' - bc'' \qquad a'' = bc' - cb' \\ b = c'a'' - a'c'' \qquad b' = ac'' - ca'' \qquad b'' = ca' - ac' \\ c = a'b'' - b'a'' \qquad c' = ba'' - ab'' \qquad c'' = ab' - ba' \end{cases}$$

zastrzegając jednak, dla uniknienia dwuznaczności, że gdyby nowy układ był odwrotnie rozłożony niż dawny t. j. gdyby zestawiając ze sobą kierunki OX i OX′, OY i OY′ kierunki dodatne OZ i OZ′ rozchodziły się w strony przeciwne, należy wziąść drugie strony równań (6) ze znakiem przeciwnym.

68. Równanie płaszczyzny. Funkcja dwóch zmiennych niezależnych dana przez równanie algebraiczne pierwszego stopnia

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

przedstawia płaszczyznę. W rzeczy saméj, widzimy naprzód, że przecięcia się powierzchni (1) z płaszczyznami spółrzędnych, czyli *ślady* powierzchni (1) na tych płaszczyznach

$$Ax + By + D = 0 \qquad Ax + Cz + D = 0 \qquad By + Cz + D = 0$$

które otrzymamy z równania (1) i z równań płaszczyzn spółrzędnych [**64**] :

$$z = 0 \qquad y = 0 \qquad x = 0$$

zakładając, że równania te razem zachodzą, są linjami prostemi. Nadto, jakkolwiek zmienimy układ płaszczyzn spółrzędnych, ponieważ wzory służące do téj zmiany [**67**] są pierwszego stopnia, równanie (1) pozostanie pierwszego stopnia, a zatém powierzchnia (1) będzie miała zawsze ślady prostolinijne na płaszczyznach spółrzędnych. Powierzchnia ta, która z jakąkolwiek płaszczyzną przecina się podług linji prostéj, sama jest płaszczyzną.

Odwrotnie, każda płaszczyzna może być przedstawioną przez równanie pierwszego stopnia. Aby tego dowieść i zarazem otrzymać równanie płaszczyzny w dogodniéjszym kształcie, przypuśćmy że układ spółrzędnych jest prostokątnym, i z początku O wyprowadźmy prostopadłę OL do płaszczyzny ABC (fig. 34) :

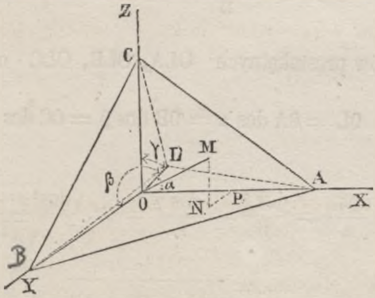


fig. 34.

Nazwijmy długość téj prostopadłéj $OL = p$, kąty jakie tworzy z osiami α, β, γ, i weźmy jakikolwiek punkt M na płaszczyznie którego spółrzędne nazwiemy x, y, z. Rzuty linji OM i linji łamanéj OPNM na kierunek OL, będą równe, a zatem

(2) $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

równanie, które jest sprawdzoném dla każdego punktu na płasczyznie, a zatem jest równaniem płaszczyzny. Kąty α, β, γ prostopadłéj do płasczyzny z osiami, są zarazem kątami saméj płasczyzny z płasczyznami spółrzędnych; dostawy ich czynić muszą zadosyć warunkowi [**66** (1)] :

$$\text{(3)} \qquad \text{dos}^2\,\alpha + \text{dos}^2\,\beta + \text{dos}^2\,\gamma = 1$$

Jeżeli płasczyzna przechodzi przez początek, $p = 0$ a równanie staje się

$$x \,\text{dos}\,\alpha + y\,\text{dos}\,\beta + z\,\text{dos}\,\gamma = 0$$

Równanie (2) można otrzymać wprost z (1). Przypuszczając osie prostopadłe, równanie śladu AB

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{D} = 0$$

da nam przecięcie się tego śladu z osią OX

$$0\text{A} = -\frac{\text{D}}{\text{A}}$$

otrzymamy podobnież

$$0\text{B} = -\frac{\text{D}}{\text{B}} \qquad 0\text{C} = -\frac{\text{D}}{\text{C}}$$

lecz z trójkątów prostokątnych OLA, OLB, OLC otrzymamy :

$$0\text{L} = 0\text{A}\,\text{dos}\,\alpha = 0\text{B}\,\text{dos}\,\beta = 0\text{C}\,\text{dos}\,\gamma$$

czyli

$$\text{(4)} \qquad -\frac{p}{\text{D}} = \frac{\text{dos}\,\alpha}{\text{A}} = \frac{\text{dos}\,\beta}{\text{B}} = \frac{\text{dos}\,\gamma}{\text{C}} = \pm\frac{\sqrt{\text{dos}^2\alpha + \text{dos}^2\beta + \text{dos}^2\gamma}}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2 + \text{C}}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2 + \text{C}^2}}$$

Dzieląc więc równanie (1) przez $\pm\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2 + \text{C}^2}$ i podstawiając wartości (4) otrzymamy równanie (2).

Widzimy zarazem, że spółczynniki A, B, C, są proporcjonalne dostawom kątów, jakie płasczyzna tworzy z płasczyznami spółrzędnemi i że spółczynnik D jest w tymże samym stosunku do odległości płasczyzny od początku.

69. Równanie prostéj w przestrzeni. Prosta w przestrzeni jest wyznaczoną przez przecięcie się dwóch płaszczyzn

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D + 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' + 0 \end{cases}$$

równania więc (1) razem zachodzące przedstawiają prostę w przestrzeni. Rugując z nich raz jedną zmiennę np. y, drugi raz drugą np. x, możemy zastąpić te równania przez następujące

$$(2) \qquad x = az + p \qquad y = bz + q$$

z których pierwsze jest równaniem rzutu prostéj na płaszczyznę XOZ lub też równaniem płaszczyzny rzucającéj prostę na płaszczyznę XOZ; drugie podobnież co do płaszczyzny YOZ.

Można także wyznaczyć prostę przez kąty α, β, γ jakie tworzy z osiami i przez punkt M, przez który prosta ma przechodzić.

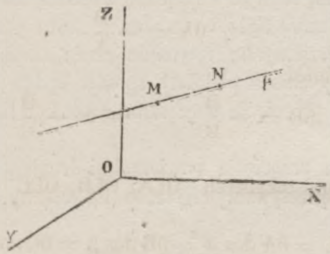


fig. 35.

Oznaczywszy przez x', y', z' spółrzędne punktu M, przez x, y, z spółrzędne jakiegokolwiek punktu N prostéj, przez ρ odległość MN liczoną w kierunku któren czyni z osiami kąty α, β, γ, i rzucając tę odległość na trzy osie, otrzymamy :

$$x - x' = \rho \operatorname{dos} \alpha \qquad y - y' = \rho \operatorname{dos} \beta \qquad z - z' = \rho \operatorname{dos} \gamma$$

a zatem

$$(3) \qquad \frac{x - x'}{\operatorname{dos} \alpha} = \frac{y - y'}{\operatorname{dos} \beta} = \frac{z - z'}{\operatorname{dos} \gamma}$$

równania, które można wziąść za równanie prostéj, i których spółczynniki określają kąty jakie prosta tworzy z osiami. Między temi spółczynnikami zachodzi równanie warunkowe [66]

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Widoczną jest rzeczą, że

$x = 0 \quad y = 0$ są równaniami osi Oz
$y = 0 \quad z = 0$ są równaniami osi Ox
$z = 0 \quad x = 0$ są równaniami osi Oy

70. Powierzchnie 2go stopia są to powierzchnie, przedstawiające funkcje algebraiczne 2go stopnia dwóch zmiennych niezależnych:

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y'^2 + A''z''^2 + 2\,Byz + 2\,B'zx + 2\,B''xy$$
$$2\,Cx + 2\,C'y + 2\,C''z + F = 0$$

Przecięcie tych powierzchni przez jakąkolwiek płaszczyznę, jest zawsze linją 2go stopnia: bo płaszczyzna jest wyrażoną przez równanie 1go stopnia, rugując więc jedną nieznanę otrzymamy równanie 2go stopnia, które będzie równaniem rzutu przecięcia na jednę z płaszczyzn spółrzędnych; równanie rzutu na drugą z płaszczyzn spółrzędnych otrzymane w podobny sposób będzie znów równaniem drugiego stopnia; przecięcie więc samo musi być linją drugiego stopnia.

Jeżeli wszystkie przecięcia powierzchni drugiego stopnia są elipsami, powierzchnię nazywamy *elipsoidą* (fig. 36) np.

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

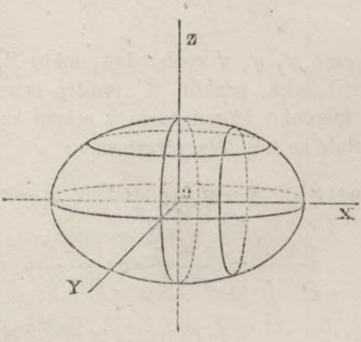


fig. 36.

Powierzchnia, któréj jedne przecięcia są elipsami, inne hyperbolami, nazywamy *hyperboloidą* np.

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(fig. 37)}.$$

lub

(4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(fig. 38)}$$

pierwszę z nich (3) nazywamy *hyperboloidą o jednéj powłoce*, drugą (4) *hyperboloidą o dwóch powłokach* : ta ostatnia składa się z dwóch oddzielnych części. Jakoż, przecięcia pierwszéj (3) równoległe do płaszczyzny XOY, t. j. przez płaszczyznę $z=m$, których równaniem jest :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{m^2}{c^2}$$

dla różnych wartości m są elipsami; przecięcia równolegle do dwóch innych płaszczyzn spółrzędnych są hyperbolami (fig. 37). Przecięcia

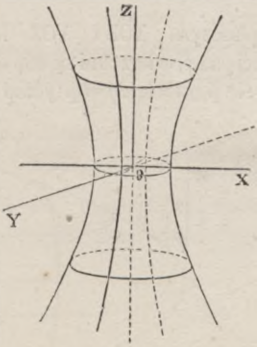


fig. 37.

drugiéj (4), równoległe do płaszczyzny XOY t. j. przez płaszczyznę $z=m$, których równaniem jest :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{m^2}{c^2}-1$$

mogą być elipsami jeżeli $m>+c$, mogą być urojonemi t. j. nie istnieć wcale, jeżeli wartość m jest mniéjszą od wartości c, i znów stać się elipsami, jeżeli m jest odjemném i ma wartość większą od c (fig. 38). Oś OY wcale nie przecina powierzchni. Przecięcia równolegle do płasczyzn XOZ i YOZ są hyperbolami.

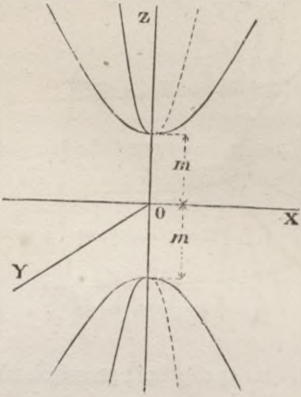


fig. 38.

Jeżeli niektóre przecięcia powierzchni są elipsami, inne parabolami, powierzchnia nazywa się *paraboloidą eliptyczną* (fig. 39) np.

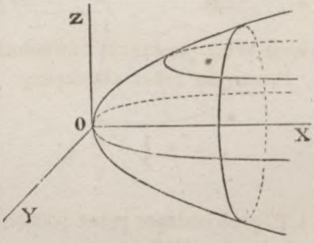


fig. 39.

(5 $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$$

Jeżeli przecięcia mogą być parabolami

lub hyperbolami (fig. 40) powierzchnia nazywa się *paraboloidą hyperboliczną* np.

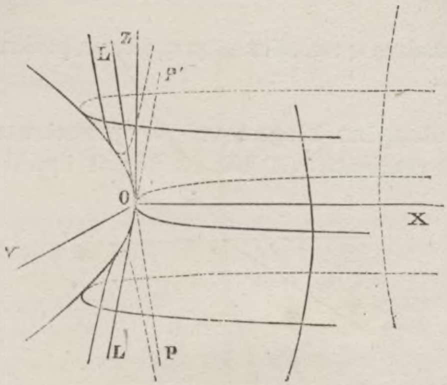


fig. 40.

(6) $$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2\,x$$

jest równaniem powierzchni, która przecięta przez płasczyznę XOY czyli $z = 0$, lub XOZ, czyli $y = 0$ daje parabole :

$$y^2 = 2\,px \qquad\qquad z^2 = -\,2\,qx$$

jak również przecięcia przez płasczyzny równoległe do powyższych, będą parabolami. Przecięcie przez płasczyznę YOZ czyli $x = 0$ da

$$y = \pm \sqrt{\frac{p}{q}}\, z$$

dwie proste LP, L'P' przechodzące przez początek; przecięcia przez płasczyzny równoległe do YOZ, czyli $x = \pm m$ dadzą hyperbole

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = \pm\,2m$$

Widzimy że przecięcia téj powierzchni przez płaszczyzny mogą być linjami prostemi przecinającemi się : biorąc jednę z tych prostych za oś OY, drugę za oś OZ, równanie paraboloidy hyperbolicznéj stanie się

$$yz = kx \tag{7}$$

Walec i ostrokrąg są szczególnemi przypadkami powierzchni drugiego stopnia.

71. Spółrzędne biegunowe w przestrzeni. Niech będę trzy osie prostopadle OX, OY, OZ (fig. 41) i punkt M w prze-

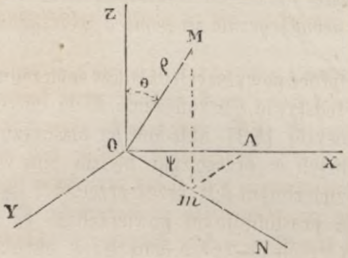


fig. 41.

strzeni :

$\rho = OM$ odległość punktu M od początu O czyli promień wodzący;

$\theta = ZOM$ kąt, jaki promień wodzący czyni z osią OZ;

$\psi = XON$ kąt, jaki rzut ON promienia wodzącego na płaszczyznę XOY, tworzy z osią OX;

nazywają się *spółrzędnemi biegunowemi* punktu M w przestrzeni. Spółrzędne te wyznaczają zupełnie punkt M : kąt ψ wyznacza płaszczyznę ZON, a kąt θ i promień wodzący ρ położenie punktu na téj płaszczyznie.

Nazwawszy

$$x = 0A \quad y = Am \quad z = Mm$$

spółrzędne prostolinijne prostokątne punktu M; mamy :

$$0m = \frac{x}{\operatorname{dos}\psi} = \rho \operatorname{wst}\theta,\ y = 0m \operatorname{wst}\psi,\ z = \rho \operatorname{dos}\theta\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

a zatém

$$x = \rho \text{ wst } \theta \text{ dos } \psi \qquad y = \rho \text{ wst } \theta \text{ wst } \psi \qquad z = \rho \text{ dos } \theta$$

dla przejścia ze spółrzędnych prostokątnych, do spółrzędnych biegunowych; i odwrotnie :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\text{ , } \quad \text{st } \psi = \frac{x}{y}\text{ , } \quad \text{dos } \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

72. *Funkcje więcéj jak dwóch zmiennych niezależnych nie bywają przedstawionemi geometrycznie za pomocą spółrzędnych.*

73. Uwaga. Oprócz powyższych układów spółrzędnych przestrzeni, możemy sobie przedstawić nieskończenie wiele innych, odpowiadających podanym powyżéj [**53**] układom na płaszczyznie. I tak, ogólny układ spółrzędnych w przestrzeni będzie ten, w którym punkt w przestrzeni wyznaczonym jest przez przecięcie się trzech powierzchni : w układzie prostolinijnym powierzchnie te są płaszczyznami równoległemi do trzech płaszczyzn danych; w układzie biegunowym [**71**] jedną z powierzchni jest powierzchnia kuli, zakreślona z początku promieniem zmiennym ρ, dwoma innemi powierzchniami, ostrokrąg mający wierzchołek w początku, którego oś stała OZ czyni z tworzącą kąt zmienny θ, i płaszczyzna przechodząca przez tę oś OZ i tworząca kąt zmienny θ z kierunkiem stałym OX, prostopadłym do OZ w początku O i t. p.

Układ *spółrzędnych czteropłaszczyznowych*, w którym punkt w przestrzeni oznaczonym jest za pomocą odległości od czterech ścian ostrosłupa trójkątnego danego, odpowiada układowi spółrzędnych trzylinijnych [**56**] na płaszczyznie.

ROZDZIAŁ III

O ILOŚCIACH UROJONYCH

Uwagi ogólne. — Wyrażenie Moivre'a. — Moduł i argument. — Przedstawienie geometryczne ilości urojonych. — Twierdzenia tyczące się iloczynu, potęgi, summy wyrażeń urojonych. — Zastosowania : — Pierwiastek stopnia $m$go. — Rozwinięcia wst mx, dos mx podług potęgi łuku, i wst$^m x$ dos$^m x$ podług wielokrotności łuku. — Uwagi nad użyciem ilości urojonych.

74. Uwagi ogólne. Ilości *urojone* podobnie jak ilości odjemne, wprowadzamy w algebrze dla uogólnienia wypadków otrzymanych przez rozwiązywanie równań.

Ogólność wypadków wymaga uważania ilości algebraicznych nie tylko pod względem *wielokrotności* całkowitéj, ułamkowéj, wymiernéj lub niewymiernéj, pewnéj jedności, ale także pod względem *jakości* téjże jedności, nadającéj tą samą jakość całéj ilości.

Dla uogólnienia wypadków otrzymanych przez rozwiązywanie równań stopnia pierwszego, uważamy ilości dwojakiego rodzaju : jedne z nich nazywamy *dodatnemi*, drugie *odjemnemi* ; uważamy pierwsze ilości jako wielokrotności pewnéj jedności, którą nazywamy dodatną, drugie jako wielokrotności innéj jedności, nazwanéj dla odróżnienia odjemną. Związek istniejący pomiędzy temi dwoma różnemi jednościami, określamy ściśle w ten sposób, że dodać pewną wielokrotność jednéj z nich, wychodzi na to samo co odjąć tą samą wielokrotność drugiéj i odwrotnie. Z tego określenia z łatwością wyprowadzamy prawidła działań prostych wykonywanych na ilościach jednego, drugiego lub obu razem gatunków: działań, których wypadkiem jest zwykle ilość jednego gatunku t. j. dodatna lub odjemna. Dla odróżnienia jednego gatunku ilości od drugiego, nie piszemy wyraźnie jedności, lecz poprzedzamy wielokrotność znakiem $+$ lub $-$. Widoczném jest zresztą, że ilość jednego gatunku nie może być nigdy równą ilości drugiego gatunku, chyba jeżeli obiedwie są zerami. Jeżeli w zadaniu, szukając ilości pewnego gatunku znajdujemy na wypadek ilość drugiego gatunku, wnosimy że zadanie jest niemożebném do rozwiązania, i że zmienić je należy w taki sposób, aby odpowiedź była ilością tego samego gatunku, co pytanie.

W podobny sposób, dla uogólnienia wypadków otrzymanych przez rozwiązywanie równań stopnia 2go, a następnie i wyższych stopni, uważamy znów ilości dwojakie: jedne z nich nazywamy *rzeczywistemi*, drugie *urojonemi*; jedne z nich uważamy jako wielokrotności całkowite, ułamkowe, wymierne lub niewymierne, dodatne lub odjemne, jedności pewnego gatunku którą nazywamy *rzeczywistą*, a drugie jako wielokrotności rozmaite jedności innego gatunku, którą dla odróżnienia nazywamy *urojoną*. Związek istniejący między temi jednościami określamy w ten sposób, że dodać kwadrat pewnéj wielokrotności jednéj z nich, (urojonéj), wychodzi na to samo co odjąć kwadrat téj saméj wielokrotności drugiéj (rzeczywistéj), i odwrotnie. Z tego określenia wyprowadzamy prawidła działań algebraicznych, jakie dokonywać możemy na ilościach jednego, drugiego lub obu razem gatunków. Jeżeli działania te dają na wypadek potęgi parzyste każdéj z osobna ilości, widocznie wypadek ten może być uważanym, jako zawierający ilości jednego tylko gatunku. W przeciwnym razie wypadek zawierać będzie ilości obu gatunków t. j. rzeczywiste i urojone.

75. W ten sam sposób uważać możemy ilości nietylko dwóch, ale ilukolwiek gatunków. Niech będą w ogólności jedności różnego gatunku, które oznaczymy dla odróżnienia przez

$$1,\ i,\ j,\ k\ \ldots$$

tak, że ilości tych różnych gatunków wyrażonemi będą przez

$$a,\quad bi,\quad cj,\quad dk\ \ldots$$

Ponieważ wielokrotności jedności różnych gatunków nie mogą być równemi pomiędzy sobą (przypuszczamy że gatunki te o tyle są różne, że żadna jedność nie jest wielokrotnością drugiéj), równanie

$$a+bi+cj+dk+\ldots=a'+b'i+c'j+d'k+\ldots$$

jest koniecznie równoważném układowi równań:

$$a=a'\qquad b=b'\qquad c=c'\qquad d=d'\ldots$$

Wyrażenia, w które wchodzą jedności różnego gatunku, jak np. rzeczywiste i urojone, nazywać będziemy wyrażeniami *mięszanemi*.

Niech będzie wyrażenie mięszane jedności i, j dwóch gatunków

(1) $$aj+bi=a'j+b'i$$

przypuszczamy że i i j są o tyle różnego gatunku, że równanie to pociąga za sobą równania

(2) $$a=a'\qquad b=b'$$

i odwrotnie; t. j. że wielokrotności jedności j nie mogą się łączyć z wielokrotnościami jedności i: równanie (1) jest tylko skróconym sposobem napisania równań (2).

Z téj własności, wyciągnąć możemy z łatwością następujące:

Jeżeli mamy wyrażenia *mięszane*:

$$(3)\qquad \begin{cases} a_0 j + b_0 i = a'_0 j + b'_0 i \\ a_1 j + b_1 i = a'_1 j + b'_1 i \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_m j + b_m i = a'_m j + b'_m i \end{cases}$$

które zastępują układ równań (4)

$$(4)\qquad \begin{cases} a_0 = a'_0 \quad b_0 = b'_0 \\ a_1 = a'_1 \quad b_1 = b'_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_m = a'_m \quad b_m = b'_m \end{cases}$$

mamy również

$$(5)\qquad (a_0 \pm a_1 \pm \ldots \pm a_m) j + (b_0 \pm b_1 \pm \ldots \pm b_m) i = (a'_0 \pm a'_1 \pm \ldots \pm a'_m) j + (b'_0 \pm b'_1 \pm \ldots \pm b'_m) i$$

czyli *summy, lub różnice wyrażeń mięszanych równych, są sobie równe*;

$$(6)\qquad (a_0 j + b_0 i)(a_1 j + b_1 i) \ldots (a_m j + b_m i) = (a'_0 j + b'_0 i)(a'_1 j + b'_1 i) \ldots (a'_m j + b'_m i)$$

czyli *iloczyny wyrażeń mięszanych równych są sobie równe*

$$(7)\qquad \frac{a_0 j + b_0 i}{a_m j + b_m i} = \frac{a'_0 j + b'_0 j}{a'_m j + b'_m i}$$

czyli *stosunki wyrażeń mięszanych równych są sobie równe*;

$$(8)\qquad (aj + bi)^n = (a'j + b'i)^n$$

przypuszczając w (6) wszystkie czynniki równe i w liczbie n; czyli że *potęgi tego samego stopnia wyrażeń mięszanych równych są sobie równe* i t. p.

Równości tych z łatwością można dowieść, uważając równania (4), i sprowadzając każdą z tych równości do równości konieczněj wielokrotności tych samych jednostek. Też same lub podobne własności miałyby miějsce, gdybyśmy zamiast uważać wyrażenia mięszane z ilości dwóch gatunków, uważali ilości trzech, czterech, ilukolwiek gatunków.

76. W szczególnym przypadku, jeżeli szukamy, wyrażenia

$$aj + bi$$

takiego, żeby podstawiwszy je za x w równaniu drugiego stopnia

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

równanie to było sprawdzoněm, znajdujemy bez trudności, że założywszy

$$j = 1 \qquad i^2 = -1$$

a i b zawsze utworzyć można z p i q, t. j. wyrazić przez tę samę co p i q jedność, tak żeby wyrażenie

$$a + bi \tag{2}$$

podstawione za x, czyniło zadość równaniu (1). Wyrażenie (2) nazywa się wtedy *wyrażeniem urojoněm*; $j = 1$ jednością rzeczywistą, i jednością urojoną. Można uważać bi które wyraża wielokrotność jedności urojoněj za iloczyn z b, wielokrotności jedności rzeczywistěj, przez i, jedność urojoną; w każdym razie a i b będą rzeczywistemi.

Ponieważ $i^2 = -1$ napisać można $i = \pm\sqrt{-1}$ co oznacza tylko, (ponieważ $\sqrt{-1}$ wyraża działanie pod pewnym względem niedorzeczne), że nie ma możliwego przejścia wprost od jedności rzeczywistěj do jedności urojoněj, lecz że kwadrat z wielokrotności jedności urojoněj, może być wyrażonym przez jedność rzeczywistą, z tym warunkiem żeby gdzie miał być dodanym, był odjętym i odwrotnie.

W szczególnym przypadku a lub b mogą być zerami; w tym ostatnim razie wyrażenie (2) staje się rzeczywistem, wyrażenia rzeczywiste mogą więc być uważanemi jako szczególne przypadki wyrażeń urojonych.

Wszystkie własności udowodnione [**75**] dla wyrażeń mięszanych jakichkolwiek, stosują się widocznie i do wyrażeń urojonych.

77. Moduł i argument. Niech będzie wyrażenie urojone

$$a + bi \tag{1}$$

Nazwijmy

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$$

ponieważ a i b są mniéjszemi od ρ, założyć możemy

$$a = \rho \operatorname{dos} \omega \qquad b = \rho \operatorname{wst} \omega$$

$\operatorname{dos} \omega$ i $\operatorname{wst} \omega$ są zawsze ułamkowemi, mniéjszemi od jedności, których summa kwadratów daje jedność, tak że mamy zawsze

$$a^2 + b^2 = \rho^2$$

Wartości ρ i ω związane są z wartościami a i b, za pomocą związków

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = +\sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{dos} \omega = \dfrac{a}{+\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \operatorname{wst} \omega = \dfrac{b}{+\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right.$$

tak, że mając a i b wyznaczyć możemy ρ i ω, i odwrotnie.

Wyrażenie (1) zastąpić więc możemy przez wyrażenie

$$\rho(\operatorname{dos} \omega + i \operatorname{wst} \omega) \tag{3}$$

ilość ρ nazywawać będziemy *modułem*, i uważać będziemy zawsze jako ilość dodatną; ilość kątową ω nazywać będziemy *argumentem*; znak a i b wyznaczy nam ćwiartkę okręgu koła, w któréj kończyć się będzie łuk ω: jeżeli a i b są oba dodatnemi, ω kończyć się będzie w pierwszéj ćwiartce; jeżeli b dodatném a a odjemném, w drugiéj ćwiartce; jeżeli b i a oba odjemnemi, w trzeciéj ćwiartce; jeżeli b odjemne, a dodatne, w czwartéj ćwiartce. Ogólność przekszałcenia (2) nie będzie więc zmniéjszoną przyjmując ρ zawsze dodatném.

Moduł ρ jest zawsze wyznaczonym: dane wyrażenie urojone $a+bi$ może mieć tylko jeden moduł $\rho=+\sqrt{a^2+b^2}$, ponieważ zakładamy, że moduł ten ma być koniecznie dodatnym. Lecz argument ω nie jest wyznaczonym: wyrażenie urojone (3) lub wyrażenie równoważne (1) nie zmieni się jeżeli do argumentu ω dodamy, lub jeżeli od tego argumentu odéjmiemy wielokrotność całkowitą 2π; bo mamy

$$(4)\qquad a+bi=\rho\,(\text{dos}\,\omega+i\,\text{wst}\,\omega)=\rho\,[\text{dos}\,(\omega\pm 2n\pi)+i\,\text{wst}\,(\omega\pm 2n\pi)]$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą.

Ilości rzeczywiste, które jakeśmy już wyżéj powiedzieli, są szczególnym przypadkiem wyrażenia (1), mogą być również uważane, jako zawarte w wyrażeniu (3), przypuszczając zawsze ρ dodatne; ilości rzeczywiste dodatne odpowiadać będą wartości $\omega=2n\pi$, ilości rzeczywiste odjemne wartości $\omega=(2n+1)\pi$; wartość jednych i drugich bez względu na znak będzie równą wartości modułu: mamy bowiem, oznaczywszy przez A wartość rzeczywistą:

$$(5)\qquad \begin{aligned} +A&=A\,(\text{dos}\,2n\pi+i\,\text{wst}\,2n\pi)\\ -A&=A\,[\text{dos}\,(2n+1)\pi+i\,\text{wst}\,(2n+1)\pi] \end{aligned}$$

Twierdzenie I. *Aby dwa wyrażenia urojone były sobie równe, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby ich moduły były sobie równe, a argumenty różniły się o wielokrotność* *całkowitą* 2π.

W rzeczy saméj, jeżeli

$$\rho(\text{dos}\,\omega + i\,\text{wst}\,\omega) = \rho'(\text{dos}\,\omega' + i\,\text{wst}\,\omega')$$

to [**75**]

$$\rho\,\text{dos}\,\omega = \rho'\,\text{dos}\,\omega' \qquad \rho\,\text{wst}\,\omega = \rho'\,\text{wst}\,\omega'$$

Podnosząc do kwadratu i dodając

$$\rho^2(\text{dos}^2\omega + \text{wst}^2\omega) = \rho'^2(\text{dos}^2\omega' + \text{wst}^2\omega')$$

czyli

$$\rho^2 = \rho'^2$$

a zatem

$$\rho = \rho'$$

zważywszy, że tak ρ jak ρ' mogą być tylko z określenia dodatnemi; a więc także

$$\text{dos}\,\omega = \text{dos}\,\omega' \qquad \text{wst}\,\omega = \text{wst}\,\omega'$$

czyli

$$\omega - \omega' = \pm 2n\pi$$

W razie wyrażeń urojonych, tak zwanych *sprzężonych* t. j. różniących się znakiem b, jak

$$a + bi, \qquad a - bi$$

moduły są równe, argumenta mają dostawy równe i tych samych znaków, wstawy równe i znaków przeciwnych; summa więc tych argumentów jest wielokrotnością całkowitą 2π; tak że jeżeli

$$a + bi = \rho(\text{dos}\,\omega + i\,\text{wst}\,\omega)$$

to

$$a - bi = \rho[\text{dos}\,(2n\pi - \omega) + i\,\text{wst}\,(2n\pi - \omega)]$$

78. Przedstawienie geometryczne ilości urojonych. Tak jak ilości odjemne mogą być przedstawionemi geometrycznie [39] za pomocą prostych, odcinanych w jednym kierunku, lecz w stronę przeciwną prostym przedstawiającym ilości dodatne, tak ilości urojone na zasadzie pewnéj umowy, mogą być przedstawione geometrycznie w następujący sposób :

Niech będzie wyrażenie urojone

(1) $$a + bi$$

czyli

$$\rho\left(\operatorname{dos}\omega + i \operatorname{wst}\omega\right)$$

Niech będą dwie osie prostopadłe na płasczyznie XX_1, YY_1. (fig. 42)

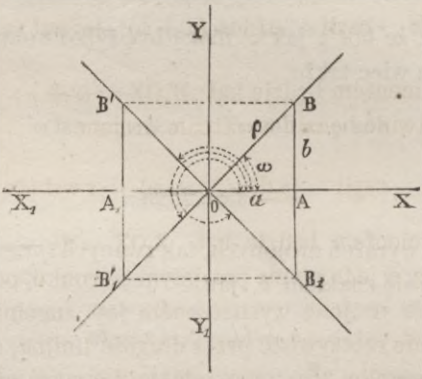


fig. 42.

Weźmy $OA = a$ na osi XX_1, $AB = b$ w kierunku prostopadłym t. j. równoległym do YY_1, *punkt* B *uważać będziemy jako przedstawiający wyrażenie urojone* (1).

Łącząc OB, mamy

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2},\quad OA = OB \operatorname{dos} BOA,\quad AB = OB \operatorname{wst} BOA$$

czyli

$$OB = \sqrt{a^2 + b^2},\ \operatorname{dos} BOA = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \operatorname{wst} BOA = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

OB przedstawia więc *moduł* ρ, kąt BOA *argument* ω wyrażenia urojonego (1). Punkt B się nie zmieni, jeżeli nie zmieniając OB, powiększymy lub zmniéjszymy kąt BOA o całkowitą liczbę 2π, co jest zgodném z tem cośmy wyżéj powiedzieli [**77**].

Jeżeli b pozostaje dodatném, zaś a jest odjemném, odciąwszy $a = OA_1$ w stronę przeciwnę OA, otrzymamy punkt B′ przedstawiający wyrażenie urojone

$$-a + bi \quad \text{czyli} \quad \rho[\text{dos}(\pi - \omega) + i\,\text{wst}(\pi - \omega)]$$

gdzie argumentem będzie kąt $B'OA = \pi - \omega$; podobnież punt B'_1 przedstawiać będzie wyrażenie urojone

$$-a - bi \quad \text{czyli} \quad \rho[\text{dos}(\pi + \omega) + i\,\text{wst}(\pi + \omega)]$$

gdzie argumentem będzie kąt $B'_1OX = \omega + \pi$; punkt zaś B_1 przedstawiać będzie wyrażenie urojone

$$a - bi \quad \text{czyli} \quad [\rho\,\text{dos}(2\pi - \omega) + i\,\text{wst}(2\pi - \omega)]$$

gdzie argumentem będzie kąt $B_1OX = 2\pi - \omega$. Kąty te liczyć należy w jednym raz przyjętym kierunku, od 0 do 2π.

Wyrażenie urojone wyznaczoném jest zupełnie, już nie jak wyrażenie rzeczywiste przez długość linijną, odciętą na pewnym kierunku, lecz przez położenie punktu na płaszczyznie: odległość tego punktu B od początku O przedstawia *moduł*, kąt zaś OB z osią OX *argument* wyrażenia urojonego. Jeżeli wyrażenie urojone staje się rzeczywistém t. j., jeżeli $\omega = 0$ lub $\omega = \pm 2n\pi$ [**77**] punkt B przypada na osi XX_1, na któréj odcinamy wielkości rzeczywiste a.

79. Działania na wyrażeniach urojonych. Twierdzenie II. *Moduł iloczynu ilukolwiek wyrażeń urojonych jest iloczynem modułów czynników; argument zaś iloczynu jest summą argumentów czynników.*

Dla dwóch wyrażeń urojonych mamy

$$\begin{aligned}
&\rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega) \times \rho'\,(\mathrm{dos}\,\omega' + i\,\mathrm{wst}\,\omega') \\
&= \rho\rho'[\mathrm{dos}\,\omega\,\mathrm{dos}\,\omega' + i\,(\mathrm{wst}\,\omega\,\mathrm{dos}\,\omega' + \mathrm{dos}\,\omega\,\mathrm{wst}\,\omega') \\
&\qquad + i^2\,\mathrm{wst}\,\omega'\,\mathrm{wst}\,\omega] \\
&= \rho\rho'\,[(\mathrm{dos}\,\omega\,\mathrm{dos}\,\omega' - \mathrm{wst}\,\omega\,\mathrm{wst}\,\omega') + i\,(\mathrm{wst}\,\omega\,\mathrm{dos}\,\omega' \\
&\qquad + \mathrm{dos}\,\omega\,\mathrm{wst}\,\omega') \\
&= \rho\rho'\,[\mathrm{dos}\,(\omega + \omega') + i\,\mathrm{wst}\,(\omega + \omega')]
\end{aligned}$$

zważywszy że $i^2 = -1$. Dla ilukolwiek wyrażeń mielibyśmy widocznie

$$\begin{aligned}
(6)\qquad &\rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega) \times \rho'\,(\mathrm{dos}\,\omega' + \\
&i\,\mathrm{wst}\,\omega') \times \rho''\,(\mathrm{dos}\,\omega'' + i\,\mathrm{wst}\,\omega'') \times \ldots \\
&= \rho\rho'\rho''\ldots\,[\mathrm{dos}\,(\omega + \omega' + \omega'' + \ldots) + \\
&i\,\mathrm{wst}\,(\omega + \omega' + \omega'' + \ldots)]
\end{aligned}$$

Udowodniwszy dla dwóch wyrażeń, łatwo udowodnić tego twierdzenia dla trzech, następnie dla czterech i t. d. Twierdzenie więc jest ogólném.

Wniosek I. *Moduł ilorazu dwóch wyrażeń urojonych jest ilorazem modułu dzielnéj przez moduł dzielnika; argument zaś ilorazu jest różnicą argumentów dzielnéj i dzielnika.*

Na zasadzie poprzedzającego twierdzenia

$$\frac{\rho}{\rho'}\Big[\mathrm{dos}\,(\omega - \omega') + i\,\mathrm{wst}\,(\omega - \omega')\Big] \times \rho'\,(\mathrm{dos}\,\omega' + i\,\mathrm{wst}\,\omega') = \rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)$$

a zatem

$$(7)\qquad \frac{\rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)}{\rho'\,(\mathrm{dos}\,\omega' + i\,\mathrm{wst}\,\omega')} = \frac{\rho}{\rho'}\Big[\mathrm{dos}\,(\omega - \omega') + i\,\mathrm{wst}\,(\omega - \omega')\Big]$$

c.b.d.p.

WNIOSEK II. *Moduł potęgi jakiéjkolwiek wyrażenia urojonego, jest potęgą tego samego stopnia modułu danego; argument potęgi jest iloczynem wykładnika, przez moduł wyrażenia danego.*

Powiadam że

$$(8) \qquad [\rho\,(\text{dos}\,\omega + i\,\text{wst}\,\omega)]^m = \rho^m\,(\text{dos}\,m\omega + i\,\text{wst}\,m\omega)$$

Przypuśćmy naprzód m całkowitém dodatném: założywszy w równaniu (6) czynniki równe w liczbie m, otrzymamy równanie (8).

Przypuśćmy powtóre wykładnik ułamkowym $m = \frac{p}{q}$, gdzie p i q całkowite dodatne; mamy

$$\Big[\rho\,(\text{dos}\,\omega + i\,\text{wst}\,\omega)\Big]^{\frac{p}{q}} = [\rho^p(\text{dos}\,p\omega + i\,\text{wst}\,p\omega)\Big]^{\frac{1}{q}}$$

a że

$$\left[\rho^{\frac{p}{q}}\left(\text{dos}\,\frac{p\omega}{q} + i\,\text{wst}\,\frac{p\omega}{q}\right)\right]^q = \rho^p(\text{dos}\,p\omega + i\,\text{wst}\,p\omega)$$

na zasadzie poprzedzającego dowodzenia: q równie jak p są całkowite i dodatne; więc naodwrót podnosząc powyższe równanie do potęgi $\frac{1}{q}$

$$[\rho^p\,(\text{dos}\,p\omega + i\,\text{wst}\,p\omega)]^{\frac{1}{q}} = \rho^{\frac{p}{q}}\left[\text{dos}\,\frac{p\omega}{q} + i\,\text{wst}\,\frac{p\omega}{q}\right]$$

czyli

$$[\rho\,\text{dos}\,\omega + i\,\text{wst}\,\omega)]^{\frac{p}{q}} = \rho^{\frac{p}{q}}\left(\text{dos}\,\frac{p\omega}{q} + i\,\text{wst}\,\frac{p\omega}{q}\right)$$

a zatém równanie (8) ma miéjsce dla wykładnika ułamkowego, dodatnego: $m = \frac{p}{q}$.

Przypuśćmy nakoniec, że wykładnik m jest całkowitym lub ułamkowym, lecz odjemnym: $m = -n$ (gdzie n jest dodatném):

$$
\begin{aligned}
[\rho(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)]^{-n} &= \frac{1}{[\rho(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)]^{n}} \\
&= \frac{1}{\rho^{n}(\mathrm{dos}\,n\omega + i\,\mathrm{wst}\,n\omega)} \\
&= \frac{\rho^{0}(\mathrm{dos}\,2k\pi + i\,\mathrm{wst}\,2k\pi)}{\rho^{n}(\mathrm{dos}\,n\omega + i\,\mathrm{wst}\,n\omega)} \\
&= \rho^{-n}[\mathrm{dos}(2k\pi - n\omega) + i\,\mathrm{wst}(2k\pi - n\omega)] \\
&= \rho^{-n}[\mathrm{dos}(-n\omega) + i\,\mathrm{wst}(-n\omega)]
\end{aligned}
$$

nazywając przez liczbę całkowitą, uważając że

$$1 = \rho^{0}(\mathrm{dos}\,2k\pi + i\,\mathrm{wst}\,2k\pi)$$

i wziąwszy pod uwagę Wniosek I; podstawiając m za $-n$, otrzymamy wzór (8)

$$[\rho(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)]^{m} = \rho^{m}(\mathrm{dos}\,m\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,m\,\omega)$$

Wzór więc (8) ma miéjsce dla jakiegokolwiek wykładnika m: dodatnego, odjemnego, całkowitego lub ułamkowego. Wzór ten znanym jest pod nazwiskiem *Wzoru Moivre'a*.

80. Twierdzenie III. *Moduł summy dwóch wyrażeń urojonych nie jest mniéjszym od różnicy, ani większym od summy modułów części.*

Niech będzie

$$R(\mathrm{dos}\,\Omega + i\,\mathrm{wst}\,\Omega) = \rho(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega) + \rho'(\mathrm{dos}\,\omega' + i\,\mathrm{wst}\,\omega')$$

powiadam że

$$\rho - \rho' \leqq R \leqq \rho + \rho'$$

W rzeczy samej :

$$R \operatorname{dos} \Omega = \rho \operatorname{dos} \omega + \rho' \operatorname{dos} \omega'$$
$$R \operatorname{wst} \Omega = \rho \operatorname{wst} \omega + \rho' \operatorname{wst} \omega'$$

Podnosząc do kwadratu i dodając, zważywszy że $\operatorname{wst}^2 + \operatorname{dos}^2 = 1$:

$$R^2 = \rho^2 + 2\rho\rho' \operatorname{dos}(\omega - \omega') + \rho'^2$$

Największa wartość, jaką może mieć $\operatorname{dos}(\omega - \omega')$ jest $+1$, najmniéjsza jest -1; w pierwszym razie $R^2 = (\rho + \rho')^2$ w drugim $R^2 = (\rho - \rho')^2$; a zatém

$$\rho - \rho' \leqq R \leqq \rho + \rho' \qquad \text{c.b.d.d.}$$

Wniosek. *Moduł summy ilukolwiek wyrażeń urojonych, jest mniéjszym od summy (lub równym summie) modułów części.*

Uwaga. Summy, różnice, iloczyny, ilorazy, potęgi i pierwiastki wyrażeń urojonych kształtu :

$$a + bi \quad \text{lub} \quad \rho(\operatorname{dos} \omega + i \operatorname{wst} \omega)$$

przestawiają się zawsze pod kształtem

$$A + Bi \quad \text{lub} \quad R(\operatorname{dos} \Omega + i \operatorname{wst} \Omega)$$

czyli innemi słowy : funkcje algebraiczne proste (a zatém i złożone) wyrażeń urojonych, są wyrażeniami urojonemi.

81. Wypadki powyższych twierdzeń, można z łatwością przedstawić geometrycznie w następujący sposób :

Summa. Niech będzie wyrażenie urojone

$$w = a + bi = \rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega,)$$

przedstawione geometrycznie [**78**] przez punkt A (fig. 43);

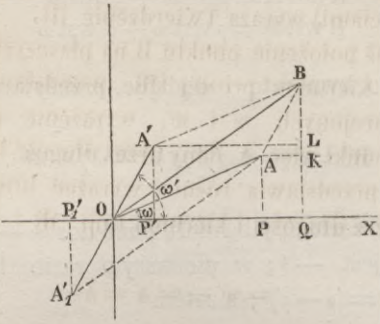


fig. 43.

tak że

$$\mathrm{OP} = a \quad \mathrm{AP} = b \quad \mathrm{OA} = \rho \quad \mathrm{AOP} = \omega$$

i drugie wyrażenie urojone

$$w' = a' + b'i = \rho'\,(\mathrm{dos}\,\omega' + i\,\mathrm{wst}\,\omega')$$

przedstawione geometrycznie przez punkt A′; tak że

$$\mathrm{OP}' = a' \quad \mathrm{A'P'} = b' \quad \mathrm{OA}' = \rho' \quad \mathrm{A'OP} = \omega'$$

Wystawmy równoległobok OA′BA na prostych OA′, OA: powiadam, że punkt B będzie przedstawiał geometrycznie summę

$$W = w + w' = (a + a') + i\,(b + b')$$

W rzeczy samej, mamy trójkąt A′BL = AOP i trójkąt OA′P′ = ABK a zatém

$$\mathrm{OQ} = a + a' \qquad \mathrm{BQ} = b + b' \qquad \text{c. b. d. d.}$$

OB jest więc modułem summy, BOQ argumentem summy; w trójkącie A′OB, warunek:

$$A'B - A'O < OB < A'B + A'O \quad \text{czyli} \quad \rho - \rho' < OB < \rho + \rho'$$

(nierówności, które stać się mogą w szczególnym przypadku równościami) wyraża Twierdzenie III.

Ponieważ położenie punktu B na płaszczyźnie, dane przez długość i kierunek prostéj OB, przedstawia summę W wyrażeń urojonych w i w', wyrażenie w jest różnicą $W - w'$, punkt więc A dany przez długość i kierunek prostéj AO, przedstawia różnicę wyrażeń urojonych W i w danych przez długości i kierunki linji OB i OA′. W rzeczy saméj

$$-w' = -a' - b'i$$

przedstawioném będzie, odcinając $OA'_1 = OA'$ na przedłużeniu OA′; a więc OA będzie przekątnią równoległoboku wystawionego na OB i OA'_1, czyli przedstawiać będzie, co do długości i kierunku, summę wyrażeń w i $-w'$, lub różnicę $w - w'$.

W ogólności, widzimy z łatwością, że *chcąc przedstawić*

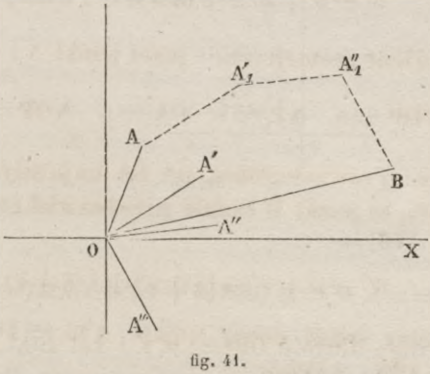


fig. 41.

summę ilukolwiek wyrażeń urojonych, dość jest wykreślić li-

nję łamaną, któréj boki (linje składające) *są równemi i równoległemi z prostemi wyznaczającemi wyrażenia dane : linja łącząca końce téj linji łamanéj* (wypadkowa) *wyznaczy summę wyrażeń urojonych danych.*

Gdyby summa algebraiczna szukana zawierała niektóre wyrażenia urojone ze znakiem mniéj, tworząc linję łamaną, uważaćby należało wyrażenia te jako odcinane w tym samym kierunku, lecz w stronę przeciwną.

Długość wypadkowéj przedstawia moduł summy : jéj kierunek, argument summy : *moduł summy jest więc zawsze mniéjszym od summy modułów.*

Iloczyn. Niech będą dwa wyrażenia urojone :

$$w = a + bi = \rho\,(\text{dos}\,\omega + i\ \text{wst}\,\omega)$$
$$w' = a' + b'i = \rho'\,(\text{dos}\,\omega' + \text{i wst}\,\omega')$$

przedstawione przez punkta A, A_1, czyli wyznaczone przez długość i kierunek prostych OA, OA_1

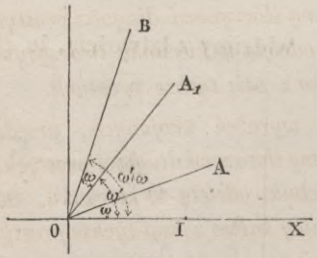


fig. 42.

Wiemy [79] że

$$W = w \times w' = \rho\rho'\,[\text{dos}\,(\omega + \omega') + i\ \text{wst}\,(\omega + \omega')]$$

Biorąc więc długość OB $= \rho \times \rho'$ i kąt $BOA_1 = \omega$, czyli BOX $= \omega + \omega'$, punkt B wyznaczony przez długość i kierunek prostéj OB, przedstawiać będzie iloczyn *W*.

Twierdzenia tego udowodnić można wprost geometrycznie, jak następuje :

Odetnijmy na osi OX długość $OI = +1$ przedstawiającą jedność dodatną. Iloczyn W tak się tworzy z mnożnéj w', jak mnożnik w tworzy się z jedności dodatnéj. Argument ω mnożnika w, tworzy się z argumentu 0 jedności dodatnéj, biorąc od OI ku OY kąt $AOI = \omega$; argument W tworzy się więc z argumentu ω', biorąc od OA_1 ku OY kąt $A_1OB = \omega$.

Moduł mnożnika ρ tworzy się z $+1$, biorąc $\rho \times +1$ i odcinając na OA; moduł iloczynu, tworzy się więc z modułu mnożnej $+\rho'$, biorąc $\rho \times \rho'$ i odcinając na powyżéj oznaczonym kierunku OB.

Przedstawienie to geometryczne działań na ilościach urojonych z łatwością rozciągnąć można do iloczynu ilukolwiek czynników, ilorazu i potęgi, co nam daje Twierdzenie II i Wnioski [**79**] :

Iloczyn ilukolwiek wyrażeń urojonych, przedstawionym jest przez długość równą iloczynowi długości prostych, przedstawiających czynniki, odciętą w kierunku tworzącym z osią kąt, równy summie kątów z osią tychże prostych.

Iloraz dwóch wyrażeń urojonych, przedstawionym jest przez długość równą ilorazowi długości prostych, przedstawiających dzielnę i dzielnik, odciętą w kierunku, tworzącym z osią kąt, równy różnicy kątów z osią tychże prostych.

Potęga wyrażenia urojonego, przedstawioną jest co do długości, przez potęgę długości przedstawiającéj wyrażenie urojone dane; co do kierunku, przez iloczyn kąta wyrażenia urojonego danego z osią i wykładnika potęgi.

Widzimy ztąd, że ilości urojone przedstawiają geometrycznie nietylko *długości*, jak ilości rzeczywiste, ale także *kierunki*, w jakich długości te mają być odcinanemi.

Zastosowania.

82. *Wyciągnąć pierwiastek stopnia* m*go z danéj ilości* H.

Jakakolwiek będzie ilość H, rzeczywista czy urojona, możemy ją przedstawić w kształcie [**77**]:

$$(1) \qquad H = \rho\,(\operatorname{dos}\omega + i \operatorname{wst}\omega)$$

lub, oznaczywszy przez φ najmniéjszy łuk, którego dostawa równa się dostawie ω, wstawa: wstawie ω,

$$\omega = \varphi + 2n\pi$$

gdzie n oznacza całkowitą dodatną lub odjemną:

$$(2) \qquad H = \rho[\operatorname{dos}(\varphi + 2n\pi) + i \operatorname{wst}(\varphi + 2n\pi)]$$

W razie gdyby H było rzeczywistém, φ staje się równém 0, a n całkowitą parzystą lub nieparzystą, stosownie do tego czy H jest dodatném lub odjemném [**79**].

Wyciągając pierwiastek, czyli podnosząc do potęgi $\frac{1}{m}$, na zasadzie [**79**], otrzymamy:

$$(3) \qquad \sqrt[m]{H} = \sqrt[m]{\rho}\,\left[\operatorname{dos}\left(\frac{\varphi}{m} + 2\pi\frac{n}{m}\right) + \operatorname{wst} i\left(\frac{\varphi}{m} + 2\pi\frac{n}{m}\right)\right]$$

Na n w wyrażeniu (2) możemy nadawać wszelkie wartości całkowite nie zmieniając H; lecz każdéj wartości n odpowiadać będzie w ogólności inna wartość $\sqrt[m]{H}$ z wyrażenia (3), ponieważ argument tego ostatniego wyrażenia zawiera ułamek $\frac{n}{m}$, który przybiera różne wartości niekoniecznie całkowite dla różnych wartości n. Odrzucając całkowitę zawartą w ułamku $\frac{n}{m}$, jako nie zmieniającą wartości dostawy i wstawy argumentu, a zatem wartości $\sqrt[m]{H}$ z wyrażenia (3), mamy m różnych wartości ułamkowych w $\frac{n}{m}$, odpowiadających wartościom całkowitym 0, 1, 2... $m-1$, nadawanym na n, a każdéj z nich odpowiada inna wartość $\sqrt[m]{H}$; że zaś $\sqrt[m]{\rho}$ z założenia brany *arytmetycznie*, to jest uważany ze znakiem dodatnym jako moduł, ma tylko jedną wartość, więc $\sqrt[m]{H}$ ma m różnych wartości, dla jednéj i téj saméj wartości H.

W razie gdy H jest rzeczywistem, $\varphi=0$, jedna z tych wartości, odpowiadająca $n=0$, jest rzeczywistą, pozostałe są urojonemi, jeżeli m nieparzyste; jeżeli m parzyste, jest jeszcze druga wartość rzeczywista, odpowiadająca wartości $n=\frac{m}{2}$, znaku przeciwnego poprzedniéj [77].

Tak np. szukając pierwiastku $m$go z jedności, załóżmy

$$1=\operatorname{dos} 2n\pi+i \operatorname{wst} 2n\pi$$

gdzie n jest całkowitą : na zasadzie wzoru (3) otrzymamy :

$$\sqrt[m]{1}=\operatorname{dos}\frac{2n\pi}{m}+i\operatorname{wst}\frac{2n\pi}{m}$$

wyrażenie, które przybiera m wartości różnych dla

$$n=0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\quad m-1$$

Jeżeli m nieparzyste, jedna tylko z tych wartości, odpowiadająca

$$n=0 \text{ t. j. } \sqrt[m]{1}=1$$

jest rzeczywistą. Jeżeli m parzyste dla

$$n=\frac{m}{2}$$

otrzymamy jeszcze

$$\sqrt[m]{1}=\operatorname{dos}\pi+i\operatorname{wst}\pi=-1$$

drugą wartość rzeczywistą : pozostałe są urojonemi. Tak np. pierwiastki stopnia 3go z jedności są następujące:

$$1, \quad \text{dos}\,\frac{2}{3}\pi + i\,\text{wst}\,\frac{2}{3}\pi, \quad \text{dos}\,\frac{4}{3}\pi + i\,\text{wst}\,\frac{4}{3}\pi$$

pierwszy rzeczywisty, dwa drugie urojone.

83. *Wyrazić wstawę i dostawę wielokrotności całkowitéj łuku, przez potęgi wstawy i dostawy tegoż łuku.*

Zakładając moduł równy jedności, wzór Moivre'a daje nam

$$(\text{dos}\,x + i\,\text{wst}\,x)^m = \text{dos}\,mx + i\,\text{wst}\,mx$$

podnosząc dwumian do potęgi m według znanego wzoru i zakładając część rzeczywistą rozwinięcia równą $\text{dos}\,mx$, spółczynnik zaś i równym $\text{wst}\,mx$, otrzymamy:

$$(1) \qquad \text{dos}\,mx = \text{dos}^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\,\text{dos}^{m-2}x\,\text{wst}^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,\text{dos}^{m-4}\,\text{wst}^4 x - \dots$$

$$(2) \qquad \text{wst}\,mx = m\,\text{dos}^{m-1}x\,\text{wst}\,x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\text{dos}^{m-3}x\,\text{wst}^3 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\,\text{dos}^{m-5}x\,\text{wst}^5 x - \dots$$

Ponieważ m jest całkowitem, wielomian który jest rozwinięciem $\text{dos}\,x$, będzie miał $\frac{m}{2}+1$ wyrazów, jeżeli m parzyste, a $\frac{m+1}{2}$ wyrazów, jeżeli m nieparzyste; w pierwszym razie, ostatnim wyrazem tego wielomianu będzie: $\text{wst}^m x$, w drugim: $m\,\text{dos}\,x\,\text{wst}^{m-1}x$.

Wielomian, który jest rozwinięciem $\text{wst}\,mx$, będzie miał $\frac{m}{2}$ wyrazów jeżeli m parzyste, a $\frac{m+1}{2}$ wyrazów, jeżeli m nieparzyste; w pierwszym razie ostatnim wyrazem będzie: $m\,\text{dos}\,x\,\text{wst}^{m-1}x$, w drugim: $\text{wst}^m x$; np.

$$\text{dos}\,2x = \text{dos}^2 x - \text{wst}^2 x$$
$$\text{dos}\,3x = \text{dos}^3 x - 3\text{dos}\,x\,\text{wst}^2 x$$
$$\text{dos}\,4x = \text{dos}^4 x - 6\text{dos}^2 x\,\text{wst}^2 x + \text{wst}^4 x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{wst}\,2x = 2\,\text{dos}\,x\,\text{wts}\,x$$
$$\text{wst}\,3x = 3\,\text{dos}^2 x\,\text{wst}\,x - \text{wst}^3 x$$
$$\text{wst}\,4x = 4\,\text{dos}^3 x\,\text{wst}\,x - 4\text{dos}\,x\,\text{wst}^3 x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Odwrotnie, *chcąc wyrazić potęgi całkowite wstawy i dostawy łuku przez wstawy i dostawy wielokrotności tegoż łuku,* załóżmy

$$\text{dos}\,x + i\,\text{wst}\,x = u$$
$$\text{dos}\,x - i\,\text{wst}\,x = v$$

czyli

$$2\,\text{dos}\,x = u + v$$

a

$$2\,i\,\text{wst}\,x = u - v$$

Podnosząc do potęgi mtćj równanie $2\text{dos}x = u + v$ otrzymamy:

$$2^m \text{dos}^m x = (u+v)^m = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2}v^2 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^{m-2} + muv^{m-1} + v^m$$

Rozróżnimy dwa przypadki :

1° Jeżeli m jest parzystém, równém $2n$, rozwinięcie zawiera nieparzystą liczbę wyrazów : wyrazem środkowym będzie

$$\frac{m(m-1)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n} u^n v^n$$

otrzymamy, łącząc wyrazy równoodległe od krańcowych

$$2^m \text{dos}^m x = u^m + v^m + muv(u^{m-2} + v^{m-2}) + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n} u^n v^n$$

Lecz na zasadzie wzoru Moivre'a, zastosowanego do wyrażeń u

v, oznaczając przez k liczbę całkowitą :

$$u^k + v^k = 2 \operatorname{dos} kx \qquad u^k v^k = 1$$

więc

$$2^m \operatorname{dos}^m x = 2 \operatorname{dos} mx + 2m \operatorname{dos}(m-2)x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

czyli

$$(3) \qquad 2^{m-1} \operatorname{dos}^m x = \operatorname{dos} mx + m \operatorname{dos}(m-2)x$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos}(m-4)x + \ldots + \frac{1}{2} \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}$$

2° Jeżeli m nieparzyste, potęga $(u+v)^m$ będzie się składać z liczby parzystéj wyrazów, które układając w stosowny sposób, otrzymamy :

$$2^{m-1} \operatorname{dos}^m x = \operatorname{dos} mx + m \operatorname{dos}(m-2)x$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{dos}(m-4)x + \ldots + \frac{m(m-1\ldots\left(\frac{m-1}{2}+2\right)\operatorname{dos} x}{1.2.3\ldots\frac{m-1}{2}}$$

Aby otrzymać rozwinięcie potęgi wstawy, podnieśmy do potęgi m wyrażenie

$$u - v = 2\,i \operatorname{wst} x$$

otrzymamy :

$$2^m i^m \operatorname{wst}^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2}v^2 - \ldots$$

$$\pm \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^{m-2} \mp mu\,v^{m-1} \pm v^m$$

Rozumując jak powyżéj, i uważając że potęgi parzyste i są rzeczywistemi, otrzymamy z łatwością na zasadzie równań

$$u^k + v^k = 2 \operatorname{dos} kx \qquad u^k - v^k = 2\,i \operatorname{wst} kx \qquad u^k v^k = 1$$

wzory następujące:

$$(5)\quad (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1} \operatorname{wst} mx = \operatorname{dos} mx - m \operatorname{dos}(m-2)x$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{dos}(m-4)x - \ldots \pm \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}$$

dla m parzystego;

$$(6)\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\, 2^{m-1} \operatorname{wst}^m x = \operatorname{wst} mx - m \operatorname{wst}(m-2)x$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{wst}(m-4)x \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m-1}{2}+2\right)\operatorname{wst} x}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}$$

dla m nieparzystego.

W pierwszym z tych dwóch ostatnich wzorów (5), i nie wchodzi; bo wchodząc w parzystéj potędze, zamienia się na ± 1; drugi wzór (6) otrzymanym został dzieląc obie strony przez i.

84. Uwagi nad użyciem ilości urojonych. Z dwóch powyższych zastosowań, widzimy w jaki sposób ilości urojone wprowadzone zostają w rachunek, i jaki pożytek z tego wprowadzenia odnieść można.

W pierwszém z nich [**82**] które jest rozwiązaniem równania algebraicznego $m$go stopnia dwumiennego;

$$x^m = \mathrm{H}$$

ilości urojone służą do uogólnienia tego rozwiązania, pokazując, że równanie takie jest sprawdzoném przez m *wyrażeń* na x, wyrażeń, z których niektóre mogą być rzeczywistemi, inne urojonemi.

W drugiém zastosowaniu [**83**] ilości urojone wprowadzonemi zostały tylko w sposób pomocniczy, bo nie znajdują się ani w danych, ani w wypadkach zadania. Założyliśmy np. tożsamość

$$2 \operatorname{dos} x = \operatorname{dos} x + i \operatorname{wst} x + \operatorname{dos} x - i \operatorname{wst} x$$

tak jak moglibyśmy byli założyć tożsamość

$$2 \operatorname{dos} x = \operatorname{dos} x + \lambda \operatorname{wst} x + \operatorname{dos} x - \lambda \operatorname{wst} x$$

gdzie λ byłoby jakąkolwiek ilością, lub współczynnikiem niewyznaczonym; jakiekolwiek działanie wykonamy na takiém wyrażeniu, wypadek winien być koniecznie niezależnym od λ, a zatem spółczyniki różnych potęg λ, jakie mogą się znajdować w tym wypadku winny być osobno zerami. Jest to metoda zwana w algebrze metodą współczynników niewynaczonych. Mamy również prawo zrównać zeru niektóre tylko z tych spółczynników lub podstawić w końcu za λ jakąkolwiek nam się podoba wielkość.

Używając ilości urojonéj $\lambda = i$ robimy to samo, jak gdybyśmy zrównali zeru spółczynniki potęg nieparzystych λ, które przypuścilibyśmy równemi co do wartości, a uczynili równą -1 potęgę drugą λ : do czego, jakeśmy powiedzieli, jesteśmy upoważnieni, przypuściwszy z założenia λ jakiekolwiek.

W ogóle więc ilości urojone wprowadzone bywają w rachunek w dwojakim celu :

1° dla uogólnienia wypadków,

2° jako ilości pomocnicze dla ułatwienia pewnych dowodzeń.

Widzieliśmy [77], że ilości rzeczywiste mogą być uważanemi jako szczególny wypadek urojonych : te ostatnie są więc ogólniéjszemi; nadto dla szczególnych swych własności (jak tych które wynikają z wyrażenia Moivre'a) przedstawiają wiele dogodności w rachunku. Zobaczymy nieraz w dalszym ciągu, jak wielkiego znaczenia jest użycie ilości urojonych w analizie : wprowadzenie ich jest najważniéjszym postępem, jaki algebra w ostatnich czasach uczyniła.

ROZDZIAŁ IV

METODA GRANIC

Określenie Granicy. — Zmienne, które zdążają do granic oznaczonych. — Zmienne które nie zdążają do granic oznaczonych. — Ilości nieskończenie wielkie. — Ilości oznaczone i ilości dowolne. — Twierdzenie zasadnicze metody granic. — Sposób użycia metody granic. — Zastosowania. — Ilości i stosunki niewymierne i t. d.

85. *Granicą wielkości zmiennéj nazywamy wielkość oznaczoną, do któréj wielkość zmienna zbliża się nieograniczenie tak, że różnica pomiędzy jedną a drugą ciągle się zmniéjszając, może stać się ostatecznie dowolnie małą, nie zwiększając się dla żadnéj z następnych wartości, jakie zmienna przybrać może.*

Niech będzie wielkość oznaczona a, i wielkość x zwiększająca się tak, że różnica

$$a - x = \varepsilon$$

dodatna lub odjemna, może stać się i pozostać tak małą jak się podoba: powiadamy, że a jest granicą zmiennéj x:

$$a = \text{gr}\ x$$

Ułamek zwyczajny jest granicą ułamku dziesiętnego okresowego: w miarę jak liczba cyfr dziesiętnych coraz się zwiększa, różnica pomiędzy ułamkiem zwyczajnym a dziesiętnym staje się coraz mniéjszą; ponieważ możemy wziąść dowolnie wielką liczbę cyfr dziesiętnych, różnica ta może stać się ostatecznie dowolnie małą, nie zwiększając się nigdy, gdy zwiększamy liczbę dziesiętnych.

Okrąg koła jest granicą obwodu wielokąta wpisanego, gdy liczbę boków tego wielokąta zwiększamy nieograniczenie; powierzchnia koła jest granicą powierzchni tegoż wielokąta. Tak okrąg, jak powierzchnia koła są ciągle *większemi* od obwodu i powierzchni wielokąta wpisanego : lecz różnicę pomiędzy kołem a wielokątem możemy uczynić dowolnie małą, wziąwszy dostatecznie wielką liczbę boków wielokąta.

Okrąg koła jest również granicą obwodu wielokąta opisanego o ciągle zwiększającéj się liczbie boków; powierzchnia koła jest granicą powierzchni tegoż wielokąta : tu tak okręg, jak powierzchnia koła, są ciągle mniéjszemi od obwodu i powierzchni wielokąta: lecz różnica pomiędzy jednemi a drugiemi, stając się coraz mniéjszą, stać się może dowolnie małą.

Zero jest granicą ułamku $\frac{1}{x}$, którego mianownik zwiększa się nieograniczenie; bo różnica pomiędzy ułamkiem a zerem, równa samemu ułamkowi, zmniéjszając się w sposób ciągły, jeżeli x zwiększamy w sposób ciągły, lub zmniéjszając się w jakikolwiekbądź inny nieciągły sposób, jeżeli x zwiększamy w sposób nieciągły np. nadając na x po sobie następujące liczby całkowite, w jednym i w drugim razie może stać się dowolnie małą.

Jedność jest granicą stosunku wstawy lub stycznéj do łuku, gdy łuk zmniéjsza się nieograniczenie, bo różnica pomiędzy tym stosunkiem a jednością stając się coraz mniéjszą, może stać się dowolnie małą.

86. Wielkość zmnienna może zdążać do swéj granicy w rozmaity sposób, i tak :

Wielkość zmnienna może być ciągle większą od swéj granicy, jak np. wielokąt opisany o zmniennéj, ciągle zwiększającéj się liczbie boków, jest ciągle większym, tak co do swego obwodu, jak powierzchni, od okręgu lub powierzchni koła, które jest jego granicą. Wielkość zmienna może być również ciągle mniéjszą od swéj granicy, jak to ma miéjsce dla wielokąta wpisanego. Wielkość zmienna może być nawet naprzemian większą i mniéjszą od swéj granicy, byleby różnica pomiędzy granicą a zmienną, naprzemian dodatna i odjemna, stawała się ostatecznie coraz mniéjszą i mogła stać się dowolnie małą.

Zmienna, zdążając do swéj granicy w którykolwiek z powyższych sposobów, może zmieniać się w sposób ciągły, lub nawet nieciągły : jakoż ten ostatni przypadek ma miéjsce dla ułamku okresowego zdążającego do swéj granicy, ułamku zwyczajnego, ciągle zwiększając się o ilości skończone, a nieprzechodząc przez wartości pośrednie; dla wielokąta foremnego, którego liczba boków ciągle się podwaja i t.p.

Przeciwnie, wielkość zmienna może nie zdążać do żadnéj granicy, w dwojaki sposób :

Zwiększając się nieograniczenie w wartościach dodatnych lub odjemnych tak, że może stać się ostatecznie większą od wszelkiéj wielkości naznaczonéj, dodatnéj lub odjemnéj; lub też zmieniając się nawet w wartościach, niemogących stać się większemi od pewnych wielkości naznaczonych dodatnych lub odjemnych, lecz w sposób taki, że nie można oznaczyć żadnéj wartości, któréj różnica z wartościami zmiennéj stawszy się raz dość małą, niezwiększałaby się dla wartości następnych zmiennéj.

Przedstawmy sobie naprzykład punkt ruchomy M (fig.43)

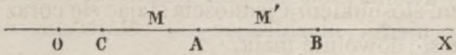


fig. 43.

na linji nieograniczonéj OX, którego położenie wyznaczoném jest przez odległość $OM = x$ od punktu stałego O. Jeżeli M oddalając się od O zbliża się nieograniczenie do punktu A, tak że odległość MA ciągle się zmniéjszając, może stać się ostatecznie dowolnie małą, a raz stawszy się dowolnie małą, nie staje się znów większą t. j., jeżeli punkt M nie może ani przejść poza punkt A, ani powrócić ku punktowi O, powiadamy, że wielkość oznaczona $OA = a$ jest granicą wielkości zmiennéj $OM = x$, ciągle zwiększającéj się. Tożsamo powiemy, jeżeli punkt ruchomy, znajdując się w M′ zbliża się do punktu O, lecz tak, że nie może przejść przez punkt A, i jeżeli odległość AM′ może stać się dowolnie małą; wielkość oznaczona $OA = a$ będzie zawsze granicą zmiennéj $OM' = x'$ ciągle zmniéjszającéj się. A nawet jeżeli punkt M oddalając się od O przejdzie poza punkt A do M′, następnie powróci ku O przejdzie znów przez punkt A ku M, znów powróci i t. d., wielkość $OA = a$ może być jeszcze granicą zmiennéj x, byleby *ostatecznie* odległość punktu ruchomego od A, naprzemian AM i AM′ stawała się coraz mniéjszą i mogła stać się dowolnie małą. Te same uwagi stosować się będą jeżeli punkt M posuwać się będzie po OX nie ruchem ciągłym, ale przeskakując niejako z jednego punktu linji OX na drugi, nieprzechodząc przez wartości pośrednie, t. j. jeżeli zmienna x będzie się zmieniać w sposób nieciągły.

Lecz jeżeli punkt M oddala się nieograniczenie od punktu O w jedną lub drugą stronę tak, że odległość $MO = x$, może stać się większą od wszelkiéj wartości naznaczonéj dodatnéj lub odjemnéj, t.j. jeżeli punkt M przejść może poza wszelki punkt obrany na OX po jednéj lub drugiéj stronie punktu O; lub też nawet jeżeli punkt M pozostając ciągle pomiędzy dwoma oznaczonymi punktami B i C, waha się pomiędzy niemi, niezbliżając się ostatecznie do żadnego punktu stałego pomiędzy B i C, powiadamy że odległość $OM = x$ niezdąża ani w jednym, ani w drugim razie do żadnéj granicy oznaczonéj.

87. Ilością *oznaczoną* nazywać będziemy ilość stałą lub zmienną, któréj nie możemy *dowolnie* zwiększyć lub zmniéjszyć, nienaruszając warunków zadania.

Ilością *dowolną* nazywamy ilość, którę możemy dowolnie zwiększyć lub zmniéjszyć.

Tak np. mając dany związek pomiędzy dwoma zmiennemi, określający jedną z tych zmiennych, jako funkcję drugiéj, możemy tylko zmieniać te zmienne w taki sposób, żeby związek ten zawsze istniał. Zmienne te nie są więc obiedwie dowolnemi; zmienną niezależną nawet możemy zwykle tylko dowolnie zmieniać w pewien sposób określony zadaniem.

Różnica pomiędzy zmienną a jéj granicą jest z określenia ilością dowolną, *dowolnie małą*; jest to warunek konieczny istnienia granicy. Ilość stała może być ilością dowolną: gdyż stałą nazywamy nie tylko ilość, która bezwarunkowo się nie zmienia, lecz także ilość, która się zmienia *niezależnie* od zmiennych uważanych w zadaniu jako funkcje jedne drugich [**3**].

Ilość oznaczona nie może być zatém równą ilości dowolnéj. Różnica dwóch ilości oznaczonych jest ilością oznaczoną, nie może być bowiem dowolną.

Granica jest ilością oznaczoną względem zmiennéj, która jest dowolną o tyle, że może różnić się od granicy o ilość dowolnie małą.

Metoda granic ma na celu szukanie związków zachodzących pomiędzy ilościami oznaczonemi, uważając ilości te oznaczone jako granice pewnych ilości dowolnych, które wprowadzone zwykle tylko jako ilości pomocnicze, zostają wyrugowanemi w wypadku ostatecznym. Naprzykład:

Szukając stosunku okręgów lub powierzchni dwóch kół, które są ilościami oznaczonemi, wprowadzamy wielokąty wpisane lub opisane, o *dowolnie* wielkiéj liczbie boków. Wielokąty te nie znajdują się w ostatecznym wypadku.

Zastępując ułamki zwyczajne, które są ilościami oznaczonemi, przez ułamki okresowe, o *dowolnie* wielkiéj liczbie dziesiętnych, mamy na celu dowolne przybliżenie. Jeżeli uważamy tylko pewną skończoną liczbę dziesiętnych, zastępujemy ilość oznaczoną, ułamek zwyczajny, przez inną ilość oznaczoną przybliżoną, ułamek dziesiętny, o skończonéj liczbie dziesiętnych.

Wyrażenia: koło jestto wielokąt o nieskończenie wielkiéj liczbie boków; ułamek zwyczajny równa się ułamkowi okresowemu, sąto wyrażenia skrócone; ściśle należałoby powiedzieć: koło jest granicą wielokąta o nieograniczenie zwiększającéj się liczbie boków, ułamek zwyczajny jest granicą ułamku okresowego, którego liczba cyfr dziesiętnych zwiększa się nieograniczenie.

Jakkolwiek zmienna może być tak mało różną od swéj granicy, jak się podoba, nie może być jéj nigdy równą, bo ilość oznaczona nie może być równą ilości dowolnéj: tem bardziéj że, jak się najczęściéj zdarza, zmienna jest innego całkiem gatunku, jak jéj granica. Niedorzeczném byłoby np. twierdzić, że koło równe jest zupełnie wielokątowi o jakiéjkolwiek liczbie boków; ułamek $\frac{1}{x}$ może być tak małym jak się podoba, gdy x zwiększamy nieograniczenie, nigdy jednak nie staje się ściśle równym zeru.

88. Ilości nieskończenie wielkie. Ilość zmienną, która zwiększając się ciągle, może stać się większą od jakkolwiek wielkiéj ilości oznaczonéj, nazywamy ilością *nieskończenie wielką*. Ilość nieskończenie wielka, nie ma więc granicy oznaczonéj i sama nie jest ilością oznaczoną, zatém nie może być braną w znaczeniu ilości oznaczonéj; nazwać by ją właściwie należało ilością *dowolnie wielką*, lub *nieograniczenie wielką*. W algebrze niektóre wyrażenia, które same przez się nie mogą mieć określonego znaczenia, wyrażając działania niepodobne do wykonania, uważamy jako ilości nieskończenie wielkie.

I tak, iloraz ilości jakiéjkolwiek przez 0

$$\frac{a}{0}$$

nie ma sam przez się żadnego znaczenia, gdy licznik a jest ilością oznaczoną, a mianownik dokładnie zerem : gdyż niedorzecznością jest szukać ile razy zero zawiera się w danéj ilości a, lub szukać ilości, którąby pomnożona przez zero dała ilość oznaczoną a; odpowiedzieć by należało, że ilość taka, iloraz ten, nie istnieje wcale. Dla tego też powiadamy, że funkcja [**29**]

$$y=\frac{a}{x}$$

przestaje być ciągłą, gdy x przechodzi przez wartość zero, bo dla wartości $x=0$ funkcja ta *nie istnieje*.

Lecz gdy x przybiera wartości dodatne coraz zmniéjszające się, y przybiera wartości coraz zwiększające się dodatne (przypuszczając a dodatném); można nadać na x wartość tak mało różną od zera, że y będzie większém od dowolnie wielkiéj naznaczonéj ilości A; bo aby

$$y>\mathrm{A}$$

dość jest wziąść

$$x<\frac{a}{\mathrm{A}}$$

funkcja więc y może zwiększać się nieograniczenie w sposób dodatny

Gdybyśmy nadawali na x wartości odjemne coraz zbliżające się do zera, funkcja y przybierałaby wartości odjemne, coraz zwiększające się : funkcja ta może więc również zwiększać się nieograniczenie w sposób odjemny.

Wyrażenie

$$\frac{a}{0}=\pm\infty$$

tłomaczyć należy *ściśle*, w sposób następujący : Ułamek którego mianownik *jest* zerem, a licznik jakąkolwiek ilością oznaczoną, *nie ma* żadnéj wartości; gdyby mianownik nie był zerem, a ilością dodatną, zbliżającą się nieograniczenie do zera, wartość ułamku zwiększałaby się nieograniczenie w sposób dodatny; gdyby mianownik nie był zerem, a ilością odjemną zbliżającą się nieograniczenie do zera, wartość ułamku zwiększałaby się nieograniczenie w sposób odjemny.

Znaki $+\infty$, $-\infty$ są tylko symbolami oznaczającemi, że ilość zwiększa się nieograniczenie w jeden, lub drugi sposób, a nie oznaczają właściwych ilości. Mając np.

$$A = \infty \qquad B = \infty$$

nie możnaby wnieść, że ponieważ dwie ilości równe trzeciéj są sobie równe, więc

$$A = B$$

co byłoby niedorzeczném, podobnie jak gdyby mając

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3}$$

czyli

$$\frac{2}{2-2} = \frac{3}{3-3} \quad \text{lub} \quad \frac{2}{0} = \frac{3}{0}$$

kto chciał wnieść, że $2 = 3$.

Wyrażenie : ilość nieskończenie wielka, ilość, która może zwięszać się nieograniczenie, lub zwiększać się bez granic, są więc równoznacznemi.

Przykład. Styczna trygonometryczna łuku $\frac{\pi}{2}$ nie istnieje; lecz dla łuku zwiększającego się od 0 i zbliżającego się nieograniczenie do $\frac{\pi}{2}$, styczna ta może przybierać wartości tak wielkie, jak się podoba, *dodatne*; dla łuku odjemnego, zwiększającego się bezwzględnie od 0 do $-\frac{3\pi}{2}$, zbliżającego się nieograniczenie do $-\frac{3\pi}{2}$, styczna ta może przybierać wartości tak wielkie, jak się podoba, *odjemne*. Dla tego mówimy, że styczna jest nieskończenie wielką dodatną lub odjemną w tym punkcie okręgu koła, jakkolwiek styczna ta nie ma w nim żadnéj, a tém bardziéj dwóch wartości.

89. Twierdzenia zasadnicze metody granic. Ilość oznaczoną można zawsze uważać jako granicę pewnéj zmiennéj, i to w najrozmaitszy sposób : koło można uważać jako granicę wielokątów wpisanych najrozmaitszego gatunku, zwiększając liczbę według jakiegokolwiek prawa : lecz ilość zmienna nawet dowolna nie koniecznie zdąża do pewnéj granicy [**86**]. Szukanie granicy pewnéj ilości zmiennéj powinno być poprzedzoném dowodzeniem, że granica ta istnieje.

TWIERDZENIE I. *Ilość, która ciągle zwiększając się, nie może stać się większą od pewnéj ilości oznaczonéj, ma granicę oznaczoną.*

Niech będzie zmienna x zwiększająca się w sposób ciągły; niech będzie ilość oznaczona A taka, że dla jakiéjkolwiek wartości x, zawsze

$$x < \mathrm{A}$$

powiadam, że x ma granicę oznaczoną, mniéjszą lub równą A.

Ponieważ x ciągle się zwiększa, nie mogąc stać się większém od A, możemy oznaczyć ilość B mniéjszą od A taką, że

$$x > \mathrm{B}$$

Różnicę $A - B$ podzielmy na pewną liczbę m części równych α; x ciągle się zwiększając, stanie się w końcu większém od $B + k\alpha$, a mniéjszém od $B + (k + 1)\alpha$, gdzie k jest jakąkolwiek liczbą pomiędzy 0 i m; mamy więc

$$A = B + m\alpha \quad \text{zatém} \quad B + (k + 1)\alpha > x > B + k\alpha$$

zmienna x zostaje zawartą pomiędzy dwoma ilościami oznaczonemi $B + (k + 1)\alpha$ i $B + k\alpha$, różniącemi się o α; różnica więc pomiędzy zmienną a każdą z nich zostaje mniejszą od α. Lecz ilość α, może być oznaczoną tak małą, jak się podoba, bo $A - B$ możemy podzielić na dowolnie wielką liczbę m części α; różnica więc zmiennéj x od jednéj z oznaczonych ilości $B + k\alpha$, lub $B + (k + 1)\alpha$, może być mniéjszą od dowolnie małéj ilości oznaczonéj α; zmienna ta ma za granicę jedną z tych ilości $B + k\alpha$, lub $B + (k + 1)\alpha$ oznaczonych, z określenia *granicy*.

W podobny sposób można dowieść twierdzenia:

Ilość, która ciągle zmniéjszając się, nie może stać się mniéjszą od pewnéj ilości oznaczonéj, ma granicę oznaczoną.

90. Twierdzenie II. *Granice zmiennych równych są sobie równe.*

Niech będą dwie zmienne x i y, zdążające do granic oznaczonych a i b:

$$\text{gr}\, x = a \qquad \text{gr}\, y = b$$

jeżeli x i y, które możemy uważać jako zmieniające się zależnie od pewnéj zmiennéj z, są sobie równe dla wszelkich wartości, jakie zmienna z przybrać może, lub przynajmniéj dla wartości z, którym odpowiadają wartości jednéj ze zmiennych x lub y, nie wiele różniące się od granicy a

i b; powiadam, że jeżeli $x = y$, to gr $x =$ gr y, czyli $a = b$.

Z określenia granicy wynika, że

$$a - x = \varepsilon \quad b - y = \varepsilon'$$

gdzie ε i ε' ilościami, które mogą być dowolnie małemi.

Odejmując drugie z tych równań od pierwszego otrzymamy:

$$a - x - b + y = \varepsilon - \varepsilon'$$

a że z założenia $x = y$, więc

$$a - b = \varepsilon - \varepsilon'$$

Różnica $\varepsilon - \varepsilon'$ dwóch ilości dowolnie małych, może być albo zerem, albo dowolnie małą; dowolnie małą być nie może, bo różnica dwóch ilości oznaczonych a i b nie może być dowolną; więc jest zerem, czyli

$$a = b \quad \text{c. b. d. d.}$$

Wniosek. *Ilość zmienna nie może zdążać jednocześnie do dwóch granic różnych.*

Twierdzenie i wniosek powyższy, nie miałyby miéjsca gdybyśmy określili granicę tylko jako ilość oznaczoną, któréj różnica ze zmienną może być dowolnie małą, nie dodając, że różnica ta stawszy się dowolnie małą, nie może się znów zwiększyć, lecz musi pozostać ciągle dowolnie małą. Bez tego dodatku do określenia granicy, ilość zmienna mogłaby zbliżyć się nieograniczenie do pewnéj ilości oznaczonéj, następnie się od niéj oddalić i zbliżyć nieograniczenie do innéj ilości oznaczonéj, późniéj znów wrócić do pierwszéj i t.d. Lecz w takim razie, ani jedna, ani druga z ilości oznaczonych nie będzie granicą zmiennéj, nie czyniąc zadość określeniu granicy [**85**].

91. Twierdzenie III. *Granice funkcyj ciągłych równych, zmiennych zdążających do granic oznaczonych, są funkcjami równemi granic tychże zmiennych.*

Niech będą funkcje F $(x, y, z\ldots)$ i f $(x, y, z\ldots)$ ciągłe i równe dla wszelkich wartości, jakie zmienne x, y, z... zdążające do granic a, b, c ... w blizkości tychże granic przybrać mogą; powiadam, że jeżeli

$$(1)\qquad F(x, y, z\ldots) = f(x, y, z\ldots)$$

to

$$(2)\qquad F(a, b, c\ldots) = f(a, b, c\ldots)$$

Mamy z określenia granicy

$$a - x = \varepsilon \qquad b - y = \varepsilon' \qquad c - z = \varepsilon'' \ldots$$

gdzie ε, ε', ε''...mogą być dowolnie małemi. Nadając zmiennym x, y, z... przyrostki ε, ε', ε''... z określenia ciągłości funkcji [**26**] wypada że

$$F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon,\ z+\varepsilon'', \ldots) - F(x, y, z\ldots) = \eta$$

$$f(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon',\ z+\varepsilon'', \ldots) - f(x, y, z\ldots) = \eta'$$

gdzie η, η' są dowolnie małemi, zdążającemi do zera wraz z ε, ε', ε''...;

lecz

$$x+\varepsilon = a \qquad y+\varepsilon' = b \qquad z+\varepsilon'' = c\ldots$$

a więc

$$F(a, b, c\ldots) - F(x, y, z\ldots) = \eta$$

$$f(a. b, c\ldots) - f(x, y, z\ldots) = \eta'$$

czyli, z określenia granicy

$$\mathrm{gr}\, F(x, y, z \ldots) = F(a, b, c \ldots)$$

$$\mathrm{gr}\, f(x, y, z \ldots) = f(a, b, c \ldots)$$

a że granice zmiennych F $(x, y, z \ldots)$ i f $(x, y, z \ldots)$ z założenia równych są równemi, na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, więc

$$F(a, b, c \ldots) = f(a, b, c \ldots) \quad \text{c.b.d.d.}$$

W szczególności : *granica summy równa się summie granic*; jeżeli

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

to

$$\mathrm{gr}\, x = \mathrm{gr}\, x_0 + \mathrm{gr}\, x_1 + \mathrm{gr}\, x_2 + \ldots + \mathrm{gr}\, x_n,$$

granica iloczynu równa się iloczynowi granic; jeżeli

$$x = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

to

$$\mathrm{gr}\, x = \mathrm{gr}\, x_1 \,.\, \mathrm{gr}\, x_2 .\, \mathrm{gr}\, x_3 . \ldots \mathrm{gr}\, x_n;$$

granica ilorazu równa się ilorazowi granic; jeżeli

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

to

$$\mathrm{gr}\, x = \frac{\mathrm{gr}\, x_1}{\mathrm{gr}\, x_2}$$

i t. p.

92. Sposób użycia metody granic. Na zasadzie ostatniego twierdzenia, jeżeli mamy jakikolwiek związek (1) wyrażony analitycznie pomiędzy zmiennemi zdążającemi do pewnych granic, otrzymujemy związek pomiędzy granicami (2), podstawiając w (1) za zmienne, ich granice.

W ogóle, chcąc znaleźć związek , zachodzący pomiędzy pewnemi danemi ilościami oznaczonemi, szukać możemy naprzód ilości zmiennych, którychby ilości dane były granicami, przy czém staramy się o to, żeby zmienne te były prostszego gatunku, łatwiejszemi do porównywania od ilości oznaczonych danych, bez czego użycie metody granic nie przedstawiałoby ułatwienia. Tak ilości niewymierne, staramy się wyrazić jako granice ilości wymiernych; linje krzywe, jako granice łamanych ; koło, jako granicę wielokąta, ostrosłup, jako granicę summy graniastosłupów i t. p. Następnie szukamy związków zachodzących pomiędzy temi zmiennemi : jak równości stosunków wymiernych, obwodów linij łamanych, powierzchni wielokątów wpisanych i t. p. związków, które z łatwością znajdujemy i wyrażamy zwykle przez równania, czasami przez nierówności. Nakoniec sprowadziwszy związki te do najprostszego wyrażenia, podstawiamy za zmienne ich granice : za ilości wymierne, niewymierne ; za linje łamane, linje krzywe ; za wielokąt, koło i t. p. ; otrzymujemy w ten sposób związki szukane pomiędzy ilościami oznaczonemi danemi, które inaczéj dość trudno, lub uboczną drogą, jak przez sprowadzenie do niedorzeczności otrzymaćby można było : związki, w których zmienne wprowadzone pomocniczo do dowodzenia, wcale się nie znajdują.

Użycie metody granic sprowadza się więc do trzech działań :

1° Przedstawienie ilości danych, jako granic pewnych zmiennych prostszego gatunku :

2° Szukanie związków między temi zmiennemi pomocniczemi :

3° Przejście od związków między zmiennemi pomocniczemi, do związków pomiędzy granicami.

Zastosowania.

93. Ilości i stosunki niewymierne. *Ilość* przedstawiamy sobie początkowo jako wielokrotność pewnéj jedności, i wyrażamy ją przez *liczbę całkowitą*.

Porównywając pewną ilość z jednością daną, jeżeli ilość ta nie jest wielokrotnością całkowitą jedności, lecz może być wielokrotnością jednéj z części równych jedności, wyrażamy ją przez *liczbę ułamkową*.

Jeżeli ilość dana nie może być ani wielokrotnością całkowitą jedności, ani wielokrotnością jednéj z części równych jedności, na jakąkolwiek liczbę części równych podzielilibyśmy jedność, ilość ta nie może być wyrażoną, ani przez liczbę całkowitą, ani przez liczbę ułamkową, jest *niewymierną* z jednością.

W ogólności, ilościami *niewspółmiernemi* nazywamy ilości takie, które nie mogą być uważane jako wielokrotności całkowite, lub ułamkowe pewnéj ilości, zwanéj wspólną miarą, jakkolwiek małą by była ta wspólna miara. Tak np. pierwiastki $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... z liczb, które nie są zupełnemi kwadratami, są *niewymiernemi*, czyli *niewspółmiernemi* z jednością.

Bok kwadratu jest niewspółmiernym z przekątnią, okrąg koła ze średnicą i t. p.

Mając daną ilość niewymierną, możemy znaleźć ilości wymierne tak mało różniące się od niewymiernych, jak się podoba.

Aby więc porównywać ze sobą ilości niewspółmierne, możemy uważać je jako *granice* ilości współmiernych, zmieniających się w taki sposób, że różnica pomiędzy jednemi, a drugiemi może stać się dowolnie małą.

Związki otrzymane dla ilości współmiernych, zastosowujemy następnie do ilości niewspółmiernych, na zasadzie Twierdzenia III.

Wiemy naprzykład ścisłe określenie wykładnika całkowitego i ułamkowego

$$a^3 = a \times a \times a \qquad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \qquad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \text{ i.t.d.}$$

Wykładnika niewymiernego

$$a^{\sqrt{3}}$$

nie możemy określić w ten sam sposób; lecz możemy uważać go jako *granicę*, do któréj zbliża się potęga ułamkowa

$$a^{1,732\ldots}$$

gdy ułamek zwiększamy ciągle o cyfry dziesiętne należące do $\sqrt{3} = 1,732\ldots$; czyli jako granicę wyrażeń

$$a, \quad a^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{a^{17}} \quad a^{\frac{173}{100}} = \sqrt[100]{a^{173}} \quad a^{\frac{1732}{1000}} = \sqrt[1000]{a^{1732}} \ldots$$

Z tego określenia wykładnika niewymiernego, z łatwością otrzymamy prawidła działań z wyrażeniami tego rodzaju, działań, które dokonywają się tak samo, jak działania z wykładnikami współmiernemi; jeżeli np. m i n oznaczają dwie ilości niewymierne, μ i ν wymierne takie, że

$$m = \operatorname{gr} \mu \qquad n = \operatorname{gr} \nu$$

mamy

$$a^\mu \, a^\nu = a^{\mu+\nu}$$

a więc [91]

$$\operatorname{gr} a^\mu \operatorname{gr} a^\nu = gr\, a^{\mu+\nu}$$

czyli

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

jak gdyby m i n były wymiernemi.

Wszystkie własności wykładników współmiernych, rozciągnąć można w ten sposób do wykładników niewspółmiernych; tak np: dowiedlibyśmy z łatwością że funkcje

$$ax^m, \quad a^x$$

są ciągłemi, gdy wykładniki m lub x przybierają wartości nietylko wymierne [**30**], [**31**], ale i niewymierne.

Aby udowodnić, że dwa stosunki niewspółmierne są sobie równe, dość jest udowodnić, że są granicami stosunków współmiernych równych (Twierdzenie II). W ten sposób dowodzimy w geometrji, że kąty mające wierzchołek w środku koła, lub kół równych, są w stosunku łuków zawartych pomiędzy ich ramionami; że stosunek okręgu koła do średnicy jest stałym; że dwa prostokąty, mające podstawy równe są w stosunku wysokości i t. p.

94. Tak koło, jak większa część linij krzywych i powierzchni ograniczonych temi linjami, jest niewspółmierną z długością lub powierzchnią prostolinijną obraną za jedność, gdy tymczasem obwody, lub powierzchnie prostolinijne są w ogóle wymiernemi i obliczają się z łatwością. Dla tego linje, powierzchnie krzywolinijne i t. p., uważać będziemy jako granice prostolinijnych; szukać będziemy związków wyznaczających długości, powierzchnie i t. p. tych ostatnich, a przechodząc do granicy, znajdziemy długości, powierzchnie krzywe i t. p. żądane. Zadanie to będzie rozwiniętém w dalszym ciągu: ograniczemy się tu na najprostszych przykładach.

Koło uważamy jako granicę wielokąta wpisanego, lub opisanego o ciągle zwiększającéj się liczbie boków; dowodzimy naprzód, że granica ta w istocie ma miéjsce, uważając koło jako zawarte pomiędzy wielokątem wpisanym a opisanym: dowodząc, że różnica pomiędzy jednym a drugim, może być tak małą, jak się podoba, wnosimy że różnica pomiędzy kołem a wielokątem tém bardziéj może stać się dowolnie małą, że zatém koło jest granicą wielokąta.

Uważając dla uproszczenia rachunku, wielokąt foremny, wiemy że powierzchnia P takiego wielokąta, równa się jego obwodowi O przez połowę prostopadłéj a, ze środka koła na bok poprowadzonéj:

$$P = O \times \frac{a}{2}$$

lecz

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}\,P &= \text{powierzchni koła} \\ \mathrm{gr}\,O &= \text{okręgowi koła} \\ \mathrm{gr}\,a &= \text{promieniowi} \end{aligned}$$

a zatém (Tw. III)

$$\mathrm{gr}\,P = \mathrm{gr}\,O \times \mathrm{gr}\,\frac{a}{2}$$

więc powierzchnia koła, równa się iloczynowi z okręgu przez połowę promienia.

Chcąc znaleźć objętość walca, dowodzimy naprzód, że walec jest granicą graniastosłupa wpisanego lub opisanego o ciągle zwiększającéj się liczbie ścian; objętość graniastosłupa wyraża się przez iloczyn, z podstawy przez wysokość; granicą podstawy graniastosłupa jest podstawa walca; wysokość jednego i drugiego pozostaje tą samą: więc objętość walca wyraża się także przez iloczyn z podstawy walca przez jego wysokość.

W podobny sposób znajdujemy, że powierzchnia krzywa walca wyraża się przez iloczyn z okręgu koła, będącego podstawą walca, przez wysokość i t. p.

95. Metoda granic zostaje zwykle zastosowywaną w dwojaki sposób :

1° Uważając ilości jako granice summ szeregów

2° Uważając ilości jako granice stosunków, lub summ ilości *nieskończenie małych* t. j. takich, których granicą jest zero.

Zastanowimy się w dwóch następnych rozdziałach w szczególności nad temi dwoma postaciami, pod któremi przedstawia się metoda granic.

ROZDZIAŁ V

O SZEREGACH

Określenia. — Warunki ogólne zbieżności szeregów. — Warunki szczególne zbieżności szeregów. — O szeregach urojonych. — Działania na szeregach. — Dodawanie szeregów. — Szeregi podwójne. — Mnożenie szeregów. — Twierdzenie Cauch'ego. — Zastosowania: — Szereg Newtona. Szereg e. — Uwagi nad użyciem Szeregów. — Przykłady.

Określenia.

96. *Szeregiem* nazywamy zbiór ilości dodatnych lub odjemnych, postępujących po sobie według pewnego prawa, których liczba jest nieograniczoną.

Np. postępy różnicowe

$$a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b)+\dots+(a+nb)$$
$$+(a+(n+1)b)+\dots$$

lub ilorazowe

$$a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+aq^n+aq^{n+1}+^1\dots$$

są szeregami.

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu dąży do pewnéj granicy oznaczonéj, gdy liczba tych wyrazów zwiększa się do nieskończoności, szereg nazywamy *zbieżnym.*

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu zwiększa się nieograniczenie, w miarę jak powiększamy liczbę tych wyrazów, szereg nazywamy *rozbieżnym.*

Jeżeli summa algebraiczna wyrazów szeregu nie zdąża do żadnéj oznaczonéj granicy, ani też nie zwiększa się bez granic, gdy liczba wyrazów zwiększa się do nieskończoności, szereg nazywamy *nieoznaczonym*.

97. Przykład. Postęp ilorazowy

$$(1) \qquad a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots$$

gdy n zwiększa się do nieskończoności, może być szeregiem zbieżnym, rozbieżnym lub nieoznaczonym, stosownie do wartości q. Nazwijmy summę skończoną n pierwszych wyrazów tego szeregu

$$(2) \qquad S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

wiemy że

$$(3) \qquad S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

lub

$$(4) \qquad S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Rozróżniamy trzy przypadki :

1° Gdy $q > 1$ wzór (3) daje nam

$$S_n = \infty \quad \text{gdy} \quad n = \infty$$

bo $q^n = \infty$; szereg więc (1) jest w tym przypadku *rozbieżnym*.

2° Gdy $q < 1$, wzór (4) daje nam

$$\text{gr}\, S_n = \frac{a}{1-q} = S \quad \text{gdy} \quad n = \infty$$

bo

$$\text{gr}\, q^n = 0 \quad \text{a zatém i} \quad \text{gr}\, \frac{aq^n}{1-q} = 0$$

gdy $n = \infty$; szereg więc (1) w tym przypadku jest *zbieżnym*, bo summa wyrazów jego dąży do granicy oznaczonéj $S = \frac{a}{1-q}$, gdy liczbę ich zwiększamy nieograniczenie.

3° Gdy $q = +1$

$$\text{gr}\, S_n = \text{gr}\, na = \infty \quad \text{gdy} \quad n = \infty$$

szereg więc (1) jest rozbieżnym; lecz gdy

$$q = -1$$

szereg (1) staje się

$$a - a + a - a + \ldots + a - a + \ldots$$

nieoznaczonym, summa jego wyrazów jest naprzemian a i 0, stosownie jak bierzemy parzystą lub nieparzystą ich liczbę; gdy liczba ta zwiększa się do nieskończoności, summa wyrazów nie może być większą od a, ani mniéjszą od 0, i nie wiadomo czy jest równą a, czy 0; szereg więc nie jest ani zbieżnym, ani rozbieżnym.

Warunki zbieżności szeregów.

98. Warunki ogólne. Niech będzie szereg

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2 \ldots \quad u_{n-1}, \quad u_n, \quad u_{n+1} \ldots$$

wyraz *n*ty szeregu

$$u_{n-1}$$

nazywać będziemy *wyrazem ogólnym*; summę wyrazów następujących

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

resztą szeregu. Oznaczać będziemy przez skrócenie summę n

pierwszych wyrazów szeregu przez S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{n-1}$$

a resztę przez R_n

$$R_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

99. Twierdzenie I. *Jeżeli szereg jest zbieżnym, granica reszty jest zero.*

Oznaczamy przez S granicę summy szeregu zbieżnego

$$(1) \qquad S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots$$

co moglibyśmy właściwiéj napisać

$$S = gr\,(u_0 + u_1 + v_2 + \dots + u_{n-1})$$

albo inaczéj

$$(2) \qquad S = \mathrm{gr}\, S_n$$

gdy n zwiększa się do nieskończoności; powiadam, że możemy napisać

$$(3) \qquad \mathrm{gr}\, R_n = \mathrm{gr}\,(v_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p-1}) = 0$$

gdy n zwiększa się do nieskończoności, a p jest jakiekolwiek, mogące zwiększać się również do nieskończoności niezależnie od n.

W rzeczy saméj, z założenia (2)

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{gr}\,(S - S_n) = 0 \text{ a tém bardziéj} \\ \mathrm{gr}\,(S - S_{n+1}) = 0 \\ \mathrm{gr}\,(S - S_{n+2}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathrm{gr}\,(S - S_{n+p}) = 0 \end{cases}$$

Biorąc różnicę pierwszego równania (4) i każdego z następnych, otrzymamy

$$(5)\quad \mathrm{gr}(S_{n+1}-S_n)=0,\ \mathrm{gr}(S_{n-2}-S_n)=0,\ldots\ \mathrm{gr}(S_{n+p}-S_n)=0$$

lecz z określenia

$$(6)\quad \begin{cases} S_{n+1}-S_n=u_n \\ S_{n+2}-S_n=u_n+u_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n+p}-S_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1} \end{cases}$$

a zatém

$$\mathrm{gr}\,(u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{u+p-1})=\mathrm{gr}\;R_n=0$$

a to jakkowiek wielkiém przypuścimy p, c. b. d. d.

Uwaga. Widzimy z (5) i (6) gdzie n jest jakiemkolwiek zwiększającém się nieograniczenie, że *jeżeli szereg jest zbieżnym, wyrazy jego począwszy od pewnego wyrazu zmniejszają się nieograniczenie*; *granicą wyrazu ogólnego jest zero*, co możnaby postawić jako wniosek z powyższego twierdzenia.

100. Twierdzenie II. *Odwrotnie, szereg jest zbieżnym, jeżeli granicą jego reszty jest zero.*

Powiadam że summa

$$(1)\quad u_0+u_1+u_2+\ldots$$

dąży do granicy skończonéj, gdy liczba wyrazów zwiększa się nieograniczenie, jeżeli

$$(2)\quad \mathrm{gr}\,R_n=\mathrm{gr}(u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-1})=0$$

gdy n zwiększa się bez granic, i jeżeli warunek (2) zachodzi dla *wszelkich* wartości zwiększających się nieograniczenie jakie p przybrać może, (a nie tylko dla niektórych wartości p zależnych od n).

W rzeczy samėj z założenia (2) mamy

$$\operatorname{gr}(S_{n+p} - S_n) = 0$$

można więc nadać na n wartość dość wielką, choć *oznaczoną*, aby

$$S_n - \varepsilon < S_{n+p} < S_n + \varepsilon \tag{3}$$

gdzie ε jest ilością *oznaczoną*, która może być zresztą tak małą jak się podoba; a to jakiekolwiek będzie p. Pozostawiając n tém samém, naprzód oznaczoném, możemy z założenia zwiększać p do nieskończoności, a związek (3) będzie miał ciągle miéjsce. Summa więc S_{n+p} zmieniająca się, gdy p się zmienia, lecz zawarta ciągle między dwiema granicami oznaczonemi $S_n - \varepsilon$, $S_n + \varepsilon$, tak mało różnemi jak się podoba, sama ma granicę oznaczoną, gdy p, a zatém $n + p$, czyli liczba wyrazów szeregu (1), zwiększa się bez granic; summa ta S_{n+p} jest summą wyrazów szeregu (1); a skoro ma granicę oznaczoną, szereg jest zbieżnym c. b. d. d. (*)

Uwaga. Szereg może być rożbieżnym, choć wyrazy jego zmniéjszają się nieograniczenie, i wyraz ogólny ma za granicę zero; bo summa wyrazów w liczbie nieograniczonéj może być nieskończoną, choć każdy z tych wyrazów zdąża do granicy zero. Np. szereg zwany harmonicznym

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

(*) Twierdzenie to podane po raz pierwszy przez Cauch'ego, było poddane pod wątpliwość przez niektórych matematyków, gdyż dawano przykłady szeregów, które nie były zbieżnemi, choć summa p wyrazów następujących po $n$tym, gdy n dość wielkie, zdążało do granicy zero. Lecz brano p równe lub zależne od n przypuszając p *jakiemkolwiek*, niezależnem od n, wątpliwość zostaje usuniętą.

którego wyrazy zmniéjszają się dążąc widocznie do zera, jest rozbieżnym t. j. można wziąść dość wielką liczbę wyrazów, aby summa ta była większą od wszelkiéj ilości oznaczonéj. Jakoż, jakkolwiek wielkiém będzie n mamy zawsze n pierwszych wyrazów reszty

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\ldots+\frac{1}{n+n}$$

czyli

$$>\frac{n}{2n}$$

a że $\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, jakiekolwiek jest n, więc reszta może być większą od $\frac{1}{2}$; może być w podobny sposób większą od 1, większą od $\frac{3}{2}$ ... tak wielką jak się podoba, biorąc liczbę wyrazów reszty dość wielką; więc szereg jest rozbieżnym.

Granica wyrazu ogólnego równa zeru, jest więc warunkiem koniecznym, lecz niedostatecznym zbieżności szeregów. Lecz z dwóch powyższych twierdzeń wynika że : *granica reszty szeregu równa zeru, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu*, byleby w tym ostatnim razie, liczba wyrazów reszty, była jakąkolwiek, niezależną od liczby wyrazów poprzedzających pierwszy wyraz reszty.

Wniosek I. *Szereg jest zbieżnym, jeżeli wartości wyrazów jego bez względu na znak, tworzą szereg zbieżny.*

Jeżeli szereg

(1) $$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$

jest zbieżnym, powiadam że szereg

(2) $$\pm u_0 \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \ldots$$

będzie również zbieżnym, w jakikolwiek sposób będziemy łączyć znaki jego wyrazów wyższe z niższemi : np. szeregi

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_5 + \ldots$$
$$- u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - \ldots$$
$$u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5 - \ldots$$

będą także zbieżnemi. Bo reszta szeregu (2) jest widocznie mniéjszą co do wartości bezwzględnéj od reszty szeregu (1); a że granicą reszty szeregu (1) jest zero, granicą reszty szeregu (2) jest tém bardziéj zero.

WNIOSEK II. *Jeżeli wyrazy szeregu, począwszy od pewnego wyrazu są naprzemian dodatnemi i odjemnemi, a wartości bezwzględne ich ciągle się zmniejszają, granica wyrazu ogólnego równa zeru, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu.*

W rzeczy saméj, mamy wtedy

$$R_n = u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots \pm u_{n+p-1}$$

albo

$$R_n = (u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \ldots$$

każdy z dwumianów w nawiasie będąc z założenia dodatnym, $R_n > 0$; lecz mamy także

$$R_n = u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \ldots$$

każdy z dwumianów w nawiasie, mając wartość z założenia dodatną, $R_n < u_n$; mamy więc

$$0 < R_n < u_n$$

lecz $\mathrm{gr}\, u_n = 0$ z założenia: $\mathrm{gr}\, R_n = 0$ c. b. d. d.

101. Warunki szczególne zbieżności szeregów. Mając dany szereg, nie mamy sposobu ogólnego rozpoznania czy szereg jest zbieżnym, czy nie. Sposoby szczególne polegają głównie na porównaniu szeregu danego z innym szeregiem, którego zbieżność jest znaną. Porównanie to polega na twierdzeniu następującém :

TWIERDZENIE III. *Jeżeli wyrazy szeregu zbieżnego, które zakładamy wszystkie jednakowego znaku, pomnożemy jeden po drugim przez jakiekolwiek ilości dodatne lub odjemne, których wartość bezwzględna nie może się zwiększać do nieskończoności, otrzymamy nowy szereg zbieżny.*

Niech będzie szereg zbieżny

$$(1) \qquad S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots$$

którego wszystkie wyrazy są dodatnemi, lub wszystkie odjemnemi; niech będą

$$(2) \qquad k_0, \quad k_1, \quad k_2, \quad \ldots, k_{n-1}, \ldots$$

jakiekolwiek ilości dodatne lub odjemne, z których każda jest mniéjszą od pewnéj oznaczonéj ilości K; powiadam że szereg

$$(3) \qquad k_0 u_0 + k_1 u_1 + k_2 u + \ldots + k_{n-1} u_{n-1} + \ldots$$

będzie zbieżnym.

Oznaczmy summę n pierwszych wyrazów szeregu (1) przez

$$(4) \qquad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

ponieważ niektóre z ilości (2), mogą być dodatnemi, inne odjemnemi, oznaczmy przez s_n summę tych wyrazów z pomiędzy n wyrazów (4), które mają być pomnożonemi przez czynniki (2) dodatne, przez s'_n summę pozostałych wyrazów (4), które mają być pomnożonemi przez czynniki (2) odjemne; tak że mamy zawsze

$$S_n = s_n + s'_n$$

a zatém

$$S = \text{gr}\, S_n = \text{gr}\, s_n + \text{gr}\, s'_n \quad \text{gdy} \quad n = \infty$$

tak gr $s = s$, jak gr $s'_n = s'$ będą skończonemi, bo są jednego znaku i mają summę oznaczoną $S = s + s'$.

Oznaczmy summę n pierwszych wyrazów szeregu (3) przez

$$(5) \quad T_n = k_0 u_0 + k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_{n-1} u_{n-1} = t_n - t'_n$$

t_n oznacza summę wartości wyrazów dodatnych, t'_n summę wartości wyrazów odjemnych. Mamy z założenia

$$t_n < K s_n \qquad t'_n < K s'_n$$

wartości t_n, t'_n zwiększają się ciągle, gdy n się zwiększa, a mając być zawsze mniéjszemi od ilości oznaczonych Ks, Ks', więc mają granice oznaczone t, t' [**89**]. Różnica ich ma T_n również granicę oznaczoną

$$\text{gr}\, T_n = t - t' = T$$

szereg więc (3) jest zbieżnym c. b. d. d.

Wniosek I. *Szereg, którego każdy wyraz jest mniéjszym co do wartości od wyrazu tego samego rzędu szeregu zbieżnego, mającego wszystkie wyrazy jednakowego znaku, jest szeregiem zbieżnym.*

Niech będą dwa szeregi

(1) $u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots \; u_{n-1}, \; \ldots$

(2) $v_0, \; v_1, \; v_2, \; \ldots \; v_{n-1}, \; \ldots$

jeżeli pierwszy z nich jest szeregiem zbieżnym, i ma wyrazy jednakowego znaku :

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots$$

jeżeli nadto

(3) $v_0 < u_0 \quad v_1 < u_1 \quad v_2 < u_2 \; \ldots \; v_{n-1} < u_{n-1} \; \ldots$

powiadam że szereg

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} + \ldots$$

jest również zbieżnym. Bo aby z szeregu (1) otrzymać (2), trzeba pomnożyć wyrazy szeregu (1) przez pewne ilości z założenia mniéjsze od jedności, a zatém nie zwiększające się do nieskończoności; gdyby niektóre wyrazy szeregu (2), były odjemnemi, szereg ten byłby tem bardziéj zbieżnym [**100** Wn. I].

Podobnie, *szereg którego wszystkie wyrazy są jednakowego znaku, a każdy z nich po szczególe jest większym od wyrazu tego samego rzędu szeregu rozbieżnego, jest szeregiém rozbieżnym.*

Jeżeli szereg (2) jest rozbieżnym, jeżeli warunki (3) mają miejsce, powiadam że szereg (1) jest rozbieżnym. Bo gdyby szereg (1) był zbieżnym, szereg (2) byłby również zbieżnym, co jest przeciwne założeniu.

Tw. d'Alembert'a

WNIOSEK II. *Szereg jest zbieżnym, jeżeli zaczą̧wszy od pewnego wyrazu, stosunek wartości każdego wyrazu do poprzedzającego, bezwzględu na znak, jest mniéjszym od pewnéj oznaczonéj ilości, mniejszéj od jedności.*

Niech będzie szereg

(1) $u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots \; u_{p-1}, \; u_p \ldots \; u_{p+m-1}, \ldots \; u_{p+m} \ldots$

niech będzie dla jakiegokolwiek n dość wielkiego, np. większego od p, gdzie u_p oznacza wyraz, poprzedzony liczbą skończoną wyrazów :

$$\text{(2)} \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} < k \quad \text{gdzie } k < 1$$

co do wartości, powiadam że szereg (1) jest zbieżnym.

Mamy bowiem, założenia

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < k \quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < k \quad \frac{u_{p+3}}{u_{p+2}} < k \ldots \quad \frac{u_{p+m}}{u_{p+m-1}} < k \ldots$$

mnożąc te nierówności przez siebie otrzymamy :

$$\frac{u_{p+m}}{u_p} < k^m \quad \text{czyli} \quad u_{p+m} < k^m u_p$$

Zacząwszy więc od wyrazu u_p, wyrazy szeregu (1) są mniéjszemi od wyrazów odpowiedniego rzędu szeregu

(3) $u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots \; u_{p-1}, \; u_p, \; ku_p, \; k^2u_p, \; \ldots \; k^m u_p \ldots$

Lecz summa szeregu (3) składa się z summy skończonéj:

$$S_p = u + v_1 + \ldots + v_{p-1}$$

i z summy postępu ilorazowego

$$v_p + ku_p + k^2u_p + \ldots + k^m u_p + \ldots$$

któréj granicą jest $\frac{u_p}{1-k}$, gdy $m = \infty$; bo $k<1$ [**97**] : summa więc szeregu (3) ma granicę skończoną

$$S_p + \frac{u_p}{1-k}$$

a więc na zasadzie Wniosku I, szereg (1) jest także zbieżnym c. b. d. d.

Przypuściliśmy w dowodzeniu, że wszystkie wyrazy szeregu (1) są wziętemi ze znakiem dodatnym; jeżeli niektóre z nich są odjemnemi, a warunek (2) ma miéjsce bez względu na znak, szereg (1) jest tém bardziéj zbieżnym [**100** Wn.I]

Wniosek III. *Szereg, którego wszystkie wyrazy są jednakowego znaku, jest rozbieżnym, jeżeli zacząwszy od pewnego wyrazu, stosunek każdego wyrazu do poprzedzającego jest ciągle większym od pewnéj oznaczonéj ilości, któréj wartość jest większą od jedności.*

Bo prowadząc dowodzenie jak powyżéj, szereg ten miałby zacząwszy od pewnego wyrazu, każdy po szczególe wyraz większym od wyrazu tego samego rzędu szeregu rozbieżnego, zakończonego postępem ilorazowym, którego wykładnik byłby większym od jedności.

Wniosek IV. *Szereg jest zbieżnym, jeżeli stosunek wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego wyraz ogólny, ma granicę skończoną mniéjszą od jedności, rozbieżnym jeżeli wszystkie jego wyrazy są jednakowego znaku, a granica ta jest większą od jedności.*

Z określenia granicy, wniosek ten sprowadza się do dwóch poprzedzających, od których jest jednak mniéj ogólnym, bo stosunek wyrazu ogólnego do poprzedzającego może nie mieć granicy oznaczonéj, a jednak być zawsze mniéjszym od pewnéj ilości mniejszéj od jedności, lub większym od pewnéj ilości większéj od jedności.

Uwaga I. Gdy granica stosunku wyrazu ogólnego szeregu, do wyrazu poprzedzającego jest równą jedności, z wniosków powyższych nic wnieść nie można o zbieżności szeregu. Jeżeli jednak stosunek ten jest ciągle większym od jedności i ma za granicę jedność, szereg jest rozbieżnym, bo jest więkkszym wyraz za wyrazem od postępu ilorazowego, mającego za wykładnik jedność, a zatém rozbieżnego.

Wniosek v. *Szereg jest zbieżnym, jeżeli zacząwszy od pewnego wyrazu, pierwiastek stopnia* n*go z wartości* n*go wyrazu szeregu, jest ciągle mniéjszym co do wartości arytmetycznéj, od pewnéj oznaczonéj ilości, mniejszéj od jedności.*

Niech będzie szereg

$$u_0 \quad u_1, \quad u_2 \ldots u_{n-1}, \quad u_n, \ldots$$

niech będzie z założenia

$$\sqrt[n]{u_n} < k$$

gdzie $k<1$; powiadam że szereg jest zbieżnym.

W rzeczy saméj, mamy

$$u_n < k^n$$

zacząwszy więc od pewnego wyrazu u_n, szereg ten jest mniéjszym wyraz po wyrazie od postępu ilorazowego

$$1, \quad k, \quad k^2, \ldots k^n, \ldots$$

któren jest zbieżnym, jako mający wykładnik $k<1$ [**97**]. Gdyby zachodziły wyrazy odjemne, szereg byłby tem bardziéj zbieżnym [**100** Wn. I].

Tw. Cauchy'ego

Wniosek vi. *Szereg jest zbieżnym, jeżeli granica pierwiastku arytmetycznego stopnia* n*go z wartości wyrazu* n*go, jest ilość oznaczona, mniéjsza od jedności, gdy* n *zwiększa się nieograniczenie.*

Bo w takim razie zacząwszy od pewnego wyrazu, pierwiastek stopnia *n*go z wyrazu *n*go, jest ciągle mniéjszym od pewnéj ilości oznaczonéj, którą zawsze wziąść możemy mniéjszą od jedności, jakkolwiek większą od téj granicy.

Uwaga II. Z Twierdzenia III możnaby również wyprowadzić podany powyżéj wniosek (Tw. II, Wn. I), że zmieniwszy znaki niektórych wyrazów szeregu zbieżnego, którego wszystkie wyrazy są jednakowego znaku, nowy szereg pozostanie zbieżnym. Bo jestto to samo, co pomnożyć jedne wyrazy szeregu przez $+1$, inne przez -1.

Lecz jeżeli szereg zbieżny nie ma wszystkich swych wyrazów jednakowego znaku, zmieniwszy znaki niektórych wyrazów, szereg ze zbieżnego może się stać rozbieżnym.

Tak np. szereg

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

którego znaki są naprzemian dodatne i odjemne, a granicą wyrazu ogólnego jest zero, jest zbieżnym [**100** Wn. II]; lecz szereg

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

będzie rozbieżnym [**100** Uw. II].

102. Przykłady.

I. Szereg

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

jest zbieżnym (Tw. III, Wn. IV) bo

$$\text{gr}\,\frac{u_n}{u_{n-1}} = \text{gr}\,\overset{\frac{x}{n}}{\cancel{\frac{x}{n-1}}} = 0 \quad \text{gdy} \quad n = \infty$$

dla wszelkich wartości x niezwiększających się nieograniczenie; gdy $x = \infty$ szereg jest widocznie rozbieżnym.

II. Szereg

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

daje nam (Tw. III, Wn. IV)

$$\text{gr}\,\frac{u_n}{u_{n-1}}=\text{gr}\,\frac{n-1}{n}\,x=\text{gr}\left(1-\frac{1}{n}\right)x=x$$

gdy $n=\infty$. Szereg więc jest zbieżnym, gdy $x<1$, rozbieżnym, gdy $x>1$; lecz nie wiadomo z powyższego warunku co będzie, gdy $x=\pm 1$.

Lecz gdy $x=+1$, szereg

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots$$

jest rozbieżnym [**100** Uw.]

Gdy $x=-1$ szereg

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$$

jest zbieżnym (Tw. II, Wn. II).

III. Szereg

$$1+\frac{10}{1}+\frac{10^2}{1.2}+\frac{10^3}{1.2.3}+\frac{10^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

którego wyrazy z początku się zwiększają, jest jednak zbieżnym, bo

$$\text{gr}\,\frac{u_n}{u_{n-1}}=\text{gr}\,\frac{\dfrac{10^n}{1.2.3\ldots n}}{\dfrac{10^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}}=\text{gr}\,\frac{10}{n}=0 \text{ gdy } n=\infty$$

wyrazy zaczynają się zmniéjszać, zacząwszy od dziesiątego wyrazu: bo gdy $n>10$ stosunek wyrazu następującego do poprzedzającego równy $\frac{10}{n}$ jest ciągle mniéjszym od jedności; zresztą jestto szczególny przypadek szeregu uważanego w Przykładzie I, gdzie $x=10$.

IV. Szeregi

$$1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}+\ldots$$

$$x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

są zbieżnemi; bo stosunek wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego, jest równy w pierwszym:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{x^2}{(2n-1)\,2n}\text{; a w drugim: }\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{x^2}{2n\,(2n+1)}$$

a zatém granica tych stosunków, gdy $n=\infty$, jest zerem. Szeregi więc te są zbieżnemi dla wszelkich wartości skończonych x. Tém bardziéj szeregi następujące

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots$$

będą zbieżnemi; (Tw. II, Wn. I).

V. Szereg

$$\frac{a+1}{a}x+\left(\frac{a+2}{a+1}x\right)^2+\left(\frac{a+3}{a+2}x\right)^3+\ldots+\left(\frac{a+n}{a+n-1}x\right)^n+\ldots$$

daje

$$\text{gr}\sqrt[n]{u_n}=\text{gr}\frac{a+n}{a+n-1}x=\text{gr}\frac{x}{1-\frac{1}{a+n}}=x,\quad\text{gdy } n=\infty$$

jest więc zbieżnym, gdy $x<1$, rozbieżnym, gdy $x>1$.

O szeregach urojonych.

103. Niech będą

(1) $$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-1},\ldots$$

(2) $$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_{n-1},\ldots$$

dwa szeregi ilości rzeczywistych (które przez skrócenie nazywać będziemy *szeregami rzeczywistemi*). Szereg

(3) $$u_0+v_0 i,\ u_1+v_1 i,\ u_2+v_2 i,\ \ldots\ u_{n-1}+v_{n-1} i$$

gdzie i wyraża $\sqrt{-1}$, nazywać będziemy *szeregiem urojonym*. Każdy z wyrazów $u_0+v_0 i=w_0$, $u_1+v_1 i=w_1,\ldots$ $u_{n-1}+v_{n-1} i=w_{n-1}\ldots$ nazywać będziemy wyrazem szeregu urojonego, który zatém napisać będziemy mogli :

(4) $$w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_{n-1},\ldots$$

Jeżeli szeregi (1) i (2) obadwa są zbieżnemi, szereg (3) lub (4) nazywać będziemy szeregiem *zbieżnym*; jeżeli jeden z szeregów (1) i (2), lub obadwa będą rozbieżnemi, szereg (3) lub (4) nazywać będziemy *rozbieżnym*; zdarzyć się może wreszcie, że szeregi (1) i (2) będą nieoznaczonemi; szereg (3) lub (4) nazywać będziemy w takim razie *nieoznaczonym*.

W pierwszym razie, jeżeli założymy

$$\mathrm{U}=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+\ldots$$
$$\mathrm{V}=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}+\ldots$$

granicą summy, lub po prostu *summą* szeregu (4) :

$$\mathrm{W}=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_{n-1}+\ldots$$

nazywać będziemy wyrażenie :

(5) $$\mathrm{W}=\mathrm{U}+\mathrm{V}i$$

Zamiast uważać każdy wyraz szeregu urojonego pod postacią

$$w = u + vi$$

możemy wyrazić go pod postacią [77] :

$$w = \rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)$$

gdzie ρ jest modułem, a ω argumentem : co oznaczamy pisząc

$$\rho = \mathrm{mod}\,w \qquad \omega = \arg w$$

a szereg przedstawi się wtedy pod postacią

$$(6)\quad \rho_0(\mathrm{dos}\,\omega_0 + i\,\mathrm{wst}\,\omega_0) + \rho_1(\mathrm{dos}\,\omega_1 + i\,\mathrm{wst}\,\omega_1) + \ldots$$
$$+ \rho_{n-1}(\mathrm{dos}\,\omega_{n-1} + i\,\mathrm{wst}\,\omega_{n-1}) + \ldots = \mathrm{P}\,(\mathrm{dos}\,\Omega + i\,\mathrm{wst}\,\Omega) = \mathrm{W}$$

gdzie

$$(7)\quad \mathrm{U} = \mathrm{P}\,\mathrm{dos}\,\Omega = \rho_0\,\mathrm{dos}\,\omega_0 + \rho_1\,\mathrm{dos}\,\omega_1 + \ldots + \rho_{n-1}\,\mathrm{dos}\,\omega_{n-1} + \ldots$$
$$(8)\quad \mathrm{V} = \mathrm{P}\,\mathrm{wst}\,\Omega = \rho_0\,\mathrm{wst}\,\omega_0 + \rho_1\,\mathrm{wst}\,\omega_1 + \ldots + \rho_{n-1}\,\mathrm{wst}\,\omega_{n-1} + \ldots$$

oznaczają szeregi te same co (1) i (2).

Odwrotnie, szereg rzeczywisty może być uważanym jako szczególny przypadek szeregu urojonego : jak wiemy [77] każde wyrażenie rzeczywiste, może być uważanem jako wyrażenie urojone, którego moduł równy jest wartości wyrażenia rzeczywistego bez względu na znak, a argument wielokrotności parzystéj, lub nieparzystéj π, stosownie do tego, czy wyrażenie rzeczywiste jest dodatném lub odjemném. Moduł przypuszczamy zawsze dodatnym : mamy bowiem [77].

$$+a = a\,(\mathrm{dos}\,2n\pi + i\,\mathrm{wst}\,2n\pi)$$
$$-a = a\,[\mathrm{dos}\,(2n+1)\,\pi + i\,\mathrm{wst}\,(2n+1)\,\pi),$$

104. Twierdzenie iv. *Szereg jest zbieżnym, jeżeli szereg modułów jego wyrazów jest szeregiem zbieżnym.*

W rzeczy saméj, jeżeli szereg

$$\rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2 \ldots \rho_{n-1}, \ldots$$

jest zbieżnym, szeregi (7) i (8)

$$\rho_0 \operatorname{dos}\omega_0, \rho_1 \operatorname{dos}\omega_1, \ldots \rho_{n-1} \operatorname{dos}\omega_{n-1}, \ldots$$
$$\rho_0 \operatorname{wst}\omega_0, \rho_1 \operatorname{wst}\omega_1, \ldots \rho_{n-1} \operatorname{wst}\omega_{n-1}, \ldots$$

są również zbieżnemi (Twierdzenie III), bo wstawy i dostawy, zawsze mniéjsze od jedności, nie mogą zwiększać się bez granic; a zatém z określenia szereg (6)

$$\rho_0(\operatorname{dos}\omega_0 + i \operatorname{wst}\omega_0) + \rho_1(\operatorname{dos}\omega_1 + i \operatorname{wst}\omega_1) + \ldots$$
$$+ \rho_{n-1}(\operatorname{dos}\omega_{n-1} + i \operatorname{wst}\omega_{n-1}) + \ldots$$

jest również szeregiem zbieżnym c. b. d. d.

Uwaga. Twierdzenie to zawiera, jako szczególny przypadek Wniosek Iszy Twierdzenia IIgo [100]; bo jeżeli wyrazy szeregu urojonego, mają być uważane jako rzeczywiste, moduły wyrazów urojonych są uważane jako wartości bez względu na znak wyrazów rzeczywistych, znak zaś nadaje argument, jakeśmy to dopiero co zauważyli; powiedzieć że szereg jest zbieżnym, jeżeli wartości wyrazów jego bez względu na znak tworzą szereg zbieżny, wychodzi na to samo, co powiedzieć, że szereg jest zbieżnym, jeżeli szereg modułów jego wyrazów jest szeregiem zbieżnym.

Twierdzenie odwrotne nie ma miéjsca: to jest, szereg może być zbieżnym, choć szereg modułów nie jest zbieżnym: jakoż, wziąwszy naprzykład

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{3}, \ldots$$

szereg modułów będzie rozbieżnym [100]; lecz byleby argumenty były takie, żeby wartości wstaw i dostaw tych argumentów były naprzemian dodatnemi i odjemnemi, szereg będzie zbieżnym; np. szereg

$$1\left[\operatorname{dos}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{wst}\frac{\pi}{4}\right]+\frac{1}{2}\left[\operatorname{dos}\frac{5}{4}\pi+i\operatorname{wst}\frac{5}{4}\pi\right]$$
$$+\frac{1}{3}\left[\operatorname{dos}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{wst}\frac{\pi}{4}\right]+\frac{1}{4}\left[\operatorname{dos}\frac{5}{4}\pi+i\operatorname{wst}\frac{5}{4}\pi\right]+\dots$$

będzie oczywiście zbieżnym: bo szeregi rzeczywiste składowe, mając naprzemiam znaki więcéj i mniéj wstaw i dostaw, i wyrazy zmniejszające się nieograniczenie, są zbieżnymi [**100**]. Szereg zbieżny:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

można także przedstawić pod postacią szeregu urojonego

$$1\,[\operatorname{dos}2\pi+i\operatorname{wst}2\pi]+\frac{1}{2}\left[\operatorname{dos}\pi+i\operatorname{wst}\pi\right]$$
$$+\frac{1}{3}\left[\operatorname{dos}4\pi+i\operatorname{wst}4\pi\right]+\frac{1}{4}\left[\operatorname{dos}3\pi+i\operatorname{wst}3\pi\right]+\dots$$

który będzie zbieżnym, choć szereg modułów jest rozbieżnym.

Aby nie powtarzać dwa razy twierdzeń, tyczących się zarówno szeregów urojonych i rzeczywistych, będziemy brali w następstwie pod uwagę pierwsze, to jest urojone, jako ogólniéjsze; uważając, że aby udowodnione twierdzenie, lub własność szeregów urojonych zastosować do rzeczywistych, dość jest uważać moduły wyrazów szeregów urojonych za wartości bezwzględne wyrazów szeregów rzeczywistych, a argumenty pierwszych, za wielokrotności π parzyste lub nieparzyste, stosownie do znaku drugich. Tak np. mówiąc: *szereg, którego moduły tworzą szereg zbieżny*, rozumieć będziemy nie tylko szereg urojony, ale i rzeczywisty taki, *którego wartości wyrazów bez względu na znak, tworzą szereg zbieżny.*

Działania na szeregach.

105. Twierdzenie V. *Granica summy szeregu zbieżnego się nie zmieni, jeżeli za pewną liczbę wyrazów po sobie następujących, podstawimy ich summę algebraiczną.*

Niech będzie granica summy szeregu zbieżnego

$$\mathrm{U} = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \tag{1}$$

w którym wyrazy mogą być dodatne lub odjemne, rzeczywiste lub urojone. Zbierając po kilka wyrów po sobie następujących w jeden, t. j. podstawiając np.

$$u_0 + u_1 = v_0 \quad u_2 + u_3 + u_4 = v_1, \dots$$

otrzymamy inny szereg

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots \tag{2}$$

Powiadam, że szereg (2) jest zbieżnym, i że granicą jego summy jest U.

Oznaczmy summę n pierwszych wyrazów szeregu (1) przez U_n, summę p pierwszych wyrazów szeregu (2) przez V_p

$$\mathrm{U}_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \tag{3}$$
$$\mathrm{V}_p = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{p-1} \tag{4}$$

można zawsze wziąść n takie, żeby

$$\mathrm{U}_n = \mathrm{V}_p \tag{5}$$

a to jakiekolwiek będziek p. A że $\operatorname{gr} U_n = U$ więc [90]:

$$\operatorname{gr} V_p = \operatorname{gr} U_n = U \qquad \text{c.b.d.d.}$$

Uwaga. Twierdzienie odwrotne nie zawsze ma miéjsce: t. j. rozkładając wyrazy szeregu zbieżnego na części, szereg tak otrzymamy nie koniecznie będzie zbieżnym; np. szereg

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

jest zbieżnym, jako postęp ilorazowy, którego wykładnikiem jest $\frac{1}{2}$. Lecz szereg

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{7}{4} + 3 - \frac{23}{8} + \ldots + n - \frac{n2^n - 1}{2^n} + \ldots$$

utworzony z pierwszego rozkładając

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} \quad \frac{1}{8} = 3 - \frac{23}{8} \ldots$$

jest rozbieżnym [99], bo wyraz ogólny $\frac{n2^n - 1}{2^n} = n - \frac{1}{2^n}$ zwiększa się bez granic wraz z n.

Gdyby jednak dodać warunek, żeby szereg otrzymany przez rozłożenie szeregu zbieżnego, miał wszystkie wyrazy jednakowego znaku, szereg ten będzie zawsze zbieżnym, o czém można się przekonać, odwracając dowodzenie powyższego twierdzenia.

106. Twierdzenie VI. *Granica szeregu zbieżnego, którego moduły tworzą szereg zbieżny, nie zmieni się, jeżeli przestawimy w jakikolwiek sposób porządek wyrazów.*

Udowodnimy naprzód tego twierdzenia w przypadku szeregów rzeczywistych:

Granica szeregu zbieżnego, którego wartości wyrazów bez względu na znak tworzą szereg zbieżny, nie zmieni się, jeżeli przestawimy w jakikolwiek bądź sposób porządek wyrazów.

Niech będzie szereg rzeczywisty zbieżny,

(1) $$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, \ldots$$

nazwijmy wartości jego wyrazów bez względu na znak

(2) $$w_0, w_1, w_2, \ldots w_{n-1}, \ldots$$

Ułóżmy wyrazy szeregu (1) w jakikolwiek bądź inny sposób:

(3) $$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, \ldots u_\omega, \ldots$$

Jeżeli nazwiemy granicę summ szeregów (1) i (2), z założenia zbieżnych, U i W:

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots$$
$$W = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + \ldots$$

powiadam, że summa

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots + u_\omega + \ldots$$

ma granicę skończoną, równą U.

Wrzeczy saméj, zakładając

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$
$$U_\omega = u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots + u_\omega$$

możemy wziąść ω dość wielkiem, żeby wszystkie wyrazy U_n znajdowały się w summie U_ω; mamy więc

$$U_\omega = U_n \pm R$$

nazywając $\pm R$ summę tych wyrazów U_ω, które nie wchodzą w U_n. Oznaczając te wyrazy przez u_p, $u_q \dots u_s$, mamy

$$\pm R = u_p + u_q + u_r + \dots + u_s$$

a zatém z założenia

$$R \leqq w_p + w_q + w_r + \dots + w_s$$

Załóżmy resztę szeregu zbieżnego (2)

$$R_n = w_n + w_{n+1} + w_{n+2} + \dots$$

ponieważ p, q, r, ... s są większemi od $n-1$, mamy

$$R \leqq R_n \quad \text{czyli} \quad R = \theta R_n$$

oznaczając przez θ ułamek większy od zera a mniéjszy lub równy jedności. Ztąd

$$U_\omega = U_n \pm \theta R_n$$

a że $\mathrm{gr}\, R_n = 0$, gdy $n = \infty$, więc

$$\mathrm{gr}\, U_\omega = \mathrm{gr}\, U_n = U \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Niech będzie teraz w ogólności szereg urojony zbieżny, którego summa:

$$\text{(A)} \quad U + Vi = \rho_0(\mathrm{dos}\,\omega_0 + i\,\mathrm{wst}\,\omega_0) + \rho_1(\mathrm{dos}\,\omega_1 + i\,\mathrm{wst}\,\omega_1) + \dots + \rho_{n-1}(\mathrm{dos}\,\omega_{n-1} + i\,\mathrm{wst}\,\omega_{n-1}) + \dots$$

jeżeli moduły tworzą szereg zbieżny:

$$\text{(B)} \qquad P = \rho_0 + \rho_1 + \dots + \rho_{n-1} + \dots$$

powiadam, że przestawiając wyrazy szeregu (A), granica jego summy $U + Vi$ się nie zmieni.

W rzeczy saméj, szeregi rzeczywiste, których summa jest U i V i które otrzymać możemy mnożąc wyraz powyrazie szeregu (B) przez dos ω, lub wst ω, będą zbieżnemi również jak i szereg (B), biorąc wszystkie wyrazy z jednakowym znakiem; można więc przedstawić wyrazy tych szeregów, a ich summy U i V się nie zmienią; summa więc $U + Vi$ szeregu (A) również się nie zmieni, c. b. d. d.

107. Uwaga. Rozróżnić więc możemy dwa rodzaje szeregów zbieżnych: te, które są zbieżnemi w skutek prawa według jakiego wartości wyrazów po sobie następują, czyli bez względu na znaki wyrazów, i te, których zbieżność polega jedynie na następstwie znaków. Czyli ogólniéj: te, których szeregi modułów są zbieżnemi, bez względu na argumenty, (szeregi które nazywać będziemy *zbieżnemi co do modułów*), i te, które winny zbieżność swą jedynie argumentom.

Na zasadzie powyższego twierdzenia, zbieżność tych ostatnich polega także na porządku, w jakim wyrazy po sobie postępują, gdy tymczasem zbieżność pierwszych jest zupełnie niezależną od porządku wyrazów. Przestawiając wyrazy szeregu zbieżnego, lecz którego wyrazy co do wartości bez względu na znak nie tworzą szeregu zbieżnego, możemy otrzymać szereg rozbieżny, albo nawet zbieżny, lecz którego summa zdąża do całkiem różnéj granicy, jak summa szeregu pierwotnego,

Weźmy np. szereg

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

zbieżny (Tw. II Wn. II.), choć szereg

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

jest rozbieżnym (Tw. II Uw.)

Przestawmy wyrazy szeregu (1), biorąc z kolei dwa dodatne i jeden odjemny

$$(3)\qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$$

dowiedziemy, że szereg (3) jest zbieżnym, lecz że summa jego zdąża do innéj granicy, jak summa szeregu (1).

Oznaczmy summy pierwszych wyrazów szeregu (1) i (3) aż do wyrazu $\frac{1}{2n}$ włącznie przez S_n i S'_n : mamy

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots-\frac{1}{2n}$$

$$S'_n=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\dots-\frac{1}{2n}$$

odejmując, mamy

$$S'_n-S_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\dots+\frac{1}{4n-1}$$

a zatém, zważywszy że summa ta składa się z $n-1$ wyrazów zmniéjszających się

$$\frac{n-1}{2n+1}>S'_n-S_n>\frac{n-1}{4n-1}$$

lecz gdy $n = \infty$

$$\mathrm{gr}\,\frac{n-1}{2n+1} = \mathrm{gr}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{gr}\,\frac{n-1}{4n-1} = \mathrm{gr}\,\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

a więc

$$\frac{1}{2} > \mathrm{gr}\,(S'_n - S_n) > \frac{1}{4}$$

więc S'_n, nie zwiększa się nieograniczenie wraz z n, bo $\mathrm{gr}\, S_n = S$, jest oznaczoną z założenia; łatwo widzieć że, granica S'_n nie będąc nieskończenie wielką nie jest nieoznaczoną; szereg więc (3) zdąża do granicy oznaczonéj S', różnéj on granicy S szeregu (1), bo

$$\frac{1}{2} > S' - S > \frac{1}{4}$$

Szereg utworzony przez przestawienie znaków szeregu zbieżnego drugiego rodzaju, może być również rozbieżnym, np. szereg

$$(4) \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

którego znaki idą naprzemian, a wyraz ogólny zdąża do granicy 0, jest zbieżnym (Tw II. Wn. II.); a szereg

$$(5) \qquad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

jest rozbieżnym. Bo założywszy jak powyżéj

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots - \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$S'_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots - \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

mamy

$$S'_n - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

a więc, zważywszy że ostatni wyraz $\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$ téj różnicy $S'_n - S_n$, złożonéj z $n-1$ wyrazów jest mniéjszym od poprzedzających:

$$S'_n - S_n > \frac{n-1}{\sqrt{4n-1}}$$

czyli

$$S'_n - S_n > \sqrt{n-1}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}}$$

a że, gdy $n = \infty$

$$\mathrm{gr}\ \sqrt{n-1} = \infty, \quad \mathrm{gr}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

więc

$$\mathrm{gr}\,(S'_n - S_n) = \infty$$

czyli że S'_n zwiększa się bez granic wraz z n, choć S_n ma granicę skończoną S. Szereg więc (5) jest rozbieżnym choć (4) jest zbieżnym.

Szeregi takie, które jakkolwiek zbieżne skutkiem następstwa znaków, przestają być zbieżnemi, gdy weźmiemy wszystkie wyrazy z jednakowym znakiem, czyli ogólniéj, szeregi zbieżne, których moduły nie tworzą szeregów zbieżnych, w których nie możemy przestawiać wyrazów, nie naruszając zbieżności, lub przynajmniéj granicy summy szeregu, nazywają niekiedy *źle zbieżnymi*, a inne, których moduły lub wartości bez względu na znak tworzą szeregi zbieżne, *dobrze zbieżnymi*.

108. Dodawanie Szeregów. Twierdzenie VII. *Wyrazem ogólnym summy szeregów zbieżnych co do modułów, (w szczególności zbieżnych bez względu na znak) jest summa wyrazów ogólnych każdego szeregu, jeżeli liczba szeregów, którą dodajemy jest skończoną; jeżeli liczba szeregów tych jest nieograniczoną, summa ich stanowi szereg podwójny, którego wyrazem ogólnym będzie szereg utworzony z wyrazów ogólnych szeregów składających, byleby summy tych ostatnich, stanowiły również szereg zbieżny co do modułów.*

Niech będą szeregi zbieżne co do modułów

$$(1)\quad \begin{cases} U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots \\ U' = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_{n-1} + \ldots \\ U'' = u''_0 + u''_1 + u''_2 + \ldots + u''_{n-1} + \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{cases}$$

Jeżeli liczba tych szeregów, czyli wartości U, U′, U″ . . . jest skończoną, summa ich

$$(2)\quad \begin{aligned} U + U' + U'' + \ldots = &(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ u_{n-1} + \ldots) \\ &+ (u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_{n-1} + \ldots) \\ &+ (u''_0 + u''_1 + u''_2 + \ldots + u''_{n-1} + \ldots) + \ldots \end{aligned}$$

będzie ilością skończoną W, granicą szeregu zbieżnego co do modułów, po drugiéj stronie wzoru (2); a że na zasadzie Twierdzenia VI możemy przestawiać wyrazy szeregu (2), możemy wziąść za wyraz ogólny tego szregu

$$u_{n-1} + u'_{n-1} + u''_{n-1} + \dots$$

czyli napisać summę tę

$$\begin{aligned} (3) \quad W = & (u_0 + u'_0 + u''_0 + \dots) + (u_1 + u'_1 + u''_1 + \dots) \\ & + (u_2 + u'_2 + u''_2 + \dots) + \dots \\ & + (u_{n-1} + u'_{n-1} + u''_{n-1} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Jeżeli liczba szeregów (1), czyli wartości

$$(4) \qquad U, \; U', \; U'' \dots$$

jest nieograniczoną, wartości te stanowią nowy szereg, który nazywać będziemy *szeregiem podwójnym* : szereg ten może być zbieżnym, rozbieżnym, lub nieoznaczonym, choć szeregi (1) są zbieżnymi : zależy to od wartości i znaków (4); lecz jeżeli wartości (4) stanowią szereg zbieżny co do modułów, możemy również zmienić porządek wyrazów szeregu (2), i napisać go pod postacią (3), gdzie wyrazem ogólnym będzie summa szeregu zbieżnego

$$u_{n-1} + u'_{n-1} + u''_{n-1} + \dots$$

109. Mnożenie szeregów. Twierdoenie VIII.. *Niech będą szeregi zbieżne co do modułów*

$$(1) \qquad u_0, \; u_1, \; u_2 \dots, \; u_{n-1}, \dots$$

$$(2) \qquad v_0, \; v_1, \; v_2 \dots, \; v_{n-1}, \dots$$

niech będzie U *granicą summy wyrazów pierwszego,* V *gra-*

nicą summy wyrazów drugiego : powiadam że iloczyn UV *jest granicą summy szeregu zbieżnego*

$$(3)\quad u_0v_0,\ (u_0v_1+u_1v_0),\ (u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0),\ldots,\\ (u_0v_{n-1}+u_1v_{n-2}+\ldots+u_{n-2}v_1+u_{n-1}v_0)\ldots$$

którego wyrazem ogólnym jest

$$u_0v_{n-1}+u_1v_{n-2}+\ldots+u_{n-2}v_1+u_{n-1}v_0$$

Szereg (3) nie jest szeregiem iloczynów każdego wyrazu szeregu (1), przez każdy wyraz szeregu (2); wyraz ogólny nie zawiera bowiem iloczynów takich, jak

$$u_1v_{n-1},\ u_2v_{n-2},\ u_2v_{n-1},\ldots u_{n-1}v_1,\ u_{n-}v_1,\\ u_{n-1}v_2,\ldots u_{n-1}v_{n-1}\ldots$$

w ogólności iloczynów, których czynniki mają summę wskaźników równą n, lnb większą od n.

Oznaczmy summy n pierwszych wyrazów trzech powyższych szeregów przez

$$(4)\left\{\begin{aligned} U_n&=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}\\ V_n&=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}\\ W_n&=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_{n-1}\\ &=v_0v_0+(v_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+v_1v_1+u_2v_0)+\ldots\\ &\quad+(v_0v_{n-1}+u_1v_{n-2}+\ldots+u_{n-1}v_0)\end{aligned}\right.$$

Przypuśćmy naprzód, że szeregi (1), (2), (3), są szeregami samych modułów z założenia zbieżnymi; oznaczając przez k największą całkowitę zawartą w $\frac{n}{2}$, t. j. $k=\frac{n}{2}$, gdy n

parzyste, lub $k = \frac{n-1}{2}$, gdy n nieparzyste, mamy

$$(4) \qquad U_n V_n > W_n > U_k V_k$$

bo iloczyn $U_n V_n$ zawiera wszystkie wyrazy znajdujące się w W_n i jeszcze inne wyrazy nieznajdujące się w W_n, jak

$$u_1 v_{n-1}, \quad u_2 (v_{n-2} + v_{n-1}), \ldots u_{n-1}(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1});$$

podobnież W_n zawiera wszystkie wyrazy iloczynu $U_k V_k$ i jeszcze inne wyrazy nie znajdujące się w tym iloczynie, mianowicie wszystkie, których jeden z czynników ma wskaźnik większy od k.

Lecz gdy n zwiększa się bez granic, k zwiększa się również nieograniczenie; a że z założenia

$$\text{gr}\, U_n = U = \text{gr}\, U_k \qquad \text{gr}\, V_n = V = \text{gr}\, V_k$$

więc

$$\text{gr}\, U_n V_n = UV = \text{gr}\, U_k V_k$$

a zatém

$$(5) \qquad \text{gr}\, W_n = UV$$

gdy n zwiększa się nieograniczenie. Czyli innemi słowy: różnica

$$U_n V_n - W_n$$

zdąża do granicy zero, gdy n zwiększa się nieograniczenie.

Lecz różnica ta tém bardziéj będzie miała granicę zero, gdy zamiast wziąść szeregi modułów. weźmiemy pod uwagę szeregi wyrazów tychże modułów (1) i (2); czyli, gdy uważając (1) i (2) naprzód za szeregi sprowadzone do szeregów modułów, pomnożemy wyraz za wyrazem przez wstawę, lub dostawę pewnego argumentu, ilość mniéjszą od od jedności, aby im oddać postać ogólną szeregów urojonych : twierdzenie więc jest udowodnioném w całéj ogólności. Podał je pierwszy CAUCHY.

UWAGA. Twierdzenie nie miałoby miéjsca, gdyby szeregi (1) i (2) były *źle zbieżnymi* t. j. gdyby zbieżność ich polegała jedynie na znakach lub argumentach wyrazów, a nie na ich wartościach, lub modułach.

Zastosowania i przykłady.

110. *Wyznaczyć warunki zbieżności szeregu*

$$(1) \qquad \frac{1}{1^{1+\rho}}+\frac{1}{2^{1+\rho}}+\frac{1}{3^{1+\rho}}+\ldots+\frac{1}{n^{1+\rho}}+\ldots$$

gdzie ρ *jest pewną liczbą daną.*

Granicą stosunku wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego jest

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\rho}$$

granicą tego stosunku jest jedność, gdy n zwiększa się nieograniczenie : cecha podana w Twierdzeniu III, Wniosek IV [**101**] jest więc niedostateczną dla wyznaczenia zbieżności tego szeregu.

Cecha podana we Wniosku VI Twierdzenia III jest również niedostateczną : bo

$$\sqrt[n-1]{u_{n-1}}=n^{-\frac{1+\rho}{n}}, \quad 1\sqrt[n-1]{u_{n-1}}=-(1+\rho)\,\frac{1n}{n}$$

a że gr $\frac{1.n}{n}$ przedstawia się pod postacią nieoznaczoną $\frac{\infty}{\infty}$

(na zasadzie późniéj podanego sposobu przekonać się można będzie, że granica ta równa jest zeru, a zatém gr $\left.\sqrt[n-1]{u_{n-1}} = 1\right)$ nie można więc wnieść z téj cechy o zbieżności szeregu (1).

Załóżmy

$$(2)\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{1}{1^{1+\varrho}} \\ u_1 = \dfrac{1}{2^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{3^{1+\varrho}} \\ u_2 = \dfrac{1}{4^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{5^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{6^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{7^{1+\varrho}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_m = \dfrac{1}{(2^m)^{1+\varrho}} + \dfrac{1}{(2^m+1)^{1+\varrho}} + \ldots + \dfrac{1}{(2^{m+1}-1)^{1+\varrho}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

będziemy mieli

$$u_1 < 2 \times \frac{1}{2^{1+\varrho}} \qquad \text{czyli} \qquad u_1 < \frac{1}{2^\varrho}$$

$$u_2 < 4 \times \frac{1}{4^{1+\varrho}} \qquad \text{czyli} \qquad u_2 < \frac{1}{(2^\varrho)^2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$v_m < 2^m \times \frac{1}{(2^m)^{1+\varrho}} \qquad \text{czyli} \qquad v_m < \frac{1}{(2^\varrho)^m}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

szereg więc

$$(3) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots\ v_m \ldots$$

którego wyraz po wyrazie jest mniéjszym od wyrazów odpowiednich postępu

$$(4)\qquad 1\,,\ \frac{1}{2^\rho}\,,\ \frac{1}{(2^\rho)^2}\,,\ \ldots,\ \frac{1}{(2^\rho)^m}\,,\ \ldots$$

jest zbieżnym (Tw. III. Wn. I), jeżeli wykładnik tego postępu $\frac{1}{2^\rho}$ jest mniéjszym od jedności, co ma miéjsce gdy ρ dodatne. Szereg (1) jest więc zbieżnym, jeżeli $\rho > 0$.

Załóżmy

$$(5)\left\{\begin{array}{l}
v_0 = \dfrac{1}{1^{1+\rho}} \\[2mm]
v_1 = \dfrac{1}{2^{1+\rho}} \\[2mm]
v_2 = \dfrac{1}{3^{1+\rho}} + \dfrac{1}{4^{1+\rho}} \\[2mm]
v_3 = \dfrac{1}{5^{1+\rho}} + \dfrac{1}{6^{1+\rho}} + \dfrac{1}{7^{1+\rho}} + \dfrac{1}{8^{1+\rho}} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
v_m = \dfrac{1}{(2^{m-1}+1)^{1+\rho}} + \dfrac{1}{(2^{m-1}+2)^{1+\rho}} + \ldots + \dfrac{1}{(2^m)^{1+\rho}}
\end{array}\right.$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

będziemy mieli

$$v_2 > 2\times\frac{1}{4^{1+\rho}}\quad\text{czyli}\quad v_2 > \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2^\rho)^2}$$

$$v_3 > 4\times\frac{1}{8^{1+\rho}}\quad\text{czyli}\quad v_3 > \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2^\rho)^3}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$v_m > 2^{m-1}\times\frac{1}{(2^m)^{1+\rho}}\quad\text{czyli}\quad v_m > \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2^\rho)^m}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

szereg więc

$$(6)\qquad v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m,\ \ldots$$

którego wyraz po wyrazie jest większym od wyrazów odpowiednich szeregu

$$(7)\qquad 1,\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{\rho}},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2^{\rho})^2},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2^{\rho})^3}\ \cdots$$

jest rozbieżnym, jeżeli wykładnik postępu $\frac{1}{2^{\rho}}$ jest równym lub większym od jedności, co ma miéjsce, gdy $\rho<0$ lub $\rho=0$. W takim razie (Tw. V) szereg (1) będzie również rozbieżnym.

Szereg więc ten

$$(1)\qquad \frac{1}{1^{1+\rho}},\ \frac{1}{2^{1+\rho}},\ \frac{1}{3^{1+\rho}},\ \ldots,\ \frac{1}{n^{1+\rho}},\ \ldots$$

jest zbieżnym jeżeli $\rho>0$
rozbieżnym jeżeli $\rho<0$
rozbieżnym jeżeli $\rho=0$

111. Szereg Newtona. Niech będzie szereg

$$(1)\quad 1,\ \frac{m}{1}x,\ \frac{m(m-1)}{1.2}x^2,\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3,\ \ldots$$
$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,\ \ldots$$

Jeżeli m jest całkowitém i dodatném, szereg ten sprowadza się do $m+1$ wyrazów, których summa równa jest jak wiadomo, $(1+x)^m$.

Przypuścimy tu m jakiemkolwiek, lecz rzeczywistém, również jak x (przypadek x lub m urojonego będzie uważanym w dalszym ciągu). Szereg (1) w takim razie, wyłączywszy przypadek m całkowitego i dodatnego, będzie się składał z nieograniczonéj liczby wyrazów, tak gdy m będzie całkowitém lecz odjemném, jak również, gdy m przypuścimy ułamkowém, lub niewymierném, dodatném lub odjemném.

Stosunek wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego można przyjąć równym :

$$\frac{m-n}{n+1}x=\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x$$

gdy n zwiększa się do nieskończoności, granicą tego stosunku jest $-x$. Szereg więc (1) jest zbieżnym gdy $x<1$ co do wartości bez względu na znak (Tw. III, Wn. IV); rozbieżnym, gdy wartość $x>1$, co do wartości bez względu na znak, jakiekolwiek będzie m.

Wyłączmy na teraz przypadek $x=\pm 1$, i załóżmy że x jest dodatném lub odjemném, lecz mniéjszém co do wartości od jedności

$$-1<x<+1$$

a wiedząc na zasadzie poprzedzającego dowodzenia, że szereg (1) będzie w takim razie zbieżnym, szukajmy jego summy, którą oznaczmy przez

$$\text{(2)}\qquad \mathrm{f}(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots$$

przypuszczając zawsze m jakiémkolwiek dodatném lub odjemném, całkowitém lub ułamkowém, a nawet niewymierném, byle rzeczywistém.

Mamy podobnież dla tego samego x, lecz innego jakiegokolwiek m, które oznaczemy przez m', szereg zbieżny

$$(3)\qquad f(m') = 1 + m'x + \frac{m'(m'-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m'(m'-1)\ldots(m'-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots$$

Zastosowując Twierdzenie VIII (Cauch'ego), otrzymamy iloczyn $f(m').f(m')$ rozwinięty w szereg, którego wyrazem ogólnym będzie [**109**]

$$(4)\quad \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.1 + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{m'}{1} + \ldots + \frac{m'(m'-1)\ldots(m'-n+1)}{1.2.3\ldots n}\right]x^n$$

W szczególnym przypadku m całkowitego i dodatnego mielibyśmy

$$f(m) = (1+x)^m \qquad f(m') = (1+x)^{m'}$$
$$f(m).f(m') = (1+x)^{m+m'}$$

a że wyrazem ogólnym rozwinięcia $(1+x)^{m+m'}$ jest

$$(5)\qquad \frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+m'-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

więc (5) musi być równe (4)

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.1 + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}.\dfrac{m'}{1} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{m'(m'-1)\ldots(m'-n+1)}{1.2.3\ldots n} \\ = \dfrac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+m'-n+1)}{1.2.3\ldots n} \end{array}\right.$$

dla wszelkich wartości całkowitych m i m'; lecz liczba tych wartości całkowitych, jakie nadać można na m i m' jest nieograniczoną; równanie więc (6) jest *tożsamością*, zachodzi dla wartości m i m' nietylko całkowitych lecz i jakichkolwiek. Wyrażenie (5) jest dla jakiegokolwiek m i m' wyrażeniem wyrazu ogólnego rozwinięcia $f(m+m')$, któreśmy otrzymali podstawiając w (2) za m summę $m+m'$; wyrażenie (4) jest jakeśmy dopiero co widzieli rozwinięciem iloczynu $f(m) . f(m')$ dla jakichkolwiek m i m'; dwa te rozwinięcia, których wyrazy ogólne są równymi, są sobie równe wyraz po wyrazie dla jakichkolwiek m i m':

$$f(m+m')=f(m) . f(m') \tag{7}$$

Lecz udowodniliśmy wyżej [**35**], że wszelka funkcja f czyniąca zadość warunkowi (7) jest funkcją wykładniczą

$$f(m)=a^m$$

gdzie m może być całkowitém, ułamkowém dodatném lub odjemném, a nawet niewymiernóm, na zasadzie [**93**], a a jest niezależne od m. Aby wyznaczyć a, wiemy, że w przypadku m całkowitego

$$f(m)=(1+x)^m=a^m$$

a zatém, ponieważ a jest niezależném od m, i dla jakiegokolwiek m

$$a=1+x$$

czyli

$$f(m)=(1+x)^m$$

Summmą więc szeregu (1) jest $(1+x)^m$

$$(8)\qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m\,(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n + \ldots$$

a to dla wszelkich wartości rzeczywistych m, dodatnych lub odjemnych, całkowitych lub ułamkowych, a nawet niewymiernych, byleby szereg był zbieżnym t.j. $-1 < x < +1$.

Rozwinięcie (8) nazywają pospolicie rozwinięciem *dwumianu Newtona.*

112. Rozwinięcie w szereg zbieżny zasady logarytmów naturalnych. Zasadę układu logarytmów naturalnych oznaczają pospolicie głoską e, uważając ją jako granicę wyrażenia

$$(1)\qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie. Dowiedziemy tu, że wyrażenie (1) może być uważaném jako granica szeregu zbieżnego, że zatém zdąża do granicy oznaczonéj. Szereg tak otrzymany, będzie mógł nam posłużyć zarazem do obliczenia przybliżonego liczby e: bo reszta jego dążyć będzie do granicy zero [**99**], a zatém biorąc coraz więcéj wyrazów otrzymamy wartości coraz więcéj zbliżone do e.

Ponieważ $\frac{1}{m} < 1$, wiemy już na zasadzie powyżéj udowodnionego dwumianu Newtona, że wyrażenie

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

możemy rozwinąć w szereg zbieżny dla wszelkich wartości rzeczywistych m; lecz trzeba udowodnić że granica summy tego szeregu będzie oznaczoną, gdy m zwiększa się nieograniczenie przechodząc przez jakiekolwiek wartości, dodatne lub odjemne, całkowite lub ułamkowe, a nawet niewymierne.

Przypuśćmy naprzód że m zwiększa się nieograniczenie w sposób dodatny, przybierając wartości całkowite; mamy

$$(2)\qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2}+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n}+\ldots$$

Ponieważ m ma zwiększać się nieograniczenie, przypuśćmy $n < m$. i oznaczmy przez R_{n+1} *resztę* szeregu, to jest summę wyrazów następujących po $(n+1)^{ym}$ wyrazie; napisać możemy szereg (5) w następujący sposób :

$$(3)\left\{\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots \\ &+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}+R_{n+1}\end{aligned}\right.$$

a będziemy mieli wartość

$$(4)\qquad R_{n+1}=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n} \times\left[\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)}{n+1}+\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right]$$

Ostatni czynnik wyrażenia (4), składa się z $m-n$ wyrazów mniéjszych jeden po drugim od odpowiednich wyrazów postępu ilorazowego

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^m}$$

którego summa zdąża do granicy $\frac{1}{n}$, gdy m zwiększa się nieograniczenie; możemy więc założyć czynnik ten równy $\frac{\theta}{n}$, oznaczając przez θ ułamek zawarty pomiędzy 0 a 1:

$$\text{(5)}\qquad R_{n+1}=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\theta}{n}$$

Gdy m zwiększa się nieograniczenie, a n pozostaje tém samém

(6)

$$\text{gr}\,R_{n+1}=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{\theta'}{n}=R'_{n+1}$$

oznaczając przez θ' granicę θ, a przez R'_{n+1} granicę R_{n+1}, gdy $m=\infty$. Szereg zaś (3) staje się

$$\text{(7)}\qquad \text{gr}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3.}+\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2.3.\ \ldots\ n}+R'_{n+1}$$

$m=\infty$

gdy $n=\infty$.

Liczba n którą przypuślicimy jakąkolwiek, byle mniéjszą od m, może również zwiększać się nieograniczenie niezależnie od m zwiększającego się nieograniczenie; lecz w takim razie, z (6) widzimy że

$$\text{gr}\,R'_{n+1}=0$$

Widzimy przytém że w szeregu (7) granica stosunku wyrazu $n+1^{go}$ do wyrazu n^{go}

$$\text{gr}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=\text{gr}\,\frac{1}{n}=0$$

szereg więc (7) jest zbieżnym [**101**], a gr $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ilością oznaczoną równą granicy summy tego szeregu, gdy m zwiększa się nieograniczenie.

Oznaczamy przez

$$(8)\qquad e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots$$

granicę summy tego szeregu zbieżnego; dowiedliśmy że

$$\text{gr}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie przybierając wartości całkowite dodatne.

Powiadam że granica ta będzie tą samą, gdy m zwiększa się nieograniczenie przybierając jakiekolwiek wartości dodatne, nietylko całkowite. Oznaczmy przez μ i przez $\mu+1$ dwie liczby całkowite po sobie następujące, między któremi zawartą być może wszelka wartość niecałkowita m; będziemy mieli widocznie

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^\mu<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1}$$

czyli

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{1+\frac{1}{\mu+1}}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$$

Lecz gdy $m=\infty$, także $\mu=\infty$, a wtedy

$$\text{gr}\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)=1 \qquad \text{gr}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)=1$$

jako też

$$\text{gr}\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}=e \qquad \text{gr}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}=e$$

na zasadzie poprzedzającego dowodzenia; a więc

$$\text{gr}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie, przybierając nawet wartości niecałkowite, byle dodatne.

Powiadam daléj, że granica ta będzie jeszcze tą samą gdy m zwiększa się nieograniczenie co do wartości, przybierając wartości całkowite lub niecałkowite odjemne, t. j. gdy $m=-\infty$; w rzeczy samej, jeżeli $m<0$ zakładając $m=-\mu$, gdzie zatém μ przypuszczać będziemy dodatném, mamy

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu}$$

czyli

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$$

lecz gdy $m=-\infty$, $\mu=+\infty$, więc i $\mu-1=+\infty$ a wtedy

$$\text{gr}\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)=1$$
$$\text{gr}\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}=e$$

więc również

$$\operatorname{gr}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

Za pomocą metody granic dowiedlibyśmy z łatwością [93] że granica wyrażenia (1) jest tą samą, gdy m zdąża do nieskończoności, przybierając wartości niewymierne.

Wyrażenie (1) ma więc granicę oznaczoną, równą granicy summy szeregu zbieżnego (8), którą oznaczyliśmy przez e, w jakikolwiek bądź sposób ilość m zwiększa się nieograniczenie, przechodząc przez jakiekolwiek wartości rzeczywiste.

Liczba e którą za pomocą szeregu (8) można obliczyć z takiém przybliżeniem jak się podoba, biorąc dostateczną liczbę wyrazów szeregu (bo reszta zmniejszając się ciągle ma granicę zero).

$$e = 2{,}7128182845904 5\ldots$$

jest właśnie wziętą za zasadę układu naturalnego logarytmów; w dalszym ciągu zobaczymy jak ważne znaczenie ma ta liczba w teorji funkcyj.

113. Uwagi nad użyciem szeregów. Uważając ilość daną jako granicę summy szeregu, mamy na celu zastąpienie ilości danéj zwykle za bardzo złożonéj, by ją można było wprost obliczyć lub wprowadzić w rachunek, przez summę ilości prostszych, których własności nam są znane, które z łatwością obliczyć możemy. Zamiast jednego działania trudnego, uskuteczniamy więc ciąg działań łatwiejszych. Ponieważ liczba wyrazów szeregu jest nieograniczoną, w użyciu praktyczném szereg przedstawia nam tylko przybliżenie, lecz przybliżenie tém większe, czém więcéj bierzemy wyrazów, i które może być tak wielkie jak się podoba, biorąc dostateczną liczbę wyrazów, bo jak wiemy, granicą reszty szeregu zbieżnego jest zero. Tak np. jeżeli ułamek zwyczajny zamieniamy na dziesiętny okresowy :

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$$

uważamy go jako summę szeregu zbieżnego

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots$$

który tu jest postępem ilorazowym zmniejszającym się ; a to w celu ułatwienia rachunku, prostszego z ułamkami dziesiętnemi niż ze zwyczajnemi. Niekiedy w praktyce ograniczamy się tylko na przybliżeniu, biorąc pewną tylko liczbę cyfr dziesiętnych, to jest pewną liczbę wyrazów szeregu, a opuszczając resztę, która tém jest mniéjszą im więcéj bierzemy wyrazów i może być dowolnie małą.

W podobny sposób, gdy za ilość pierwiastkową

$$\sqrt{33} = 5{,}7445\ldots$$

podstawiamy liczbę dziesiętną, uważamy ilość pierwiastkową niewymierną, jako granicę szeregu zbieżnego, którego wyrazy są wymiernemi

$$\sqrt{33} = 5 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$$

przyczém ograniczamy się zwykle na przybliżeniu, które możemy posunąć tak daleko jak się podoba ; szereg jest zbieżnym, bo jakiekolwiek liczniki dwóch wyrazów po sobie następujących, wyrażonemi są przez jedną cyfrę :

mianownik zaś wyrazu następującego jest dziesięć razy większym od mianownika wyrazu poprzedzającego, stosunek więc $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ jest mniejszym od jedności.

114. *Rozwinąć pewną ilość w szereg*, jestto uważać tę ilość jako granicę summy szeregu zbieżnego. Ilość rozwinięta w szereg może być funkcją ilości zmiennych, którą można uważać jako granicę summy innych funkcyj prostszych tychże zmiennych, w liczbie nieograniczonej; np. funkcję przestępną jako granicę summy funkcyj algebraicznych. W każdym razie, rozwijając jaką ilość w szereg, pilnie uważać należy czy szereg jest zbieżnym, i czy granicą jego summy jest ilość dana.

Mając danę wielkość niewymierną lub dość złożonego rodzaju, by ją wprost obliczyć można było, możemy rozłożyć wielkość tę na dwie części: jednę wymierną lub którą z łatwością obliczyć możemy, i resztę zwykle tego samego co wielkość dana gatunku. Resztę tę możemy znów rozłożyć na dwie części w podobny sposób jak wielkość daną: otrzymamy drugą wielkość wymierną i drugą resztę, którą rozkładamy znów jak powyżéj i t. d. Jeżeli reszty te idą po sobie coraz zmniéjszając się, tak że ostateczna reszta dąży do granicy zero, wielkość dana przedstawia się pod postacią summy szeregu wielkości wymiernych otrzymanych w powyższy sposób, przez rozkładanie każdéj reszty. Metoda ta, którą nazwano *metodą wyczerpywania* używaną była w wielu razach do obliczenia powierzchni, brył i t. p. niewymiernych.

Tak np. chcąc obliczyć powierzchnię koła, rozłożyć ją możemy na kwadrat wpisany i resztę równą czterem odcinkom koła, których cięciwami są boki kwadratu wpisanego. Cztery te odcinki rozłożyć możemy znów na cztery trójkąty i osiem odcinków mających za podstawy boki ośmiokąta wpisanego; te osiem odcinków znów na osięm trójtów i szesnaście odcinków zawartych pomiędzy okręgiem koła i bokami szesnastokąta wpisanego i t. d. Dowiódłszy że summa każdych następujących odcinków, których liczba jest dwa razy większą od poprzedzających, lecz z których każdy następujący mniejszym jest od połowy poprzedzającego, coraz zmniejszając się, zdąża do zera, wyraziemy koło jako granicę summy szeregu, którego pierwszym wyrazem będzie kwadrat, drugim summa czterech trójkątów, trzecim summa ośmiu trójkątów, mniejszych od czterech poprzedzających i t. d.

Przykład. *Powierzchnia odcinka paraboli.* Wiemy, że wziąwszy na paraboli jakikolwiek punkt O, mamy dla tego punktu jako początku układ spółrzędnych takich, że oś OY jest styczną do paraboli w tym punkcie, oś zaś OX jest *średnicą* t. j. dzieli każdą z cięciw równoległych do osi OY na dwie równe części. Równanie paraboli odniesionéj do takich osi [48].

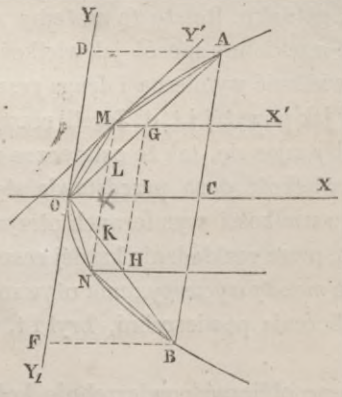


fig. 44.

(1) $$y^2 = 2px$$

daje

(2) $$y = \pm\sqrt{2px}$$

Szukamy powierzchni odcinku ABO ograniczonego cięciwą AB i łukiem paraboli AOB.

Trójkąt AOB jest połową równoległoboku ADFB większego od odcinka szukanego; jest więc większym od połowy tego odcinka. Odéjmując ten trójkąt, pozostają dwa odcinki AMO, BNO, których summa jest mniéjszą od połowy całego odcinka AOB.

Postępując z temi odcinkami AMO, BNO, jak z całym odcinkiem AOB, otrzymamy dwa trójkąty AMO, BNO, z których każdy większym jest od połowy odcinka w który jest wpisanym; summa więc ich jest większą od czwartéj części odcinka całego AOB.

Postępując tak daléj, otrzymamy szereg trójkątów, których summa może być tak mało różną od powierzchni odcinka szukanego, jak się podoba, bo reszta, czyli summa odcinków pozostałych, naprzód mniéjsza od połowy, potém od jednéjczwartéj, następnie od jednéjósméj i t. d. odcinka szukanego, może być tak małą jak się podoba. Szereg więc jest zbieżnym, a powierzchnia odcinka jest granicą jego summy.

Wszystkie średnice w paraboli są równoległe; łącząc środki G i H cięciw AO i OB, jakoteż punkta M i N ostateczne średnic równoległych MG i NH, mamy

$$AC = 2GI = 2MK$$

a zatém z równania (1), które daje stosunek dwóch odciętych równy stosunkowi kwadratów odpowiednich rzędnych

$$OK = \frac{1}{4}\,OC \quad \text{więc} \quad LK = \frac{1}{4}\,AC$$

zatém

$$ML = \frac{1}{4}\,AC$$

Lecz dwa trójkąty AMO, ACO mające wspólną podstawę AO są w stosunku równoległych ML, AC, a więc

$$\frac{\text{Trójkąt AMO}}{\text{Trójkąta ACO}} = \frac{1}{4}$$

podobnież

$$\frac{\text{Trójkąt BNO}}{\text{Trójkąta BCO}} = \frac{1}{4}$$

summa więc dwóch trójkątów drugiego rzędu, równa jest czwartéj części trójkąta ABO pierwszego rzędu; i w ogólności summa trójkątów jakiegokolwiek rzędu równa jest czwartéj części summy trójkątów rzędu poprzedzającego.

Powierzchnia więc odcinka AOB jest granicą summy szeregu

$$AOB + \frac{1}{4} AOB + \frac{1}{4.4} AOB + \frac{1}{4.4.4} AOB + \ldots$$

czyli

$$AOB \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{4.4.4} + \ldots\right)$$

Szukając właśnie powierzchni odcinka paraboli, Archimedes znalazł pierwszy granicę summy powyższego szeregu, który jest postępem ilorazowym; summa ta równa się

$$\frac{4}{3} AOB$$

a że $AOB = \frac{1}{2}$ ABFD, więc powierzchnia odcinka paraboli, równa jest $\frac{4}{3}$ trójkąta wpisanego, lub $\frac{2}{3}$ równoległoboku opisanego.

ROZDZIAŁ VI.

METODA NIESKOŃCZENIE MAŁYCH

Określenia. — Summy — Iloczyny — Potęgi — Pierwiastki nieskończenie małych. — Stosunki dwóch nieskończenie małych. — Rzędy nieskończenie małych. — Twierdzenia zasadnicze. — Uwagi nad użyciem nieskończenie małych. — Zastosowania i przykłady.

Określenia.

115. *Ilością nieskończenie małą nazywamy ilość, któréj granicą jest zero.*

Ilość nieskończenie mała jest więc [**85**] ilością zmniéjszającą się nieograniczenie tak, że ilość ta może stać się mniéjszą od wszelkiéj ilości *oznaczonéj*, tak małéj jak się podoba.

Aby dowieść, że pewna ilość α jest nieskończenie małą, dość jest pokazać, że α może zmniéjszając się wciąż, stać się mniéjszém od pewnéj stałéj k, którą przypuścić możemy tak małą, jak się podoba.

Tak np. ułamek :

$$\frac{1}{x}$$

którego mianownik x zwiększa się nieograniczenie, jest ilością nieskończenie małą; bo jakiekolwiek weźmiemy k, dość jest nadać na x wartość większą od $\frac{1}{k}$, aby

$$\frac{1}{x} < k$$

Niech będą dwie proste OB, OX, precinające się ze

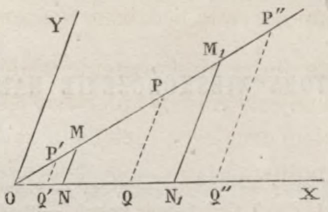


fig. 45.

sobą. Niech będzie rzędna PQ, liczona równolegle do pewnego kierunku OY. W miarę jak punkt Q zbliża się do punktu O, rzędna PQ staje się coraz mniéjszą. Jeżeli punkt Q może się zbliżyć nieograniczenie do punktu O, rzędna PQ może stać się dowolnie małą : rzędna ta może być uważaną w powyższém założeniu za nieskończenie małą; bo jakkolwiek małą wzięlibyśmy stałą rzędną MN, rzędna PQ zmniéjszając się ciągle, może stać się P′Q′, mniéjszą od MN.

Jeżeli uważać będziemy punkt Q oddalający się od punktu O, rzędna PQ będzie się coraz zwiększać; jeżeli punkt Q może się posuwać w kierunku od O ku X, tak daleko jak się podoba, rzędna PQ może być uważaną jako nieskończenie wielka : bo jakkolwiek wielką weźniemy rzędną stałą $M_1 N_1$, rzędna PQ zwiększając się ciągle, może stać się jeszcze większą P″Q″.

Taż sama zmienna może być więc uważaną za nieskończenie wielką lub nieskończenie małą, stosownie do tego jak ją zmieniamy w jeden lub drugi sposób; wyrażenia : ilość nieskończenie mała, ilość nieskończenie wielka, nie wyrażają żadnéj ilości oznaczonéj, ograniczonéj, lecz tylko *pewien sposób zmienności zmiennéj nieoznaczonéj*; właściwiéjby może było nazywać te ilości *nieograniczenie wielkiemi*, *nieograniczenie małemi*, lub *nieoznaczenie wielkiemi*, *nieoznaczenie małemi*.

Ilości, które nie są ani nieskończenie małemi, ani nieskończenie wielkiemi nazywać będziemy *ilościami skończonemi*.

116. Pojęcie ilości nieskończenie małéj w niczém nie jest różném od pojęcia granicy : pierwsze jest tylko szczególnym przypadkiem drugiego; nieledwie zawsze użycie sposobu granic, można zastąpić sposobem nieskończenie małych : bo jeżeli

$$\text{gr}\, x = a$$

to z określenia

$$\text{gr}\, (x - a) = 0$$

czyli uważać a, jako granicę zmiennéj x, wychodzi na to samo, co uważać $x - a$, jako nieskończenie małą. Samą granicę określiliśmy [**85**] jako ilość oznaczoną, któréj różnica ze zmienną nieoznaczoną, jest nieskończenie małą.

117. Summa algebraiczna ilości nieskończenie małych. Jeżeli liczba tych ilości jest ograniczoną, summa ich jest nieskończenie małą : w rzeczy saméj jeżeli

$$\text{gr}\,\alpha = 0 \qquad \text{gr}\,\beta = 0 \qquad \text{gr}\,\gamma = 0$$

to

$$\pm\, \text{gr}\,\alpha \pm \text{gr}\,\beta \pm \text{gr}\,\gamma \pm \ldots = \text{gr}\,(\pm\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots) = 0$$

Lecz jeżeli bierzemy summę nieskończenie małych w liczbie nieograniczonéj, lub zwiększającéj się nieograniczenie w miarę jak każda z nieskończenie małych zdąża do 0, summa ta może być ilością skończoną, lub nawet nieskończenie wielką. W rzeczy saméj, nic łatwiejszego, jak przedstawić sobie odwrotnie wielkość skończoną podzieloną na części, których liczbę można dowolnie powiększać, zmniéjszając jednocześnie ich wielkość. Każda z tych części będzie nieskończenie małą, liczba ich nieskończenie wielką, a summa równą wielkości danéj, oznaczonéj.

Weźmy naprzykład za wielkość daną, długość l. Długość tę możemy podzielić na m części równych, lub nierównych $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$, tak że

$$l = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$$

Niezmieniając długości l, liczbą m części α możemy dowolnie powiększyć zmniejszając ich wielkość : summa tych części nieskończenie małych

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$

będzie zawsze równą wielkości oznaczonéj l. Widzimy zarazem, że jak części te możemy brać wedle jakiegokolwiek prawa np. wszystkie równe w liczbie parzystéj, lub równe w liczbie podzielnéj przez 3, lub nierówne i t. p. tak wielkość oznaczoną możemy uważać jako summę nieskończenie małych w rozliczny sposób.

Iloczyn lub Iloraz wynikający z pomnożenia lub podzielenia ilości *nieskończenie małéj*, przez ilość *skończoną*, jest ilością *nieskończenie małą*. *Potęga* lub *pierwiastek* stopnia *skończonego* z ilości *nieskończenie małéj* jest ilością *nieskończenie małą*. W rzeczy saméj, jeżeli

$$\mathrm{gr}\,\alpha = 0$$

a n oznacza ilość skończoną, to

$$\text{gr}\, n\alpha = 0\,,\quad \text{gr}\,\frac{\alpha}{n} = 0\,,\quad \text{gr}\,\alpha^n = 0\,,\quad \text{gr}\sqrt[n]{\alpha} = 0$$

Iloraz ilości skończonéj przez ilość nieskończenie małą jest ilością nieskończenie wielką: bo

$$\text{gr}\,\frac{n}{\alpha} = \frac{n}{\text{gr}\,\alpha} = \infty$$

co właściwie należałoby wziąść za określenie ilości nieskończenie wielkiéj, zamiast określenia iloraz ilości skończonéj przez zero; bo dzielić przez zero nie można, lecz można dzielić przez ilość tak mało różną od zera jak się podoba, a w takim razie czém dzielnik będzie mniéjszym, tém iloraz będzie większym; jeżeli więc dzielnik jest nieograniczenie, czyli nieskończenie małym, iloraz jest nieograniczenie, czyli nieskończenie wielkim [**88**].

118. Stosunek dwóch ilości nieskończenie małych. Stosunek ten może być ilością skończoną stałą, lub zmienną; ilością nieskończenie małą; a nawet nieskończenie wielką.

1°. Jeżeli α jest ilością nieskończenie małą, a n ilością skończoną, $n\alpha$ będzie również nieskończenie małą [**117**]; a jednak

$$\frac{n\alpha}{\alpha} = n$$

iloraz, czyli stosunek tych dwóch nieskończenie małych jest skończonym, równym n.

2°. Stosunek dwóch ilości nieskończenie małych, może być również nieskończenie małym: tak, jeżeli α jest nieskończenie małą

$$\text{gr}\,\alpha = 0$$

α^2 będzie również nieskończenie małą :

$$\text{gr}\,\alpha^2 = 0$$

a stosunek tych dwóch nieskończenie małych

$$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$$

jest ilością nieskończenie małą α.

3°. Stosunek odwrotny

$$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

jest ilością nieskończenie wielką : $\frac{1}{\alpha} = \infty$ [**88**].

Jeżeli stosunek jednéj ilości nieskończenie małéj do drugiéj jest nieskończenie małym, pierwszą z tych ilości nazywamy *nieskończenie małą względem drugiéj*. Odwrotnie, druga ilość będzie *nieskończenie wielką względem pierwszéj*. Tak α^2 jest nieskończenie małą względem α, zaś α jest nieskończenie wielką względem α^2.

Ilości nieskończenie małe mogą więc być nieskończenie wielkiemi względem innych : nie będzie to się wydawać dziwném, jeżeli się odniesiemy do określenia nieskończenie małych i zauważymy, że ilości te nie są ilościami pewnéj bardzo małéj wielkości, jak źródłosłów zdawałby się wskazywać, lecz po prostu zmiennemi, zmieniającemi się w pewien powyżéj określony sposób.

Twierdzenie jakoby dwie ilości miały być sobie równe, dla tego że obiedwie są nieskończenie małemi, byłoby równie niedorzeczném, jak równość wszystkich nieskończenie wielkich [**88**].

Widzimy zresztą, że dwie ilości nieskończenie małe, mogą być do siebie we wszelkim możliwym stosunku skończonym, nieskończenie wielkim, lub nieskończenie małym.

Weźmy naprzykład dwie proste OB, OB_1, przechodzące przez początek O (fig. 46). Rzędne tych dwóch prostych są w stosunku stałym

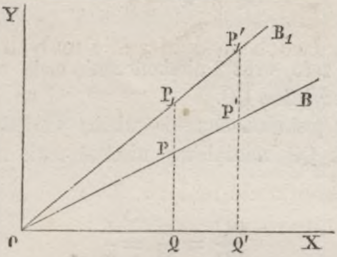


fig. 46.

$$\frac{P_1Q}{PQ}=\frac{P'_1Q'}{P'Q'}=\ldots=n$$

gdzie n oznacza ilość stałą (np. liczbę 2 lub 3); powiedzieliśmy wyżéj, że jeżeli punkt Q zbliża się nieograniczenie do punktu O, tak rzędna PQ jak rzędna P_1Q stają się nieskończenie małemi : a jednak stosunek tych dwóch nieskończenie małych, nie przestaje być skończonym, równym n.

Wykreślmy krzywę OK, przedstawiającą funkcję

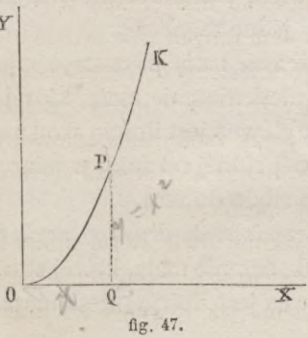


fig. 47.

$$y=x^2$$

jeżeli odcięta $OQ = x$ staje się nieskończenie małą, to jest, jeżeli punkt Q zbliża się nieograniczenie do punktu O, rzędna PQ staje się również nieskończenie małą : lecz ponieważ stosunek

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{x^2}{x} = x$$

zdąża do granicy zero, wraz z nieskończenie małą x, PQ jest *nieskończenie małą względem* OQ.

Odwrotnie, OQ jest nieskończenie wielką względem QP, jakkolwiek tak OQ, jak QP założyliśmy nieskończenie małemi; bo stosunek

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

zwiększa się nieograniczenie, gdy zmniejszamy nieograniczenie x.

119. Rzędy nieskończenie małych. Z powyższego wypada, że ilości nieskończenie małe mogą zależyć od siebie zupełnie w taki sam sposób, jak ilości skończone : to jest, że ilość nieskończenie mała może być funkcją jednéj lub wielu ilości nieskończenie małych, samych lub w połączeniu ze skończonemi.

Z pomiędzy wielu nieskończenie małych zależnych od siebie, obierzmy jednę za *główną*.

Ilością nieskończenie małą pierwszego rzędu nazywać będziemy wszelką nieskończenie małą, któréj stosunek z nieskończenie małą główną jest ilością skończoną lub zdąża do granicy skończonéj różnéj od zera, w miarę jak nieskończenie mała główna zdąża do zera.

Ilością nieskończenie małą drugiego rzędu nazywać będziemy wszelką nieskończenie małą, któréj stosnnek z nieskończenie małą główną jest ilością nieskończenie małą pierwszego rzędu.

Ilością nieskończenie małą *trzeciego rzędu* nazywać będziemy wszelką nieskończenie małą, któréj stosunek z nieskończenie małą główną jest ilością nieskończenie małą drugiego rzędu.

W ogóle, ilością nieskończenie małą n*go rzędu* nazywać będziemy nieskończenie małą, któréj stosunek z nieskończenie małą główną, jest ilością nieskończenie małą n—1go rzędu.

Niech będą α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ ilości nieskończenie małe zależne od siebie. Obierzmy α za główną. Jeżeli

$$\text{gr}\ \frac{\alpha_1}{\alpha} = k$$

gdzie k jest ilością skończoną, α_1 będzie nieskończenie małą pierwszego rzędu. Można założyć

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = (k + \varepsilon)$$

oznaczając przez ε ilość, która zdąża do granicy 0 w miarę jak nieskończenie mała główna α zdąża do granicy zero.

Wzorem nieskończenie małych pierwszego rzędu będzie więc:

$$\alpha_1 = \alpha (k + \varepsilon)$$

Jeżeli

$$\frac{\alpha_2}{\alpha} = \alpha_1 \quad \text{czyli} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha} = \alpha (k + \varepsilon)$$

α_2 nazwiemy nieskończenie małą drugiego rzędu. Wzorem nieskończenie małych drugiego rzędu, będzie więc

$$\alpha^2 (k + \varepsilon)$$

Wzorem nieskończenie małych trzeciego rzędu, będzie

podobnież

$$\alpha^3 (k + \varepsilon)$$

Wzorem ogólnym nieskończenie małych *n*go rzędu będzie

$$\alpha^n (k + \varepsilon)$$

120. Stosunek nieskończenie małéj *n*go rzędu, do *n*téj potęgi nieskończenie małéj głównéj

$$\frac{\alpha_n}{\alpha^n} = \frac{\alpha^n (k + \varepsilon)}{\alpha^n} = k + \varepsilon$$

jest wyrażonym przez ilość $k + \varepsilon$ która zdąża do granicy skończonéj k, w miarę jak nieskończenie mała α zdąża do zera. Można więc powiedzieć że :

Nieskończenie małą ngo *rzędu nazywamy ilość, któréj stosunek do* ntéj *potęgi nieskończenie małéj główněj jest skończonym, lub zdąża do granicy skończonéj, gdy nieskończenie mała główna zdąża do zera.*

Pozostają nieskończenie małe, których stosunek do nieskończenie małéj głównéj nie jest ani skończonym, ani nieskończenie małym, lecz nieskończenie wielkim : ale których pewna potęga może mieć z nieskończenie małą główną stosunek w granicy skończony.

Niech będzie μ nieskończenie mała taka że :

$$\text{gr}\,\frac{\mu^p}{\alpha} = \text{K} \qquad \text{czyli} \qquad \text{gr}\,\frac{\mu}{\alpha^{\frac{1}{p}}} = \text{K}^{\frac{1}{p}} = k$$

gdzie tak K jak k oznaczają ilości skończone.

Nieskończenie małą tę możemy wyrazić przez

$$\mu = \alpha^{\frac{1}{p}}(k+\varepsilon)$$

i nazwać nieskończenie małą rzędu ułamkowego $\frac{1}{p}$.

W ogólności, wzorem nieskończenie małych rzędu $\frac{q}{p}$ będzie

$$\alpha^{\frac{q}{p}}(k+\varepsilon)$$

czyli że nieskończenie małemi rzędu $\frac{q}{p}$ nazywać będziemy nieskończenie małe takie, których stosunek z potęgą $\frac{q}{p}$ nieskończenie małéj głównéj, jest w granicy skończonym. Określenie to jestto określenie ogólne, dane powyżéj, w którém n przypuszczamy ułamkowém.

Zwykle z pomiędzy wielu nieskończenie małych od siebie zależnych obieramy za główną tę, z którą stosunki wszystkich pozostałych są w granicy albo skończonemi, albo nieskończenie małemi.

Twierdzenia zasadnicze metody nieskończenie małych.

121. Twierdzenie I. *Jeżeli stosunek dwóch ilości nieskończenie małych, zależnych od siebie, zdąża do granicy jedność, gdy każda z tych nieskończenie małych zdąża do zera, ich różnica jest nieskończenie małą względem każdéj z nieskończenie małysh danych, czyli nieskończenie małą wyższego rzędu niż dane.*

Odwrotnie, jeżeli różnica dwóch nieskończenie małych danych jest nieskończenie małą względem każdéj z nich, granicą ich stosunku jest jedność.

Niech będą dwie nieskończenie małe α i α' takie że

(1) $$\text{gr}\ \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$$

załóżmy

$$\alpha - \alpha' = \varepsilon$$

powiadam że ε jest nieskończenie małą względem α' (a zatém i względem α, bo α i α' są nieskończenie małemi tego samego rzędu, skoro ich stosunek jest w granicy skończonym, równym jedności) czyli że:

$$\text{gr}\ \frac{\varepsilon}{\alpha'} = 0$$

W rzeczy saméj, napisać możemy

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \eta$$

gdzie η dąży do zera wraz z α: a zatém odejmując po obu stronach $\frac{\alpha'}{\alpha'} = 1$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha'} = \eta \qquad \text{czyli} \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha'} = \eta$$

a więc

$$\text{gr}\ \frac{\varepsilon}{\alpha'} = 0 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Odwrotnie, jeżeli

$$\text{gr}\ \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha'} = 0$$

mamy

$$\mathrm{gr}\left(\frac{\alpha}{\alpha'}-1\right)=0$$

czyli

$$\mathrm{gr}\,\frac{\alpha}{\alpha'}=1 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

122. Twierdzenie II. *Granica stosunku dwóch nieskończenie małych danych jest równa granicy stosunku dwóch innych nieskończenie małych, mających z danemi odpowiednie stosunki w granicy równe jedności.*

Niech będą nieskończenie małe α i β, α' i β'; załóżmy

$$\mathrm{gr}\,\frac{\alpha}{\alpha'}=1 \qquad \mathrm{gr}\,\frac{\beta}{\beta'}=1$$

powiadam że

$$\mathrm{gr}\,\frac{\beta}{\alpha}=\mathrm{gr}\,\frac{\beta'}{\alpha'}$$

Możemy w rzeczy saméj założyć

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=1+\varepsilon \qquad \frac{\beta}{\beta'}=1+\varepsilon'$$

ε i ε' zdążają do zera wraz z α, α', β i β'; czyli

$$\alpha=\alpha'(1+\varepsilon) \qquad \beta=\beta'(1+\varepsilon')$$

a więc

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{1+\varepsilon'}{1+\varepsilon}$$

w granicy,

$$\mathrm{gr}\,(1+\varepsilon')=1 \qquad \mathrm{gr}\,(1+\varepsilon)=1$$

a zatém

$$\text{gr}\ \frac{\beta}{\alpha} = \text{gr}\ \frac{\beta'}{\alpha'} \qquad \text{c. b. d. d.}$$

WNIOSEK. *Granica stosunku dwóch nieskończenie małych, jest równa granicy stosunku dwóch innych nieskończenie małych, których różnice odpowiednie z pierwszemi są nieskończenie małemi wyższego rzędu od danych*; a to na zasadzie poprzedzającego twierdzenia.

123. TWIERDZENIE III. *Jeżeli summa ilości nieskończenie małych tego samego rzędu, w liczbie nieograniczonéj lub zwiększającéj się bez granic w miarę jak każda z nieskończenie małych zdąża do zera, jest skończoną lub ma granicę skończoną, pomnożywszy każdą z nieskończenie małych odpowiednio przez nieskończenie małe jakiekolwiek, tak otrzymana summa będzie nieskończenie małą, zdążać będzie do granicy zero, wraz z nieskończenie małemi danemi.*

Niech będą nieskończenie małe

$$(1) \qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \alpha_m$$

których liczba m zwiększa się bez granic, w miarę jak nieskończenie małe dążą do zera. Niech będą

$$(2) \qquad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_m$$

nieskończenie małe jakiekolwiek w téj samėj liczbie m: jeżeli

$$\text{gr}\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m) = S$$

gdzie S jest ilością skończoną, powiadam że

$$\text{gr}\,(\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3 + \ldots + \varepsilon_m\alpha_m) = 0$$

W rzeczy saméj, niech będzie ε ta nieskończenie mała z pomiędzy (2) któréj wartość bez względu na znak jest największą, ε' ta, któréj wartość jest najmniéjszą; zatém

$$\varepsilon'(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)<\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2\,\varepsilon_3\alpha_3+\ldots$$
$$+\varepsilon_m\alpha_m<\varepsilon\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)$$

więc

$$\text{gr}\,\varepsilon'S<\text{gr}\,(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2\,\varepsilon_3\alpha_3+\ldots+\varepsilon_m\alpha_m)<\text{gr}\,\varepsilon\,S$$

a że $\text{gr}\,\varepsilon=0$, z założenia, więc $\text{gr}\,\varepsilon'S=0$, $\text{gr}\,\varepsilon S=0$ a zatém

$$\text{gr}\,(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3+\ldots+\varepsilon_m\alpha_m)=0 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

124. Twierdzenie IV. *Granica summy nieskończenie małych w liczbie nieograniczonéj, jest równa granicy summy innych nieskończenie małych, w téj saméj liczbie, mających z pierwszemi odpowiednie stosunki w granicy równe jedności.*

Niech będą.

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_m$$

nieskończenie małe dane,

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,\ \ldots\ \beta_m$$

inne nieskończenie małe takie, że

$$\text{gr}\ \frac{\beta_1}{\alpha_1}=\text{gr}\ \frac{\beta_2}{\alpha_2}=\text{gr}\ \frac{\beta_3}{\alpha_3}=\ldots=\text{gr}\ \frac{\beta_m}{\alpha_m}=1$$

jeżeli

$$\text{gr}\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)=S$$

powiadam że

$$\mathrm{gr}(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_m)=\mathrm{gr}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)=S$$

W rzeczy samej, możemy założyć

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=1+\varepsilon_1 \quad \frac{\beta_2}{\alpha^2}=1+\varepsilon_2 \quad \frac{\beta_3}{\alpha_3}=1+\varepsilon_3\ldots\frac{\beta_m}{\alpha_m}=1+\varepsilon_m$$

gdzie ε_1, $\varepsilon_2\ldots$ ε_m zdążają do zera, gdy α i β zdążają do zera, a stosunki $\frac{\beta}{\alpha}$ do jedności: podstawiając

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_1\varepsilon_1 \quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_2\varepsilon_2 \quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_3\varepsilon_3\ldots \beta_m=\alpha_m+\alpha_m\beta_m$$

otrzymamy

$$\mathrm{gr}(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_m)=\mathrm{gr}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots$$
$$+\alpha_m)+\mathrm{gr}(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3+\ldots+\alpha_m\varepsilon_m)$$

a że na zasadzie poprzedzającego twierdzenia,

$$\mathrm{gr}(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3+\ldots\alpha_m\varepsilon_m)=0$$

więc

$$\mathrm{gr}(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_m)=\mathrm{gr}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)=S$$

c. b. d. d.

WNIOSEK. *Granica summy nieskończenie małych w liczbie nieograniczonéj, jest równa granicy summy innych nieskończenie małych w téj saméj liczbie, różniących się odpowiednio od poprzednich o ilości nieskończenie małe wyższego rzędu, czyli o nieskończenie małe względem danych*; a to na zasadzie Twierdzenia 1-go.

125. Twierdzenie ogólne. *Granica stosunku lub summy nieskończenie małych się nie zmieni, jeżeli podstawimy za nieskończenie małe dane inne nieskończenie małe, niekoniecznie równe pierwszym, lecz mające z niemi stosunki, których granicą jest jedność, lub różnice nieskończenie małe względem nieskończenie małych danych.*

Twierdzenie to jest zebraniem w jedno trzech twierdzeń : I-go, II-go i IVgo.

Uwaga. Jeżeli stosunki drugich nieskończenie małych do pierwszych nie są w granicy równe jedności, lecz pewnéj ilości skończonéj n, granica stosunku się nie zmieni ; lecz granica summy, po podstawieniu drugich za pierwsze, stanie się n razy większą. Jeżeli

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = n \qquad \frac{\beta}{\beta'} = n$$

to

$$\mathrm{gr}\,\frac{\alpha}{n\alpha'} = 1 \quad \mathrm{gr}\,\frac{\beta}{n\beta'} = 1$$

a zatém $\mathrm{gr}\,\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{gr}\,\frac{n\beta'}{n\alpha'} = \mathrm{gr}\,\frac{\beta'}{\alpha'}$ na zasadzie Twierdzenia II.

Lecz jeżeli

$$\mathrm{gr}\,\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \mathrm{gr}\,\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \mathrm{gr}\,\frac{\beta_3}{\alpha_3} = \ldots = \mathrm{gr}\,\frac{\beta_m}{\alpha_m} = n$$

to

$$\mathrm{gr}\,\frac{\beta_1}{n\alpha_1} = \mathrm{gr}\,\frac{\beta_2}{n\alpha_2} = \mathrm{gr}\,\frac{\beta_3}{n\alpha_3} = \ldots = \mathrm{gr}\,\frac{\beta_m}{n\alpha_m} = 1$$

a więc na zasadzie Twierdzenia II

$$\mathrm{gr}\,(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_m) = \mathrm{gr}\,(n\alpha_1 + n\alpha_2 + \ldots + n\alpha_m) = n\,.\,\mathrm{gr}\,(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m)$$

126. Aby dać przykład bardzo prosty nieskończenie małych, które jakkolwiek nie są równemi, mają stosunki równe w granicy jedności i mogą być na zasadzie twierdzień poprzedzających, podstawianemi jedne za drugie, bez naruszenia granicy skończonéj ich stosunków lub summ, weźmy pod uwagę styczną i wstawę łuku nieskończenie małego x. Tak styczna, jak wstawa zdąża do granicy 0, gdy x zdąża do granicy zero; lecz ciągle styczna jest większą od łuku, łuk większym od wstawy. Lecz

$$\frac{\text{st}\, x}{\text{wst}\, x} = \frac{1}{\text{dos}\, x}$$

a zatém

$$\text{gr}\, \frac{\text{st}\, x}{\text{wst}\, x} = \text{gr}\, \frac{1}{\text{dos}\, x} = 1 \quad \text{gdy } x \text{ zdąża do } 0.$$

Mamy również stosunek łuku do wstawy

$$1 < \frac{\text{łuk}\, x}{\text{wst}\, x} < \frac{\text{st}\, x}{\text{wst}\, x}$$

a więc w granicy

$$\text{gr}\, \frac{\text{łuk}\, x}{\text{wst}\, x} = 1$$

W podobny sposób

$$\text{gr}\, \frac{\text{st}\, x}{\text{łuk}\, x} = 1$$

Nieskończenie małe: styczna, wstawa i łuk, które dla żadnéj wartości łuku nie są sobie równemi, mają stosunki, których granicą jest jedność, gdy łuk nieskończenie mały zdąża do zera, różnice między niemi są więc (Twr. I) nieskończenie małemi rzędu wyższego niż rzęd łuku, wstawy i stycznéj. Wszędzie więc gdzie tylko chodzić będzie o granicę stosunków lub summ łuków nieskończenie małych, zamiast łuków będziemy mogli podstawić wstawy lub styczne tychże łuków, a granice szukane stosunków lub summ się nie zmienią, na zasadzie poprzedzających twierdzeń.

Zamiast łuku, wstawy i stycznéj, możemy uważać, mnożąc przez dwa i przez promień, łuk i jego cięciwę, lub styczną geometryczną: w miarę jak łuk dąży do zera, cięciwa ta i styczna będą nieskończenie malemi, których stosunki do łuku są w granicy równemi jedności.

Aby przedstawić to geometrycznie, wykreślimy dwie funkcje (fig. 48).

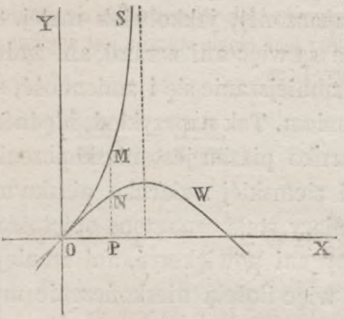


fig. 48.

$$y = \text{wst}\,x \qquad\qquad Y = \text{st}\,x$$

pierwsza z nich będzie przedstawioną przez krzywę OW druga przez krzywę OS. Odcięta OP będzie wartością łuku x odpowiadającego wartości PN wstawy, i wartości PM stycznéj tego łuku. Jeżeli łuk uważać będziemy nieskończenie małym, to jest jeżeli punkt P zbliżać się będzie nieograniczenie do punktu O, tak NP, jak MP będą nieskończenie małemi tego samego rzędu co OP, a jakkolwiek

$$MP > NP \qquad OP > NP \qquad MP > OP$$

stosunek trzech wielkości MP, NP, OP jest równym w granicy jedności; różnica dwóch z nich np.

$$MP - NP = MN$$

jest nieskończenie małą względem nieskończenie małéj NP, lub OP, lub MP; wszędzie gdzie chodzi o granice stosunków lub summ tych wielkości, za MP można podstawić NP, lub OP i odwrotnie, nie naruszając szukanéj granicy.

127. Uwagi nad nieskończenie małemi i ich użyciem. Nazwaliśmy przez określenie nieskończenie małemi, ilości *ciągle zmienne*, mogące być zmniejszanemi nieograniczenie, które zatém mogą stać się mniejszemi od wszelkiéj ilości *stałéj*, oznaczonéj, jakkolwiek małéj. Same nieskończenie małe nie są więc ani zerami, ani żadnemi ilościami oznaczonemi: zmniejszanie się i zmienność, są zarazem ich cechą i określeniem. Tak naprzykład, błędném by było wyrażenie, że ziarnko piasku jest nieskończenie małą ilością względem kuli ziemskiéj : ziarnko piasku ma swoje stałe oznaczone wymiary, stałą oznaczoną objętość, któréj dowolnie nie możemy ani powiększyć, ani zmniejszyć; ziarnko piasku nie jest więc ilością nieskończenie małą lecz skończoną, oznaczoną, nawet w porównaniu z kulą ziemską. Lecz dzieląc jaką bryłę np. kulę ziemską na coraz większą liczbę części, zostawiając nieoznaczoną, *nie wskazując*, liczby tych podziałów, możemy uważać cząsteczkę wynikającą z ostatecznego podziału za nieskończenie małą : bo cząsteczka ta nie ma oznaczonéj objętości, bośmy nieoznaczyli jakiéj liczby podziałów jest ona wypadkiem; a że liczba podziałów jest nieograniczoną, cząsteczka więc ta może być mniejszą od wszelkiéj objętości oznaczonéj, nawet od ziarnka piasku.

Powiedzieliśmy już wyżéj że metoda nieskończenie małych jest tylko szczególnym zastosowaniem metody granic. Nieskończenie małe, podobnie jak ilości zmienne nieoznaczone, zdążające do granic oznaczonych [**92**] używane bywają zwykle jako ilości pomocnicze, które mogą się nie znajdować ani w danych, ani w wypadkach zadania. Widzieliśmy wyżéj, że ilości skończone, oznaczone, mogą być wyrażone jako granice stosunków lub summ nieskończenie małych. Mając więc do porównania lub obliczenia pewne ilości skończone, lub też szukając w ogólności związków pomiędzy ilościami skończonemi, które mogą być dość złożonego rodzaju, aby związki te wprost znalezionemi być nie mogły z łatwością, możemy uważać ilości dane jako granice stosunków lub summ nieskończenie małych, które to nieskończenie małe są zwykle tego samego rodzaju co ilości dane, a zatém również złożone i równie trudne do badania. Lecz wiemy również [**125**] że podstawiając za te nieskończenie małe *inne* nieskończenie małe, różniące się od pierwszych o nieskończenie małe względem nich samych, lub mające z niemi stosunki w granicy równe jedności, ilości oznaczone dane, które są granicami stosunków lub summ pierwszych, będą również granicami stosunków lub summ odpowiednich drugich. Te *inne* nieskończenie małe mogą być wybrane dowolnie, byleby czyniły zadosyć żądanemu warunkowi różnienia się nieskończenie mało *od*, lub *względem* ilości nieskończenie małych danych : mogą więc być prostemi, łatwemi do porównywania, stosownemi do znalezienia związków, które, przechodząc do granic, będą związkami szukanemi między ilościami oznaczonemi danemi. Użycie więc metody nieskończenie małych, polega zwykle na czterech działaniach następujących :

1°. Wyrażenie ilości oznaczonych danych jako granic summ, lub stosunków ilości nieskończenie małych.

2°. Podstawienie za te nieskończenie małe innych nieskończenie małych prostszego rodzaju, mających z pierwszemi stosunki odpowiednie równe w granicy jedności, lub różnice nieskończenie małe wyższego rzędu.

3°. Szukanie związków zachodzących między temi ostatniemi podstawionemi nieskończenie małemi.

4°. Przejście do granic stosunków lub summ tych nieskończenie małych podstawionych, które to granice będą ilościami oznaczonemi danemi, a związki znalezione, związkami szukanemi.

128. Podstawiając za nieskończenie małe, inne nieskończenie małe, mające z pierwszemi różnice nieskończenie małe względem nich samych, mówimy często «że opuszczając nieskończenie małe nie naruszamy wypadku;» podobnego wyrażenia używamy przechodząc od zmiennéj do jéj granicy; właściwiéj byłoby powiedziéć że «granica stosunku lub summy drugich będzie tą samą, co granica stosunku lub summy pierwszych;» a że nam chodzi tylko o związki między granicami, których szukamy, więc podstawienie jednych za drugie jest usprawiedliwioném.

Podstawienie to nie wpływa jak widzimy na ścisłość wypadku w którym wchodzą same granice: wypadek ten nie jest żadném przybliżeniem, lecz jest ściśle prawdziwym.

W naukach stosowanych często opuszczają bardzo małe wielkości w porównaniu z wielkiemi, dla uproszczenia rachunku, lub niemożliwości przeprowadzenia go z całą dokładnością: wypadek otrzymany jest wtedy tylko przybliżeniem mniéj lub więcéj dokładném, a jakkolwiek zachodzi niejakie podobieństwo metody przybliżeń różnych rzędów, z metodą nieskończenie małych, pierwsza nie ma nic wspólnego z ostatnią, która daje wypadki zupełnie dokładne, a nie przybliżone.

129. Przykłady. *Znaleść stosunek okręgów i powierzchni dwóch kół.* Dwa koła możemy uczynić współśrodkowémi: wiemy, że poprowadziwszy dwa jakiekolwiek promienie ao, ob (fig. 49) koła

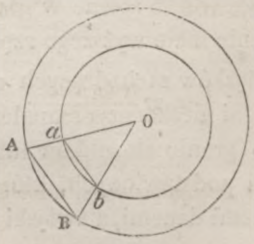


fig. 49.

wewnętrznego i przedłużywszy je do przecięcia się w punktach A i B z okręgiem koła zewnętrznego, okręgi dwóch kół będą w stosunku łuków odpowiednich AB i *ab*, a powierzchnie ich w stosunku wycinków AOB, *aob*, jakikolwiek weźmiemy kąt wspólny AOB. Możemy więc przypuścić kąt AOB nieskończenie małym, to jest przypuścić że promień OA zbliża się nieograniczenie do promienia OB; nazwawszy okręgi dwóch kół O i *o*, ich powierzchnie P i *p* mamy zawsze ;

$$\frac{O}{o} = \frac{\text{łuk AB}}{\text{łuk } ab} \qquad \frac{P}{p} = \frac{\text{wyc. AOB}}{\text{wyc. } aob}$$

Poprowadziwszy cięciwy AB, *ab*, wiemy że ich łuki AB, *ab*, są nieskończenie małemi, cięciwy AB, *ab*, są równie nieskończenie małemi: bo jedne i drugie zdążają razem do zera gdy promień AO zbliża się do promienia OB; wiemy nadto, że [**126**].

$$\text{gr} \frac{\text{łuk AB}}{\text{cięć AB}} = 1 \qquad \text{gr} \frac{\text{łuk } ab}{\text{cięć } ab} = 1$$

Możemy więc na zasadzie Tw. II podstawić za łuki nieskończenie małe, cięciwy nieskończenie małe, a granica stosunku się nie zmieni : to jest będziemy mieli zawsze

$$\frac{O}{o} = \text{gr} \frac{\text{cięć AB}}{\text{cięć } ab}$$

Mamy również

$$\text{gr} \frac{\text{wyc AOB}}{\text{trójk AOB}} = 1 \qquad \text{gr} \frac{\text{wyc } aob}{\text{trójk } aob} = 1.$$

a więc

$$\frac{P}{p} = \text{gr} \frac{\text{trójk AOB}}{\text{trójk } aob}$$

Lecz trójkąty AOB, *aob* są podobne, a zatém

$$\frac{\text{cięc AB}}{\text{cięc } ab} = \frac{\text{prom AO}}{\text{prom } ao} \qquad \frac{\text{trójk AOB}}{\text{trójk } aob} = \frac{\text{AO}^2}{ao^2}$$

więc

$$\frac{\mathrm{O}}{o}=\frac{\mathrm{prom\ AO}}{\mathrm{prom}\ ao} \qquad \frac{\mathrm{P}}{p}=\frac{\mathrm{AO}^2}{ao^2}$$

czyli że okręgi kół są w stosunku promieni, a ich powierzchnie w stosunku kwadratów promieni.

W dowodzeniu tém postępowaliśmy wedle wyżéj [128] wskazanego prawidła : stosunki szukane uważaliśmy naprzód jako granice, lub po prostu jako równe stosunkom dwóch nieskończenie małych tego samego rodzaju : zamiast stosunku okręgów otrzymaliśmy stosunek łuków nieskończenie małych, zamiast stosunku powierzchni stosunek wycinków, przezcośmy jeszcze nie ułatwili zadania.

Lecz podstawiając za łuki cięciwy, za wycinki trójkąty, stosunki szukane się nie zmieniają, a w granicy sprowadziliśmy stosunki nieznane do stosunków znanych, przez co zadanie zostało rozwiązaném.

130. *Dowieść że dwa ostrosłupy, mające podstawy i wysokości równe, są równoważne* (fig. 50).

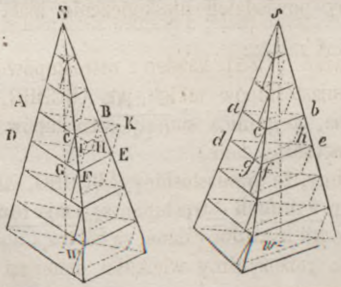


fig. 50.

Podzielimy wyskości równe dwóch ostrosłupów, na pewną coraz zwiększającą się liczbę części równych. Każdą z tych części możemy uważać za nieskończenie małą. Przez punkta podziału poprowadźmy płaszczyzny równoległe do podstawy. Każdy z ostrosłupów będzie summą ostrosłupów ściętych takich, jak ABCDEF, *abcdef*, mających podstawy w ogólności skończone, a wysokości równe nieskończenie małe : ostrosłupy ścięte będą więc same nieskończenie małemi tego samego co wysokość rzędu, jako mające z tą wysokością stosunek skończony równy jednéj trzeciéj summy dwóch podstaw i podstawy średnio-geometrycznéj. Zbliżając się jednak nieograniczenie do wierzchołka, ostrosłupy te mogą być nieskończenie małemi wyższego rzędu jak wysokość : pozostanie nakoniec u samego wierzchołka ostrosłup nieskończenie mały 3go rzędu co do objętości, jako mający trzy wymiary nieskończenie małe tego samego co wyskość rzędu, a zatém mający stosunek z trzecią potęgą téjże wysokości skończony [**119**].

Uważamy więc każden z ostrosłupów, jako granicę summy nieskończenie małych brył, których liczba jest nieskończenie wielką.

Każdą z tych brył czyli ostrosłupów ściętych, jak ABCDEF, *abcdef* rozłożyć możemy na graniastosłup ABCDHG, *abcdhg* i resztę BHECGF, *bhecgf*. Reszta ta jest nieskończenie małą *względem* graniastosłupa; bo reszta np. BHECGF, mniéjszą jest od graniastosłupa CBKIGHEF, któren ma dwa wymiary wspólne z graniastosłupem ABCDHG, a trzeci wymiar nieskończenie mały : jest więc nieskończenie małym *względem* graniastosłupa ABCDHG. Graniastosłup więc ten różni się od ostrosłupa ściętego odpowiedniego o resztę nieskończenie małą względem niego samego. Ostrosłup zaś ścięty u wierzchołka, jest jakeśmy powiedzieli nieskończenie małą aż 3go rzędu.

Możemy więc uważać [**125**] każden z ostrosłupów danych, jako granicę summy graniastosłupów takich jak ABCDHG, *abcdhg*; bo granica ta jest ta sama, co granica summy ostrosłupów ściętych, na któreśmy rozlożyli ostrosłupy dane.

Lecz łatwo dowodzimy, że graniastosłupy ABCDHG, *abcdhg* i inne odpowiednie w jednym i drugim ostrosłupie, są sobie równe; granice więc summ równych czyli ostrosłupy dane, są równe. c. b. d. d.

W tym przykładzie rozłożyliśmy wielkości dane na summy nieskończenie małych tego samego co dane wielkości gatunku: za każdą z tych nieskończenie małych podstawiliśmy inną nieskończenie małą, (za ostrosłup ścięty, graniastosłup) prostszego rodzaju, różniącą się od pierwszéj o ilość nieskończenie małą względem niéj saméj, przez co nie naruszyliśmy granicy : z równości zachodzącéj między temi ostatniemi, wnieśliśmy bez trudności szukaną równość granic.

Zastosowanie metody nieskończenie małych do teorji funkcyj.

131. Przyrostki nieskończenie małe funkcji. Twierdzenie ogólne. *Przyrostek funkcji ciągłéj jest w ogóle nieskończenie małą tego samego rzędu, co przyrostek nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj. Wyjątki zachodzić mogą tylko dla pojedynczych wartości zmiennéj niezależnéj, lub dla wartości, pomiędzy któremi funkcja się nie zmienia.*

Niech będzie funkcja ciągła

$$y = f(x)$$

niech będzie Δx przyrostek nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj x; z określenia ciągłości funkcji [**26**] wypada, że przyrostek odpowiedni Δy funkcji y będzie nieskończenie małym: mamy dowieść że Δy jest nieskończenie małą tego samego rzędu co Δx, to jest że stosunek jednego przyrostku do drugiego nie zwiększa się bez granic, ani nie dąży nieograniczenie do zera wraz z Δx [**119**]; chyba dla szczególnych pojedynczych wartości zmiennéj niezależnéj.

Funkcja y będąc funkcją ciągłą, może zwiększać się lub zmniejszać, gdy zwiększamy zmienną niezależną x; możemy wyznaczyć takie wartości szczególne x, dla których funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniéjszać, lub odwrotnie, gdy zwiększamy x: (wiemy np. że funkcja

$$y = \text{wst}\, x$$

zwiększa się od $x=0$ do $x=\frac{\pi}{2}$, zmniejsza od $x=\frac{\pi}{2}$ do $x=\pi$ i t. d.). Weźmy pod uwagę dwie wartości zmiennéj niezależnéj x_0 i X takie, że gdy zwiększamy zmienną niezależną od x_0 do X, funkcja ciągle się zwiększa lub ciągle zmniéjsza to jest, że dla przyrostków dodatnych x przyrostki y są wszystkie jednakowego znaku, przypuśćmy wszystkie dodatne.

Podzielmy różnicę $X - x_0$ na n części równych

$$X - x_0 = n\Delta x$$

i nazwijmy Δy_1, Δy_2, Δy_3, Δy_n, różnice odpowiednie [17] funkcji y, które są z założenia wszystkie jednego znaku, wszystkie dodatne. Jeżeli nazwiemy y_0, Y wartości szczeszczególne funkcji y odpowiadające wartościom szczególnym x_0, X zmiennéj niezależnéj, miéć będziemy

$$(1) \qquad Y - y_0 = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_n$$

a zatém

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_n}{n\Delta x}$$

czyli

$$(2) \qquad \frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} + \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} + \ldots + \dfrac{\Delta y_n}{\Delta x}}{n}$$

Stosunek więc skończony $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ jest średnią arytmetyczną stosunków z założenia dodatnych, przyrostków funkcji do przyrostków odpowiednich zmiennéj niezależnéj, a to jakąkolwiek przypuścimy liczbę n tych przyrostków. Przypuszczając więc n zwiększające się nieograniczenie, przyrostki jedne i drugie staną się nieskończenie małemi, średnia arytmetyczna stosunków jednych do drugich się nie zmieni i będzie zawsze ilością stałą $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$; stosunki te nie mogą być więc ani *wszystkie* zerami, ani *wszystkie* nieskończenie wielkiemi : bo stosunki te są wszystkie z założenia jednego znaku, najmniéjszy z nich musi być mniéjszym od średniéj arytmetycznéj $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ więc nie może być nieskończenie wielkim; największy musi być większym od $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ nie może więc być nieskończenie małym. Lecz różnica $X - x_0$, może być jakkolwiek małą, byle skończoną, a rozumowanie powyższe będzie miało miéjsce; gdy więc zmienna niezależna przechodzi z jednéj wartości szczególnéj w drugą, przybierając przyrostki nieskończenie małe, stosunki przyrostków nieskończenie małych zmiennéj niezależnéj nie będą ani wszystkie nieskończenie wielkiemi, ani wszystkie nieskończenie małemi; może się to zdażyć tylko dla wartości zmiennéj niezależnéj nieskończenie zbliżonych, czyli innemi słowy dla jednéj, pojedynczéj, szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj.

W ogóle więc przyrostki funkcji są nieskończenie małemi tego samego rzędu co przyrostki zmiennéj niezależnéj.

Jeżeli w szczególnym przypadku $Y = y_0$, t.j. jeżeli funkcja się nie zmienia, gdy zmieniamy x od x_0 do X, wszystkie przyrostki funkcji są zerami, a więc i stosunki tych przyrostków do przyrostków odpowiednich zmiennéj niezależnéj są także zerami. Odwrotnie, jeżeli te stosunki są zerami, ich średnia arytmetyczna jest także zerem, a więc $Y = y_0$ czyli funkcja się nie zmienia.

Jeżeliby stosunki o których mowa były wszystkie nieskończenie wielkiemi a $X - x_0$ skończoném, $Y - y_0$ musiałoby być nieskończenie wielkiém czyli, że funkcja nie byłaby funkcją ciągłą zmiennéj x pomiędzy wartościami x_0 i X zmiennéj niezależnéj.

Gdyby funkcja była ciągle zmniéjszającą się, to jest gdyby przyrostkom dodatnym Δx odpowiadały przyrostki odjemne Δy, powyższe dowodzenie przeprowadzonem by być mogło ze stosowną zmianą znaków: twierdzenie więc jest ogólném, jeżeli zmienną niezależną zmieniamy pomiędzy wartościami, pomiędzy któremi funkcja ciągle się powiększa lub ciągle zmniéjsza.

Jeżeli funkcja nie jest ciągle zwiększającą się lub ciągle zmniéjszającą się, oznaczywszy [24] wartości zmiennéj niezależnéj, dla których funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniéjszać, lub odwrotnie, twierdzenie ma miéjsce pomiędzy każdemi dwiema po sobie następującemi z powyższych wartości: ma więc miéjsce dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj, z wyjątkiem tych wartości szczególnych, dla których przyrostek funkcji z dodatnego staje się odjemnym. W rzeczy saméj, w ogólnym przypadku ciągłości, przyrostek ten Δy lub stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zanim zmieni znak, Δx będąc ciągle tém samém dodatném, wprzód stanie się w ogóle w granicy zerem, co ma miéjsce gdy Δy jest nieskończenie małą wyższego rzędu od Δx. Wartości te szczególne, pojedyncze, nie zmniéjszają ogólności powyżéj wysłowionego twierdzenia.

132. Wniosek i. *Stosunek przyrostku funkcji ciągłéj do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj zdąża w ogóle do granicy oznaczonéj, gdy przyrostek zmiennéj niezależnéj zdąża do zera. Wyjątki mogą zachodzić tylko dla szczególnych, pojedynczych wartości zmiennéj niezależnéj.*

Dowiedliśmy że przyrostki te są oba nieskończenie małemi tego samego rzędu t. j. że ich stosunek nie może w ogólności ani dążyć do zera ani zwiększać się bez granic; dowieść należy że stosunek ten zdąża do granicy oznaczonéj.

Niech będzie funkcja ciągła

$$y = f(x)$$

przypuszczamy, że zmienna niezależna zmienia się pomiędzy granicami, pomiędzy któremi gdy zwiększamy x, funkcja y ciągle się zwiększa lub ciągle zmniéjsza, nie przechodząc przez żadną z wartości szczególnych, dla którychby przyrostek funkcji Δy nie był nieskończenie małym tego samego rzędu, co przyrostek nieskończenie mały Δx zmiennéj niezależnéj [131]; powiadam, że stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, który na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, nie może być ani 0, ani ∞, zdąża do granicy oznaczonéj, gdy Δx zdąża do zera.

Weźmy pewną wartość szczególną x_0 zmiennéj niezależnéj x, zawartą pomiędzy powyższemi granicami; niech będzie y_0, wartość odpowiednia funkcji y: zmieniajmy zmienne zacząwszy od tych wartości, to jest załóżmy

$$x = x_0 + \Delta x \qquad y = y_0 + \Delta y$$

będziemy mieli

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$$

Δy jest więc funkcją ciągłą zmiennéj Δx, a zatém i stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, będzie funkcją ciągłą Δx, byleby Δx nieprzechodziło przez wartość 0 [29]. Lecz Δx zbliża się tylko nieograniczenie do zera, nie stając się nigdy zerem: stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, jako funkcja ciągła Δx, ciągle się powiększa lub ciągle zmniéjsza, gdy zmniéjszamy dowolnie Δx, lecz nie może stać się ani zerem ani nieskończonością.

Stosunek więc ten przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, zdąża do granicy oznaczonéj [89], gdy Δx zdąża do zera, c. b. d. d.

Stosunek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - y_0}{\Delta x}$$

a więc i jego granica są funkcjami x_0 i y_0, które są jakiemikolwiek wartościami szczególnemi zmiennych x i y: czyli w ogólności, *granica stosunku przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, jest funkcją zmiennéj niezależnéj* x : nazwijmy ją

$$f'(x) = \mathrm{gr}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

funkcja ta może być ciągłą lub nieciągłą, jakkolwiek funkcja $f(x)$ jest ciągłą.

Uwaga. Jeżeli granica stosunku przyrostu funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj jest funkcję ciągłą zmiennéj niezależnéj, granica ta jest tą samą czy przyrostek zmiennéj niezależnéj uważać będziemy dodatnym, czy odjemnym.

Nazwijmy $\Delta' y$ przyrostek funcji odpowiadający przyrostkowi odjemnemu $-\Delta x$ zmiennéj niezależnéj; powiadam że:

$$\mathrm{gr}\ \frac{\Delta' y}{-\Delta x} = \mathrm{gr}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

byleby

$$\mathrm{gr}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

była funkcją ciągłą zmiennéj x.

W rzeczy saméj,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

gdzie ε zdąża do zera, gdy Δx zdąża do zera: mamy wychodząc z wartości zmiennéj niezależnéj $x - \Delta x$, wartość odpowiednią funkcji $y + \Delta' y$; gdy zmiennéj niezależnéj $x-\Delta x$ nadamy przyrostek $+\Delta x$ otrzymamy x; a że wartości x odpowiada wartość funkcji y, wartość funkcji $y+\Delta' y$ otrzymała przyrostek $-\Delta' y$ gdy zmienna niezależna otrzymała przyrostek $+\Delta x$, a to wszystko dla wartości początkowéj $x-\Delta x$ zmiennéj niezależnéj; więc z założenia

$$\frac{-\Delta' y}{\Delta x} = f'(x-\Delta x) + \varepsilon$$

w granicy więc

$$\mathrm{gr}\,\frac{-\Delta' y}{\Delta x} = \mathrm{gr}\,\frac{\Delta' y}{-\Delta x} = \mathrm{gr}\,[f'(x-\Delta x)+\varepsilon]$$

czyli

$$\mathrm{gr}\,\frac{\Delta' y}{-\Delta x} = f'(x) = \mathrm{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

133. Wniosek II. *Odległość dwóch punktów na krzywéj ciągłéj jest w ogóle nieskończenie małą tego samego rzędu co różnice nieskończenie małe spółrzędnych, odpowiedających tym punktom, lub przyrostek odpowiedni nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj, któréj spółrzędne punktów są funkcjami ciągłemi.*

Przypuśćmy, dla większéj ogólności, że spółrzędne x i y krzywéj zmieniają się zależnie od pewnéj zmiennéj α, któréj spółrzędne te są funkcją ciągłą. Gdy zmiennéj niezależnéj α nadamy przyrostek $\Delta\alpha$, przyrostek odciętéj Δx i przyrostek rzędnéj Δy będą wogóle nieskończenie małemi tego samego rzędu co $\Delta\alpha$: powiadam że odległość d punktu, którego spółrzędnemi są $x+\Delta x$ i $y+\Delta y$, od punktu odpowiadającego spółrzędnym x i y, jest nieskończenie małą tego samego rzędu co $\Delta\alpha$, Δx i Δy. Będziemy uważać tylko tę część krzywéj, dla któréj w razie nieskończenie małego przyrostku odciętéj, rzędna przybiera przyrostek nieskończenie mały.

Przypuśćmy naprzód, że krzywa jest płaską a spółrzędne prostokątne. Odległość $AB = d$ (fig. 51) dwóch punktów A i B odpowiadających wartościom odciętych $OP = x$, $OQ = x + \Delta x$

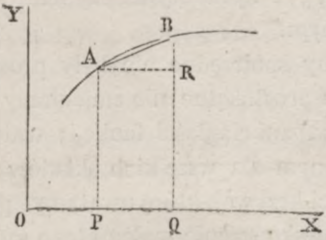


fig. 51.

$$AB = \sqrt{AR^2 + BR^2}$$

daje

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

a więc

$$\frac{d}{\Delta \alpha} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta \alpha}\right)^2}$$

a że z założenia i na zasadzie poprzedzającego twierdzenia $\frac{\Delta x}{\Delta \alpha}$ i $\frac{\Delta y}{\Delta \alpha}$ mają wartości skończone, więc i $\frac{d}{\Delta \alpha}$ będzie miało wartość skończoną, czyli d i $\Delta \alpha$ będą nieskończenie małemi tego samego rzędu.

W razie gdyby krzywa nie była płaską, odległość punktu którego spółrzędnemi są x, y, z od punktu którego spółrzędne byłyby $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ wyraziłaby się przez

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

stosunek jej do $\Delta\alpha$ byłby

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta\alpha}\right)^2}$$

a zatém jeżeli x, y, z są funkcjami ciągłemi α, stosunek ten będzie skończonym.

W razie gdyby spółrzędne nie były prostokątnemi zamieniwszy je na prostokątne nie zmieniamy ani odległości dwóch punktów, ani ciągłości funkcji; wniosek więc powyższy jest ogólnym dla wszelkich układów spółrzędnych, byleby dla części krzywéj, którą uważamy, przyrostki spółrzędnych były nieskończenie małemi tego samego rzędu.

Uwaga. *Odległość dwóch punktów na powierzchni jest nieskończenie małą tego samego rzędu, co różnica nieskończenie mała spółrzędnych odpowiadających tym punktom, byleby przyrostki spółrzędnych były nieskończenie małemi tego samego rzędu.* Bo pomiędzy dwoma punktami na powierzchni, możemy zawsze poprowadzić krzywą ciągłą, dla któréj powyższy wniosek ma miéjsce.

134. Wniosek III. *Jeżeli prosta zmienia położenie swe w przestrzeni, wedle jakiegokowiek prawa, lecz w sposób taki, że każde szczególne jéj położenie odpowiada szczególnéj wartości pewnéj zmiennéj niezależnéj, kąt nieskończenie mały, jaki tworzy dwa położenia téj prostéj po sobie następujące, jest nieskończenie małą tego samego rzędu, co różnica odpowiadających wartości zmiennéj niezależnéj.*

Przez początek spółrzędnych, poprowadźmy proste równoległe do różnych położeń, jakie prosta dana przybiera w przestrzeni; kąt między dwoma prostemi w początku, jest zarazem kątem dwóch położeń prostéj danéj, równoległych do tych prostych. Należy dowieść, że jeżeli prosta zmienia się zależnie od pewnéj zmiennéj niezależnéj α, kąt ten jest nieskończenie małą tego samego rzędu co $\Delta\alpha$.

Wszystkie linje poprowadzone przez początek równolegle do różnych położeń prostéj tworzą powierzchnię ostrokręgową; przetnijmy powierzchnię tę kulą mającą środek w początku a promień równy jedności : przecięcie dwóch powierzchni będzie linją nakreśloną na kuli, któréj każdy punkt odpowiada szczególnemu położeniu prostéj w przestrzeni; któréj spółrzędne zatém są funkcjami ciągłemi α. Na zasadzie więc poprzedzającego wniosku, dwa punkta M i M′ téj krzywéj, odpowiadające dwóm promieniom OM i OM′ kuli równoległym do dwóch położeń prostéj w przestrzeni, tworzącym ze sobą kąt MOM′, będą miały odległość MM′ nieskończenie małą tego samego rzędu co $\Delta\alpha$. Lecz w trójkącie równoramiennym MOM′.

$$\frac{MM'}{2} = OM \operatorname{wst} \frac{O}{2}$$

a że $OM = 1$, więc $\operatorname{wst} \frac{O}{2}$ jest tego samego rzędu co $\frac{MM'}{2}$; a że jak wiadomo, łuk czyli kąt, jest nieskończenie małą tego samego rzędu co wstawa, bo stosunek wstawy do łuku jest równym w granicy jedności : zatém kąt O jest nieskończenie małą tego samego rzędu co MM′ czyli co $\Delta\alpha$

c. b. d. d.

135. Teorja stycznych. Styczną do krzywéj danéj w punkcie danym, nazywamy granicę kierunku siecznéj przecinającéj krzywę w punkcie danym i w punkcie znajdującym się na krzywéj w odległości nieskończenie małéj od punktu danego, gdy odległość ta zbliża się do zera.

Niech będzie krzywa dana AK i punkt dany A; przypu-

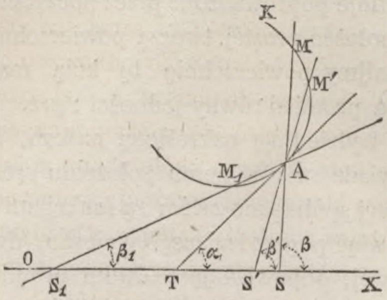


fig. 52.

szczamy że krzywa w blizkości punktu A jest ciągle wklęsłą, lub ciągle wypukłą względem pewnéj prostéj OX, to jest że krzywa AK w blizkości punktu A nie może być przeciętą przez prostą w więcéj jak dwóch punktach. Weźmy punkt M w odległości AM nieskończenie małéj od A; trzeba dowieść, że kierunek siecznéj MA zmieniający się gdy M zbliża się ku A, zdąża do granicy oznaczonéj, kierunku stałego, któren weźmiemy za kierunek stycznéj.

Oznaczmy kierunek MA przez kąt MSX $= \beta$, jaki kierunek ten tworzy z osią stałą OX; gdy punkt M zbliża się do punktu A, kąt β się zmniéjsza; bo kąt MSX, jako zewnętrzny w trójkącie AS′S jest większym od kąta AS′X wewnętrznego.

Jeżeli weźniemy punkt M_1 w blizkości punktu A, na krzywéj lecz z drugiéj strony niż punkt M, kąt β zmniéjszając się ciągle nie może stać się mniéjszym od kąta β_1; zdąża więc do granicy oznaczonéj [**89**], gdy M zdąża do A : granica ta α kąta β odpowiada kierunkowi AT stycznéj do krzywéj LK w punkcie A.

Gdybyśmy uważali punkt M_1, zbliżający się do punktu A kąt β_1 siecznéj AM_1 z osią OX, zwiększałby się ciągle; a nie mogąc stać się większym od kąta β' zdążałby do granicy oznaczonéj.

Granica ta jest *w ogólności* tą samą, co granica kąta β zmniéjszającego się: bo uważając jednocześnie punkta M i M_1 zbliżające się razem do punktu A, kąt zwiększający się ciągle β_1, nie mogąc stać się większym od ciągle zmniéjszającego się kąta β, ma w ogóle z nim granicę wspólną, odpowiadającą kierunkowi stycznéj; widoczną jest zresztą rzeczą, że różnica pomiędzy kątem α, a każdym z kątów β i β_1 może być w takim razie nieograniczenie małą. Może się jednak zdarzyć przypadek dla niektórych szczególnych punktów krzywych, że kąt β_1 zdążać będzie do innéj granicy niż kąt β: w takim razie krzywa miałaby dwie styczne w punkcie A (fig. 53). Punkt taki, o którym będziemy mó-

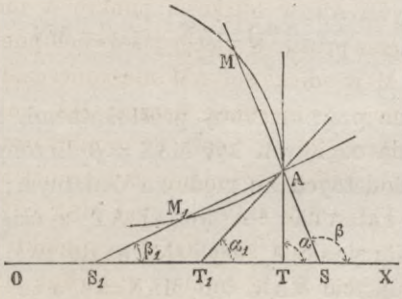


fig. 53.

wić w dalszym ciągu, nazwiemy *punktem kątowym* krzywéj, bo krzywa w takim punkcie dzieli się jakoby na dwie gałęzie tworzące kąt pomiędzy sobą.

Jakąkolwiek więc uważać będziemy sieczną, któréj dwa punkta przecięcia zbliżają się nieograniczenie do siebie, kierunek téj siecznéj będzie miał granicę oznaczoną, c. b. d. d.

136. Oznaczmy przez x i y spółrzędne prostokątne OP, AP (fig. 54)

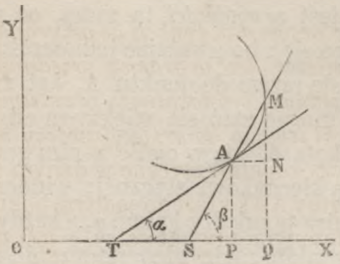


fig. 54.

punktu A, przez $x+\Delta x$, $y+\Delta y$; spółrzędne OQ, MQ punktu nieskończenie blizkiego M; mamy:

$$\Delta x = \mathrm{PQ} = \mathrm{AN} \qquad \Delta y = \mathrm{MN}$$

Spółrzędne przypuszczamy prostokątnemi. Sieczna MA tworzy z osią odciętych kąt $\mathrm{MSX} = \beta$ liczony od strony odciętych dodatnych ku rzędnym dodatnym; kąt ten ma za granicę kąt $\mathrm{ATX} = \alpha$ stycznéj AT z osią odciętych, gdy M zbliża się do A, czyli sieczna do swéj granicy stycznéj. W trójkącie MAN, kąt $\mathrm{MAN} = \beta$, a że

$$\mathrm{MN} = \mathrm{AN} \operatorname{st} \mathrm{MAN}$$

więc

$$\Delta y = \Delta x \operatorname{st} \beta$$

czyli

$$\operatorname{st} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

przechodząc do granicy

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{st}\alpha = \operatorname{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Stosunek więc przyrostku funkcji do przyrostku odpowiedniego zmiennéj niezależnéj jest w granicy przedstawionym geometrycznie w spółrzędnych prostokątnych przez styczną trygonometryczną kąta, jaki styczna do krzywéj tworzy z osią odciętych. Kąt ten wyznacza zupełnie styczną w danym punkcie A; bo trójkąt prostokątny APT którego jednym bokiem jest rzędna AP, jest wyznaczonym, gdy kąt ostry α jest danym.

Dowiedliśmy powyżéj [**132**], że stosunek przyrostku funkcji ciągłéj do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj ma granicę oznaczoną: z równania (1) wnieśćby można, że każda krzywa ciągła ma styczną oznaczoną w każdym punkcie. Odwrotnie, dowiedliśmy [**135**] że w punkcie danym na krzywéj można w ogólności zawsze do téj krzywéj poprowadzić styczną: wnieśćby można z równania (1), że przyrostek funkcji ciągłéj do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, ma granicę oznaczoną, bo każda funkcja ciągła, może być przedstawioną geometrycznie przez krzywę ciągłą.

Rozbierzmy niektóre szczególne przypadki.

Styczna kąta α równa zeru odpowiada stycznéj równoległéj do osi odciętych (fig. 55); przypadek ten może zda-

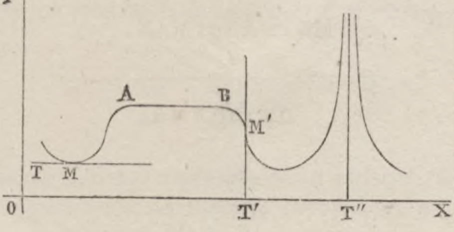


fig. 55.

rzyć się tylko w jednym punkcie M, chybaby krzywa zamieniała się w pewnéj swéj części AB w prostę równoległą do osi odciętych; co się zupełnie zgadza z tém cośmy wyżéj [131] powiedzieli o granicy stosunku przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, która może być zerem tylko dla szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, lub dla wartości stałych funkcji. Styczna kąta α równa ∞ odpowiada stycznéj prostopadłéj do osi odciętych, co może mieć miéjsce w szczególnym tylko punkcie M', lub też odpowiadać zerwaniu ciągłości funkcji jak dla odciętéj OT'' chybaby krzywa zamieniła się w prostę prostopadłą do osi odciętych; co również zgadza się z tem cośmy powiedzieli wyżéj [131].

Inne szczególne przypadki rozebrane będą poniżéj, w rozdziale o *punktach nadzwyczajnych* krzywych, czyli *wartościach nadzwyczajnych* funkcyj.

PRZYKŁAD. *Styczna do paraboli.* Niech będzie równanie paraboli, odniesionéj do spółrzędnych prostokątnych,

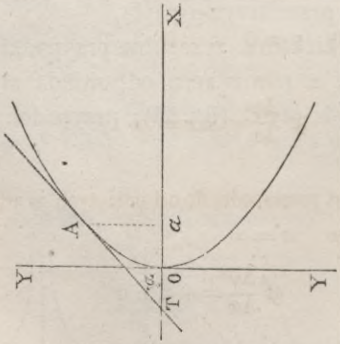


fig. 56.

$$y^2 = 2px$$

Wiemy że:

$$\text{st}\,\alpha = \text{gr}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

lecz

$$(y+\Delta y)^2 = 2p\,(x+\Delta x)$$
$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = 2px + 2p\Delta x$$

czyli

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = 2p\Delta x$$

a więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{y} - \frac{\Delta y^2}{2y\Delta x}$$

przechodząc do granicy, ponieważ gr $\dfrac{\Delta y^2}{\Delta x} = 0$, bo Δy^2 jest nieskończenie małém względem Δx [**131**]

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{st}\,\alpha = \frac{p}{y}$$

a że podstyczna

$$a\text{T} = \frac{\text{A}a}{\text{st}\,\alpha} = \frac{y^2}{p} = 2x$$

więc podstyczna jest zawsze równą dwa razy odciętéj, czyli OT $=$ Oa.

Mamy nadto gdy $y=0$ $x=0$

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{st}\,\alpha = \infty$$

czyli że styczna jest prostopadłą do osi odciętych w wierzchołku paraboli. Gdy $y=\infty$ $x=\infty$

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{st}\,\alpha' = 0$$

czyli że styczna nie może być równoległą do osi odciętych, lecz może zbliżyć się nieograniczenie do kierunku równoległego w miarę jak odcięta zwiększa się bez granic.

Przykłady nieskończenie małych.

137 I. *Niech będzie pewna krzywa i prosta styczna do téj krzywéj w pewnym punkcie; jeżeli z punktu* M *na krzywéj, wziętego w odległości nieskończenienie małéj 1go rzędu* MM′, *od punktu styczności, poprowadzimy prostopadłą* M′P *do stycznéj, prostopadła ta będzie w ogólności nieskończenie małą drugiego rzędu.*

W rzeczy saméj, z trójkąta MM′P

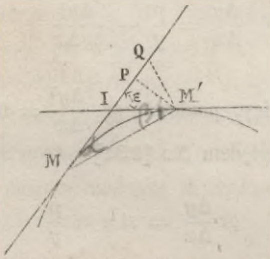


fig. 57.

$$\frac{M'P}{MM'} = \text{wst}\, PMM'$$

a że kąt PMM′, zawarty pomiędzy sieczną MM′ a styczną MP jest nieskończenie małym [**135**], więc i wstawa tego kąta i stosunek $\frac{M'P}{MM'}$ równy téj wstawie, są nieskończenie małemi; a zatém M′P jest nieskończenie małém względem MM′. Pozostaje udowodnić, że jeżeli MM′ jest pierwszego rzędu, M′P jest drugiego rzędu, a nie 3go, 4go...

Wyprowadźmy dla tego styczną do krzywéj w punkcie M′, która przetnie styczną MP w punkcie I : mamy, oznaczając kąt PIM′ $= \varepsilon$

$$\varepsilon = PMM' + IM'M$$

kąt PMM′, a zatém i jego wstawa jest więc tego samego rzędu co ε; lecz ε jest tego samego rzędu co przyrostek zmiennéj niezależnéj

[**134**] i co odległość MM' [**133**], a zatém 1go rzędu : prostopadła więc

$$PM' = MM' \times \text{wst}\, PMM'$$

jako równa iloczynowi dwóch nieskończenie małych 1go rzędu, jest w ogólności nieskończenie małą 2go rzędu c. b. d. d.

Nie tylko prostopadła M'P, ale wszelka pochyła M'Q z punktu M' do stycznéj poprowadzona jest nieskończenie małą drugiego rzędu, jeżeli MM' jest pierwszego rzędu, byleby kąt QM'P jaki ta pochyła tworzy z prostopodłą nie zdążał do kąta prostego w miarę jak MM' zdąża do zera : w rzeczy saméj

$$\frac{M'Q}{M'P} = \frac{1}{\text{dos}\, QM'P}$$

byle więc dos QM'P nie była w granicy zerem, stosunek $\frac{M'Q}{M'P}$ jest skończonym, a więc pochyła M' jest tego samego rzędu co prostopadła M'P.

II. *Jeżeli z punktu* O *nad prostą, poprowadzimy prostopadłę* OP *i pochyłą* OQ *tworzącą kąt nieskończenie mały* 1*go rzędu z prostopadłą, różnica pomiędzy pochyłą a prostopadłą jest nieskończenie małą* 2*go rzędu.*

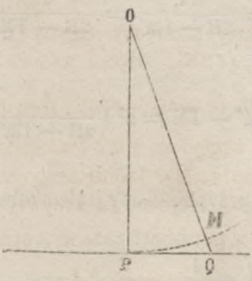


fig. 58.

Bo różnica ta QM jest pochyłą z punktu M na kole, promieniem OP z punktu O zakreślonem, do stycznéj PQ wyprowadzoną [**I**].

III. *Przykład nieskończenie małéj stopnia wyższego nad 2gi.* Niech będzie krzywa MM′ i styczna MT; prostopadła M′T jest [I] nie-

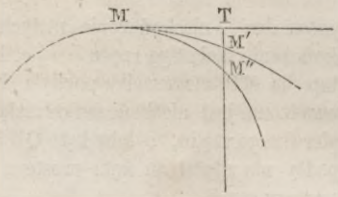


fig. 59.

skończenie małą drugiego rzędu jeżeli MT jest drugiego rzędu. Załóżmy

$$MT = \alpha$$

możemy napisać

$$M'T = k\alpha^2$$

gdzie k jest ilością w granicy skończoną [**119**].

Zakreślmy promieniem R koło styczne do MT w punkcie M, i przedłóżmy TM′ do przecięcia się z kołem w punkcie M″ : mamy

$$TM'' = \frac{MT^2}{2R - TM''} = \frac{\alpha^2}{2R - TM''}$$

a więc

$$M'M'' = TM'' - TM' = \alpha^2 \left(\frac{1}{2R - TM''} - k\right)$$

Weźmy R, które przypuściliśmy jakiemkolwiek, takie żeby

$$\text{gr} \left(\frac{1}{2R - TM''} - k\right) = 0$$

dośc jest wziąść dla tego

$$R = \text{gr}\ \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k_1}$$

zważywszy że gr $TM'' = 0$ i oznaczając $k_1 = \text{gr}\, k$: w takim razie stosunek $\frac{M'M''}{\alpha^2}$ jest równym w granicy zeru, nieskończenie małym, a zatém $M'M''$ nieskończenie małą rzędu wyższego nad 2gi [**119**].

IV. *W trójkącie, w którym jeden bok jest nieskończenie małym względem drugiego, kąt przeciwny bokowi nieskończenie małemu, jest nieskończenie małym; granicą stosunku boków obejmujących ten kąt jest jedność, i odwrotnie.*

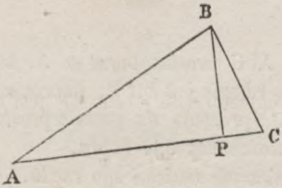


fig. 60.

W rzeczy samej, jeżeli BC jest nieskończenie małém względem AB, poprowadziwszy prostodadlą BP, prostopadła ta będzie również nieskończenie małą względem AB; a że

$$\text{wst}\, A = \frac{BP}{AB}$$

zatém wstawa kąta A, a więc i sam kąt A jest nieskończenie małym względem AB.

Mamy zresztą

$$BC > AC - AB$$

a więc różnica $AC - AB$ jest nieskończenie małą, czyli stosunek $\frac{AC}{AB}$ równy w granicy jedności [**121**].

Odwrotnie, jeżeli kąt A jest nieskończenie małym, wst A jest nieskończenie małą, prostopadła

$$BP = AB\, \text{wst}\, A$$

jest nieskończenie małą, a więc również

$$BC = \frac{BP}{\cos PBC}$$

jest nieskończenie małém.

V. *W trójkącie, dwa kąty są nieskończenie małemi pierwszego rzędu, równie jak bok zawarty między temi kątami*; dowieść że: *różnica summy dwóch boków pozostałych i tego boku jest nieskończenie małą 3go rzędu.*

VI. *W trójkącie* ABC *prostokątnym w* A, *którego bok* AB *jest nieskończenie małym równie jak kąt* B, *poprowadziwszy prostopadłą* AI *z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnę*, dowieść że:

IC *jest nieskończenie małą 3go rzędu.*

AC i AI *są nieskończenie małemi 2go rzędu.*

BC — BA *jest nieskończenie małą 3go rzędu.*

Przyjmujemy AB *i kąt* B *za nieskończenie małe 1go rzędu.*

CZĘŚĆ II

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

CZĘŚĆ II

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

ROZDZIAŁ VII

O FUNKCJACH POCHODNYCH I RÓŻNICZKACH

Określenia. — Pochodna. — Różniczka. — Przedstawienie geometryczne pochodnéj i różniczki. — Prędkość punktu ruchomego. — Cel rachunku różniczkowego. — Własności ogólne funkcyj pochodnych. — Pochodna funkcji funkcji. Pochodna funkcji odwrotnéj.

Określenia.

138. Pochodna. Niech będzie y funkcją ciągłą zmiennéj x:

$$y=f(x) \tag{1}$$

jeżeli zmiennéj x nadamy przyrostek Δx i nazwiemy Δy przyrostek odpowiedni funkcji y:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

z określenia ciągłości funkcji [**25**] wiemy, że przypuściwszy przyrostek zmiennéj Δx nieskończenie małym, przyrostek funkcji Δy będzie również nieskończenie małym. Dowiedliśmy nadto [**131**], że nieskończenie małe Δx i Δy są *w ogólności* nieskończenie małemi tego samego rzędu, gdy x zmienia się pomiędzy dwiema jakiemikolwiek wartościami szczególnemi x_0 i X, pomiędzy któremi funkcja jest ciągłą, że zatém granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest *w ogólności* skończoną oznaczoną funkcją zmiennéj x, a tylko dla *szczególnych*, pojedynczych wartości zmiennéj niezależnéj stosunek ten może być w granicy nieoznaczonym, nieskończenie wielkim dodatnym lub odjemnym, lub zerem [**118**], [**119**].

Granicę stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy x zdąża do zera nazywamy *pochodną* funkcji i oznaczamy ją, według Lagrange'a, kréskując znak funkcyjny

$$f'(x) = \text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{gr}\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

co możemy wyrazić mówiąc, że

Pochodną *funkcji nazywamy granicę stosunku przyrostku funkcji do przyrostku odpowiedniego zmiennéj niezależnéj, gdy przyrostek ten zdąża do zera.*

W ogólności pochodne funkcyj F(x), $\varphi(x)$, $\psi(x)$... będziemy oznaczać przez F$'(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$... tak że

$$F'(x) = \text{gr}\,\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x},\quad \varphi'(x) = \text{gr}\,\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\ldots$$

139. Różniczka. Jeżeli $f'(x)$ jest granicą $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, to jak wiemy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

gdzie ε oznacza nieskończenie małą zdążającą do zera wraz z Δx; a więc

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x \tag{3}$$

Widzimy ztąd, że przyrostek Δy funkcji, który jest nieskończenie małą tego samego w ogóle rzędu co przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj, składa się z dwóch części:

1° $f'(x)\,\Delta x$, która jest nieskończenie małą tego samego rzędu co Δx, bo ma z Δx w ogólności stosunek skończony, równy pochodnéj $f'(x)$.

2° $\varepsilon\Delta x$, która jest nieskończenie małą wyższego rzędu względem Δx, t. j. nieskończenie małą wyższego rzędu niż Δx, bo ma z Δx stosunek nieskończenie mały ε.

Pierwszą tę część przyrostku Δy funkcji, nazywamy *różniczką* funkcji, i oznaczamy ją przez dy : a zatém

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{4}$$

Różniczką funkcji nazywamy iloczyn pochodnéj przez przyrostek nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj.

Mamy również

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x) = \mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5}$$

a zatém

Różniczką dy *funkcji, nazywamy nieskończenie małą, któréj stosunek do przyrostku nieskończenie małego* Δx *zmiennéj niezależnéj, równa się granicy stosunku przyrostku odpowiedniego* Δy *funkcji, do tegoż przyrostku* Δx *zmiennéj niezależnéj, gdy* Δx *zdąża do zera.*

Wyrażenie różnicy pomiędzy przyrostkiem Δy a różniczką dy

$$\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x \tag{6}$$

pokazuje nam że :

Przyrostek Δy *funkcji nie jest równym różniczce* dy *téjże funkcji : lecz przyrostek* Δy *jest nieskończenie małą różniącą się od nieskończenie małéj* dy, *którą nazwaliśmy różniczką*, *o ilość* $\varepsilon\Delta$x *nieskończenie małą względem niéj saméj*,

Z tego wypada [**121**] że

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{dy}=1 \tag{7}$$

Przyrostek funkcji Δy *i różniczka* dy *są nieskończenie małemi tego samego rzędu, których stosunek w granicy równa się jedności.*

Przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj przypuszczamy dowolnie małym, lecz niezależnym od x; bierzemy [**131**] różnicę skończoną $X-x_0$ dwóch wartości szczególnych X i x_0 zmiennéj niezależnéj i dzielimy ją na zwiększającą się do nieskończoności liczbę *równych* części, z których każdą nazywamy Δx; a zatém jakiekolwiek weźmiemy x przyrostek Δx będzie ten sam : Δx jest więc niezależném od x. Dla tego wyrażamy się niekiedy mówiąc : że przyrostek zmiennéj niezależnéj jest *stałym*, bo stałą [**2**] nazywamy zwykle ilość niezależną od zmiennéj niezależnéj, nawet gdyby ilość ta się zmieniała w inny sposób np. zdążając nieograniczenie do zera.

Lecz różniczka dy podobnie jak przyrostek Δy, oprócz tego że są nieskończenie małemi, są jeszcze zmiennemi zależnemi od zmiennéj niezależnéj, t. j. funkcjami x; bo

$$dy=f'(x)\,\Delta x \qquad \Delta y=f'(x)\,\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

a pochodna $f'(x)$ jest w ogóle funkcją x.

Różniczka więc podobnie jak przyrostek funkcji, są nieskończenie małemi zdążającemi do zera, gdy Δx zdąża do zera, lecz zależnie od wartości zmiennéj niezależnéj x, któréj nadajemy przyrostek Δx.

Przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj można uważać jako niezmienny jakąkolwiek funkcję x, jak : $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f'(x)$ bierzemy pod uwagę : bo przyrostek ten będąc stałym, niezależnym ani od x, ani od funkcji x, można go nie zmieniać przechodząc z jednéj funkcji do drugiéj. Weźmy w szczególności pod uwagę funkcję

$$y = x$$

mamy

$$\Delta y = \Delta x$$

czyli

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dx}{\Delta x} = \text{gr} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

a zatém

$$\Delta x = dx$$

więc w tym przypadku przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj równym jest różniczce dx. A zatém i dla wszelkiéj innéj funkcji przyrostek zmiennéj niezależnéj Δx możemy wziąść równym różniczce dx téjże zmiennéj niezależnéj. Różniczka dx zmiennéj niezależnéj będzie więc uważaną jako *stała*, t. j. niezależna od x, równa przyrostkowi Δx zmiennéj niezależnéj. Możemy więc używać znaku Δx lub dx zarówno, jak nam będzie dogodniéj. I tak możemy napisać

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{lub} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

Ztąd to pochodnę nazywają niekiedy *ilorazem różniczkowym*, bo pochodna równa jest ilorazowi różniczki funkcji i różniczki zmiennéj niezależnéj; lub jeszcze *spółczynnikiem* *różniczkowym*, bo mnożąc przez pochodnę różniczkę zmiennéj niezależnéj, otrzymujemy różniczkę funkcji.

140. Jakkolwiek przyrostek funkcji nie jest równym jéj różniczce, jednak na zasadzie twierdzenia ogólnego metody nieskończenie małych [**125**], *za przyrostek funkcji można podstawić jéj różniczkę lub odwrotnie, ile razy chodzi o granicę stosunku lub summy nieskończenie małych;* bo z równania (6) i (7) widzimy, że te dwie nieskończenie małe różnią się o nieskończenie małą względem nich samych, czyli mają stosunek równy w granicy jedności.

141. Przedstawienie geometryczne pochodnéj i różniczki. Niech będzie krzywa LK (fig. 61) przedstawiająca funkcję

(1) $$y=f(x)$$

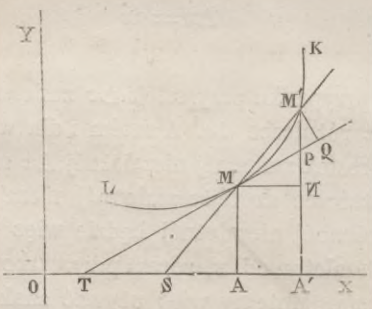


fig. 61.

$OA=x$, $AM=y$, spółrzędne jakiegokolwiek punktu M téj krzywéj;

$OA'=x+\Delta x$, $A'M'=y+\Delta y$, spółrzędne punktu M' w odległości nieskończenie małéj MM' od punktu M.

Stosunek

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{M'N}{MN}=\frac{\text{wst}\, M'MN}{\text{wst}\, MM'N}$$

przyrostku funkcji do przyrostku zmiennéj niezależnéj jest spółczynnikiem kątowym [45] siecznéj MM′ : w rzeczy saméj oznaczywszy przez X, Y spółrzędne téj siecznéj i przedstawiwszy jéj równanie naprzód pod ogólnym kształtem równania prostéj

$$(2) \qquad Y = mX + n$$

na wyznaczenie spółczynników m i n mamy dwa równania, wskazujące że prosta przechodzi przez punkta M i M′, że zatém spółrzędne tych punktów czynią zadosyć równaniu (2)

$$y = mx + n$$

$$y + \Delta y = m(x + \Delta x) + n$$

skąd otrzymujemy odejmując pierwsze od drugiego

$$\Delta y = m\Delta x \quad \text{czyli} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Otrzymamy również

$$n = y - \frac{\Delta y}{\Delta x}x$$

tak że równaniem siecznéj MM′ będzie, podstawiając te wartości w (2)

$$(3) \qquad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x)$$

W granicy, gdy M′M zdąża do zera, sieczna MM′ zdąża do stycznéj MT : równaniem więc stycznéj będzie

$$(4) \quad Y - y = f'(x)(X - x) \quad \text{czyli} \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

a jéj spółczynnikiem kątowym

$$\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{M'N}}{\mathrm{MN}} = \mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{wst\,M'MN}}{\mathrm{wst\,MM'N}} = \frac{\mathrm{wst\,PMN}}{\mathrm{wst\,MPN}} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{MN}}$$

lub

(5) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{MN}}$$

czyli że:

Pochodna przedstawioną jest geometrycznie przez spółczynnik kątowy stycznéj.

Lecz mamy również

$$dx = \Delta x = \mathrm{MN} \qquad \Delta y = \mathrm{M'N}$$

a więc z (5)

(6) $$dy = \mathrm{PN}$$

czyli że:

Różniczka przedstawioną jest geometrycznie przez przyrostek nieskończenie mały rzędnéj stycznéj, odpowiadający przyrostkowi nieskończenie małemu odciętéj punktu styczności.

Różnica pomiędzy przyrostkiem nieskończenie małym funkcji a jéj różniczką

$$\Delta y - dy = \varepsilon\Delta x = \mathrm{M'N} - \mathrm{PN} = \mathrm{M'P}$$

przedstawioną jest przez odległość M'P punktu M' na krzywéj od punktu P na stycznéj, liczoną równolegle od osi rzędnych, nieskończenie małą względem Δx, równie jak odległość prostopadła M'Q [**137**], byleby styczna nie była równoległą do osi rzędnych.

W razie spółrzędnych prostokątnych, spółczynnik kątowéj stycznéj jest styczną trynogometryczną kąta, jaki styczna tworzy z osią odciętych

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \text{st MTX}$$

ta styczna trygonometryczna przedstawia więc w tym razie pochodną.

Pochodna równa zeru dla pewnéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, przedstawia styczną równoległą do osi odciętych w punkcie odpowiednim téj wartości odciętéj : w rzeczy saméj, spółczynnikiem kątowym téj stycznéj jest zero i odwrotnie [**45**].

Pochodna równa nieskończoności, przedstawia styczną równoległą do osi rzędnych [**45**]. Jedno i drugie może mieć miejsce tylko w szczególnych punktach, chybaby krzywa zmieniła się w prostą przedstawiającą wartość stałą zmiennéj niezależnéj lub funkcji.

142. Prędkość punktu ruchomego. Uważając ruch punktu na płaszczyźnie lub w przestrzeni, zwracamy naprzód uwagę na *czas* upłyniony od pewnéj chwili, i na *drogę* przebieżoną w tym czasie. Jeżeli stosunek drogi przebieżonéj do czasu upłynionęgo jest zawsze ten sam, ruch nazywamy jednostajnym, a stosunek ten *prędkością* : prędkość jest więc stałą w ruchu jednostajnym, punkt przebiega zawsze te samą drogę w tym samym czasie, prędkość wyraża także drogę przebieżoną w jednostce czasu.

Lecz jeżeli ruch nie jest jednostajnym, jeżeli stosunek drogi przebieżonéj do czasu upłynionego jest ciągle zmiennym, *prędkością punktu ruchomego w danéj chwili nazywamy granicę stosunku drogi przebieżonéj do czasu upłynionego od téj chwili, gdy czas ten jest nieskończenie małym.*

Droga przebieżona jest funkcją ciągłą czasu; granica powyższego stosunku jest pochodną téj funkcji; prędkość więc jest pochodną drogi względem czasu.

Oznaczmy przez t czas liczony od pewnéj chwili, s drogę przebieżoną w tym czasie, i niech będzie

$$s = f(t)$$

równaniem ruchu punktu.

W czasie Δt punkt przebieży drogę Δs, więc

$$\text{gr}\,\frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

nazywamy prędkością punktu po czasie t.

Jeżeli ruch jest jednostajnym, stosunek drogi do czasu jest zawsze stałym; czy weźmiemy drogę S przebieżoną w czasie T skończonym, czy drogę Δs przebieżoną w czasie Δt nieskończenie małym, mamy zawsze

$$\frac{S}{T} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

oznaczając przez v prędkość.

W ogóle, dla jakiegokolwiek ruchu, prędkość wyrażoną będzie przez

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt}$$

prędkość ta jest w ogóle funkcją czasu: zmienną, jeżeli ruch jest zmiennym, stałą, jeżeli ruch jest jednostajnym.

Można powiedzieć, że *pochodna oznacza prędkość, z jaką się zmienia funkcja względem zmiennéj niezależnéj* : bo jeżeli dla ciągle równych przyrostków zmiennéj niezależnéj, funkcja otrzymuje przyrostki większe lub mniéjsze, pochodna czyli granica stosunku tych przyrostków do przyrostku stałego zmiennéj niezależnéj jest większą lub mniéjszą: funkcja zwiększa się *prędzéj*, jeżeli pochodna jest większą, *wolniéj* jeżeli pochodna jest mniéjszą.

Pojęcie pochodnéj jest również nierozłącznèm od pojęcia funkcji, jak pojęcie prędkości od pojęcia ruchu, lub stycznéj od krzywéj. Tak jak każda krzywa ma swoją styczną, każden ruch swoją prędkość, tak każda funkcja ciągła ma swoją pochodnę.

143. Cel rachunku różniczkowego. Rachunek różniczkowy ma na celu wyznaczenie pochodnéj, lub różniczki dla wszelkiéj funkcji danéj, jako też badanie własności i związków zachodzących pomiędzy funkcjami i ich pochodnemi lub różniczkami. Geometrycznie możnaby powiedzieć, że rachunek różniczkowy jestto teorja ogólna prostych stycznych do krzywych.

Widzieliśmy powyżéj [**139**], że *pochodna* i *różniczka* funkcji odpowiadają jednemu i temu samemu pojęciu: pochodna jest ilorazem dwóch różniczek, różniczki funkcji i różniczki zmiennéj niezależnéj. Pochodna jest ilością skończoną, różniczka nieskończenie małą: używając pochodnéj postępujemy według metody granic; używając różniczki według równoważnéj z metodą granic metody nieskończenie małych. Znając pochodnę, znamy różniczkę i odwrotnie. Możnaby przeprowadzić cały rachunek różniczkowy nie wspominając o różniczce, tak jak z drugiéj strony nic łatwiéjszego, jak zastąpić wyrażenie pochodnéj, przez iloraz dwóch różniczek: lecz metoda nieskończenie małych daje nam tyle ułatwień w rachunku za pomocą twierdzień podanych w poprzedzającym rozdziale, że użycie różniczek przedstawia liczne korzyści, których innym sposobem osiągnąć niepodobna.

Różniczkować funkcję jestto szukać jéj pochodnéj lub różniczki. Częstokroć w dalszém rozwinięciu rachunku lub jego zastosowaniach, uważają różniczkę wprost jako przyrostek nieskończenie mały funkcji, odpowiadający przyrostkowi nieskończenie małemu zmiennéj niezależnéj, jakkolwiek przyrostek funkcji różni się od jéj różniczki o ilość nieskończenie małą wyższego rzędu, jak różniczka [**139**] : jestto tylko skrócenie w wyrażeniu, usprawiedliwione tém, że granica stosunku lub summy jednych, równa jest granicy stosunku lub summy drugich; więc gdy granicę tę mamy ostatecznie na celu, podstawienie jednych zamiast drugich, nie wpływa na ścisłość wypadku [**125**]; lecz w innych razach trzeba pilnie zwracać uwagę na tę różnicę.

Własności ogólne funkcyj pochodnych.

144. Twierdzenie I. *Jeżeli pochodna funkcji jest dodatna dla pewnéj wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj, funkcja się zwiększa; jeżeli pochodna ta jest odjemna, funkcja się zmniejsza, gdy zwiększamy zmienną niezależną i odwrotnie.*

Niech będzie funkcja

$$y = f(x)$$

jeżeli dla pewnéj wartości szczególnéj x_1 zmiennéj niezależnéj x

$$f'(x_1) > 0$$

powiadam, że y się zwiększa, gdy x staje się większém od x_1; jeżeli

$$f'(x_1) < 0$$

powiadam że y się zmniejsza.

W rzeczy saméj mamy [**139**]

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon] \Delta x$$

a że ε jest nieskończenie małém względem $f'(x)$ znak przyrostku Δy będzie ten sam, co znak pochodnéj $f'(x)$, ponieważ przypuszczamy Δx dodatném, zwiększając zmienną niezależną. Jeżeli więc dla pewnéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj x_1 znak ten jest dodatnym, przyrostek Δy dodatny funkcji, wskazuje że funkcja się zwiększa; jeżeli przyrostek Δy jest odjemnym, funkcja się zmniejsza.

Odwrotnie, jeżeli funkcja się zwiększa gdy zwiększamy zmienną niezależną, pochodna jest dodatną : bo przyrostki Δy i Δx są wtedy obadwa dodatnemi, ich stosunek więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

jest również dodatnym, a że ε jest nieskończenie małém względem $f'(x)$, więc pochodna $f'(x)$ jest dodatną. Gdyby funkcja się zmniejszała, Δy byłoby odjemném dla dodatnego Δx, a więc i pochodna $f'(x)$ musiałaby być odjemną.

Wniosek. *Jeżeli pochodna funkcji jest dodatna dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj* x *zawartych pomiędzy* x_0 i X, *funkcja ciągle się powiększa, gdy* x *przechodzi od* x_0 *do* X; wartość funkcji Y, odpowiadająca wartości X zmiennéj niezależnéj, jest większą od wartości y_0, odpowiadającéj wartości x_0.

145. Twierdzenie II. *Jeżeli pochodna funkcji jest równa zeru dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj zawartych pomiędzy pewnemi jéj wartościami szczególnemi, funkcja jest stałą pomiędzy temi granicami.*

Jeżeli mamy ciągle

$$f'(x) = 0$$

gdy x zmienia się od x_0 do X, powiadam że

$$f'(x)$$

będzie równą stałéj dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x, zawartych pomiędzy x_0 i X.

W rzeczy saméj, równanie

$$\Delta y = (f'(x) + \varepsilon)\Delta x$$

staje się wtedy

$$\Delta y = \varepsilon\Delta x$$

Oznaczywszy przez x_1 i x_2 jakiekolwiek dwie wartości x zawarte pomiędzy x_0 i X, przez y_1 i y_2 wartości odpowiednie funkcji, mamy

$$y_1 - y_2 = \Sigma\,\Delta y = \Sigma\varepsilon\Delta x$$

oznaczając przez $\Sigma\,\Delta y$ summę przyrostków funkcji, gdy x zmienia się od x_1 do x_2. Lecz

$$\Sigma\,\Delta x = x_2 - x_1$$

jest skończoną; więc pomnożywszy każdą z nieskończenie małych Δx przez nieskończenie małą ε, summa tak otrzymana będzie w granicy zerem [**123**] :

$$\Sigma\,\varepsilon\Delta x = 0$$

a zatém

$$y_2 = y_1$$

W podobny sposób dowiedlibyśmy, że wszelkie wartości szczególne funkcji y, odpowiadające wartościom zmiennéj niezależnéj zawartym pomiędzy x_0 i X, są sobie równe, czyli że funkcja się nie zmienia, zmieniając x od x_0 do X,

c. b. d. d.

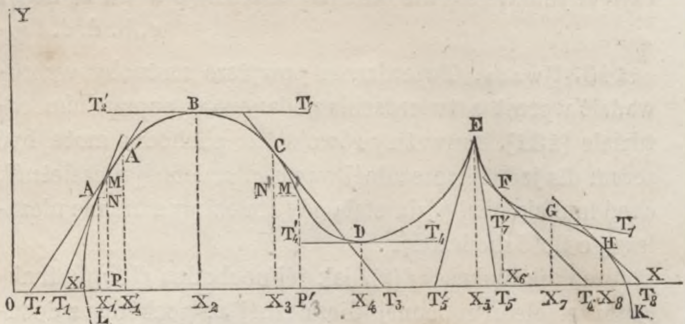
146. Uwaga. Twierdzenie powyższe możnaby wyprowadzić wprost z twierdzenia podanego w poprzednim rozdziale [**131**]. Zauważmy również, że pochodna może być zerem dla jednéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, choć funkcja nie będzie stałą gdy zmienimy zmienną niezależną o ilość skończoną.

Jeżeli tak funkcja $f(x)$, jak jéj pochodna $f'(x)$ są funkcjami ciągłemi zmiennéj niezależnéj x, pochodna z dodatnéj nie może stać się odjemną, lub odwrotnie, nie przechodząc przez wartość zero; więc *dla wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj, dla któréj funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniéjszać lub odwrotnie, pochodna musi być równą zeru.*

Odwrotnie, nie można powiedzieć żeby dla wartości szczególnéj x, dla któréj pochodna jest równą zeru, funkcja koniecznie miała przestać się zwiększać a zacząć zmniéjszać lub przeciwnie : bo pochodna, będąc nawet ciągłą, może z dodatnéj stać się zerem, a późniéj znów dodatną nie przybierając wartości odjemnych, i przeciwnie. Lecz *jeżeli pochodna nie przestając być ciągłą, z dodatnéj staje się odjemną lub przeciwnie, przechodząc przez wartość zero, funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniéjszać lub przeciwnie, dla wartości odpowiedniéj zmiennéj niezależnéj.*

Wartości te szczególne nazwanemi zostały *największościami* lub *najmniéjszościami* funkcji, bo wartości te są większemi w pierwszym razie, mniéjszemi w drugim, od wartości sąsiednich, odpowiadających przyrostkowi dodatnemu i odjemnemu zmiennéj niezależnéj.

147. Własności funkcyj pochodnych zawarte w powyższych twierdzeniach, można uczynić widocznemi, przedstawiając je geometrycznie w następujący sposób :



fig, 62.

Niech będzie krzywa LK przedstawiająca funkcję

$$y = f(x)$$

wiemy, że pochodna przedstawioną jest przez spółczynnik kątowy stycznéj do krzywéj czyli, w razie spółrzędnych prostokątnych przez styczną trygonometrzczną kąta, jaki styczna do krzywéj tworzy z osią odciętych; kąty te będziemy liczyć jak zwykle od strony osi odciętych dodatnych, ku rzędnym dodatnym.

Gdy odciętę x, powiększamy od X_0 ku X_2, kąt AT_1X jaki styczna AT_1 tworzy z osią OX jest naprzykład ciągle ostrym; styczna trygonometryczna tego kąta dodatną : w rzeczy saméj, nadając odciętéj przyrostek X_1P rzędna AX_1, czyli funkcja y powiększa się, przyrostek jéj MN, czyli Δy jest dodatnym, pochodna czyli

$$\text{gr}\,\frac{\text{MN}}{\text{AN}} = \text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{gr st MAN} = \text{st MT}_1\text{X}$$

jest dodatną.

Przypuszczamy że pochodna jest ciągłą i że się ciągle zmniéjsza; kąt stycznéj do krzywéj z osią odciętych zmniéjszając się, staje się równym zeru w punkcie B, w którym styczna jest równoległą do osi; styczna trygonometryczna tego kąta, czyli pochodna funkcji w punkcie B przybiera wartość szczególną zero, gdy $x = \text{OX}_2$. Powiększając odciętą ku X_4, kąt CT_3X stycznéj z osią jest rozwartym, styczna trygonometryczna tego kąta, czyli pochodna odjemną; przyrostek CN' rzędnéj CX_3, gdy przechodzimy do rzędnéj następującéj MP'_3 jest odjemnym : rzędna więc, czyli funkcja y zmniéjsza się, gdy powiększamy odciętą x od X_2 ku X_3. Wartość więc szczególna $x = OX_2$ odpowiada wartości pochodnej równéj zero, po za którą pochodna z dodatnéj staje się odjemną t. j funkcja przestaje się zwiększać, a zaczyna zmniéjszać : wartość więc funkcji $y_2 = BX_2$ jest *największością* (choć mogą być wartości funkcji, jak EX_5 większe od niéj).

Podobnież w punkcie D, w którym styczna jest równoległą do osi, funkcja przestaje się zmniéjszać, a zaczyna zwiększać : wartość $y_4 = DX_4$ funkcji jest *najmniéjszością* (choć mogą być wartości funkcji od niéj mniéjsze, jak Hx_8).

Widzimy zresztą, że w punkcie E kąt stycznéj z osią, z ostrego ET'_5X staje się nagle rozwartym ET_5X : styczna trygonometryczna tego kąta z dodatnéj, staje się nagle odjemną; czyli pochodna funkcji dla wartości $x = x_5$ z dodatnéj staje się odjemną, nie przechodząc przez wartości pośrednie, nie stając się zerem. Jakkolwiek funkcja nie przestaje być ciągłą dla téj wartości, ciągłość pochodnéj jest zerwaną. Funkcja może być więc ciągłą, jakkolwiek pochodna nie jest funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj ; choć odwrotnie, widocznéin jest z określenia pochodnéj, że gdy pochodna jest funkcją ciągłą, funkcja musi być zawsze ciągłą.

Przeciwnie, w punkcie G styczna $T_7T'_7$ jest równoległą do osi, lecz kąt jaki styczna tworzy z osią przed i poza punktem G, nie przestaje być rozwartym : styczna trygonometryczna tego kąta, odjemna w punkcie F, zmniéjsza się odjemnie ku G, gdzie staje się zerem, a późniéj, nie przestając być ciągłą, znów się powiększa odjemnie ku H. Pochodna więc funkcji staje się zerem dla wartości $x = x_7$, lecz pozostaje odjemną dla wartości x mniéjszych i większych od x_7 nie przestając być ciągłą : funkcja nie przestaje się zmniéjszać pomiędzy wartościami x_5 i x_8 zmiennéj niezależnéj. Wartość funkcji $y_7 = GX_7$ nie jest więc najmniéjszością, ani największością funkcji, jakkolwiek pochodna jéj jest równą zeru; podobnież i wartość $y_5 = EX_5$ nie jest, ani największością, ani najmniéjszością funkcji, jakkolwiek funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniéjszać dla téj wartości. Wartości takie i tym podobne funkcji, nazwane zostały *wartościami nadzwyczajnemi*, punkta E i G *punktami nadzwyczajnemi* krzywéj : a mianowicie punkt E *punktem złamania*; punkt G *punktem przegięcia*.

Funkcja przedstawiona przez prostę równoległą do osi odciętych, jest stałą : styczna zlewa się z samą funkcją, jest równoległą do osi, czyli tworzy z osią kąt, którego styczna trygonometryczna jest zero.

Funkcja przedstawiona przez prostą prostopadłą do osi odciętych, odpowiada jednéj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj, dla któréj pochodna, jako styczna kąta prostego, jest nieskończenie wielką.

148. Twierdzenie III. *Dwie funkcje jednéj i téj saméj zmiennéj niezależnéj, których różnica jest stałą, mają pochodne i różniczki równe.*

Niech będą dwie funkcje

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x)$$

zmiennéj niezależnéj x, takie, że dla wszelkich wartości x zawartych pomiędzy x_0 i X

$$u - v = c$$

oznaczając przez c ilość stałą ; powiadam że

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

dla wszelkich wartości x zawartych pomiędzy x_0 i X.

W rzeczy saméj, nadawszy zmiennéj x, pomiędzy powyższemi wartościami, przyrostek Δx, i nazwawszy Δu, Δv odpowiednie przyrostki u i v, mamy z założenia

$$u + \Delta u - v - \Delta v = c$$

odejmując

$$u - v = c$$

otrzymamy

$$\Delta u - \Delta v = 0$$

a zatém

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Granice powyższych stosunków będą także sobie równe [**90**], czyli

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

lub

$$du = dv \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Wniosek. *Dwie funkcje równe pomiędzy pewnemi granicami zmiennéj niezależnéj, mają pochodne i różniczki równe pomiędzy temi granicami.*

Geometrycznie, dwie krzywe LK i L′K′ takie, że pomiędzy punktami L i K, L′ i K′ wszystkie części rzędnych AA′, BB′ ... zawarte pomiędzy jedną a drudą krzywą są sobie równe, mają styczne w punktach odpowiednich A i A′ B i B′ ... równoległe.

Dwie krzywe, mające łuk wspólny, mają widocznie dla tego łuku styczne wspólne.

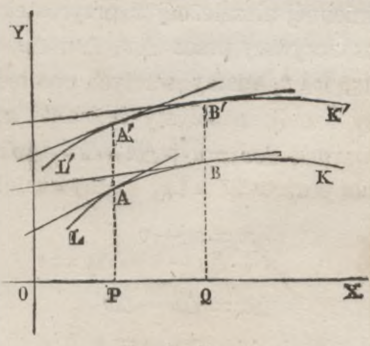


fig. 63

149. Twierdzenie iv. *Odwrotnie, dwie funkcje, których* *pochodne lub różniczki są sobie równe, różnić się mogą tylko o ilość stałą.*

Niech będą dwie funkcje

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x)$$

takie, że dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj x, zawartych pomiędzy x_0 i X

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} \qquad \text{czyli} \qquad du = dv$$

powiadam że

$$u - v = \varphi(x) - \psi(x) = c$$

oznaczając przez c ilość stałą, która w szczególnym przypadku może być zerem.

W rzeczy saméj, oznaczmy przez

$$w = u - v$$

nadawszy zmiennéj niezależnéj x przyrostek nieskończenie mały Δx, oznaczywszy przez Δw, Δu, Δv przyrostki odpowiednie w, u i v, mamy

$$w + \Delta w = u + \Delta u - v - \Delta v$$

odejmując

$$w = u - v$$

pozostanie

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v$$

czyli

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

więc w granicy

$$\frac{dw}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

czyli z założenia

$$\frac{dw}{dx}=0$$

a więc na zasadzie Tw. II w jest stałém dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj, dla których z założenia równość $\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}$, czyli $du=dv$ ma miéjsce. c. b. d. d.

Geometrycznie : krzywe których styczne w punktach ostatecznych rzędnych odpowiadających jednym i tym samym odciętym, są równoległe, mają części rzędnych zawarte pomiędzy jedną krzywą a drugą równe. Krzywe te posunięte o różnicę rzędnych stałą, przystają do siebie.

Uwaga. Stała c, o którą się różnią dwie funkcyje u i v, może być jakąkolwiek, byle nie zależała od zniennéj niezależnéj [2]; ztąd nazywają ją *stała dowolna.*

150. Twierdzenie v. *Jeżeli pochodna jednéj funkcji jest ciągle większą od pochodnéj drugiéj funkcji jednéj i téj saméj zmiennéj, przyrostek pierwszéj funkcji odpowiadający przyrostkowi skończonemu zmiennéj niezależnéj, jest większym od przyrostka drugiéj funkcji, odpowiadającego temu samu przyrostkowi skończonemu zmiennéj niezależnéj.*

Niech będą dwie funkcje

$$u=\varphi(x) \qquad v=\psi(x)$$

takie, że dla wszelkich wartości x zawartych pomiędzy x_0 i X

$$\frac{du}{dx}>\frac{dv}{dx}$$

oznaczając przez skrócenie

$$u_0 = \varphi(x_0) \quad U = \varphi(X) \quad v_0 = \psi(x_0) \quad V = \psi(X)$$

powiadam że

$$U - u_0 > V - v_0$$

W rzeczy saméj, podzieliwszy różnicę $X - x_0$ na coraz zwiększającą się liczbę części równych Δx, oznaczywszy przez $\Delta u_1, \Delta u_2 \ldots \Delta v_1, \Delta v_2 \ldots$ odpowiednie przyrostki funkcyj u i v mamy

$$U - u_0 = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots$$
$$V - v_0 = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots$$

mamy również

$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \varepsilon \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{\Delta v}{\Delta x} - \eta$$

oznaczając przez ε, η nieskończenie małe zdążające do zera wraz z Δx; a że

$$\frac{du}{dx} > \frac{dv}{dx}$$

więc

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} > \frac{\Delta v}{\Delta x} + (\varepsilon - \eta)$$

czyli

$$\Delta u > \Delta v + (\varepsilon - \eta)\Delta x$$

a więc w szczególności

$$\Delta u_1 > \Delta v_1 + (\eta - \varepsilon)_1 \Delta x$$
$$\Delta u_2 > \Delta v_2 + (\eta - \varepsilon)_2 \Delta x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

dodając, i zważając że summa drugich stron, zdąża do téj saméj granicy co summa $\Delta v_1 + \Delta v_2 + \ldots$ [**124**], czyli do granicy $V - v_0$, gdy Δx zdąża do zera, bo $(\varepsilon - \eta)_1 \Delta x$, $(\eta - \varepsilon)_2 \Delta x$ są nieskończenie małemi drugiego rzędu [**119**] otrzymamy, przechodząc do granicy

$$U - u_0 > V - v_0 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Wniosek. W szczególności, jeżeli dwie funkcyje u i v mają wartość wspólną

$$u_0 = v_0$$

a pochodna jednéj jest większą od pochodnéj drugiéj

$$\frac{du}{dx} > \frac{dv}{dx}$$

dla wszelkich wartości x pomiędzy x_0 i X, to

$$U > V$$

Dla tego mówimy że funkcja, któréj pochodna jest większą, zwiększa się *prędzéj*, od téj któréj pochodna jest mniéjszą : przyrostki pierwszéj są większemi od przyrostków odpowiednich drugiéj.

151. Twierdzenie VI. *Iloraz różniczek dwóch funkcyj jest równym pochodnéj jednéj funkcji względem drugiéj, uważanéj za zmiennę niezależną.*

Niech będą dwie funkcje zmiennéj niezależnéj x

$$(1) \qquad u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x)$$

i ich różniczki

$$(2) \qquad du = \varphi'(x)\,dx \qquad dv = \psi'(x)\,dx$$

Rugując x z dwóch równań (1), otrzymać możemy

$$(3) \qquad u = f(v)$$

powiadam że podzieliwszy pierwsze równanie (2) przez drugie, otrzymamy

$$\frac{du}{dv}=f'(v) \quad \text{czyli} \quad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=f'(v)$$

oznaczając przez $f'(v)$ pochodnę funkcji $f(v)$, w któréj v uważamy jako zmienną niezależną.

W rzeczy saméj, mamy z określenia

$$f'(v)=\mathrm{gr}\,\frac{\Delta u}{\Delta v}$$

a to jakkolwiek weźmiemy przyrostek Δv, byleby Δu było przyrostkiem odpowiednim Δv.

Weźmiemy Δv w szczególności odpowiedniém przyrostkowi Δx : w takim razie wiemy że [**139**]

$$\Delta u = du + \varepsilon\Delta x$$
$$\Delta v = dv + \varepsilon'\Delta x$$

gdzie ε, ε' oznaczają nieskończenie małe dążące do zera razem z Δx; a więc :

$$\mathrm{gr}\,\frac{\Delta u}{\Delta v}=\mathrm{gr}\,\frac{du+\varepsilon\Delta x}{dv+\varepsilon'\Delta x}=\frac{du}{dv}$$

więc różniczki zmienne du i dv, w ogóle nieskończenie małe jednakowego rzędu, tego samego co Δx [**139**], mają stosunek skończony, równy pochodnéj u względem v, uważając v za zmienną niezależną .

$$\frac{du}{dv}=\mathrm{gr}\,\frac{\Delta u}{\Delta v}=f'(v)$$

to jest, $\frac{du}{dv}$ będzie tém samém, czy uważać będziemy dv, jako różniczkę zmienną funkcyi v, czyli też jako przyrostek stały zmiennéj niezależnéj v.

152. Pochodna funkcji funkcji. Z twierdzenia powyższego z łatwością wyprowadzić możemy prawidło, jak otrzymać pochodnę funkcji funkcji [**12**], nie sprowadzając jéj do funkcji pojedynczéj.

Niech będzie funkcja u funkcji v zmiennéj niezależnéj x

$$u = f(v) \qquad v = \psi(x)$$

możnaby podstawiając za v wartość

$$u = f[\psi(x)] = \varphi(x)$$

otrzymać wprost funkcję u wyrażoną przez x, i szukać jéj pochodnéj : lecz można również wyrazić tę pochodnę przez pochodnę u względem v, jako zmiennéj niezależnéj t. j. przez $f'(v)$, i przez pochodnę $\psi'(x)$ funkcji v. W rzeczy saméj

$$du = f'(v)\, dv$$

z twierdzenia poprzedzającego; a więc

$$\frac{du}{dx} = f'(v) \frac{dv}{dx} = f'(v)\, \psi'(x) \tag{1}$$

pochodna więc funkcji funkcji równa się iloczynowi pochodnéj funkcji danéj względem funkcji uważanéj za zmienną niezależną, przez pochodnę téj ostatniéj względem zmiennéj niezależnéj.

Równanie (1) piszą niekiedy w następujący sposób

$$(3) \qquad du = \frac{du}{dv}dv$$

bo $f'(v) = \frac{du}{dv}$; równanie to (3) jest tożsamością uważając

du i dv za różniczki funkcji u i v względem x; lecz jest wyrażeniem powyższego twierdzenia lub prawidła, uważając:

du polewéj stronie równania za różniczkę funkcji u,

$\frac{du}{dv}$ za pochodnę u uważanego za funkcję zmiennéj niezależnéj v; dv znajdujące się w mianowniku jest w takim razie stałym przyrostkiem zmiennéj v [**139**]

dv nakoniec przez które jest pomnożoną pochodna $\frac{du}{dv}$ za różniczkę zmienną funkcji v.

Dwa te sposoby uważania równania (3), różnią się więc znaczeniem różniczek wchodzących w skład jego: nie używamy osobnego znakowania w tych dwóch razach, bo jakeśmy udowodnili powyżéj, nieskończenie małe różniczki odpowiednie w jednym i drugim razie, różnią się od siebie o nieskończenie małe ilości względem nich samym, tak, że stosunki ich pozostają temi samemi w granicy [**122**].

Twierdzenie to z łatwością uogólnić można, rozciągając je do ilukolwiek funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj. Niech będą zmienne

$$u, \quad v, \quad w, \ldots \quad z, \quad x$$

zależne od siebie za pomocą związków

$$u = f(v), \quad v = \varphi(w), \ldots \quad z = \psi(x)$$

Jedną z tych zmiennych np. x możemy uważać za zmienne niezależną, pozostałe będą jéj funkcjami.

Mamy na zasadzie poprzedzającego

$$du = f'(v)\,dv \qquad dv = \varphi'(w)\,dw \ldots dz = \psi'(x)\,dx$$

a więc

$$du = f'(v)\,\varphi'(w) \ldots \psi'(x)\,dx$$

czyli

$$\frac{du}{dx} = f'(v)\,\varphi'(w) \ldots \psi'(x)$$

co piszemy niekiedy

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dw} \ldots \frac{dz}{dx}$$

przyczém zrobić należy to samo zastrzeżenie pod względem znakowania różniczek i pochodnych, jakto, cośmy uczynili dla dwóch funkcji.

153. Pochodna funkcji odwrotnéj. Niech będzie funkcja

(1) $$u = f(v)$$

gdzie w ogólności tak u, jak v, mogą być funkcyjami pewnéj zmiennéj niezależnéj x. Wyciągnąwszy z równania (1) v wyrażone przez u lub przypuszczając działanie to wykonane, otrzymamy

$$v = F(u)$$

funkcję $F(u)$ nazywamy *odwrotną* funkcji $f(v)$.

Mamy widocznie

$$du = f'(v)\,dv \qquad dv = F'(v)\,du$$

oznaczając przez $f'(v)$ pochodną $f(v)$ względem v, a przez $F'(u)$ pochodną $F(u)$ względem u, wziętą tak jakby u było zmienną niezależną: a zatém mnożąc powyższe równania przez siebie, znosząc czynnik wspólny $dxdy$ otrzymamy

$$f'(v)F'(u)=1$$

czyli

$$F'(u)=\frac{1}{f'(v)}$$

pochodna funkcji odwrotnéj, jest odwróceniem pochodnéj funkcji danéj.

ROZDZIAŁ VIII

ROZNICZKOWANIE FUNKCYJ ZASADNICZYCH

JEDNÉJ ZMIENNÉJ NIEZALEŻNÉJ.

Określenie. — Różniczki i pochodne funkcyj algebraicznych. — Summa. — Iloczyn. — Iloraz.—Potęga. — Wielomian alebraiczny. — Różniczki i pochodne funkcyj przestępnych. — Funkcje : logarytmowa — Wykładnicza — Trygonometryczne — Kołowe. — Zbiór różniczek i pochodnych zasadniczych.

154. *Różniczkować funkcję*, jestto mając daną funkcję, szukać jéj pochodnéj lub różniczki : znając pochodną znamy różniczkę i odwrotnie [**139**].

Otrzymywanie pochodnych i różniczek wszystkich znanych nam dotąd funkcyj sprowadza się, jak zobaczymy poniżéj, do znajomości pochodnych i różniczek pewnéj liczby funkcyj prostych, saméj zmiennéj niezależnéj, lub utworzonych w sposób prosty z innych funkcyj zmiennéj niezależnéj. Te różniczki i pochodne nazywać będziemy *zasadniczemi* i zajmiemy się w tym rozdziale ich wyznaczeniem.

155. Różniczki i pochodne funkcyj algebraicznych. Rozumiéć tu będziemy nietylko funkcje bezwzględnie algebraiczne [**10**], lecz także funkcje utworzone w sposób algebraiczny z innych funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, które mogą być przestępnemi.

Summa. Niech będzie summa algebraiczna:

$$y = \pm u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm \ldots \pm u_n$$

funkcyj u_1 u_2 $u_3 \ldots u_n$ pewnéj zmiennéj niezależnéj x, które to funkcje mogą być jakiemikolwiek algebraicznemi lub przestępnemi; przypuszczamy ich liczbę n skończoną. Nadając zmiennéj niezależnéj x przyrostek nieskończenie mały Δx, oznaczając przez Δu_1, $\Delta u_2, \ldots$ Δu_n przyrostki nieskończenie małe powyższych funkcyj, a przez Δy przyrostek ich summy algebraicznéj, mamy

$$\Delta y = \pm \Delta u_1 \pm \Delta u_2 \pm \Delta u_3 \pm \ldots \pm \Delta u_n$$

a zatém

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta u_1}{\Delta x} \pm \frac{\Delta u_2}{\Delta x} \pm \frac{\Delta u_3}{\Delta x} \pm \ldots \pm \frac{\Delta u_n}{\Delta x}$$

w granicy więc [**138**]:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{du_1}{dx} \pm \frac{du_2}{dx} \pm \frac{du_3}{dx} \pm \ldots \pm \frac{du_n}{dx}$$

czyli

$$dy = \pm du_1 \pm du_2 \pm du_3 \pm \ldots \pm du_n$$

a zatém:

Pochodna summy algebraicznéj równa się summie algebraicznéj pochodnych.

Różniczka summy algebraicznéj równa się summie algebraicznéj różniczek.

156. Iloczyn. 1° Niech będzie a ilością stałą, u funkcją jakąkolwiek zmiennéj niezależnéj x:

$$u = f(x)$$

weźmy pod uwagę funkcję

$$y = au$$

Nadając zmiennéj niezależnéj przyrostek Δx, oznaczając przez Δu, Δy, przyrostki odpowiednie funkcyj u i y, zważając że a jako stała pozostaje tą samą, mamy

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u)$$

czyli odejmując $y = au$:

$$\Delta y = a\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = a$$

przechodząc do granicy, ponieważ gr $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = \dfrac{dy}{du}$,

$$\frac{dy}{du} = a$$

a więc

$$dy = adu$$

$du = f'(x)\,dx$

$\frac{dy}{dx} = a f'(x)$

różniczka iloczynu zmiennéj przez stałą, równa się iloczynowi różniczki zmiennéj, przez stałą.

2° Niech będą dwie funkcje zmiennéj niezależnéj x:

$$u = f(x) \qquad v = \varphi(x)$$

i ich iloczyn

$$y = uv$$

Nadając zmiennéj niezależnéj przyrostek Δx i oznaczając przez Δu, Δv, Δy przyrostki odpowiednie u, v i y mamy

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

dzieląc przez Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x$$

przechodząc do granic i zważywszy że [**117**]

$$\text{gr}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x=0$$

otrzymamy

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

czyli

$$dy=v\,du+u\,dv$$

różniczka iloczynu dwóch funkcyj, równa się summie iloczynów różniczki pierwszéj funkcji przez funkcję drugą, i różniczki drugiéj funkcji przez funkcję pierwszą.

Dzieląc powyższe równanie przez iloczyn $y=uv$, otrzymamy

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}$$

Iloraz różniczki funkcji przez samą funkcję jak $\frac{dy}{y}$, $\frac{du}{u}$, $\frac{dv}{v}$ nazywać będziemy *różniczką logarytmową* : tak jak logarytm iloczynu równym jest summie logarytmów czynników, tak : *różniczka logarytmowa iloczynu równą jest summie różniczek logarytmowych czynników.*

3°. Niech będzie ilekolwiek funkcyj zmiennéj niezależnéj x:

$$u=f(x)\quad v=\varphi(x)\quad w=\psi(x)\ldots z=\mathrm{F}(x)$$

i ich iloczyn

$$y=u.v.w.\;\ldots z$$

Stosując wzór poprzedzający, otrzymamy kolejno :

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{d(vw\ldots z)}{vw\ldots z}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{d(w\ldots z)}{w\ldots z}=\ldots$$

a w końcu

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}+\ldots+\frac{dz}{z}$$

Różniczka logarytmowa iloczynu ilukolwiek czynników równą jest summie różniczek logarytmowych czynników

Aby otrzymać różniczkę zwyczajną, dość jest pomnożyć wzór poprzedzający przez iloczyn $y=uvw\ldots z$

$$dy=vw\ldots zdu+uw\ldots zdv+uv\ldots zdw+\ldots+uvw\ldots dz$$

Pochodna iloczynu ilukolwiek czynników będzie miała wyrażenie

$$\frac{dy}{dx}=vw\ldots z\frac{du}{dx}+uw\ldots z\frac{dv}{dx}+uv\ldots z\frac{dw}{dx}+\ldots+uvw\ldots\frac{dz}{dx}$$

157. Iloraz. Niech będą dwie funkcje zmiennéj niezależnéj x

$$u=f(x) \qquad v=\varphi(x)$$

i ich iloraz

$$y=\frac{u}{v}$$

mamy, mnożąc obiedwie strony przez v

$$vy=u$$

a na zasadzie prawidła na różniczkowanie iloczynu

$$\frac{dv}{v}+\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$$

ztąd

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}$$

różniczka logarytmowa ilorazu równa się różnicy różniczek logarytmowych dzielnéj i dzielnika.

Aby otrzymać różniczkę zwyczajną, pomnóżmy obiedwie strony tego równania przez iloraz $y=\frac{u}{v}$ otrzymamy

$$dy=\frac{du}{v}-\frac{udv}{v^2}$$

czyli

$$dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

różniczka ilorazu (ułamku) *równa się różnicy iloczynów różniczki dzielnéj* (licznika) *pomnożonéj przez dzielnik* (mianownik) *i różniczki dzielnika* (mianownika) *przez dzielnę* (licznik), *podzielonéj przez kwadrat z dzielnika* (mianownika).

Chcąc mieć pochodnę, podzielić należy obie strony, przez dx :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

prawidło pochodnéj ilorazu (ułamku) wysłowić można podobnie jak prawidło różniczki, podstawiając za wyraz « różniczka » wyraz « pochodna ».

158. Potęga. Niech będzie funkcja zmiennéj niezależnéj x:

$$u=f(x)$$

i potęga téj funkcji :

$$y=u^m$$

gdzie m oznacza ilość stałą skończoną. Nadajmy zmiennéj niezależnéj x przyrostek nieskończenie mały Δx; nazwijmy Δu, Δy przyrostki odpowiednie u i y; rózróżnijmy trzy przypadki :

1° m *całkowite dodatne.* Uważając u^m jako iloczyn m czynników równych u, i stosując prawidło różniczkowania iloczynu, otrzymamy

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{du}{u}+\frac{du}{u}+\ldots=m\frac{du}{u}$$

2° m *ułamkowe dodatne.* Jeżeli m jest wymierném, założyć możemy

$$m=\frac{p}{q}$$

gdzie p i q są liczbami całkowitemi dodatnemi ;

$$y=u^{\frac{p}{q}} \quad \text{czyli} \quad y^q=u^p$$

Biorąc więc na zasadzie poprzedzającego dowodzenia, różniczki logarytmowe funkcyj y^q i u^p

$$\frac{d(y^q)}{y^q}=q\frac{dy}{y}$$

$$\frac{d(u^p)}{u^p}=p\frac{du}{u}$$

a że funkcje y^q i u^p są równemi, więc i ich różniczki są równemi:

$$d(y^q) = d(u^p)$$

dzieląc przez $y^q = u^p$

$$\frac{d(y^q)}{y^q} = \frac{d(u^p)}{u^p}$$

więc

$$q\frac{dy}{y} = p\frac{du}{u}$$

czyli

$$\frac{dy}{y} = \frac{p}{q}\frac{du}{u}$$

a więc jeszcze

$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}.$$

W razie gdyby m było niewymiernėm, uważając je jako granicę stosunku wymiernego $\frac{p}{q}$, udowodnilibyśmy w zwykły sposób [**93**] powyższego wzoru.

3° m *całkowite lub ułamkowe, wymierne lub niewymierne, lecz odjemne*. Założmy

$$m = -n$$

gdzie n będzie dodatném;

$$y = u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

czyli

$$y \cdot u^n = 1$$

Stosując prawidło na różniczkowanie iloczynu i zważywszy, że różniczka jedności, jako stałéj, jest zerem, otrzy-

mamy

$$\frac{dy}{y} + \frac{d(u^n)}{u^n} = 0$$

bo u^n jest funkcją zmiennéj x, którą moglibyśmy oznaczyć przez v. Lecz ponieważ n jest dodatném :

$$\frac{d(u^n)}{u^n} = n\frac{du}{u}$$

a więc, podstawiając $n = -m$

$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}$$

Jakąkolwiek więc będzie ilość stała m, dodatną, odjemną, całkowitą, ułamkową, wymierną lub niewymierną, mamy zawsze

$$\frac{dy}{y} = m\frac{du}{u}$$

różniczka logarytmowa potęgi funkcji, równa jest iloczynowi różniczki logarytmowéj saméj funkcji przez wykładnik.

Aby otrzymać różniczkę zwyczajną, pomnóżmy różniczkę logarytmową przez $y = u^m$, otrzymamy

$$dy = mu^{m-1}du$$

różniczka jakiejkolwiek stałéj potęgi funkcji, równa się iloczynowi z wykładnika, przez potęgę zmniéjszoną jednością tejże fnnkcji i przez różniczkę saméj funkcji.

Pochodna będzie równą

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$$

a jeżeli $u=x$, będzie

$$\frac{dx^m}{dx}=mx^{m-1}$$

pochodna jakiejkolwiek stałéj potęgi zmiennéj względem téjże zmiennéj, równa się iloczynowi z wykładnika przez potęgę zmniejszoną jednoscią.

Pierwiastek, będzie szczególnym przypadkiem potęgi, któréj wykładnik jest ułamkowym; i tak

$$d\sqrt[m]{u}=du^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}u^{\frac{1}{m}-1}du=\frac{1}{m}u^{\frac{1-m}{m}}du$$

czyli

$$d\sqrt[m]{u}=\frac{du}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

W przypadku pierwiastku kwadratowego :

$$d\sqrt{u}=\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

Wyrażenia te dobrze jest zatrzymać w pamięci, aby późniéj nie powtarzać ciągle tego samego rachunku.

159. Wielomian algebraiczny. Niech będzie wielomian :

$$y=ax^m+bx^n+cx^p+\dots \tag{1}$$

gdzie $a, b, c\dots, m, n, p\dots$ wyrażają stałe rzeczywiste, całkowite lub ułamkowe, dodatne lub odjemne, wymierne lub niewymierne : mamy zawsze [**155**]

$$dy=d(ax^m)+d(bx^m)+d(cx^p)+\dots$$

czyli [**156**]

$$dy = ad\,(x^m) + b\,.\,d\,(x^n) + c\,.\,d\,(x^p) + \dots$$

lub [**158**]

$$dy = amx^{m-1}dx + bnx^{n-1}dx + cpx^{p-1}dx + \dots$$

a zatém

$$dy = (amx^{m-1} + bnx^{n-1} + cpx^{p-1} + \dots)\,dx$$

będzie różniczką tego wielomianu w którym x oznacza zmiennę niezależną lub funkcję zmiennéj niezależnéj. Pochodną wielomianu (1) względem x, będzie

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = amx^{m-1} + bnx^{n-1} + cpx^{n-1} + \dots$$

Wielomian (2) nazywamy *wielomianem pochodnym* $(1)^{go}$; widzimy że *wielomian pochodny tworzy się z wielomianu danego, mnożąc spółczynniki stałe przez wykładniki odpowiednie zmiennéj, i zmniejszając jednością wykładniki potęg téjże zmiennéj.*

Prawidło to służy dla jakichkolwiek wykładników rzeczywistych; niech będzie np. wielomian

$$y = 3x^4 - 2x^3 + 5\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}$$

wielomian ten możemy napisać

$$y = 3x^4 - 2x^3 + 5x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-2} - 3x^{-\frac{3}{2}}$$

wielomian pochodny będzie więc

$$\frac{dy}{dx}=3.4x^3-2.3x^2+5.\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-4.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}-2.2x^{-2-1}$$
$$+3.\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}$$

czyli

$$\frac{dy}{dx}=12x^3-6x^2+\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{2}}-4x^{-3}+\frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

lub

$$\frac{dy}{dx}=12x^3-6x^2+\frac{10}{3\sqrt[3]{x}}-6\sqrt{x}-\frac{4}{x^3}+\frac{9}{2\sqrt{x^5}}$$

160. Uwaga. Widzimy z powyższego, że:

1° pochodne funkcyj algebraicznych pewnéj zmiennéj, są funkcjami algebraicznemi téjże zmiennéj;

2° wielomian pochodny wielomianu algebraicznego wymiernego, jest wielomianem algebraicznym wymiernym stopnia mniéjszego o jedność od wielomianu danego;

3° wielomian pochodny wielomianu algebraicznego niewymiernego lub zawierającego wyrażenia pierwiastkowe, jest wielomianem algebraicznym niewymiernym lub zawierającym wyrażenia pierwiastkowe.

4° w żadnym razie wielomian pochodny wielomianu algebraicznego, nie może zawierać wyrażeń przestępnych zmiennéj, względem któréj bierzemy pochodne.

Różniczki i pochodne funkcyj przestępnych.

161. Logarytm. Niech będzie funkcja

$$y=\log x$$

gdzie x jest zmienną niezależną, lub funkcją zmiennéj niezależnéj, a y jéj logarytmem wziętym według jakiéjkolwiek zasady, którą nazwiemy a. Przypuszczamy nadto że x zmieniając się przybierać może tylko wartości dodatne, większe od zera. Używając zwykłego znakowania, mamy

$$y+\Delta y=\log(x+\Delta x)$$

ztąd

$$\Delta y=\log(x+\Delta x)-\log x=\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

oznaczywszy przez m stosunek $\frac{x}{\Delta x}$, czyli założywszy

$$\Delta x=\frac{x}{m}$$

m zwiększa się bez granic, (x z założenia jest większém od zera) w miarę jak Δx zdąża do zera; podstawiając otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{m}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

Lecz wiemy [**112**] że,

$$\mathrm{gr}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e=2,718281828459035\ \ldots$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie; więc

$$\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log e$$

czyli pochodna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}$$

lub różniczka

$$(1) \qquad dy = \frac{dx}{x} \log e$$

różniczka logarytmu zmiennéj, równa się ilorazowi różniczki zmiennéj podzielonéj przez zmienną, pomnożonemu przez logarytm liczby e.

Jeżeli logarytm dany jest logarytmem naturalnym

$$y = \mathrm{l}.x$$

którego zasadą jest e

$$\mathrm{l}.e = 1$$

mamy

$$(2) \qquad d.\mathrm{l}x = \frac{dx}{x}$$

różniczka logarytmu naturalnego zmiennéj, równa się ilorazowi różniczki zmiennéj przez samą zmienną

Gdyby x nie było zmienną niezależną, lecz funkcją pewnéj zmiennéj niezależnéj z, pochodna wyrażoną by była przez

$$(3) \qquad \frac{d \log x}{dz} = x \log e \frac{dx}{dz}$$

$$(4) \qquad \frac{d.l.x}{dz} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dz}$$

Użycie rożniczki ma tę zaletę, że we wzorach (1) i (2) zmienna niezależna z może nie być oznaczoną; wzory te służą dla wszelkich zmiennych niezależnych i dają od razu pochodnę dla każdéj z nich.

Ze wzoru (2) widzimy, że stosunek różniczki zmiennéj do samej zmiennej, którem nazwaliśmy *różniczką logarytmową* [**156**] jest w rzeczy samej równym różniczce logarytmu naturalnego zmiennej. Za pomocą tego wzoru moglibyśmy otrzymać wyrażenie różniczki iloczynu, ilorazu, potęgi, i t. p. Bo jeżeli

$$y = uvw \dots z$$

to

$$\mathrm{l}.y = \mathrm{l}.u + \mathrm{l}v + \mathrm{l}w + \dots + \mathrm{l}z$$

a różniczkując według wzoru (2)

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} \dots + \frac{dz}{z}$$

wzór otrzymany powyżej. Lecz dowodzenie poprzednie jest ogólniejszem, gdyż nie określiliśmy jeszcze logarytmów ilości odjemnych, a funkcye u, v, $w \dots z$, mogłyby przybierać wartości odjemne.

Widzimy jeszcze ze wzorów (3) i (4) że pochodna funkcji logarytmowej, jest algebraiczną, choć funkcja sama liczy się do przestępnych. Choć więc funkcje algebraiczne nie mogą mieć pochodnych przestępnych, funkcje przestępne mogą mieć pochodne algebraiczne.

162. Funkcja wykładnicza. Niech będzie funkcja

$$y = a^x$$

gdzie x jest zmienną niezależną, lub funkcją zmiennej niezależnej, a a ilością stałą t. j. niezależną od zmiennej niezależnej; przypuszczamy tu a dodatnem różnem od zera lub jedności, zastrzegając późniejsze uogólnienie wzoru w przypadku a jakiegokolwiek. Biorąc logarytm naturalny, otrzy-

mamy

$$l.y = x\,l.a$$

różniczkując

$$\frac{dy}{y} = dx\,l.a$$

więc

$$dy = ydx.l.a$$

czyli

$$dy = a^x dx.l.a \tag{1}$$

różniczka stałéj podniesionéj do potęgi zmiennéj, równa się téjże saméj potędze, pomnożonéj przez różniczkę zmiennéj i przez logarytm naturalny stałéj.

Jeżeli stała a jest zasadą e układu naturalnego

$$de^x = e^x dx \tag{2}$$

różniczka potęgi e *równa się saméj potędze, pomnożonéj przez różniczkę wykładnika.*

Jeżeli x uważać będziemy za zmienną niezależną, pochodne funkcyi a^x i e^x względem x będą

$$\frac{da^x}{dx} = a^x\,l.a \tag{3}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \tag{4}$$

Pochodna potęgi zmiennéj ilości stałéj, względem wykładnika, jest iloczynem z saméj funkcji przez logarytm naturalny ilości stałéj. Pochodna potęgi e, *względem wykładnika, równa się saméj funkcji.*

Założmy sobie znaleźć *wszelkie funkcje których pochodne równe są samym funkcjom.* Niech będzie z taką funkcją czyniącą zadość równaniu.

$$\frac{dz}{dx}=z$$

czyli

$$\frac{dz}{z}=dx$$

Wiemy że $\frac{dz}{z}$ jest różniczką l. z; zaś dx jest różniczką zmiennéj x; wiemy nadto że funkcje których różniczki są równe, mogą się różnić tylko o ilość stałą [**149**]; więc

$$\mathrm{l}.z=x+c$$

oznaczając przez c stałą dowolną t. j. jakąkolwiek ilość niezależną od x: ztąd

$$z=e^{x+c}=e^ce^x$$

a że e^c jest stałą którą oznaczyć możemy dla skrócenia przez C, więc

$$z=\mathrm{C}e^x$$

wszelka funkcja równa swéj pochodnéj jest iloczynem ze stałéj przez liczbę e, *z wykładnikiem równym zmiennéj niezależnéj.*

Uwaga. Możnaby wyprowadzić różniczkę funkcji wykładniczéj z różniczki logarytmu, używając twierdzenia funkcyj odwrotnych [**153**].

163. Funkcje trygonometryczne czyli **kątowe.** Funkcye te uważać będziemy w powyżéj [**11**] określoném znaczeniu.

1°. Wstawa. Niech będzie

$$y = \text{wst}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj. Używając zwykłego znakowania:

$$y + \Delta y = \text{wst}\,(x + \Delta x)$$

czyli

$$\Delta y = \text{wst}\,(x + \Delta x) - \text{wst}\, x = 2\,\text{wst}\,\frac{\Delta x}{2}\,\text{dos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ztąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{wst}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\text{dos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

przechodząc do granic i zważywszy, że gdy Δx zdąża do zera:

$$\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{gr}\,\frac{\text{wst}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1, \quad \text{gr}\,\text{dos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \text{dos}\, x$$

otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \text{dos}\, x \quad \text{lub} \quad dy = \text{dos}\, x\, dx$$

co można także napisać

$$d.\text{wst}\, x = \text{wst}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

Różniczka wstawy równa się dostawie pomnożonéj przez różniczkę łuku; a uważając x za zmienną niezależną, *pochodna* *wstawy względem łuku równa się dostawie, lub wstawie łuku zwiększonego o* $\frac{\pi}{2}$.

2° Dostawa. Niech będzie

$$y = \operatorname{dos} x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj; postępując jak powyżéj, otrzymamy

$$\Delta y = \operatorname{dos}(x + \Delta x) - \operatorname{dos} x = -2 \operatorname{wst} \frac{\Delta x}{2} \operatorname{wst}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{wst}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{wst}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

a w granicy

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{wst} x \quad \text{czyli} \quad dy = -\operatorname{wst} x\, dx$$

co można także napisać

$$d.\operatorname{dos} x = \operatorname{dos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

Różniczka dostawy równa się wstawie ze znakiem przeciwnym pomnożonéj przez różniczkę łuku; a uważając x za zmiennę niezależną, *pochodna dostawy równa się wstawie ze znakiem przeciwnym, lub dostawie łuku zwiększonego o* $\frac{\pi}{2}$.

3° Styczna. Niech będzie

$$y = \operatorname{st} x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj : stosując wzór

$$\mathrm{st}(a-b)=\frac{\mathrm{st}a-\mathrm{st}b}{1+\mathrm{st}a\,\mathrm{st}b}$$

czyli

$$\mathrm{st}a-\mathrm{st}b=(1+\mathrm{st}a\,\mathrm{st}b)\,\mathrm{st}\,(a-b)$$

i zakładając $a=x+\Delta x,\ b=x$

$$\Delta y=\mathrm{st}\,(x+\Delta x)-\mathrm{st}\,x=[1+\mathrm{st}\,x\,\mathrm{st}\,(x+\Delta x)]\,\mathrm{st}\,\Delta x$$

czyli

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{st}\,\Delta x}{\Delta x}[1+\mathrm{st}\,x\,\mathrm{st}\,(x+\Delta x)]$$

przechodząc do granicy i zważywszy że

$$\mathrm{gr}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx},\quad \mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{st}\,\Delta x}{\Delta x}=1,\quad \mathrm{gr}\,\mathrm{st}\,(x+\Delta x)=\mathrm{st}\,x$$

gdy Δx zdąża do zera, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx}=1+\mathrm{st}^2x=\mathrm{sie}^2x=\frac{1}{\mathrm{dos}^2 x}\quad \text{czyli}\quad dy=\frac{dx}{\mathrm{dos}^2 x}$$

lub

$$d\,\mathrm{st}\,x=\frac{dx}{\mathrm{dos}^2 x}$$

Różniczka stycznéj równa się ilorazowi różniczki łuku przez kwadrat dostawy tegóż łuku; a uważając x za zmienną niezależną : *pochodna stycznéj łuku równa się odwróconemu kwadratowi dostawy tegoż łuku.*

4° Dotyczna. Niech będzie

$$y=\mathrm{dot}\,x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj, otrzymamy w podobny sposób

$$\Delta y = \mathrm{dot}(x+\Delta x) - \mathrm{dot}x = -[1+\mathrm{dot}x\,\mathrm{dot}(x+\Delta x)]\,\mathrm{st}\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\mathrm{st}\,\Delta x}{\Delta x}[1+\mathrm{dot}\,x\,\mathrm{dot}\,(x+\Delta x)]$$

a w granicy

$$\frac{dy}{dx} = -(1+\mathrm{dot}^2x) = -\mathrm{dosie}^2x = -\frac{1}{\mathrm{wst}^2x}$$

czyli

$$dy = -\frac{dx}{\mathrm{wst}^2x} \quad \text{lub} \quad d.\mathrm{dot}\,x = -\frac{dx}{\mathrm{wst}^2x}$$

Różniczka dotycznéj równa się ilorazowi różniczki łuku przez kwadrat z wstawy, ze znakiem przeciwnym; a uważając x za zmiennę niezależną : *pochodna dotycznéj względem łuku równa się odwróconemu kwadratowi wstawy tegóż łuku, ze znakiem przeciwnym.*

Uwaga. Różniczki dostawy i dotycznéj można jeszcze otrzymać z różniczek wstawy i stycznéj, w następujący sposób :

$$d.\mathrm{dos}\,x = d.\mathrm{wst}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)d\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$$

$$-\,\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = -\,\mathrm{wst}\,x\,dx$$

$$d\,\mathrm{dot}\,x = d.\mathrm{st}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\mathrm{dos}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\frac{dx}{\mathrm{wst}^2x}$$

164. Różniczki wszystkich funkcyj trygonometrycznych można również wyprowadzić z różniczki wstawy za pomocą wzorów różniczkowania funkcyj algebraicznych, bo wszystkie funkcje trygonometryczne są, za pomocą 5ciu związków, funkcjami algebraicznemi jednéj z nich: naprzykład wstawy; różniczkować je więc możemy jako funkcje algebraiczne, czyli utworzone w sposób algebraiczny. Aby nie przerabiać powtórnie tych samych różniczek (co czytelnik z łatwością sam uczynić może) wyprowadzimy w ten sposób różniczki siecznéj i dosiecznéj, które wprost moglibyśmy byli bez trudności otrzymać jak powyżéj.

5° Sieczna. Niech będzie

$$y = \text{sie}\, x$$

wiemy że

$$\text{sie}\, x = \frac{1}{\text{dos}\, x}$$

a zakładając

$$\text{dos}\, x = u$$

mamy:

$$y = \frac{1}{u}$$

a zatém [**158**]

$$dy = -\frac{du}{u^2}$$

lecz

$$du = -\text{wst}\, x\, dx;$$

a więc

$$dy = \frac{\text{wst}\, x\, dx}{\text{dos}^2\, x}$$

lub

$$d.\, \text{sie}\, x = \text{st}\, x.\, \text{sie}\, x\, dx$$

6° Dosieczna. Niech będzie

$$y = \text{dosie}\, x$$

otrzymamy w podobny sposób:

$$d.\text{dosie}\, x = d\left(\frac{1}{\text{wst}\, x}\right) = -\frac{d.\text{wst}\, x}{\text{wst}^2 x} = -\frac{\text{dos}\, x\, dx}{\text{wst}^2 x}$$

czyli

$$d.\text{dosie}\, x = -\text{dot}\, x\, \text{dosie}\, x\, dx$$

165. Funkcje kołowe. Funkcje te uważane będą w tém samém znaczeniu jak poprzednie, to jest w znaczeniu określoném powyżéj [**11**]. Funkcje te są następujące:

$$\text{łuk wst}\, x, \quad \text{łuk dos}\, x, \quad \text{łuk st}\, x, \quad \text{łuk dot}\, x, \ldots$$

(łuk którego wstawa równa jest x, łuk którego dostawa równa jest x...).

Lecz wiemy że każdéj wstawie, dostawie, stycznéj, dotycznéj... odpowiadają dwa łuki mniejsze od 2π, a nieskończenie wielka liczba łuków większych od 2π: te ostatnie mają różnice od pierwszych stałe, a więc różniczki równe pierwszym [**148**]; dla uniknienia dwuznaczności dostateczném będzie przypuścić, że funkcje te zmieniają się w sposób ciągły, gdy x zmienia się w sposób ciągły i że każda z tych funkcyj przybiera pewną wartość daną, dla pewnéj danéj wartości zmiennéj x. Przypuścimy np. że

gdy	$x = 0$	$\text{łuk wst}\, x = 0$	a nie π lub 2π ...
gdy	$x = 0$	$\text{łuk dos}\, x = \frac{\pi}{2}$	a nie $\frac{3\pi}{2}$ lub $2\pi + \frac{\pi}{2}$ ...
gdy	$x = 0$	$\text{łuk st}\, x = 0$	a nie π lub 2π ...
gdy	$x = 0$	$\text{łuk dot}\, x = \frac{\pi}{2}$	a nie $\frac{3\pi}{2}$ lub $2\pi + \frac{3\pi}{2}$ ...

i że począwszy od tych wartości x zmienia się w sposób ciągły i łuk również w sposób ciągły, w granicach określonych : każdéj wstawie, dostawie, stycznéj, dotycznéj, odpowiadać będzie mógł jeden tylko łuk.

1° ŁUK WST x. Niech będzie

$$y = \text{łuk wst}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj ; ztąd

$$x = \text{wst}\, y$$

a zatém

$$dx = \text{dos}\, y\, dy = \sqrt{1 - x^2}\, dy$$

czyli

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{lub} \qquad d\,\text{łuk wst}\, y = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

znak pierwiastku wziąść należy ten sam, co znak dos y, to jest dostawy odpowiadającéj wartości zmiennéj x, czyli wstawie danéj.

2° ŁUK DOS x. Niech będzie

$$y = \text{łuk dos}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj ; ztąd

$$x = \text{dos}\, y$$

zatem

$$dx = -\,\text{wst}\, dy = -\sqrt{1 - x^2}\, dy$$

więc

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{czyli} \quad d.\text{łuk dos}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

znak pierwiastku jest ten sam, co znak wstawy odpowiadającéj wartości zmiennéj x, która tu jest dostawą.

3⁰ Łuk st x. Niech będzie

$$y = \text{łuk st}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj; funkcja odwrotna

$$x = \text{st}\, y$$

daje

$$dx = \frac{dy}{\text{dos}^2 y} = (1+x^2)\, dy$$

ztąd

łuk

$$dy = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{czyli} \quad d.\text{st}\, x = \frac{dx}{1+x^2}$$

4⁰ Łuk dot. x. Niech będzie funkcja

$$y = \text{łuk dot}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną lub funkcją zmiennéj niezależnéj; funkcja odwrotna

$$x = \text{dot}\, y$$

daje

$$dx = -\frac{dy}{\text{wst}^2 y} = -(1+x^2)\, dy$$

ztąd

$$dy = \frac{dx}{-(1+x^2)} \quad \text{czyli} \quad d.\text{łuk dot}\, x = \frac{dx}{-(1+x^2)},$$

5⁰ Łuk sie x. Niech będzie

$$y = \text{łuk sie}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną, lub funkcją zmiennéj niezależnéj. Mamy

$$\text{sie}\, y = x$$

a więc

$$dx = d.\text{sie}\, y = \text{st}\, y\, \text{sie}\, y \,.\, dy$$

ztąd

$$dy = \frac{dx}{\text{st}\, y\, \text{sie}\, y} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,.$$

zważywszy że

$$\text{sie}\, y = x \quad \text{st}\, y = \sqrt{x^2-1}$$

otrzymamy

$$d\,\text{łuk sie}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

6⁰ Łuk dosie x. Niech będzie

$$y = \text{łuk dosie}\, x$$

gdzie x jest zmienną niezależną, lub funkcją zmiennéj niezależnéj. Mamy

$$\text{dosie}\, y = x$$

a zatém

$$dx = d.\text{dosie}\, y = -\,\text{dot}\, y\, \text{dosie}\, y\, dy$$

ROZDZIAŁ IX

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCYJ ZŁOŻONYCH I NIEWYRAŹNYCH

JEDNÉJ ZMIENNÉJ NIEZALEŻNÉJ.

Różniczkowanie przez podstawienie. — Różniczkowanie częściowe. — Różniczkowanie funkcyj niewyraźnych. — Rugowanie stałéj dowolnéj. — Równania różniczkowe. — Równania jednoczesne. — Ćwiczenia.

168. Znając różniczki funkcyj prostych, za pomocą twierdzenia na różniczkowanie funkcyj funkcyj, z łatwością możemy różniczkować wszelkie funkcje znane, złożone z funkcyj zasadniczych, których otrzymaliśmy różniczki i pochodne. Najłatwiéj jest postępować według jednego z dwóch następujących sposobów :

1. *Różniczkowanie przez podstawienie.*

169. Różniczkowanie za pomocą *podstawienia* polega na tém, że funkcję daną uważamy jako złożoną z kilku funkcyj prostszych, i otrzymujemy jéj różniczkę wyrażoną przez różniczki tych funkcyj prostszych. Każda z tych ostatnich funkcyj może być znów złożoną z kilku funkcyj jeszcze prostszych i różniczka jéj wyrażoną przez różniczki tych ostatnich i t. d. aż ostatecznie działanie sprowadzoném zostaje do różniczek funkcyj zasadniczych znanych, które podstawione w poprzednie i t. d. dadzą na wypadek różniczkę funkcji danéj, wyrażoną przez różniczkę zmiennéj niezależnéj, pomnożoną przez pewną funkcję zmiennéj niezależnéj. Postępowanie to najlepiéj objaśnić można na szczególnych przykładach:

I. Niech będzie funkcja

$$y = (ax + bx^3)^m - \sqrt{a + bx + cx^2}$$

Załóżmy

$$ax + bx^3 = u \qquad a + bx + cx^2 = v$$

wyrażenie dane staje się wielomianem algebraicznym

$$y = u^m - v^{\frac{1}{2}}$$

którego różniczka [**159**] wyrażoną jest przez

$$dy = mu^{m-1}\,du - \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}dv = mu^{m-1}\,du - \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

Lecz u i v są także wielomianami algebraicznemi, a więc:

$$du = adx + 3bx^2dx = (a + 3bx^2)\,dx$$
$$dv = bdx + 2cxdx = (b + 2cx)\,dx$$

podstawiając za u, v, du, dv, wartości, otrzymamy

$$dy = \left[m(ax+bx^3)^{m-1}(a+3bx^2) - \frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\right]dx.$$

Zwykle działanie powyższe wykonywa się w następujący sposób:

$$d[(ax+bx^3)^m - \sqrt{a+bx+cx^2}] = d.(ax+bx^3)^m - d.\sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$= m(ax+bx^3)^{m-1}\,d(ax+bx^3) - \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+xc^2}}$$

$$= \left[m(ax+bx^3)^{m-1}(a+3bx^2) - \frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\right]dx$$

II. Niech będzie funkcja

$$y = \mathrm{l.\,łuk\ wst}\sqrt{x}$$

(logarytm naturalny łuku którego wstawa jest równa $\sqrt{x}$).

Założmy

$$\text{łuk wst}\sqrt{x} = u$$

$$y = \mathrm{l.}\,u$$

ztąd

$$dy = \frac{du}{u}$$

Założmy powtóre

$$\sqrt{x} = v$$

$$u = \text{łuk wst}\, v$$

ztąd [**167**]

$$du = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

Lecz

$$dv = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \cancel{\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

podstawiając, otrzymamy

$$du = \cancel{\frac{dx}{2x^2\sqrt{1-x}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}\,.\sqrt{1-x}}$$

czyli

$$dy = \cancel{\frac{dx}{2x^2\sqrt{1-x}\ \text{łuk wst}\sqrt{x}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}\,\text{ar}}$$

Zwykle działanie powyższe wykonywa się w następujący sposób:

$$d(\text{l.łuk wst}\sqrt{x}) = \frac{d.\text{łuk wst}\sqrt{x}}{\text{łuk wst}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\ \text{łuk wst}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{dx}{2x^2\sqrt{1-x}\ \text{łuk wst}\sqrt{x}}$$

III. Niech będzie do zróżniczkowania

$$y = \frac{x^2-ax+b}{(m-x)^2} + \text{l}.(m-x)$$

$$dy = \frac{(m-x)^2d(x^2-ax+b)-(x^2-ax+b)d(m-x)^2}{(m-x)^4} + \frac{d(m-x)}{m-x}$$

$$= \frac{(m-x)^2(2x-a)+2(x^2-ax+b)\ (m-x)}{(m-x)^4}dx - \frac{dx}{m-x}$$

$$= \frac{(m-x)(2x-a)+2(x^2-ax+b)-(m-x)^2}{(m-x)^3}dx$$

$$= \frac{x^2+(a-4m)x+m^2+am-2b}{(x-m)^3}dx$$

IV. Niech będzie do zróżniczkowania

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{łuk dos} \frac{b + a \operatorname{dos} x}{a + b \operatorname{dos} x}$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times - \frac{d\left(\frac{b + a \operatorname{dos} x}{a + b \operatorname{dos} x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{b + a \operatorname{dos} x}{a + b \operatorname{dos} x}\right)^2}}$$

$$= - \frac{(a + b \operatorname{dos} x) d(b + a \operatorname{dos} x) - (b + a \operatorname{dos} x) d(a + b \operatorname{dos} x)}{\sqrt{a^2 - b^2}\,(a + b \operatorname{dos} x)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{b + a \operatorname{dos} x}{a + b \operatorname{dos} x}\right)^2}}$$

$$= \frac{a(a + b \operatorname{dos} x) \operatorname{wst} x - b(b + a \operatorname{dos} x) \operatorname{wst} x}{\sqrt{a^2 - b^2}(a + b \operatorname{dos} x) \sqrt{(a + b \operatorname{dos} x)^2 - (b + a \operatorname{dos} x)^2}}\, dx$$

$$= \frac{(a^2 - b^2) \operatorname{wst} x}{\sqrt{a^2 - b^2}\,(a + b \operatorname{dos} x) \sqrt{(a^2 - b^2)(1 - \operatorname{dos}^2 x)}}\, dx$$

$$= \frac{(a^2 - b^2) \operatorname{wst} x}{(a^2 - b^2)(a + b \operatorname{dos} x) \operatorname{wst} x} dx$$

$$= \frac{dx}{a + b \operatorname{dos} x}.$$

V. Niech będzie do zróżniczkowania funkcja

$$\mathrm{l}\,(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2})$$

otrzymamy:

$$d[\mathrm{l}.(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2})] = \frac{d(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2})}{x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{b}\, dx + \frac{d(a + bx^2)}{2\sqrt{a + bx^2}}}{x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}} = \frac{\sqrt{b} + \frac{2bx}{2\sqrt{a + bx^2}}}{x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a + bx^2}}\, dx\,.$$

W podobny sposób znajdziemy bez trudności różniczki następujące :

$$\text{VI.}\quad d.\text{wst}\,(a+bx+cx^2)=\text{dos}\,(a+bx+cx^2)\,d.(a+bx+cx^2)$$
$$=(b+2cx)\,\text{dos}\,(a+bx+cx^2)\,dx\,;$$

$$\text{VII.}\quad d.\text{łuk wst}\,\frac{a}{b}\,x=\frac{\frac{a}{b}\,dx}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}x^2}}=\frac{adx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}}$$

$$\text{VIII.}\quad d.\text{l}.\text{l}.x=\frac{d.\text{l}.x}{\text{l}.x}=\frac{dx}{x\,\text{l}.x}\,;$$

i w ogólności, oznaczając przez skrócenie

$$\text{l}.\text{l}.x=\text{l}_2x\,,\quad \text{l}.\text{l}.\text{l}x=\text{l}_3x\,,\ \ldots\ \text{l}.\text{l}.\text{l}.\text{l}\ \ldots\ x=\text{l}_nx$$

otrzymamy z łatwością

$$d\,\text{l}_n\,x=\frac{dx}{x\,\text{l}x\,\text{l}_2x\,\text{l}_3x\,\ldots\,\text{l}_{n-1}x}$$

$$\text{IX.}\quad d\,(e^{x^n})=e^{x^n}\,d.x^n=nx^{n-1}e^{x^n}\,dx;$$

$$\text{X.}\quad d.a^{mx^n}=a^{mx^n}\;d.mx^n\,\text{l}.a=mnx^{n-1}\,a^{mx^n}\,\text{l}.a\,dx\,;$$

$$\text{XI.}\quad d\,(e^{x^2}\,\text{st}ax)=\text{st}\,ax de^{x^2}+e^{x^2}d\,\text{st}\,ax$$
$$=\left[2xe^{x^2}\,\text{st}ax+\frac{ae^{x^2}}{\text{dos}^2ax}\right]dx\,;$$

XII. $d\,[\text{łuk st}\,(a\,\text{st}\,bx)]$ (łuk, którego styczna równa jest a pomnożonemu przez styczną bx)

$$=\frac{d.a\,\text{st}\,bx}{1+a^2\,\text{st}^2\,bx}=\frac{a\,\frac{d.bx}{\text{dos}^2\,bx}}{1+a^2\,\text{st}^2\,bx}$$
$$=\frac{ab\,dx}{\text{dos}^2\,bx+a^2\,\text{wst}^2\,bx}\,;$$

$$\text{XIII.}\quad d\,.\,e^{\text{łuk wst}x}=e^{\text{łuk wst}x}\,d\,\text{łuk wst}\,x=\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Funkcje złożone z funkcyj wykładniczych można z łatwością różniczkować biorąc logarytm; tak np, niech będzie:

XIV. $$y = x^{(\mathrm{wst}\,x)^{\mathrm{l}.x}}$$

gdzie wykładnikiem x jest wstawa x podniesiona do potęgi równéj logarytmowi x. Biorąc logarytm, otrzymamy

$$\mathrm{l}.y = (\mathrm{wst}\,x)^{\mathrm{l}.x} \times \mathrm{l}.x$$

biorąc jeszcze raz logarytm

$$\mathrm{l.l}.y = \mathrm{l}.x \times \mathrm{l}.(\mathrm{wst}\,x) + \mathrm{l.l}x$$

a więc, różniczkując obie strony tego równania

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y\,\mathrm{l}.y} &= \mathrm{l}.x \times d.\mathrm{l}(\mathrm{wst}\,x) + \mathrm{l}(\mathrm{wst}\,x) \times d(\mathrm{l}.x) + \frac{dx}{x\,\mathrm{l}.x} \\ &= \mathrm{l}.x \times \frac{d(\mathrm{wst}\,x)}{\mathrm{wst}\,x} + \mathrm{l}(\mathrm{wst}\,x) \times \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x\,\mathrm{l}.x} \\ &= \left[\mathrm{l}.x \times \mathrm{dot}\,x + \frac{\mathrm{l}(\mathrm{wst}\,x)}{x} + \frac{1}{x\,\mathrm{l}.x}\right] dx\end{aligned}$$

a ztąd

$$dy = x^{(\mathrm{wst}\,x)^{\mathrm{l}x}} \times (\mathrm{wst}\,x)^{\mathrm{l}x} \times \mathrm{l}.x \left[\mathrm{l}.x\,\mathrm{dot}\,x + \frac{\mathrm{l}(\mathrm{wst}\,x)}{x} + \frac{1}{x\,\mathrm{l}.x}\right] dx$$

lecz sposób ten nie będzie ogólnym, dopóki nie określimy logarytmów ilości odjemnych i nie udowodnimy ich własności. W powyższym przykładzie tak x jak wst x mogą przybierać wartości odjemne, a wtedy nie wiemy co rozumieć należy pod l. x lub l. (wst x).

2^0 *Różniczkowanie częściowe.*

170. Niech będzie funkcja ciągła

(1) $$y = \mathrm{F}(u, v)$$

dwóch funkcyj ciągłych u i v zmiennéj niezależnéj x :

(2) $$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x)$$

Uważając F(u, v) jako funkcję zmiennych u i v (jako wypadek pewnych działań dokonanych na u i v) bez względu na sposób w jaki u i v zależą od x, to jest bez względu na (2), nadajmy zmiennéj u przyrostek nieskończenie mały Δu, nie zmieniając v i nazwijmy przez skrócenie $\mathrm{F}'_u(u, v)$ wyrażenie określone równaniem :

(3) $$\mathrm{F}_u'(u, v) = \mathrm{gr}\, \frac{\mathrm{F}(u + \Delta u, v) - \mathrm{F}(u, v)}{\Delta u}$$

W podobny sposób, gdybyśmy nie zmieniając u nadali zmiennéj v przyrostek nieskończenie mały Δv, otrzymalibyśmy wyrażenie :

(4) $$\mathrm{F}'_v(u, v) = \mathrm{gr}\, \frac{\mathrm{F}(u, v + \Delta v) - \mathrm{F}(u, v)}{\Delta u}$$

F'_v (u, v) i F'_u (u, v) są w ogólności oznaczonemi funkcjami u i v, bośmy przypuścili że F(u, v) jest funkcją ciągłą zmiennych u, v.

W rzeczywistości, nie możemy zmieniać u, a pozostawić v niezmiennném, lub przeciwnie : bo zmieniając u zmieniamy x od którego u zależy na mocy (2), a zmieniając x zmieniamy v, lub przeciwnie. Wyrażenia (3) i (4) określają nam tylko pewne działania dokonane na funkcji danéj (1), uważanéj również jako wypadek działań na u i v, bez względu na zależności określone równaniami (2). Wyrażenia te $F'_v(u, v)$ i $F'_u(u, v)$ nazywamy *pochodnemi częściowemi* funkcji (1): pierwsze względem u, drugie względem v; a działanie za pomocą którego otrzymaliśmy te wyrażenia, *różniczkowaniem częściowém*, dla podobieństwa z pochodnemi zwyczajnemi i różniczkowaniem zwyczajném. W rzeczy saméj, gdyby v było stałém, pochodna funkcji (1) względem u, byłaby równą $F'_u(u, v)$; gdyby u było stałém pochodna funkcji (1) względem v byłaby równą $F'_v(u, v)$. W rzeczywistości, pochodna ta, którą dla odróżnienia nazywać będziemy niekiedy *pochodną zupełną*, różna jest tak od jednéj jak od drugiéj pochodnéj częściowéj. I tak chcąc naprzykład otrzymać pochodnę zupełną funkcji y względem u, należałoby wyrugowawszy x z dwóch równań (2), otrzymać v w funkcji u, podstawić za v tak otrzymaną wartość w (1) i różniczkować zwykłym sposobem: wypadek otrzymany byłby widocznie różnym od (3). To samo do do pochodnéj zupełnéj funkcji y względem v. Przypuszczamy że x nie wchodzi wyraźnie w równanie (1). Pochodna zaś zupełna funkcji y względem zmiennéj niezależnéj x, byłaby

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{gr}\,\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta x}$$

gdzie Δu i Δv, nie oznaczałyby już przyrostków jakichkolwiek zmiennych u i v, lecz przyrostki odpowiednie przyrostkowi Δx zmiennéj niezależnéj.

171. Z równań (3) i (4) otrzymać możemy

$$(5)\qquad F(u+\Delta u, v) - F(u, v) = [F'_u(u, v) + \alpha]\,\Delta u$$

$$(6)\qquad F(u, v+\Delta v) - F(u, v) = [F'_v(u, v) + \beta]\,\Delta v$$

gdzie α zdąża do zera wraz z Δu, β wraz z Δv uważając ciągle Δu, Δv jako przyrostki nieskończenie małe nadane zmiennym u i v.

Ponieważ $F(u, v)$ a zatém i $F(u, v+\Delta v)$ jest funkcją ciągłą u, więc nadając zmiennéj u w (6) przyrostek Δu, niezależnie od Δv, wyrażenie to zmieni się o nieskończenie małą wraz z Δu, którą łącząc z nieskończenie małą β i nazywając ich summę β' otrzymamy

$$(7)\quad F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u+\Delta u, v) = [F'_v(u+\Delta u, v)+\beta']\Delta v$$

gdzie β' dąży do zera wraz z Δu i Δv zależąc od obu tych przyrostków.

Dodając równania (5) i (7) otrzymamy

$$(8)\quad F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v) = [F'_u(u, v+\alpha]\Delta u + [F'_v(u+\Delta u, v)+\beta']\Delta v$$

Przyrostki Δu i Δv uważaliśmy dotąd jakiemikolwiek; możemy więc założyć że Δu i Δv są przyrostkami funkcyj u i v danych przez (2), odpowiedniemi przyrostkowi Δx zmiennéj niezależnéj; dzieląc (8) przez Δx, otrzymamy

$$(9)\quad \frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u, v)}{\Delta x} = [F'_u(v, v)+\alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [F'_v(u+\Delta u, v)+\beta]\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

gdy Δx zdąża do zera, Δv, Δv zdążają także do zera, a więc α i β' zdążają również do zera: pierwsza strona równania (9) zdąża do $\frac{dy}{dx}$ pochodnéj zupełnéj funkcji (1) względem zmiennéj niezależnéj x; więc w granicy:

$$\operatorname{gr}\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v)-F(u,v)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}\quad \operatorname{gr}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{dv}{dx}\quad \operatorname{gr}\alpha=0\ \operatorname{gr}\beta'=0\ \operatorname{gr}\Delta u=0..$$

czyli

$$(10)\qquad \frac{dy}{dx}=F'_u(u,v)\frac{du}{dx}+F'_v(u,v)\frac{dv}{dx}$$

pochodna funkcji złożonéj z dwóch funkcyj, równa się summie iloczynów pochodnych częściowych względem każdéj z funkcyj składających, przez pochodną odpowiedniéj funkcji składającéj względem zmiennéj niezależnéj.

Różniczkę funkcji złożonéj otrzymamy mnożąc przez dx

$$(11)\qquad dy=F'_u(u,v)\,du+F'_v(u,v)\,dv$$

gdzie $F'_u(u,v)du$, $F'_v(u,v)dv$ są różniczkami funkcji danéj otrzymanemi uważając kolejno jedną z funkcyj składających za stałą.

Pochodne częściowe oznaczać będziemy w następujący sposób:

$$F'_u(u,v)=\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$F'_v(u,v)=\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial v}$$

mamy zatém

$$(12)\qquad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

Ile razy używać będziemy znaku ∂ uważać będziemy, że różniczkując funkcję złożoną uważamy jednę tylko funkcję składającą za zmienną, inne za stałe (*).

Iloczyny $\frac{\partial y}{\partial u}du$, $\frac{\partial y}{\partial v}dv$, pochodnéj częściowéj, względem jednéj ze zmiennych u, v, przez różniczkę téjże zmiennéj, nazywami *różniczkami częściowemi.*

172. Twierdzenie zawarte w równaniu (12) rozciągnąć można z łatwością do funkcyj złożonych z ilukolwiek funkcyj. Niech będzie funkcja

$$y = F(u, v, w \ldots z)$$

gdzie u, v, $w \ldots z$ są funkcjami zmiennéj niezależnéj x. Przypuśćmy żeśmy podstawili za v, $w \ldots z$ wartości tych funkcyj wyrażone przez x; będziemy mieli

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \partial' y$$

gdzie $\partial' y$ wyraża różniczkę częściową funkcji y wziętą uważając u za stałą a v, $w \ldots z$ za zmienne. Aby otrzymać tę różniczkę, będziemy uważać ciągle u za stałe, pozostawiemy v zmiennem i zastąpiemy $w \ldots z$ przez wartość ich w funkcji x; otrzymamy

$$\partial' y = \frac{\partial y}{\partial v}dv + \partial'' y$$

gdzie $\partial'' y$ wyraża różniczkę częściową funkcyj y, w któréj

(*) Większa część autorów, szczególniéj francuzkich, używa jednego znaku d tak dla oznaczenia różniczkowania zupełnego, jak i różniczkowania częściowego, pozostawiając czytelnikowi do rozróżnienia dwóch tych działań z ciągu rachunku.

uważamy u i v za stałe a $w \ldots z$ za zmienne. Postępując tak daléj, otrzymamy

$$(13) \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}dz$$

gdzie $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial w}, \ldots \frac{\partial y}{\partial z}$, wyrażają pochodne częściowe, funkcji y względem $u, v, w \ldots z$; czyli $\frac{\partial y}{\partial u}du$, $\frac{\partial y}{\partial v}dv$, $\frac{\partial y}{\partial w}dw$; $\ldots \frac{dy}{dz}dz$ różniczki funkcji y otrzymane, uważając kolejno jedną z funkcji $u, v, w \ldots z$ za zmienną, a pozostałe za stałe. Możemy więc wysłowić :

TWIERDZENIE. *Różniczka funkcji złożonéj z ilukolwiek funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, równa się summie różniczek częściowych otrzymanych, uważając kolejno jedną z funkcyj składających jako zmienną, pozostające jako stałe.*

173. W wyrażeniu (13) różniczki dy funkcji złożonéj, zmienna niezależna x wcale się nie znajduje wyraźnie. Biorąc pochodną, dość jest podzielić różniczkę tę (13) przez różniczkę dx zmiennéj niezależnéj [**139**] :

$$(14) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

Lecz wyrażenie (13) jest ogólniejszém, bo zamiast zmiennéj niezależnéj x możemy z łatwością podstawić inną zmienną niezależną naprzykład t; tak jeżeli

$$x = f(t)$$

zastąpić możemy wszędzie x przez t w funkcjach $u, v, w \ldots z$, a zawsze mićć będziemy równanie (13), z którego otrzymamy

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dt}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

174. Przypuściliśmy powyżéj że funkcja y jest funkcją złożoną z funkcyj u, v, w... zmiennéj niezależnéj x, lecz że zmienna niezależna x nie wchodzi wyraźnie w skład téj funkcji. Lecz gdyby zmienna ta wchodziła nawet wyraźnie w skład funkcji y np. gdybyśmy mieli

$$y=\mathrm{F}(u, v, x)$$

wzór ogólny (13) nie przedstawia wyjątku; dość jest założyć jedną z funkcyj składających równą saméj zmiennéj niezależnéj, co nam da

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial x}dx$$

gdzie $\frac{\partial y}{\partial u}du$ naprzykład wyraża różniczkę częściową funkcji y otrzymaną uważając tylko u za zmienną, a v i x wchodzące *wyraźnie* za stałe, zaś $\frac{\partial y}{\partial x}dx$ wyraża różniczkę częściową funkcji y otrzymaną uważając x za zmienną, ale tylko x wchodzące *wyraźnie*; u i v jakkolwiek zależące od x w rzeczywistości mają być uważane jako stałe przy tworzeniu pochodnéj częściowéj. Powiedzieliśmy już wyżéj że różniczkowanie częściowe wyraża tylko pewne działanie, a pochodna częściowa, jak $\frac{\partial y}{\partial x}$ wypadek tego działania, różny, tak co wyrażenia, jak i własności, od pochodnéj całéj $\frac{dy}{dx}$. Następujące przykłady najlepiéj to objaśnią :

PRZYKŁAD I. Niech będzie

$$y = au^2 + b\sqrt{v}$$

gdzie

$$u = \mathrm{l}.x \qquad v = \mathrm{wst}\,x$$

Mamy

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2au \quad \text{uważając } v \text{ jako stałe; zatém } \frac{\partial b\sqrt{v}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{b}{2\sqrt{v}} \quad \text{uważając } u \text{ jako stałe, zatém } \frac{\partial au^2}{\partial v} = 0$$

a więc

$$dy = 2audu + \frac{b\,dv}{2\sqrt{v}}$$

lecz

$$du = \frac{dx}{x} \qquad dv = \mathrm{dos}\,x\,dx$$

podstawiając, otrzymamy

$$dy = \left[\frac{2a\,\mathrm{l}.x}{x} + \frac{b\,\mathrm{dos}\,x}{2\sqrt{\mathrm{wst}\,x}}\right]dx$$

cobyśmy również wprost otrzymać mogli: jakoż

$$y = a\,[\mathrm{l}.x]^2 + b\sqrt{\mathrm{wst}\,x}$$

a zatém [169]

$$dy = 2a\,\mathrm{l}.x\,d(\mathrm{l}.x) + \frac{bd(\mathrm{wst}x)}{2\sqrt{\mathrm{wst}x}} = \left[\frac{2a\mathrm{l}.x}{x} + \frac{b\,\mathrm{dos}\,x}{2\sqrt{\mathrm{wst}\,x}}\right]dx$$

PRZYKŁAD II. Niech będzie

$$y = ux^2 + v^2x$$

gdzie

$$u = \mathrm{wst}\,x \qquad v = \mathrm{dos}\,x$$

Mamy

$\frac{\partial y}{\partial u} = x^2$ uważając tak v jak i x wyraźnie wchodzące jako stałe

$\frac{\partial y}{\partial v} = 2vx$ uważając tak u jak i x wyraźnie wchodzące jako stałe

$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ux + v^2$ uważając u i v jako stałe, samo tylko x wyraźnie wchodzące jako zmienne

a zatém wzór (13) da nam

$$dy = x^2\, du + 2vx\, dv + (2ux + v^2)\, dx$$

lecz

$$du = \text{dos}\, x\, dx \qquad dv = -\, \text{wst}\, x\, dx$$

podstawiając

$$dy = (x^2 \,\text{dos}\, x - 2x \,\text{dos}\, x \,\text{wst}\, x + 2x \,\text{wst}\, x + \text{dos}^2 x)\, dx$$

cobyśmy wprost otrzymali; bo

$$y = x^2 \,\text{wst}\, x + x \,\text{dos}^2 x$$

a zatém różniczkując [169]

$$dy = x^2\, d\,(\text{wst}\, x) + \text{wst}\, x\, d\,(x^2) + x\, d\,(\text{dos}^2 x) + \text{dos}^2 x\, dx$$
$$= [x^2 \,\text{dos}\, x + 2x \,\text{wst}\, x - 2x \,\text{dos}\, x \,\text{wst}\, x + \text{dos}^2 x]\, dx.$$

175. W ogóle, zamiast różniczkowania częściowego funkcji złożonéj kilku funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, moglibyśmy zawsze użyć różniczkowania zwyczajnego, podstawiając za funkcje składające wartości tych funkcyj wyrażnoych przez zmienną niezależną. Lecz często łatwiéj jest postępować odwrotnie, to jest wprowadzić w funkcję daną nowe funkcje zastępujące wyrażenia złożone, aby w ten sposób zastąpić jedno działanie złożone, przez kilka działań prostszych, jak to zobaczymy na następujących przykładach:

III. Niech będzie do zróżniczkowania funkcja

$$y=(ax+bx^3)^m+\sqrt{a+bx+cx^2}$$

załóżmy jak powyżéj [169]

$$ax+bx^3=u \qquad a+bx+cx^2=v$$

otrzymamy

$$y=u^m+v^{\frac{1}{2}}$$

a zatém

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

stanie się

$$dy=mu^{m-1}du-\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}dv=mu^{m-1}du-\frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

$$du=(a+3bx^2)\,dx \qquad dv=(b+2cx)\,dx$$

więc podstawiając

$$dy=\left[m(ax+bx^3)^{m-1}(a+3bx^2)-\frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\right]dx$$

Widzimy że nawet przebieg rachunku jest ten sam w tym przykładzie, czy postępujemy pierwszym sposobem [169], czy drugim.

IV. Niech będzie do zróżniczkowania funkcja

$$y=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

Załóżmy

$$\sqrt{1+x}=u \qquad \sqrt{1-x}=v$$

$$y=\frac{u+v}{u-v}$$

a zatém

$$dy = \frac{(u-v)-(u+v)}{(u-v)^2}\,du + \frac{(u-v)+(u+v)}{(u-v)^2}\,dv$$

Ułamek $\frac{u+v}{u-v}$ różniczkujemy naprzód uważając v jako stałą, i mnożemy przez du, następnie uważając u jako stałą, i mnożemy przez dv. Upraszczając, otrzymamy

$$dy = \frac{-2v\,du + 2u\,dv}{(u-v)^2}$$

a podstawiając $du = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$ $dv = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x}}$ i wykonywając działanie, otrzymamy

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}$$

V. W pewnych razach jesteśmy nieledwie zmuszeni użyć wyłącznie różniczkowania częściowego. Aby zróżniczkować naprzykład funkcję

$$y = x^x$$

uważajmy naprzód funkcję

$$y = u^v$$

która da nam wedle wzoru (13)

$$dy = vu^{v-1}\,du + u^v\,l.u\,dv$$

(zważywszy że $\frac{\partial y}{\partial u} = vu^{v-1}$ $\frac{\partial y}{\partial v} = u^v\,l.u$)

a podstawiając $u = v = x$ otrzymamy

$$d.x^x = (x.x^{x-1} + x^x\,l.x)\,dx$$
$$dx^x = x^x\,(1 + l.x)\,dx$$

Pochodna

$$\frac{dx^x}{dx}=x^x\,[1+1.x]$$

jest dodatną (przypuszczając x dodatném) dla wszelkich wartości x większych od jedności, lub nawet mniéjszych od jedności, lecz większych od $\frac{1}{e}$; jest odjemną dla wszelkich wartości x zawartych między zerem a $\frac{1}{e}$. Gdy więc x zwiększa się od 0 do $\frac{1}{e}$ funkcja x^x się zmniéjsza [**144**]; gdy x zwiększa się od $\frac{1}{e}$ do ∞ funkcja się zwiększa. Najmniéjsza wartość jaką x^x przybrać może dla x dodatnego, odpowiada więc wartości

$$x=\frac{1}{e}\qquad \text{dla któréj}\qquad 1+1.x=0\,,\qquad \frac{dx^x}{dx}=$$

Wartość ta jest

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$$

VI. Aby zróżniczkować funkcję

$$y=x^{\text{wst}x}$$

załóżmy

$$\text{wst}\,x=u\qquad y=x^u$$

a więc

$$dy=ux^{u-1}\,dx+x^u\,1.x\,du$$

a że

$$du=\text{dos}\,x\,dx,$$

więc

$$dy=[x^{\text{wst}x-1}\,\text{wst}\,x+x^{\text{wst}x}\,\text{dos}\,x.1.x]dx$$

czyli

$$dy=x^{\text{wst}x}\left[\frac{\text{wst}\,x}{x}+\text{dos}x.1.x\right]dx$$

VII. Niech będzie funkcja

$$y = x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{x}$$

Zakładając

$$y = u^v$$

otrzymamy jak powyżéj

$$dy = vu^{v-1}\,du + u^v\,\mathrm{l}.u\,dv$$

podstawiając

$$u = x \qquad v = \frac{1}{x} \qquad du = dx \qquad dv = -\frac{dx}{x^2}$$

otrzymamy

$$dy = \left(\frac{x^{\frac{1}{x}-1}}{x} - \frac{x^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{l}.x}{x^2}\right)dx$$

czyli

$$d\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}\left(1 - \mathrm{l}.x\right)dx$$

Pochodna

$$\frac{d\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{dx} = x^{\frac{1}{x}-2}\left(1 - \mathrm{l}.x\right)$$

funkcji $x^{\frac{1}{x}}$ jest dodatną (przypuszczając x dodatném) gdy $\mathrm{l}.x < 1$ czyli $x < e$: odjemną, gdy $x > e$; wnosimy ztąd [**144**], że funkcja $x^{\frac{1}{x}}$ zwiększa się, gdy x się zwiększa, jeżeli $x < e$, a zmniéjsza się gdy x się zwiększa, jeżeli $x > e$: największa wartość funkcji $x^{\frac{1}{x}}$ odpowiada wartości $x = e$, jest więc $e^{\frac{1}{e}}$; jakoż

$$1 < \sqrt{2} < \sqrt[e]{e} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \ldots > \sqrt[n-1]{n-1} > \sqrt[n]{n} > \ldots$$

Różniczkowanie funkcyj niewyraźnych.

176. Funkcja niewyraźna jednéj zmiennéj niezależnéj może być daną albo przez jedno równanie o dwóch zmiennych

$$f(x, y) = 0$$

z którego wyciągnąwszy wartość na y wyrażone przez x, możnaby uczynić y funkcją wyraźną zmiennéj niezależnéj x; albo w ogólności przez n równań

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{n+1}$, z których można wyrugować $n-1$ zmiennych i otrzymać jedną z nich, naprzykład x_{n+1} wyrażoną przez jedną z pozostałych np. x_1: to jest uczynić x_{n+1} funkcją wyraźną zmiennéj niezależnéj x_1. W jednym i w drugim razie możnaby więc rozwiązując równania funkcję niewyraźną uczynić wyraźną i różniczkować według powyższych prawideł; lecz można także otrzymać różniczki funkcyj nie rozwiązując równań, co jest tém dogodniéj, że równania szczególniéj przestępne nie dają się zwykle z łatwością rozwiązać.

177. Uwaga. Równanie

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

w ogólności nie wyznacza *ściśle* y jako funkcji zmiennéj niezależnéj x : bo związek wyrażony przez to równanie może być tego rodzaju, że jednéj i téj saméj wartości x odpowiada kilka wartości y. Naprzykład, jeżeli (1) jest równaniem algebraiczném 2go stopnia, każdéj wartości x odpowiadają dwie wartości y, które zarówno mogą być uważane jako funkcje x. Aby funkcja y była ściśle określoną przez równanie (1), należy dodać pewne warunki, zależne od gatunku związku (1) : np. w razie równania 2go stopnia, jeżeli oprócz związku (1) damy pewną wartość szczególną y_0 odpowiadającą wartości szczególnéj x_0 zmiennéj niezależnéj, wraz z warunkiem że zmienne począwszy od tych wartości szczególnych, zmieniać się mają w sposób ciągły, wiemy już przez to który z pierwiastków równania (1) uważać należy za określający funkcję y. Dwa te pierwiastki różnią się w ogóle o ilość skończoną; funkcja y zmieniając się w sposób ciągły, nie może przejść z jednego w drugi, byleby wszakże x zmieniało się pomiędzy granicami, pomiędzy któremi dwa pierwiastki nie stają się równemi : bo dla wartości x dla któréj pierwiastki byłyby równemi, znów zachodziła by wątpliwość, który z dwóch pierwiastków uważać należy. Przypadki te rozbierzemy w dalszym ciągu : na teraz przypuścimy, że do związku (1) dodane zostają warunki określające ściśle y jako funkcję x : np. wrazie równania 2go stopnia że pierwiastek ma być branym zawsze ze znakiem $+$, lub zawsze ze znakiem $-$.

178. Weźmy zatém pod uwagę funkcję daną przez równanie $f(x, y) = 0$ pomiędzy dwiema zmiennemi x i y. Równanie to daje nam y jako funkcję x, więc

$$f(x, y)$$

może być uważane jako funkcja złożona, a różniczka jéj będzie [**171**]

$$d[f(x,y)]=\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}dx+\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial y}dy,$$

co zwykle przez skrócenie piszemy

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

a że $f(x, y)$ jest stałą, to jest równą zeru, jéj różniczka zupełna df jest równą 0, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

równanie, które daje nam różniczkę

$$dy=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx]$$

lub pochodnę

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

funkcji y względem zmiennéj niezależnéj x.

Przykład i. Niech będzie

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$$

otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2b^2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2a^2y$$

a zatém

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy rozwiązując równanie

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

co do y, przez co y będzie funkcją wyraźną zmiennéj niezależnéj x

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

i różniczkując

$$dy = \pm \frac{b}{a} d\sqrt{a^2 - x^2} = \pm \frac{b}{a} \frac{d(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \pm \frac{b}{a} \times \frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

wypadek równy poprzedzającemu $-\frac{b^2x}{a^2y}$, podstawiając w tym ostatnim wartość $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Otrzymujemy w ten sposób dwie pochodne równe i znaków przeciwnych, odpowiadające dwóm funkcjom zawartym w równaniu daném.

Przykład II. Niech będzie funkcja niewyraźna

$$y^x - x^y = 0$$

y jest funkcją x, choć funkcji téj nie umiemy uczynić wyraźną : różniczkę jéj znajdujemy jednak z łatwością, bo

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^x l.y-yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xy^{x-1}-x^y l.x$$

a więc

$$dy=-\frac{y^x l.y-yx^{y-1}}{xy^{x-1}-x^y l.x}dx$$

a że $y^x=x^y$ więc

$$dy=\frac{y^2-xy\,l.y}{x^2-xy\,l.x}dx.$$

180. Zanim przejdziemy do przypadku ogólnego, weźmy jeszcze pod uwagę dwa równania

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$$

pomiędzy trzema zmiennemi x, y, z. Ponieważ jedną z tych zmiennych, naprzykład y, możemy wyrugować, otrzymując jéj wartość z drugiego równania i podstawiając w pierwsze, które da nam w takim razie z wyrażone przez x; ponieważ moglibyśmy również wyrugowawszy z, otrzymać y wyrażone przez samo x: więc układ (1) przedstawia nam jedną tylko zmienną niezależną np. x i dwie funkcje téj zmiennéj niezależnéj y i z. Uważając funkcje f i F ako funkcje złożone, prawidło [**172**] da nam, zakładając różniczki zupełne funkcyj tych stałych, bo równych zeru, równemi zeru:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial z}dz=0 \end{cases}$$

Rozwiązując dwa równania (2) co do dy, dz, otrzymamy :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
dy &= \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z}}\, dx \\
dz &= \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z}}\, dx
\end{aligned}
\right.
$$

a że pochodne częściowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, z łatwością otrzymać możemy z równań (1), więc wartości (3) wyznaczają nam zupełnie różniczki i pochodne funkcyj y i z względem zmiennéj niezależnéj x, przyczém nie potrzebujemy rozwiązywać równań (1).

Przykład I. Niech będą dwa równania

$$
\begin{gathered}
x^2+y^2+z^2=r^2 \\
ax+by+cz=p
\end{gathered}
$$

pomiędzy zmiennemi x, y, z, i stałemi a, b, c, r, p.

Równania (2) stają się tu :

$$
\begin{gathered}
xdx+ydy+zdz=0 \\
adx+bdy+cdz=0
\end{gathered}
$$

dzieląc pierwsze przez 2 po zróżniczkowaniu; a więc

$$
\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}
$$

co nam daje dy i dz wyrażone przez dx, czyli różniczki i pochodne funkcyj y i z względem zmiennéj niezależnéj x.

To samo byśmy otrzymali rugując y, to jest podstawiając wartość

$$y = \frac{p - ax - cz}{a}$$

z drugiego równania danego, w pierwsze :

$$x^2 + \left(\frac{p - ax - cz}{a}\right)^2 + z^2 = r^2$$

wyciągając z tego równania wartość na z wyrażoną przez x, i różniczkując tę funkcję z jako funkcję wyraźną zmiennéj x. Tak samo postępując względem y, otrzymalibyśmy y jako funkcję wyraźną x, a różniczkując, pochodnę y względem x; co jak widzimy wymagałoby daleko mozolniejszego rachunku.

Przykład II. Niech będą dwa równania.

$$e^x + e^y + e^z = a$$
$$\text{wst}\, x + 1.y + \text{łuk st}\, z = b$$

pomiędzy trzema zmiennemi x, y, z, i stałemi a, b. Tak z jak y możemy uważać jako funkcje zmiennéj niezależnéj x, choć funkcyj tych wyraźnemi uczynić nie umiemy; równania (2) staną się

$$e^x dx + e^y dy + e^z dz = 0$$
$$\text{dos}\, x\, dx + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{1 + z^2} = 0$$

a zatém rozwiązując co do dy, dz otrzymamy

$$\frac{dx}{\frac{e^y}{1 + z^2} - \frac{e^z}{y}} = \frac{dy}{e^z\, \text{dos}\, x - \frac{e^x}{1 + z^2}} = \frac{dz}{\frac{e^x}{y} - e^y\, \text{dos}\, x}$$

co nam daje różniczki dy, dz lub pochodne $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ funkcyj y i z względem zmiennéj niezależnéj x, wyrażone przez x, y, i z.

181. Przejdźmy nakoniec do przypadku ogólnego. Niech będzie n równań

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots x_n, \quad x_{n+1})=0 \\ f_2(x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots x_n, \quad x_{n+1})=0 \\ f_3(x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots x_n, \quad x_{n+1})=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ldots x_n, \quad x_{n+1})=0 \end{array}\right.$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi. Możemy, rozwiązując te równania, wyrazić kolejno każdą z n zmiennych np. x_2, $x_3 \ldots x_{n+1}$ przez jedną z nich: x_1. Układ (1) przedstawia nam więc n funkcyj x_2, $x_3 \ldots x_{n+1}$ jednéj zmiennéj niezależnéj np. x_1. Uważając więc funkcje f_1, f_2, $f_3 \ldots f_n$ jako funkcje złożone, różniczkując według prawidła [**172**] i zakładając różniczki te funkcyj równych 0, równemi 0, otrzymamy:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \ldots \\ \qquad + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 + \ldots \\ \qquad + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 + \ldots \\ \qquad + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_3}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_n}{\partial x_3} dx_3 + \ldots \\ \qquad + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0 \end{array}\right.$$

Równania te stopnia 1go w liczbie n pomiędzy $n+1$ niewiadomemi: dx_1, dx_2, $dx_3 \ldots dx_n$, dx_{n+1}, wyznaczają nam w ogólności n z tych nieznanych różniczek funkcyj, przez jedną z nich uważaną jako różniczkę zmiennéj niezależnéj. Za zmiennę niezależną możemy przyjąć którąkolwiek ze zmiennych x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$, x_{n+1}, nie zmieniając układu (2): pozostałe będą jéj funkcjami. Spółczynniki $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ $\ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} \ldots \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \ldots$ otrzymamy z łatwością z równań (1). Działanie za pomocą którego z układu (1) otrzymujemy układ (2), nazywamy *różniczkowaniem równań* (1).

Nie wypisujemy tu wartości tych n nieznanych, które z równań (2) otrzymać możemy; dość jest powiedziéć że ogólna teorja n równań algebraicznych 1go stopnia o n nieznanych stosuje się do układu (2): do niéj więc odsyłami wraz z niemożebnościami i niewyznaczeniami jakie się przy tém rozwiązaniu w szczególnych razach przytrafić mogą.

Rugowanie stałéj dowolnéj. Równania różniczkowe.

182. Równanie dane i równanie otrzymane przez różniczkowanie danego, przedstawiają układ dwóch równań, z których zwykłym sposobem algebraicznym można wyrugować jedną ze *stałych*: równanie tak otrzymane zawierające zmiennę niezależną, jéj funkcję, różniczki, lub pochodnę funkcji, lecz nie zawierające wyrugowanéj stałéj, nazywamy *równaniem różniczkowém*. Stałą wyrugowaną nazywamy *stałą dowolną*, bo jakąkolwiek nadamy jéj wartość niezależnie od zmiennych uważanych w równaniu daném, równanie różniczkowe będzie zawsze to samo.

Niech będzie równanie dane

$$(1) \qquad f(x, y, C) = 0$$

pomiędzy zmiennemi x i y i stałą C. W tém równaniu jedna ze zmiennych np. y jest funkcją drugiéj x, którą moglibyśmy uczynić wyraźną rozwiązując równanie co do y: stałą zaś C uważamy jakąkolwiek, byleby niezależną od x i y.

Różniczkując to równanie, otrzymamy

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

równanie zawierające stałą C pod znakiem funkcyjnym f, który piszemy przez skrócenie zamiast $f(x, y, C)$.

Wyciągając wartość na stałą C z jednego z dwóch równań (1) lub (2), i podstawiając w drugie, (lub rugując C pomiędzy (1) i (2) w inny jakikolwiekbądź sposób) otrzymamy równanie kształtu

$$(3) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

które nazywamy *równaniem różniczkowém* równania (1)go. Równanie (1) nazywamy niekiedy równaniem *pierwotném* lub *całkowém* równania (3)go. Równanie pierwotne równania różniczkowego zawiera w ogólności pewną stałą C nie znajdującą się w tém ostatniém, stała ta *dowolna* może być jakąkolwiek, byle nie zależała od x i y, bo zawsze wyrugowawszy ją, otrzymamy to samo równanie różniczkowe (3).

Przykład I. Niech będzie równanie

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

różniczkując, otrzymamy

$$y \frac{dy}{dx} = p \tag{2}$$

a podstawiając $p = \frac{y^2}{2x}$, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \tag{3}$$

równanie różniczkowe równania (1).

Jeżeli równanie (1) uważać będziemy jako równanie paraboli odniesionéj do osi, lub średnicy i stycznéj, równanie (3) zawiera własność że styczna przecina oś odciętych w odległości od spodka rzędnéj równéj podwójnéj odciętéj (podstyczna równa podwójnej odciętéj) [**141**], a to bez względu na parametr p, któren wyrugowaliśmy. Styczne do wszystkich paraboli mających wspólne osie a różniących się tylko parametrem, poprowadzone przez punkta odpowiadające jednéj i téj saméj odciętéj, przetną się więc wszystkie w jednym punkcie na osi odciętych.

Przykład II. Niech będzie równanie

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

Różniczkując otrzymamy [**179**]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2y$$

a zatém

$$b^2x + a^2y \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

a podstawiając wartość

$$b^2 = \frac{a^2y^2}{a^2 - x^2}$$

otrzymaną z równania (1) w równanie (2), otrzymamy

$$\frac{a^2 y^2}{a^2 - x^2} x + a^2 y \frac{dy}{dx} = 0$$

czyli

$$xy + (a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

równanie różniczkowe (1)go.

Jeżeli równanie (1) uważać będziemy jako przedstawiające ellipsę, równanie hyperboli otrzymalibyśmy podstawiając w (1) za b^2 wartość $-b^2$: lecz przy rugowaniu b^2 czy $-b^2$ zawsze otrzymujemy toż samo równanie różniczkowe (3). Równanie to jest więc wspólném równaniem różniczkowém ellipsy i hyperboli, bo nie zawiera różniących je stałéj b^2 lub $-b^2$. Własności otrzymane z tego równania, są wspólnemi własnościami jednéj i drugiéj z tych krzywych.

Uwaga. W ogóle równanie różniczkowe wyraża własność ogólniejszą niż równanie pierwotne, bo pierwsze odpowiada całemu *układowi* drugich różniących się różnemi wartościami pewnéj stałéj, wyrugowanéj w równaniu różniczkowém.

183. Równania jednoczesne. Niech będzie układ n równań

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n) = 0 \end{array}\right.$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$, x_{n+1} (z których jedną np. x_1 możemy uważać za zmienną niezależną, a pozostałe n jak: $x_2 \ldots x_n$, x_{n+1} za n funkcyj téj zmiennéj niezależnéj) i n stałemi dowolnemi c_1, $c_2 \ldots c_n$. Różniczkując układ (1) podług znanego prawidła [**181**], otrzymamy:

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}+\ldots\\
&\qquad+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\ast\frac{dx_n}{dx_1}\;\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}\;\frac{dx_{n+1}}{dx_1}=0\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}+\ldots\\
&\qquad+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1}=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial f_n}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}+\ldots\\
&\qquad+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}+\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1}=0
\end{aligned}
\right.
$$

n równań, w których stałe dowolne $c_1, c_2, \ldots c_n$ znajdują się pod znakami funkcyjnemi $f_1, f_2 \ldots f_n$. Rugując n stałych $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$, z $2n$ równań (1) i (2) (np. wyciągając ich wartości z (1) i podstawiając w (2)) otrzymamy na wypadek w ogólności n równań kształtu:

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&F_1\left(x_1,\ x_2,\ x_3\ldots x_n,\ x_{n+1},\ \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1},\ldots \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right)=0\\
&F_2\left(x_1,\ x_2,\ x_3\ldots x_n,\ x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1},\ldots \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right)=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&F_n\left(x_1,\ x_2,\ x_3\ldots x_n,\ x_{n+1},\ \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1},\ldots \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right)=0
\end{aligned}
\right.
$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi i ich różniczkami lub pochodnemi, w które równania nie wchodzą już stałe $c_1, c_2, \ldots c_n$, wyrugowane. Równania te nazywają *równaniami różniczkowemi jednoczesnemi.*

Cwiczenia.

184. Sprawdzić różniczki i pochodne następujące :
1° Przez podstawienie (lub przez różniczkowanie częściowe)

1. $y=(ax+b)^m$ $\qquad dy=am\,(ax+b)^{m-1}dx$

2. $y=(9a^2-6abx+5b^2x^2)\sqrt[3]{(a+bx)^2}$ $\qquad dy=\dfrac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a+bx}}\,dx$

3. $y=\dfrac{x^3-1}{x^4-7x^2}$ $\qquad dy=\dfrac{-x^6-7x^4+4x^3-14x}{(x^4-7x^2)^2}$ dx

4. $y=\dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$ $\qquad dy=\dfrac{(x-2)^8}{(x-1)^{\frac{7}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}\,(x^2-7x+1)$

(najdogodniéj będzie wziąść logarytmy obu stron :

$$\mathrm{l}.y=9\,\mathrm{l}.(x-2)-\frac{5\,\mathrm{l}.(x-1)+11\,\mathrm{l}.(x-3)}{2}$$

i następnie różniczkować w zwykły sposób. Sposób ten będzie zawsze użytecznym, ile razy trzeba różniczkować iloczyny funkcyj złożonych.)

5. $y=\mathrm{wst}\,(a+bx)$ $\qquad dy=b\,\mathrm{dos}\,(a+bx)\,dx$

6. $y=\mathrm{st}\,[\mathrm{l}.\,x]$ $\qquad dy=\dfrac{dx}{x\,\mathrm{dos}^2\,[\mathrm{l}.\,x]}$

7. $y=\mathrm{l}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$ $\qquad dy=-\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

8. $y=\mathrm{l}.\,[\mathrm{wst}\,x)$ $\qquad dy=\mathrm{dot}\,x\,dx$

9. $y=\mathrm{l}.\left(\dfrac{4+3x^3}{2+7x}\right)$ $\qquad dy=\dfrac{-28+12x+21x^2}{(2+7x)(4+3x^2)}$

10. $$y=\mathrm{l}\left[1-\left(1-e^{-\frac{a}{\mathrm{wst}\,x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$dy=\frac{a\,\mathrm{dos}\,x\,e^{-\frac{a}{\mathrm{wst}\,x}}\,dx}{2\,\mathrm{wst}^2 x\left(1-e^{\frac{a}{\mathrm{wst}\,x}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(1-e^{-\frac{a}{\mathrm{wst}\,x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

2° Przez różniczkowanie częściowe (lub przez podstawienie) :

11. $y = \mathrm{l.}\left(\frac{1 - \mathrm{dos}\, n x}{1 + \mathrm{dos}\, nx}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad dy = \frac{ndx}{\mathrm{wst}\, nx}$

12. $y = a^{b^x}$ $\quad dy = \mathrm{l}(a)\,\mathrm{l}(b)\, a^{b^x} b^x$

13. $y = \text{łuk wst}\sqrt{\frac{a}{a+x}}$ $\quad dy = -\frac{dx}{2(a+x)}\sqrt{\frac{a}{x}}$

14. $y = (\mathrm{dos}\, x)^{\mathrm{wst}\, x}$ $\quad dy = (\mathrm{dos}\, x)^{\mathrm{wst}\, x}\left[\mathrm{dos}\, x\, \mathrm{l}(\mathrm{dos}\, x) - \frac{\mathrm{wst}^2 x}{\mathrm{dos}\, x}\right]dx$

15. $y = \text{łuk dos}\left(\frac{b + a\,\mathrm{dos}\, x}{a + b\,\mathrm{dos}\, x}\right)$ $\quad dy = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\,\mathrm{dos}\, x}\, dx$

16. $y = \mathrm{wst}\frac{ax}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$ $\quad dy = \frac{adx}{\sqrt{(1 - a^2x^2)^3}}\,\mathrm{dos}\frac{ax}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$

3° Funkcyj niewyraźnych :

17. $y\,\mathrm{wst}\, nx = ae^{nx+y}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{ny}{1 - y}(1 - \mathrm{dot}\, nx)$

18. $y = 1 + xe^y$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2 - y}$

19. $\text{łuk wst}\frac{x}{h} + \text{łuk wst}\frac{y}{k} = c$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{k^2 - y^2}{h^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

20. $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2 + y^2 - a^2)}{y(x^2 + y^2 + a^2)}$

21. Wyrugować stałę m z równania

$$(a + mb)(x^2 - my^2) = mc^2$$

Otrzymamy równanie różniczkowe

$$axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (bx^2 - ay^2 - c^2) - bxy = 0$$

ROZDZIAŁ X

POCHODNE I RÓŻNICZKI WYŻSZYCH RZĘDÓW

FUNKCYJ JEDNÉJ ZMIENNÉJ NIEZALEŻNÉJ

Rzędy pochodnych i różniczek. — Różniczki jako granice różnic. — Różniczki wyższych rzędów funkcyj zasadniczych, funkcyj złożonych i niewyraźnych. — Różniczkowanie częściowe wyższych rzędów. — Rugowanie stałych dowolnych. Równania różniczkowe wyższych rzędów. — Przykłady.

185. Rzędy pochodnych. Pochodna funkcji pewnéj zmiennéj niezależnéj, jest sama funkcją téj zmiennéj niezależnéj (w szczególnych tylko przypadkach może być zerem lub stałą [**145**]); wziąwszy znów pochodnę téj ostatniéj funkcji, otrzymamy *pochodnę drugiego rzędu* funkcji danéj; wziąwszy pochodnę téj pochodnéj drugiego rzędu, otrzymamy *pochodnę trzeciego rzędu* funkcji danéj, i t. d.: pochodna pochodnéj $m-1$ rzędu, będzie *pochodną* $m$go *rzędu funkcji danéj*.

Niech będzie naprzykład funkcja

$$y = x^m$$

pochodna jéj

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

jest funkcją zmiennéj x; oznaczmy ją przez y':

$$y' = mx^{m-1}$$

Biorąc pochodną funkcji y'

$$\frac{dy'}{dx} = m(m-1)x^{m-2} = y''$$

funkcja y'' będzie pochodną drugiego rzędu funkcji y; podobnież

$$\frac{dy''}{dx} = m(m-1)(m-2)x^{m-3} = y'''$$

będzie pochodną trzeciego rzędu funkcji y; w ogólności

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} = y^{(n)}$$

będzie pochodną $n$tego rzędu funkcji y.

Niech będzie w ogólności funkcja

$$y = f(x)$$

pochodnę pierwszego rzędu, oznaczyliśmy [**138**] przez

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

pochodne wyższych rzędów oznaczać będziemy przez

$$f''(x)=\frac{d\,f'(x)}{dx} \quad \text{pochodnę drugiego rzędu;}$$

$$f'''(x)=\frac{d\,f''(x)}{dx} \quad \text{pochodnę trzeciego rzędu;}$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\frac{d\,f^{(n-1)}(x)}{dx} \quad \text{pochodnę } n\text{go rzędu.}$$

Nie potrzebujemy dodawać, że w ogólném wyrażeniu, znak (n) lub $(n-1)$ nad znakiem funkcyjnym oznacza nie wykładnik, lecz rzęd pochodnéj.

186. Rzędy różniczek. Różniczkę funkcji

(1) $$y=f(x)$$

określiliśmy [**139**] przez równanie

(2) $$dy=f'(x)\,dx$$

powiedzieliśmy nadto, że różniczkę zmiennéj niezależnéj dx równą przyrostkowi nieskończenie małemu Δx uważamy zwykle jako niezależną od x; bo przyrostek ten Δx jako dowolny, możemy przypuścić zawsze jednakowym dla jakiéjkolwiek wartości zmiennéj niezależnéj x, choć dążącym z natury swéj jako ilość nieskończenie mała do zera [**115**].

Zastrzeżenie to, nie było jednak koniecznem przy uważaniu różniczek pierwszego rzędu : bo na zasadzie udowodnionego twierdzenia [**151**] pochodna $f'(x)$ zawsze jest równą ilorazowi różniczki dy przez różniczkę dx, chociażby nawet x nie było zmienną niezależną, a zatém choćby dx

zależało od x. Przy uważaniu pochodnych wyższych rzędów zakładać będziemy koniecznie różniczkę dx zmiennéj niezależnéj, niezależną od zmiennéj niezależnéj x, to jest uważać ją będziemy jako *stałą* [139].

Różniczki zaś funkcji dy podobnież jak pochodna $f'(x)$ są *zmiennemi*, bo są zmieniającemi się zależnie od x.

Różniczkując więc wyrażenie (2), w którém uważamy dy i $f'(x)$ za zmienne, dx za stałe, zważywszy że z powyższego określenia

$$df'(x) = f''(x)dx$$

otrzymamy [156]

$$d(dy) = dx\, d[f'(x)] = dx\,[f''(x)\,dx]$$

czyli

$$d.dy = f''(x)\,dx^2$$

Wyrażenie

$$d.dy$$

nazywamy *różniczką drugiego rzędu* funkcji y, i piszemy je przez skrócenie

$$d^2y$$

tak że

(3) $$d^2y = f''(x)\,dx^2$$

W podobny sposób różniczkując wyrażenie (3), w którém dx^2 podobnie jak dx, ma być uważaném jako stała, otrzymamy

$$d(d^2y) = dx^2\, d[f''(x)]$$

a że z określenia

$$df''(x) = f'''(x)\,dx$$

więc

$$d(d^2y) = dx^2\,[f'''(x)\,dx]$$

czyli

(4) $$d^3y = f'''(x)\,dx^3$$

oznaczając przez skrócenie

$$d.d^2y = d^3y$$

i nazywając wyrażenie to różniczką 3go rzędu funkcji y.

W ogólności, różniczką $n$tego rzędu będzie

$$d.d^{n-1}y = dx^{n-1}d[f^{(n-1)}(x)]$$

czyli

(5) $$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

co możemy napisać także

(6) $$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

Różniczką n*tego rzędu, nazywamy więc ilość nieskończenie małą, któréj stosunek do* n*téj potęgi nieskończenie małego przyrostku zmiennéj niezależnéj, równa się* n*téj pochodnéj funkcji.*

Różniczka $n$go rzędu jest więc w ogólności nieskończenie małą $n$go rzędu [**119**] uważając dx za nieskończenie małą główną.

Na oznaczenie pochodnych wyższych rzędów funkcji używamy często znakowania (6); różniczkę w takim razie piszemy

$$d^ny = \frac{d^ny}{dx^n}dx^n$$

co jest tożsamością z określenia, że pochodna $n$tego rzędu jest ilorazem z różniczki $n$tego rzędu funkcji, przez ntę potęgę różniczki zmiennéj niezależnéj.

Dogodném jest często znakowanie Cauch'ego pochodnéj jedną głoską D, przyczém zmienna niezależna pisze się jako wskaźnik u dołu, a rzęd pochodnéj jak wykładnik u góry: tak że

$$D_x y = \frac{dy}{dx} \qquad D^2_x y = \frac{d^2 y}{dx^2} \ldots D^n_x y = \frac{d^n y}{dx^n}$$

lub

$$D_x f(x) = f'(x) \qquad D^2_x f(x) = f''(x) \ldots D^n_x f(x) = f^{(n)}(x)$$

187. Uwaga i. Różniczkowanie wyrażenia (2)go przeprowadzić można, powtarzając zwykłe rozumowanie. Mamy bowiem

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

nadając zmiennéj niezależnéj przyrostek nieskończenie mały Δx, i zważywszy że przyrostek ten będąc zawsze tym samym, $dx = \Delta x$ się nie zmienia, otrzymamy

$$\frac{df(x+\Delta x)}{dx} = f'(x+\Delta x)$$

a odejmując od tego wyrażenia poprzedzające i dzieląc przez Δx

$$\frac{\dfrac{df(x+\Delta x)}{dx} - \dfrac{df(x)}{dx}}{\Delta x} = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

czyli

$$\frac{df(x+\Delta x) - df(x)}{dx\,\Delta x} = \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

a przechodząc do granicy, i zważając że $\Delta x = dx$

$$\mathrm{gr}\ \frac{df(x+\Delta x)-df(x)}{\Delta x^2} = f''(x)$$

Widzimy, że granica stosunku przyrostku nieskończenie małego zmiennéj różniczki funkcji, któren oznaczemy przez

$$\Delta df(x) = df(x+\Delta x) - df(x)$$

odpowiadającego przyrostkowi nieskończenie małemu, zmiennéj niezależnéj, do kwadratu z przyrostku zmiennéj niezależnéj, jest ilością skończoną, równą pochodnéj drugiego rzędu funkcji. Przyrostek ten jest więc sam nieskończenie małą drugiego rzędu, bo, dx^2 jest nieskończenie małą drugiego rzędu [**119**]. Możemy więc napisać

$$\frac{df(x+\Delta x)-df(x)}{\Delta x^2} = f''(x) + \varepsilon$$

gdzie ε zdąża do zera wraz z Δx, czyli jest nieskończenie małą pierwszego przynajmniéj rzędu. A zatém

$$df(x+\Delta x) - df(x) = [f''(x) + \varepsilon]\,\Delta x^2$$

czyli

$$\Delta df(x) = f''(x)\,\Delta x^2 + \varepsilon\,\Delta x^2$$

Widzimy więc, że przyrostek nieskończenie mały różniczki składa się z dwóch części :

1° z nieskończenie małéj drugiego rzędu

$$f''(x)\,\Delta x^2$$

2^0 z nieskończenie małéj trzeciego (lub wyższego) rzędu:

$$\varepsilon \Delta x^2$$

Pierwszą z tych części nazywamy *różniczką drugiego rzędu* funkcji $f(x)$ i oznaczamy ją przez

$$d^2 f(x) = f''(x) \Delta x^2$$

a podstawiając dla jednostajności znakowania za Δx równe mu dx:

$$d^2 f(x) = f''(x)\, dx^2$$

lub

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

Różniczka więc drugiego rzędu funkcji jestto nieskończenie mała drugiego rzędu, któréj stosunek do drugiéj potęgi przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, równa się pochodnéj drugiego rzędu téjże funkcji.

Różniczka drugiego rzędu funkcji, nie jest samym przyrostkiem różniczki pierwszego rzędu funkcji, ale różni się od tego przyrostku $\Delta df(x)$, któren jest nieskończenie małą drugiego rzędu, o ilość $\varepsilon \Delta x^2$ nieskończenie małą przynajmniéj trzeciego rzędu, to jest nieskończenie małą względem niéj saméj. Gdzie więc tylko chodzi o granicę stosunków lub summ nieskończenie małych, tam za przyrostek różniczki pierwszego rzędu odpowiadający przyrostkowi nieskończenie małemu zmiennéj niezależnéj, podstawić można różniczkę drugiego rzędu, a granica stosunku lub summy się nie zmieni [**125**].

Rozumowanie to w istocie rzeczy to samo, co dla różniczek zwyczajnych pierwszego rzędu, stosuje się również do różniczek 3go, 4go... $n$go rzędu.

Uwaga II. Nie potrzebujemy dodawać że

$$d^2y\,,\quad d^3y\,\ldots d^{n-1}\,,\quad d^ny\,\ldots$$

oznaczają nie potęgi 2gą, 3cią,... ntą różniczki dy, lecz są różniczkami rzędów 2go, 3go,... $n$go funkcji y; potęgi oznaczać będziemy jak zwykle przez

$$dy^2\,,\quad dy^3\,,\quad dy^{n-1}\,,\quad dy^n\,\ldots$$

tak że

$$d^2y = d\,(dy)\,,\quad d^3y = d\,(d^2y)\,\ldots\,d^ny = d\,(d^{n-1}y)$$

zaś

$$dy^2 = (dy)^2\,,\quad dy^3 = (dy)^3\ldots\,dy^n = (dy)^n$$

co jest znów różném od różniczek pierwszego rzędu:

$$d\,(y^2) = 2ydy\,,\quad d\,(y^3) = 3y^2dy\,\ldots\,d\,(y^n) = ny^{n-1}dy$$

potęgi 2éj, 3éj ... $n$téj funkcji y.

Nie należy również uważać

$$dx^2\,,\quad dx^3\ldots dx^n\ldots$$

za różniczki drugiego, trzeciego... $n$go rzędu zmiennéj niezależnéj; bo różniczka pierwszego rzędu będąc *stałą*, to jest niezależną od x, jakeśmy to tyle razy powtarzali, pochodne jéj, a więc i różniczki wyższych rzędów są wszystkie zerami:

$$d^2x = 0\,,\quad d^3x = 0\,\ldots\,d^nx = 0\,\ldots$$

Twierdzenie [**151**] że pochodna jest ilorazem różniczek funkcji i zmiennéj niezależnéj, nie może mieć miejsca dla różniczek i pochodnych wyższych rzędów nad pierwszy.

Zamiast mówić : *pochodna* lub *różniczka pierwszego, drugiego... ngo rzędu*, mówią często : *pochodna, różniczka : pierwsza, druga... nta*, przez skrócenie.

188. Różniczki jako granice różnic. TWIERDZENIE POMOCNICZE. *Niech będzie funkcja* $F(x,\alpha)$, gdzie α *może się zmieniać niezależnie od* x : *załóżmy że funkcja ta, jak również jéj pochodna* $\frac{dF(x,\alpha)}{dx} = F'(x,\alpha)$ *względem* x *są ciągłemi dla wszelkich wartości* x *zawartych pomiędzy* x_0 *i* X. *Jeżeli* $F(x,\alpha)$ *staje się zerem dla wartości szczególnéj* α_0 *nadanéj ilości* α *jakiekolwiek byłoby* x *pomiędzy* x_0 *i* X, *powiadam, że pochodna* $F'(x,\alpha)$ *staje się również zerem dla* $\alpha = \alpha_0$.

W rzeczy saméj, z określenia [**187**]

$$F'(x, \alpha) = \text{gr}\,\frac{F(x+\Delta x, \alpha) - F(x, \alpha)}{\Delta x}$$

$F(x,\alpha_0)$ i $F(x+\Delta x,\alpha_0)$ są równemi zeru jakiekolwiek byłoby x i Δx (pomiędzy x_0 i X) : a zatém i stosunek

$$\frac{F(x+\Delta x, \alpha_0) - F(x, \alpha_0)}{\Delta x}$$

jest równym zeru, jakiekolwiek przypuścimy Δx. Stosunek ten będąc stale równym zeru i zdążając do granicy skończonéj $F'(x,\alpha_0)$ w sposób ciągły, gdy Δx zdąża do zera w sposób ciągły, granica ta jest również równą zeru. c. b. d. d.

189. Dowiedliśmy wyżéj [**139**], że jeżeli y jest funkcją ciągłą, w granicach pomiędzy któremi zmieniamy zmienną niezależną x, to

$$\frac{dy}{dx}=\text{gr}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

co możemy napisać

$$(1)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}+\varepsilon$$

oznaczając przez ε nieskończenie małą, która zdąża do zera wraz z Δx. Załóżmy że pochodna $\frac{dy}{dx}$ jest funkcją ciągłą w granicach pomiędzy któremi zmieniamy tę zmienną niezależną.

Podstawmy we wzorze ogólnym (1) za y stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, który jest równie dobrze jak y funkcją x; otrzymamy

$$\frac{\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{d\frac{\Delta y}{\Delta x}}{dx}+\varepsilon'$$

oznaczywszy przez ε' nieskończenie małą, zdążającą również do zera wraz z Δx.

Gdy x przybiera przyrostek Δx, przyrostek Δy przybiera nowy przyrostek $\Delta^2 y$ t. j. staje się $\Delta y+\Delta^2 y$ [**19**]; Δx zaś przyjmujemy ciągle to samo, więc

$$\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y+\Delta^2 y}{\Delta x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta^2 y}{\Delta x}$$

a zatém

$$\frac{\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

zaś

$$\frac{d\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx} + \varepsilon\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d\varepsilon}{dx}$$

a ztąd

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon$$

Lecz ε jest funkcją x i dx, która to funkcja zdąża do zera gdy dx zdąża do zera: na zasadzie powyższego twierdzenia, ponieważ dx jest niezależném od x [186], w granicy gdy ε staje się zerem, $\dfrac{d\varepsilon}{dx}$ także staje się zerem, podobnie ε'; oznaczając przez

$$\varepsilon_1 = \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'$$

nieskończenie małą zdążającą do zera wraz z Δx, mamy

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} + \varepsilon_1$$

Postępując w podobny sposób otrzymamy z łatwością

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{d^3y}{dx^3} + \varepsilon_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^ny}{dx^n} + \varepsilon_{n-1}$$

oznaczając ciągle przez $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ nieskończenie małe zdążające do zera wraz z Δx, i zakładając że pochodne $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3} \cdots \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ są funkcjami ciągłemi x w granicach pomiędzy którémi zmieniamy tę zmiennę niezależną; co możemy napisać :

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}=\frac{d^n y}{dx^n}$$

czyli że :

Granica stosunku n*téj różnicy funkcji do* n*téj potęgi przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj, równa się pochodnéj rzędu* n*tego téjże funkcji.*

Mamy również, jak powyżéj

$$\Delta^n y=\frac{d^n y}{dx^n}\Delta x^n+\varepsilon\,\Delta x^n$$

a że [**186**]

$$\frac{d^n y}{dx^n}\Delta x^n=d^n y$$

więc

$$\Delta^n y=d^n y+\varepsilon\,\Delta x^n$$

czyli

$$\frac{\Delta^n y}{d^n y}=1+\frac{\varepsilon}{\frac{d^n y}{dx^n}}$$

Jeżeli $n$ta pochodna $\frac{d^n y}{dx^n}$ nie jest zerem, co ma miejsce w ogólności pod temiż samemi warunkami względem pochodnéj poprzedniéj, któreśmy co do pierwszéj pochodnéj względem saméj funkcji wymienili [**145**], to w ogólności otrzymamy

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta^n y}{\Delta^n y}=1$$

Granica stosunku n*téj różnicy funkcji do* n*téj różniczki téj-*

że funkcji równa się jedności; różnica i różniczka jednego rzędu różnić się mogą tylko o nieskończenie małe rzędu wyższego od nich [**121**] *byleby* n*ta pochodna nie była zerem, czyli* n—1*sza pochodna nie była stałą.*

Różniczki wyższych rzędów funkcyj zasadniczych.

190. Funkcje algebraiczne. Niech będzie funkcja

$$y = x^m$$

widzieliśmy już powyżéj, że

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

Ogólności tego wzoru, można z łatwością dowieść wiadomym sposobem, zakładając że ma miejsce dla $n+k$, gdzie k oznacza całkowitę dodatną i dowodząc go dla $n=k+1$. Jakoż różniczkując pochodnę

$$\frac{d^ky}{dx^k} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\,x^{m-k}$$

otrzymamy

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)(m-k)x^{m-(k+1)}$$

wypadek z podstawienia $n=k+1$ we wzorze danym.

Wzór więc ten zachodząc dla $k=1$, $k=2$, zachodzi dla $k=3$, $k=4\ldots k=n$, a więc jest ogólnym.

Jeżeli m jest całkowitém dodatném, $m$ta pochodna będzie stałą, a zakładając $m=n$ w powyższém wyrażeniu otrzymamy:

$$\frac{d^m x^m}{dx^m}=m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1$$

następne pochodne będą więc zerami.

Podobnież, wielomian całkowity stopnia $m$go

$$y=ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+px+q$$

ma mtą pochodną stałą

$$\frac{d^m y}{dx^m}=am(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1$$

a następne równe zeru.

191. Funkcja logarytmowa. Niech będzie funkcja

$$y=\log x$$

Mamy [**161**]

$$\frac{dy}{dx}=x^{-1}\log e$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-1.x^{-2}\log e$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=1.2\,x^{-3}\log e$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots(n-1)x^{-n}\log e$$

Jeżeli logarytm jest naturalnym

$$\frac{d^n l.x}{dx^n} = (-1)^{n-1} 1.2.3 \ldots (n-1)\, x^{-n}$$

Ogólności tych wzorów można z łatwością udowodnić jak powyżéj [**190**].

Pochodne wszystkich rzędów funkcji logarytwowéj są funkcjami algebraicznemi.

192. Funkcja wykładnicza. Niech będzie

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x l.a \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x (l.a)^2 \ldots$$

a więc

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^x (l.a)^n$$

Jeżeli $a = e$

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$$

Ogólności tych wzorów można z łatwością udowodnić jak powyżéj [**119**].

Wszystkie pochodne funkcji wykładniczéj są takiemi samemi funkcjami wykładniczemi, pomnożonemi przez stałą potęgę całkowitą logarytmu naturalnego zasady.

193. Funkcje trygonometryczne. Niech będzie

$$y = \text{wst}\, x \qquad y = \text{dos}\, x$$

mamy, biorąc kolejno pochodne

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{dos} x \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{wst} x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{wst} x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{dos} x$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = -\operatorname{dos} x \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \operatorname{wst} x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{wst} x \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = \operatorname{dos} x$$

. . . .

Pochodne powtarzają się co cztery rzędy. Aby znaleźć wzór ogólny, weźmy pod uwagę funkcję

$$y = \operatorname{wst}(x + \alpha)$$

gdzie α jest stałą :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{dos}(x + \alpha) = \operatorname{wst}\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

tak, że pochodnę wstawy otrzymujemy dodając do łuku stałą $\frac{\pi}{2}$ i biorąc znów wstawę. Jakiekolwiek więc będzie n, mamy zawsze

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \operatorname{wst}\left(x + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Zakładjąac $\alpha = 0$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$ otrzymamy dwa wzory ogólne:

$$\frac{d^n \operatorname{wst} x}{dx^n} = \operatorname{wst}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^n \operatorname{dos} x}{dx^n} = \operatorname{dos}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Można więc powiedzieć że i funkcje trygonometryczne rodzą pochodne podobne im samym, własność podobna funkcjom wykładniczym : zwracamy tu uwagę na to pierwsze podobieństwo między temi tak napozór różnemi przestępnemi, które jak zobaczymy później, w rzeczywistości sprowadzają się jedne do drugich i stanowią jedną tylko funkcję przestępną.

Funkcje kołowe [**166**] mają pierwsze zaraz pochodne algebraiczne, a zatém co do dalszych, podchodzą pod ogół funkcyj algebraicznych.

Pochodne i różniczki wyższych rzędów funkcyj złożonych i niewyraźnych.

Umiejąc znaleźć pochodnę pierwszego rzędu funkcji złożonéj, z łatwością przez n różniczkowań po sobie następujących otrzymać możemy pochodną $n$go rzędu. Często jednak pożyteczném będzie postawienie ogólnego wzoru na pochodnę lub różniczkę $n$go rzędu funkcji złożonéj, wyrażoną przez pochodne lub różniczki funkcyj prostych składających.

194. Pochodne iloczynu. Weźmy naprzód pod uwagę funkcję

$$y = uv$$

będącą iloczynem dwóch funkcyj u i v zmiennéj niezależnéj x. Wiemy już [**156**] że

$$dy = vdu + udv \tag{1}$$

Różniczkując powtórnie otrzymamy

$$\begin{aligned} d^2y &= d(v\,du) + d(udv) \\ &= vd(du) + dv\,du + ud(dv) + du\,dv \end{aligned}$$

czyli

(2) $$d^2y = vd^2u + 2dv\,du + ud^2v$$

Różniczkując jeszcze raz otrzymamy w podobny sposób

$$d^3y = vd^3u + dvd^2u + 2\,(dvd^2u + dud^2v) + ud^3v + dud^2v$$

czyli

(3) $$d^3y = vd^3u + 3dvd^2u + 3dud^2v + ud^3v$$

Porównywając wzory (1), (2), (3), widzimy że w rozwinięciach różniczek funkcji złożonéj, rzęd jednéj z funkcyj składających zmniéjsza się o jedność, a rzęd drugiéj zwiększa się o jedność od wyrazu do wyrazu, spółczynniki liczebne są spółczynnikami wyrazów odpowiednich rozwinięcia dwumianu; naprowadzeni więc jesteśmy na napisanie wzoru ogólnego

(4) $$d^ny = vd^nu + \frac{n}{1}dvd^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2vd^{n-2}u + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}d^kvd^{n-k}u + \ldots + d^nv.u.$$

Aby dowieść ogólności wzoru (4) dość jest dowieść że jeżeli zachodzi dla rzędu n, zachodzi również dla rzędu $n+1$: wniesiemy następnie że ponieważ zachodzi dla $n=3$ z równania (3), zachodzi dla $n=4$, a więc i dla $n=5$ i t.d. jest więc ogólnym.

Różniczkując wzór (4), otrzymamy w saméj rzeczy:

$$d^{n+1}y = vd^{n+1}u + \frac{n}{1}dvd^nu + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2vd^{n-1}u + \ldots + d^nvdu$$
$$+ dvd^nu + \frac{n}{1}d^2vd^{n-1}u + \ldots + \frac{n}{1}d^nvdu + d^{n+1}v.u$$

łącząc wyrazy podobne jak $\frac{n}{1}\, dv\, d^n u$ i $dv\, d^n u$,

$\frac{n(n-1)}{1.2}\, d^2 v d^{n-1} u$ i $\frac{n}{1}\, d^2 v\, d^{n-1} u$ i t. d. otrzymamy:

$$d^{n+1}(uv) = v d^{n+1} u + \frac{n+1}{1}\, dv d^n u$$

$$+ \frac{n(n+1)}{1.2}\, d^2 v d^{n-1} u + \ldots + d^{n+1} v . u$$

wzór, któren otrzymalibyśmy byli wprost z (4), podstawiając za n wartość $n+1$. Wzór więc (4) jest ogólnym.

Wzór (4) można napisać *symbolicznie* w następujący sposób:

(5) $$d^n(uv) = (du + dv)^{(n)}$$

uważając, że w rozwinięciu $n$téj potęgi dwumianu

$$(du + dv)^n = 1 . du^n + \frac{n}{1}\, dv du^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\, dv^2 du^{n-2} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\, dv^k du^{n-k} + \ldots + dv^n . 1$$

wszędzie zamiast wykładników różniczek du i dv pisać należy wskaźniki rzędów różniczkowania; w pierwszym zaś wyrazie, zastąpić 1, to jest potęgę 0 różniczki dv, przez v, w ostatnim potęgę 0 różniczki du przez u, przyjmując że różniczką rzędu 0 funkcji jest sama funkcja, co jest usprawiedliwioném.

W ogólności, powiadam że różniczka iloczynu ilukolwiek czynników $u, v, w \ldots z$ będących funkcjami jednéj zmiennéj niezależnéj x, może być przedstawioną za pomocą wzoru *symbolicznego*:

(6) $$d^n(uvw\ldots z) = (du + dv + dw + \ldots + dz)^{(n)}$$

24

różniącego się od rozwinięcia $n$tej potęgi summy różniczek tém, że wszędzie zamiast potęg odpowiednich różniczek, piszemy wskaźniki rzędów różniczkowania i że zastępujemy potęgę zero téj różniczki która nie znajduje się w pewnym wyrazie czyli jedność, przez odpowiednią funkcję.

Dowiedliśmy za pomocą wzoru (5) że wzór (6) ma miejsce dla 2 czynników: jeżeli przypuszczając go prawdziwym dla $m-1$ czynników dowiedziemy że zachodzi również dla m czynników, dowiedziemy tém samém jego ogólności.

Oznaczmy przez skrócenie iloczyn $m-1$ czynników

$$u v w \ldots t = s$$

iloczyn m czynników będzie

$$u v w \ldots t z = s z$$

a na zasadzie poprzedzającego dowodzenia

$$d^n (u v w \ldots t z) = d^n (s z) = (d s + d z)^{(n)}$$

Weźmy pod uwagę jeden z wyrazów rozwinięcia potęgi dwumianu $(ds + dz)^n$:

$$C_k ds^k dz^{n-k}$$

nazywając C_k spółczynnik tego wyrazu.
Wyrazowi temu będzie odpowiadał w rozwinięciu $(ds+dz)^{(n)}$ wyraz

$$C_k d^k s d^{n-k} z$$

Lecz z założenia

$$d^k s = (du + dv + dw + \ldots + dt)^{(k)}$$

więc wyraz poprzedzający, napisany symbolicznie, stanie się

$$C_k(du + dv + dw + \ldots + dt)^{(k)} dz^{(n-k)}$$

a biorąc summę wszystkich wyrazów, otrzymamy rozwinięcie symboliczne $n$téj potęgi summy: $(du + dv\, dw + \ldots + dt + dz)$; a zatém

$$d^n(uvw\ldots tz) = (du + dv + dw + \ldots + dt + dz)^{(n)} \quad \text{c.b.d.d}$$

195. Przykład i. Niech będzie funkcja

$$y = e^{(a+b)x}$$

zakładając

$$e^{ax} = u \qquad e^{bx} = v$$

różniczkując jak iloczyn [**194**] otrzymamy

$$d^n y = e^{bx} d^n(e^{ax}) + \frac{n}{1} d.e^{bx} d^{n-1} e^{ax} + \ldots + d^n e^{bx}.e^{ax}$$

a ztąd, zważywszy że

$$de^{ax} = ae^{ax}dx \qquad d^2e^{ax} = a^2e^{ax}dx^2 \qquad d^ne^{ax} = a^ne^{ax}dx^n$$
$$de^{bx} = be^{bx}dx \qquad d^2e^{bx} = b^2e^{bx}dx^2 \ldots d^ne^{bx} = b^ne^{bx}dx^n$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{bx}a^ne^{ax} + \frac{n}{1}be^{bx}a^{n-1}e^{ax} + \frac{n(n-1)}{1.2}b^2e^{bx}a^{n-2}e^{ax} + \ldots + b^ne^{bx}e^{ax}$$

Lecz z drugiéj strony mamy

$$y = e^{(a+b)x} \qquad \frac{dy}{dx} = (a+b)e^{(a+b)x} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = (a+b)^2 e^{(a+b)x} \ldots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = (a+b)^n e^{(a+b)x}$$

a ztąd

$$(a+b)^n e^{(a+b)x} = a^n e^{(a+b)x} + \frac{n}{1} a^{n-1} b . e^{(a+b)x}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 e^{(a+b)x} + \ldots + b^n e^{(a+b)x}$$

a dzieląc przez $e^{(a+b)x}$ otrzymamy

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

dwumian Newtona dla wykładnika całkowitego i dodatnego.

Przykład II. Niech będzie funkcja

$$y = x^{a+b}$$

wiemy [**190**] że

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)\, x^{a+b-n}$$

Z drugiej strony, zakładając

$$x^a = u \qquad x^b = v$$

i różniczkując funkcję

$$y = uv = x^a x^b = x^{a+b}$$

jako iloczyn [**194**] otrzymamy

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^a b(b-1)\ldots(b-n+1)x^{b-n} + \frac{n}{1} a x^{a-1} b(b-1)\ldots(b-n+2)x^{b-n+1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} a(a-1)\, x^{a-2} b\,(b-1)\ldots(b-n+3)\, x^{b-n+2} + \ldots$$
$$+ a(a-1)(a-n+1)\, x^{(a-n)} x^b$$

Porównywając to wyrażenie $n$téj pochodnéj z poprzedzającém i dzieląc przez wspólny czynnik x^{a+b-n}, otrzymamy równość

$$(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)=b(b-1)\ldots(b-n+1)$$
$$+\frac{n}{1}ab(b-1)\ldots(b-n+2)+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)b(b-1)\ldots(b-n+3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+a(a-1)\ldots(a-n+1)$$

Dzieląc z obu stron przez $1.\ 2.\ldots\ n$, otrzymamy

$$\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}{1.2\ldots n}=\frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$+\frac{a}{1}\,\frac{b(b-1)\ldots(b-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{a(a-1)}{1.2}\,\frac{b(b-1)\ldots(b-n+3)}{1.2\ldots(n-2)}$$
$$+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2\ldots n}$$

a to jakiekolwiek przypuścimy a i b.

Widzimy z tych dwóch przykładów, w jaki sposób otrzymywanie pochodnych wyższych rzędów, naprowadzić może na rozwinięcia pewnych funkcyj na szeregi, lub summy skończone.

Przykład III. *Znaleść ntą pochodnę funkcji*

$$y=\text{łuk}\ \text{wst}\ x$$

Różniczkując dwa razy otrzymamy

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\times(-2x)=\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

mamy więc pomiędzy dwoma pierwszemi pochodnemi związek następujący :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}$$

Różniczkując obie strony tego równania $n-2$ razy:

$$\frac{d^{n-2}\left[(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx^{n-2}}=\frac{d^{n-2}\left[x\frac{dy}{dx}\right]}{dx^{n-2}}$$

stosując prawidło różniczkowania iloczynu i uważając że

$$\frac{d(1-x^2)}{dx}=-2x \qquad \frac{d^2(1-x^2)}{dx}=-2$$

że zatém wyższe pochodne czynnika $1-x^2$ są zerami, otrzymamy

$$(1-x^2)\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{n-2}{1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(-2x)+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}(-2)$$
$$=x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{n-2}{1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

a ztąd

$$(1-x^2)\frac{d^ny}{dx^n}=(2n-3)x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(n-2)^2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

wzór, który nam daje pochodnę jakiegokolwiek rzędu, wyrażoną przez pochodne dwóch poprzedzających rzędów. Otrzymamy z łatwością za pomocą tego wzoru, zważywszy na (1), (2)

$$(3)\qquad (1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3}=3x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}$$

$$(4)\qquad (1-x^2)\frac{d^4y}{dx^4}=5x\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{d^2y}{dx^2}$$

. . . .

Przykład IV. *Znaleść ntą pochodnę funkcji*

$$y=\text{łuk st}\,x$$

Postępując jak w poprzedzającym przykładzie, otrzymamy ze wzorów

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

równanie

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=-2x\frac{dy}{dx}$$

a stosując prawidło na ntą pochodnę iloczynu

$$(1+x^2)\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{n-2}{1}\cdot 2x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{(n-2(n-3)}{1.2}2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

$$=-2x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\frac{n-2}{1}2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

czyli

$$(1+x^2)\frac{d^ny}{dx^n}=-2(n-1)x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-(n-2)(n-1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

wzór, który nam daje pochodnę $n$go rzędu wyrażoną przez pochodne dwóch poprzedzających rzędów.

196. Różniczkowanie częściowe wyższych rzędów.

Twierdzenie. *Oznaczmy przez* f(u, v) *funkcję dwóch funkcyj* u i v *zmiennéj niezależnéj* x; *przez* $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$ *pochodne częściowe* [**170**] *funkcji* f(u,v) *względem* u *i* v : *powiadam że pochodna częściowa wyrażenia* $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$ *względem* v, *równa się pochodnéj częściowéj wyrażenia* $\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ *względem* u; t. j. *że*

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]}{\partial v}=\frac{\partial\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]}{\partial u}$$

byleby

$$f(u, v), \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$$

były funkcjami ciągłemi zmiennych u i v.

W rzeczy saméj, z określenia mamy [170]

$$(1) \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} + \varepsilon$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} + \eta$$

gdzie ε zdąża do zera gdy Δu zdąża do zera, niezależnie od v, zaś η zdąża do zera, gdy Δv zdąża do zera niezależnie od u.

Nadajmy w (1) zmiennéj v przyrostek Δv, pozostawiając u niezmienném i oznaczmy przyrostek odpowiedni $\frac{\partial f(u,v)}{du}$ przez $\Delta_v \frac{\partial f(u,v)}{du}$, przyrostek odpowiedni ε przez $\Delta_v \varepsilon$: uczyńmy to samo względem u w równaniu (2); otrzymamy, dzieląc pierwszy przyrostek przez Δv, drugi przez Δu :

$$(3) \qquad \frac{\Delta_v \dfrac{\partial f(u, v)}{\partial u}}{\Delta v}$$

$$= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) + f(u, v)}{\Delta v \, \Delta u} + \frac{\Delta_v \varepsilon}{\Delta v}$$

$$(4) \qquad \frac{\Delta_u \dfrac{\partial f(u, v)}{\partial v}}{\Delta u}$$

$$= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v)}{\Delta v \, \Delta u} + \frac{\Delta_u \eta}{\Delta u}$$

Na zasadzie poprzednio [188] udowodnionego twierdzenia

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta_v\varepsilon}{\Delta v}=0 \quad \text{gdy} \quad \Delta u \quad \text{zdąża do} \quad 0$$

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta_u\eta}{\Delta u}=0 \quad \text{gdy} \quad \Delta v \quad \text{zdąża do} \quad 0$$

gdy więc Δx, a zatém Δu i Δv zdążają do zera, granice drugich stron (3) i (4) są sobie równe : a więc

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta_v \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}}{\Delta v}=\operatorname{gr}\frac{\Delta_u \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}}{\Delta u}$$

czyli

$$\frac{\partial\left[\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]}{\partial v}=\frac{\partial\left[\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]}{\partial u} \qquad \text{c b. d .d}$$

Pochodne te drugiego rzędu oznaczamy przez skrócenie przez $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$: twierdzenie poprzedzające zawartém będzie w równości

$$\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v\,\partial u} \tag{5}$$

która wyraża że *porządek różniczkowania częściowego nie wpływa na wartość pochodnéj częściowéj*.

PRZYKŁAD. Niech będzie funkcja

$$y=u^m \mathrm{l}.v$$

mamy

$$\frac{\partial y}{\partial u}=mu^{m-1}\mathrm{l}.v$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=\frac{mu^{m-1}}{v}$$

podobnież

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u^m}{v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = \frac{mu^{m-1}}{v}$$

a więc widzimy że;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$$

197. Twierdzenie to, które z łatwością uogólnić można do funkcji złożonéj z ilukolwiek funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, daje nam sposób wyrażania pochodnych częściowych wyższych rzędów funkcyj złożonych.

Niech będzie funkcja

$$(1) \qquad y = f(u, v, w \ldots z)$$

złożona z m funkcyj $u, v, w \ldots z$ zmiennéj niezależnéj x. Ponieważ możemy brać pochodne częściowe téj funkcji względem każdéj ze zmiennych $u, v, w \ldots z$, otrzymamy m pochodnych pierwszego rzędu

$$\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} \cdots \frac{\partial y}{\partial z}$$

Każda z tych pochodnych jest w ogólności funkcją wszystkich zmiennych $u, v, w \ldots z$, każda więc miałaby znów m pochodnych częściowych, czyli mielibyśmy razem m^2 pochodnych drugiego rzędu. Lecz ponieważ porządek różniczkowania częściowego nie wpływa na wartość pochodnych, właściwie będziemy mieli tylko tyle pochodnych częściowych drugiego rzędu, ile możemy uczynić zestawień z m przedmiotów dwa po dwa, (wraz z temi, które otrzymujemy podstawiając jeden dwa razy) to jest:

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

Pochodne te oznaczać będziemy jak następuje

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}, \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} \\
 & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}, \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z} \\
 & & \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}, \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial w \partial z} \\
 & & \cdots & \cdots \\
 & & & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}
\end{array}$$

uważając że

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial \left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = \frac{\partial \left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]}{\partial v} = \frac{\partial \left[\frac{\partial y}{\partial v}\right]}{\partial u} \quad \text{i t. d.}$$

W podobny sposób, różniczkując częściowo pochodne drugiego rzędu, otrzymamy $\frac{m(m+1)(m+2)}{2.\ 3}$ pochodnych częściowych trzeciego rzędu, które oznaczymy przez

$$\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v \partial w} \text{ i t. d.}$$

W ogólności: liczba pochodnych częściowych $n$go rzędu funkcji złożonéj z m funkcyj, będzie

$$\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots.n}$$

Wyrażeniem ogólném jednéj z pochodnych częściowych $n$tego rzędu, będzie

$$\frac{\partial^n y}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma \dots \partial z^\mu}$$

gdzie α, β, $\gamma \dots \mu$ są liczbami całkowitemi (niektóre z nich mogą być równemi 0), których summa równa się n i z których każda oznacza liczbę różniczkowań częściowych dokonanych względem odpowiedniéj zmiennéj.

198. Wyrażenia różniczek zupełnych wyższych rzędów funkcyj złożonych, przez różniczki i pochodne częściowe funkcyj składających. Niech będzie funkcja złożona

$$y = f(u, v, w \dots z)$$

z funkcyj u, v, $w \dots z$ zmiennéj niezależnéj x.

Wiemy że [**172**]

$$(1) \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv + \frac{\partial y}{\partial w}\, dw + \dots + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz.$$

Różniczkując każdy wyraz tego wyrażenia jako iloczyn, otrzymamy:

$$(2) \quad d^2y = d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + d\left(\frac{\partial y}{v}\right) dv + d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dw + \dots + d\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) dz$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\, d^2u + \frac{\partial y}{\partial v}\, d^2v + \frac{\partial y}{\partial w}\, d^2w + \dots + \frac{\partial y}{\partial z}\, d^2z$$

Stosując do $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v} \ldots \frac{\partial y}{\partial z}$ które są funkcjami $u, v, w \ldots z$, prawidło (1) różniczkowania częściowego, znajdziemy

$$
(3) \left\{
\begin{aligned}
d\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\partial u + \frac{\partial y^2}{\partial u \partial v}\partial v + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}\partial w + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}\partial z \\
d\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}du + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}dw + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z}dz \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
d\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}du + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z}dv + \frac{\partial^2 y}{\partial w \partial z}dw + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}dz
\end{aligned}
\right.
$$

a podstawiając te wartości w (2), otrzymamy wartość różniczki częściowéj drugiego rzędu d^2y funkcji złożonéj y, następującą:

$$
(4) \left\{
\begin{aligned}
d^2y = \Big(& \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}dudv + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}dudw + \ldots \\
& \qquad + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z}dudz \\
& + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v dw}dvdw + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z}dvdz \\
& + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
& \qquad + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}dz^2 \Big) \\
& + \frac{\partial y}{\partial u}d^2u + \frac{\partial y}{\partial v}d^2v + \frac{\partial y}{\partial w}d^2w + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}d^2z
\end{aligned}
\right.
$$

W podobny sposób otrzymać można różniczki wyższych rzędów d^3y, $d^4y, \ldots$; lecz wzory stają się coraz dłuższymi i w praktyce zwykle daleko łatwiéj jest postępować wprost, otrzymując naprzód wyrażenie różniczki zupełnéj pierwszego rzędu jako funkcję zmiennych danych (podstawiając za pochodne częściowe ich wartości); następnie różniczkując tak otrzymane wyrażenie zwykłym sposobem, utworzyć różniczkę drugą w funkcji zmiennych danych; z różniczki drugiéj różniczkę trzecią ... z różniczki $n-1$éj różniczkę ntą.

Pochodne : drugą, trzecią...funkcji y względem zmiennéj niezależnéj x otrzymamy, dzieląc różniczkę zupełną drugą, trzecią,...przez potęgę drugą trzecią,... przyrostku stałego dx zmiennéj niezależnéj x.

199. Przykład I. Niech będzie funkcja złożona

$$y = u^2 e^v$$

otrzymamy

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2ue^v = \frac{2y}{u} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u^2 e^v = y$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 2e^v = \frac{2y}{u^2} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} = 2ue^v = \frac{2y}{v} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = u^2 e^v = y$$

. . . .

a zatém

$$dy = \frac{2y}{u} du + ydv = y\left(\frac{2}{u} du + dv\right)$$

$$d^2y = \frac{2y}{u^2} du^2 + 2\frac{2y}{u} dudv + y\,dv^2 + \frac{2y}{u} d^2u + yd^2v$$

$$= y\left(\frac{2}{u^2} du^2 + \frac{4}{u} dudv + dv^2 + \frac{2}{u} d^2u + d^2v\right)$$

. . . .

Pochodne względem zmiennéj niezależnéj x będą :

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{u}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = y\left[\frac{2}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{4}{u}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{2}{u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right]$$

. . . .

Chcąc naprzykład znaleść pochodne wyższych rzędów funkcji

$$y = x^{2m} e^{\text{wst}x}$$

załóżmy

$$x^m = u \qquad \text{wst}\, x = v$$

otrzymamy

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1} \qquad \frac{dv}{dx} = \text{dos}\, x$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = -\text{wst}\, x$$

. . . .

a więc

$$\frac{dy}{dx} = x^{2m} e^{\text{wst} x} \left(\frac{2m}{x} + \text{dos}\, x\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{2m} e^{\text{wst} x} \left[\frac{2m^2}{x^2} + \frac{4m}{x}\text{dos}\, x + \text{dos}^2 x + \frac{2m(m-1)}{x^2} - \text{wst}\, x\right]$$

. . . .

Czytelnik może przerobić dla wprawy trzecią, czwartą... pochodnę.

P r z y k ł a d II. *Znaleść drugą pochodnę względem* x *wyrażenia*

$$y = \left(\frac{dz}{dx}\right)^5$$

gdzie z jest funkcją x.

Zakładając

$$y = u^5 \qquad \frac{dz}{dx} = u$$

otrzymamy

$$dy = 5u^4 du \qquad du = \frac{d^2z}{dx^2}dx$$

a więc

$$dy = 5\left(\frac{dz}{dx}\right)^4 \frac{d^2z}{dx^2}dx$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(\frac{dz}{dx}\right)^4 \frac{d^2z}{dx^2}$$

Załóżmy

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \frac{dz}{dx} = v \quad \frac{d^2z}{dx^2} = v'$$

różniczkując wyrażenie

$$y' = 5v^4v'$$

otrzymamy

$$dy' = 20v^3v'dv + 5v^4dv'$$

lecz

$$dy' = \frac{d^2y}{dx^2}dx \quad dv = v'dx \quad dv' = \frac{d^3z}{dx^3}dx$$

a więc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20\left(\frac{dz}{dx}\right)^3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + 5\left(\frac{dz}{dx}\right)^4\frac{d^3z}{dx^3}$$

Przykład III. *Znaleść pochodnę wyrażenia*

$$y = \text{łuk st}\,\frac{dz}{dx}$$

gdzie z jest funkcją zmiennéj niezależnéj x.

Zakładając

$$u = \frac{dz}{dx}$$

otrzymamy

$$dy = \frac{du}{1+u^2} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \quad \text{czyli} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

200. Uwaga. Gdyby funkcje składające $u, v, w \ldots z$ były wszystkie funkcjami linijnemi zmiennéj niezależnéj x:

$$u = a_1x + b_1,\ v = a_2x + b_2,\ w = a_3x + b_3, \ldots z = a_mx + b_m$$

mielibyśmy

$$d^2u = 0 \quad d^2v = 0 \quad d^2w = 0 \ldots d^2z = 0$$

a wzór (4) [**198**] stałby się

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} dudv + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial z} dudz$$

$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial z} dvdz$$

$$+ \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz^2$$

wyrażenie, które przedstawić możemy symbolicznie :

$$d^2y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z}\right)^{(2)} = (dy)^{(2)}$$

rozwijając wyrażenie (1) [**198**] różniczki pierwszego rzędu jak kwadrat i zastępując wykładniki przez wskaźniki rzędów różniczkowania.

Prawidło to uogólnić można dla różniczki jakiegokolwiek rzędu :

Jeżeli funkcje u, v . . . z, *składające funkcję*

$$y = f(u, v, \ldots z)$$

są funkcjami linijnemi zmiennéj niezależnéj x, *powiadam że*

$$d^n y = \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial y}{\partial z} dz\right)^{(n)} = (dy)^{(n)}$$

byleby rozwijając nawias jak *n*tę potęgę, zastępować wszędzie wykładniki przez wskaźniki rzędów różniczkowania : to jest iloczyny

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{\beta} \cdots \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^{\mu}$$

przez pochodne częściowe

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots+\mu}y}{\partial u^{\alpha}\partial v^{\beta}\ldots\partial z^{\mu}}$$

Ogólności tego twierdzenia udowodnić można z łatwością, przypuszczając że zachodzi dla rzędu n i dowodząc że zachodzi również dla rzędu $n+1$: jak powyżéj [**194**].

201. Różniczki wyższych rzędów funkcyj niewyraźnych. Weźmy naprzód pod uwagę funkcję jednéj zmiennéj niezależnéj, wyrażoną przez równanie

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

które daje y jako funkcję zmiennéj niezależnéj x. Uważając funkcję tę jako funkcję złożoną i zakładając różniczki zupełne téj funkcji mającéj wartość stałą równą zero, równemi zero, otrzymamy [**198**] uważając dx za stałą, dy i pochodne częściowe za zmienne :

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy=0 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right)+\dfrac{\partial f}{\partial y}d^2y=0 \\[2ex] \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3\Big) \\[2ex] \qquad +3\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)d^2y+\dfrac{\partial f}{\partial y}d^3y=0 \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pierwsze z tych równań daje nam wartość pierwszéj różniczki dy : podstawiwszy wartość tę w równanie 2gie otrzymamy z niego wartość drugiéj różniczki d^2y ; podstawiwszy tą i poprzednią wartość w równanie 3cie otrzymamy z niego wartość trzeciéj różniczki d^3y i t. d. Różniczki te wyrażonemi są przez pochodne częściowe różnych rzędów funkcji $f(x, y)$ które to pochodne z równania (1) z łatwością, różniczkując, otrzymanemi być mogą.

Mając różniczki, mamy odrazu pochodne dzieląc przez odpowiednią potęgę dx :

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$$

Przykład. Niech będzie naprzykład równanie

$$(\alpha) \qquad xe^y + 3x \operatorname{wst} y - 22 = 0$$

które określa y jako funkcję zmiennéj niezależnéj x. Różniczkując otrzymamy

$$e^y dx + xe^y dy + 3 \operatorname{wst} y dx + 3\, x \operatorname{dos} y dy = 0$$

czyli

$$(\beta) \qquad (xe^y + 3\, x \operatorname{dos} y)\, dy + (e^y + 3 \operatorname{wst} y)\, dx = 0$$

a ztąd

$$(\gamma) \qquad dy = -\frac{e^y + 3 \operatorname{wst} y}{xe^y + 3x \operatorname{dos} y}\, dx$$

Różniczkując powtórnie równanie (β) otrzymamy

$$(e^y dx + xe^y dy + 3 \operatorname{dos} y\, dx - 3x \operatorname{wst} y\, dy)\, dy + (xe^y + 3x \operatorname{dos} y) d^2y$$
$$+ (e^y dy + 3 \operatorname{dos} y dy)\, dx = 0$$

bo dx uważamy jako stałą, więc $d^2x = 0$: sprowadzając do prostszego wyrażenia

$$(\delta) \qquad (xe^y + 3x \operatorname{dos} y)\, d^2y + (xe^y - 3x \operatorname{wst} y)\, dy^2$$
$$+ (2e^y + 6 \operatorname{dos} y)\, dy dx = 0$$

a podstawiając za dy wartość (γ) :

$$(xe^y + 3x\,\mathrm{dos}\,y)\,d^2y - \left[\frac{e^y + 3x\,\mathrm{wst}\,y}{xe^y + 3x\,\mathrm{dos}\,y}(xe^y - 3x\,\mathrm{wst}\,y) + \frac{e^y + 3\,\mathrm{wst}\,y}{xe^y + 3x\,\mathrm{dos}\,y}(2e^y + 6\,\mathrm{dos}\,y)\right]dx^2 = 0$$

czyli

$$d^2y = \frac{(e^y + 3\,\mathrm{wst}\,y)(xe^y + 2e^y + 6\,\mathrm{dos}\,y - 3x\,\mathrm{wst}\,y)}{(xe^y + 3x\,\mathrm{dos}\,y)^2}\,dx^2 \qquad \text{i t. d.}$$

202. Weźmy teraz przypadek ogólny n równań

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

pomiędzy $n+1$ zmiennemi. Z tych równań moglibyśmy w ogólności wyrugować $n-1$ zmiennych czyli wyrazić wszystkie zmienne przez jedną z nich. Mamy więc tu jedną zmienną niezależną (którąkolwiek z $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$); i n funkcyj téj zmiennéj niezalennéj (pozostałe z $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$); idzie nam o wyznaczenie różniczek i pochodnych różnych rzędów tych funkcyj.

Różniczki pierwszego rzędu w liczbie n są wyznaczone jakeśmy widzieli [**181**] za pomocą n równań

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} = 0 \end{cases}$$

pierwszego stopnia co do $dx_1 \; dx_2 \ldots dx_n, \; dx_{n+1}$, które wyznaczą n z tych różniczek przez jedną z nich uważaną jako różniczkę zmiennéj niezależnéj. Pochodne częściowe funkcyj $f_1, f_2 \ldots f_n$ otrzymamy z łatwością przez różniczkowanie równań (1).

Różniczkując układ (2) otrzymamy

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots\right) = 0 \\
&\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots\right) = 0 \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots\right) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

n równań pierwszego stopnia co do różniczek drugiego rzędu $d^2x_1 \; d^2x_2 \ldots d^2x_{n+1}$ w liczbie $n+1$. Lecz różniczka drugiego rzędu zmiennéj niezależnéj jest równa 0 (jeżeli np. x_1 obierzemy za zmienną niezależną, założyć należy $d^2x_1 = 0$) bo różniczka jéj pierwszego rzędu jest stałą: mamy więc n równań o n nieznanych różniczkach drugiego rzędu funkcyj: różniczki te z równań powyższych otrzymać możemy, podstawiając w nich różniczki pierwszego rzędu otrzymane z równań (2), i pochodne częściowe otrzymane przez różniczkowanie równań (1).

W podobny sposób otrzymać można różniczki i pochodne 3go, 4go ... rzędu: różniczkując równania (3) i t. d.

Rugowanie stałych dowolnych. Równania różniczkowe wyższych rzędów.

203. Niech będzie równanie

$$f(x, y, c_1, c_2, c_3 \dots c_n) = 0 \tag{1}$$

zawierające dwie zmienne x i y, i n stałych: $c_1 \dots c_n$.

Różniczkując n razy to równanie, otrzymamy n równań [**201**]

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x dy}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(podzieliliśmy pierwsze przez dx, drugie przez dx^2 ... aby zamiast różniczek wprowadzić pochodne) pomiędzy pochodnemi funkcji y względem zmiennéj niezależnéj x od pierwszego aż do $n$go rzędu włącznie i pochodnemi częściowemi funkcji f względem x i y od 1go aż do $n$go rzędu włącznie, pochodnemi, które zawierają w ogólności stałe c_1, c_2, ... c_n. Rugując te n stałych pomiędzy $n+1$ równaniami (1) i (2), otrzymamy równanie

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{3}$$

pomiędzy zmienną niezależną x, funkcją y i pochodnemi od 1go aż do $n$go rzędu włącznie funkcji względem zmiennéj niezależnéj. Równanie to, nie zawierające wyrugowanych stałych, nazywamy *równaniem różniczkowém ngo rzędu*, którego równanie (1) jest równaniem pierwotném. Jak więc równanie różniczkowe pierwszego rzędu powstaje z wyrugowania jednéj stałéj dowolnéj, tak wyprowadzenie równania różniczkowego *n*go rzędu pozwala w ogólności wyrugować z równania danego n stałych dowolnych.

204. Przykład. Niech będzie funkcja y zmiennéj niezależnéj x określona przez równanie

(1) $$y^2 = 2px + qx^2 \quad \text{czyli} \quad y^2 - 2px - qx^2 = 0$$

otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2p - 2qx \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2q \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

a więc równania (2) [**203**] staną się, dzieląc przez 2 :

(2) $$\begin{cases} -p - qx + y\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ -q + \dfrac{dy^2}{dx^2} + y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując (2) co do p i q otrzymamy

$$q = y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}$$

$$p = y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} - xy\frac{d^2y}{dx^2}$$

a podstawiając te wartości w (1) :

$$y^2 = 2xy\frac{dy}{dx} - 2x^2\frac{dy^2}{dx^2} - 2x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

czyli upraszczając

$$(4) \qquad y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy^2}{dx^2} + x^2y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

równanie różniczkowe drugiego rzędu równania danego (1), nie zawierające stałych p i q.

Równanie (1) jest przekształceniem za pomocą zmiany spółrzędnych równania ogólnego 2go stopnia : przedstawia ono ellipsę, hyperbolę lub parabolę odniesione do spółrzędnych prostokątnych, których początek znajduje się na przecięciu osi wielkiéj, wziętéj za oś odciętych, z krzywą. Dla ellipsy $p = \frac{b^2}{a}$, $q = -\frac{b^2}{a^2}$; dla hyperboli, $p = -\frac{b^2}{a}$ $q = \frac{b^2}{a^2}$; dla paraboli $q = 0$: w równaniu (3) wszytkie te stałe są wyrugowanemi, równanie to zawiera własności wspólne wszystkich tych krzywych drugiego stopnia.

Ćwiczenia.

I. Dowieść że $n$ta pochodna względem x wyrażenia

$$(x-a)^m f(x)]$$

jest równą zeru, jeżeli $m > n$
równą $m(m-1)\ldots 2.1\, f(a)$, jeżeli $m = n$
równą $n(n-1)\ldots(n-m+1) f^{(n-m)}(a)$, jeżeli $m < n$

II. Dowieść że

$$\frac{d^n \operatorname{dos}^2 x}{dx^n} = 2^{n-1} \operatorname{dos}\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^n \operatorname{wst}^2 x}{dx^n} = 2^{n-1} \operatorname{wst}\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

III. Niech będzie

$$y = e^{x \operatorname{dos}\theta} \operatorname{dos}(x \operatorname{wst}\theta)$$

dowieść że

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x\operatorname{dos}\theta} \operatorname{dos}(x \operatorname{wst}\theta + n\theta)$$

IV. Dowieść że

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3xy\,\dfrac{dx}{dy}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right]=\frac{3\left[y\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dy^2}{dx^2}+x\dfrac{dy^2}{dx^2}\dfrac{d^2y}{dx^2}-xy\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^3y}{dx^3}\right]}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

V. Dowieść że

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{l}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]=\frac{\dfrac{d^3y}{dx^3}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

VI. Znaleść pochodne wyższych rzędów funkcyj danych [**184**].

ROZDZIAŁ XI

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCYJ WIELU ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH

Określenia. — Pochodne i różniczki częściowe funkcyj wielu zmiennych niezależnych. — Różniczka zupełna i jéj własności. — Pochodne częściowe i różniczki zupełne wyższych rzędów. — Funkcje złożone i niewyraźne wielu zmiennych niezależnych. — Rugowanie funkcyj dowolnych. — Równania różniczkowe o pochodnych częściowych. Przykłady.

205. Daliśmy wyżéj [**3**] określenie funkcji wielu zmiennych niezależnych. Widzieliśmy jak funkcje dwóch zmiennych niezależnych mogą być przedstawionemi geometrycznie za pomocą powierzchni, która wyznacza jedną ze spółrzędnych, gdy dwie drugie przyjmiemy dowolnie, i daje zmienność téj spółrzędnéj zależącą od zmienności dowolnéj dwóch drugich; spółrzędna ta jest funkcją dwóch drugich spółrzędnych uważanych jako zmienne niezależne [**64**].

W ogólności, mając dane jedno równanie

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, z, u \ldots t) = 0$$

pomiędzy $m+1$ zmiennemi x, y, z, u ... t, równanie to wyznacza jedną z tych zmiennych np. u gdy damy wartości m pozostałych x, y, z, ... t : a jeżeli nie mamy żadnego innego warunku, jakiemu te $m+1$ zmiennych zadość czynić winny, prócz równania (1), możemy zmieniać dowolnie x, y, z ... t razem, lub jedną z nich, lub kilka tylko, pozostawiając pozostałe niezmiennemi i t. d. a w ogólności równanie (1) rozwiązane, da nam

$$u = f(x, y, z \ldots t)$$

u wyrażone przez x, y, z ... t. Zmienne te x, y, z ... t których zmienność nie podlega żadnym warunkom, są *zmiennemi niezależnemi*, u ich *funkcją*.

Pojęcie funkcji wielu zmiennych niezależnych jest ogólniejszém od pojęcia funkcji jednéj zmiennéj niezależnéj. Ile razy braliśmy pod uwagę tę ostatnią funkcję, uważaliśmy ją jako funkcję jednéj zmiennéj niezależnéj tylko dla tego, że nam się podobało dla ułatwienia, pozostałe wielkości od których funkcja zależała uważać jako stałe : nadmieniliśmy przytém [**2**] że pod *stałą* nie rozumiemy bynajmniéj ilości bezwzględnie niezmiennéj, lecz tylko ilość taką, która się zmienia niezależnie od zmiennéj uważanéj w szczególnym przypadku.

206. Funkcja

$$u = f(x, y, z \ldots t) \tag{1}$$

m zmiennych niezależnych x, y, z ... t będzie ciągłą, gdy zmienne zmieniać się będą pomiędzy granicami x_0 i X, y_0 i Y, z_0 i Z, ... t_0 i T, jeżeli pozostawiając $m-1$ z tych zmiennych niezmiennemi, a zmieniając pozostałą pomiędzy odpowiedniemi z powyższych granic, funkcja u będzie funkcją ciągłą téj ostatniéj zmiennéj.

207. Z tego wynika, że teorja funkcyj wielu zmiennych niezależnych w niczém różnić się nie będzie od teorji funkcji jednéj zmiennéj niezależnéj, jeżeli *każdą zmienną brać będziemy osobno pod uwagę, uważając tymczasem inne jako stałe.* Uważając wszystkie zmienne jako zmieniające się razem choć niezależnie od siebie, właśnie dla téj niezależności, możemy zmieniać każdą po szczególe i zebrać w końcu wypadki w jeden. Zadanie sprowadza się więc w ogólności do poprzedzającego, gdzie chodziło o jedną zmienną niezależną; należy tylko wprowadzić pewne znakowanie i wyrażenia, dla uniknienia dwuznaczności, lub ułatwienia działań.

208. Pochodne częściowe funkcyj wielu zmiennych niezależnych. Niech będzie funkcja

$$u = f(x, y, z, \ldots t) \tag{1}$$

m zmiennych niezależnych x, y, z, ... t. Uważając samo x z pomiędzy tych ostatnich jako zmienne, pozostałe : y, $z, \ldots t$, jako stałe, (do czego mamy prawo, bo ilości te zmieniają się od siebie niezależnie) pochodną funkcji u wziętą w tém przypuszczeniu, nazywamy *pochodną częściową* u względem x i oznaczamy ją przez :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial f(x, y, z \ldots t)}{\partial x} \quad \text{lub po prostu} \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

Mamy więc z określenia

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{gr}\, \frac{f(x + \Delta x, y, z \ldots t) - f(x, y, z \ldots t)}{\Delta x} \tag{2}$$

W podobny sposób, pochodne częściowe funkcji u względdem $y, z \ldots t$, będą :

$$
(2)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \mathrm{gr}\,\frac{(f(x, y+\Delta y, z \ldots t) - f(x, y, z \ldots t)}{\Delta y}\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \mathrm{gr}\,\frac{(f(x, y, z+\Delta z, \ldots t) - f(x, y, z \ldots t)}{\Delta z}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial n}{\partial t} &= \mathrm{gr}\,\frac{f(x, y, z, \ldots, t+\Delta t) - f(x, y, z \ldots t)}{\Delta t}
\end{aligned}
\right.
$$

Pochodne te częściowe mają wszystkie własności pochodnych zwyczajnych funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj, bo są w rzeczywistości temi samemi wyrażeniami, któreśmy uważali w poprzednich rozdziałach : z tą różnicą, że tam zamierzaliśmy sobie uważać zmienność funkcji zależnie od jednéj tylko wielkości w skład jéj wchodzącéj a tu od wielu na raz. Odróżnić więc należy *pochodne częściowe* tu używane, które są pochodnemi istniejącemi w rzeczywistości tak z określenia, jak co do swych własności, od pochodnych częściowych, używanych w teorji funkcyj złożonych [**170**] jednéj zmiennéj niezależnéj, które uważać należy jako wyrażenia pewnych działań prowadzących do pochodnéj zupełnéj : bo tam gdzie wszystkie zmienne zmieniać się mogą tylko zależnie od jednéj, nie możemy zmienić jednéj z nich, nie zmieniając od razu wszystkich.

Gdybyśmy pomiędzy zmiennemi $x, y, z \ldots t$ zaprowadzili pewne związki, tak że zmienne te zmieniaćby się tylko mogły zależnie jedne od drugich, pochodne częściowe (2) stałyby się takiemi samemi jak te, któreśmy uważali w rozdziale poprzedzającym [**170**].

209. Różniczki częściowe i zupełne funkcji wielu zmiennych niezależnych. Iloczyn z pochodnéj częściowéj funkcji względem jednéj zmiennéj niezależnéj, przez różniczkę téj zmiennéj niezależnéj, nazywamy *różniczką częściową funkcji* względem odpowiedniéj zmiennéj niezależnéj. Różniczki częściowe funkcji

$$u = f(x, y, z \ldots t)$$

względem zmiennych $x, y, z \ldots t$, będą:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} dz, \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Różniczki $dx, dy, dz \ldots dt$ zmiennych niezależnych równe przyrostkom $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \Delta t$ uważamy jako stałe. *Różniczką zupełną* funkcji wielu zmiennych niezależnych nazywamy summę różniczek częściowych wziętych względem wszystkich zmiennych niezależnych; oznaczamy ją przez

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

210. Twierdzenie. *Jeżeli wszystkim zmiennym niezależnym nadamy przyrostki nieskończenie małe, granicą stosunku przyrostku odpowiedniego funkcji, do różniczki zupełnéj téjże funkcji jest w ogólności jedność*; czyli innemi słowy przyrostek funkcji różni się od jéj różniczki zupełnéj o ilość nieskończenie małą względem niéj saméj [**121**].

Twierdzenie to jest widoczném, bo nadając kolejno każdéj ze zmiennych niezależnych przyrostek nieskończenie mały (uważając pozostałe zmienne niezależne jako niezmienne) przyrostek odpowiedni funkcji różni się od różniczki częściowéj téjże funkcji o ilość nieskończenie małą względem niéj saméj [**139**]: summa więc wszystkich przyrostków funkcji w liczbie skończonéj, czyli cały przyrostek funkcji, różni się od summy różniczek częściowych téjże funkcji czyli różniczki zupełnéj, o ilość nieskończenie małą względem niéj saméj [**117**] c. b. d. d. Aby jednak bliżéj objaśnić znaczenie i własności różniczki zupełnéj, damy dowodzenie wprost tego twierdzenia.

Niech będzie funkcja

$$u = f(x, y, z \ldots t)$$

nadając zmiennéj x przyrostek Δx, funkcja stanie się [**139**]

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\right)\Delta x$$

ε jest nieskończenie małą, która dąży do zera wraz z Δx. Nadajmy teraz, przypuszczając x niezmienném, zmiennym $y, z \ldots t$, które wchodzą tak w u jak w $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\right)$, przyrostki Δy, $\Delta z, \ldots \Delta t$, i oznaczmy odpowiedni przyrostek u przez $\Delta_1 u$, odpowiedni przyrostek $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\right)$ przez η; funkcja stanie się

$$(u + \Delta_1 u) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon + \eta\right)\Delta x$$

a zatém cały przyrostek funkcji będzie

$$\Delta u = \Delta_1 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\right)\Delta x + \eta\Delta x$$

ε dąży do zera wraz z Δx, a η wraz z Δy, $\Delta z \ldots \Delta t$, zatém $\varepsilon + \eta$ staje się zerem wraz z Δx, $\Delta y \ldots \Delta t$; oznaczmy

$$\varepsilon + \eta = \alpha$$

będziemy mieli:

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \Delta_1 u$$

gdzie α staje się zerem, gdy Δx, Δy, $\Delta z \ldots \Delta t$ stają się zerami, a $\Delta_1 u$ oznacza przyrostek funkcji u, gdy pozostawiając x niezmienném nadajemy zmiennym $y, z \ldots t$ przyrostki nieskończenie małe Δy, Δz, $\ldots \Delta t$. Rozumując w podobny sposób otrzymamy

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_1\right)\Delta y + \Delta_2 u$$

$$\Delta_2 u = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2\right)\Delta z + \Delta_3 u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_{m-1} u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_{m-1}\right)\Delta t$$

gdzie $\Delta_2 u$ oznacza przyrostek u, gdy pozostawiając x i y niezmiennemi, nadajemy zmiennym $z \ldots t$ przyrostki $\Delta z, \ldots \Delta t$; $\Delta_3 u$ przyrostek u gdy pozostawiając x, y, z niezmiennemi nadajemy pozostałym zmiennym przyrostki nieskończenie małe i t. d; zaś α_1, α_2, $\ldots \alpha_{m-1}$, stają się zerami wraz z przyrostkami nieskończenie małemi zmiennych niezależnych.

Dodając do siebie równania powyższe, dające wyrażenia Δu, $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u \ldots \Delta_{m-1} u$ i znosząc w tak otrzymanéj summie po obu stronach, wyrazy wspólne $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u, \ldots \Delta_{m-1} u$, otrzymamy :

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_1\right)\Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2\right)\Delta z + \dots$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_{m-1}\right)\Delta t$$

Zważywszy że x, y, $z \dots t$ są zmiennemi niezależnemi, że zatém [**139**] :

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy, \quad \Delta z = dz, \dots \Delta t = dt$$

i porównywając wyrażenie ostatnie przyrostku Δu z wyrażeniem różniczki zupełnéj du otrzymaném powyżéj [**209**] widziemy że :

$$\Delta u = du + \alpha\Delta x + \alpha_1\Delta y + \alpha_2\Delta z + \dots + \alpha_{m-1}\Delta t$$

a dzieląc obie strony tego równania przez

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

otrzymamy

$$\frac{\Delta u}{du} = 1 + \frac{\alpha\Delta x + \alpha_1\Delta y + \alpha_2\Delta z t \dots + \alpha_{m-1}\Delta t}{\frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}\partial t}$$

Licznik ułamku dodanego do jedności w powyższém wyrażeniu będąc summą iloczynów dwóch nieskończenie małych, jest nieskończenie małym względem mianownika [**119**], w którym wszystkie pochodne częściowe nie mogą być zerami, gdyż funkcja w takim razie byłaby stałą; w granicy więc

$$\operatorname{gr}\frac{\Delta u}{du}=1 \qquad c.\ b.\ d.d.$$

211. TWIERDZENIE II. *Jeżeli funkcja* u *staje się stałą dla wszelkich wartości zmiennych niezależnych* x, y, z...t, *zawartych pomiędzy pewnemi granicami, jéj różniczka zupełna* du *jest zerem pomiędzy temi granicami; i odwrotnie: ile razy różniczka zupełna jest zerem dla wszelkich wartości zmiennych niezależnych pomiędzy pewnemi granicami, funkcja pozostaje niezmienną pomiędzy temi granicami.*

W rzeczy samej jeżeli funkcja

$$u=f(x, y, z \ldots t)$$

jest stałą, to jest niezmieniającą się gdy zmieniamy x, y, $z \ldots t$, jéj pochodne częściowe (które są pochodnemi zwyczajnemi, uważając wyłącznie zmienność odpowiedniéj zmiennéj) są zerami [**145**]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=0 \ldots \frac{\partial u}{\partial t}=0$$

a więc i różniczka zupełna

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

jest zerem. c. b. d. d.

Odwrotnie, jeżeli

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u}{\partial z}\partial z+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}\partial t=0$$

ponieważ przyrostkom nieskończenie małym

$$dx,\ dy,\ dz \ldots dt$$

zmiennych niezależnych możemy nadawać wartości będące zupełnie od siebie niezależnemi, warunkiem koniecznym aby summa powyższa mogła być zerem dla wszelkich wartości tych przyrostków jest, żeby ich spółczynniki były zerami :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0 \ldots \frac{\partial u}{\partial t}=0$$

czyli żeby funkcja u nie była zależną ani od x ani od y, ani od z ... ani od t, a więc żeby była stałą c. b. d. d.

Wniosek. *Dwie funkcje tychże samych zmiennych niezależnych różniące się o ilość stałą, dla wszelkich wartości zmiennych niezależnych zawartych pomiędzy pewnemi granicami, mają różniczki zupełne pomiędzy temi granicami równe, i odwrotnie.*

Niech będą dwie funkcje tych samych zmiennych niezależnych

$$v=\varphi(x, y, z \ldots t)$$
$$w=\psi(x, y, z \ldots t)$$

takie, że dla wszelkich wartości jakie zmiennym $x, y, z \ldots t$ nadać można

$$v-w=c$$

oznaczając przez c stałą: powiadam że

$$dv=dw$$

W rzeczy saméj, założywszy $u=v-w$, w wyrażeniu

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

wszystkie różniczki częściowe stałéj u są zerami, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0\ldots\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

czyli

$$\frac{\partial(v-w)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial(v-w)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial(v-w)}{\partial z}=0\ \ldots\frac{\partial(v-w)}{dt}=0$$

lub

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial z}\ \ldots\ \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}$$

a pomnożywszy każdą z tych ostatnich równości odpowiednio przez dx, dy, dz ... dt i dodawszy, otrzymamy wyrażenia różniczek zupełnych dv, dw równe c. b. d. d.

Odwrotnie jeżeli $dv=dw$, robiąc podobne jak powyżéj założenie, zobaczymy z łatwością że

$$dv-dw=du=0$$

a więc funkcja u czyli różnica $v-w$ jest stałą na zasadzie powyższego twierdzenia.

212. Twierdzenie III. *Wyrażenie różniczki zupełnéj*

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}\partial t \tag{1}$$

funkcji u *zmiennych niezależnych* x, y, z ... t *się nie zmieni, jeżeli zmienne te staną się zależnemi od innych zmiennych niezależnych* $\xi, \eta, \zeta \ldots \tau$ *w jakiejkolwiek liczbie.*

W rzeczy samej, w tém ostatniém przypuszczeniu, uważając u jako funkcję $\xi, \eta, \zeta \ldots \tau$ mamy z założenia :

$$(2) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau$$

lecz $\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi$ jest różniczką częściową funkcji u uważanéj za zależną jedynie od zmiennéj ξ, od któréj zależą również zmienne $x, y, z \ldots t$; biorąc więc funkcję u jako funkcję złożoną z funkcji $x, y, z \ldots t$ jednéj zmiennéj niezależnéj ξ mamy [**173**] wyrażenie pochodnéj częściowéj

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi}$$

lub różniczki częściowéj

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi$$

W podobny sposób otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} \partial\tau + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$$

Dodając te wyrażenia, i podstawiając za summę pierwszych stron wartość (2), otrzymamy

$$(3)\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta+\ldots+\frac{\partial x}{\partial \tau}d\tau\right)$$
$$+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta+\ldots+\frac{\partial y}{\partial \tau}dt\right)$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial t}{\partial \eta}d\eta+\ldots+\frac{\partial t}{\partial \tau}d\tau\right)$$

lecz ponieważ $x, y, z \ldots t$ są z założenia funkcjami zmiennych niezależnych $\xi, \eta, \zeta, \ldots \tau$, więc [**209**]

$$dx=\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta+\ldots+\frac{\partial x}{\partial \tau}d\tau$$
$$dy=\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta+\ldots+\frac{\partial y}{\partial \tau}dt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dt=\frac{\partial t}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial t}{\partial \eta}d\eta+\ldots+\frac{\partial t}{\partial \tau}d\tau$$

co podstawiwszy w (3) otrzymamy

$$(1)\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt \qquad \text{c. b. d. d.}$$

213. Wniosek i. Dowodzenie pozostaje to samo, czy uważać będziemy zmienne x, y, $z \ldots t$ zależne od zmiennych niezależnych ξ, η, $\zeta \ldots \tau$ w téj samej co pierwsze zmienne liczbie, czy w jakiejkolwiek bądź innéj liczbie mniejszéj lub większéj; nie zmieni się również jeżeli zmienne x, y, $z \ldots t$ uważać będziemy jako zależne od jednéj tylko zmiennéj niezależnéj; a więc:

Wyrażenie (1) *różniczki zupełnéj pozostanie to samo, czy uważać będziemy* u *jako funkcję wielu zmiennych niezależnych, czy też uczyniniwszy te zmienne zależnemi od jednéj zmiennéj niezależnéj, uważać ją będziemy jako funkcję złożoną z wielu funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj.*

Wniosek ii. Z powyższego wniosku wypada że : *Prawidła różniczkowania summ, iloczynów, ilorazów, potęg i t. p. funkcyj złożonych jednéj zmiennéj niezależnéj, stosują się również do funkcyj wielu zmiennych niezależnych.*

Przykład i. Niech będzie funkcja

$$u = \frac{ay - bz}{cz - ax}$$

trzech zmiennych niezależnych x, y, z; biorąc pochodne częściowe względem x, y, z, to jest uważając naprzód x tylko za zmienne, y i x za stałe otrzymamy :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (ay - bz)\frac{\partial (cz - ax)^{-1}}{\partial x} = -(ay - bz)(cz\ ax)^{-2}\frac{\partial (cz - ax)}{\partial x}$$
$$= -(ay - bz)(cz - ax)^{-2} \times -a$$
$$= + a\frac{ay - bz}{(cz - ax)^2}$$

następnie y jako zmienne a x i z jako stałe :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a}{cz - ax} = a\frac{cz - ax}{(cz - ax)^2}$$

nakoniec z jako zmienne, a x i y jako stałe :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{bx - cy}{(cz - ax)^2}$$

a więc

$$du = a\,\frac{(ay - bz)\,dx + (cz - ax)\,dy + (bx - cy)\,dz}{(cz - ax)^2}$$

Przykład II. Niech będzie funkcja

$$u = \mathrm{l}\left(\mathrm{st}\,\frac{x}{y}\right),$$

gdzie x i y są zmiennemi niezależnemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial\,\mathrm{st}\,\frac{x}{y}}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\mathrm{dos}^2\,\frac{x}{y}}\,\frac{\partial\,\frac{x}{y}}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\mathrm{dos}^2\,\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \frac{1}{y\,\mathrm{wst}\,\frac{x}{y}\,\mathrm{dos}\,\frac{x}{y}} = \frac{2y}{y^2\,\mathrm{wst}\,2\,\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\frac{x}{y}}\,\frac{\partial\,\mathrm{st}\,\frac{x}{y}}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{st}\,\frac{x}{y}}\,\frac{1}{\mathrm{dos}^2\,\frac{x}{y}}\,\frac{\partial\,\frac{x}{y}}{\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{st}\,\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\mathrm{dos}^2\,\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}$$

$$= -\frac{2x}{y^2\,\mathrm{wst}\,2\,\frac{x}{y}}$$

a więc

$$du = \frac{2\,(y\,dx - x\,dy)}{y^2\,\mathrm{wst}\,2\,\frac{x}{y}}$$

214. Różniczki wyższych rzędów funkcyj wielu zmiennych niezależnych. Niech będzie funkcja

$$u = f\,(x, y, z \ldots t)$$

m zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots t$. Pochodne częściowe pierwszego rzędu będą w liczbie m :

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \ldots \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Każda z tych pochodnych częściowych jest znów funkcją $x, y, z \ldots t$, ma więc m pochodnych częściowych 2go rzędu. I tak pochodne pochodnéj

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

są następujące :

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \ldots \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

pochodne pochodnéj $\frac{\partial u}{\partial y}$ będą następujące :

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \ldots \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

t. d. Lecz na zasadzie twierdzenia i wniosków powyższych [**213**], lub téż za pomocą dowodzenia wprost, zupełnie podobnego, jak dla funkcyj złożonych [**196**], wiemy że:

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

więc mamy [197] tylko $\frac{m(m+1)}{1.2}$ pochodnych częściowych drugiego rzędu; i w ogólności, otrzymalibyśmy

$$\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2\dots n}$$

pochodnych częściowych $n$go rzędu funkcji m zmiennych niezależnych. Wyrażeniem ogólném jednéj z pochodnych $n$go rzędu będzie

(2) $$\frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma \dots dt^\mu}$$

gdzie α, β, $\gamma \dots$ μ oznaczają liczby całkowite, z których niektóre mogą być zerami, lecz których summa musi być równą n.

215. Zmienne x, y, $z \dots$ t są tu zmiennemi niezależnemi; ich różniczki dx, dy, $dz \dots$ dt są więc niezmiennemi i będą uważane jako stałe. Tak jak różniczkami częściowemi pierwszego rzędu nazwaliśmy wyrażenia

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\partial y, \quad \frac{\partial u}{\partial z}dz, \dots \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

tak *różniczkami częściowemi drugiego rzędu* nazywać będziemy iloczyny z pochodnych częściowych drugiego rzędu, przez różniczki odpowiednich zmiennych niezależnych:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2, \quad \frac{d^2 u}{\partial x \partial y}dxdy, \quad \dots \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dxdt \\ \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2, \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}dydt \\ \qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt^2 \end{array}$$

i w ogólności wyrażeniem *różniczki częściowéj* ngo *rzędu* funkcji u, m zmiennych niezależnych x, y, $z \dots t$ będzie

(3) $$\frac{\partial^n y}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial^\gamma z \dots dt^\mu} dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma \dots dt^\mu$$

216. Różniczkę zupełną różniczki zupełnéj du funkcji u wielu zmiennych niezależnych, nazywamy *różniczką zupełną drugiego rzędu* i oznaczamy ją przez

$$d^2u = d(du)$$

a ponieważ

(4) $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

więc

$$d^2u = dx.\, d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + dy.\, d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \dots + dt.\, d\frac{\partial u}{\partial t}$$

Zważywszy że dx, dy .... dt są niezmiennemi, mamy

(5) $$d(dx) = 0 \quad d(dy) = 0 \dots d(dt) = 0$$

a więc zupełnie jak powyżéj [**198**] podstawiając

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dt$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} dt$$

. . . .

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} dy + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt$$

otrzymamy

$$d^2u=\Big(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\ldots+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}dxdt$$
$$+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2+\ldots+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial t}dydt$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}dt^2\Big)$$

czyli wzór symboliczny

$$(6)\qquad d^2u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)^{(2)}=(du)^{(2)}$$

w podobném znaczeniu jakeśmy powyżéj [**200**] określili.

I w ogólności prawidło na funkcje złożone jednéj zmiennéj niezależnéj, jest tu znacznie uproszczoném z przyczyny niezmienności dx, $dy\ldots dt$ czyli (5), tak że wszędzie podstawiać należy

$$d^2x=0\qquad d^2y=0\ldots d^2t=0$$

Otrzymamy w ten sposób wzór ogólny na ntą różniczkę zupełną funkcji m zmiennych niezależnych

$$(7)\qquad d^nu=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{(n)}=(du)^{(n)}$$

Lecz uważać należy, że jak tylko zmienne x, $y\ldots t$ przestają być zmiennemi niezależnemi, wzór ten już nie ma miejsca: dodać wtedy należy do rozwinięcia symbolicznego (7) część odpowiadającą zmienności różniczek dx, $dy\ldots dt$ to jest zawierającą różniczki zmiennych x, y, $\ldots t$ wyższych rzędów, które nie będą wtedy zerami. Tak np: szczególny przypadek różniczki drugiego rzędu, napisać wtedy należy jak następuje

$$d^2u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}\partial t\right)^{(2)}$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}d^2t\right)$$

dodając do rozwinięcia (5) część dopełniającą. Lecz ponieważ ta część dopełniająca staje się w końcu bardzo złożoną, łatwiéj jest liczyć wprost pochodne częściowe, brane względem zmiennych niezależnych, jak używać zanadto złożonych wzorów. Chcąc naprzykład obliczyć

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^\alpha \partial^\beta y \ldots \partial t^\mu}$$

różniczkuję u względem x razy α, uważając tymczasem $y \ldots t$ jako stałe; tak otrzymany wypadek różniczkuję β razy względem y uważając $x \ldots t$ jako stałe i t. d., aż w końcu zróżniczkowawszy μ razy względem t otrzymam powyższą pochodnę.

217. Różniczki funkcyj niewyraźnych wielu zmiennych niezależnych. Niech będzie naprzód w szczególnym przypadku funkcja z dwóch zmiennych niezależnych x i y, dana przez równanie

(1) $$f(x, y, z)=0$$

różniczka zupełna funkcji z będzie miała wyrażenie [**209**]

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Oznaczać będziemy przez skrócenie

$$(2)\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=p \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

przez p pochodnę częściową funkcyi z względem x, przez q pochodnę częściową funkcyi z względem y, tak że

$$(3)\qquad dz=pdx+qdy$$

Aby znaleść p i q, różniczkujemy częściowo równanie (1) naprzód względem x uważając y jako stałe; lecz funkcja z zależy od x, a więc uważając funkcję f jako funkcję złożoną zmiennej x, i funkcji z zmiennéj x, nadto zakładając różniczkę téj funkcji f mającéj wartość stałą zero równą 0, otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial z}\partial z=0$$

oznaczając przez ∂z różniczkę częściową $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ otrzymaną uważając y jako stałą; dzieląc przez dx i uważając na (2) otrzymamy :

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0$$

W podobny sposób, różniczkując częściowo co do y, otrzymalibyśmy

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0$$

które to równania dadzą nam wartości:

$$(6) \qquad p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad q = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Wartości te podstawione w (3) wyznaczą różniczkę zupełną:

$$(7) \qquad dz = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dy$$

wyrażoną przez różniczki dx, dy zmiennych niezależnych, i przez pochodne częściowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ które z łatwością z równania (1) otrzymać można. Pochodne te należy brać w znaczeniu pochodnych funkcyj złożonych [**178**], to jest przyjmując jednę tylko z trzech zmiennych x, y, z jako zmienną, a dwie drugie uważając za stałe, choć w rzeczywistości zmieniając x lub y, nie możemy pozostawić z niezmiennêm: pochodne te są tylko wyrażeniem działania a nie właściwemi pochodnemi jak p i q, tak jakeśmy to na właściwêm miéjscu [**170**] zastrzegli, mówiąc o funkcjach złożonych.

Wartości (6) nie podstawiamy przez skrócenie w (6) lecz piszemy

$$(2) \qquad dz = pdx + qdy$$

uważając p i q jako znane wypadki z (5).

218. Aby otrzymać drugą różniczkę zupełną d^2z funkcji z, różniczkujemy wyrażenie (2) uważając p i q jako funkcje x i y, zaś dx i dy jako niezmienne przyrostki zmiennych niezależnych: otrzymamy w ten sposób

$$d^2z = \frac{\partial(pdx + qdy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(pdx + qdy)}{\partial y} dy$$

czyli

$$d^2z = \frac{\partial p}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial q}{\partial x} dxdy + \frac{\partial p}{\partial y} dxdy + \frac{\partial q}{\partial y} dy^2$$

a oznaczając przez skrócenie

$$(7)\quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,\ \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = s,\ \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

otrzymamy

$$(8)\qquad d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$$

na różniczkę zupełną drngiego rzędu funkcji z wyrażoną przez różniczki dx, dy zmiennych niezależnych, i przez pochodne częściowe r, s, t funkcji z względem tych zmiennych niezależnych.

Aby otrzymać te pochodne częściowe, uważmy naprzód że $\frac{dz}{dx}$, zależąc od x i y, ma różniczkę wyrażoną przez

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy$$

i podobnież

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$$

czyli zważywszy na (7) i (2)

$$(9)\qquad \begin{cases} dp = rdx + sdy \\ dq = sdx + tdy \end{cases}$$

Różniczkując następnie każde z równań (4) i (5) częściowo względem x i y, otrzymamy:

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2p\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+p^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+r\frac{\partial f}{\partial z}=0\\&\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+q\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+p\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+s\frac{\partial f}{\partial z}=0\\&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2q\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+t\frac{\partial f}{\partial z}=0\end{aligned}\right.$$

przyczém uważamy że z zależy od x i y, że zatém przy każdém różniczkowaniu, różniczkujemy funkcję złożoną z x i z funkcji x, lub y i z funkcji y, uważając w pierwszym razie tylko y, w drugim tylko x jako stałą. Otrzymamy trzy równania a nie cztery, jakby się spodziewać należało z podwójnego różniczkowania dwóch równań (4) i (5): bo pierwsze z nich różniczkowane względem y, drugie względem x częściowo, daje na wypadek jedno i to samo równanie środkowe (10).

Trzy równania (10) wyznaczają nam pochodne częściowe r, s, t drugiego rzędu wyrażone przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial yz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ oznaczające *działania* łatwe do dokonania na równaniu (1), i przez p i q znane z (6). Podstawiając wartości te na r, s, t w wyrażenie (8), otrzymamy wyrażenie różniczki zupełnéj d^2z drugiego rzędu funkcji z dwóch zmiennych niezależnych x i y.

Różniczkując równanie (8) i wyznażając pochodne częściowe trzeciego rzędu funkcji z z równań otrzymanych przez różniczkowanie równań (10) częściowo względem x i y, otrzymalibyśmy różniczkę zupełną czwartego rzędu funkcji z i t. p. Działania te nie przedstawiające żadnéj trudności, prowadzą jednak do dość długich wzorów.

Przykład. Niech będzie równanie

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

wyznaczające z jako funkcję dwóch zmiennych niezależnych x i y. Zakładając jak poprzednio

$$(3) \qquad \begin{cases} dz = pdx + qdy \\ dp = rdx + sdy \\ dq = sdx + tdy \end{cases}$$

otrzymamy

$$(4) \quad x + pz = 0 \qquad (5) \quad y + qz = 0$$

co nam daje naprzód

$$(6) \qquad p = -\frac{x}{z} \qquad q = -\frac{y}{z}$$

czyli

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy$$

lub

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

Następnie różniczkując (4) i (5) otrzymamy

$$1 + p^2 + rz = 0 \qquad pq + sz = 0 \qquad 1 + q^2 + tz = 0$$

co nam da

$$r = -\frac{x^2 + z^2}{z^3} \qquad s = -\frac{xy}{z^3} \qquad t = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$$

tak, że druga różniczka zupełna stanie się

$$d^2z = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}dxdy - \frac{y^2 + z^2}{z^3}dy^2$$

219. Funkcje niewyraźne wielu zmiennych niezależnych w ogólności. Najogólniejszym przypadkiem tego rodzaju funkcyj, jest funkcja dana przez m równań pomiędzy $m + n$ zmiennemi :

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2 \ldots x_m, x_{m+1} \ldots x_{m+n}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_m, x_{m+1} \ldots x_{m+n}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, x_2 \ldots x_m, x_{m+1} \ldots x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

wyznaczających w razie rozwiązania m z tych zmiennych, naprzykład

$$x_1 \, x_2 \ldots x_m$$

przez n pozostałych :

$$x_{m+1} \ldots x_{m+n}$$

Pierwsze w liczbie m, są więc funkcjami drugich w liczbie n, jako zmiennych niezależnych. Wyrażenia (1) mogą być uważane jako m funkcyj złożonych $f_1, f_2 \ldots f_m$ zmiennych niezależnych w liczbie n, funkcyj mających wartość stałą 0, a więc mających różniczki równe 0.

Różniczkując równania (1) otrzymamy więc m równań zawierających różniczki wszystkich zmiennych, z których wyznaczymy m różniczek zupełnych

$$dx_1, \; dx_2 \; \ldots dx_m$$

funkcyj $x_1, x_2 \ldots x_m$ przez różniczki zmiennych niezależnych :

$$dx_{m+1}, dx_{m+2} \ldots dx_{m+n}$$

Różniczkując dalej tak otrzymane równania, otrzymamy w podobny sposób różniczki zupełne wyższych rzędów.

Rugowanie funkcyj dowolnych. Równania różniczkowe o pochodnych częściowych.

220. Widzieliśmy [**182**] jakim sposobem z równania danego, przez różniczkowanie i wyrugowanie jednéj ze stałych z równania danego i równania zróżniczkowanego, można otrzymać równanie pomiędzy funkcją, zmienną niezależną, i pochodną funkcji, nie zawierające stałéj wyrugowanéj, którą nazwaliśmy *stałą dowolną*. Różniczkowanie częściowe funkcyj wielu zmiennych niezależnych, pozwoli nam wyrugować nawet funkcję jakąkolwiek tych zmiennych, którą nazywamy dla tego *funkcją dowolną*.

Przypuśćmy najprostszy przypadek dwóch zmiennych niezależnych x i y i ich funkcji z, danéj przez równanie

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{1}$$

gdzie dla większéj ogólności przypuszczamy że u i v są znanemi funkcjami zmiennych x, y, z:

$$u = f_1(x, y, z) \qquad v = f_2(x, y, z) \tag{2}$$

Równanie (1) w którém za u i v podstawilibyśmy wartości (2) tych funkcyj przez x, y, z, rozwiązane następnie co do z, dałoby nam z jako funkcję wyraźną x i y. Zamierzamy sobie nie dokonywając tych podstawień, znaleść równanie pomiędzy x, y, z i pochodnemi częściowemi funkcji z względem x i y nie zawierające funkcji φ, to jest niezależne od kształtu funkcji φ: równanie, które zatém będzie tém samém jeżeli zmienimy kształt funkcji φ, pozostawiając ją równą zero, i nie zmieniając (2).

Załóżmy jak powyżej przez skrócenie

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

czyli

(3) $$dz = pdx + qdy$$

i różniczkujmy funkcję φ jak funkcję złożoną z funkcji u i v [**178**] zmiennych niezaleznych x i y, częściowo co do x (uważając y jako stałe, lecz zważając że z wchodzące w skład u i v, zależy od x) i częściowo co y (uważając x jako stałe, lecz zważając że z które wchodzi w skład u i v zależy od y) otrzymamy:

(4) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right.$$

pochodne te częściowe są równemi zero, bo funkcja φ ma wartość stałą 0 (1).

Lecz mamy nadto różniczkując częściowo (2) co do x i y i zważając, że z zależy od x i y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

w tych wzorach $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ wyrażają pochodne częściowe: pierwsze cztery pochodne znanych funkcyj u i v względem x i y, dwie ostatnie te pochodne, któreśmy oznaczyli przez p i q. Co do $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ te oznaczają tylko *działania* dokonane na (2) w znaczeniu [**171**] funkcyj złożonych : a mianowicie : $\frac{\partial u}{\partial x}$ oznacza pochodnę częściową względem x funkcji u uważanéj za funkcję zmiennych niezależnych x i y, gdzie zatém z się zmienia zależnie od x ; $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ oznacza działanie różniczkowania dokonane na funkcji f_1 w któréj przypuszczamy tylko x zmienne a y i z stałe, (jakkolwiek w rzeczywistości z zmienia się wraz z x).

Zastrzegając tę różnicę w znakowaniu, napisać możemy

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}p & \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}p \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}q & \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}q \end{cases}$$

a podstawiając w równania (4), otrzymamy

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}p\right)+\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}p\right)=0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}q\right)+\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}q\right)=0 \end{cases}$$

Z tych równań z łatwością wyrugujemy dwie pochodne $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, bo równania są jednorodnemi względem tych pochodnych : możemy więc wziąść ich stosunek który wyrugowawszy, otrzymamy w ostatecznym wypadku

$$(7)\quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}q\right)-\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}q\right)=0.$$

wykonywając wskazane działania i oznaczając przez skrócenie

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{P} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z} - \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ \mathrm{Q} = \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \mathrm{V} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial x} \end{cases}$$

spółczynniki znane lub łatwe do otrzymania przez znane działania na równaniach (2), równanie (7) stanie się

$$(9)\quad \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{V}$$

Równanie to pomiędzy znanemi spółczynnikami P, Q i V i pochodnemi częściowemi $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$ funkcji z danéj przez równanie (1), nie zawiera wcale funkcji φ, która mogła być jakąkolwiek : równanie (9) nazywamy *równaniem różniczkowém o pochodnych częściowych*, funkcję φ *funkcją dowolną*.

Równanie (9) jest nadto w tym szczególnym przypadku równaniem *linijném* co do pochodnych częściowych p i q, to jest zawierającym pochodne te w pierwszym stopniu.

221. Rugowanie funkcji dowolnéj nie zawsze prowadzi do równań linijnych o pochodnych częściowych. Niech będzie w ogólności wyrażenie :

$$\mathrm{W} = \mathrm{F}\ (x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \varphi\ (\alpha)\ )$$

gdzie F jest funkcją jakąkolwiek ilości x, y, z, α, $\varphi\ (\alpha)$, zaś α zmienną, którą nazywają pospolicie *parametrem zmien-*

nym. Zmienna α zależy wprawdzie od x, y, z: lecz zależność ta może nie być daną z góry, lub nawet zmienić kształt, gdy zmienimy kształt funkcji φ przypuszczając naprzykład że α wyznaczoném jest przez równanie zawierające funkcję φ. Zakładamy, że $\varphi(\alpha)$ jest funkcją dowolną tego parametru α.

Niech będzie układ dwóch równań

$$(1) \qquad F[x, y, z, \alpha, \varphi, (\alpha)] = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$$

z których drugie jest wyrażeniem któreby otrzymaném być mogło przez zróżniczkowanie częściowe wyrażenia (W) co do parametru α bez względu na x, y, z które przy tém różniczkowaniu częściowém mają być uważane jako niezmienne. Gdyby funkcja dowolna $\varphi(\alpha)$ była znaną, wyciągnąwszy wartość α z równania $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ i podstawiwszy ją w równanie $F = 0$, otrzymalibyśmy zwykłą funkcję trzech zmiennych x, y, z. Zamierzamy sobie nie dokonywając tego podstawienia, wyrugować przez różniczkowanie funkcję dowolną α z równań (1).

Uważać jednak możemy, nawet nie dokonywając powyższego podstawienia, α w pierwszém z równań (1) jako funkcję x, y, z wyznaczoną przez równanie $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. Biorąc różniczkę zupełną F z pierwszego równania (1), mamy

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

lecz z założenia $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$, zaś [**217**]

$$dz = p dx + q dy$$

a zatém równanie (2) staje się

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)dy=0$$

a że różniczki dx, dy zmiennych niezależnych x i y są od siebie niezależnemi, więc równanie to pociąga za sobą dwa następujące

$$(3)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

Rugując teraz α i φ (α) z pierwszego równania (1) i dwóch równań (3) (gdzie zmienne te znajdują sią pod znakiem F), otrzymamy równanie kształtu

$$f(x, y, z, p, q)=0$$

nie zawierające ani α ani φ (α), które jest równaniem o pochodnych częściowych p i q niekoniecznie linijném.

Wzięliśmy tu za równanie określające parametr α związek $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$ taki, że na mocy tego związku przy różniczkowaniu prowadzącém do wyrugowania funkcji dowolnéj, żadna z pochodnych φ' (α), φ'' (α)... téj funkcji dowolnéj nie wchodzi w rachunek: gdyby pochodne te wchodziły, tylko w bardzo szczególnych wypadkach wyrugowanie funkcji dowolnéj byłoby możebném do wykonania.

222. Ograniczamy się tu na funkcjach dwóch zmiennych niezależnych: przy nieco dłuższych rachunkach, wypadki te uogólnionemi by być mogły z łatwością do ilukolwiek zmiennych; uogólnienie to podaném będzie w dalszym ciągu.

223. PRZYKŁAD I. *Wyrugować funkcję dowolną* φ *z równania*

$$y - bz = \varphi(x - az)$$

Różniczkując częściowo otrzymamy

$$-b\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x - az)\left(1 - a\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$1 - b\frac{\partial z}{\partial y} = -a\varphi'(x - az)\frac{\partial z}{\partial y}$$

rugując $\varphi'(x - az)$ z tych dwóch równań, otrzymamy:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

PRZYKŁAD II. *Niech będzie wyrażenie*

$$W = (x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2$$

gdzie R *jest stałą) : wyrugować funkcję dowolną* $\varphi(\alpha)$ *zmiennego parametru* α *z równań :*

$$W = 0 \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$$

Postępując według [**221**], otrzymamy :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2(x - \alpha), \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 2[y - \varphi(\alpha)], \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 2z$$

a równania (3) staną się

$$x - \alpha + pz = 0 \qquad y - \varphi(\alpha) + qz = 0$$

Podstawiając w W = 0 wartości

$$x - \alpha = - pz \qquad y - \varphi(\alpha) = - qz$$

wyciągnięte z tych równań, otrzymamy

$$(1 + p^2 + q^2) z^2 = R^2$$

lub

$$z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Przykład III. *Wyrugować funkcję dowolną parametru* α *z dwóch równań* :

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)}$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

Gdyby $\varphi(\alpha)$ było znaném, wyciągając wartość na α z jednego z tych równań i podstawiając w drugie, otrzymalibyśmy z jako funkcję zmiennych niezależnych x i y nie zawierającą α : lecz nie wykonywając tego podstawienia, możemy wyrugować α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, jakkolwiek dwa równania dane są kształtu różnego od uważanego w (1), a to w następujący sposób :

Różniczkując częściowo, otrzymamy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \frac{-2[y - \varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)^2 - \varphi''(\alpha)[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{2[y - \varphi(\alpha)]\left[1 - \varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]\varphi'(\alpha) - [y - \varphi(\alpha)]^2\varphi''(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\varphi'(\alpha)^2}$$

$$1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-\varphi'(\alpha)^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \varphi''(\alpha)[y - \varphi(\alpha)]\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\varphi'(\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\left[1 - \varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]\varphi'(\alpha) - \varphi''(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}[y - \varphi(\alpha)]}{\varphi'(\alpha)^2}$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymamy

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\varphi'(\alpha)^2}{2\varphi'(\alpha)^2 - [y - \varphi(\alpha)]\,\varphi''(\alpha)}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\varphi'(\alpha)}{2\varphi'(\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]\,\varphi''(\alpha)}$$

a podstawiając w dwa pierwsze

$$p = y - \varphi(\alpha)$$

$$q = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

Wartości

$$y - \varphi(\alpha) = p \qquad \varphi'(\alpha) = \frac{p}{q}$$

podstawione w pierwsze z równań danych, dadzą nam równanie o pochodnych częściowych

$$z = pq.$$

Własności funkcyj jednorodnych.

224. Niech będzie funkcja jednorodna

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

zmiennych x, y, z ...; wiemy [**33**] z określenia jednorodności, że

$$f(tx, ty, tz \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots)$$

oznaczając przez m stopień jednorodności funkcji, przez t spółczynnik nieoznaczony.

225. *Pochodne częściowe pierwszego rzędu funkcji jednoro-*

dnej m*go* *stopnia, są funkcjami jednorodnemi* m — 1*go* *stopnia.*

W rzeczy saméj, załóżmy

$$\frac{\partial f(x, y, z \ldots)}{\partial x} = \varphi(x, y, z \ldots)$$

i różniczkujmy częściowo względem x równanie

$$f(tx, ty, tz \ldots) = t^m f(x, y, z)$$

otrzymamy :

$$t\varphi(tx, ty, tz \ldots) = t^m \varphi(x, y, z \ldots),$$

czyli

$$\varphi(tx, ty, tz \ldots) = t^{m-1} \varphi(x, y, z \ldots)$$

a więc [**33**] $\varphi(x, y, z \ldots)$ jest funkcją jednorodną $m-1$ stopnia zmiennych $x, y, z \ldots$ c. b. d. d.

226. Załóżmy

$$tx = \xi \quad ty = \eta \quad tz = \zeta \ldots$$

otrzymamy

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots)$$

a biorąc pochodnę częściową obu stron względem t, i zważywszy że

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = x, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = y, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = z \ldots$$

otrzymamy [**173**]

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta \ldots)}{\partial \xi} x + \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta \ldots)}{\partial \eta} y + \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta \ldots)}{\partial \zeta} z + \ldots$$
$$= m t^{m-1} f(x, y, z)$$

a że t jest jakiémkolwiek, równość powyższa ma miejsce dla $t=1$, co nam daje, zważywszy że wtedy, $\xi=x, \eta=y, \zeta=z\ldots$ a zatém że

$$\frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta\ldots)}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad \frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta\ldots)}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial y}\quad \frac{\partial f(\xi,\eta,\zeta\ldots)}{\partial\zeta}=\frac{\partial u}{\partial z}\ldots$$

wyrażenie godne uwagi:

$$(1)\qquad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\ldots=mu$$

a ztąd:

Twierdzenie. *Summa iloczynów pochodnych częściowych funkcji jednorodnéj względem każdéj ze zmiennych przez odpowiednią zmienną, równa się iloczynowi saméj funkcji przez stopień jednorodności.*

227. Biorąc pochodne częściowe równania (1) względem $x, y, z\ldots$, otrzymalibyśmy

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x}=m\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial y}=m\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+z\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial z}=m\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez x, drugie przez y, trzecie przez $z\ldots$ dodając, odejmując po obu stronach tak otrzymanego równania wyrażenie

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots$$

i zważając na równanie (1), otrzymamy wzór symboliczny

$$(2) \qquad \left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\dots\right)^{(2)}=m(m-1)u$$

gdzie symbol brać należy w znaczeniu wyżéj [**200**] określonym.

W podobny sposób otrzymalibyśmy bez trudności

$$\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\dots\right)^{(3)}=m(m-1)(m-2)u$$

. . . .

$$\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\dots\right)^{(n)}=m(m-1)\dots(m-n+1)u$$

gdzie $n\leqq m$. Ogólności tego ostatniego wzoru, możnaby udowodnić w zwykły sposób, przypuszczając ze zachodzi dla $n=k$ i dowodząc go dla $n=k+1$, jak powyżéj [**194**].

Przykład I. Niech będzie

$$u=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy$$

mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2Ax+2Ez+2Fy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2By+2Dz+2Fx$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2Cz+2Dy+2Ex$$

a więc

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=2(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy)=2u$$

wzór (1) jest sprawdzonym; daléj:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\mathrm{A} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\mathrm{B} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}=2\mathrm{C}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\mathrm{F} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=2\mathrm{E} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=2\mathrm{D}$$

a więc

$$\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{(2)}=2\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}y^2+2\mathrm{C}z^2+4\mathrm{D}yz$$
$$+4\mathrm{E}xz+4\mathrm{F}xy=2.1.u$$

wzór (2) jest także sprawdzonym.

Dalsze wzory się nie stosują, bo funkcja jest jednorodną drugiego stopnia.

Przykład. II. *Wyrugować funkcję φ z równania*

$$u=x^n\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}\right)$$

Funkcja u jest jednorodną $n$go stopnia, mamy więc na zasadzie (1)

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$$

równanie różniczkowe o pochodnych częściowych, nie zawierające funkcji φ, która w ten sposób została od razu wyrugowaną.

ROZDZIAŁ XII

ZAMIANA ZMIENNYCH

Zamiana zmiennnych dla funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj. — Zamiana zmiennéj niezależnéj. — Zamiana wszystkich zmiennych. — Zamiana zmiennych dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych. — Przykłady.

228. Widzieliśmy powyżéj, że ile razy dwie lub kilka zmiennych zależą od siebie za pomocą jednego lub kilku związków wyrażonych przez równania, zwykle mamy pozostawioném do wyboru, którą ze zmiennych uważać będziemy za zmiennę niezależną (jeżeli liczba zmiennych przewyższa o jedność liczbę równań), lub które n z pomiędzy $m+n$ zmiennych, uważać chcemy za zmienne niezależne, jeżeli liczba zmiennych $m+n$ przewyższa o n liczbę m równań danych pomiędzy zmiennemi. Widzieliśmy również, że niektóre z pomiędzy otrzymanych w poprzednich rozdziałach wzorów, pozostają temi samemi bez względu na wybór zmiennéj niezależnéj, mianowicie te, w które wchodzą tylko różniczki pierwszego rzędu [**173**] : lecz inne muszą zmieniać kształt a to z powodu, że różniczki zmiennych niezależnych uważamy jako niezmienne, a zatém mające różniczki wyższych rzędów równemi zeru, gdy tymczasem różniczki zmiennych zależnych czyli funkcyj, są w ogólności funkcjami tak samych zmiennych niezależnych, jak i ich różniczek, mają więc różniczki wyższych rzędów w ogólności różnemi od zera. Widzieliśmy już powyżéj [**12**] w jaki sposób jedne zmienne możemy zastąpić przez drugie, zostające z pierwszemi w ścisłym związku; weźniemy teraz pod uwagę sposób w jaki zmienić potrzeba w takim razie różniczki różnych zmiennych, i wyrazić ich pochodne względem dawnych zmiennych niezależnych, przez pochodne względem nowych.

1°. *Funkcje jednéj zmiennéj niezależnéj.*

229. Zamiana zmiennéj niezależnéj. *Niech będzie* x *zmienna obrana za zmienną niezależną,* y *jéj funkcja :*

$$y = \mathrm{F}(x)$$

i pochodne téj funkcji względem x

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y''' \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$$

Zamierzamy sobie, uważając x *nie za zmienną niezależną, ale za funkcję znaną pewnéj zmiennéj niezależnéj* ξ :

$$x = f(\xi)$$

znaleść wartości pochodnych y', y'', y''' ... $y^{(n)}$ *wyrażone przez różniczki funkcyj* y *i* x, *zmiennéj niezależnéj* ξ.

Wiemy z założenia że

$$(1)\quad dy = y'dx,\quad dy' = y''dx,\quad dy'' = y'''dx, \ldots dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$$

czyli

$$\frac{dy}{dx}=y', \frac{dy'}{dx}=y'', \frac{dy''}{dx}=y''', \ldots \frac{dy^{(n-1)}}{dx}=y^{(n)}$$

a na zasadzie znanego twierdzenia [**151**] wzory (1) zachodzić będą niezmiennie czy y, $y'\ldots$, y'', $y'''\ldots$ uważać będziemy za funkcje zmiennéj niezależnéj x, czy też funkcje te i samo x za funkcje innéj jakiejkolwiek zmiennéj niezależnéj ξ: zawsze pochodna y' jest ilorazem dwóch różniczek dy i dx, pochodna y'' ilorazem dwóch różniczek dy' i dx i t. d.

Za pierwszy z szukanych wzorów uważać więc będziemy:

$$(2) \qquad y'=\frac{dy}{dx} \quad \text{czyli} \quad y'=\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}}$$

uważając już w pierwszym wyrażeniu dy i dx za zmienne różniczki funkcyj y i x zmiennéj niezależnéj ξ, a y' po prostu jako iloraz tych dwóch różniczek.

Różniczkując w tém przypuszczeniu wzór (2), otrzymamy [**157**]:

$$dy'=\frac{dx.\,d\,(dy)-dy.\,d\,(dx)}{dx^2}$$

czyli

$$dy'=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2}$$

a że na zasadzie (1)

$$dy'=y''dx$$

w każdym razie więc:

$$(3) \qquad y''=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3};$$

jest to drugi z szukanych wzorów, gdzie pochodna y'' drugiego rzędu względem x jako zmiennéj niezależnéj wyrażoną jest przez różniczki zmiennych y i x, uważanych obiedwie jako funkcje pewnej zmiennéj niezależnéj ξ.

Różniczkując (3) w tém przypuszczeniu, otrzymamy

$$dy'' = \frac{[dx.d(d^2y) + d^2y.d(dx) - dy.d(d^2x) - d^2x.d(dy)]dx^3}{dx^6}$$

$$- \frac{[dx.d^2y - dy.d^2x]\, d(dx^3)}{dx^6}$$

czyli

$$dy'' = \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^4}$$

a że na zasadzie (1)

$$dy'' = y'''dx$$

więc mamy

$$(4) \qquad y''' = \frac{dx\,(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x\,(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5}$$

trzeci wzór szukany.

Postępując tak daléj, otrzymamy wartość pochodnéj czwartego, piątego... $n$go rzędu fnnkcji y względem zmiennéj niezależnéj x, wyrażoną przez różniczki różnych rzędów aż do $n$go, tak zmiennéj y jak zmiennéj x, uważanych obiedwie za funkcje pewnéj zmiennéj niezależnéj ξ.

Uważać należy, że ta zmienna niezależna ξ nie wchodzi w wyrażenia (2), (3), (4),... co jest bardzo dogodném; bo wzory te służą przez to zarówno dla jakiejkolwiek bądź zmiennéj niezależnéj, od którejbyśmy uczynić mogli zależném x, azatém i y. Gdyby jednak chodziło o wyrażenie pochodnych różnych rzędów y', y'', y'''... $y^{(n)}$ funkcji y względem zmiennéj niezależnéj x, przez *pochodne* różnych rzędów

$$\frac{dy}{d\xi}, \frac{d^2y}{d\xi^2}, \frac{d^3y}{d\xi^3} \cdots \frac{d^ny}{d\xi^n}$$

$$\frac{dx}{d\xi}, \frac{d^2x}{d\xi^2}, \frac{d^3x}{d\xi^3} \cdots \frac{d^nx}{d\xi^n}$$

funkcyj y i x względem pewnéj zmiennéj niezależnéj ξ wyrażenia (2), (3), (4)... napisać by należało, dzieląc liczniki i mianowniki przez odpowiednią potęgę różniczki $d\xi$:

$$(5) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\xi}}{\dfrac{dx}{d\xi}}$$

$$(6) \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{d\xi}\dfrac{d^2y}{d\xi^2} - \dfrac{dy}{d\xi}\dfrac{d^2x}{d\xi^2}}{\left(\dfrac{dx}{d\xi}\right)^3}$$

$$(7) \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dfrac{dx}{d\xi}\left(\dfrac{dx}{d\xi}\dfrac{d^3y}{d\xi^3} - \dfrac{dy}{d\xi}\dfrac{d^3x}{d\xi^3}\right) - 3\dfrac{d^2x}{d\xi^2}\left(\dfrac{dx}{d\xi}\dfrac{d^2y}{d\xi^2} - \dfrac{dy}{d\xi}\dfrac{d^2x}{d\xi^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\xi}\right)^5}$$

. . . .

lecz wzorów (2), (3), (4)... używać będziemy chętniéj niż (5), (6), (7)... raz dla tego, że pierwsze są prostszemi, a powtóre że jest daleko dogodniéj zostawić wybór zmiennéj niezależnéj nie wskazanym.

230. Aby ze wzorów (2), (3), (4)... powrócić do (1) to jest od *zmiennéj niezależnéj jakiejkolwiek* do zmiennéj niezależnéj x, dość jest przypuszczając dx niezmiennėm, założyć

$$d^2x = 0 \qquad d^3x = 0 \ldots$$

otrzymamy w ten sposób:

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \dots$$

jak być powinno.

Jeżeli w szczególnym przypadku uważać będziemy funkcję odwrotną, to jest y, jako zmienną niezależną, x jako funkcję zmiennéj y, przypuszczając dy niezmienném, a więc $d^2y=0$ $d^3y=0\dots$, otrzymamy:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ y'' &= -\frac{dyd^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} \\ y''' &= -\frac{dxdyd^3x + 3dy(d^2x)^2}{dx^5} = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5} \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

231. Przykład. I. *Niech będzie wyrażenie*

$$W = \frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gdzie x *jest zmienną niezależną, a* y *funkcją* x; *znaleść wyrażenie na* W *uważając* y *za zmienną niezależną, a* x *za funkcję* y.

Wyrażenie dane, używając znakowania powyższego, staje się

$$W = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

a podstawiając za y' i y'' wartości (8)

$$W = \frac{\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right)} = \frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \left(\frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}}$$

czyli

$$W = -\frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

wyrażenie podobne danemu, tylko ze znakiem przeciwnym.

Przykład II. *Niech będzie równanie*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

gdzie x *jest zmienną niezależną, a* y *funkcją. Wziąść* t *za zmienną niezależną, wiedząc że*

$$t = \mathrm{l}.\,(x + \sqrt{1+x^2})$$

i zastąpić wszędzie x *przez* t.

Możemy napisać to ostatnie równanie pod kształtem

$$e^t = x + \sqrt{1+x^2}$$

a więc różniczkując, otrzymamy

$$e^t dt = dx\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

czyli

$$e^t dt = \frac{dx . e^t}{\sqrt{1+x^2}}$$

a ztąd

$$dx = dt\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+x^2}$$

Podstawiając w równaniu daném, otrzymamy

$$\frac{dy}{\sqrt{1+x^2}\,dt} + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Przykład III. *Niech będzie równanie*

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

Zastąpić x *przez* t *wiedząc że*

$$x = \text{dos}\, t.$$

Zastosujemy tu metodę ogólną; podstawiwszy za $\frac{d^2y}{dx^2}$ wzór (3), otrzymamy

$$(1-x^2)\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

czyli

$$(1-x^2)(dxd^2y - dy\, l^2x) - xdydx^2 + n^2ydx^3 = 0$$

a że

$$x = \text{dos}\, t$$

więc

$$dx = -\,\text{wst}\,t.dt \qquad d^2x = -\,\text{dos}\,t.dt^2$$

a zatém podstawiając

$$(1-\operatorname{dos}^2 t)(-\operatorname{wst} t.dtd^2y+\operatorname{dos} t.dt^2dy)$$
$$-\operatorname{dos} t.\operatorname{wst}^2 t.dt^2dy-n^2y\operatorname{wst}^3 t.dt^3=0$$

a upraszczając i dzieląc przez $-\operatorname{wst}^3 t.dt$, otrzymamy

$$d^2y+n^2ydt^2=0$$

czyli

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$$

232. Zamiana wszystkich zmiennych. *Niech będzie zmienna niezależna* x, *funkcje jéj*

$$y_1, y_2, y_3 \ldots y_m$$

i pochodne tych funkcyj względem x

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx}, \frac{d^3y_1}{dx^3}\ldots$$
$$\frac{dy_2}{dx}, \frac{d^2y_2}{dx}, \frac{d^3y^2}{dx^3}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_m}{dx}, \frac{d^2y_m}{dx}, \frac{d^3y_m}{dx^3}\ldots\quad;$$

niech będzie wyrażenie

$$W=F\left(x, y_1, y_2\ldots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}\ldots \frac{dy_2}{dx}, \frac{d^2y_2}{dx}\ldots \frac{dy_m}{dx}, \frac{d^2y_m}{dx^2}\ldots\right)$$

które jest znaną funkcją zmiennéj niezależnéj, funkcyj téj zmiennéj niezależnéj, i pochodnych różnych rzędów tych funkcyj względem x. *Zamierzamy sobie podstawić w tém wyrażeniu* *za zmienne*

$$x, y_1, y_2, \dots y_m$$

nowe zmienne

$$\xi, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_m$$

związane z dawnemi za pomocą m + 1 *równań*

$$\begin{aligned}
f(x, y_1, \dots y_m, \xi, \eta_1 \dots \eta_m) &= 0 \\
f_1(x, y_1, \dots y_m, \xi, \eta_1 \dots \eta_m) &= 0 \\
f_2(x, y_1, \dots y_m, \xi, \eta_1 \dots \eta_m) &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_m(x, y_1, \dots y_m, \xi, \eta_1 \dots \eta_m) &= 0
\end{aligned}$$

i z których jednę, naprzykład ξ *obieramy za zmienną niezależną.*

Z tych ostatnich równań wyciągnąć możemy wartości :

$$(A) \quad \left\{\begin{aligned}
x &= \varphi(\xi, \eta_1 \dots \eta_m) \\
y_1 &= \varphi_1(\xi, \eta_1 \dots \eta_m) \\
y_2 &= \varphi_2(\xi, \eta_1 \dots \eta_m) \\
&\dots\dots\dots \\
y_m &= \varphi_m(\xi, \eta_1 \dots \eta_m)
\end{aligned}\right.$$

a przez różniczkowanie [**198**] wartości na

$$(B) \quad \left\{\begin{aligned}
&dx, d^2x, d^3x \dots \\
&dy_1, d^2y, d^3y_1 \dots \\
&dy_2, d^2y_2, d^3y_2 \dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&dy_m, d^2y_m, d^3y_m \dots
\end{aligned}\right.$$

różniczki różnych rzędów zmiennych dawnych, wyrażone przez zmienne nowe i ich różniczki.

Podstawiając w wyrażeniu na W naprzód za

$$\frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2}\dots$$

$$\frac{dy_2}{dx},\ \frac{d^2y_2}{dx^2}\dots$$

$$\frac{dy_m}{dx},\ \frac{d^2y_m}{dx^2}\dots$$

wartości otrzymane wedle wzorów (3) i (4)... **[229]**, a następnie wartości powyższe (A) i (B) otrzymamy w tém wyrażeniu same tylko zmienne ξ, $\eta_1 \dots \eta_m$ i różniczki tych zmiennych, lub ich pochodne względem ξ.

233. Przykład I. Niech będzie wyrażenie przed chwilą uważane

$$W = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

w którém chcemy zastąpić x i y przez nowe zmienne ρ i ω, dane przez równania

$$\text{(A)}\qquad x = \rho \operatorname{dos} \omega \qquad y = \rho \operatorname{wst} \omega$$

które nam wyznaczają przez różniczkowanie, uważając ω za zmienną niezależną, a więc $d\omega$ jako niezmienne :

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= d\rho \operatorname{dos} \omega - \rho \operatorname{wst} \omega\, d\omega \\ dy &= d\rho \operatorname{wst} \omega + \rho \operatorname{dos} \omega\, d\omega \\ d^2x &= d^2\rho \operatorname{dos} \omega - 2d\rho \operatorname{wst} \omega\, d\omega - \rho \operatorname{dos} \omega\, d\omega^2 \\ d^2y &= d^2\rho \operatorname{wst} \omega + 2d\rho \operatorname{dos} \omega\, d\omega - \rho \operatorname{wst} \omega\, d\omega^2 \end{aligned}\right.$$

Podstawiając w wyrażenie W za $\frac{d^2y}{dx^2}$ wartość (3) **[229]**, otrzymamy:

$$W = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

Lecz wzory (B) dają nam

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

$$dxd^2y - dyd^2x = -\rho d^2\rho d\omega + 2d^2\rho d\omega + \rho^2 d\omega^3$$

a zatém

$$W = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\rho^2 d^2\rho d\omega + 2d\rho^2 d\omega + \rho^2 d\omega^3}$$

czyli

$$W = \frac{\left(\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2} + 2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho^2}$$

234. Przykład II. Niech będzie poprzednie wyrażenie

$$W = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

w którém za funkcję y i zmienną niezależną x, chcemy podstawić zmienne ρ i s dane przez równania

$$(a) \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$(b) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

uważając ds za niezmienne, to jest s za zmienną niezależną. Mamy więc

$$(c) \quad \rho d\rho = xdx + ydy$$

$$(d) \quad 0 = dxd^2x + dyd^2y$$

różniczkując pierwsze z tych równań

$$\rho d^2\rho + d\rho^2 = (xd^2x + yd^2y) + (dx^2 + dy^2)$$

czyli, zważywszy na (b)

$$(e) \qquad \rho d^2\rho + d\rho^2 - ds^2 = xd^2x + yd^2y$$

Wzory (d) i (e) dają nam,

$$(ydx - xdy)\, d^2x = -(\rho d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\, dy$$
$$(ydx - xdy)\, d^2y = +(\rho d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\, dx$$

a więc

$$dxd^2y - dyd^2x = \frac{(\rho d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\, ds^2}{ydx - xdy}$$

a że

$$ydx - xdy = \sqrt{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (xdx + ydy)^2}$$
$$= \rho \sqrt{ds^2 - d\rho^2}$$

a zatém

$$(f) \qquad dxd^2y - dyd^2x = \frac{(\rho d^2\rho + d\rho^2 - ds^2)\, ds^2}{\rho \sqrt{ds^2 - d\rho^2}}$$

Wzór (3) [**229**] podstawiony w wyrażenie W, daje nam jak poprzednio

$$W = \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

podstawiając w to wyrażenie (b) i (f), otrzymamy

$$W = \frac{\rho ds \sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{\rho d^2\rho + d\rho^2 - ds^2}$$

co jest lepiéj napisać, aby wskazać że uważamy s za zmienną niezależną:

$$W = \frac{\rho \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds^2}}}{\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} + \frac{d\rho^2}{ds^2} - 1}.$$

2° *Funkcje wielu zmiennych niezależnych.*

235. *Niech będzie funkcja* n *zmiennych niezależnych* x, y, z... *w liczbie* n

$$u = F(x, y, z \ldots) \;; \tag{1}$$

uważajmy x, y, z... *jako funkcje nowych zmiennych* ξ, η, ζ... *w téj saméj liczbie* n, *danych za pomocą* n *związków*

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z \ldots, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z \ldots, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \\ \varphi_3(x, y, z \ldots, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{2}$$

tak, że związki te mogą wyznaczyć dawne zmienne niezależne x, y, z... *przez nowe* ξ, η, ζ ... *lub odwrotnie. Funkcja* u *ma być uważana, jako funkcja zmiennych niezależnych* ξ, η, ζ... *Chcemy wyznaczyć pochodne częściowe*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \ldots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

funkcji u *względem dawnych zmiennych, za pomocą nowych zmiennych, i pochodnych częściowych*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \xi} \ldots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

funkcji u *względem nowych zmiennych.*

Podstawiając w równaniu (1) za x, y, z... wartości z równań (2), otrzymalibyśmy u jako funkcyę zmiennych niegależnych ξ, η, ζ, ... a więc [**209**]

$$(3)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta + \dots$$

Z równań (2) moglibyśmy również otrzymać ξ, η, ζ... jako funkcję x, y, z... uważanych za zmienne niezależne, a więc

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \xi}{\partial z} dz + \dots \\ d\eta = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \eta}{\partial z} dz + \dots \\ d\zeta = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} dz + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Pochodne częściowe

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z} \dots, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z} \dots$$

wchodzące w równania (4) są funkcjami x, y, z... które z (2) otrzymać można: podstawiwszy w te funkcje za x, y, z... wartości ich z (2), pochodne powyższe będą funkcjami zmiennych niezależnych ξ, η, ζ...

Uczyniwszy to podstawienie, podstawmy w (3) za różniczki $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$... tak otrzynane wartości tych różniczek; wyłączmy dx, dy, dz ... za nawias, otrzymamy wyrażenie kształtu

$$
(5)\qquad du = \psi_1\left(\xi, \eta, \zeta \ldots \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta} \ldots\right) dx
$$
$$
+ \psi_2\left(\xi, \eta, \zeta \ldots \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta} \ldots\right) dy
$$
$$
+ \psi_3\left(\xi, \eta, \zeta \ldots \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{zu}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta} \ldots\right) dz + \ldots
$$

a funkcje [**209**]

$$
(6)\qquad \psi_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \psi_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \psi_3 = \frac{\partial u}{\partial z} \ldots
$$

będą oczywiście pochodnemi częściowemi funkcji u względem dawnych zmiennych x, y, $z \ldots$ wyrażonemi przez nowe zmienne ξ, η, $\zeta \ldots$ i pochodne częściowe $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ $\frac{\partial u}{\partial \zeta} \ldots$ funkcji u względem tych nowych zmiennych niezależnych.

236. W ten sam sposób otrzymać możemy pochodne wyższych rzędów: ponieważ z równań (6), $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \ldots$ są funkcjami zmiennych niezależnych ξ, η, $\zeta \ldots$ więc

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots \\
d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots \\
d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial \zeta} dz + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

a podstawiając na drugiéj stronie tych równań za $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, ... wartości (6); za $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ... wartości (4) w których x, y, z... wchodzące w pochodne częściowe, zastąpionemi zostały przez ξ, η, ζ za pomocą (2), otrzymamy wyrażenia kształtu,

$$(8)\quad \begin{cases} d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz + \ldots \\ d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = Y_1 dx + Y_2 dy + Y_3 dz + \ldots \\ d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = Z_1 dx + Z_2 dy + Z^3 dz + \ldots \end{cases}$$

gdzie X_1, X_2, X_3..., Y_1, Y_2, Y_3..., Z_1, Z_2, Z_3... oznaczają przez skrócenie funkcje zmiennych ξ, η, ζ... i pochodnych $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$..., $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}$...

Mamy więc [**214**] z tych równań:

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = X_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = Y_1 = X_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = X_2 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = Y_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = X_3 & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial z} = Y_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z} = Z_3 & \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

to jest pochodne częściowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},\ \ldots$$

drugiego rzędu funkcji u względem dawnych zmiennych, wyrażone przez nowe zmienne i pochodne częściowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji danéj względem tych nowych zmiennych niezależnych $\xi,\ \eta,\ \zeta \ldots$

Podobnie postępowalibyśmy, by otrzymać pochodne częściowe trzeciego ... rzędu, względem dawnych zmiennych przez nowe zmienne i pochodne pierwszego, drugiego, trzeciego ... rzędu względem nowych zmiennych i t. d.

237. Przykład I. Niech będzie funkcja u trzech zmiennych niezależnych $x,\ y,\ z$

$$u = \mathrm{F}(x, y, z) \tag{1}$$

za te zmienne chcemy podstawić inne zmienne $r,\ \theta,\ \omega$ połączone z dawnemi przez równania

$$\left\{\begin{aligned} x &= r \,\mathrm{wst}\, \theta \,\mathrm{dos}\, \omega \\ y &= r \,\mathrm{wst}\, \theta \,\mathrm{wst}\, \omega \\ z &= r \,\mathrm{dos}\, \theta \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Wyrazić pochodne częściowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

przez nowe zmienne $r,\ \theta,\ \omega$ i pochodne częściowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji u względem $r,\ \theta,\ \omega$.

Wzory (2) rozwiązane co do $r,\ \theta,\ \omega$, dają nam:

$$\left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \mathrm{dos}\, \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \mathrm{st}\, \omega &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

różniczkując, otrzymamy

$$dr = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$d\theta = \frac{z\,(xdx + ydy) - (x^2+y^2)\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{wst}\theta}$$

$$d\omega = \frac{(-ydx + xdy)\operatorname{dos}^2\omega}{x^2}$$

a podstawiając (2)

$$(4)\quad \begin{cases} dr = \operatorname{wst}\theta \operatorname{dos}\omega\, dx + \operatorname{wst}\theta \operatorname{wst}\omega\, dy + \operatorname{dos}\theta\, dz \\ d\theta = \frac{1}{r}\operatorname{dos}\theta\operatorname{dos}\omega\, dx + \frac{1}{r}\operatorname{dos}\theta\operatorname{wst}\omega\, dy - \frac{1}{r}\operatorname{wst}\theta\, dz \\ d\omega = -\frac{1}{r}\frac{\operatorname{wst}\omega}{\operatorname{wst}\omega}\, dx + \frac{1}{r}\frac{\operatorname{dos}\omega}{\operatorname{wst}\omega}\, dy \end{cases}$$

Uważając u jako funkcję r, θ, ω mamy

$$(3)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u}{\partial \omega}d\omega$$

podstawiając za dr, $d\theta$, $d\omega$ wartości (4), otrzymalibyśmy wyrażenie (5) różniczki zupełnéj du, w trzech wyrazach mających za czynniki dx, dy, dz: spółczynniki tych różniczek, będą pochodnemi częściowemi szukanemi

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\omega + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{dos}\theta\operatorname{dos}\omega}{r} - \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{\operatorname{wst}\omega}{r\operatorname{wst}\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{wst}\theta\operatorname{wst}\omega + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{dos}\theta\operatorname{dos}\omega}{r} + \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{\operatorname{dos}\omega}{r\operatorname{wst}\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{dos}\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{wst}\theta}{r} \end{cases}$$

Aby znaleść pochodne częściowe wyższych stopni, należy wypisać równania [**236**] (7): pochodne częściowe znajdujące się po drugiéj stronie tego równania, mają wartości następujące :

$$
(7')\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega}{r^2\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r} + \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}^2\,\theta} \\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\omega} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\omega}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r} - \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(7'')\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\omega}{r^2\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r} - \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}^2\,\theta} \\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\omega} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\omega}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\omega}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\,\frac{\mathrm{dos}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega + \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\omega}{r} - \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega}{r\,\mathrm{wst}\,\theta}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(7''')\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\mathrm{dos}\,\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\,\frac{\mathrm{wst}\,\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{wst}\,\theta}{r^2} \\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial\theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\,\mathrm{dos}\,\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\,\frac{\mathrm{wst}\,\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{wst}\,\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\mathrm{dos}\,\theta}{r} \\
\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial\omega} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\omega}\,\mathrm{dos}\,\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial\omega}\,\frac{\mathrm{wst}\,\theta}{r}
\end{aligned}
\right.
$$

Równania (7') pomnożone przez (4) pierwsze przez pierwsze, drugie przez drugie, trzecie przez trzecie i dodane dadzą nam pierwsze równania (8) [**236**]; w podobny sposób z (7'') i (7''') pomnożonych odpowiednio przez (4), otrzymamy drugie i trzecie z równań (8). Mając równania (8), to jest różniczki zupełne pochodnych częściowych $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, otrzymamy ich różniczki częściowe, wyłączając różniczki dx, dy, dz za nawias i biorąc spółczynniki, jak w równaniach (9); otrzymamy w ten sposób:

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{wst}^2\theta\operatorname{dos}^2\omega + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\,\frac{\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta\operatorname{dos}^2\omega}{r} \\
& - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\omega}\,\frac{\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\,\frac{\operatorname{dos}^2\theta\operatorname{dos}^2\omega}{r^2} \\
& - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\omega}\,\frac{\operatorname{dos}\theta\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r^2\operatorname{wst}\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\,\frac{\operatorname{wst}^2\omega}{r^2\operatorname{wst}^2\theta} \\
& + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\operatorname{dos}^2\theta\operatorname{dos}^2\omega + \operatorname{wst}^2\omega}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{(\operatorname{wst}^2\omega - 2\operatorname{wst}^2\theta\operatorname{dos}^2\omega)\operatorname{dos}\theta}{r^2\operatorname{wst}\theta} \\
& + 2\frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r^2\operatorname{wst}^2\theta} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{wst}^2\theta\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\,\frac{\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r} \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\omega}\,\frac{\operatorname{dos}^2\omega - \operatorname{wst}^2\omega}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\,\frac{\operatorname{dos}^2\theta\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r^2} \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\omega}\,\frac{(\operatorname{dos}^2\omega - \operatorname{wst}^2\omega)\operatorname{dos}\theta}{r^2\operatorname{wst}\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\,\frac{\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r^2\operatorname{wst}^2\theta} \\
& - \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\operatorname{wst}^2\theta\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{(1 + 2\operatorname{wst}^2\theta)\operatorname{dos}\theta\operatorname{wst}\omega\operatorname{dos}\omega}{r^2\operatorname{wst}\theta} \\
& - \frac{\partial u}{\partial\omega}\,\frac{\operatorname{dos}^2\omega - \operatorname{wst}^2\omega}{r^2\operatorname{wst}^2\theta}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\,\frac{(\text{dos}^2\theta - \text{wst}^2\theta)\,\text{dos}\,\omega}{r} \\
&\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \omega}\,\frac{\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\omega}{r\,\text{wst}\,\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\omega}{r^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \omega}\,\frac{\text{wst}\,\omega}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\omega}{r} \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{(\text{dos}^2\theta - \text{wst}^2\theta)\,\text{dos}\,\omega}{r^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\text{wst}^2\theta\,\text{wst}^2\omega + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}^2\omega}{r} \\
&\quad + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \omega}\,\frac{\text{wst}\,\omega\,\text{dos}\,\omega}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,\frac{\text{dos}^2\theta\,\text{wst}^2\omega}{r^2} \\
&\quad + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \omega}\,\frac{\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\omega\,\text{dos}\,\omega}{r^2\,\text{wst}\,\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}\,\frac{\text{dos}^2\omega}{r^2\,\text{wst}^2\theta} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\text{dos}^2\theta\,\text{wst}^2\omega + \text{dos}^2\omega}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{(\text{dos}^2\omega - 2\,\text{wst}^2\theta\,\text{wst}^2\omega)\,\text{dos}}{r\,\text{wst}\,\theta} \\
&\quad - 2\,\frac{\partial u}{\partial \omega}\,\frac{\text{wst}\,\omega\,\text{dos}\,\omega}{r^2\,\text{wst}^2\theta} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\,\frac{(\text{dos}^2\theta - \text{wst}^2\theta)\,\text{wst}\,\omega}{r} \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \omega}\,\frac{\text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\omega}{r\,\text{wst}\,\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\omega}{r^2} \\
&\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \omega}\,\frac{\text{dos}\,\omega}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\omega}{r} \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{(\text{dos}^2\theta - \text{wst}^2\theta)\,\text{wst}\,\omega}{r^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\text{dos}^2\theta - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta}{r} \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,\frac{\text{wst}^2\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\text{wst}^2\theta}{r} \\
&\quad + 2\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta}{r^2}
\end{aligned}\right.
$$

238. Rachunki często zbyt rozwlekłe zamiany zmiennych niezależnych, mogą być często uproszczonemi w szczególnych przypadkach, jak to widzieć można z następującego przykładu :

Przykład II. Niech będzie wyrażenie

$$
\text{(1)} \qquad \mathrm{W} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
$$

gdzie u jest funkcją daną zmiennych niezależnych x, y, z, w którém chcemy za zmienne niezależne x, y, z podstawić r, θ, ω, związane z poprzedniemi za pomocą równań

$$
\text{(2)} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= r \operatorname{wst} \theta \operatorname{dos} \omega \\ y &= r \operatorname{wst} \theta \operatorname{wst} \omega \\ z &= r \operatorname{dos} \theta \end{aligned} \right.
$$

Jest to jak widzimy szczególny tylko przypadek przykładu poprzedzającego : podstawiając w W wyrażenia na $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ z równań (9) [**237**], otrzymalibyśmy W wyrażone przez nowe zmiennne niezależne. Lecz można otrzymać żądane przekształcenie w następujący daleko prostszy sposób :

Nazwijmy

$$
\text{(3)} \qquad r \operatorname{wst} \theta = \rho
$$

a więc

$$
\text{(3')} \qquad x = \rho \operatorname{dos} \omega \qquad y = \rho \operatorname{wst} \omega
$$

czyli

$$
\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \operatorname{st} \omega = \frac{y}{x}
$$

i podstawmy naprzód za x i y nowe zmienne ρ i ω, pozostawiając z.

Mamy :

$$
d\rho = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{dos} \omega \, dx + \operatorname{wst} \omega \, dy
$$

$$
d\omega = \frac{(x dy - y dx) \operatorname{dos}^2 \omega}{x^2} = -\frac{\operatorname{wst} \omega}{\rho} dx + \frac{\operatorname{dos} \omega}{\rho} dy
$$

a ztąd, pochodne częściowe

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\operatorname{dos}\omega\,,\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\operatorname{wst}\omega\,,\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{\operatorname{wst}\omega}{\rho}\,,\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\operatorname{dos}\omega}{\rho}$$

a ponieważ [**173**]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

więc

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial\rho}\operatorname{dos}\omega-\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\operatorname{wst}\omega}{\rho}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial\rho}\operatorname{wst}\omega+\frac{\partial u}{\partial\omega}\frac{\operatorname{dos}\omega}{\rho}\end{aligned}\right.$$

Pomnóżmy drugie z tych równań przez i (gdzie $i=\sqrt{-1}$) i dodajmy

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=(\operatorname{dos}\omega+i\operatorname{wst}\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)$$

Oznaczmy przez v wartość jednéj lub drugiej strony tego ostatniego równania; ponieważ funkcja u może być w niém jakąkolwiek, i ponieważ równanie to mieć będzie miejsce czy i weźniemy ze znakiem + czy ze znakiem —, napisać możemy zastępując u przez v,

$$(6)\qquad \frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}=(\operatorname{dos}\omega-i\operatorname{wst}\omega)\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)$$

gdzie różniczkowanie wyrażenia urojonego v, uważamy jako działanie dokonane przypuszczając i stałém.

Założywszy

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}$$

mamy

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

a więc

$$\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

a ponieważ

$$v = (\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)$$

zatém

$$(\mathrm{dos}\,\omega - i\,\mathrm{wst}\,\omega)\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

Podstawiając w równaniu (6) otrzymamy

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

a więc

$$(8)\qquad W = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

Należy teraz podstawić za z i ρ w (8) żądane zmienne θ i r, związane ze zmiennemi z i ρ za pomocą równań

$$(9)\qquad z = r\,\mathrm{dos}\,\theta \qquad \rho = r\,\mathrm{wst}\,\theta$$

Lecz widzimy że w tém ostatniém przekształceniu r i θ są w tém samém znaczeniu względem z i ρ, co w poprzedniém ρ i ω były względem x i y dla podobieństwa związków (3') i (9); otrzymamy więc znów równanie (7), w którem za x należy podstawić z; za y, ρ; za ρ, r; za ω, θ; będziemy mieli

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

Drugi wzór (4) stanie się po tém podstawieniu

$$(11)\qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{wst}\,\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\mathrm{dos}\,\theta}{r}$$

podstawiając wartości te w (8) i zastępując ρ przez $r \operatorname{wst} \theta$, otrzymamy

$$(12) \qquad W = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{wst}^2 \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{dos}\theta}{r^2 \operatorname{wst}\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

co można napisać przez skrócenie w następujący sposób, zważywszy że dwa pierwsze wyrazy pomnożone przez r, stanowią wyrażenie pochodnéj $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$, a trzy ostatnie pomnożone przez $r^2 \operatorname{wst} \theta$, wyrażenie pochodnéj

$$\frac{\partial\left(\operatorname{wst}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta};$$

$$(13) \qquad r^2 W = r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\operatorname{wst}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\operatorname{wst}\theta}\frac{\partial\left(\operatorname{wst}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}$$

Nie potrzebujemy przypominać że $\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$ oznacza pochodnę częściową drugiego rzędu iloczynu ru względem r, od którego zależy u, przyczém θ i ω mają być uważane jako stałe.

W przekształceniu wyrażenia W, które jest często używaném w zastosowaniach biorą czasami zamiast θ, zmiennę

$$\mu = \operatorname{dos}\theta$$

za zmiennę niezależną; mamy wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\theta} = -\operatorname{wst}\theta\frac{\partial u}{\partial \mu}$$

czyli

$$\operatorname{wst}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = -(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}$$

następnie

$$\frac{\partial\left(\operatorname{wst}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} = -\frac{\partial\left(\operatorname{wst}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \mu}\operatorname{wst}\theta = \operatorname{wst}\theta\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu}$$

a wyrażenie (13) staje się

$$r^2 W = r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} \quad (*)$$

239. Zamiana wszystkich zmiennych. *Niech będzie*

(1) $$u = F(x, y, z \ldots)$$

funkcja m *zmiennych niezależnych* x, y, z . . ., *którą chcemy zastąpić przez inną funkcję*

(2) $$v = \varphi(\xi, \eta, \zeta \ldots)$$

m *innych zmiennych uiezależnych* ξ, η, ζ . . .; *między* m + 1 *zmiennemi* u, x, y, z . . . *i* m + 1 *zmiennemi* v, ξ, η, ζ... *zachodzi* m + 1 *równań*

(3) $$\begin{cases} f_0(u, x, y, z \ldots, v, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \\ f_1(u, x, y, z \ldots, v, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \\ f_2(u, x, y, z \ldots, v, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_m(u, x, y, z \ldots, v, \xi, \eta, \zeta \ldots) = 0 \end{cases}$$

wyznaczającchch v, ξ, η, ζ. . . *przez* u, x, y, z . . . *lub odwrotnie. Zamierzamy sobie wyrazić pochodne częściowe*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ldots$$

(*) To i inne przedstawienia tego rozdziału, odznaczające się zręcznością i proprostotą rachunku, wyjęliśmy z dzieła P. J. A. Serret : *Cours du Calcul Différentiel.*

przez pochodne częściowe

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}, \ \frac{\partial v}{\partial \eta}, \ \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \ldots$$

Z $m+1$ równań (3) powyższych otrzymać możemy różniczkując

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dv = \mathrm{U}_0 du + \mathrm{U}_1 dx + \mathrm{U}_2 dy + \ldots \\ d\xi = \mathrm{X}_0 du + \mathrm{X}_1 dx + \mathrm{X}_2 dy + \ldots \\ d\eta = \mathrm{Y}_0 du + \mathrm{Y}_1 dx + \mathrm{Y}_2 dy + \ldots \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

gdzie $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \ldots, \mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \ldots, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2 \ldots$ są funkcjami znanemi $x, y, z \ldots$ Lecz na zasadzie (1) mamy

$$(5) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots$$

a więc, podstawiając w (4)

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dv = \left(\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_0 \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \ldots \\ d\xi = \left(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_0 \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \ldots \\ d\eta = \left(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_0 \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \ldots \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

Na zasadzie (2) mamy również

$$(7) \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial \xi} d\zeta + \ldots$$

a podstawiając (6), otrzymamy równanie, które będzie miało miejsce dla wszelkich wartości zmiennych niezależnych $x, y, z\ldots$, a zatém niezależnie od różniczek $dx, dy, dz\ldots$ Równając spółczynniki tych różniczek, otrzymamy m równań

$$
(8)\left\{\begin{array}{l}
U_1+U_2\frac{\partial u}{\partial x}=\left(X_1+X_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}+\left(Y_1+Y_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}+\ldots\\
U_2+U_0\frac{\partial u}{\partial y}=\left(X_2+X_0\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \xi}+\left(Y_2+Y_0\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}+\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

Z równań (8) otrzymamy wartości m pochodnych

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\ldots$$

przez $U_0, U_1,\ldots X_0, X_1\ldots Y_1 Y_0\ldots$ i pochodne funkcji v względem zmiennych niezależnych $\xi, \eta, \zeta\ldots$; a podstawiając w wartościach na $U_0, U_1\ldots X_0, X_1\ldots Y_0, Y_1\ldots$ za $u, x\ y, z\ldots$ zmienne $v, \xi, \eta, \zeta\ldots$ za pomocą równań (3), otrzymamy pochodne częściowe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\ldots$ wyrażone przez $v, \xi, \eta, \zeta\ldots$ i pochodne częściowe $\frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \zeta}$

Ażeby zrobić podobne przekształcenie dla pochodnych częściowych 2go rzędu, dość jest zróżniczkować równania (8). Różniczkując naprzykład *zupełnie* pierwsze z równań (8), i zważywszy że

$$
(9)\left\{\begin{array}{l}
dv=\frac{\partial v}{\partial \xi}\,d\xi+\frac{\partial v}{\partial \eta}\,d\eta+\frac{\partial v}{\partial \zeta}\,d\zeta+\ldots\\
d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\,\partial y+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\,dz+\ldots\\
d\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\,d\xi+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}\,d\xi d\eta+\ldots\\
d\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}\,\partial\xi\partial\eta+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\,d\eta^2+\ldots
\end{array}\right.
$$

podstawiając za te różniczki zupełne ich wartości (9) jak również za $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$... wartości (6), otrzymamy równanie, które będzie miało miejsce niezależnie od różniczek dx, dy, dz...; zakładając spółczynniki tych różniczek w liczbie m równemi po obu stronach równania, otrzymamy m równań, które nam wyznaczą m pochodnych częściowych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cdots$$

Drugie równanie (8) da nam podobnież m pochodnych częściowych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdots$$

z których pierwszą już byliśmy otrzymali poprzednio i t. d. Pochodne trzeciego i wyższych rzędów, mogą być otrzymanemi bez trudności zupełnie w ten sam sposób.

Sposób ten z łatwością zastosować można do ilukolwiek funkcyj wielu zmiennych niezależnych.

240. Przykład. **Przekształcenie Legendre'a.** Niech będzie z funkcją dwóch zmiennych niezależnych x i y. Mamy [**217**]

(1) $$dz = p dx + q dy$$

i również [**218**]

(2) $$\left\{ \begin{aligned} dp &= r dx + s dy \\ dq &= s dx + t dy \end{aligned} \right.$$

co wychodzi na to samo, co oznaczyć przez skrócenie

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x} = r$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y} = t$$

Załóżmy

(3) $$u = px + qy - z$$

otrzymamy różniczkując *zupełnie*:

$$du = (pdx + qdy - dz) + xdp + ydq$$

a podstawiając (1)

(4) $$du = xdp + ydq$$

Równania (2) rozwiązane co do dx, dy dają nam

(5) $$\begin{cases} dx = \dfrac{1}{rt - s^2}dp + \dfrac{-s}{rt - s^2}dq \\ dy = \dfrac{-s}{rt - s^2}dp + \dfrac{r}{rt - s^2}dq \end{cases}$$

Chcemy zastąpić zmienne x, y, z *przez zmienne* p, q, u, *uważając* p, q *za zmienne niezależne*, u *za funkcję tych zmiennych niezależnych.*

Z równania (4) mamy

(6) $$\frac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = y$$

a z równań (5)

(7) $$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{r}{rt - s^2}$$

a zatém

(8) $$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}$$

ztąd

(9) $$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q}\right)^2 = \frac{1}{rt - s^2}$$

Równania (8) i (9) wyznaczają r, s, t, przez pochodne częściowe $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q}$.

Gdybyśmy chcieli wziąść x i p za zmienne niezależne, z równań (2) otrzymalibyśmy

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} dy &= \frac{1}{s}\,dp - \frac{r}{s}\,dx \\ dq &= \frac{t}{s}\,dp - \frac{rt - s^2}{s}\,dx \end{aligned} \right.$$

a zatém

$$(11) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{rt - s^2}{s}$$

wzory (1) i (4) dadzą nam różniczki dz i du.

Jeżeli $rt - s^2 = 0$, bez względu na x i z, wtedy

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

zmienna q jest niezależną od x [**145**]; zmienne p i q nie mogą być wzięte za zmienne niezależne, a wzory powyższe stają się niemożebnemi.

Ćwiczenia.

1. W równaniu

$$\frac{d^2y}{dy^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

w którém x uważaném jest za zmienną niezależną, a y za funkcję, wziąść y za zmienną niezależną, a x za funkcję.

Odpowiedź. Równanie stanie się

$$\frac{d^2x}{dy^2} + x - e^y = C$$

2. W równaniu

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

podstawić za zmienną niezależną x, inną zmienną niezależną ω, daną przez równanie

$$x = \operatorname{dos} \omega$$

Odp. Równanie staje się

$$\frac{d^2y}{d\omega^2} - (1 + \operatorname{wst}^2 \omega) \operatorname{dot} \omega . \frac{dy}{d\omega} + ay \operatorname{wst}^2 \omega = 0$$

3. W równaniu

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

podstawić za x zmienną niezależną ω, wiedząc że

$$x = \operatorname{dos} \omega$$

Odp.

$$\frac{dy}{d\omega^2} + n^2y = 0$$

4. W równaniu

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0$$

podstawić za x zmienną niezależną t, wiedząc że

$$x^2 = 4t$$

Odp.

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$$

5. W wyrażeniu

$$W = \frac{x \dfrac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$$

podstawić za x i y zmienne r i θ, wiedząc że

$$x = r \operatorname{dos} \theta \qquad y = r \operatorname{wst} \theta$$

Odp.

$$W = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

6. W wyrażeniu

$$W = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$$

gdzie x i y se zmiennemi niezależnemi, a u ich funkcją, podstawić za x i y zmienne r i θ, wiedząc że

$$x = r \operatorname{dos} \theta \qquad y = r \operatorname{wst} \theta$$

Odp.

$$W = \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

7. W równaniu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

gdzie x i y są zmiennemi niezależnemi, a u ich funkcją, podstawić zmienną niezależną r, wiedząc że:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Odp.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

8. W równaniu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

gdzie x, y, z są zmiennemi niezależnemi, a u ich funkcją, podstawić zmienną niezależną r, wiedząc że

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Odp.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

CZĘŚĆ III

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO TEORJI FUNKCYJ

CZĘŚĆ III

ZASTOSOWANIE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO TEORJI FUNKCYJ

ROZDZIAŁ XIII

O PRZYROSTKACH SKOŃCZONYCH FUNKCYJ

Różne rzędy ciągłości funkcyj. — Wyrażenie stosunku przyrostków skończonych dwóch funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj. — Wyrażenie przyrostku skończonego funkcji w szczególnych przypadach. — Wnioski.

241. Różne rzędy ciągłości funkcyj. Z określenia pochodnéj [**138**] wypada, że jeżeli pochodna funkcji jest funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj, pomiędzy pewnemi granicami téj zmiennéj niezależnéj, sama funkcja jest również funkcją ciągłą pomiędzy temi samemi granicami zmiennéj niezależnéj: samo istnienie pochodnéj, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym [**123**] ciągłości funkcyj. Lecz twierdzenie odwrotne nie ma miejsca: pochodna funkcji ciągłéj, nie jest koniecznie funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj. Aby uczynić to widocznêm, przedstawmy funkcję przez krzywę MAM_1 (fig. 64) przedstawiającą w punkcie A *złamanie*, to jest dwie styczne, jedną AT do gałęzi AM, drugą AT_1 do gałęzi AM_1 tworzące kąt TAT_1 pomiędzy sobą. Pochodna funkcji przedstawioną jest przez styczną trygonometryczną kąta, jaki styczna tworzy z osią odciętych: kąt ten zmniejsza się w sposób ciągły, gdy postępujemy od M ku A, w którym to punkcie przechodzimy na gałąź AM_1, a kąt stycznéj przeskakuje z ATX do AT_1X nie przechodząc przez wartości pośrednie, poczém znów zmienia się w sposób ciągły. Krzywa jest widocznie ciągłą, nieprzerwaną na całéj przestrzeni MAM_1: lecz pochodna jéj ma ciągłość zerwaną w punkcie **A**, bo przeskakuje z wartości st ATX, do wartości st AT_1X, nie przechodząc przez wartości pośrednie.

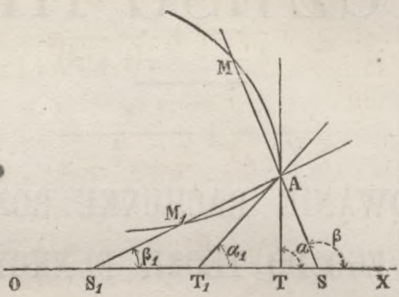


fig. 64

Weźmy naprzykład funkcję

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

funkcja ta jest ciągłą nawet dla $x=0$, bo wtedy $y=0$, a dla wartości bardzo małych dodatnych lub odjemnych zmiennéj x, funkcja y przybiera również bardzo małe wartości dodatne lub odjemne, zdążające do zera wraz z wartościami x. Lecz pochodna dla wartości $x=0$ ma ciągłość zerwaną: w rzeczy saméj,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}+e^{\frac{1}{x}}+2}.$$

a gdy $x=0$, $\mathrm{gr}\left(\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\right)_0=\frac{0}{\infty}=0$, $\mathrm{gr}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)_0=\infty$; a więc

$$\mathrm{gr}\left(\frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}+e^{\frac{1}{x}}+2}\right)=0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\mathrm{gr}\,\frac{1}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)_0}=\frac{1}{1+\mathrm{gr}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)_0}$$

gdy x zdąża do 0. Lecz jeżeli x zdąża do zera przechodząc przez wartości dodatne:

$$\mathrm{gr}\,e^{\frac{1}{x}}=e^{\infty}=\infty$$

jeżeli x zdąża do zera przechodząc przez wartości odjemne:

$$\mathrm{gr}\,e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0;$$

w pierwszym razie otrzymamy :

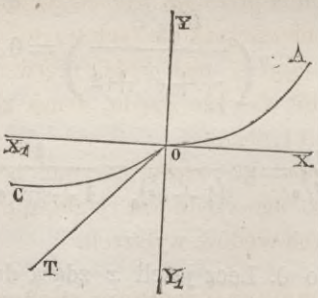
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$$

w drugim

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 1$$

Jeżeli więc zmniejszamy x nieograniczenie w wartościach dodatnych, pochodna zmniejsza się nieograniczenie : dla $x=0$ pochodna równa 0; lecz zmniejszając daléj x to jest przechodząc od zera do coraz większych wartości odjemnych, pochodna przeskakuje od 0 do 1, nie przechodząc przez wartości pośrednie pomiędzy 0 a 1 : ciągłość więc jéj jest zerwaną dla $x=0$.

Krzywa AOB przedstawiająca funkcję y, jest nieprzerwaną nawet w początku O; lecz przedstawia w tym punk-



fig, 65.

cie dwie styczne : jednę do gałęzi OA, którą jest oś OX, bo $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ dla x dodatnego, drugą OT do gałęzi OC nachyloną pod 45° do osi OX_1, bo $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 1$ dla x odjemnych.

242. Uwagi powyższe można z łatwością uogólnić do pochodnych jakiegokolwiek rzędu: jeżeli pochodna jakiegokolwiek rzędu przestaje być ciągłą dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj, pochodne wszystkich rzędów wyższych, mają *ciągłość zerwaną* dla téj wartości zmiennéj niezależnéj, lecz pochodne rzędów niższych i sama funkcja, mogą dlatego być ciągłemi.

Jeżeli funkcja przestaje być ciągłą dla pewnych wartości zmiennéj niezależnéj, powiadamy że tak dla funkcyj jak dla wszystkich ich pochodnych, następuje *zerwanie ciągłości* dla tych wartości zmiennéj niezależnéj.

Jeżeli funkcja jest ciągłą, lecz jéj pierwsza pochodna przestaje być ciągłą dla pewnych wartości zmiennéj niezależnéj, powiadamy, że dla tych wartości funkcja ma *zerwaną ciągłość pierwszego rzędu*: pochodna pierwsza i następne mają ciągłość zerwaną. W ogólności, jeżeli funkcja i jéj $n-1$ pierwszych pochodnych są ciągłemi, lecz $n$ta pochodna przestaje być ciągłą dla pewnych wartości zmiennéj niezależnéj, dla tych wartości funkcja będzie miała *zerwaną ciągłość* n*go rzędu*, pierwsza jéj pochodna zerwaną ciągłość $n-1$go rzędu, druga zerwaną ciągłość $n-2$go rzędu i t. d. ...

Funkcją ciągłą n*go rzędu*, nazywać będziemy funkcję któréj pochodna $n$go rzędu jest ciągłą, nic nie przesądzając o pochodnych rzędów wyższych.

243. Stosunek przyrostków skończonych dwóch funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj. Niech będą dwie funkcje

$$F(x), \qquad f(x)$$

zmiennéj niezależnéj x; niech będą dwie wartości szczególne x_0 i X téj zmiennéj niezależnéj, różniące się o

$$h = X - x_0$$

Zakładamy, że gdy x zmienia się od x_0 do X włącznie, funkcje $F(x)$ i $f(x)$ pozostają ciągłemi, stosunek ich pochodnych

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

pozostaje również ciągłym, wreszcie że pochodna $f'(x)$ nie zmienia znaku, pozostając ciągle dodatną lub ciągle odjemną, to jest że funkcja $f(x)$, ciągle się zwiększa lub ciągle zmniejsza, gdy x zwiększa się od x_0 do X [**144**] : zamierzamy znaleść w powyższém założeniu wartość stosunku

(1) $$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} \quad \text{czyli} \quad \frac{F(X)-F(x_0)}{f(X)-f(x_0)}$$

Przypuśćmy że $f'(x)$ pozostaje ciągle dodatném : nazwijmy przez M wartość największą, przez N wartość najmniejszą z tych wartości jakie stosunek $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ ciągły przybrać może, gdy x zmienia się od x_0 do X : będziemy mieli

$$N < \frac{F'(x)}{f'(x)} < M$$

a zatém

(2) $$N f'(x) < F'(x) < M f'(x)$$

M i N są wartościami stałemi : $M f'(x)$ jest pochodną funkcji $Mf(x)$, zaś $Nf'(x)$ pochodną funkcji $Nf(x)$, podobnie jak $F'(x)$ jest pochodną funkcji $F(x)$. Nierówność (2) wskazuje więc [**144**], że funkcja $F(x)$ ma dla tychże samych przyrostków x, przyrostki mniejsze od funkcji $Mf(x)$ a większe od przyrostków funkcji $Nf(x)$:

$$N[f(X)-f(x_0)] < F(X)-F(x_0) < M[f(X)-f(x_0)]$$

czyli

$$N < \frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} < M \tag{3}$$

Lecz stosunek ciągły $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ przechodzi z założenia przez wszystkie wartości pomiędzy najmniejszą N a największą M, gdy x zmienia się pomiędzy x_0 a X : stosunek więc (1) będąc zawartym pomiędzy N i M, jest równym pewnéj wartości stosunku $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ odpowiadającéj pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj x zawartéj pomiędzy x_0 a X, czyli pomiędzy x_0 a $x_0 + h$: nazwijmy wartość tę

$$x_0 + \theta h$$

oznaczając przez θ ułamek właściwy zawarty pomiędzy zerem a jednością włącznie:

$$0 \leqq \theta \leqq +1$$

aby wyrazić przez to że

$$x_0 \leqq x_0 + \theta h \leqq x_0 + h$$

będziemy więc mieli na zasadzie (3)

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x + \theta h)}{f'(x + \theta h)} \tag{4}$$

Przypuszczając że $f'(x)$ pozostaje ciągle odjemném gdy x zmienia się od x_0 do X, doszlibyśmy do tego samego wniosku (4) odwracając tylko nierówności w dowodzeniu;

możemy więc wysłowić twierdzenie następujące zawarte we wzorze (4):

Twierdzenie. *Jeżeli pomiędzy pewnemi wartościami szczególnemi zmiennéj niezależnéj, dwie jakiekolwiek funkcje téj zmiennéj niezależnéj, jakoteż stosunek pochodnéj jednéj do pochodnéj drugiéj funkcji pozostają ciągłemi; jeżeli nadto pochodna drugiéj funkcji nie zmienia znaku pozostając ciągle dodatną lub ciągle odjemną: wartość stosunku przyrostku jednéj funkcji do przyrostku drugiéj funkcji, gdy zmienna niezależna przechodzi z jednéj wartości szczególnéj w drugą, równa się wartości stosunku pochodnych tychże funkcyj, odpowiadających pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj, zawartej pomiędzy uważanemi wartościami szczególnemi włącznie.*

244. Założmy w powyższém twierdzeniu, że wartości obu funkcyj odpowiadające jednéj z dwóch danych szczególnych wartości zmjennéj niezależnéj, są równemi zeru:

$$\mathrm{F}(x_0)=0\,, \quad f(x_0)=0$$

wzór (4) stanie się

$$\frac{\mathrm{F}(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{\mathrm{F}'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)} \tag{5}$$

Nazwijmy $\theta h = h_1$ i założmy daléj że

$$\mathrm{F}'(x_0)=0\,, \quad f'(x_0)=0$$

założmy nadto że stosunek $\dfrac{\mathrm{F}''(x)}{f''(x)}$ jest funkcją ciągłą x dla wszelkich wartości zawartych pomiędzy x_0 i x_0+h_1, i że dla tychże wartości $f''(x)$ nie zmienia znaku; stosując wzór (5) do stosunku $\frac{F(x_0+h_1)}{f(x_0+h_1)}$ otrzymamy

$$\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}=\frac{F''(x_0+\theta_1 h_1)}{f''(x_0+\theta_1 h_1)}$$

gdzie θ_1 oznacza ułamek właściwy, zawarty pomiędzy 0 a $+1$ włącznie.

Nazwijmy $\theta_1 h_1 = h_2$, załóżmy daléj

$$F''(x_0)=0 \qquad f''(x_0)=0$$

otrzymamy (robiąc względem trzecich pochodnych zastrzeżenie ciągłości ich stosunku, i niezmienności znaku jednéj z nich, jak powyżéj względem pierwszych i drugich pochodnych)

$$\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)}=\frac{F'''(x_0+\theta_2 h_2)}{f'''(x_0+\theta_2 h_2)}$$

i tak daléj : w końcu zakładając

$$(6) \qquad \begin{cases} F(x_0)=0 \qquad F'(x_0)=0 \ldots F^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f(x_0)=0 \qquad f'(x_0)=0 \ldots f^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

zastrzegając za każdym razem odpowiednie warunki ciągłości stosunków takich jak $\frac{F^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)}$ niezmienność znaku $f^n(x)$ i uważając, że jedyny warunek jakiemu podlega $h_n = \theta_{n-1} h_{n-1}$ jest żeby $h_n \leqq h_{n-1}$, jedyny warunek jakiemu podlega $h_{n-1} = \theta_{n-2} h_{n-2}$ jest żeby, $h_{n-1} \leqq h_{n-2} \ldots$ nakoniec, jedyny warunek jakiemu podlega h, jest żeby

$h_1 \leqq h$, a zatém jedynym warunkiem określającym h_n jest żeby h_n było mniejszém lub równém h: że więc zamiast h_n dość jest napisać θh, oznaczając ciągle przez θ ułamek właściwy zawarty pomiędzy 0 a $+1$ włącznie, otrzymamy w ten sposób pod założeniem (6)

$$\frac{F^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})}{f^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}$$

a podstawiając ciąg równań powyższych, zacząwszy od (5) otrzymamy w końcu :

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h}\tag{7}$$

co możemy wysłowić jako

Wniosek i. *Jeżeli dla jednéj z wartości szczególnych zmiennéj niezależnéj, wartości tak obu funkcyj jak i ich* n — 1 *pierwszych pochodnych są zerami: stosunek wartości szczególnych tychże funkcyj dla innéj wartości zmiennéj niezależnéj, równa się stosunkowi ich* ntych *pochodnych, odpowiadającemu pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj zawartéj pomiędzy dwiema powyższemi wartościami szczególnemi; byleby tak funkcje jak i stosunki ich pochodnych aż do* ntéj *pochodnéj włącznie były ciągłemi, i pochodne jednéj z nich (w mianowniku) nie zmieniały znaku pomiędzy uważanemi wartościami szczególnemi zmiennéj niezależnéj.*

245. Wyjmując z założenia (6) równanie $F(x_0)=0$, to jest zakładając tylko (prócz założeń pozostałych, które ciągle mają miejsce)

$$\begin{array}{llll} & F'(x_0)=0 & F''(x_0)=0 \ldots & F^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f(x_0)=0 & f'(x_0)=0 & f''(x_0)=0 \ldots & f^{(n-1)}(x_0)=0 \end{array}$$

otrzymalibyśmy ze wzoru (4)go wyrażenie :

$$\text{(8)} \qquad \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)}$$

Załóżmy jako szczególny przypadek funkcji $f(x)$:

$$f(x)=(x-x_0)^n$$

mamy

$$f'(x)=n(x-x_0)^{n-1}, \qquad f''(x)=n(n-1)(x-x_0)^{n-2}, \ldots$$
$$f^{(n-1)}(x)=n(n-1)\ldots 3.2(x-x_0)$$

Pochodne te czynią zadosyć wyżéj wymienionym warunkom ciągłości i niezmienności znaku; nadto :

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 3.2.1$$

a dla $x=x_0$:

$$f(x_0)=0, \quad f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)=0, \ldots f^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$f^{(n)}(x_0)=1.2.3\ldots n$$

Przypuśćmy również stosownie do założenia że :

$$F'(x_0)=0 \qquad F''(x_0)=0 \ldots F^{(n-1)}(x_0)=0$$

i że zresztą funkcja $F(x)$ ma wszystkie swe pochodne aż do $F^{(n)}(x)$ włącznie ciągłemi, t. j. że jest funkcją ciągłą przynajmniéj $n$go rzędu, (co jest koniecznem aby stosownie do założenia stosunek $\frac{F'(x)}{f'(x)} \ldots \frac{F^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)}$ był ciągłym, gdy x zmienia się od x_0 do x_0+h), równanie (8) stanie się

$$\text{(9)} \qquad \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h^n}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n}$$

czyli

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x_0+\theta h) \tag{10}$$

co możemy wysłowić jak następuje :

Wniosek II. *Jeżeli dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj*, n — 1 *pierwszych pochodnych funkcji równa się zeru : przyrostek funkcji począwszy od téj wartości szczególnéj, równa się wartości* ntéj *pochodnéj odpowiadającéj pewnemu przyrostkowi zmiennéj niezależnéj nie większemu od danego, pomnożonéj przez* ntą *potęgę przyrostku zmiennéj niezależnéj podzieloną przez iloczyn z* n *pierwszych liczb porządkowych; byleby funkcja była przynajmniéj ciągłą* n*go rzędu pomiędzy wartościami szczególnemi zmiennéj niezależnéj, które bierzemy pod uwagę, włącznie.*

246. W szczególnym przypadku, jeżeli $n=1$, mamy

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=F'(x_0+\theta h) \tag{11}$$

czyli

$$\frac{F(X)-F(x_0)}{X-x_0}=F'(x_1)$$

gdzie x_1 jest zawartém pomiędzy x_0 a X :

Stosunek przyrostku skończonego funkcji do przyrostku odpowiedniego zmiennéj niezależnéj, równa się wartości pochodnéj funkcji, odpowiadającéj przyrostkowi zmiennéj niezależnéj mniejszemu (lub równemu) od danego : byleby tak funkcja jak jéj pochodna były ciągłemi w danych granicach.

Jeżeli h jest nieskończenie małém, wzór (10) pokazuje że :

Przyrostek funkcji, odpowiadający przyrostkowi nieskończenie małemu téj wartości zmiennéj niezależnéj, dla któréj n — 1 *pierwszych pochodnych funkcji równa się zeru, jest nie-*

skończenie małym n*go rzędu*: *byleby funkcja i jéj* n *pierwszych pochodnych były ciągłemi.*

247. Jeżeli przypuścimy we wzorze (10) $F(x_0)=0$, otrzymamy:

$$(12) \qquad F(x_0+h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x_0+\theta h)$$

a zakładając jeszcze $x_0=0$

$$F(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(\theta h)$$

Lecz w takim razie, poczynając zmieniać x od wartości $x_0=0$, przyrostek x jest samém x, a więc

$$(13) \qquad F(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^n(\theta x)$$

który to wzór ma miejsce w przypuszczeniu że

$$F(0)=0 \quad F'(0)=0\ldots F^{(n)}(0)=0$$

to jest w przypuszczeniu, że dla wartości 0 zmiennéj niezależnéj, tak funkcja jak jéj $n-1$ pierwszych pochodnych równa się zeru, i że funkcja pozostaje ciągłą $n$go rzędu w granicach w których zmieniamy zmienną niezależną.

Zakładając powyższe przypuszczenia we wzorze (8), to jest, przypuszczając że wszystko ma miéjsce jak powyżéj z wyjątkiem wszakże $F(x_0)=0$ (przypuszczamy więc $F(0) \gtrless 0$) mielibyśmy

$$(14) \qquad F(x)-F(0)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x)$$

248. Wniosek III. *Jeżeli funkcja ciągła* m*go rzędu pewnej zmiennéj niezależnéj, zawiera stałą (lub parametr), i dla szczególnéj wartości téj stałéj staje się zerem dla jakiéjkolwiek wartości zmiennéj niezależnéj, wszystkie* m *pochodnych téj funkcji, stają się równemi zeru dla téjże szczególnéj wartości stałéj.*

Niech będzie funkcja ciągła $m$go rzędu

$$F(x, \alpha)$$

zmiennéj niezależnéj x i parametru α, to jest stałéj α, mogącéj przybierać różne wartości niezależnie od x, (czyli po prostu dwóch zmiennych x i α); załóżmy że gdy α przybiera wartość α_0

$$F(x, \alpha_0) = 0$$

powiadam że pochodne względem x funkcji F

$$F'(x, \alpha_0) = 0, \quad F''(x, \alpha_0) = 0, \ldots F^{(m)}(x, \alpha_0) = 0$$

W rzeczy saméj, wzór (10) daje nam dla jakiegokolwiek x_0

$$F(x_0 + h, \alpha) - F(x_0, \alpha) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x_0 + \theta h, \alpha)$$

(gdzie $n \leqq m$, a więc z założenia warunki ciągłości mają miejsce).

Ilość α uważana jako stała, nie wpływa na wzór; lecz gdy $\alpha = \alpha_0$ z założenia

$$F(x_0, \alpha_0) = 0 \qquad F(x_0 + h, \alpha_0) = 0$$

jakiekolwiek będzie x_0 i h, a więc

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x_0 + \theta h, \alpha_0) = 0$$

a że h jest jakiekolwiek, choć nie znamy θ, możemy przypuścić

$$x_0 + \theta h = x$$

otrzymamy więc

$$F^{(n)}(x, \alpha_0) = 0$$

a że dowodzenie powyższe ma miejsce dla pochodnéj jakiegokolwiek rzędu n mniejszego lub równego m, więc wniosek zostaje udowodnionym.

Wniosek ten można wysłowić inaczéj :

Jeżeli funkcja ciągła m*go rzędu wielu zmienuych niezależnych (t. j. funkcja któréj pochodne częściowe względem wszystkich zmiennych uiezależnych aż do* m*go rzędu włącznie są ciągłemi), staje się zerem dla pewnéj wartości szczególnéj jednéj zmiennéj niezależnéj, jakiekolwiek nadawalibyśmy wartości pozostałym zmiennym niezależnym : dla powyższéj wartości szczególnéj téj zmiennéj, pochodne częściowe funkcji względem pozostałych zmiennych niezależnych, są równemi zeru, aż do pochodnéj* m*go rzędu włącznie.*

Jeżeli

$$F(x, y, z \ldots)$$

dla $x = x_0$ staje się zerem :

$$F(x_0, y, z \ldots) = 0$$

powiadam że

$$\frac{\partial F(x_0, y, z \ldots)}{\partial y} = 0, \frac{\partial F(x_0, y, z \ldots)}{\partial z} = 0, \frac{\partial^2 F(x_0, y, z \ldots)}{\partial y^2} = 0$$

i t. d.

W rzeczy saméj zmienna x niezależna od zmiennych y, z ... zachowuje się względem tych ostatnich jako stała lub parametr α.

Wniosek ten jest uogólnieniem już poprzednio udowodnionego w inny sposób [**188**] twierdzenia.

ROZDZIAŁ XIV

WZÓR TAYLOR'A

Rozwinięcie przyrostku funkcji podług potęg zwiększających się przyrostku zmiennéj niezależnéj. — Wyraz dopełniający, czyli reszta rozwinięcia. — Uwagi tyczące się tego rozwinięcia. — Szereg Taylora. — Różne wyrażenia wyrazu dopełniającego. — Rozwinięcie przyrostku nieskończenie małego funcji podług różniczek rzędów zwiększających się tejże funkcji.

249. Niech będzie funkcja

$$y = f(x)$$

nadawajmy zmiennéj niezależnéj x zacząwszy od pewnéj wartości x_0 przyrostki równe Δx : funkcja otrzyma przyrostki, które zmieniać się będą za każdém Δx, tak, że wartość funkcji odpowiadająca wartości zmiennéj niezależnéj zwiększonéj m przyrostkami równemi Δx, to jest wartości $x_0 + m\Delta x$, wyrażaną zostanie przez wzór [**19**] :

$$(1)\ f(x_0 + m\,\Delta x) = f(x_0) + \frac{m}{1}\,\Delta f(x_0) + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 f(x_0)$$

$$+ \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}\,\Delta^n f(x_0) + \ldots + \Delta^m f(x_0)$$

nazywając przez $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x) \ldots \Delta^m f(x_0)$ pierwszą, drugą ... *m*tą różnicę funkcji [**17**] i uważając m jako liczbę całkowitą dodatną, zresztą jakąkolwiek.

Lecz zważywszy że:

$$m(m-1) = m^2\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

$$m(m-1)(m-2) = m^3\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = m^n\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m(m-1)(m-2)\ldots 2.1 = m^m\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

wzór (1) napisać możemy

$$(2)\left\{\begin{aligned} f(x_0+m\Delta x) &= f(x_0)+\frac{m\Delta x}{1}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta . x} \\ &\quad +\frac{m^2\Delta x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{\Delta x^2}+\ldots \\ &+\frac{m^n\Delta x^n}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}+\ldots \\ &+\frac{m^m\Delta x^m}{1.2\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{\Delta^m f(x)}{\Delta x^m} \end{aligned}\right.$$

Zakładając

$$m\Delta x = h$$

otrzymamy

$$(3)\left\{\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)-\frac{h}{1}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{h^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{\Delta x^2}+\ldots \\ &+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}+\ldots \\ &+\frac{h^m}{1.2\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{\Delta^m f(x_0)}{\Delta x^m} \end{aligned}\right.$$

Jakkolwiek przypuszczamy m całkowitém, ponieważ jednak przyrostek Δx zmiennéj niezależnéj jest dowolnym, h może być jakiekolwiek; z drugiéj strony, zwiększając m nieograniczenie nawet jedynie w wartościach całkowitych, możemy pozostawiając h tém samém, uczynić Δx mniejszém od wszelkiéj ilości oznaczonéj, czyli nieskończenie małém; w granicy mieć będziemy [**189**]:

$$(4)\quad \mathrm{gr}\,\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),\ \mathrm{gr}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{\Delta x^2}=f''(x_0),\ldots \mathrm{gr}\,\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}=f^{(n)}(x_0)$$

$$(5)\quad \mathrm{gr}\left(1-\frac{1}{m}\right)=1 \qquad \mathrm{gr}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)=1\ \ldots$$

$$\mathrm{gr}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)=1$$

gdy Δx zdąża do zera, a m do nieskończoności, byleby co do (5) n było liczbą skończoną, nie mogącą się zwiększać nieograniczenie: bo jakkolwiek iloczyn pewnéj liczby czynników z których każdy zdąża do jedności jest w granicy jednością, bo logarytm tego iloczynu jest w granicy zerem, nie możemy powiedzieć tego w przypadku liczby czynników nieskończenie wielkiéj, témbardziéj kiedy który z tych czyników jak naprzykład $1-\frac{n-1}{m}$ nie koniecznie zdążałby do jedności, gdyby n mogło się zwiększać nieograniczenie podobnie jak m; musimy więc zakładając równania (5) zastrzedz że n pozostaje liczbą skończoną.

Oznaczmy przez $\varphi(x_0+h)$ granicę summy n pierwszych wyrazów rozwinięcia (3), gdy Δx zdąża do zera, a m do nieskończoności:

$$(6)\quad \varphi(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)$$

jeżeli granica ta istnieje, co ma miejsce jeżeli ani funkcja $f(x_0)$, ani żadna z jéj $n-1$ pierwszych pochodnych, nie przestaje być ciągłą, ani nie staje się nieskończenie wielką dla żadnéj z wartości x zawartych pomiędzy granicami w których zmieniamy tę zmiennę niezależną.

Oznaczmy daléj przez $\Psi(x_0+h)$ różnicę wyrażeń (fx_0+h) i $\varphi(x_0+h)$; tak że

$$f(x_0+h)=\varphi(x_0+h)+\Psi(x_0+h) \tag{7}$$

i załóżmy

$$x_0+h=x \qquad \text{czyli} \qquad h=x-x_0$$

otrzymamy

$$\varphi(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)+\dots \tag{8}$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)$$

$$\Psi(x)=f(x)-\varphi(x)$$

Dla $x=x_0$ z (8) widzimy że

$$\varphi(x_0)=f(x_0), \qquad \varphi(x_0)=f'(x_0),\dots\varphi^{(n-1)}(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)$$

a zatém

$$\Psi(x_0)=0,\ \Psi'(x_0)=0,\ \Psi''(x_0)=0,\dots\Psi^{n-1}(x_0)=0$$

funkcja $\Psi(x)$ ma $n-1$ swych pochodnych równych zeru dla wartości szczególnéj $x=x_0$. Zakładamy że funkcja dana $f(x)$ jest ciągłą *n*go rzędu, w granicach pomiędzy któremi zmieniamy zmiennę niezależną: funkcja $\Psi(x)$ będzie także ciągłą *n*go rzędu, jako równa różnicy $f(x)$ i $\varphi(x)$, wielomianu algebraicznego (8) $n-1$go stopnia co do x;

mamy więc na zasadzie [**247** (12)]

$$\Psi(x_0+h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}\Psi^{(n)}(x_0+\theta h)$$

Lecz z określenia $\Psi(x)$

$$\Psi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x)$$

a że $n$ta pochodna funkcji $\varphi(x)$ która jest wielomianem $n-1$go stopnia co do x, jest zerem dla wszelkiéj wartości x, więc

$$\Psi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$$

dla wszelkiéj wartości x, a więc i dla wartości $x_0+\theta h$; a zatém

$$\Psi(x_0+h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0+\theta h) \tag{9}$$

Podstawmy wartości (6) i (9) w (7), i uważając że x_0 oznacza jakąkolwiek wartość x zawartą w granicach ciągłości $n$go rzędu funkcji $f(x)$, zastąpmy x_0 przez wartość ogólną x, otrzymamy:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots \tag{10}$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

Wzór ten znanym jest pod nazwiskiem *wzoru Taylor'a*; wyrażenie

$$R_n=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h) \tag{11}$$

nazywamy *Resztą* lub *wyrazem dopełniającym* rozwinięcia;

tak że

$$(10') \quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\mathrm{R}_n$$

lub też

$$(10'') \quad f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\mathrm{R}_n$$

Wzór ten daje nam *wartość przyrostku funkcji rozwiniętą podług potęg zwiększających się przyrostku zmiennéj niezależnéj, pomnożonych każda przez pochodnę funkcji tego samego rzędu co odpowiednia potęga przyrostku, a podzielonych każda przez iloczyn liczb porządkowych aż do liczby wskazującéj potęgę przyrostku włącznie; rozwinięcie to można doprowadzić tylko wyłącznie do wyrazu zawierającego pochodnę któréj ciągłość zostaje zerwaną w granicach pomiędzy któremi zmieniamy zmiennę niezależną; w ostatnim wyrazie rozwinięcia podstawić należy w pochodnéj za zmiennę niezależną, zmiennę niezależną zwiększoną przyrostkiem mniejszym (lub równym) co do wartości od uważanego (za* x *podstawić* $x+\theta h$*); wyraz ten stanowi* RESZTĘ, *lub wyraz dopełniający rozwinięcia.*

250. Uwagi nad wzorem Taylor'a. Nie należy sądzić żeby wzór Taylor'a mógł zawsze stać się szeregiem: gdybyśmy zamiast napisać po $n-1$ym wyrazie *resztę* w rozwinięciu (10) chcieli prowadzić rozwinięcie to do nieskończoności, otrzymalibyśmy szereg niekoniecznie zbieżny, a choćby był zbieżnym, niekoniecznie równy $f(x+h)$: tak że równanie (10) mogłoby stać się nieprawdziwém. Jakoż w dowodzeniu zastrzegliśmy naprzód że n nie może być nieskończenie wielkiém; bo w takim razie nie wiemy w ogólności co się staje w granicy z iloczynem takim jak

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

we wzorze (3), gdy n zwiększa się nieograniczenie wraz z m. Równość więc (10) została udowodnioną tylko w razie skończonéj liczby wyrazów rozwinięcia, to jest pod zastrzeżeniem że rozwinięcie to nie może być rozciągniętém tak daleko jak się podoba, nie może stać się szeregiem.

Powtóre, zastrzegliśmy wyraźnie żeby funkcja ani żadna z jéj n pierwszych pochodnych nie przestała być ciągłą, ani nie mogła stać się nieskończoną w granicach między jakiemi zmieniamy zmienną niezależną. Wzór więc Taylor'a może być prawdziwym dla pewnéj liczby n wyrazów, a przestać być prawdziwym jeżelibyśmy chcieli rozciągnąć go o jeden wyraz więcéj : jeżeli właśnie $n+1$sza pochodna funkcji przestaje być skończoną lub ciągłą, choć n poprzednich i sama funkcja czynią zadosyć tym warunkom w granicach uważanych.

Weźmy naprzykład funkcję

$$f(x)=(x-x_0)^\mu \varphi(x)+\psi(x)$$

gdzie μ jest dodatném ułamkowém, funkcje zaś $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ciągłemi, również jak i ich pochodne jakiegokolwiek rzędu, dla wszystkich wartości x zawartych pomiędzy x_0 i $x+h$ włącznie. Oznaczmy przez m największą liczbę całkowitą zawartą w ułamku μ, tak że będziemy mieli

$$m<\mu<m+1$$

pochodne różnych rzędów, aż do rzędu $n$go funkcji $f(x)$

będą

$$f'(x)=\mu(x-x_0)^{\mu-1}\varphi(x)+(x-x_0)^{\mu}\varphi'(x)+\psi'(x)$$

$$f''(x)=\mu(\mu-1)(x-x_0)^{\mu-2}\varphi(x)+2\mu(x-x_0)^{\mu-1}\varphi'(x)$$
$$+(x-x_0)^{\mu}\varphi''(x)+\psi''(x)$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(x-x_0)^{\mu-n}\varphi(x)+\ldots$$
$$+\psi^{(n)}(x)$$

Dla wartości szczególnéj $x=x_0$ funkcja dana staje się

$$f(x)=\psi(x)$$

a jéj pochodne

$$f'(x_0)=\psi'(x_0)$$
$$f''(x_0)=\psi''(x_0)$$

. . . .

$$f^{(n)}(x_0)=\psi^{(n)}(x_0)$$

byleby n było mniejszém od m; bo gdy n staje się większém choćby o jedność od m, to jest gdy $n=m+1$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m)}{(x-x_0)^{1-(\mu-m)}}\varphi(x)+\ldots$$

a że $\mu-m<1$ z założenia, pierwszy wyraz tego rozwinięcia staje się nieskończenie wielkim dla $x=x_0$: wzór (10) Taylor'a nie ma więc miejsca dla wartości zmiennéj niezależnéj zawartych pomiędzy granicami obejmującemi wartość szczególną $x=x_0$, gdy chcemy rozciągnąć wzór ten po za wyraz $m$ty; lecz ma miejsce dla liczby wyrazów mniejszéj od m, lub nawet równéj m, to jest jeżeli się kończy na wyrazie zawierającym $f^{(m-1)}(x)$.

Wzór Taylor'a może również mieć miejsce gdy zmieniamy

x pomiędzy dwiema wartościami szczególnemi x_0 i X, a nie mieć miejsca, gdy wychodzimy po za te wartości : bo tak sama funkcja, jak jedna z jéj pochodnych może być ciągłą pomiędzy x_0 i X a przestać być ciągłą po za temi granicami.

251. Szereg Taylor'a. *Jeżeli tak funkcja dana, jak wszystkie jéj pochodne są ciągłemi i nie stają się nieskończenie wielkiemi w granicach pomiędzy jakiemi zmieniamy zmienną niezależną; jeżeli nadto granicą wyrazu dopełniającego wzoru Taylor'a jest zero, kiedy powiększamy nieograniczenie liczbę wyrazów rozwinięcia: rozwinięcie to jest szeregiem zbieżnym, postępującym podług potęg zwiększających się przyrostku zmiennéj niezależnéj, a granicą summy tego szeregu jest wartość funkcji odpowiadająca uważanemu przyrostkowi zmiennéj niezależnéj.*

Jeżeli w rozwinięciu

$$(10) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \mathrm{R}_n$$

tak funkcja $f(x)$ jak i jéj pochodne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,... $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$ ... do nieskończoności są i pozostają ciągłemi, gdy zmieniamy x pomiędzy granicami x_0 i X; jeżeli nadto

$$(11) \qquad \mathrm{gr}\, \mathrm{R}_n = \mathrm{gr}\, \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h) = 0$$

gdy n zwiększa się nieograniczenie, powiadam że rozwinięcie to przedłużone do nieskończoności, będzie szeregiem zbieżnym którego granicą jest : $f(x+h)$; to jest że mieć będziemy

$$(12)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(x)+\dots$$

W rzeczy samej, z założenia wiemy że dla wszelkiego n, pochodna $n$ta nie przestaje być ciągłą skończoną; możemy więc wziąść tyle wyrazów rozwinięcia, ile nam się podoba. Lecz różnica pomiędzy $f(x+h)$ a summą n wyrazów rozwinięcia, którą nazwaliśmy resztą R_n coraz się zmniejsza i może stać się tak małą jak się podoba biorąc n dość wielkiém: summa więc n wyrazów rozwinięcia, gdy n zwiększa się nieograniczenie, zbliża się nieograniczenie do $f(x+h)$, ma więc granicę skończoną $f(x+h)$; rozwinięcie zatém jest szeregiem zbieżnym. Szereg ten (12) nazywamy *Szeregiem Taylor'a*; jest on wzorem Taylor'a rozciągniętym do nieskończoności, i wymaga więcéj warunków niż wzór (11): bo gdy ten ostatni ogranicza warunki ciągłości i wartości skończonych do pewnéj tylko liczby pierwszych pochodnych, szereg Taylor'a wymaga tych warunków dla wszystkich pochodnych. Funkcja naprzykład uważana przed chwilą

$$f(x)=(x-x_0)^{\mu}\varphi(x)+\psi(x)$$

gdy μ jest ułamkowém, nie może być rozwiniętą podług szeregu Taylor'a, gdy x zmienia się w granicach obejmujących x_0, gdy tymczasem wzór (11) stosuje się do téj funkcji, bylebyśmy go ograniczyli na liczbie wyrazów mniejszéj od μ.

252. Uwaga I. Gdyby wyraz dopełniający R_n nie zdążał do zera, lecz do granicy skończonéj R różnéj od zera :

$$\text{gr}\, R_n = R \qquad \text{gdy} \qquad n = \infty$$

rozwinięcie poprzedzające wyraz ten stanowiłoby szereg zbieżny, jeżeli pozostałe warunki zachodzą; granicą summy tego szeregu będzie wtedy widocznie z (10) :

$$f(x+h) - R.$$

253. Uwaga II. Warunek żeby rozwinięcie (11) wzoru Taylora przedłużone do nieskończoności stanowiło szereg zbieżny, nie jest dostatecznym, aby szereg zbieżny tak otrzymany był rozwinięciem $f(x+h)$, jeżeli nie dodamy warunku, żeby reszta zdążała jednocześnie do granicy zero (lub granicy skończonéj) : szereg bowiem tak otrzymany jakkolwiek zbieżny, może mieć granicę różną od $f(x+h)$.

Wyrażenie R_n które nazwaliśmy *wyrazem dopełniającym* lub *Resztą* wzoru Taylora, odróżnić należy od *reszty* szeregu otrzymanego przez przedłużenie tego wzoru do nieskończoności w znaczeniu zwykłém [**98**] reszty szeregu; ta ostatnia reszta może zdążać do granicy 0, choć R_n nie zdąża do téj granicy.

254. Twierdzenie I. *Jeżeli dla wszelkiéj wartości zmiennéj* x *pomiędzy* x *a* x + h (*gdzie* h *jest ilością skończoną*), *pochodna funkcji* f (x) *wszelkiego rzędu jest ciągłą, skończoną, funkcja* f (x + h) *może być rozwiniętą podług szeregu Taylor'a.*

W rzeczy saméj resztę

$$R_n = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

możemy wyrazić

$$R_n = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

a jakakolwiek będzie wartość skończona h, gdy n będziemy zwiększać nieograniczenie, iloczyn

$$\frac{h}{1}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{3}\cdots\frac{h}{n}$$

którego czynniki zdążają do granicy 0, zdążać będzie do granicy zero. Jakoż iloczyn ten możemy rozłożyć na dwie części: jednę skończoną, a drugą będącą iloczynem nieskończonéj liczby czynników mniejszych od jedności; ten ostatni iloczyn będąc mniejszym od największego ze swych czynników, zawsze mniéjszego od jedności, podniesionego do potęgi nieskończenie wielkiéj, zdąża do granicy zero, a więc i cały iloczyn zdąża do granicy zero. Lecz z założenia $f^{(n)}(x+\theta h)$ ma wartość skończoną, więc

$$\operatorname{gr} R_n = 0$$

a zatém [**251**] funkcja $f(x+h)$ może być rozwiniętą na szereg Taylor'ą.

255. Twierdzenie II. *Jeżeli funkcja* f(x) *i jéj* n *pierwszych pochodnych są ciągłemi, skończonemi dla wszelkich wartości* x *zawartych pomiędzy* x *i* x + h, *zatrzymując rozwinięcie funkcji* f(x + h) *podług wzoru Taylor'a, na którymkolwiek wyrazie różnym od zera, granicą stosunku reszty do tego wyrazu jest* 0, *gdy* h *zdąża do zera.*

Niech będzie

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)\dots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

w założeniu że

$$f(x),\ f'(x),\ \dots f^{(n)}(x)$$

są ciągłemi, skończonemi, gdy zmieniamy x od x do $x+h$; nazwijmy przez skrócenie

$$f(x)=u_0,\ \frac{h}{1}f'(x)=u_1, \dots \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)=u_{n-1}$$

tak że

$$f(x+h)=u_0+u_1+u_2+\dots+u_{n-1}+R_n$$

powiadam, że jeżeli h zdąża do zera, to

$$\text{gr}\frac{R_n}{u_{n-1}}=0.$$

W rzeczy saméj, zatrzymując szereg na $n-1^{ym}$ wyrazie, mielibyśmy

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$
$$+\frac{h^{n-2}}{1.2\dots(n-2)}f^{(n-2)}(x)+R_{n-1}$$

gdzie

$$R_{n-1}=\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x+\theta h)$$

zaś

$$R_{n-1}=u_{n-1}+R_n$$

Biorąc stosunek

$$\frac{R_n}{u_{n-1}}=\frac{R_{n-1}-u_{n-1}}{u_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(x+\theta h)-f^{(n-1)}(x)}{f^{(n-1)}(x)}$$

ponieważ z założenia ciągłości funkcji i jéj pochodnych

$$\text{gr}\,[f^{(n-1)}(x+\theta h)-f^{(n-1)}(x)]=0$$

gdy h zdąża do 0, a $f^{(n-1)}(x)$ jest skończoném, więc

$$\mathrm{gr}\,\frac{R_n}{u_{n-1}}=0 \qquad \text{c. b. d. d.}$$

256. Inne wyrażenie wyrazu dopełniającego, czyli Reszty wzoru Taylor'a. Widzimy z poprzedzającego jak ważném jest wyrażenie reszty, które z jednéj strony wskazuje nam różnicę pomiędzy funkcją a jéj rozwinięciem ograniczoném na pewnéj liczbie wyrazów, z drugiéj zaś strony, możność rozciągnięcia rozwinięcia do mniejszéj lub większéj liczby wyrazów, lub też nawet zamienienia rozwinięcia w szereg, którego granicą jest funkcja dana: szereg, którego warunkiem koniecznym jest zdążanie reszty do granicy zero.

Niech będzie rozwinięcie

$$(10) \qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{(n-1)}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

gdzie

$$(11) \qquad R_n=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$$

Reszta ta zawiera pochodnę rzędu o jedność wyższego niż ostatni wyraz rozwinięcia. Może się zdarzyć przypadek, że funkcja czyni zadosyć warunkom ciągłości aż do $n-1$go rzędu włącznie, lecz że właśnie ciągłość lub skończoność pochodnéj $n$go rzędu jest zerwaną lub wątpliwą; w takim razie można wyrazić resztę przez $n-1$szę pochodnę w następujący sposób:

Ograniczając rozwinięcie (10) do $n-1$ wyrazów, otrzy-

mamy

$$(13)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$

$$+\frac{h^{n-2}}{1.2\dots(n-2)}f^{(n-2)}(x)+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x+\theta h)$$

gdzie

$$R_{n-1}=\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x+\theta h)$$

Dodajmy i odejmijmy w rozwinięciu (13) wyrażenie

$$\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

otrzymamy

$$(14)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$

$$+\frac{h^{n-2}}{1.2\dots(n-2)}f^{(n-2)}(x)+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}[f^{(n-1)}(x+\theta h)-f^{(n-1)}(x)]$$

Wzór (14) zawiera tyle wyrazów rozwinięcia co wzór (10), a wyrazem dopełniającym jest

$$(15)\quad R_n=\frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}[f^{(n-1)}(x+\theta h)-f^{(n-1)}(x)]$$

Reszta ta zawiera tylko pochodnę tego samego $n-1$^go^ rzędu, co ostatni wyraz rozwinięcia (14)

257. Wyrażenie Cauch'ego Cauchy dał jeszcze inne wyrażenie na resztę wzoru Taylor'a. W rozwinięciu (10) podstawmy

$$h=z-x$$

otrzymamy

$$(16)\quad f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n$$

gdzie reszta R_n będzie funkcją x i z którą oznaczemy przez

$$(17)\quad R_n = F(x) = \frac{(z-x)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}[x + \theta(z-x)]$$

zakładając ją funkcją ciągłą skończoną co do x.

Weźmy pochodnę częściową względem x, (uważając z za stałą) wyrażenia (16)

$$0 = f'(x) - f'(x) + \frac{z-x}{1} f''(x) - \frac{z-x}{1} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}(x) + \frac{\partial R_n}{\partial x}$$

wszystkie wyrazy się poznoszą z wyjątkiem dwóch ostatnich; zatém

$$(18)\quad \frac{\partial R_n}{\partial x} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = -\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}(x)$$

Rozwijając funkcję $F(z)$ podług (16), i ograniczając się na pierwszym wyrazie i reszcie, otrzymamy

$$(19)\quad F(z) = F(x) + \frac{z-x}{1} \frac{\partial F[x + \theta_1(z-x)]}{\partial x}$$

Lecz $F(z) = 0$ jak widzimy, podstawiając w (17) $x = z$;

a więc

$$F(x) = -(z-x)\frac{\partial F[x+\theta_1(z-x)]}{\partial x} \tag{20}$$

Podstawiając za x we wzorze (18) $x+\theta(z-x)$, otrzymamy

$$\frac{\partial F[x+\theta_1(z-x)]}{\partial x} = -\frac{(1-\theta_1)^{n-1}(z-x)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}[x+\theta_1(z-x)]$$

a wzór (20) da nam

$$F(x) = \frac{(1-\theta_1)^{n-1}(z-x)^n}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}[x+\theta_1(z-x)]$$

czyli podstawiając R_n za $F(x)$, h za $z-x$, θ za θ_1 (θ czy θ_1 oznacza zawsze tylko ułamek zawarty pomiędzy 0 a 1 włącznie), otrzymamy

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}h^n}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}(x+\theta h) \tag{21}$$

jestto wyrażenie na resztę, które dał Cauchy. Jest jeszcze prócz trzech (11), (15), (21) tu podanych, wiele innych wyrażeń na resztę, które jako nie przedstawiające wielkiéj wagi i mało używane, pomijamy.

258. Rozwinięcie przyrostku nieskończenie małego funkcji, podług różniczek rzędów zwiększających się tejże funkcji. Niech będzie funkcja

$$y = f(x)$$

załóżmy h nieskończenie małym przyrostkiem Δx zmiennéj niezależnéj, i nazwijmy Δy nieskończenie mały odpowiedni przyrostek funkcji; tak że

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(x+h) - f(x)$$

wiemy z określenia [**186**], że

$$dy = f'(x)\,\Delta x = hf'(x)$$
$$d^2y = f''(x)\,\Delta x^2 = h^2 f''(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)\,\Delta^{n-1} = h^{n-1} f^{(n-1)}(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a więc jeżeli funkcja jest ciągłą $n$go rzędu, wzór (10) da nam

$$(22)\quad \Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-1}y}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d'^n y}{1.2\ldots n}$$

gdzieśmy oznaczyli przez skrócenie

$$d'^n y = \Delta x^n f^{(n)}(x + \theta \Delta x)$$

różniczkę $n$go rzędu funkcji, w któréj za x podstawić należy wartość $x + \theta\Delta x$ zmiennéj niezależnéj, zawartą pomiędzy x a $x + \Delta x$. Różniczka ta jest nieskończenie małą $n$go rzędu. Jeżeli funkcja jest ciągłą wszelkiego rzędu, to jest, jeżeli tak sama funkcja jak wszystkie jéj pochodne są ciągłemi, mamy szereg zbieżny [**251**]

$$(23)\quad \Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-1}y}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d^n y}{1.2\ldots n} + \ldots$$

i wiemy że zatrzymując szereg ten na jakiejkolwiek różniczce, popełniony błąd jest nieskończenie małą o jedność wyższego niż różniczka rzędu, co się zgadza z tém cośmy powyżéj [**189**], [**255**], powiedzieli.

ROZDZIAL XV

ROZWIJANIE FUNKCYJ NA SZEREGI

Wzory Taylor'a i Maclaurin'a. — Warunki rozwijalności funkcyj podług tych wzorów. — Rozwinięcie na szereg funkcji wykładniczéj. — Wstawy. — Dostawy. — Logarytmu. — Rachunek logarytmów naturalnych i logarytmów pospolitych. — Dwumian Newtona. — Inne wzory na rozwijanie funkcji na szeregi: Wzór Bernouill'ego. — Metoda spółczynników niewyznaczonych. — Rozwinięcie funkcji na szereg podług potęg funkcji danéj. — Uogólnienie powyższych wzorów dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych.

259. Rozwinięcie funkcji $f(x)$ na szereg podług wzoru Taylor'a. Otrzymaliśmy w poprzedzającym rozdziale rozwinięcie

$$(1)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \mathrm{R}_n$$

gdzie

$$\mathrm{R}_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

θ jest ułamkiem zawartym pomiędzy 0 a $+1$ włącznie.

Aby rozwinięcie to można było rozciągnąć nieograniczenie i utworzyć z niego szereg zbieżny, wiemy że warunkiem koniecznym i dostatecznym jest:

1° Ciągłość i skończoność funkcji $f(x)$ i wszystkich jéj pochodnych.

2° Zdążanie reszty R_n do granicy 0 (lub granicy skończonéj) gdy n zwiększa się nieograniczenie, a to w granicach między któremi zmieniamy zmienną niezależną.

Chcąc rozwinąć $f(x)$ podług wzoru (1), dość jest założyć

$$x = x_0 \qquad h = x - x_0$$

gdzie zakładamy że x_0 i x nie przechodzą zakresu ciągłości funkcji: to jest rozwinąć funkcję

$$f[x_0 + (x - x_0)] \quad \text{równą} \quad f(x)$$

podług wzoru (1). Otrzymamy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \dots \qquad (2)$$
$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + R_n$$

gdzie

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)] \qquad (3)$$

x_0 oznacza jednę ze szczególnych wartości x, a $f'(x_0)$, $f''(x_0) \ldots f^{(n)}(x_0)$ wartości szczególne pierwszéj, drugiéj ... $n$téj pochodnéj funkcji $f(x)$ dla $x = x_0$.

Obrawszy wartość szczególną x_0 w taki sposób żeby tak funkcja jak wszystkie jéj pochodne dla téj szczególnéj wartości zmiennéj niezależnéj były ciągłemi, skończonemi, dowiódłszy nadto, że Reszta R_n zdąża do granicy zero, dowodzenie, które w każdym szczególnym przypadku ściśle przeprowadzoném być winno, wyrazić możemy $f(x)$ jako granicę summy wyrazów szeregu, postępujących podług potęg zwiększających się $x - x_0$:

$$(4) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \dots$$
$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1.2\dots n} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

a ograniczając się na pewnéj skończonéj liczbie n wyrazów, różnica pomiędzy funkcją a summą tych wyrazów, czyli jak pospolicie mówią *błąd popełniony*, wyrażonym będzie przez wzór (3), lub inny jak (15) lub (21) poprzedzającego rozdziału, w którym za x podstawić należy x_0 a za h, różnicę $x - x_0$; wzory te pozwalają nam oznaczyć granicę błędu przez uważanie największéj lub najmniejszéj wartości jakie przybrać mogą, gdy zmieniamy h od 0 do $+1$.

Gdyby wyraz dopełniający zdążał do granicy skończonéj zamiast do zera, różnica funkcji danéj i wyrazu dopełniającego rozwiniętąby była w podobny sposób na szereg zbieżny. Uwaga ta stosować się będzie do wszystkich rozwinięć następujących.

260. Wzór Maclaurin'a Za szczególną wartość x_0 we wzorze (2) weźmy zero, przypuszczając że wartość szczególna zero zmiennéj niezależnéj x nie wychodzi z zakresu cągłości funkcji : podstawiwszy w (2) $x_0 = 0$, otrzymamy :

$$(5) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R_n$$

gdzie R_n możę być wyrażonem przez

$$(6) \qquad R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\theta x)$$

lub przez jedno z wyrażeń otrzymanych z (15) lub (20) poprzedzającego rozdziału, podstawiając w nich $x=0$, $h=x$

$$(6') \qquad R_n = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} [f^{(n-1)}(\theta x) - f^{(n-1)}(0)]$$

$$(6'') \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(\theta x)$$

gdzie $f(0)$, $f'(0) \ldots f^{(n)}(0)$ oznaczają wartości szczególne funkcji i jéj pochodnych, odpowiadające wartości $x=0$ zmiennéj niezależnéj, a θ jest zawsze ułamkiem zawartym pomiędzy 0 a 1 włącznie.

Wzór (5) znanym jest pod nazwiskiem *wzoru Maclaurin'a* (niewłaściwie, bo jest on tylko szczególnym przypadkiem wzoru Taylor'a) : ma on miejsce ile razy funkcja i jéj $n-1$ pierwszych pochodnych, mają wartości szczególne odpowiadające wartości $x=0$ skończone.

Jeżeli nadto dla jakkolwiek wielkiego n, pochodna $n$go rzędu jest ciągłą skończoną, gdy x zmieniamy od 0 do x, (bo θ jest zawartém pomiędzy 0 a $+1$ włącznie), a reszta zdąża do granicy zero; rozwinięcie może być rozciągniętém nieograniczenie, i otrzymamy

$$(7) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots$$

szereg zbieżny którego granicą jest sama funkcja.

Szereg ten daje nam rozwinięcie funkcji podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj niezależnéj. Nazywać go będziemy *szeregiem Maclaurin'a*. Ograniczając się w rozwinięciu na skończonéj liczbie n wyrazów, popełniamy błąd dany nam przez jeden ze wzorów (6), (6'), (6''); granice jego oznaczemy uważając najmniejsze lub największe wartości, jakie wyrażenia te przybrać mogą, zmieniając h od 0 do $+1$ włącznie.

261. Uwaga. Podstawiając we wzorze Maclaurin'a za x wartość $x+h$ i zastępując następnie wszędzie x przez h, zaś h przez x, otrzymalibyśmy napowrót wzór Taylor'a, byleby dla tych wartości powyżéj [**250**] wymienione warunki ciągłości miały miejsce. Wzory więc (1) lub (2) i (5) ktore nazwaliśmy wzorami Taylor'a i Maclaurin'a, stanowią jedno i to samo rozwinięcie, skoro jeden jest koniecznym następstwem drugiego, byleby warunki ciągłości zachodziły w jednym i w drugim razie: przyczém zauważyć należy, że wzór Taylor'a jest ogólniejszym, bo rozwinięcie (3) wymaga ciągłości i skończoności funkcji i jéj pochodnych dla pewnéj wartości szczególnéj x_0 zmiennéj niezależnéj, którą zresztą obrać możemy dowolnie; gdy tymczasem rozwinięcie (5) wyznacza już tę wartość szczególną $x_0=0$.

262. Twierdzenie. *Wszelkie rozwinięcie funkcji na szereg zbieżny podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj niezależnéj, jest rozwinięciem podług wzoru Maclaurin'a.*

Niech będzie funkcja $f(x)$ rozwinięta na szereg zbieżny podług wzoru Maclaurin'a (w przypuszczeniu że rozwinięcie to jest możebném).

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_{n-1}x^{n-1}a_nx^n+\ldots$$

Niech będzie rozwinięcie tejże funkcji inną drogą na szereg zbieżny, podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj niezależnéj,

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n+\ldots$$

powiadam, że to drugie rozwinięcie jest to samo co pierwsze. to jest że :

$$A_0=a_0,\ A_1=a_1,\ A_2=a_2,\ \ldots\ A_{n-1}=a_{n-1},\ A_n=a_n,\ \ldots$$

W rzeczy saméj, tak jedno jak drugie rozwinięcie, ma z założenia miejsce dla wszelkiego x, a zatém

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

dla $x=0$, otrzymamy

$$A_0=a_0$$

czyli

$$A_1x+A_2x^2+\ldots=a_1x+a_2x^2+\ldots$$

a dzieląc przez x

$$A_1+A_2x+\ldots=a_1+a_2x+\ldots$$

co nam da znów dla $x=0$

$$A_1=a_1$$

Podobnie dowiedlibyśmy że

$$A_2=a_2,\ \ldots\ A_{n-1}=a_{n-1},\ \ A_n=a_n\ \ldots$$

A więc rozwinięcie funkcji w szereg zbieżny podług potęg zwiększających się zmiennéj niezależnéj, jeżeli jest możebném jest tylko jedno, i mamy zawsze

$$\mathrm{A}_0=a_0=f(0),\quad \mathrm{A}_1=a_1=\frac{f'(0)}{1},\quad \mathrm{A}_2=a_2=\frac{f''(0)}{1.2}\dots$$

$$\mathrm{A}_n=a_n\neq\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\dots n}$$

263. Wniosek. *Jeżeli funkcja* f(x) *czyni zadosyć warunkom rozwijalności na szereg nieskończony podług potęg zwiększających się zmiennéj niezależnéj, przerywając szereg na* n*tym wyrazie, ilość* θ *znajdująca się w wyrazie dopełniającym jest zawsze mniejszą od jedności, a nie mniejszą od* $\frac{1}{n+1}$.

Dotychczas oznaczaliśmy przez θ ilość zawartą pomiędzy 0 a 1 *włącznie*; dowiedziemy teraz że ilość ta nie może dosięgnąć jedności, ani stać się mniejszą od $\frac{1}{n+1}$, byleby zachodziły warunki, pod któremi rozwinięcie może być rozciągniętém do nieskończoności.

W rzeczy saméj, mamy z założenia

$$(7)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\dots+\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{x^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(0)+\dots+\frac{x^{n+m}}{1.2\dots(n+m)}f^{(n+m)}(0)+\dots$$

Przerywając rozwinięcie na $n$tym wyrazie, otrzymalibyśmy na wyraz dopełniający wyrażenie

$$\mathrm{R}_n=\frac{x^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(\theta x)$$

Rozwijając $f^{(n)}(\theta x)$ podług potęg θx, mielibyśmy

$$f^{(n)}(\theta x)=f^{(n)}(0)+\frac{\theta x}{1}f^{(n+1)}(0)+\ldots+\frac{\theta^m x^m}{1.2\ldots m}f^{(n+m)}(0)+\ldots$$

podstawiając w (5) [**260**] otrzymamy:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)$$

$$+\frac{x^n.\theta x}{1.2\ldots n.1}f^{(n+1)}(0)+\ldots+\frac{x^n.\theta^m x^m}{1.2\ldots n.1.2\ldots m}f^{(n+m)}(0)+\ldots$$

a że na zasadzie poprzedzającego twierdzenia, to ostatnie rozwinięcie musi być to samo co (7), równając wyrazy ogólne tych dwóch rozwinięć, otrzymamy

$$\frac{x^n.\theta^m x^m}{1.2\ldots n1.2\ldots m}=\frac{x^{n+m}}{1.2\ldots n.(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}$$

czyli

$$\theta=\sqrt[m]{\frac{1.2\ldots m}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}}$$

wyrażenie mniejsze od jedności a nie mniejsze od $\frac{1}{n+1}$

c. b. d. d.

Zastosowania.

264. Rozwinięcie funkcji wykładniczéj na szereg. Weźmy naprzód pod uwagę funkcję

$$e^x$$

wiemy [**192**] że wszystkie pochodne téj funkcji są równemi saméj funkcji i są wraz z nią ciągłemi, skończonemi dla wszelkich wartości skończonych zmiennéj niezależnéj. Dla szczególnéj wartości $x=0$ mamy

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=f^{(n+1)}(0)=\ldots=1$$

rozwijając więc funkcję tę podług wzoru Maclaurin'a (7), otrzymamy

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+R_n$$

gdzie

$$R_n=\frac{x^n}{1.2\ldots n}e^{\theta x}$$

Lecz $e^{\theta x}$ pozostaje skończoném dla wszelkich wartości skończonych x; nadto

$$\text{gr}\frac{x^n}{1.2\ldots n}=\text{gr}\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n-1}\cdot\frac{x}{n}=0$$

bo dla wszelkiego skończonego x, zacząwszy od pewnego czynnika, pozostałe czynniki w liczbie nieograniczonéj są wszystkie mniejszemi od jedności, gdy n powiększa się do nieskończoności, a więc

$$\text{gr}\, R_n=0$$

ztąd wnosimy [**260**] że e^x jest granicą szeregu zbieżnego:

$$(8)\qquad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

Weźmy teraz pod uwagę jakąkolwiek funkcję wykładniczą

$$a^x$$

gdzie a oznacza nateraz jakąkolwiek liczbę dodatną: wiemy że

$$e^{x\mathrm{l}.a} = a^x$$

a więc podstawiając w rozwinięciu e^x za zmienną x wartość $x\,\mathrm{l}.\,a$ otrzymamy

$$a^x = 1 + \frac{x\,\mathrm{l}a}{1} + \frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{1.2} + \frac{x^3(\mathrm{l}a)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n(\mathrm{l}a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{x^{n+1}(\mathrm{l}a)^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

$$\mathrm{R}_n = \frac{x^n(\mathrm{l}a)^n}{1.2\ldots n} a^{\theta x}$$

reszta ta, równie jak poprzedzająca zdąża do granicy 0, bo $\mathrm{gr}\,\frac{x^n(\mathrm{l}.\,a)^n}{1.2\ldots n} = \mathrm{gr}\,\frac{x\,\mathrm{l}.\,a}{1}\;\frac{x\,\mathrm{l}.\,a}{2}\ldots\frac{x\,\mathrm{l}.\,a}{n} = 0$; a więc szereg jest zbieżnym, zdążającym do granicy a^x.

Podstawiając w rozwinięciu e^x za x wartość 1, otrzymamy szereg określający liczbę e:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Zbieżność szeregu

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots n-1} + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

samego przez się da się udowodnić biorąc granicę stosunku wyrazu ogólnego do wyrazu poprzedzającego [**102**]

$$\frac{\dfrac{x^n}{1.2\ldots n}}{\dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}} = \frac{x}{n}$$

granicę, która jest zerem dla wszelkiego skończonego x, gdy n powiększamy nieograniczenie; lecz aby dowieść ściśle że granicą tego szeregu jest e^x trzeba wziąść koniecznie, jakeśmy to powyżéj uczynili, resztę R_n i udowodnić, że reszta ta zdąża do granicy zero.

265. Rozwinięcie wstawy i dostawy na szereg. Weźmy pod uwagę funkcje

$$\operatorname{wst} x, \qquad \operatorname{dos} x$$

wiemy, że wyrażenie na ntę pochodnę tych funkcyj, sprowadza się [**193**] do

$$\frac{d^n \operatorname{wst} x}{dx} = \operatorname{wst}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \frac{d^n \operatorname{dos} x}{dx} = \operatorname{dos}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

pochodna ta jest więc dla jakiegokolwiek n ciągłą, i nie staje się nieskończenie wielką dla żadnéj wartości zmiennéj niezależnéj x. Wiemy nadto, nazywając przez m największą liczbę całkowitą zawartą w połówce n, tak że zawsze:

$$n = 2m \quad \text{lub} \quad n = 2m + 1$$

to jest rozróżniając n parzyste lub nieparzyste,

$$\operatorname{wst}\left[2m \cdot \frac{\pi}{2}\right] = 0 \qquad \operatorname{dos}\left[2m \cdot \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^m$$

$$\operatorname{wst}\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^m \qquad \operatorname{dos}\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

rozwijając więc według szeregu Maclaurin'a (7), zauważymy, że dla wst x

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1, \ldots f^{(2m)}(0)=0$$

$$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m \ldots$$

dla dos x

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0 \ldots$$

$$f^{(2m)}(0)=(-1)^m,\ f^{(2m+1)}(0)=0 \ldots$$

otrzymamy zatém

$$\text{wst}\, x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

$$+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{1.2\ldots(2m+1)}+\mathrm{R}_{2m+3}$$

$$\text{dos}\, x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

$$+(-1)^m\frac{x^{2m}}{1.2\ldots 2m}+\mathrm{R}_{2m+2}$$

zważywszy że w rozwinięciu (7) co drugi wyraz jest zerem; wyrażeniem reszt będzie, zakładając we wzorze (6) $n=2m+3$ i $n=2m+2$:

$$\mathrm{R}_{2m+3}=\frac{x^{2m+3}}{1.2\ldots(2m+3)}\,\text{dos}\,[\theta x+(m+1)\pi]$$

$$\mathrm{R}_{2m+2}=\frac{x^{2m+2}}{1.2\ldots(2m+2)}\,\text{dos}\,[\theta x+(m+1)\pi]$$

uważając że $\text{wst}\left[\theta x+(2m+3)\,\frac{\pi}{2}\right]=\text{dos}\,[\theta x+(m+1)\pi]$.

Tak jedna jak druga reszta zdąża do granicy zero, gdy m zwiększa się nieograniczenie; tak wstawa jak dostawa są więc granicami szeregów zbieżnych :

$$(9) \qquad \text{wst}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$+ (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1.2\dots(2m+1)} + \dots$$

$$(10) \qquad \text{dos}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$+ (-1)^m \frac{x^{2m}}{1.2\dots 2m} + \dots$$

Dla $x < \frac{\pi}{2}$ tak jedna, jak druga reszta jest naprzemian dodatną i odjemną, nadając na m wartości $0, 1, 2, 3\dots$: zatrzymując więc rozwinięcie na parzystéj lub nieparzystéj liczbie wyrazów, otrzymamy summę naprzemian większą lub mniejszą od wartości uważanéj funkcji; to jest

$$\text{wst}\, x < x, \quad \text{wst}\, x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3},$$

$$\text{wst}\, x < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}, \dots$$

$$\text{dos}\, x < 1, \quad \text{dos}\, x > 1 - \frac{x^2}{1.2},$$

$$\text{dos}\, x < 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}, \dots$$

Rozwinięcie wstawy ma same nieparzyste, rozwinięcie dostawy same tylko parzyste potęgi łuku.

266. Rozwinięcie logarytmu na szereg. Funkcja

$$\text{l}\,(x)$$

staje się nieskończenie wielką odjemną dla $x=0$; nie możemy więc rozwinąć jéj podług szeregu Maclaurin'a [**260**].

Zamiast téj funkcji, weźmy pod uwagę funkcję

$$\mathrm{l}(1+x)$$

któréj pochodnemi są [**191**]

$$\frac{d\,\mathrm{l}(1+x)}{dx}=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$

$$\frac{d^2\,\mathrm{l}(1+x)}{dx}=-(1+x)^{-2}$$

. . . .

$$\frac{d^n\,\mathrm{l}(1+x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n}$$

pochodne, które wszystkie nie przestają być ciągłemi dla wartości x zawartych pomiędzy -1 a $+\infty$.

Mamy dla $x=0$

$$[\mathrm{l}(1+x)]_0=\mathrm{l}(1)=0,\quad \left[\frac{d\,\mathrm{l}(1+x)}{dx}\right]_0=1,\ldots$$

$$\left[\frac{d^n\,\mathrm{l}(1+x)}{dx^n}\right]_0=(-1)^{n-1}.1.2\ldots(n-1)$$

a więc rozwinięcie (7) da nam, znosząc w liczniku i w mianowniku każdego wyrazu czynniki wspólne:

$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+\mathrm{R}_n \tag{11}$$

gdzie

$$\mathrm{R}_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\theta x)^n} \tag{12}$$

według wzoru [**260**, (6)] lub też

$$(13)\qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}$$

według wzoru Cauch'ego [**260**, (6″)].

Aby rozwinięcie to $l(1+x)$ mogło być rozciągniętém do nieskończoności, to jest stać się szeregiem, trzeba żeby reszta zdążała do granicy zero. Spostrzegamy zaraz biorąc pod uwagę szereg

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

którego wyraz ogólny ma do poprzedzającego stosunek co do wartości równy

$$\frac{\frac{x^n}{n}}{\frac{x^{n-1}}{n-1}} = \frac{x}{1-\frac{1}{n}}$$

to jest mający granicę równą x gdy n zwiększa się nieograniczenie, że szereg ten jest rozbieżnym dla $x > 1$ [**101** Wn. III]; więc potrzebujemy badać tylko granicę reszty dla wartości x zawartych pomiędzy $+1$ a -1. Dla wartości szczególnéj $x=1$, szereg ten jest zbieżnym [**100** Wn. II]. Rozróżnimy dwa przypadki

1° Jeżeli $0 \leqq x \leqq +1$ wzór (12) na resztę daje nam

$$(12')\qquad R_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

a ponieważ x jest mniéjszém lub równém jedności i dodatném, tak czynnik $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ jak czynnik $\frac{1}{n}$ zdążają do granicy 0, zwiększając n nieograniczenie; granicą reszty jest więc zero. Dla $x = +1$, czynnik $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ pozostaje zawsze mniejszym lub równym jedności, a że $\frac{1}{n}$ zdąża do zera, więc granicą reszty jest również zero, gdy n zwiększa się nieograniczenie.

2^0 Jeżeli $-1 < x < 0$, wzór (12) na resztę nie da nam odrazu zadowolniającéj odpowiedzi; lecz wzór Cauch'ego (13) daje nam, zakładając $x = -z$, gdzie z będzie dodatném, wartość bez względu na znak:

$$R_n = \frac{-z}{1-\theta z}\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1} \tag{13'}$$

w granicy, pierwszy czynnik pozostaje zawsze co do wartości mniejszym lub równym $\frac{z}{1-z}$; drugi czynnik jest $(n-1)$ potęgą iloczynu: $z.\frac{1-\theta}{1-\theta z}$ dwóch czynników, z których jeden jest mniejszym od jedności, a drugi nie większym od jedności, bo z jest ułamkiem mniejszym z założenia od jedności; więc granicą tego drugiego czynnika $\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ będzie zero, gdy n zwiększać się będzie nieograniczenie; granicą reszty jest więc zero.

Dla wszelkich więc wartości x większych od -1 a mniejszych od $+1$ (lub nawet równych $+1$) mamy szereg zbieżny [**260**].

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \tag{14}$$

Dla $x=0$ granicą tego szeregu jest oczywiście 0, dla $x=-1$, summa szeregu staje się nieskończenie wielką: jakoż wiemy że

$$l(1)=0 \qquad l(0)=-\infty$$

Gdy $x=1$ szereg jest zbieżnym i mamy

$$l.2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

Uwaga. Jeżeli x jest dodatném, reszta (12') ma ten sam znak co $(-1)^{n-1}$, a jéj wartość bezwzględna jest mniejszą od $\frac{x^n}{n}$: możemy więc napisać

$$R_n=(-1)^{n-1}\frac{\theta x^n}{n} \tag{12''}$$

oznaczając zawsze przez θ ułamek zawarty pomiędzy 0 a $+1$ (θ we wzorze (12'') jest oczywiście różném co do wartości od θ we wzorze (12')).

Jeżeli x jest odjemném i równém $-z$, wzór (13') pokazuje nam, że reszta jest odjemnym iloczynem dwóch czynników z których pierwszy mniejszym jest co do wartości bezwzględnéj od $\frac{z}{1-z}$, a drugi od z^{n-1}; możemy więc napisać w tym razie

$$R_n=-\frac{\theta z^n}{n(1-z)}=(-1)^{n-1}\frac{\theta x^n}{n(1+x)} \tag{13''}$$

przywiązując do θ to samo co powyżéj znaczenie. Wzory (12'') i (13'') służyć nam mogą na oznaczeuie przybliżenia przy obliczaniu logarytmów za pomocą szeregu (14).

267. Rachunek logarytmów naturalnych. Oznaczywszy przez z ilość zawartą pomiędzy 0 a $+1$ mamy na zasadzie wzoru (14):

$$(15)\qquad l(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$$

$$(16)\qquad l(1-z)=-\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\ldots$$

a odejmując drugi z tych szeregów od pierwszego

$$(17)\qquad l(1+z)-l(1-z)=l\,\frac{1+z}{1-z}=2\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots\right)$$

Załóżmy we wzorze (15)

$$z=\frac{k}{N}\quad\text{czyli}\quad l(1+z)=l\left(1+\frac{k}{N}\right)=l(N+k)-lN$$

gdzie $k<N$, oznaczają dwie liczby całkowite: otrzymamy

$$(18)\qquad l(N+k)-lN=\frac{k}{N}-\frac{k^2}{2N^2}+\frac{k^3}{3N^3}-\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{k^n}{nN^n}+\ldots$$

Zakładając we wzorze (17)

$$z=\frac{k}{2n+k}\quad\text{czyli}\quad\frac{1+z}{1-z}=\frac{N+k}{N}$$

otrzymamy

$$(19)\qquad l(N+k)-lN=2\left[\frac{k}{(2N+k)}+\frac{k^3}{3(2N+k)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{k^5}{5(2N+k)^5}+\ldots+\frac{k^{2n+1}}{(2n+1)(2N+k)^{2n+1}}+\ldots\right]$$

Wzór (18) lub (19) może służyć, mając dany logarytm pewnéj liczby N, do znalezienia logarytmu innéj liczby N$+k$. Wyrazy szeregu (19) zmniejszają się w stosunku większym od wyrazów szeregu (18), któren zato jest prostszym. Błąd popełniony ograniczając się na n wyrazach szeregu (18) jest według wzoru (12″)

$$R_n = (-1)^n \frac{\theta k^{n+1}}{(n+1)\,N^{n+1}}$$

czyli błąd ten mniéjszym jest co do wartości bezwzględnéj od

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}$$

mniejszym również od wartości wyrazu $\frac{1}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n$, na którym zatrzymujemy szereg.

Błąd popełniony zatrzymując się na n wyrazach szeregu (19), (który powstał przez odjęcie (16) od (15)) mniejszym jest co do wartości bezwzględnéj od summy wartości (12″) i (13″) gdzie za n podstawić należy $2n+1$, czyli mniejszym od wartości

$$\frac{\theta z^{2n+3}}{2n+3} + \frac{\theta z^{2n+3}}{(2n+3)(1-z)}$$

lub mniejszym od

$$\frac{z^{2n+3}}{2n+3}\left(1+\frac{1}{1-z}\right)$$

gdzie

$$z = \frac{k}{2N+k}$$

Ponieważ $z < \frac{1}{2}$ więc błąd ten jest zawsze mniejszym (jak zobaczymy z łatwością) od wyrazu $\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ na którym zatrzymujemy szereg. W rzeczy saméj, aby dowieść że

$$\frac{z^{2n+3}}{2n+3}\left(1+\frac{1}{1-z}\right)<\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

dość jest dowieść, dzieląc obie strony przez $\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, że

$$\frac{2n+1}{2n+3}\,z^2\left(1+\frac{1}{1-z}\right)<1$$

Lecz podstawiając $z=\frac{1}{2}$ zwiększamy pierwszą stronę téj nierówności : a jednak mieć będziemy widocznie nierówność

$$\frac{6n+3}{16n+12}<1$$

témbardziéj więc zachodzić będzie nierówność któréj chcieliśmy dowieść. Widzimy ztąd, że błąd tém jest mniejszym dla tego samego n, to jest téj saméj liczby wyrazów szeregu, im stosunek k do N jest mniejszym.

Logarytm 2 naprzykład, moglibyśmy obliczyć według wzoru (15) lub (18) któren służy [**266**] dla $z=1$ lub $k=\mathrm{N}=1$: otrzymalibyśmy

$$\mathrm{l}.2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

lecz szereg ten jest zamało zbieżnym, (bo aby otrzymać błąd dość mały, trzeba wziąść znaczną liczbę jego wyrazów). Założywszy w szeregu (19) $N = k = 1$, otrzymamy

$$1.2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right]$$

szereg daleko zbieżniejszy od poprzedzającego.

Logarytm 3 otrzymamy zakładając w szeregu (19) $N = 2$ $k = 1$ i t. d. W ogólności aby otrzymać logarytm liczby bezpośrednio zastępującéj w układzie liczb całkowitych, z logarytmu znanego liczby poprzedzającéj, dość jest założyć $k = 1$, co nam da

$$\mathrm{l}(N+1) = \mathrm{l}\,N + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \ldots$$

według wzoru (18); lub też

$$\mathrm{l}(N+1) = \mathrm{l}(N) + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]$$

268. Rachunek logarytmów pospolitych. Zasadą układu logarytmów pospolitych jest 10. Oznaczając logarytmy tego układu przez *log*, pozostawiając *l* na oznaczenie logarytmów naturalnych których zazadą jest *e*, mamy

$$\log 10 = 1 \qquad x = e^{\mathrm{l}\,x} = 10^{\log x}$$

a zatém

$$\mathrm{l}.\, x = \log x.\,\mathrm{l}.\,10$$

$$\log x = \frac{\mathrm{l}.\, x}{\mathrm{l}.\, 10}$$

Wartość

$$\frac{1}{\mathrm{l}.\, 10} = M$$

nazywamy *zamiennikiem*; mamy przeto

$$\log x = \mathrm{M}.\,\mathrm{l}.\,x$$

Logarytmy pospolite otrzymamy mnożąc logarytmy naturalne przez zamiennik.

Aby znaleść zamiennik weźmy wzór (19), w którym załóżmy $\mathrm{N} = 8 = 2^3$, $k = 2$, otrzymamy

$$\text{(A)}\qquad \mathrm{l}.\,10 = 3\mathrm{l}.\,2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \dots\right)$$

a że otrzymaliśmy powyżéj

$$\text{(B)}\qquad \mathrm{l}.\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right)$$

więc

$$\text{(C)}\qquad \mathrm{l}.\,10 = \frac{1}{\mathrm{M}} = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right)$$
$$+ 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \dots\right)$$

szereg, który daje nam wartość $\frac{1}{\mathrm{M}}$ a zatém M z tak wielkiém przybliżeniem, jak się podoba.

Chcąc naprzykład obliczyć zamiennik z dwódziestoma pięcioma dziesiętnemi, obliczamy każdy wyraz dwóch szeregów w nawiasach z dwódziestoma ośmioma dziesiętnemi, (zważywszy że szeregi te są pomnożonemi przez 2 i 6 liczby mniejsze od dziesięciu, i że może wypadnie wziąść więcéj jak 10 wyrazów każdego szeregu); następnie gdy dojdziemy do wyrazu którego dwódziesta ósma dziesiętna i wszystkie poprzedzające są zerami, zatrzymamy się : bo błąd popełniony jest mniejszym od tego wyrazu, a nawet pomnożony przez 6 lub 2, nie wpłynie na dwódziestą siódmą dziesiętną : a ponieważ będzie wyrazów wszystkich mniéj niż 100, możemy być pewni dwódziestéj piątéj cyfry dziesiętnéj. Znajdziemy w ten sposób :

$$\frac{1}{M} = 2{,}302585092994045684017914$$

$$M = 0{,}4342944819032518276511289$$

Wzory (18) i (19) pomnożone przez M, dadzą nam dla obliczenia logarytmów pospolitych wzory następujące

$$(18') \quad \log(N+k) - \log N = M\left[\frac{k}{N} - \frac{k^2}{2N^2} + \frac{k^3}{3N^3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{k^n}{nN^n} + \dots\right]$$

$$(19') \quad \log(N+k) - \log N = 2M\left[\frac{k}{2N+k} + \frac{k^3}{3(2N+k)^3} + \dots + \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)(2N+k)^{2n+1}} + \dots\right]$$

269. Uwaga nad użyciem tablic logarytmów pospolitych. Tablice logarytmów pospolitych zawierają tylko liczby ograniczonéj liczby cyfr, naprzykład od 1 do 5 cyfr, to jest od 1 do 100000. Szukając logarytmów liczb złożonych z większéj liczby cyfr, lub odwrotnie, przyjmujemy proporcjonalność przyrostków logarytmów odpowiadających liczbom różniącym się o jedność, przez co popełniamy pewien błąd. Dla oznaczenia granic tego błędu, zatrzymajmy szereg (14) na pierwszym wyrazie, i zastąpmy następne przez wartość (12″)

$$R_2 = -\frac{\theta x^2}{2}$$

otrzymamy

$$l(1+x)=x-\frac{\theta x^2}{2}$$

Załóżmy $x=\frac{k}{N}$ (gdzie $k<N$) i pomnóżmy przez zamiennik M, aby przejść do układu logarytmów pospolitych :

$$\log\left(1+\frac{k}{N}\right)=M\left(\frac{k}{N}-\frac{\theta h^2}{2N^2}\right)$$

czyli

$$(20)\qquad \log(N+k)-\log N=M\left(\frac{k}{N}-\frac{\theta k^2}{2N^2}\right)$$

Jeżeli $k=1$

$$(21)\qquad \log(N+1)-\log N=M\left(\frac{1}{N}-\frac{\theta'}{2N^2}\right)$$

gdzie tak θ jak θ' oznaczają ułamek zawarty pomiędzy 0 a $+1$.

Załóżmy

$$\log(N+k)-\log N=\Delta,\qquad \log(N+1)-\log N=D$$

licząc według tablic logarytmy liczb wychodzących z za obrębu danych tablic, czynimy rozumowanie nieścisłe, że kiedy liczby różnią się o jedność, to logarytmy różnią się o D, więc gdy liczby różnią się o k, różnicę logarytmów Δ otrzymać można przez proporcję

$$(22)\qquad \frac{\Delta}{D}=\frac{k}{1}$$

proporcję, która w rzeczywistości nie zachodzi. Podobne nieścisłe rozumowanie przeprowadzamy robiąc rachunek odwrotny. Oznaczmy błąd popełniony w pierwszym razie przez ε, błąd popełniony w drugim razie przez η : tak że

$$(23)\qquad \Delta = k\mathrm{D} + \varepsilon, \quad k = \frac{\Delta}{\mathrm{D}} + \eta$$

otrzymamy podstawiając za Δ i D wartości (20), (21)

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{M}(\theta' k - \theta k^2)}{2\mathrm{N}^2}, \qquad \eta = \frac{\theta k^2 - \theta' k}{2\mathrm{N} - \theta'}$$

lecz k jest mniejszém od jedności najniższego rzędu liczby N, zaś θ i θ' są również zawarte pomiędzy 0 i $+1$: co do M, to jak widzieliśmy [**268**] jest mniejszém od $\frac{1}{2}$; a więc

$$(24)\qquad \pm\varepsilon < \frac{1}{4\mathrm{N}^2} \qquad \pm\frac{\eta}{\mathrm{N}} = \frac{1}{2\mathrm{N}^2}$$

Jeżeli naprzykład N jest większém od 10000, czyli jest liczbą pięciocyfrową, (co zawsze może mieć miejsce jeżeli tablice zawierają wszystkie liczby pięciocyfrowe,) ε jest mniejszém od czwartéj części jedności ósmego rzędu dziesiętnego : nie może więc wpłynąć na 7mę cyfrę dziesiętną logarytmu. Odwrotnie, stosunek $\frac{\eta}{\mathrm{N}}$ jest mniejszym również od połowy jedności ósmego rzędu dziesiętnego, czyli nie może wpłynąć na żadną cyfrę liczby składającéj się z 7miu cyfr. Ograniczając się więc na siedmiu cyfrach tak w logarytmach jak w liczbach, możemy używać proporcjonalności (22) w tablicach zawierających wszystkie pięciocyfrowe liczby.

270. Dwumian Newtona. Wyrażenie

$$(a + b)^m$$

ma jedną tylko wartość jeżeli m jest całkowitém, dodatném lub odjemném. Jeżeli m jest ułamkowém lub niewymierném, wyrażenie to może mieć więcéj wartości rzeczywistych lub urojonych: w przypuszczeniu że dwumian $(a+b)$ jest dodatnym, jedna z tych wartości jest koniecznie rzeczywistą; weźmy tu pod uwagę tę ostatnią wyłącznie wartość, przypuszczając zresztą m rzeczywistém i pozostawiając pozostałe przypadki do dalszego badania, w jednym z następnych rozdziałów. Zakładając $\frac{b}{a} = x$ wyrażenie powyższe zamieni się na iloczyn.

$$a^m (1+x)^m$$

Zamierzamy sobie rozwinąć na szereg postępujący podług potęg zwiększających się zmiennéj x, funkcję

$$(1+x)^m$$

Pochodna $n$go rzędu téj funkcji

$$\frac{d^n (1+x)^m}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

dla wartości szczególnéj $x=0$, staje się równą

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

zatém rozwinięcie według szeregu Maclaurin'a da nam

$$(25)\qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n$$

gdzie

$$(26)\qquad R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}\, x^n (1+\theta x)^{m-n}$$

według wzoru (6); lub też według wzoru (6″)

$$(26')\qquad R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots(n-1)}\, x^n (1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}$$

Jeżeli m jest całkowitém, dodatném, rozwinięcie (25) zatrzyma się na $n+1$ wyrazach, to jest gdy $n=m$, następne wyrazy będą zerami, a rozwinięcie summą skończoną. Lecz jeżeli m jest ułamkowém lub odjemném, rozwinięcie można przeciągnąć do tylu wyrazów ile się podoba, a żaden ze spółczynników potęg x nie będzie zerem: a zatém rozwinięcie (25) będzie szeregiem nieskończonym

$$(27)\qquad 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}x^{n-1} + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + \dots$$

zdążającym do granicy $(1+x)^m$ w miarę jak powiększamy liczbę wyrazów, byleby reszta zdążała do granicy zero.

Szereg ten jak wiemy jest rozbieżnym, jeżeli wartość x bez względu na znak jest większą od jedności: bo granica stosunku wyrazu $n+1$go do wyrazu $n$go równa

$$\text{gr}\,\frac{m-n+1}{n}\,x = \text{gr}\,-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x = -x$$

jest w takim razie większą od 1: weźniemy więc pod uwagę tylko przypadek w którym x jest zawartém pomiędzy $+1$ a -1, jakoteż przypadek gdy $x=\pm 1$.

1° Przypuśćmy

$$0 \leqq x < +1$$

wzór (26) na resztę daje nam

$$R_n = \left[\frac{mx}{1} \cdot \frac{(m-1)x}{2} \cdot \frac{(m-2)x}{3} \cdots \frac{(m-n+1)x}{n}\right] \times \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}$$

Czynnik w nawiasie zdąża do granicy zero : jest on bowiem iloczynem czynników których pewna ograniczona tylko liczba może być większych od jedności lub równych jedności : w rzeczy saméj, gdy n stanie się większém od $m+1$, czynnik

$$\frac{m-n+1}{n}x \doteq -\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)x$$

i czynniki następne są mniejszemi od x co do wartości bezwzględnéj, a zatém iloczyn ich zdąża do granicy zero [**254**] w miarę jak ich liczba się zwiększa. Czynnik za nawiasem

$$\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}$$

nie może być większym od jedności dla $n > m$; a więc R_n zdąża do granicy zero, a szereg (27) do granicy $(1+x)^m$ gdy x pozostaje dodatném, mniejszém od jedności dodatnéj.

2° Przypuśćmy powtóre

$$-1 < x < 0$$

i załóżmy $x = -z$, gdzie z będzie ilością dodatną zawartą pomiędzy zerem a jednością. Wzór (26') na resztę da nam

$$R_n = (-1)^n \left[\frac{(m-1)z}{1} \cdot \frac{(m-2)z}{2} \cdots\right.$$

$$\left.\frac{(m-n+1)z}{n-1}\right] mz(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$$

Czynnik w nawiasie zdąża do granicy zero; czynnik za nawiasem zdąża również ku granicy zero jeżeli $\theta > 0$, a jeżeli $\theta = 0$, ku granicy skończonéj mz: granicą reszty R_n jest więc i w tym razie zero, a granicą szeregu (27) funkcja $(1+x)^m$. Jeżeli więc

$$-1 < x < +1$$

mamy zawsze

$$(27') \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}x^{n-1} + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + \dots$$

3° Przypuśćmy nakoniec że

$$x = \pm 1$$

Weźmy naprzód pad uwagę warunki zbieżności szeregu (27): dowiedziemy następnie że w razie kiedy szereg (27) jest zbieżnym dla $x = \pm 1$, granicą jego summy jest koniecznie $(1 \pm 1)^m$.

Granicą stosunku wyrazu $n+1$go do wyrazu $n$go szeregu (27) jest dla $x = \pm 1$, granica wyrażenia

$$\pm\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)$$

Jeżeli $m+1<0$ to jest $m<-1$, wyrażenie to zdąża wprawdzie do jedności gdy n zwiększa się nieograniczenie, lecz zdąża pozostając ciągle większém co do wartości od jedności; szereg więc (27) jest w tym razie rozbieżnym [**101** Uw. I].

Jeżeli $m+1>0$ to jest $m>-1$, nazwijmy przez skrócenie u_n wyraz ogólny szeregu (27) dla $x=\pm 1$

$$u_n=\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}(\pm 1)^{n-1}$$

a przez

$$v_n=\frac{1}{n^{m+1}}$$

wyraz ogólny szeregu

$$(28)\qquad \frac{1}{1^{m+1}},\ \frac{1}{2^{m+1}},\ \frac{1}{3^{m+1}},\ \dots\ \frac{1}{n^{m+1}},\dots$$

będziemy mieli

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{m+1}{n},\quad \frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}$$

Wzór (27') stosuje się do $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}$: ograniczając się na dwóch wyrazach i dopełniając resztą

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=1-\frac{m+1}{n}+\frac{(m+1)(m+2)}{2n^2}\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^{-m-3}$$

a że $m+1$ jest dodatném z założenia, więc co do wartości bez względu na znak

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}>\frac{u_{n+1}}{u_n}\quad \text{czyli}\quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n}$$

Załóżmy dla pewnego n

$$\frac{u_n}{v_n} = k \quad \text{czyli} \quad u_n = kv_n$$

będziemy mieli

$$u_{n+1} < kv_{n+1}, \quad u_{n+2} < kv_{n+2}, \quad u_{n+3} < kv_{n+3}$$

a że szereg

(29) $$kv_0, \ kv_1, \ kv_2 \ldots$$

jest szeregiem (28) pomnożonym przez k, a zatém zbieżnym [**110**] dla m dodatnego, więc i szereg (27) będzie również zbieżnym dla $m > 0$, a $x = \pm 1$.

Gdy $x = +1$ a m jest ilością odjemną mniejszą co do wartości od jedności, wyrazy szeregu (27) są naprzemian dodatne i odjemne, a że granicą wyrazu ogólnego jest zero, bo wyraz ten jest iloczynem czynników zdążających do 0, więc szereg (27) jest zbieżnym.

Gdy $x = +1$ a $m = -1$ szereg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ jest nieoznaczonym.

Dowiedliśmy więc zbieżności szeregu (27) dla $x = \pm 1$ a $m > 0$; jakoteż dla $x = +1$ a $m > -1$, powiadam że w ogólności ile razy szereg (27) jest zbieżnym, dla $x = +1$ granicą jego summy jest 2^m, a dla $x = -1$ granicą jego summy jest zero. W rzeczy saméj, dla x mniejszego od jedności co do wartości bezwzględnéj, granicą szeregu (27) jest jakeśmy dowiedli $(1 + x)^m$ funkcja ciągła zmiennéj x: gdy x zbliża się do granicy ± 1, $(1 + x)^m$ zbliża się do 2^m lub 0 : jeżeli więc szereg (27) jest zbieżnym, granicą summy jego musi być również 2^m lub x : bo granice zmiennych ciągle równych są sobie równe [**90**]. Mamy więc *dla wszelkiego* m *dodatnego, lub odjemnego zawartego pomiędzy*

-1 *a zerem*,

$$(29)\qquad 2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots n-1} + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.\dots n} + \dots$$

a dla wszelkiego m *dodatnego*

$$(30)\qquad 0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)}$$

$$+ (-1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} + \dots$$

Wiemy przytém że dla wszelkiego $m < -1$ szereg (27) jest rozbieżnym gdy $x = \pm 1$; szereg jest również rozbieżnym dla m zawartego pomiędzy zerem a -1, gdy $x = -1$; bo gdyby szereg był bieżnym w tym ostatnim razie, granicą jego musiałaby być granica $(1-1)^m$ jakeśmy to dopiero co dowiedli: a granica ta jest nieskończenie wielka, gdy m jest odjemném.

Wzór więc (27') ma miejsce

1° gdy $-1 < x < +1$, a m jakiekolwiek rzeczywiste,
2° gdy $x = +1$, a $m > -1$
3° gdy $x = -1$, a $m > 0$

Dla wszelkich wartości x po za powyższemi granicami wzór ten nie ma miejsca, chybe m jest całkowitém dodatném.

Inne wzory na rozwijanie funkcyj na szeregi.

271. Wzór Bernouilli'ego. We wzorze Taylor'a

$$(1)\qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$
$$+\frac{h^{(n-1)}}{1.2\dots(n-1)}f^{n-1}(x)+\mathrm{R}_n$$

podstawmy $h=-x$ i rozwiążmy go co do $f(x)$: otrzymamy

$$(2)\qquad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(x)-\frac{x^2}{1.2}f''(x)+\dots$$
$$\mp\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)\pm\mathrm{R}_n$$

gdzie [**249**] resztą będzie

$$\mathrm{R}_n=\frac{x^{n+1}}{1.2\dots n}f^{(n)}(1-\theta)$$

lub po prostu, zważywszy na określenie θ [**243**]

$$\mathrm{R}_n=\frac{x^{n+1}}{1.2\dots n}f^{(n)}(\theta)$$

Wzór (2) znanym jest pod nazwiskiem *wzoru Bernouilli'ego.*

272. Niech będzie naprzykład

$$f(x)=(x+a)^n$$

Wzór (2) daje nam

$$(x+a)^n=a^n+nx.(x+a)^{n-1}-\frac{n(n-1)}{1.2}x^2(x+a)^{n-2}+\dots$$

lub

$$a^n = (a+x)^n - nx(a+x)^{n-1} + \frac{n(n-1)x^2}{1.2}(a+x)^{n-2} - \dots$$

coby także można było otrzymać rozwijając potęgę $a^n = [(a+x) - x]^n$ podług dwumianu Newtona [270]. Dzieląc wzór ten przez $(a+x)^n a^n$ otrzymamy

$$(a+x)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - \frac{nx}{a+x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{(a+x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{x^3}{(a+x)^3} + \dots\right]$$

wzór, który może posłużyć do obliczenia pierwiastków liczb.

Aby obliczyć pierwiastek podług tego wzoru, dość jest uważać liczbę daną jako summę $a+x$ z dwóch części, z których a byłaby znacznie większą od x, aby szereg zdążał prędzéj do swéj granicy. Zamiast liczby danéj, można wziąść jéj wielokrotność przez ntą potęgę pewnéj liczby, przez którą w końcu podzielić należy wypadek.

Aby znaleść naprzykład $\sqrt{2}$, weźmy

$$50 = 5^2 . 2 = 49 + 1 \qquad \text{czyli} \qquad 5\sqrt{2} = \sqrt{49+1}$$

załóżmy

$$a = 49, \quad x = 1, \quad n = -\frac{1}{2}$$

otrzymamy

$$5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3\ 5}{2.4.6.50^3} + \dots\right.$$

zaś

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \dots\right)$$

Błąd popełniony jest zawsze mniejszym od wyrazu na którym zatrzymujemy szereg, bo wzór (2) jest tylko szczególnym przypadkiem wzoru Taylor'a, podobnie jak wzór Maclaurin'a. Ograniczając się na czterech powyższych wyrazach szeregu, i zamieniając je na dziesiętne, otrzymamy dwadzieścia cyfr dziesiętnych dokładnych:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880$$

Gdybyśmy chcieli za pomocą tego samego wzoru otrzymać pierwiastek sześcienny z 3, dość będzie założyć

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27-3}$$

a więc

$$a = 27, \qquad x = 3, \qquad n = -\frac{1}{3}$$

co nam da

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{4}{24.48} - \frac{4.7}{24.48.72} + \ldots\right)$$

Możnaby także założyć

$$9\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{13^3 - 10}$$

a ztąd

$$\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\left(1 - \frac{10}{3.2187} + \frac{4.10^2}{3.6.2187^2} + \frac{4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \ldots\right)$$

szereg zbieżniejszy od poprzedzającego, któren da nam

$$\sqrt[3]{3} = 1,4422495703074$$

z trzynastoma cyframi dokładnemi.

273. Metoda spółczynników nieoznaczonych. Dowodzenia wzorów dane powyżéj na rozwinięcie funkcyj na szeregi, dają nam zarazem warunki rozwijalności i granice błędu. Gdybyśmy z góry byli pewni że funkcja jest rozwijalną na szereg, rozwinięcia te daleko łatwiéj otrzymaćby można było za pomocą metody spółczynnników nieoznaczonych.

Tak naprzykład, aby otrzymać wzór Taylor'a, dość jest wyznaczyć spółczynniki A, B, C, D ... tak, żeby

$$f(x+h) = \mathrm{A} + \mathrm{B}h + \mathrm{C}h^2 + \mathrm{D}h^3 + \ldots \tag{1}$$

dla jakiegokolwiek h. Zakładając $h=0$, otrzymamy pierwszy spółczynnik

$$A=f(x)$$

Weźmy pochodnę wyrażenia (1), które jest wielomianem algebraicznym, i załóżmy w téj pochodnéj $h=0$, otrzymamy drugi spółczynnik

$$B=f'(x)$$

zakładając $h=0$ w dalszych pochodnych wyrażenia (1), otrzymamy dalsze spółczynniki

$$C=\frac{f''(x)}{1.2} \qquad D=\frac{f'''(x)}{1.2.3}\ldots$$

które podstawiając w (1), otrzymamy

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots$$

wzór Taylor'a.

Lecz aby można użyć téj metody, należy zawsze udowodnić naprzód że funkcja jest rozwijalną w szukany sposób, w granicach pomiędzy któremi chcemy zmieniać zmienne.

Przykład I. *Rozwinięcie* x *dot* x.

Załóżmy

$$x \operatorname{dot} x=A+A_1x^2+A_2x^4+A_3x^6+\ldots$$

wiemy że [265]

$$x \operatorname{dot} x=\frac{x \operatorname{dos} x}{\operatorname{wst} x}=x\,\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots}{x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots}$$

a więc trzeba żebyśmy mieli

$$x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{1.2.3.4} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$
$$= (A + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots)\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$

czemu zadość uczynimy znosząc nawias po drugiéj stronie, i równając spółczynniki odpowiednich potęg x:

$$1 = A, \quad -\frac{1}{2} = A_1 - \frac{A}{1.2.3},$$
$$\frac{1}{1.2.3.4} = A_2 - \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2.3.4.5}, \ldots$$

ztąd otrzymamy

$$A = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{1}{45}, \quad A_3 = -\frac{2}{945} \ldots$$

a ponieważ szeregi wstawy i dostawy są zbieżnemi [265], więc i ich iloraz pomnożony przez x czyli szereg na któryśmy rozwinęli x dot x będzie zbieżnym, jeżeli x zmienia się pomiędzy 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Przykład II. *Rozwinięcie iloczynu*:

$$(1 + x)\ (1 + x^2)\ (1 + x^4)\ (1 + x^8) \ldots (1 + x^{2^n})$$

Oznaczmy iloczyn dany przez J

$$J = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^n}) \ldots$$

iloczyn ten będzie zbieżnym, to jest dążyć będzie do granicy oznaczonéj, gdy $n = \infty$, jeżeli $x < 1$ co do wartości bezwzględnéj: w rzeczy samej, dowiedziemy że wyrażenie J jest skończoném, jeżeli logarytm J będzie skończonym; a

$$l.J = l.(1 + x) + l(1 + x^2) + \ldots + l(1 + x^{2^n}) + \ldots$$

jest szeregiem zbieżnym, jeżeli [101 Wn. II]

$$\frac{l(1 + x^{2^n})}{l(1 + x^{2^{n-1}})} < 1 \quad \text{lub} \quad \frac{1 + x^{2^n}}{1 + x^{2^{n-1}}} < 1$$

co ma miejsce gdy

$$x^{2^n} < x^{2^{n-1}} \quad \text{lub} \quad x < 1.$$

Dla x więc mniejszego od jedności, iloczyn ten będąc wielomianem algebraicznym zbieżnym, czyni zadość warunkom rozwijalności podług potęg zwiększających się x: załóżmy przeto

$$J = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

Podstawiając w iloczynie danym za x wartość x^2, wyrażenie J stanie się $\frac{J}{1+x}$: a zatém

$$1 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 \ldots = \frac{1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{1+x}$$

znosząc mianownik, i równając spółczynniki odpowiednich potęg x na zasadzie twierdzenia [262], otrzymamy

$$1 = A_1, \quad A_1 = A_2, \quad A_1 = A_3, \quad A_2 = A_4, \ldots$$

a zatém

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = \frac{1}{1-x}$$

w granicy, jeżeli $x < 1$.

Jeżeli $x \geqq 1$, iloczyn jest rozbieżnym składając się z nieskończonéj liczby czynników zwiększających się nieograniczenie, (lub przynajmniéj równych 2).

274. Rozwinięcie funkcji na szereg podług potęg całkowitych innéj funkcji danéj. Aby rozwinąć pewną funkcję $f(x)$ podług potęg innéj funkcji $\varphi(x)$, dość jest uważać we wzorze Maclaurin'a $f(x)$ za pewną funkcję zmiennéj $\varphi(x)$ i rozwinąć w zwykły sposób. Zadanie sprowadza się do zamiany zmiennych. Warunki rozwijalności są więc te same [260], uważając tylko zmienną $\varphi(x)$ zamiast zmiennéj x.

Rozwinięcie to można otrzymać wprost za pomocą metody spółczynników nieoznaczonych. Załóżmy jak powyżéj [273]:

$$(1)\qquad f(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}\varphi(x)+\mathrm{C}[\varphi(x)]^2+\mathrm{D}[\varphi(x)]^3+\ldots$$

Biorąc pochodne, otrzymamy dla wyznaczenia spółczynników A, B, C, D . . . :

$$f'(x)=\mathrm{B}\varphi'(x)+\mathrm{C}\frac{d[\varphi(x)]^2}{dx}+\mathrm{D}\frac{d[\varphi(x)]^3}{dx}+\ldots$$

$$f''(x)=\mathrm{B}\varphi''(x)+\mathrm{C}\frac{d^2[\varphi(x)]^2}{dx^2}+\mathrm{D}\frac{d^2[\varphi(x)]^3}{dx}+\ldots$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\mathrm{B}\varphi^{(n)}(x)+\mathrm{C}\frac{d^n[\varphi(x)]^2}{dx^n}+\mathrm{D}\frac{d^n[\varphi(x)]^3}{dx^n}+\ldots$$

Niech będzie x_0 wartość szczególna x dla któréj $\varphi(x)=0$: załóżmy że pochodne téj funkcji nie są zerami dla $x=x_0$, otrzymamy:

$$f(x_0)=\mathrm{A}$$

$$f'(x_0)=\mathrm{B}\varphi'(x_0)$$

$$f''(x_0)=\mathrm{B}\varphi''(x_0)+1.2\,\mathrm{C}[\varphi'(x_0)]^2$$

. . . .

co nam da

$$(2)\qquad \mathrm{A}=f(x_0),\quad \mathrm{B}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)},\quad \mathrm{C}=\frac{f''(x_0)\varphi'(x_0)-\varphi''(x_0)f'(x_0)}{1.2\,[\varphi'(x_0)]^3},$$

co można także napisać

$$(3)\qquad \mathrm{A}=f(x_0),\ \mathrm{B}=\frac{\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x_0}}{\varphi'(x_0)},\ \mathrm{C}=\frac{\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial x_0}}{2\varphi'(x_0)},\ \mathrm{D}=\frac{\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial x_0}}{3\varphi'(x_0)}\ \ldots$$

Tak naprzykład rozwinięciem funkcji $e^{-\frac{1}{x}}$ podług $1.x$ będzie

$$e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}\left[1 + 1.x - \frac{1}{1.2.3}(1.x)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}(1.x)^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5}(1.x)^5 + \dots\right]$$

Zakładając we wzorze ogólnym (1), $\varphi(x) = x$, otrzymalibyśmy wzór Maclaurin'a: w rzeczy saméj, $x_0 = 0$ a zatém

$$A = f(0),\quad B = f'(0),\quad C = \frac{1}{1.2} f''(0),\quad D = \frac{1}{1.2.3} f'''(0) \dots$$

a wzór powyższy staje się

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

wzorem Maclaurin'a [260].

275. Rozwinięcie zmiennéj na szereg podług potęg pewnéj funkcji tejże zmiennéj. *Odwrotnie*, aby rozwinąć x podług potęg pewnéj funkcji $\varphi(x)$, załóżmy

$$f(x) = x$$

we wzorze (1) otrzymanym przed chwilą: będziemy miel na zasadzie (2) lub (3)

$$(4)\qquad A = x_0,\quad B = \frac{1}{\varphi'(x_0)},\quad C = -\frac{\varphi''(x_0)}{2[\varphi'(x_0)]^3}$$

$$D = \frac{1}{2.3}\,\frac{3[\varphi''(x_0)]^2 - \varphi'(x_0)\,\varphi''(x_0)}{[\varphi'(x_0)]^5} \dots$$

więc wzór (1) stanie się

$$(5)\qquad x = x_0 + \frac{1}{\varphi'(x_0)}\varphi(x) - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(x_0)}{[\varphi'(x_0)]^3}[\varphi(x)]^2$$
$$+\frac{1}{1.2}\frac{3[\varphi''(x_0)]^2 - \varphi'(x_0)\varphi'''(x_0)}{[\varphi'(x_0)]^5}[\varphi(x)]^3 - \ldots$$

wzór, który jest odwrotnym wzoru Maclaurin'a : wzór ten przypuszcza że funkcja $\varphi(x)$ i jej pochodne są ciągłemi w granicach zmienności x, i że żadna z nich nie staje się zerem dla wartości szczególnéj $x = x_0$.

Tak naprzykład, wzór Maclaurin'a daje nam [**266**]

$$\mathrm{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

zakładając zaś we wzorze (5) $\varphi(x) = \mathrm{l}.(1+x)$, $x_0 = 0$, otrzymamy wzór odwrotny

$$x = \mathrm{l}.(1+x) + \frac{1}{1.2}[\mathrm{l}.(1+x)]^2 + \frac{1}{1.2.3}[\mathrm{l}(1+x)]^3 + \ldots$$

W ogólności, jeżeli mamy rozwinięcie jakiéj funkcji y na szereg podług potęg zwiększających się zmiennéj x:

$$(6)\qquad y = \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \mathrm{E}x^4 + \ldots$$

chcąc otrzymać rozwinięcie x podług potęg y, dość jest założyć

$$y = \varphi(x) \qquad \varphi'(x) = \mathrm{B} + 2\mathrm{C}x + 3\mathrm{D}x^2 + \ldots, \ldots$$
$$x_0 = 0 \quad \text{bo dla} \quad x = 0, \quad y = 0;$$

a więc

$$(7)\qquad x = \frac{1}{\mathrm{B}}y - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}^3}y^2 + \frac{2\mathrm{C}^2 - \mathrm{BD}}{\mathrm{B}^5}y^3 - \ldots$$

276. ZASTOSOWANIE DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ LICZEBNYCH. Załóżmy we wzorze (1)

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)$$

x_0 będzie jakiémkolwiek : bo zawsze dla $x = x_0$ będzie $\varphi(x_0) = 0$; wzór (1) stanie się

$$f(x) = \mathrm{A} + \mathrm{B}[\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)] + \mathrm{C}[\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)]^2$$
$$+ \mathrm{D}[\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)]^3 + \ldots$$

gdzie

$$\mathrm{A} = f(x_0),\quad \mathrm{B} = \frac{f'(x_0)}{\mathrm{F}'(x_0)},\quad \mathrm{C} = \frac{\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x_0}}{2\mathrm{F}'(x_0)},\quad \mathrm{D} = \frac{\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x_0}}{3\mathrm{F}'(x_0)} \ldots$$

gdzie f i F są jakiemikolwiek funkcjami ciągłemi mającemi pochodne ciągłe, nie stające się równemi zeru dla wartości szczególnéj $x = x_0$, która zresztą może być jakąkolwiek.

Nięch będzie teraz równanie

$$\mathrm{F}(x) = 0$$

dla wartości x, które są pierwiastkami tego równania, będziemy mieli, na zasadzie wzoru powyższego

$$f(x) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{\mathrm{F}'(x_0)}\mathrm{F}(x_0) + \mathrm{C}[\mathrm{F}(x_0)]^2 - \mathrm{D}[\mathrm{F}(x_0)]^3 + \ldots$$

wzór, który daje wyrażenie jakiéjkolwiek funkcji f pierwiastku x równania $\mathrm{F}(x) = 0$; a zakładając $f(x) = x$

$$x = x_0 - \frac{\mathrm{F}(x_0)}{\mathrm{F}'(x_0)} - \frac{1}{1.2}\frac{\mathrm{F}''(x_0)[\mathrm{F}(x_0)]^2}{[\mathrm{F}'(x_0)]^3}$$
$$- \frac{1}{1.2.3}\frac{3[\mathrm{F}''(x_0)]^2 - \mathrm{F}'(x_0)\mathrm{F}'''(x_0)}{[\mathrm{F}'(x_0)]^5}[\mathrm{F}(x_0)]^3 - \ldots$$

wzór, który można napisać w prostszy sposób zakładając $-\frac{1}{\mathrm{F}'(x_0)} = \psi$, i nazywając ψ' pochodnę ψ względem x_0, $(\psi\psi')'$ pochodnę iloczynu $\psi\psi'$ względem x_0, i tak daléj :

$$x = x_0 + \psi\,F(x_0) + \psi\psi' \frac{[F(x_0)]^2}{1.2} + \psi\,(\psi\psi')' \frac{[F(x_0)]^3}{1.2.3}$$
$$+ \psi\,[\psi(\psi\psi')]' \frac{[F(x_0)]^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

gdzie x_0 jest jakąkolwiek wartością szczególną x w granicach ciągłości funkcji F, dla któréj funkcja ani żadna z jéj pochodnych nie staje się zerem. Wyrazy powyższego szeregu zbliżają się tem więcéj do zera, im $F(x_0)$ jest mniejszem, to jest im x_0 jest więcéj zbliżoném do pierwiastku x równania $F(x) = 0$. Szereg więc jest rozwinięciem tego pierwiastku, i może posłużyć do dokładniejszego jego obliczenia, gdy znamy dość zbliżoną wartość x_0.

Weźmy naprzykład równanie

$$x^3 - 2x - 20 = 0$$

pierwsza strona tego równania zmienia znak zakładając $x = 2$ i $x = 3$: jest więc pierwiastek niewiele różny od 3. Zakładając $x_0 = 3$, otrzymamy

$$F(x_0) = 1$$

$$F'(x_0) = 3 \times 3^2 - 2 = 25$$

$$F''(x_0) = 18, \quad F'''(x_0) = 6, \quad F''''(x_0) = 0, \quad F^{(5)}(x_0) = 0 \ldots$$

a zatém

$$x = 3 - \frac{1}{25} - \frac{9}{15625} - \frac{137}{9765625} - \ldots = 2{,}95940997 \ldots$$

wartość zbliżoną na jednę dziesięciomiljonową.

Rozwijanie na szeregi funkcyj wielu zmiennych niezależnych.

277. Wzór Taylor'a. Niech będzie funkcja

(1) $$u = \mathrm{F}(x, y, z \ldots)$$

m zmiennych niezależnych x, y, $z\ldots$ Nazwijmy $u+\mathrm{H}$ wartość téj funkcji, gdy za x podstawimy $x+h$, za y $y+k$, za z, $z+l\ldots$

(2) $$u+\mathrm{H} = \mathrm{F}(x+h,\ y+k,\ z+l, \ldots)$$

Zamierzamy sobie rozwinąć wyrażenie (2) podług potęg zwiększających się przyrostków h, k, $l\ldots$ Nazwijmy

(3) $$\mathrm{U} = \mathrm{F}(x+ht,\ y+kt,\ z+lt, \ldots)$$

$u+\mathrm{H}$ będzie wartością U uważanego za funkcję t dla wartości szczególnéj $t=1$. Więc U uważane jako funkcja t i rozwinięte podług wzoru Maclaurin'a (jeżeli rozwinięcie to jest możebném) według potęg zwiększających się t, da nam rozwinięcie wyrażenia $u+\mathrm{H}$, zakładając $t=1$.

Załóżmy przez skrócenie

(4) $$x+ht=\xi, \quad y+kt=\eta, \quad z+lt=\zeta\ldots$$

czyli

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta\ldots)$$

a więc [**172**] uważając U jako funkcję funkcyj ξ, η, $\zeta\ldots$

zmiennéj t:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots$$

a ponieważ ξ, η, ζ ... są na zasadzie (4) funkcjami linijnemi zmiennéj t, więc [200] symbolicznie

$$d^n U = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \ldots\right)^{(n)}$$

Lecz z (4) mamy uważając ξ, ζ, η, ... za funkcję t,

$$d\xi = h dt \quad d\eta = k dt \quad d\zeta = l dt \ldots$$

a zatém

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial U}{\partial \xi} + k \frac{\partial U}{\partial \eta} + l \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \ldots\right)^{(n)} \tag{5}$$

Pochodne częściowe funkcji U względem ξ, η, ζ ... są równe pochodnym częściowym funkcji U względem x, y, z, ...

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

bo $\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1, \frac{\partial y}{\partial \eta} = 1, \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 \ldots$, jak widzimy z równań (4): podstawiając w (5)

$$\frac{d^n U}{dt^n} = \left(h \frac{\partial U}{\partial x} + k \frac{\partial U}{\partial y} + l \frac{\partial U}{\partial z} + \ldots\right)^{(n)}$$

Dla $t = 0$ wyrażenie (3) staje się (1) czyli $U = u$, a więc

$$(U)_0 = u \;, \quad \left(\frac{d^n U}{dt^n}\right)_0 = \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + l \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^{(n)}$$

oznaczając przez $(\mathrm{U})_0$, $\left(\frac{d^n\mathrm{U}}{dt^n}\right)_0$ wartość szczególną funkcji U i jéj $n$tej pochodnéj dla wartości szczególnéj $t=0$.

Wzór Maclaurin'a [260] w którym założymy $\mathrm{U}=f(x)$ $t=x$, da nam więc

$$(6)\quad \mathrm{U}=u+\frac{t}{1}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)$$
$$+\frac{t^2}{1.2}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)^{(2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)^{(n-1)}$$
$$+\mathrm{R}_n$$

gdzie

$$(7)\quad \mathrm{R}_n=\frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{(n)}_{x+\theta ht,\ y+\theta kt,\ z+\theta lt\ldots}$$

to jest, że po wykonaniu symbolicznéj potęgi podstawić należy za x wartość $x+\theta ht$, za y wartość $y+\theta kt$, za z wartość $z+\theta lt\ldots$

Uczyniwszy w (6) i (7) $t=1$, otrzymamy jakeśmy wyżéj powiedzieli :

$$(8)\quad u+\mathrm{H}=\mathrm{F}(x+h,\ y+k,\ z+l,\ldots)$$
$$=u+\frac{1}{1}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)$$
$$+\frac{1}{1.2}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)^{(2)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)^{(n-1)}+\mathrm{R}_n$$

$$(9)\quad \mathrm{R}_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\left(h\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{\partial u}{\partial z}+\ldots\right)^{(n)}_{x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l\ldots}$$

Wzór (8) jest wzorem Taylor'a dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych; (9) jest wyrażeniem jego *reszty* czyli *wyrazu dopełniającego.*

Naprzykład, dla funkcji

$$u = F(x, y)$$

dwóch zmiennych niezależnych x i y otrzymamy rozwijając potęgi symboliczne :

$$F(x+h, x+k) = F(x, y) + \left(h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left(h^{n-1}\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-1}{1}h^{n-2}k\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-2}\partial y} + \ldots\right.$$
$$\left. + k^{n-1}\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right) \ldots + R_n$$

gdzie

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[h^n\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \frac{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots\right.$$
$$\left. + k^n\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right]_{x+\theta h,\ y+\theta k}$$

278. Warunki rozwijalności funkcji wielu zmiennych niezależnych podług wzoru Taylor'a. Aby wzór (6) a zatém i (8) mógł mieć miejsce, trzeba żeby funkcja u uważana jako funkcja zmiennéj t mogła być rozwiniętą podługwzoru Maclaurin'a [**260**] dla $t = 1$: co się sprowadza z łatwością do warunku następującego :

Aby funkcja wielu zmiennych niezależnych mogła być rozwiniętą podług wzoru Taylor'a, trzeba żeby tak sama funkcja, jak *i wszystkie jéj pochodne częściowe aż do rzędu* n*go włącznie, były funkcjami ciągłemi, skończonemi, zmiennych niezależnych, dla wszelkich wartości jakie zmienne te przybrać mogą w granicach uważanych*: to jest pomiędzy x a $x+h$, pomiędzy y a $y+k$, pomiędzy z a $z+l$ i t. d.

Jeżeli wszystkie pochodne częściowe jakiegokolwiek rzędu czynią zadosyć powyższym warunkom, jeżeli nadto reszta zdąża do granicy zero (lub skończonéj), gdy n zwiększamy nieograniczenie, wzór Taylor'a (8) przedłużony do nieskończoności staje się *szeregiem zbieżnym*, którego summa ma granicę równą funkcji danéj (lub różnicy funkcji danéj i granicy skończonéj reszty). Szereg ten nazywać będziemy jak powyżej, *szeregiem Taylor'a.*

279. Rowinięcie przyrostku funkcji wielu zmiennych niezależnych podług różniczek zupełnych rzędów zwiększających się tejże funkcji. Niech będzie funkcja

$$u = \mathrm{F}(x, y, z \ldots)$$

m zmiennych niezależnych. Załóżmy przyrostki k, h, l... tych zmiennych niezależnych nieskończenie małemi

$$h = \Delta x, \quad k = \Delta y, \quad l = \Delta z \ldots$$

i nazwijmy

$$\Delta u = \mathrm{F}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots) - \mathrm{F}(x, y, z \ldots)$$

przyrostek odpowiedni funkcji. Wiemy z określenia [**209**] że

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz + \ldots$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\, \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\, \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\, \Delta z + \ldots$$

oznaczając przez du różniczkę zupełną funkcji u; i w ogólności

$$d^n u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots\right)^{(n)}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \ldots\right)^{(n)}$$

Podstawiając wartości te we wzór (8) otrzymamy

$$(10)\quad \Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots$$

wzór taki sam jak wyżéj [**258**] otrzymany wzór dla przyrostku funkcji jednéj zmiennéj niezależnéj: też same uwagi stosują się do obu tych wzorów.

280. Twierdzenie. *Jeżeli funkcja wielu zmiennych niezależnych czyni zadosyć warunkom rozwijalności, a przyrostki* h, k, l... *zmiennych niezależnych są nieskończenie małemi, zatrzymując szereg na którymkolwiek wyrazie, różnym od zera, stosunek reszty do tego wyrazu, zdąża do granicy zero.*

W rzeczy saméj, wzór (9) napisać można wtedy

$$R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\, d'^n u$$

oznaczając przez $d'^n u$ wypadek z podstawienia w wyrażenie

$$d^n u = \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots\right)^{(n)}$$

$$x + \theta h \text{ za } x,\quad y + \theta k \text{ za } y,\quad z + \theta l \text{ za } z \ldots$$

W podobny sposób, zatrzymując szereg na wyrazie poprzednim, otrzymamy

$$R_{n-1}=\frac{d'^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)}=\frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)}+R_n$$

a ztąd

$$\frac{R_n}{\left(\frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)}\right)}=-\frac{d'^{n-1}u-d^{n-1}u}{d^{n-1}u}.$$

Lecz gdy h, k, l ... zdąża do zera, granicą stosunku po prawéj stronie ostatniéj równości jest zero, w przypuszczeniu że warunki rozwijalności zachodzą, to jest między innemi, że $d^{n-1}u$ jest ciągłém; a więc granicą stosunku wyrazu dopełniającego R_n do wyrazu poprzedzającego $\frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots n-1}$ jest zero, c. b. d. d.

281. Wzór Maclaurin'a dla funkcji wielu zmiennych niezależnych. We wzorze (8) i (9) założmy x, y, z ... równemi zeru, i przypuśćmy że dla téj szczególnéj wartości warunki rozwijalności [**278**] mają miejsce; następnie podstawmy za h, k, l ... głoski x, y, z ... : otrzymamy

$$(11)\quad u=u_0+\frac{1}{1}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+\ldots\right]$$
$$+\frac{1}{1.2}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+\ldots\right]^{(2)}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right.$$
$$\left.+z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+\ldots\right]^{n-1}$$
$$+R_n$$

gdzie

$$(12)\quad R_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\theta + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\theta + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\theta + \ldots\right]^{(n)}$$

W tych wzorach $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ ... oznaczają że w pochodnych częściowych za x, y ... podstawić należy 0, podobnie jak $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\theta$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\theta$ ... że za x, y ... podstawić należy ułamek zawarty pomiędzy 0 a $+1$ włącznie, któren oznaczyliśmy przez θ. Warunki aby wzór lub szereg (11) miał miejsce, wypływają wprost z warunków powyżéj [**278**] podanych na szereg Taylor'a : *funkcja i jéj pochodne mają pozostać ciągłémi skończonymi, gdy zmieniamy zmienne pomiędzy zerem a wartościami uważanymi włącznie. Jeżeli wzór ma zostać szeregiem, reszta musi zdążać do granicy zero* (*lub granicy skończonéj*).

282. Twierdzenie funkcyj jednorodnych. Niech będzie funkcja jednorodna [**33**]

$$f(x, y, z \ldots)$$

*m*go stopnia zmiennych niezależnych x, y, z .... Z określenia jednorodności wypada, że pomnożywszy każdą z tych zmiennych przez czynnik $1+\alpha$, cała funkcja będzie pomnożoną przez *m*tę potęgę tego czynnika

$$f(x+\alpha x, y+\alpha y, z+\alpha z, \ldots) = (1+\alpha)^m f(x, y, z \ldots)$$

Przypuśćmy że funkcja ta czyni zadosyć warunkom rozwijalności [**178**], (co możemy zawsze przypuścić, biorąc α dostatecznie małém i zakładając funkcję ciągłą *n*go rzędu); weźmy za dowolną α ilość dodatną mniejszą od jedności, otrzymamy [**277**] rozwijając pierwszą i drugą stronę powyższego równania podług potęg zwiększających się α:

$$f(x,y,z,\ldots)+\alpha\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots\right]$$

$$+\frac{\alpha^2}{1.2}\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots\right]^{(2)}$$

$$+\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots\right]^{(n)}+\ldots$$

$$=f(x,y,z\ldots)\left[1+\frac{m}{1}\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\alpha^n+\ldots\right]$$

a że to ostatnie równanie ma mieć miejsce niezależnie od α, więc spółczynniki potęg równych α są sobie równe:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots=mf(x,y,z\ldots)$$

$$\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots\right]^{(2)}=m(m-1)\,f(x,y,z\ldots)$$

. . . .

$$\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+\ldots\right]^{(n)}=m(m-1)\ldots$$

$$(m-n+1)\,f(x,y,z)$$

. . . .

Wzory te wyprowadziliśmy już powyżej [**224**] inną drogą.

283. Przykład I. *Niech będzie wyrażenie*

$$x^2(a+y)^3$$

znaleźć rozwinięcie podług potęg h *i* k *wyrażenia*

$$(x+h)^2(a+y+k)^3$$

Zakładając

$$F(x,\, y) = x^2 (a+y)^3$$

mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x(a+y)^3, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2(a+y)^3, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2(a+y)^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6x(a+y)^2, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 6(a+y)^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6x^2(a+y), \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 12x(a+y)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 6x^2$$

następne pochodne częściowe są zerami; zaś

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 12(a+y) \quad , \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} = 12x \quad , \quad \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^3} = 12$$

Podstawiając wartości te we wzór (8), otrzymamy

$$\begin{aligned}(x+h)^2(a+y+k)^3 = x^2(a+y)^3 &+ 2x(a+y)^3 h + 3x^2(a+y^2)k \\ &+ (a+y)^3 h^2 + 6x(a+y^2)hk + 3x^2(a+y)k^2 \\ &+ 3(a+y)^2 h^2 k + 6x(a+y)hk^2 + x^2 k^3 \\ &+ 3(a+y)h^2k^2 + 2xhk^3 + h^2k^3\end{aligned}$$

Przykład II. *Niech będzie funkcja*

$$F(x,\, y,\, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Gxz + 2Hxy$$

rozwinąć podług potęg h, k, l *funkcję* F (x + h, y + k, z + l).

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2Ax + 2Gz + 2Hy, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 2E$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2By + 2Ez + 2Hx, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2B, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = 2G$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2Cz + 2Ey + 2Gx, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2C, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2H$$

a zatém

$$F(x+h, y+k, z+l) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Gzx + 2Hxy$$
$$+ 2[(Ax + Gz + Hy)h + (By + Ez + Hx)k + (Cz + Ey + Gx)l]$$
$$+ Ak^2 + Bh^2 + Cl^2 + 2Ekl + 2Glh + 2Hhk$$

PRZYKŁAD III. *Rozwinąć podług potęg* x *i* y *iloczyn*

$$J = (a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots)(b_0 + b_1 \frac{y}{1} + b_2 \frac{y_2}{1.2} + \ldots)$$

Wzór Maclaurin'a da nam

$$\begin{aligned} J = {} & a_0b_0 + a_1b_0x + a_0b_1y \\ & + \frac{1}{1.2}(a_2b_0x^2 + 2a_1b_1xy + a_0b_2y^2, \\ & + \frac{1}{1.2.3}(a_3b_0x^3 + 3a_2b_1x^2y + 3a_1b_2xy^2 + a_0b_3y^3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

PRZYKŁAD IV. *Rozwinąć wstawę iloczynu poprzedzającego.*

$$\begin{aligned} & \mathrm{wst}\left[(a_0 + a_1\frac{x}{1} + a_2\frac{x^2}{1.2} + \ldots)(b_0 + b_1\frac{y}{1} + b_2\frac{y_2}{1.2} + \ldots)\right] \\ & = \mathrm{wst}(a_0b_0) + (a_1b_0x + a_0b_1y)\,\mathrm{dos}(a_0b_0) \\ & - \frac{1}{1.2}(a_1b_0x + a_0b_1y)^2\,\mathrm{wst}(a_0b_0) \\ & \qquad + \frac{1}{1.2}[a_2b_0x^2 + 2a_1b_1xy + a_0b_2y^2]\mathrm{dos}(a_0b_0) \\ & - \frac{1}{1.2.3}[(a_1b_0x + a_0b_1y)^3 - a_3b_0x^3 \\ & \qquad - 3a^2b_1x^2y - 3a_1b_2xy^2 - a_0b_3y^3]\,\mathrm{dos}(a_0b_0) \\ & - \frac{1}{1.2.3}[3(a_1b_0'x + a_0b_1y)(a_2b_0x^2 + 2a_1b_1xy + a_0b_2y^2)]\,\mathrm{wst}(a_0b_0) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ XVI

WYRAZENIA NIEOZNACZONE

Oreślenia. — Granica stosunków ilości dążących do zera, lub do nieskonczoności. — Granice iloczynów z których jeden dąży do zera a drugi do nieskończoności.—Granice potęg przedstawiających się jako wyrażenia nieoznaczone. — Przykłady. — Wyrażenia nieoznaczone wielu zmiennych niezależnych.

284. Wyrażenia nieoznaczone, któremi zajmować się będziemy w tym rozdziale, są to wartości szczególne funkcyj, które dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj, przedstawiają się pod jednym z kształtów

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \infty.0, \ 1^{\infty}, \ \infty^0, \ 0^0.$$

a jednak zdążać mogą do granicy oznaczonéj.

Tak widzieliśmy już powyżéj [**132**], jak stosunek przyrostku funkcji do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

przedstawiający się w granicy pod postacią nieoznaczoną $\frac{0}{0}$,

bo Δy zdąża w ogólności do zera wraz z Δx, ma jednak w ogóle granicę skończoną, oznaczoną, którą nazwaliśmy pochodną funkcji. Widzieliśmy podobnież [**112**] jak wyrażenie

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

przedstawiające się pod kształtem nieoznaczonym 1^∞ gdy m zwiększa się nieograniczenie, zdąża jednak do granicy oznaczonéj, którą nazwaliśmy e i wzięliśmy za zasadę logarytmów naturalnych, i t. p.

Rozpatrzmy wyrażenia te po szczególe.

285. Wyrażenia : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Twierdzenie. *Jeżeli dwie funkcje ciągłe jednéj zmiennéj niezależnéj zdążają obiedwie do wartości szczególnéj* 0, *lub zwiększają się obiedwie nieograniczenie, gdy zmienna niezależna zdąża do pewnéj wartości : jeżeli nadto pochodne tych funkcyj są ciągłemi oznaczonemi w granicach w których zmieniamy zmienną niezależną, powiadam, że stosunek pierwszéj funkcji do drugiéj, i stosunek pochodnych tychże funkcyj, zdążają do jednéj i téj saméj granicy oznaczonéj, lub zwiększają się obadwa nieograniczenie.*

1° Niech będą dwie funkcje ciągłe $f(x)$ i $F(x)$ takie, że dla wartości x_0 zmiennéj niezależnéj

$$f(x_0)=0 \qquad F(x_0)=0$$

przypuśćmy nadto że gdy x zdąża do x_0, pochodne $f'(x)$ i $F'(x)$ nie przestają być ciągłemi i oznaczonemi : powiadam, że zachodzi równość stosunków :

$$\text{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)}=\text{gr}\,\frac{f'(x)}{F'(x)} \tag{1}$$

gdy x zdąża do wartości x_0, jeżeli granica ta jest oznaczoną; lub też że obadwa powyższe stosunki zwiększają się nieograniczenie.

W rzeczy saméj, rozwijając $f(x_0+h)$ i $F(x_0+h)$ podług wzoru Taylor'a [**249**] którego warunki [**250**] mają miejsce z założenia, i zatrzymując rozwinięcie na pierwszym wyrazie, otrzymamy

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$$
$$F(x_0+h)=F(x_0)+hF'(x_0+\theta h)$$

a że z założenia

$$f(x_0)=0 \quad F(x_0)=0$$

więc

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}$$

wzór któryśmy udowodnili w powyższych warunkach już dawniéj [**244**], lecz tylko w szczególnym przypadku gdy $F(x_0+h)$ nie zmienia znaku pomiędzy x_0 a x_0+h.

Gdy h zdąża do granicy 0, wyrażenie θh zdąża do granicy zero, bo θ jest ułamkiem mniejszym lub równym jedności, a zatém

$$\text{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)}=\text{gr}\,\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

gdy x zdąża do x_0, to jest gdy h zdąża do zera c.b.d.d.

Jeżeli jeden z tych stosunków zwiększa się bez granic, drugi koniecznie zwiększać się musi nieograniczenie.

Wzór (1) został udowodnionym dla jakiejkolwiek wartości szczególnéj x_0 zmiennéj niezależnéj x. Powiadam że wzór ten ma miejsce nawet gdy $x_0=\infty$ to jest: że jeżeli tak $f(x)$ jak $F(x)$ zdążają do 0 gdy x zwiększa się bez granic, a pochodne tych funkcyj są ciągłe i oznaczone, zawsze

$$\operatorname{gr} \frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname{gr} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

lub też oba powyższe stosunki zwiększają się nieograniczenie.

W rzeczy saméj, załóżmy

$$x = \frac{1}{z}$$

x zdąża do ∞, gdy z zdąża do 0: lecz na zasadzie powyżéj udowodnionego twierdzenia, gdy $f\left(\frac{1}{z}\right)$, $F\left(\frac{1}{z}\right)$ zdążają do zera dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj $z_0 = 0$, to

$$\operatorname{gr} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname{gr} \frac{-\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2} F'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

biorąc pochodnę licznika i mianownika: a zatém

$$\operatorname{gr} \frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname{gr} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname{gr} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname{gr} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

gdy x zdąża do ∞, a $f(x)$, $F(x)$ do zera c. b. d. d.

2^0 Niech będzie w powyższych przypuszczeniach

$$f(x_0) = \infty\ , \qquad F(x_0) = \infty$$

powiadam że w ogólności

$$\operatorname{gr} \frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname{gr} \frac{f'(x)}{F'(x)} \tag{2}$$

gdy x zdąża do wartości x_0.

W rzeczy saméj

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

a że funkcje $\frac{1}{F(x)}$, $\frac{1}{f(x)}$ zdążają do granicy zero, gdy x zdąża do x_0, biorąc stosunek pochodnych licznika i mianownika na zasadzie udowodnionéj pierwszéj części twierdzenia,

$$\text{gr}\,\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \text{gr}\,\frac{\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}}{\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$$

Przypuszczając $F'(x)$ różném od zera, wyrażenie powyższe napisać możemy:

$$\text{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)} = \text{gr}\,\frac{\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2}{\frac{f'(x)}{F'(x)}}$$

gdy x zdąża do x_0.

Jeżeli $\text{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)}$ jest ilością skończoną A różną od zera, mamy

$$A = \text{gr}\,\frac{A^2}{\frac{f'(x)}{F'(x)}}$$

czyli dzieląc przez A i znosząc mianownik:

$$\text{gr}\,\frac{f'(x)}{F'(x)} = A = \text{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)}$$

gdy x zdąża do x_0.

Jeżeli A jest zerem, oznaczając przez C pewną stałę, różną od zera, funkcja

$$\frac{f(x)}{F(x)}+C \quad \text{czyli} \quad \frac{f(x)+CF(x)}{F'(x)}$$

zdążać będzie do granicy C gdy x zdąża do x_0, a że C nie jest zerem, więc na zasadzie tego cośmy dopiero co udowodnili

$$\text{gr}\,\frac{f(x)+CF(x)}{F(x)}=\text{gr}\,\frac{f'(x)+CF'(x)}{F'(x)}$$

a odejmując C z jednéj i drugiéj strony tego równania

$$\text{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)}=\text{gr}\,\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

gdy x zdąża do x_0.

Jeżeli nakoniec stosunek $\frac{f(x)}{F(x)}$ zwiększa się nieograniczenie gdy x zdąża do x_0, stosunek odwrotny $\frac{F(x)}{f(x)}$ zdąża do zera: na zasadzie tego cośmy udowodnili $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ będzie zdążać również do zera, a stosunek odwrotny $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ zwiększać się będzie nieograniczenie.

Twierdzenie zostało więc udowodnioném w całéj ogólności.

286. Wniosek. *Jeżeli dwie funkcje ciągłe,* f(x) *i* F(x) *jednéj zmiennéj niezależnéj stają się obie równemi zero lub zwiększają się obie nieograniczenie, gdy* x *zbliża się nieograniczenie* *do wartości szczególnéj* x_0; *jeżeli nadto* n *pierwsze pochodne tych funkcyj pozostają ciągłemi oznaczonemi, gdy* x *zdąża do* x_0, *a* $n-1$ *pierwsze pochodne są odpowiednio zerami lub nieskończonościami dla* $x = x_0$: *stosunek pierwszéj funkcji do drugiéj* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *i stosunek* n*tych ich pochodnych* $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$ *zdążają do jednéj i téj saméj granicy oznaczonéj, lub zwiększają się oba nieograniczenie, gdy* x *zdąża do* x_0.

W rzeczy saméj, dowodzenie że

$$\mathrm{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)} = \mathrm{gr}\,\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

gdy x zdąża do x_0, możemy zastosować do stosunku pochodnych, jeżeli jedna i druga pochodna stają się zerami lub nieskończonościami: wtedy

$$\mathrm{gr}\,\frac{f'(x)}{F'(x)} = \mathrm{gr}\,\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{gr}\,\frac{f^{(n-1)}(x)}{F^{(n-1)}(x)} = \mathrm{gr}\,\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$$

gdy x zdąża do x_0: a zatém

$$\mathrm{gr}\,\frac{f(x)}{F(x)} = \mathrm{gr}\,\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$$

gdy x zdąża do x_0 c. b. d. d.

287. Przykład I. Funkcje

$$\frac{\mathrm{wst}\,x}{x}\,,\quad \frac{\mathrm{st}\,x}{x}$$

dla $x=0$ przedstawiają się pod postacią $\frac{0}{0}$. Twierdzenie powyższe [**285**] daje nam

$$\text{gr}\ \frac{\text{wst}\, x}{x} = \text{gr}\ \frac{\text{dos}\, x}{1} = 1$$

$$\text{gr}\ \frac{\text{st}\, x}{x} = \text{gr}\ \frac{1}{\text{dos}^2 x} = 1$$

dla $x = 0$, co dowodzimy w inny sposób w trygonometrji.

II. Niech będzie wyrażenie

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{wst}\, x}$$

dla $x = 0$, licznik i mianownik stają się zerami. Biorąc stosunek pochodnych licznika i mianownika, otrzymamy

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \text{dos}\, x}$$

stosunek równy w granicy danemu na zasadzie Twierdzenia [**285**], lecz którego licznik i mianownik stają się zerem dla $x = 0$. Stosując Wniosek [**286**], otrzymamy stosunek drugich pochodnych,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\text{wst}\, x}$$

którego licznik i mianownik są jeszcze zerami dla $x = 0$. Lecz stosunek trzecich pochodnych

$$\frac{e^x + e^{-x}}{\text{dos}\, x}$$

równym jest 2 dla $x = 0$, a więc

$$\text{gr}\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{wst}\, x} = \text{gr}\ \frac{e^x + e^{-x}}{\text{dos}\, x} = 2$$

gdy x zbliża się do 0.

III. Wyrażenie

$$\frac{x^x - x}{x - 1 - 1.x}$$

staje się $\frac{0}{0}$ dla $x = 1$. Lecz mamy [286]

$$\mathrm{gr}\,\frac{x^x - x}{x - 1 - 1.x} = \mathrm{gr}\,\frac{x^x(1 + 1.x) - 1}{1 - \frac{1}{x}} = \mathrm{gr}\,\frac{x^x(1+1.x)^2 + x^{x-1}}{\frac{1}{x^2}} = 2$$

gdy x zbliża się do 1.

IV. Wyrażenie

$$\frac{a^x}{x^n}.$$

gdzie a jest stałą dodatną, a n liczbą całkowitą dodatną, staje się $\frac{\infty}{\infty}$ a zatem nieoznaczoném dla $x = \infty$: lecz [286]

$$\mathrm{gr}\,\frac{a^x}{x^n} = \mathrm{gr}\,\frac{1.a}{nx^{n-1}}\,a^x = \frac{[1.a]^2}{n(n-1)x^{n-2}}\,a^x = \ldots = \frac{[1.a]^n}{1.2\ldots n}\,a^x = \infty$$

wyrażenie to zwiększa się do nieskończoności, gdy x zwiększa się nieograniczenie.

V. Wyrażenie

$$\frac{1.x}{\operatorname{dot} x}$$

dla $x = 0$ staje się $-\frac{\infty}{\infty}$ nieoznaczoném.

Biorąc stosunek pochodnych

$$\mathrm{gr}\,\frac{1.x}{\operatorname{dot} x} = \mathrm{gr}\,\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\mathrm{wst}^2 x}} = -\,\mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{wst}^2\, x}{x}$$

lecz stosunek $\frac{\mathrm{wst}^2\, x}{x}$ dla $x = 0$, staje się znów niewyznaczonym $\frac{0}{0}$;

stosując twierdzenie [285]

$$\mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{wst}^2 x}{x} = \mathrm{gr}\,\frac{2\,\mathrm{wst}\, x\, \mathrm{dos}\, x}{1} = \mathrm{gr}\,\mathrm{wst}\, 2x = 0$$

gdy x zdąża do 0; a zatém

$$\mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{l}.x}{\mathrm{dot}\, x} = -\,\mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{wst}^2 x}{x} = \mathrm{gr}\,\mathrm{wst}\, 2x = 0$$

gdy x zdąża do zera.

288. Uwaga i. Twierdzenie [285] zastrzega żeby pochodne funkcyj których stosunek jest nieoznaczonym, były oznaczonemi w granicy zmienności funkcji. Może się zdarzyć wypadek, że funkcje które są oznaczonemi dla pewnéj wartości zmiennéj, mają pochodne nieoznaczone; dla téj wartości zmiennéj, twierdzenie [285] się nie stosuje. Naprzykład, dwie funkcje

$$x + \mathrm{dos}\, x, \qquad x + \mathrm{wst}\, x$$

dla $x = \infty$, stają się obie nieskończenie wielkiemi: ich pochodne zaś

$$1 - \mathrm{wst}\, x. \qquad 1 + \mathrm{dos}\, x$$

nie zwiększają się nieograniczenie, lecz są zupełnie nieoznaczonemi dla $x = \infty$. Wniosek że stosunek

$$\frac{x + \mathrm{dos}\, x}{x + \mathrm{wst}\, x}$$

jest nieoznaczonym dla $x = \infty$, coby wynikało z zastosowania twierdzenia [285] jest nieprawdziwym, bo twierdzenie nie ma miejsca w tym przypadku : jakoż

$$\frac{x+\operatorname{dos} x}{x+\operatorname{wst} x}=\frac{1+\frac{\operatorname{dos} x}{x}}{1+\frac{\operatorname{wst} x}{x}}$$

a że

$$\operatorname{gr}\frac{\operatorname{dos} x}{x}=0,\quad \operatorname{gr}\frac{\operatorname{wst} x}{x}=0 \quad \text{dla}\ x=\infty$$

więc

$$\operatorname{gr}\frac{x+\operatorname{dos} x}{x+\operatorname{wst} x}=1$$

granica stosunku funkcyj $x+\operatorname{dos} x$ i $x+\operatorname{wst} x$, jest zatém oznaczoną i równą jedności dla $x=\infty$, jakkolwiek granica stosunku ich pochodnych $1-\operatorname{wst} x$ i $1+\operatorname{dos} x$ pozostaje nieoznaczoną.

289. Uwaga II. Metoda dana przez Twierdzenie [**225**] wyznaczenia stosunków przedstawiających się pod postacią nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ jest częstokroć niewystarczającą, bo stosunek pochodnych może sam się przedstawiać ciągle pod tąż samą lub inną postacią nieoznaczoną, lub też, jakeśmy widzieli w poprzedzającéj uwadze, pochodne mogą być same nieoznaczonemi. W ogólności, oznaczenie powyższych stosunków otrzymaném być może z łatwością, jeżeli nadawszy wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj przyrostek nieskończenie mały, możemy rozwinąć obie funkcje podług potęg zwiększających się całkowitych lub ułamkowych, dodatnych lub odjemnych tego przyrostku. Podamy poniżéj sposoby rozwijania funkcji podług potęg ułamkowych lub odjemnych zmiennéj, lub przyrostku zmiennéj : wzory Taylor'a i Maclaurin'a, dają nam rozwinięcia podług potęg zwiększających się całkowitych i dodatnych.

Niech będzie stosunek dwóch funkcyj,

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

z których każda staje się zerem lub nieskończonością dla wartości szczególiéj x_0 zmiennéj niezależnéj. Przypuśćmy że znamy rozwinięcie funkcyj

$$f(x_0+h) \quad \text{i} \quad F(x_0+h)$$

podług potęg zwiększających się dodatnych lub odjemnych, całkowitych lub ułamkowych h; przypuśćmy nadto, że pierwszy wyraz Ah^n który nie jest zerem w rozwinięciu funkcji $f(x_0+h)$ zawiera h w potędze $n$téj, i że w rozwinięciu funkcji $F(x_0+h)$ pierwszym który nie jest zerem jest wyraz Bh^m zawierający h w potędze $m$téj : następne wyrazy zawierać będą potęgi większe od n lub m : wyłączając więc h^n, h^m za nawias, napisać możemy

$$f(x_0+h)=h^n(A+\varepsilon)$$
$$F(x_0+h)=h^m(B+\eta)$$

gdzie A i B nie zawierają h, lecz ε i η odnoszące się do wyrazów zawierających h w potęgach wyższych od n i m, zawierają jeszcze potęgi h. Gdy więc h zdąża do 0 to jest x do x_0, ε i η stają się nieskończenie małemi względem A i B. Lecz stosunek

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=h^{n-m}\frac{A+\varepsilon}{B+\eta}$$

a stosownie do tego, czy n jest równém, większém lub mniejszém od m, w granicy będziemy mieli

$$1^0 \quad \text{jeżeli } n-m=0, \quad \text{gr}\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\text{gr}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{B}$$

$$2^0 \quad \text{jeżeli } n-m>0, \quad \text{gr}\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\text{gr}\frac{f(x)}{F(x)}=0$$

$$3^0 \quad \text{jeżeli } n-m<0, \quad \text{gr}\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\text{gr}\frac{f(x)}{F(x)}=\infty$$

gdy x zdąża do x_0, to jest gdy h zdąża do zera, a zatém gdy potęgi dodatne h zdążają także do zera, a potęgi odjemne zwiększają się nieograniczenie.

W pierwszym razie, jeżeli $n=m$, stosunek szukany jest oznaczonym i równym stosunkowi pierwszych nie stających się zerami spółczynników h w rozwinięciu. W drugim razie stosunek szukany jest zerem, w trzecim razie zwiększa się nieograniczenie.

Przykład I. Niech będzie wyrażenie

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}+\sqrt{x-x_0}}{\sqrt{x^2-x_0^2}}$$

Funkcja w liczniku i funkcja w mianowniku staje się zeremi dla

$$x=x_0.$$

Pochodne wszelkich rzędów tak licznika jak mianownika, stają się nieskończenie wielkiemi dla $x=x_0$, metoda więc zawarta w twierdzeniu [285], nie może tu być zastosowaną.

Załóżmy

$$x=x_0+h$$

gdzie h weźniemy za nieskończenie małą główną [119], to jest pierwszego rzędu. Wyrażenie

$$\sqrt{x-x_0}=\sqrt{h}=h^{\frac{1}{2}}$$

będzie nieskończenie małém rzędu $\frac{1}{2}$ [**119**]. Wyrażenie

$$\sqrt{x}-\sqrt{x_0}=\sqrt{x_0}\left[\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1\right]$$

jest nieskończenie małém tego samego rzędu co h bo rozwijając $\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}=\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ podług wzoru Newtona [**270**] jedność się zniesie, następny wyraz będzie pomnożonym przez $\frac{h}{x_0}$, trzeci przez $\frac{h^2}{x_0^2}$ i t. d. Funkcja więc

$$f(x_0+h)=\sqrt{x_0}\left[\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1\right]+\sqrt{h}$$

jest summą dwóch nieskończenie małych, z których pierwsza, jako nieskończenie mała 1go rzędu, jest nieskończenie małą względem drugiéj $\sqrt{h}$ nieskończenie małéj rzędu $\frac{1}{2}$ [**119**] : a więc

$$\operatorname{gr}\frac{f(x_0+h)}{\sqrt{h}}=1$$

czyli

$$f(x)=f(x_0+h)=\sqrt{h}\ (1+\varepsilon)$$

gdzie ε zdąża do zera wraz z h.

Mianownik można wyrazić pod postacią

$$\sqrt{x^2-x_0^2}=\sqrt{x-x_0}\sqrt{x+x_0}=\sqrt{h}\ \sqrt{2x_0+h}$$

czyli

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x_0+h)=\sqrt{h}\left(\sqrt{2x_0}+\eta\right)$$

gdzie η zdąża do 0 wraz z h : a więc

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=\frac{f(x_0+h)}{\mathrm{F}(x_0+h)}=\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2x_0}+\eta}$$

a zatém

$$\operatorname{gr} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}$$

gdy x zdąża do x_0.

Przykład II. Niech będzie wyrażenie

$$\frac{x - \frac{2}{3}\operatorname{wst} x - \frac{1}{3}\operatorname{st} x}{x^5}$$

dla $x = 0$, licznik i mianownik stają się zerami. Pomnóżmy licznik i mianownik przez $3 \operatorname{dos} x$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{3x \operatorname{dos} x - \operatorname{wst} x - \operatorname{wst} 2x}{3x^5 \operatorname{dos} x}$$

Podstawiając za $\operatorname{dos} x$, $\operatorname{wst} x$, $\operatorname{wst} 2x$ ich rozwinięcia na szeregi [265] otrzymamy

$$f(x) = 3x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)$$
$$- \left(2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32\,x^5}{120} - \dots\right)$$
$$F(x) = 3x^5\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)$$

czyli

$$f(x) = 3x\left(\frac{x^4}{24} - \dots\right) - \left(\frac{x^5}{120} - \dots\right) - \left(\frac{32\,x^5}{120} - \dots\right)$$

następne wyrazy zawierają potęgi x wyższe nad 5 : jeżeli więc x jest nieskończenie małém, napisać możemy

$$f(x) = x^5\left(-\frac{3}{20} + \varepsilon\right)$$

oznaczając przez ε nieskończenie małą, zdążającą do zera wraz z x :

$$F(x) = x^5 (3 + \eta)$$

η zdąża do zera wraz z x. Stosunek więc dany

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{-\frac{3}{20} + \varepsilon}{3 + \eta}$$

zdąża do granicy $-\frac{1}{20}$ gdy x zdąża do zera : a więc

$$\text{gr} \frac{x - \frac{2}{3} \,\text{wst}\, x - \frac{1}{3} \,\text{st}\, x}{x^5} = -\frac{1}{20}$$

gdy x zdąża do 0.

290. Wyrażenie 0.∞. Niech będzie iloczyn dwóch funkcyj

$$f(x).\ F(x)$$

w którym dla $x = x_0$

$$f(x_0) = 0 \quad , \quad F(x_0) = \infty$$

Możemy napisać

$$f(x).\ F(x) = \frac{f(x)}{[F(x)]^{-1}}$$

ten ostatni ułamek staje się $\frac{0}{0}$ dla $x = x_0$, a zatém zadanie sprowadzoném jest do poprzedzającego [**285**].

Przykład. Niech będzie wyrażenie

$$(x_0 - x) \,\text{st}\, \frac{\pi x}{2 x_0}$$

które dla $x=x_0$ przedstawia się pod postacią $0.\infty$. Mamy

$$(x_0-x)\,\mathrm{st}\frac{\pi x}{2x_0}=\frac{x_0-x}{\mathrm{dot}\frac{\pi x}{2x_0}}$$

a stosując do tego ostatniego ułamku, którego licznik i mianownik staje się zerem dla $x=x_0$, Twierdzenie [285] otrzymamy, biorąc stosunek pochodnych,

$$\frac{-1}{-\frac{\pi}{2x_0}\frac{1}{\mathrm{wst}^2\frac{\pi x}{2x_0}}}=\frac{2x_0}{\pi}\qquad \text{gdy}\quad x=x_0$$

a zatém

$$\mathrm{gr}\,(x_0-x)\,\mathrm{st}\frac{\pi x}{2x_0}=\frac{2x_0}{\pi}$$

gdy $x=x_0$.

291. Wyrażenie 1^∞. Niech będzie wyrażenie

$$\mathrm{W}=[\mathrm{F}\,(x)]^{f(x)}$$

w którém dla $x=x_0$

$$\mathrm{F}\,(x_0)=1\qquad f(x_0)=\infty.$$

Biorąc logarytm obu stron, (ograniczając się na teraz na przypuszczeniu że $\mathrm{F}\,(x)$ jest dodatném w blizkości $x=x_0$) wyrażenie to sprowadzimy do poprzednio uważanego; jakoż

$$\mathrm{l.W}=f(x)\,\mathrm{l.}\,[\mathrm{F}\,(x)]$$

a wiemy że dla $x=x_0$

$$f(x_0)=\infty\qquad \mathrm{l}\,[\mathrm{F}\,(x_0)]=\mathrm{l.}\,1=0$$

otrzymamy więc l.W a zatém i W szukając granicy wyrażenia $0.\infty$ [290].

P R Z Y K Ł A D. *Wyrażenie funkcji wykładniczéj* e^x *i logarytmowéj* l.x *jako granic funkcyj algebraicznych.*

Niech będzie wyrażenie

$$W=\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

gdzie x jest ilością oznaczoną, a m zmienną, mogącą się zwiększać nieograniczenie. Wyrażenie to przedstawia się dla $m=\infty$ pod postacią 1^∞. Biorąc logarytm obu stron otrzymamy

$$\text{l.W}=m\,\text{l.}\left(1+\frac{x}{m}\right)=\frac{\text{l.}\left(1+\frac{x}{m}\right)}{\frac{1}{m}}$$

stosując do tego ostatniego ułamku, którego licznik i mianownik staje się zerem dla $m=\infty$, Twierdzenie [285], otrzymamy biorąc granicę stosunku pochodnych wziętych uważając m za zmienną niezależną, x za stałą

$$\text{gr l.W}=\text{gr}\frac{-\frac{x}{m^2}}{\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(\frac{-1}{m^2}\right)}=\text{gr}\frac{x}{1+\frac{x}{m}}=x$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie : a więc

$$\text{gr W}=e^x$$

to jest

$$e^x=\text{gr}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie, a x jest jakąkolwiek oznaczoną ilością. Widzimy ztąd że funkcja wykładnicza e^x jest granicą wyrażenia które pozostaje ciągle algebraiczném, a nawet całkowitém, jeżeli m zwiększa się nieograniczenie, przechodząc przez same wartości całkowite.

Wzór powyższy możemy wyrazić w następujący sposób

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m + \varepsilon$$

oznaczając przez ε ilość, która zdąża do zera wraz z ułamkiem $\frac{1}{m}$. Ztąd otrzymamy

$$x = m\left(\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} - 1\right)$$

a że według wzoru Newtona [**270**]

$$\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = \sqrt[m]{e^x}\,(1 - \varepsilon e^{-x})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{e^x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}e^{-x} + \ldots\right)$$

więc mamy

$$m\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = m\sqrt[m]{e^x} + \eta$$

oznaczając przez η ilość nieskończenie małą, i zdążającą do zera wraz z ε i $\frac{1}{m}$. Podstawiając wartość tę w wyrażenie na x, otrzymamy :

$$x = \left(\sqrt[m]{e^x} - 1\right) + \eta$$

a zakładając

$$e^x = z \qquad x = 1.\, z$$

znajdziemy

$$1.\, z = m\left(\sqrt[m]{z} - 1\right) + \eta$$

czyli

$$\mathrm{l}.\, z = \mathrm{gr}\, m\left(\sqrt[m]{z} - 1\right)$$

gdy m zwiększa się nieograniczenie. Logarytm jest więc także granicą funkcji algebraicznéj liczby, czyli zmienéj z.

292. Wyrażenia ∞^0, 0^0. Niech będą dwie funkcje u i v zmiennéj niezależnéj x i wyrażenie

$$W = u^v$$

w którém dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj $x = x_0$

$$u_0 = \infty, \quad v_0 = 0$$

albo

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0$$

biorąc logarytm W (przypuszczając tymczasem u i W dodatnemi w blizkości $x = x_0$)

$$\mathrm{l}.\, W = v .\, \mathrm{l}.\, u$$

sprowadzimy wyrażenie tego logarytmu do jednéj z poprzednio uważanych postaci.

Wyrażenie

$$W = u^v \quad 0^{\infty}$$

gdy $u = 0$, $v = \infty$ dąży zawsze do granicy zero: w rzeczy saméj

$$u^v = e^{v.\,\mathrm{l}.\,u}$$

a że dla $u = 0$ mamy $\mathrm{l}.\, u = -\infty$, więc

$$\mathrm{gr}\, u^v = 0^\infty = e^{-\infty^2} = \frac{1}{e^{\infty^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Przykład. Wyrażenie

$$W = x^x$$

dla $x = 0$ przedstawia się pod postacią 0^0: lecz

$$\mathrm{l.W} = x\,\mathrm{l}.x = \frac{\mathrm{l}.x}{x^{-1}}$$

a zatém

$$\mathrm{gr.l.W} = \mathrm{gr}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\,\mathrm{gr}\,x = 0$$

gdy x zdąża do zero; czyli

$$\mathrm{gr}\,W = e^0 = 1$$
$$\mathrm{gr}\,x^x = 1$$

gdy x zdąża do 0.

293. Wyrażenia nieoznaczone wielu zmiennych niezależnych. Najprostszym sposobem wyznaczenia tego rodzaju wyrażeń, jest rozwinięcie obu funkcji których stosunek jest nieoznaczonym, (przypuszczając że wyrażenie zostało sprowadzoném do stosunku $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ w jeden z powyżéj podanych sposobów) podług wzoru Taylor'a [**277**] dla wielu zmiennych, podobnie jakeśmy to powyżéj dla funkcji jednéj zmiennéj podali.

Tak naprzykład, uważając funkcję dwóch zmiennych niezależnych x i y (w przypadku wielu zmiennych sposób jest ten sam, przy nieco dłuższych wzorach), niech będą funkcje

$$f(x, y) \quad \text{i} \quad F(x, y)$$

które stają się równemi zeru dla wartości szczególnych x_0, y_0, zmiennych niezależnych :

$$(1) \qquad f(x_0, y_0) = 0, \quad F(x_0, y_0) = 0$$

mamy [**277**], nadając wartościom x_0, y_0 przyrostki nieskończenie małe h, k :

$$(2)\quad \frac{f(x_0+h,\,y_0+k)}{F(x_0+h,\,y_0+k)}=\frac{f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k}{F(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 k}$$

$$\frac{+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \frac{h^2}{1.2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 hk+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \frac{k^2}{1.2}+\ldots}{+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 \frac{h^2}{1.2}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_0 hk+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 \frac{k^2}{1.2}+\ldots}$$

W wyrażeniu tém, pierwszy wyraz w liczniku i mianowniku staje się zerem na zasadzie (1), jeżeli następnie h i k dążą do zera, stosunek powyższy nie wyznaczy nam żadnéj wartości, jeżeli nie znamy stosunku $\frac{h}{k}$ któren z założenia ma być jakimkolwiek. Załóżmy

$$\frac{k}{h}=\alpha$$

gdzie α musi być dowolném, jeżeli x i y, a zatém h i k są niezależnemi. Dzieląc licznik i mianownik po prawéj stronie wyrażenia (2) przez $h=\frac{k}{\alpha}$ po zniesieniu wyrazów $f(x_0, y_0)$, $F(x_0, y_0)$ równych zeru z założenia, otrzymamy w granicy gdy k i h dążą do zera

$$(3)\quad \frac{f(x_0,y_0)}{F(x_0,y_0)}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}$$

Wyrażenie to może być wyznaczoném tylko w przypadku gdy $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial x}$ są oba zerami, lub gdy $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ są zerami dla $x=x_0$, $y=y_0$, w przeciwnym razie jest nieoznaczoném.

Jeżeli wszystkie cztery pochodne częściowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ są zerami dla $x=x_0$, $y=y_0$, udać się należy do dalszych wyrazów rozwinięcia (2), to jest do pochodnych częściowych wyższych rzędów :

$$\frac{f(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)} = \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \alpha^2}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \alpha + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right)_0 \alpha^2} \tag{4}$$

i rozumować jak powyżéj. W ogólności, jeżeli wszystkie $n-1$ pochodne częściowe obu funkcyj są równemi zeru, dla $x=x_0$, $y=y_0$, będziemy mieli

$$\frac{f(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)} = \frac{\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0 + n\alpha\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_0 + \dots}{\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_0 + n\alpha\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_0 + \dots} \tag{5}$$

$$\frac{+ n\alpha^{n-1}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}\right)_0 + \alpha^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_0}{+ n\alpha^{n-1}\left(\frac{\partial^n F}{\partial x \partial y^{n-1}}\right)_0 + \alpha^n \left(\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right)_0}$$

gdzie α, jest zawsze dowolną ilością, stosunek więc może być wyznaczonym tylko w bardzo szczególnych przypadkach, naprzykład gdy w liczniku i mianowniku pozostaną pojedyncze wyrazy, a pozostałe będą zerami.

Przykład I. Wyrażenie

$$\frac{1.x - 1.y}{x+2y-2}$$

staje się $\frac{0}{0}$ dla $x=1$, $y=1$. Mamy tu

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y},\quad \frac{\partial F}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2,$$

a wyrażenie dane staje się na zasadzie wzoru (3)

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha}$$

może więc mieć wszelką możebną wartość dla α dowolnego, jest więc niewyznaczoném, gdy x i y są zupełnie niezależnemi, dla wartości $x=1$, $y=1$ tych zmiennych niezależnych.

Przykład II. Wyrażenie

$$\frac{\operatorname{wst} x-\operatorname{wst} y}{x-y}$$

staje się $\frac{0}{0}$, dla $x=y$. Mamy tu

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\operatorname{dos} x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\operatorname{dos} y,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-1;$$

a więc na zasadzie (3), wyrażenie powyższe staje się dla $x=y$

$$\frac{\operatorname{dos} x-\alpha \operatorname{dos} x}{1-\alpha} \quad \text{czyli} \quad \operatorname{dos} x$$

i jest tu wyznaczoném, równém dostawie x.

Przykład III. Wyrażenie

$$\frac{\operatorname{dos}^2(x+y)-\operatorname{dos}^2 z}{(x+y)^2-z^2}$$

gdzie x, y, z są w ogóle niezależnemi staje się $\frac{0}{0}$ dla $x=y$,

$z=2x$. Mamy tu

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-2\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x\,,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=2.2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2.2x,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-2.2x$$

a więc na zasadzie wyrażenia podobnego $(3)^{\text{mu}}$, wyrażenie powyższe staje się

$$\frac{-\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x-\alpha\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x+\beta\,\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x}{2x+2\alpha x-2\beta x}$$

gdzie α, β oznaczają stosunki dowolne przyrostków zmiennych y i z do przyrostku zmiennéj x. Lecz ostatnie wyrażenie równa się

$$-\frac{\text{dos}\,2x\,\text{wst}\,2x}{2x}\cdot\frac{1+\alpha-\beta}{1+\alpha-\beta}$$

a więc, wyrażenie dane staje się dla $x=y$, $z=2x$ wyznaczoném, równém:

$$-\frac{\text{wst}\,4x}{4x}.$$

Ćwiczenia.

1. $\dfrac{1-x^n}{1-x}=n$ dla $x=1$

2. $\dfrac{1-\text{dos}\,x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ dla $x=0$

3. $\dfrac{x^x-x}{1-x+\text{l}.x}=-2$ dla $x=1$

4. $x^n\,\text{l}.x=0$ dla $x=0$ jeżli $n>0$; zaś

   $=-\infty$ dla $x=0$ jeżeli $n<0$.

5. $\dfrac{1}{\text{l}.x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ dla $x=1$

6. $x^{x^n} = 1$ dla $x = 0$ jeżeli $n > 0$; zaś

$= 0$ dla $x = 0$ jeżeli $n < 0$.

7. $$\frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3} = \frac{1}{6} \quad \text{dla} \quad x = 0$$

8. $$\frac{2\,\mathrm{wst}^2 x + \mathrm{wst}\, x - 1}{2\,\mathrm{wst}^2 x - 3\,\mathrm{wst} x + 1} = -3 \quad \text{dla} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

9. $$\frac{\sqrt[5]{x_0^2 - x^2} + \sqrt[5]{(x_0 - x)^2}}{\sqrt[5]{x_0 - x} - \sqrt[5]{x_0^3 - x^3}} = \frac{\sqrt[5]{2x_0}}{1 - \sqrt[5]{3x_0^2}} \quad \text{dla} \quad x = x_0$$

10. Jeżeli $y^4 - 96\,a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$

to $\dfrac{dy}{dx} = \pm 1$ dla $x = 0$.

ROZDZIAŁ XVII

NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI

Określenia. — Warunki analityczne największości i najmniejszości. — Przykłady: — Iloczyn dwóch czynników, których summa jest stałą. — Najmniejszości funkcji x^x. — Trójkąt utworzony przez dwa boki dane. — Najmniejszość siły działającéj na drąg ciężki. — Zadanie Fermat'a. — Największość i najmniejszość odległości punktu od krzywéj. — Najmniejszości i największości funkcyj niewyraźnych. — Największości i najmniejszości funkcyj wielu zmiennych niezależnych, funkcyj zmiennych czyniących zadosyć pewnym warunkom — Najmniejszości i największości względne. — Przykłady i zastosowania.—Odległość dwóch krzywych. — Odległość punktu od powierzchni. — Cwiczenia.

Największości i najmniejszości funkcyj jednéj zmiennéj niezależnéj.

294. Określenie największości i najmniéjszości. Jeżeli pewna funkcja, zwiększająca się wraz ze zwiększającemi się wartościami zmiennéj niezależnéj, zacząwszy od pewnéj szczególnéj wartości, przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać, wartość tę szczególną funkcji nazywamy éj *największością*.

Jeżeli funkcja zmniejszająca się gdy zwiększamy zmiennę niezależną, zacząwszy od pewnéj szczególnéj wartości przestaje się zmniejszać a zaczyna zwiększać, wartość tę szczególną funkcji, nazywamy jéj *najmniejszością*.

Jeżeli zmniejszamy zmiennę niezależną a funkcja się zwiększa, największością jéj będzie wartość szczególna, od któréj funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać; najmniejszością, wartość szczególna dla któréj funkcja zmniejszająca się wraz ze zmniejszającemi się wartościami zmiennéj niezależnéj, przestaje się zmniéjszać, a zaczyna zwiększać.

Niech będzie $f(x)$ funkcja zmiennéj niezależnéj x: nadając pewnéj wartości szczególnéj x_0 zmiennéj niezależnéj przyrostek h, jeżeli możemy naznaczyć ilość ε (która może być dowolnie małą) taką, że zmieniając h pomiędzy $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$, będzie niezmiennie zachodzić nierówność

$$f(x_0+h) < f(x_0)$$

(lub równość dla $h=0$), wartość szczególna $f(x_0)$ funkcji $f(x)$ będzie *największością* : bo zwiększając x, przypuszczając naprzód h odjemném i zmieniając je od $-\varepsilon$ do 0, funkcja zwiększa się stając się $f(x_0)$; zmieniając daléj h od 0 do $+\varepsilon$, funkcja zmniejsza się przechodząc z $f(x_0)$ do $f(x_0+h)$; więc dla $x=x_0$ funkcja $f(x)$ stając się $f(x_0)$ przestaje się zwiększać, a zaczyna zmniejszać.

W podobny sposób, jeżeli zmieniając w powyższych warunkach h pomiędzy $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$, gdzie ε może być dowolnie małą ilością, mamy niezmiennie nierówność

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

(lub równość dla $h=0$), wartość szczególna $f(x_0)$ jest *najmniejszością* funkcji $f(x)$.

Aby więc wartość szczególna $f(x_0)$ była największością, lub najmniejszością, trzeba żeby różnica

$$f(x_0+h) - f(x_0)$$

była większą lub mniejszą od zera niezależnie od znaku h, to jest, nie zmieniała znaku, zmieniając znak przyrostku h.

Uwaga. Nie należy wnosić żeby *największość* miała być bezwzględnie największą, a najmniejszość bezwzględnie *najmniejszą* ze wszystkich wartości funkcji : ta największość lub najmniejszość tyczy się tylko wartości funkcyj sąsiednich, nieskończenie blizkich. Funkcja może mieć zresztą kilka największości, lub kilka najmniejszości : mogą nawet zachodzić największości mniejsze od najmniejszości i odwrotnie. Naprzykład, weźmy pod uwagę funkcję przedsta-

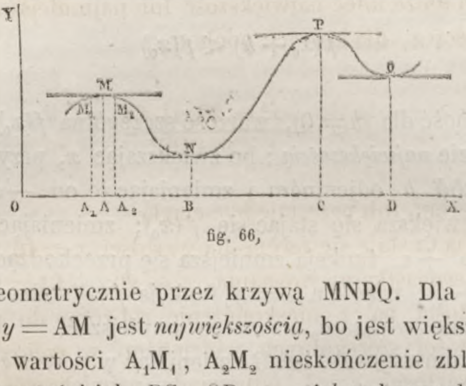


fig. 66,

wioną geometrycznie przez krzywą MNPQ. Dla $x = OA$ funkcja $y = AM$ jest *największością*, bo jest większą od sąsiednich wartości A_1M_1, A_2M_2 nieskończenie zbliżonych, choć są wartości jak PC, QD... *większe* bezwzględnie od AM. Podobnież PC jest także największością, a NB, QD najmniejszościami: widzimy tu że $QD > AM$ choć QD jest najmniejszością, a AM największością.

295. Warunki analityczne największości lub najmniejszości. Wiemy, że jeżeli funkcja się zwiększa, pochodna funkcji jest dodatną, jeżeli funkcja się zmniejsza, pochodna ta jest odjemną [**144**] : jeżeli zatem funkcja przestaje się zwiększać a zaczyna zmniejszać, lub przeciwnie, pochodna zmienia znak stając się z dodatnéj odjemną, lub przeciwnie; co może mieć miejsce tylko, jeżeli pochodna przechodzi przez wartość zero [**146**] lub przestaje być ciągłą.

Aby więc wartość szczególna funkcji mogła być największością lub najmniejszością, warunkiem koniecznym jest, żeby dla wartości odpowiedniéj zmiennéj niezależnéj, pochodna funkcji stała się zerem, lub przestała być ciągłą.

Niech będzie naprzykład funkcja

$$f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$$

funkcja ta może mieć największość lub najmniejszość tylko dla wartości x, dla których pochodna

$$f'(x)=\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}$$

staje się zerem, lub przestaje być ciągłą.

Pochodna ta staje się zerem dla wartości $x=16$, $x=4$ które są pierwiastkami równania $x^2-20x+64=0$: nadając wartości na x nieskończenie zbliżone do powyższych wartości szczególnych, widzieliśmy w rzeczy saméj [**24**], że wartości $x=4$ odpowiada największość, wartości $x=16$, najmniejszość funkcji. Pochodna przestaje być ciągłą, stając się nieskończoną dla $x-10=0$: lecz dla $x=10$, sama funkcja staje się nieskończonością.

Weźmy jeszcze pod uwagę funkcję

$$f(x)=(x-\ )^{\frac{2}{3}}+b$$

Pochodna

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-a}}$$

nie staje się zerem, chyba dla $x=\infty$: lecz przestaje być ciągłą dla $x=a$, stając się nieskończoną. Widzimy od razu że dla $x=a$, funkcja dana przechodzi przez najmniejszość, bo pierwszy jéj wyraz staje się zerem dla $x=a$, a jest dodatnym dla wartości x nieskończenie zbliżonych, dodatnych lub odjemnych.

Funkcja przedstawiona geometrycznie za pomocą spółrzędnych prostolinijnych, ma swoją największość lub najmniejszość w punktach takich jak M lub N, w których styczna

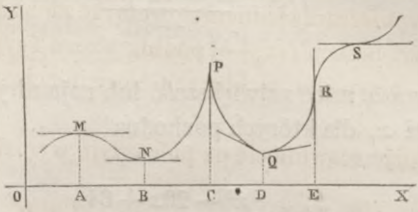


fig. 67,

jest równoległą do osi odciętych, to jest pochodna równa zeru [**146**] : bo rzędne stycznéj téj, równe rzędnéj punktu styczności, są wszystkie większemi lub wszystkie mniejszemi od rzędnych punktów sąsiednich. Punkt P w którym styczna jest prostopadłą do osi odciętych, to jest pochodna równa nieskończoności [**147**], może również odpowiadać największości lub najmniejszości, jak również punkt Q, w którym styczna tworzy kąt skończony ze styczną punktu nieskończenie zbliżonego, to jest w którym pochodna przechodzi z jednéj wartości w drugą nie przechodząc przez wartości pośrednie. Lecz w punkcie R jakkolwiek styczna jest prostopadła do osi odciętych, ani w punkcie S w którym styczna jest równoległą do téj osi, nie zachodzi ani największość ani najmniejszość rzędnéj, bo pochodna nie zmienia znaku przed i po za temi punktami, które są punktami *przegięcia* [**147**].

296. Niech będzie funkcja $f(x)$ i x_0 wartość szczególna zmiennéj niezależnéj, dla któréj funkcja staje się największością. Nadając wartości x_0 przyrostek h, możemy wziąść przyrostek ten dość małym, aby rozwijając funkcję $f(x_0+h)$ podług wzoru Taylor'a, i zatrzymując rozwinięcie na którymkolwiek wyrazie różnym od zera, wyraz ten był większym od reszty [**255**]. Przypuszczamy tu, że tak funkcja dana jak jéj pochodne, pozostają ciągłemi skończonemi, gdy x zmienia się w blizkości wartości x_0 : przypadki nieciągłości muszą być uważane w szczególności w każdém zadaniu; przypuszczamy jedném słowem, że zachodzą warunki rozwijalności funkcji $f(x_0+h)$ podług wzoru Taylor'a [**250**], wyłączając przypadki w których rozwinięcie to nie jest możebném.

Zatrzymując rozwinięcie na pierwszym wyrazie otrzymamy [**249**]

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+R_2 \tag{1}$$

Gdyby $f'(x_0)$ nie było zerem, uważając h za nieskończenie małe, R_2 byłoby mniejszém od $hf'(x_0)$, znak więc tego ostatniego wyrazu byłby znakiem różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$: lecz $hf'(x_0)$ zmienia znak wraz z h, gdy tymczasem z określenia największości i najmniejszości [**294**] wypada, że różnica $f(x_0+h)-f(x_0)$ musi być większą lub mniejszą od zera bez względu na znak przyrostku h; jeżeli więc $f(x_0)$ ma być największością lub najmniejszością, różnica

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

nie ma zmieniać znaku wraz z h; do czego warunkiem koniecznym jest, żeby pierwszy wyraz rozwinięcia (1) był zerem, to jest

$$f'(x_0)=0$$

co się zgadza z tém cośmy poprzednio [**295**] dowiedli.

W takim razie, jeżeli pierwsza pochodna jest zerem dla $x=x_0$, mamy biorąc dwa wyrazy rozwinięcia :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+R_3 \tag{2}$$

Przypuszczając że $f''(x_0)$ nie jest zerem, znak wyrazu $\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)$ jest znakiem różnicy

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

różnica ta więc nie zależy od znaku h, lecz jest dodatną jeżeli druga pochodna $f''(x_0)$ jest dodatną, odjemną jeżeli $f'(x_0)$ jest odjemną : wartość więc $f(x_0)$ jest [**294**]

$$\text{największością, jeżeli } f''(x_0)<0$$
$$\text{najmniejszością, jeżeli } f''(x_0)>0.$$

Lecz jeżeli druga pochodna $f''(x_0)$ jest zerem podobnie jak pierwsza $f'(x_0)$, wzór (2) nie może wyznaczyć znaku różnicy $f(x_0+h)-f(x_0)$, to jest największości lub najmniejszości funkcji : trzeba wtedy wziąść trzy wyrazy rozwinięcia, i rozumować jak poprzednio.

Przypuśćmy w ogólności, że dla wartości $x=x_0$, $n-1$ pierwszych pochodnych funkcji $f(x)$ staje się zerem :

$$f'(x_0)=0\ ,\quad f''(x_0)=0\ ,\ldots f^{(n-1)}(x_0)=0$$

a dopiero $n$ta pochodna $f^{(n)}(x_0)$ nie staje się zerem : mamy wtedy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+R_{n+1}. \tag{3}$$

Wzór ten wskazuje nam że jeżeli n jest nieparzystém, różnica

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

zmienia znak wraz z h, a zatém [**294**] wartość $f(x_0)$ nie jest ani największością ani najmniejszością funkcji. Jeżeli zaś n jest parzystém, różnica

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

nie zmienia znaku, zmieniając znak przyrostku h: znak ten jest ten sam co znak pochodnéj $f^{(n)}(x_0)$: to jest funkcja dana $f(x)$ dla wartości szczególnéj $x=x_0$, staje się

największością, jeżeli $f^{(n)}(x_0)<0$
najmniejszością, jeżeli $f^{(n)}(x_0)>0$

Twierdzenie. *Aby funkcja dana* f(x) *czyniąca zadosyć warunkom rozwijalności podług szeregu Taylor'a* [**250**] *w bliskości wartości szczególnéj* x_0 *zmiennéj niezależnéj* x, *stała się największością lub najmniejszością dla téj wartości szczególnéj* $x=x_0$, *warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby pierwsza z pochodnych funkcji, która nie staje się zerem dla* $x=x_0$, *była rzędu parzystego: funkcja jest największością, jeżeli pochodna jest odjemną; najmniejszością, jeżeli pochodna ta jest dodatną.*

297. Twierdzenie to sprowadza poszukiwanie największości i najmniejszości funkcyj wyraźnych do różniczkowania i rozwiązania równania o jednéj nieznanéj. Aby znaleźć największość lub najmniejszość funkcji wyraźnéj danéj, czyniącéj zadosyć warunkom rozwijalności [**250**] podług wzoru Taylor'a, dość jest:

1° Założyć pierwszą pochodnę funkcji równą zeru.

2° Z pomiędzy wartości zmiennéj niezależnéj czyniących zadosyć tak otrzymanemu równaniu, te dla których druga pochodna staje się odjemną, odpowiadają najmniejszościom funkcji.

3° Wartości zmiennéj niezależnéj, dla których nietylko pierwsza ale i druga pochodna stają się zerem, podstawić należy w pochodne następne : jeżeli pierwsza z pochodnych która nie staje się zerem dla jednéj z tych wartości jest rzędu nieparzystego, wartości téj zmiennéj niezależnéj nie odpowiada ani największość, ani najmniejszość funkcji; jeżeli pochodna ta jest rzędu parzystego, wartość odpowiadająca funkcji jest największością lub najmniejszością, stosownie do tego, czy ta pochodna jest odjemną lub dodatną.

Wartości zmiennéj niezależnéj dla których pierwsza pochodna przestaje być ciągłą, powinny być badane w szczególności, jak powyżéj [**295**].

Przykłady.

298. Przykład I. *Znaleść największości i najmniejszości funkcji*

$$y = x^m (a - x)^n$$

gdzie a *jest stałą dodatną,* m *i* n *całkowitemi dodatnemi.*

Funkcja ta jest wielomianem algebraicznym $m+n$go stopnia, to jest stopnia z założenia całkowitego : gdy więc jakiejkolwiek wartości szczególnéj x_0 zmiennéj niezależnéj x nadamy przyrostek nieskończenie mały h, funkcja staje się summą rozwinięć potęg całkowitych dwumianów, a więc czyni zadosyć warunkom rozwijalności podług szeregu Taylor'a.

Zakładając pochodnę danéj funkcji równą zeru, otrzymamy równanie

$$x^{m-1} (a - x)^{n-1} [ma - (m+n) x] = 0$$

Równanie to daje na x trzy wartości różne :

1° $x=\dfrac{ma}{m+n}$ jakiekolwiek będzie m i n

2° $x=0$ jeżeli $m>1$

3° $x=a$ jeżeli $n>1$

1° Pochodna drugiego rzędu funkcji danéj

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^{m-2}(a-x)^{n-2}\left[m(m-1)(a-x)^2-2mnx(a-x)\right.$$
$$\left.+n(n-1)x^2\right]$$

staje się dla pierwszéj z powyższych wartości szczególnych $x=\dfrac{ma}{m+n}$ równą

$$-\frac{mna^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$$

to jest odjemną; funkcja więc dana, ma dla téj wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj, wartość szczególną

$$\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\left(\frac{na}{m+n}\right)^n=\frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$$

która jest *największością.*

2° Dla $x=0$ jeżeli $m>1$ pochodna druga staje się zerem: uniknąć można rozważania dalszych pochodnych, badając wprost pierwszą pochodnę funkcji $\dfrac{dy}{dx}$, dla wartości x blizkich zera. Oznaczmy przez h przyrostek nieskończenie mały dla wartości 0 zmiennéj x: wartość $\dfrac{dy}{dx}$ dla $x=0+h=h$ staje się

$$h^{m-1}(a-h)^{n-1}[ma-(m+n)h]$$

Ponieważ a jest z założenia dodatném, dla nieskończenie małego

h, wartość ta pochodnéj nie zmieni znaku, jeżeli h weźniemy naprzód odjemném a następnie dodatném, w razie gdy $m-1$ jest parzystém, to jest m nieparzystém: w razie zaś gdy $m-1$ jest nieparzystém, to jest m parzystém, jeżeli h z odjemnego staje się dodatném, wartość powyższa pochodnéj z odjemnéj staje się dodatną. Ztąd wnosimy [**279**] że dla $x=0$, jeżeli m jest liczbą całkowitą większą od jedności, funkcja nie staje się największością ani najmniejszością, jeżeli m jest nieparzystém; funkcja staje się *najmniejszością* jeżeli m jest *parzystém*.

3° Dla $x=a$ jeżeli $n>1$ (całkowite dodatne), przeprowadzając to samo rozumowanie co powyżéj, zobaczymy że funkcja nie staje się ani największością ani najmniejszością jeżeli n jest nieparzystém, funkcja staje się *najmniejszością*, jeżeli n jest *parzystém*.

Zadanie powyższe można wysłowić w następujący sposób:

Znaleźć największości lub najmniejszości iloczynu potęg dwóch czynników, których summa jest stałą. Oznaczywszy summę stałą przez a, pierwszy czynnik przez x, drugim czynnikiem będzie $a-x$; iloczyn potęgi $m$téj pierwszego czynnika przez potęgę ntę drugiego, będzie

$$x^m(a-x)^n$$

funkcją uważaną powyżéj. Zakładając potęgi m i n całkowitemi dodatnemi, otrzymaliśmy na pierwszą odpowiedź, że iloczyn będzie *największością* jeżeli pierwszy czynnik będzie równym

$$x=\frac{ma}{m+n}$$

a zatém drugi

$$a-x=\frac{na}{m+n}$$

więc

$$\frac{x}{a-x}=\frac{m}{n}$$

to jest *jeżeli czynniki będą proporcjonalne odpowiednim potęgom.*

Dwie drugie odpowiedzi, dające jeden czynnik równy zero, wskazują że wartość szczególna zero iloczynu, może być najmniejszością tylko wtedy, jeżeli czynnik równy zero jest podniesionym do potęgi parzystéj: w przeciwnym razie nie jest ani największością ani najmniejszością. Jakoż w tym ostatnim razie, iloczyn przechodząc przez wartość zero, przybiera wartości znaków przeciwnych podobnie jak jego czynnik, przez co nie zachodzi żadna zmiana w jego zwiększaniu się lub zmniejszaniu.

Jeżeli $m = n = 1$, widzimy że *największość iloczynu dwóch czynników których summa jest stałą, ma miejsce, jeżeli czynniki są sobie równe, czyli równe połowie summy*. Tak największy iloczyn z dwóch liczb których summa jest 20, jest $10 \times 10 = 100$.

299. Przykład II. *Znaleźć najmniejszość funkcji*

$$y = x^x$$

gdzie x *przybiera wartości większe od zera, całkowite lub ułamkowe.* Nie pytamy o największość, gdyż ta widocznie nie istnieje, bo zwiększając x, funkcja powiększa się nieograniczenie.

Różniczkując dwa razy otrzymamy

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \mathrm{l}.x + 1$$

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x}$$

Ponieważ z założenia ani x ani y nie może przejść przez zero, ani przybrać wartości zero, żadna z tych ani następnych pochodnych nie może stać się nieskończoną; funkcja więc jest rozwijalną podług szeregu Taylor'a [**254**].

Zakładając pierwszą pochodnę równą zeru, otrzymamy

$$\mathrm{l}.x + 1 = 0 \text{ czyli } x = \frac{1}{e} = 0{,}36787944\ldots,\ y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0{,}6922005$$

a podstawiając wartość tę w drugą pochodnę

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = e\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

a ponieważ ta wartość szczególna $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatną, więc dla $x=\frac{1}{e}$, funkcja x^x staje się najmniéjszością.

300. Przykład iii. *Znaleźć największy trójkąt, utworzony przez dwa dane boki* a *i* b.

Nazwijmy x kąt szukany zawarty pomiędzy bokami danemi; powierzchnia trójkąta którą nazwiemy y, będzie: $y=\frac{1}{2}ab \operatorname{wst} x$. x zmieniać będziemy od 0 do π; funkcja y jest rozwijalną podług szeregu Taylor'a dla wszelkich wartości x [254].

Aby powierzchnia ta była największością (lub najmniejszością, lecz o tę jako niemożebną z danych zadania nie pytamy), pochodna y względem x ma być zerem:

$$\frac{1}{2}ab \operatorname{dos} x=0$$

co nam daje

$$\operatorname{dos} x=0 \qquad x=\frac{\pi}{2}$$

(pomijamy inne wartości kąta x większe od π) trójkąt jest prostokątnym, dwa boki dane ramionami kąta prostego. Wartość ta jest w rzeczy saméj największością, bo druga pochodna

$$-\frac{1}{2}ab \operatorname{wst} x$$

jest odjemną dla $x=\frac{\pi}{2}$.

301. Przykład iv. *Na drąg* AC *opierający się na podporze stałéj w jednym swym końcu* A, *działa siła znana* P, *któréj punkt przyczepienia* B *znajduje się w odległości* AB = a *znanéj od punktu* A. *Drąg jest ciężki, i każda jednostka jego długości ma ciężar stały* p. *Pytanie jak długi* AC = x *ma być drąg, aby w drugim jego końcu* C *przyczepiona siła* Y, *utrzymując siłę* P *w równowadze, była najmniejsza.*

Gdyby drąg nie był ciężkim, warunkiem równowagi byłaby równość momentów Y i P względem A

$$Y\times AC=P\times AB$$

a Y mogłoby być tak małém jak się podoba, biorąc AC dostatecznie wielkiem. Lecz drąg jest ciężkim, a zwiększając jego długość, zwiększamy moment $px \times \frac{1}{2}x$ jego ciężaru px, któren przypuszczamy przyczepionym w środku drąga t. j. w odległości $\frac{1}{2}x$ od punktu A.

Biorąc momenta wszystkich sił względem punktu A, otrzymamy równanie

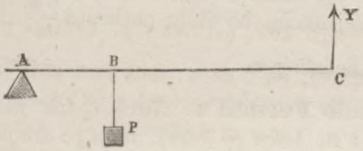


fig. 68,

$$Yx = aP + px \cdot \frac{x}{2}$$

ztąd

$$Y = \frac{a}{x}P + \frac{x}{2}p$$

ponieważ $x > 0$ z danych ządania, funkcja czyni zadosyć warunkom rozwijalności [**254**]; zaś

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{a}{x^2}P + \frac{1}{2}p, \quad \frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{2a}{x^3}P$$

Zakładając pierwszę pochodnę równą zeru, otrzymamy

$$-\frac{a}{x^2}P + \frac{1}{2}p = 0$$

ztąd

$$x = \pm\sqrt{\frac{2aP}{p}}$$

Dane zadania wymagają wartości dodatnéj x: wartości téj

$$\sqrt{\frac{2aP}{p}}$$

odpowiada wartość siły Y

$$\frac{aP+\frac{p}{2}\cdot\frac{2aP}{p}}{\sqrt{\frac{2aP}{p}}}=\sqrt{2apP}$$

która jest najmniejszością, bo druga pochodna $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2aP}{x^3}$ jest dodatną dla wartości dodatnéj x.

302. Zadanie Fermat'a. *Niech będzie płaszczyzna* MN *i dwa punkta* A *i* B, *jeden po jednéj, drugi po drugiéj stronie płaszczyzny. Punkt ruchomy wychodząc z* A *ku* B, *przebiega przestrzeń znajdującą się po téj stronie płaszczyzny, z prędkością stałą* u, *lecz po przejściu punktu na drugą stronę płaszczyzny, prędkość ta staje się stałą* v: *pytanie jaką linję ma zakreślić punkt ruchomy, aby przejść od* A *do* B *w jak najkrótszym czasie?*

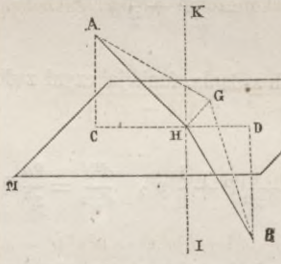


fig. 69,

Linja szukana, musi być prostą po jednéj i po drugiéj stronie płaszczyzny: gdyby bowiem była krzywą, poprowadziwszy cięciwy z A i B do punktu spotkania się krzywéj z płaszczyzną, otrzymalibyśmy po cięciwach ruch w krótszym czasie niż po krzywéj. Linja szukana składa się więc z dwóch prostych AH, HB: powiadam że te proste znajdują się na płaszczyznie ACDB prostopadłéj do MN. W rzeczy saméj, gdyby droga punktu ruchomego znajdowała się jak AGB na zewnątrz płaszczyzny prostopadłéj, prowadząc GH prostopadłę do téj płaszczyzny i łącząc AH, BH, mielibyśmy AH $<$ AG i BH $<$ BG; a że po każdéj stronie płaszczyzny ruch jest jednostajny, a zatém przestrzeń przebieżona proporcjonalna do czasu, więc ruch po AHB, odbywałby się w krótszym czasie niż ruch po AGB.

Aby wyznaczyć punkt H, nazwijmy

$$AC = a, \quad BD = b, \quad CD = c, \quad CH = x$$

otrzymamy

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2} \qquad BH = \sqrt{(c - x)^2 + b^2}$$

a że czas ruchu jednostajnego po AH, BH, otrzymuje się dzieląc drogę przez prędkość, więc czas t całego ruchu po AHB będzie summą:

$$(1) \qquad t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v}.$$

wyrażenie, które ma być najmniejszością. Funkcja (1) czyni zadosyć warunkom rozwijalności [**254**], bo żaden z pierwiastków w nię wchodzących, nie może stać się zerem, a zatém, żadna z jéj pochodnych nie staje się nieskończenie wielką. Zakładając pochodnę równą zeru

$$(2) \qquad \frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v}\frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = 0$$

czyli znosząc mianowniki i pierwiastki

$$(v^2 - u^2)\, x^2 (c - x)^2 + b^2 v^2 x^2 - a^2 u^2 (c - x)^2 = 0$$

równanie 4go stopnia które nam da x.

Nie roztrząsając tego równania, możemy z łatwością znaleźć własność zasadniczą odznaczającą linję AHB. Jakoż, poprowadziwszy IK prostopadłą do płaszczyzny w punkcie H, i oznaczywszy kąty

$$AHK = w \qquad IHB = z$$

otrzymamy

$$\text{wst}\, w = \frac{CH}{AH} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\text{wst}\, z = \frac{DH}{BH} = \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}$$

Równanie więc (2) stanie się

$$\frac{\text{wst}\, w}{\text{wst}\, z} = \frac{u}{v} \tag{3}$$

Widoczném jest z zadania, że równanie (2) a zatém i (3) daje najmniejszość a nie największość, o czém zresztą przekonać się można z łatwością, biorąc drugą pochodnę (1):

$$-\frac{1}{u\,(x^2+a^2)}\left[\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}+\sqrt{x^2+a^2}\right]$$
$$-\frac{1}{v\,[(c-x)^2+b]^2}\left[\frac{(x-c)^2}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}+\sqrt{(x+c)^2+b^2}\right]$$

która jest odjemną dla wszelkiej wartości x.

Jeżeli ruch od A ku B jest ruchem światła w dwóch podzielonych płaszczyzną MN środkach nieróWnéj gęstości, w ktorych zatém prędkości u i v z jakiemi światło się w nich posuwa, są nierówne, promień swiatła dochodzi w jaknajkrótszym czasie z A do B, jeżeli (3) wstawa kąta *wpadania* w, i wstawa kąta *załamania* z, są proporcjonalne prędkościom odpowiednim (prawo wstaw Descartes'a).

303. Przykład VI. *Znaleźć największości i najmniejszości odległości punktu danego od krzywéj danéj.*

Nazwijmy przez x i y spółrzędne prostokątne punktów krzywéj AB, przez x_0, y_0 spółrzędne punktu M danego, przez D odległość MN punktu od krzywéj: będziemy mieli

$$\text{MN}^2 = \text{MP}^2 + \text{PN}^2$$

czyli

$$\text{D}^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \tag{1}$$

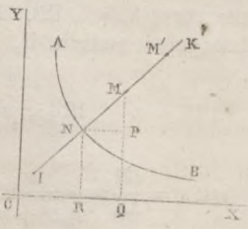


fig. 70.

Dostateczném jest szukać największości lub najmniejszości kwadratu D^2 odległości : bo kwadrat ten staje się najmniejszością lub największością wraz z samém D.

Biorąc dwie pierwsze pochodne (1) otrzymamy

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{dD^2}{dx} &= (x-x_0)+(y-y_0)\frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{2}\frac{d^2D^2}{dx^2} &= \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)+(y-y_0)\frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right.$$

Warunkiem największości lub najmniejszości jest więc

$$(3)\qquad (x-x_0)+(y-y_0)\frac{dy}{dx}=0$$

czyli

$$(4)\qquad \frac{y-y_0}{x-x_0}\frac{dy}{dx}=-1$$

Widzimy z łatwością że

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\text{MP}}{\text{NP}}=\text{st}\,\text{MNP}$$

jest styczną kąta jaki NM tworzy z osią OX, $\frac{dy}{dx}$ jest styczną kąta jaki styczna do krzywéj w punkcie N tworzy z osią OX [**141**]; warunek (4) pokazuje że MN jest prostopadłém do stycznéj w punkçie N do krzywéj [**45**] : prostopadłę tą nazywamy *normalną* krzywéj.

Warunek (4) pokazuje więc, że *aby odległość punktu od krzywéj mogła być najmniejszością lub największością, odległość ta musi być liczoną na normalnéj przez punkt dany do krzywéj poprowadzonéj.*

Niech będzie N jeden z punktów wyznaczonych przez równanie (3) i równanie krzywéj, to jest MN jedna z normalnych, które z M do krzywéj poprowadzić możemy : jeżeli druga pochodna $\frac{d^2D^2}{dx^2}$ z równania (2) jest dodatną, po podstawieniu w to równanie za x i y spółrzędnych punktu N, odległość MN jest najmniéjszością; jeżeli ta druga pochodna jest odjemną, odległość MN jest największością. Jeżeli wreszcie $\frac{d^2D^2}{dx^2}=0$, należy się udać do dalszych pochodnych [297] które pokażą czy odległość MN jest najmniejszością największością, lub nie jest ani jedną ani drugą, choć jest normalną do krzywéj. Ten ostatni przypadek będzie mianowicie miał miejsce, jeżeli dwie pierwsze pochodne $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ są zerami, gdy w (2) podstawimy za x i y spółrzędne punktu N, a trzecia pochodna $\frac{d^3y}{dx^3}$ nie jest zerem [297]. Rozbierzemy poniżej znaczenie tego punktu nadzwyczajnego.

Przez punkt N na krzywéj poprowadziwszy normalnę IK do téj krzywéj, i przypuszczając punkt M ruchomy na téj normalnéj, to jest x_0, y_0 zmienne, a x, y stałe dla wszelkich położeń punktu M, to jest dla wszelkich wartości x_0, y_0, warunek (3) będzie spełnionym, t. j. pierwsza pochodna $\frac{dD^2}{dx}$ będzie zerem. Druga pochodna $\frac{d^2D^2}{dx^2}$, będzie zerem w położeniu punktu M′, dla wartości y_0 wyznaczonéj przez równanie

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-y_0')\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

które nam da

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{y-y'_0}$$

a podstawiwszy wartość tę w drugie równanie (2), otrzymamy

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2D^2}{dx^2}=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\frac{y_0-y'_0}{y-y'_0}\right)$$

Pierwszy z czynników $1+\frac{dy^2}{dx^2}$ jest zawsze dodatnym, pochodna więc druga $\frac{d^2D^2}{dx^2}$ będzie dodatną lub odjemną, stosownie do tego czy $y_0-y'_0$ i $y-y'_0$ są jednego znaku, lub znaków przeciwnych: odległość MN będzie najmniejszością, jeżeli punkt M znajdować się będzie pomiędzy krzywą i punktem M′, lub po za krzywą względem punktu M′, to jest w części M′N lub NI; a największością, jeżeli punkt M′ znajdować się będzie pomiędzy krzywą a punktem M. Punkt M′, jak zobaczymy poniżéj jest *środkiem krzywości* krzywéj.

Weźmy naprzykład pod uwagę koło, którego równaniem jest

$$x^2 + y^2 = R^2$$

różniczkując dwa razy, otrzymamy równania (2)

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Równanie (3) które stanie się

$$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} = 0$$

jest równaniem prostéj łączącej punkt dany x_0, y_0 z początkiem, to jest środkiem koła. Prosta ta przecina koło w dwóch punktach, z których jeden odpowiada najmniéjszości, a drugi największości. Punkt M′ jest tu środkiem koła, a równanie (5)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2D^2}{dx^2} = \frac{R^2y_0}{y^3}$$

Pochodna $\frac{d^2D^2}{dx^2}$ jest dodatną lub odjemną stosownie do tego czy y_0 i y są tego samego znaku, lub znaków przeciwnych: to jest czy punkt dany i punkt uważany na kole, znajdujące się na jednéj prostéj ze środkiem, są po jednéj stronie środka, lub nie.

304. Jeżeli krzywa nie jest płaską, lub punkt dany M nie leży na płaszczyznie linji krzywéj, weźmiemy trzy osie spółrzędnych prostopadłych OX, OY, OZ: krzywa będzie daną przez dwa równania [**65**] z których jedno wyznaczy y, drugie z, jako funkcje zmiennéj niezależnéj x, punkt zaś M przez swe trzy spółrzędne x_0, y_0, z_0: odległość D punktu M od punktu N na krzywéj, którego spółrzędnemi są x, y, z daną będzie przez wyrażenie

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

którego zamierzamy znaleść największości i najmniejszości. Różniczkując dwa razy to wyrażenie względem x uważanego za zmienną niezależną, otrzymamy

$$\frac{1}{2}\frac{dD^2}{dx} = (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} + (z - z_0)\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2D^2}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right) + (y - y_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (z - z_0)\frac{d^2z}{dx^2}$$

Punkta na krzywéj odpowiadające największościom lub najmniejszościom, dane będą przez wartości x, y, z czyniące zadosyć równaniu

$$(x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} + (z - z_0)\frac{dz}{dx} = 0$$

które, wraz z dwoma równaniami krzywéj, wyznaczy wartości na x, y, z. Równanie to, jeżeli w niém będziemy uważali x_0, y_0, z_0 za spółrzędne zmienne, $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ jako dane, będzie równaniem płaszczyzny [68], która jak zobaczymy poniżéj, jest prostopadłą do stycznéj poprowadzonéj w punkcie krzywéj x, y, z: płaszczyznę tę nazwiemy niżéj płaszczyzną *normalną*. Punkta krzywéj, których odległości od punktu danego M są najmniejszościami lub największościami, znajdują się w przecięciach krzywéj z płaszczyznami normalnemi, jakie z punktu M do krzywéj poprowadzić możemy.

Odległości te są najmniejszościami lub największościami, stosownie do tego czy druga pochodna $\frac{d^2D^2}{dx^2}$ jest dodatną lub odjemną: jeżeli pochodna ta jest zerem, trzeba się udać do pochodnych wyższych rzędów, aby zbadać czy odległość dana jest najmniejszością lub największością; być nawet może w takim razie że odległość ta nie jest ani jedną ani drugą, jak naprzykład w razie gdy trzecia pochodna $\frac{d^3D^2}{dx^3}$ nie jest zerem, dla wartości x dla których dwie pierwsze pochodne $\frac{dD^2}{dx}, \frac{d^2D^2}{dx^2}$ są zerami.

Przypuśćmy jak powyżéj punkt ruchomy na prostéj wedle któréj liczymy odległość punktu danego M od punktu N na krzywéj, odległość, która jest najmniejszością lub największością. Druga po-

chodna $\frac{d^2D^2}{dx^2}$ stanie się zerem dla położenia punktu ruchomego M',
którego spółrzędne y'_0, z'_0, czynią zadosyć równaniu :

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)+(y-y'_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z'_0)\frac{d^2z}{dx^2}=0;$$

równanie to jest równaniem płaszczyzny : przecięcie się téj płaszczyzny z prostą MN wyznaczy punkt M' którego spółrzędne x'_0, y'_0, z'_0, będą związane równaniami

$$\frac{x-x_0}{x-x'_0}=\frac{y-y_0}{y-y'_0}=\frac{z-z_0}{z-z'_0}=\frac{(y-y_0\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z'_0)\frac{d^2z}{dx^2}}{(y-y'_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z'_0)\frac{d^2z}{dx^2}}$$

nadto, mamy na zasadzie przedostatniego równania

$$(y-y_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-z_0)\frac{d^2z}{dx^2}=-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{x-x_0}{x-x'_0}$$

a zatém równanie dające $\frac{1}{2}\frac{d^2D^2}{dx^2}$ napisać można

$$\frac{1}{2}\frac{d^2D^2}{dx^2}=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{x_0-x'_0}{x-x'_0}$$

Pochodna więc $\frac{d^2D^2}{dx^2}$ będzie większą lub mniejszą od zera, stosownie do tego czy $x_0-x'_0$ i $x-x'_0$ są tych samych lub przeciwnych znaków : największość więc będzie miała miéjsce jeżeli punkt M' będzie się znajdował pomiędzy punktem danym M a krzywą ; w przeciwnym razie zachodzić będzie najmniejszość.

Rozumowanie powyższe będzie ścisłém tylko pod zastrzeżeniem ogólném, że tak funkcje przedstawiające krzywę jak jéj pochodne, które bierzemy pod uwagę, są ciągłemi w granicach pomiędzy któremi zmieniamy zmienne, że krzywa uważana nie przedstawia *punktów nadzwyczajnych*, o których będzie mowa poniżéj.

305. Największości i najmniejszości funkcyj niewyraźnych. Niech będzie funkcja ciągła y zmiennéj niezależnéj x, dana przez równanie:

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

Różniczkując to równanie, otrzymamy [**178**]

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

czyli

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{3}$$

Wyłączając przypadki w których $\frac{dy}{dx}$ przestaje być ciągłém, przypadki które weźmiemy pod uwagę w jednym z następnych wstępów, warunkiem koniecznym największości lub najmniejszości [**295**], jest zadość uczynienie przez zmienne równaniu

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0 \tag{3}$$

tak, że wartości $x_0, x_1, \ldots$ zmiennéj niezależnéj, dla których wartości odpowiednie $y_0, y_1 \ldots$ funkcji, są największościami lub najmniejszościami, będą czynić zadosyć równaniom (1) i (3). Z pomiędzy tych wartości wyłączymy jeszcze te, dla których jednocześnie zachodzić będą równania:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{4}$$

wartości te będą również później wziętemi pod uwagę.

Ażeby rozpoznać czy jedna z wartości czyniących zadosyć (1) i (3) odpowiada największości lub najmniejszości, należy wziąść pod uwagę drugą pochodnę $\frac{d^2y}{dx^2}$ daną prze równanie [**198**] :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

które, zważywszy że $\frac{dy}{dx}=0$, jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nie stają się nieskończonościami, daje nam

$$\text{(5)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Jeżeli $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest odjemném, wartość uważana, czyniąca zadosyć (1) i (3) jest największością; jeżeli $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest dodatném, wartość ta jest najmniejszością : jeżeli (5) staje się zerem, należy udać się do dalszych pochodnych, jak powyżéj [**297**] które pokażą nam, czy chodzi o największość lub najmniejszość, lub też ani o jedną ani o drugą. Warunki największości i najmniejszości są te same co do pochodnych funkcji y względem zmiennéj x : lecz ponieważ funkcja ta jest niewyraźną daną przez (1) za pochodne te podstawić należy ich wyrażenia przez pochodne częściowe $f(x, y)$ względem x i y [**201**].

Weźmy naprzykład funkcję daną przez równanie

$$f(x,y)=y^3-3axy+x^3=0$$

funkcja ta przedstawiona jest geometrycznie przez krzywą, którą nazwano *liściem* Descartes'a (fig. 71).

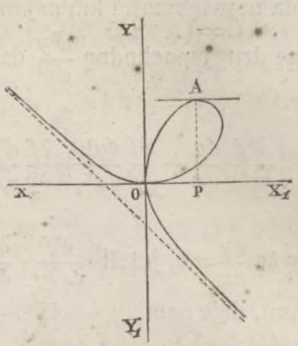


fig. 71,

Różniczkując, otrzymamy

$$\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = -ay + x^2 \quad , \quad \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-ay + x^2}{y^2 - ax}$$

aby to ostatnie wyrażenie było zerem, trzeba żeby

$$x^2 - ay = 0$$

(byleby jednocześnie $y^2 - ax$ nie było zerem, przypadek dla którego mielibyśmy $x = y = a$ wartości które nieczynią zadość równaniu krzywéj), a rugując y pomiędzy tém równaniem a równaniem danÉm, otrzymamy

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0$$

które to równanie daje nam na x wartości :

$$x_0 = 0 \quad x_1 = a\sqrt[3]{2}$$

którym odpowiadają wartości y

$$y_0 = 0 \quad y_1 = a\sqrt[3]{4}$$

Pierwszy układ wartości $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, daje

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0$$

zostaje więc wyłączonym.

Podstawiwszy w wyrażenie drugiéj pochodnéj

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-2x}{y^2 - ax}$$

drugi układ wartości $x_1 = a\sqrt[3]{2}$ $y_1 = a\sqrt[3]{4}$, otrzymamy

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = -\frac{2}{a}$$

wartość odjemną (jeżeli a jest dodatném), układ ten odpowiada więc w tym razie największości.

Wziąwszy więc $\mathrm{OP} = a\sqrt[3]{2}$, $\mathrm{PA} = a\sqrt[3]{4}$ otrzymamy punkt A, w którym styczna jest równoległą do osi, a rzędna większą od rzędnych sąsiednich.

306. Niech będzie w ogólności m równań

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z \ldots) = 0 \\ f_1(x, y, z \ldots) = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_{m-1}(x, y, z \ldots) = 0 \end{cases}$$

pomiędzy $m+1$ zmiennemi $x, y, z \ldots$ Jak wiemy [**202**] jednę z tych zmiennych, naprzykład x uważać możemy za zmienną niezależną, pozostałe $y, z \ldots$ będą funkcjami x. Największości i najmniejszości którejkolwiek z tych funkcyj naprzykład y, muszą czynić zadosyć równaniu, którebyśmy otrzymali zakładając pochodnę $\frac{dy}{dx}$ równą zeru. Aby otrzymać tę pochodnę [**202**] różniczkujemy równania (1) częściowo

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz + \ldots = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x} dx + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y} dy + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial z} dz + \ldots = 0 \end{cases}$$

następnie z m równań (2) rugujemy $m-1$ różniczek $dz \ldots$ to jest wszystkie z wyjątkiem dx i dy: otrzymamy w ten sposób równanie kształtu

$$(3)\qquad \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy = 0$$

a warunkiem $\frac{dy}{dx} = 0$ największości lub najmniejszości będzie

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} = 0$$

Rownanie (4) wraz z m równaniami (1), da nam układ $m+1$ równań, z których otrzymamy wartości $m+1$ zmiennych, odpowiadające największościom lub najmniejszościom funkcji y.

Wyłączamy naturalnie przypadek w którym jaka z wartości powyższych, czyni razem

$$X=0 \quad Y=0$$

wartości te będą rozebrane gdzieindziéj.

Każdą z wartości czyniących zadosyć (1) i (4) (z wyjątkiem tych które czynią $Y=0$), podstawić należy w wartość drugiéj pochodnéj $\frac{d^2y}{dx^2}$, otrzymanéj przez różniczkowanie równań (2) jak wiadomo [**198**]; następne roztrząsanie jest zupełnie takie same jak powyżéj [**278**].

307. Aby znaleźć największość i najmniejszość funkcji

$$F(x, y, z \dots)$$

m zmiennych $x, y, z \dots$ związanych ze sobą $m-1$ równaniami

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z \dots)=0 \\ f_1(x, y, z \dots)=0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{m-2}(x, y, z \dots)=0 \end{cases}$$

(tak że zawsze mamy jednę tylko zmienną niezależną), nazwiemy funkcję daną przez

$$(2) \qquad u=F(x, y, z \dots)$$

dołączymy do równań (1) równanie

$$(3) \qquad u - F(x, y, z \ldots) = 0$$

i otrzymamy układ m równań (1) i (3), pomiędzy $m+1$ zmiennemi $x, y, z \ldots u$, a zatém sprowadzimy zadanie do poprzedzającego [306].

Przykład. *Mając dane cztery boki czworokąta następujące po sobie w porządku* a, b, c, d *wykreślić czworokąt, którego powierzchnia jest największością.*

Oznaczmy przez x, kąt pomiędzy bokami a i b, przez y, kąt pomiędzy bokami c i d, przez u, powierzchnię wielokąta. Poprowadziwszy przekątnę przeciwległą kątom x i y, i równając wartości téj przekątnéj, otrzymane z dwóch trójkątów na jakie został podzielonym w ten sposób czworokąt, otrzymamy równanie warunkowe

$$a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{dos} x = c^2 + d^2 - 2cd \operatorname{dos} y$$

powierzchnia zaś czworokąta wyrażoną będzie przez

$$u = \frac{1}{2} ab \operatorname{wst} x + \frac{1}{2} cd \operatorname{wst} y$$

Mamy więc dwa równania

$$2ab \operatorname{dos} x - 2cd \operatorname{dos} y - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} ab \operatorname{wst} x + \frac{1}{2} cd \operatorname{wst} y - u = 0$$

Różniczkując, otrzymamy :

$$- ab \operatorname{wst} x . dx + cd \operatorname{wst} y . dy = 0$$

$$ab \operatorname{dos} x dx + cd \operatorname{dos} y dy - 2du = 0$$

znosząc spółczynnik 2 w pierwszém, mianownik $\frac{1}{2}$ w drugiém równaniu. Rugując dy z tych dwóch równań, otrzymamy

$$(ab \operatorname{dos} x . \operatorname{wst} y + ab \operatorname{wst} x . \operatorname{dos} y)\, dx - 2 \operatorname{wst} y\, du = 0$$

a warunek [306 (4)] $-\dfrac{du}{dx} = \dfrac{X}{Y} = 0$, gdzie

$$X = ab \operatorname{dos} x . \operatorname{wst} y + ab \operatorname{wst} x . \operatorname{dos} y$$
$$Y = -2 \operatorname{wst} y$$

da nam

$$\operatorname{dos} x \operatorname{wst} y + \operatorname{wst} x \operatorname{dos} y = 0$$

bo $-2 . \operatorname{wst} y$, nie może stać się nieskończonością. Mamy więc

$$\operatorname{wst}(x+y) = 0 \quad \text{a zatém} \quad x + y = \pi \quad \text{lub} \quad n\pi$$

bierzemy każdy z kątów x i y dodatnym mniejszym od π, a więc przypuszczamy $x + y = \pi$; kąty x i y są spełniającemi, czworokąt może być wpisanym w koło.

Z łatwością przekonać się można że wartość ta odpowiada największości. W rzeczy samej, otrzymaliśmy

$$\frac{du}{dx} = -\frac{X}{Y} = \frac{ab}{2} \frac{\operatorname{wst}(x+y)}{\operatorname{wst} y}$$

a więc

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{ab}{2} \times \frac{\operatorname{wst} y \dfrac{d \operatorname{wst}(x+y)}{dx} - \operatorname{wst}(x+y) \dfrac{d \operatorname{wst} y}{dx}}{\operatorname{wst}^2 y}$$

$$= \frac{ab}{2} \times \frac{\operatorname{wst} y \left[\operatorname{dos}(x+y) + \operatorname{dos}(x+y) \dfrac{dy}{dx}\right] - \operatorname{wst}(x+y) \operatorname{dos} y \dfrac{dy}{dx}}{\operatorname{wst}^2 y}$$

Lecz z równania warunkowego danego

$$a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{dos} x = c^2 + d^2 - 2cd \operatorname{dos} y$$

mamy

$$2ab \operatorname{wst} x\, dx = 2cd \operatorname{wst} y\, dy$$

czyli

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ab \operatorname{wst} x}{cd \operatorname{wst} y}$$

podstawiając, otrzymamy

$$\frac{d^2u}{d^2x}=\frac{ab}{2}\,\frac{\operatorname{wst} y \operatorname{dos}(x+y)\left[1+\dfrac{ab \operatorname{wst} x}{cd \operatorname{wst} y}\right]-\operatorname{wst}(x+y)\operatorname{dos} y\,\dfrac{ab \operatorname{wst} x}{cd \operatorname{wst} y}}{\operatorname{wst}^2 y}$$

Dla wartości $x+y=\pi$, $\operatorname{wst}(x+y)=0$, $\operatorname{dos}(x+y)=-1$,

wartość ta jest odjemną, a zatém wartość $x+y=\pi$, odpowiada *największości*.

308. Uwaga. Niech będzie funkcja

$$y=f(x)$$

zmiennéj niezależnéj x. Zamiast zmieniać x nadaiąc mu wartości jakiekolwiek, i szukać jak powyżéj największości i najmniejszości funkcji y, często z warunków zadania wypada potrzeba zmieniania zmiennéj niezależnéj tylko po : iędzy pewnemi granicami a i b, i szukania największości i najmniejszości funkcji wyłącznie dla wartości x, zawartych pomiędzy temi granicami. W ogólności, jeżeli szukamy największości lub najmniejszości funkcji, ograniczając jéj zmienność pewnemi warunkami, największości i najmniejszości te nazywać będziemy *względnemi.*

Weźmy naprzykład pod uwagę zadanie podane już powyżéj [**303**], w którém szukamy największości i najmniejszości odległości punktu danego od okręgu koła. Odnosząc koło do spółrzędnych prostokątnych, których początek znajduje się w środku koła, a oś odciętych przechodzi przez punkt dany P, wyrażenie którego szukamy największości i najmniejszości, stanie się

$$W=(x-x_0)^2+y^2$$

oznaczając przez x_0 odciętą punktu danego, przez x, y spółrzędne bieżące okręgu koła, którego równaniem będzie

$$y^2 = R^2 - x^2$$

nazwawszy promień przez R; a zatém

$$W = (x - x_0)^2 + R^2 - x^2$$

lub

$$W = (R^2 + x^2_0) - 2x_0x$$

Wyrażenie W które jest funkcją linijną x, nie ma największości ani najmniejszości, bo pochodna jego będąc stałą i równą $-2x_0$, nie może stać się zerem dla żadnéj wartości szczególnéj x, (chyba gdy $x_0 = 0$, wtedy jest zerem dla wszelkich wartości x). Bezwzględnéj największości i najmniejszości odległości punktu od okręgu koła nie ma, jeżeli punkt znajduje się na osi odciętych. W rzeczy saméj, zmieniając x od $-\infty$ ku $+\infty$, ponieważ przyjmujemy tu tylko same wartości rzeczywiste zmiennych, odległość punktu danego P od punktu na kole M, z początku

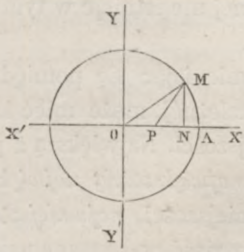


fig. 72,

wcale nie istnieje jak i sam punkt M, gdy x zwiększa się od $-\infty$ do $-R$; następnie dla $-R < x < +R$ to jest, gdy punkt M postępuje od B ku A na półokręgu BMA, odległość PM z równéj PB, zmniejsza się ciągle aż do PA; późniéj dla $R < x < \infty$, znów przestaje istnieć. Nigdzie więc nie widzimy żeby odległość ta przestała się zmniejszać a zaczęła zwiększać, lub odwrotnie, gdy zwiększamy x, co jest określeniem najmniejszości lub największości. Przyszlibyśmy do podobnego wniosku, gdybyśmy uważali punkt M przebiegający drugie półokręgu po stronie rzędnych odjemnych. Lecz jeżeli zamiast zmieniać x dowolnie od $-\infty$ do $+\infty$, nałożymy warunek że x może się zmieniać tylko od $+R$ do $-R$, i że gdy x przybiera jednę z tych wartości granicznych, zamiast się zwiększać, ma się zmniejszać lub odwrotnie, zaraz zobaczymy że $x = +R = OA$ odpowiada *najmniejszości względnéj*, a $x = -R = OB$ odpowiada *największości względnéj* odległości punktu P od okręgu koła : bo zmieniając x w powyżéj określony sposób, odległość ta przestaje się zmniejszać, a zaczyna zwiększać w pierwszym razie, i odwrotnie w drugim razie.

Wartość analityczna W téj odległości, nie mogła nam dać téj najmniejszości lub największości, bośmy nie wyrazili przez nią powyższego zastrzeżenia, co do sposobu w jaki zmieniać będziemy x, a postawiliśmy je tak, jak gdyby chodziło o największość lub najmniejszość bezwzględną, która w rzeczy saméj nie istnieje w tym układzie szczególnym spółrzędnych.

Funkcja dana zmieniając się pomiędzy pewnemi granicami zmiennéj niezależnéj, może mieć kilka największości, lub kilka najmniejszości. Największą z pomiędzy największości nazywamy *największością największości*, najmniejszą z pomiędzy najmniejszości, *najmniejszością najmniejszości*. Możnaby również wziąść pod uwagę największość najmniejszości, i najmniejszość największości.

Największości i najmniejszości funkcyj wielu zwiennych niezależnych.

309. Niech będzie funkcja

$$f(x, y, z \ldots)$$

zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots$. Jeżeli dla wartości szczególnych x_0, y_0, $z_0 \ldots$ tych zmiennych niezależnych, przyrostek funkcji

$$f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0, z_0 + \Delta z_0, \ldots) - f(x_0, y_0, z_0 \ldots)$$

jest stale dodatnym, bez względu na to czy przyrostki Δx_0, Δy_0, $\Delta z_0 \ldots$ zmiennych niezależnych weźniemy dodatnemi lub odjemnemi, wartość szczególna $f(x_0, y_0, z_0 \ldots)$ funkcji danéj, będzie jéj *najmniejszością*: jeżeli przyrostek ten funkcji będzie stale odjemnym bez względu na znak przyrostków zmiennych niezależnych, wartość ta szczególna funkcji danéj, będzie jéj *największością*.

310. Zakładamy że funkcja dana i jéj pochodne częściowe rzędów, które będziemy brali pod uwagę w dalszym ciągu tego rozumowania, są ciągłemi, skończonemi, dla wartości zmiennych niezależnych niewiele różnych od tych, dla których funkcja ma się stać najmniejszością lub największością: oznaczywszy przez Δf przyrostek funkcji odpowiadający przyrostkom Δx, Δy, $\Delta z \ldots$ zmiennych niezależnych, przez df, $d^2f \ldots d^nf$ różniczki zupełne funkcji, wzór Taylor'a da nam [**279**]

$$(1) \qquad \Delta f = \frac{df}{1} + \frac{d^2f}{1.2} + \ldots + \frac{d^nf}{1.2\ldots n} + R_{n+1}$$

gdzie R_{n+1} oznacza resztę.

Zatrzymując szereg na pierwszym wyrazie, otrzymamy :

$$\Delta f = df + R_2 \tag{2}$$

Jeżeli df nie jest zerem, reszta R_2 jest nieskończenie małą względem wyrazu poprzedzającego df [**280**], znak więc różniczki df będzie znakiem przyrostku Δf.

Lecz [**209**] różniczka zupełna

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots$$

zmienia znak, gdy zmienimy znak różniczek dx, dy, $dz\ldots$: aby więc znak Δy był niezależnym od znaku tych różniczek, to jest aby funkcja dana mogła stać się największością lub najmniejszością dla szukanych wartości szczególnych zmiennych niezależnych, warunkiem koniecznym jest aby df było zerem

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \ldots = 0$$

co zważywszy na niezależność dx, dy, $dz\ldots$ pociąga za sobą warunek

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ldots \tag{3}$$

któren otrzymujemy zakładając naprzód $dy = 0$, $dz = 0\ldots$ następnie $dx = 0$, $dz = 0\ldots$ i t. d. A zatém :

Dla wartosci szczególnych zmiennych niezależnych, dla których funkcja staje się największością lub najmniejszością, pochodne częściowe pierwszego rzędu funkcji względem każdéj ze zmiennych niezależnych, stają się zerami, jeżeli są ciągłemi *w blizkości tych wartości.*

Wartości więc szczególnych zmiennych niezależnych dla których funkcja może stać się jedynie największością lub najmniejszością, szukać należy pomiędzy wartościami czyniącemi zadosyć równaniom (3), których liczba równa jest liczbie zmiennych niezależnych.

310. Jeżeli df równa się zeru, wzór (1) zatrzymany na drugim wyrazie, daje nam

$$\Delta f = \frac{d^2f}{1.2} + R_3 \tag{4}$$

Przypuśćmy że dla przyrostków dx_0, dy_0, $dz_0 \ldots$ wartości szczególnych x_0, y_0, $z_0 \ldots$ zmiennych niezależnych, czyniących zadosyć równaniom (3), druga różniczka zupełna d^2f, nie staje się zerem i nie zmienia znaku, czy te przyrostki weźniemy razem lub pojedynczo ze znakami dodatnemi czy odjemnemi: wyrażeniem téj różniczki jest [**216**]

$$\begin{aligned} d^2f = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + \ldots \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

jeżeli d^2f nie zmieniając znaku jest stale dodatném, funkcja jest *najmniéjszością*; jeżeli zaś d^2f jest stale odjemném, *największością* : bo z wyrażenia (4) widzimy że ponieważ R_2 jest nieskończenie małém względem $\frac{d^2f}{1.2}$, [**280**] znak d^2f będzie znakiem Δf, stale dodatnym lub stale odjemnym, bez względu na znaki przyrostków nieskończenie małych zmiennych niezależnych.

Zakładamy ciągle, że dla wartości szczególnych zmiennych niezależnych o których mowa, różniczka d^2f nie jest zerem : z wyrażenia (5) widzimy, że mimo to różniczka ta może zmieniać znak, biorąc niektóre z różniczek dx, dy, dz ... (lub przyrostków Δx, Δy, Δz ..., bo różniczki dowolne zmiennych niezależnych, są ich przyrostkami nieskończenie małemi) ze znakami przeciwnemi. Rozpatrzymy warunki pod jakimi wyrażenie d^2f nie zmienia znaku, z jakimkolwiek znakiem weźniemy różniczki (czy przyrostki nieskończenie małe) zmiennych niezależnych.

Zadanie to postawimy w następujący sposób : założymy, że wszystkie różniczki czy przyrostki nieskończenie małe dx, dy, dz ... zmiennych niezależnych, które są dowolnemi, zmieniają się od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą oznaczoną ilością, i będziemy szukać pod jakiemi warunkami zmienność ta nie wpłynie na zmianę znaku d^2f.

Załóżmy

$$dx = \frac{\varepsilon}{E}\xi\,,\ dy = \frac{\varepsilon}{E}\eta\,,\ dz = \frac{\varepsilon}{E}\zeta\ \ldots$$

gdzie E jest ilością dodatną, mogącą zwiększać się nieograniczenie : gdy dx, dy, dz ... zmieniają się od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$ ilości ξ, η, ζ ... zmieniają się od $-E$ do $+E$: ilości więc ξ, η, ζ ... są zmiennemi mogącemi przybierać wszelkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Podstawiając wartości te w wyrażenie (5), otrzymamy

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{E^2}{\varepsilon^2}d^2f = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\xi\eta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\xi\zeta + \ldots \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\eta\zeta + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

aby więc d^2f nie zmieniało znaku, trzeba żeby druga strona wyrażenia (6) była stale dodatną, lub stale odjemną dla wszelkich wartości zmiennych ξ, η, ζ .... Lecz to wyrażenie po drugiéj stronie (6), które nazwiemy przez skrócenie W, jest funkcją całkowitą, jednorodną drugiego stopnia zmiennych ξ, η, ζ ... w liczbie m téj saméj, co liczba zmiennych niezależnych od któréj zależy funkcja dana: warunek więc szukany sprowadza się do warunku, żeby funkcja całkowita, jednorodna, m zmiennych niezależnych nie zmieniała znaku, dla wszelkich wartości jakie zmienne przybrać mogą od $-\infty$ do $+\infty$.

Nazwijmy jeszcze przez skrócenie

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{A} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\eta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\zeta + \ldots = \mathrm{P} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\zeta^2 + \ldots = \mathrm{Q} \end{cases}$$

wyrażenie (6) stanie się

$$(8)\qquad \mathrm{W} = \mathrm{A}\xi^2 + 2\mathrm{P}\xi + \mathrm{Q}$$

Ponieważ dla η, ζ ... równych zeru, tak P jak Q stają się zerami, aby W nie zmieniało znaku dla żadnéj wartości ξ, trzeba żeby A było stale dodatném lub stale odjemném (jeżeli nie jest zerem). Przypuśćmy że

$$\mathrm{A} > 0$$

nazwijmy

$$(9)\qquad \mathrm{W}_1 = \mathrm{AQ} - \mathrm{P}^2$$

przez co (8) stanie się, mnożąc przez A

$$(10)\qquad \mathrm{AW} = (\mathrm{A}\xi + \mathrm{P})^2 + \mathrm{W}_1$$

Dwumian $A\xi + P$ staje się zerem dla $\xi = -\frac{P}{A}$: aby więc W, a zatém i AW było dodatném dla wszelkich wartości ξ, trzeba żeby

$$W_1 > 0$$

warunek ten konieczny, jest zarazem dostatecznym, bo gdy $W_1 > 0$, druga strona (10) jest dodatną.

W_1 jest funkcją całkowitą drugiego stopnia wszystkich zmiennych z wyjątkiem ξ, a zatém $m-1$ zmiennych η, ζ... Rozumując na niéj jak na funkcji W, wyprowadzimy warunek, że pewna ilość

$$A_1 > 0$$

i nadto, że pewne wyrażenie

$$W_2 > 0$$

gdzie W_2 jest funkcją $m-2$ zmiennych ζ . . . . Postępując tak daléj, otrzymamy m warunków

$$(11) \qquad A > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \ldots, A_{m-1} > 0$$

koniecznych i dostatecznych, żeby W było stale dodatném, to jest d^2f stale większém od zera, a funkcja dana najmniejszością.

W podobny sposób, otrzymalibyśmy m warunków koniecznych i dostatecznych, żeby W było stale mniejszém od zera, a funkcja dana największością.

Aby więc funkcja m zmiennych niezależnych mogła być najmniejszością lub największością dla wartości zmiennych niezależnych, dla których wszystkie pochodne częściowe pierwszego rzędu są zerami, nie jest dostateczném żeby pochodna zupełna drugiego rzędu, była różną od zera:

oprócz tego, pochodne częściowe drugiego rzędu funkcji danéj względem zmiennych, czynić muszą zadosyć m warunkom które z łatwością z (11) wyprowadzić można, podstawiając (7). Nie należy również zapominać zastrzeżonego z góry warunku ciągłości funkcji i jéj pochodnych, które bierzemy pod uwagę, jak naprzykład w tym razie pierwszych i drugich pochodnych.

311. W razie gdy zmienne niezależne są w liczbie dwóch x, i y, mamy

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad P = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\eta, \quad Q = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2$$

następnie

$$W_1 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\eta^2$$

warunki aby funkcja $f(x, y)$ dana była najmniejszością, (w przypuszczeniu że pierwsze pochodne częściowe są zerami, a druga pochodna zupełna różną od zera) są więc następujące

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

co pociąga za sobą jeszcze warunek $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$

Warunki największości byłyby

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

bo z (10) widzimy że gdy A odjemne, aby W było odjemném, trzeba zeby W_1 było dodatném, a zatém pierwsza nierówność się zmienia, druga zostaje tą samą.

Warunek więc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

jest koniecznym aby funkcja dwóch zmiennych niezależnych mogła być najmniejszością, lub największością :

Jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ a zatém $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, funkcja jest najmniejszością.

Jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ a zatém $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, funkcja jest największością.

Żadna z pochodnych częściowych $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nie może być tu zerem : bo w takim razie warunek powyższy największości lub najmniejszości, byłby w sprzeczności. Jeżeli nierówność powyższa staje się zerem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

mamy

$$W_1 = 0$$

a wyrażenie (10) pokazuje nam że W jest tego samego znaku co $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: warunki więc nie zostają zmienionemi.

W ogólności, gdyby które z nierówności (11) warunkowych największości lub najmniejszości funkcji ilukolwiek zmiennych niezależnych miały stać się zerami, osobne rozumowanie pokaże z łatwością, czy największość lub najmniejszość może mieć jednak miejsce. (*)

(*) Inną metodę oznaczenia cechy po któréj możnaby poznać czy funkcja dana jest największością czy najmniejszością, patrz w Rocznikach Tow. Naukowego Krakowskiego, r. 1867 t. XII, Professora Zajączkowskiego : *Przyczynek do teorji największości i najmniejszości.*

312. Zdarzyć się może, że dla wartości szczególnych $x_0, y_0, z_0 \ldots$ zmiennych niezależnych, dla których wszystkie pochodne częściowe (3) stają się zerami, pochodna zupełna drugiego rzędu d^2f staje się zerem : w takim razie wzór (1) daje nam

$$\Delta f = \frac{d^3f}{1.2.3} + R_4$$

a że d^3f zmienia znak, gdy różniczki czyli przyrostki nieskończenie małe zmiennych niezależnych weźniemy ze znakiem przeciwnym, że zmiana ta znaku d^3f pociągnęłaby za sobą zmianę znaku przyrostku funkcji Δf, bo R_4 jest nieskończenie małém względem $\frac{d^3f}{1.2.3}$; więc aby powyższe wartości zmiennych niezależnych mogły odpowiadać największości lub najmniejszości funkcji, trzeba żeby

$$d^3f = 0$$

czyli żeby wszystkie pochodne częściowe trzeciego rzędu funkcji danéj były zerami. Wzór (1) da nam wtedy

$$\Delta f = \frac{d^4f}{1.2.3.4} + R_5$$

dalszym warunkiem największości lub najmniejszości będzie, jeżeli d^4f nie jest zerem, aby różniczka ta zupełna czwartego rzędu nie zmieniała znaku, gdy przyrostki nienieskończenie małe zmiennych niezależnych zmieniać będziemy od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą oznaczoną ilością.

W ogólności, warunki powyżéj uważane największości lub najmnieiszości funkcji wielu zmiennych niezależnych, mogą sprowadzić się do trzech następujących :

1° *Żeby funkcja i jéj pochodne wszystkich rzędów uważanych, były ciągłemi przynajmniéj w blizkości tych wartości zmiennych niezależnych, dla których funkcja ma się stać największością lub najmniejszością.*

2° *Żeby pierwsza różniczka zupełna funkcji danéj która nie staje się zerem, była rzędu parzystego.*

3° *Żeby różniczka ta była stale dodatną dla najmniejszości, stale odjemną dla największości, bez względu na to z jakim znakiem weźniemy różniczki zmiennych niezależnych.*

Drugi z tych warunków pociąga za sobą koniecznie równość zeru wszystkich pochodnych częściowych funkcji danéj rzędów niższych od rzędu różniczki zupełnéj, która nie staje się zerem. Trzeci wymaga żeby pochodne częściowe rzędu o którym mowa, czyniły zadość pewnym warunkom, jakeśmy to widzieli [**311**] dla drugiego rzędu.

313. Weźmy naprzykład pod uwagę funkcję dwóch zmiennych niezależnych

$$f(x, y)$$

i przypuśćmy że oprócz równań

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

zachodzą równania

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

warunkiem *koniecznym* największości lub najmniejszości będzie [**312**]

$$d^3f=0, \quad \text{czyli}: \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0.$$

lecz warunek ten nie jest dostatecznym. Mamy bowiem

$$\Delta f = \frac{d^4 f}{1.2.3.4}$$

a jeżeli $d^4 f$ nie jest zerem, potrzeba żeby różniczka ta zupełna czwartego rzędu nie zmieniała znaku, gdy przyrostki nieskończenie małe dx, dy zmiennych niezależnych przechodzą od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą oznaczoną ilością. Mamy [216]

$$d^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4$$

a zakładając jak powyżéj [310]

$$dx = \frac{\varepsilon}{E} \xi \,, \qquad dy = \frac{\varepsilon}{E} \eta$$

gdzie E jest ilością dodatną mogącą się zwiększać nieograniczenie, a zatém ξ i η zmieniają się od $-\infty$ do $+\infty$, gdy dx, dy przechodzą do $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, otrzymamy

$$\frac{E^4}{\varepsilon^4} d^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \xi^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} \xi^3 \eta + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \xi^2 \eta^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \xi \eta^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \eta^4$$

Aby więc $d^4 f$ nie zmieniało znaku gdy dx, dy zmieniają się pomiędzy $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$, trzeba żeby wyrażenie jednorodne czwartego stopnia co do ξ i η po drugéj stronie tego równania nie zmieniało znaku, gdy ξ, η zmieniają się pomiędzy $-\infty$ a $+\infty$. Rachunek możemy przeprowadzić dalej, jak poprzednio; możemy także sprowadzić odrazu zadanie do zadania algebraicznego badania zmiany znaku wielomianu czwartego stopnia. Jakoż, zważywszy na jednorodność powyższego wyrażenia, nazwijmy stosunek $\frac{\xi}{\eta} = \mu$: dzieląc i mnożąc wyrażenie uważane przez η^4 i zważywszy że η^4 jest zawsze dodatném, warunkiem koniecznym i dostatecznym żeby wyrażenie to nie zmieniało znaku gdy η i ξ zmieniają się od $-\infty$ do $+\infty$ będzie, żeby wielomian algebraiczny

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\mu^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\mu^3 + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\mu^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\mu + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

nie zmieniał znaku dla jakiegokolwiek μ. Wiemy z algebry, że warunek ten będzie spełnionym, jeżeli zakładając wielomian ten równym zeru, równanie tak otrzymane będzie zadość czyniło jednemu z następujących warunków:

1⁰ Jeżeli równanie to będzie miało wszystkie cztery pierwiastki urojonemi.

2⁰ Jeżeli dwa pierwiastki będą urojonemi, dwa pozostałe rzeczywistemi i równemi.

3⁰ Jeżeli wszyskie cztery pierwiaski są rzeczywistemi albo wszyskie równemi pomiędzy sobą, albo równemi dwa po dwa.

Spółczynniki tego równania $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ ... otrzymują się z łatwością przez różniczkowanie częściowe funkcji $f(x, y)$. Jeżeli jeden z powyższych warunków zachodzi, $d^4 f$ a zatém i Δf nie zmienia znaku gdy dx, dy zmieniają się od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$, począwszy od uważanych wartości x_0, y_0 zmiennych niezależnych. Dla tych więc wartości zachodzi największość lub najmniejszość: najmniejszość jeżeli pierwszy ze spółczynników który nie staje się zerem i który nadaje znak wielomianowi jest dodatnym, największość w razie przeciwnym.

Jeżeli równanie pomocnicze uważane powyżéj nie czyni zadosyć żadnemu z trzech danych warunków, funkcja nie ma ani największości ani najmniejszości dla uważanych wartości zmiennych niezależnych. Szczególne przypadki jakie zajść mogą, winny być roztrząsanemi zupełnie w podobny sposób jak poprzednio [**311**].

Jeżeliby wszystkie różniczki częściowe czwartego rzędu były zerami, warunkiem koniecznym lecz niedostatecznym największości lub najmniejszości byłaby równość zeru różniczek zupełnych piątego rzędu: warunek dopełniający byłby danym przez roztrząsanie pewnego równania szóstego stopnia i t. d. W ogólności, równania dające warunki dopełniające, są zawsze stopnia parzystego (*).

Przypominamy raz jeszcze, że całe to rozumowanie zakłada że pochodne uważane są ciągłemi, skończonemi w blizkości wartości uważanych zmiennych niezależnych.

Przykłady.

314. Przykład I. *Znaleźć największość funkcji*

(1) $$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\lambda (a - x - y - z - \ldots - u)^\mu$$

zmiennych niezależnych x, y, z ... u *gdzie* α, β, γ ... λ, μ *są wykładnikami całkowitemi dodatnemi.*

Różniczkując funkcję f otrzymamy [**156**] różniczkę logarytmową

(2) $$\frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + \gamma\frac{dz}{z} + \ldots + \lambda\frac{du}{u} - \mu\frac{dx + dy + dz + \ldots + du}{a - x - y - z - \ldots - u}$$

(*) Godną uwagi pracę w tym względzie, prof. Żmurko ogłosił p. t. *Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima*, w pamiętnikach Akademji Wiedeńskiéj na rok 1866; wiadomość zapóźno doszła autora, aby wyciąg stosowny mógł być tu zrobionym.

a różniczkując drugi raz

$$(3)\quad \frac{d^2f}{f}-\left(\frac{df}{f}\right)^2=-\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2-\ldots-\mu\frac{(dx+dy+dz+\ldots+du)^2}{(a-x-y-\ldots-u)^2}$$

Wyłączając wartości 0 zmiennych niezależnych, dla których funkcja f staje się zerem, i które w szczególności roztrząsanemi być winny, pierwsza różniczka zupełna df staje się zerem, jeżeli

$$(4)\qquad \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{z}=\ldots=\frac{\lambda}{u}=\frac{u}{a-x-y-\ldots-u}$$

a odwracając te stosunki i równając je summie liczników podzielonéj przez summę mianowników, (na zasadzie znanéj własności stosunków równych)

$$(4)\qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\ldots=\frac{u}{\lambda}=\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda\ldots+\lambda+\mu}$$

ztąd

$$(6)\quad f=\left(\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda\,\mu}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu}\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma\ldots\lambda^\lambda\mu^\mu$$

Wyrażenie (3) daje nam dla tych wartości

$$d^2f<0$$

bez względu na znaki różniczek dx, dy ... które wchodzą w kwadratach: wartość więc (6) funkcji danéj, odpowiadająca wartościom (5) zmiennych niezależnych, jest największością.

Zakładając

$$a-x-y-z\ldots-u=v$$

zamiast (1) możemy napisać

$$f=x^\alpha y^\beta z^\gamma\ldots u^\lambda v^\mu$$

$$x+y+z+\ldots+u+v=a$$

a warunki (4) zawierają twierdzenie następujące :

Iloczyn potęg całkowitych wielu zmiennych, których summa jest stałą, jest największością dla wartości zmiennych proporcjonalnych odpowiednim wykładnikom.

W szczególnym przypadku, jeżeli $\alpha = \beta = \gamma \ldots = \lambda = \mu = 1$, widzimy że : *iloczyn wielu zmiennych których summa jest stałą, j największością, gdy wszystkie zmienne są sobie równe.*

315. Przykład II. *Znaleźć największości i najmniejszości odległości dwóch punktów znajdujących się odpowiednio na dwóch krzywych danych.*

Krzywe przypuszczamy odniesione do spółrzędnych prostokątnych OX, OY, OZ w przestrzeni : nazwijmy x, y, z spółrzędne punktów pierwszéj krzywéj, x', y', z', spółrzędne punktów drugiéj krzywéj : odległość dwóch punktów z których jeden znajduje się na pierwszéj, drugi na drugiéj krzywéj, będzie przekątną równoległościanu prostokątnego, którego krawędziami będą : $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$: wartością téj odległości będzie zatém

$$D = \sqrt{(x - x')^2 + (y - x')^2 + (z - z')^2}$$

wyrażenie, które będzie największością lub najmniejszością, jednocześnie ze swym kwadratem

$$(1) \qquad D^2 = W = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Wyrażenie W jest funkcją sześciu zmiennych x, y, z, x', y', z między któremi zachodzą cztery równania dwóch krzywych danych każdą z krzywych zakładamy daną przez dwa równania pomiędzy trzema zmiennemi odpowiedniemi [65]. W rzeczywistości więc mamy tylko dwie zmienne niezależne, które niech będą x i x'. Pochodne częściowe pierwszego rzędu W, względem tych zmiennych niezależnych są dane przez

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial x} = (x - x') + (y - y')\dfrac{\partial y}{\partial x} + (z - z')\dfrac{\partial z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial x'} = -(x - x') - (y - y')\dfrac{\partial y'}{\partial x'} + (z - z')\dfrac{\partial z'}{\partial x'} \end{cases}$$

gdzie $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial y'}{\partial x'}$, $\frac{\partial z'}{\partial x'}$ przypuszczamy dane z równań krzywych.
Pochodne częściowe drugiego rzędu wyrażenia W, będą dane przez

$$(3)\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)+(y-y')\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-z')\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= \left(1+\frac{\partial y'^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial z'^2}{\partial x'^2}\right)-(y-y')\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}-(z-z')\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial x'} &= -\left(1+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x'}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)
\end{aligned}\right.$$

gdzie pochodne częściowe pierwszego i drugiego rzędu, wchodzące po drugiej stronie tych równań, uważamy również jako dane przez równania krzywych. Wartości zmiennych niezależnych dla których W będzie największością lub najmniejszością, czynić muszą zadosyć równaniom [309]

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
(x-x')+(y-y')\frac{\partial y}{\partial x}+(z-z')\frac{\partial z}{\partial x}&=0\\
(x-x')+(y-y')\frac{\partial y'}{\partial x'}+(z-z')\frac{\partial z'}{\partial x'}&=0
\end{aligned}\right.$$

wyłączając zawsze przypadki, w których funkcje lub ich pochodne mogłyby przestać być ciągłemi lub skończonemi. Nadto, aby wartości zmiennych niezależnych czyniące zadosyć (4), mogły odpowiadać największościom lub najmniejszościom wyrażenia W, czynić jeszcze muszą zadosyć warunkowi [311]

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial x'}\right)^2>0$$

jeżeli drugie pochodne nie są zerami, ani nie przestają być ciągłemi skończonemi. Dla wartości zmiennych niezależnych czyniących zadosyć wszystkim powyższym warunkom, zachodzić będzie najmniejszość jeżeli $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2}$ są dodatnemi, największość jeżeli obie te drugie pochodne częściowe są odjemnemi. Zobaczymy poniżéj że równania (4) wyrażają warunek, żeby prosta na której bierzemy odległość szukaną, była prostopadłą do stycznych wyprowadzonych do krzywych w punktach przecięcia się jéj z krzywemi danemi: czyli *normalną* do obu krzywych.

W szczególnym przypadku, niech będą dwie proste w przestrzeni dane przez równania

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases} \qquad \text{i (B)} \quad \begin{cases} x' = a'z' + \alpha' \\ y' = b'z' + \beta' \end{cases}$$

Mamy w tym razie

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{b'}{a'}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{1}{a'}$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} = 0$$

Równania (4) stają się

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0$$
$$a'(x - x') + b'(y - y') + (z - z') = 0$$

układ, który możemy zastąpić przez następujący, otrzymany rugując kolejno $z - z'$, $y - y'$, $x - x'$

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} (a' - a)\,(x - x') + (b' - b)\,(y - y') = 0 \\ (ba' - ab')(x - x') - (b' - b)(z - z') = 0 \\ (ba' - ab')(y - y') + (a' - a)(z - z') = 0 \end{cases}$$

Lecz z równań prostych danych (A) i (B), wyprowadzamy

$$(b' - b)\,(x - x') - (a' - a)\,(y - y') + (ba' - ab')\,(z - z')$$
$$= (a' - a)\,(\beta' - \beta) - (b' - b)\,(\alpha' - \alpha)$$

podnosząc do kwadratu to równanie i każde z równań (E), następnie dodając, mamy

$$[(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2]\,W$$
$$=[(a'-a)(\beta'-\beta)-(b'-b)(\alpha'-\alpha)]^2$$

a ztąd

$$\sqrt{W}=\frac{(a'-a)(\beta'-\beta)-(b'-b)(\alpha'-\alpha)}{\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-ba')^2}}$$

wyrażenie *najkrótszéj odległości* dwóch prostych.

Jakoż, wyrażenie to odpowiada w rzeczy saméj najmniejszości, jak widzimy podstawiając (C) i (D) w równania (3) i (5).

316. Przykład III. *Znaleźć największości i najmniejszości odległości punktu danego od powierzchni danéj.*

Niech będzie

(1) $$F(x, y, z)=0$$

równanie powierzchni odniesionéj do układu osi prostokątnych; x_0, y_0, z_0, spółrzędne punktu danego M_0; kwadratem odległości punktu M_0 od jakiegokolwiek punktu x, y, z powierzchni, będzie

(2) $$W=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

wyrażenie, którego zamierzamy szukać największości i najmniejszości. Uważając z jako funkcję zmiennych niezależnych x i y z równania (1), mamy [**218**]

(3) $$\left\{\begin{aligned} dz&=pdx+qdy\\ dp&=rdx+sdy\\ dq&=sdx+tdy\end{aligned}\right.$$

gdzie oznaczamy jak zwykle przez skrócenie

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

pochodne częściowe funkcji z danéj przez (1) względem zmiennych niezależnyyh x i y.

Różniczkując wyrażenie (2), otrzymamy

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial x} = (x - x_0) + p\,(z - z_0) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial y} = (y - y_0) + q\,(z - z_0) \end{cases}$$

a różniczkując powtórnie

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} = (1 + p^2) + r\,(z - z_0) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} = (1 + q^2) + t\,(z - z_0) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = pq + s\,(z - z_0) \end{cases}$$

Zakładając jeszcze przez skrócenie

$$(6)\qquad \begin{cases} A = rt - s^2 \\ B = (1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t \\ C = 1 + p^2 + q^2 \end{cases}$$

równania (5) dadzą nam

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2\right] = A\,(z - z_0)^2 + B\,(z - z_0) + C$$

wyrażenie, które [311] ma być większém od zera, dla wszelkich wartości zmiennych odpowiadających najmniejszościom lub największościom W. Największości więc i najmniejszości W, czynić muszą zadość równaniom

$$(7)\qquad \begin{cases} (x - x_0) + p\,(z - z_0) = 0 \\ (y - y_0) + q\,(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

równaniom wyznaczającym prostę, która jak zobaczemy poniżéj jest *nor-*

malną (prostopadłą do płaszczyzny stycznéj) do powierzchni; równania (7) wraz z równaniem powierzchni, wyznaczają spółrzędne x, y, z punktu M przecięcia się téj normalnéj z powierzchnią, którego odległość od punktu danego M_0, jest szukaną największością lub najmniejszością.

Przytém zachodzić musi warunek :

$$(8) \qquad A(z-z_0)^2+B(z-z_0)+C>0$$

Weźmy pod uwagę różne położenia jakie punkt dany M_0 mieć może na normalnéj danéj przez równania (7), położenia dane przez różne wartości dane z_0. Pierwsza strona nierówności (8) jest trójmianem drugiego stopnia co do z_0. Rozłóżmy ten trójmian na dwa czynniki pierwszego stopnia wiadomym sposobem ; nazwijmy Z wartość z_0 dla któréj trójmian staje się zerem :

$$(9) \qquad A(z-Z)^2+B(z-Z)+C=0$$

Pierwiastki tego równania co do Z, są zawsze rzeczywistymi : albowiem rozwiązując je co do $z-Z$, otrzymamy pod znakiem pierwiastkowym wyrażenie

$$B^2-4AC=(1+p^2)(1+q^2)p^2q^2\left(\frac{2s}{pq}-\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right)^2$$
$$+(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right)^2$$

zawsze dodatne. Nazwijmy z', z'' pierwiastki równania (9) rozwiązanego co do Z : wyrażenie pierwszéj strony tego równania będzie

$$A(z'-Z)(z''-Z)$$

a że $A=rt-s^2$, nierówność (8) będzie mogła być napisaną

$$(10) \qquad (rt-s^2)(z'-z_0)(z''-z_0)>0$$

Niech będą M', M'' dwa punkta normalnéj (7) dla których

$z_0 = z'$, $z_0 = z''$: warunek (8) lub (10) który jest warunkiem koniecznym najmniejszości lub największości, wyraża geometrycznie:

1° jeżeli $rt - s^2 > 0$, że punkt M_0 nie może się znajdować pomiędzy M i M″: bo w takim razie mielibyśmy $z_0 > z'$, $z_0 < z''$ (przypuściwszy że $z' < z''$) a zatém pierwsza strona (10) byłaby odjemną.

2° jeżeli $rt - s^2 < 0$, że punkt M_0 nie może się znajdować tylko pomiędzy punktami M′ i M″: bo gdyby się znajdował na zewnątrz tych punktów, iloczyn $(z' - z_0)(z'' - z_0)$ byłby dodatnym, a więc pierwsza strona (10) odjemna. (Szczególny przypadek $rt - s^2 = 0$, musi być rozebranym oddzielnie).

Aby teraz odróżnić największość od najmniejszości, zauważmy, że jeżeli warunek (8) zachodzi, wyrażenie

$$q^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + p^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

nie może stać się zerem, a zatém jest tego samego znaku co pochodne

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

summa więc tych trzech wyrażeń,

$$(1 + q^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

będzie jeszcze tego samego znaku co pochodne $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, odjemną w przypadku największości, dodatną w przypadku najmniejszości. Na zasadzie więc (5) i (6), zachodzić będzie

$$\text{(11)} \qquad B(z - z_0) + 2C < 0$$

w razie największości, zaś

$$\text{(12)} \qquad B(z - z_0) + 2C > 0$$

w razie najmniejszości. Lecz z równania (9) którego pierwiastkami są : z' i z'', otrzymujemy

$$\frac{B}{C} = -\frac{1}{z - z'} - \frac{1}{z - z''}$$

więc wyrażenie

$$\frac{z_0 - z'}{z - z'} + \frac{z_0 - z''}{z - z'}$$

jest odjemném w razie największości, dodatném, w razie najmniejszości.

Założmy naprzód $rt - s^2 > 0$; dwie wartości $z - z'$, $z - z''$ na $z - Z$ z równania (9) są tych samych znaków; dwa punkta M′ i M″ określone powyżéj, znajdują się na prostéj LP określonéj przez równania (7) po jednéj stronie punktu powierzchni M, danego przez (7) i (1). Lecz różnice $z_0 - z'$ $z_0 - z''$, są także tego samego znaku, jak widzimy z (10) : punkta M′ i M″, są więc także po jednéj stronie względem punktu danego M_0. Widzimy więc, że odległość M_0 M będzie najmniejszością, jeżeli punkta M′, M″ nie są położonemi pomiędzy M_0 i M; największością w razie przeciwnym.

Założmy powtóre $rt - s^2 < 0$; z równania (9) widzimy, że różnice $z - z'$, $z - z''$ są znaków przeciwnych, a punkt M znajduje się na prostéj (7) pomiędzy M′ i M″; lecz warunek (10) pokazuje że $z_0 - z'$ i $z_0 - z''$ są także znaków przeciwnych, to jest że M_0 znajduje się równie jak M pomiędzy M′ i M″. W tym więc razie odległość M_0 M jest zawsze najmniejszością.

Weźmy teraz pod uwagę szczególny przypadek $rt - s^2 = 0$. Warunek (8) staje się w tym razie

$$B(z - z_0) + C > 0$$

nadto, gdy warunek ten zachodzi, nierówność (12) ma także miejsce; zachodzi więc najmniejszość. Jest więc w tym razie jeden tylko punkt normalnéj (7), którego spółrzędna z' czyni zadosyć równaniu

$$B(z - z') + C = 0$$

bo w równaniu (9) $A = rt - s^2 = 0$. Nierówność więc powyższa staje się

$$\frac{z_0 - z'}{z - z'} > 0$$

a zatém żeby mogła zachodzić najmniejszość, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby punkt dany M_0 znajdował się na normalnéj (7), po téj samej stronie względem punktu którego spółrzędna jest z', co punkt M w którym normalna spotyka powierzchnię.

Nakoniec, jeżeli dla spółrzędnych punktu szukanego M, zachodz jednocześnie

$$A=0, \quad B=0$$

warunek (8) sprowadza się do

$$C>0$$

czyli

$$1+p^2+q^2>0$$

warunek, który zawsze ma miejsce; lecz w tym razie zważywszy na wartości (1) A i B, mamy

$$r^2+s^2+(qr-ps)^2=0$$

a więc aby summa tych trzech kwadratów była zerem, trzeba żeby

$$r=0, \quad s=0, \quad t=0.$$

wzory (5) pokazują że zachodzi najmniejszość.

Zobaczymy poniżéj, jak ważne znaczenie mają w teorji powierzchni punkta M' i M'', określone w powyższy sposób.

317. Uwaga p. Bertrand'a. Warunkiem koniecznym aby funkcja była największością lub najmniejszością dla pewnych wartości szczególnych zmiennych niezależnych, jest równość zeru pierwszych pochodnych względem tychże zmiennych, dla powyższych wartości szczególnych, *byleby w blizkości tych wartości, pochodne nie przestały być ciągłemi* [**309**]. Może się zdarzyć przypadek, że pochodne częściowe funkcji, przestają być ciągłemi dla pewnych wartości szczególnych zmiennych, a właśnie te wartości odpowiadają największości lub najmniejszości funkcji; zobaczymy to najlepiéj na następującym przykładzie :

Znaleźć na płaszczyźnie trójkąta punkt, którego summa odległośc od wierzchołków trójkąta jest najmniejszością.

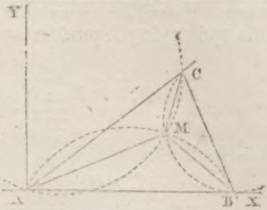


fig. 73.

Niech będzie trójkąt ABC : weźmy bok AB za oś odciętych, prostopadłą do tego boku w punkcie A za oś rzędnych; nazwijmy c bok AB, oznaczmy przez x_0, y_0 spółrzędne punktu C, przez x, y spółrzędne punktu szukanego M. Summa odległości punktu M od wierzchołków trójkąta A, B, C wyrażoną będzie przez

$$W=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

wyrażenie, które jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych x i y, i które powinno być najmniejszością dla pewnych wartości tychże zmiennych, (największości widocznie tu nie zachodzą). Zakładając pochodne częściowe wyrażenia W względem x i y równemi 0, otrzymamy dwa równania :

$$(1)\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

$$(2)\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

wyznaczające dwie krzywe, których przecięcie się będzie punktem szukanym.

Równania te mogą być zastąpione przez inne, dogodniejszego kształtu. Oznaczmy dla tego przez φ, ψ, θ kąty jakie proste AM, BM, CM tworzą z kierunkiem osi AX, licząc te kąty tak, jak gdyby każdy z nich był utworzonym przez odpowiednią prostę naprzód równoległą do AX, i przechodzącą przez odpowiedni z wierzchołków A, B, C i poruszającą się następnie w stronę osi rzędnych, aż do kierunku odpowiedniego AM, BM lub CM. Mamy zatém

$$\text{dos}\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{wst}\,\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{dos}\,\psi = \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \qquad \text{wts}\,\psi = \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}$$

$$\text{dos}\,\theta = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \qquad \text{wst}\,\theta = \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

a równania (1) i (2) stają się

$$\text{dos}\,\varphi + \text{dos}\,\psi + \text{dos}\,\theta = 0$$

$$\text{wst}\,\varphi + \text{wst}\,\psi + \text{wst}\,\theta = 0$$

szyli

$$\text{dos}\,\varphi + \text{dos}\,\psi = -\,\text{dos}\,\theta \qquad \text{wst}\,\varphi + \text{wst}\,\psi = -\,\text{wst}\,\theta$$

Podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$(\text{dos}\,\varphi + \text{dos}\,\psi)^2 + (\text{wst}\,\varphi + \text{wst}\,\psi)^2 = 1$$

a ztąd

$$1 + 2\,\text{dos}(\psi - \varphi) = 0 \qquad \text{lub} \qquad \text{dos}\,(\psi - \varphi) = -\frac{1}{2}$$

Kąt więc $\psi - \varphi$, czyli kąt AMB który ma za dostawę $-\frac{1}{2}$ mierzy $\frac{2}{3}\pi$; a że to samo rozumowanie przeprowadzićby można dla każdego z boków BC, CA, więc punkt M znajduje się na wspólném przecięciu trzech odcinków opisanych na trzech bokach trójkąta jako cięciwach, i obejmujących każdy kąt 120°. Punkt więc szukany M, zamiast być wyznaczonym przez przecięcie się dwóch krzywych danych przez równania (1) i (2), może być również wyznaczonych przez wspólne przecięcie się trzech powyższych odcinków koła: odcinki te wyprowadzone z równań (1) i (2), mogą być uważane jako przedstawiające wypadek tych równań.

Lecz aby łuki powyższych odcinków przecinały się z sobą, a zatém wyznaczały punkt M koniecznem jest i dostatecznem, żeby trójkąt nie zawierał kąta większego od $\frac{2}{3}\pi$. Jeżeli więc w trójkącie znajduje się kąt większy od $\frac{2}{3}\pi$, równania (1) i (2) nie wyznaczają najmniejszości, choć najmniejszość ta widocznie powinna zachodzić.

Lecz uważamy że pierwsze strony tych równań, wyrażające pochodne częściowe wyrażenia W, przestają być ciągłemi, jeżeli zmiennym niezależnym x i y nadamy wartości 0 i 0 lub 0 i c lub x_0 i y_0, odpowiadające wierzchołkom trójkąta: jeżeli więc zachodzi najmniejszość, zachodzić tylko może dla tych wartości, dla których pochodne częściowe przestają być ciągłemi, to jest, w jednym z wierzchołków trójkąta.

W rzeczy saméj, nazwijmy przez b bok AC trójkąta, przez A kąt CAB, przez ρ odległość AM; kąt MAB przez φ, summę odległości AM, BM, CM przez W jak powyżéj: otrzymamy

$$W = \rho + \sqrt{c^2 - 2c\rho \operatorname{dos}\varphi + \rho^2} + \sqrt{b^2 - 2b\rho \operatorname{dos}(A-\omega) + \rho^2}$$

Gdy punkt M, zbliża się do punktu A, stosunek $\frac{\rho}{c}$ staje się coraz mniejszym: wyrażenie

$$\sqrt{c^2 - 2c\rho \operatorname{dos}\varphi + \rho^2} = c\left[1 - 2\left(\frac{\rho}{c}\operatorname{dos}\omega - \frac{\rho^2}{2c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

rozwinięte podług dwumianu Newtona [270] daje

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2 - 2c\rho \operatorname{dos}\varphi + \rho^2} &= c\left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\operatorname{dos}\varphi - \frac{\rho^2}{2c^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{c}\operatorname{dos}\varphi - \frac{\rho^2}{2c^2}\right)^2 - \ldots\right] \\ &= c - \rho \operatorname{dos}\varphi + \rho^2 \frac{\operatorname{wst}^2\varphi}{2c} + \varepsilon\rho^2\end{aligned}$$

nazywając przez ε ilość, która staje się zerem, gdy ρ staje się zerem. Otrzymamy w podobny sposób, podstawiając b za c, $A-\varphi$ za φ, oznaczając przez η, ilość która staje się zerem wraz z ρ:

$$\begin{aligned}&\sqrt{b^2 - 2b\rho \operatorname{dos}(A-\varphi) + \rho^2} \\ &\qquad = b - \rho \operatorname{dos}(A-\varphi) + \rho^2 \frac{\operatorname{wst}^2(A-\varphi)}{2b} + \eta\rho^2\end{aligned}$$

Wyrażenie W stanie się

$$W = (b+c) + \rho\,[1 - \operatorname{dos}\varphi - \operatorname{dos}(A-\varphi)] + \frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\operatorname{wst}^2\varphi}{c} + \frac{\operatorname{wst}^2(A-\varphi)}{b}\right] + (\varepsilon+\eta)\rho^2$$

lub

$$W = (b+c) + \rho\left[1 - 2\operatorname{dos}\frac{1}{2}A\operatorname{dos}\left(\frac{1}{2}A - \varphi\right)\right] + \frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\operatorname{wst}^2\varphi}{c} + \frac{\operatorname{wst}^2(A-\varphi)}{b}\right] + (\varepsilon+\eta)\rho^2$$

Dla $\rho = 0$ to jest, gdy punkt M znajduje się w wierzchołku A

$$W_0 = b + c$$

a dla ρ nieskończenie małego, różnica

$$W - W_0$$

będzie tego samego znaku co

$$1 - 2\operatorname{dos}\frac{1}{2}A\operatorname{dos}\frac{1}{2}(A-\varphi)$$

Gdy $A < \frac{2}{3}\pi$, $2\operatorname{dos}\frac{1}{2}A$ jest większą od 1, więc $W - W_0$ zmienia znak, gdy przechodzimy od punktu A do punktu nieskończenie zbliżonego płaszczyzny w różnym kierunku, to jest, gdy zmieniamy ρ: wartość W sąsiednia wartości W_0, może być naprzemian większą i mniejszą od W_0; wartość więc W_0 nie jest największością ani najmniejszością. Lecz gdy $A > \frac{2}{3}\pi$ lub $A = \frac{2}{3}\pi$, spółczynnik

$$1 - 2\operatorname{dos}\frac{1}{2}A\operatorname{dos}\frac{1}{2}(A-\varphi)$$

jest stale mniejszym od 1 jakiekolwiek weźmiemy φ: spółczynnik ten stanie się wprawdzie zerem dla $\varphi = \frac{1}{2}A$, gdy $A = \frac{2}{3}\pi$; lecz ponieważ spółczynnik

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{wst}^2 \varphi}{c} + \frac{\operatorname{wst}^2 (A - \varphi)}{b}\right]$$

w rozwinięciu wyrażenia W jest dodatnym, więc zawsze

$$W > W_0$$

a zatém wyrażenie W_0 będąc mniejszém od wszelkich wyrażeń sąseidnich, gdy $A \geqq \frac{2}{3}\pi$, jest najmniejszością W. Wyrażenie $W_0 = a + b$ jest summą odległości wierzchołka A od wierzchołków A. B, C trójkąta : jeżeli więc trójkąt ma jeden kąt większym lub równym $\frac{2}{3}\pi$, wierzchołek tego kąta jest punktem szukanym.

318. Największości i najmniejszości funkcyj niewyraźnych wielu zmiennych niezależnych. Podany powyżéj sposób szukania największości i najmniejszości funkcyj wielu zmiennych niezależnych, z łatwością rozciągnąć można do funkcyj niewyraźnych; jakoż można zawsze przypuścić, że za pomocą wskazanych działań, funkcje niewyraźne zamienić można na wyraźne; warunki największości i najmniejszości dane będą wówczas przez pochodne, które otrzymać można za pomocą prawidła na różniczkowanie funkcyj niewyraźnych [**217**]. I tak, ponieważ pierwszym warunkiem jest (z wiadomém zastrzeżeniem) równość zeru pierwszych pochodnych częściowych, założyć można odrazu wyrażenie różniczki zupełnéj [**219**] równém zeru, co nam da warunki wspólne największościom i najmniejszościom.

Niech będzie przypadek ogólny n równań

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_{m+n}) = 0 \\ f_2(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_{m+n}) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_{m+n}) = 0 \end{array}\right.$$

pomiędzy $m+n$ zmiennemi $x_1, \ldots x_{m+n}$. Z tych zmiennych, m są niezależnemi naprzykład: $x_1, x_2 \dots x_m$, pozostałe $x_{m+1}, \dots x_{m+n}$ są ich funkcjami na mocy równań (1). Jeżeli szukamy największości i najmniejszości jednéj z nich, naprzykład x_k, różniczkujemy naprzód równania (1), co nam da

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0 \end{cases}$$

następnie rugujemy z tych n równań $n-1$ różniczek $dx_{m+1}, \dots dx_{m+n}$, (z wyjątkiem różniczki dx_k) co nam da wyrażenie kształtu

$$(3) \quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots X_m dx_m + X_k dx_k = 0$$

Warunkiem wspólnym największości i najmniejszości będzie $dx_k = 0$: a że $dx_1, dx_2, \dots dx_m$, jako różniczki zmiennych niezależnych są niezależnemi, aby

$$\frac{X_1}{X_k} dx_1 + \frac{X_2}{X_k} dx_2 + \dots + \frac{X_m}{X_k} dx_m = -dx_k$$

mogło być żerem, trzeba żeby

$$(4) \quad \frac{X_1}{X_k} = 0, \qquad \frac{X_2}{X_k} = 0, \dots \frac{X_m}{X_k} = 0$$

równania w liczbie m które wraz z n równaniami (1) stanowią układ $m+n$ równań, wyznaczający $m+n$ zmiennych. Aby się przekonać czy wartość x_k otrzymana w ten sposób jest największością lub najmniejszością, otrzymać należy wartości drugiéj różniczki zupełnéj d^2x_k i t. d. postępować jak wskazuje sposób ogólny, podany powyżéj.

319. Największości i najmniejszości względne. Są to największości i najmniejszości funkcji wielu zmiennych, czyniących zadosyć pewnym warunkom, to jest, pomiędzy któremi zachodzą pewne równania dane.

Niech będzie funkcja

$$F(x_1, x_2 \ldots x_{m+n})$$

$m+n$ zmiennych niezależnych, pomiędzy któremi zachodzi n równań danych

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots x_{m+n}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_{m+n}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2 \ldots x_{m+n}) = 0 \end{array} \right.$$

chcemy znaleźć największości i najmniejszości funkcji F. Nazwawszy wartość téj funkcji u i dołączywszy do równań (1), równanie

$$(2) \qquad u - F(x_1, x_2, \ldots x_{m+n}) = 0$$

zadanie zostaje sprowadzoném do poprzedzającego: mamy tu bowiem $n+1$ równań (1) i (2), pomiędzy $m+n+1$ zmiennemi

$$x_1, x_2, \ldots x_{m+n}, u$$

szukamy największości i najmniejszości jednéj z tych zmiennych u.

Różniczkując układ (1), otrzymamy

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}}dx_{m+n}=0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}}dx_{m+n}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}dx_{m+n}=0 \end{array}\right.$$

n równań, które w połączeniu z równaniem

$$(4)\quad \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_{m+n}}dx_{m+n}=0$$

otrzymaném różniczkując (2) i zakładając po zróżniczkowaniu, różniczkę zupełną du równą zeru, jako warunek konieczny (zawsze z zastrzeżeniem ciągłości pochodnych częściowych), największości i najmniejszości funkcji u, pozwolą wyrugować n różniczek, naprzykład $dx_{m+1} \ldots dx_{m+n}$. Zakładając spółczynniki pozostałych m różniczek x_1, $x_2 \ldots x_m$ równemi zeru, otrzymamy m równań, które w połączeniu z n równaniami danemi (1), wyznaczą wartości $m+n$ zmiennych $x_1 \ldots x_{m+n}$, dla których funkcja F może być największością lub najmniejszością.

Rugowanie może być uskutecznioném za pomocą sposobu spółczynników nieoznaczonych. Pomnóżmy równania (3) odpowiednio przez spółczynniki $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, które mają być wyznaczonemi następnie tak, aby spółczynniki różniczek $dx_{m+1} \ldots dx_{m+n}$, stały się równemi zeru; dodajmy tak otrzymane równania do równania (4), i załóżmy równemi zeru spółczynniki wszystkich różniczek dx_1, $dx_2 \ldots dx_{m+n}$, jedne jako spółczynniki różniczek zmiennych niezależnych, drugie na mocy określenia spółczynników niezależnych

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n;$$

otrzymamy $m+n$ równań:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}+\ldots+\lambda_n\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}+\ldots+\lambda_n\dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{m+n}}+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+n}}+\ldots+\lambda_n\dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}=0 \end{cases}$$

które będą temi samemi, jakiekolwiek m ze zmiennych danych zechcemy uważać za niezależne. Z równań tych wyrugujemy n spółczynników $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, otrzymamy jeszcze m równań, które z n danemi (1) pozwolą nam otrzymać wartości szukane $m+n$ zmiennych $x_1 \ldots x_{m+n}$.

Rugowanie za pomocą spółczynników nieoznaczonych, które ostatecznie prowadzi do tego samego wypadku, co rugowanie w jakikolwiekbądź inny sposób, nastręcza nam ciekawą uwagę:

Gdyby zmienne $x_1, x_2 \ldots x_{m+n}$ były wszystkie niezależnemi, warunek największości i najmniejszości funkcji F, sprowadziłby się do układu równań

$$(6)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0 \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{m+n}}=0$$

lecz że pomiędzy zmiennemi $x_1, x_2 \ldots x_{m+n}$ zachodzą równania (1), warunek największości i najmniejszości funkcji F, $m+n$ zmiennych, z których m tylko są niezależnemi, jest ten sam, co warunek najmniejszości funkcji następującéj

$$F+\lambda f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_n f_n$$

gdzie wszystkie zmienne $x_1, x_2 \ldots x_{m+n}$ w skład jéj wchodzące, są uważane za niezależne, a spółczynniki λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ są stałemi nieoznaczonemi : jakoż w tym ostatnim razie otrzymamy równania (5) odpowiednie zupełnie równaniom (6).

Przykłady.

320. Przykład 1. *Utworzyć z boków danych wielokąt największy co do powierzchni.* Oznaczmy przez x_1, y_1, x_2, $y_2 \ldots x_n$, y_n, spółrzędne nieznane n wierzchołków wielokąta. Powierzchnia jego będzie miała wyrażenie

$$(1) \quad W = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 + y_2) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}(x_n - x_1)(y_1 + y_n)$$

lub

$$(2) \quad W = \frac{1}{2}[y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \ldots$$
$$+ y_n(x_{n-1} - x_1)]$$

wyrażenie które ma być największością; (najmniejszość wyraźnie nie zachodzi, lub zachodzi gdy wielokąt staje się linją prostą).

Warunki, jakim czynić zadosyć winny zmienne x_1, $x_2 \ldots x_n$, y_1, $y_2 \ldots y_n$ w liczbie $2n$, są następujące :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ a_2^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^2 = (x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 \end{array} \right.$$

nazywając a_1, $a_2 \ldots a_n$, boki dane wielokąta.

Warunek największości $dW = 0$, staje się tu

$$(4) \quad dy_1(x_n - x_2) + dy_2(x_1 - x_3) + \ldots + dy_n(x_{n-1} - x_1)$$
$$+ y_1 d(x_n - x_2) + y_2 d(x_1 - x_2) \ldots + y_n d(x_{n-1} - x_1) = 0$$

Różniczkowanie równań (3), daje nam

$$(5)\quad \begin{cases} (x_1 - x_2)\, d(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, d(y_1 - y_2) = 0 \\ (x_2 - x_3)\, d(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)\, d(y_2 - y_3) = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (x_n - x_1)\, d(x_n - x_1) + (y_n - y_1)\, d(y_n - y_1) = 0 \end{cases}$$

równania, za pomocą których wyrugować można z (4) różniczki $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$. Każda z tych różniczek, znajduje się tylko w dwóch równaniach (5): znajdziemy z łatwością spółczynniki przez które pomnożyć należy odpowiednie równania, aby dokonać rugowania przez dodawanie; otrzymamy na wypadek równanie kształtu

$$(6)\qquad k_1\, dy_1 + k_2 dy_2 + \ldots + k_n dy_n = 0$$

gdzie oznaczyliśmy

$$k_1 = x_n - x_2 + (y_n + y_1)\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} - (y_1 + y_2)\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$k_2 = x_1 - x_3 + (y_1 + y_2)\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - (y_2 + y_3)\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

$$k_3 = x_2 - x_4 + (y_2 + y_3)\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - (y_3 + y_4)\frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$k_n = x_{n-1} - x_1 + (y_{n-1} + y_n)\frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} - (y_n + y_1)\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$

Gdybyśmy chcieli teraz stosować prawidło ogólne, należałoby założyć zero każdy ze spółczynników $k_1, k_2 \ldots k_n$. Lecz tego uczynić nie możemy, bośmy zapomnieli dołączyć do równań (3) wyrażających warunek, żeby wielokąt miał boki dane, jeszcze jednego koniecznego warunku, żeby wielokąt był zamkniętym: ten ostatni warunek, zaprowadza związek pomiędzy $y_1, y_2, \ldots y_n$, związek na mocy którego równanie (6), niekoniecznie pociąga za sobą równość zeru spółczynników $k_1, k_2 \ldots k_n$. Warunek powyższy, wyrażonym być może zakładając, że summa rzutów boków wielokąta na oś odciętych, jest równą zeru, to jest że summa wartości $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots x_n - x_1$, otrzymanych z (3), jest równą zeru. Równanie odpowiednie warunkowe pomiędzy $y_1 \ldots y_n$ otrzymać można wyciągając z (3) wartości

$$dx_1 - dx_2,\ dx_2 - dx_3, \ldots dx_n - dx_1$$

izakładając ich summę równą zeru. Otrzymamy w ten sposób równanie

$$h_1\, dy_1 + h_2 dy_2 + \ldots + h_n dy_n = 0 \tag{7}$$

gdzie

$$h_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$

$$h_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$h_n = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} - \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}$$

Równanie (6) ma miejsce dla wszelkich wartości $dy_1 \ldots dy_n$ czyniących zadość (7): warunkiem więc największości będzie proporcjonalność spółczynników (6) i (7), czyli

$$\frac{k_1}{h_1} = \frac{k_2}{h_2} = \frac{k_3}{h_3} = \ldots = \frac{k_n}{h_n} \tag{8}$$

równania które wraz z równaniami (3), wyznaczają nam wierzchołki szukanego wielokąta. Z łatwością udowodnić można, że warunki (8) wyrażają własność, że prostopadłe wyprowadzone ze środków boków wielokąta, spotykają się w jednym punkcie, że więc wielokąt może być wpisanym w koło.

321. Przykład II. *Z pomiędzy wielokątów równoobwodowych o danéj liczbie boków, wyznaczyć wielokąt którego powierzchnia jest największą.*

Przyjmując to samo znakowanie co w poprzedzającym przykładzie, wyrażenie które ma być największością, będzie:

$$W = \frac{1}{2}\left[y_1(x_n - x_2) + y_2\,(x_1 - x_3) + \ldots + y_n\,(y_{n-1} - x_n)\right] \tag{1}$$

a zakładając jak powyżéj

$$
(2)\quad \begin{cases} a_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ a_2^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^2 = (x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 \end{cases}
$$

jedyném równaniem warunkowém pomiędzy zmiennemi $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$, będzie

$$
(3)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = l
$$

oznaczając przez l obwód dany wielokąta. Równanie to daje nam

$$
(4)\qquad da_1 + da_2 + \ldots da_n = 0
$$

lub podstawiając za $da_1, da_2 \ldots da_n$ wartości z (2)

$$
(5)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{(x_1 - x_2)\, d\,(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, d\,(y_1 - y_2)}{a_1} \\ \quad + \dfrac{(x_2 - x_3)\, d\,(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)\, d\,(y_2 - y_3)}{a_2} + \ldots \\ \quad + \dfrac{(x_n - x_1)\, d\,(x_n - x_1) + (y_n - y_1)\, d\,(y_n - y_1)}{a_n} \end{cases}
$$

Równanie $dW = 0$, warunkowe największości staje się:

$$
(6)\quad \begin{cases} 0 = dy_1(x_n - x_2) + dy_2(x_1 - x_3) + \ldots + dy_n(x_{n-1} - x_1) \\ \quad - dx_1(y_n - y_2) - dx_2(y_1 - y_3) - \ldots - dx_n(y_{n-1} - y_1) \end{cases}
$$

a podstawiwszy równanie (5) pod kształtem

$$
(7)\quad A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n + B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_n dy_n = 0
$$

różniczki znajdujące się w tém równaniu, muszą czynić zadość równaniu (6), zresztą są niezależnemi; co pociąga za sobą proporcjonalność spółczynników, czyli równania

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{y_n-y_2}=\dfrac{A_2}{y_1-y_3}=\dfrac{A_3}{y_2-y_4}=\ldots=\dfrac{Ar}{y_{n-1}-y_n}\\[2ex]\dfrac{B_1}{x_n-x_2}=\dfrac{B_2}{x_1-x_3}=\dfrac{B_3}{x_3-x_4}=\ldots=\dfrac{B_n}{x_{n-1}-x_n}\end{array}\right.$$

$$\frac{A_1}{B_1}=-\frac{x_n-x_2}{y_n-y_2}$$

Nazwijmy α_p kąt zawarty pomiędzy bokiem a_p wielokąta a osią odciętych: β_p kąt z osią odciętych przekątnéj łączącéj wierzchołek (x_{p-1}, y_{p-1}) z wierzchołkiem (x_{p+1}, y_{p+1}); ostatnie z równań (8) staje się, podstawiając za A_1, B_1, ich wartości

$$\frac{\operatorname{wst}\alpha_1-\operatorname{wst}\alpha_n}{\operatorname{dos}\alpha_1-\operatorname{dos}\alpha_n}=-\frac{\operatorname{dos}\beta_1}{\operatorname{wst}\beta_1}$$

czyli

$$\frac{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_n)}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_n)}=-\frac{\operatorname{dos}\beta_1}{\operatorname{wst}\beta_1}$$

a ztąd

$$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_n)=\beta_1+m\pi$$

oznaczając przez m liczbę całkowitą.

Kierunek więc wyznaczony przez kąt β_1 tworzy kąty równe z bokami a_n i a_1: lecz kierunek ten, czyli przekątna, jest podstawą trójkąta którego boki są a_n i a_1; trójkąt ten jest więc równoramiennym, czyli

$$a_n=a_1$$

W podobny sposób dowiedlibyśmy, że wszystkie boki są sobie równe: mając więc dany obwód wielokąta l, i liczbę boków n, mamy dane boki z których każden równym jest $\frac{l}{n}$; zadanie zostaje sprowadzoném do poprzedzającego, które nam wyznacza wielokąt mogący być wpisanym w koło: wielokąt szukany, jest więc wielokątem foremnym.

Uwaga. Aby rozwiązanie dwóch powyższych zadań było zupełnie ścisłém, należy wziąść pod uwagę drugą pochodną zupełną d^2W, i dowieśc że ta pochodna jest mniejszą od zera: poszukiwanie to pozostawiamy czytelnikowi.

Cwiczenia.

1. *Mając daną długość łuku znaleźć promień koła taki, aby łukowi danemu odpowiadał odcinek jak największy.*

Odp. Łuk ma tworzyć półokręgu koła szukanego.

2. *W pewnym punkcie danéj prostopadłéj do płaszczyzny, znajduje się punkt świecący; na płaszczyznie zaś daną jest z długości i położenia prosta, która przedłużona przechodzi przez spodek prostopadłéj. W jakiej wysokości nad płaszczyzną ma się znajdować punkt świecący, aby oświetlenie prostéj było największém.*

Odp. Nazwijmy A spodek prostopadłéj, S punkt świecący, BC prostą daną, która przedłużona pzzechodzi przez A: niech będzie $BC = a$, $AB = b$.

Szukając największości kąta CSB, otrzymamy

$$\text{st CSB} = \frac{a}{2\sqrt{b(a+b)}}$$

szukana zaś wysokość AS, będzie

$$AS = \sqrt{b(a+b)}$$

3. *Dwie ściany równoległe stoją w odległości danéj* a. *W jednéj ze ścian znajduje się otwór wysokości* h; *znaleźć najdłuższą belkę prostą, którą wprowadzić można przez otwór pomiędzy dwie ściany, przypuszczając że belka wypełnia całą szerokość otworu.*

Odp. Aby belka długości l mogła być wprowadzoną przez otwór pomiędzy dwie ściany, trzeba żeby zachodził warunek:

$$l^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \leqq h^{\frac{2}{3}}$$

4. *Utworzyć naczynie otwarte kształtu walcowego, danéj objętości* a,

danéj grubości ścian b, *tak żeby ilość materjału użytego na to naczynie była jak najmniejszą.*

Odp. Promień wewnętrzny naczynia, ma być równym jego wysokości.

5. *Znaleść na płaszczyznie punkt, którego summa odległości od dwóch punktów danych po jednéj stronie płaszczyzny, jest jak najmniejszą.*

Odp. Proste łączące punkta dane z punktem szukanym, tworzą z płasczyzną kąty równe.

6. *Znaleźć na prostéj łączącéj środki dwóch kul, położenie punktu świecącego takie, aby summa powierzchni oświeconych na obu kulach była jak największą.*

Odp. Oznaczywszy przez r i r' promienie dane kul, przez a odległość środków (przypuszczamy $d > r + r'$) : przez x odległość punktu szukanego od środka kuli promiennia r, otrzymamy

$$x = a\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}} + r'^{\frac{2}{3}}}$$

7. *Znaleźć największą elipsę, jaką można otrzymać przecinając ostrokrąg prosty dany przez płasczyznę.*

Odp. Oznaczając przez a wysokość ostrokręgu, przez b promień jego podstawy, jeden wierzchołek elipsy będzie się znajdował na podstawie ostrokręgu, rzut zaś drugiego wierzchołka na podstawę będzie w odległości x od środka danéj przez równanie

$$3(a^2 + b^2)x^2 - 4b(a^2 - b^2)x + b^2(a^2 + b^2) = 0$$

Pierwiastki tego równania będą rzeczywisytmi, jeżeli

$$a > b(2 + \sqrt{3})$$

to jest jeżeli kąt u wierzchołka ostrokręgu jest mniejszym od 30°. Jeżeli pierwiastki tego równania są urojonemi, największość zachodzi gdy elipsa zlewa się z podstawą ostrokręgu, na mocy rozumowania podobnego jak w [308].

8. *Utworzyć ostrokrąg ścięty, tak, żeby mając dany stosunek*

promieni dwóch podstaw i daną powierzchnię, objętość jego była jak największą.

Odp. Niech będzie x promień jednéj podstawy, mx promień drugiéj, y wysokość :

$$y=\lambda x\,,\quad x=\sqrt{\frac{a}{\pi\,[1+m^2+(1+m)\sqrt{\lambda^2+(1-m)^2}]}}$$

$$\lambda=\frac{2}{1+m}\sqrt{1+m^4+\sqrt{m^2(1-m^2)^2+(1+m^4)^2}}$$

9. *Naczynie w kształcie równoległościanu prostokątnego, ma pomieścić daną ilość wody, i mieć powierzchnię wewnętrzną jak najmniejszą.*

Odp. a objętość wody, x, y, z trzy krawędzie równoległościanu :

$$x=\sqrt[3]{2a}\qquad y=\sqrt[3]{2a}\qquad z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$$

10. *Wpisać w elipsoidę daną równoległościan jak największy.*

Odp.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ równanie ellipsoidy

$2m$, $2n$, $2p$ trzy krawędzie równoległościanu

$$m=\frac{a}{\sqrt{3}},\qquad n=\frac{b}{\sqrt{3}},\qquad p=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

11. *Znaleźć trójkąt najmniejszégo obwodu wpisany w trójkąt dany.*

Odp. Trójkąt otrzymany łącząc spodki prostopadłych poprowadzonych z wierzchołków na boki przeciwległe trójkąta danego.

12. *Opisać na trójkącie danym elipsę jak najmniejszą.*

Odp. Środek elipsy jest w środku ciężkości trójkąta (na linji łączącéj środek podstawy z wierzchołkiem w odległości $\frac{2}{3}$ od wierzchołka, $\frac{1}{3}$ od podstawy), a jego powierzchnia równą

$$\frac{2\pi ab\ \mathrm{wst}\ \theta}{\sqrt{3^3}}$$

13. *Wpisać w trójkąt dany elipsę jak największą.*

Odp. Środek elipsy jest w środku ciężkości trójkąta, jéj powierzchnia równą powierzchni trójkąta, pomnożonéj przez π i podzielonéj przez $\sqrt{3^3}$, a punkta styczności są w środku boków trójkąta danego.

14. *Ze wszystkich ostrosłupów trójkątnych mających podstawy i wysokości równe, któren ma powierzchnię najmniejszą.*

Odp. Ten, którego ściany tworzą z podstawą kąty dwuścienne równe.

15. *Wyznaczyć płaszczyzny przechodzące przez środek elipsoidy i przecinające powierzchnię jéj podług okręgów kół, za pomocą warunku, żeby odległość największa lub najmniejsza środka elipsoidy od krzywéj przecięcia, była nieoznaczoną.*

16. *Dowieść, że ze wszystkich trójkątów kulistych równéj powierzchni, trójkąt równoboczny ma najmniejszy obwód.*

17. *Roztrząsnąć, czy wyrażenie*

$$a^2x^2y - 2ax^3y + x^4y - 2ax^2y^2 + 2x^3y^2 + x^2y^3$$

jest największością lub najmniejszością, lub też ani jedną ani drugą dla wartości szczególnéj $x = 0$, $y = 0$ *zmiennych niezależnych.*

18. *Największości i najmniejszości wyrażenia*

$$W = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$$

gdzie x, y, z *są związane przez równanie*

$$a^x b^y c^z = A$$

Odp.

$$W = \frac{[l(Aabc)]^3}{l.a^3 l.b^3 l.c^3}$$

19. *Największości i najmniejszości wyrażenia*

$$W = a\cos^2 x + b\cos^2 y, \qquad \text{gdzie} \qquad y - x = \frac{\pi}{4}$$

Odp.

$$W = \frac{1}{2}\left(a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

znak $+$ odpowiada największości, znak $-$ najmniejszości.

20. *Największość i najmniejszość wyrażenia*

$$W = rx^2 + 2xy + ty^2$$

gdzie zachodzi warunek pomiędzy zmiennemi x *i* y

$$1 = (1 + p^2)\,x^2 + 2pqxy + (1 + q^2)\,y^2$$

Odp. Wyrażenie W czynić musi zadość równaniu :

$$W^2\,(1 + p^2 + q^2) - W\,[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + rt - s^2 = 0$$

21. *Wyznaczyć warunki największości i najmniejszości funkcji trzech zmiennych niezależnych.* Rozciągnąć rozumowanie podane powyżéj [**313**] dla funkcji dwóch zmiennych, do funkcji trzech zmiennych niezależnych.

ROZDZIAŁ XVIII

FUNKCJE ZMIENNYCH UROJONYCH

Określenia. — Ciągłość zmiennych urojonych. — Funkcje jednowartościowe. — Określenie funkcyj zasadniczych zmiennych urojonych. — Funkcje algebraiczne. — Funkcje określone przez szeregi zbieżne. — Funkcja wykładnicza, wstawa, dostawa,... zmiennéj urojonéj. — Funkcje odwrotne.—Logarytmy.— Różniczkowanie funkcyj zmiennych urojonych. — Funkcje jednopochodne. — Funkcje doskonałe.

322. Określenia. *Zmienną urojoną* z nazywamy wyrażenie urojone [**76**]:

$$z = x + yi$$

w którém x i y oznaczają dwie zmienne rzeczywiste jakiekolwiek, zaś $i^2 = -1$.

Funkcją u zmiennéj urojonéj z nazywać będziemy wyrażenie urojone

$$u = \mathrm{X} + \mathrm{Y}i$$

gdzie X i Y oznaczają dwie funkcje jakiekolwiek zmiennych rzeczywistych x i y, wchodzących w wyrażenie z:

$$\mathrm{X} = \varphi(x, y), \qquad \mathrm{Y} = \psi(x, y)$$

Każdemu układowi wartości szczególnych nadanych zmiennym x i y, odpowiadają pewne wartości szczególne funkcji φ i ψ, czyli X i Y: co wyrażamy mówiąc, że każdéj wartości szczególnéj zmiennéj urojonéj z odpowiada jedna lub kilka wartości funkcji u. Funkcja więc u zachowuje się względem zmiennéj urojonéj z, w podobny sposób, jak funkcja zwyczajna względem zmiennéj niezależnéj rzeczywistéj.

Jeżeli x i y zmieniają się w sposób ciągły [25] powiadamy że z zmienia się w sposób ciągły. Jeżeli funkcje x i y są funkcjami ciągłemi zmiennych rzeczywistych X i Y, powiadamy że funkcja u jest *funkcją ciągłą* zmiennéj urojonéj z.

323. Jeżeli zmiennę urojoną przedstawiamy pod postacią [77]:

$$z = \rho(\operatorname{dos}\omega + i \operatorname{wst}\omega)$$

zakładając

$$+\sqrt{x^2+y^2} = \rho, \quad x = \rho \operatorname{dos}\omega, \quad y = \rho \operatorname{wst}\omega$$

funkcja u może być również przedstawioną pod postacią

$$u = P(\operatorname{dos}\Omega + i \operatorname{wst}\Omega)$$

gdzie

$$P = \sqrt{X^2+Y^2},\ \operatorname{dos}\Omega = \frac{X}{+\sqrt{X^2+Y^2}},\ \operatorname{wst}\Omega = \frac{Y}{+\sqrt{X^2+Y^2}}$$

Widzimy więc że moduł funkcji jest funkcją zarazem modułu i argumentu zmiennéj, podobnie jak argument funkcji jest funkcją zarazem modułu i argumentu zmiennéj; zamiast zmiennych x i y podstawić więc zawsze możemy zmienne ρ i ω.

324. Przedstawienie geometryczne funkcyj zmiennych urojonych. Widzieliśmy [78] jak wyrażenie uroone może być przedstawioném przez położenie punktu na płaszczyźnie, odniesione do dwóch osi prostokątnych; przedstawiając w ten sposób zmiennę urojoną z przez położenie punktu m, spółrzędne tego punktu będą zmiennemi x, y, odległość om modułem ρ, kąt mox argumentem ω (fig. 74). Zmienne x i y możemy zmieniać dowolnie od $-\infty$ do $+\infty$, każdemu układowi wartości szczególnych x i y odpowiadać będzie szczególne położenie punktu m na płaszczyźnie. Podobnież podstawiając zmienne ρ i ω, zamiast x i y, i zmieniając ρ od 0 do $+\infty$, zaś

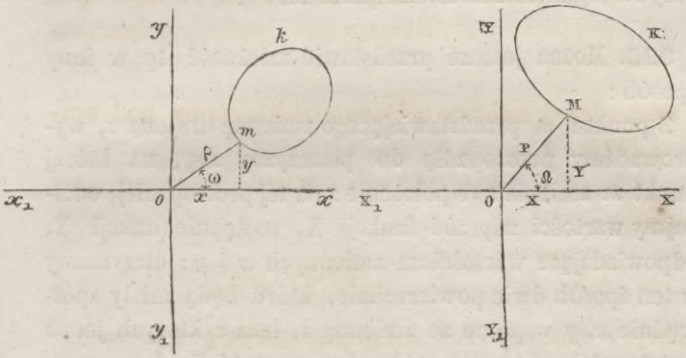


fig. 74,

ω od 0 do 2π, lub od $-\pi$ do $+\pi$ (z wyłączeniem $-\pi$), otrzymać możemy wszelkie możebne położenia punktu m na płaszczyznie, odpowiednie wszelkim możebnym wartościom x i y. Jeżeli zmiennę z (czyli zmienne x i y) zmieniamy w sposób ciągły, punkt m zakreśla krzywę ciągłą na płaszczyźnie.

325. Przedstawiwszy w taki sposób wszelką możebną zmienność z, zobaczmy jak przedstawić można zmienność funkcji u téj zmiennéj z.

Na téj saméj lub na innéj płaszczyznie wykreślmy znów osie prostokątne OX, OY (które mogą być nawet te same co ox, oy), odcinajmy na tych osiach wartości szczególne funkcyj X, Y odpowiadające poprzedzającym wartościom szczególnym x, y; lub wartości Ω i P odpowiadające wartościom ω i ρ : otrzymamy punkt M przedstawiający wartość szczególną funkcji u odpowiadającą wartości szczególnéj zmiennéj z przedstawionéj przez punkt m. Gdy punkt m przebiega na swéj płaszczyznie krzywę dowolną k, punkt M przebiega również krzywę K któréj kształt jest ściśle zależnym od kształtu krzywéj k, na mocy zależności funkcji u od zmiennéj z. Jeżeli u jest funkcją ciągłą zmiennéj z, krzywéj ciągłéj k zakreślonéj przez m, odpowiadać będzie krzywa ciągła K zakreślona przez M.

326. Można jeszcze przedstawić zależność tę w inny sposób :

Z punktu m przedstawiającego zmiennę urojoną z, wyprowadźmy prostopadłą do płasczyzny xoy, na któréj punkt m zmienia swe położenie : na téj prostopadłéj, odcinajmy wartości naprzód funkcji X, następnie funkcji Y, odpowiadające wartościom zmiennych x i y : otrzymamy w ten sposób dwie powierzchnie, które będą miały spółrzędnie x, y wspólne ze zmienną z, lecz z których jedna będzie miała za trzecią spółrzędnę wartość X, druga wartość Y. Te dwie powierzchnie razem wzięte, przedstawiać mogą funkcję u zmiennéj urojonéj z.

Niech będzie naprzykład funkcja

$$u=\sqrt{r^2-x^2-y^2}+(x+y+1)i$$

zmiennéj urojonéj

$$z=x+yi$$

Mamy tu

$$X=\sqrt{r^2-x^2-y^2}, \qquad Y=x+y+1$$

pierwsza powierzchnia, któréj spółrzędne czynią za dosyć równaniu $X^2 + x^2 + y^2 = r^2$ jest kulą, druga któréj spółrzędne wchodzą w pierwszym stopniu, płaszczyzną.

Jeżeli $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ przyjmujemy np. tylko ze znakiem $+$, bierzemy pod uwagę tylko pół kuli, któréj podstawą jest koło zakreślone z punktu o na płaszczyźnie xoy promieniem r; a że z założenia X może przybierać tylko wartości rzeczywiste, punkt m przedstawiający zmienną z będzie mógł poruszać się tylko wewnątrz tego koła. Każdéj krzywéj zakreślonéj przez punkt m na płaszczyźnie xoy odpowiadać będą dwie krzywe: jedna na kuli, druga na płaszczyznie $Y - x - y = 1$; obie te krzywe będą miały rzut wspólny na płaszczyźnie xoy, a tym rzutem jest właśnie krzywa zakreślona przez punkt m.

327. Uwaga. Ilości rzeczywiste mogą być uważanemi jako szczególny przypadek ilości urojonych [**76**]; zmienna urojona

$$z = x + yi$$

stanie się rzeczywistą x, jeżeli $y = 0$; lecz funkcja zmiennéj urojonéj

$$u = \varphi(x,y) + \psi(x,y)i$$

nie koniecznie staje się rzeczywistą, gdy $y = 0$: bo

$$\varphi(x,0) + \psi(x,0)i$$

jest w ogólności wyrażeniem urojoném. Jakoż, nie szukając daléj, naprzykład równanie drugiego stopnia o dwóch zmiennych pomiędzy rzeczywistemi, może dać wartości urojone jednéj z tych zmiennych w funkcji drugiéj, jakkolwiek zmienną niezależną przyjmiemy rzeczywistą. Natomiast funkcja zmiennéj urojonéj może przybierać wartości rzeczywiste: dostatecznym i koniecznym warunkiem tego jest: $\psi(x, y) = 0$; np.

$$u = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

jest zawsze funkcją rzeczywistą zmiennéj urojonéj

$$z = x + yi.$$

Geometrycznie, zmieniając położenie punktu *m*, przedstawiającego zmiennę urojoną z, nie schodząc z osi ox, sprowadzamy zmiennę urojoną do zmiennéj rzeczywistéj: modułem jest wtedy odległość *mo* bez względu na znak, a argumentem 0 lub π stosownie do znaku [**77**] téj zmiennéj. Lecz funkcja u będzi jednak przedstawioną w jeden z powyżéj podanych sposobów, jeżeli chcemy brać pod uwagę jéj wartości urojone. W przedstawieniu drugim sposobem [**326**] funkcji urojonéj zmiennéj rzeczywistéj, dwie powierzchnie sprowadzają się do dwóch linij nakreślonych na płasczyznie prostopadłéj do xoy, przechodzącéj przez oś ox.

328. Uwaga. II. Nie należy sądzić żeby przedstawienie geometryczne ilości urojonych podane powyżéj było *jedyném* a zatém *koniecznem*: a tém samém aby ilości urojone zostawały w nierozdzielnym związku z tém ich przedstawieniem geometryczném. Jest w rzeczy saméj wiele innych sposobów przedstawienia tych ilości, które tu pomijamy.

329. Ciągłość funkcyj zmiennych urojonych. Powiedzieliśmy wyżéj [**322**], że funkcję

$$u = X + Yi \quad \text{lub} \quad u = P(\operatorname{dos}\Omega + i \operatorname{wst}\Omega)$$

zmiennéj urojonéj

$$z = x + yi \quad \text{lub} \quad z = \rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)$$

nazywać będziemy ciągłą, jeżeli funkcje rzeczywiste X i Y są funkcjami ciągłemi zmiennych rzeczywistych x i y.

Zmiennę urojoną z nazywać będziemy nieskończenie wielką lub nieskończenie małą, jeżeli jéj moduł ρ będzie nieskończenie wielkim lub nieskończenie małym. W rzeczy saméj, jeżeli założymy

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

aby Δx i Δy były nieskończenie małemi, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby

$$\mathrm{mod}\,\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

był nieskończenie małym.

Twierdzenie. *Funkcja zmiennéj urojonéj jest ciągłą, jeżeli dla przyrostku nieskończenie małego téj zmiennéj, moduł przyrostku funkcji jest nieskończenie małym.*

Z określenia bowiem, funkcja u jest ciągłą, jeżeli dla przyrostków nieskończenie małych Δx, Δy zmiennych rzeczywistych x, y przyrostki ΔX, ΔY funkcyj rzeczywistych X, Y są nieskończenie małemi. Lecz założywszy

$$\Delta u = \Delta \mathrm{X} + i\Delta \mathrm{Y}$$

aby ΔX i ΔY były nieskończenie małemi, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby

$$\mathrm{mod}\,\Delta u = \sqrt{\Delta \mathrm{X}^2 + \Delta \mathrm{Y}^2}$$

był nieskończenie małym, c. b. d. d.

Geometrycznie, aby dodać do funkcji u przyrostek Δu, trzeba [81] wziąść od punktu M przedstawiającego u, długość równą Δu w kierunku wskazanym argumentem Δu : jakikolwiek będzie ten kierunek. jeżeli moduł Δu jest nieskończenie małym, punkt przedstawiający $u + \Delta u$ jest nieskończenie zbliżonym do punktu M, a więc ciągłość funkcji przedstawiającéj krzywę nie jest zerwaną.

330. Funkcje jednowartościowe. Funkcja jakiejkolwiek zmiennéj może albo przybierać jedną tylko szczególną wartość dla danéj wartości szczególnéj zmiennéj niezależnéj, lub też przybierać wiele wartości dla jednéj i téj saméj wartości zmiennéj niezależnéj.

Tak funkcja określona przez równanie algebraiczne $m$go stopnia, przybierać może w ogólności m wartości różnych dla jednéj i téj saméj wartości zmiennéj niezależnéj: z tych wartości jedne mogą być rzeczywistemi, drugie urojonemi, inne równemi pomiędzy sobą.

Funkcja wyraźna

$$y = x^m$$

ma, w razie m ułamkowego, tyle wartości dla jednego i tego samego x ile jest jednostek w mianowniku m przypuszczając ułamek m sprowadzonym do najprostszego wyrażenia. Wiemy bowiem, że jeżeli $m = \frac{p}{q}$, (gdzie p i q są całkowitemi pierwszemi pomiędzy sobą, przyczém q może być wziętém zawsze dodatném, znak p będzie ten sam co znak m):

$$y = \sqrt[q]{x^p}$$

a choć x^p ma tylko jedną wartość, pierwiastek stopnia q, ma q wartości różnych [82].

Funkcje kołowe:

$$y = \text{łuk wst}\, x, \quad y = \text{łuk dos}\, x, \quad y = \text{łuk st}\, x, \ldots$$

mają dla jednéj i tejże sąméj wartości x nieskończoną liczbę wartości różnych, rzeczywistych, różniących się pewną wielokrotnością π.

331. Te ostatnie funkcje, które dla jednej i téj saméj wartości zmiennéj niezależnéj przybierać mogą dwie, trzy... lub więcéj wartości, staramy się zwykle, dla uniknienia téj wieloznaczności, określić bliżéj, w następujący sposób:

Zakładamy w granicach ciągłości funkcji, że dla pewnéj początkowéj wartości zmiennéj niezależnéj, funkcja przybiera pewną daną wartość początkową i że począwszy od téj wartości zmienna niezależna i funkcja zmieniają się w sposób ciągły. Nieledwie zawsze jeżeli funkcja jest ciągłą, wyznaczyć możemy granice pomiędzy któremi zmieniając zmienną niezależną w powyższy sposób, każdéj wartości téj zmiennéj odpowiadać może jedna tylko wartość funkcji, choć po zatemi granicami może to nie mieć miejsca.

Weźmy naprzód najprostszy przykład funkcji rzeczywistych. Niech będzie funkcja y związana ze zmienną niezależną x, przez równanie

$$y^2 - 2y - x = 0$$

Każdéj wartości zmiennéj x mogą odpowiadać dwie wartości funkcji y

$$y_1 = 1 + \sqrt{1+x} \quad \text{i} \quad y_2 = 1 - \sqrt{1+x}$$

Załóżmy że dla wartości początkowéj $x = 0$, mamy $y = 1 + \sqrt{1} = 2$: przez to założenie obieramy jedną z dwóch powyższych wartości naprzykład y_1, a zmieniając następnie w sposób ciągły x, naprzykład w wartościach dodatnych, jesteśmy pewni, ponieważ y zmienia się także w sposób ciągły [**30**], że same tylko pierwsze wartości y, odpowiadać będą wartościom x: różnica bowiem pomiędzy jakiemkolwiek y_1, i jakiemkolwiek y_2, jest zawsze skończoną większą od 2, (przypuszczając x dodatném); ciągłość więc funkcji nie pozwala, żeby y raz już przybierając z założenia wartości y_1, przeskoczyć mogło kiedykolwiek tę różnicę skończoną i przejść w y_2.

Każdéj wartości zmiennéj niezależnéj x odpowiadać więc może w tém założeniu jedna tylko wartość y.

Lecz zmieniając x w wartościach odjemnych, zbliżających się do -1, dwa gatunki y_1 i y_2 wartości y czyniących zadość równaniu danemu, zbliżają się do równości: bo dla $x = -1$ mamy $y_1 = y_2 = 1$; funkcja może z wartości y_1, stać się dla $x = -1$, równą wartości szczególnéj $+1$, która jest wspólną dla y_1 i y_2: a raz znajdując się na téj wartości może nie przestając być ciągłą, dla zwiększającego się znów x od -1 do $+\infty$, przybierać wartości do woli z gatunku y_1 lub y_2.

Jeżeli więc chcemy żeby funkcja przybierała pewną wiadomą jedyną wartość dla każdéj danéj wartości zmiennéj niezależnéj, możemy zastrzedz:

1° wartość początkową t. j. że dla $x = 0$, $y = 2$:

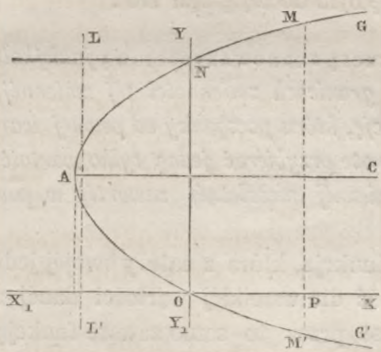
2° granice zmienności t. j. że x może się zmieniać od $+\infty$ do -1 *wyłącznie* nie przybierając nawet wartości nieskończenie zbliżonych do -1.

332. Geometrycznie, funkcje zmiennych rzeczywistych, które dla jednéj i téj saméj wartości zmiennéj niezależnéj przybierać mogą dwie lub więcéj wartości różnych, są to funkcje przedstawione w zwykły sposób [**40**] przez krzywe składające się z wielu gałęzi, lub poprostu mogące być przeciętemi przez równoległe do osi rzędnych w więcéj jak jednym punkcie. Każdéj odciętéj w ogólności odpowiadać może dwie lub więcéj rzędnych, dwa lub więcéj punktów krzywéj. Zakładając wartości, początkowe dane, stawiamy się na jednéj z tych gałęzi: a jeżeli gałęzie nie spotykają się z sobą w granicach pomiędzy którėmi uważamy krzywą, jesteśmy pewni, że postępując w sposób ciągły, znajdować się będziemy zawsze na téj saméj gałęzi, nie mogąc przeskoczyć na inną.

Równanie powyższe

$$y^2 - 2y - x = 0$$

przedstawia parabolę (fig. 75) w układzie spółrzędnych pro-



fig, 75.

stokątnym; każdéj odciętéj OP odpowiadają dwie rzędne PM, PM′; równanie osi AC jest $y = 1$; wartości

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 + x}$$

odpowiadają punktom gałęzi AG, wartości $y_2 = 1 - \sqrt{1 + x}$ punktom gałęzi AG′. Dając wartość początkową dla $x = 0$,

$y = 2 = ON$ stajemy w punkcie N na gałęzi AG, z któréj postępując w sposób ciągły po krzywéj nie możemy przejść na gałęź AM', chyba przechodząc przez punkt A. Jeżeli więc zastrzeżemy że nie będziemy się zbliżać nieograniczenie do punktu A, odciąwszy naprzykład punkt ten (którego spółrzędnemi są $x = OB = -1$, $y = AB = 1$) prostą LL', nieskończenie zbliżoną do AB, biorąc pod uwagę tylko część krzywéj po prawéj stronie téj prostéj jesteśmy pewni że każdéj odciętéj odpowiadać będzie jedna tylko rzędna gałęzi AG.

Rozumie się, że biorąc za wartość początkową $x = 0$ $y = 0$, znaleźlibyśmy się byli na gałęzi AG', a robiąc to samo zastrzeżenie jak powyżéj, rozumowanie następne stosowałoby się było do téj gałęzi AG'.

333. Funkcją jednowartościową *jakiejkolwiek zmiennéj, w pewnych granicach zmienności téj zmiennéj, nazywać będziemy funkcję, która począwszy od pewnéj wartości początkowéj danéj, może przybierać jedną tylko wartość dla wszelkiéj wartości zmiennéj niezależnéj zawartéj w powyższych granicach.*

Wszelka funkcja, która z natury swojéj jedną mieć tylko może wartość dla wszelkiéj wartości danéj zmiennéj niezależnéj, jest przez to samo zawsze funkcją jednowartościową.

Teorja podana w tym rozdziale, posłuży nam nietylko do funkcyj urojonych, ale i do funkcyj rzeczywistych będących tylko szczególnym przypadkiem pierwszych, dla usunięcia niektórych wątpliwości o których wspominaliśmy już poprzednio [**177**].

Funkcja jednowartościowa funkcyj jednowartościowych, jest z określenia funkcją jednowartościową zmiennéj.

334. Określenie powyższe funkcji jednowartościowéj służy dla funkcji zmiennych urojonych, podobnie jak funkcji zmiennych rzeczywistych. Dla funkcyj zmiennych urojonych zawierających rzeczywiste jako szczególny przypadek, przedstawionych geometrycznie w osobny sposób podany powyżéj [**324**], określenie to może być bliżéj objaśnioném.

Wiemy już z powyższego, co rozumieć należy pod wartością zmiennéj urojonéj

$$z = x + yi$$

Wartość ta, odpowiadająca wartościom danym zmiennych rzeczywistych x, y przedstawioną jest przez położenie punktu m, którego spółrzędnemi na płaszczyznie są x i y (fig. 76). Wartość odpowiednia funkcji

$$u = \mathrm{X} + \mathrm{Y}i$$

przedstawioną jest przez położenie innego punktu M, którego spółrzędnemi na płaszczyznie są X i Y. Otóż jednemu położeniu punktu m (jednemu układowi wartości y, x) odpowiadać może jeden punkt M_1, (jeden układ wartości X, Y) lub kilka punktów M_1, M_2...

Ponieważ możemy zmieniać dowolnie x i y w sposób ciągły to jest zakreślać przez punkt m dowolne krzywe

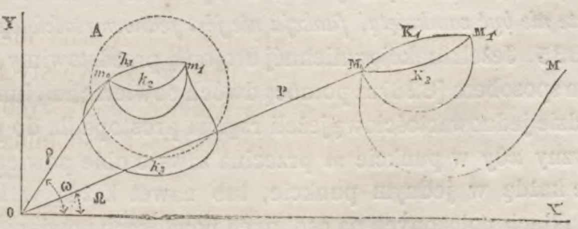


fig. 76,

ciągłe na płaszczyznie, z których każdéj odpowiada stosowna krzywa zakreślona przez punkt M, zdarzyć się może że wychodząc z pewnego położenia m_0, punktu przedstawiającego zmienną z, któremu odpowiada pewne położenie M_0 punktu przestawiającego funkcję u, i dochodząc do innego punktu m_1, po rozmaitych krzywych k_1, k_2... dowolnych zakreślonych pomiędzy punktami m_0, m_1, punkt M zakreślając również rozmatie krzywe K_1, K_2... dochodzi zawsze do tego samego punktu M_1; lub też zdarzyć się może, że punkt ten dochodzi do różnych punktów M_1, M_2 ... stosownie do drogi przebieganéj przez m. Pierwszy przypadek może mieć miejsce dla wszelkich dróg punktu m zawartych w danym zakresie np. w części płasczyzny, ograniczonéj pewną krzywą A, a nie mieć miejsca gdy droga jaka k_3, wychodzi z tego zakresu:

Funkcja będzie jednowartościową w danym zakresie, jeżeli funkcja ta przybierać będzie zawsze tę samą wartość dla téj saméj wartości zmiennéj niezależnej, jakimkolwiek kierunkiem lub jakąkolwiek drogą zawartą w danym zakresie, zmienna zbliżać się będzie do wartości szczególnéj uważanéj.

Czyli innemi słowy:

Jeżeli punkt przedstawiający zmienną niezależną, zakreśla na płasczyznie jakąkolwiek krzywę zamkniętą, zawartą w zakresie danym, a punkt przedstawiający funkcję téj zmiennéj zakreśla zawsze krzywę odpowiednią również zamkniętą, funkcja jest jednowartościową w tym zakresie: jeżeli ta ostatnia krzywa może nie być zamkniętą, funkcja nie jest jednowartościową.

335. Jeżeli funkcję zmiennéj urojonéj przedstawimy drugim sposobem [**326**] za pomocą dwóch powierzchni, funkcja będzie jednowartościową jeżeli rzędna prostopadła do płasczyzny $x0y$ w punkcie m przecina zawsze obie powierzchnie każdą w jednym punkcie, lub nawet każdą w kilku punktach położonych na osobnych powłokach powierzchni, nie mających punktów wspólnych w zakresie danym.

336. Niech będzie naprzykład funkcja u zmiennéj urojonéj z, dana przez równanie

$$u^2 = z$$

czyli

$$u = z^{\frac{1}{2}} = (x + yi)^{\frac{1}{2}}$$

Ponieważ wykładnik ułamkowy $\frac{1}{2}$ zawiera dwa znaki, każdéj wartości z odpowiadają dwie wartości u

$$u_1 = +\sqrt{z}, \quad u_2 = -\sqrt{z}$$

które stają się równemi dla $z = 0$. Jeżeli damy wartość początkową funkcji u

$$u_0 = +\sqrt{z_0}$$

odpowiadającą wartości z_0 zmiennéj urojonéj, stawiamy się w pierwszéj z tych wartości, a zmieniając z w sposób ciągły nie możemy przejść w wartość drugą, chyba przechodząc przez wartość $z = 0$: jeżeli więc wyłączymy tę ostatnią wartość, uczynimy funkcję jednowartościową.

Aby uczynić to widocznémgeometrycznie, założmy [**82**]:

$$(1) \qquad z = \rho\,[\operatorname{dos}(\omega + 2n\pi) + i \operatorname{wst}(\omega + 2n\pi)]$$

gdzie ω przypuszczamy mniejszém od 2π, n oznacza liczby całkowitą, która nie wpływa na wartość z.

Otrzymamy podstawiając, dwie wartości różne u [**82**]:

$$(2) \qquad u_1 = \sqrt{\rho}\left(\operatorname{dos}\frac{\omega}{2} + i \operatorname{wst}\frac{\omega}{2}\right)$$

$$(3) \qquad u_2 = \sqrt{\rho}\left[\operatorname{dos}\left(\pi + \frac{\omega}{2}\right) + i \operatorname{wst}\left(\pi + \frac{\omega}{2}\right)\right]$$

niepisząc w argumencie tych wyrażeń wielokrotności 2π nie wpływających na wartości u.

Każdemu punktowi m_0 (fig. 77) przedstawiającemu wartość (1) zmiennéj urojonéj, odpowiadają więc dwa punkta M_0, M'_0 przedstawiające (2) i (3), w równych odległościach od początku, bo moduł jest ten sam $\sqrt{\rho}$, lecz po stronach wprost przeciwnych tego początku, bo argumenty różnią się o π.

Weźmy za wartość początkową odpowiadającą wartości z_0

$$z_0 = \rho_0 (\operatorname{dos} \omega_0 + i \operatorname{wst} \omega_0)$$

przedstawionéj przez m_0, wartość u_0 przedstawianą przez M_0

$$u_0 = \sqrt{\rho_0} \left(\operatorname{dos} \frac{\omega_0}{2} + i \operatorname{wst} \frac{\omega_0}{2} \right)$$

z wartości (2), i zmieniajmy z w sposób ciągły począwszy od téj wartości, to jest zakreślajmy przez punkt m krzywę ciągłą. Jakiekolwiek weźmiemy ρ, jeżeli ω nie stanie się większém od 2π, funkcja u zmieniając się w sposób ciągły nie może przybrać wartości (3), która powstać tylko może z argumentu z równego $2\pi + \omega$: każdéj wartości z odpowiadać może jedna tylko wartość u z rodzaju (2); jeżeli więc m zakreśla jakąkolwiek krzywą zamkniętą k, ruchem ciągłym tak, że ω nie staje się podczas tego ruchu większém od 2π, punkt M zakreślać musi krzywą zamkniętą K, bo gdy m powróci do m_0, M musi powrócić do M_0. Lecz jeżeli punkt m zakreśla krzywę k' ruchem ciągłym wychodząc z m_0, argument z staje się $\omega + 2\pi$, argument u jest więc $\frac{\omega}{2} + \pi$, wartość funkcji u staje się (3), punkt M_0 zakreśla ruchem ciągłym krzywę K i staje w M'_0, gdy m powraca do m_0, zaś krzywa K' nie jest zamkniętą, funkcja nie jest jednowartościową; jednemu i temu samemu położeniu punktu m_0 może odpowiadać dowolnie położenie M_0 lub M'_0, stosownie do tego czy punkt m wyszedłszy z m_0 zakreślił ruchem ciągłym krzywą k lub k', lub nawet czy zakreślił krzywę k' parzystą lub nieparzystą liczbę razy. Chcąc więc uczynić funkcję daną jednowartościową, musiemy ograniczyć zmienność zmiennéj urojonéj u, zakładając naprzykład że argument téj zmiennéj może się zmieniać tylko od 0 do 2π (z wyłączeniem 2π) lub od $-\pi$ do $+\pi$ (z wyłączeniem $-\pi$), lub po prostu w zakresie pewnéj krzywéj C jakiejkolwiek, lecz nie obejmującéj początku O (fig. 77).

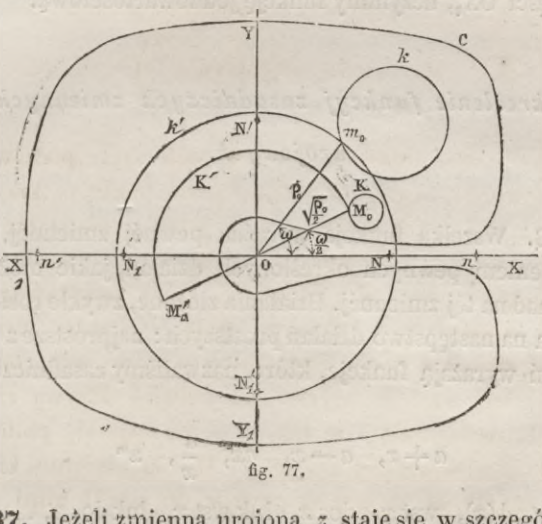


fig. 77.

337. Jeżeli zmienna urojona z staje się w szczególnym przypadku rzeczywistą x, to jest jeżeli punkt m nie wychodzi z osi XX_1, funkcja

$$u = x^{\frac{1}{2}}$$

może mieć dwie wartości

$$u_1 = +\sqrt{x}\ , \quad u_2 = -\sqrt{x}$$

dla każdéj wartości x; każdéj wartości dodatnéj x przedstawionéj przez punkt n, $(\mathrm{O}n = x)$ odpowiadają dwie wartości funkji u rzeczywiste, przedstawione przez N i N_1, $(\mathrm{ON} = +\sqrt{x},\ \mathrm{ON}_1 = -\sqrt{x})$; każdéj wartości odjemnéj x przedstawionéj przez n', $(\mathrm{O}n' = -x)$, odpowiadają dwie wartości urojone funkcji u, przedstawione przez N i N'_1 $(\mathrm{ON}' = +i\sqrt{x},\ \mathrm{ON}' = -i\sqrt{x})$.

Jeżeli x zmienia się w sposób ciągły, u zmienia się w sposób ciągły i nie może przejść naprzykład z N do N_1, lub z N′ do N'_1 nie przechodząc przez O; jeżeli więc zastrzeżemy że x nie może przejść przez wartość 0, to jest że punkt n może posuwać się tylko po części OX, lub tylko po części OX_1, uczynimy funkcję jednowartościową.

Określenie funkcyj zasadniczych zmiennych urojonych.

338. Wszelka funkcja wyraźna pewnéj zmiennéj, jest wyrażeniem pewnych określonych działań, jakie możemy dokonać na téj zmiennéj. Działania złożone, zwykle rozłożyć można na następstwo działań prostszych: najprostsze z tych działań wyrażają funkcje, które nazwaliśmy zasadniczemi, jak:

$$a + x,\quad a - x,\quad ax,\quad \frac{a}{x},\quad x^m$$

$$a^x,\quad \mathrm{l}(x),\quad \mathrm{wst}\,x,\quad \mathrm{dos}\,x,\quad \text{łuk}\,\mathrm{wst}\,x,\quad \text{łuk}\,\mathrm{dos}\,x,\ \ldots$$

Zobaczmy teraz, co rozumieć należy pod temi wyrażeniami, gdy zamiast zmiennéj rzeczywistéj x, podstawimy w nie zmienną urojoną:

$$z = x + yi$$

339. Funkcje algebraiczne. Podaliśmy poprzednio [Roz. III] sposób w jaki dokonywają się działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, podnoszenie do potęg rzeczywistych na ilościach urojonych; przez to samo określiliśmy funkcje algebraiczne

$$a+z,\quad a-z,\quad az,\quad \frac{a}{z},\quad z^m$$

zmiennéj urojonéj z, gdzie a oznacza ilość jakąkolwiek, m na teraz jeszcze ilość rzeczywistą. Funkcje te, z wyjątkiem z^m w razie m ułamkowego, są funkcjami jednowartościowemi dla wszelkich wartości zmiennéj z: bo każdéj wartości z, odpowiadać może jedna tylko wartość funkcji. Dla téj saméj przyczyny wielomian algebraiczny wymierny

$$Az^m+Bz^n+Cz^p+\ldots+F$$

(gdzie m, n, p, ... są całkowitemi rzeczywistemi) jest funkcją jednowartościową zmiennéj z, jak również iloraz dwóch takich wielomianów

$$\frac{Az^m+Bz^n+Cz^p+\ldots+F}{A'z^{m'}+B'z^{n'}+C'z^{p'}+\ldots+F'}$$

W ogólności, wszelka funkcja wyraźna zmiennéj urojonéj dana pod postacią

$$u=\varphi(x,y)+\psi(x,y)i$$

będzie jednowartościową, jeżeli funkcje $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ są funkcjami jednowartościowemi, naprzykład wielomianami całkowitemi.

340. Co się tyczy funkcji z^m w przypadku m ułamkowego, lub niewymiernego lecz rzeczywistego, wzór Moivre'a [**79**] daje nam, zakładając

$$z = \rho\,(\operatorname{dos}\omega + i \operatorname{wst}\omega)$$

lub ogólniéj, nazywając przez k liczbę całkowitą [**82**], przez ω łuk mniejszy od 2π:

$$z = \rho\,[(\operatorname{dos}\omega + 2k\pi) + i \operatorname{wst}(\omega + 2k\pi)]$$

funkcję

$$z^m = \rho^m\,[\operatorname{dos} m\,(\omega + 2k\pi) + i \operatorname{wst} m\,(\omega + 2k\pi)]$$

$$= \rho^m\,(\operatorname{dos} m\omega + i \operatorname{wst} m\omega)\,(\operatorname{dos} 2mk\pi + i \operatorname{wst} 2mk\pi)$$

co możemy jeszcze napisać, zważywszy że

$$1 = \operatorname{dos} 2k\pi + i \operatorname{wst} 2k\pi$$

$$(1)^m = (\operatorname{dos} 2k\pi + i \operatorname{wst} 2k\pi)^m = \operatorname{dos} 2mk\pi + i \operatorname{wst} 2mk\pi$$

w następujący sposób

$$z^m = \rho^m\,(\operatorname{dos} m\omega + i \operatorname{wst} m\omega)\,(1)^m$$

Ponieważ m nie jest całkowitém, potęga $m$ta jedności może miéć tyle wartości, ile jest jedności w mianowniku q, ilości $m = \frac{p}{q}$ (p i q oznaczają całkowite, pierwsze pomiędzy sobą, przyczém możemy przypuszczać q zawsze dodatném); jakoż

$$(1)^m = (1)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{1^p} = \sqrt[q]{1}$$

zaś $\sqrt[q]{1}$ ma q wartości różnych [**82**]. Wyrażenie więc

$$z^m = \rho^m\,(\operatorname{dos} m\omega + i \operatorname{wst} m\omega)\,(1)^m$$

w którém ρ^m może mieć tylko jedną wartość [77], dla danéj wartości ρ, zaś ω zmienia się tylko z założenia od 0 do 2π (wyłączając 2π), lub od $-\pi$ do $+\pi$, (wyłączając $-\pi$) może mieć jednak q wartości różnych dla danéj wartości z, t. j. dla danego ρ i ω. Jeżeli m niewymierne [93], wyrażenie $(1)^m$ może mieć nieskończoną liczbę wartości różnych. Funkcja więc z^m może być wielowartościową; aby ją uczynić jednowartościową, trzeba ograniczyć zmienność z, biorąc pod uwagę jedną tylko wartość wyrażenia $(1)^m$, naprzykład $(1)^m = 1$, to jest zakładając $k = 0$, lub zastrzegając że argument zmiennéj z, może się zmieniać tylko od 0 do 2π, lub od $-\pi$ do $+\pi$, (z wyłączeniem jednéj z tych granicznych wartości, jak $-\pi$). Pod tém zastrzeżeniem, każdéj wartości z, to jest każdéj wartości ρ i ω, odpowiadać może jedna tylko wartość funkcji z^m : funkcja ta będzie więc jednowartościową w powyższym zakresie zmienności zmiennéj niezależnéj. Geometrycznie, wychodzi to na zastrzeżenie, że krzywe zakreślone przez punkt przedstawiający zmienną z, nie mają przecinać osi OX po stronie dodatnéj, (jeżeli zmieniamy ω od 0 do 2π), lub po stronie odjemnéj, (jeżeli zmieniamy ω od $-\pi$ do $+\pi$).

Wielomian algebraiczny

$$Az^m + Bz^n + Cz^p + \ldots + F$$

gdzie m, n, p .. wyrażają stałe rzeczywiste jakiekolwiek, będzie także funkcją jednowartościową, jeżeli zmieniać będziemy z w powyżéj określonym zakresie, a to jako funkcja ednowartościowa funkcyj jednowartościowych.

341. Zastrzeżenia powyższe zmieniania z w zakresie określonym przez zmienność argumentu pomiędzy 0 i 2π, lub $-\pi$ i $+\pi$ (z wyłączeniem jednéj z tych granicznych wartości), jest jakeśmy widzieli warunkiem dostatecznym żeby funkcja była jednowartościową: warunek ten nie jest jednak koniecznym,

Niech będzie w ogólności funkcja określona przez równanie algebraiczne

$$f(u, z) = 0$$

stopnia $m$go. Każdéj wartości zmiennéj niezależnéj z odpowiada w ogóle m wartości funkcji u, niech będzie u_1, $u_2 \ldots u_m$. Dla szczególnych wartości zmiennéj z, wartości w ogóle różne funkcji u mogą stać się w szczególności równemi. Załóżmy że zmieniamy z tak, iż u jest i pozostaje funkcją ciągłą z: jeżeli wartości początkowe u i z wskazują nam którą z różnych układów u bierzemy pod uwagę, niech będzie u_k, zmieniając z w sposób ciągły, funkcja u nie może przejść z wartości u_k do wartości innego układu u_h, mających z poprzedniemi różnicę skończoną, chyba dla wartości szczególnych z, dla których wartości tych dwóch układów stają się równemi. Jeżeli więc, dawszy wartości początkowe z_0, u_0, to jest postawiwszy się w jednym z pierwiastków równania $f(u, z) = 0$, zmieniamy z w zakresie takim, że pierwiastek ten nie może stać się równym innemu pierwiastkowi, jeżeli nadto w tym zakresie u jest funkcją ciągłą z, funkcja ta będzie jednowartościową.

Geometrycznie, pierwiastki równe równania $f(u, z) = 0$, odpowiadać będą wartościom z przedstawionym na płaszczyznie przez punkta, które nie powinny znajdować się w zakresie zmienności z, jeżeli funkcja ma być jednowartościową: punkta te, podobne punktowi O w przykładzie [**336**] wyżéj uważanym, nazwanemi zostały *punktami krytycznemi*. Będziemy mieli sposobność w dalszym ciągu powrócić do tego sposobu uważania, za pomocą którego nieledwie z każdéj funkcji można zrobić funkcję jednowartościową, ograniczając jéj zmienność do pewnego zakresu.

Niech będzie naprzykład funkcja dana przez równanie drugiego stopnia

$$u^2 + 2mu + n = 0$$

gdzie m i n, są funkcjami zmiennéj niezależnéj z, przypuśćmy ciągłemi, skończonemi, jednowartościowemi; każdéj wartości z odpowiadają dwie wartości u

$$u_1 = -m + \sqrt{m^2 - n}\,, \qquad u_2 = -m - \sqrt{m^2 - n}$$

różniące się dla jednego i tego samego z, o ilość

$$2\sqrt{m^2 - n}$$

Jeżeli damy wartość początkową

$$u_0 = -m_0 + \sqrt{m_0^{\,2} - n_0}$$

odpowiadającą wartości z_0 zmiennéj niezależnéj, i jeżeli zacząwszy od téj wartości zmieniamy z w sposób ciągły, u pozostanie ciągle w wartościach pierwszych u_1, nie mogąc przybierać wartości drugich u_2, różniących się o wartość skończoną $2\sqrt{m^2 - n}$ od drugich, bo u zmienia się w sposób ciągły: byleby różnica ta w zakresie zmienności z nie mogła stać się zerem, to jest, byleby z nie mogło przybierać wartości dla którychby $m^2 = n$. Wartości te z dane przez równanie $m^2 = n$, odpowiadają *punktom krytycznym.*

342. Funkcje określone przez szeregi postępujące podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj niezależnéj. Widzieliśmy [**339**] że funkcja

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots a_n$ są spółczynnikami stałemi jakiemikolwiek, z zmienną urojoną, n liczbą skończoną całkowitą dodatną, jest funkcją jednowartościową zmiennéj urojonéj z. Funkcja ta jest nadto funkcją ciągłą zmiennéj z, bo jeżeli

$$z = \rho(\operatorname{dos}\omega + i \operatorname{wst}\omega)$$

to

$$z^n = \rho^n(\operatorname{dos} n\omega + i \operatorname{wst} n\omega)$$

a że ρ^n, $\operatorname{dos} n\omega$, $\operatorname{wst} n\omega$, są funkcjami ciągłemi zmiennych ρ i ω, więc z^n jest także funkcją ciągłą zmiennéj z; a zatém i funkcja u, jako summa wyrażeń takich jak $a_n z^n$, jest funkcją ciągłą zmiennéj niezależnej z.

Nazywać będziemy wartością nieskończenie wielką, nieskończenie małą zmiennéj urojonéj, wartość dla któréj moduł téj zmiennéj staje się nieskończenie wielkim, lub nieskończenie małym. Funkcja u będzie funkcją skończoną zmiennéj z, to jest nie stanie się zerem, ani nieskończenie wielką dla żadnéj wartości skończonéj z: bo jeżeli ρ jest skończoném, ρ^n nie może być zerem, ani ilością nieskończenie wielką, przypuszczając zawsze n skończoném.

Zobaczmy teraz co się stanie z funkcją u, jeżeli przypuścimy że n zwiększa się nieograniczenie.

343. Twierdzenie i. *Szereg postępujący podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj urojonéj, jest szeregiem zbieżnym dla wszelkich wartości zmiennéj, mających moduł mniejszy od pewnego modułu tejże zmiennéj, dla którego moduły wyrazów szeregu nie zwiększają się nieograniczenie.*

Niech będzie szereg

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

postępujący podług potęg zwiększających się zmiennéj urojonéj z. Nazwijmy $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ moduły spółczynników stałych $a_0, a_1, a_2 \ldots$ Niech będzie r, wartość modułu ρ zmiennéj z taka, że ilości

$$(2) \qquad \alpha_0,\ \alpha_1 r,\ \alpha_2 r^2 \ldots$$

nie zwiększają się nieograniczenie : powiadam, że dla wszelkiego modułu ρ zmiennéj z, mniejszego od r, szereg (1) jest szeregiem zbieżnym.

W rzeczy saméj, szereg rzeczywisty

$$1 + \frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2} + \ldots$$

jest szeregiem zbieżnym, jako postęp ilorazowy, którego wykładnik $\frac{\rho}{r}$ jest mniejszym od jedności [**97**]. Pomnożywszy wyrazy tego szeregu odpowiednio przez ilości (2) nie zwiększające się nieograniczenie, otrzymamy [**101**] nowy szereg zbieżny

$$(3) \qquad \alpha_0 + \alpha_1\rho + \alpha_2\rho^2 + \ldots$$

który jest szeregiem modułów szeregu (1). Szereg więc (1), jest także szeregiem zbieżnym [**104**], c. b. d. d.

344. Uwaga i. Szereg (1) jest więc szeregiem *zbieżnym co do modułów*. Twierdzenia udowodnione w Rozdziale V, [**104** - **109**] dla tego rodzaju szeregów stosują się więc do szeregu (1).

345. Uwaga ii. Niech będzie R największy z modułów zmiennéj urojonéj z, dla których wyrazy szeregu (1) nie zwiększają się nieograniczenie. Przedstawiając zmienną urojoną geometrycznie [**324**], zakreślmy promieniem R z początku O okrąg koła (fig. 78). Na mocy poprzedzające-

fig. 78.

go twierdzenia, szereg (1) będzie zbieżnym dla wszelkich wartości z, przedstawionych przez punkta zawarte wewnątrz okręgu koła zakreślonego promieniem R: koło to nazywać będziemy *kołem zbieżności* tego szeregu.

Na zewnątrz koła zbieżności, szereg jest zawsze rozbieżnym co do modułów: bo nadawszy zmiennéj z moduł większy od R, moduły wyrazów szeregu z założenia zwiększają się nieograniczenie. Dla wartości zmiennéj, przedstawionych przez punkta znajdujące się na samym okręgu koła, szereg może być zbieżnym dla niektórych punktów, rozbieżnym lub nieoznaczonym, dla innych.

Weźmy pod uwagę wartości zwiększające się modułów zmiennéj, dla których moduły wyrazów szeregu (1) mają wartości skończone: jeżeli wartości r mogą zwiększać się do nieskończoności, szereg jest zbieżnym na całéj przestrzeni zmienności z: lecz jeżeli w powyższém założeniu wartości te r zdążają do granicy oznaczonéj R, szereg jest zbieżnym tylko wewnątrz koła zbieżności.

Tak naprzykład szereg

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\dots$$

jest zbieżnym dla wszelkich wartości z: bo szereg modułów

$$1+\frac{\rho}{1}+\frac{\rho^2}{1.2}+\frac{\rho^3}{1.2.3}+\dots$$

jest zbieżnym]**102** (I)] dla wszelkiéj wartości ρ. Promień koła zbieżności jest tu nieskończenie wielkim.

Szereg

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots$$

jest zbieżnym wewnątrz koła, którego promień jest równy 1 bo dla $R=1$, moduły wyrazów

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\dots$$

nie zwiększają się nieograniczenie, a dla $R>1$, moduły te zwiększają się do nieskończoności [**102** II]. Na okręgu koła zbieżności, szereg jest rozbieżnym dla argumentu zero, lub $2n\pi$: bo szereg staje się wtedy

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

i jest rozbieżnym [**100** Uw].

Lecz dla wszelkiego innego argumentu, szereg jest zbieżnym, nawet na okręgu koła zbieżności, to jest nawet dla modułu równego 1: bo dwa szeregi rzeczywiste, składające szereg urojony [**103**], przedstawiają się wtedy zakładając $z=\rho$ (dos $\omega+i$ wst ω), pod postacią

$$1+\frac{\operatorname{dos}\omega}{1}+\frac{\operatorname{dos}2\omega}{2}+\frac{\operatorname{dos}3\omega}{3}+\dots$$

$$\frac{\operatorname{wst}\omega}{1}+\frac{\operatorname{wst}2\omega}{2}+\frac{\operatorname{wst}3\omega}{3}+\dots$$

gdzie liczniki, jako dostawy i wstawy wielokrotności argumentu różnego od zera lub $2n\pi$, są mniejszemi od jednści, a więc szeregi są zbieżnymi [**102** II]. Nawet dla argumentu równego π, lub $(2n+1)\pi$, szereg

$$1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

jest zbieżnym [**100** Uw.].

346. Twierdzenie II. *Szereg postępujący podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj urojonéj, jest funkcją ciągłą, jednowartościową téj zmiennéj, w zakresie zbieżności (wewnątrz koła zbieżności).*

Oznaczmy summę tego szeregu przez

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots \tag{1}$$

i załóżmy że szereg jest zbieżnym dla wszelkiego modułu z mniejszego od R, to jest wewnątrz koła zbieżności zakreślonego promieniem R. Nażwijmy $\varphi(z)$ summę n pierwszych wyrazów tego szeregu, $\psi(z)$ summę wyrazów pozostałych, czyli resztę szeregu:

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$$

Z początku O jako środka (fig 78), zakreślmy promieniem R′ cokolwiek mniejszym od R okrąg koła, (nie chcemy bowiem postawić się na okręgu, gdzie nie wiemy czy szereg jest zbieżnym). Możemy wziąść n dość wielkiém, żeby moduł reszty $\psi(z)$, był mniejszym od danéj ilości ε tak małéj jak się podoba, wewnątrz koła zakreślonego promieniem R′.

W rzeczy saméj, dla modułu zmiennéj R′ i n dość wielkiego, szereg modułów reszty

$$\alpha_n R'^n+\alpha_{n+1}R'^{n+1}+\ldots$$

może być mniejszym od ε, ponieważ szereg modułów

$$\alpha_0 + \alpha_1 R' + \alpha_2 R'^2 + \dots$$

jest z założenia [**344**] zbieżnym; témbardziéj więc dla $\rho \leqq R'$ będziemy mieli

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n+1} \rho^{n+1} + \dots < \varepsilon$$

a więc [**80**]

$$\text{mod}\, \psi(z) < \varepsilon$$

Nadajmy teraz zmiennéj urojonéj z dwie wartości, z i z' nieskończenie zbliżone wewnątrz koła R': różnica dwóch wartości odpowiednich funkcji

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z), \qquad f(z') = \varphi(z') + \psi(z')$$

będzie równa

$$f(z') - f(z) = \varphi(z') - \varphi(z) + \psi(z') - \psi(z)$$

Funkcja $\varphi(z)$ jest wielomianem całkowitym zmiennéj urojonéj z: jako taka jest ciągłą; moduł różnicy $\varphi(z')$ i $\varphi(z)$ może być mniejszym od ε, jeżeli moduł z' różni się od modułu z o ilość dostatecznie małą; summa modułów $\psi(z')$ i $\psi(z)$, jest na zasadzie poprzedzającego mniejszą od 2ε: a że moduł summy nie może być większym od summy modułów [**80**], moduł $f(z') - f(z)$ nie może być większym od 3ε, może więc być dowolnie małym η, bo ε jest dowolnie małą ilością, można więc wziąść $3\varepsilon = \eta$. Ponieważ różnica $f(z') - f(z)$ ma moduł nieskończenie mały, jeżeli z' ma moduł nieskończenie mało różny od modułu z, funkcja $f(z)$ jest ciągłą dla wszelkich wartości z w zakresie zbieżności szeregu (1) [**329**].

Funkcja ta jest widocznie jednowartościową, bo każdéj wartości z może odpowiadać jedyna tylko wartość funkcji $f(z)$ [**332**].

347. Funkcja wykładnicza. Oznaczny przez $\varphi(z)$ granicę summy szeregu zbieżnego [**345**] dla jakiejkolwiek wartości z:

$$(1)\qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\dots$$

i nadajmy zmiennéj urojonéj z dwie wartości jakiekolwiek z_1, z_2: otrzymamy dwa szeregi zbieżne

$$(2)\qquad \varphi(z_1)=1+\frac{z_1}{1}+\frac{z_1^{\,2}}{1.2}+\frac{z_1^{\,3}}{1.2.3}+\dots+\frac{z_1^{\,n-1}}{1.2\dots(n-1)}+\dots$$

$$(3)\qquad \varphi(z_2)=1+\frac{z_2}{1}+\frac{z_2^{\,2}}{1.2}+\frac{z_2^{\,3}}{1.2.3}+\dots+\frac{z_2^{\,n-1}}{1.2\dots(n-1)}+\dots$$

Mnożąc przez siebie dwa te szeregi zbieżne co do modułów, otrzymamy na zasadzie twierdzenia Cauch'ego [**109**] szereg zbieżny, którego wyrazem ogólnym będzie

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{z_2^{\,n-1}}{1.2\dots(n-1)}\times 1+\frac{z_2^{\,n-2}}{1.2\dots(n-2)}\times\frac{z_1}{1}+\dots\\ &\qquad+\frac{z_2}{1}\times\frac{z_1^{\,n-2}}{1.2\dots(n-2)}+\frac{z_1^{\,n-1}}{1.2\dots(n-1)}\end{aligned}\right.$$

i którego summa zdążać będzie do granicy równéj iloczynowi

$$\varphi(z_1)\times\varphi(z_2)$$

Lecz wyrażenie (4) jest rozwinięciem wyrażenia

$$\frac{(z_1+z_2)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

Na zasadzie więc twierdzenia Cauch'ego mamy

$$\varphi(z_1)\times\varphi(z_2)=1+\frac{z_1+z_2}{1}+\frac{(z_1+z_2)^2}{1.2}+\ldots$$
$$+\frac{(z_1+z_2)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots$$

wyrażenie otrzymane podstawiając w (2) z_1+z_2 zamiast z; czyli

(5) $$\varphi(z_1)\times\varphi(z_2)=\varphi(z_1+z_2)$$

Gdyby z stało się rzeczywistém, dowiedliśmy, że własność (5) określa funkcję wykładniczą [**35**]; wiemy nadto że w razie gdy z staje się rzeczywistém x, funkcja $\varphi(z)$, staje się [**264**]

$$\varphi(x)=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.2}+\ldots$$

Możemy więc uogólnić określenie funkcji wykładniczéj, i powiedzieć że:

Funkcją wykładniczą, nazywamy granicę summy szeregu zbieżnego (1), *i oznaczamy ją przez znak*

(6) $$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots$$

Z tego określenia wyprowadzamy własność (6) zasadniczą tego rodzaju funkcyi

(7) $$e^{z_1}\times e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$

nie przywiązując już do wykładnika urojonego żadnego pojęcia wielokrotności, lub iloczynu czynników równych i t. p., które w tym razie nie miałoby żadnego znaczenia, a uważając jedynie znak e^z jako oznaczający summę szeregu zbieżnegu określonego jak powyżéj. Zauważyć tylko należy, że gdy wykładnik z staje się rzeczywistym, wykładnik ten przybiera znaczenie zwykłe, a zatém nie ma sprzeczności w dwóch napozór różnych określeniach jakieśmy dali funkcji wykładniczéj: jedném dla wykładnika rzeczywistego, drugiém dla wykładnika urojonego. Związek (7) pokazuje nadto, że z wykładnikiem urojonym, możemy postępować podobnie jak z wykładnikiem rzeczywistym, dodając go w razie mnożenia dwóch funkcyj różniących się wykładnikami, i t. p.; działania algebraiczne na wykładnikach, wyprowadzają się jak wiemy z łatwością ze związku (7).

348. Aby dać określenie funkcji wykładniczéj ogólniéjszéj

$$A^z$$

gdzie A oznaczać będzie jeszcze jakąkolwiek ilość rzeczywistą dodatną, załóżmy

$$A = e^a \quad \text{czyli} \quad a = \mathrm{l.}\,A$$

i podstawmy we wzorze (6) za z wyrażenie az, otrzymamy

$$A^z = 1 + \frac{az}{1} + \frac{a^2z^2}{1\,.\,2} + \frac{a^3z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots \tag{8}$$

szereg zbieżny podobny (6), określający funkcję A^z. Funkcja A^z podobnie jak e^z, jest więc jednowartościową, ciągłą i skończoną dla wszelkiéj wartości skończonéj z.

349. Funkcje trygonometryczne. Niech będą szęregi

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

zbieżne co do modułów [**102** IV] dla jakiejkolwiek wartości zmiennéj urojonéj z. Gdy z staje się rzeczywistém x, granicą summy pierwszego z tych szeregów jest dostawa, granicą drugiego wstawa zmiennéj rzeczywistéj x. Uogólniając ten wypadek, nazywać będziemy *dostawą* z granicę summy pierwszego z tych szeregów, *wstawą* z, granicę summy drugiego, dla jakiejkolwiek wartości zmiennéj z, rzeczywistéj lub urojonéj : określeniem dostawy i wstawy, będzie więc

$$\text{(1)} \quad \operatorname{dos} z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\text{(2)} \quad \operatorname{wst} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Funkcje te są jednowartościowemi, ciągłemi, skończonemi dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj z. Inne funkcje trygonometryczne określimy po prostu przez równania

$$\text{(3)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{st} z = \dfrac{\operatorname{wst} z}{\operatorname{dos} z}, & \operatorname{dot} z = \dfrac{\operatorname{dos} z}{\operatorname{wst} z} \\ \operatorname{sie} z = \dfrac{1}{\operatorname{dos} z}, & \operatorname{dosie} z = \dfrac{1}{\operatorname{wst} z} \end{array} \right.$$

Aby jednak te określenia nie były w sprzeczności z określeniami danemi poprzednio dla wartości rzeczywistych zmiennéj z, udowodnić należy, że działaniom danym na tych ostatnich funkcjach we wzorach trygonometrji, odpowiadają działania podobne dla wartości urojonych zmiennéj z. Lecz naprzód udowodnimy nadzwyczaj ważnych związków zachodzących pomiędzy temi funkcjami, a funkcją wykładniczą.

350. Podstawmy we wzorze określającym e^z dla z rzeczywistego lub urojonego :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

za zmienną jakąkolwiek z, wartości zi i $-zi$, (gdzie i jest określoném zawsze przez związek $i = \sqrt{-1}$), otrzymamy przestawiając wyrazy na zasadzie znanego twierdzenia [**106**].

$$e^{zi} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \ldots\right) + i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$e^{-zi} = \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \ldots\right) - i\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

a podstawiając w te wartości, wartości (1) i (2)

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{zi} = \mathrm{dos}\, z + i\, \mathrm{wst}\, z \\ e^{-zi} = \mathrm{dos}\, z - i\, \mathrm{wst}\, z \end{array} \right.$$

wyrażenia, w których z oznacza ilość jakąkolwiek rzeczywistą lub urojoną. Rozwiązując równania (4) co do wst z, dos z, otrzymamy

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{dos}\, z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \\[2ex] \mathrm{wst}\, z = -\dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{2}\, i \end{array} \right.$$

zważywszy że

$$\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = -\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2}\, i$$

mnożąc licznik i mianownik przez i i podstawiając $i^2 = -1$.

Dzieląc drugie równanie (5), przez pierwsze, mamy

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{st} z = -\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} i$$

W szczególnym przypadku, oznaczając przez k liczbę całkowitą, otrzymamy podstawiając w (4) $z = 2k\pi$, $z = (2k+1)\pi$:

$$e^{2k\pi i} = 1, \qquad e^{(2k+1)\pi i} = -1$$

Widzimy ztąd, że funkcje trygonometrzyczne określone jak powyżéj dla zmiennéj jakiejkolwiek, sprowadzają się w bardzo prosty sposób do funkcji wykładniczéj na zasadzie (5). Odwrotnie, funkcje wykładnicze mogą być sprowadzonemi z łatwością do funkcyj trygonometrycznych na mocy (4). Nie ma więc w istocie rzeczy powodu rozróżniania dwóch tych rodzai funkcyj : stanowią one właściwie jednę tylko przestępną, naprzykład funkcję wykładniczą, która może być uważaną jako wielomian całkowity algebraiczny, nieskończonego stopnia. Zachowamy znakowania tych funkcyj jedynie dla uproszczenia wzorów : własności jednéj z powyższych funkcyj dadzą nam własności pozostałych.

351. Tak naprzykład, podstawiając we wzorze otrzymanym poprzednio [**347**]

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

naprzód $z_1 i$ za z_1, $z_2 i$ za z_2, następnie $-z_1 i$ za z_1, $-z_2 i$ za z_2, otrzymamy

$$e^{z_1 i} \times e^{z_2 i} = e^{(z_1 + z_2) i}, \qquad e^{-z_1 i} \times e^{-z_2 i} = e^{-(z_1 + z_2) i}$$

czyli, zważywszy na (4)

$$\operatorname{dos}(z_1+z_2)+i\operatorname{wst}(z_1+z_2)$$
$$=(\operatorname{dos} z_1+i\operatorname{wst} z_1)(\operatorname{dos} z_1+i\operatorname{wst} z_1)$$
$$\operatorname{dos}(z_1+z_2)-i\operatorname{wst}(z_1+z_2)$$
$$=(\operatorname{dos} z_1-i\operatorname{wst} z_1)(\operatorname{dos} z_2-i\operatorname{wst} z_2)$$

Rozwiązując te dwa równania co do $\operatorname{dos}(z_1+z_2)$ i $\operatorname{wst}(z_1+z_2)$, otrzymamy

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{dos}(z_1+z_2)=\operatorname{dos} z_1 \operatorname{dos} z_2-\operatorname{wst} z_1 \operatorname{wst} z_2 \\ \operatorname{wst}(z_1+z_2)=\operatorname{wst} z_1 \operatorname{dos} z_2+\operatorname{dos} z_1 \operatorname{wst} z_2 \end{cases}$$

wzory zasadnicze trygonometrji, z których z łatwością wyprowadzić można wszystkie inne. Wzory te mają miejsce dla z urojonego : co nam pokazuje, że przekształcenia używane w trygonometrji stosują się, gdy weźmiemy zmienne urojone, zamiast zmiennych rzeczywistych.

352. Wszelkie wyrażenie urojone, które jakeśmy udowodnili [**77**] może być przedstawionėm pod kształtem

$$z=\rho(\operatorname{dos}\omega+i\operatorname{wst}\omega)$$

gdzie ρ oznacza moduł, ω argument, może być również przedstawionėm, podstawiając

$$\operatorname{dos}\omega+i\operatorname{wst}\omega=e^{\omega i}$$

na zasadzie (4), pod postacią

$$(8)\qquad z=\rho e^{\omega i}$$

Wzór Moivre'a [**79**] da nam

$$(9)\qquad z^m=\rho^m e^{m\omega i} \qquad \text{i t. p.}$$

353. Każda z funkcyj e^z, wst z, dos z, ... uważanych poprzednio, może być na mocy poprzedzających wzorów, sprowadzoną z łatwością do zwykłego kształtu wyrażeń urojonych

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}i$$

gdzie X i Y oznaczają funkcje zmiennych rzeczywistych x i y, składających zmiennę urojoną

$$z = x + yi$$

W saméj rzeczy, mamy naprzód [**350**]

$$(10) \qquad e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\operatorname{dos} y + i \operatorname{wst} y)$$

a zatém dla funkcji wykładniczéj $\mathrm{X} = e^x \operatorname{dos} y$, $\mathrm{Y} = e^x \operatorname{wst} y$.

Mamy również

$$\operatorname{dos} z = \operatorname{dos}(x + yi) = \operatorname{dos} x \operatorname{dos} yi - \operatorname{wst} x \operatorname{wst} yi$$
$$\operatorname{wst} z = \operatorname{wst}(x + yi) = \operatorname{wst} x \operatorname{dos} yi + \operatorname{dos} x \operatorname{wst} yi$$

a więc na zasadzie wzorów (5), w których podstawimy yi za z:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{dos}(x+yi) &= \operatorname{dos} x \, \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \operatorname{wst} x \, \frac{e^y - e^{-y}}{2} \, i \\ \operatorname{wst}(x+yi) &= \operatorname{wst} x \, \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \operatorname{dos} x \, \frac{e^y - e^{-y}}{2} \, i \end{aligned} \right.$$

wyrażenia pod postacią żądaną $\mathrm{X} + \mathrm{Y}i$.

Otrzymamy w podobny sposób styczną

$$\operatorname{st}(x + yi) = \frac{\operatorname{wst}(x + yi)}{\operatorname{dos}(x + yi)} = \frac{2 \operatorname{wst}(x + yi) \operatorname{dos}(x - yi)}{2 \operatorname{dos}(x + yi) \operatorname{dos}(x - yi)}$$
$$= \frac{\operatorname{wst} 2x + \operatorname{wst}(2yi)}{\operatorname{dos} 2x + \operatorname{dos}(2yi)}$$

a na zasdzie (5), w których podstawimy $2yi$ za z:

$$(12)\qquad \operatorname{st}(x+yi)=\frac{\operatorname{wst}2x+\dfrac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}i}{\operatorname{dos}2x+\dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}i}$$

W szczególnym przypadku $x=0$, wzory (11) dają nam

$$(13)\qquad \begin{cases} \operatorname{dos} yi=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} \\ \operatorname{wst} yi=\dfrac{e^{x}-e^{-y}}{2}i \end{cases}$$

a dzieląc drugi z tych wzorów przez pierwszy

$$(14)\qquad \operatorname{st} yi=\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}i$$

Zauważymy z pierwszego z równań (13), że dostawa wyrażenia urojonego bez części rzeczywistéj, jest rzeczywistą.

354. Funkcje odwrotne. Funkcje przestępne zmiennéj urojonéj uważane powyżéj, określiliśmy jako granice summ szeregów zbieżnych. Pozostałe przestępne

$$\mathrm{l}.\,z,\quad \text{łuk wst}\,z,\quad \text{łuk dos}\,z\,\ldots$$

określić możemy jako funkcje odwrotne poprzedzających.

355. Logarytm. Logarytmem naturalnym zmiennéj urojonéj

$$z=x+yi$$

nazywać będziemy wszelkie wyrażenie $u+vi$, dane przez równanie

(1) $$e^{u+vi} = x + yi$$

zakładając x, y, u i v rzeczywistemi; piszemy więc

(2) $$\mathrm{l}\,(x + yi) = u + vi$$

W ogólności, jeżeli

$$e^w = z$$

to

$$w = \mathrm{l}.\, z$$

bez względu na to, czy z i w są urojonemi lub rzeczywistemi.

Wiemy [352] że zmienna urojona z, może być przedstawioną pod postacią

$$z = \rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega) = \rho e^{\omega i}$$

Równanie więc (1) stanie się na zasadzie [350 (4)]

$$e^u\,(\mathrm{dos}\,v + i\,\mathrm{wst}\,v) = \rho\,(\mathrm{dos}\,\omega + i\,\mathrm{wst}\,\omega)$$

a że wyrażenia urojone równe, muszą mieć moduły równe, więc

$$e^u = \rho \qquad \text{czyli} \qquad u = \mathrm{l}.\,\rho$$

argumenty zaś różniące się o wielokrotność całkowitą 2π, a zatém

$$v = \omega + 2k\pi$$

oznaczając przez k ilość całkowitą. Podstawiając w (2), otrzymamy

(3) $$\mathrm{l}.\, z = \mathrm{l}.\,\rho + (\omega + 2k\pi)\, i$$

Ilość urojona z, ma więc nieskończoną ilość logarytmów, które otrzymamy nadając na k wszelkie możebne liczby całkowite. Zakładając jako najprostszy przypadek $k=0$, otrzymamy, oznaczając tę wartość szczególną przez $\mathrm{L}.z$

$$\mathrm{L}.\,z=\mathrm{L}.\,\rho+\omega i$$

jeden z logarytmów ilości z, któren Cauchy nazwał *wartością główną logarytmu z*. Logarytm zmiennéj z nie może być rzeczywistym, chyba jeżeli $\omega=0$ w powyższem wyrażeniu, to jest, jeżeli zmienna stanie się *rzeczywistą dodatną* [**77**]. *Tylko ilości rzeczywiste dodatne, mogą mieć logarytmy rzeczywiste.*

Lecz ilość nawet rzeczywista dodatna, ma oprócz logarytmu rzeczywistego, nieskończoną liczbę logarytmów urojonych, które otrzymamy dodając do logarytmu rzeczywistego $2k\pi i$: bo dla $\omega=0$ z (3), podstawiając za z, rzeczywistą dodatną $x=\rho$:

$$\mathrm{l}.\,x=\mathrm{L}.\,x+2k\pi i$$

Wartości logarytmów ilości rzeczywistych dodatnych, używane zwykle w rachunku, są tylko wartościami głównemi tych logarytmów.

Zmienna urojona z stanie się rzeczywistą odjemną [**77**] dla $\omega=\pi$, lub $\omega=(2k+1)\pi$: mamy wtedy wartość główną logarytmu:

$$\mathrm{L}.(-y)=\mathrm{L}.y+\pi i$$

lub wartość jakąkolwek

$$\mathrm{l}.(-y)=\mathrm{l}.\,y+(2k+1)\pi i$$

Ilości rzeczywiste odjemne mają więc logarytmy urojone, które otrzymujemy *dodając do logarytmu wartości ich bez względu na znak, nieparzystą liczbę* πi.

Gdy moduł równa się jedności, $L.1=0$,

$$L.\,z=\omega i$$

dla $z=-1=\text{dos}\,\pi+i\,\text{wst}\,\pi$, otrzymamy

$$L(-1)=\pi i, \quad \text{a ztąd} \quad \pi=\frac{L(-1)}{i}$$

wartości, które oznaczają tylko wypadki wynikające z określenia logarytmu zmiennéj urojonéj.

Otrzymalibyśmy w podobny sposób, zakładając

$$z=i, \quad \text{to jest:} \quad \rho=1, \quad \omega=\frac{\pi}{2}$$

wyrażenie

$$Li=\frac{\pi}{2}\,i, \quad \text{czyli:} \quad \frac{Li}{i}=\frac{\pi}{2}$$

Z ostatniego wyrażenia otrzymamy, mnożąc licznik i mianownik pierwszéj strony przez i, i zważając że $i^2=-1$

$$i\,Li=-\frac{\pi}{2}$$

a że

$$e^{i\,Li}=e^{Li^i}=i^i$$

więc

$$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Funkcja logarytmowa, mogąc przybierać nieskończenie wielką liczbę wartości dla każdéj wartości zmiennéj niezależnéj, nie jest jednowartościową dla wszelkiéj wartości téj zmiennéj: uczynimy ją jednowartościową, zastrzegając naprzykład, że wartość logarytmu ma być *wartoscią główną*, to jest zmieniając argument od 0 do 2π, lub od $-\pi$ do $+\pi$, (z wyłączeniem jednéj z tych granicznych wartości, naprzykład $-\pi$); lub też zmieniając zmienną z na płaszczyznie w zakresie nie zawierającym początku, jak powyżéj [**337**].

356. Funkcje kołowe. Funkcje trygonometryczne sprowadzają się jakeśmy widzieli do funkcji wykładniczéj: funkcje odwrotne trygonometryczne sprowadzićby można do funkcyj logarytmowych; funkcje te są wielowartościowemi w ogólności; mogą być jednowartościowemi z pewnemi zastrzeżeniami, lub zmieniając zmienną niezależną w pewnym zakresie.

Funkcje więc

$$u = \text{łuk wst}\, z, \quad u = \text{łuk dos}\, z, \quad u = \text{łuk st}\, z \ldots$$

uważać będziemy jako określone przez równania znanych własności [**349**]

$$z = \text{wst}\, u, \quad z = \text{dos}\, u, \quad z = \text{st}\, u, \ldots$$

357. Określenie z^m dla jakiegokolwiek z i m. Określiliśmy wyżéj [**347**]

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots$$

Podstawiając za z wartość mw, gdzie w i m są jakiemikolwiek, otrzymamy

$$e^{mw} = 1 + \frac{mw}{1} + \frac{m^2w^2}{1.2} + \frac{m^3w^3}{1.2.3} + \ldots$$

Załóżmy

$$e^w = z\,, \quad \text{czyli} \quad w = \text{l.}\, z$$

otrzymamy szereg

$$e^{m\mathrm{l}.z}=1+\frac{m\mathrm{l}.z}{1}+\frac{m^2(\mathrm{l}.z)^2}{1.2}+\frac{m^3\mathrm{l}(z)^3}{1.2.3}+\ldots$$

któren uważać będziemy jako określający funkcję z^m: tak że z określenia będziemy mieli

$$e^{mw}=z^m,\quad \text{lub}\quad e^{m\mathrm{l}.z}=e^{\mathrm{l}.z^m}=z^m$$

zaś

$$z^m=1+\frac{m\mathrm{l}.z}{1}+\frac{m^2(\mathrm{l}.z)^2}{1.2}+\frac{m^3\mathrm{l}(z^3)}{1.2.3}+\ldots$$

szereg ten jest zawsze zbieżnym [**345**], lecz funkcja z^m zależąca od $\mathrm{l}(z)$ będzie wielowartościową, bo logarytm może mieć nieskończenie wielką liczbę wartości; możemy ją uczynić jednowartościową pod temi samemi warunkami co $\mathrm{l}(z)$ [**354**], ograniczając go naprzykład do *wartości głównéj*.

Działania z wykładnikami urojonemi, odbywają się na zasadzie powyższego określenia zupełnie w ten sam sposób, co działania z wykładnikami rzeczywistemi : tak np.

$$z^m z^n = e^{m\mathrm{l}.z}\times e^{n\mathrm{l}.z}=e^{(m+n)\mathrm{l}.z}=z^{m+n}$$

$$(z^m)^n=e^{n\mathrm{l}z^m}=e^{nm\mathrm{l}.z}=z^{mn}\quad \text{i t. p.}$$

Aby oddzielić część rzeczywistą wyrażenia z^m od części urojonéj, przypuszczając zawsze z i m jakiemikolwiek, załóżmy wartość logarytmu z [**355**]

$$\mathrm{l}.z=p+qi$$

gdzie $p=\mathrm{L}.\rho$, $\quad q=\omega+2k\pi$; napisać możemy

$$z=e^{p+qi}$$

Podnosząc do potęgi m, otrzymamy na zasadzie poprzedzającego

$$z^m = e^{mp+mqi}$$

ponieważ q zawiera nieokreśloną liczbę $2k\pi$, funkcja z^m jest wielowartościową, jakiekolwiek będzie m różne od zera. Jeżeli naprzykład m jest rzeczywistém ułamkowém, równém $\frac{\mu}{\nu}$, gdzie μ i ν są liczbami całkowitemi, pierwszemi pomiędzy sobą to

$$z^{\frac{\mu}{\nu}} = e^{\frac{\mu p}{\nu}+\frac{\mu q}{\nu}i} = e^{\frac{\mu p}{\nu}}\left(\operatorname{dos}\frac{\mu q}{\nu} + i \operatorname{wst}\frac{\mu q}{\nu}\right)$$

$z^{\frac{\mu}{\nu}}$ będzie mogło mieć tyle wartości różnych [**340**], ile jest jedności w mianowniku ν.

Jeżeli wykładnik m jest urojonym, załóżmy

$$m = r(\operatorname{dos}\theta + i \operatorname{wst}\theta)$$

zaś

$$\mathrm{l}.\, z = p + qi = s(\operatorname{dos}\eta + i \operatorname{wst}\eta)$$

otrzymamy

$$z^m = e^{rs[\operatorname{dos}(\theta+\eta) + i \operatorname{wst}(\theta+\eta)]}$$

lub

$$z^m = e^{rs \operatorname{dos}(\theta+\eta)}[\operatorname{dos} rs \operatorname{wst}(\theta+\eta) + i \operatorname{wst} rs \operatorname{dos}(\theta+\eta)]$$

Widzimy z tego ostatniego wzoru, w którym r, s, θ, η są rzeczywistemi znanemi funkcjami m, p i q, lub m, ρ i ω, lub jeszcze m, x i y, jak mając daną potęgę urojoną wyrażenia urojonego, można oddzielić w niéj część rzeczywistą od urojonéj, lub znaleźć jéj moduł i argument.

Potęga ta z^m jest wielowartościową w ogólności, bo zawiera s i η zależne od q, które zależy od nieokreślonéj liczby $2k\pi$, i może mieć nieokreśloną liczbę wartości.

Można ją uczynić jednowartościową w pewnym zakresie, naprzykład biorąc pod uwagę tylko wartość główną logarytmu z, to jest $k=0$.

358. Jeżeli mamy

$$u=z^m$$

gdzie z i m są jakiemikolwiek, uważać możemy m jako logarytm u według zasady z

$$m=\log_z u$$

Mamy także

$$\mathrm{l}.\,u=m\mathrm{l}.\,z \qquad m=\frac{\mathrm{l}.u}{\mathrm{l}.z}$$

Jako określenie logarytmu według jakiéjkolwiek zasady z, przyjąć możemy związek

$$\log_z u=\mathrm{l}.\,u\times\frac{1}{\mathrm{l}.z}$$

a nazywając

$$\frac{1}{\mathrm{l}.z}=\mathrm{M}$$

$$\log_z u=\mathrm{M}\mathrm{l}.\,u$$

gdzie M będzie *zamiennikiem*. Jeżeli u i z są urojonemi, funkcja $\log_z u$ będzie wielowartościową, raz dla $\mathrm{l}.u$ który ma nieokreśloną liczbę wartości [**355**], drugi raz dla zamiennika, z téj saméj przyczyny. Uważając tylko wartości główne $\mathrm{l}.u$ i $\mathrm{l}.z$, funkcja stanie się jednowartościową.

Różniczkowanie funkcyj zmiennych urojonych.

359. Określenie. Pochodnéj i różniczce funkcji zmiennéj urojonéj damy to samo określenie, jakieśmy dali powyżéj [Roz. VII] w przypadku zmiennéj rzeczywistéj.

Niech będzie zmienna urojona

$$z = x + yi$$

i jéj funkcja

$$u = \mathrm{X} + \mathrm{Y}i$$

gdzie x i y są rzeczywistemi, od siebie w ogólności niezależnemi, X i Y rzeczywistemi funkcjami zmiennych x i y. Nadawszy zmiennym x i y przyrostki nieskończenie małe od siebie niezależne dx, dy, otrzymamy

$$z + dz = x + dx + (y + dy)\, i$$

a zatém

$$dz = dx + idy$$

Przyrostek dz określony w ten sposób, nazywać będziemy przyrostkiem nieskończenie małym [**329**] zmiennéj niezależnéj z, czyli *różniczką* z.

Oznaczmy przez $d\mathrm{X}$ i $d\mathrm{Y}$, różniczki zupełne [**209**] funkcyj X i Y dwóch zmiennych niezależnych x i y; wyrażenie

$$du = d\mathrm{X} + id\mathrm{Y}$$

nazywać będziemy *różniczką* funkcji u, wyrażenie zaś

$$\frac{du}{dz} = \frac{d\mathrm{X} + id\mathrm{Y}}{dx + idy}$$

pochodną funkcji u względem zmiennéj niezależnéj z. A zatém, w przypadku funkcji zmiennéj urojonéj, tak jak w przypadku zmiennéj rzeczywistéj :

Pochodną funkcji, nazywamy granicę stosunku przyrostku funkcji, do przyrostku nieskończenie małego zmiennéj niezależnéj.

Różniczką nazywamy iloczyn z pochodnéj przez przyrostek nieskończenie mały zmiennéj niezależnéj.

W razie funkcji wielu zmiennych urojonych, określenie powyższe stosuje się także do *pochodnych częściowych* [208], a zatém wszelkie działania na tego rodzaju funkcjach, sprowadzają się w zupełnie ten sam sposób jak dla funkcyj rzeczywistych, do funkcji jednéj zmiennéj niezależnéj.

360. Rozwijając różniczki zupełne dX, dY [209], otrzymamy

$$\frac{du}{dz}=\frac{dX+idY}{dx+idy}=\frac{\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy+i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)}{dx+idy}$$

a oznaczając przez α stosunek *dowolny* przyrostków *dowolnych* dx, dy zmiennych niezależnych x i y

$$dy : dx = \alpha$$

otrzymamy

$$(1) \qquad \frac{du}{dz}=\frac{\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}+\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\alpha}{1+i\alpha}$$

Ponieważ α jest zupełnie dowolném, oznaczając stosunek dwóch ilości dx, i dy zupełnie dowolnych (jako przyrostków dwóch zmiennych x i y z założenia niezależnych) wyrażenie powyższe jest nieoznaczoném, może przybierać wszelką możebną wartość : dość jest dla tego nadać stosowną wartość dowolnéj α. Pochodna więc funkcji zmiennéj urojonéj, jest więc *w ogólności nieoznaczoną*, w czém się różni od pochodnéj względem zmiennéj rzeczywistéj, która jakeśmy udowodnili [**138**], ma *w ogólności* jedną oznaczoną wartość.

361. Funkcje jednopochodne. Załóżmy sobie znalezienie warunków które muszą zachodzić, aby pochodna $\frac{du}{dz}$ w ogólności nieoznaczona, mogła być jedyną, oznaczoną, w podobny sposób jak pochodna względem zmiennéj rzeczywistéj.

Jeżeli wyrażenie (1) ma być niezależném od dowolnéj α, musi nie zmieniać wartości dla jakiegokolwiek α; a zatém mieć tę samą w ogólności wartość, co w szczególnym przypadku $\alpha=0$, czyli musimy mieć

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}$$

podstawiając wartość tę w (1), otrzymamy

$$\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}+\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\alpha}{1+i\alpha}$$

a ztąd

$$i\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\alpha=\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\alpha$$

czyli

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}}{1}=\frac{\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}}{i} \tag{2}$$

Warunek ten jest koniecznym, aby $\frac{du}{dz}$ miało wartość niezależną od α; jest również dostatecznym, bo mnożąc na drugiéj stronie wyrażenia (2) licznik i mianownik przez α, dzieląc summę liczników przez summę mianowników ułamków równych (2), i równając pierwszéj stronie, otrzymamy wyrażenie ogólne (1), równe jednemu z ułamków (2), niezależnych od dowolnéj α.

Jeżeli warunek (2) *zachodzi, funkcja* u *ma pochodnę oznaczoną względem zmiennéj* z, to jest niezależną od przyrostków dx i dy zmiennych niezależnych x i y, równą

$$\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}$$

jedyną, podobnie jak pochodne względem zmiennych rzeczywistych $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, do których pochodna $\frac{du}{dz}$ się sprowadza.

Funkcję zmiennéj urojonéj, któréj pochodna ma wartość jedyną, oznaczoną w podobny sposób jak pochodna względem zmiennéj rzeczywistéj, nazywać będziemy funkcją JEDNOPOCHODNĄ.

Geometrycznie, szukając wartości pochodnéj dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj z, przedstawionéj [**325**] przez punkt m na płaszczyznie, którego spółrzędnemi są x i y, możemy nadawać tym spółrzędnym dowolne przyrostki od siebie niezależne, to jest, zakreślać od punktu M różne łuki nieskończenie małe krzywych w dowolnych kierunkach, danych przez dowolne wartości $\alpha = dy : dx$. Jeżeli wartość pochodnéj jest zawsze ta sama w jakimkolwiek kierunku brać będziemy przyrostek zmiennéj niezależnéj, funkcja będzie *jednopochodną*.

362. UWAGA I. Z określenia funkcji zmiennéj urojonéj [**322**] wynika, że wszelka funkcja dwóch zmiennych niezależnych rzeczywistych x i y, może być uważaną za funkcję zmiennéj urojonéj $z = x + yi$. Lecz w ogólności taka funkcja dowolnie wzięta, nie ma pochodnéj oznaczonéj: własności funkcji których badanie odbywa się przez roztrząsanie pochodnych, nie mogą być otrzymanemi biorąc pochodnę względem zmiennéj urojonéj, która jest nieoznaczoną; dogodném jest zatém i nieledwie konieczném, uważać raczéj taką funkcję wprost jako funkcję dwóch zmiennych niezaniezależnych w zwykły sposób, aniżeli jako funkcję jednéj zmiennéj urojonéj. Ztąd też pod nazwiskiem *funkcji zmiennéj urojonéj* rozumieją zwykle tylko *funkcje jednopochodne*: dawszy w myśl Cauch'ego ogólniejsze określenie funkcyj zmiennych urojonych, robimy powyższe zastrzeżenie wraz z uwagą, że teorja następna stosować się będzie jedynie prawie tylko do funkcyj jednopochodnych.

363. Warunki, jakim zadość czynią funkcje jednopochodne. Warunek (2),

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}}{1}=\frac{\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}}{i}$$

w którym X i Y oznaczają funkcje rzeczywiste, sprowadza się do dwóch następujących, równając części rzeczywiste i urojone:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y},\qquad \frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

a różniczkując częściowo

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}$$

czyli

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0$$

Więc jeżeli funkcja u jest jednopochodną, obiedwie funkcje rzeczywiste X i Y składające funkcję u zmiennéj urojonéj $z=x+yi$, czynić muszą zadość równaniu drugiego rzędu o różniczkach częściowych

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=0$$

364. Przedstawiając wyrażenie urojone za pomocą modułu i argumentu, niech będzie wyrażeniem zmiennéj niezależnéj :

$$z=\rho\,(\operatorname{dos}\omega+i\operatorname{wst}\omega)$$

i funkcji téj zmiennéj

$$u=P\,(\operatorname{dos}\Omega+i\operatorname{wst}\Omega)$$

czyli

$$u=X+Yi$$

oznaczając przez $X=P\operatorname{dos}\Omega$, $Y=P\operatorname{wst}\Omega$ funkcje rzeczywiste modułu ρ i argumentu ω.

Nadając zmiennym niezależnym ρ i ω przyrostki $d\rho$ i $d\omega$, otrzymamy

$$dz=d\rho\,(\operatorname{dos}\omega+i\operatorname{wst}\omega)+\rho d\omega\,(-\operatorname{wst}\omega+i\operatorname{dos}\omega),$$

$$du=\frac{\partial X}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial X}{\partial\omega}d\omega+i\left(\frac{\partial Y}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial Y}{\partial\omega}d\omega\right)$$

Biorąc stosunek $\frac{du}{dz}$ i wyrażając że stosunek ten ma być niezależnym od stosunku dowolnego $d\rho$ i $d\omega$, otrzymaliśmy rozumując jak poprzednio, warunek, aby funkcja była jednopochodną

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial \rho}+i\frac{\partial Y}{\partial \rho}}{\operatorname{dos}\omega+i\operatorname{wst}\omega}=\frac{\frac{\partial X}{\partial \omega}+i\frac{\partial Y}{\partial \omega}}{\rho(-\operatorname{wst}\omega+i\operatorname{dos}\omega)}$$

Mnożąc licznik i mianownik pierwszéj strony tego równania przez ρi i zważając że $i^2=-1$, otrzymamy mianowniki po obu stronach równe; równając zatém części rzeczywiste i urojone liczników otrzymamy

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{\partial X}{\partial \rho}&=\frac{\partial Y}{\partial \omega}\\ \rho\frac{\partial Y}{\partial \rho}&=-\frac{\partial X}{\partial \omega}\end{aligned}\right.$$

warunki, jakim zadość czynić winny funkcje rzeczywiste X i Y aby funkcja u była jednopochodną.

365. Uwaga II. Funkcja może być jednowartościową, a nie być jednopochodną i odwrotnie; może być również zarazem jednowartościową i jednopochodną. Tak naprzykład funkcja

$$u=x^2+y^2+2xyi$$

jest funkcją jednowartościową [333] zmiennéj urojonéj $z=x+yi$, lecz nie jest jednopochodną: bo funkcje

$$X=x^2+y^2,\qquad Y=2xy$$

nie czynią zadość równaniu (5), chyba w szczególnym przypadku $x=0$, $y=0$.

Funkcja u dana przez równanie

$$u^2 = z$$

czyli

$$u = \sqrt{\rho}\left(\text{dos}\,\frac{1}{2}\,\omega + i\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\,\omega\right)$$

nie jest jednowartościową dla wszelkich wartości z [337], lecz jest zawsze jednopochodną bo mamy tu [364]

$$X = \sqrt{\rho}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\,\omega, \qquad Y = \sqrt{\rho}\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\,\omega$$

$$\frac{\partial X}{\partial \rho} = \frac{\text{dos}\,\frac{1}{2}\,\omega}{2\sqrt{\rho}}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \rho} = \frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}\,\omega}{2\sqrt{\rho}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = -\frac{1}{2}\sqrt{\rho}\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\,\omega, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \omega} = \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\,\omega$$

a podstawiając w równania (6), widzimy że równania te są sprawdzone, a więc funkcja jest zawsze jednopochodną.

Funkcja

$$u = z^2$$

czyli

$$u = x^2 - y^2 + 2xyi$$

jest jednowartościową [338] i jednopochodną dla wszelkich wartości z czyli x i y; bo równania

$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy$$

dają

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 2x$$

czynią więc zadość warunkom (3).

366. W ogólności, funkcja

$$u = az^m$$

gdzie a jest stałą, m całkowitą dodatną jest funkcją jednowartościową [**338**] zmiennéj z dla jakiejkolwiek wartości tejże zmiennej; powiadam że funkcja ta jest jednopochodną i że jéj pochodna równa jest

$$\frac{du}{dz} = amz^{m-1}$$

W rzeczy saméj, jeżeli

$$z = x + yi$$

to

$$az^m = a(x + yi)^m,$$

a nadając zmiennym x i y przyrostki Δx, Δy i oznaczając przez Δz przyrostek odpowiedni z

$$\begin{aligned} a(z + \Delta z)^m &= a[x + \Delta x + (y + \Delta y)i]^m \\ &= a[(x + yi) + \Delta x + i\Delta y]^m \\ &= a[(x+yi)^m + m(x+yi)^{m-1}(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon(\Delta x + i\Delta y)] \end{aligned}$$

oznaczając przez ε summę wyrazów zdążających do zera gdy Δx i Δy zdążają do zera. Odejmując po obu stronach az^m i dzieląc przez $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$, otrzymamy

$$\frac{a(z + \Delta z)^m - az^m}{\Delta z} = a[m(x+yi)^{m-1} + \varepsilon]$$

przechodząc do granicy [**359**] otrzywamy, gdy Δx, Δy, a zatém Δz i ε, zdążają do zera

$$\frac{du}{dz} = amz^{m-1}$$

pochodnę, która ma tę samą wartość jakiekolwiek weźmiemy dx, dy: funkcja więc u jest jednopochodną dla wszelkiego z.

367. Twierdzenie. *Szereg postępujący podług potęg całkowitych, dodatnych zwiększających się zmiennéj urojonéj, jest w zakresie zbieżności, funkcją jednopochodną tejże zmiennéj.*

Niech będzie szereg

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

zbieżny dla wszelkiego modułu ρ zmiennéj z mniejszego od R (w zakresie koła zakreślonego promieniem R) [**345**].

Weźmy pod uwagę szereg

$$(2) \qquad a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots$$

otrzymany biorąc pochodną każdego wyrazu szeregu (1): powiadam że szereg (2) jest także zbieżnym w tym samym zakresie co szereg (1). Z początku jako środka, promieniem R' nieco mniejszym od promienia R, zakreślmy okrąg koła i nadajmy zmiennéj z wartość, któréj moduł ρ jest mniejszym od R'. Mnożąc wyrazy szeregu zbieżnego [**101** Wn. IV]

$$1 + 2\frac{\rho}{R'} + 3\frac{\rho^2}{R'^2} + \ldots$$

przez ilości

$$\alpha_1, \quad \alpha_2 R', \quad \alpha_3 R'^2, \ldots$$

(gdzie α_1, α_2, α_3 ... oznaczają moduły spółczynników stałych a_1, a_2, a_3 ...) nie zwiększające się nieograniczenie z założenia zbieżności szeregu (1), otrzymamy [**101**] szereg zbieżmy

$$(3) \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2\rho + 3\alpha_3\rho^2 + \ldots$$

Lecz szereg (3) jest szeregiem modułów szeregu (2): szereg (2) jest więc zbieżnym [**104**]; oznaczmy summę jego przez

$$(4) \qquad f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \ldots$$

nie przesądzając jeszcze czy $f'(z)$ jest pochodną $f(z)$. Nazwijmy w podobném znaczeniu

$$f''(z) = 2a_2 + 3.2a_3z + \ldots$$

summę szeregu zbieżnego otrzymanego w ten sam sposób z szeregu (2), co szereg (2) z szeregu (1): i tak daléj; wszystkie te szeregi są tego samego ogólnego kształtu co szereg (1), różnią się tylko spółczynnikami stałemi, podchodzą więc pod te same prawa. Dowiedziemy że $f'(z)$ jest pochodną $f(z)$, a przez to samo że $f''(z)$ jest pochodną $f'(z)$ i t. d.

W saméj rzeczy, nadajmy zmiennéj z przyrostek Δz, otrzymamy szereg

$$(5) \qquad f(z+\Delta z) = a_0 + a_1(z+\Delta z) + a_2(z+\Delta z)^2 + \ldots$$

zbieżny co do modułów: bo moduł $z+\Delta z$ przypuszczamy mniejszym od R, a zatém szereg (5) jest tylko szczególnym przypadkiem szeregu (1). Rozwijając dwumiany i układając podług potęg zwiększających się Δz, otrzymamy szereg:

$$(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots) + (a_1 + 2a_2z + \ldots)\frac{\Delta z}{1}$$
$$+ (2a_2 + 3.2a_3z + \ldots)\frac{\Delta z^2}{1.2} + \ldots$$

któren będzie szeregiem zbieżnym, mającym summę zdążającą do téj saméj granicy co summa szeregu (5), na zasadzie znanych twierdzeń [**105**, **106**]. Mamy więc, zważywszy na wartości (1), (4), ... wielomianów w nawiasach

(6) $$f(z+\Delta z)=f(z)+f'(z)\frac{\Delta z}{1}+f''(z)\frac{\Delta z^2}{1.2}+\ldots$$

a ztąd

(7) $$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)+f''(z)\frac{\Delta z}{1.2}+\ldots$$

Szereg po prawéj stronie tego wyrażenia postępuje podług potęg całkowitych Δz: jest więc zbieżnym [**343**] dla pewnéj wartości danéj z, a zmieniającego się Δz; jest również funkcją ciągłą Δz [**316**]. Gdy Δz zdąża do zera, summa tego szeregu zdąża do $f'(z)$: mamy więc w granicy

$$\text{gr}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$$

czyli [**359**]

$$\frac{df(z)}{dz}=f'(z)$$

a że $f'(z)$ z (4) ma tylko jednę wartość dla danéj wartości z, więc funkcja $f(z)$ jest funkcją jednopochodną zmiennéj urojonéj z, co było do dowiedzenia.

368. Wniosek 1. *Wszelka funkcja algebraiczna zmiennéj urojonéj, jest funkcją jednopochodną.*

Funkcją algebraiczną u zmiennéj urojonéj z nazywać będziemy funkcję, daną przez równanie algebraiczne pomiędzy u i z

$$f(u,z)=0.$$

Równanie to może być zawsze sprowadzoném do wielomianu zawierającego tylko potęgi całkowite dodatne zmiennych u i z [**10**]. Uważając $f(u, z)$ jako funkcję zmiennéj z, pozostawiając u niezmiennném, funkcja ta będzie jednopochodną; bo twierdzenie powyższe [**367**] stosuje się tém bardziéj, jeżeli przyjmiemy liczbę skończoną wyrazów, postępujących podług potęg zwiększających się zmiennéj z, kształt, w którym możemy przedstawić funkcję $f(u, z)$ uważaną jako funkcję z; pochodnę tą częściową oznaczoną, nazwijmy

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

Podobnież, pochodna częściowa

$$\frac{\partial f}{\partial u}$$

będzie także oznaczoną: a więc i pochodna

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}}$$

będzie oznaczoną, czyli u będzie funkcją jednopochodną zmiennéj z. Wyrażenia powyższego pochodnéj $\frac{du}{dz}$ przez pochodne $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial u}$ dowiedliśmy [**178**], uważając funkcję $f(u, z)$ jako wypadek *działań* dokonanych na u i z: dowodzenie więc służy bez względu na to, czy u i z są rzeczywistemi czy urojonemi.

369. Uwaga. Sposób w jaki pochodna $f'(z)$ tworzy się z funkcji $f(z)$ pokazuje zarazem, że wszelkie prawidła różniczkowania funkcji algebraicznych stosują się do przypadku, kiedy w tych funkcjach za zmiennę rzeczywistą x

podstawimy zmienną urojoną z. Prawideł tych nie potrzebujemy więc dowodzić osobno dla zmiennych urojonych; zauważymy tylko że :

1° *Funkcja jednopochodna funkcji jednopochodnéj, jest funkcją jednopochodną*; bo jeżeli

$$u = f(v), \quad v = \varphi(z)$$

gdzie u jest funkcją jednopochodną v, v funkcją jednopochodną z, mamy :

$$du = f'(v)\,dv, \quad dv = \varphi'(z)\,dz$$

a więc

$$\frac{du}{dz} = f'(v)\,\varphi'(z)$$

a że z założenia $f'(v)$ i $\varphi'(z)$ są oznaczonemi, więc i $\frac{du}{dz}$ jest oznaczoném.

2° *Funkcja odwrotna jakiejkolwiek funkcji jednopochodnéj jest jednopochodną*. Bo jeżeli

$$u = f(z)$$

a $\frac{du}{dz}$ ma wartość oznaczoną, to [**153**]

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{f'(z)}$$

ma także wartość oznaczoną ;

3° *Funkcja złożona funkcyj jednopochodnych pewnéj zmiennéj niezależnéj, jeżeli jest jednopochodną względem każdéj z funkcji składających, jest jednopochodną względem saméj zmiennéj niezależnéj*. Bo jeżeli

$$u = f(v, w \ldots)$$

gdzie f jest jednopochodną względem v, w, ... po szczególe, a v, w ... są funkcjami jednopochodnemi z, to

$$\frac{du}{dz}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dz}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dz}+\ldots$$

jest oznaczoném, bo z założenia $\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}, \ldots \frac{dv}{dz}, \frac{dw}{dz}, \ldots$ są oznaczonemi.

370. Wniosek II. Weźmy pod uwagę funkcje przestępne

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots \qquad [347]$$

$$\text{wst}\, z=\frac{z}{2}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\ldots \qquad [349]$$

$$\text{dos}\, z=1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots \qquad [349]$$

otrzymamy, stosując Twierdzenie [367]

$$\frac{d.\,e^z}{dz}=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots$$

$$\frac{d.\,\text{wst}\, z}{dz}=1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

$$\frac{d.\,\text{dos}\, z}{dz}=-\left(\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$

a zatém

$$de^z=e^z,\qquad d\,\text{wst}\, z=\text{dos}\, z,\qquad d.\,\text{dos}\, z=-\text{wst}\, z,$$

tak jak gdyby z było rzeczywistém.

Weźmy jeszcze pod uwagę funkcje odwrotne

$$u=\text{l}.\ z,\qquad u=\text{łuk wst}\, z,\qquad u=\text{łuk dos}\, z, \ldots$$

mamy

$$z = e^u, \qquad z = \mathrm{wst}\, u, \qquad z = \mathrm{dos}\, u, \ldots$$

a więc

$$dz = e^u du, \qquad dz = \mathrm{dos}\, u\, du, \qquad dz = -\,\mathrm{wst}\, u\, du, \ldots$$

czyli, jak widzimy z łatwością podobnie jak wyżéj [**161**], [**165**]

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\,z}{dz} = \frac{1}{z}, \qquad \frac{d\,\text{łuk wst}\, z}{dz} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\frac{d\,\text{łuk dos}\, z}{dz} = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \ldots$$

tak jak gdyby z było zmienną rzeczywistą.

371. Wszystkie inne funkcje przestępne któreśmy brali do tychczas pod uwagę, są funkcjami złożonemi algebraicznie z poprzednich; na zasadzie więc tego, cośmy zauważyli powyżéj [**369**] możemy powiedzieć że:

Wszystkie funkcje zasadnicze któreśmy brali dotąd pod uwagę, są funkcjami jednopochodnemi: pochodne tych funkcyj otrzymują się według prawideł podanych dla funkcyi zmiennych rzeczywistych, podstawiając za zmienną rzeczywistą, zmienną urojoną.

Funkcje złożone z powyższych funkcyj zasadniczych w sposób określony temiż funkcjami, (t. j. które tworzą się z funkcji zasadniczych, tak jak funkcje zasadnicze tworzą się ze zmiennéj) są funkcjami jednopochodnemi zmiennéj niezależnéj.

W ogólności:

Różniczkowanie funkcyj zmiennych urojonych odbywa się według prawideł podanych dla funkcyj zmiennych rzeczywistych, gdzie za zmienną rzeczywistą przypuścimy podstawioną zmienną urojoną; pochodne tak otrzymane będą oznaczone, byleby dane funkcje oznaczały tylko działania określone przez te funkcje, któreśmy nazwali zasadniczemi, i które dotąd jedynie *braliśmy pod uwagę.*

372. Funkcje doskonałe. *Funkcję ciągłą, skończoną, jednowartościową i jednopochodną, względem pewnéj zmiennéj niezależnéj, nazywać będziemy* FUNKCJĄ DOSKONAŁĄ *téj zmiennéj niezależnéj.*

Funkcja może być doskonałą tylko w pewnym zakresie zmienności zmiennéj niezależnéj, jeżeli po za tym zakresem jedna, lub wszystkie z powyższych własności, któremiśmy ją określili przestają mieć miejsce.

Funkcja, jest doskonałą dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj, jeżeli jest ciągłą, skończoną, jednowartościową i jednopochodną dla wszelkich wartości skończonych, jakie zmiennéj niezależnéj nadać możemy.

Zestawiając to, cośmy powyżéj powiedzieli względem funkcyj zasadniczych, widzimy że:

1° Funkcje algebraiczne są *doskonałemi* tylko w zakresie, w którym nie przestają być jednowartościowemi [**341**] lub ciągłemi, jakkolwiek funkcje te sę zawsze jednopochodnemi [**368**].

2° Funkcje określone jako summy szeregów zbieżnych postępujących podług potęg całkowitych dodatnych zwiększających się pewnéj zmiennéj, są *funkcjami doskonałemi* téj zmiennéj, w zakresie zbieżności szeregu [**346**], [**367**].

3° Funkcje e^z, wst z, dos z, są *doskonałemi* dla wszelkich możebnych wartości zmiennéj z.

4° Wielomian algebraiczny wymierny, zawierający same potęgi całkowite zmiennéj, jest funkcją *doskonałą*, dla wszelkich wartości téjże zmiennéj.

W jednym z dalszych rozdziałów zajmiemy się rozwijaniem tego rodzaju funkcji na szeregi: damy dowodzenie twierdzenia Cauch'ego na mocy którego wszelka funkcja doskonała może być rozwiniętą na szereg zbieżny postępujący podług potęg całkowitych zwiększających się zmiennéj i wyciągniemy z tego twierdzenia wiele godnych uwagi własności tych funkcyj, które posłużą nam do badania niektórych funkcyj przestępnych, całkiem nowego kształtu, nie dających się sprowadzić do żadnych z poprzednio uważanych funkcyj zasadniczych.

CZĘŚĆ IV

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO GEOMETRJI

CZĘŚĆ IV

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO GEOMETRYI

ROZDZIAŁ XIX

O STYCZNOŚCI NA PŁASCZYŹNIE

Proste styczne do krzywych : — Styczna — Normalna — Spółrzędne biegunowe — Assymptoty. — O styczności linij pomiędzy sobą w ogólności : — Rzędy styczności. — Punkta przegięcia. — Wklęsłość i wypukłość. — O krzywych ściśle stycznych. — Koło ściśle styczne. — Krzywe odniesione do spółrzędnych jednorodnych : — Wyznaczenie punktów przegięcia. — Zastosowania i przykłady : — Krzywe 2go stopnia. — Cykloida. — Spiralne.

Proste styczne do krzywych.

373. Styczna. Niech będzie równanie krzywéj LK (fig. 78) na płasczyznie

$$f(x, y) = 0\,, \qquad \text{lub} \qquad y = \mathrm{F}(x)$$

równaniem stycznéj MT w punkcie jakimkolwiek M, którego spółrzędnemi są x, y, będzie [**141**]

$$\text{(1)} \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

gdzie X, Y są spółrzędnemi bieżącemi stycznéj, $\frac{dy}{dx}$ jéj spółczynnikiem kątowym, jakiekolwiek będzie nachylenie

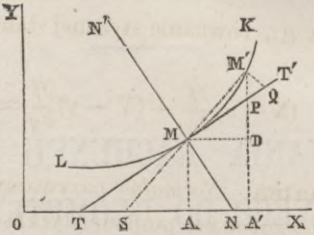


fig. 78.

osi spółrzędnych. Równanie to możemy także napisać w kształcie

$$\text{(2)} \qquad \frac{Y - y}{dy} = \frac{X - x}{dx}$$

lub jeszcze

$$\text{(3)} \qquad (X - x)\,dy = (Y - y)\,dx$$

dx i dy są różniczkami spółrzędnych, jakakolwiek będzie zmienna niezależna [**151**].

Styczna równoległa do osi odciętych, odpowiadać będzie wartości $\frac{dy}{dx} = 0$ [**141**], jéj równaniem będzie więc

$$Y - y = 0.$$

Stycznéj równoległéj do osi rzędnych odpowiada wartość $\frac{dx}{dy} = 0$ [**45**]; jéj równaniem będzie

$$X - x = 0.$$

Mamy również z równania krzywéj :

$$f(x, y) = 0$$

wartość pochodnéj [**178**] :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

podstawiając w (1), równanie stycznéj stanie się

$$(4) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

374. Normalna. *Normalną* nazywamy prostopadłą do stycznéj poprowadzoną w punkcie styczności.

Przypuśćmy układ osi prostokątnych : równania normalnéj NN′ otrzymamy, biorąc odwrócony spółczynnik kątowy stycznéj ze znakiem przeciwnym [**145**]. Równanie to będzie więc

$$(5) \qquad Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

lub

$$(6) \qquad (Y - y)\,dy + (X - x)\,dx = 0$$

lub jeszcze

$$(7) \qquad \frac{X - x}{dy} + \frac{Y - y}{dx} = 0$$

a w razie krzywéj danéj przez funkcję niewyraźną $f(x,y)=0$:

$$(8) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

W razie osi spółrzędnych tworzących ze sobą kąt θ, otrzymamy, za pomocą zmiany spółrzędnych [**58**], lub wprost, biorąc równanie prostopadłéj do prostéj danéj przez równanie (1), równanie normalnéj :

$$Y-y=-\frac{dx+dy\,\mathrm{dos}\,\theta}{dy+dx\,\mathrm{dos}\,\theta}(X-x)$$

375. Część stycznéj lub normalnéj, zawartą pomiędzy punktem styczności a przecięciem się z osią odciętych, nazywamy *długością stycznéj* MT, lub *długością normalnéj* MN. Odległość tego punktu przecięcia się stycznéj lub normalnéj z osią odciętych od spodka rzędnéj punktu styczności, nazywamy długością *podstycznéj* AT, lub *podnormalnéj* AN (fig. 78).

Przypuszczając osie prostokątne, z trójkątów MTA i MAN, w których

$$\mathrm{st}\,MTX=\frac{dy}{dx},\quad \mathrm{st}\,MNX=-\frac{dx}{dy}$$

otrzymamy

$$y=MA=TA\frac{dy}{dx}=-AN\frac{dx}{dy}$$

$$MT^2=y^2+TA^2,\qquad MN^2=y^2+AN^2$$

a ztąd z łatwością :

Długość podstycznéj $TA=y\dfrac{dx}{dy}$

« podnormalnéj $NA=y\dfrac{dy}{dx}$

« stycznéj $MT=\dfrac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$

« normalnéj $MN=\dfrac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$

376. Styczna w spółrzędnych biegunowych. Niech będzie (fig. 79) biegun O, oś biegunowa OX i krzywa LK, któréj równanie w spółrzędnych biegunowych

$$f(\rho, \omega) = 0$$

wyraża związek pomiędzy promieniem wodzącym $OM = \rho$, i kątem biegunowym. $MOX = \omega$, jakiegokolwiek punktu M.

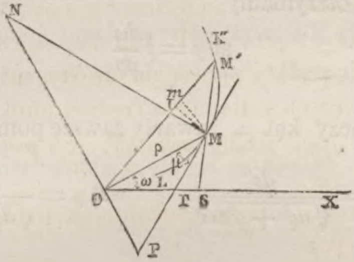


fig. 79.

Kierunek stycznéj MT w tym punkcie wyznaczonym jest przez kąt $OMT = \mu$, jaki styczna tworzy z promieniem wodzącym.

Aby wyznaczyć ten kąt za pomocą spółrzędnych ρ i ω, weźmy punkt M' w odległości nieskończenie małéj od M: spółrzędnemi tego punktu będą

$$OM' = \rho + \Delta\rho, \quad M'OX = \omega + \Delta\omega$$

a zakreślając z punktu O promieniem OM, łuk Mm:

$$mM' = \Delta\rho, \quad M'OM = \Delta\omega$$

Poprowadźmy sieczną M'M, trójkąt M'MI da nam

$$\frac{\text{wst } IM'M}{\text{wst } M'MI} = \frac{MI}{M'I} = \frac{MI}{\text{łuk } Mm} \times \frac{\text{łuk } Mm}{M'I} = \frac{MI}{\text{łuk } Mm} \frac{\rho\Delta\omega}{M'I}$$

W granicy, gdy M' zbliża się nieograniczenie do M, sieczna M'S do stycznéj MT,

$$\text{gr}\,\text{IM'M} = \mu, \quad \text{gr}\,\text{M'MI} = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \text{gr}\,\frac{\text{MI}}{\text{łuk Mm}} = 1$$

$$\text{gr}\,\text{M'I} = \Delta\,, \quad \text{gr}\,\frac{\Delta\omega}{\Delta\rho} = \frac{d\omega}{d\rho}$$

podstawiając, otrzymamy

$$(2) \qquad \text{st}\,\mu = \rho\,\frac{d\omega}{d\rho}$$

co nam wyznaczy kąt μ, zawarty zawsze pomiędzy 0 a π:

$$(3) \qquad \text{dos}\,\mu = \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}, \qquad \text{wst}\,\mu = \frac{\rho d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}$$

wstawa będzie zawsze dodatną, dostawa dodatną lub odjemną, stosownie do tego, czy kąt jest ostrym lub rozwartym.

377. Normalna MN tworzy z promieniem wodzącym kąt OMN (fig. 79) dopełniający kąta μ.

Poprowadźmy przez biegun O, prostopadłą NP do promienia wodzącego OM: przecięcie się téj prostopadłéj ze styczną w punkcie P, z normalną w punkcie N, wyznaczy nam długości, które w spółrzędnych biegunowych nazywamy długościami:

Podstycznéj $\quad \text{OP} = \rho\,\text{st}\,\mu = \rho^2\,\frac{d\omega}{d\rho}$

Ponormalnéj $\quad \text{ON} = \rho\,\text{dot}\,\mu = \frac{d\rho}{d\omega}$

Stycznéj $\quad \text{MP} = \sqrt{\rho^2 + \rho^4\,\frac{d\omega^2}{d\rho^2}} = \rho\,\sqrt{1 + \rho^2\,\frac{d\omega^2}{d\rho^2}}$

Normalnéj $\quad \text{MN} = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}$

378. Assymptoty. *Assymptotą* (niemaltyczną) gałęzi nieograniczonéj krzywéj, nazywamy prostę nieograniczoną, od któréj punkta krzywéj mają odległość zdążającą do granicy zero, w miarę jak punkta te oddalają się nieograniczenie.

Assymptota jest granicą kierunku stycznéj, gdy punkt styczności oddala się do nieskończoności na krzywéj, jeżeli granica ta jest oznaczoną.

W rzeczy saméj, niech będzie krzywa LK (fig. 80)

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

i prosta AS nierównoległa do osi rzędnych

$$(2) \qquad Y = gX + h$$

Jeżeli odległość mN punktu na krzywéj m, od prostéj AS ma być nieskończenie małą, różnica Mm rzędnych prostéj

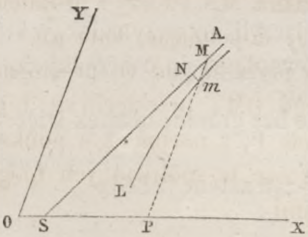


fig. 80.

i krzywéj odpowiadających téj saméj odciętéj x = P, musi być także nieskończenie małą; bo kąt NMm przypuszczamy skończonym, zaś Nm = Mm wst NMm. Nazwawszy różnicę tę ε

$$(3) \qquad Y - y = \varepsilon = gx + h - y$$

warunek, żeby prosta AS było assymptotą, sprowadzonym zostaje do warunku, żeby ε było nieskończenie małém, gdy x zdąża do nieskończoności. Równanie (3) daje nam,

$$\frac{y}{x} = g + \frac{h - \varepsilon}{x}$$

a przechodząc do granicy, gdy $x = \infty$, stała g będzie:

(4) $$g = \mathrm{gr}\, \frac{y}{x}$$

Otrzymamy rówież z (3), stałę h

$$h = y - gx + \varepsilon$$

czyli w granicy, gdy $x = \infty$, $\varepsilon = 0$

(5) $$h = \mathrm{gr}\,(y - gx)$$

Ponieważ wyłączyliśmy przypadek, w którym assymptota mogłaby być równoległą do osi rzędnych, y i x zwiększają się jednocześnie bez granic; ułamek więc $\frac{y}{x}$ przedstawia się pod postacią $\frac{\infty}{\infty}$; a zatém [**285**]:

$$\mathrm{gr}\, \frac{y}{x} = \mathrm{gr} \frac{\frac{dy}{dx}}{1}, \quad \text{gdy} \quad x = \infty,$$

byleby $\frac{dy}{dx}$ zdążało do granicy oznaczonéj dla $x = \infty$; a więc w tym razie, na zasadzie (4):

(6) $$g = \mathrm{gr}\, \frac{y}{x} = \mathrm{gr}\, \frac{dy}{dx}$$

W podobny sposób mamy

$$y-gx=\frac{g-\frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}$$

w granicy, gdy $x=\infty$, gr $\frac{y}{x}=g$, gr $\frac{1}{x}=0$, wyrażenie $y-gx$ przedstawia się pod postacią $\frac{0}{0}$; a zatém [**285**

$$h=\text{gr}(y-gx)=\text{gr}\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\text{gr}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

byleby $y-x\frac{dy}{dx}$ zdążało do granicy oznaczonéj dla $x=\infty$

Równanie więc (2) staje się

$$\text{Y}=\text{gr}\frac{dy}{dx}\text{X}+\text{gr}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

a że równanie stycznéj [**373**] jest

$$\text{Y}=\frac{dy}{dx}\quad+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

więc assymptota jest granicą stycznéj, któréj punkt styczności znajduje się w odległości niekoniecznie wielkiéj, jeżeli granica ta jest oznaczoną, c. b. d. d.

Uwaga. Jeżeli $\frac{dy}{dx}$, lub $y-x\frac{dy}{dx}$, nie zdąża do granicy oznaczonéj, gdy $x=\infty$, krzywa może jednak mieć assymptotę, która nie jest granicą stycznéj.

Tak naprzykład krzywa, któréj równaniem jest

$$Y = \frac{\text{wst}\, x}{x}$$

ma widocznie] oś odciętych za assymptotę, gdyż odległość jéj od téj osi, czyli rzędna zdąża do granicy zero, gdy x zwiększa się nieograniczenie; a jakkolwiek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \,\text{dos}\, x - \text{wst}\, x}{x^2} = \frac{\text{dos}\, x - \dfrac{\text{wst}\, x}{x}}{x}$$

zdąża do granicy zero, gdy x zdąża do nieskończoności, wyrażenie

$$y - x\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{\text{wst}\, x}{x} - \text{dos}\, x$$

pozostaje nieoznaczoném dla $x = \infty$ i assymptota ta nie może być uważaną jako granica stycznéj, bo granica ta nie istnieje.

Wyłączyliśmy przypadek, w którym assymptota mogłaby być równoległą do osi rzędnych: lecz zastępując x przez y, a y przez x i stosując powyższe rozumowanie, zobaczylibyśmy że i w tym przypadku assymptota jest granicą kierunku stycznéj, jeżeli granica ta jest oznaczoną.

O styczności linij pomiędzy sobą w ogólności.

379. Określenie. Linje LK, L_1K_1 (fig. 81) mające

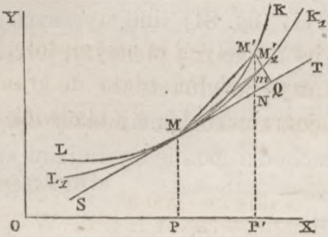


fig. 81.

punkt wspólny M i w tym punkcie styczną wspólną ST, nazywamy *linjami stycznemi pomiędzy sobą.*

Wziąwszy na stycznéj wspólnéj odległość MQ od punktu styczności nieskończenie małą pierwszego rzędu, i wyprowadziwszy z punktu Q prostopadłą QM' do stycznéj, wiemy [**141**] że M'Q i M'_1Q są nieskończenie małemi rzędu wyższego nad pierwszy; różnica $M'M'_1 = M'Q - M_1'Q$ jest również nieskończenie małą rzędu wyższego nad pierwszy, to jest nieskończenie małą względem MQ.

Odwrotnie, mając krzywę LK, styczną do niéj MT i poprowadziwszy przez punkt M jakąkolwiek krzywą L_1 K_1: *jeżeli odległość dwóch krzywych* $M'M'_1$ *liczona na prostopadłéj* M'Q *w odległości nieskończenie małéj* MQ *od punktu styczności do stycznéj poprowadzonéj, jest nieskończenie małą względem téj odległości* MQ, *powiadam że krzywe* LK, L_1K_1 *są stycznemi w punkcie* M.

W rzeczy saméj, poprowadziwszy cięciwy MM', MM'_1, mamy

$$\operatorname{st} M'MQ = \frac{M'Q}{MQ}, \quad \operatorname{st} M'_1MQ = \frac{M'_1Q}{MQ}$$

wartości w granicy równe, bo M'Q i M'_1Q różnią się z założenia o nieskończenie małą względem MQ [**125**]; stosunki więc dwóch cięciw MM', MM'_1, zdążają do granicy wspólnéj, stycznéj wspólnéj MT, c. b. d. d.

380. Rzędy styczności. Wiemy z poprzedzającego, że odległość $M'M'_1$ (fig. 81) linij stycznych jest nieskończenie małą rzędu wyższego nad pierwszy, jeżeli MQ weźmiemy za nieskończenie małą główną.

Jeżeli $M'M_1'$ jest nieskończenie małą *drugiego rzędu*, powiadamy że zachodzi pomiędzy linjami styczność *pierwszego rzędu*. Jeżeli odległość ta $M'M'_1$ jest *trzeciego rzędu*, styczność jest drugiego rzędu i. t. d. W ogólności:

Styczność pomiędzy linjami będzie rzędu n*go, jeżeli odległość dwóch krzywych liczona na prostopadłéj w odległości nieskończenie małéj od punktu styczności do stycznéj wspólnéj poprowadzonéj, jest nieskończenie małą rzędu* $n+1$.

Określenie to nie przypuszcza że krzywe są odniesionemi do jakichkolwiek spółrzędnych, jest zatém niezależném od układu tych spółrzędnych.

Nakréślmy teraz na płaszczyznie układ osi prostolinijnych jakichkolwiek, *byleby oś* OY *tworzyła kąt skończony ze styczną* MT. Poprowadziwszy rzędne punktów M i M' wiemy że M'N, M'm będą nieskończenie małemi tego samego rzędu co M'Q, $M'Q_1'$ [**141**]: w określeniu więc powyższém rzędu styczności linij, zamiast liczyć odległości na prostopadłéj do stycznéj wspólnéj, możemy liczyć je na rzędnéj punktu jednéj z linij nieskończenie zbliżonego do punktu styczności. Niech będą

$$f(x,y)=0, \qquad f_1(x,y_1)=0$$

równania linij LK, L_1K_1', odniesionych do tego układu: $x_0=0P$, $y_0=(y_1)_0=MP$, spółrzędne punktu wspólnego M dwóm linjom; niech będzie daléj:

$$PP'=\Delta x, \quad M'P'=y_0+\Delta y, \quad mP'=(y_1)_0+\Delta y_1$$

otrzymamy, rozwijając $y_0+\Delta y$, $(y_1)_0+\Delta y_1$ podług wzoru Taylor'a [**277**], jako funkcje $x_0+\Delta x$ i przypuszczając pochodne uważane ciągłemi, skończonemi:

$$y_0+\Delta y = y_0 + \Delta x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{\Delta x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \dots$$
$$+\frac{\Delta x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 + \mathrm{R}_{n+2}$$

$$(y_1)_0+\Delta y_1 = (y_1)_0 + \Delta x\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + \frac{\Delta x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0 + \dots$$
$$+\frac{\Delta x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}y_1}{dx^{n+1}}\right)_0 + \mathrm{R}'_{n+2}$$

Różnica $\mathrm{M}'m$, któréj rzęd jest z określenia [**379**] o jedność wyższym od rzędu styczności linij, będzie miała wyrażenie

$$y_0-(y_1)_0+\Delta x\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0\right]+\frac{\Delta x^2}{1.2}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0-\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0\right]+\dots$$
$$+\frac{\Delta x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}\left[\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0-\left(\frac{d^{n+1}y_1}{dx^{n+1}}\right)_0\right]+(\mathrm{R}_{n+2}-\mathrm{R}'_{n+2})$$

gdzie wskaźnik 0 pokazuje że w pochodnych podstawić należy x_0 za x, y_0 za y lub y_1. Aby zachodziła między linjami styczność rzędu $n$go, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, żeby wyrażenie powyższe było nieskończenie małém rzędu $n+1$: a że wyrazy dopełniające R_{n+2}, R'_{n+2}, są rzędu wyższego nad $n+1$, warunek ten staje się

(1) $$y_0=(y_1)_0,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0\dots$$
$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0=\left(\frac{d^ny_1}{dx^n}\right)_0$$

Pierwsze z tych równań $y_0 = (y_1)_0$ wyraża tylko, że linje mają punkt M wspólny; drugie $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0$, że linje w tym punkcie mają styczną wspólną. W ogólności możemy więc powiedzieć:

Twierdzenie. *Aby zachodziła styczność* ngo *rzędu pomiędzy linjami w pewnym punkcie, koniecznem jest i dostatecznem, żeby dla odciętéj tego punktu, tak rzędna, jak i* n *pierwszych pochodnych rzędnéj względem odciętéj były równemi dla jednéj i drugiéj krzywéj: byleby oś rzędnych nie była równoległą do stycznéj wspólnéj w punkcie danym.*

381. Jeżeli zachodzi między linjami styczność rzędu $n$go, różnica M'm rzędnych odpowiadających przyrostkowi nieskończenie małemu odciętéj punktu styczności, będzie miała wyrażenie

$$\Delta y - \Delta y_1 = \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2...(n+1)}\left[\left(\frac{dy^{n+1}}{dx^{n+1}}\right)_0 - \left(\frac{dy_1^{\,n+1}}{dx^{n+1}}\right)_0\right] + (R_{n+2} - R'_{n+2}) \tag{2}$$

różnica ta jest nieskończenie małą rzędu $n+1$. Jeżeli rzęd ten styczności n jest nieparzystym, $n+1$ jest liczbą parzystą, i różnica ta nie zmienia znaku, gdy zmieniamy znak Δx: linja więc L_1K_1 znajduje się po téj saméj stronie linji

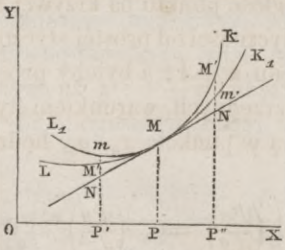


fig. 82,

LK w blizkości punktu styczności, gdzie dotyka pierwszéj linji, lecz nie przechodzi po za nią (fig. 81). Lecz jeżeli rzęd styczności n jest parzystym, $n+1$ jest liczbą nieparzystą i różnica $M'm=\Delta y-\Delta y_1$, zmienia znak, gdy Δx zmienia znak: linja L_1K_1 przechodzi po za linją LK w punkcie styczności (fig. 82).

382. Jeżeli dwie linje mają styczność rzędu n w pewnym punkcie M, nie można przeprowadzić trzeciéj linji zawartéj pomiędzy dwoma danemi i mającéj z każdą z nich styczność rzędu niższego od n. W rzeczy saméj, nazwawszy $y_0+\Delta y_2$ rzędnę téj trzeciéj linji, odpowiadającą odciętéj $x_0+\Delta x$, otrzymamy,

$$\Delta y_2-\Delta y_1=(\Delta y_2-\Delta y)+(\Delta y-\Delta y_1)$$

Jeżeli więc $\Delta y_2-\Delta y$ jest rzędu niższego od $\Delta y-\Delta y_1$, to $\Delta y_2-\Delta y_1$ będzie tego samego rzędu co $\Delta y_2-\Delta y$, więc $\Delta y_2-\Delta y_1$ i $\Delta y_2-\Delta y$ będą tych samych znaków, na mocy wzoru (2) dającego różnicę rzędnych; czyli krzywa y_2 będzie przechodzić po za krzywemi y_1 i y, a nie pomiędzy temi krzywemi.

383. Rzędy styczności prostéj do krzywéj. Jeżeli w szczególnym przypadku jedna z linij danych jest prostą, prosta ta będzie miała z krzywą daną styczność rzędu $n$go, jeżeli odległość punktu na krzywéj nieskończenie bliskiego punktu styczności od prostéj stycznéj, będzie nieskończenie małą rzędu $n+1$; a byleby prosta ta nie była równoległą do osi rzędnych, warunkiem styczności rzędu $n$go prostéj z krzywą w punkcie x_0, y_0, będzie

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=a,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=0,\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=0\dots\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0=0$$

zakładając w (1) linję L_1K_1 prostą, to jest równanie jéj

$f_1(x, y_1) = 0$ linijném, a więc $\frac{dy_1}{dx}$ stałą a, spółczynnikiem kątowym prostéj; zaś dalsze pochodne y_1 względem x zerami. Odległość δ krzywéj od stycznéj rzędu $n$go, liczona na rzędnéj punktu nieskończenie blizkiego punktu styczności będzie więc, robiąc powyższe założenia w (2), wyrażona przez

$$\delta = \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 + R_{n+2}$$

gdzie R_{n+2} jest nieskończenie małą rzędu $n+2$.

Jeżeli rzęd styczności prostéj z krzywą jest nieparzystym, krzywa znajduje się po téj saméj stronie swéj stycznéj przed i po za punktem styczności.

Lecz jeżeli rzęd styczności prostéj z krzywą jest parzystym, krzywa przechodzi po za prostą styczną w punkcie styczności: punkt ten nazywa się w tedy *punktem przegięcia* (fig. 83); różnica $\delta = M'm$ zmienia znak, gdy przyro-

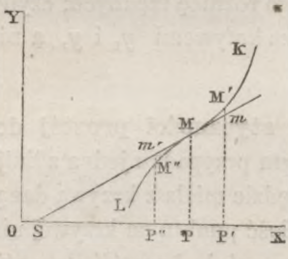


fig. 83.

stek Δx staje się z dodatnego PP' odjemnym PP''.

Punktem przegięcia nazywamy więc punkt, w którym krzywa przechodzi poza swą styczną, czyli w którym krzywa ma ze swą styczną styczność rzędu parzystego.

Pomiędzy krzywą a styczną żadnéj prostéj przeprowadzić nie można: bo prosta ta musiałaby być styczną tak do krzywéj LK, jak do prostéj ST [382], a więc nie może być inną jak samą prostą ST.

384. Uwaga. *W punkcie przegięcia, styczna jest granicą siecznéj, przecinającéj krzywą przynajmniéj w trzech punktach i któréj trzy punkta przecięcia zbiegają się w jeden.*

Niech będzie punkt przegięcia M (fig. 84) i dwie siecz-

fig. 84

ne MM', MM'' przechodzące przez ten punkt: obiedwie mają granicę wspólną ST styczną do krzywéj, gdy M' i M'' zdążają do M w jakikolwiek bądź sposób.

Jeżeli kąty M'MT i M''MS nie są sobie równe, ten któren jest większym, zmieniając się sam jeden, stanie się równym drugiemu, i następnie obadwa pozostając równemi, mogą dążyć razem do granicy zero, gdy M' i M'' zdążają do M. Lecz w takim razie, jeżeli kąty te są sobie równe, obie sieczne stanowią jedną prostę M''MM' przecinającą krzywę w trzech punktach M', M, M'', które w granicy zbiegają się w jeden M, gdy sieczna zdąża nieograniczenie do stycznéj ST, c. b. d. d.

385. Wklęsłość i wypukłość. Krzywę nazywamy *wklęsłą* w danym punkcie względem prostéj, jeżeli w blizkości tego punktu krzywa znajduje się w kącie ostrym utworzonym przez styczną w tym punkcie z prostą daną. Jeżeli krzywa znajduje się w kącie rozwartym, nazywamy ją *wypukłą*.

Tak krzywa LK (fig. 85) jest wklęsłą w punkcie M,

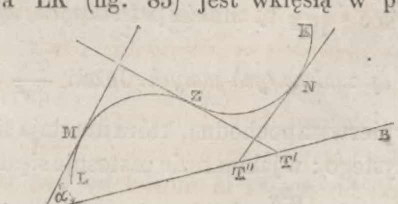


fig. 85.

wypukłą w punkcie N, względem prostéj AB.

W punkcie przegięcia Z krzywa znajduje się po jednéj stronie w kącie ostrym, po drugiéj w rozwartym: punkt przegięcia, jest punktem, w którym wypukłość zamienia się we wklęsłość, lub przeciwnie.

Jeżeli krzywa jest odniesioną do spółrzędnych prostokątnych, wklęsłości lub wypukłości względem osi odciętych zależyć będzie od tego, czy rzędna krzywéj jest mniejszą lub większą od rzędnéj stycznéj, czyli od znaku ilości [**141**]

$$\delta = \Delta y - \frac{dy}{dx}\Delta x$$

jeżeli δ jest odjemném, krzywa jest wklęsłą względem osi x, jeżeli δ jest dodatném krzywa jest wypukłą względem téj osi, byleby δ nie zmieniało znaku wraz z Δx, w jakim razie punkt jest punktem przegięcia, a krzywa ani wklęsłą ani wypukłą. Znak δ jest w pierwszym razie znakiem $\frac{d^2y}{dx^2}$, lub pierwszéj pochodnéj rzędu parzystego, która nie staje się zerem; a zatém jeżeli δ nie zmienia znaku wraz z Δx:

Krzywa jest wklęsłą jeżeli $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, *wypukłą, jeżeli* $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, *przypuszczając* y *dodatném.*

Gdyby y było odjemném, rzeczy miałyby się przeciwnie; ogólniéj więc byłoby powiedzieć, że *wklęsłość ma miejsce w tedy kiedy* y *i* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *są znaków przeciwnych, wypukłość kiedy* y *i* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *są znaków tych samych.* Jeżeli $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ uważać należy czy pierwsza pochodna, która nie staje się zerem, jest rzędu parzystego: w jakim razie zastosuje się do niéj to samo prawidło co do $\frac{d^2y}{dx^2}$; jeżeli zaś pochodna ta jest rzędu nieparzystego, punkt jest punktem przegięcia, wklęsłość przechodzi w nim w wypukłość, lub przeciwnie.

Prawidło powyższe nie zawsze się stosuje, gdy krzywa jest odniesioną do układu spółrzędnych nieprostokątnych; nazwawszy θ kąt nachylenia osi, α kąt jaki styczna tworzy z osią odciętych, mamy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst}\,(\theta-\alpha)}$$

Jeżeli $\alpha<\theta$, w razie $\theta<90^0$, lub $\alpha>\theta$ w razie $\theta>90^0$, prawidło jest to samo co dla spółrzędnych prostokątnych; lecz w przeciwnych razach stosować należy prawidło odwrotne. Jakoż widzimy z łatwością z (fig. 86) że, jakkolwiek

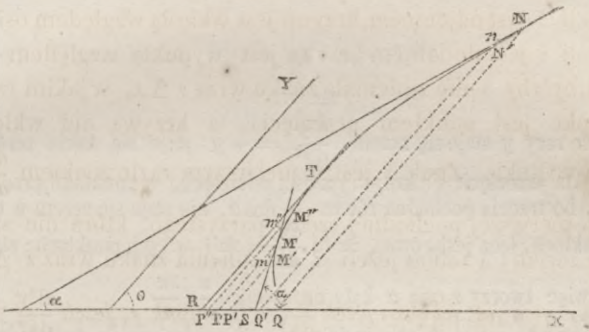


fig. 86.

w punkcie M krzywa jest wklęsłą względem osi odciętych będąc cała zawartą w kącie ostrym stycznéj z osią, jednakże w sąsiednich punktach M' i M'' rzędne krzywéj są większemi od rzędnych stycznéj, bo $\alpha>\theta$. Rzecz miałaby się przeciwnie w punkcie N, gdzie krzywa jest również wklęsłą względna OX, a rzędna stycznéj jest większą od rzędnéj krzywéj, bo $\alpha<\theta$.

386. Przykład I. Niech będzie krzywa, odniesiona do spółrzędnych prostokątnych

$$y=\text{wst}\,x$$

Mamy

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{dos} x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{wst} x, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = -1$$

Druga pochodna $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest zawsze znaku przeciwnego $\frac{1}{y}$, a zatém rzędnéj y, skoro ich iloczyn jest równym mniéj jedności, odjemnym niezależnie od x; a więc krzywa jest zawsze wklęsłą względem osi odciętych : (fig. 87).

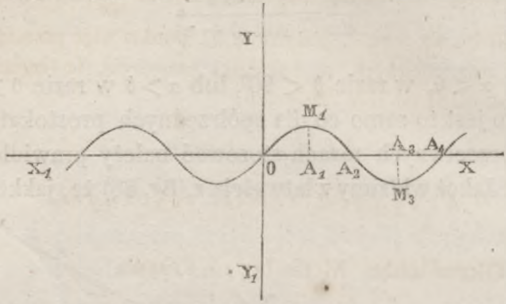


fig. 87.

Ile razy y staje się zerem, $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ staje się także zerem : punkta przecięcia się krzywéj z osią odciętych, są punktami przegięcia, bo trzecia pochodna równa $-\operatorname{dos} x$, nie staje się zerem w tych punktach, lecz jest równą ± 1; $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ w tych punktach: styczna więc tworzy z osią x kąty naprzemian $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

Przykład II. Niech będzie krzywa odniesiona do spółrzędnych

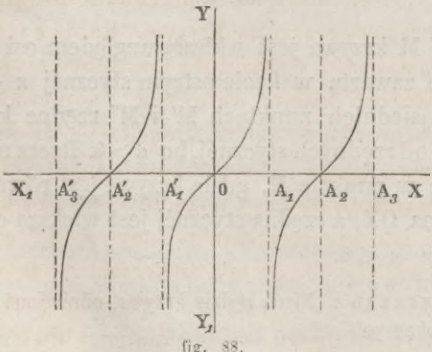


fig. 88,

prostokątnych:

$$y = \operatorname{st} x$$

Mamy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{dos}^2 x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\text{st}\, x}{\text{dos}^2 x}, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{\text{dos}^2 x}, \quad \frac{d^3y}{dx^2}=\frac{2+4\text{wst}^2 x}{\text{dos}^4 x}$$

Krzywa jest wypukłą względem osi x; styczna w punktach przecięcia się z osią Ox, tworzy z tą osią kąty $\frac{\pi}{4}$, bo $\frac{dy}{dx}=1$ dla $x=0$: druga pochodna dla $x=0$, jest równą 0; punkta więc przecięcia się krzywéj z osią odciętych, są punktami przegięcia, bo trzecia pochodna jest różną od zera dla $x=0$.

O Krzywych ściśle stycznych.

387. Określenie. Niech będzie krzywa

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

i pewien gatunek krzywych, dany przez równanie

$$\varphi(x, y_1, c_1, c_2, \ldots c_\mu)=0 \tag{2}$$

zawierające oprócz spółrzędnych x, y_1, jéj punktów, μ stałych $c_1, c_2, \ldots c_\mu$, które mogą przybierać dowolne wartości, wyznaczające szczególne krzywe. Każda z tych stałych może być *w ogólności* wyznaczoną tak, żeby krzywa czyniła zadosyć pewnemu danemu warunkowi: ponieważ mamy μ stałych, możemy nadać im wartości takie, że krzywa (2) czynić będzie zadosyć μ warunkom danym. Naprzykład, jedną z tych stałych możemy wyznaczyć tak, że krzywa (2 przechodzić będzie przez punkt dany $x_0\ y_0$, znajdujący się na krzywéj (1); drugą tak, że krzywa (2) będzie miała w tym punkcie z krzywą (1) styczność pierwszego rzędu, i t. p.

Widzieliśmy, że aby styczność pomiędzy dwiema jakiemikolwiek krzywemi była $n$go rzędu, w punkcie danym, musi zachodzić $n+1$ równań [**380** (1)], wyrażających że dla odciętéj tego punktu, rzędna i n pierwszych pochodnych rzędnéj względem odciętéj są równemi dla jednéj i drugiéj krzywéj. Mając więc w równaniu (2) μ stałych, możemy $n+1$ z tych stałych wyznaczyć tak (przypuszczając $\mu \leqq n+1$) że krzywa (2) będzie miała z (1) styczność $n$go rzędu. Jeżeli $\mu = n+1$ wszystkie stałe wyczerpanemi zostaną, aby uczynić zadość temu warunkowi: krzywa (2) będzie w tedy *ściśle styczną* z krzywą (1).

Krzywą ściśle styczną pewnego gatunku z krzywą daną, nazywamy tę szczególną krzywę, która ma z krzywą daną styczność rzędu najwyższego. Każdemu gatunkowi linji odpowiada pewna określona liczba stałych: tak prosta ma dwie stałe dowolne w równaniu [**45**], krzywa drugiego stopnia w ogólności ma ich pięć [**58** (4)] (jakkolwiek jest ich na pozór sześć: dzieląc równanie przez jedną z nich, która nie jest zerem, sprowadzimy liczbę do pięciu) i t. d.

Warunkiem aby krzywa (2) była ściśle styczną z (1) jest więc (zakładając że styczna wspólna nie jest równoległa do osi rzędnych i że pochodne uważane są ciągłemi):

$$(3) \quad y_0 = (y_1)_0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0 \cdots$$

$$\left(\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}}\right)_0 = \left(\frac{d^{\mu-1}y_1}{dx^{\mu-1}}\right)_0$$

styczność ta jest rzędu $\mu - 1$ o jedność mniejszego od liczby stałych dowolnych, zawartych w równaniu (2).

388. *Krzywa ściśle styczna danego gatunku* (2) *zawierającego* μ *stałych dowolnych, jest granicą krzywéj tego gatunku, mającéj z krzywą daną* (1) μ *punktów wspólnych, gdy te punkta zbiegają się w jeden.* Wrzeczy saméj, warunek aby punkt x_0, $(y_1)_0$ krzywéj (2) był punktem x_0, y_0 krzywéj danéj, jest

$$y_0 = (y_1)_0$$

jest to pierwsze z równań (3).

Odległość liczona na rzędnéj punktów M′, M′$_1$ (fig. 81) nieskończenie zbliżonych na dwóch krzywych od punktu M, będzie wtedy [**381**]

$$\delta_1 = \Delta x \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0\right] + R_2$$

a więc

$$\frac{\delta_1}{\Delta x} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + \frac{R_2}{\Delta x}$$

Jeżeli punkt M′ krzywéj (1) ma być wspólnym punktem krzywéj (2), musimy mieć $\delta_1 = 0$; a że gr $\frac{R_2}{\Delta x} = 0$, więc ostatni warunek staje się w granicy

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0$$

drugie z równań (3).

Odległość trzeciego punktu M″ na krzywéj (1) nieskończenie blizkiego punktu M′ już wspólnego z krzywą (2), od punktu M″$_1$ krzywéj (2) nieskończenie blizkiego M′$_1$ lub M′, jest wtedy

$$\delta_2 = \frac{\Delta x^2}{1\ 2}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0\right] + R_3$$

Aby punkta M″ i M″$_1$ stanowiły trzeci punkt wspólny dwóm krzywym, trzeba żeby $\delta_2 = 0$; a że

$$\frac{2\delta_2}{\Delta x^2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0 + \frac{2R_3}{\Delta x^2}$$

i ponieważ gr $\frac{R_2}{\Delta x_2}=0$, więc w granicy trzeba żeby

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}\right)_0$$

trzecie z równań (3).

Postępując tak daléj, za μtym punktem wspólnym otrzymamy w granicy μte równanie (3): to określenie krzywych ściśle stycznych wychodzi więc na jedno z poprzedniém [387].

389. Prosta ściśle styczna. Równanie prostéj

$$y_1=ax+b$$

zawiera tylko dwie stałe dowolne a i b; prosta więc może *w ogólności* mieć tylko styczność pierwszego rzędu; prosta ściśle styczna jest więc *styczną* zwyczajną. Jakoż mamy

$$\frac{dy_1}{dx}=a$$

a równania (3) stają się dla jakiegokolwiek punktu x, y, w którym prosta ma być ściśle styczną,

$$y_0=(y_1)_0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0$$

ztąd otrzymamy na stałe a, b wyznaczające prostę, wartości

$$a=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad b=y_0-x_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

równanie prostéj staje się przez to

$$y_1 - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x_1 - x_0)$$

które jest równaniem stycznéj [373] w punkcie x_0, y_0.

W szczególnych tylko punktach prosta może mieć styczność rzędu wyższego nad pierwszy: styczność ta nie zależy wtedy od prostéj, lecz od własności krzywéj danéj w tych punktach, które w razie rzędu parzystego styczności, nazwaliśmy *punktami przegięcia.*

390. Koło ściśle styczne. Krzywa drugiego stopnia zawiera pięć stałych dowolnych: krzywa taka ściśle styczna, ma więc styczność w ogólności 4go rzędu; w szczególności parabola, która zawiera tylko 4 stałe dowolne, (bo jedna z nich jest daną przez związek $B^2 - 4AC = 0$ [58]) może mieć tylko styczność trzeciego rzędu. W szczególnych tylko punktach krzywéj danéj, rzęd styczności może być wyższym.

Koło zawiera tylko trzy stałe dowolne: spółrzędne środka i promień. Koło ściśle styczne ma więc styczność drugiego rzędu.

Równaniem koła odniesionego do spółrzędnych prostokątnych, jest

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2 \tag{4}$$

nazywając a, b spółrzędne środka, R promień.

Różniczkując dwa razy, otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned} &(x_1 - a) + (y_1 - b)\frac{dy_1}{dx_1} = 0 \\ &1 + \frac{dy_1^2}{dx_1^2} + (y_1 - b)\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dwa równania, z których wyciągnąć możemy wartości na $\frac{dy_1}{dx_1}$, $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ wyrażone przez x_1, y_1, a i b. Żeby koło to uczynić ściśle stycznêm z krzywą daną w jakimkolwiek jéj punkcie x i y, należy założyć na zasadzie (3), dla $x_1 = x$

$$y_1 = y\,, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}\,, \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

podstawić te wartości w równania (4) i (5), i wyciągnąć z tych równań wartości stałych a, b i R. Wartości te dane więc będą przez rozwiązanie trzech równań

$$(6) \quad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = \mathrm{R}^2 \\ (x-a) + (y-b)\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ 1 + \dfrac{dy^2}{dx^2} + (y-b)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

co do a, b i R: co nam da

$$(7) \quad \begin{cases} b = y + \dfrac{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \\ a = x - \dfrac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \\ \mathrm{R}^2 = \dfrac{\left(1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \end{cases}$$

środek i promień koła ściśle stycznego, które są w ten sposób wyznaczonemi dla każdego punktu krzywéj. Drugie z równań (6) pokazuje że środek tego koła znajduje się na normalnéj [374], jak być powinno.

Jeżeli w szczególnym punkcie krzywéj $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, promień koła staje się nieskończenie wielkim, środek jego znajduje w odległości nieskończenie wielkiéj, to jest, koło ściśle styczne zamienia się w prostę: ma to miejsce naprzykład w punktach przegięcia, (jeżeli $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ a $\frac{d^3y}{dx^3}$ jest różném od zera). Stosując do koła ściśle stycznego, to cośmy w ogóle powiedzieli o krzywych ściśle stycznych, widzimy że:

Koło ściśle styczne, jest granicą koła stycznego przechodzącego przez punkt krzywéj znajdujący się w odległości nieskończenie małéj od punktu styczności, gdy odległość ta zdąża do zera; lub też: *granicą koła przechodzącego przez trzy punkta krzywéj, gdy te trzy punkta zbiegają się w jeden* [**388**]. Każde koło mające środek na normalnéj do krzywéj, i przechodzące przez punkt w którym normalna ta spotyka krzywę, jest stycznéм do krzywéj; kół takich jest nieskończenie wiele: jedno z nich tylko jest kołem ściśle styczném, to, które jest wyznaczone przez równania (6).

Koło ściśle styczne, mając w ogólności z krzywą styczność drugiego, to jest parzystego rzędu, przechodzi po za krzywę w punkcie styczności [**381**], to jest, znajduje się pomiędzy krzywą a styczną z jednéj strony punktu styczności, a po za krzywą względem stycznéj z drugiéj strony. Wyjątki mogą zachodzić tylko w szczególnych punktach krzywéj danéj.

Przyjdziemy wkrótce w inny sposób do koła ścisle stycznego, i weźmiemy obszerniéj pod uwagę jego własności.

Krzywe odniesione do spółrzędnych jednorodnych.

391. Widzieliśmy powyżéj [**62**], jak przez wprowadzenie nowéj zmiennéj nieoznaczonéj t, równanie krzywéj może być uczynioném jednorodném, uważając spółrzędne już nie jako dwie zmienne x i y, lecz jako stosunki $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ dwóch zmiennych x i y do zmiennéj nieoznaczonéj t. Równanie krzywéj przedstawia się wtedy pod postacią

$$f(x, y, t) = 0 \tag{1}$$

gdzie f jest funkcją jednorodną trzech zmiennych x, y, t. Zmienna t jest nieoznaczoną : przechodząc od jednego punktu krzywéj do drugiego, można ją uważać jako stałą, lub jako zmienną w taki sposób, jak się podoba.

392. Równanie stycznéj w spółrzędnych jednorodnych. Różniczkując równanie (1) w przypuszczeniu jakiegokolwiek t, otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \tag{2}$$

a że

$$x = \frac{x}{t} t, \quad y = \frac{y}{t} t$$

więc

$$dx = t d\frac{x}{t} + \frac{x}{t} dt, \qquad dy = t d\frac{y}{t} + \frac{y}{t} dt$$

a podstawiając w (2)

$$t\left[\frac{\partial f}{\partial x} d\frac{x}{t} + \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{y}{t}\right] + \frac{dt}{t}\left[x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + t\frac{\partial f}{\partial t}\right] = 0 \tag{3}$$

Lecz funkcja f jest jednorodną : oznaczając przez n stopień jéj jednorodności, otrzymamy [226]

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + t\frac{\partial f}{\partial t} = nf(x, y, t) = 0 \tag{4}$$

a równanie (3) stanie się, ponieważ t nie jest zerem :

(5) $$\frac{\partial f}{\partial x} d\frac{x}{t} + \frac{\partial f}{\partial y} d\frac{y}{t} = 0 .$$

Podstawiając w równaniu stycznéj [**373**] (4)] spółrzędne jednorodne, to jest : $\frac{x}{t}$ za x, $\frac{y}{t}$ za y, $\frac{X}{T}$ za $\frac{x}{t}$, $\frac{Y}{T}$ za Y, otrzymamy

$$\frac{Y}{T} - \frac{y}{t} = \frac{d\frac{y}{t}}{d\frac{x}{t}} \left(\frac{X}{T} - \frac{x}{t}\right)$$

a podstawiając w to ostatnie równanie wartość $\dfrac{d\frac{y}{t}}{d\frac{x}{t}}$ z (5)

$$\left(\frac{X}{T} - \frac{x}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{Y}{T} - \frac{y}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Dodajmy do pierwszej strony tego równania wyrażenie $\left(\frac{T}{T} - \frac{t}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}$ równe zeru, wykreślmy wyrazy równe zeru na zasadzie (4), i zniešmy wspólny mianownik T; otrzymamy równanie stycznéj w spółrzędnych jednorodnych pod następującym prostym kształtem :

(6) $$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Naprzykład, równanie krzywych drugiego stopnia w spółrzędnych jednorodnych, przedstawia się pod kształtem [**62**]

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxt + Eyt + Ft^2 = 0$$

mamy zatém

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{D}t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{B}x + 2\mathrm{C}y + \mathrm{E}t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + 2\mathrm{F}t$$

a równanie stycznéj (6), staje się

$$(2\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{D}t)\mathrm{X}+(\mathrm{B}x+2\mathrm{C}y+\mathrm{E}t)\mathrm{Y}+(\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+2\mathrm{F}t)\mathrm{T}=0.$$

Aby otrzymać równanie stycznéj do krzywych drugiego stopnia w spółrzędnych zwyczajnych, dość jest założyć w powyższém równaniu $t=1$, $\mathrm{T}=1$ [**62**], co nam da

$$(2\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{D})\mathrm{X}+(\mathrm{B}x+2\mathrm{C}y+\mathrm{E})\mathrm{Y}+(\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+2\mathrm{F})=0.$$

Podstawienie spółrzędnych jednorodnych zamiast zwyczajnych, lub odwrotnie, nie wpływa na spółczynniki stałe, jak A, B, C, D, E, F, [**62**].

393. Twierdzenie. *Punkta styczności krzywéj algebraicznéj* n*go stopnia, ze stycznemi poprowadzonemi do téj krzywéj z punktu jakiegokolwiek na płaszczyznie, znajdują się na krzywéj algebraicznéj stopnia* n — 1.

Niech będzie krzywa algebraiczna dana przez równanie (1) [**391**] : jeżeli z punktu którego spółrzędnemi jednorodnemi są X, Y, T, poprowadzimy styczną do téj krzywéj, punkta styczności których spółrzędnemi są x, y, t czynią zadosyć równaniu (6), które jest $n-1$go stopnia co do x, y, t [**160**], a zatém znajdują się na pewnéj krzywéj $n-1$go stopnia przedstawionéj przez to równanie. Jeżeli uczynimy $t=1$, krzywa nie przestanie być $n-1$go stopnia, a będzie wyrażoną w spółrzędnych jakichkolwiek; twierdzenie więc jest ogólném. Ponieważ krzywa $n$go stopnia przecina się z krzywą $n-1$go stopnia w ogólności w $n(n-1)$ punktach, przeto *z punktu danego do krzywéj danéj* n*go stopnia, można poprowadzić w ogólności* n (n — 1) *stycznych.*

Wniosek. Przypuszczając, że punkt przez który prowadzimy styczne do krzywéj $n$go stopnia, znajduje się w odległości zwiększającéj się nieograniczenie, otrzymamy w granicy wyrażenie następujące powyższego twierdzenia: *Punkta styczności krzywéj algebraicznéj* n*go stopnia ze stycznemi poprowadzonemi równolegle do pewnego kierunku, znajdują się na krzywéj algebraicznéj stopnia* n — 1; w ogóle więc do krzywéj $n$go stopnia, $n(n-1)$ stycznych równoległych poprowadzić można.

394. Wyznaczenie punktów przegięcia. Oznaczmy przez $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ spółrzędne jednorodne krzywéj na płasczyznie, przez u funkcję jednorodną zmiennych x, y, t: niech będzie krzywa przedstawiona przez równanie

$$u=0 \tag{1}$$

Oznaczmy przez skrócenie

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=u_y, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=u_t\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=u_{x,x}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x}=u_{x,y}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=u_{y,y}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_t}{\partial x}=u_{x,t}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial u_t}{\partial t}=u_{t,t}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_t}{\partial y}=u_{y,t}\,,$$

Różniczkując równanie (1), otrzymamy [**392** (5)]

$$(2) \qquad u_x d\frac{x}{t} + u_y d\frac{y}{t} = 0$$

Jeżeli stopień jednorodności równania (1) oznaczymy przez n, stopniem jednorodności funkcyj u_x i u_y, będzie $n-1$ [**225**] i otrzymamy

$$du_x = t\left[u_{x,x} d\frac{x}{t} + u_{x,y} d\frac{y}{t}\right] + (n-1)\, u_x \frac{dt}{t}$$

$$du_y = t\left[u_{x,y} d\frac{x}{t} + u_{y,y} d\frac{y}{t}\right] + (n-1)\, u_y \frac{dt}{t}$$

Różniczkując teraz równanie (2), przyczém różniczka $\frac{x}{t}$ ma być uważaną jako stała, (bo x uważamy za zmiennę niezależną, a t za zmiennę nieoznaczoną) i upraszczając wypadek za pomocą tegoż równania (2), otrzymamy

$$(3) \quad t\left[u_{x,x}\left(d\frac{x}{t}\right)^2 + 2u_{x,y}\left(d\frac{x}{t}\right)\left(d\frac{y}{t}\right) + u_{y,y}\left(d\frac{y}{t}\right)^2\right] + u_y d^2\frac{y}{t} = 0$$

Warunkiem koniecznym aby punkt, którego spółrzędnemi są $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ był punktem przegięcia, jest [**383**]

$$(4) \qquad d^2\frac{y}{t} = 0$$

a jeżeli funkcja u_y jest skończoną w tym punkcie, równanie (3) staje się

$$(5) \quad u_{x,x}\left(d\frac{x}{t}\right)^2 + 2u_{x,y}\left(d\frac{x}{t}\right)\left(d\frac{y}{t}\right) + u_{y,y}\left(d\frac{y}{t}\right)^2 = 0$$

Zauważyć należy, że w szczególnym przypadku kiedy $u_y = 0$, równanie (5) ma miejsce na zasadzie (4): lecz równanie (4) nie wynika koniecznie z (5) i (3). W tym szczególnym przypadku, równanie (2) daje nam również $u_x = 0$, a z tożsamości [226]

$$u_x x + u_y y + u_t t = nu = 0$$

wypada że i $u_t = 0$. Wzór więc (5) zawiera w sobie oprócz warunku (4), żeby punkt był punktem przegięcia, jeszcze punkta szczególne, w których zachodzi jednocześnie

$$(6) \qquad u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u = 0$$

w których styczna jest niewyznaczoną, i które mogą zatém nie być punktami przegięcia.

Rugując z (5) stosunek różniczek $d\frac{x}{t}$ i $d\frac{y}{t}$ za pomocą (2) otrzymamy

$$(7) \qquad u_{x,x} u_x^2 - 2u_{x,y} u_x u_y + u_{y,y} u_x^2 = 0$$

Równanie to zawierające warunek punktów przegięcia, lub punktów których spółrzędne czynią zadosyć (6), przedstawimy pod innym kształtem. Twierdzenie funkcyj jednorodnych [227] daje nam

$$(8) \qquad nu = u_x x + u_y y + u_t t$$

$$(9) \qquad \begin{cases} (n-1)\, u_x = u_{x,x} x + u_{x,y} y + u_{x,t} t \\ (-1)\, un_y = u_{x,y} x + u_{y,y} y + u_{y,t} t \\ (n-1)\, u_t = u_{x,t} x + u_{y,t} y + u_{t,t} t \end{cases}$$

a rugując z tych czterech równań x, y, u_t, otrzymamy

$$(10) \qquad \begin{aligned} &(n-1)^2 [u_{x,x} u^2_y - 2u_{x,y} u_x u_y + u_{y,y} u^2_x] \\ &= n(n-1)\, u\, (u_{x,x} u_{y,y} - u^2_{x,y}) - t^2 \mathrm{H}(u) \end{aligned}$$

gdzie H(u) oznacza przez skrócenie wyrażenie

$$u_{x,t}(u_{x,y}u_{y,t}-u_{x,t}u_{y,y})+u_{y,t}(u_{x,y}u_{x,t}-u_{x,x}u_{y,t})$$
$$+u_{t,t}(u_{x,x}u_{y,y}-u^2_{x,y})$$

czyli

$$\text{(11)}\quad \mathrm{H}(u)=u_{x,x}u_{y,y}u_{t,t}+2u_{x,y}u_{x,t}u_{y,t}-u_{x,x}u^2_{y,t}$$
$$-u_{y,y}u^2_{x,t}-u_{t,t}u^2_{x,y}$$

Równanie (7) podstawione w (9), uważając nadto że $u=0$, sprowadza się do równania

$$\text{(12)}\qquad \mathrm{H}(u)=0.$$

Warunek (12) zawiera więc warunek konieczny punktów przegięcia : warunek ten będzie dostatecznym, jeżeli wyjmiemy z pomiędzy punktów czyniących zadosyć (12), punkta w których zachodzą (6), lub też w których $u_y=\infty$.

Wyrażenie (11) jest wspólnym mianownikiem wartości na x, y, t otrzymanych z trzech równań 1go stopnia (9), rozwiązanych co do x, y, t jako nieznanych : wyrażenie takie zwane *wyznacznikiem*, pisze się przez skrócenie w następujący sposób :

$$\mathrm{H}(u)=\begin{vmatrix} u_{x,x}, & u_{x,y}, & u_{x,t} \\ u_{x,y}, & u_{y,y}, & u_{y,t} \\ u_{x,t}, & u_{y,t}, & u_{t,t} \end{vmatrix}$$

Wyrażenie H(u), zostało nazwaném przez p. Hesse, który je pierwszy otrzymał, *wyznacznikiem funkcji* u ; nazwano je późniéj *wyrażeniem Hesskiém*, i oznaczono przez znak H.

395. Twierdzenie. *Punkta przegięcia krzywéj algebraicznéj stopnia* n, *znajdują się na krzywéj algebraicznéj stopnia* $3(n-2)$.

W rzeczy saméj, niech będzie krzywa algebraiczna dana przez funkcję u całkowitą i jednorodną stopnia n całkówitego i dodatnego, zrównaną zeru. Wyrażenie (11) którego każdy wyraz składa się z trzech czynników stopnia $n-2$, (bo każdy czynnik jest drugą pochodną funkcji stopnia n) jest stopnia $3(n-2)$; a więc równanie (12) któremu muszą czynić zadość spółrzędne punktów przegięcia, jest stopnia $3(n-2)$, i przedstawia krzywę któréj przecięcie się z krzywą daną wyznacza punkta między któremi znajdują się punkta przecięcia. Spółrzędne tych punktów są wartościami wspólnemi spółrzędnych dwóch krzywych [**52**], przyczém wartości urojone wspólne otrzymane z rozwiązania tych dwóch równań, uważać można za punkta urojone wspólne dwóm krzywym.

Jeżeli spółczynniki krzywéj pozostawimy nieoznaczonemi, jeżeli nie mamy z góry żadnego związku danego pomiędzy temi spółczynnikami, spółczynniki te nie będą czynić zadosyć równaniom wyjątkowym (6), i wszystkie punkta przecięcia dwóch krzywych (1) i (12), będą mogły być punktami przegięcia. Wiemy nadto, że rugowanie jednéj nieznanéj z dwóch równań algebraicznych jakichkolwiek stopni prowadzi do równania, którego stopniem jest iloczyn stopni równań danych, mamy więc następujący:

Wniosek. *Krzywa algebraiczna stopnia* n, *któréj spółczynniki są nieoznaczonemi, może mieć* $3n(n-2)$ *punktów przegięcia.*

W szczególnych przypadkach, gdy spółczynniki są oznaczonemi, możemy otrzymać mniéj punktów przegięcia, ale nigdy więcéj.

Krzywe drugiego stopnia nie mają punktów przegięcia: bo gdy $n=2$, wyrażenie $3n(n-2)=0$.

Krzywa trzeciego stopnia może mieć w ogólności $3.3(3-2)$, dziewięć punktów przegięcia rzeczywistych lub urojonych.

Krzywa 4go stopnia może ich mieć dwadzieścia cztery i t.p.

Zastosowania i przykłady.

396. Styczna do krzywych drugiegɔ **stopnia.** Krzywe te odniesione do spółrzędnych prostokątnych, są dane przez równanie

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

z którego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + By + D, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Bx + 2Cy + E$$

Podstawiając te wartości w równanie stycznéj [**373**], otrzymamy

$$(2Ax + By + D)X + (Bx + 2Cy + E)Y + (Dx + Ey + 2F) = 0$$

na równanie ogólne stycznéj poprowadzonéj do krzywéj drugiego stopnia, w punkcie x, y.

W szczególnym przypadku *elipsy* odniesionéj do osi [**46**], danéj przez równanie

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

otrzymamy równanie stycznéj w punkcie x i y krzywéj

$$Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x)$$

równanie normalnéj [**374**]

$$Y - y = \frac{a^2y}{b^2x}(X - x)$$

Dla *hyperboli* danéj przez równanie [**47**]

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

równanie stycznéj będzie

$$Y - y = \frac{b^2x}{a^2y}(X - x)$$

równanie normalnéj

$$Y - y = -\frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x)$$

Podstawiając za y wartość $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ z równania hyperboli w wyrazenie $\frac{b^2 x}{a^2 y}$ spółczynnika kątowego stycznéj, otrzymamy

$$\frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{\pm b}{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$

Spółczynnik ten zdąża do granicy $\pm\frac{b}{a}$, gdy x a zatém i y, zwiększają się nieograniczenie. Jednocześnie odległość punktu przecięcia się stycznéj z osią OY, od początku

$$y - \frac{b^2 x}{a^2 y}x = \frac{a^2 y^2 - b^2 x^2}{a^2 y} = \frac{-a^2 b^2}{a^2 y} = -\frac{b^2}{y}$$

zdąża do zera. Styczna w punkcie którego spółrzędne zwiększają się nieograniczenie, ma więc granicę oznaczoną, prostę przechodzącą przez początek, i któréj spółczynnikiem kątowym jest $+\frac{a}{b}$ lub $-\frac{a}{b}$. Hyperbola ma zatém dwie *assymptoty* $X'X_1$, $Y'Y'_1$, (fig. 89) dane

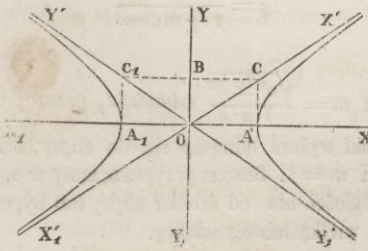


fig. 89.

przez równania

$$Y = \frac{b}{a}X \quad \text{i} \quad Y = -\frac{b}{a}X$$

których kąty z osią ogniskową XOX′, XOY′ są spełniającemi, czyli $COA = C_1OA_1$.

Dla *paraboli* danéj przez równanie [**48**]

$$y^2 = 2px$$

równanie stycznéj w punkcie x, i y będzie

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x)$$

równanie normalnéj

$$Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

Przecięcie się normalnéj z osią odciętych, będzie się znajdować w odległości od początku

$$p + x$$

(jak widzimy zakładając w równaniu normalnéj $Y = 0$, i wyciągając wartość na X); *normalna w jakimkolwiek punkcie paraboli, spotyka oś odciętych w odległości od spodka rzędnéj tego punktu stałéj i równéj* p. Odległość ta zwana pospolicie *podnormalną*, jest więc stałą dla paraboli.

W spółrzędnych biegunowych [**60**], krzywe drugiego stopnia są dane wszystkie trzy przez równanie

$$\rho = \frac{p}{1 + m \operatorname{dos} \omega}$$

oznaczając przez $m = \frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}}{a}$ *mimośród*, przez $p = \pm \frac{b^2}{a}$ *parametr* [**60**]; znaki wyższe odnoszą się do elipsy, niższe do hyperboli; dla paraboli $m = 1$. Biegun przypuszczamy w ognisku, znajdującém się w odległości am od środka elipsy lub hyperboli; oś biegunowa jest osią wielką lub ogniskową.

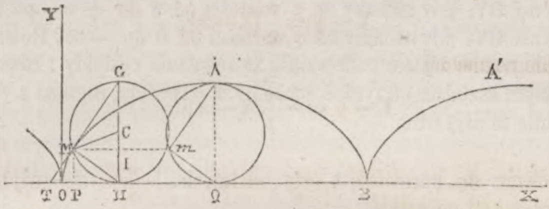
Równanie to daje nam

$$d\rho = \frac{mp \operatorname{wst} \omega \, d\omega}{(1 + m \operatorname{dos} \omega)^2}, \quad \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{(1 + m \operatorname{dos} \omega)^2}{mp \operatorname{wst} \omega}$$

a ztąd, styczna trygonometryczna kąta jaki styczna do krzywéj tworzy z promieniem wodzącym, będzie wyrażoną przez

$$\operatorname{st}\mu = \frac{\rho d\omega}{d\rho} = \frac{1 + m \operatorname{dos}\omega}{m \operatorname{wst}\omega}$$

397. Cykloida. *Cykloidą* nazywamy krzywą zakreśloną przez punkt okręgu koła, toczącego się bez ślizgania po prostéj danéj.



fig, 90.

Niech będzie prosta dana OX, i okrąg koła C toczący się po téj prostéj bez ślizgania: punkt M zakreśla krzywą OABA'B'... Kiedy punkt M znajdował się w punkcie O, był punktem styczności okręgu z prostą: warunkiem żeby okrąg toczył się bez ślizgania, jest równość długości łuku MH z długością prostéj OH. Ponieważ prosta OX jest nieograniczoną, krzywa zakreślona przez M składa się z nieskończenie wielkiéj liczby części równych OAB, BA'B', ... których podstawy OB = BB', ... są równemi długości okręgu koła toczącego się.

Weźmy początek spółrzędnych w punkcie O, oś odciętych OX, oś rzędnych prostopadłą OY, i oznaczmy spółrzędne punktu jakiegokolwiek M

$$\mathrm{OP} = x, \qquad \mathrm{MP} = y$$

połączmy punkt M ze środkiem C koła tworzącego, i wyprowadźmy prostopadłę MI do średnicy GH; będziemy mieli

$$x = \mathrm{OH} - \mathrm{PH} = \mathrm{OH} - \mathrm{MI}$$
$$y = \mathrm{CH} - \mathrm{CI}$$

Oznaczmy przez a promień CM koła tworzącego, przez φ kąt MCH utworzony przez promień z kierunkiem rzędnych odjemnych,

otrzymamy

$$\mathrm{MI} = a \,\mathrm{wst}\, \varphi, \qquad \mathrm{CI} = a \,\mathrm{dos}\, \varphi, \qquad \text{łuk MH} = a\varphi = \mathrm{OH}$$

a więc

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\,(\varphi - \mathrm{wst}\,\varphi) \\ y = a\,(1 - \mathrm{dos}\,\varphi) \end{cases}$$

równania, które nam wyznaczą wszystkie punkta cykloidy po prawéj stronie osi OY, gdy nadamy na φ wartości od 0 do $+\infty$, po lewéj stronie osi OY, gdy nadamy na φ wartości od 0 do $-\infty$. Równania (1) najdogodniéj będzie nam wziąść za równania cykloidy: równanie w zwykłym kształcie otrzymać możemy z łatwością, rugując z (1) φ. Równania te dają nam

$$(2) \qquad \mathrm{dos}\,\varphi = \frac{a-y}{a}, \qquad \varphi = \text{łuk dos}\,\frac{a-y}{a}$$

$$(3) \qquad \mathrm{wst}\,\varphi = \frac{\pm\sqrt{2ay-y^2}}{a}$$

a ztąd

$$(4) \qquad x = a \,\text{łuk dos}\,\frac{a-y}{a} \pm \sqrt{2ay-y^2}$$

Równanie (4) jest równaniem cykloidy odniesionéj do spółrzędnych prostokątnych: lecz równania (1) są prostszemi, dogodniejszemi do użycia.

Aby otrzymać *styczną* MT do cykloidy, zróżniczkujmy równania (1), otrzymamy

$$(5) \qquad \begin{cases} dx = a\,(1 - \mathrm{dos}\,\varphi)\,d\varphi = y\,d\varphi \\ dy = a \,\mathrm{wst}\,\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

a ztąd

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{2ay-y^2}}{y} \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

wyrażenie stycznéj kąta MTX. Równanie (6), jest zarazem *równaniem różniczkowém cykloidy*. Odległość pnnktu przecięcia się normalnéj z osią odciętych od spodka rzędnéj, czyli *podnormalna* będzie

$$y\,\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2ay-y^2} = a \,\mathrm{wst}\,\varphi = \mathrm{PH}$$

a więc MH jest *normalną*, zaś MG styczną cykloidy. Punkta G i H są punktami średnicy koła tworzącego prostopadłéj do osi odciętych: co daje nam sposób bardzo prosty wykreślenia stycznéj i normalnéj do cykloidy.

Zauważmy, że gdy koło tworzące tocząc się po prostéj przebiegło pół drogi pomiędzy O i B, rzędna cykloidy AQ, jest największą i równą $2a$: wtedy $\varphi = \pi$ (lub wielokrotności nieparzystéj π), a odcięta OQ, równą πa półokręgowi koła tworzącego (lub jego nieparzystéj wielokrotności). Weźmy pod uwagę pierwszą gałęź OAB cykloidy (w innych gałęziach równych pierwszéj, rzeczy będą się miały tak samo) wykreślmy w połowie jéj podstawy koło tworzące AmQ; przez punkt M poprowadźmy równoległą Mm do osi odciętych; połączmy punkt m przecięcia się téj równoległéj z okręgiem wykreślonym poprzednio, z punktami ostatecznemi A i Q średnicy tego okręgu prostopadłéj do OX; poprowadźmy przez punkt M równoległą do mA : to będzie styczna; równoległa do mQ z punktu M poprowadzona, będzie normalną do cykloidy.

398. Spiralna Archimedesa [55] (fig.20) daną jest w spółrzędnych biegunowych przez równanie

$$\rho = a\omega$$

a więc styczna kąta μ stycznéj z promieniem wodzącym [**376**] dana przez związek

$$\operatorname{st} \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\rho}{a} = \omega$$

równa się kątowi ω promienia wodzącego z osią.

Podnormalna [**377**]

$$\frac{d\rho}{d\omega} = a$$

jest stałą, równą spółczynnikowi a dla jakiegokolwiekbądź punktu krzywéj, co nam daje łatwy sposób wykreślenia normalnéj, a więc i stycznéj. Podstyczna równa się

$$\frac{\rho^2 d\omega}{d\rho} = \frac{\rho^2}{a} = a\omega^2$$

jest więc proporcjonalną do kwadratu promienia wodzącego, lub kąta biegunowego.

399. Spiralna hyperboliczna daną jest przez równanie

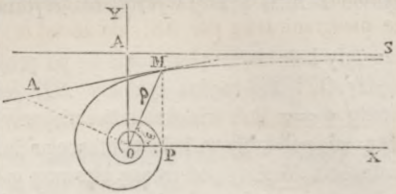


fig. 91.

$$\rho\omega = a \quad \text{czyli} \quad \rho = \frac{a}{\omega}$$

Gdy $\omega = 0$, $\rho = \infty$, gdy ω się zwiększa, ρ się zmniejsza i staje się zerem dla $\omega = \infty$. Krzywa zaczyna się w odległości nieskończenie wielkiéj od początku O, robi nieskończoną liczbę obrotów około O zbliżając się ciągle nieograniczenie do tego punktu którego nigdy dosięgnąć nie może: jestto dla niéj *punkt assymptotyczny*. Rzędna MP ma wartość

$$\mathrm{PM} = \rho \operatorname{wst} \omega = a \frac{\operatorname{wst} \omega}{\omega}$$

gdy ω zmniejsza się nieograniczenie, to jest, gdy odcięta OP zwiększa się nieograniczeuie, rzędna także się zwiększa, zdążając do granicy a, bo gr $\frac{\operatorname{wst} \omega}{\omega} = 1$, gdy $\omega = 0$, więc prosta AS w odległości OA równéj a, równolegle de osi OX poprowadzona, jest *assymptotą* krzywej.

Styczna tworzy z promieniem wodzącym kąt μ, którego styczna równa się [**376**]

$$\operatorname{st} \mu = -\frac{\rho\omega^2}{a} = -\omega$$

kątowi biegunowemu ze znakiem przeciwnym; podstyczna równa

$$\rho \operatorname{st} \mu = -\rho\omega = -a$$

jest stałą, co nam daje łatwy sposób kreślenia stycznéj: dość jest wziąść na prostopadłéj OI do promienia wodzącego OM odległość OI=OA=a po stronie przeciwnéj kierunku dodatnego, a połączywszy punkt I z punktem M, prosta IM będzie styczną do krzywéj w punkcie M.

Uwaga. Widzimy w tym przykładzie, że assymptota może być nietylko prostą nieograniczoną jak AS, ale że także punkt jak O,

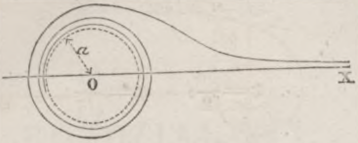


fig. 92.

może być punktem assymptotycznym. Wszelka krzywa do któréj druga krzywa zbliża się nieograniczenie, jest *krzywą assymptotyczną*. Tak wziąwszy krzywę daną w spółrzędnych biegunowych przez równanie

$$\rho = a + \frac{1}{\omega}$$

dla $\omega = 0$, $\rho = \infty$, oś biegunowa jest assymptotą krzywéj. Gdy ω się zwiększa, ρ zbliża się do a, lecz ρ nie staje się równém a, chyba dla $\omega = \infty$. Krzywa która jest także spiralną, zbliża się ciągle nieograniczenie do okręgu koła zakreślonego z bieguna jako środka promieniem a (fig. 92).

Zadania do rozwiązania.

1. Niech będzie krzywa odniesiona do spółrzędnych prostokątnych dana przez równanie

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

dowieść że część stycznéj do téj krzywéj, zawarta pomiędzy osią rzędnych i osią odciętych, jest długością stałą równą a.

2. Z punktu O na płaszczyznie krzywéj danéj, poprowadźmy prostą OM do pewnego punktu M téj krzywéj; w punkcie M poprowadźmy styczną, i do téj stycznéj prostopadłę OP z punktu O. Miejscem geometryczném spodka P téj prostopadłéj, będzie pewna krzywa: dowieść że styczna do téj krzywéj w punkcie P, znajduje się w odległości od punktu O równéj $\frac{OP^2}{OM}$.

3. Najmniejszym z pomiędzy wielokątów o téj saméj liczbie boków opisanych na pewnéj krzywéj wypukłéj, jest ten, którego każdy bok jest podzielonym w punkcie styczności na dwie równe części.

4. Miejscem geometryczném spodków podstycznych do spiralnéj logarytmowéj, danéj w spółrzędnych biegunowych przez równanie

$$\rho = ae^{m\omega}$$

jest spiralna logarytmowa podobna danéj.

5. Znaleźć punkt przegięcia krzywéj danéj przez równanie

$$xy^2 = 2a(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Odp.

$$x = \frac{3a}{2}, \quad y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

6. Znaleźć punkta przegięcia krzywéj

$$ax^3 + by^3 = c^4$$

Odp.

$$x = 0, \quad y = c\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}}; \qquad x = c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad y = 0.$$

7. Znaleźć punkta przegięcia krzywéj

$$y = b + (x - a)^{\frac{m}{n}}$$

Odp. Jeżeli $\frac{m}{n} > 1$, w punkcie przegięcia dla $x = a$, styczna jest równoległą do osi odciętych.

Jeżeli $\frac{m}{n} < 1$ w punkcie przegięcia dla $x = a$, styczna jest prostopadłą do osi odciętych.

8. Znaleźć punkta przegięcia krzywéj :

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\omega}$$

Odp.

$$\rho = \sqrt{2a}, \quad \omega = \frac{1}{2}$$

9. Znaleźć assymptotę liścia Descartes'a [305] (fig. 71).

ROZDZIAŁ XIX

O PUNKTACH NADZWYCZAJNYCH

LINIJ KRZYWYCH NA PŁASCZYZNIE.

Określenia. — Punkta wielokrotne. — Punkta odosobnione. — Punkta zatrzymania. — Punkta zwrotu. — Punkta kątowe. — Poszukiwanie punktów nadzwyczajnych krzywych płaskich. — Cwiczenia.

400. Określenia. *Punktem nadzwyczajnym* krzywéj nazywamy punkt, w którym krzywa przestaje być ciągłą, lub w którym kierunek stycznéj do krzywéj nie jest jedynym, wyznaczonym, zmieniającym się w sposób ciągły.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę funkcję przedstawioną przez krzywą, nazwać możemy *wartością nadzwyczajną* funkcji wartość szczególną odpowiadającą punktowi nadzwyczajnemu krzywéj, to jest wartość szczególnę taką, dla któréj funkcja lub jéj pochodna przestaje być funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj, lub dla któréj funkcja ma więcéj niż jedną pochodnę [**147**].

Teorja punktów nadzwyczajnych krzywych jest zarazem teorją wartości nadzwyczajnych funkcji.

401. Punkt nadzwyczajny możemy określić geometrycznie jeszcze w inny sposób, co nam da możność łatwego rozpoznania takiego punktu :

Niech będzie krzywa dana LK, punkt M na téj krzywéj i styczna TT' w tym punkcie (fig. 93): nakreślmy około pun-

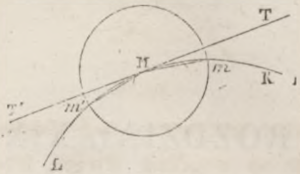


fig. 93.

ktu M obwód ciągły wypukły nieskończenie mały, naprzykład okrąg koła z punktu M jako środka, promieniem nieskończenie małym : obwód ten przetnie *w ogólności* krzywę LK w dwóch punktach m i m' takich, że kąt między cięciwami krzywéj mM i m'M będzie się zbliżał do granicy równéj dwóm kątom prostym, w miarę jak promień koła będzie zdążał do zera.

W szczególnych przypadkach, jeżeli okrąg koła zakreślonego promieniem nieskończenie małym z punktu M przecinać będzie krzywę daną w więcéj lub w mniéj jak w dwóch punktach, lub jeżeli przecinając ją nawet w dwóch tylko punktach, cięciwy poprowadzone z tych punktów do punktu danego tworzą kąt, krórego granica nie jest równa dwóm prostym, punkt M nazywać będziemy punktem nadzwyczajnym krzywéj : z łatwością się widzi, że określenie to wychodzi na jedno z poprzedniem.

Punkt przegięcia [383] nie będziemy zatém uważać za punkt nadzwyczajny. Rozróżnimy następujące rodzaje punktów nadzwyczajnych:

402. Punkta wielokrotne. *Punktami wielokrotnemi* nazywamy punkta, w których schodzi się dwie lub więcéj gałęzi krzywéj, przecinających się ze sobą, lub stycznych jedna do drugiéj. Okrąg koła zakreślony z punktu wielokrotnego promieniem nieskończenie małym przecina krzywę w więcéj jak dwóch punktach (fig. 94). W szczególności,

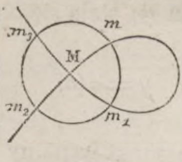


fig. 94.

punkta wielokrotne nazywamy *podwójnemi*, *potrójnemi*..., jeżeli punkta te są wspólne dwóm, trzem ... gałęziom krzywéj.

Weźmy naprzykład pod uwagę rodzaj krzywych, dany przez równanie

$$(1)\qquad [y-\varphi(x)]^q=(x-a)^q\left(\frac{x-b}{c}\right)^p$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza jakąkolwiek funkcję doskonałą [**372**], lecz rzeczywistą zmiennéj x; a, b, c, ilości dodatne dane; q liczbę parzystę całkowitą, którą zakładamy *pierwszą* z liczbą całkowitą p; wyrażenie $\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$ ma więc dwie wartości rzeczywiste równe i znaków przeciwnych: krzywa składa się z dwóch gałęzi, danych przez równania

$$(2)\quad y=\varphi(x)+(x-a)\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}\quad \text{i}\quad y=\varphi(x)-(x-a)\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$$

jeżeli w tych równaniach wyrażenie $\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}$ uważać będziemy z jednakowym znakiem.

Każdéj wartości odciętéj x odpowiadają dwa punkta krzywéj, w których styczne dane są przez

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx}=\varphi'(x)\pm\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}\pm\frac{p}{q}\left(\frac{x-a}{c}\right)\left(\frac{x-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}-1}$$

gdzie wyrażenia z wykładnikami ułamkowemi brane są zawsze arytmetycznie, a znaki wyższe i niższe odpowiadają pierwszéj lub drugiéj gałęzi krzywéj.

Dla $x=a$, równania (2) stają się obadwa

$$y=\varphi(a)$$

obie gałęzie mają więc punkt wspólny dla odciętéj równéj a; lecz styczna dla pierwszéj gałęzi w tym punkcie jest

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(a)+\left(\frac{a-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}} \tag{4}$$

a dla drugiéj

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(a)-\left(\frac{a-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}} \tag{5}$$

Jeżeli $a>b$ spółczynniki kątowe (4) i (5) stycznych w punkcie $x=a$ są rzeczywistemi; ciągłość ich nie jest zerwaną w tym punkcie: dwie gałęzie krzywéj przecinają się więc w punkcie $x=a$, $y=\varphi(a)$, pod pewnym kątem i rozciągają się daléj po za tym punktem każda w swoim kierunku, podobnie jak na fig. 94 w punkcie M.

Przypadek $a<b$ rozbieżmy poniżéj, uważając:

403. Punkta odosobnione. *Punktem odosobnionym* nazywamy punkt, którego spółrzędne czynią zadosyć równaniu krzywéj, jakkolwiek krzywa nie ma punktów sąsiednich temu punktowi, czyli nie jest ciągłą w żadnym kierunku zacząwszy od tego punktu.

Okrąg koła zakreślony promieniem dostatecznie małym z tego punktu, nie spotyka w żadnym punkcie krzywéj. Tak w powyższym przykładzie dla krzywéj danéj przez równanie (1) gdy $a<b$, wartości (4) i (5) są urojonemi; w punkcie $x=a$, $y=\varphi(a)$, którego spółrzędne czynią zadosyć równaniu (1), któren zatém należy do krzywéj, styczna wcale nie istnieje. Nadto, jeżeli odciętéj $x=a$ nadamy przyrostek

nieskończenie mały dodatny lub odjemny $\pm\Delta x$, rzędna

$$y=\varphi(a\pm\Delta x)\pm\left(\frac{(a\pm\Delta x)-b}{c}\right)^{\frac{p}{q}}\Delta x$$

będzie urojoną, póki tylko $a\pm\Delta x$ będzie mniejszém od b: więc krzywa nie ma żadnego punktu w blizkości punktu $x=a$, $y=\varphi(a)$: punkt ten jest więc *punktem odosobnionym*.

Weźmy jeszcze krzywę daną przez równanie

$$y=a^x$$

Jeżeli a jest dodatném, odcięte będą logarytmami rzędnych według zasady a: gdy x zmieniać się będzie od $-\infty$ do $+\infty$, y zmieniać się będzie od zera do $+\infty$ (fig. 95); oś odciętych jest assymptotą krzywéj, która bę-

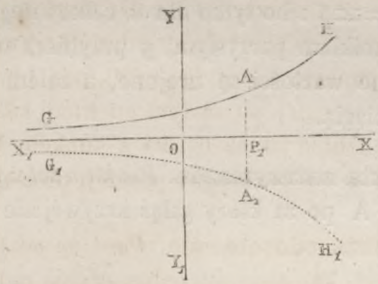


fig. 95.

dzie ciągłą po stronie rzędnych dodatnych. Lecz ile razy x przybierać będzie wartość ułamkową z mianownikiem parzystym, tyle razy odpowiadać będzie po stronie rzędnych odjemnych, punkt odosobniony symetryczny punktowi krzywéj po stronie rzędnych dodatnych. Tak naprzykład, dla $x=\frac{1}{2}$, mamy $y=a^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{a}$, a więc oprócz punktu A, odpowiada jeszcze odciętéj $OP_1=\frac{1}{2}$, punkt A_1. Punkt ten jest punktem odosobnionym, bo gdy zmienimy x

o nieskończenie małą, wartość nowa nie będzie już w ogólności ułamkiem o mianowniku parzystym, a zatém nowéj odciętéj odpowiadać będzie jedna tylko rzędna rzeczywista dodatna. W podobny sposób dla $x=\frac{3}{2}$, $y=\pm\sqrt{x^3}$, dla $x=\frac{1}{4}$, $y=\pm\sqrt[4]{a}$, i t. d. otrzymamy nieskończenie wielką liczbę punktów odosobnionych po stronie rzędnych odjemnych : punkta te będą symetrycznemi gałęzi GH ciągłéj krzywéj, lecz nie będą stanowiły drugiéj gałęzi ciągłéj.

W szczególnym przypadku, równanie

$$y=(-1)^x$$

przedstawia krzywę, składającą się z samych tylko punktów odosobnionych, znajdujących się na prostych danych przez równanie $y=\pm 1$: bo tylko dla x całkowitego lub ułamkowego z licznikiem parzystym, y przybiera wartości rzeczywiste : inne wartości są urojone, a zatém krzywa nie jest nigdzie ciągłą.

404 Punkta zatrzymania. *Punktem zatrzymania* nazywamy punkt A po za który gałąź krzywéj nie przechodzi:

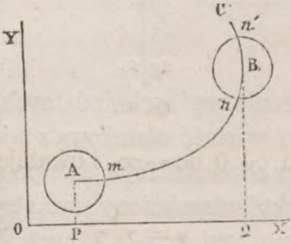


fig. 96.

(fig. 96) nadając odciętéj tego punktu przyrostek nieskończenie mały z pewnym znakiem, rzędna krzywéj ma przyrostek nieskończenie mały jedyny : lecz gdy odciętéj nadamy przyrostek ze znakiem przeciwnym, rzędna krzywéj jest urojoną. *Okrąg koła zakreślony promieniem nieskończenie małym z punktu zatrzymania przecina krzywę w jednym tylko punkcie.* Punkt A jest punktem zatrzymania krzywéj ABC : lecz punkt B nim nie jest.

Niech będzie naprzykład krzywa dana przez równanie

$$y=e^{\frac{1}{x}}$$

Zmieniając odciętą x od do $+\infty$, rzędna y przybiera wartości zmieniające się od $+\infty$ do $+1$, co nam daje gałęź krzywéj LK (fig. 97). Zmieniając x w wartościach odjemnych od 0 do $-\infty$, i uważając że

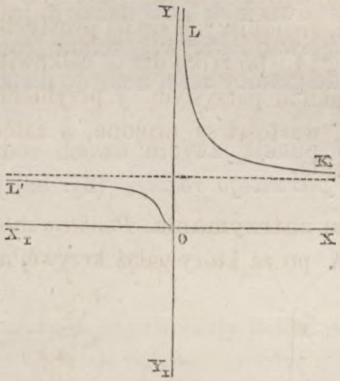


fig. 97.

$$y=\frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}}$$

gdzie $-\frac{1}{x}$ jest dodatném, wartości y będą dodatne, zawarte pomiędzy 0 i $+1$, co nam da drugą gałęź krzywéj OL′, która będzie miała w początku O punkt zatrzymania.

Funkcja powyższa przestaje być ciągłą, gdy x zmienia się w blizkości zera przechodząc z wartości nieskończenie małych odjemnych od wartości nieskończenie małych dodatnych; bo w tedy y z nieskończenie małego staje się nieskończenie wielkim.

W ogólności, wartość zmiennéj niezależnéj, dla któréj ciągłość funkcji zostaje zérwaną odpowiada punktowi zatrzymania, jeżeli wartość odpowiednia funkcji (rzędnéj) nie jest nieskończenie wielką.

405. Punkta zwrotu. *Punktem zwrotu*, nazywamy punkt, w którym dwie gałęzie krzywéj (lub więcéj gałęzi) zatrzymują się, mając w nim styczną wspólną; chociaż okrąg koła nieskończenie mały zakreślony z punktu zwrotu spotyka krzywę w dwóch tylko punktach, jednak kąt między dwiema cięciwami krzywéj, schodzącemi się w tym punkcie zdąża do granicy zero, a nie do dwóch kątów prostych.

Rozróżniamy punkta zwrotu dwóch rodzajów: punkt zwrotu będzie *pierwszego rodzaju* (fig. 98) jeżeli dwie ga-

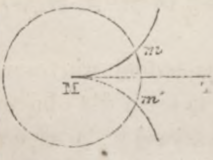


fig. 98.

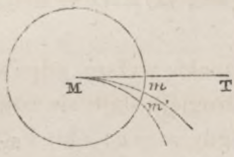


fig. 99.

łęzie krzywéj znajdują się jedna po jednéj, druga po drugiéj stronie stycznéj wspólnéj w tym punkcie; punkt zwrotu będzie *drugiego rodzaju* (fig. 99), jeżeli obie gałęzie krzywéj znajdują się po jednéj stronie stycznéj wspólnéj w tym punkcie.

Niech będzie naprzykład gatunék krzywych danych przez równanie

$$\left[\frac{y-\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^q=(x-a)^p$$

gdzie a jest długością daną, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funkcjami doskonałemi, rzeczywistemi i skończonemi zmiennéj x, q liczbą całkowitą, parzystą, *pierwszą* z liczbą całkowitą p. Funkcja y będzie miała dla każdéj wartości x dwie wartości rzeczywiste nierówne

$$y=\varphi(x)+(x-a)^{\frac{p}{q}} \quad \text{i} \quad y=\varphi(x)-(x-a)^{\frac{p}{q}}$$

i będzie przedstawioną przez dwie gałęzie krzywéj odpowiadające dwóm powyższym wartościom.

Obie z powyższych wartości funkcji danéj są równemi dla $x=a$: punkt więc odpowiadający odciętéj a jest punktem wspólnym obu gałęziom. Gdy $x<a$ obie wartości stają się urojonemi: w punkcie tym obie gałęzie krzywéj zatrzymują się.

Pochodna

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)\pm(x-a)^{\frac{p}{q}}\psi'(x)\pm\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1}\psi(x)$$

(gdzie znaki wyższe odpowiadają jednéj wartości, znaki niższe drugiéj) staje się również tą samą dla obu wartości funkcji gdy $x=a$: obie gałęzie krzywéj mają więc styczną wspólną w punkcie, którego odcięta równa się a. Punkt ten jest więc punktem zwrotu.

Jeżeli obie gałęzie są wklęsłemi, lub obie wypukłemi względem osi nieprostopadłéj do stycznéj wspólnéj w punkcie zwrotu, punkt ten jest *drugiego rodzaju;* lecz jeżeli jedna gałąź jest wklęsłą, a druga wypukłą w tym punkcie, punkt jest punktem zwrotu *pierwszego rodzaju*. Czyli innemi słowy

[385] jeżeli drugie pochodne $\frac{d^2y}{dx^2}$ są tych samych znaków dla obu giałęzi krzywych, lub znaków przeciwnych, dla przyrostku nieskończonie małego x, punkt zwrotu jest *drugiego*, lub *pierwszego* rodzaju. Mamy w przykładzie poprzedzającym

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''(x)\pm(x-a)^{\frac{p}{q}}\psi''(x)\pm2\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1}\psi'(x)$$

$$\pm\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2}\psi(x)$$

Jeżeli $\frac{p}{q}>2$, obie wartości na $\frac{d^2y}{dx^2}$ różnią się nieskończenie mało od $\varphi''(a)$ [dla $x=a+\Delta x$, biorąc Δx nieskończenie małém. Jeżeli więc $\varphi''(a)$ nie jest zerem, zwrot jest drugiego rodzaju : jeżeli $\varphi''(a)$ jest zerem, zwrot będzie dla téj saméj przyczyny drugiego rodzaju, byleby $\varphi''(a+\Delta x)$ było nieskończenie małą niższego od $\frac{p}{q}-2$ rzędu.

Jeżeli $\frac{p}{q}<2$, obie wartości $\frac{d^2y}{dx^2}$ stają się nieskończenie wielkiemi dla $x=a$, znaków przeciwnych dla $x=a+\Delta x$ a więc zwrot jest pierwszego rodzaju. (Ułamek $\frac{p}{q}$ nie może być zresztą równym 2, bośmy przypuścili że liczby p i q są pierwszemi pomiędzy sobą).

Tak dla szczególnego przypadku powyższéj funkcji

$$x^3-x^2-y^2+2yx=0 \qquad \text{czyli} \qquad (y-x)^2=x^3$$

początek spółrzędnych jest punktem zwrotu pierwszego rodzaju; dla krzywéj zaś danéj przez równanie

$$x^5-x^4+2yx^2-y^2=0 \qquad \text{czyli} \qquad (y-x^2)^2=x^5$$

początek jest punktem zwrotu drugiego rodzaju.

406. Punkta kątowe. *Punktem kątowym* nazywamy punkt, w którym zatrzymują się dwie gałęzie krzywéj, mające w tym punkcie styczne różne. Okrąg koła zakreślony promieniem nieskończenie małym z punktu kątowego przecina krzywę w dwóch punktach; lecz dwie cięciwy nieskończenie małe krzywéj schodzące się w tym punkcie tworzą kąt zdążający do granicy różnéj od dwóch kątów prostych: (fig. 100) granica ta jest różną od zera,

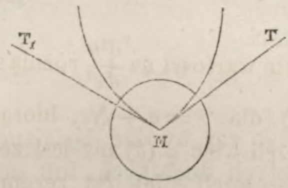


fig. 100.

bo punkt byłby punktem zwrotu.

Niech będzie naprzykład krzywa (fig. 101) dana przez

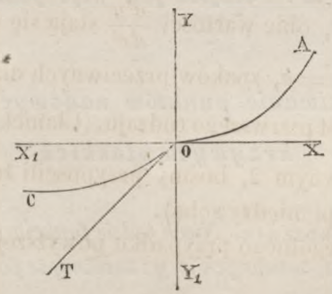


fig. 101.

ównanie

$$\left(\frac{x-y}{y}\right)^x = e$$

czyli

$$y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

Dla $x=0$, $y=0$, krzywa więc przechodzi przez początek; pochodna dla téj wartości $x=0$, $y=0$ (dla któréj $x+\Delta x=\Delta x$, $y+\Delta y=\Delta y$) staje się

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\text{gr}\left(\frac{y}{x}\right)_0=\text{gr}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}$$

a zważywszy że $\text{gr}\, e^{\frac{1}{\Delta x}}=\infty$, $\text{gr}\, e^{\frac{1}{-\Delta x}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0$, pochodna ta ma dwie wartości

$$0 \text{ i } 1$$

stosownie do tego czy uważać będziemy gałąź krzywéj po stronie odciętych dodatnych, lub odjemnych: gałąź po stronie odciętych dodatnych będzie więc miała za styczną w początku samą oś odciętych, gałąź po stronie odciętych odjemnych będzie miała styczną tworzącą z osią odciętych kąt 45^0. Początek jest więc punktem kątowym krzywéj.

Poszukiwanie punktów nadzwyczajnych krzywych płaskich.

407. Twierdzenie. *Niech będzie funkcja $f(x,y)$ ciągła, jednowartościowa, zmiennych x, y: załóżmy że pochodne częściowe* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *téj funkcji są również ciągłemi, jednowartościowemi funkcjami tych zmiennych. Niech będzie krzywa dana przez równanie:*

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

powiadam, że spółrzędne punktów nadzwyczajnych téj krzy-

wéj czynią zadosyć równaniom

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0\cdot$$

Oznaczmy przez x_0, y_0 spółrzędne jakiegokolwiek punktu M (fig.102) krzywéj, którą przypuścimy odniesioną do spółrzędnych prostolinijnych, tworzących ze sobą kąt θ. Z punktu M jako środka, promieniem nieskończenie małym ρ zakreślmy okrąg koła: dowiedziemy, że jeżeli $x=x_0$, $y=y_0$ nie czynią zadosyć równaniom (2), okrąg ten przeciąć może krzywę w dwóch tylko punktach które połączone z punktem M dadzą dwie cięciwy tworzące ze sobą kąt równy w granicy π, że zatém w takim razie punkt M nie jest punktem nadzwyczajnym.

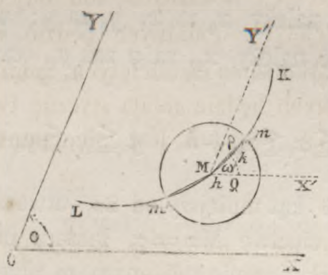


fig. 102.

Ponieważ punkt M znajduje się na krzywéj, zachodzi równanie

$$f(x_0\,,\ y_0)=0$$

a nazwawszy x_0+h, y_0+k punkta okręgu koła zakreślonego z punktu M promieniem η, spółrzędne punktu m przecięcia się tego okręgu z krzywą daną, czynić będą zadosyć równaniu

$$f(x_0+h\,,\,y_0+k)=0$$

lub, odejmując od tego równania, równanie poprzedzające:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=0$$

Rozwijając $f(x_0+h, y_0+k)$ podług wzoru Taylor'a [**277**] otrzymamy, zatrzymując rozwinięcie na drugim wyrazie:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k+\mathrm{R}_2=0 \tag{3}$$

gdzie wyrazem dopełniającym jest

$$\mathrm{R}_2=\frac{1}{1.2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1+2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_1+k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_1\right] \tag{4}$$

Wskaźnik 0 u spodu nawiasów wskazuje, że w nawiasach podstawić należy x_0 za x, y_0 za y; wskaźnik 1, że za x podstawić należy x_1, za y zaś y_1, czyniące zadosyć warunkom

$$x_0\leqq x_1\leqq x_0+h,\qquad y_0\leqq y_1\leqq y_0+k$$

Nazwijmy ω kąt mniejszy od 2π, utworzony z osią odciętych przez cięciwę $\mathrm{M}m=\rho$, łączącą punkt dany M, z punktem nieskończenie zbliżonym m przecięcia się krzywéj danéj z okręgiem nieskończenie małym: otrzymamy

$$h=\rho\frac{\operatorname{wst}(\theta-\omega)}{\operatorname{wst}\theta},\qquad k=\rho\frac{\operatorname{wst}\omega}{\operatorname{wst}\theta}$$

a dzieląc równanie (3) przez ρ i podstawiając te wartości:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\frac{\operatorname{wst}(\theta-\omega)}{\operatorname{wst}\theta}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\frac{\operatorname{wst}\omega}{\operatorname{wst}\theta}+\frac{\mathrm{R}_2}{\rho}=0 \tag{5}$$

Zauważymy przytém, że stosunek $\frac{\mathrm{R}_2}{\rho}$ zdąża do granicy zero, gdy ρ zdąża do zera: bo $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ i $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$, są z założenia różnemi od zera, a więc R_2 nieskończenie małém względem h lub k, a zatém i względem $\rho = \sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \operatorname{dos}\theta}$.

Aby uprościć ostatnie równanie, założmy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = -\mathrm{P}\,\mathrm{wst}\,\alpha\,, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = +\mathrm{P}\,\mathrm{wst}\,(\theta - \alpha) \tag{6}$$

gdzie P jest dodatném, co jest zawsze możebném, bo P i α są spółrzędnemi biegunowemi [60] punktu, którego spółrzędne prostolinijne byłyby $\frac{1}{\mathrm{wst}\,\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ i $-\frac{1}{\mathrm{wst}\,\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$. Założenie (6) sprowadza równanie (5) do kształtu

$$\mathrm{P}\,\mathrm{wst}\,(\omega - \alpha) + \frac{R_2}{\rho} = 0 \tag{7}$$

a przechodząc do granicy, i zważając że $\mathrm{gr}\,\frac{R_2}{\rho} = 0$, i że P nie może być zerem, bo $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ i $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ nie są z założenia zerami, będziemy mieli

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{wst}\,(\omega - \alpha) = 0$$

różnica więc $\omega - \alpha$, jest nieskończenie małą, lub nieskończenie mało różną od π. Zobaczmy co się stanie z wyrażeniem

$$\mathrm{P}\,\mathrm{wst}\,(\omega - \alpha) + \frac{R_2}{\rho} \tag{8}$$

gdy będziemy zmieniać ω od $\alpha - \varepsilon$ do $\alpha + \varepsilon$, lub od $(\pi + \alpha) - \varepsilon$, do $(\pi + \alpha) + \varepsilon$, gdzie ε wyraża ilość oznaczoną dodatną, tak małą jak się podoba. Wiemy z założenia, że

$$R_2 = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 - k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

jest funkcją ciągłą zmiennych h i k, a zatém podstawiwszy za h i k ich wartości przez ρ i ω, $\frac{R_2}{\rho}$ jest funkcją ciągłą ω. Funkcja ta staje się zerem, gdy $\rho=0$, to jest $h=0$, $k=0$, a to jakiekolwiek będzie ω: a zatém pochodna $\frac{R_2}{\rho}$ względem ω staje się również zerem [188] dla $\rho=0$. Pochodna wyrażenia (8) względem ω

$$P \operatorname{dos}(\omega-\alpha)+\frac{\partial \frac{R_2}{\rho}}{\partial\omega}$$

jest nieskończenie mało różną od P lub $-P$, gdy różnica $\omega-\alpha$ jest nieskończenie małą, lub nieskończenie mało różną od π; a ponieważ P jest z założenia dodatném, więc wyrażenie (8) zwiększa się, gdy zmieniamy ω od $\alpha-\varepsilon$, do $\alpha+\varepsilon$, a zmniejsza się gdy zmieniamy ω od $\pi+\alpha-\varepsilon$, do $\pi+\alpha+\varepsilon$; w jednym i drugim razie wyrażenie to zmienia znak, gdy przechodzimy z jednéj z powyższych wartości granicznych w drugą: wyrażenie to staje się więc zerem dla pewnéj wartości ω zawartéj pomiędzy $\alpha-\varepsilon$ i $\alpha+\varepsilon$, raz tylko, i znów dla pewnéj wartości ω pomiędzy $\pi+\alpha-\varepsilon$ i $\pi+\alpha+\varepsilon$, jakkolwiek małém będzie ε.

Z powyższego wynika, że jeżeli wartości szczególne $x=x_0$, $y=y_0$, nie czynią zadosyć równaniom (2), równanie (7) ma tylko dwa pierwiastki ω, jeden nieskończenie mało różny od α, a drugi od $\pi+\alpha$. Okrąg koła więc, zakreślony z punktu M którego spółrzędnemi są x_0 i y_0, przecina krzywę w dwóch tylko punktach m, m' takich, że cięciwy mM i Mm', tworzą jedna kąt nieskończenie mały, druga kąt nieskończenie mało różny od dwóch prostych ze styczną daną [373] przez kąt α (na zasadzie równań (6)). Punkt więc M, którego spółrzędne nie czynią zadosyć równaniom (2), nie może być punktem nadzwyczajnym, co było do dowiedzenia.

408. WNIOSEK. Przedstawiając krzywę współrzędnych jednorodnych [**391**]

$$u=f(x, y, t)=0$$

dla wartości szczególnych $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ spółrzędnych, odpowiadających punktom nadzwyczajnym, wszystkie trzy pochodne częściowe 1go rzędu u_x, u_y, u_t, będą zerami: bo jeżeli $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ na zasadzie twierdzenia poprzedzającego, to i $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. Spółrzędne więc punktów nadzwyczajnych czynią zadość równaniu, któreśmy oznaczyli powyżéj przez

$$\text{H}(u)=0.$$

z zastrzeżeniami wymienionemi powyżéj [**394**].

409. Poszukiwanie punktów nadzwyczajnych w szczególności. Niech będzie krzywa dana przez równanie

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

zakładamy że funkcja $f(x, y)$ i wszystkie te jéj pochodne częściowe, które brać będziemy pod uwagę w dalszym ciągu tego badania, są ciągłemi jednowartościowemi funkcjami x i y. Wiemy z twierdzenia poprzedzającego [**407**], że punktów nadzwyczajnych szukać należy wyłącznie pomiędzy punktami, których spółrzędne czynią zadosyć równaniom

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{2}$$

Niech będą wartości x_0, y_0 spółrzędnych punktu M, czyniących zadosyć równaniom (2), lecz dla których pochodne częściowe drugiego rzędu nie stają się wszystkie trzy zerami, to jest, które nie czynią zadosyć trzem równaniom

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

Oznaczmy jak powyżéj przez x_0+h, y_0+k spółrzędne punktu m (fig. 102) na okręgu koła zakreślonym z punktu M jako środka, promieniem nieskończenie małym ρ. Jeżeli punkt m ma się znajdować na krzywéj, będzie zachodził warunek

$$f(x_0+h\,,\quad y_0+k)=0$$

a rozwijając podług wzoru Taylor'a, i znosząc wyrazy równe z założenia zeru, otrzymamy

$$(4)\qquad \frac{1}{1.2}\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0+k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]+R_3=0$$

gdzie R_3 oznacza resztę wzoru Taylor'a, zatrzymanego na trzecim wyrazie.

Przypuśćmy że zachodzi warunek

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0^2>0$$

trójmian w nawiasie wyrażenia (4) nie może stać się zerem dla żadnych wartości rzeczywistych h i k różnych od zera, a że wartość jego bez względu na znak jest większą od R_3 [**280**], gdy weźmiemy h i k dostatecznie małemi, równanie (4) nie może być sprawdzoném. Z tąd wynika że okrąg koła zakreślonego z punktu M (x_0, y_0) jako środka, promieniem nieskończenie małym nie spotyka krzywéj; że zatém punkt M jest *punktem odosobnionym.*

410. Załóżmy że warunek (5) nie zachodzi: poprowadziwszy przez punkt M równoległe MX′, MY′ do osi tworzących ze sobą kąt θ, h i k będą spółrzędnemi punktu $m\,(x_0+h, y_0+k)$ względem tych równoległych: oznaczmy przez λ stosunek $\frac{k}{h}$, a przez ω kąt Mm z osią OX (fig.102) będzie

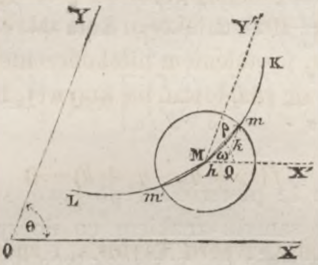


fig. 102.

$$\lambda = \frac{k}{h} = \frac{\text{wst}\,\omega}{\text{wst}\,(\theta-\omega)}$$

$$Mm = \rho, \qquad k = \frac{\rho\,\text{wst}\,\omega}{\text{wst}\,\theta}, \qquad h = \frac{\rho\,\text{wst}\,(\theta-\omega)}{\text{wst}\,\theta}$$

Wyrażenie w nawiasie (4)

$$h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$$

stanie się zerem, jeżeli

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 \lambda + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \lambda^2 = 0$$

Oznaczmy dwa pierwiastki równania (6) przez

$$\lambda_1 = \frac{\text{wst}\,\omega_1}{\text{wst}\,(\theta-\omega_1)}, \qquad \lambda_2 = \frac{\text{wst}\,\omega_2}{\text{wst}\,(\theta-\omega_2)}$$

przyczém ω_1 i ω_2 możemy zawsze przypuścić mniejszem od 2π; równanie (4) stanie się

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \left[k - h\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega_1}{\mathrm{wst}\,(\theta-\omega_1)}\right]\left[k - h\,\frac{\mathrm{wst}\,\omega_2}{\mathrm{wst}\,(\theta-\omega_2)}\right] + R_3 = 0$$

Podstawmy za k i h ich wartości, i załóżmy przez skrócenie

$$\left\{\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \mathrm{dos}\,\theta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]^2 + 4\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right]\mathrm{wst}^2\,\theta\right\}^{\frac{1}{2}} = P \times 2\,\mathrm{wst}^2\,\theta$$

z zastrzeżeniem że pierwiastek po lewéj stronie ma być wziętym z tym samym znakiem co iloczyn wst $(\theta-\omega_1)$ wst $(\theta-\omega_2)$. Równanie (4), w skutek tych podstawień, sprowadzoném zostanie do kształtu

$$(7) \qquad P\,\mathrm{wst}\,(\omega-\omega_1)\,\mathrm{wst}\,(\omega-\omega_2) + \frac{R_3}{\rho^2} = 0$$

gdzie $\frac{R_3}{\rho^2}$ zdąża do zera wraz z ρ, bo R_3 jest nieskończenie małém względem k^2 lub h^2, lub hk [**255**], zważywszy że $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$ nie są wszystkie trzy zerami: jest więc nieskończenie małém względem ρ^2, równego $h^2 + k^2 + 2hk\,\mathrm{dos}\,\theta$.

411. Przypuśćmy naprzód że pierwiastki równania (6) nie są równemi, to jest że zachodzi warunek

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 < 0$$

kąty zaś ω_1, ω_2, nie są ani równemi, ani spełniającemi. Równanie (7) może tylko być w takim razie sprawdzoném przez wartość ω nieskończenie mało różną od jednéj z wartości: ω_1, $\pi+\omega_1$; ω_2, $\pi+\omega_2$. Oznaczywszy przez ω_0 jednę którąkolwiek z tych czterech wartości, a przez ε ilość oznaczoną dodatną tak małą jak się podoba, pierwsza strona równania (7) zmieni znak, gdy ω przejdzie od $\omega_0-\varepsilon$, do $\omega_0+\varepsilon$: więc w tych granicach będzie zachodził pierwiastek równania (7). Powiadam że zachodzić będzie jeden tylko pierwiastek. W rzeczy saméj, pochodna pierwszéj strony równania (7) co do ω

$$P\,[\operatorname{dos}(\omega-\omega_1)\operatorname{wst}(\omega-\omega_2)+\operatorname{wst}(\omega-\omega_1)\operatorname{dos}(\omega-\omega_2)]+\frac{\partial\frac{R_3}{\rho^2}}{\partial\omega}$$

różni się od $\pm P\operatorname{wst}(\omega_1-\omega_2)$ tak mało jak się podoba, jeżeli przyjmiemy ε dostatecznie małém. Ponieważ R_3 jest funkcją z założenia ciągłą zmiennéj ω, pierwsza strona równania (7) ciągle się zwiększa, lub ciągle zmniejsza, gdy ω przechodzi od $\omega_0-\varepsilon$, do $\omega_0+\varepsilon$; równanie więc (7), ma tylko cztery pierwiastki, cztery wartości ω nieskończenie mało różne od ω_1, $\pi+\omega_1$, ω_2, i $\pi+\omega_2$.

Z tego wynika, że okrąg koła zakreślony z punktu M (x_0,y_0) promieniem nieskończenie małym, przecina krzywę w czterech punktach: poprowadziwszy promienie koła nieskończenie małego do tych czterech punktów, które będą cięciwami nieskończenie małemi krzywéj poprowadzonemi z punktu M do punktów nieskończenie zbliżonych, granicą kierunku dwóch z tych cięciw, będzie kierunek wspólny tworzący kąt ω_1 z osią odciętych; granicą wspólną kierunku dwóch pozostałych cięciw, będzie kierunek wyznaczony przez kąt ω_2. Ponieważ ω_1 i ω_2 są z założenia różne, więc punkt M jest *punktem podwójnym* krzywéj.

412. Przypuśćmy powtóre, że pierwiastki równania (6) są równemi, to jest że

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 = 0$$

kąty ω_1, ω_2 są równemi, a równanie (7) staje się

$$(10)\qquad \mathrm{P.wst}^2(\omega - \omega_0) + \frac{\mathrm{R}_3}{\rho^2} = 0$$

nazywając ω_0 wartość wspólną dwóch pierwiastków równania (7).

Wziąwszy jeden wyraz więcéj niż w (4) w rozwinięciu

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k)$$

podług wzoru Taylor'a, otrzymamy

$$(11)\qquad \mathrm{R}_3 = \frac{1}{1.2.3}\left[h^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3h^2k\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 + 3hk^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_0 + k^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\right] + \mathrm{R}_4$$

Jeżeli wyrażenie w nawiasie (11)

$$h^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3h^2k\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 + 3hk^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_0 + h^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0$$

nie staje się zerem dla $\omega = \omega_0$ lub $\omega = \pi + \omega_0$, wyrażenie to zachowywać będzie ten sam znak $+$ lub $-$, gdy ω przechodzić będzie od $\omega_0 - \varepsilon$ do $\omega_0 + \varepsilon$, a znak przeciwny $-$ lub $+$, gdy ω przechodzić będzie od $\pi + \omega_0 - \varepsilon$ do $\pi + \omega_0 + \varepsilon$; znak ten będzie ten sam co znak R_3 dla ρ nieskończenie małego, a więc równanie (10) może mieć pierwiastki tylko nieskończenie mało różne od ω_0 lub $\pi + \omega_0$.

Dwie pierwsze pochodne pierwszéj strony równania (10) są

$$P \operatorname{wst} 2(\omega - \omega_0) + \frac{\partial \frac{R_3}{\rho^2}}{\partial \omega}, \quad 2P \operatorname{dos} 2(\omega - \omega_0) + \frac{\partial^2 \frac{R_3}{\rho^2}}{\partial \omega^2}$$

Dla wartości ω nieskończenie zbliżonych do ω_0 lub $\pi + \omega_0$ druga z niech różni się nieskończenie mało od 2P; pierwsza zatém jest ciągle zwiększającą się, i może raz tylko stać się zerem. Równanie więc (10) może mieć tylko dwa pierwiastki i ma je w rzeczywistości, bo R_3 jest odjemném dla wartości danych ω_0 lub $\pi + \omega_0$ zmiennéj ω.

W tym przypadku, okrąg koła zakreślony z punktu M jako środka promieniem nieskończenie małym, przecina krzywę w dwóch tylko punktach, a promienie koła poprowadzone do tych punktów przecięcia z jednéj i drugiéj strony prostéj wyznaczonéj przez kąt ω_0, tworzą z kierunkiem téj prostéj kąty nieskończenie małe. Punkt M jest więc *punktem zwrotu pierwszego rodzaju.*

413. Weźmy teraz pod uwagę przypadek w którym wyrażenie (11) w nawiasie staje się zerem, gdy $\operatorname{wst}(\omega - \omega_0)$ staje się zerem. W tym przypadku, podobnie jak w poprzedzającym, równanie (10) może mieć miejsce tylko dla wartości ω nieskończenie mało różnych od ω_0 lub $\pi + \omega_0$; w punkcie więc danym M $(x_0\ y_0)$ krzywa może mieć jedną tylko styczną, tworzącą kąt ω_0 z osią odciętych. Aby rozpoznać gatunek punktu nadzwyczajnego M, zamiast uważania okręgu koła zakreślonego z tego punktu promieniem nieskończenie małym, weźmiemy pod uwagę dwie równoległe do osi rzędnych w odległościach równych, nieskończenie małych, od punktu M. Zakładamy ciągle $\frac{k}{h} = \lambda$, gdzie k i h są przyrostkami spółrzędnych punktu M, gdy przechodzimy do punktu nieskończnie zbliżonego na krzywéj. Oznaczmy przez skrócenie

$$f_2(\lambda)=\frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+2\lambda\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0+\lambda^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right],$$

$$f_3(\lambda)=\frac{1}{1.2.3}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+3\lambda\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0+3\lambda^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0+\lambda^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0\right],$$

$$f_4(\lambda)=\frac{1}{1.2.3.4}\left[\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0+4\lambda\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)_0+6\lambda^2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_0\right.$$
$$\left.+4\lambda^3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\right)_0+t^4\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0\right],$$

. . . .

Zatrzymując na piątym wyrazie rozwinięcie

$$f(x_0+h,\ y_0+k),$$

wyrażeniem reszty będzie

$$R_5=h^5\left[f_5(\lambda)+\eta\right]$$

gdzie η jest nieskończenie małą tego sameg rzędu co h; równanie więc wyrażające że punkt x_0+h, y_0+k, znajduje się na krzywéj, będzie

$$(12)\qquad f_2(\lambda)+hf_3(\lambda)+h^2f_4(\lambda)+h^3\left[f_5(\lambda)+\eta\right]=0$$

W przypadku który uważamy, pierwiastki równania $f_2(\lambda)=0$ są równemi : oznaczywszy przez λ_0 ich wspólną wartość, otrzymamy również $f_3(\lambda_0)=0$ (z równania (12) znosząc $f_2(\lambda)$, dzieląc przez h i zakładając $h=0$). Oznaczyliśmy wyżéj [**410**]

$$\lambda_0=\frac{\text{wst}\,\omega_0}{\text{wst}\,(\theta-\omega_0)}$$

a pierwiastki rzeczywiste równania (12) mogą być tylko nieskończenie mało różnemi od λ_0.

Załóżmy

$$\lambda = \lambda_0 + \mu h \tag{13}$$

tak że zamiast λ otrzymamy we wzorach nieznaną μ:

$$f_2(\lambda) = \frac{\mu^2 h^2}{1.2} f_2''(\lambda_0) + \dots$$

$$f_3(\lambda) = \frac{\mu h}{1} f_3'(\lambda_0) + \frac{\mu^2 h^2}{1.2} f_3''(\lambda_0) + \dots$$

$$f_4(\lambda) = f_4(\lambda_0) + \frac{\mu h}{1} f_4'(\lambda_0) + \dots$$

$$f_5(\lambda) = f_5(\lambda_0) + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

a zakładając przez skrócenie

$$F(\mu) = \frac{f_2''(\lambda_0)}{1.2}\mu^2 + \frac{f_3'(\lambda_0)}{1}\mu + f_4(\lambda_0)$$

$$F_1(\mu) = \frac{f_3''(\lambda_0)}{1.2}\mu^2 + \frac{f_4'(\lambda_0)}{1}\mu + f_5(\lambda_0)$$

równanie (12) stanie się

$$F(\mu) + h\,[F_1(\mu) + \eta] = 0 \tag{14}$$

η jest nieskończenie małą tego samego rzędu co h.

Jeżeli pierwiastki równania

$$F(\mu) = 0 \tag{15}$$

są urojonemi, równanie (14) nie będzie miało również pierwiastków rzeczywistych, nie będzie więc na krzywéj punktu nieskończenie zbliżonego do punktu M i punkt tén będzie *punktem odosobnionym.*

414. Jeżeli pierwiastki równania (15) są rzeczywiste i nie równe, oznaczywszy je przez μ', μ'', pierwsza strona równania (14) zmieni znak, bez względu na znak h gdy zmieniać będziemy μ w blizkości μ' lub μ''. Równanie (14) będzie więc miało naprzód dwa pierwiastki rzeczywiste μ'_1 i μ''_1, następnie dwa drugie pierwiastki rzeczywiste μ'_2 i μ''_2, które otrzymamy zastępując h przez $-h$: jest więc cztery punkta krzywéj dla których mamy według wzoru (13)

$$k=\lambda_0 h+\mu'_1 h^2, \qquad k=\lambda_0 h+\mu'_2 h^2$$
$$k=-\lambda_0 h+\mu''_1 h^2, \qquad k=-\lambda_0 h+\mu''_2 h^2.$$

Dwie z czterech cięciw łączących punkt M z temi punktami tworzą kąty nieskończenie małe z prostą wyznaczoną przez λ_0 w jednym kierunku, dwie pozostałe cięciwy tworzą kąty nieskończenie małe z tą samą prostą w drugim kierunku. Punkt więc M jest *punktem podwójnym w którym się spotykają dwie gałęzie krzywéj, mające w tym punkcie styczną wspólną,*

415. Wreszcie, jeżeli pierwiastki równania (15) są równemi, oznaczywszy przez μ_0 ich wspólną wartość, i przypuszczając że równanie

$$F_1(\mu)=0 \tag{16}$$

nie ma pierwiastku równego μ_0, równanie (14) przedstawi się pod kształtem

$$(\mu-\mu_0)^2+2h\frac{F_1(\mu)+\eta}{f''_2(\lambda_0)}=0.$$

Równanie to ma dwa pierwiastki rzeczywiste μ'_0, μ''_0 nieskończenie mało różne od μ_0, byleby h było znaku przeciwnego, jak $\frac{F_1(\mu_0)}{f''(\lambda_0)}$; lecz w razie gdy h jest tego samego znaku, co ten stosunek, równanie nie będzie miało pierwiastków rzeczywistych. Ztąd wynika, że krzywa ma dwa punkta dla których

$$k = \lambda_0 h + \mu'_0 h^2, \qquad k = \lambda_0 h + \mu''_0 h^2$$

zresztą jeżeli μ_0 nie jest zerem, μ'_0 i μ''_0 są tego samego znaku; więc cięciwy łączące dwa te punkta krzywej z punktem M znajdują się po tej samej stronie stycznej do krzywej w tym punkcie, i tworzą z jednym z kierunków téj stycznéj kąty nieskończenie małe. Punkt więc M jest *punktem zwrotu drugiego rodzaju*.

Wniosek ten nie ma miejsca w przypadku, jeżeli $\mu_0 = 0$; *zwrot* jest w takim razie *pierwszego rodzaju*; zachodzi również wyjątek w przypadku gdy μ_0 jest pierwiastkiem równania (16). Lecz widzimy z łatwością, że ile razy punkt M w przypadku który uważamy, nie jest punktem zwrotu, jest wtedy albo punktem podwójnym, albo punktem odosobnionym.

416. Pozostaje do badania przypadek w którym wszystkie pochodne drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$, która zrównana zeru przedstawia krzywę, są równemi zeru. Przypadek ten rozdziela się znowu na szczególne, w których pochodne dalszych rzędów musiałyby być branemi pod uwagę. Nie przeprowadzimy tu rachunków tyczących się tego przypadku, tém bardziéj, że wypadek ostateczny tych rachunków nie będzie ogólnym, jako zasadzający się na wzorze Taylor'a, któren tylko do tego szczególnego rodzaju funkcji $f(x, y)$ stosować można [**250**], dla którego pochodne częściowe téj funkcji są ciągłemi, jednowartościowemi. Podamy tylko pobieżnie główny wypadek tego badania.

W ogólności, jeżeli dla wartości x_0, y_0 zmiennych x i y

wszystkie pochodne częściowe funkcji $f(x, y)$ aż do rzędu $n-1$ włącznie stają się zerami, warunek aby punkt x_0+h, y_0+k, znajdował się na krzywej jest następującego kształtu, zachowując poprzednie znakowanie :

$$\Phi(\omega)\,\mathrm{wst}(\omega-\omega_1)\,\mathrm{wst}(\omega-\omega_2)\ldots\mathrm{wst}(\omega-\omega_p)+\frac{R_{n+1}}{\rho^n}=0$$

gdzie $\frac{R_{n+1}}{\rho^n}$ zdąża do zera wraz ρ, zaś $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_p$ oznaczają kąty, których liczba p jest równą n, lub różną od n o liczbę parzystą; $\Phi(\omega)$ staje się stałą gdy $p=n$, w przeciwnym razie jest funkcją ω, która nie staje się zerem dla żadnej wartości ω. Widzimy z łatwością, że jeżeli kąty $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ są różnemi, punkt M będzie *punktem wielokrotnym* krzywej porządku p, to jest, że p gałęzi krzywej spotykać się będą w tym punkcie. Ztąd wynika, że dla punktu wielokrotnego porządku p, *koniecznem* jest (lecz *niedostatecznem*) żeby pochodne częściowe funkcji f rzędu niższego od n stały się zerami dla spółrzędnych tego punktu.

W obecnem przypuszczeniu, spółczynniki kątowe stycznych do gałęzi krzywych, spotykających się w punkcie M, znajdują się między pierwiastkami λ równania :

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_0+\frac{n}{1}\lambda\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\lambda^2\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\right)_0+\ldots$$
$$+\frac{n}{1}\lambda^{n-1}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}}\right)_0+\lambda^n\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_0=0$$

λ wyraża stosunek $\frac{k}{h}$ przyrostku rzędnej do przyrostku odciętej, gdy przechodzimy z punktu M do punktu nieskończenie zbliżonego na krzywej; pisząc $\frac{dy}{dx}$ zamiast λ i opuszczając wskaźnik w powyższem równaniu, wychodzi ono na jedno z równaniem otrzymaném przez zróżniczkowanie n razy równania:

$$f(x, y) = 0$$

w którém na mocy poprzedzających założeń, znoszą się wszystkie pochodne $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ... rzędów wyższych nad pierwszy. To właśnie równanie wyznacza nam wartości $\frac{dy}{dx}$: aby otrzymać $\frac{d^3y}{dx^3}$, należy zróżniczkować $n+1$szy raz równanie dane, i tak dalej. Uwaga ta może służyć jako dopełnienie prawidła na różniczkowanie funkcyj niewyraźnych [**198**].

417. Uwagi nad teorją punktów nadzwyczajnych. Teorja punktów nadzwyczajnych, która jakeśmy powiedzieli powyżej [**400**], wychodzi na to samo co teorja wartości nadzwyczajnych funkcji, jest nader ważną: ma ona na celu wyznaczenie i badanie wszelkich wartości zmiennych, dla których funkcja lub jej pochodne mają ciągłość zerwaną, lub przestają być jednowartościowemi. Tak, dla wartości odpowiadających punktom odosobnionym, lub punktom zatrzymania, ciągłość funkcji zostaje zerwaną; w pierwszym razie wartości szczególnej funkcji nie odpowiada żadna pochodna. Gdy zmienna niezależna przechodzi przez wartość odpowiadającą punktowi wielokrotnemu, funkcja przestaje być jednowartościową: tej wartości szczególnej funkcji, może odpowiadać kilka wartości pochodnéj. W punkcie kątowym ciągłość funkcji nie jest zerwaną, lecz ciągłość pochodnéj jest zerwaną i t. p.

Teorja tych wartości nadzwyczajnych podana powyżéj nie jest ani ogólną ani wystarczającą: zasądza się ona na wzorze Taylora, któren wymaga ciągłości pochodnych, a właśnie idzie tu o wartości dla których pochodne przestają być ciągłemi, jednowartościowemi. Wprawdzie warunki te wymaganemi były nie od funkcji wyraźnéj

$$(1) \qquad y = \varphi(x)$$

lecz od funkcji ogólniejszéj

$$(2) \qquad f(x, y) = 0.$$

Naprzykład wszystkie funkcje algebraiczne, które nie są w ogólności ani jednowartościowemi, ani ciągłemi, pod kształtem (1) jako funkcje wyraźne, zostały określone przez równanie (2), gdzie $f(x,y)$ przedstawia wielomian całkowity wymierny co do x i y, do którego zatém cała powyższa teorja zastosowaną być może.

W ogólności, wartości nadzwyczajnych szukać należy pomiędzy wartościami x i y czyniącemi zadosyć trzem równaniom

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

naprzykład rugując y z dwóch pierwszych, otrzymując w ten sposób równanie co do x, i szukając pomiędzy pierwiastkami tego równania, tych które czynią zadosyć równaniu trzeciemu $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Z powyższych pierwiastków dość jest brać pod uwagę pierwiastki wielokrotne, które same tylko mogą odpowiadać wartościom nadzwyczajnym : w rzeczy samej, rozwiązując równanie $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ co do y, i podstawiając tak otrzymaną wartość $y = \psi(x)$ w równanie $f(x, y) = 0$ otrzymamy

$$f[x, \psi(x)] = \Psi(x) = 0$$

równanie zawierające x, którego pierwiastki czyniące zadosyć równaniu $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, są wartościami szukanemi. Lecz

$$\Psi'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(x)$$

a że $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ z założenia, więc i $\Psi'(x)=0$, dla wartości szukanych; czyli że te wartości czynią zadosyć równaniu $\Psi'(x)$ i $\Psi''(x)$, a więc są pierwiastkami wielokrotnemi równania $\Psi(x)=0$.

Często można znaleźć wprost punkt nadzwyczajny krzywej lub wartość nadzwyczajną funkcji : naprzykład dla

$$\frac{1}{\mathrm{l}.\,x}$$

wiemy że dla $x=0$ $y=0$ krzywa przechodzi przez początek : lecz że dla x odjemnego y jest urojoném, więc początek spółrzędnych jest *punktem zatrzymania* krzywéj.

Zadania do rozwiązania.

1. *Dowieść, że liść Descartes'a* (fig. 70 str. 606)

$$y^3-3axy+x^3=0$$

ma w początku, to jest dla $x=0$, $y=0$ *punkt podwójny.*

2. *Krzywa dana przez równanie*

$$x^4-ax^2y+by^3=0$$

ma w początku punkt potrójny. Jedna z gałęzi jest styczną z osią odciętych, styczne do dwóch drugich tworzą z osią odciętych kąty których styczne są $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$.

3. *Krzywa dana przez równanie*

$$(by - cx)^2 = (x - a)^5$$

ma punkt zwrotu pierwszego rodzaju dla $x = a$.

4. *Krzywa dana przez równanie*

$$x^4 - ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$$

ma punkt zwrotu drugiego rodzaju w początku.

5. *Znaleźć punkta nadzwyczajne krzywej*

$$y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0.$$

6. *Znaleźć punkta nadzwyczajne krzywéj*

$$y^3(2x - a) + a^2x^2 - x^4 = 0.$$

7. *Znaleźć punkta nadzwyczajne krzywéj*

$$\rho = a(\operatorname{st}\omega - 1).$$

8. *Znaleźć punkta nadzwyczajne krzywéj*

$$\rho^2 = a^2\frac{\operatorname{wst} 3\omega}{\operatorname{dos}\omega}.$$

9. *Dowieść, że żadna krzywa algebraiczna nie może mieć punktu zatrzymania ani punktu kątowego.*

10. *Dowieść, że krzywa dana przez równanie*

$$y^{2n+2} - (x-1)^{2n+1}x = 0$$

nie ma punktu nadzwyczajnego, jakkolwiek $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, dla $y = 0$, $x = 0$.

ROZDZIAŁ XXI

O KRZYWOŚCI LINIJ NA PLASCZYZNIE

Różniczka powierzchni ograniczonéj linją krzywą. — Różniczka łuku krzywéj. — Krzywość. — Koło krzywości. — Promień i środek krzywości. — Różne wyrażenia promienia krzywości. — O rozwiniętych i rozwijających. — O obwiniętych i obwijających. — Zastosowania i przykłady : Linje drugiego stopnia. — Cykloida. —Epicykłoida. Spiralne.

Powierzchnie i łuki linij krzywych.

418. Różniczka powierzchni ograniczonéj linją krzywą. Niech będzie krzywa na płasczyznie dana przez przez równanie

$$f(x, y) = 0$$

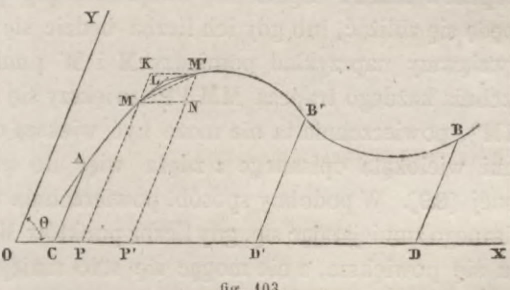


fig. 103.

Krzywę tę przypuszczamy ciągłą, a zatém i funkcję y zmiennéj niezależnéj x danę przez równanie krzywej (1) przypuszczamy ciągłą.

Weźmy na krzywéj dwa punkta A i B (fig. 103): poprowadzimy rzędne AC, BD, część płasczyzny ograniczona krzywą AB, rzędnemi AC, BD i częścią osi odciętych CD, jest *granicą powierzchni wielokąta wpisanego w krzywę* lub *opisanego* *na krzywéj* : to jest wielokąta otrzymanego, zastępując krzywę AB przez linję łamaną, złożoną z cięciw takich jak M M'... nieskończenie małych krzywéj AB; lub przez linję łamanę utworzoną prowadząc styczne przez punkta M, M' ... nieskończenie zbliżone téj krzywéj.

Powierzchnia tak jednego jak drugiego wielokąta zdąża w rzeczy saméj do granicy oznaczonéj : aby tego dowieść poprowadźmy rzędne krzywéj w punktach takich jak B', w których krzywa przestaje być wypukłą, a zaczyna być wklęsłą, lub przeciwnie [**385**] i weźmy pod uwagę część krzywéj AB' naprzykład wypukłą. Podzielmy AB' w punktach M, M'... nieskończenie zbliżonych na coraz zwiększającą się liczbę łuków MM',... nieskończenie małych; poprowadźmy cięciwy MM'... tych łuków i styczne ML, M'L... w punktach podziału. Ponieważ AB' jest krzywą wypukłą, łuk MM' przechodzić będzie wewnątrz trójkąta MLM'; powierzchnia wielokąta wpisanego, która jest summą powierzchni trapezów MM'PP' będzie się zwiększać, gdy punkta M, M' będą się zbliżać, lub gdy ich liczba będzie się zwiększać (wziąwszy naprzykład pomiędzy M i M' punkt M'', powierzchnia każdego trapeza MM'PP' zwiększy się o trójkąt MM'M''), powierzchnia ta nie może być większą od powierzchni wielokąta opisanego : zdąża więc do granicy oznaczonéj [**89**]. W podobny sposób, powierzchnia wielokąta opisanego zmniejszając się, gdy liczba punktów M, M'... podziału się powiększa, a nie mogąc się stać mniejszą od powierzchni wielokąta wpisanego, zdąża do granicy oznaczonéj [**89**]. Granica powierzchni wielokąta wpisanego jest ta sama co granica powierzchni wielokąta opisanego : bo pierwsza z nich jest summą nieskończenie małych trapezów MM'PP', a druga nieskończenie małych pięciokątów MLM'P'P; dwie te nieskończenie małe różnią się o trójkąt MM'L nieskończenie mały względem każdéj z poprzednich nieskończenie małych, jako mający dwa wymiary nieskończenie małe, a więc nieskończenie mały drugiego rzędu; granica więc summy trapezów jest ta sama co granica summy pięciokątów [**125**]. Za pomocą zupełnie podobnego dowodzenia, zobaczylibyśmy że także dla części wklęsłéj B'B krzywéj, granica wielokąta wpisanego, utworzonego przez linję łamaną cięciw B'B, rzędne B'D', BD i część osi odciętych D'D, jest ta sama co granica wielokąta opisanego otrzymanego, zastępując cięciwy przez styczne: z jakichkolwiek więc części wklęsłych, czy wypukłych składa się krzywa ciągła AB, powierzchnie wielokątów wpisanego i opisanego, któreśmy określili powyżéj, zdążają do jednéj i téj saméj granicy oznaczonéj. Powiadam że granica ta będzie tą samą dla wszelkich wielokątów wpisanych lub opisanych: to jest, według jakiegokolwiekbądź prawa łuki nieskończenie małe MM' zdążać będą do zera, granica powierzchni wielokąta utworzonego przez cięciwy lub styczne będzie tą samą. Jakoż, niech będą dwa wielokąty wpisane różnego rodzaju, których boki dla każdego z osobna zdążają do zera; poprowadźmy rzędne krzywéj dla wierzchołków tak jednego jak drugiego wielokąta, jako też przez punkta przecięcia się cięciw: powierzchnie obu wielokątów zostaną podzielonemi na równą liczbę trapezów nieskończenie małych. Trapezy jednego i drugiego wielokąta, zawarte pomiędzy temi samemi rzędnemi nie będą sobie równe: lecz różnica pomiędzy niemi jako trójkąt lub różnica trójkątów mających jeden wymiar nieskończenie mały względem odpowiedniego wymiaru trapeza, a drugi wymiar wspólny, jest nieskończenie małą względem każdego z trapezów: granica więc summy jednych i drugich trapezów będzie tą samą [**125**].

Granicę tę oznaczoną, wspólną powierzchniom wielokątów wpisanych i opisanych, niezależną od sposobu w jaki wpisujemy te wielokąty, nazywamy powierzchnią krzywéj AB: rozumiejąc przez to powierzchnię zawartą między krzywą AB, osią odciętych i dwiema rzędnemi krzywej w punktach A i B poprowadzonemi.

Powierzchnia ta będzie również granicą wszelkiej innej powierzchni składającej się z nieskończenie małych, mających z trapezami wpisanemi lub pięciokątami opisanemi stosunki równe w granicy jedności lub różnice nieskończenie małe wyższego rzędu [**125**]. Zobaczymy zaraz że dogodném jest uważanie téj powierzchni jako summy równoległoboków, lub prostokątów.

419. Niech będzie jakikolwiek punkt M (fig. 103) krzywéj AB i $OP = x$, $PM = y$ spółrzędne tego punktu: powierzchnia ACPM zawarta między krzywą, osią odciętych, pewną rzędną daną AC i rzędną jakąkolwiek MP, jest funkcją odciętéj OP czyli zmiennéj niezależnéj x: oznaczmy tę funkcję przez

$$\varphi(x)$$

zamierzamy sobie znaleźć jéj pochodnę $\varphi'(x)$ i różniczkę $\varphi'(x)\,dx$.

Nazwijmy powierzchnię ACPM=P, i nadajmy jéj przyrostek nieskończenie mały $\Delta P = MM'PP'$ odpowiedni przyrostkowi nieskończenie małemu zmiennéj niezależnéj $\Delta x = PP'$. Poprowadźmy równoległę MN do osi odciętych, i weźmy pod uwagę równoległobok nieskończenie mały MNPP'. Równoległobok różni się od $\Delta P = MM'PP'$, o część krzywolinijną MM'N mniejszą od równoległo boku MNM'K otrzymanego prowadząc M'K równolegle do MN: mamy więc

$$PP'NM < \Delta P < PP'M'K.$$

Lecz stosunek

$$\frac{PP'NM}{PP'M'K} = \frac{MP}{M'P'}$$

zdąża do jedności, gdy M zbliża się nieograniczenie do M' a zatem stosunek ΔP do PP′NM lub PP′M′K tem bardziej zdąża do jedności. Stosunek więc $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ nie zmieni się w granicy gdy za ΔP podstawimy PP′NM lub PP′M′K [**125**]: mamy zaś

$$\text{gr}\,\frac{\Delta P}{\Delta x}=\text{gr}\,\frac{PP'NM}{\Delta x}=\text{gr}\,\frac{y\Delta x\,\text{wst}\,\theta}{\Delta x}$$

nazywając przez θ kąt między osiami; czyli

$$\frac{dP}{dx}=y\,\text{wst}\,\theta$$

a więc:

Pochodna powierzchni ograniczonéj linją krzywą dwoma rzędnemi i osią odciętych, względem odciętéj, równa się iloczynowi rzędnéj przez wstawę kąta między osiami spółrzędnych.

W razie spółrzędnych prostokątnych

$$\frac{dP}{dx}=y,\qquad dP=y\,dx$$

pochodna powierzchni równa się rzędnéj, różniczka powierzchni iloczynowi rzędnéj przez różniczkę odciętéj.

Powierzchnia ABDC zawarta pomiędzy krzywą AB, dwiema rzędnemi AC $=y_0$, BD $=$ Y odpowiadającemi odciętym AC $=x_0$, AD $=$ X, uważana jako summa nieskończenie małych przyrostków ΔP $=$ MPP′M′ może być także uważaną jako granica summy nieskończenie małych równoległoboków MPP′N lub KPP′M′ [**125**]. Mamy więc

$$ABDC=\text{gr}\sum_{x=x_0}^{x=X}y\Delta x.\text{wst}\,\theta=\text{wst}\,\theta.\text{gr}\sum_{x=x_0}^{x=X}y\,dx\,,$$

a w razie spółrzędnych prostokątnych :

$$\text{ABDC} = \text{gr} \sum_{x=x_0}^{x=\text{X}} y\,dx$$

Powiedzieliśmy że jeżeli krzywa przedstawia funkcję y zmiennej niezależnéj x, powierzchnia P jest funkcją tejże zmiennéj x :

$$\text{P} = \varphi(x)$$

otrzymaliśmy w razie spółrzędnych prostokątnych $\frac{d\text{P}}{dx} = y$, czyli $\varphi'(x) = y$.

Jeżeli krzywa jest ciągłą, powierzchnia P jest również funkcją ciągłą x : widzimy więc, że jak każdéj krzywéj ciągłéj AB odpowiada powierzchnia wyznaczona P, zawarta pomiędzy tą krzywą i osią odciętych, tak :

Każdej funkcji ciągłéj y *zmiennéj niezależnéj* x, *odpowiada pewna funkcja ciągła* φ(x), *któréj pochodna* φ'(x) *równa się funkcji danéj* y.

Mając daną funkcję y, a szukając funkcji $\varphi(x)$, znamy pochodnę $y = \varphi'(x)$, a szukamy *funkcji pierwotnéj* $\varphi(x)$: funkcja ta jest przedstawioną na zasadzie poprzedzającego przez powierzchnię zawartą pomiędzy krzywą przedstawiającą funkcję pochodną i rzędnę odpowiadającą odciętéj jakiéjkolwiek x.

420. Jeżeli krzywa jest odniesioną do spółrzędnych biegunowych i przedstawianą przez równanie [**54**]

$$f(\omega, \rho) = 0$$

powierzchnia zawarta pomiędzy dwoma promieniami AO, OB (fig. 104) i łukiem krzywéj AB jest jak powyżéj granicą powierzchni zawartéj pomiędzy OA, OB i linją łamaną wpisaną lub opisaną na AB składającą się z cięciw lub stycznych nieskończenie małych : w rzeczy saméj, uważając OB i OA za osie spółrzędnych prostolinijnych, powierzchnia AOB jest powierzchnią uważaną poprzednio [**418**], zawartą pomiędzy OB, rzędną OA i krzywą AB.

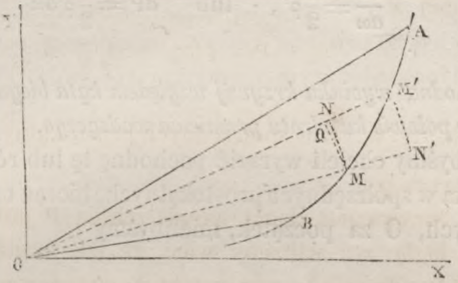


fig. 104.

Niech będzie powierzchnia BOM $= P$ zawarta pomiędzy łukiem krzywéj BM, pewnym promieniem wodzącym OB i promieniem jakimkolwiek OM $= \rho$, tworzącym z osią biegunową kąt MOX $= \omega$. Dając kątowi ω przyrostek $\Delta\omega =$ MOM$'$, przyrostkiem powierzchni P, będzie $\Delta P =$ MOM$'$. Prowadząc łuki kół MN, M$'$N$'$ ze środka O, mamy

$$\text{wycinek MON} < \text{wyc MOM}' < \text{wyc N}'\text{OM}';$$

lecz gdy M zbliża się nieograniczenie do do M$'$

$$\text{gr}\,\frac{\text{wyc MON}}{\text{wyc N}'\text{OM}'} = 1$$

a więc tém bardziéj granica stosunków wycinka krzywéj MOM$'$ do wycinków kół MON, N$'$OM$'$ jest jednością : trzy te wycinki są więc nieskończenie małemi, które podstawione jedne za drugie nie wpłyną na granice stosunków lub summ nieskończenie małych [125]; mamy więc

$$\mathrm{gr}\,\frac{\Delta P}{\Delta\omega} = \mathrm{gr}\,\frac{\mathrm{wyc\,MON}}{\Delta\omega} = \mathrm{gr}\,\frac{\frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega}{\Delta\omega}.$$

czyli

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{1}{2}\rho^2, \quad \text{lub} \quad dP = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega$$

Pochodna wycinka krzywéj względem kąta biegunowego, równa się połowie kwadratu promienia wodzącego.

Gdybyśmy chcieli wyrazić pochodnę tę lub różniczkę dP wycinka w spółrzędnych prostokątnych, biorąc oś OX za oś odciętych, O za początek, mielibyśmy

$$\mathrm{st}\,\omega = \frac{y}{x}, \qquad \omega = \text{łuk}\,\mathrm{st}\,\frac{y}{x}$$

a więc

$$d\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

a ponieważ $x^2 + y^2 = \rho^2$,

$$\rho^2 d\omega = xdy - ydx$$

a zatém

$$dP = \frac{xdy - ydx}{2}$$

Różniczka ta będzie odjemną gdy $xdy < ydx$, czyli gdy $\frac{dy}{dx} < \frac{y}{x}$, lub $\frac{dy}{dx} < \mathrm{st}\omega$. Poprowadziwszy w punkcie O równoległę do stycznéj w punkcie M, styczną kąta téj równoległéj z osią będzie $\frac{dy}{dx}$ i jeżeli równoległa o któréj mowa, tworzy kąt z osią mniejszy od kąta ω, to gdy x się zwiększa, ω się zmniejsza, a zatem i P się zmniejsza dla zwiększającego się x : dP jest wtedy odjemném jak być powinno.

421. Różniczka łuku krzywéj na płasczyznie. Niech będzie krzywa LL′ na płasczyznie : podzielmy tę krzywę na części AB, BB′, ... ciągle wklęsłe, lub ciągle wypukłe i nieprzedstawiające punktów nadzwyczajnych, co jest zawsze możebném. Weźmy pod uwagę jednę z tych części AB, którą przypuścimy naprzykład wypukłą.

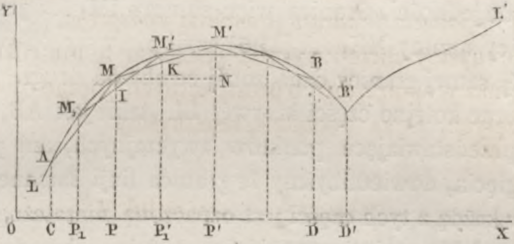


Fig. 105.

Dzieląc łuk AB w punktach M, M′,... na nieskończenie wielką liczbę nieskończenie małych części, i prowadząc cięciwy MM′... wpiszemy w łuk AB linję łamanę. Długość téj linji łamanéj się zwiększa, gdy punkta M, M′, ... zbliżają się nieograniczenie : bo linja jest wypukłą, a wiemy z geometrji, że *w razie dwóch linji łamanych wypukłych mających punkta ostateczne wspólne, linja obejmująca jest większą od objętéj*. Dla téj saméj przyczyny, linja łamana wpisana, jakkolwiek jéj długość ciągle się zwiększa, nie może stać się większą od jakiéjkolwiek linji oznaczonéj opisanéj na krzywéj : długość więc linji wpisanéj o coraz zwiększającéj się liczbie części, zdąża do granicy oznaczonéj [**89**]. Powiadam, że granica ta jest zawsze tą samą według jakiegokolwiek prawa wpisywać będziemy linję łamaną w ten sam łuk AB : jakoż niech będzie inna linja wpisana, o coraz zwiększającéj się liczbie części nieskończenie małych, takich jak M_1 M'_1... Poprowadźmy rzędne krzywéj tak przez punkta M, M'... jak i przez punkta M_1, M'_1,... Każden z obwodów dwóch linij łamanych składać się będzie z równéj liczby części nieskończenie małych takich jak MK, IM'_1, ... zawartych między temi samemi rzędnemi. Gdy punkta M i M', M_1 i M'_1 a więc i M, M'_1 zbliżają się do siebie, kierunki IM', MK, zbliżają się do kierunku wspólnego stycznej w punkcie w którym M, M'_1 schodzą się ze sobą : a że długości te IM'_1, MK są zawsze zawarte między rzędnemi równoległemi MP, M'_1 P'_1, więc ich stosunek zdąża w granicy do jedności. Granica więc summy IM'_1... jest równą granicy summy MK, ... [**125**] czyli pierwszy obwód zdąża do téj samej granicy oznaczonéj co obwód drugi.

Biorąc kolejno części krzywéj LL' takie jak AB, BB',... nie przedstawiające punktów zwyczajnych, ani punktów przegięcia, dowiedlibyśmy że granica linji łamanej wpisanej w każdą z tych części jest oznaczoną, niezależną od sposobu w jakie wpisujemy tę linję : dodając obwody linij łamanych wpisane w pojedyncze łuki, otrzymamy obwód, wpisany w całą linję LK między jéj punktami ostatecznemi L i L'; obwód ten będzie zdążał do granicy jedynéj, oznaczonej. Granicę tę nazywać będziemy *długością linji krzywéj* LL'.

Długość linij krzywéj może być uważana nietylko jako granica summy cięciw, lecz także jako granica summy innych linij nieskończenie małych, nawet nie koniecznie tworzących linję nieprzerwaną, lecz mających z cięciwami różnice nieskończenie małe wyższego rzędu, lub stosunki odpowiednie równe w granicy jedności [**125**]. Zobaczymy zaraz przykład i zastosowanie tego ostatniego sposobu uważania.

422. Twierdzenie. *Różnica pomiędzy łukiem nieskończenie* *małym a jego cięciwą, jest nieskończenie małą trzeciego rzędu.*

W rzeczy saméj, łuk jest granicą linji łamanéj wpisanéj, czyli summy cięciw nieskończenie małych. Jeżeli łuk jest nieskończenie małym, każda z cięciw wpisanych tworzy z całą cięciwą łuku kąt nieskończenie mały: bo kąt ten zdąża do zera, gdy cały łuk zdąża do zera, a cięciwa jego do stycznéj. Łuk nieskończenie mały, możemy zawsze przypuścić wypukłym względem swéj cięciwy: cięciwa ta jest summą rzutów na swój kierunek cięciw nieskończenie małych wpisanych w łuk. Nazwawszy jedną z tych cięciw a, kąt nieskończenie mały jaki tworzy z cięciwą całego łuku α, rzutem jéj na cięciwę całego łuku będzie $a \operatorname{dos} \alpha$; różnicą cięciwy nieskończenie małéj wpisanéj i jéj rzutu, będzie

$$a(1 - \operatorname{dos} \alpha) \qquad \text{czyli} \qquad 2a \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} \alpha$$

różnica ta jest więc nieskończenie małą trzeciego rzędu względem a i α, które są nieskończenie małemi jednakowego rzędu [**134**]. Różnica więc summy cięciw wpisanych i summy rzutów, czyli cięciwy całego łuku, jest więc także nieskończenie małą trzeciego rzędu: bo oznaczywszy summę tych cięciw przez s, największy z kątów α przez α_1, najmniejszy przez α_0, różnica ta będzie mniejszą od $2s \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} \alpha_1$ a większą od $2s \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} \alpha_0$ dwóch nieskończenie małych trzeciego rzędu, a to dla jakiéjkolwiek liczby cięciw wpisanych. Różnica więc całego łuku nieskończenie małego i jego cięciwy jest nieskończenie małą trzeciego rzędu c. b. d. d.

423. Przypuśćmy teraz, że krzywa jest odniesioną do osi tworzących ze sobą kąt θ. Długość łuku AM (fig. 105) zawarta pomiędzy pewnym punktem A a jakimkolwiek punktem M krzywéj, jest funkcją spółrzędnych x, y tego punktu, czyli funkcją zmiennéj niezależnéj x, przez którą y jest wyrażoném za pomocą równania krzywéj. Oznaczywszy długość AM przez l mamy więc

$$l = \varphi(x)$$

zamierzamy sobie znaleźć różniczkę dl.

Nadajmy łukowi AM przyrostek nieskończenie mały $\Delta l = \text{MM}'$; poprowadziwszy równoległę MN do osi odciętych, mamy w trójkącie MM'N :

$$\text{MM}'^2 = \text{MN}^2 + \text{M}'\text{N}^2 + 2\text{MN} \times \text{M}'\text{N} \cos\theta$$

a oznaczywszy cięciwę MM' przez c:

$$c^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x \Delta y \cos\theta;$$

dzieląc przez Δx^2 i wyciągając pierwiastek

$$\frac{c}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\theta}$$

Jeżeli Δl, a więc i c jest tego samego znaku co Δx t. j. jeżeli łuk się zwiększa gdy zwiększamy x, bierzemy pierwiastek ze znakiem dodatnym; w razie przeciwnym ze znakiem odjemnym. Przechodząc do granicy i podstawiając za c nieskończenie małą Δl różną od c o nieskończenie małą trzeciego rzędu, granica $\frac{c}{\Delta x}$ się nie zmieni [**125**] i mamy

$$\text{gr}\frac{\Delta l}{\Delta x} = \text{gr} \pm \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + 2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\theta}$$

czyli

$$\frac{dl}{dx}=\pm\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\cos\theta}$$

wyrażenie pochodnéj łuku względem odciętej, lub po prostu stosunku różniczki łuku do różniczki odciętéj, jakąkolwiek będzie zmienna niezależna [**151**]. Jeżeli osie spółrzędnych tworzą ze sobą kąt prosty, mamy

$$\frac{dl}{dx}=\pm\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{lub} \quad dl=\pm\sqrt{dx^2+dy^2}$$

kwadrat różniczki łuku równa się summie kwadratów różniczek rzędnéj i odciętéj.

Znak pierwiastku wyrażającego różniczkę łuku, ma być więcéj lub mniéj, stosownie do tego czy łuk się zwiększa lub zmniejsza, gdy zwiększamy zmiennę niezależną, to jest stosownie do położenia względem punktu A na krzywéj, od którego liczymy długość łuku.

424. Jeżeli krzywa jest odniesioną do spółrzędnych biegunowych ρ i ω (fig. 104), niech będzie łuk BM $= l$,

łuk $MM'=\Delta l$, $OM=\rho$, $MOX=\omega$, $MOM'=\Delta\omega$, $NM'=\Delta\rho$:

Poprowadziwszy MQ prostopadłą do OM', mamy

$$\text{cięciwa } MM'^2=MQ^2+QM'^2$$

a więc

$$\frac{MM'^2}{MQ^2}=1+\frac{QM'^2}{MQ^2}$$

przechodząc do granicy i podstawiając za cięciwę MM' łuk Δl, za MQ łuk koła $MN = \rho\Delta\omega$, za

$$QM' = \rho + \Delta\rho - \rho \operatorname{dos} \Delta\omega = 2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} \Delta\omega + \Delta\rho$$

nieskończenie małą $\Delta\rho$ różną od QM' o nieskończenie małą drugiego rzędu $2\operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} \Delta\omega$, równość granic się nie zmieni [**125**] i otrzymamy

$$\operatorname{gr} \frac{\Delta l^2}{\rho^2 \Delta\omega^2} = 1 + \operatorname{gr} \frac{\Delta\rho^2}{\rho^2\Delta\omega^2}$$

czyli

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

a więc

$$dl = \pm \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}$$

wyrażenie różniczki łuku w spółrzędnych biegunowych. Pierwiastek ma być wziętym ze znakiem + jeżeli łuk się zwiększa, gdy zwiększamy zmienną niezależną; w przeciwnym razie ze znakiem odjemnym.

Wyrażenie to możnaby było otrzymać wprost z wyrażenia $dl = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2}$, za pomocą wzorów

$$x = \rho \operatorname{dos} \omega, \qquad y = \rho \operatorname{wst} \omega$$

na zmianę spółrzędnych [**60**]. Jakoż

$$dx = d\rho \operatorname{dos} \omega - \rho d\omega \operatorname{wst} \omega$$
$$dy = d\rho \operatorname{wst} \omega + \rho d\omega \operatorname{dos} \omega$$

podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

jak być powinno.

425. Wyrażenie kąta stycznéj z osią odciętych. Niech będzie krzywa

$$f(x, y) = 0$$

odniesiona do osi prostokątnych i punkt M na krzywéj. Wyrażenie różniczki łuku w punkcie M

$$dł = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

jest, jakeśmy powiedzieli, niezależném od wyboru zmiennéj niezależnéj i ma być braném ze znakiem + lub — stosownie do tego, czy łuk się zwiększa lub zmniejsza gdy zwiększamy zmienną niezależną, to jest, czy punkt od którego liczymy długości łuków znajduje się na krzywéj po jednéj lub drugiéj stronie punktu M. Poprowadźmy w punkcie M styczną do krzywéj i nazwijmy α kąt téj stycznéj z osią odciętych. Kąt ten ma być liczonym w następujący sposób:

Przedstawmy sobie osie spółrzędnych przeniesione równolegle do punktu styczności jako początku i prostą ruchomą, która wychodząc z położenia odciętych dodatnych i obracając się koło punktu styczności w kierunku rzędnych dodatnych zbliżać się będzie do kierunku stycznéj: prosta ta zakreśli kąt α, który może mieć wszelką wartość pomiędzy zerem a 2π. Wiemy że [**141**]

$$\operatorname{st}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

a ponieważ

$$\operatorname{wst}\alpha = \frac{\operatorname{st}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{st}^2\alpha}}, \quad \operatorname{dos}\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{st}^2\alpha}}$$

więc

$$\text{wst}\,\alpha = \frac{dy}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{dł}$$

$$\text{dos}\,\alpha = \frac{dx}{\pm\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx}{dł}.$$

Jeżeli będziemy uważać styczną jako podzieloną w punkcie styczności na dwie części w przedłużeniu jedna drugiéj, kąt α określony w powyższy sposób będzie miał dla jednéj i drugiéj z tych części czyli kierunków stycznéj, dwie wartości różniące się o dwa kąty proste: wstawy i dostawy tych dwóch wartości są równe lecz znaków przeciwnych. We wzorach więc powyższych znak pierwiastku czyli znak $dł$ możemy przyjąć dodatnym lub odjemnym, stosownie do tego czy uważać będziemy styczną rozciągającą się w jednym lub drugim kieruku począwszy od punktu styczności.

Krzywość linji na płaszczyznie.

426. Określenie. *Krzywością zupełną* łuku ograniczonego krzywéj nie przedstawiającego punktów przegięcia, ani punktów nadzwyczajnych, nazywamy kąt utworzony przez styczne w punktach ostatecznych tego łuku poprowadzone.

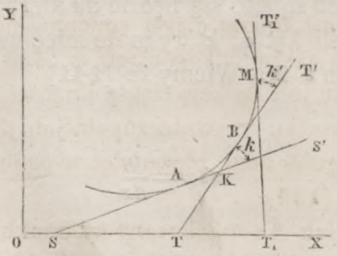


fig. 106.

Niech będzie łuk AB (fig. 106): kąt k=BKS' utworzony przez styczne AS, BT jest krzywością zupełną łuku AB, w przypuszczeniu, że między punktami A i B nie ma ani punktu przegięcia, ani innego punktu nadzwyczajnego.

Kąt ten k ma być liczonym jako zakreślony przez styczną ruchomą, która wychodząc z położenia SS′ odpowiadającego punktowi A, przechodzi do położenia BT nie przestając być styczną do krzywéj pomiędzy punktami A i B. Naprzykład, dla całego łuku zamkniętego krzywéj zamkniętéj nie przedstawiającéj punktów nadzwyczajnych, krzywość zupełna będzie równa czterem kątom prostym, a nie dwóm, lub zeru.

Krzywością średnią łuku, nazywamy stosunek krzywości zupełnéj do długości łuku.

Krzywością linji w danym punkcie, nazywamy granicę krzywości średniéj łuku nieskończenie małego liczonego od tego punktu: to jest granicę stosunku krzywości zupełnéj tego łuku nieskończenie małego, zaczynającego się w tym punkcie do jego długości.

Granica ta jest w ogólności skończoną oznaczoną, bo kąt k, który mierzy krzywość zupełną łuku nieskończenie małego, jest nieskończenie małą tego samego rzędu co cięciwa łuku, [**134**] a zatém co długość łuku [**422**]. Nadto jeżeli łuk nie przedstawia punktów nadzwyczajnych, kąt ten k równy różnicy kątów KTX, KSX, jakie styczne tworzą z osią OX jest funkcją ciągłą zmiennéj niezależnéj x; długość łuku jest także funkcją ciągłą x [**423**]; więc krzywość zupełna łuku jest funkcją ciągłą długości tego łuku.

Stosunek przyrostku krzywości zupełnéj do przyrostku odpowiednego długości łuku, zdąża więc w ogólności do granicy oznaczonéj [**132**].

Niech będzie łuk $\mathrm{AB} = t$ liczony od punktu A, którego krzywością zupełną jest kąt $\mathrm{BKS'} = k$. Nadając łukowi AB przyrostek nieskończenie mały $\mathrm{BM} = \Delta\mathrm{T}$, krzywość zupełna otrzyma przyrostek $k' = \Delta k$. Jakeśmy powiedzieli, k jest funkcją ciągłą l: pochodna téj funkcji czyli

$$\mathrm{gr}\,\frac{\Delta k}{\Delta l}=\frac{dk}{dl}$$

jest krzywością linji w punkcie B.

Różniczkę dk krzywości zupełnéj, nazywać będziemy *kątem styczności* krzywéj w punkcie B. Wielkość ta jest nieskończenie małą, która różni się od kąta nieskończenie małego Δk dwóch stycznych w punktach nieskończenie zbliżonych B i M, czyli od krzywości zupełnéj łuku nieskończenie małego Δl o ilość nieskończenie małą względem niéj saméj [**140**].

Krzywość linji w pukcie danym jest stosunkiem kąta styczności do różniczki łuku, jakąkolwiek weźmiemy zmienną niezależną [**151**].

427. Koło krzywości. W kole, kąt pomiędzy stycznemi, czyli krzywość zupełna łuku, równa się kątowi między promieniami do punktów styczności poprowadzonemi; długość łuku odpowiedniego równa się iloczynowi

Fig. 107.

z tego kąta przez promień (łuki i kąty liczymy zawsze w sposób określony na wstępie [**11**]). Stosunek więc krzywości zupełnéj do długości łuku w kole jest zawsze stałym i równym odwróconemi promieniowi: krzywość średnia jakiegokolwiek łuku okręgu koła jest stałą.

Nazwawszy promień koła R, krzywość zupełną łuku AB oznaczywszy przez k, mamy:

$$\text{łuk AB} = k\text{R}, \qquad \frac{k}{\text{łuk AB}} = \frac{1}{\text{R}}$$

a to jakikolwiek będzie łuk AB. W granicy więc, krzywość koła w każdym punkcie jest stałą i równą $\frac{1}{\text{R}}$, odwróconemu promieniowi.

Okrąg koła mając wszędzie krzywość stałą, został przyjętym za miarę krzywości linji na płasczyznie.

Koło, którego okrąg ma krzywość równą krzywości linji danéj w pewnym jéj punkcie, nazwane zostało *kołem krzywości* linji w tym punkcie. Promień tego koła nazywa się *promieniem krzywości* linji w punkcie danym.

Promień krzywości R krzywéj danéj przez równanie

$$f(x, y) = 0$$

w pewnym jéj punkcie x, y określonym jest więc przez równanie

$$\frac{dk}{dl} = \frac{1}{\text{R}}, \quad \text{czyli} \quad \text{R} = \frac{dl}{dk}$$

gdzie dl jest zóżniczką łuku, dk kątem styczności krzywéj w punkcie x, y.

Promień krzywości równa się stosunkowi różniczki łuku do kąta styczności.

Krzywość linji w punkcie danym, jest równa odwróceniu promienia krzywości w tym punkcie.

428. Wyrażenie promienia krzywości. Aby znaleźć wyrażenie promienia krzywości w funkcji spółrzędnych x, y, należy wyrazić kąt styczności dk w funkcji tych spółrzędnych. Przypuśćmy, że krzywa jest odniesioną do spółrzędnych prostokątnych (fig. 106 str. 814) i że liczymy długość łuku od punktu stałego A, do punktu jakiegokolwiek B; nazwijmy α_0, α_1 kąty jakie styczne AS, BT tworzą z osią odciętych; kąty te liczone będą w zwykły sposób od strony odciętych dodatnych ku rzędnym dodatnym. Mamy zawsze

$$\pm k = \alpha - \alpha_0$$

piszemy znak podwójny, bo kąt pomiędzy stycznemi k określony powyżéj [**426**] chcemy uważać zawsze jako dodatny; znak odjemny odnosi się do przypadku w którym $\alpha_0 > \alpha$. Różniczkując związek powyższy, otrzymamy

$$\pm dk = d\alpha$$

α_0 jest stałą jako kąt stycznéj AS w punkcie stałym A, od którego liczymy długość łuku.

Mamy nadto [**141**]:

$$\operatorname{st} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

a różniczkując, i pozostawiając zmiennę niezależną nieokreśloną, to jest uważając $\frac{dy}{dx}$ jako iloraz dwóch różniczek dy i dx, otrzymamy [**229**]

$$\frac{d\alpha}{\operatorname{dos}^2 \alpha} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2}$$

a więc, zważywszy że $d\alpha = \pm dk$, zaś

$$\operatorname{dos}^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{st}^2 \alpha} = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}$$

wyrażenie kąta styczności będzie:

(1) $$\pm dk = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2 + dy^2}$$

Podstawiając tę wartość i wartość różniczki łuku [423]

(2) $$\pm dł = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

w wyrażenie określające promień krzywości [427]

(3) $$\mathrm{R} = \frac{dł}{dk},$$

otrzymamy

(4) $$\mathrm{R} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

Jeżeli łuk się zwiększa, krzywość jego zupełna także się zwiększa i przeciwnie: różniczki $dł$ i dk są więc zawsze jednakowego znaku, a więc na zasadzie (3) promień krzywości jest zawsze dodatnym. Wyrażenie

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}$$

ma być brane z tym samym znakiem co mianownik $dxd^2y - dy\,d^2x$, aby wyrażenie (4) było zawsze dodatném.

W wyrażeniu (4) zmienna niezależna jest jakąkolwiek: bo tak w wyrażeniu (1) jak w (2) i (3) z których powstało (4), pozostawiliśmy zmienną niezależną nieokreśloną. W szczególnym przypadku, jeżeli przyjmiemy x za zmienną niezależną, wyrażenie (1) kąta styczności stanie się

(5) $$\pm dk = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy}{dx^2}}\,dx$$

a wyrażenie (4) promienia krzywości

$$(6) \qquad R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gdzie licznik ma być brany z takim znakiem, jakiego jest druga pochodna $\frac{d^2y}{dx^2}$.

429. Twierdzenie. *Okrąg koła jest jedyną krzywą na płaszczyznie, któréj krzywość jest stałą, to jest tą samą w każdym punkcie.*

W rzeczy saméj, oznaczywszy stałą przez C, mamy dla takiéj krzywéj

$$\frac{dł}{dk} = C \quad \text{lub} \quad \frac{dł}{d\alpha} = C \quad \text{czyli} \quad dł = C d\alpha$$

oznaczywszy przez α kąt stycznéj z osią odciętych [ʍʍ1]

Lecz [**425**]

$$dx = dł \operatorname{dos} \alpha\,, \qquad dy = dł \operatorname{wst} \alpha$$

a zatém

$$dx = C \operatorname{dos} \alpha d\alpha\,, \qquad dy = C \operatorname{wst} \alpha d\alpha$$

lub

$$dx = d\,(C \operatorname{wst} \alpha)\,, \qquad dy = -\,d\,(C \operatorname{dos} \alpha)$$

a że gdy różniczki są równe, funkcje mogą się różnić tylko o ilość stałą [**149**] więc oznaczając przez x_0, y_0 dwie stałe jakiekolwiek :

$$x - x_0 = C \operatorname{wst} \alpha\,, \qquad y - y_0 = -\,C \operatorname{dos} \alpha$$

a podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=C^2$$

równanie koła.

430. Inne wyrażenia promienia krzywości. Wyrażenie (4) promienia krzywości przypuszcza zmienną niezależną jakąkolwiek; weźmy łuk t za zmienną niezależną, a więc uważajmy różniczkę dt jako stałą [**139**]. Różniczkując równanie

$$dx^2+dy^2=dt^2$$

w tém przypuszczeniu, otrzymamy

$$dxd^2x+dyd^2y=0$$

a podnosząc do kwadratu otrzymamy wartość

$$2dxdyd^2xd^2y=-dx^2(d^2x)^2-dy^2(d^2y)^2$$

Podstawiając tę wartość w odwróceniu wyrażenia (4) podniesionego do kwadratu, otrzymamy

$$\frac{1}{R^2}=\frac{(dxd^2y-dyd^2x)^2}{(dx^2+dy^2)^3}$$
$$=\frac{(dx^2)(d^2y)^2+dy^2(d^2x)^2+dx^2(d^2x)^2+dy^2(d^2y)^2}{(dx^2+dy^2)^3}$$

czyli

(7) $$\frac{1}{R^2}=\frac{(d^2y)^2+(d^2x)^2}{(dx^2+dy^2)^2}$$

a że $(dx^2+dy^2)^2=dt^2$, więc

(8) $$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2$$

wyrażenie promienia krzywości w którém łuk jest wziętym za zmienną niezależną.

Weźmy od punktu M na krzywéj, odległości równe nieskończenie małe na stycznéj i na krzywéj (fig. 108)

$$\mathrm{MT} = \text{łuk } \mathrm{MM'} = \lambda$$

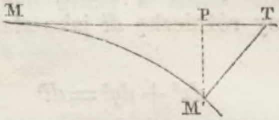


fig. 108.

Jeżeli spółrzędnemi punktu M są x i y, uważając spółrzędne te jako fukcje zmiennéj niezależnéj t, to jest łuku, $x = \varphi\,(t)$, $y = \psi\,(t)$, gdy łuk zwiększy się o λ, nazwijmy Δx przyrostek x, Δy przyrostek y i rozwińmy podług wzoru Taylor'a:

$$x + \Delta x = \varphi\,(t + \lambda) = x + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\lambda^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right)$$

$$y + \Delta y = \psi\,(t + \lambda) = y + \lambda \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\lambda^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon'\right)$$

$x + \Delta x$, $y + \Delta y$ są spółrzędnemi punktu M'; ε, ε' zdążają do zera wraz z λ [255]. Spółrzędnemi punktu T na stycznéj, będą rzuty na osie długości MT, która tworzy z osiami prostokątnemi kąty α i $\frac{\pi}{2} - \alpha$, zwiększone spółrzędnemi punktu M, to jest:

$$x + \lambda \operatorname{dos} \alpha \quad \text{i} \quad y + \lambda \operatorname{wst} \alpha$$

a że $\operatorname{dos} \alpha = \dfrac{dx}{dt}$, $\operatorname{wst} \alpha = \dfrac{dy}{dt}$ [425], więc spółrzędne punktu T będą:

$$x+\lambda\frac{dx}{dt}, \qquad y+\lambda\frac{dy}{dt};$$

a więc odległość punktów T i M′ jako przeciwprostokątna trójkąta, którego pozostałemi bokami są różnice spółrzędnych punktów T i M′, będzie daną przez równanie:

$$M'T^2=\frac{1}{4}\lambda^2\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\varepsilon'\right)^2\right]$$

a dzieląc obie strony przez $\frac{1}{4}\lambda^2$ i przechodząc do granicy

$$\text{gr}\,\frac{4M'T^2}{\lambda^4}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2$$

gdy λ zdąża do zera: dowiedliśmy już poprzednio [**137**], że M′T jest w ogólności nieskończenie małą drugiego rzędu, jeżeli λ jest pierwszego rzędu, stosunek zatém $M'T^2$ i λ^4 jako nieskończenie małych jednego (czwartego) rzędu jest w granicy skończonym [**119**].

Podstawiwszy w ostatnie równanie wyrażenie (8), otrzymamy

(9) $$\frac{1}{R}=\text{gr}\,\frac{2M'T}{\lambda^2} \quad \text{lub} \quad R=\text{gr}\,\frac{\lambda^2}{2M'T}$$

Odwrócenie promienia krzywości, czyli krzywość linji [**427**] *w punkcie danym, jest granicą stosunku linji łączącej końce długości równych nieskończenie małych wziętych od tego punktu na stycznéj i na krzywéj, do połowy kwadratu każdéj z tych długości.*

431. Uważajmy krzywę odniesioną do osi prostokątnych, mających początek w punkcie styczności, oś odciętych skierowaną w kierunku stycznéj, oś rzędnych w kierunku normalnéj. Wyrażenie (7) promienia krzywości, stanie się wtedy

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

zważywszy, że dla punktu styczności z założenia $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$. Nazwawszy Δy rzędną odpowiadającą odciętéj Δx, mamy [**258**]

$$\Delta y = \frac{\Delta x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\varepsilon\right)$$

gdzie ε zdąża do zera wraz z Δx; a zatém

$$\frac{2\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}+\varepsilon$$

a w granicy

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{gr}\,\frac{2\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}$$

Rzędna Δy przedstawia tu odległość M′P od stycznéj punktu M′ na krzywéj nieskończenie blizkiego punktu styczności M; Δx jest odległością na stycznéj MP różną od łuku $\mathrm{MM}' = \Delta l$ o nieskończenie małą względem niéj saméj, jako równą połowie cięciwy łuku podwójnego $2\Delta l$; możemy więc także napisać

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = \mathrm{gr}\,\frac{2\Delta y}{\Delta l^2}$$

Odwrócenie promienia krzywości czyli krzywość linji w danym punkcie, jest granicą stosunku podwójnéj odległości od stycznéj punktu na krzywéj nieskończenie blizkiego punktu styczności, *do kwadratu z łuku nieskończenie małego zawartego między temi punktami, lub z cięciwy tego łuku, lub jeszcze z części stycznéj zawartéj pomiędzy punktem styczności, a spodkiem odległości uważanéj.*

432. Jeżeli krzywa jest odniesioną do osi spółrzędnych tworzących ze sobą kąt θ, wyrażenie promienia krzywości otrzymaném być może z wyrażenia (4) [**428**] za pomocą zmiany spółrzędnych.

Przypuszczając, że osie pochyłe mają z osiami prostokątnemi początek i oś odciętych wspólną, wzory na zamianę spółrzędnych [**58**] staje się

$$x = x' + y' \operatorname{dos} \theta, \qquad y = y' \operatorname{wst} \theta$$

oznaczając przez x' y' spółrzędne pochyłe; a więc

$$dx = dx' + dy' \operatorname{dos} \theta, \qquad dy = dy' \operatorname{wst} \theta$$
$$d^2x = d^2x' + d^2y' \operatorname{dos} \theta, \qquad d^2y = d^2y' \operatorname{wst} \theta$$

a podstawiając w (4), otrzymamy

$$(12) \qquad \mathrm{R} = \frac{[(dx'd^2y' - dy'd^2x') \operatorname{wst} \theta]^{\frac{3}{2}}}{(dx'^2 + dy'^2 + 2dx'dy' \operatorname{dos} \theta)^2}$$

433. Dla krzywéj odniesionéj do spółrzędnych biegunowych, zamiana spółrzęnych [**60**]

$$x = \rho \operatorname{dos} \omega, \qquad y = \rho \operatorname{wst} \omega$$

zastosowana do wyrażenia (6), da nam [**233**]

$$(13) \qquad \mathrm{R} = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\rho d^2\rho d\omega + 2d\rho^2 d\omega + \rho^2 d\omega^2}$$

lub

$$(14)\qquad R=\frac{\left(\frac{d\rho^2}{d\omega^2}+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}+2\frac{d\rho^2}{d\omega^2}+\rho^2}$$

Często dogodném jest podstawienie zamiast zmiennéj ρ odwrócenia téj zmiennéj $\frac{1}{\rho}$. Mamy wtedy

$$\rho=\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho}\right)},\quad d\rho=-\frac{d\frac{1}{\rho}}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2},\quad d^2\rho=-\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{2\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2}{\left(\frac{1}{\rho}\right)^3}$$

a wzór (14) staje się

$$(15)\qquad R=\frac{\left[\frac{1}{\rho^2}+\left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega}\right]}$$

434. Jeżeli krzywa odniesiona do spółrzędnych prostokątnych daną jest przez równanie

$$f(x,y)=0$$

potrzebném jest w wyrażeniu promienia krzywości zastąpienie różniczek x i y przez pochodne częściowe funkcji f względem x i y. Mamy wtedy [201].

$$(A)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

$$(B)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0$$

a ztąd

$$(C)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right]$$

Z równania (A) otrzymujemy

$$\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{-dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

mnożąc licznik i mianownik pierwszego ułamku przez d^2x drugiego ułamku przez d^2y i biorąc stosunek summy liczników do summy mianowników, stosunek ten będzie równym każdemu z ułamków danych, równy jeszcze stosunkowi pierwiastku summy kwadratów liczników do pierwiastku summy kwadratów mianowników (na zasadzie znanych własności stosunków równych); mamy więc

$$\text{(D)} \quad \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{-dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{\frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y} = \frac{+(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Lecz z równania (4) [428]

$$dxd^2y - dyd^2x = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{R}}$$

podstawiając tę wartość i wartość (C), otrzymamy

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{1}{\mathrm{R}}\,\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2}$$

podstawiając jeszcze w tém ostatniem wyrażeniu za $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$, dx i dy wartości proporcjonalne z (D),

otrzymamy

$$(16) \qquad R=\frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 f}{dxdy}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

Nie piszemy znaku $\pm$, bo przypuszczamy, że pierwiastek w liczniku jest wzięty z takim samym znakiem jakiego jest mianownik, aby R było zawsze dodatném [**428**].

Wyrażenie to pokazuje nam, że w punktach nadzwyczajnych dla których $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$ promień krzywości przedstawia się pod postacią nieoznaczoną.

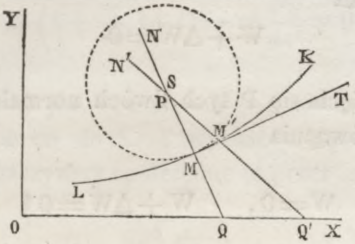
W punktach przegięcia, z wyrażenia (6) [**428**]

$$R=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

w którem $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ [**383**], a $\frac{dy}{dx}$ jest w ogóle różnem od zera widzimy, że promień krzywości jest nieskończenie wielkim, krzywość więc jest zerem [**427**].

435. Uwaga. Wyrażenie (6) [**428**] promienia krzywości porównane z wyrażeniem promienia koła ściśle stycznego [**390**] pokazuje nam że: *koło ściśle styczne w danym punkcie krzywéj jest zarazem kołem krzywości do krzywéj w tym punkcie.*

436. Srodek krzywości. Niech będzie krzywa LK: w punkcie M téj krzywéj, wyprowadźmy normalną QN prostopadłą do stycznéj MT. Weźmy na téj normalnéj odległość MS równą promieniowi krzywości, w stronę po krórej znajduje się krzywa LK względem stycznéj MT w blizkości punktu M; zakreślamy z punktu S pro-



fig, 109.

mieniem MS koło krzywości: punkt S nazywamy *środkiem krzywości* linji LK w punkcie M.

437. TWIERDZENIE. *Środek krzywości jest granicą do któréj zdąża punkt przecięcia się dwóch normalnych poprowadzonych w punktach nieskończenie blizkich krzywéj, gdy odległość tych dwóch punktów zdąża do zera.*

Niech będzie równanie normalnéj [**374**] NQ

$$(1) \qquad X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0$$

poprowadzonéj w punkcie M, którego spółrzędnemi są x, y, do krzywéj LK odniesionéj do spółrzędnych prostokątnych. Oznaczmy przez skrócenie równanie powyższe przez

$$W = 0$$

Równanie normalnéj N'Q' w punkcie M' którego spółrzędnemi są $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, otrzymać można z równania (1) zastępując w niém x przez $x+\Delta x$, y przez $y+\Delta y$, $\frac{dy}{dx}$ przez $\frac{dy}{dx}+\Delta\frac{dy}{dx}$. Oznaczmy równanie tak otrzymane przez

$$W+\Delta W=0$$

Punkt przecięcia się P tych dwóch normalnych danym będzie przez równania

$$W=0, \quad W+\Delta W=0;$$

lub

$$W=0, \quad \Delta W=0$$

lub jeszcze przez równania

$$W=0, \quad \frac{\Delta W}{\Delta x}=0$$

W granicy gdy M′ zdąża do M, Punkt P zdążać będzie do punktu S danego przez równania

$$W=0, \quad \frac{dW}{dx}=0$$

bo W jest w ogólności funkcją ciągłą x, a zatém [**138**] $\frac{\Delta W}{\Delta x}$ zdąża w ogólności do granicy oznaczonéj $\frac{dW}{dx}$.

Równanie $\frac{dW}{dx}=0$ otrzymuje się z równania (1) nadając zmiennéj x przyrostek Δx, obliczając przyrostek ΔW i szukając granicy $\frac{\Delta W}{\Delta x}$: czyli po prostu biorąc pochodnę równania (1) względem x, uważając x, y, $\frac{dy}{dx}$, jako zmienne, X, Y, spółrzędne bieżące normalnéj, jako stałe, to jest niezależne od spółrzędnych punktu krzywéj czyli od x.

Równanie $\frac{dW}{dx}$ staje się więc

$$-\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)+(Y-y)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{2}$$

równanie $W=0$ jest równaniem (1); równanie to wraz z (2) rozwiązane co do X, Y wyznaczy nam spółrzędne punktu S. Oznaczywszy spółrzędne te przez x_1, y_1, otrzymamy

$$x_1-x=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\qquad y_1-y=\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{3}$$

Podnosząc do kwadratu równania (3), dodając i uważając, że summa kwadratów tak otrzymanych jest kwadratem odległości MS, mamy

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}=R^2 \tag{4}$$

a zatém MS jest promieniem krzywości.

Nadto, drugi wzór (3) pokazuje, że y_1-y jest tego samego znaku co $\frac{d^2y}{dx^2}$: lecz różnica pomiędzy rzędną stycznéj MT, a rzędną punktu krzywéj nieskończenie blizkiego punktu styczności, jest tego samego znaku co $\frac{d^2y}{dx^2}$ [**383**], byleby punkt M nie był punktem przegięcia; więc różnica ta jest tego samego znaku co y_1-y. A zatém punkt S którego rzędna jest y_1, znajduje się po jednéj stronie względem stycznéj z punktem krzywéj nieskończenie zbliżonym do punktu styczności; punkt więc S jest środkiem krzywości linji LK w punkcie M c. b. d. d.

438. Kierunek normalnéj. Za kierunek dodatny normalnéj *QN przyjmiemy kierunek od punktu M na krzywéj* ku środkowi krzywości S. Kierunek ten będzie wyznaczonym jeżeli będzie danym kąt jego z osią OX: kąt ten ξ liczonym będzie tak, jakby był zakreślonym przez prostą ruchomą, która wyszedłszy z kierunku równoległego do osi odciętych poprowadzonego od M w stronę odciętych dodatnych i obracając się koło M ku rzędnym dodatnym, zbliżać się będzie do kierunku wyżéj określonego normalnéj. Kąt ξ może się więc zmieniać od 0 do 2π.

Nazwaliśmy wyżéj [**425**] α kąt stycznéj MT z osią odciętych, liczony w podobny sposób jak kąt ξ dla normalnéj; otrzymaliśmy wzory

$$\text{wst}\,\alpha = \frac{dy}{dl}, \qquad \text{dos}\,\alpha = \frac{dx}{dl}$$

gdy x, y są spółrzędnemi punktu styczności, dl różniczką łuku. Znak dl jest dowolnym [**423**] od tego znaku zależy znak wstα i dosα; biorąc dl z jednym znakiem, łuk α należy uważać mniejszym od π, biorąc dl z drugim znakiem, kąt α będzie większym od π.

Dowolność tę usuniemy tu za pomocą umowy następującéj:

Kąt α stycznéj z osią odciętych liczony w powyżéj określony sposób [**425**] *będzie czynił zadosyć warunkowi*:

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Kąt ξ jest ściśle określonym przez kierunek normalnéj; kąt α, a więc i kierunek dodatny stycznéj, będzie również ściśle określonym przez wzór powyższy. Wzory

$$dx = dl\,\text{dos}\,\alpha, \qquad dy = dl\,\text{wst}\,\alpha$$

wymagają żeby $dł$ miało stosowny znak, a zatém żeby początek łuków był stosownie obranym.

Mamy jeszcze

$$\operatorname{dos} \xi = -\operatorname{wst} \alpha, \qquad \operatorname{wst} \xi = \operatorname{dos} \alpha$$

a zatém wzory (3) i (4) [437] dadzą nam

$$x_1 - x = -\mathrm{R} \operatorname{wst} \alpha, \qquad y_1 - y = \mathrm{R} \operatorname{dos} \alpha$$

zaś $d\alpha$ będzie [428]

$$d\alpha = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx,$$

a że

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dł}{d\alpha} \operatorname{dos} \alpha$$

więc

$$\mathrm{R} = \frac{dł}{d\alpha} \qquad \text{czyli} \qquad dł = \mathrm{R} d\alpha$$

$dł$ i $d\alpha$ są tego samego znaku, jeżeli R ma być zawsze dodatném, co się zgadza z poprzednio zrobioną umową [428]. Kąt $d\alpha$ jest równym kątowi styczności dk.

O rozwiniętych i rozwijających linij krzywych na płaszczyznie.

439. Miejsce geometryczne środków krzywości w różnych punktach linji danéj na płaszczyznie, nazywamy *rozwiniętą* téj linji.

Linja dana względem swéj rozwiniętéj nazywa się *rozwijającą*.

Spółrzędne prostokątne x_1, y_1, środka krzywości punktu jakiegokolwiek krzywéj danéj, którego spółrzędnemi są x i y, czynią zadosyć równaniom [**437**]

$$(1) \qquad x_1 - x = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad y_1 - y = \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

gdzie x jest zmienną niezależną. Jeżeli zmienną niezależną chcemy pozostawić jakąkolwiek, dość jest zastąpić $\frac{d^2y}{dx^2}$ przez $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ [**229**], przez co otrzymamy

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x &= -\frac{(dx^2+dy^2)dy}{dxd^2y - dyd^2x} \\ y_1 - y &= \frac{(dx^2+dy^2)dx}{dxd^2y - dyd^2x} \end{aligned} \right.$$

440. Oznaczając promień krzywości przez R, kąt stycznéj z osią odciętych liczony w wiadomy sposób, przez α, otrzymamy [**438**]

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x - \mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\alpha \\ y_1 &= y - \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\alpha \end{aligned} \right.$$

zmienna niezależna jest tu jakąkolwiek. Różniczkując, będzie

$$dx_1 = dx - \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\alpha d\alpha - d\mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\alpha$$
$$dy_1 = dy - \mathrm{R}\,\mathrm{wst}\alpha d\alpha + d\mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\alpha$$

a zważywszy [**425**] że

$$dx = dł\,\mathrm{dos}\,\alpha\,, \qquad dy = dł\,\mathrm{wst}\,\alpha\,, \qquad dł = \mathrm{R}d\alpha$$

będziemy mieli

$$dx - R \operatorname{dos} \alpha d\alpha = 0, \qquad dy - R \operatorname{wst} \alpha d\alpha = 0$$

będziemy mielia

$$(4) \qquad \begin{cases} dx_1 = -dR \operatorname{wst} \alpha \\ dy_1 = dR \operatorname{dos} \alpha \end{cases}$$

Dzieląc, otrzymamy

$$(5) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{dot}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{st}\alpha} \quad \text{czyli} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

a biorąc summę kwadratów

$$(6) \qquad dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2$$

jak również

$$(5') \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Niech będzie L_1K_1 (fig. 110) rozwiniętą krzywéj LK: równanie (5), w którém x_1, y_1 są spółrzędnemi punktu S środka

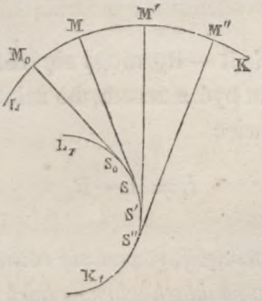


fig. 110.

krzywości linji LK w punkcie M (x, y), a zatém punkt S (x_1, y_1) na rozwiniętéj odpowiada punktowi (x, y) na rozwijającéj, pokazuje nam że:

Normalna do krzywéj danéj jest styczną do jéj rozwiniętéj w odpowiednim punkcie.

Nazwawszy dl_1 różniczkę łuku rozwiniętéj, mamy

$$dl_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2$$

a równanie (6) daje nam

$$dl_1^2 = dR^2 \quad \text{lub} \quad dR = \pm dl_1$$

Różniczka promienia krzywości w danym punkcie krzywéj równa się różniczce łuku jéj rozwiniętéj w punkcie odpowiednim; łuk ten może być liczonym od jakiegokolwiek początku : bo znak téj ostatniéj różniczki jest dowolnym.

Weźmy na krzywéj danéj pewien punkt stały M_0, i nazwijmy S_0 punkt odpowiedni rozwiniętéj czyli środek krzywości krzywéj danéj w punkcie M_0. Będziemy liczyć przyrostki promienia krzywości zacząwszy od R_0, a łuki rozwiniętéj zacząwszy od S_0. Mamy

$$dl_1 = d(R - R_0)$$

a więc [149] l_1 i $R - R_0$ mogą się różnić tylko o ilość stałą, która musi tu być z zerem, bo założenia gdy $R = R_0$, to $l = 0$. Mamy więc

$$l_1 = R - R_0$$

Długość łuku rozwiniętéj, równa się różnicy promieni krzywości rozwijającéj w punktach odpowiednich punktom ostatecznym tego łuku.

Własność ta może być przedstawioną dotykalnie w następujący sposób : Przypuśmy, że na rozwiniętéj L_1K_1

jest nawinięta nić, która od punktu S_0 téj rozwiniętéj przedłuża się jako styczna do niéj S_0M_0, i że punkt ostateczny M_0 téj nici zakreśla krzywą, w miarę jak odwijamy nić z L_1K_1. Gdy odwiniemy jakikolwiek kawałek nici S_0S, styczna przedłuży się o ten kawałek i będziemy mieli

$$SM = S_0M_0 + SS_0 = R_0 + t_1 = R$$

czyli, że SM będzie promieniem krzywości rozwijającéj LK, punkt ostateczny nici znajdować się będzie ciągle na téj rozwijającéj, i zakreślać ją będzie ruchem ciągłym. Ztąd to pochodzi nazwisko *rozwiniętéj* dane linji L_1K_1 która jest miejscem geometryczném środków krzywości linji LK nazwanéj *rozwijającą*.

441. Aby otrzymać równanie rozwiniętéj krzywéj danéj

$$f(x, y) = 0$$

dość jest wyrugować $x, y, \frac{dy}{dx}$ z równania $f(x, y) = 0$, równania $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$, otrzymanego przez zróżniczkowanie poprzedniego i dwóch równań [(1) **439**] (lub innych równoważnych z (1)) : otrzymamy jako wypadek

$$f_1(x_1, y_1) = 0$$

równanie, które będzie równaniem rozwiniętéj.

Ponieważ pochodne funkcyj algebraicznych są funkcjami algebraicznemi [**160**], rozwinięte krzywych algebraicznych, otrzymane w powyższy sposób będą krzywemi algebraicznemi. Nadto długość łuku téj rozwiniętéj wyrażona jako różnica promieni krzywości rozwijającéj będzie funkcją algebraiczną spółrzędnych : długość ta da się więc z łatwością zamienić na długość równą linji prostéj, co wyrażamy mówiąc, że łuk takiéj krzywéj może być z łatwością *wyprostowanym*.

442. Równanie różniczkowe rozwijającéj. Aby, mając danę równanie rozwiniętéj

$$f_1(x_1, y_1) = 0$$

znaleźć równanie rozwijającéj

$$f(x, y) = 0,$$

możemy wziąść dwa równania

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\,\frac{dy}{dx} = 1, \qquad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{dx_1}$$

z których pierwsze jest równaniem wskazującem, że normalna do krzywéj szukanéj spotyka krzywę daną [374], drugie zaś [373], że normalna ta jest styczną do krzywéj danéj. Rugując x_1, y_1, $\frac{dy_1}{dx_1}$, z tych dwóch równań, równania krzywéj danéj $f_1(x_1, y_1) = 0$, i równania

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\,\frac{dy_1}{dx_1} = 0$$

otrzymanego różniczkując poprzednie, będziemy mieli równanie kształtu

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

które będzie równaniem różniczkowém [182] rozwijającéj Równanie pierwotne $f(x,y)=0$ pomiędzy x i y, którebyśmy z tego równania różniczkowego otrzymać mogli, zawiera stałę dowolną [**182**], któréj nadając różne wartości, otrzymalibyśmy dowolną liczbę rozwijających. Jakoż wszelka linja, która przecina pod kątem prostym styczne do krzywéj danéj, t.j. do któréj styczne te są normalnemi, jest rozwijającą krzywéj danéj; czyli innemi słowy: dając rozmaitą długość nici nawiniętych na rozwiniętą, począwszy od punktu, w którym nić ta opuszcza rozwiniętą, [**440**], otrzymamy rozmaite rozwijające. Zajmiemy się późniéj obszerniéj tém zadaniem.

O linjach obwijających.

443. Niech będzie funkcja doskonała [**372**]

$$f(x, y, p)$$

trzech zmiennych x, y, p z których dwie pierwsze x, y przedstawiają spółrzędne jakiekolwiek krzywéj pewnego gatunku, danego przez równanie

$$f(x, y, p) = 0 \tag{1}$$

trzecia zaś p jest *parametrem* wchodzącym w skład téj krzywéj, niezależnym od spółrzędnych jéj punktów, lecz wyznaczającym krzywę szczególną z ogólnego gatunku (1). Jeżeli naprzykład równanie (1)

$$y^2 - 2px = 0$$

przedstawia w spółrzędnych prostokątnych wszystkie parabole mające oś wspólną i wierzchołek wspólny, każdéj wartości nadanej parametrowi p odpowiada inna parabola.

Przypuśćmy, że nadawszy parametrowi p w równaniu (1), pewną oznaczoną wartość p, nadajemy mu następnie inną wartość $p+\Delta p$, otrzymamy inną krzywę

$$(2) \qquad f(x, y, p+\Delta p)=0$$

która przetnie krzywą (1) w pewnych punktach m, m' m''... Spółrzędne tych punktów czynią zadosyć równaniom (1) i (2), a więc i równaniu

$$(3) \qquad \frac{f(x, y, p+\Delta p)-f(x, y, p)}{\Delta p}=0$$

Jeżeli teraz Δp zdąża do zera, punkta m, m', m'', ... zdążają w ogólności do punktów oznaczonych M, M', M''... czyniących zadosyć równaniu (1) i równaniu

$$(4) \qquad \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p}=0$$

Miejscem geometryczném tych punktów M, M', M'', ... gdy zmieniamy p jest pewna linja, której równanie otrzymamy rugując p z dwóch równań

$$f(x, y, p)=0, \quad \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p}=0$$

Linja ta nazwaną została *obwijającą* linij (1), z których każda względem obwijającéj nazywa się *obwiniętą*.

444. Aby stosunek (3) zdążał do granicy oznaczonéj (4) warunkiem koniecznym jest, żeby funkcja $f(x, y, p)$ była doskonałą to jest ciągłą, skończoną, jednowartościową. Ciągłość jest już koniecznym warunkiem istnienia pochodnéj: nadto, gdyby $f(x, y, p)$ była funkcją wielowartościową, mogącą mieć wiele wartości dla danej wartości parametru p, gdy Δp zdąża do zera, $f(x, y, p + \Delta p)$ zdążać może niekoniecznie do wartości danéj $f(x, y, p)$ a zatém punkta przecięcia się (3) i (4) niekoniecznie zdążą do granicy szukanéj.

Weźmy naprzykład za równanie (1), równanie

$$(x-p)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

które w spółrzędnych prostokątnych jest równaniem kół, mających środki na osi odciętych w odległościach zmiennych p od początku (fig. 111). Funkcja $(x-p)^2 + y^2 - a^2$ jest funkcją doskonałą [**372**], a zatém określenie i prawidło na otrzymanie obwijającéj tych kół, tu się stosuje, i mamy równanie (4)

$$x - p = 0$$

a zatém rugując p

$$y^2 - a^2 = 0 \qquad \text{lub} \qquad (y+a)(y-a) = 0$$

równanie obwijającéj, która jak widzimy składa się z dwóch prostych LL', $L_1 L'_1$

$$y = +a, \qquad y = -a$$

równoległych do osi odciętych, co z góry moglibyśmy powiedzieć.

Lecz gdybyśmy równanie dane chcieli przedstawić pod postacią

$$x - p + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

funkcja na lewej stronie tego równania nie byłaby jednowartościową [**340**] i prawidło by się nie stosowało, lub doprowadzićby mogło do wypadków sprzecznych. Jakoż mielibyśmy równanie (4)

$$1 = 0$$

co jest niedorzeczném, i naprowadzałoby na przypuszczenie, że obwijająca nie istnieje. Jakoż mamy wyraźnie

$$p = x \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

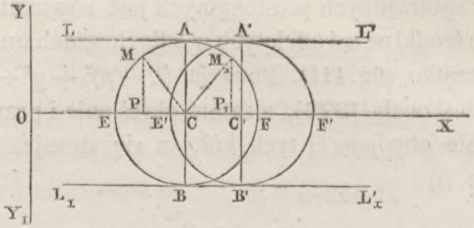


fig. 111.

znak $+$ stosuje się do półokręgu AFB, znak $-$ do półokręgu AEB (fig. 111) bo

$$p = OC = OP + PC = OP_1 - P_1C$$

Gdy teraz napiszemy

$$p + \Delta p = x \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

przypuszczamy naturalnie, że znaki wyższe i niższe sobie odpowiadają; czyli szukamy granicy przecięcia się półokręgu ABE z półokręgiem A′E′B′ przecięcia które nie istnieje. Trzebaby było napisać

$$p + \Delta p = x \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

i przypuścić, że gdy Δp zdąża do zera, pierwiastek zmienia znak, to jest szukać granicy przecięcia półokręgu AFB z półokręgiem A′E′B′ coby nam dało szukaną obwijającą.

445. Twierdzenie. *Obwijająca pewnego układu linij jest styczną do obwiniętych w każdym punkcie wspólnym obwijającéj z obwiniętemi.*

W rzeczy saméj, niech będzie

$$(1) \qquad f(x, y, p) = 0$$

równanie układu linij obwiniętych, gdzie x i y są spółrzędnemi prostolinijnemi, a f funkcją doskonałą. Równanie obwijającéj daném będzie przez wyrugowanie parametru p z dwóch równań

$$(2) \qquad f(x, y, p) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Spółczynnik kątowy $\frac{dy}{dx}$ stycznéj do linji (1) danym będzie [**373**] przez równanie

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Spółczynnik kątowy stycznéj do obwiniętéj, otrzymać można rugując p z równań (2) i różniczkując równanie wypadkowe. Przypuśćmy żeśmy otrzymali p z równania $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ wyrażone przez x i y, i podstawili je w równanie $f(x, y, p) = 0$; równanie tak otrzymane będzie jeszcze $f(x, y, p) = 0$, tylko że p pozostawione w niém przez skrócenie uważaném będzie jako wyrażone przez x, y. Różniczkując w tém przypuszczeniu, otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$$

gdzie $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$. Lecz $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$, z równań (2), a więc to ostatnie równanie, wyznaczające spółczynnik kątowy stycznéj do obwijającéj, stanie się

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

tém samém co równanie wyznaczające spółczynnik kątowy stycznéj do obwiniętéj. Spółczynnik ten jest więc ten sam w jednym i drugim razie, dla tego samego x i y, c. b. d. d.

446. Uwaga. Rozwinięta jest obwijającą normalnych do krzywej danej : na zasadzie poprzedzającego twierdzenia jest ona styczną do tych normalnych, cośmy udowodnili powyżej [**439**] innym sposobem.

W saméj rzeczy, równanie normalnéj

$$X - x + (Y - y) \frac{dy}{dx} = 0$$

gdzie x i y są spółrzędnemi punktu krzywéj danéj, w którym normalna ta została poprowadzoną, zawiera jeden parametr dowolny, naprzykład x, bo y jest daném w funkcji x przez równanie krzywéj. Biorąc więc pochodną tego równania co do x, uważając y zastąpione przez funkcję x, a X, Y niezmiennemi, otrzymamy

$$-\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + (Y - y) \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

a z tych dwóch równań

$$X - x = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad Y - y = \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

równania też same, co równania [**439** (1)] wyznaczające rozwiniętą, po wyrugowaniu z nich i z równania krzywej, x i y.

447. Krzywa jako obwijająca swe styczne. Nazwawszy α kąt stycznéj z osią odciętych, równanie stycznéj może dyć daném w spółrzędnych prostokątnych pod kształtem

$$x \operatorname{wst} \alpha - y \operatorname{dos} \alpha = \varphi(\alpha) \tag{1}$$

bo spółczynnikiem kątowym jest tu $\operatorname{st} \alpha = \dfrac{\operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{dos} \alpha}$ druga zaś stała wyznaczająca styczną jest przedstawioną pod ogólnym kształtem $\varphi(\alpha)$ jako zależna od kąta α w sposób wyznaczony przez równanie krzywej. Uważając krzywę jako obwijającą styczne, gdy zmieniamy ich nachylenie α, równanie to krzywej otrzymać możemy rugując α z równania (1) i równania

$$x \operatorname{dos} \alpha + y \operatorname{wst} \alpha = \varphi'(\alpha) \tag{2}$$

otrzymanego przez zróżniczkowanie co do α równania (1). Uważając α za zmienną niezależną, otrzymamy z (1) i (2):

$$\left\{\begin{aligned} x &= f'(\alpha) \operatorname{dos} \alpha + f(\alpha) \operatorname{wst} \alpha \\ y &= f'(\alpha) \operatorname{wst} \alpha - f(\alpha) \operatorname{dos} \alpha \end{aligned}\right. \tag{3}$$

a różniczkując (3) i upraszczając

$$\left\{\begin{aligned} dx &= [f''(\alpha) + f(\alpha)] \operatorname{dos} \alpha d\alpha \\ dy &= [f''(\alpha) + f(\alpha)] \operatorname{wst} \alpha d\alpha \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Podnosząc do kwadratu i dodając, zważywszy że

$$dx^2 + dy^2 = dł^2$$

otrzymamy

(5) $$dł = [f''(\alpha) + f(\alpha)]\,d\alpha$$

a więc [**438**] ponieważ $\frac{dł}{d\alpha} = \mathrm{R}$

(6) $$\mathrm{R} = f''(\alpha) + f(\alpha)$$

gdzie R oznacza promień krzywości.

Dla pewnej danej wartości α, równanie (2) przedstawia prostę prostopadłą do prostéj (1) (bo spółczynnikiem kątowym prostej (2) jest $-\frac{\operatorname{dos}\alpha}{\operatorname{wst}\alpha}$) a zatém normalną do krzywéj obwijającéj. Równanie (2) jest więc równaniem normalnych do krzywéj, któréj równaniem stycznéj jest (2). Różniczkując (2) otrzymamy

(7) $$-\operatorname{wst}\alpha + y\operatorname{dos}\alpha = f''(\alpha)$$

Układ (2) i (7) przedstawia znów obwijającę prostych (2) normalnych krzywej, czyli rozwiniętą krzywej. Oznaczając przez x_1, y_1, wartości x i y, wyciągniętą z (2) i (7) otrzymamy

$$x_1 = f'(\alpha)\operatorname{dos}\alpha - f''(\alpha)\operatorname{wst}\alpha$$
$$y_1 = f'(\alpha)\operatorname{wst}\alpha + f''(\alpha)\operatorname{dos}\alpha$$

równania dające spółrzędne środka krzywości. Różniczkując

$$dx_1 = -[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\operatorname{wst}(\alpha d\alpha$$
$$dy_1 = +[f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\operatorname{dos}\alpha d\alpha$$

a wyciągając pierwiastek z summy kwadratów tych dwóch równań i podstawiając $dł_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2$, otrzymamy

$$dł_1 = [f'(\alpha) + f'''(\alpha)]\,d\alpha = d\mathrm{R}$$

na zasadzie (6), wypadek zgodny z otrzymaną powyżej [439] własnością rozwiniętych.

Zastosowania i przykłady.

448. Różniczka łuku krzywych 2go stopnia. Elipsa. Niech będzie równanie elipsy [46] odniesionéj do osi

$$(1)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{lub} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ponieważ zawsze $x < a$, $y < b$, możemy założyć

$$(2)\qquad x = a \,\text{wst}\, \varphi, \qquad y = b \,\text{dos}\, \varphi$$

obierając kąt φ dany przez te równania, za zmienną pomocniczą.

Jeżeli na osi wielkiéj elipsy jako na średnicy, zakreślimy okrąg koła, i przedłużymy rzędnę elipsy do przecięcia się z tym okręgiem koła w punkcie do którego poprowadzimy promień ze środka, promień ten będzie tworzył z osią rzędnych kąt φ (fig. 112).

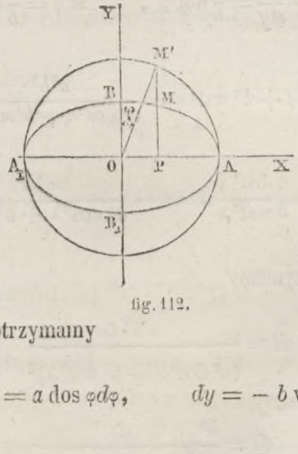


fig. 112.

Różniczkując, otrzymamy

$$(3)\qquad dx = a \,\text{dos}\, \varphi d\varphi, \qquad dy = -b \,\text{wst}\, \varphi d\varphi$$

a zatém [423]

$$dl = \sqrt{a^2 \,\text{dos}^2 \varphi + b^2 \,\text{wst}^2 \varphi}\, d\varphi$$

Oznaczając przez m *mimośród*, to jest stosunek [60]

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=m$$

otrzymamy

(4) $$dł=\sqrt{1-m^2\,\mathrm{wst}^2\varphi}\,d\varphi$$

lub

(5) $$\frac{dł}{a}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\,\mathrm{wst}^2\varphi}}-m^2\frac{\mathrm{wst}^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-m^2\,\mathrm{wst}^2\varphi}}$$

Chcąc wyrazić $dł$ przez dx i dy, dość jest wyrugować $\mathrm{wst}\,\varphi$ $d\varphi$, za pomocą (2) i (3). Otrzymamy w ten sposób

(6) $$dł=\sqrt{\frac{a^2-m^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

Godném uwagi jest wyrażenie różniczki łuku elipsy, przez różniczkę kąta λ normalnéj, z osią odciętych. Mamy [374]

$$\mathrm{st}\,\lambda=-\frac{dx}{dy}=\frac{a}{b}\,\mathrm{dot}\,\varphi\,,\qquad \mathrm{st}\,\varphi=\frac{a}{b}\,\mathrm{dot}\,\lambda$$

a ztąd

$$a^2\,\mathrm{dos}^2\varphi+b^2\,\mathrm{wst}^2\varphi=\frac{a^2b^2}{a^2\,\mathrm{dos}^2\lambda+b^2\,\mathrm{wst}^2\lambda}$$

zaś

$$d\varphi=-\frac{a}{b}\frac{\mathrm{dos}^2\varphi}{\mathrm{wst}^2\lambda}d\lambda=-\frac{abd\lambda}{a^2\,\mathrm{dos}^2\lambda+b^2\,\mathrm{wst}^2\lambda}$$

Podstawiając, otrzymamy

$$dł=\frac{a^2b^2d\lambda}{(a^2\,\mathrm{dos}^2\lambda+b^2\,\mathrm{wst}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

lub

$$dł=\frac{b^2}{a}\frac{d\lambda}{(1-m^2\,\mathrm{wst}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Kąt λ jaki normalna tworzy z osią odciętych, różni się od kąta α stycznéj z tą osią o ilość stałą $\frac{\pi}{2}$ [**438**] : różniczka więc $d\lambda = d\alpha$, równą jest kątowi styczności krzywéj, a zatém $\frac{dł}{d\lambda}$ wyraża promień krzywości R. Mamy więc promień krzywości elipsy

$$R = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{(1 - m^2 \operatorname{wst}^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

449. HYPERBOLA. Weźmy za oś odciętych, oś nie spotykającą krzywéj, za oś rzędnych, oś ogniskową (fig. 113); oznaczmy przez $2b$ pierwszą z tych osi, przez $2a$ drugą, przez

$$n = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{m}$$

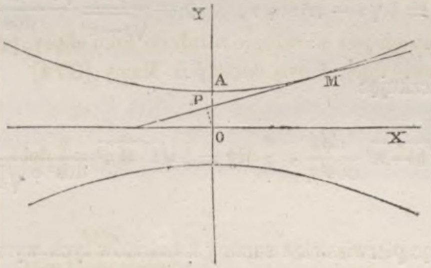


fig. 113.

odwrócenie mimośrodu, a zatém ułamek mniejszy od jedności [**60**]: otrzymamy

$$a = \frac{nb}{\sqrt{1 - n^2}}$$

a równanie hyperboli [**47**]

$$a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2 \quad \text{lub} \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$$

stanie się, rozwiązane co do y

$$y = \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} \sqrt{x^2+b^2}$$

bierzemy tylko znak $+$ pod uwagę, to jest jednę tylko gałęź krzywéj, po stronie rzędnych dodatnych. Dla drugiéj gałęzi rachunek jest oczywiście ten sam.

Weźmy znów kąt pomocniczy φ dany przez równanie

$$\operatorname{st}\varphi = \frac{x}{b}\sqrt{1-n^2}$$

co jest zawsze możebném, bo styczna przybierać może wszelkie wartości. Otrzymamy

$$x = b\sqrt{1-n^2}\operatorname{st}\varphi, \qquad y = \frac{bn}{\sqrt{1-n^2}} \frac{\sqrt{1-n^2\operatorname{dos}^2\varphi}}{\operatorname{dos}\varphi}$$

więc różniczkując

$$dx = b\sqrt{1-n^2}\,\frac{d\varphi}{\operatorname{dos}^2\varphi}, \qquad dy = b\sqrt{1-n^2}\,\frac{n\operatorname{wst}\varphi d\varphi}{\operatorname{dos}^2\varphi\sqrt{1-n^2\operatorname{wst}^2\varphi}}$$

a wyciągając pierwiastek z summy kwadratów tych wyrażeń

$$(1) \qquad dt = \sqrt{dx^2+dy^2} = a\sqrt{1-n^2}\,\frac{d\varphi}{\operatorname{dos}^2\varphi\sqrt{1-n^2\operatorname{wst}^2\varphi}}$$

Aby sprowadzić tę różniczkę do kształtu podobnego wyrażeniu różniczki łuku elipsy, przypuśćmy że liczymy łuk od punktu A do M: w punkcie M poprowadźmy styczną do krzywéj, i przez początek prostopadłę OP do téj stycznéj. Równanie prostéj OP będzie

$$n\operatorname{wst}\varphi Y + \sqrt{1-n^2\operatorname{wst}^2\varphi}\,X = 0$$

oznaczywszy część stycznéj PM przez l, otrzymamy

$$l = \frac{a}{\sqrt{1-n^2}} \operatorname{st} \varphi \sqrt{1 - n^2 \operatorname{wst}^2 \varphi}$$

więc różniczkując

$$(2) \quad dl = a\sqrt{1-n^2} \frac{d\varphi}{\operatorname{dos}^2 \varphi \sqrt{1-n^2 \operatorname{wst}^2 \varphi}}$$
$$+ \frac{an^2}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{d\varphi}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{wst}^2 \varphi}} - \frac{\operatorname{wst}^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{wst}^2 \varphi}} \right)$$

a odejmując (2) od (1)

$$d(t-l) = \frac{an^2}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{\operatorname{wst}^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{wst}^2 \varphi}} - \frac{d\varphi}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{wst}^2 \varphi}} \right)$$

Różniczka więc $t-l$ ma wyrażenie podobne jak różniczka łuku elipsy, pomnożona tylko przez $\frac{an^2}{\sqrt{1-n^2}}$. Uwaga ta będzie nam pożyteczną późniéj, gdy się zajmować dędziemy obliczaniem długości łuków tych krzywych.

W spółrzędnych zwykłych, otrzymalibyśmy

$$dt = \sqrt{\frac{m^2y^2 - b^2}{y^2 - b^2}}\, dy$$

rugując z (1) wst φ, dos φ i $d\varphi$, i zastępując n przez $\frac{1}{m}$, lub też wprost szukając $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ i wprowadzając $m = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

450. Parabola. Niech będzie

$$y^2 = 2px$$

równanie paraboli odniesionéj do osi stycznéj w wierzchołku [**48**].

Oznaczywszy przez α kąt stycznéj z osią odciętych, mamy [373]

$$\mathrm{st}\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

a ztąd

$$y = p \,\mathrm{dot}\,\alpha\,, \qquad x = \frac{1}{2} p \,\mathrm{dot}^2 \alpha$$

Różniczkując

$$dy = -\frac{p d\alpha}{\mathrm{wst}^2 \alpha}, \qquad dx = -\frac{p \,\mathrm{dot}\, \alpha d\alpha}{\mathrm{wst}^2 \alpha}$$

a zatém

$$dł = \sqrt{dx^2 + dy^2} = -\frac{p d\alpha}{\mathrm{wst}^3 \alpha}$$

Znak — wskazuje że łuk się zmniejsza, gdy kąt α stycznéj z osią odciętych się powiększa [423].

Otrzymamy bez trudności różniczkę tę wyrażoną przez x i y:

$$dł = \frac{\sqrt{y^2 + p^2}}{p} dy$$

451. Promień krzywości krzywych 2go stopnia. Krzywe drugiego stopnia, odniesione do osi i stycznéj w wierzchołku prostopadłéj do osi, mogą być wszystkie trzy zawarte w równaniu

$$y^2 = 2px + qx^2 \tag{1}$$

gdzie $p = \frac{b^2}{a}$, $\quad q = -\frac{b^2}{a^2}$, dla elipsy

$p = -\frac{b^2}{a}$, $\quad q = \frac{b^2}{a^2}$, dla hyperboli

$q = 0$, dla paraboli.

Różniczkując dwa razy równanie (1), otrzymamy

$$y\frac{dy}{dx} = p + qx \tag{2}$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q \tag{3}$$

Odejmując równanie (2) podniesione do kwadratu od iloczynu równań (1) i (3), otrzymamy

$$y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -p^2$$

Wyrażenie promienia krzywości

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

staje się więc

$$R = \frac{\left(y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

Jeżeli nazwiemy N długość części normalnéj, zawartéj pomiędzy krzywą a osią odciętych, otrzymamy **[375]**

$$N^2 = y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}$$

a zatém

$$R = \frac{N^3}{p^2} \tag{4}$$

Dla krzywych drugiego stopnia, promień krzywości równa się stosunkowi sześcianu długości normalnéj do kwadratu parametru.

Podnosząc równanie (2) do kwadratu, otrzymamy

$$y^2 \frac{dy^2}{dx^2} = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2$$

a zatém

$$N^2 = p^2 + (1 + q)\, y^2$$

wartość, która podstawiana w (4) pozwala nam wyrazić promie krzywości w funkcji spółrzędnych.

W spółrzędnych biegunowych, krzywe drugiego stopnia są dane przez równanie [**60**]

$$\rho = \frac{p}{1 + m \operatorname{dos} \omega}$$

gdzie *m* oznacza mimośród [**451**]

$$m = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \sqrt{1+q} \quad \text{w razie elipsy lub hyperboli}$$

zaś

$$m = 1 = \sqrt{1+q} \quad \text{w razie paraboli (gdzie } q = 0);$$

mamy więc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \sqrt{1+q} \operatorname{dos} \omega}{p}$$

a różniczkując

$$\frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{\sqrt{1+q} \operatorname{wst} \omega d\omega}{p}$$

Styczna tworzy z promieniem wodzącym kąt μ dany przez równanie

$$\operatorname{st} \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

normalna więc będzie tworzyć z tymże promieniem wodzącym kąt ν dany przez równanie

$$\operatorname{st} \nu = \frac{d\rho}{\rho d\omega} = \frac{\sqrt{1+q}}{p} \rho \operatorname{wst} \omega$$

Lecz $\rho \operatorname{wst} \omega = y$ w spółrzędnych prostokątnych, więc

$$\operatorname{st} \nu = \frac{y\sqrt{1+q}}{p}$$

a wyrażenie (5) staje się

$$(6)\qquad N = \frac{p}{\mathrm{dos}\,\nu} \quad \text{czyli} \quad p = N\,\mathrm{dos}\,\nu$$

Dla krzywych drugiego stopnia, rzut normalnéj na promień wyprowadzony z ogniska, jest stałym, równym parametrowi.

Wyrażenie promienia krzywości staje się

$$(7)\qquad R = \frac{p}{\mathrm{dos}^3\nu}$$

lub

$$(8)\qquad R = \frac{N}{\mathrm{dos}^2\nu}$$

co nam daje bardzo prosty sposób kreślenia promienia krzywości, do krzywéj drugiego stopnia :

Niech będzie OX oś ogniskowa, F ognisko krzywéj drugiego stopnia LK : w punkcie M téj krzywéj wyprowadźmy normalnę MN

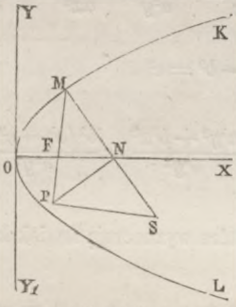


fig. 114.

i promień wodzący do ogniska MF. Z punktu N przecięcia się normalnéj z osią OX, poprowadźmy prostopadłę NP do normalnéj, i z punktu P przecięcia się téj prostopadłéj z kierunkiem promienia wodzącego MF, wyprowadźmy prostopadłę PS : punkt S przecięcia się téj prostopadłéj z kierunkiem normalnéj MN, będzie środkiem krzywości krzywéj w punkcie M. W rzeczy samej

$$MP = \frac{MN}{\mathrm{dos}\,NMP} \quad \text{zaś} \quad MS = \frac{MP}{\mathrm{dos}\,NMP} = \frac{MN}{\mathrm{dos}^2\,NMP} = \frac{N}{\mathrm{dos}^2\nu}$$

czyli

$$MS = R \qquad \text{c. b. d. d.}$$

452. Rozwinięte krzywych 2go stopnia. ROZWINIĘTA ELIPSY. Niech będzie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

równanie elipsy odniesionéj do osi. Różniczkując dwa razy to równanie, otrzymamy

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ztąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

więc, zakładając $a^2 - b^2 = c^2$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2(a^4 - c^2x^2)}{a^4y^2} = \frac{b^4 + c^2y^2}{a^2y^2}$$

Wzory [**437** (3)] które wyznaczają środek krzywości, stają się

$$x_1 = +\frac{c^2x^3}{a^4}, \qquad y_1 = -\frac{c^2y^3}{b^4} \tag{2}$$

Ponieważ c^2 jest dodatném, zakładając

$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{c^2}{b}$$

i rugując x, y z równań (2) i (1), otrzymamy

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \tag{3}$$

równanie rozwiniętéj elipsy. Rozwinięta ta GHG'H' (fig. 115) jest symetryczną względem osi elipsy, spotyka oś ogniskową w dwóch punktach G, G' pomiędzy ogniskami, bo $a_1 < c$. Równania (2) pokazują

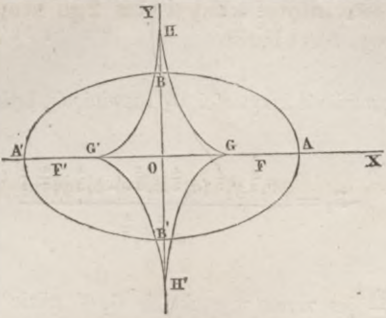


fig. 115.

że każda ćwiartka elipsy i ćwiartka odpowiednia rozwiniętej, znajduje się w kątach przyległych utworzonych przez osie spółrzędnych. Rozwinięta będzie się znajdować cała wewnątrz elipsy, jeżeli $b_1 < b$, to jest $a < b\sqrt{2}$; punkta H, H', będą się znajdować w wierzchołkach B, B' jeżeli $a = b\sqrt{2}$; nakoniec punkta H, H' będą zewnątrz elipsy, która przetnie rozwiniętą w czterech punktach, jeżeli $a > b\sqrt{2}$. Promień krzywości elipsy w punktach A, A' jéj przecięcia z osią ogniskową, jest $b + b_1$, czyli $\frac{a^2}{b}$; w punktach B, B' przecięcia z drugą osią, jest $a - b_1$, czyli $\frac{b^2}{a}$; długości ćwiartki rozwiniętéj będzie więc

$$\frac{a^3 - b^3}{ab}$$

Aby otrzymać promień krzywości rozwiniętéj, różniczkujmy równanie (3) dwa razy: otrzymamy, biorąc x_1 za zmienną niezależną

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{dy_1}{dx_1} = 0$$

$$-\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{x_2}{a_1}\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3b_1^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$$

a ztąd

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b_1^{\frac{2}{3}} y_1^{\frac{1}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = -\frac{b_1^{\frac{4}{3}}}{3a_1^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{4}{3}} y_1^{\frac{1}{3}}}$$

wyrażeniem promienia krzywości R_1 rozwiniętéj, będzie więc

$$R_1 = \frac{3x_1^{\frac{1}{3}} y_1^{\frac{1}{3}} (a_1^{\frac{4}{3}} x_1^{\frac{2}{3}} + b_1^{\frac{4}{3}} y_1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{a_1^{\frac{5}{4}} b_1^{\frac{4}{3}}}$$

Wartość $\frac{dy_1}{dx_1}$ jest zerem w punktach G, G' gdzie rozwinięta spotyka oś odciętych; jest nieskończonością w punktach H, H' gdzie krzywa ta spotyka oś rzędnych; dla każdego z tych punktów, promień krzywości jest zerem. Punkta te są punktami zwrotu [**405**] pierwszego rodzaju krzywéj. Druga pochodna $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$, jest zawsze tego samego znaku co rzędna y: rozwinięta jest więc zawsze wypukłą względem osi elipsy.

453. Rozwinięta Hyperboli. Aby przejść od ellipsy do hyperboli, dość jest podstawić wszędzie $-b^2$ zamiast $+b^2$. Otrzymamy w ten sposób, biorąc równanie hyperboli w zwykłym [**74**] kształcie

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i zakładając $a^2 + b^2 = c^2$, spółrzędne środka krzywości:

$$(2) \qquad x_1 = \frac{c^2x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2y^3}{b^4}$$

a zakładając jak powyżéj

$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b}$$

i rugując x i y, z równań (2) i (1), otrzymamy

(3) $$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

równanie rozwiniętéj hyperboli. Z łatwością zobaczylibyśmy, rozumując jak powyżéj, że rozwinięta ta składa się z dwóch gałęzi HGH_1,

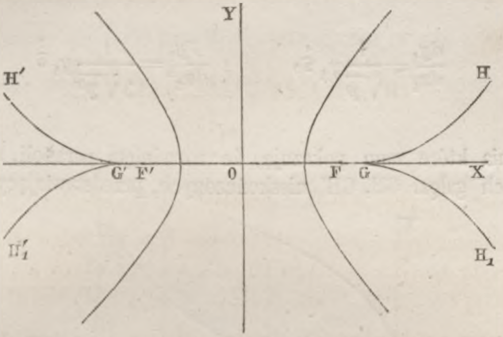


fig. 116.

$H'G'H'_1$ symetrycznych względem osi hyperboli, wypukłych względem osi ogniskowéj, przedstawiającéj punkta zwrotu pierwszego rodzaju w punktach przecięcia się z tą osią, znajdujących się po za ogniskami hyperboli (fig. 116).

454. Rozwinięta Paraboli. Równanie paraboli odniesionéj do osi i stycznéj w wierzchołku

(1) $$y^2 = 2px$$

daje przez różniczkowanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}$$

a ztąd

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right) = \frac{2px + p^2}{y^2}$$

Spółrzędne środka krzywości [**437**] będą dane przez równania

(2) $$x_1 = 3x + p, \quad y_1 = -\frac{y^3}{p^2}$$

a rugując x, y z (2) i (1), otrzymamy

$$(3)\qquad y_1^2 = \frac{8}{27}\frac{(x_1-p)^3}{p}$$

równanie rozwiniętéj paraboli. Różniczkując (3), otrzymamy

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{p}}\, y_1^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{p^2}}\, y_1^{\frac{2}{3}}$$

równania które nam pokazują, że rozwinięta paraboli, składa się z dwóch gałęzi GH, GH′ nieskończonych, przedstawiających punkt

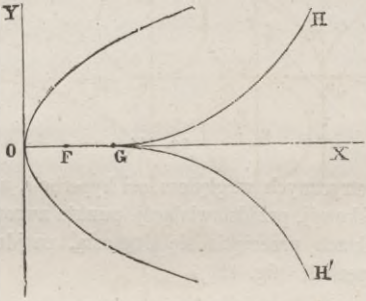


fig. 117.

zwrotu w punkcie G, spotkania się z osią paraboli: promień y_1 i $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ są zawsze jednakowego znaku, rozwinięta jest wypukłą względem osi paraboli (fig. 117).

455. Różniczka łuku, promień krzywości i rozwinięta cykloidy. Otrzymaliśmy równanie cykloidy [**397**].

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a(\varphi - \text{wst}\,\varphi) \\ y = a(1 - \text{dos}\,\varphi) \end{cases}$$

a różniczkując,

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = a(1 - \text{dos}\,\varphi)\,d\varphi \\ dy = a\,\text{wst}\,\varphi\,d\varphi \end{cases}$$

Wyciągając pierwiastek z summy kwadratów tych dwóch równań, otrzymamy różniczkę łuku [**423**]

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2a^2(1 - \text{dos}\,\varphi)}\,d\varphi$$

czyli

$$dl = 2a \,\text{wst}\, \frac{1}{2}\varphi d\varphi \tag{3}$$

Mamy nadto (fig. 118) kąt MGH, jaki styczna tworzy z osią rzędnych równy połowie MCH czyli $\frac{1}{2}\varphi$: a więc kąt styczności [**426**]

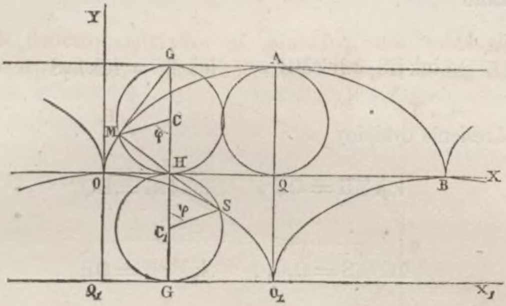


fig. 118.

$$dk = \frac{1}{2}\,d\varphi$$

a *promień krzywości* będzie

$$R = \frac{dl}{dk} = 2\,\frac{dl}{d\varphi}$$

czyli

$$R = 4a \,\text{wst}\, \frac{1}{2}\varphi$$

Lecz mamy długość normalnéj [**375**]

$$N = MH = 2a \,\text{wst}\, \frac{1}{2}\varphi$$

więc

$$R = 2N$$

Promień krzywości równa się podwójnej normalnéj, środek krzy-

wości S *znajduje się na przedłużeniu normalnéj* $HS = MH$.

456. Rozwinięta Cykloidy jest miejscem geometryczném środków krzywości S : możemy ją wyznaczyć geometrycznie jak następuje :

Przedłużmy średnicę koła tworzącego GH, i na przedłużeniu $HG_1 = HG$ jako średnicy, zakreślmy okrąg koła; z punktu G_1 wyprowadźmy styczną do tego okręgu G_1X_1, równoległą do OX. Przedłużmy normalnę MH do cykloidy, aż do przecięcia się z okręgiem C_1 w punkcie S; trójkąty $G_1HS = MHF$, dają nam $MH = HS$, a więc punkt S jest środkiem krzywości cykloidy w punkcie M. Mamy nadto

$$\text{łuk } HS = \text{łuk } MH\,, \qquad \text{łuk } MG = \text{łuk } G_1S$$

a że z określenia cykloidy

$$\text{łuk } MH = OH\,, \qquad \text{łuk } MG = HQ$$

więc

$$\text{łuk } G_1S = O_1G_1\,, \qquad \text{łuk } SH = OH$$

Jeżeli więc okrąg C_1, toczyć się będzie po prostéj O_1X_1, wychodząc z położenia punktu S w O_1, punkt S zataczać będzie cykloidę O_1SO równę danéj OMA, lecz inaczéj położoną, która będzie rozwiniętą cykloidy danéj, to jest, miejscem geometryczném jéj środków krzywości S.

Rozwinięta więc cykloidy, jest cykloidą równą danéj, lecz inaczéj położoną.

Promień krzywości w punkzie A, jest $AO_1 = 4a$, promień krzywości w punkcie O jest 0; długość więc łuku OSO_1 cykloidy rozwiniętéj, równa długości łuku OMA cykloidy danéj, jest $4a$; a zatem długość całéj gałęzi OAB, jest $8a$.

Długość łuku cykloidy zakreślonego całkowitym obrotem koła tworzącego, jest równa cztery razy średnicy tego koła.

457. Epicykloida. *Epicykloidą* nazywamy krzywę zakreśloną przez punkt okręgu koła, toczącego się bez ślizgania po drugim okręgu koła.

Epicykloida może być *zewnętrzną* (fig. 119) lub *wewnętrzną* (fig. 120)

fig. 119.

fig. 120.

stosownie do tego czy koło ruchome tocząc się, pozostaje stycznêm zewnętrznie lub wewnętrznie do koła stałego. Epicykloidę wewnętrzną nazywają niekiedy *hypocykloidą*.

Jeżeli promień koła stałego staje się nieskończenie wielkim, epicykloida staje się *cykloidą* [**397**].

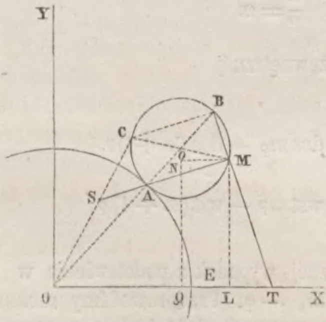


fig. 121.

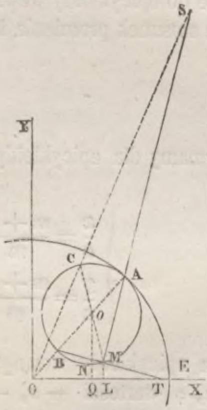


fig. 122

Niech będzie O (fig. 121 122) środkiem koła stałego, promienia $OA = P$, po którym toczy się bez ślizgania okrąg promienia $oA = a$, zakreślający punktem M epicykloidę. Przypuśćmy że ruch zaczął się gdy punkt M okręgu o znajdował się w punkcie E okręgu O, i że koło o potoczyło się o kąt $AOM = \varphi$, tak że

$$\text{łuk } AM = \text{łuk } AE = a\varphi$$

Weźmy układ osi prostokątnych, którego oś odciętych przechodzi przez punkt E, a początek znajduje się w środku O koła stałego, i nazwijmy x, y spółrzędne punktu M epicykloidy; poprowadźmy rzędnę oQ i równoległę MN do osi odciętych: będziemy mieli

$$\text{kąt AOE} = \frac{\text{łuk AE}}{\mathrm{P}} = \frac{a\varphi}{\mathrm{P}}$$

$$x = \mathrm{OQ} + \mathrm{NM}\,, \qquad y = o\mathrm{Q} - o\mathrm{N}$$

a podstawiając za OQ, NM, oQ, oN wartości z trójkątów OoQ, oNM, otrzymamy

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= (\mathrm{P} \pm a)\,\mathrm{dos}\,\frac{a\varphi}{\mathrm{P}} \pm a\,\mathrm{dos}\left(\frac{a\varphi}{\mathrm{P}} \pm \varphi\right) \\ y &= (\mathrm{P} \pm a)\,\mathrm{wst}\,\frac{a\varphi}{\mathrm{P}} \pm a\,\mathrm{wst}\left(\frac{a\varphi}{\mathrm{P}} \pm \varphi\right) \end{aligned}\right.$$

znaki wyższe odnoszą się do epicykloidy zewnętrznéj (fig. 121) znak niższe do epicykloidy wewnętrznéj (fig. 122). Oznaczając przez skrócenie stosunek promienia koła ruchomego, do promienia koła stałego

$$\frac{a}{\mathrm{P}} = m$$

otrzymamy dla epicykloidy zewnętrznéj

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{m+1}{m}\,\mathrm{dos}\,m\varphi - \mathrm{dos}\,(m+1)\varphi \\ \frac{y}{a} &= \frac{m+1}{m}\,\mathrm{wst}\,m\varphi - \mathrm{wst}\,(m+1)\,\varphi \end{aligned}\right.$$

a dla epicykloidy wewnętrznéj wypadek z podstawienia w (2) za a, m, φ wartości $-a$, $-m$, $-\varphi$. Przeprowadźmy rachunki dla jednéj z nich, naprzykład zewnętrznéj, dość będzie w otrzymanych wypadkach zmienić znaki ilości a, m, φ aby otrzymać wypadki odpowiednie dla epicykloidy wewnętrznéj.

Równania (2) mogą być uważane za równania epicykloidy: rugując φ z tych dwóch równań, otrzymalibyśmy równanie zwykłe pomiędzy spółrzędnemi x i y. Rugowania tego nie przeprowadzamy, bo użycie dwóch równań (2) jest daleko dogodniejszém. W szczególnym przypadku, gdy ilość dodatna lub odjemna m jest wymierną, równanie otrzymane z wyrugowania φ jest algebraiczném, epicykloida jest krzywą algebraiczną. W szczególnym przypadku epicykloidy wewnętrznéj, utworzonéj przez koło ruchome toczące się w kole stałym promienia podwójnego, to jest dla $m = -\frac{1}{2}$, mamy $y = 0$: epicykloida wewnętrzna staje się linją prostą, średnicą koła stałego. W przypadku gdy epicykloida wewnętrzna jest zakreślona przez punkt okręgu koła ruchomego w kole stałym promienia cztery razy większego, podstawiając w (1) $m = -\frac{1}{4}$ i $-a$ za a, $-\varphi$ za φ, otrzymamy

$$\frac{x}{a} = 3 \operatorname{dos} \frac{\varphi}{4} + \operatorname{dos} \frac{3\varphi}{4}$$

$$\frac{y}{a} = 3 \operatorname{wst} \frac{\varphi}{4} - \operatorname{wst} \frac{3\varphi}{4}$$

czyli

$$\frac{x}{a} = 4 \operatorname{dos}^3 \frac{\varphi}{4}, \quad \frac{y}{a} = 4 \operatorname{wst}^3 \frac{\varphi}{4}$$

a rugując φ i podstawiając $P = 4m$, otrzymamy

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}}$$

lub jeszcze

$$\left(\frac{x}{P}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{P}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

równanie rozwiniętéj elipsy.

W ogólności, widzimy z łatwością że jeżeli m jest wymierném, ponieważ φ może się zmieniać od $-\infty$ do $+\infty$, epicykloida składa się ze skończonéj liczby gałęzi spotykających się w punktach na okręgu koła stałego, które będą punktami zwrotu krzywéj: liczba gałęzi tych będzie równa mianownikowi ułamku m sprowadzonego do najprostszego wyrażenia. Jeżeli m jest niewymierném, liczba tych gałęzi będzie nieograniczoną.

458. Równanie stycznéj do epicykloidy, otrzymać można różniczkując równania (2)

$$\frac{dx}{a} = (m+1)\,[\mathrm{wst}\,(m+1)\,\varphi - \mathrm{wst}\,m\varphi]\,d\varphi$$

$$\frac{dy}{a} = (m+1)\,[\mathrm{dos}\,m\varphi - \mathrm{dos}\,(m+1)\,\varphi]\,d\varphi$$

czyli

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{a} &= 2\,(m+1)\,\mathrm{wst}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{dos}\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \\ \frac{dy}{a} &= 2\,(m+1)\,\mathrm{wst}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{wst}\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \end{aligned}\right.$$

a dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{st}\left(m\varphi+\frac{\varphi}{2}\right)$$

równanie stycznéj do epicykloidy. Styczną tą wykreślić można z łatwością, łącząc punkt M epicykloidy z punktem B koła tworzącego na przedłużeniu prostéj Oo łączącéj środek tego koła ze środkiem koła stałego. W saméj rzeczy, przedłużając BM do przecięcia się w punkcie T z osią odciętych, mamy

$$\mathrm{BTX} = \mathrm{BOX} + \mathrm{OBT} = m\varphi + \frac{\varphi}{2}$$

a więc styczna kąta BTX jest równą $\frac{dy}{dx}$, nawet gdy do φ dodamy całkowitą liczbę 2π; prosta MB jest więc styczną do epicykloidy, AM normalną.

459. Różniczka łuku epicykloidy może być otrzymaną, wyciągając pierwiastek z summy kwadratów równań (3)

$$(5)\qquad \frac{dł}{a} = 2\,(m+1)\,\mathrm{wst}\,\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

460. Promień krzywości epicykloidy otrzymamy, biorąc kąt styczności, który [**438**] jest różniczką kąta $m\varphi + \frac{\varphi}{2}$ z (4),

czyli

$$dk = \left(m + \frac{1}{2}\right) d\varphi \tag{6}$$

i dzieląc go przez różniczkę łuku $dł$ [**428**]; oznaczając więc promień krzywości przez R, otrzymamy

$$\mathrm{R} = \frac{dk}{dł} = \frac{4(m+1)}{2m+1} a \operatorname{wst} \frac{\varphi}{2} \tag{7}$$

Aby wykreślić geometrycznie promień i środek krzywości, zauważymy iż

$$\mathrm{AM} = 2a \operatorname{wst} \varphi$$

a więc, zważywszy że $m = \pm \frac{a}{\mathrm{P}}$

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{AM}} = \frac{2m+2}{2m+1} = \frac{2\mathrm{P} \pm 2a}{\mathrm{P} \pm 2a}$$

znaki wyższe odnoszą się do epicykloidy zewnętrznéj, znaki niższe do wewnętrznéj.

Poprowadźmy przez punkt B, równoległą BC do normalnéj MA, i połączmy punkt C z punktem O prostą, która przedłużona, przetnie przedłużenie normalnéj AM w punkcie S; powiadam że punkt S jest środkiem krzywości, SM promieniem krzywości epicykloidy w punkcie M. W saméj rzeczy, trójkąt OBC daje nam

$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$$

a że $\mathrm{BC} = \mathrm{AM}$, więc

$$\frac{\mathrm{AS} + \mathrm{AM}}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{OA} + \mathrm{OB}}{\mathrm{OB}}$$

czyli

$$\frac{\mathrm{SM}}{\mathrm{AM}} = \frac{2\mathrm{P} \pm 2a}{\mathrm{P} \pm 2a}$$

a więc

$$\mathrm{SM} = \mathrm{R}.$$

461. Rozwinięta epicykloidy. Różniczkując równanie (4) otrzymujemy

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{2m+1}{2}\frac{d\varphi}{dx}$$

a zatém, oznaczając przez x_1, y_1 spółrzędne środka krzywości [**437**]

$$x_1=x-\frac{2}{2m+1}\frac{dy}{d\varphi},\qquad y_1=y+\frac{2}{2m+1}\frac{dx}{d\varphi}$$

a podstawiając wartości (2) i (3)

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{x_1}{a}&=\frac{1}{2m+1}\left[\frac{m+1}{m}\operatorname{dos} m\varphi+\operatorname{dos}(m+1)\varphi\right]\\ \frac{y_1}{a}&=\frac{1}{2m+1}\left[\frac{m+1}{m}\operatorname{wst} m\varphi+\operatorname{wst}(m+1)\varphi\right]\end{aligned}\right.$$

równania rozwiniętéj epicykloidy.

Nie zmieniając początku, obróćmy osie prostokątne spółrzędnych tak, żeby nowa oś odciętych tworzyła z dawną kąt $m\pi$, i oznaczmy przez x'_1, y'_1 spółrzędne punktu jakiegokolwiek rozwiniętéj epicykloidy względem nowych osi: otrzymamy

$$x'_1=x_1\operatorname{dos} m\pi+y_1\operatorname{wst} m\pi$$
$$y'_1=-x_1\operatorname{wst} m\pi+y_1\operatorname{dos} m\pi$$

a zakładając

$$a_1=\frac{a}{2m+1},\qquad \varphi_1=\varphi-\pi$$

otrzymamy równania (8) pod kształtem

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{x'_1}{a_1}&=\frac{m+1}{m}\operatorname{dos} m\varphi_1-\operatorname{dos}(m+1)\varphi_1\\ \frac{y'_1}{a_1}&=\frac{m+1}{m}\operatorname{wst} m\varphi_1-\operatorname{wst}(m+1)\varphi_1\end{aligned}\right.$$

równania rozwiniętéj epicykloidy tego samego kształtu, co równania saméj epicykloidy ze zmianą a na a_1; więc

Rozwinięta epicykloidy, jest podobną epicykloidą utworzoną przez punkt pewnego okręgu toczącego się po tym samym okręgu stałym, który jest okręgiem kierującym przy tworzeniu epicykloidy danéj.

462. Spiralna logarytmowa jest przedstawioną w spółrzędnych biegunowych przez równanie

$$\rho = ae^{m\omega} \tag{1}$$

gdzie ρ jest promieniem wodzącym, ω kątem biegunowym, e zasadą logarytmów naturalnych, a i m parametrami stałemi (fig. 123).

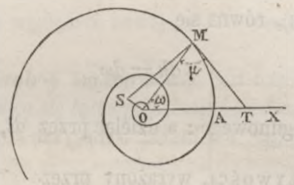


fig. 123.

Dla $\omega = 0$, mamy $\rho = a = OA$; zwiększając ω do nieskończoności w wartościach dodatnych, ρ się zwiększa do nieskończoności; zmieniając ω od 0 do $-\infty$, ρ się zmniejsza zbliżając się nieograniczenie do zera. Biegun O jest więc punktem *assymptotycznym*, krzywa rozciąga się do nieskończoności w jednę i drugą stronę od punktu A, zakreślając około bieguna O nieskończenie wielką liczbę obrotów w jednę i drugą stronę.

Różniczkując (1) otrzymamy

$$\frac{d\rho}{d\omega} = mae^{m} \quad \text{czyli} \quad \frac{d\rho}{d\omega} = m\rho \tag{2}$$

a nazywając μ kąt stycznéj MT z osią OX [376]

$$\operatorname{st}\mu = \rho\,\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{m} \tag{3}$$

Kąt jaki styczna do spiralnéj logarytmowéj tworzy z promieniem wodzącym do punktu styczności poprowadzonym, jest stałym.

463. Różniczka łuku spiralnéj logarytmowéj, ma wyrażenie [**424**]

$$dł = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \sqrt{m^2+1}\, \rho d\omega = a\sqrt{m^2+1}\, e^{m\omega}\, d\omega$$

czyli

$$(4) \qquad dł = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\, d\rho$$

Kąt styczności, zważywszy że

$$\mathrm{MAX} = \mu + \omega$$

i że $d\mu = 0$ z (3), równa się

$$(5) \qquad dk = d\omega$$

różniczce kąta biegunowego: a dzieląc przez $dł$, otrzymamy [**428**]:

Promień krzywości, wyrażony przez

$$(6) \qquad \mathrm{R} = \sqrt{m^2+1}\, \rho$$

i równy długości normalnéj

$$\mathrm{MS} = \sqrt{\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OS}^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \operatorname{dot}^2 \mu} = \sqrt{m^2+1}\, \rho$$

Środek krzywości S *jest więc przecięciem się z normalną prostopadłéj z bieguna do promienia wodzącego poprowadzonéj*. Spółrzędnemi biegunowemi punktu S są

$$\rho_1 = m\rho = mae^{m\omega}, \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega$$

a rugując ω, otrzymamy

$$(7) \qquad \rho_1 = mae^{m\omega_1 - m\frac{\pi}{2}}$$

równanie *rozwiniętéj* spiralnéj logarytmowéj.

Pozostawiając biegun tym samym, obróćmy oś biegunową o kąt $2n\pi+\alpha$; równanie (7) stanie się, zastępując ω_1 przez $\omega+\alpha+2n\pi$, promień ρ prez ρ'

$$\rho' = mae^{m\left(\alpha+2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)+m\omega'}$$

a zakładając

$$me^{m\left(\alpha+2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=1$$

to jest biorąc

(8) $$\alpha=-(4n-1)\frac{\pi}{2}-\frac{1.m}{m}$$

otrzymamy

(9) $$\rho' = me^{m\omega'}$$

równanie to samo względem nowéj osi, co równanie dane (1) względem dawnéj.

Rozwinięta spiralnéj logarytmowéj, jest więc tą samą spiralną logarytmową, różniącą się tylko położeniem od danéj.

W szczególnym przypadku parametru *m*, czyniącego zadosyć warunkowi

$$\frac{1.m}{m}=-(4n-1)\frac{\pi}{2}$$

równanie (7) daje

$$\alpha=0$$

i spiralna taka jest sama swoją własną rozwiniętą (*).

464. Linje palące przez odbicie. Jeżeli promienie światła rzucone w pewnym kierunku, spotykają krzywę daną i odbijają się od téj krzywéj, tak że kąt każdego promienia wpadającego, równa się kątowi promienia odbitego z normalną do krzywéj, w punkcie spotkania się tych promieni z krzywą; obwijająca promieni odbitych, nazywa się *linją palącą przez odbicie* krzywéj danéj.

Weźmy przykład najprostszy linji palącéj przez odbicie :

(*) Jakób Bernouilli uderzony nadzwyczajnemi własnościami spiralnej logorytmowej odtwarzającéj się ciągle przez różne przekształcenia, chciał ją kazać wyryć na grobie swoim, jako godło zmartwychwstania z napisem : *Eadem mutata resurget.*

Promienie równoległe spotykają okrąg koła i odbijają się od niego tak, że kąt wpadania z normalną jest równym kątowi odbicia; znaleźć obwijającą promieni odbitych.

Weźmy osie prostokątne mające początek w środku koła, i których oś odciętych jest równoległą do kierunku promieni wpadających. Nazwijmy a promień koła danego, φ kąt, jaki jeden z promieni koła tworzy z osią; spółrzędnemi punktu ostecznego tego promienia będą

$$x = a \operatorname{dos} \varphi\,, \qquad y = a \operatorname{wst}$$

Promień odbity będzie tworzył z osią odciętych kąt 2φ, a równaniem jego będzie

$$\mathrm{Y} - a \operatorname{wst} \varphi = \operatorname{st} 2\varphi\, (\mathrm{X} - a \operatorname{dos} \varphi)$$

lub

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Y} \operatorname{dos} 2\varphi - \mathrm{X} \operatorname{wst} 2\varphi + a \operatorname{wst} \varphi = 0$$

Aby znaleźć obwijającą tych promieni, należy wyrugować parametr φ z tego ostatniego równania, i równania utworzonego, biorąc jego pochodnę [**443**] względem φ:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{Y} \operatorname{wst} 2\varphi + \mathrm{X} \operatorname{dos} 2\varphi - \frac{a}{2} \operatorname{dos} \varphi = 0$$

otrzymamy, rozwiązując te równania co do X, Y

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{a}{4}(3 \operatorname{dos} \varphi - \operatorname{dos} 3\varphi) \\ \mathrm{Y} &= \frac{a}{4}(3 \operatorname{wst} \varphi - \operatorname{wst} 3\varphi) \end{aligned} \right.$$

Widzimy porównywając te równania z równaniami [**457** (2)] otrzymanemi poprzednio, że obwijająca ta, czyli linja paląca koła, jest epicykloidą zewnętrzną utworzoną przez punkt koła ruchomego promienia $\frac{1}{4}\,a$ toczącego się po okręgu współśrodkowym dan mu, promienia $\frac{1}{2}\,a$.

Zadania do rozwiązania.

1. *Znaleźć promień krzywości i rozwiniętą linji łańcuchowéj :*

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

Promień krzywości równa się $\frac{y^2}{c}$; równaniem różniczkowém rozwiniętéj jest

$$2c\frac{dy_1}{dx_1}+\left[(x_1+c)^2-4c^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

Linja łańcuchowa jest to linja jaką przybiera nić ciężka, jednorodna, przyczepiona w dwóch punktach, pod wpływem ciężkości.

2. *Znaleźć promień krzywości i rozwiniętą paraboli półsześciennéj:*

$$3ay^2=2x^3$$

Promień krzywości równa się $\frac{(2a+3x)^3 x}{3a^2}$; równaniem rozwiniętéj jest

$$81ay_1{}^2=16\,[2a\pm(a^2-6ax_1)^{\frac{1}{2}}]^2\,[\pm(a^2-6ax_1)^{\frac{1}{2}}-a]$$

3. *Promień krzywości lemniskaty Bernouill'ego :*

$$\rho^2=a^2\,\mathrm{dos}\,2\omega$$

równa się $\frac{a^2}{3\rho}$. Krzywę tę otrzymać można rzucając środek hyperboli równoramiennéj (t. j. mającéj dwie osie równe $a=b$) na styczne.

4. *Znaleźć obwijającą elips współśrodkowych, mających kierunek osi wspólny i summę długości osi stałą.*

Jeżeli oznaczymy stałą przez k, równaniem układu tych elips będzie :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(k^2-a)}=1$$

a równaniem obwijającéj

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}$$

linja ta jest więc epicykloidą [**457**].

5. *Znaleźć obwijającą prostéj ograniczonéj, mającéj punkta swe ostateczne na dwóch osiach prostopadłych.*

Obwijająca jest tą samą epicykloidą co w zadaniu 4.

6. *Niech będzie elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

i jakakolwiek linja drugiego stopnia

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+Ey+1=0 \tag{2}$$

Z jakiegokolwiek punktu téj ostatniéj linji poprowadzimy dwie styczne do elipsy (1) *i połączmy cięciwą tak otrzymane punkta styczności : znaleźć obwijającą tych cięciw, gdy punkt z którego prowadzimy styczne, zmienia swe położenie na linji* (2).

Równaniem téj obwijającéj jest

$$(C-E^2)\frac{x^2}{a^4}-2(B-DE)\frac{xy}{a^2b^2}+(A-D^2)\frac{y^2}{b^4}+2(CD-DE)\frac{x}{a^2}$$
$$+2(AE-BD)\frac{y}{b^2}+AC-B^2=0.$$

ROZDZIAŁ XXII

O STYCZNOŚCI W PRZESTRZENI

Prosta styczna i płaszczyzna normalna do krzywéj. — Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni. — Różniczka łuku krzywej w przestrzeni. — O styczności krzywéj z powierzchnią. — Powierzchnia ściśle styczna. — Płaszczyzna ściśle styczna. — Normalna główna. — Kula ściśle styczna. — O styczności krzywych pomiędzy sobą w przestrzeni. — Krzywe ściśle styczne. — O styczności powierzchni pomiędzy sobą. — Powierzchne ściśle styczne. — O punktach nadzwyczajnych powierzchni. —

465. Prosta styczna i płasczyzna normalna do krzywych w przestrzeni. Krzywa, któréj wszystkie punkta nie są zawarte na jednéj płasczyznie, nazywa się krzywą *skośną*.

Mówiąc o linjach w przestrzeni, rozumieć będziemy wszelkie linje tak płaskie jak skośne, uważając pierwsze jako szczególny przypadek drugich.

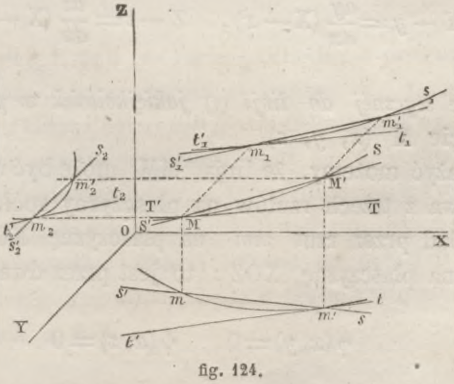


fig. 124.

Niech będzie krzywa MM′ (fig. 124) odniesiona do trzech osi OX, OY, OZ w przestrzeni [65], dana przez równanie

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0$$

niech będą x, y, z spółrzędne jakiegokolwiek punktu M téj krzywéj; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ spółrzędne punktu nieskończenie zbliżonego M' na krzywéj. Równanie siecznéj MM' otrzymamy z łatwością biorąc równanie ogólne prostéj w przestrzeni [69] i wyrażając, że prosta ta przechodzi przez M i M'; równanie to będziemy mogli przedstawić pod kształtem

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x), \qquad Z - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X - x)$$

gdzie X, Y, Z wyrażają spółrzędne bieżące siecznéj SS'. Zważywszy, że y i z są funkcjami w ogólności ciągłemi zmiennéj niezależnéj x danemi przez równania (1) i przechodząc do granicy, gdy punkt M' zbliża się do punkiu M, otrzymamy

$$(2) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x)$$

równanie stycznéj do linji (1) *jakiejkolwiek w przestrzeni*, w punkcie M (x, y, z).

Zauważyć możemy, że linja MM' może być daną także przez dwa z trzech rzutów na płasczyzny spółrzędnych: naprzykład przez rzut mm na płasczyznę XOY i rzut $m_1\ m_1'$ na płasczyznę XOZ: to jest przez dwa równania

$$(1') \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, z) = 0$$

otrzymane rugując kolejno z i y z równań (1); równanie (2) wyrażają proste styczne do tych rzutów, które są rzutami stycznéj do linji MM′ w przestrzeni. Zadanie stycznéj do linji w przestrzeni zostaje w ten sposób sprowadzoném do zadania stycznych do krzywych na płaszczyznie: roztrząsanie własności i przypadków szczególnych lub nadzwyczajnych tego zadania jest to samo co podane wyżéj w Rozd. XIX: nie zatrzymujemy się więc dłużéj nad niém.

466. Równania *stycznéj w przestrzeni* mogą być napisanemi pod kształtém symetrzycznym

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \tag{3}$$

W razie spółrzędnych prostokątnych, nazwawszy α, β γ, kąty prostéj z osiami, równanie téj prostéj może być przedstawianém pod kształtem [**69** (3)]

$$\frac{X-x}{\text{dos}\,\alpha}=\frac{Y-y}{\text{dos}\,\beta}=\frac{-z}{\text{dos}\,\gamma}$$

Widzimy ztąd, że: *w razie spółrzędnych prostokątnych, dostawy kątów, jakie styczna w punkcie* x, y, z, *krzywéj tworzy z osiami, są proporcjonalne różniczkom* dx, dy, dz, *spółrzędnych punktu styczności.* Kąty α, β, γ mogą być uważane jako utworzone przez jeden lub drugi z kierunków MT, MT′ stycznéj z kierunkami dodatnemi osi, w sposób podany już powyżéj [**425**] i liczone zatém od 0 do 2π; znaki różniczek dx, dy, dz będą w takim razie wyznaczały znaki dostaw α, β γ.

467. Równaniem płaszczyzny jakiejkolwiek prostopadłéj do stycznéj MT będzie [**68** (2)]

$$X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma = c$$

oznaczając przez X, Y, Z spółrzędne bieżące punktów płaszczyzny, przez c odległość téj płaszczyzny od początku, przez α, β, γ kąty prostéj MT z osiami. Wyrażając, że płaszczyzna ta przechodzi przez punkt M (x, y, z) a zatém że

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = c$$

otrzymamy odejmując to równanie od poprzedzającego

$$(X - x) \cos\alpha + (Y - y) \cos\beta + (Z - z) \cos\gamma = 0$$

równanie płaszczyzny prostopadłéj do stycznéj w punkcie styczności. Płaszczyzna ta nazwaną została *płaszczyzną normalną*. W ostatniém równaniu zastąpić można $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ przez ilości proporcjonalne dx, dy, dz (bo dzieląc naprzykład przez $\cos\alpha$, otrzymamy $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{dz}{dx}$): będziemy mieli w ten sposób

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0. \tag{4}$$

równanie płaszczyzny normalnéj do linji jakiejkolwiek w przestrzeni, w punkcie téj linji, którego spółrzędnemi są x, y, z.

468. Równania powyższe prostéj stycznéj wymagają znajomości pochodnych $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, lub różniczek dx, dy, dz: jeżeli krzywa daną jest najogólniéj przez dwa równania (1) pochodne te, lub różniczki zastąpić należy przez pochodne częściowe funkcji f i F. Różniczkując (1), otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

a rugując dx, dy, dz z tych równań i równań (3), otrzymamy od razu, zważywszy na jednorodność i symetrją tych równań

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0\\&(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0\end{aligned}\right.$$

równania stycznéj do krzywéj w przestrzeni, w punkcie (x, y, z), które zastępują równania (2) lub (3). Każde z tych równań przedstawia płaszczyznę [**69**] : przecięciem tych dwóch płaszczyzn jest prosta, która jest styczną szukaną, z wyjątkiem wszakże przypadku, w którym pochodne częściowe wchodzące w (5) nie mają wartości oznaczonych, lub czynią zadodyć warunkowi

$$(6)\qquad \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

w takim razie układ (5) nie przedstawiałby linji; bo dwa równania (5) stanowiłyby jedno i to samo równanie.

Każde z równań (5) przedstawiających płaszczyznę zależy tylko od jednéj z dwóch powierzchni (1), których przecięciem jest krzywa dana. Zobaczymy za chwilę znaczenie tych płaszczyzn względem powierzchni (1).

469. Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni. Niech będzie powierzchnia odniesiona do układu spółrzędnych prostolinijnych i

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0$$

jéj równanie [**64**]. Weźmy na téj powierzchni punkt jakikolwiek M którego spółrzędnemi są x, y, z, i przez ten punkt nakréślmy na powierzchni krzywę jakąkolwiek; krzywa ta może być uważaną jako przecięcie powierzchni danej (1) z inną powierzchnią, której równaniem niech będzie

$$(2)\qquad F(x, y, z) = 0$$

Styczna do téj linji nakreślonéj na powierzchni (1) przez punkt M będzie daną przez układ równań [**468.**]

$$(3)\qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$(4)\qquad (X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Lecz równanie (3) będzie tém samém jakąkolwiek weźmiemy funkcję F, bo równanie to zależy tylko od funkcyj f: jakąkolwiek więc nakreślimy krzywę na powierzchni danej (1) przez punkt M (x, y, z), styczna do téj krzywéj będzie się znajdować na płaszczyznie (3), bo jest daną przez przecięcie się téj płaszczyzny z płaszczyzną (4), różną dla różnéj krzywéj. Płaszczyzna (3) jest więc miejscem geometryczném prostych stycznych do różnych krzywych nakreślonych na powierzchni danéj przez punkt M : nazywamy ją *płaszczyzną styczną* do powierzchni (1) w punkcie, którego spółrzędnemi są x, y, z.

470. Równaniem płaszczyzny stycznéj do powierzchni (1) jest więc równanie

$$(3)\qquad (X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

byleby stosunek dwóch pochodnych częściowych funkcji f do trzeciéj, wziętych względem x, y, z, był oznaczonym : w przeciwnym razie płaszczyzna styczna nie jest oznaczoną w punkcie x, y, z, który jest wtedy *punktem nadzwyczajnym powierzchni*.

471. *Normalną* do powierzchni w danym punkcie nazywamy prostopadłą do płaszczyzny stycznéj poprowadzonéj w tym punkcie do powierzchni. W układzie osi prostokątnym, normalna ta w punkcie x, y, z powierzchni danéj przez równanie (1) jako prostopadła do płaszczyzny (3) [**68** (2)], tworzy z osiami kąty, których dostawy są proporcjonalne pochodnym $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$; równanie więc [**69** (3)]

$$5)\qquad \frac{X-x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{Y-y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}=\frac{Z-z}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

jest *równaniem normalnéj* w punkcie x, y, z, poprowadzonéj do powierzchni (1) ; X, Y, Z oznaczają spółrzędne bieżące punktów téj prostéj.

472. Jeżeli w równaniu (1) będziemy uważali x, y za zmienne niezależne, z za funkcję tych zmiennych i jeżeli oznaczymy przez skrócenie [217]

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

pochodne częściowe dane przez równanie (1) powierzchni, równanie:

$$dz=pdx+qdy$$

będzie *równaniem różniczkowém* powierzchni (1).

Różniczkując (1) otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

a równanie płaszczyzny stycznéj stanie się

(6) $$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$

Równanie normalnéj w układzie osi prostokątnych będzie

(7) $$\begin{cases} X-x+p(Z-z)=0 \\ Y-y+q(Z-z)=0 \end{cases}$$

Wszelką płaszczyznę zawierającą normalnę do powierzchni, nazywamy *płaszczyzną normalną.*

473. Równanie płaszczyzny stycznéj w spółrzędnych jednorodnych. Oznaczając spółrzędne prostolinijne punktu w przestrzeni przez stosunki

$$\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$$

trzech zmiennych x, y, z, do czwartéj dowolnéj t, możemy przedstawić wszelką powierzchnię przez równanie jednorodne

$$f(x, y, z, t)=0 \tag{1}$$

co do czterech zmiennych x, y, z, t. Wiemy [**33**] że jeżeli m jest stopniem jednorodności, to

$$f(x, y, z, t)=t^m f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$$

a zatém

$$t\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{x}{t}\right)}, \quad t\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{y}{t}\right)}, \quad t\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{z}{t}\right)}.$$

Zastępując w równaniu (3) płasczyzny stycznéj x przez $\frac{x}{t}$, y przez $\frac{y}{t}$, z przez $\frac{z}{t}$ i podobnież X, Y, Z przez $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$, $\frac{Z}{T}$ otrzymamy:

$$\left(\frac{X}{T}-\frac{x}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{Y}{T}-\frac{y}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{Z}{T}-\frac{z}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{T}{T}-\frac{t}{t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

dzieląc przez t i dodając dla symetrji ostatni wyraz, który jest zerem.

Lecz wiemy również [**226**] że

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+t\frac{\partial f}{\partial t}=mf=0$$

a więc *równanie płasczyzny stycznéj w spółrzędnych jednorodnych* stanie się

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2}$$

Jeżeli równanie (1) jest stopnia *m*go, równanie (2) jest stopnia $m-1$ [225] a zatém :

Równanie płaszczyzny stycznéj jest względem spółrzędnych punktu styczności stopnia o jedność mniejszego od równania powierzchni.

Równanie prostéj w przestrzeni, stycznéj do krzywéj danéj przez równania

$$f(x, y, z, t)=0\ ,\quad F(x, y, z, t)=0$$

w spółrzędnych jednorodnych, będzie

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}+Z\frac{\partial F}{\partial z}+T\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

474. Różniczka łuku krzywéj w przestrzeni. Długością łuku krzywéj skośnéj, pobobnie jak krzywéj płaskiéj, nazywać będziemy granicę obwodu linji łamanéj wpisanéj w tę krzywę t. j. utworzonéj przez cięciwy nieskończenie małe krzywéj. Obwód ten zdąża do granicy oznaczonéj : w saméj rzeczy, rzucając pewną część skończoną téj krzywéj na płaszczyznę nie prostopadłą do żadnéj ze stycznych do krzywéj w uważanéj części, oznaczając przez c jednę z cięciw nieskończenie małych krzywéj w przestrzeni, przez c_1 jéj rzut, przez a kąt jaki kierunek c tworzy z płaszczyzną rzutów, otrzymamy

$$\Sigma c=\Sigma\frac{c_1}{\text{dos}\, a}$$

gdzie znak Σ oznacza summę rozciągającą się do części obwodu uważanego. Oznaczając przez A największy z kątów jakie styczna do krzywéj uważanéj utworzy z płaszczyzną rzutów, i przechodząc do granicy otrzymamy

$$\operatorname{gr} \Sigma c < \frac{\operatorname{gr} \Sigma c_1}{\operatorname{dos} A} \quad \text{czyli} \quad \operatorname{gr} \Sigma c < \frac{l_1}{\operatorname{dos} A}$$

oznaczając prze l_1 długość łuku krzywéj [**421**] która jest rzutem części uważanéj krzywéj danéj. Lecz Σc zwiększa się gdy każda z cięciw c się zmniejsza, (naprzykład podwajając ciągle liczbę cięciw wpisanych) : bo każdą cięciwę zastępujemy w takim razie przez dwie inne które z poprzednią tworzą trójkąt; zwiększając się ustawicznie i pozostając ciągle mnejszą od ilości oznaczonéj $\frac{l_1}{\operatorname{dos} \alpha}$, summa ta czyli obwód linji łamanéj zdąża do granicy oznaczonéj [89]. Granica jest tą samą jakkolwiek będziemy wpisywać linję łamaną : bo wpisując dwie różne linje łamane i prowadząc przez wierzchołki jednéj i drugiéj, płaszczyzny równoległe prostopadłe do płaszczyzny rzutu, części dwóch linij łamanych zawarte pomiędzy odpowiedniemi płaszczyznami zdążając do kierunku wspólnego stycznéj, zdążają do równości, a więc granice ich summ są także równemi [124]. Granica więc obwodu linji łamanéj wpisanéj w część krzywéj danéj do któréj styczna nie tworzy nigdzie kątą prostego z pewną płaszczyzną rzutu, zdąża zawsze do granicy oznaczonéj; a że każda krzywa może być podzieloną na pewną liczbę takich części, długość linji łamanéj wpisanéj w całą krzywę zdąża również do granicy oznaczonéj, którą nazywamy *długością krzywéj*.

Dla krzywych skośnych, podobnie jak dla krzywych płaskich, *stosunek łuku nieskończenie małego krzywéj w przestrzeni do cięciwy, zdąża do jedności, gdy łuk zdąża do zera.* W rzeczy saméj, oznaczając łuk ten przez Δl, cięciwę przez Δc, ich rzuty na płaszczyznę, która nie tworzy ze styczną do tego łuku kąta prostego przez $\Delta ł_1$, Δc_1: przez A kąt największy stycznéj do łuku, przez A_1 kąt cięciwy Δc z płasczyzną rzutu, mamy

$$\Delta ł < \frac{\Delta ł_1}{\text{dos}\,A}, \qquad \Delta c = \frac{\Delta c_1}{\text{dos}\,A_1}$$

a więc

$$\frac{\Delta ł}{\Delta c} < \frac{\Delta ł_1}{\Delta c_1}\,\frac{\text{dos}\,A_1}{\text{dos}\,A}$$

Gdy łuk zdąża do zera, kąty A_1, A zdążają do granicy wspólnéj kąta α stycznéj w początku łuku z płasczyzną rzutu, stosunek $\frac{\Delta ł_1}{\Delta c_1}$ łuku nieskończenie małego na płasczyznie do swéj cięciwy zdąża do jedności : stosunek więc $\frac{\Delta ł}{\Delta c}$ pozostając ciągle większym od jedności, jest mniejszym od wyrażenia $\frac{\Delta ł_1}{\Delta c_1}\,\frac{\text{dos}\,A_1}{\text{dos}\,A}$ zdążającego do jedności; granicą tego stosunku jest więc jedność :

$$\text{gr}\,\frac{\Delta ł}{\Delta c} = 1$$

475. Aby znaleźć teraz wyrażenie różniczki łuku $dł$, weźmy odległość Δc dwóch punktów ostatecznych łuku nieskończenie małego $\Delta ł$ w przestrzeni, których spółrzędnemi są x, y, z i $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$: otrzymamy

$$\Delta c^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

a zatém

$$\frac{\Delta c^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta z^2}$$

przechodząc do granicy i zważywszy, że za Δc podstawić możemy Δl na zasadzie przed chwilą udowodnionéj własności, nie naruszając granicy [**125**], otrzymamy

$$\frac{dl^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}$$

czyli

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

zaś

(1) $$dl = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

znak $+$ stosuje się, podobnie jak dla łuku na płaszczyznie, do przypadku w którym długość łuku zwiększa się, znak $-$ do przypadku w którym długość ta się zmniejsza, gdy zwiększamy zmienną niezależną: zależy więc od dowolnie obranego na krzywéj punktu, od którego liczymy długości łuków.

476. W przypadku spółrzędnych pochyłych OX, OY, OZ otrzymalibyśmy, nazywając kąty

$$\mathrm{YOZ} = a, \quad \mathrm{XOZ} = b, \quad \mathrm{XOY} = c$$

wzór na odległość Δc punktów x, y, z i $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, następujący:

$$\Delta c^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 2\Delta y\Delta z \operatorname{dos} a + 2\Delta x\Delta z \operatorname{dos} b + 2\Delta x\Delta y \operatorname{dos} c$$

a ztąd, postępując jak powyżéj

(2) $$dl = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dydz \operatorname{dos} a + 2dxdz \operatorname{dos} b + 2dydz \operatorname{dos} c}.$$

W przypadku spółrzędnych biegunowych [**71**] związanych z prostokątnemi za pomocą wzorów

$$x = \rho \operatorname{wst} \theta \operatorname{dos} \psi, \quad y = \rho \operatorname{wst} \theta \operatorname{wst} \psi, \quad z = \rho \operatorname{dos} \theta$$

różniczkując

$$dx = d\rho \text{ wst } \theta \text{ dos } \psi + \rho \text{ dos } \theta \text{ dos } \psi d\theta - \rho \text{ wst } \theta \text{ wst } \psi d\psi$$
$$dy = d\rho \text{ wst } \theta \text{ wst } \psi + \rho \text{ dos } \theta \text{ wst } \psi d\theta + \rho \text{ wst } \theta \text{ dos } \psi d\psi$$
$$dz = d\rho \text{ dos } \theta - \rho \text{ wst } \theta d\theta$$

i podstawiając w (1), otrzymamy wyrażenie

(3) $$dl = \pm \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \text{ wst}^2 \theta d\psi^2}$$

477. Kąty stycznéj do krzywéj w przestrzeni z osiami. Nazwawszy α, β, γ, kąty jakie styczna do krzywéj w przestrzeni w punkcie M, którego spółrzędnemi są x, y, z, tworzy z osiami prostokątnemi OX, OY, OZ, wiemy, że dostawy tych kątów są proporcjonalne do różniczek dx, dy, dz [466]

$$\frac{\text{dos } \alpha}{dx} = \frac{\text{dos } \beta}{dy} = \frac{\text{dos } \gamma}{dz}$$

a na zasadzie znanéj własności stosunków równych, każdy z powyższych stosunków będzie równym

$$\pm \frac{\sqrt{\text{dos}^2 \alpha + \text{dos}^2 \beta + \text{dos}^2 \gamma}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{dl}$$

zważywszy że [66]

$$\text{dos}^2\alpha + \text{dos}^2\beta + \text{dos}^2\gamma = 1.$$

Będziemy więc mieli

$$\frac{\text{dos } \alpha}{dx} = \frac{\text{dos } \beta}{dy} = \frac{\text{dos } \gamma}{dz} = \frac{1}{dl}$$

a ztąd

(1) $$\operatorname{dos}\alpha=\frac{dx}{dł},\quad \operatorname{dos}\beta=\frac{dy}{dł},\quad \operatorname{dos}\gamma=\frac{dz}{dł}$$

czyli

(2) $$dx=dł\operatorname{dos}\alpha,\quad dy=dł\operatorname{dos}\beta,\quad dz=dł\operatorname{dos}\gamma$$

Co do sposobu w jaki liczyć należy kąty α, β, γ i znaku z jakim uważać trzeba $dł$, zrobimy tę samą uwagę co dla krzywych na płasczyznie [**425**]: kąty α, β, γ będą liczone od zera do 2π: znak $+$ różniczki $dł$ będzie odpowiadał jednemu kierunkowi stycznéj, począwszy od punktu M, znak — téj różniczki, kierunkowi drugiemu; jeżeli dx i $dł$ naprzykład są tego samego znaku, kąt α będzie uważanym mniejszym od 2π, w razie znaków przeciwnych, większym.

O styczności linji krzywéj z powierzchnią w przestrzeni.

478. Rzęd styczności. Niech będzie powierzchnia P i krzywa K w przestrzeni przechodząca przez punkt M powierzchni (fig. 125); S płasczyzna styczna w punkcie

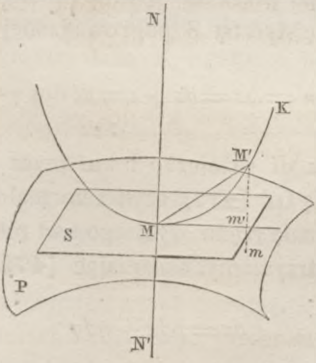


fig. 125.

M, do powierzchni, NN prosta normalna w tym punkcie. Z punktu M' krzywéj, nieskończenie zbliżonego do punktu M, poprowadźmy do płasczyzny stycznéj S prostopadłą $M'm'$, któréj kierunek przetnie powierzchnię w punkcie m.

Jeżeli odległość M'm *punktu na krzywéj od powierzchni, liczona równolegle do normalnéj* NN' *w punkcie wspólnym powierzchni z krzywą, jest nieskończenie małą rzędu* $n+1$, *powiadamy, że między powierzchnią i krzywą zachodzi styczność rzędu* n *o jedność niższego.*

Jeżeli odległość ta $M'm$ jest nieskończenie małą pierwszego rzędu, styczność będzie rzędu zero, to jest krzywa K nie będzie styczną z powierzchnią P w punkcie M; jeżeli $M'm$ jest drugiego rzędu, styczność będzie pierwszego rzędu i t. d.

479. Twierdzenie. *Jeżeli krzywa ma w danym punkcie styczność z powierzchnią jakiegokolwiek rzędu większego od zera, styczna do krzywéj w tym punkcie znajduje się na płasczyźnie stycznéj do powierzchni.* W rzeczy samej, weźmy układ spółrzędnych prostokątnych, których oś OZ jest normalną NN' i niech będą x, y, z spółrzędne punktu M, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ spółrzędne punktu M', $x+\Delta_1 x$, $y+\Delta_1 y$, $z+\Delta_1 z$ spółrzędne punktu m (przyczém $x=0$, $y=0$); otrzymamy oznaczając przez m' spodek prostopadłéj z punktu M' na płasczyznę styczną S poprowadzonéj

$$M'm' = \Delta z = dz + \varepsilon = dl \cos\gamma + \varepsilon$$

oznaczając przez dl różniczkę łuku, przez γ kąt stycznéj do krzywéj z osią OZ [**477**], czyli z normalną NN', przez ε nieskończenie małą rzędu wyższego nad pierwszy. Dla powierzchni P otrzymamy, oznaczając [**472**] przez

$$dz = pdx + qdy$$

równanie różniczkowe powierzchni,

$$m'm = \Delta_1 z = p\Delta_1 x + q\Delta_1 y + \varepsilon'$$

gdzie ε' oznacza podobnie jak ε nieskończenie małą rzędu wyższego nad pierwszy. Lecz aby oś OZ była normalną NN' trzeba żeby równania normalnéj [**472** (7)] stały się $X=0$, $Y=0$ dla $x=0$, $y=0$; a zatém żeby w tym punkcie

$$p=0, \quad q=0$$

co nam daje

$$m'm=\varepsilon'$$

Lecz odległość $M'm$ jest summą lub różnicą odległości $M'm'$ i $m'm$:

$$M'm=dł \operatorname{dos}\gamma+\varepsilon\pm\varepsilon'$$

aby więc ta odległość była rzędu wyższego nad pierwszy, trzeba żeby

$$\operatorname{dos}\gamma=0$$

czyli żeby styczna do krzywéj w punkcie M tworzyła kąt prosty z normalną NN' do powierzchni, to jest znajdowała się na płaszczyznie stycznéj.

480. Powierzchnie ścisle styczne do krzywych. Niech będzie krzywa dana K i gatunek powierzchni

$$f(x, y, z, a_0, a_1, \dots a_n)=0 \tag{1}$$

zawierający $n+1$ parametrów $a_0, a_1, \dots a_n$ niezależnych od spółrzędnych x, y, z, wyznaczających dla każdéj nadanéj im wartości, osobną powierzchnię z gatunku (1). Możemy wyznaczyć jeden z tych parametrów, naprzykład a_0 tak, żeby powierzchnia (1) miała punkt dany M wspólny z krzywą K; drugi parametr a_1 tak, żeby w tym punkcie zachodziła styczność pierwszego rzędu i t. d. Jeżeli wyznaczymy wszystkie $n+1$ parametrów powierzchni (1) w podobny sposób, możemy uczynić powierzchnię tę styczną $n$go rzędu do krzywéj danéj : w ogólności styczność ta będzie rzędu najwyższego z gatunku powierzchni (1) i tylko w szczególnych punktach krzywéj, rzęd styczności jéj z powierzchnią (1) może być wyższym. Powierzchnię (1) zawierającą $n+1$ parametrów i styczną $n$go rzędu do krzywéj danéj, nazywamy powierzchnią *ściśle styczną*.

481. Płaszczyzna ściśle styczna. Weźmy jako szczególny przypadek powierzchni (1) płaszczyznę daną przez równanie

$$aX+bY+cZ-p=0 \tag{2}$$

gdzie a, b, c oznaczają dostawy kątów, jakie prostopadła do płaszczyzny tworzy z osiami spółrzędnych, p odległość płaszczyzny (2) od początku spółrzędnych [**68**]. W równaniu płaszczyzny mamy trzy parametra dowolne, (które otrzymamy dzieląc równanie (2) przez jednę ze stałych a, b, c, p przez co równanie to zawierać będzie tylko trzy stosunki pozostałych do téj jednéj) : płaszczyzna ściśle styczna będzie więc miała styczność drugiego rzędu z krzywą daną K. Niech będą x, y, z spółrzędne punktu M, wspólnego krzywéj i płaszczyznie, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ spółrzędne punktu nieskończenie zbliżonego M′, z którego poprowadziwszy prostopadłą do płaszczyzny M′m' i nazwawszy długość jéj δ, chcemy uczynić długość tę nieskończenie małą trzeciego rzędu. Aby otrzymać wyrażenie téj długości, wyobraźmy sobie na chwilę płaszczyzny spółrzędnych przeniesione równolegle do punktu M′ jako początku; równanie płaszczyzny stanie się [**67**]

$$a(X'+x+\Delta x)+b(Y'+y+\Delta y)+c(Z'+z+\Delta z)-p=0$$

a zatém odległością téj płaszczyzny od nowego początku, czyli punktu M' będzie summa wyrazów ostatniego równania, które nie zawierają spółrzędnych X', Y' i Z' [**68**]; otrzymamy zatém

$$\pm\delta = a(x+\Delta x) + b(y+\Delta y) + c(z+\Delta z) - p$$

wyrażenie, które chcemy uczynić nieskończenie małém trzeciego rzędu, wyznaczając w stosowny sposób a, b, c, p.

Wzór Taylor'a daje nam

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{1.2} + \varepsilon_3$$

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \varepsilon'_3$$

$$\Delta z = dz + \frac{d^2z}{1.2} + \varepsilon''_3$$

gdzie ε_3, ε'_3, ε''_3 są nieskończenie małemi przynajmniej trzeciego rzędu. Podstawiając w wyrażenie na $\pm\delta$, otrzymamy

$$\pm\delta = (ax+by+cz-p) + (adx+bdy+cdz)$$
$$+\frac{1}{2}(ad^2x+bd^2y+cd^2z) + (a\varepsilon_3+b\varepsilon'_3+c\varepsilon''_3)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby to ostatnie wyrażenie było nieskończenie małą przynajmniéj trzeciego rzędu, jest żeby zachodziły równania

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &ax+by+cz-p=0\\ &adx+bdy+cdz=0\\ &ad^2x+bd^2y+cd^2z=0\end{aligned}\right.$$

Pierwsze z tych równań wyraża, że płaszczyzna przechodzi przez punkt M (x, y, z) i wyznacza odległość p płaszczyzny szukanéj od początku, gdy dostawy a, b, c kątów jéj z płasczyznami spółrzędnych są znane; dwa ostatnie z równań (3) dają nam

$$(4) \qquad \frac{a}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{b}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{c}{dxd^2y - dyd^2x}$$

czyli wyznaczają dostawy a, b, c. Otrzymamy wyrażenia tych dostaw równając kolejno każdy ze stosunków (4) stosunkowi pierwiastku summy kwadratów liczników (która jest równą jedności, jako summie kwadratów dostaw kątów utworzonych przez prostą z osiami [**66**]) do pierwiastku summy kwadratów mianowników: będziemy mieli wartości

$$(5) \left\{ \begin{aligned} a &= \pm \frac{dyd^2z - dzd^2y}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}} \\ b &= \pm \frac{dzd^2x - dxd^2z}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}} \\ c &= \pm \frac{dxd^2y - dyd^2x}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}} \end{aligned} \right.$$

Równanie zaś *płasczyzny ściśle stycznéj* otrzymamy odejmując pierwsze z równań (3) od (2) (aby wyrugować p) i zastępując a, b, c przez wyrażenia różniczkowe proporcjonalne na mocy (4). Równanie to będzie

$$(6) \qquad (dyd^2z - dzd^2y)(X - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(Y - y) \\ + (dxd^2y - dyd^2x)(Z - z) = 0$$

482. Uwaga. Gdybyśmy chcieli, żeby odległość δ punktu na krzywéj od płasczyzny była nieskończenie małą drugiego tylko rzędu, dość byłoby założyć dwa pierwsze równania (3), coby nam dało wraz z równaniem (2) płasczyzny:

$$\begin{cases} a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0 \\ a\,dx+b\,dy+c\,dz=0 \end{cases}$$

równania, które po wyrugowaniu jednego ze stosunków dwóch ze stałych a, b, c do trzeciéj, dadzą równanie zawierające jeszcze jeden z tych stosunków to jest, jeden parametr dowolny. Równania te przedstawiają więc płasczyznę nieoznaczoną zawierająca styczną do krzywéj: są one bowiem zawsze sprawdzone przez równania stycznéj

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

Dwa pierwsze równania (3) wyrażają więc warunek, żeby płasczyzna zawierała styczną do krzywéj, nie wyznaczając zresztą téj płasczyzny.

483. Dostawy a, b, c kątów, jakie prostopadła do płasczyzny ściśle stycznéj tworzy z osiami, lub jakie sama płasczyzna ściśle styczna tworzy z płasczyznami spółrzędnych, można wyrazić w nieco prostszy sposób, wprowadzając różniczkę łuku dl. Mamy bowiem [**475**]

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

a różniczkując

$$dld^2l=dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z$$

a zatém, oznaczając dla skrócenia przez D wspólny mianownik wyrażeń (5)

$$D=\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}$$

rozwijając kwadraty i podstawiając $dłd^2ł$:

$$\text{(7)} \qquad D = dł\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z) - (d^2ł)^2}$$

Możemy także napisać, jak widać z łatwością rozwijając

$$\text{(8)} \qquad D = \sqrt{(dłd^2x - dxd^2ł)^2 + (dłd^2y - dyd^2ł)^2 + (dłd^2z - dzd^2ł)^2}$$

lub jeszcze

$$\text{(9)} \qquad D = dł^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{dł}}{dł}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{dł}}{dł}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{dł}}{dł}\right)^2}$$

zmienna niezależna jest w tych wzorach jakąkolwiek.

484. Twierdzenie. *Płaszczyzna ściśle styczna do krzywéj jest granicą płaszczyzny przechodzącéj przez styczną i punkt nieskończenie blizki punktu styczności, lub przez trzy punkta krzywéj znajdujące się w odległościach nieskończenie małych, gdy odległości te zdążają do zera.*

Załóżmy naprzód, że płaszczyzna zawiera styczną do krzywéj, to jest, że zachodzą dwa pierwsze równania (3) [**482** Uw.]; odejmując pierwsze z nich od równania płaszczyzny (2), otrzymamy:

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

pozostanie jeszcze równanie

$$adx + bdy + cdz = 0$$

Jeżeli płaszczyzna ma przechodzić nadto przez punkt nieskończenie blizki punktu M na krzywéj, spółrzędne

$$x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z$$

muszą czynić zadość równaniu płasczyzny: będziemy więc mieli warunek

$$a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z = 0 \,.$$

Podstawiając za Δx, Δy, Δz rozwinięcia tych przyrostków podług wzoru Taylor'a (zmiennę niezależną przypuszczamy jakąkolwiek)

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{1.2} + \varepsilon_3$$

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \varepsilon'_3$$

$$\Delta z = dz + \frac{d^2z}{1.2} + \varepsilon''_3$$

gdzie ε_3, ε'_3 ε''_3 oznaczają nieskończenie małe przynajmniéj trzeciego rzędu, otrzymamy

$$\frac{1}{2}\,(ad^2x + bd^2y + cd^2z) + (a\varepsilon_3 + b\varepsilon'_3 + c\varepsilon''_3) = 0$$

Jeżeli podzielimy to ostatnie równanie przez kwadrat z przyrostku pewnéj zmiennéj niezależnéj t, otrzymamy

$$\frac{1}{2}\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{a\varepsilon_3 + b\varepsilon'_3 + c\varepsilon''_3}{dt^2} = 0$$

zważywszy, że summa $a\varepsilon_3 + b\varepsilon'_3 + c\varepsilon''_3$ jest nieskończenie małą trzeciego rzędu, przechodząc do granicy, będziemy mieli

$$\frac{1}{2}\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

czyli

$$aa^2x + bd^2y + ca^2z = 0$$

trzecie z równań (3): płaszczyzna więc przechodząca przez styczną i punkt nieskończenie blizki punktu styczności na krzywéj jest wyznaczoną przez te same równania (3), co płaszczyzna ściśle styczna; jest więc płaszczyzną ściśle styczną.

Weźmy teraz pod uwagę płaszczyznę przechodzącą przez trzy punkta M, M′, M″ nieskończenie zbliżone na krzywéj; przypuśćmy, że spółrzędne tych punktów zależą od pewnéj zmiennéj niezależnéj t i że punkt M odpowiada wartości t téj zmiennéj niezależnéj, punkt M′ wartości $t+\Delta t$, punkt M″ wartości $t+2\Delta t$; tak że

spółrzędnemi punktu M, będą x, y, z

spółrzędnemi punktu M′: $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$

spółrzędnemi punktu M″:

$$x+2\Delta x+\Delta^2 x,\quad y+2\Delta y+\Delta^2 y,\quad z+2\Delta z+\Delta^2 z$$

Równaniem płaszczyzny przechodzącéj przez punkt M będzie

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0$$

a warunkami żeby ta płaszczyzna przechodziła przez punkta M′, M″

$$a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z=0$$
$$a(2\Delta x+\Delta^2 x)+b(2\Delta y+\Delta^2 y)+c(2\Delta z+\Delta^2 z)=0$$

Ostatni warunek staje się na mocy przedostatniego

$$a\Delta^2 x+b\Delta^2 y+c\Delta^2 z=0$$

a dzieląc go przez Δt^2, poprzedni przez Δt, otrzymamy

$$a\frac{\Delta x}{\Delta t}+b\frac{\Delta y}{\Delta t}+c\frac{\Delta z}{\Delta t}=0$$

$$a\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}+b\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}+c\frac{\Delta^2 z}{\Delta t^2}=0$$

Przechodząc do granicy, mnożąc przez dt, dt^2, będziemy mieli

$$adx + bdy + cdz = 0$$
$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0$$

równania, z których wartości na a, b, c będą odpowiadały płasczyznie ściśle stycznéj [**481** (3)] : płasczyzna ta jest więc granicą płasczyzny przechodzącéj przez punkt dany M na krzywéj,i przez dwa punkta krżywéj nieskończenie zbliżone, gdy odległość ich od punktu M dąży do zera.

Jeżeli krzywa w przestrzeni staje się krzywą płaską, ponieważ styczna i krzywa znajdują się w takim razie na jednéj płaściyznie, płasczyzna ta jest właśnie płasczyzną ściśle styczną krzywéj : uważając łuk nieskończenie mały krzywéj skośnéj za łuk płaski, będący rzutem poprzedzającego na płasczyznę ściśle styczną w początku tego łuku, czynimy błąd nieskończenie mały przynajmniéj trzeciego rzędu : wszędzie więc gdzie chodzi o granicę stosunków lub summ nieskończenie małych pierwszego lub drugiego rzędu, za jeden z tych łuków możemy podstawić drugi, nie zmieniając téj granicy [**125**].

485. Normalna główna. *Normalną główną* do krzywéj w przestrzeni, nazywamy przecięcie się płasczyzny normalnéj z płasczyzną ściśle styczną. Prosta ta daną jest więc przez równanie płasczyzny normalnéj [**468**]

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0$$

i równanie (6) [**481**] płasczyzny ściśle stycznéj. Można otrzymać je w dogodniejszym kształcie, wprost, jako równanie prostéj prostopadłéj do stycznéj i znajdującéj się na płasczyznie ściśle stycznéj, to jest prostopadłéj do prostéj tworzącéj z osiami kąty, których dostawy nazwaliśmy a, b, c.

Nazywając α, β, γ kąty stycznéj, ξ, η, ζ kąty normalnéj głównéj z osiami, warunek prostopadłości daje nam [**66**]:

$$\text{dos}\,\alpha\,\text{dos}\,\xi + \text{dos}\,\beta\,\text{dos}\,\eta + \text{dos}\,\gamma\,\text{dos}\,\zeta = 0 \tag{10}$$

(spółrzędne przypuszczamy prostokątne). Prosta szukana ma być prostopadłą do prostéj, która tworzy z osiami kąty mające dostawy równe a, b, c, a więc

$$a\,\text{dos}\,\xi + b\,\text{dos}\,\eta + c\,\text{dos}\,\gamma = 0 \tag{11}$$

Lecz wiemy [**477**] że

$$\text{dos}\,\alpha = \frac{dx}{dł}, \quad \text{dos}\,\beta = \frac{dy}{dł}, \quad \text{dos}\,\gamma = \frac{dz}{dł}$$

a zatém [**66**]

$$\left(\frac{dx}{dł}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dł}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dł}\right)^2 = 1$$

co różniczkując, otrzymamy

$$\frac{dx}{dł}\,d\left(\frac{dx}{dł}\right) + \frac{dy}{dł}\,d\left(\frac{dy}{dł}\right) + \frac{dz}{dł}\,d\left(\frac{dz}{dł}\right) = 0 \tag{12}$$

Wiemy nadto [**481**] że

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = 0$$

czyli

$$ad\left(\frac{dx}{dł}\right) + bd\left(\frac{dy}{dł}\right) + cd\left(\frac{dz}{dł}\right) = 0 \tag{13}$$

Porównywając (12) i (13) z (10) i (11) widzimy że

$$\frac{\text{dos}\,\xi}{d\left(\frac{dx}{dł}\right)} = \frac{\text{dos}\,\eta}{d\left(\frac{dy}{dł}\right)} = \frac{\text{dos}\,\xi}{d\left(\frac{dz}{dł}\right)}$$

czyli

$$(14) \qquad \frac{\operatorname{dos} \xi}{d.\operatorname{dos} \alpha} = \frac{\operatorname{dos} \eta}{d.\operatorname{dos} \beta} = \frac{\operatorname{dos} \xi}{d.\operatorname{dos} \gamma}$$

to jest że *dostawy kątów normalnéj głównéj z osiami są proporcjonalne różniczkom dostaw kątów stycznéj z osiami.*

Równaniem *normalnéj głównéj* będzie więc [**69**]

$$(15) \qquad \frac{X - x}{d\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{Y - y}{d\left(\frac{dy}{dt}\right)} = \frac{Z - z}{d\left(\frac{dz}{dt}\right)}$$

486. Kula ściśle styczna do krzywéj w przestrzeni. Równanie kuli (w spółrzędnych prostokątnych)

$$(1) \qquad (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = r^2$$

zawiera cztery parametra : trzy spółrzędne środka y_0, x_0, z_0 i promień r. W każdym więc punkcie M krzywéj danéj K można wyznaczyć kulę, któréjby styczność z krzywą była trzeciego rzędu : kula ta będzie *kulą ściśle styczną.*

Niech będzie O środek kuli ściśle stycznéj do krzywéj K (fig. 126)

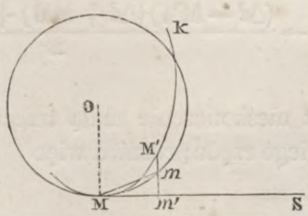


fig.126.

w punkcie M. Przez punkt M' nieskończenie zbliżony do punktu M i promień kuli MO poprowadzimy płaszczyznę, która przetnie kulę podług koła wielkiego O; płasczyznę zaś styczną do kuli w punkcie M podług prostéj MS stycznéj do okręgu O. Poprowadziwszy prostopadłę $M'm'$ do MS, która to prostopadła przetnie powierzchnię kuli w punkcie m: trzeba żeby długość $M'm$ była nieskończenie małą czwartego rzędu względem Mm' (lub innéj nieskończenie małéj głównéj, mającéj stosunek skończony z Mm'). Lecz mamy

$$M'm = M'm' - mm$$

zaś $mm' = \dfrac{Mm^2}{2MO}$ jest nieskończenie małą drugiego rzędu względem Mm, a więc i względem Mm'; trzeba zatem żeby $M'm'$ było także nieskończenie małą drugiego rzędu, aby różnica $M'm$ mogła być czwartego rzędu. Mamy jeszcze

$$mm' = \frac{Mm^2}{2r} = \frac{Mm'^2 + mm'^2}{2r} = \frac{MM'^2 - M'm'^2 + mm'^2}{2r}$$

a oznaczając łuk $MM' = \Delta l$ różny od cięciwy MM' o nieskończenie małą trzeciego rzędu, otrzymamy dodając i odejmując Δl^2

$$mm' = \frac{\Delta l^2}{2r} - \frac{(\Delta l - MM')(\Delta l + MM') + M'm'^2 - mm'^2}{2r}$$

$\Delta l - MM'$ jest nieskończenie małą trzeciego rzędu; $M'm'$ i mm' są drugiego rzędu; różnica więc

$$mm' - \frac{\Delta l^2}{2r}$$

est] czwartego rzędu; a zatém aby $M'm$ było czwartego rzędu, to jest kula była ściśle styczną, dość jest żeby

$$M'm' - \frac{\Delta l^2}{2r}$$

było czwartego rzędu.

Równanie płaszczyzny stycznéj do kuli (1) w punkcie M jest [469]

$$(x - x_0)(X - x) + (y - y_0)(Y - y) + (z - z_0)(Z - z) = 0$$

odległością $M'm'$ punktu M', którego spółrzędnemi są

$$x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z$$

od téj płaszczyzny będzie (w podobny sposób jak powyżéj [481])

$$M'm' = \frac{(x_0 - x)\Delta x + (y_0 - y)\Delta y + (z_0 - z)\Delta z}{r}$$

a ztąd

$$M'm' - \frac{\Delta l^2}{2r} = \frac{(x_0 - x)\Delta x + (y_0 - y)\Delta y + (z_0 - z)\Delta z - \frac{1}{2}\Delta l^2}{r}$$

wyrażenie które ma być nieskończenie małém czwartego rzędu.

Jeżeli r jest skończoném, wyrażenie to będzie nieskończenie małém czwartego rzędu wraz ze swym licznikiem, którego oznaczymy przez

$$W = (x_0 - x)\Delta x + (y_0 - y)\Delta y + (z_0 - z)\Delta z - \frac{1}{2}\Delta l^2$$

Podstawmy za Δx, Δy, Δz, ich rozwinięcia

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3} + \varepsilon_4$$

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3} + \varepsilon'_4$$

$$\Delta z = dz + \frac{d^2z}{1.2} + \frac{d^3z}{1.2.3} + \varepsilon''_4$$

za $\Delta \text{ł}^2$, zważywszy że

$$\Delta \text{ł} = d\text{ł} + \frac{d^2\text{ł}}{1.2} + \frac{d^3\text{ł}}{1.2.3} + \eta_4$$

rozwinięcie

$$\Delta \text{ł}^2 = d\text{ł}^2 + d\text{ł}\, d^2\text{ł} + \eta'_4$$

gdzie ε_4, ε'_4, ε''_4, η'_4, η_4 są nieskończenie małemi czwartego rzędu. Aby W było nieskończenie małem czwartego rzędu, wyrazy rządów niższych muszą stać się zerami, więc zachodzić muszą warunki

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0-x)\,dx + (y_0-y)\,dy + (z_0-z)\,dz = 0 \\ (x_0-x)\,d^2x + (y_0-y)\,d^2y + (z_0-z)d^2z - d\text{ł} = 0 \\ (x_0-x)\,d^3x + (y_0-y)\,d^3y + (z_0-z)\,d^3z - 3d\text{ł}\,d^2\text{ł} = 0 \end{array} \right.$$

które wyznaczą spółrzędne x_0, y_0, z_0 środka kuli ściśle stycznéj, lub różnice $x_0 - x$, $y_0 - y$, $z_0 - z$, tych spółrzędnych i spółrzędnych punktu M.

Różnice te podstawione w równanie

$$(3) \qquad (x_0-x)^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2 - r^2 = 0$$

wyrażające, że punkt M znajduje się na kuli (1), da nam promień r téj kuli. Nie wypisujemy tu tych wartości które mogą być otrzymanemi przez zwyczajne rugowanie:

będą one wyrażonemi późniéj w daleko prostszy sposób; na teraz równania (2) i (3) wyznaczają zupełnie kulę ściśle styczną, i mogą być użytemi do badania jéj własności.

487. Twierdzenie I. *Kula ściśle styczna w punkcie danym krzywéj, jest granicą kuli przechodzącéj przez punkt dany i przez trzy punkta w odległościach nieskończenie małych od danego, gdy odległości te zdążają do zera.*

Przypuśćmy, że spółrzędne x, y, z punktu M, są funkcjami pewnéj zmiennéj niezależnéj t; spółrzędne punktów M′, M″, M‴ krzywéj nieskończenie zbliżonych do danego, będą odpowiadały wartościom

$$t+\Delta t, \quad t+2\Delta t, \quad t+3\Delta t$$

téj zmiennéj niezależnéj i będą wyrażone przez [**19**]

$$\begin{gathered} x+\Delta x, \quad y+\Delta y, \quad z+2\Delta z+\Delta^2 z \\ x+2\Delta x+\Delta^2 x, \quad y+2\Delta y+\Delta^2 y, \quad z+2\Delta z+\Delta^2 z \\ x+3\Delta x+3\Delta^2 x+\Delta^3 x, \quad y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y, \\ z+3\Delta z+3\Delta^2 z+\Delta^3 z. \end{gathered}$$

Oznaczając równanie kuli przechodzącéj przez punkt M

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2=0$$

przez skrócenie

$$W=0$$

warunki, żeby kula przechodziła przez punkta M′, M″, M‴, będą mogły być wyrażone przez równania

$$W+\Delta W=0, \quad W+2\Delta W+\Delta^2 W=0,$$
$$W+3\Delta W+3\Delta^2 W+\Delta^3 W=0$$

Równania te można także napisać jak następuje

$$W=0, \quad \frac{\Delta W}{\Delta t}=0, \quad \frac{\Delta^2 W}{\Delta t^2}=0, \quad \frac{\Delta^3 W}{\Delta t^3}=0$$

upraszczając następujące na mocy poprzedzających i dzieląc przez odpowiednią potęgę Δt.

Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$W=0, \quad \frac{dW}{dt}=0, \quad \frac{d^2W}{dt^2}=0, \quad \frac{\Delta^3 W}{dt^3}=0$$

lub

$$W=0, \quad dW=0, \quad d^2W=0, \quad d^3W=0$$

które są równaniami (3) i (2) kuli ścile stycznéj, jak się z łatwością przekonać można różniczkując te wyrażenia i uważając, że $dx^2+dy^2+dz^2=dl^2$ [**475**].

488. Twierdzenie II. *Środek kuli ściśle stycznéj do krzywéj w punkcie danym jest granicą przecięcia się trzech płaszczyzn normalnych poprowadzonych do krzywéj w tym punkcie i w dwóch punktach nieskończenie zbliżonych do danego.*

W rzeczy saméj, równanie płaszczyzny normalnéj [**467**] w punkcie M, którego spółrzędnemi są x, y, z jest właśnie pierwszym z równań (2), wyznaczających środek kuli ściśle stycznéj; oznaczmy równanie to przez

$$N=0.$$

Jeżeli spółrzędne x, y, z uczynimy zależnemi od pewnéj zmiennéj niezależnéj t, równania płaszczyzn normalnych w punktach odpowiadających wartościom $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$ téj zmiennéj niezależnéj, przedstawią się pod kształtem

$$N+\Delta N=0, \qquad N+2\Delta N+\Delta^2 N=0$$

czyli, jak powyżéj

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=0\,,\quad \frac{\Delta^2 N}{\Delta t^2}=0$$

a przechodząc do granicy i mnożąc przez Δt, Δt^2, otrzymamy

$$dN=0\,,\qquad d^2N=0$$

dwa pozostałe równania (2). Punkt więc przecięcia się tych trzech płaszczyzn normalnych będzie danym przez te same równania (2), co środek kuli ściśle stycznéj.

489. O styczności w przestrzeni krzywych pomiędzy sobą. Krzywemi stycznemi w przestrzeni w pewnym punkcie nazywamy krzywe, które mają w tym punkcie styczną wspólną.

Niech będą dwie krzywe K, K_1 (fig. 127) mające punkt wspólny M i w tym punkcie styczną wspólną MS.

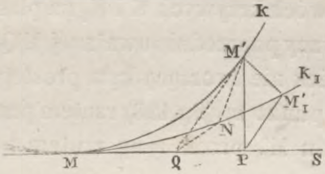


fig. 127.

Z punktu M' nieskończenie zbliżonego do punktu M na krzywéj K poprowadźmy płasczyznę $M'PM_1'$ prostopadłą do stycznéj MS, przecinającą tę styczną w punkcie P, a krzywę K_1 w punkcie M'_1.

Jeżeli odległość $M'\,M'_1$, jest nieskończenie małą rzędu $n+1$go, powiadamy, że zachodzi pomiędzy krzywemi styczność rzędu $n$go; za nieskończenie małą główną uważamy MP, lub inną nieskończenie małą, która ma do MP stosunek skończony. Możemy naprzykład zamiast płasczyzny prostopadłéj do stycznéj wspólnéj MS, poprowadzić przez punkt M′ jakąkolwiek płaszczyznę pochyłą M′QN, którąby nie tworzyła z płaszczyzną prostopadłą M′PM$_1$ kąta w granicy prostego: rzęd odległości M′N względem MQ będzie o jedność wyższym od rzędu styczności krzywych K i K$_1$. W rzeczy saméj, byleby kąt pomiędzy płaszczyznami M′QN i M′PM′$_1$, nie był nieskończenie mało różnym od prostego, M′N będzie nieskończenie małą tego samego rzędu co M′M′$_1$, podobnie jak MP i MQ są tego samego rzędu, bo trójkąt M′M′$_1$P jest jak widać z łatwością, w granicy rzutem trójkąta M′NQ; stosunek boków tego trójkąta równy dostawie kąta dwóch płaszczyzn, nie stającego się w granicy prostym, jest skończonym.

490. Twierdzenie. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym styczności pewnego rzędu dwóch krzywych w przestrzeni, jest styczność przynajmniéj tego samego rzędu rzutów tych krzywych na dwie płaszczyzny nierównoległe pomiędzy sobą i nieprostopadłe do stycznéj wspólnéj.* W saméj rzeczy, weźmy pod uwagę rzut dwóch krzywych K i K$_1$ na płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny poprzednio uważanéj M′QN, t.j. na płaszczyznę jakąkolwiek nie tworzącą kąta prostego ze styczną MS. Niech będzie punkt m (fig.128) rzutem punktu M, punkt m' rzutem punktu M′, prosta $m'nq$ rzutem trójkąta M′NQ.

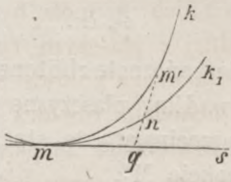


fig. 128.

Ponieważ płaszczyzna uważana nie tworzy z założenia kąta prostego ze styczną MS, stosunek $\frac{mq}{\mathrm{MQ}}$ jest skończonym, to jest nieskończenie małe MQ i mq są tego samego rzędu. Stosunek $\frac{\mathrm{M'N}}{m'n}$ jest także skończonym, to jest $m'n$ i M′N są nieskończenie małemi tego samego rzędu, byleby prosta M'N nie tworzyła kąta nieskończenie małego z prostopadłą do płaszczyzny rzutu, w jakim razie stosunek $\frac{m'n}{M'N}$ byłby nieskończenie małym, a $m'n$ wyższego rzędu od M'N. Byleby więc kąt ten nie był prostym w granicy, krzywe rzucone będą miały styczność tego samego rzędu co krzywe w przestrzeni; wprzeciwnym razie styczność krzywych rzuconych, będzie rzędu wyższego. Lecz biorąc wtedy rzut figury na inną płaszczyznę nierównoległą do pierwszéj, kąt o którym mowa, nie będzie już z pewnością w granicy prostym, i styczność będzie tego samego rzędu w rzucie, co w przestrzeni : twierdzenie jest więc udowodnioném. Twierdzenie to sprowadza zadania tyczące się rzędu styczności krzywych w przestrzeni, do uważania rzędu styczności krzywych na płaszczyznie [**380**].

491. *Krzywą ściśle styczną* do krzywéj danéj w przestrzeni, nazywamy krzywę, która ze wszystkich krzywych danego gatunku, ma z krzywą daną styczność rzędu jak najwyższego. Jeżeli gatunek krzywych, do którego ma należeć krzywa ściśle styczna, zawiera liczbę parzystą $2n$ parametrów, połowa z nich n może być wyznaczoną tak, aby krzywe na jednéj z płaszczyzn rzutów były stycznemi $n-1$go rzędu, druga połowa n, aby na drugiéj płaszczyznie rzutów, zachodziła również styczność $n-1$go rzędu. Krzywa więc zawierająca $2n$ parametrów, gdy jest ściśle styczną w przestrzeni z krzywą daną, ma z nią styczność w ogóle $n-1$go rzędu. Jeżeli liczba parametrów jest nieparzystą $2n+1$, zaprowadziwszy na dwóch płaszczyznach rzutów, jak powyżéj styczność $n-1$go rzędu, jeden parametr pozostaje jeszcze do rozporządzenia, lecz jest w ogóle niewystarczającym do podniesienia o jedność rzędu styczności.

492. Równanie *koła* w przestrzeni zawiera sześć parametrów: trzy spółrzędne środka, promień, i dwa kąty prostéj prostopadłéj do płaszczyzny koła z osiami spółrzędnych (trzeci jest dany przez związek konieczny summy kwadratów trzech dostaw równéj jedności [**66**]). Styczność więc krzywéj w przestrzeni z okręgiem koła może być najwyżéj drugiego rzędu, bo gdy $2n = 6$, to $n - 1 = 2$. Koło ściśle styczne jest więc stycznem drugiego rzędu z krzywą w przestrzeni. Przyjdziemy poniżéj inną drogą do uważania tego koła.

493. Styczność powierzchni pomiędzy sobą. Dwie powierzchnie mające w pewnym punkcie wspólnym płaszczyznę styczną wspólną, nazywamy *powierzchniami stycznemi*. Jeżeli poprowadzimy różne płaszczyzny przez normalnę wspólną dwóch powierzchni w ich punkcie styczności, każda z tych płaszczyzn przetnie jednę powierzchnię podług pewnéj krzywéj, drugą podług innéj krzywéj: dwie te krzywe mają styczną wspólną zawartą na płaszczyznie stycznéj wspólnéj dwóch powierzchni. Jeżeli teraz krzywe otrzymane przez różne przecięcia dwóch powierzchni płaszczyznami normalnemi, mają dwie po dwie styczność $n$go lub wyższego rzędu, powiadamy że zachodzi między powierzchniami styczność $n$go rzędu: rzęd ten jest danym przez dwie krzywe, wynikające z przecięcia powierzchni pewną płaszczyzną normalną, mające styczność najniższego rzędu pomiędzy sobą.

Weźmy układ spółrzędnych prostokątny, którego oś OZ jest równoległą do normalnéj wspólnéj dwóch powierzchni, płaszczyzna XY równoległą do płaszczyzny stycznéj wspólnéj; nazwijmy x, y, z spółrzędne punktu styczności wspólnego dwom powierzchniom; zmienne niezależne x, y będą uważanemi wspólne dla dwóch powierzchni; trzecia spółrzędna jednéj z nich będzie z, drugiéj z_1.

Nadając zmiennym niezależnym x i y przyrostki Δx, Δy otrzymamy

$$z+\Delta z=z+\frac{dz}{1}+\frac{d^2z}{1.2}+\ldots+\frac{d^nz}{1.2\ldots n}+\varepsilon_{n+1}$$

$$z_1+\Delta z_1=z_1+\frac{dz_1}{1}+\frac{d^2z_1}{1.2}+\ldots+\frac{d^nz_1}{1.2\ldots n}+\varepsilon_{n+1}$$

gdzie spółrzędne $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ odpowiadają punktowi M′ na jednéj powierzchni, spółrzędne $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z_1$, punktowi M'_1 na drugiéj powierzchni znajdującemu się na téj saméj równoległéj nieskończenie zbliżonéj do osi Z, co punkt M′. Poprowadziwszy przez oś OZ i tę równoległą przechodzącą przez M′, M'_1, płasczyznę normalną, płasczyzna ta przetnie obie powierzchnie podług dwóch krzywych, które aby były stycznemi przynajmniéj $n$go rzędu, muszą zachodzić równania

$$z=z_1,\quad dz=dz_1,\quad d^2z=d^2z_1,\ \ldots\ d^nz=d^nz_1$$

a to jakiekolwiek będą Δx i Δy, to jest w jakimkolwiek kierunku weźmiemy punkta nieskończenie zbliżone M′, M'_1, lub jakąkolwiek płasczyzną normalną przetniemy obie powierzchnie. Warunek ten wymaga więc, żeby spółrzędna z była równą z_1 i żeby różniczki zupełne spółrzędnych jednéj i drugiéj powierzchni były równemi aż do rzędu $n$go włącznie, niezależnie od różniczek dowolnych zmiennych niezależnych x i y: warunek ten sprowadza się do równości pochodnych częściowych aż do rzędu $n$go włącznie; a że n^{tych} pochodnych względem dwóch zmiennych niezależnych jest $n+1$ [**214**], będziemy mieli liczbę warunków

$$1+2+3+\ldots+(n+1)$$

czyli

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

równań warunkowych, które zachodzić muszą, aby powierzchnie mogły mieć styczność *n*go rzędu.

494. *Powierzchnią ściśle styczną* byłaby powierzchnia pewnego gatunku któraby miała z powierzchnią daną styczność rzędu jak najwyższego. Jeżeli gatunek powierzchni zawiera k parametrów, rzęd ten byłby największą całkowitą n czyniącą zadość warunkowi

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leqq k$$

Lecz w ogólności pozostaną jeszcze parametry do rozporządzenia: powierzchnia ściśle styczna nie będzie oznaczoną.

Tak dla płaszczyzny, $k=3$, $n=1$ płaszczyzna ściśle styczna, jest po prostu płaszczyzną styczną.

Dla kuli, $k=4$, $n=1$, kula ściśle styczna ma tylko styczność pierwszego rzędu jak każda kula styczna: jeden parametr pozostaje w prawdzie dowolnym; nie ma więc potrzeby brać pod uwagę kuli ściśle stycznéj do powierzchni.

O Punktach nadzwyczajnych powierzchni.

495. Jeżeli z punktu danego na powierzchni zakreślimy promieniem nieskończenie małym kulę, któréj powierzchnia przecina powierzchnię daną podług krzywéj zamkniętéj zdążającéj do okręgu koła wielkiego kuli, w miarę jak promień téj ostatniéj zdąża do zera, punkt ten uważać będziemy jako *punkt zwyczajny* powierzchni. W saméj rzeczy, jeżeli warunek powyższy zachodzi, wszystkie punkta powierzchni znajdujące się w odległościach od danego nieskończenie małych, równych promieniowi kuli, zdążać będą razem do punktu danego, w miarę jak cięciwy różnych krzywych płaskich nakreślonych na powierzchni przez te punkta i punkt dany zdążać będą do stycznych, których miejscem geometryczném jest płasczyzna styczna do powierzchni w punkcie danym, przecinająca kulę o któréj mowa podług koła wielkiego. Jakkolwiek więc przetniemy powierzchnię w punkcie danym, krzywa przecięcia nie będzie w nim przedstawiała punktu nadzwyczajnego.

Jeżeli warunek powyższy nie zachodzi, jeżeli kula zakreślona z punktu danego promieniem nieskończeniem małym nie przecina powierzchni podług krzywéj zamkniętéj, lub jeżeli nawet przecięcie to będąc krzywą zamkniętą nie zdąża do koła wielkiego kuli, punkt ten nazywać będziemy *punktem nadzwyczajnym* powierzchni: bo wszystkie, lub niektóre z krzywych będących przecięciami płaskiemi powierzchni w tym punkcie, przedstawiają w nim punkt nadzwyczajny.

496. Twierdzenie. *Niech będzie równanie*

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

jeżeli funkcja f *jest ciągłą, skończoną podobnie jak wszystkie jéj pochodne dla wartości zbliżonych do wartości szczególnych* x_0 y_0 z_0; *jeżeli nadto dla tych wartości szczególnych równania*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0 \tag{2}$$

nie zachodzą, powiadam że punkt M, *którego spółrzędnemi są* x_0, y_0, z_0, *nie jest punktem nadzwyczanym powierzchi danéj przez równanie* (1).

W saméj rzeczy, nadajmy spółrzędnym x_0, y_0, z_0 punktu M przyrostki Δx_0, Δy_0, Δz_0: otrzymamy nowy punkt M′ nieskończenie zbliżony na powierzchni do punktu M, jeżeli zachodzić będzie równanie

$$f(x_0+\Delta x_0,\ y_0+\Delta y_0,\ z_0+\Delta z_0)=0$$

lub, rozwijając funkcje na zasadzie wzoru Taylor'a [**279**] podług potęg Δx_0, Δy_0, Δz_0

$$(3)\qquad \Delta x_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\Delta y_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\Delta z_0\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0+\varepsilon_2=0$$

oznaczając przez ε_2 summę wyrażów nieskończenie małych przynajmniéj drugiego rzędu względem Δx_0, Δy_0, Δz_0.

Nazwijmy teraz przez ρ promień nieskończenie mały kuli, któréj środkiem jest punkt M, przez α, β, γ, kąty z osiami cięciwy łączącéj punkt M z jednym z punktów przecięcia się téj kuli z powierzchnią: otrzymamy

$$\Delta x_0=\rho\,\mathrm{dos}\,\alpha\,,\quad \Delta y_0=\rho\,\mathrm{dos}\,\beta\,,\quad \Delta z_0=\rho\,\mathrm{dos}\,\gamma$$

a równanie (3) staje się, podstawiając i dzieląc przez ρ

$$(4)\qquad \mathrm{dos}\,\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\mathrm{dos}\,\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\mathrm{dos}\,\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0+\rho h=0$$

gdzie pierwsze trzy wyrazy z założenia (2), nie mogą być wszystkie zerami, i gdzie $h=\frac{\varepsilon_2}{\rho^2}$ jest w ogólności ilością skończoną: może być nieskończenie małą (gdy ε_2 jest rzędu wyższego nad drugi), lecz nigdy nieskończenie wielką.

Równanie (4) pokazuje nam, że wyrażenie

$$(5)\qquad \mathrm{dos}\,\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\mathrm{dos}\,\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+\mathrm{dos}\,\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0$$

równe $-\rho h$, staje się zerem wraz z ρ; a że pochodne $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0$ są proporcjonalne dostawom kątów jakie normalna do powierzchni w punkcie M tworzy z osiami [**471**], więc wyrażenie (5) zrównane zeru zawiera warunek prostopadłości [**66**] cięciwy łączącéj punkt M z jakimkolwiek punktem przecięcia się powierzchni kuli promienia ρ z powierzchnią daną, i normalnéj w punkcie M do powierzchni danéj. Wyrażenie (5) dążące do zera wraz z ρ, pokazuje nam, że cięciwa ta dąży do prostopadłości z normalną, czyli do położenia na płasczyznie stycznéj do powierzchni, lub na kierunku promienia koła wielkiego, będącego przecięciem się téj płasczyzny z kulą.

Aby dowieść teraz, że krzywa przecięcia się kuli z powierzchnią jest krzywą zamkniętą pod warunkami założonemi w twierdzeniu, nazwijmy φ kąt normalnéj do powierzchni z jedną z cięciw łączących punkt krzywej przecięcia, o któréj mowa, z puktem M powierzchni, zaś λ, μ, ν kąty normalnéj z osiami, tak że

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = k \operatorname{dos} \lambda$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = k \operatorname{dos} \mu$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = k \operatorname{dos} \nu$$

oznaczając przez skrócenie

$$k = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0^2}$$

będziemy mieli [**66**]

$$\operatorname{dos} \varphi = \operatorname{dos} \alpha \operatorname{dos} \lambda + \operatorname{dos} \beta \operatorname{dos} \mu + \operatorname{dos} \gamma \operatorname{dos} \nu$$

a równanie (4) stanie się

$$k \operatorname{dos} \varphi + \rho h = 0. \tag{6}$$

Kąt φ, który w granicy, jakeśmy przed chwilą dowiedli, staje się $\frac{\pi}{2}$, może być zawartym pomiędzy $\frac{\pi}{2} + \eta$ i $\frac{\pi}{2} - \eta$ gdzie η jest nieskończenie małém wraz z ρ. Jeżeli weźmiemy pod uwagę punkt na kuli zakreślający łuk nieskończenie mały jakiéjkolwiek krzywéj, zawarty pomiędzy wartościami $\frac{\pi}{2} + \eta$ i $\frac{\pi}{2} - \eta$ kąta φ, łuk ten przetnie koniecznie krzywę przecięcia się kuli z powierzchnią, bo punkt ruchomy postępując ruchem ciągłym od $\frac{\pi}{2} - \eta$ do $\frac{\pi}{2} + \eta$, uczyni koniecznie w jedném swém położeniu zadość równaniu (6), gdy ρ dąży do zera. Wszelka więc krzywa na kuli przecinająca koło wielkie, dla którego $\varphi = \frac{\pi}{2}$, przecina także krzywę przecięcia się kuli z powierzchnią : trzeba więc żeby ta ostatnia krzywa była zamkniętą zdążającą w granicy do koła wielkiego.

497. Jeżeli trzy równania

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0 \tag{2}$$

zachodzą dla wartości $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, punkt M, którego spółrzędnemi są x_0, y_0, z_0, nazywamy, jakeśmy powiedzieli, *punktem nadzwyczajnym*. Granicą położenia stycznych do różnych krzywych nakreślonych na powierzchni przechodzących przez punkt M nie jest w ogólności płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie M : zamierzamy sobie (w razie gdy inne nadzwyczajne warunki oprócz (2) nie zachodzą, znalezienie powierzchni ostrokręgowéj, która jest miejscem geometryczném stycznych w punkcie M do różnych krzywych na powierzchni.

Wzór Taylor'a rozciągnięty do dalszych wyrazów rozwinięcia (3), którego trzy pierwsze wyrazy są zerami na zasadzie założenia (2), da nam :

$$(7)\quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x_0^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \Delta y_0^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 \Delta z_0^2 \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \Delta x_0^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0 \Delta x_0 \Delta y_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_0 \Delta y_0 \Delta z_0\right]$$
$$+ \varepsilon_3 = 0$$

gdzie ε_3 jest nieskończenie małą, przynajmniéj 3go rzędu: a podstawiając jak powyżéj wartości

$$\Delta x_0 = \rho \cos\alpha, \quad \Delta y_0 = \rho \cos\beta, \quad \Delta z_0 = \rho \cos\gamma$$

będziemy mogli napisać, dzieląc przez ρ^2

$$(8)\quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cos^2\alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \cos^2\beta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 \cos^2\gamma \right.$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \cos\alpha\cos\beta + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0 \cos\alpha\cos\gamma$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_0 \cos\beta\cos\gamma\right] + \rho h' = 0$$

gdzie $h' = \frac{\varepsilon_3}{\rho^3}$ może być skończoném, lub nieskończenie małém. Równanie (8) pokazuje nam, że kąty α, β, γ są tego rodzaju, iż wielomian w nawiasie, równy $-2\rho h$ staje się zerem wraz z ρ; wszystkie krzywe nakreślone na powierzchni przez punkt M są więc stycznemi do tworzących powierzchni ostrokręgowéj, miejsca geometrycznego prostych, dla których warunek ten tyczący się kątów α, β, γ zachodzi; równaniem téj powierzchni będzie więc, podstawiając za $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, proporcjonalne spółrzędne bieżące X, Y, Z:

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & X^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + Y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 + Z^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_0 \\ & + 2XY\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 + 2XZ\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)_0 + 2YZ\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)_0 = 0 \end{aligned} \right.$$

równanie ostrokręgu drugiego stopnia. Jeżeli ostrokrąg ten jest urojonym, punkt powierzchni jest *punktem odosobnionym.*

Nie zatrzymujemy się nad innemi przypadkami nadzwyczajnemi, w których oprócz równań (2) zachodzą inne równania szczególnego rodzaju, i w których powierzchnia ostrokręgowa miejsce geometryczne stycznych, może być inną jak (9).

498. Linje nadzwyczajne powierzchni. Punkta nadzwyczajne na powierzchni mogą postępować jedne po drugich w sposób ciągły i tworzyć *linje nadzwyczajne* na powierzchni. Zastanowimy się tu tylko nad szczególnym przypadkiem linji na powierzchni, we wszystkich punktach któréj, powierzchnia ma jednę i tę samę płasczyznę styczną: płasczyzna ta ma w ten sposób nie tylko jeden punkt wspólny z powierzchnią, lecz nieskończoną ilość punktów wspólnych, w których jest styczną do powierzchni.

Niech będzie

$$(1)\qquad dz = pdx + qdy$$

równanie różniczkowe [472] powierzchni. Równaniem płasczyzny stycznéj będzie

$$(2) \qquad Z - z = p(X - x) + (Y - y)$$

Gdy spółrzędne x, y, z punktu styczności otrzymają przyrostki nieskończenie małe Δx. Δy, Δz, równanie (2) stanie się

$$(2') \qquad \begin{aligned} Z - z - \Delta z = p(Y - x - \Delta x) + q(Y - y - \Delta y) \\ + \Delta p(X - x - \Delta x) + \Delta q(Y - y - \Delta y) \end{aligned}$$

Ażeby w granicy równanie (2') było tém samém co (2), ponieważ zawsze dla punktu znajdującego się na powierzchni

$$dz = pdx + qdy$$

trzeba jeszcze żeby zachodziły równania

$$dp = 0, \qquad dq = 0$$

czyli

$$(3) \qquad \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy = 0$$

Aby równania te nie były sprzecznemi, zachodzić musi warunek

$$(4) \qquad \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}$$

a zakładając [**218**]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$$

równanie (4) staje się

(5) $$rt - s^2 = 0.$$

Równanie (5) zachodzić musi dla wszystkich punktów krzywéj na powierzchni, według któréj płasczyzna jest styczną do powierzchni; lecz twierdzenie odwrotne nie ma miejsca: znalazłszy na powierzchni krzywę zadość czyniącą równaniu (5) nie jest bynajmniéj koniecznem, żeby płasczyzna styczna do powierzchni w jednym z punktów téj krzywéj, była również styczną i w innych; trzeba dla tego żeby zachodziły jeszcze równania (3), gdy zmieniamy x i y na téj linji: jakkolwiek bowiem równanie (5) jest koniecznym wynikiem (3), równania (3) nie są koniecznym wynikiem (5).

Jeżeli równanie (5) zachodzi dla wszystkich punktów powierzchni, możemy zacząwszy od jakiegokolwiek jéj punktu zmieniać x i y tak, aby równania (3) miały miejsce: to jest przez każdy punkt powierzchni, wyznaczyć linję, we wszystkich punktach któréj płasczyzna jest styczną do powierzchni. Równanie (5) jest, jak zobaczymy późniéj, równaniem różniczkowem *powierzchni rozwijalnych.*

ROZDZIAŁ XXIII

O KRZYWOŚCI LINIJ SKOŚNYCH

Pierwsza krzywość linij skośnych. — Promień i środek krzywości. — Prosta biegunowa. — Różnica łuku i cięciwy krzywéj jakiéjkolwiek. — Skręcenie, czyli druga krzywość linij skośnych. — Koło i promień skręcenia. — Twierdzenie p. Serret'a. — Spółrzędne środka kuli ściśle stycznéj. — O powierzchniach obwijających. — Linja charakterystyczna i krawędź zwrotu. — O powierzchniach rozwijalnych. — O rozwiniętych linij krzywych w przestrzeni. — Powierzchnia biegunowa. — Zastosowania : Linja śrubowa.

O pierwszéj krzywości lnij w przestrzeni.

499. Określenie. Niech będzie w przestrzeni linja LL′ (fig.129), któréj punkta w ogólności nie znajdują się na jednéj płasczyznie; jeżeli w rozmaitych punktach téj linji poprowadzimy styczne $M_0 T_0$, MT, $M'T'$ ... styczne te w ogólności nie przetną się ze sobą; kąty zawarte między niemi, któremi mierzyć będziemy *krzywości* łuków linji LL′, będą to kąty zawarte między równoległemi z pewnego punktu *o* przestrzeni do tych stycznych poprowadzonemi.

Weźmy punkt M_0 za początek łuków krzywéj i przy-

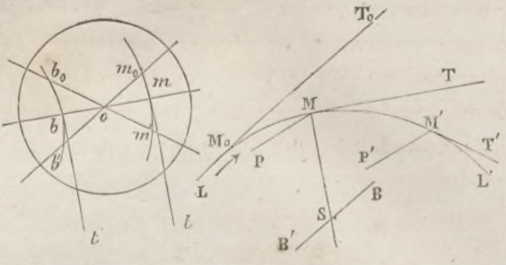


fig. 129.

puśćmy, że punkt ruchomy wyszedłszy z M_0 posuwa się po krzywéj w stronę ku L': kierunek dodatny każdéj ze stycznych M_0T_0, MT, MT' ... uważać będziemy jako mający początek w punkcie na krzywéj M_0, M, M' ... i rozciągający się w stronę prędkości punktu ruchomego, to jest w stronę M_0T_0, MT, $M'T'$ ... a nie w stronę przeciwną, która odpowiadać będzie kierunkowi odjemnemu. Uczyniwszy to założenie dla uniknienia dwuznaczności, z punktu o jako środka, promieniem równym jedności, zakreślmy powierzchnię kuli, i poprowadźmy promienie om_0, om, om'... równolegle do wyżéj określonych kierunków dodatnych stycznych M_0T_0, MT, $M'T'$ ... Miejscem geometryczném punktów m_0, m, m', ... na powierzchni kuli będzie krzywa kulista m_0m': długość łuku m_0m téj krzywéj, nazywać będziemy *krzywością zupełną* łuku M_0M krzywéj danéj LL' w przestrzeni.

Krzywością średnią łuku M_0M, będzie stosunek długości łuku m_0m do długości łuku M_0M, czyli stosunek krzywości zupełnéj łuku danego do długości tegoż łuku.

Krzywością linji LL' w punkcie M, będzie granica krzywości średniéj łuku nieskończnie małego MM' zaczynającego się w tym punkcie, czyli granica stosunku łuku mm' do łuku MM', gdy łuki te zdążają do zera. Można także powiedzieć że w przestrzeni, podobnie jak na płasczyznie :

Krzywość linji w punkcie danym, jest granicą stosunku kąta między stycznemi w punktach ostatecznych łuku nieskończenie małego poprowadzonemi, do długości tegóż łuku. Jakoż, kąt między stycznemi MT, M'T' równy kątowi mom' równym jest łukowi, koła wielkiego kuli o, zakreślonéj promieniem równym jedności. Lecz łuk ten koła wielkiego, ma wspólną cięciwę z łukiem mm' krzywéj m_0m': dwa te łuki mając każdy do wspólnéj cięciwy stosunek równy w granicy jedności [**474**] różnią się od siebie o ilości nieskończenie małe względem nich samych [**121**]; można więc podstawić jeden za drugi, szukając granicy stosunku

$$\frac{\text{łuk}\ mm'}{\text{łuk}\ \mathrm{MM'}}=\frac{\text{kąt}\ mom'}{\text{łuk}\ \mathrm{MM'}}$$

który nazwaliśmy *krzywością* linji w punkcie M.

Granica ta jest w ogólności skończoną oznaczoną: bo uważając długość łuku $\mathrm{M_0M}=l$ za zmienną niezależną, krzywość zupełną tego łuku $m_0m=k$ jako funkcję, wiemy [**134**], że $\Delta l=\mathrm{MM'}$ i $\Delta k=mm'$, są nieskończenie małemi tego samego rzędu [ꟽꟽ], krzywość więc będzie pochodną k względem l, czyli

$$\text{gr}\,\frac{\Delta k}{\Delta l}=\frac{dk}{dl}$$

W szczególnym przypadku, gdy krzywa LL' będzie krzywą płaską, linja stanie się łukiem koła wielkiego, a określenie krzywości zupełnéj, krzywości średniéj i krzywości w danym punkcie będzie to samo, co określenie podane poprzednio [**426**] dla krzywych na płaszczyznie.

500. Promień krzywości. Promień koła mającego krzywość równą krzywości linji w przestrzeni w punkcie danym, nazywamy *promieniem krzywości* linji w punkcie danym. Różniczkę dk krzywości zupełnéj mającą stosunek równy w granicy jedności z kątem między stycznemi w punktach ostatecznych łuku nieskończenie małego poprowadzonemi, nazywamy *kątem styczności* krzywéj.

Określenia te są te same w przestrzeni co na płaszczyznie. Oznaczając przez R promień koła, którego krzywością jest $\frac{dk}{dł}$ otrzymamy

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \frac{dk}{dł} \quad \text{czyli} \quad R = \frac{dł}{dk}$$

Niech będą x, y, z spółrzędne punktu M, α, β, γ kąty stycznéj MT z osiami spółrzędnych prostokątnych mających początek w środku o kuli uważanéj poprzednio, zakreślonéj promieniem równym jedności : spółrzędne punktu m na kuli, odpowiednego punktowi M na krzywéj, będą

$$\operatorname{dos}\alpha, \quad \operatorname{dos}\beta, \quad \operatorname{dos}\gamma$$

a więc różniczka łuku k krzywéj m_0m będzie miała wyrażenie [**475**] :

$$(2) \qquad dk = \sqrt{(d\operatorname{dos}\alpha)^2 + (d\operatorname{dos}\beta)^2 + (d\operatorname{dos}\gamma)^2}$$

Mamy także [**477**] :

$$\operatorname{dos}\alpha = \frac{dx}{dł}$$

a zatém, pozostawiając zmiennę niezależną nieoznaczoną i różniczkując

$$d\operatorname{dos}\alpha = \frac{dłd^2x - dxd^2ł}{dł^2}$$

a podnosząc do kwadratu

$$(d\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2 = \frac{dł^2\,(d^2x)^2 - 2dłd^2łdxd^2x + dx^2\,(d^2ł)^2}{dł^4}$$

Otrzymamy w podobny sposób wyrażenia na $(d\,\mathrm{dos}\,\beta)^2$ i $(d\,\mathrm{dos}\,\gamma)^2$ zmieniając x na y i x na z : dodając te trzy wyrażenia będziemy mieli na zasadzie (2)

$$\begin{aligned} dk^2 = {} & \frac{1}{dł^2}\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + d^2z)^2] \\ & - 2\,\frac{d^2ł}{dł^3}\,(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) \\ & + \frac{(d^2ł)^2}{dł^4}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned}$$

Lecz związki [**483**]

$$\begin{gathered} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dł^2 \\ dxd^2x + dyd^2y\; dzd^2z = dłd^2ł \end{gathered}$$

podstawione w powyższe wyrażenie dk dadzą nam

(3) $$dk = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2ł)^2}}{dł}$$

drugie wyrażenie godne uwagi kąta styczności krzywéj w przestrzeni.

Mnożąc licznik i mianownik tego wyrażenia przez $dł$, i podstawiając następnie za $dł^2$ i $dłd^2ł$ w liczniku, ich wartości w różniczkach spółrzędnych x, y, z wypisane powyżéj, otrzymamy po uproszczeniu, trzecie wyrażenie kąta styczności

(4) $$dk = \frac{1}{dł^2}\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

W tych trzech wyrażeniach zmienna niezależna jest jakąkolwiek; wziąwszy t za zmienną niezależną, d^2t stanie się zerem, a wyrażenie (3) będzie

$$(5) \qquad dk = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{dt}$$

W ogólności wzór (4) na mocy (1) da nam wyrażenie promienia krzywości

$$(6) \quad \mathrm{R} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}$$

jakakolwiek będzie zmienna niezależna.

501. Uwaga. W punkcie m krzywéj kulistéj m_0m (fig. 129) poprowadźmy styczną mt; nazwijmy ξ, η, ζ kąty téj stycznéj z osiami: będziemy mieli [**500**], zważywszy że spółrzędnemi punktu m są: dos α, dos β, dos γ, różniczką zaś łuku mm' jest dk [**477**]:

$$(7) \qquad \operatorname{dos}\xi = \frac{d \operatorname{dos}\alpha}{dk}, \quad \operatorname{dos}\eta = \frac{d \operatorname{dos}\beta}{dk}, \quad \operatorname{dos}\xi = \frac{d \operatorname{dos}\gamma}{dk}$$

czyli

$$(8) \qquad \frac{\operatorname{dos}\xi}{d \operatorname{dos}\alpha} = \frac{\operatorname{dos}\eta}{d \operatorname{dos}\beta} = \frac{\operatorname{dos}\zeta}{d \operatorname{dos}\gamma} = \frac{1}{dk}$$

a więc [**485** (14)] *kierunek stycznéj do krzywéj kulistéj w punkcie* m, *jest równoległym do kierunku normalnéj głównéj w punkcie odpowiednim* M *krzywéj danéj w przestrzeni.*

Podstawiając w (7) wartości [**477**]

$$\operatorname{dos}\alpha = \frac{dx}{dt}, \quad \operatorname{dos}\beta = \frac{dy}{dt}, \quad \operatorname{dos}\gamma = \frac{dz}{dt}$$

i wartość (1) promienia krzywości, otrzymamy wartości dostaw kątów normalnéj głównéj z osiami

$$(9) \qquad \operatorname{dos}\xi = R\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}, \quad \operatorname{dos}\eta = R\frac{d\frac{dy}{dt}}{dt}, \quad \operatorname{dos}\zeta = R\frac{d\frac{dz}{dt}}{dt}$$

a biorąc łuk t za zmienną niezależną

$$(10) \qquad \operatorname{dos}\xi = R\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \operatorname{dos}\eta = R\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \operatorname{dos}\gamma = R\frac{d^2z}{dt^2}.$$

502. Srodek krzywości. W punkcie jakimkolwiek M krzywéj w przestrzeni (fig. 129) poprowadźmy styczną MT, i normalnę główną MS; weźmy na téj normalnéj głównéj po téj saméj stronie względem płasczyzny prostopadłéj do MS w punkcie M, po jakiéj stronie znajdują się punkta krzywéj nieskończenie zbliżone do punktu M, odległość MS $=$ R, i z punktu S jako środka, na płasczyznie SMT, promieniem MS zakreślmy okrąg koła : koło to będzie *kołem krzywości*, punkt S *środkiem krzywości* linji LL′ w punkcie M.

Płasczyzna SMT przechodząca przez styczną do krzywéj i normalnę główną, jest płasczyzną ściśle styczną do krzywéj [**485**] : *koło krzywości, jestto koło styczne do krzywéj, zakreślone promieniem krzywości na płasczyznie ściśle stycznéj.*

Prostopadłę BB′ poprowadzoną przez środek koła krzywości do płasczyzny ściśle stycznéj, na któréj koło to się znajduje, nazywamy *prostą biegunową* lub *osią koła krzywości* : jest ona także *osią płasczyzny ściśle stycznéj*.

503. Twierdzenie. *Prosta biegunowa odpowiadająca punktowi danemu krzywéj w przestrzeni, jest granicą przecięcia się płasczyzny normalnéj w tym punkcie, z płasczyzną normalną poprowadzoną w punkcie nieskończenie zbliżonym krzywéj.*

W saméj rzeczy, równanie płasczyzny normalnéj w punkcie M krzywéj, którego spółrzędnemi są x, y, z, będzie [467] :

$$(1)\qquad (X-x)\cos\alpha+(Y-y)\cos\beta+(Z-z)\cos\gamma=0$$

oznaczając jak powyżéj pızez α, β, γ kąty stycznéj MT z osiami. Oznaczmy dla skrócenia równanie to przez

$$N=0$$

Aby otrzymać równanie płasczyzny normalnéj do krzywéj w punkcie M′ nieskończenie zbliżonym do punktu M, należy podstawić w (1) za x, y, z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ wartości : $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, $\cos\alpha+\Delta\cos\alpha$, $\cos\beta+\Delta\cos\beta$, $\cos\Delta\gamma+\Delta\cos\gamma$. Oznaczmy wypadek tego podstawienia przez

$$N+\Delta N=0$$

Nazywając t jakąkolwiek zmiennę niezależną przecięcie się tych dwóch płasczyzn daném będzie przez dwa równania

$$N=0\,,\qquad \frac{\Delta N}{\Delta t}=0$$

Gdy punkt M′ zdąża do punktu M, granicą tego przecięcia będzie prosta wyznaczona przez równania

$$N=0\,,\qquad \frac{dN}{dt}=0$$

lub

$$N=0\,,\qquad dN=0$$

czyli przez równanie (1) i równanie

$$(X-x)\,d\cos\alpha+(Y-y)\,d\cos\beta+(Z-z)\,d\cos\gamma$$
$$-(dx\cos\alpha+dy\cos\beta+dz\cos\gamma)=0$$

otrzymane biorąc różniczkę pierwszego, uważając x, y, z, dos α, dosβ, dos γ jako zmienne. Podstawiając w to ostatnie równanie za d dos α, d dos β, d dos γ wartości [**501** (8)], za dos α, dos β, dos γ wartości [**477**], otrzymamy

$$(2) \qquad (\mathrm{X}-x)\,\mathrm{dos}\,\xi + (\mathrm{Y}-y)\,\mathrm{dos}\,\eta + (\mathrm{Z}-z)\,\mathrm{dos}\,\zeta = \mathrm{R}$$

zważywszy na [**500** (1)] i [**475**], równanie płasczyzny [**68**] prosłopadłéj do normalnéj głównéj, tworzącéj kąty ξ, η, ζ z osiami: płasczyzny, któréj odległość od punktu M jest równą R = MS. Prosta szukana dana przez (1) i (2) jest więc prostą piegunową BB′, lub prostą symetryczną prostéj BB′ względem punktu M. Aby dowieść że nie może być tą ostatnią, weźmiemy równanie płasczyzny poprowadzonéj przez MT, prostopadle do MS

$$(3) \qquad (\mathrm{X}-x)\,\mathrm{dos}\,\xi + (\mathrm{Y}-y)\,\mathrm{dos}\,\eta + (\mathrm{Z}-z)\,\mathrm{dos}\,\zeta = 0$$

i dowiedziemy, że prosta szukana jest z téj saméj strony względem téj płasçzyzny, co punkta krzywéj nieskończenie zbliżone do punktu M′. Aby znaleść odległość takiego punktu M′ od płasczyzny (3), podstawić należy za X, Y, Z spółrzędne $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ punktu M′, i obliczyć część stałą : otrzymamy w ten sposób, zważywszy że [**501**]

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + \varepsilon_3 = dt\,\mathrm{dos}\,\alpha + \frac{dt}{2\mathrm{R}}\,\mathrm{dos}\,\xi + \varepsilon_3$$

gdzie ε_3 oznacza nieskończenie małą przynajmniéj trzeciego rzędu, i podstawiając odpowiednie wartości Δy, Δz, wypadek dodatny

$$\frac{dt^2}{2\mathrm{R}} + \varepsilon_3$$

który będzie odległością punktu M′ od płasczyzny (3). Aby teraz otrzymać odległość prostéj znajdującéj się na płaszczyznie (2) od płaszczyzny (3), podstawić należy w (3) spółrzędne jakiegokolwiek punktu płaszczyzny (2) co nam da również wypadek dodatny $+R$; a zatém prosta szukana znajduje się po stronie środka krzywości względem płaszczyzny (3): jest więc prostą biegunową BB'.

Oznaczywszy przez x, y, z, spółrzędne środka krzywości S, spółrzędne te będą dane przez równania

$$(4) \quad x_1 - x = R \operatorname{dos} \xi, \quad y_1 - y = R \operatorname{dos} \eta, \quad z_1 - z = R \operatorname{dos} \xi$$

bo środek krzywości znajduje się na normalnéj głównéj, tworzącéj kąty ξ, η, ζ z osiami, w odległości R od punktu krzywéj M.

504. Kierunek osi koła krzywości. Styczna do krzywéj w przestrzeni w jakimkolwiek punkcie, normalna główna w tym punkcie, i oś koła krzywości odpowiedniego temu punktowi, mają kierunki prostopadłe. Przypuszczając osie spółrzędnych prostokątnemi, prowadząc przez początek trzy równoległe do powyższych kierunków prostopadłe pomiędzy sobą, otrzymamy dwa układy prostokątne, złożone każdy z trzech prostopadłych. Dostawy kątów prostych jednego układu z prostemi drugiego układu, czynią zadosyć pewnym warunkom [**67**], które tu wypiszemy.

Nazwijmy jak powyżéj:

α, β, γ kąty stycznéj,

ξ, η, ζ kąty normalnéj głównéj,

λ, μ, ν kąty osi koła krzywości

z osiami spółrzędnych: otrzymamy następujące związki między dostawami tych kątów:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}^2\alpha+\operatorname{dos}^2\beta+\operatorname{dos}^2\gamma=1 \\ \operatorname{dos}^2\xi+\operatorname{dos}^2\eta+\operatorname{dos}^2\zeta=1 \\ \operatorname{dos}^2\lambda+\operatorname{dos}^2\mu+\operatorname{dos}^2\nu=1 \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}^2\alpha+\operatorname{dos}^2\xi+\operatorname{dos}^2\lambda=1 \\ \operatorname{dos}^2\beta+\operatorname{dos}^2\eta+\operatorname{dos}^2\mu=1 \\ \operatorname{dos}^2\gamma+\operatorname{dos}^2\zeta+\operatorname{dos}^2\nu=1 \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\xi+\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\eta+\operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\zeta=0 \\ \operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\lambda+\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\mu+\operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\nu=0 \\ \operatorname{dos}\xi\operatorname{dos}\lambda+\operatorname{dos}\eta\operatorname{dos}\mu+\operatorname{dos}\zeta\operatorname{dos}\nu=0 \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\beta+\operatorname{dos}\xi\operatorname{dos}\eta+\operatorname{dos}\lambda\operatorname{dos}\mu=0 \\ \operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\gamma+\operatorname{dos}\xi\operatorname{dos}\zeta+\operatorname{dos}\lambda\operatorname{dos}\nu=0 \\ \operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\gamma+\operatorname{dos}\eta\operatorname{dos}\zeta+\operatorname{dos}\mu\operatorname{dos}\nu=0 \end{array}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{dos}\lambda=\pm(\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\zeta-\operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\eta) \\ \operatorname{dos}\mu=\pm(\operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\xi-\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\zeta) \\ \operatorname{dos}\nu=\pm(\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\eta-\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\xi) \\ \operatorname{dos}\xi=\pm(\operatorname{dos}\mu\operatorname{dos}\gamma-\operatorname{dos}\nu\operatorname{dos}\beta) \\ \operatorname{dos}\eta=\pm(\operatorname{dos}\nu\operatorname{dos}\alpha-\operatorname{dos}\lambda\operatorname{dos}\gamma) \\ \operatorname{dos}\zeta=\pm(\operatorname{dos}\lambda\operatorname{dos}\beta-\operatorname{dos}\mu\operatorname{dos}\alpha) \\ \operatorname{dos}\alpha=\pm(\operatorname{dos}\eta\operatorname{dos}\nu-\operatorname{dos}\zeta\operatorname{dos}\mu) \\ \operatorname{dos}\beta=\pm(\operatorname{dos}\zeta\operatorname{dos}\lambda-\operatorname{dos}\xi\operatorname{dos}\nu) \\ \operatorname{dos}\gamma=\pm(\operatorname{dos}\xi\operatorname{dos}\mu-\operatorname{dos}\eta\operatorname{dos}\lambda) \end{array}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad\operatorname{dos}\lambda(\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\zeta-\operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\eta) \\ +\operatorname{dos}\mu(\operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\xi-\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\zeta) \\ +\operatorname{dos}\nu(\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\eta-\operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\xi)=\pm1 \end{array}\right.$$

Znaki wyższe we wzorach (5) i (6) odpowiadają jednemu kierunkowi osi koła krzywości, znaki niższe drugiemu [67].

Aby wyrazić dostawy kątów, jakie oś koła krzywości tworzy z osiami spółrzędnych w funkcji samych spółrzędnych, weźmy naprzykład pierwsze równanie (5) w którém [477], [501]

$$\operatorname{dos}\beta=\frac{dy}{dl},\quad \operatorname{dos}\gamma=\frac{dz}{dl},\quad \operatorname{dos}\zeta=\mathrm{R}\,\frac{d\frac{dz}{dl}}{dl},\quad \operatorname{dos}\eta=\mathrm{R}\,\frac{d\frac{dy}{dl}}{dl}$$

podstawiając te wartości, otrzymamy wyrażenie żądane $\operatorname{dos}\lambda$. W podobny sposób mielibyśmy dane przez przemianę głosek $\operatorname{dos}\mu$ i $\operatorname{dos}\nu$: wzory te, w których zmienna niezależna pozostaje nieoznaczoną są następujące :

$$(7)\qquad \begin{cases} \operatorname{dos}\lambda=\pm\mathrm{R}\,\dfrac{dyd^2z-dzd^2y}{dl^3} \\ \operatorname{dos}\mu=\pm\mathrm{R}\,\dfrac{dzd^2x-dxd^2z}{dl^3} \\ \operatorname{dos}\nu=\pm\mathrm{R}\,\dfrac{dxd^2y-dyd^2x}{dl^3} \end{cases}$$

505. Wyrażenie różnicy łuku i cięciwy. Widzieliśmy [474] że różnica ta jest nieskończenie małą rzędu wyższego nad pierwszy, jeżeli przyjmiemy łuk lub cięciwę za nieskończenie małą główną.

Niech będzie l długość zmienna łuku liczonego od punktu stałego na krzywéj x_0, y_0, z_0, do punktu jakiegokolwiek x, y, z; przyjąwszy długość tę l za zmienną niezależną, otrzymamy oznaczając ciągle przez R promień krzywości :

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz}{dl}\right)^2=1$$

$$(2)\qquad \left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{d}\right)^2=\frac{1}{\mathrm{R}^2}$$

wzory te są pierwszemi dwoma wzorami [**504** (1)] zważywszy na [**477**] i [**501**].

Różniczkując dwa razy wzór (1) i podstawiając przy drugiém różniczkowaniu wartość (2), otrzymamy

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{dy}{dt}\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{dz}{dt}\frac{d^3z}{dt^3}=-\frac{1}{\mathrm{R}^2}$$

a podstawiając wzór wynikający ze zróżniczkowania (2)

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^3z}{dt^3}=\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{R}^2}}{dt}$$

w różniczkę równiania (4), otrzymamy

$$(6)\qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^4x}{dt^4}+\frac{dy}{dt}\frac{d^4y}{dt^4}+\frac{dz}{dt}\frac{d^4z}{dt^4}=-\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{\mathrm{R}^2}}{dt}$$

Niech będą teraz Δx, Δy, Δz przyrostki spółrzędnych punktu ostatecznego łuku, gdy łukowi temu nadamy przyrostek nieskończenie mały Δt : wzór Taylor'a da nam

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t}{2}+\frac{d^3x}{dt^3}\frac{\Delta t^2}{6}+\frac{d^4x}{dt^4}\frac{\Delta t^3}{24}+\varepsilon_4$$

gdzie ε_4 jest nieskończenie małą przynajmniéj czwartego rzędu. Podnosząc ostatni wzór do kwadratu, i wypisując tylko wyrażenia rzędów niższych od czwartego, a oznaczając summę pozostałych przez ε'_4, będziemy mieli :

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t+\left[\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{1}{4}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2\right]\Delta t^2$$
$$+\left(\frac{1}{12}\frac{dx}{dt}\frac{d^4x}{dt^4}+\frac{1}{6}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^3x}{dt^3}\right)\Delta t^3+\varepsilon'_4$$

Wypisując podobne wzory na $\frac{\Delta y^2}{\Delta t^2}$ i $\frac{\Delta z^2}{\Delta t^2}$ otrzymane z poprzedzającego przez zmianę głosek, i dodając, będziemy mieli na zasadzie wzorów powyższych

$$\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2} = 1 - \frac{1}{R^2}\frac{\Delta t^2}{12} - \frac{d\frac{1}{R^2}}{dt}\frac{\Delta t^3}{24} + \varepsilon''_4$$

gdzie ε''_4 oznacza ciągle nieskończenie małą czwartego rzędu.

Wyciągając pierwiastek obu stron ostatniego równania, czyli podnosząc je do potęgi $\frac{1}{2}$ na zasadzie wzoru Newtona [**270**] otrzymamy, wypisując tylko wyrazy rzędów niższych nad czwarty

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta t} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\Delta t^2}{12} - \frac{d\frac{1}{R^2}}{dt}\frac{\Delta t^3}{24} - \varepsilon''_4\right) + \ldots$$

lub téż

$$(7)\quad \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z}}{\Delta t} = 1 - \frac{1}{R^2}\frac{\Delta t^2}{24} - \frac{d\frac{1}{R^2}}{dt}\frac{\Delta t^3}{48} + \varepsilon'''_4$$

gdzie ε_4''' oznacza zawsze nieskończenie małą przynajmniéj czwartego rzędu.

Nazwijmy R_1 promień krzywości w punkcie ostatecznym łuku $t + \Delta t$, gdy R jest promieniem krzywości w punkcie ostatecznym łuku t: różnica stosunku przyrostku odwróconego kwadratu promienia krzywości do przyrostku łuku

$$\frac{\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R^2}}{\Delta t}$$

i pochodnéj tego odwróconego kwadratu względem łuku

$$\frac{d\frac{1}{R^2}}{dt}$$

jest nieskończenie małą [138]: podstawiając więc jedno z tych wyrażeń za drugie we wzór (7) popełniamy błąd nieskończenie mały czwartego rzędu, bo wyrażenie jest pomnożoném przez Δt^3; będziemy mieli

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}{\Delta t}=1-\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta t^2}{48}+\varepsilon''''_4,$$

czyli

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\Delta t-\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta t^3}{48}+\varepsilon_5 \tag{8}$$

gdzie ε_5 oznacza nieskończenie małą piątego rzędu. Wyrażenie $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ jest wyrażeniem cięciwy; różnica

$$\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\Delta t^3}{48}-\varepsilon_5$$

między łukiem i cięciwą nieskończenie małemi jest *nieskończenie małą w ogólności trzeciego rzędu*, równą iloczynowi summy odwróconych kwadratów promieni krzywości w początku i w końcu łuku nieskończenie małego, przez $\frac{1}{48}$ sześcianu łuku, zwiększonemu nieskończenie małą piątego rzędu.

W kole promienia jedności, zakładając $\Delta t=2a$, otrzymamy

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=2\,\mathrm{wst}\,a$$

a wzór (8) da nam

$$\text{wst}\,a = a - \frac{a^3}{6} + \varepsilon_5,$$

wypadek znany z rozwinięcia wstawy na szereg [265].

O skręceniu, czyli drugiéj krzywości linij skośnych.

506. Określenie. Jeżeli krzywa nie znajduje się na jednéj płasczyznie, płasczyzna ściśle styczna zmienia w ogólności swój kierunek, jeżeli przechodzimy z jednego punktu krzywéj do drugiego: widzieliśmy [483] w jaki sposób kąty téj płasczyzny z płasczyznami spółrzędnych zależą od spółrzędnych punktu krzywéj, w którym uważamy płasczyznę ściśle styczną. Sposób w jaki płasczyzna ściśle styczna zmienia się zależne od spółrzędnych krzywéj, daje nam miarę różnicy jaka zachodzi między krzywą płaską a krzywą skośną, pokazując w jaki sposób krzywa oddala się od płasczyzny do któréj jest najbardziéj zbliżoną w danym punkcie: miarę tę, którą za chwilę określimy ściśle, nazwano *skręceniem* lub *drugą krzywością* linji, dla podobieństwa z pierwszą krzywością, która daje nam miarę różnicy pomiędzy prostą a krzywą, wskazując sposób w jaki krzywa oddala się od prostéj najwięcéj do niéj zbliżonéj, w danym punkcie, to jest od prostéj stycznéj. Wyrażając się treściwie, możnaby powiedzieć, że jak pierwsza krzywość mierzy odstawanie krzywéj od prostéj, tak skręcenie, czyli druga krzywość mierzy odstawanie krzywéj od płasczyzny ściśle stycznéj w danym punkcie.

Krzywe skośne nazywają także *krzywemi podwójnéj krzywości.*

507. Aby określić ściśléj drugą krzywość, czyli skręcenie, niech będzie krzywa w przestrzeni LL′ (fig. 129), M_0

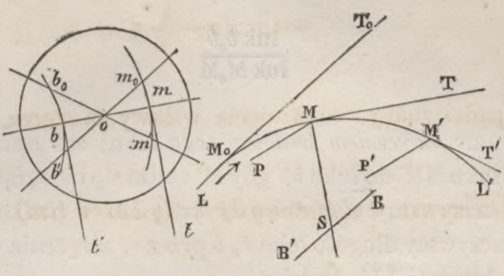


fig. 129

punkt krzywéj, od którego liczymy długości łuków dodatne, w stronę ku L′; M punkt jakikolwiek krzywéj, M′ punkt nieskończenie zbliżony do punktu M; MT styczna, MS normalna główna, MP prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznéj do krzywéj w punkcie M. Z punktu jakiegokolwiek o w przestrzeni zakreślmy kulę promieniem równym jedności, i poprowadźmy promienie om_0, om, om', równoległe do stycznych M_0T_0, MT, M′T′: krzywa kulista m_0mm będzie mierzyć jak wiemy [**499**], długością swych łuków pierwszą krzywość linji danéj LL′. Naprzykład, krzywość ta w punkcie M daną będzie przez

$$\mathrm{gr}\,\frac{mm'}{\mathrm{MM}'}=\frac{dk}{dt}$$

oznaczając łuk M_0M przez t, łuk m_0m przez k.

Poprowadźmy w podobny sposób średnice kuli równoległe do prostopadłych MP, M′P′ ... do płaszczyzn ściśle stycznych w różnych punktach krzywéj LL′: punkta ostateczne tych średnic wyznaczą na powierzchni kuli O dwie krzywe symetryczne, z których jedną niech będzie krzywa b_0b'. Długość łuku b_0b téj krzywéj między dwoma punktami b_0 i b odpowiadającemi punktom M_0 i M linji danéj LL′, nazywamy *skręceniem zupełném* łuku M_0M; stosunek skręcenia zupełnego do długości łuku M_0M, czyli stosunek

$$\frac{\text{łuk } b_0 b}{\text{łuk } M_0 M}$$

nazywamy *skręceniem średniem* tego łuku; zaś granicą stosunku łuku MM′ do łuku bb' gdy M′ zbliża się nieograniczenie do M, nazywamy *skręceniem* krzywéj LL′ w punkcie M.

Oznaczywszy długość łuku $b_0\, b$ przez τ, skręcenie w punkcie M krzywéj LL′, będzie

$$\text{gr} \frac{\text{łuk } bb'}{\text{łuk } MM'} = \frac{d\tau}{dl}$$

Różniczka $d\tau$ nazywa się *kątem skręcenia*: ma ona z łukiem nieskończenie małym bb' stosunek równy w granicy jedności; lecz łuk krzywéj bb' z łukiem koła wielkiego kuli o odpowiadającym téj saméj cięciwie bb' ma również stosunek równy w granicy jedności [**474**]; łuk ten koła wielkiego mierzy kąt, między dwoma prostopadłemi do płasczyzn ściśle stycznych w punktach M i M′ nieskończenie zbliżonych krzywéj danéj poprowadzonemi, czyli między samemi płasczyznami ściśle stycznemi; można więc powiedzieć że:

Skręcenie krzywéj w punkcie danym jest granicą stosunku kąta, jaki płasczyzna ściśle styczna w tym punkcie tworzy z płasczyzną ściśle styczną w punkcie nieskońszenie zbliżonym, do długości łuku krzywéj zawartego między temi dwoma punktami.

508. Koło skręcenia. Koło, którego krzywość równą jest skręceniu krzywéj w punkcie danym nazywa się *kołem skręcenia* krzywéj w tym punkcie. Promień tego koła czyli *promień skręcenia*, który oznaczymy przez T, danym więc będzie przez związek

$$(1)\qquad T = \frac{dt}{d\tau}$$

bo krzywość koła jest równą odwróconemu promieniowi [427].

Jeżeli odniesiemy krzywę do spółrzędnych prostokątnych mających początek w środku o kuli zakréślonéj promieniem równym jedności, i oznaczymy przez x, y, z spółrzędne punktu M, przez λ, μ, ν kąty jakie prostopadła MP do płasczyzny ściśle stycznéj, lub równoległa do niéj prosta biegunowa BB', lub jeszcze promień rów noległy ob tworzy z osiami, spółrzędnemi punktu b będą, zważywszy, że $ob = 1$ i że początek spółrzędnych znajduje się w punkcie o, wielkości

$$\text{dos}\,\lambda, \qquad \text{dos}\,\mu, \qquad \text{dos}\,\nu$$

a więc różniczka łuku bb' czyli $d\tau$, będzie miała wyrażenie

$$(2)\qquad d\tau = \sqrt{d(\text{dos}\,\lambda)^2 + d(\text{dos}\,\mu)^2 + (\text{dos}\,\nu)^2}$$

Wartości dostaw λ, μ, ν są dane powyżéj również jak wartość różniczki łuku dt [483] w funkcji spórzędnych; wzór (1) pozwoli nam wyprowadzić z łatwością promień skręcenia w funkcji spółrzędnych prostokątnych, jak to zobaczymy poniżéj.

509. Twierdzenie p. Serret'a. *Styczne do krzywych kulistych przedstawiających krzywość i skręcenie są równoległe w punktach odpowiednich.*

Niech będzie punkt m krzywéj $m_0 m'$ taki, że promień kuli om jest równoległy do stycznéj MT i punkt b krzywéj $b_0 b'$ taki, że promień ob jest równoległy do prostopadłéj

MP do płasczyzny ściśle stycznéj, lub do biegunowéj BB odpowiadającéj punktowi M; powiadam, że styczna mt do krzywéj m_0m' w punkcie m jest równoległą do stycznéj bt' krzywéj b_0b' w punkcie b.

Warunki prostopadłości [**66** (3)] normalnéj głównéj MS do stycznéj MT tworzącéj kąty α, β, γ i do biegunowéj BB' tworzącéj kąty λ, μ, ν z osiami spółrzędnych, dają nam

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{dos}\alpha.\, d\operatorname{dos}\alpha + \operatorname{dos}\beta.d\operatorname{dos}\beta + \operatorname{dos}\gamma.d\operatorname{dos}\gamma = 0 \\ \operatorname{dos}\lambda\;\, d\operatorname{dos}\alpha + \operatorname{dos}\mu.d\operatorname{dos}\beta + \operatorname{dos}\nu.d\operatorname{dos}\gamma = 0 \end{cases}$$

wzory, w których za dostawy kątów ξ, η, ζ jakie normalna główna tworzy z osiami, podstawiliśmy proporcjonalne tym dostawom wartości $d\operatorname{dos} x$, $d\operatorname{dos}\beta$, $d\operatorname{dos}\lambda$ [**485**].

Kierunki stycznéj MT i biegunowéj BB' są także prostopadłemi, a więc

$$\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\lambda + \operatorname{dos}\beta\operatorname{dos}\mu + \operatorname{dos}\gamma\operatorname{dos}\nu = 0$$

a różniczkując i znosząc wyrazy równe zeru na zasadzie drugiego równania (3)

$$(4)\quad \operatorname{dos}\alpha\, d\operatorname{dos}\lambda + \operatorname{dos}\beta\, d\operatorname{dos}\mu + \operatorname{dos}\gamma\, d\operatorname{dos}\nu = 1$$

Równanie [**504**]

$$\operatorname{dos}^2\lambda + \operatorname{dos}^2\mu + \operatorname{dos}^2\nu = 1$$

zróżniczkowane, daje nam

$$(5)\quad \operatorname{dos}\lambda\, d\operatorname{dos}\lambda + \operatorname{dos}\mu\, d\operatorname{dos}\mu + \operatorname{dos}\nu\, d\operatorname{dos}\nu = 0$$

Porównywając (4) i (5) z (3), widzimy że spółczynniki różniczek

$$d\,\text{dos}\,\alpha\,,\quad d\,\text{dos}\,\beta\,,\quad d\,\text{dos}\,\gamma$$

w (3) są równe spółczynnikom różniczek

$$d\,\text{dos}\,\lambda\,,\quad d\,\text{dos}\,\mu\,,\quad d\,\text{dos}\,\nu$$

w (4) i (5); rozwiązując więc równania (3) co do pierwszych trzech różniczek (lub stosunków dwóch z nich do pozostałéj), otrzymamy te same wartości co z rozwiązania równań (4) i (5) co do stosunków odpowiednich dwóch z drugich różniczek do pozostałéj; a zatém mamy stosunki równe

$$\frac{d\,\text{dos}\,\lambda}{d\,\text{dos}\,\alpha}=\frac{d\,\text{dos}\,\mu}{d\,\text{dos}\,\beta}=\frac{d\,\text{dos}\,\nu}{d\,\text{dos}\,\gamma}\,. \tag{6}$$

Równanie (6) udowadnia twierdzenie podane, zważywszy że dos α, dos β, dos γ są spółrzędnemi punktu m, zaś dos λ, dos μ, dos ν spółrzędnemi punktu b; a że stosunki różniczek odpowiednich spółrzędnych są równemi, więc kąty stycznych mt i bt' z osiami są równemi [**477**], czyli styczne te są równoległemi.

Rozróżniliśmy powyżéj [**477**] dwa kierunki stycznéj począwszy od punktu styczności, różniące są znakami dostaw. Biorąc punkt M_0 i odpowiednie mu punkta m_0, b_0 za początki łuków, ponieważ mamy dwie krzywe symetryczne $b_0\ b'$ na kuli, dla jednéj z nich styczna bt' będzie równoległą do mt w tę samą stronę, dla drugiéj w stronę przeciwną; przypuśćmy że bierzemy pod uwagę tę z dwóch krzywych symetrycznych, dla któréj styczna ma kierunek rozciągający się w tę samą stronę co kierunek stycznéj dla krzywéj $m_0\ m'$. W takim razie, zważywszy że każdy ze stosunków (6) równa się

$$\frac{\sqrt{(d\,\mathrm{dos}\,\lambda)^2+(d\,\mathrm{dos}\,\mu)^2+(d\,\mathrm{dos}\,\nu)^2}}{\sqrt{(d\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2+(d\,\mathrm{dos}\,\beta)^2+(d\,\mathrm{dos}\,\gamma)^2}}=\frac{d\tau}{dk}$$

[**508** i **500**] i zważywszy na związek [**501** (8)], z którego mamy

$$(7)\qquad d\,\mathrm{dos}\,\alpha=\mathrm{dos}\,\xi dk,\quad d\,\mathrm{dos}\,\beta=\mathrm{dos}\,\eta dk,\quad d\,\mathrm{dos}\,\gamma=\mathrm{dos}\,\zeta dy$$

otrzymamy

$$(8)\qquad d\,\mathrm{dos}\,\lambda=\mathrm{dos}\,\xi d\tau,\quad d\,\mathrm{dos}\,\mu=\mathrm{dos}\,\eta d\tau,\quad d\,\mathrm{dos}\,\nu=\mathrm{dos}\,\zeta d\tau$$

wzory, z których widzimy że czém jest styczna wyznaczona przez kąty α, β, γ, względem pierwszéj krzywości dk, tém jest względem drugiéj krzywości, czyli skręcenia, płaszczyzna ściśle styczna, lub jéj prostopadła dana przez kąty λ, μ, ν z osiami; ξ, η, ζ oznaczają ciągle kąty normalnéj głównéj z osiami. Typem tych wzorów są wzory znane [**477**]

$$(9)\qquad dx=\mathrm{dos}\,\alpha dt,\quad dy=\mathrm{dos}\,\beta dt,\quad dz=\mathrm{dos}\,\gamma dt$$

odnoszące się do krzywéj danéj i jéj stycznéj, tak jak wzory (7) i (8) odnoszą się do krzywych kulistych i ich stycznych : wiemy bowiem że styczna do jednéj z krzywych kulistych jest równoległą do normalnéj głównéj krzywéj danéj [**501**]; własność która pociąga za sobą wzory (7) i (8).

510. Weźmy jeszcze pod uwagę równanie [**504** (2)]

$$\mathrm{dos}^2\alpha+\mathrm{dos}^2\xi+\mathrm{dos}^2\lambda=1$$

które zróżniczkowane daje nam

$$\mathrm{dos}\,\alpha\, d\,\mathrm{dos}\,\alpha+\mathrm{dos}\,\xi\, d\,\mathrm{dos}\,\xi+\mathrm{dos}\,\lambda\, d\,\mathrm{dos}\,\lambda=0$$

i wyciągnijmy z tego równania wartość $d \operatorname{dos} \xi$ podstawiając w nie wzory (7) i (8); otrzymamy robiąc to samo dla $d \operatorname{dos} \eta$ i $d \operatorname{dos} \zeta$, trzy wzory

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} d \operatorname{dos} \xi &= -\operatorname{dos} \alpha dk - \operatorname{dos} \lambda d\tau \\ d \operatorname{dos} \eta &= -\operatorname{dos} \beta dk - \operatorname{dos} \mu d\tau \\ d \operatorname{dos} \zeta &= -\operatorname{dos} \gamma dk - \operatorname{dos} \nu d\tau \end{aligned} \right.$$

a wyciągając pierwiastek z summy kwadratów tych równań, i zważając, że zawsze summa kwadratów dostaw, jakie jedna i ta sama prosta tworzy z osiami, równa się jedności, otrzymamy

$$(11) \qquad \sqrt{(d \operatorname{dos} \xi)^2 + (d \operatorname{dos} \eta)^2 + (d \operatorname{dos} \zeta)^2} = \sqrt{dk^2 + d\tau^2}$$

równanie, które dałoby nam wyrażenie różniczki łuku trzeciéj krzywéj kulistéj, jaką otrzymaćbyśmy mogli prowadząc promienie kuli o równoległe do normalnéj głównéj. Do tych wzorów dołączyć jeszcze należy wzór

$$(12) \qquad dł = \mathrm{R}dk = \mathrm{T}d\tau$$

wynikający z (1) i [**500** (1)]

Wszystkie te wzory odznaczające się symetrycznym kształtem i podobieństwem własności, są jak widzimy wnioskami powyżéj [**509**] podanego twierdzenia lub przedstawiającego je równania (6) : jakkolwiek znanemi już one były w części poprzednio, (niektóre z nich, jak wzory (7) i (8) naprzykład, podane były przez p. Frenet'a); wyprowadzenie ich i zestawienie w powyższy sposób ułatwia rachunki, na jakie zadania tyczące się krzywych skośnych naprowadzić mogą.

511. Promień skręcenia. Jako przykład zastosowaani powyższych wzorów, podamy wyrażenie promienia skręcenia T w funkcji spółrzędnych prostokątnych. Wzory [**504** (7)] dają nam

$$\frac{d\text{ł}^3}{R}\operatorname{dos}\lambda = \pm(dyd^2z - dzd^2y)$$

$$\frac{d\text{ł}^3}{R}\operatorname{dos}\mu = \pm(dzd^2x - dxd^2z)$$

$$\frac{d\text{ł}^3}{R}\operatorname{dos}\nu = \pm(dxd^2y - dyd^2x)$$

Różniczkując te wzory otrzymamy, zważywszy na (8) i (12)

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &d\left(\frac{d\text{ł}^3}{R}\right)\operatorname{dos}\lambda + \frac{d\text{ł}^4}{RT}\operatorname{dos}\xi = \pm(dyd^3z - dzd^3y)\\ &d\left(\frac{d\text{ł}^3}{R}\right)\operatorname{dos}\mu + \frac{d\text{ł}^4}{RT}\operatorname{dos}\eta = \pm(dzd^3x - dxd^3z)\\ &d\left(\frac{d\text{ł}^3}{R}\right)\operatorname{dos}\nu + \frac{d\text{ł}^4}{RT}\operatorname{dos}\zeta = \pm(dxd^3y - dyd^3x)\end{aligned}\right.$$

Wzory [**501** (9)] dają nam, po wykonaniu

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\text{ł}^2}{R}\operatorname{dos}\xi = d^2x - \frac{d^2\text{ł}}{d\text{ł}}dx\\ &\frac{d\text{ł}^2}{R}\operatorname{dos}\eta = d^2y - \frac{d^2\text{ł}}{d\text{ł}}dy\\ &\frac{d\text{ł}^2}{R}\operatorname{dos}\zeta = d^2z - \frac{d^2\text{ł}}{d\text{ł}}dz\end{aligned}\right.$$

Mnożąc równania (13) odpowiednio przez (14) i dodając otrzymamy

$$\frac{d\text{ł}^6}{R^2T} = \pm\left[(dyd^3z - dzd^3y)d^2x + (dzd^3x - dxd^3z)d^2y + (dxd^3y - dyd^3x)d^2z\right]$$

a podstawiając za $\frac{dł^6}{R^2}$ wartość [**500** (6)] otrzymamy

$$(15)\quad T = \pm \frac{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}{(dyd^3z - dzd^3y)d^2x + (dzd^3x - dxd^3z)d^2y + (dxd^3y - dyd^3x)d^2z}$$

Promień skręcenia, podobnie jak promień krzywości przypuszczamy zawsze dodatnym i dla tego poprzedzamy wyrażenie jego znakiem $\pm$ stosownie do tego czy wyrażenie to obliczone wypadnie dodatném lub odjemném; znak ten wynika z zastosowania wzorów [**504**] poprzedzonych podwójnym znakiem.

Zauważymy, że promień skręcenia ma wyrażenie wymierne w funkcji różniczek spółrzędnych prostokątnych, gdy tymczasem promień pierwszéj krzywości ma je niewymiernėm [**500**].

512. Spółrzędne środka kuli ściśle stycznéj. Środek kuli ściśle stycznéj do krzywéj w punkcie danym, jest jakeśmy dowiedli [**488**] granicą punktu przecięcia się trzech płaszczyzn normalnych poprowadzonych w punkcie danym krzywéj i w dwóch punktach nieskończenie zbliżonych do danego. Wyrażenie spółrzędnych tego środka jes znacznie uproszczoném za pomocą otrzymanych powyżéj wzorów: dla tego tu je dopiero podajemy.

Oznaczmy dla skrócenia równanie płaszczyzny normalnéj przez $N = 0$: spółrzędne środka kuli ściśle stycznéj, otrzymują się [**488**] z trzech równań

$$(16)\qquad N = 0, \quad dN = 0, \quad d^2N = 0$$

gdzie znak różniczkowania odnosi się do spółrzędnych punktu krzywéj, a nie do spółrzędnych bieżących płaszczyzny normalnéj. Wypadek rugowania się nie zmieni, jeżeli zastąpimy równanie $N = 0$, przez równanie $MN = 0$, (gdzie M jest jakimkolwiek czynnikiem), nawet przed różniczkowaniem tego równania : bo różniczkując $MN = 0$, otrzymamy równanie

$$N dM + M dN = 0$$

równoważne z równaniem $dN = 0$, zważywszy że $N = 0$. Uczyniwszy to zastrzeżenie, wypiszmy równanie $N=0$ płaszczyzny normalnéj [**467**] zastępując dx, dy, dz przez proporcjonalne $\operatorname{dos}\alpha$, $\operatorname{dos}\beta$, $\operatorname{dos}\gamma$ [**466**]; będziemy mieli:

$$(17)\qquad (x_0 - x)\operatorname{dos}\alpha + (y_0 - y)\operatorname{dos}\beta + (z_0 - z)\operatorname{dos}\gamma = 0$$

gdzie α, β, γ są kątami jakie styczna do krzywéj w punkcie danym x, y, z, tworzy z osiami; zaś x_0, y_0, z_0 są spółrzędnemi bieżącemi płaszczyzny normalnéj w tym punkcie. Równanie $dN = 0$ otrzymamy różniczkując (17), uważając x_0, y_0 z_0 za stałe, zaś

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

za zmienne: co nam da, podstawiając wzory (7) i (12) [**510**], równanie

$$(18)\qquad (x_0 - x)\operatorname{dos}\xi + (y_0 - y)\operatorname{dos}\eta + (z_0 - z)\operatorname{dos}\zeta = R$$

Równanie $d^2N = 0$ otrzymamy również różniczkują (18) i podstawiając wzory (8) i (12) [**509, 510**]

$$(19)\qquad (x_0 - x)\operatorname{dos}\lambda + (y_0 - y)\operatorname{dos}\mu + (z_0 - z)\operatorname{dos}\nu = -\frac{T dR}{dt}$$

Układ równań (17), (18), (19) jest równoważnym z układem (16). Pomnóżmy te trzy równania odpowiednio przez $\operatorname{dos}\alpha$, $\operatorname{dos}\xi$, $\operatorname{dos}\lambda$ i dodajmy; następnie przez $\operatorname{dos}\beta$, $\operatorname{dos}\eta$, $\operatorname{dos}\mu$ i dodajmy; nakoniec przez $\operatorname{dos}\gamma$, $\operatorname{dos}\zeta$, $\operatorname{dos}\nu$ i dodajmy: otrzymamy, zważywszy na związki podane powyżéj [504]:

$$(20)\quad \begin{cases} x_0 - x = \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\xi - \dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{dl}\,\mathrm{dos}\,\lambda \\ y_0 - y = \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\eta - \dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{dl}\,\mathrm{dos}\,\mu \\ z_0 - z = \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\zeta - \dfrac{\mathrm{T}d\mathrm{R}}{dl}\,\mathrm{dos}\,\nu \end{cases}$$

równania które nam dają spółrzędne x_0, y_0 z_0 środka kuli ściśle stycznéj w punkcie danym krzywéj, wyrażone przez spółrzędne x, y, z tego punktu, promień krzywości R, promień skręcenia T, różniczkę łuku dl i dostawy kątów ξ, η, ζ normalnéj główné j i kątów λ, μ, ν prostopadłéj do płaszczyzny ściśle stycznéj, z osiami spółrzędnych. Wyrażenia wszystkich tych wielkości w funkcji spółrzędnych prostokątnych, zostały podane poprzednio.

513. Dodając kwadraty równań (20) otrzymamy

$$(21)\quad r^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{T}^2 \frac{d\mathrm{R}^2}{dl^2}$$

gdzie r oznacza promień kuli ściśle stycznéj.

Środek kuli ściśle stycznéj znajduje się na prostéj biegunowéj, osi koła krzywości, która jest przecięciem się dwóch płaszczyzn normalnych w punktach nieskończenie zbliżonych krzywéj [503], gdy środek ten jest przecięciem się trzech podobnych płaszczyzn [488]. Równanie (19) pokazuje, że odległością środka kuli ściśle stycznéj od płaszczyzny koła krzywości [502], jest wyrażenie $\mathrm{T}\dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$ równe $\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}$ na mocy równania (21); ztąd wynika, że koło krzywości jest kołem małém kuli ściśle stycznéj; a zatém:

Twierdzenie. *Koło krzywości w punkcie danym krzywéj jest przecięciem się kuli ściśle stycznéj z płaszczyzną ściśle styczną.*

Kula ściśle styczna jest granicą kuli przechodzącéj przez punkt dany i przez trzy punkta nieskończenie zbliżone do danego [**487**]; płaszczyzna ściśle styczna jest granicą płaszczyzny przechodzącéj przez punkt dany i przez dwa punkta nieskończenie zbliżone; a więc okrąg koła krzywości jest granicą okręgu koła przechodzącego przez punkt dany krzywéj i przez dwa punkta nieskończenie zbliżone do danego, czyli [**492**] :

Wniosek. *Koło krzywości jest kołem ściśle styczném w punkcie danym krzywéj.*

Nie ma więc różnicy pomiędzy kołem ściśle stycznéme, a kołem krzywości : dwa te koła stanowią jedno.

O powierzchniach obwijających.

514. Niech będzie funkcja ciągła, skończona, jednowartościowa czterech zmiennych

$$f(x, y, z, a)$$

Jeżeli zmienne x, y, z przedstawiają spółrzędne w przestrzeni, a parametr zmienny, równanie

$$f(x, y, z, a) = 0 \tag{1}$$

przedstawiać będzie pewien gatunek powierzchni : każdéj wartości szczególnéj zmiennego parametru a odpowiada pewna szczególna powierzchnia gatunku (1).

Jeżeli nadawszy temu parametrowi zmiennemu pewną wartość szczególną a, nadamy mu następnie wartość nieskończenie zbliżoną $a+\Delta a$, otrzymamy inną powierzchnię szczególną z gatunku (1), przedstawioną przez równanie

$$(2) \qquad f(x, y, z, a+\Delta a)=0.$$

Powierzchnia (2) przetnie (1) podług pewnéj krzywéj, danéj przez układ równań (1) i (2), lub dwóch innych równań wynikających z poprzednich, naprzykład przez równanie (1) i równanie

$$\frac{f(x, y, z, a+\Delta a)-f(x, y, z, a)}{\Delta a}=0.$$

Jeżeli teraz Δa dążyć będzie do zera, wspólne przecięcie powierzchni (1) i (2) dążyć będzie do granicy, która jest krzywą daną przez dwa równania: równanie (1) i równanie

$$(3) \qquad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a}=0$$

w którém znak różniczkowania częściowego odnosi się do parametru a, uważając $x, y, z,$ jako niezmienne.

Każdéj szczególnéj powierzchni z gatunku (1) odpowiada krzywa nakreślona na téj powierzchni, będąca granicą przecięcia się jéj z powierzchnią nieskończenie zbliżoną, otrzymaną nadając parametrowi przyrostek nieskończenie mały, i przedstawiona przez układ równań (1) i (3), z których ostatnie jest pochodną pierwszego względem parametru.

Miejsce geometryczne tych krzywych, otrzymamy rugując parametr a z równań (1) i (3): miejsce to jest powierzchnią, którą nazwano *powierzchnią obwijającą* powierzchnię (1). Krzywa dana przez (1) i (3), tworząca powierzchnię obwijającą, nazwaną została przez Monge'a *linją* *charakterystyczną* powierzchni obwijającéj. Powierzchnie (1) względem swych obwijających, nazwane zostały *obwiniętemi*.

515. Twierdzenie. *Powierzchnia obwijająca jest styczną do obwiniętéj w każdym punkcie linji charakterystycznéj wspólnéj tym dwóm powierzchniom.*

Aby dowieść, że dwie powierzchnie są stycznemi w pewnym punkcie wspólnym którego spółrzędnemi są x, y, z, dość jest dowieść, że te dwie powierzchnie mają w tym punkcie płaszczyznę styczną wspólną, to jest że pochodne częściowe $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ wyznaczające tę płaszczyznę styczną [472] są równe dla obu powierzchni

Pochodne te częściowe dla powierzchni obwiniętéj (1) są dane przez równania [217]

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\,p=0\\ &\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,q=0\end{aligned}\right.$$

dla powierzchni zaś obwijającéj, któréj równanie

$$(5)\qquad f(x,y,z,\mathrm{A})=0$$

otrzymamy, wyciągając wartość na a z (3), oznaczając ją przez A i podstawiając w (1), przyczém A jest funkcją x, y, z, przez równania :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\,p+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{A}}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\,p\right)=0\\ &\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\,q+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{A}}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\,q\right)=0\end{aligned}\right.$$

Lecz ponieważ punkt x, y, z wspólny obwijającéj i obwiniętéj znajduje się na charakterystycznéj, zachodzi równanie (3) $\frac{\partial f}{\partial A}=0$, na mocy którego równania (6) stają się temi samemi co (4), dają więc te same wartości spółczynników p, q, dla obwjającéj co dla obwiniętéj, a więc tę samą płaszczyznę styczną.

516. Krawędź zwrotu. Linje charakterystyczne zmieniające się w przestrzeni wraz z parametrem a i tworzące w ten sposób powierzchnię obwijającą, przecinają się również pomiędzy sobą: miejscem geometryczném tych punktów przecięcia jest krzywa, nazwana przez Monge'a *krawędzią zwrotu* powierzchni obwijających.

Weźmy pod uwagę trzy z powierzchni obwiniętych, odpowiadające wartościom a, $a+\Delta a$, $a+2\,\Delta a$, parametru. Trzy te powierzchnie będą miały punkta wspólne czyniące zadosyć równaniom:

$$(7) \qquad f(x,y,z,a)=0, \quad \frac{\Delta f(x,y,z,a)}{\Delta a}=0, \quad \frac{\Delta^2 f(x,y,z,a)}{\Delta a^2}=0$$

gdzie [19]

$$\Delta f(x,y,z,a)=f(x,y,z,a+\Delta a)-f(x,y,z,a),$$

$$\Delta^2 f(x,y,z,a)=f(x,y,z,a+2\Delta a)-2f(x,y,z,a+\Delta a) + f(x,y,z,a);$$

równaniom, które są tylko wynikami układu trzech równań powierzchni o których mowa.

Jeżeli teraz Δa zdąża do zera, równania (7) zdążają do granic :

$$(8)\qquad f(x,y,z,a)=0,\quad \frac{\partial f(x,y,z,a)}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial^2 f(x,y,z,a)}{\partial a^2}=0$$

Punkta czyniące zadosyć (8) są właśnie punktami, do których zdążają punkta przecięcia się dwóch charakterystycznych nieskończenie zbliżonych, z których pierwsza jest przecięciem się pierwszéj z trzech powierzchni obwiniętych uważanych z drugą, druga zaś charakterystyczna, przecięciem się drugiéj powierzchni obwiniętéj z trzecią.

Miejsce geometryczne tych punktów otrzymamy rugując a z równań (8); naprzykład wyciągając je z jednego, a podstawiając w dwa pozostałe : otrzymamy w ten sposób dwa równania nie zawierające a, które będą równaniami *krawędzi zwrotu* ; linja ta jak widzimy jest w ogólności linją skośną, zachowującą się względem charakterystycznych w podobny sposób jak na płaszczyznie obwijająca względem obwiniętych [**443**].

517. Twierdzenie. *Linje charakterystyczne są stycznemi do krawędzi zwrotu.*

Równania charakterystycznéj (1) i (3) oznaczać będziemy przez skrócenie

$$(9)\qquad f(x,y,z,a)=0,\quad f'(x,y,z,a)=0$$

Równania zaś krawędzi zwrotu, otrzymać możemy wyciągając wartość a z trzeciego równania (8) w funkcji x, y, z, oznaczając ją przez A i podstawiając w dwa pierwsze równania (8) : będziemy mieli w ten sposób

$$(10)\qquad f(x,y,z,A)=0,\quad f'(x,y,z,A)=0$$

gdzie uważać należy, że A już nie jest niezależną od spółrzędnych tak jak w równaniach (9), lecz znaną funkcją x, y, z.

Równania stycznéj do charakterystycznéj (9) będą [468]

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \\ \dfrac{\partial f'}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f'}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f'}{\partial z}dz = 0 \end{cases}$$

Równania stycznéj do krawędzi zwrotu różnić się będą od (11) o wyrazy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{A}}d\mathrm{A}, \quad \frac{\partial f'}{\partial \mathrm{A}}d\mathrm{A}$$

których spółczynniki $\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{A}}, \dfrac{\partial f'}{\partial \mathrm{A}}$ są zerami na zasadzie (8). Styczna więc do krawędzi zwrotu, daną będzie przez te same równania (11) co styczna do charakterystycznéj : styczna jest więc wspólną dla tych dwóch krzywych w punktach wspólnych.

Własność ta pokazuje znów podobieństwo do własności obwijających [445] na płaszczyźnie : tak, że krawędź zwrotu uważać można niejako za obwijającą charakterystycznych w przestrzeni.

518. O powierzchniach rozwijalnych. Powierzchnie rozwijalne określimy jako obwijające płaszczyzny zmieniającéj swe położenie w przestrzeni; usprawiedliwimy następnie nadane im nazwisko *rozwijalnych*.

Niech będzie równanie płaszczyzny [88]

$$(1)\qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$$

zakładamy że płaszczyzna zmienia swe położenie w przestrzeni zależnie od pewnego parametru a, którego spółczynniki A, B, C, D są funkcjami. Oznaczmy przez A', B', C', D' pochodne tych funkcyj względem a: równanie powierzchni obwijającéj te płaszczyzny, otrzymamy rugując parametr a, z równania (1) i równania

$$(2) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Równania (1) i (2) razem wzięte przedstawiać będą charakterystyczną téj powierzchni obwijającéj: ponieważ równania te są pierwszego stopnia, charakterystyczna, czyli tworząca jest tu linją prostą. Lecz charakterystyczna jest tworzącą powierzchni obwijającéj, ciągle styczną do jéj krawędzi zwrotu, linji w ogólności skośnéj: a więc

Powierzchnia rozwijalna jest miejscem geometryczném prostych stycznych do krzywéj skośnéj.

519. W szczególnym przypadku, jeżeli krawędź zwrotu stanie się linją płaską, powierzchnia rozwijalna stanie się płaszczyzną.

Krawędź zwrotu może stać się punktem, w razie jeżeli dla jakichkolwiek wartości spółczynników A, B, C, D płaszczyzny (1), mamy zawsze

$$(3) \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

gdzie x_0, y_0, z_0 są stałemi spółrzędnemi punktu: w takim bowiem razie płaszczyzna ruchoma przechodzi zawsze przez punkt stały, jedyny punkt wspólny charakterystycznych które są prostemi: punkt ten jest więc krawędzią zwrotu. Powierzchnia rozwijalna jest utworzoną przez prostę ruchomą (charakterystyczną), przechodzącą przez punkt stały x_0, y_0, z_0: powierzchnia ta jest więc *powierzchnią ostrokręgową*. Równanie tworzącéj otrzymamy rugując D z (1) i (3), i różniczkując tak otrzymane równanie względem parametru, co nam da

$$(4)\quad \begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \\ A'(x-x_0)+B'(y-y_0)+C'(z-z_0)=0 \end{cases}$$

Równanie saméj powierzchni otrzymalibyśmy rugując parametr a z (4).

Jeżeli punkt x_0, y_0, z_0 oddala się do nieskończoności, zakładając

$$x_0 = mz_0, \qquad y_0 = nz_0$$

gdzie m i n są stałemi, podstawiając w (3) dzieląc przez z_0 i zakładając w końcu $z_0 = \infty$, równanie (3) stanie się

$$(5)\qquad Am + Bn + C = 0$$

Jeżeli spółczynniki A, B, C dla wszelkiéj wartości parametru a, od którego zależą, czynią zadość równaniu takiemu jak (5) gdzie m i n są stałemi, mnożąc to równanie przez z i odejmując od (1) i (2), otrzymamy równanie charakterystycznéj (tworzącéj)

$$(6)\quad \begin{cases} A(x-mz)+B(y-nz)+D=0 \\ A'(x-mz)+B'(y-nz)+D'=0 \end{cases}$$

Powierzchnia ta jest *powierzchnią walcową*, któréj równanie otrzymamy rugując parametr a z równań (6) tworzącéj.

520. TWIERDZENIE. *Płaszczyzna ruchoma, któréj powierzchnia rozwijalna jest obwijającą, jest ściśle styczną do krawędzi zwrotu téj powierzchni.*

W saméj rzeczy oznaczając przez x, y, z, spółrzędne pewnego punktu krawędzi zwrotu, biorąc parametr a za zmienną niezależną, i oznaczając przez A′, B′, C′, D′ i A″, B″, C″, D″ pierwsze i drugie pochodne spółczynników A, B, C, D względem tego parametru, mamy dla uważanego punktu x, y, z, krawędzi zwrotu [**516**] :

$$(7)\qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Różniczkując pierwsze z tych równań i znosząc wyrazy równe zeru na zasadzie drugiego, różniczkując następnie drugie i znosząc wyrazy równe zeru na zasadzie trzeciego, otrzymamy

$$(8)\qquad \begin{cases} Adx + Bdy + Cdz = 0 \\ A'dx + B'dy + C'dz = 0 \end{cases}$$

Różniczkując znów pierwsze z równań (8) i znosząc wyrazy równe zeru na zasadzie drugiego otrzymamy

$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0$$

równanie które wraz z równaniem

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

pokazuje, że A, B, C są proporcjonalne dostawom kątów, jakie prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznéj [**481**] tworzy z osiami; płaszczyzna więc (1) jest płaszczyzną ściśle styczną do krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnéj, obwijającéj tę płaszczyznę.

521. Pozostaje nam wyjaśnić przyczynę, dla któréj powierzchnię obwijającą płaszczyznę ruchomą nazwano *rozwijalną*. Powierzchnia ta jest styczną do płaszczyzn obwiniętych wzdłuż prostéj charakterystycznej [**515**], to jest w każdym punkcie prostéj tworzącéj, wspólnéj powierzchni i płaszczyznie, stycznéj do pewnéj linji skośnéj, nazwanéj krawędzią zwrotu. Niech będzie łuk krawędzi zwro-

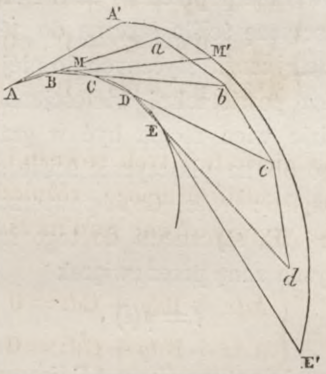


fig. 130.

tu AE (fig. 130) : wpiszmy w ten łuk wielokąt ABCDE o zwiększającéj się liczbie boków; przedłużmy każdy z boków tego wielokąta : utworzymy płaszczyzny aBb, bCc, cDd.... których zbiór tworzyć będzie powierzchnię wielościenną, któréj Aa, Bb, Cc, Dd... będą krawędziami. Jeżeli każdą ze ścian téj powierzchni naprzykład cDd obrócimy koło krawędzi Cc oddzielającéj ją od ściany sąsiedniéj aż do utworzenia ze ścianą sąsiednią bCc jednéj płaszczyzny; następnie tę płaszczyznę koło krawędzi następującéj Bb, aż do utworzenia jednéj płaszczyzny ze ścianą Bab i t. d., rozłożymy całę powierzchnię wielościenną na jednéj płaszczyznie ostatniéj ściany, nie rozdzierając jéj. Jeżeli powierzchnię tę przypuścimy ograniczoną pewną linję łamaną $abcd$... otrzymaną, biorąc naprzykład odległość t : Ba, Cb, Dc... w funkcji pewnéj długości łuków l: AB, AC, AD...

$$t = \varphi(l)$$

to po rozłożeniu, wielkość powierzchni widocznie się nie zmieni.

Jakkolwiek punkta A, B, C, D... będą zbliżone jedne do drugich, rozłożenie powyższe będzie mogło mieć miejsce w taki sam sposób : w granicy, kierunki AB,... będą stycznemi do krzywéj AE krawędzi zwrotu, powierzchnia wielościenna uważana poprzednio stanie się powierzchnią obwijającą płaszczyznę ściśle styczną do téj krzywéj, lub miejscem geometrycznem stycznych do niéj : powierzchnia ta, jako granica powierzchni wielościennéj mogącéj być rozłożoną, będzie więc mogła być w granicy *rozwinięta* w powyższy sposób na płaszczyznie ściśle stycznéj w punkcie A do krawędzi zwrotu. Część powierzchni zawartą pomiędzy łukiem AE, stycznemi do tego łuku AA′, EE′ i krzywą A′E′ wyznaczoną przez związek

$$t = \varphi(l)$$

gdzie t jest długością stycznéj do AE liczonéj od punktu M téj krzywéj, l zaś długością łuku AM, będziemy uważać jako równą powierzchni płaskiéj wynikającéj z jéj rozwinięcia, określając powierzchnię krzywą jako granicę powierzchni wielościennéj wpisanéj. Krzywa przekształcona krzywéj A′E′ na powierzchni będzie widocznie czyniła zadosyć równaniu

$$t = \varphi(l)$$

bo odległość t ani l nie zostały zmienionemi podczas rozwijania. Krzywa A′E′ jest granicą łamanéj *abcd*... jakkolwiek punkta *a*, *b*, *c*... téj ostatniéj nie znajdują się w ogólności na krzywéj, lecz zbliżają się do niéj tylko nieograniczenie, w miarę jak cięciwy odpowiednie dążą do stycznych.

O rozwiniętych linji krzywéj w przestrzeni.

522. Określenie. *Rozwiniętą* krzywéj danéj w przestrzeni nazywamy linję, któréj styczne spotykają krzywę daną i są do niéj normalnemi.

Krzywa w przestrzeni ma w każdym swym punkcie nieograniczoną liczbę normalnych: nazywamy normalną wszelką prostę nakreśloną na płasczyznie normalnéj, i przechodzącą przez punkt dany [467]. Aby więc otrzymać rozwiniętą krzywéj, dość jest poprowadzić do niéj układ normalnych tworzących powierzchnię rozwijalną, a krawędź zwrotu téj powierzchni rozwijalnéj [517] będzie z określenia styczną do tych normalnych, a zatém rozwiniętą krzywéj danéj. Układów tych jest, jak zobaczymy, liczba nieograniczona: a zatém krzywa w przestrzeni może mieć nieograniczoną liczbę normalnych.

W saméj rzeczy, aby otrzymać jeden z tych układów, dość jest przez punkt dany M krzywéj poprowadzić normalnę dowolną; następnie przez punkt M' nieskończenie zbliżony, normalnę przecinającą poprzednią, (łącząc punkt M' z punktem przecięcia się normalnéj uważanéj w punkcie M z płasczyzną normalną poprowadzoną w M') i postępować tak daléj, prowadząc przez punkt M'' nieskończenie zbliżony do M' normalnę przecinającą normalnę w M' i t. p.

Przecięcie się tych wszystkich normalnych utworzy linję wielokątną skośną, któréj granicą, gdy odległości punktów M, M', M''... zdążają do zera, jest rozwinięta krzywéj danéj. Ponieważ pierwsza normalna, poprowadzona w punkcie M jest jakąkolwiek, liczba rozwiniętych jest nieograniczoną.

523. Aby usprawiedliwić nazwisko rozwiniętéj dane krzywéj utworzonéj w powyższy sposób dowiedziemy :

TWIERDZENIE. *Długość łuku rozwiniętéj ograniczonego dwoma punktami, jest równa różnicy długości jéj stycznych zawartych między temi punktami, a punktami odpowiedniemi krzywéj danéj.*

Twierdzenie to jest wnioskiem następującego ogólniejszego, które w wielu razach może mieć ważne zastosowanie :

Jeżeli prosta ograniczona zmienia swe położenie w przestrzeni ruchem ciągłym, zmieniając zarazem swą długość w sposób ciągły, przyrostek nieskończenie mały téj długości, gdy prosta przechodzi z danego położenia do drugiego nieskończenie zbliżonego, różni się od summy rzutów na kierunek dany prostéj dróg przebieżonych przez punkta ostateczne, o nieskończenie małą drugiego rzędu.

W saméj rzeczy, niech będzie AB położenie dane prostéj i A′B′ położenie nieskończenie zbliżone; AA′, BB′ są łuki przebieżone przez punkta A, B, lub cięciwy tych łuków, różniące się od nich o nieskończenie małe trzeciego rzędu [**505**].

Poprowadźmy prostopadłe A′P, B′Q do AB : mamy na-

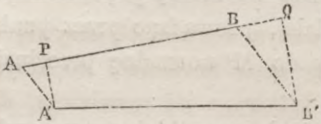


fig. 131.

zywając przez ε kąt nieskończenie mały [**134**] zawarty pomiędzy AB i A′B′

$$\frac{PQ}{A'B'} = \cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2} + \eta^3 \qquad [\mathbf{265}]$$

gdzie η_3 jest nieskończenie małą trzeciego rzędu; a zatém różnica [**121**]

$$A'B' - PQ$$

jest nieskończenie małą drugiego rzędu, którą oznaczmy przez α_2 : będziemy mieli

$$A'B' - AB = PQ - AB + \alpha_2 = BQ - AP + \alpha_2$$

Lecz BQ i AP są rzutami dróg przebieżonych przez A i B na AB : twierdzenie jest więc udowodnioném.

Rozróżnimy dwa przypadki szczególne :

Jeżeli prosta AB jest normalną do krzywéj zakreślonéj przez jeden ze swych końców A, rzut drogi zakreślonéj przez punkt A na kierunek AB jest zerem; dość więc będzie wziąść pod uwagę w powyższém twierdzeniu rzut drogi zakreślonéj przez drugi koniec B.

Jeżeli prosta AB jest ciągle styczną do krzywéj zakreślonéj przez jeden z swych końców, naprzykład B, rzut drogi zakreślonéj przez B na styczną AB, jest równym długości tejże drogi, to jest łukowi krzywéj zakreślonéj przez B.

W przypadku danym rozwiniętéj krzywéj w przestrzeni, weźmy pod uwagę część normalnéj do krzywéj danéj zawartą pomiędzy krzywą, a jéj rozwiniętą, do któréj normalna ta jest styczną : normalna zmieniając się w przestrzeni, zakreśla jednym ze swych końców krzywę daną, drugim jéj rozwiniętą; przyrostek nieskończenie mały jéj długości różni się o nieskończenie małą drugiego rzędu od summy rzutów krzywéj danéj i rozwiniętéj na tę prostą. Lecz rzut łuku nieskończenie małego krzywéj danéj na normalną jest zerem; rzut rozwiniętéj na styczną jest równy łukowi nieskończenie małemu téjże rozwiniętéj, jedno i drugie opuszczając nieskończenie małe wyższych nad pierwszy rzędów; a zatém przyrostek nieskończenie mały prostéj różni się od łuku nieskończenie małego rozwiniętéj o nieskończenie małą względem tegoż przyrostku. Uważając więc przyrostek skończony stycznéj do rozwiniętéj, zawartéj pomiędzy rozwiniętą a krzywą daną, jako summę przyrostków nieskończenie małych téj stycznéj, zakreślającéj punktem styczności rozwiniętą i pozostającéj ciągle normalną do krzywéj danéj, przyrostek ten będzie równym łukowi odpowiedniemu rozwiniętéj, na zasadzie znanego twierdzenia [**125**].

Przypuszczając więc nawiniętą nić na rozwiniętą, koniec téj nici zakreślać będzie krzywę daną, jeżeli odwijać będziemy nić pozostawiając ją styczną do rozwiniętéj, w podobny sposób jakeśmy widzieli w teorji rozwiniętych na płaszczyznie [**439**]. Krzywa dana względem swéj rozwiniętéj nazwaną została *rozwijająca*.

524. Tierdzenie II. *Normalna główna rozwiniętéj jest równoległą do stycznéj w odpowiednim punkcie rozwijającéj.*

W saméj rzeczy, weźmy pod uwagę styczną w punkcie M_1 rozwiniętéj, która jest normalną w punkcie M rozwijającéj. Płaszczyzna ściśle styczna do rozwiniętéj w M_1 zawiera normalnę główną do téj rozwiniętéj [**485**], jest przytém styczną do powierzchni rozwijalnéj, któréj prosta MM_1 jest tworzącą [**520**] wzdłuż całéj linji MM_1, zawiera więc styczną w M do rozwijającéj, która znajduje się także na téj powierzchni. Styczna ta w M do rozwijającéj, i normalna w M_1 do rozwiniętéj znajdują się na jednéj płaszczyznie i są prostopadłemi do prostéj MM_1 : są więc równoległemi.

525. Powierzchnia biegunowa. Mając daną krzywę w przestrzeni, na mocy teoryj poprzedzających możemy wyznaczyć inne krzywe zależne od danéj, a mianowicie :

1° *Krzywę, która jest miejscem geometryczném środków kul ściśle stycznych* : każdemu punktowi krzywéj danéj odpowiada punkt wyznaczony [**488**], który jest środkiem kuli ściśle stycznéj do krzywéj danéj w tym punkcie; punkt ten zakreśla krzywę o któréj mowa, podczas gdy punkt krzywéj danéj zakreśla ją w przestrzeni. Równania tego miejsca otrzymamy rugując spółrzędne x, y, z, krzywéj danéj z jéj równań i równań [**512** (20)].

2° *Krzywę, która jest miejscem geometryczném środków kół krzywości, lub kół ściśle stycznych*: punktów również wyznaczonych odpowiednio każdemu punktowi krzywéj danéj [**502**], różnych w ogólności od poprzedzających, środków kul ściśle stycznych. Równania tego miejsca otrzymamy, rugując spółrzędne x, y, z, krzywéj danéj z jéj równania i równań [**503** (4)].

3° *Krzywe w liczbie nieograniczonéj, które są rozwiniętemi krzywéj danéj w przestrzeni.* Zobaczymy poniżéj że krzywe te są różnemi od dwóch poprzednich.

Godném jest uwagi, że krzywe wszystkich trzech powyższych gatunków, znajdują się na jednéj i téj saméj powierzchni rozwijalnéj, która jest obwijającą płasczyzn normalnych do krzywéj danéj, lub miejscem geometryczném prostopadłych do kół krzywości przez środek tych kół poprowadzonych prostopadłych, któreśmy nazwali *osiami kół krzywości*, lub *prostemi biegunowemi* [**502**]; powierzchnia ta nazwaną została *powierzchnią biegunową.*

W saméj rzeczy, powierzchnia ta zawiera już ze swego określenia wszystkie środki kul ściśle stycznych i środki kół krzywości, które jakeśmy widzieli [**513**] znajdują się na prostéj biegunowéj, tworzącéj tę powierzchnię rozwijalną. Aby dowieść że wszystkie rozwinięte krzywej danéj są również nakreślonemi na powierzchni biegunowéj, zauważymy, że każdy punkt rozwiniętéj będąc punktem przecięcia się dwóch normalnych w punktach nieskończenie zbliżonych krzywéj danéj, znajduje się na wspólnym przecięciu dwóch płaszczyzn normalnych w tych punktach do krzywéj poprowadzonych, czyli na prostéj biegunowéj [**503**]. Nie tylko więc powierzchnia biegunowa zawiera krzywe trzech gatunków wymienione powyżéj, ale jeszcze punkta tych trzech krzywych odpowiednie jednemu i temu samemu punktowi krzywéj danéj, znajdują się na jednéj i téj saméj prostéj biegunowéj, tworzącéj powierzchnię rozwijalną, o któréj mowa.

526. Twierdzenie III. *Miejsce geometryczne środków kul ściśle stycznych do krzywéj w przestrzeni, jest krawędzią zwrotu powierzchni biegunowéj.* W saméj rzeczy, uważając powierzchnię biegunową jako obwijającą płaszczyzny normalne krzywéj danéj, prosta biegunowa będzie charakterystyczną téj powierzchni, a miejsce geometryczne punktów przecięcia się prostych biegunowych, jéj krawędzią zwrotu. Lecz środek kuli ściśle stycznej, będąc granicą przecięcia się trzech płaszczyzn normalnych nieskończenie zbliżonych [**488**], jest również granicą punktu przecięcia się przecięć tych płaszczyzn, czyli prostych biegunowych [**503**]; miejsce geometryczne tego punktu jest więc krawędzią zwrotu powierzchni biegunowéj.

527. Twierdzenie IV. *Rozwinięte krzywéj danéj znajdujące się na jéj powierzchni biegunowéj, zamieniają się przy rozwinięciu téj powierzchni na linje proste, przecinające się w jednym punkcie.*

W saméj rzeczy, normalna główna rozwiniętéj jest równoległą do stycznéj w odpowiednim punkcie rozwijającéj [**524**], a zatém prostopadłą do płaszczyzny normalnéj krzywéj danéj w tym punkcie, płaszczyzny stycznéj do powierzchni biegunowéj jako obwijająca do obwiniętéj. Normalna główna rozwiniętéj, a zatém i jéj płaszczyzna ściśle styczna, zawierająca tę normalną, jest więc prostopadłą do płaszczyzny stycznéj powierzchni rozwijalnéj, na któréj ta rozwinięta jest nakreśloną. Dowiedziemy w ogólności, że

Krzywa, któréj płasczyzna ściśle styczna jest prostopadłą do płasczyzny stycznéj powierzchni rozwijalnéj na któréj krzywa ta jest nakreśloną, zamienia się na prostą po rozwinięciu téj powierzchni.

Twierdzenie nasze będzie wnioskiem tego ostatniego ogólniejszego twierdzenia, którego dowiedziemy w następujący sposób :

Znajdziemy krzywość jakiéjkolwiek linji nakreślonéj na powierzchni rozwijalnéj po przekształceniu jéj przez rozwinięcie : linji, którą nazywać będziemy przez skrócenie *przekształconą*; gdy krzywość ta będzie zerem, przekształcona będzie prostą.

Weźmy dla tego pod uwagę powierzchnię wielościenną, któréj krawędzie będą przecięciami wzajemnemi układu płasczyzn nieskończenie zbliżonych; w granicy powierzchnia wielościenna stanie się powierzchnią rozwijalną, jak widzieliśmy powyżéj [**521**]. Niech będą trzy krawędzie AM, BN, BP:

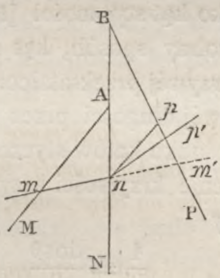


fig. 132.

po sobie następujące, i *mn* , *np* dwa boki wielokąta, którego granicą będzie krzywa nakreślona na powierzchni. Aby rozłożyć wielościan na płasczyznie, obracamy każdą ścianę koło krawędzi oddzielającéj ją od ściany sąsiedniéj. W tym ruchu boki *mn*, *np*, nie zmienią swéj długości, lecz kąt jaki tworzą ze sobą ich kierunki, zostanie zmienionym.

Niech będzie np' położeniem boku np po rozłożeniu; widzimy że np, np' są tworzącemi ostrokręgu, którego nB jest osią: płaszczyzna więc pnp' jest w granicy styczną do tego ostrokręgu, a więc prostopadłą do płaszczyzny Bnp', lub $m'np'$ przechodzącéj przez oś. W granicy więc trójścian $pnp'm'$ będzie prostokątnym podług krawędzi np'. Nazwijmy kąt $m'np = \varepsilon$, $m'np' = \varepsilon'$, kąt zaś dwóścienny utworzony przez ścianę $p'np$ ze ścianą pnm' nazwijmy θ; będziemy mieli w granicy

$$\text{st}\,\varepsilon' = \text{st}\,\varepsilon\,\text{dos}\,\theta$$

lub

$$\varepsilon' = \varepsilon\,\text{dos}\,\theta$$

zważywszy że kąty ε', ε są nieskończenie małemi, że zatém można je podstawić zamiast stycznych, nie zmieniając granicy [**126**]. Lecz kąt $m'np$ jest w granicy kątem zawartym między dwiema stycznemi nieskończenie zbliżonemi do krzywéj przed rozwinięciem, a więc w granicy kąt ten może być uważanym jako kąt styczności [**500**] krzywéj na powierzchni; w podobny sposób, kąt ε' może być wziętym za kąt styczności krzywéj przekształconéj przez rozwinięcie: łuk nie zmienia swéj długości przez rozwinięcie; a zatém krzywości są w stosunku kątów styczności [**500**]. Nazywając R i R$'$ promienie krzywości krzywéj przed i po rozwinięciu, otrzymamy

$$\frac{1}{R'} = \frac{\text{dos}\,\theta}{R}$$

Aby więc krzywość linji przekształconéj mogła być zerem, czyli promień R$'$ nieskończenie wielkim, trzeba, jeżeli R nie jest nieskończenie wielkiem, to jest jeżeli linja uważana na powierzchni, nie jest prostą tworzącą, żeby

$$\text{dos}\,\theta = 0$$

Lecz kąt θ jest w granicy kątem pomiędzy płasczyzną ściśle styczną do krzywéj, a płasczyzną styczną do powierzchni rozwijalnéj : trzeba więc żeby te płasczyzny były prostopadłemi, aby przekształcona mogła być linją prostą, i odwrotnie.

Pozostaje jeszcze udowodnić, że rozwinięte przekształcone na proste spotykają się w jednym punkcie. Niech będzie dla tego powierzchnia biegunowa krzywéj danéj, na któréj są nakreślonemi wszystkie jéj rozwinięte. Przedstawmy sobie płasczyznę nawiniętą na tę powierzchnię, rozwijającą się przez obrót około swych tworzących. Podczas tego rozwijania, płasczyzna dotyka powierzchni wzdłuż jednéj tworzącéj, a na jéj części płaskiéj, już rozwiniętéj, przekształcone już proste, stykają się z linjami jeszcze nieprzekształconemi odpowiedniemi na powierzchni, w punktach znajdujących się właśnie na téj tworzącéj. Wszystkie te punkta na tworzącéj, w których części proste przekształconych tychże rozwiniętych są stycznemi do części nieprzekształconych znajdujących się jeszcze na powierzchni, odpowiadają jednemu i temu samemu punktowi krzywéj danéj, którego tworząca ta jest prostą biegunową : styczne do wszystkich rozwiniętych muszą się spotykać w tym punkcie. W miarę więc jak płasczyzna którąśmy obwinęli powierzchnię biegunową, będzie się odwijać, styczne do rozwiniętych nieprzekształconych, które są zarazem rozwiniętemi przekształconemi, schodzić się będą w jednym punkcie zmiennym, przebiegającym krzywę daną w miarę odwijania się płasczyzny : gdy więc odwijanie zostanie w zupełności dokonaném, styczne te czyli rozwinięte przekształcone spotkają się jeszcze w jednym punkcie, co było do dowiedzenia.

528. Krzywa, która jest miejscem geometrycznem środków kół krzywości krzywéj danéj, znajduje się, jakeśmy nadmienili [**525**], na powierzchni biegunowéj, lecz nie jest rozwiniętą, jakby to się zdawać mogło przez podobieństwo z własnością środków krzywości krzywych płaskich. Każdy z jéj punktów jest spodkiem prostopadłéj z punktu odpowiedniego krzywéj, na tworzącą biegunowę poprowadzonéj [**502**], będąc środkiem pierwszéj krzywości krzywéj danéj. Widzieliśmy przed chwilą, jak przypuszczając płaszczyznę odwijającą się z powierzchni biegunowéj, i punkta krzywéj danéj związane z tworzącemi téj powierzchni, każdy z tych punktów przebiegając podczas odwijania się krzywę daną, znajdzie się w końcu w jednym i tym samym punkcie, w którym zbiegają się przekształcone rozwiniętych. Krzywa która jest miejscem geometrycznem środków krzywości, przekształcona po odwinięciu, będzie miejscem geometrycznem spodków prostopadłych poprowadzonych z tego punktu stałego do tworzących przekształconych. Lecz tworzące są prostemi stycznemi do krawędzi zwrotu, która jest miejscem geometrycznem środków kul ściśle stycznych: przekształcona więc miejsca geometrycznego środków krzywości, jest miejscem geometrycznem spodków prostopadych poprowadzonych z pewnego punktu stałego na styczne do przekształconéj, miejsca geometrycznego środków kul ściśle stycznych.

529. Proste, które są przekształconemi rozwiniętych krzywéj danéj, po rozwinięciu powierzchni biegunowéj na płaszczyznie, przedstawiają nie tylko same rozwinięte przekształcone, ale i ich styczne które przypuszczamy związane nierozłącznie z niemi przy rozwijaniu. Biorąc pod uwagę dwie różne rozwinięte téj saméj krzywéj danéj, styczne do tych rozwiniętych w punktach odpowiednich znajdują na jednéj i téj saméj płaszczyznie normalnéj do krzywéj danéj, a zatém na jednéj i téj saméj płaszczyznie stycznéj do powierzchni biegunowéj. Rozwinięcie téj ostatniéj powierzchni nie zmieni więc kąta pomiędzy stycznemi do rozwiniętych: kąt ten będzie stale równym kątowi pomiędzy prostemi przekształconemi rozwiniętych.

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę dwie rozwinięte téj samej krzywéj w przestrzeni, i dwa układy normalnych krzywéj danéj styczne do rozwiniętych, normalne te tworzyć będą kąt stały w punkcie przecięcia się na krzywéj danéj. Innemi słowy, biorąc pod uwagę normalne do krzywéj danéj, obwijające pewną rozwiniętę, chcąc otrzymać inną rozwiniętę, dość będzie obrócić każdą z normalnych około punktu na krzywéj danéj o jeden i ten sam kąt, nie wychodząc rozumie się z płasczyzny normalnéj.

530. W szczególnym przypadku, gdy krzywa w przestrzeni staje się krzywą płaską, powierzchnia biegunowa staje się powierzchnią walcową prostopadłą do płasczyzny linji krzywéj. Jedna rozwinięta jest wtedy płaską, krzywą przecięcia się płasczyzny zawierającéj krzywę, z tą powierzchnią walcową : rozwinięta w tym tylko szczególnym przypadku jest zarazem miejscem geometrycznem środków kół krzywości. Oprócz tej, krzywa płaska ma nieograniczoną liczbę innych rozwiniętych skośnych, znajdujących się na powierzchni walcowéj. Odwrotnie, ile razy powierzchnia biegunowa jest walcową, krzywa dana jest płaską, bo jéj płasczyzna ściśle styczna będąc prostopadłą do tworzących walca, ma kierunek stały.

530. **Równanie rozwiniętych w przestrzeni**, wymaga rachunku całkowego, i nie może być tu podaném.

531. Przykład. Linja śrubowa. Niech będzie walec obrotowy i koło kóre jest przecięciem prostopadłym do tworzących tego walca. Niech będzie punkt ruchomy przebiegający okrąg tego koła ruchem jednostajnym, podczas gdy środek jego posuwa się również ruchem jednostajnym po osi walca. Punkt ten zakreśla na powierzchni walca linję skośną, nazwaną *linją śrubową*. Weźmy układ osi prostokątnych, oś walca za oś OZ, dwie średnice prostopadłe koła tworzącego w początkowem jego położeniu za osie OX i OY; nazwijmy a promień walca, φ kąt zmienny przebieżony przez punkt ruchomy po okręgu koła, liczony od osi OX; oznaczmy przez $dot\,\theta$ spółczynnik stały, wyrażający stosunek drogi przebieżonéj przez środek koła ruchomego na osi OZ, do drogi przebieżonéj przez punkt ruchomy po okręgu koła w tymże samym czasie; otrzymamy dla jakiegokolwiek położenia punktu ruchomego

$$(1) \qquad x = a \operatorname{dos} \varphi, \quad y = a \operatorname{wst} \varphi, \quad z = a\varphi \operatorname{dot} \theta$$

równania które mogą być uważane za równania linji śrubowéj: rugując φ z trzech powyższych równań, otrzymalibyśmy dwa równania téj linji w zwykłym kształcie.

Różniczkując, otrzymamy

$$(2) \qquad dx = -a \operatorname{wst} \varphi d\varphi, \quad dy = a \operatorname{dos} \varphi d\varphi, \quad dz = a d\varphi \operatorname{dot} \theta$$

a ztąd, różniczka łuku [**547**]

$$(3) \qquad dł = \frac{a d\varphi}{\operatorname{wst} \theta}$$

a zatém [**477**]

$$(4) \qquad \operatorname{dos} \alpha = -\operatorname{wst} \theta \operatorname{wst} \varphi, \quad \operatorname{dos} \beta = \operatorname{wst} \theta \operatorname{dos} \varphi, \quad \operatorname{dos} \gamma = \operatorname{dos} \theta$$

oznaczając przez α, β, γ kąty stycznéj do linji szukanéj z osiami spółrzędnych. Ostatnie z równań (4) pokazuje nam że:

Styczna do linji śrubowéj tworzy z osią walca kąt stały, równy θ, dotyczna jest właśnie stosunkiem dróg przebieżonych w równym czasie przez środek koła ruchomego po osi walca i przez punkt ruchomy po okręgu tego koła.

Różniczkując równania (4), i oznaczając przez ξ, η, ζ, kąty normalnéj głównéj z osiami, przez dk kąt styczności [**500**], otrzymamy [**501**]

$$(5) \qquad \operatorname{dos} \xi dk = -\operatorname{wst} \theta \operatorname{dos} \varphi d\varphi, \quad \operatorname{dos} \eta dk = -\operatorname{wst} \theta \operatorname{wst} \varphi d\varphi,$$
$$\operatorname{dos} \zeta dk = 0$$

a ztąd

$$(6) \qquad dk = \operatorname{wst} \theta d\varphi$$

$$(7) \qquad \operatorname{dos} \xi = -\operatorname{dos} \varphi, \quad \operatorname{dos} \eta = -\operatorname{wst} \varphi, \quad \operatorname{dos} \zeta = 0$$

a zatém, oznaczając przez R promień pierwszéj krzywości [**500**]

$$(8) \qquad R = \frac{a}{\operatorname{wst}^2 \theta}$$

Widzimy z rownań (7) i (8), że

Normalna główna, czyli kierunek promienia krzywości linji śrubowéj jest prostopadłą do osi walca spotykającą tę oś; promień pierwszéj krzywości téj linji jest stałym.

Różniczkując równania (7), nazywając λ, μ, ν kąty jakie prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznéj tworzy z osiami, i oznaczając przez $d\tau$ kąt skręcenia otrzymamy [**510**]:

$$\begin{aligned} \text{dos}\,\alpha dk + \text{dos}\,\lambda d\tau &= -\,\text{wst}\,\varphi d\varphi \\ \text{dos}\,\beta dk + \text{dos}\,\mu d\tau &= \text{dos}\,\varphi d\varphi \\ \text{dos}\,\gamma dk + \text{dos}\,\nu d\tau &= 0 \end{aligned}$$

a zważywszy na (4) i (6)

$$\begin{aligned} \text{dos}\,\lambda d\tau &= -\,\text{dos}^2\theta\,\text{wst}\,\varphi d\varphi \\ \text{dos}\,\mu d\tau &= \text{dos}^2\theta\,\text{dos}\,\varphi d\varphi \\ \text{dos}\,\nu d\tau &= -\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\theta d\varphi \end{aligned}$$

Wyciągając pierwiastek z summy kwadratów tych ostatnich równań, będziemy mieli

(9) $$d\tau = \text{dos}\,\theta d\varphi$$

a więc

(10) $$\text{dos}\,\lambda = -\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\varphi,\quad \text{dos}\,\mu = \text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\varphi,\quad \text{dos}\,\nu = -\,\text{wst}\,\theta$$

a zatém [**511**] zważywszy na (3) i oznaczając przez T promień skręcenia

(11) $$\text{T} = \frac{a}{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\theta}$$

Promień skręcenia linji śrubowéj jest stałym; płaszczyzna ściśle styczna tworzy kąt stały z tworzącemi walca.

Środek kuli ściśle stycznéj jest ten sam dla téj krzywéj, co środek koła krzywości; spółrzędnemi jego są [**512** (10)]

(12) $$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x + \text{R}\,\text{dos}\,\xi = -\,a\,\text{dot}^2\theta\,\text{dos}\,\varphi \\ y_1 &= y + \text{R}\,\text{dos}\,\eta = -\,a\,\text{dot}^2\theta\,\text{wst}\,\varphi \\ z_1 &= z + \text{R}\,\text{dos}\,\zeta = a\varphi\,\text{dot}\,i \end{aligned}\right.$$

Wzory te pokazują [**525**], że *krawędź zwrotu powierzchni biegunowéj linji śrubowéj danéj jest także linją śrubową, nakreśloną na walcu mającym oś wspólną z walcem linji śrubowéj danéj, i promień równy* $a \operatorname{dot}^2 \theta$;

Równanie płasczyzny normalnéj do linji śrubowéj jest [**467**]

$$-\operatorname{wst}\theta \operatorname{wst}\varphi\,(x - a\operatorname{dos}\varphi) + \operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\varphi\,(y - a\operatorname{wst}\varphi) \\ + \operatorname{dos}\theta\,(z - a\varphi\operatorname{dot}\theta) = 0$$

czyli

$$(13) \qquad -x\operatorname{wst}\varphi + y\operatorname{dos}\varphi + z\operatorname{dot}\theta = a\varphi\operatorname{dot}^2\theta$$

Biorąc pochodną względem φ, otrzymamy

$$(14) \qquad -x\operatorname{dos}\varphi - y\operatorname{wst}\varphi = a\operatorname{dot}^2\theta$$

a równanie powierzchni biegunowéj [**525**] otrzymamy rugując φ z (13) i (14). Powierzchnia ta nazywa się *powierzchnią śrubową rozwijalną*; przecięcie się jéj z podstawą walca, daném jest przez dwa równania

$$(15) \qquad \begin{cases} -x\operatorname{wst}\varphi + y\operatorname{dos}\varphi = a\varphi\operatorname{dot}^2\theta \\ -x\operatorname{wst}\varphi - y\operatorname{dos}\varphi = a\operatorname{dot}^2\theta \end{cases}$$

wyznaczające krzywę płaską, która (jak się późniéj przekonamy) jest rozwijającą koła promienia $a \operatorname{dot}^2 \theta$.

ROZDZIAŁ XXIV

O KRZYWOŚCI POWIERZCHNI

O krzywości linij nakreślonych na powierzchni. — Przecięcia normalne: — Twierdzenia Meunier'a. — Przecięcia główne. — Punkta krzywości kulistéj. — Linja wskazująca. — Styczne sprzężone. — Wzory ogólne na promienie krzywości. — O Linjach krzywości powierzchni. — Własności linij krzywości. — O układzie potrójnym prostokątnym powierzchni. — Układ potrójny prostokątny drugiego stopnia. — Przykłady: — Punkta krzywości kulistéj elipsoidy. — Linje krzywości elipsoidy. — Linje krzywości powierzchni obrotowych, — Powierzchni rozwijalnych. — Zadania do rozwiązania.

O krzywości linij nakreślonych na powierzchni.

532. Badać krzywość powierzchni w punkcie danym, jestto badać krzywości różnych linij, jakie przez punkt dany na powierzchni nakreślić można.

Krzywości te nie są, jak zobaczymy, zupełnie od siebie niezależnemi, jakby się na pozór zdawać mogło: związki zachodzące między krzywościami linij przechodzących przez punkt dany na powierzchni, dają nam obraz krzywości powierzchni w tym punkcie.

Niech będzie równanie powierzchni.

$$f(x, y, z) = 0$$

wyznaczające z w funkcji x i y, które przyjmiemy za zmienne niezależne. Oznaczamy [**518**] pochodne częściowe z względem x i y, przez skrócenie :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

Równanie

(1) $$dz=pdx+qdy$$

będzie [**472**] równaniem różniczkowem powierzchni, przyczém zachodzić będą związki

(2) $$\begin{cases} dp=rdx+sdy \\ dq=sdx+tdy \end{cases}$$

otrzymane różniczkując częściowo (1) względem x i y. Będziemy mieli również różniczkę zupełną dz wyrażoną przez r, s, t :

(3) $$d^2z=rdx^2+2sdxdy+tdy^2$$

Niech będzie punkt M, dany na powierzchni uważanéj,

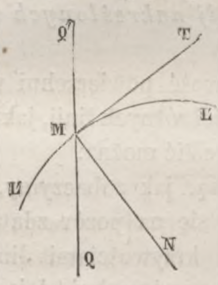


fig.133.

i QQ′ normalna do powierzchni w tym punkcie; niech będzie jakakolwiek linja LL′ nakreślona przez ten punkt na powierzchni, MT styczna, MN normalna główna téj linji. Oznaczmy daléj przez

x, y, z spółrzędne punktu M

α, β, γ kąty stycznéj MT z osiami

ξ, η, ζ kąty normalnéj głównéj MN z osiami

R promień krzywości, dk kąt styczności krzywéj LL′ w punkcie M.

Różniczka łuku dl krzywéj LL′ w punkcie M będzie wyrażoną przez Rdk [**500**] i będziemy mieli

$$(4)\quad dx = \mathrm{R}dk \operatorname{dos}\alpha, \qquad dy = \mathrm{R}dk \operatorname{dos}\beta, \qquad dz = \mathrm{R}dk \operatorname{dos}\gamma$$

i podobnież [**501**]

$$(5)\quad d\operatorname{dos}\alpha = dk \operatorname{dos}\xi,\ d\operatorname{dos}\beta = dk \operatorname{dos}\eta,\ d\operatorname{dos}\gamma = dk \operatorname{dos}\zeta.$$

Równanie normalnéj QQ′ do powierzchni [**472**] można napisać pod kształtem

$$\frac{\mathrm{X}-x}{-p} = \frac{\mathrm{Y}-y}{-q} = \frac{\mathrm{Z}-z}{1}$$

a zatém dostawy kątów, jakie normalna ta tworzy z osiami, będą miały wyrażenia [**69**]

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Pierwiastek $\sqrt{1+p^2+q^2}$ może być wziętym ze znakiem $+$ lub $-$: znak więcéj odpowiada jednemu z kierunków MQ, MQ′ téj normalnéj, znak $-$ drugiemu. Przypuśćmy że bierzemy pierwiastek z jednym z tych znaków, odpowiadającym kierunkowi MQ; nazwijmy θ kąt QMN jaki kierunek ten normalnéj do powierzchni tworzy z kierunkiem MN normalnéj głównéj krzywéj LL′, oznaczonym przez kąty ξ, η, ζ; otrzymamy [**66**]:

$$\operatorname{dos}\theta = \frac{\operatorname{dos}\zeta - p\operatorname{dos}\xi - q\operatorname{dos}\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

a na mocy wzorów (5)

$$(6)\qquad dk \operatorname{dos} \theta = \frac{d \operatorname{dos} \gamma - pd \operatorname{dos} \alpha - qd \operatorname{dos} \beta}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Podstawiając wzory (4) w (1) i (2), otrzymujemy

$$(7)\qquad \operatorname{dos} \gamma = p \operatorname{dos} \alpha + q \operatorname{dos} \beta$$

$$(8)\qquad dp = \mathrm{R}dk\,(r \operatorname{dos}\alpha + s \operatorname{dos}\beta),\quad dq = \mathrm{R}dk\,(s \operatorname{dos}\alpha + t \operatorname{dos}\beta)$$

a różniczkując (7)

$$d \operatorname{dos} \gamma = (pd \operatorname{dos} \alpha + qd \operatorname{dos} \beta) + (dp \operatorname{dos} \alpha + dq \operatorname{dos} \beta)$$

i podstawiając (8)

$$(9)\qquad d\operatorname{dos}\gamma - pd\operatorname{dos}\alpha - qd\operatorname{dos}\beta = \mathrm{R}dk\,(r\operatorname{dos}^2\alpha + 2s\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\beta + t\operatorname{dos}^2\beta).$$

Wzór (6) daje nam na mocy (9)

$$(10)\qquad \frac{\mathrm{R}}{\operatorname{dos}\theta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\operatorname{dos}^2\alpha + 2s\operatorname{dos}\alpha\operatorname{dos}\beta + t\operatorname{dos}^2\beta}$$

wzór, który wyraża promień krzywości jakiéjkolwiek linji nakreślonéj na powierzchni w funkcji ilości zależnych od równania powierzchni, i od kierunku stycznéj do linji uważanéj. Ponieważ promień krzywości R przypuszczamy zawsze dodatnym, dos θ będzie tego samego znaku co wyrażenie po prawéj stronie równania (10), przez co kąt θ a zatém jeden z kierunków MQ, MQ'; normalnéj do powierzchni pozostawiony dotąd dowolnym, podobnie jak znak $\sqrt{1+p^2+q^2}$, będzie teraz wyznaczonym.

533. Twierdzenie Meunier'a. Weźmy pod uwagę krzywę nakreśloną na powierzchni, będącą przecięciem powierzchni przez płasczyznę przechodzącą przez normalnę MQ i styczną MT, krzywę, którą nazywamy *przecięciem normalném* powierzchni : nazwijmy R_0 promień krzywości téj krzywéj ; kąt θ jest tu równym zeru, lub równym π : mamy więc na zasadzie (10)

$$(11) \qquad \frac{R_0}{\pm 1} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r \operatorname{dos}^2\alpha + 2s \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta + t \operatorname{dos}^2\beta}$$

a zatém przedstawiając w (10)

$$(12) \qquad R = \pm R_0 \operatorname{dos}\theta$$

znak $+$ odpowiada wartości $\theta < \frac{\pi}{2}$, znak $-$ wartości $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Wzór (12) wyraża twierdzenie następujące :

Promień krzywości jakiéjkolwiek linji nakreślonéj przez punkt dany na powierzchni, otrzymuje się rzucając na płasczyznę ściśle styczną téj linji promień krzywości przecięcia powierzchni płasczyzną normalną, przechodzącą przez styczną do linji danéj w punkcie danym powierzchni.

Z tego twierdzenia wyprowadzamy zaraz następujący wniosek :

Jeżeli zakreślimy kulę, któréj kołem wielkiém jest koło krzywości przecięcia normalnego powierzchni, wszelkie przecięcie powierzchni płasczyzną ukośną przechodzącą przez styczną przecięcia normalnego, będzie miało za koło krzywości przecięcie kuli przez tę płasczyznę ukośną.

Twierdzenie Meunier'a sprowadza badanie promieni krzywości wszelkich linij nakreślonych na powierzchni do badania promieni krzywości przecięć normalnych.

534. Krzywość przecięć normalnych. Wzór (11) daje nam krzywość przecięcia normalnego, przyczém R_0 przypuściliśmy zawsze dodatném; znak $\pm$ w mianowniku pierwszéj strony tego wzoru odpowiada dowolnemu znakowi pierwiastku w liczniku drugiéj strony.

Lecz mianownik ten ± 1 jest dostawą kąta utworzonego przez kierunek wyznaczony MN [**502**] promienia krzywości R_0 z tym kierunkiem normalnéj MQ (fig. 133) do powierzchni, który odpowiada obranemu [**532**] znakowi $\sqrt{1+p^2+q^2}$; kąt ten może być więc w przypadku przecięcia normalnego 0 lub π; znak więc $+$ mianownika ± 1 wzoru (11) będzie odpowiadał kątowi 0, gdy wyznaczone kierunki MN i MQ promienia krzywości przecięcia normalnego i normalnéj do powierzchni będą skierowane w tę samę stronę, znak $-$ gdy kierunki te będą się rozchodziły w strony przeciwne od punktu M na téj saméj prostéj. Przyjąwszy więc że w pierwszym razie promień krzywości przecięcia normalnego, któren oznaczać będziemy przez R, jest dodatnym, w drugim razie odjemnym, otrzymamy wzór

$$(13) \qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r \cos^2\alpha + 2s \cos\alpha \cos\beta + t \cos^2\beta}$$

nie zawierający dwuznaczności znaków, któren da nam promienie krzywości wszystkich przecięć normalnych w punkcie M powierzchni.

Zauważymy jeszcze, że wszystkie te promienie krzywości odcinanemi są na jednéj i téj saméj prostéj normalnéj do powierzchni w punkcie M : nie odstępujemy więc od zwykłego znakowania, dając znak $+$ tym które rozciągają się w jednę stronę, znak $-$ tym, które rozciągają się w stronę przeciwną poprzednim, licząc od punktu M.

535. Aby ułatwić porównywanie krzywości różnych przecięć normalnych powierzchni w jednym i tym samym punkcie, dogodném jest umieścić początek spółrzędnych w tymże punkcie M (fig. 134), przyjąć za oś Z normalną MZ do powierzchni, a za osie X i Y dwie prostopadłe na płasczyznie stycznéj w punkcie M' do powierzchni. Styczna MT

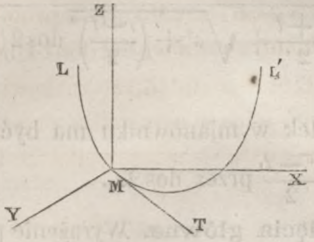


fig. 134.

do przecięcia normalnego LL' w punkcie M znajdować się będzie na płaszczyznie XY; będziemy mieli dla tego punktu M:

$$p=0, \quad q=0, \quad \text{dos}\,\gamma=0, \quad \text{dos}\,\beta=\text{wst}\,\alpha$$

a biorąc $\sqrt{1+p^2+q^2}$, któren staje się tu ± 1, ze znakiem $+$, wzór (13) stanie się

$$(14) \qquad R=\frac{1}{r\,\text{dos}^2\alpha+2s\,\text{wst}\,\alpha\,\text{dos}\,\alpha+t\,\text{wst}^2\alpha}$$

Różne przecięcia normalne odpowiadać będą różnym wartościom kąta $\alpha=$ TMX.

Mianownik wyrażenia (14) można napisać pod kształtem

$$\frac{r+t}{2}+\frac{r-t}{2}\,\text{dos}\,2\alpha+s\,\text{wst}\,2\alpha$$

a nazywając α_0 kąt zawarty pomiędzy 0 i $\frac{\pi}{2}$, określony przez równanie

$$(15) \qquad s=\frac{r-t}{2}\,\text{st}\,2\alpha_0$$

równanie (14) stanie się

$$(16)\qquad R=\frac{1}{\frac{r+t}{2}+\sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}\ \mathrm{dos}\,2(\alpha-\alpha_0)}$$

gdzie pierwiastek w mianowniku ma być wzięty ze znakiem ilorazu $\frac{r-t}{2}$ przez $\mathrm{dos}\,2\alpha_0$.

536. Przecięcia główne. Wyrażenie promienia krzywości przecięć normalnych powierzchni pod kształtem (16), w którym kąt α, wyznaczający płaszczyznę normalną przecięcia w punkcie danym powierzchni, wchodzi tylko w ostatnim wyrazie mianownika, pozwala nam wyznaczyć od razu wartość największą i najmniejszą tego promienia krzywości. Jakoż, wartości te odpowiadają kątowi α danemu przez równanie

$$\mathrm{dos}\,(\alpha-\alpha_0)=\pm 1$$

z którego

$$\alpha=\alpha_0+n\frac{\pi}{2}$$

gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą. Lecz ponieważ dwie wartości α różniące się o parzystą wielokrotność π, dają jedno i to samo przecięcie normalne, weźmiemy pod uwagę tylko dwie wartości

$$\alpha=\alpha_0 \quad \text{i} \quad \alpha=\alpha_0+\frac{\pi}{2}$$

z których jedna odpowiada najmniejszości, druga największości.

Dwa te przecięcia normalne powierzchni nazywamy *przecięciami głównemi*; promienie krzywości tych przecięć, *promieniami krzywości głównemi* powierzchni w punkcie danym.

537. Aby przecięcia te były wyznaczonemi w danym punkcie, trzeba żeby kąt α_0 dany przez równanie (15) był wyznaczonym, co wymaga żeby s i $r-t$ nie były jednocześnie zerami dla spółrzędnych tego punktu. Jeżeli mamy jednocześnie

$$s=0, \quad r-t=0$$

wzór (14) daje nam

$$R=\frac{1}{r}$$

co pokazuje że wszystkie przecięcia normalne powierzchni w danym punkcie mają jeden i ten sam promień krzywości: ma to miejsce naprzykład dla każdego punktu kuli, bo przecięcia normalne jako koła wielkie, mają wszystkie promienie krzywości równe promieniowi kuli. Punkt jakiéjkolwiek powierzchni, w którym wszystkie przecięcia normalne mają ten sam promień krzywości, nazywać będziemy *punktem krzywości kulistéj*, lub *pępkiem*.

538. Ile razy punkt dany M powierzchni nie jest punktem krzywości kulistéj, prowadząc płaszczyznę styczną do powierzchni w tym punkcie, możemy wyznaczyć za pomocą równania (15) na téj płaszczyznie dwie styczne prostopadłe pomiędzy sobą w punkcie M′, z których jedna odpowiada kątowi α_0, druga kątowi $\alpha_0+\frac{\pi}{2}$. Biorąc początek spółrzędnych w punkcie M (fig. 134) jak powyżéj, i normalnę do powierzchni za oś Z, możemy wziąść jednę z tych stycznych za oś X, drugą za oś Y, przez co układ spółrzędnych nie przestanie być prostokątnym. Kąt α_0 stanie się wtedy zerem, a wzór (15) da nam

$$s=0$$

przez co wzór (14) stanie się

$$R = \frac{1}{r \operatorname{dos}^2\alpha + t \operatorname{wst}^2\alpha}$$

lub

$$(17) \qquad \frac{1}{R} = r \operatorname{dos}^2\alpha + t \operatorname{wst}^2\alpha$$

Nazwijmy R_1, R_2, promienie krzywości przecięć głównych powierzchni : promienie te odpowiadają wartościom 0 i $\frac{\pi}{2}$ kąta α; równanie (17) da nam

$$(18) \qquad \frac{1}{R_1} = r, \qquad \frac{1}{R_2} = t$$

przez co równanie (17) stanie się

$$(19) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \operatorname{dos}^2\alpha + \frac{1}{R_2} \operatorname{wst}^2\alpha$$

wzór, który nam daje promień krzywości jakiegokolwiek przecięcia przez kąt jaki to przecięcie tworzy z jednem z przecięć głównych, i promienie krzywości tych ostatnich przecięć. Wzór ten nie zmieni się, jeżeli za α podstawimy wartość $\pi - \alpha$, a zatém :

Dwa przecięcia normalne, tworzące kąty równe z jedném z przecięć głównych, mają promienie krzywości równe i tych samych znaków.

539. Jeżeli α zwiększy się o $\frac{\pi}{2}$, promień krzywości R przecięcia normalnego zmieni się w ogólności : nazwijmy jego wartość R′ ; wzór (19) da nam

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} \operatorname{wst}^2\alpha + \frac{1}{R_2} \operatorname{dos}^2\alpha$$

a dodając wzór ten do (19) otrzymamy

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

co nam pokazuje że summa odwróconych promieni krzywości, czyli po prostu *summa krzywości dwóch przecięć normalnych prostopadłych pomiędzy sobą jest stałą.*

Połowę summy odwróconych promieni krzywości przecięć głównych, czyli wyrażenie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

nazwano *krzywością średnią* powierzchni w punkcie danym: a zatem:

Średnia arytmetyczna krzywości dwóch przecięć normalnych jakichkolwiek, lecz prostopadłych pomiędzy sobą, jest stałą i równą krzywości średniéj powierzchni w punkcie danym.

540. Weźmy teraz pod uwagę zmienność promienia krzywości R przecięcia normalnego, gdy α, to jest kąt jaki przecięcie to tworzy z jednem z przecięć głównych, zmienia się od 0 do π.

Przypuśćmy naprzód, że promienie krzywości R_1 i R_2 są tych samych znaków [**534**]; znaki te możemy również przypuścić dodatnemi, w przeciwnym bowiem razie dość byłoby zmienić kierunek osi Z. Zakładając $R_1 < R_2$ i pisząc wzór (19) pod kształtem

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}-\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\mathrm{wst}^2\alpha$$

widzimy że $\frac{1}{R}$ zmniejsza się od $\frac{1}{R_1}$ do $\frac{1}{R_2}$ czyli że R zwiększa się od R_1 do R_2, gdy α zwiększa się od 0 do $\frac{\pi}{2}$, i że następnie R zmniejsza się od R_2 do R_1, gdy α zwiększa się od $\frac{\pi}{2}$ do π, pozostając zawsze tego samego znaku : powierzchnia więc znajduje się cała po jednéj stronie swéj płaszczyzny stycznéj, w blizkości punktu styczności.

Przypuśćmy powtóre że R_1 i R_2 są znaków przeciwnych naprzykład R_1 dodatne, R_2 odjemne; załóżmy

$$R_2 = -R_1 \operatorname{st}^2\alpha'$$

gdzie α' oznacza kąt zawarty pomiędzy 0 a $\frac{\pi}{2}$; wzór (19) stanie się

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 \operatorname{wst}^2\alpha'}(\operatorname{wst}^2\alpha' - \operatorname{wst}^2\alpha)$$

Jeżeli α zmienia się od 0 do α', R zwiększa się od 0 do α, przechodzi dla $\alpha = \alpha'$ z wartości $+\infty$ do wartości $-\infty$ i zmienia się od $-\infty$ do R_2, gdy α zwiększa się daléj od α' do $\frac{\pi}{2}$. Gdy α zwiększa się od $\frac{\pi}{2}$ do $\pi - \alpha$, R zmniejsza się od R_2 do $-\infty$, poczém przechodzi znów w wartość $+\infty$, i zmniejsza się od $+\infty$ do R_1, gdy α zwiększa się od $\pi - \alpha'$ do π.

W tym przypadku, punkta powierzchni są jedne z jednéj strony, drugie z drugiéj strony płaszczyzny stycznéj w punkcie danym poprowadzonéj : następuje w tym punkcie pewnego rodzaju *przegięcie* powierzchni, bo przecięcie normalne odpowiadające kątowi α', lub $\pi - \alpha'$, ma promień krzywości w tym punkcie nieskończenie wielki, co jest w ogólności cechą *przegięcia*.

541. Linja wskazująca. Poprowadźmy w punkcie danym powierzchni płaszczyznę styczną, i w odległości nieskończenie małéj od płaszczyzny stycznéj, płaszczyznę równoległą: ta ostatnia płaszczyzna przetnie powierzchnię podług pewnéj linji krzywéj, któréj granicą jest linja nazwana przez p. Karola Dupin *linją wskazującą* powierzchni w punkcie danym. Granicę tę uważać należy co do *kształtu* a nie co do *wielkości*, któréj granicą jest widocznie zero; za linję wskazującą można wziąść zatém wszelką linję wymiarów skończonych, do któréj linja określona powyżéj, wymiarów nieskończenie małych, jest w granicy *podobną*. Określimy to bliżéj i dowiedziemy zarazem, że linja wskazująca dla jakiegokolwiek punktu powierzchni jest koniecznie linją drugiego stopnia.

Weźmy płaszczyznę styczną w punkcie danym do powierzchni za płaszczyznę spółrzędnych XY (fig. 135), linię normalną za oś rzędnych Z. Równanie powierzchni przedstawi się pod kształtem

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

a przecięcie powierzchni płaszczyzną równoległą w odległości h od płaszczyzny stycznéj poprowadzoną, rzuci się w naturalnéj wielkości na tę płaszczyznę styczną, podług linji krzywéj któréj równaniem będzie

$$h = \varphi(x, y) \tag{2}$$

Rozwijając podług wzoru Taylor'a i zachowując zwykłe znakowanie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = t$$

otrzymamy

$$h = \varphi(0,0) + px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon_3 \tag{3}$$

gdzie x i y są nieskończenie małemi, ε_3 zaś nieskończenie małą trzeciego lub wyższego rzędu. Lecz ponieważ płaszczyzna xy jest płaszczyzną styczną w punkcie uważanym wziętym za początek spółrzędnych, więc

$$\varphi(0,0)=0\,,\quad p=0\,,\quad q=0$$

a zatém równanie (3) staje się

$$h=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon_3 \tag{4}$$

Załóżmy że r, s i t nie są wszystkie trzy zerami lub nieskończonemi w punkcie uważanym M powierzchni; wykreślmy na płaszczyznie stycznéj XMY krzywę AB podobną

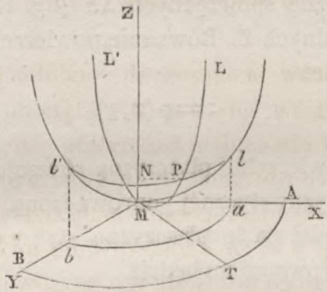


fig. 135.

do krzywéj ab danéj przez równanie (4), która jest rzutem w naturalnéj wielkości przecięcia ll' powierzchni płaszczyzną równoległą w odległość $h=$ MN poprowadzoną, obierając punkt M za *środek podobieństwa* i pewną wielkość m *za stosunek podobieństwa*; czyli innemi słowy, określmy spółrzędne x', y' krzywéj AB przez równania:

$$x'=mx\,,\quad y'=my$$

Podstawiając wartości $x=\frac{x'}{m}$, $y=\frac{y'}{m}$ z tych równań w (4) i mnożąc przez m^2 po podstawieniu, otrzymamy równanie krzywéj AB,

$$(5) \qquad 2hm^2 = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + 2m^2 \varepsilon_3$$

Ponieważ stosunek podobieństwa m jest dowolnym, załóżmy że m powiększa się nieograniczenie, w miarę jak h się zmniejsza, tak że

$$(6) \qquad \text{gr}\, hm^2 = g$$

gdzie g jest ilością skończoną : przechodząc do granicy, i zważywszy że ε_3 jest nieskończenie małą względem h na zasadzie (4), i że zatém $\text{gr}\ 2m^2\varepsilon_3 = 0$, otrzymamy równanie :

$$(7) \qquad g = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

linji AB wymiarów skończonych, podobnéj do linji ll w granicy jéj kształtu, gdy $h = \text{MN}$ zdąża do zera. Równanie (7) będzie już równaniem *linji wskazującéj* : równanie to, jest tém samém co równanie (4), w którém przechodząc do granicy, założyliśmy nieskończenie małą trzeciego rzędu ε_3 równą zeru, zaś $g = 2h$ nieskończenie małem drugiego rzędu, tego samego co pozostałe wyrazy równania.

Równanie (7) pokazuje że *linja wskazująca jest zawsze linją drugiego stopnia.*

Jeżeli $rt - s^2 > 0$, aby linja (7) była rzeczywistą, trzeba żeby g było tego samego znaku co r i t, które, jak warunek $rt > s^2$ pokazuje, są tych samych znaków; linja wskazująca jest wtedy *elipsą*; a ponieważ g i h są tych samych znaków z (6), odległość h może mieć jeden tylko znak : płaszczyzna równoległa do płaszczyzny stycznéj w odległości nieskończenie małéj poprowadzona, przecina powierzchnię, jeżeli ją poprowadzimy z jednéj strony płaszczyzny stycznej, lecz nie przecina powierzchni, jeśli ją poprowadzimy z drugiéj; powierzchnia znajduje się po jednéj stronie płaszczyzny stycznéj w bliskości punktu styczności.

Jeżeli $rt-s^2<0$, g a więc i h musi mieć podwójny znak $+$ lub $-$: linja wskazująca składa się z dwóch hyperbol sprzężonych, mających te same assymptoty, z których jedna ma za oś ogniskową oś nieogniskową drugiéj. Powierzchnia znajduje się z jednéj i z drugiéj strony płaszczyzny stycznéj w blizkości punktu styczności.

Jeżeli nakoniec $rt-s^2=0$, g a więc i h może mieć jeden tylko znak, ten sam co pochodne r i t: powierzchnia znajduje się z jednéj strony płaszczyzny stycznéj w blizkości punktu styczności. Linja wskazująca (7) zamienia się na układ dwóch prostych symetrycznych względem punktu M. Linja ta nie może być więc w żadnym przypadku właściwą parabolą.

542. Twierdzenie. *Promienie krzywości przecięć normalnych powierzchni w pewnym punkcie, są w stosunku kwadratów promieni wodzących poprowadzonych z tego punktu do linji wskazującéj, śladów płaszczyzn przecinających.*

Niech będzie punkt M (fig. 135) powierzchni i wskazująca AB. Przeciąwszy powierzchnię płaszczyzną normalną ZMT, otrzymamy przecięcie LL'; powiadam że stosunek promienia krzywości tego przecięcia do kwadratu promienia wodzącego MT wskazującéj, jest stałym.

W saméj rzeczy, płaszczyzna ZMT przecina linję ll' podobną w granicy do AB, w punkcie P linji LL': nazwijmy R promień krzywości linji LL' w punkcie M: wiemy [431] że

$$R=\frac{2NP^2}{NM}$$

NM jest stałą, odległością nieskończenie małą przecięcia równoległego do płaszczyzny stycznéj, którém określiliśmy [541] wskazującę: stosunek więc $\frac{R}{NP^2}$ jest stałym; a ponieważ stosunek $\frac{NP}{MT}$ jest także stałym, równym m dla podobieństwa ll' z AB, więc stosunek R do MT^2 jest stałym, c. b. d. d.

Twierdzenie to pozwala nam wyprowadzić z łatwością i przedstawić dotykalnie zmienność promieni krzywości przecięć normalnych, sprowadzając zadanie do badania zmienności promieni wodzących, wyprowadzonych ze środka, elipsy lub hyperboli. Największości i najmniejszości tych promieni krzywości odpowiadają kierunkom osi linij wskazującéj: kierunki te wyznaczają nam więc przecięcia główne powierzchni.

W przypadku wskazującéj złożonéj z dwóch hyperbol sprzężonych, promień wodzący ze środka ma dwie największości i dwie najmniejszości wedle dwóch osi jednéj i dwóch osi drugiéj hyperboli sprzężonéj: lecz ponieważ te dwa promienia odpowiadają jeden wartości dodatnéj, drugi wartości odjemnéj promienia krzywości, właściwie zachodzi tylko jedna największość i jedna najmniejszość dla kierunków prostopadłych pomiędzy sobą.

W przypadku $rt - s^2 = 0$, kiedy wskazująca składa się z dwóch prostych równoległych, jeden z promieni krzywości głównych staje się nieskończenie wielkim w kierunku równoległym do prostych; drugi ma kierunek prostopadły do tych prostych.

Wskazująca eliptyczna przedstawia odwróconą summę, wskazująca hyperboliczna odwróconą różnicę, kwadratów promieni wodzących prostopadłych ze środka do krzywéj wyprowadzonych, stałą: własność ta, zważywszy na znaki promieni krzywości, udowadnia własności podanéj wyżéj [539] przecięć normalnych prostopadłych, a mianowicie że summa ich krzywości jest stałą.

Dwa promienie wodzące wskazującéj elliptycznéj, lub hyperbolicznéj równo nachylone do osi, są równe : więc dwa przecięcia normalne tworzące z przecięciami głównemi kąty równe mają promienie wodzące równe.

Jeżeli wskazująca staje się *kołem*, wszystkie promienie wodzące ze środka są równe : punkt taki który odpowiada wskazującéj kołowéj jest *punktem krzywości kulistéj* powierzchni.

Tak dla powierzchni drugiego stopnia, dla których wszystkie przecięcia płaszczyznami równoległemi dają krzywe podobne, wskazującą dla jakiegokolwiek punktu jest przecięcie powierzchni jakąkolwiek płaszczyzną równoległą do płaszczyzny stycznéj w tym punkcie. Punktami więc krzywości kulistéj powierzchni drugiego stopnia są punkta, w których płaszczyzna styczna jest równoległą do płaszczyzny przecinającéj powierzchnię podług koła.

543. Uwaga. Teorja powyższa zmienności promienia krzywości przecięć normalnych powierzchni w punkcie danym, przypuszcza że drugie pochodne częściowe, któreśmy oznaczyli przez r, s, t mają wartości skończone, wyznaczone dla spółrzędnych tego punktu. Gdy założenie to nie ma miejsca, wyrażenie promienia krzywosci przecięcia normalnego [**535** (4)]

$$R = \frac{1}{r \operatorname{dos}^2\alpha + 2s \operatorname{wst}\alpha \operatorname{dos}\alpha + t \operatorname{wst}^2\alpha}$$

któreśmy wyprowadzili przypuszczając początek spółrzędnych prostokątnych w punkcie danym powierzchni i oś Z skierowaną podług normalnéj, przedstawia się pod kształtem niewyznaczonym dla jakiegokolwiek kąta α jaki przecięcie uważane tworzy z przecięciem płaszczyzną ZX. Częstokroć można uczynić wyrażenie to wyznaczoném za pomocą osobnego podstawienia, jak to zobaczymy na następującym przykładzie :

Niech będzie powierzchnia odniesiona do układu spółrzędnych prostokątnych, o którym mowa, dana przez równanie

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2f\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{1}$$

gdzie f jest pewną funkcją, którą dla większéj ogólności przykładu pozostawiamy nieokreśloną. Pochodne r, s, t zawierając wyraźnie wyrażenie $f\left(\frac{y}{x}\right)$ niewyznaczone w ogólności dla $x = 0$, $y = 0$, przedstawiają się pod kształtem niewyznaczonym i teorja nasza się nie stosuje. Załóżmy

$$x = \rho \operatorname{dos} \alpha, \qquad y = \rho \operatorname{wst} \alpha \tag{2}$$

równanie (1) stanie się

$$z = \frac{\rho^2}{2f(\operatorname{st} \alpha)} \tag{3}$$

Równanie (3) może być uważanem jako równanie przecięcia powierzchni płaszczyzną $y = x \operatorname{st} \alpha$, przyczém z i ρ będą spółrzędnemi punktów tego przecięcia, które jest parabolą mającą styczną w wierzchołku położoną na płaszczyznie XY. Aby znaleźć wyrażenie ogólne promieni krzywości przecięć normalnych, zauważymy naprzód że z równania (1) z jest funkcją jednorodną drugiego stopnia spółrzędnych x i y a zatém [**227**]

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2z = \frac{x^2 + y^2}{f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

czyli podstawiając wartości (2), dzieląc przez ρ^2 i zakładając w granicy $\rho = 0$:

$$r \operatorname{dos}^2\alpha + 2s \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dos} \alpha + t \operatorname{wst}^2\alpha = \frac{1}{f(\operatorname{st} \alpha)}$$

Wartości r, s, t odpowiadają tu wartości $\rho = 0$ czyli $x = 0$, $y = 0$, to jest wartości spółrzędnych początku, który jest tu punktem uważanym na powierzchni. Wyrażenie promienia krzywości staje się więc

$$R = f(\text{st}\,\alpha)$$

i prawo zmienności tego promienia krzywości zależy jedynie od funkcji nieokreślonéj f. Promień ten podobnie jak funkcja f nie koniecznie ma wyznaczoną jedyną największość i najmniejszość, lecz może mieć wiele największości i najmniejszości, lub nie mieć ich wcale [**295**].

544. Styczne sprzężone. Weźmy pod uwagę krzywę nakreśloną na powierzchni i płaszczyzny styczne do powierzchni w różnych punktach téj krzywéj : płaszczyzny te obwijają powierzchnię rozwijalną [**518**], któréj charakterystyczną jest prosta będąca granicą przecięcia się płaszczyzny stycznéj w pewnym punkcie krzywéj uważanéj na powierzchni, z płaszczyzną styczną w punkcie nieskończenie zbliżonym téj krzywéj poprowadzoną. Charakterystyczna ta wraz ze styczną do krzywéj uważanéj w punkcie danym, stanowią układ dwóch prostych stycznych do powierzchni, które p. K. Dupin nazwał *stycznemi sprzężonemi*.

Równaniem płaszczyzny stycznéj do powierzchni w punkcie x, y, z jest

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y) \tag{1}$$

Aby znaleźć równanie powierzchni obwiniętéj tą płaszczyzną, trzeba [**514**] z równania (1) i z równania otrzymanego przez zróżniczkowanie (1) wyrugować zmienną niezależną w funkcji któréj zmieniamy wielkości x, y, z, p i q, przechodząc od punktu do punktu krzywéj uważanéj na powierzchni : równanie otrzymane przez zróżniczkowanie (1), zważywszy na związek $dz = pdx + qdy$ [**472**] stanie się

$$(2)\qquad (X-x)\,dp + (Y-y)\,dq = 0$$

Krawędź zwrotu [**516**] powierzchni obwiniętéj tak otrzymanéj daną będzie przez zróżniczkowanie (2) :

$$(3)\qquad (X-x)\,d^2p + (Y-y)\,d^2q - (dxdp + dydq) = 0$$

wraz z równaniami (1) i (2) : układ tych trzech równań napisać można w następujący sposób :

$$(4)\qquad \frac{X-x}{dq} = \frac{Y-y}{-dp} = \frac{Z-z}{pdq - qdp} = \frac{dpdx + dqdy}{dqd^2p - dpd^2q}$$

Wartości na X, Y, Z z tych równań są spółrzędnemi punktu krawędzi zwrotu odpowiadającego punktowi x, y, z powierzchni; trzy pierwsze stosunki (4) zrównane są równoważne z równaniami (1) i (2), i przedstawiają charakterystycznę, która wraz ze styczną w punkcie x, y, z do krzywéj uważanéj stanowi układ *stycznych sprzężonych*.

Nazwijmy α, β, γ, kąty jakie styczna do krzywéj uważanéj na powierzchni w punkcie x, y, z, tworzy z osiami; przez α', β', γ' kąty z osiami charakterystycznéj powyższéj czyli stycznéj sprzężonéj. Wiemy [**466**] że dostawy kątów α, β, γ są proporcjonalne różniczkom dx, dy, dz : równania zaś (4) pokazują, że dostawy kątów α', β', γ' są proporcjonalne różniczkom : dq czyli $sdx + tdy$ [**532**]; $-dp$ czyli $-(rdx + sdy)$; nakoniec $pdq - qdp$ czyli $(ps - qr)\,dx + (pt - qs)\,dy$ jak widzimy z łatwością ze znanych [**532**] wartości różniczek dp i dq. Mamy więc

$$(5)\qquad \frac{\operatorname{dos}\alpha'}{s\operatorname{dos}\alpha + t\operatorname{dos}\beta} = \frac{\operatorname{dos}\beta'}{-(r\operatorname{dos}\alpha + s\operatorname{dos}\beta)}$$
$$= \frac{\operatorname{dos}\gamma'}{(ps-qr)\operatorname{dos}\alpha + (pt-qs)\operatorname{dos}\beta}$$

Równanie (5) daje nam związek pomiędzy kątami jakie styczne sprzężone w punkcie danym powierzchni tworzą z osiami.

Jeżeli weźmiemy, jak zwykle, punkt uważany powierzchni za początek spółrzędnych prostokątnych, których oś Z jest skierowaną podług normalnéj powierzchni, osie zaś X i Y według stycznych do przecięć głównych powierzchni w tym punkcie [**538**], otrzymamy

$$p=0, \quad q=0, \quad s=0$$

$$\text{dos}\,\gamma=0, \quad \text{dos}\,\beta=\text{wst}\,\alpha$$

$$\text{dos}\,\gamma'=0, \quad \text{dos}\,\beta'=\text{wst}\,\alpha'$$

a równanie (5) stanie się

$$\text{st}\,\alpha\,\text{st}\,\alpha'=-\frac{r}{t} \tag{6}$$

Porównywając wzór ten z równaniem linji wskazującéj [**541** (7)], która będzie w tym układzie odniesioną do swych osi, widzimy że równanie (6) jest równaniem *średnic sprzężonych* téj linji drugiego stopnia (to jest średnic, z których każda dzieli na dwie równe części cięciwy równoległe do drugiéj) : a zatém

Styczne sprzężone w punkcie danym powierzchni są skierowane podług średnic sprzężonych wskazującéj.

Promienie krzywości przecięć normalnych powierzchni są proporcjonalne do kwadratów średnic wskazującéj : a że jak wiadomo kwadraty średnic sprzężonych mają summy lub różnice równe, więc

Summa algebraiczna promieni przecięć normalnych, odpowiadających stycznym sprzężonym, jest stałą.

545. Wzory ogólne na promienie krzywości główne. W poprzedzających rozwinięciach braliśmy dla ułatwienia szczególny układ spółrzędnych prostokątnych, którego początek był w punkcie uważanym powierzchni, a oś Z skierowana podług normalnéj do téj powierzchni. Lecz gdy idzie o badanie krzywości nie tylko w jednym punkcie powierzchni, lecz o porównywanie tych krzywości w różnych punktach, niezbędném jest wyprowadzenie wzorów względem jakiegokolwiek układu prostokątnego, do którego powierzchnia dana jest odniesioną.

Weźmy wzór [**534** (13)] na promień krzywości jakiegokolwiek przecięcia normalnego

$$(1) \qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r \operatorname{dos}^2\alpha + 2r \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta + t \operatorname{wst}^2\alpha}$$

w którym układ spółrzędnych prostokątnych przypuszczamy jakimkolwiek; i oznaczamy przez α, β, γ kąty jakie styczna przecięcia tworzy z osiami : znak pierwiastku $\sqrt{1+p^2+q^2}$ wyznacza kierunek promieni krzywości dodatnych na normalnych powierzchni.

Dostawy kątów α, β, γ, proporcjonalne różniczkom dx, dy, dz, między któremi zachodzi równanie

$$dz = pdx + qdy,$$

czynią zadość równaniu

$$(2) \qquad \operatorname{dos}\gamma = p \operatorname{dos}\alpha + q \operatorname{dos}\beta$$

i równaniu [**66**]

$$(3) \qquad \operatorname{dos}^2\alpha + \operatorname{dos}^2\beta + \operatorname{dos}^2\gamma = 1$$

między któremi rugując $\operatorname{dos}\gamma$, otrzymamy

$$(4) \qquad (1+p^2)\operatorname{dos}^2\alpha + 2pq \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta + (1+q^2)\operatorname{dos}^2\beta = 1$$

Pomnóżmy równanie (1) przez (4); wypadek będzie mógł być wypisanym pod kształtem jednorodnym względdem dos α, dos β :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(1+p^2-\frac{\mathrm{R}r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\mathrm{dos}^2\alpha \\ &+2\left(pq-\frac{\mathrm{R}s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\mathrm{dos}\alpha\ \mathrm{dos}\beta \\ &+\left(1+q^2-\frac{\mathrm{R}t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\mathrm{dos}^2\beta=0 \end{aligned}\right.$$

546. Równanie (5) jest drugiego stopnia względem stosunku $\frac{\mathrm{dos}\,\alpha}{\mathrm{dos}\,\beta}$: każdéj wartości danéj promienia krzywości R odpowiadają dwie wartości stosunku $\frac{\mathrm{dos}\,\alpha}{\mathrm{dos}\,\beta}$ wyznaczające dwa kierunki, według których przeciąć należy powierzchnię aby przecięcie miało promień krzywości żądany R. W razie największości lub najmniejszości R, dwie te wartości muszą być w ogólności równe (wyjmujemy przypadek w którym r, s, t są zerami lub niewyznaczonemi); największość więc i najmniejszość R odpowiada pierwiastkom równym równania (5), rozwiązanego co do stosunku $\frac{\mathrm{dos}\,\alpha}{\mathrm{dos}\,\beta}$: co pociąga za sobą warunek

$$\left(pq-\frac{\mathrm{R}s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2-\left(1+p^2-\frac{\mathrm{R}r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2-\frac{\mathrm{R}t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$$

lub

$$(6)\quad (rt-s^2)\mathrm{R}^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{R} +(1+p^2+q^2)=0$$

którego pierwiastkami są wartości R_1 i R_2 promieni krzywości głównych.

Aby wyznaczyć dos α, dos β odpowiadające tym wartościom, zauważymy, że równanie (5) ma dwa pierwiastki równe tak co do dos α, jak i dos β, gdy podstawiemy w nie jednę z wartości R czyniących zadość wartości (6) : każdy z tych pierwiastków będzie więc zarazem pierwiastkiem równania otrzymanego, biorąc pochodnę równania (5) co do dos α lub dos β : a zatém wartości żądane dos α i dos β dane będą przez równania

$$\left(1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\text{dos}\,\alpha+\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\text{dos}\,\beta=0$$

$$\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\text{dos}\,\alpha+\left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\text{dos}\,\beta=0$$

otrzymane biorąc pochodne częściowe równania (5) względem dos α i dos β. Z tych dwóch ostatnich równań otrzymujemy z łatwością

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{r\,\text{dos}\alpha+s\,\text{dos}\beta}{(1+p^2)\,\text{dos}\alpha+pq\,\text{dos}\beta}&=\frac{s\,\text{dos}\alpha+t\,\text{dos}\beta}{pq\,\text{dos}\alpha+(1+q^2)\,\text{dos}\beta}\\&=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}\end{aligned}\right.$$

Równanie utworzone z dwóch pierwszych stosunków (7) jest drugiego stopnia i jednorodne co do dos α, dos β : wyznacza więc w ogólności dwie wartości $\frac{\text{dos}\,\alpha}{\text{dos}\,\beta}$ odpowiadające dwóm przecięciom głównym. Równania (2) i (3) wyznaczają następnie wartości na dos α, dos β.

Oznaczając przez R_1 i R_2 pierwiastki równania (6), otrzymamy

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}R_1+R_2&=\frac{[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}}{rt-s^2}\\R_1\,R_2&=\frac{1+p^2+q^2}{rt-s^2}\end{aligned}\right.$$

co nam da

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{R}_1-\mathrm{R}_2)^2 \\ &=\frac{(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)p^2q^2}{(rt-s^2)^2}\left[\frac{2s}{pq}-\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right]^2 \\ &+\frac{(1+p^2+q^2)^2(1+p^2)(1+q^2)}{(rt-s^2)^2}\left[\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right]^2 \end{aligned}\right.$$

Aby równanie (6) miało dwa pierwiastki równe $\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2$, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest, jak widzimy z równania (9), żeby

$$(10)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{s}{pq}$$

Wartości te odpowiadają więc *punktom krzywości kulistéj* czyli *pępkom* powierzchni.

547. Wyznaczenie punktów krzywości kulistéj powierzchni. Weźmy jeszcze pod uwagę równanie (5): jeżeli punkt powierzchni ma być punktem krzywości kulistéj, kierunek dany przez $\frac{\operatorname{dos}\alpha}{\operatorname{dos}\beta}$, dla którego krzywość przecięcia ma mieć wartość daną R, musi być niewyznaczonym, bo wartości R we wszystkich kierunkach są wtedy równe: co wymaga, żeby spółczynniki $\operatorname{dos}\alpha$ i $\operatorname{dos}\beta$ w równaniu (5) były osobno zerami. Warunek ten można napisać jak następuje:

$$(11)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\mathrm{R}}$$

widzimy więc że warunek ten zawiera równania (10). Równania te wyznaczają nam więc *punkta krzywości kulistéj* w liczbie ograniczonéj lub nieograniczonéj, które jednak tworzyć będą linję ciągłą tylko w szczególnym przypadku, gdy dwa równania (10) zamienią się w jedno; czyli gdy jedno z nich będzie algebraicznem następstwem drugiego. Linja wyznaczona w tym przypadku na powierzchni, będzie *linją krzywości kulistéj* powierzchni.

548. Uwaga. Porównywając równanie (6) wyznaczające promienie krzywości główne, a zatém dwa punkta na normalnéj, które nazwać można *środkami krzywości głównemi* powierzchni w punkcie danym, z równaniem [**316** (9)] uważanem przy poszukiwaniu największości i najmniejszości odległości punktu danego od powierzchni, widzimy z łatwością że punkta M' i M'', które tak ważną grały rolę we wzmiankowanem poszukiwaniu, są właśnie środkami krzywości głównemi téj powierzchni.

O Linjach krzywości powierzchni.

549. Określenie. Jeżeli nakreślimy pewną linję krzywą na powierzchni i poprowadzimy przez punkta téj krzywéj proste normalne do powierzchni, proste te nie będą się w ogólności przecinać pomiędzy sobą: dwie proste normalne do powierzchni poprowadzone w dwóch punktach nieskończenie zbliżonych krzywéj uważanéj mogą się nie znajdować na jednéj płaszczyznie, a zatém nie mieć nawet w granicy punktu wspólnego. W szczególnych tylko przypadkach, dla linij nakreślonych w pewien szczególny sposób na powierzchni, dwie normalne do powierzchni poprowadzone w punktach nieskończenie zbliżonych takiéj linji przecinają się ze sobą: linje te nazywamy *linjami krzywości powierzchni.*

W tym ostatnim przypadku, dwie normalne do powierzchni nieskończenie zbliżone przecinające się ze sobą wyznaczają płaszczyznę: powierzchnia która jest miejscem geometrycznêm tych normalnych, jest więc *powierzchnią rozwijalną* [**518**] jako obwinięta płaszczyzną zmieniającą swe położenie w przestrzeni.

Odwrotnie, ile razy normalne poprowadzone w pewien sposób do powierzchni tworzą powierzchnię rozwijalną, normalne te w punktach nieskończenie zbliżonych powierzchni danéj, spotykają się ze sobą, jako charakterystyczne powierzchni rozwijalnéj; możemy więc powiedzieć że:

Linją krzywości powierzchni nazywamy linję, w któréj punktach poprowadzone normalne do powierzchni, tworzą powierzchnię rozwijalną.

550. Równanie linij krzywości. Niech będą spółrzędne x, y, z, jakiegokolwiek punktu powierzchni odniesionej do układu osi prostokątnych; załóżmy jak zwykle [**532**]

$$(1)\qquad dz = pdx + qdy,\quad dp = rdx + sdy,\quad dq = sdx + tdy$$

równaniami normalnéj do powierzchni będą [**472**]

$$(2)\qquad (X-x) + p(Z-z) = 0,\quad (Y-y) + q(Z-z) = 0.$$

Zmieniajmy teraz spółrzędne x, y, z punktu powierzchni w funkcji pewnéj zmiennéj, od któréj zależyć będą również p i q, tak, żeby punkt ten pozostając na określonéj powyżéj linji krzywości, normalna (2) tworzyła powierzchnię rozwijalną: normalna ta jako charakterystyczna téj ostatniéj powierzchni będzie zawsze na płaszczyznie obwijającéj powierzchnię rozwijalną, płaszczyznie, któréj równanie napisać możemy pod kształtem

$$(3)\qquad [X-x+p(Z-z)] - \varphi[Y-y+q(Z-z)] = 0$$

oznaczając przez φ pewną funkcję parametru zależnie od którego zmieniamy spółrzędne x, y, z. W rzeczy saméj, równanie ( ) wyraża tylko że płaszczyzna przedstawiona przez nie zawiera zawsze prostę (2), zmieniając się zresztą wraz z parametrem zmiennym zawartym w φ.

Lecz jak wiadomo [514) równanie charakterystycznéj jest układem równania płaszczyzny (3) i równania otrzymanego przez zróżniczkowanie (3)go do do parametru : układ ten musi więc być równoważnym z układem (2). Różniczkując (3) co do parametru i zważając, że x, y, z, p i q zależą od tego parametru, otrzymamy

$$(4)\quad [-(dx+pdz)+(Z-z)\,dp]-\varphi[-(dy+qdz)+(Z-z)\,dq] \\ +[Y-y+q\,(Z-z)]\,d\varphi=0$$

Równanie to, wraz z równaniem (3) ma stanowić układ równoważny z (2): lecz równanie (3) jest tożsamością na mocy (2), więc i równanie (4) musi być tożsamością na mocy (2), to jest mieć miejsce dla jakichkolwiek X, Y, Z.

Ostatni wyraz równania (4) jest zerem na mocy drugiego równania (2) : aby dwa pierwsze wyrazy stanowiły równość niezależną od Z czyli $Z-z$, trzeba żeby

$$(5)\quad \begin{cases} dx+pdz=\varphi\,(dy+qdz) \\ dp=\varphi dq \end{cases}$$

a więc rugując φ, musi zachodzić równanie

$$(6)\quad \frac{dp}{dx+pdz}=\frac{dq}{dy+qdz}.$$

Równanie (6) wyraża więc warunek konieczny i dostateczny, jakiemu czynić muszą zadosyć spółrzędne x, y, z pewnych punktów powierzchni, aby punkta te stanowiły linję krzywości : równanie (6) jest więc *równaniem różniczkowém linij krzywości*. Gdybyśmy z tego równania zawierającego różniczki spółrzędnych, mogli otrzymać równanie w samych spółrzędnych, to ostatnie równanie byłoby równaniem powierzchni, któréj przecięcie się z powierzchnią daną wyznaczyłoby linje krzywości szukane. Zadanie to wchodzi w zakres *rachunku całkowego*; samo równanie różniczkowe (6) pozwala nam jednak wyprowadzić pewne własności godne uwagi tego rodzaju linij krzywych nakreślonych na powierzchni.

551. Jeżeli w równaniu (5) zastąpimy dz, dp, dq, przez ich wartości (1), otrzymamy

$$\frac{rdx+sdy}{(1+p^2)\,dx+pqdy}=\frac{sdx+tdy}{pqdx+(1+q^2)\,dy} \tag{7}$$

a znosząc mianownik

$$[(1+q^2)s-pqt]\frac{dy^2}{dx^2}+[(1+q^2)\,r-(1+p^2)t]\frac{dy}{dx}$$
$$+[pqr-(1+p^2)s]=0. \tag{8}$$

Pochodne częściowe p, q, r, s, t, są znanemi funkcjami x i y z równania powierzchni danéj: równanie (8) zawiera więc tylko spółrzędne x i y i ich różniczki, jest więc równaniem rzutu linji krzywości na płaszczyznę XY.

Dla każdego układu wartości spółrzędnych x i y równanie (8) daje dwie wartości $\frac{dy}{dx}$: *przez każdy punkt powierzchni, przechodzą więc w ogólności dwie linje krzywości*; tylko w przypadku punktu krzywości kulistéj, równanie (8) staje się tożsamością na mocy równań [**547** (11)] warunkowych tego punktu, w którym zatém liczba linij krzywości jest nieograniczoną.

552. Weźmy normalnę do powierzchni w punkcie uważanym, który nie przypuszczamy punktem krzywości kulistéj, za oś Z; a płasczyznę styczną do powierzchni w tym punkcie za płasczyznę XY : będziemy mieli $p=0$, $q=0$ [**535**] a równanie (8) stanie się :

$$(9)\qquad s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(r-t)\frac{dy}{dx}-s=0$$

Widzimy zaraz, że wartości $\frac{dy}{dx}$ z tego równania nie mogą być urojonemi (cobyśmy zresztą i z równania (8) choć nieco trudniéj wnieść byli mogli), zatém :

Przez każdy punkt powierzchni przechodzą koniecznie dwie linje krzywości. Iloczyn pierwiastków co do $\frac{dy}{dx}$ równania (9) równa się mniéj jedności; a zatém :

Dwie linje krzywości przechodzące przez każdy punkt powierzchni, który nie jest punktem krzywości kulistéj, mają styczne w tym punkcie prostopadłe.

Jeżeli teraz weźmiemy płasczyzny przecięć głównych powierzchni w punkcie danym za płasczyzny spółrzędne ZX i ZY, będziemy mieli $s=0$ [**538**]. Pierwiastki równania (9) co do $\frac{dy}{dx}$ staną się jeden zerem, drugi nieskończonością; styczne do linji krzywością będą jedna osią X, druga osią Y, a zatém :

Linje krzywości są styczne w każdym punkcie do linji przecięć głównych powierzchni w tym punkcie.

Wyjątek zachodzi zawsze dla punktu krzywości kulistéj, dla którego mielibyśmy w równaniu (9) $s=0$, $r=t$ na mocy [**547**] (11)].

553. Twierdzenie. *Krawędź zwrotu powierzchni rozwijalnej utworzonéj przez normalne poprowadzone do powierzchni w punktach linji krzywości, jest miejscem geometrycznêm* *środków krzywości przecięć normalnych, stycznych do téj linji krzywości.*

Niech będzie w samej rzeczy punkt M (fig. **136**) powierz-

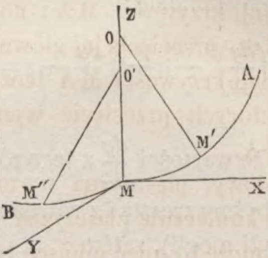


fig. 136.

chni, normalna M Z, linje krzywości M A i M B i styczne do tych linji krzywości M X i M Y : płaszczyzny ZMX, Z M Y są płaszczyznami przecięć głównych. Weźmy punkt M' nieskończenie zbliżony do punktu M na linji A M i poprowadźmy normalnę M' O do powierzchni w tym punkcie : normalna ta przetnie się z normalną M Z w punkcie O [**549**] : punkt O jest środkiem krzywości przecięcia głównego powierzchni płaszczyzną Z M X. Jakoż, punkt M' może być uważanym jako znajdujący się na płaszczyznie Z M X z przybliżeniem nieskończenie małém drugiego rzędu, bo M X jest styczną do A M : linja M' O z takimże przybliżeniem jest normalną do powierzchni w punkcie przecięcia głównego nieskończenie zbliżonym do M; czyli normalną nieskończenie zbliżoną do normalnéj M Z krzywéj płaskiéj, która jest przecięciem główném powierzchni. Punkt O w granicy jest więc środkiem krzywości tego przecięcia głównego M Z X. Punkt ten O jest zarazem przecięciem dwóch charakterystycznych M Z i M' O powierzchni rozwijalnéj o któréj mowa w twierdzeniu, a zatém miéjsce geometryczne jego jest krawędzią zwrotu téj powierzchni : twierdzenie więc jest dowiedzionóm dla linji krzywości A M.

Dowodzenie dla linji krzywości B M przeprowadzić można zupełnie w podobny sposób.

554. Uwagi. Nie należy sądzić jakoby w ogólności środek krzywości O przecięcia głównego był zarazem środkiem krzywości linji krzywości M A : normalne M O, M′ O do powierzchni i do przecięcia jéj głównego są wprawdzie normalnemi do linji krzywości M A lecz nie są jéj *normalnemi głównemi*, których przecięcie wyznaczałoby środek krzywości linji M A.

Czyli innemi słowy, płasczyzna normalna ZMX powierzchni nie jest koniecznie płasczyzną ściśle styczną linji krzywości A M : może to mieć miéjsce tylko w szególnych przypadkach.

Jakkolwiek otrzymaliśmy tylko *równanie różniczkowe* linji krzywości (przejście od równania różniczkowego do równania pierwotnego jest zadaniem rachunku całkowego) możemy wnieść jednak z tego cośmy powyżéj [**552**] powiedzieli, że linje krzywości stanowią dwa układy oddzielne linij na powierzchni, przecinających się w każdym punkcie powierzchni pod kątem prostym, to jest mających styczne prostopadłe w punktach wspólnych.

Układy takie nazywać będziemy układami krzywych *prostokątnemi*: krzywe te dzielą powierzchnię na nieograniczoną liczbę prostokątów krzywolinijnych nieskończenie małych, których boki przeciwległe należą do jednego i tego samego układu linij krzywości. Oba te układy linij krzywości, będąc wyrażonemi przez jedno równanie [**551**], stanowią w ogólności analitycznie jeden tylko układ krzywych, które można uważać w ten sposób jako złożone każda z dwóch gałęzi; w szczególnych tylko przypadkach dwa te układy mogą być przedstawionemi przez równania różne.

Każda linja nakreślona na płasczyznie lub kuli może być uważaną jako linja krzywości téj powierzchni. W przypadku płasczyzny wszystkie normalne, czyli prostopadłe do niéj w punktach pewnéj linji nakreślonéj na płasczyznie, tworzą jako równoległe powierzchnię walcową rozwijalną; w przypadku kuli normalne te spotykając się w środku kuli tworzą powierzchnię ostrokręgową rozwijalną; jakąkolwiek więc będzie linja nakreślona na płasczyznie lub kuli, linja ta czyni zadość określeniu linji krzywości [**549**]. Zresztą, w przypadku płasczyzny, mamy

$$dp = 0\,, \qquad dq = 0;$$

w przypadku kuli, danéj przez równanie

$$(\mathrm{X}-x_0)^2 + (\mathrm{Y}-y_0)^2 + (\mathrm{Z}-z_0)^2 - a^2 = 0$$

znajdujemy

$$dx + pdz + (z-z_0)\,dp = 0\,, \quad dy + qdz + (z-z_0)\,dq = 0$$

W jednym i drugim więc razie, równania (6) [**550**] linij krzywości są sprawdzonemi.

555. Inne własności linij krzywości. Oznaczmy przez α, β, γ kąty jakie styczna do pewnéj linji nakreślonéj na powierzchni tworzy z osiami, przez α', β', γ' kąty normalnéj do powierzchni z osiami, otrzymamy [**472**]

$$p = -\frac{\mathrm{dos}\,\alpha'}{\mathrm{dos}\,\gamma'}\,, \quad q = -\frac{\mathrm{dos}\,\beta'}{\mathrm{dos}\,\gamma'}$$

i również [**466**]

$$\frac{dx}{\mathrm{dos}\,\alpha} = \frac{dy}{\mathrm{dos}\,\beta} = \frac{dz}{\mathrm{dos}\,\gamma}$$

a równanie (6) [**557**] *linij krzywości* stanie się

$$\frac{\mathrm{dos}\gamma'\,d\,\mathrm{dos}\alpha' - \mathrm{dos}\alpha'\,d\,\mathrm{dos}\gamma'}{\mathrm{dos}\alpha\,\mathrm{dos}\gamma' - \mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\alpha'} = \frac{\mathrm{dos}\gamma'\,d\,\mathrm{dos}\beta' - \mathrm{dos}\beta'\,d\,\mathrm{dos}\gamma'}{\mathrm{dos}\beta\,\mathrm{dos}\gamma' - \mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\beta'}$$

czyli

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\,d\cos\alpha' \\ &+(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\,d\cos\beta \\ &+(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')\,d\cos\gamma' = 0\end{aligned}\right.$$

Mamy zresztą znane związki

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$$

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

z których przez różniczkowanie otrzymujemy

$$(11)\quad \cos\alpha'\,d\cos\alpha' + \cos\beta' d\cos\beta' + \cos\gamma' d\cos\gamma' = 0$$

związek, na zasadzie którego równanie (10) staje się

$$(12)\quad \frac{d\cos\alpha'}{\cos\alpha} = \frac{d\cos\beta'}{\cos\beta} = \frac{d\cos\gamma'}{\cos\gamma}$$

a ztąd

TWIERDZENIE I. *Aby linja nakreślona na powierzchni była linją krzywości téj powierzchni, koniecznem jest i dostatecznem, żeby styczna do linji danéj w każdym jéj punkcie była równoległą do prostéj tworzącéj z osiami kąty, mające dostawy proporcjonalne różniczkom dostaw kątów, jakie normalna do powierzchni tworzy z osiami.*

556. Załóżmy dla jakiéjkolwiek krzywéj zakreślonéj na powierzchni

$$(13)\quad dk' = \sqrt{(d\cos\alpha')^2 + d(\cos\beta')^2 + d\cos\gamma')^2}$$

i określmy kąty ξ', η', ζ', przez równania

$$(14)\quad d\cos\alpha' = dk'\cos\xi',\quad d\cos\beta' = dk'\cos\eta,\quad d\cos\gamma' = dk'\cos\xi'$$

Jeżeli krzywa dana jest linją krzywości, normalne do powierzchni w punktach téj linji tworzą powierzchnię rozwijalną [549], są więc stycznemi do pewnéj linji skośnéj, krawędzi zwrotu téj powierzchni rozwijalnéj; kątem styczności téj linji skośnéj będzie dk', kątami zaś jakie normalna główna do niéj poprowadzona tworzy z osiami kąty ξ', η', ζ'. Kierunek téj normalnéj głównéj jest prostopadłym do kierunku normalnéj powierzchni, (jak widzimy podstawiając (14) w (11)), normalna więc główna do krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnéj, o któréj mowa, znajduje się na płaszczyznie stycznéj do powierzchni danéj.

Oznaczamy jeszcze przez λ', μ', ν' kąty z osiami prostéj poprowadzonéj prostopadle do normalnéj powierzchni i do linji powyższéj, określonéj kątami ξ', η', ζ': dostawy kątów ξ', η', ζ' proporcjonalne do $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, są proporcjonalne [509] do $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$. Założywszy więc

$$(15)\qquad d\tau' = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu')^2 + (d\cos\nu')^2}$$

otrzymamy

$$(16)\qquad d\cos\lambda' = \cos\xi'\,d\tau',\quad d\cos\mu' = \cos\eta'\,d\tau',\quad d\cos\nu' = \cos\zeta'\,d\tau$$

Oznaczmy wreszcie przez ω kąt utworzony przez styczną do jakiéjkolwiek krzywéj danéj na powierzchni z kierunkiem określonym przez kąty ξ', η', ζ'; przez θ kąt normalnéj do powierzchni z płaszczyzną ściśle styczną krzywéj danéj, przez ξ, η, ζ, i λ, μ, ν, kąty z osiami normalnéj głównéj i prostopadłej do płaszczyzny ściśle stycznéj téj krzywéj, przez dk i $d\tau$ kąt styczności i kąt skręcenia. Proste które tworzą z osiami spółrzędnych kąty: α', β', γ'; ξ', η', ζ'; λ', μ', ν', tworzą układ prostokątny, a dostawy kątów z osiami stycznéj, normalnéj głównéj i prostopadłéj do płaszczyzny ściśle stycznéj krzywéj danéj na powierzchni, mają wartości odpowiednie następujące.

$$\begin{array}{ccc} 0, & \mathrm{dos}\omega, & \mathrm{wst}\omega \\ \mathrm{dos}\theta, & \pm\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{wst}\omega, & \mp\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\omega \\ \mathrm{wst}\theta, & \mp\,\mathrm{dos}\theta\,\mathrm{wst}\omega, & \pm\,\mathrm{dos}\theta\,\mathrm{dos}\omega \end{array}$$

Zważywszy, że znaki niższe powyższych ilości zamieniają się na wyższe, jeżeli zastąpimy ω przez $\omega+\pi$, zamiast jednego kierunku stycznéj, biorąc kierunek przeciwny względem punktu styczności, weźmiemy pod uwagę tylko znaki wyższe, przyczém zachodzić będą wzory następujące, otrzymane za pomocą wzoru [**66**] na dostawę kąta między dwoma prostemi:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{dos}\alpha\,\mathrm{dos}\alpha' + \mathrm{dos}\beta\,\mathrm{dos}\beta' + \mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\gamma' = 0, \\ \mathrm{dos}\alpha\,\mathrm{dos}\xi' + \mathrm{dos}\beta\,\mathrm{dos}\eta' + \mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\zeta' = \mathrm{dos}\omega, \\ \mathrm{dos}\alpha\,\mathrm{dos}\lambda' + \mathrm{dos}\beta\,\mathrm{dos}\mu' + \mathrm{dos}\gamma\,\mathrm{dos}\nu' = \mathrm{wst}\omega, \end{array}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{dos}\xi\,\mathrm{dos}\alpha' + \mathrm{dos}\eta\,\mathrm{dos}\beta' + \mathrm{dos}\zeta\,\mathrm{dos}\gamma' = \mathrm{dos}\theta, \\ \mathrm{dos}\xi\,\mathrm{dos}\xi' + \mathrm{dos}\eta\,\mathrm{dos}\eta' + \mathrm{dos}\zeta\,\mathrm{dos}\zeta' = \mathrm{wst}\theta\,\mathrm{wst}\omega, \\ \mathrm{dos}\xi\,\mathrm{dos}\lambda' + \mathrm{dos}\eta\,\mathrm{dos}\mu' + \mathrm{dos}\zeta\,\mathrm{dos}\nu' = -\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\omega, \end{array}\right.$$

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{dos}\lambda\,\mathrm{dos}\alpha' + \mathrm{dos}\mu\,\mathrm{dos}\beta' + \mathrm{dos}\nu\,\mathrm{dos}\gamma' = \mathrm{wst}\theta, \\ \mathrm{dos}\lambda\,\mathrm{dos}\xi' + \mathrm{dos}\mu\,\mathrm{dos}\beta' + \mathrm{dos}\nu\,\mathrm{dos}\zeta' = -\,\mathrm{dos}\theta\,\mathrm{wst}\omega, \\ \mathrm{dos}\lambda\,\mathrm{dos}\lambda' + \mathrm{dos}\mu\,\mathrm{dos}\mu' + \mathrm{dos}\nu\,\mathrm{dos}\nu' = +\,\mathrm{dos}\theta\,\mathrm{dos}\omega\,. \end{array}\right.$$

Różniczkując pierwsze i trzecie z równań (17), zważając na pozostałe z równań powyższych, i na znane wzory [**510**], otrzymamy

$$(20)\qquad \mathrm{dos}\omega\,dk' + \mathrm{dos}\theta\,dk = 0$$

$$(21)\qquad d\tau' = d\omega + \mathrm{wst}\,\theta\,dk$$

$$(22)\qquad d\tau = d\theta + \mathrm{wst}\,\omega\,dk'$$

równauie (20) i (22) daje nadto :

$$(23) \qquad d\tau = d\theta - \mathrm{dos}\,\theta \,\mathrm{st}\,\omega dk$$

557. Cztery ostatnie równania mają miejsce dla jakiéjkolwiek krzywéj, nakreślonéj na powierzchni, tak linji krzywości jak i innéj linji. Lecz w przypadku linji krzywości mamy (Tw. I) $\mathrm{wst}\,\omega = 0$, na zasadzie tego cośmy przed chwilą powiedzieli; a zatém dla linji krzywości

$$d\tau = d\theta$$

na zasadzie równania (23), co nam daje godne uwagi twierdzenie LANCRET'A :

TWIERDZENIE II. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym aby linja nakreślona na powierzchni była linją krzywości, jest równość kąta skręcenia téj krzywéj różniczce kąta, jaki jéj płasczyzna ściśle styczna tworzy z normalną powierzchni.*

Jeżeli założymy $d\tau = 0$, otrzymamy $d\theta = 0$ czyli θ równe stałéj i odwrotnie, a zatém:

WNIOSEK. *Aby przecięcie powierzchni pewną płasczyzną było linją krzywości powierzchni, koniecznem jest i dostatecznem, żeby płasczyzna przecinała powierzchnię pod kątem stałym* : to jest, żeby normalne do powierzchni w punktach linji przecięcia poprowadzone, tworzyły z płasczyzną przecięcia kąty wszystkie równe pomiędzy sobą.

558. Jeżeli linja krzywości powierzchni jest płaską, mamy: $\mathrm{wst}\,\omega = 0$, $d\omega = 0$, $d\theta = 0$, a równania (20) i (21) dają nam

$$\frac{d\tau'}{dk'} = -\mathrm{st}\,\theta = \textit{stałéj}$$

a zatém:

TWIERDZENIE III. *Normalne do powierzchni w punktach linji* *krzywości płaskiéj poprowadzone, twozzą powierzchnię rozwijalną, któréj krawędź zwrotu ma stosunek kąta skręcenia do kąta styczności stałym.* Krawędź ta jest linją śrubową, nakreśloną na walcu o jakiéjkolwiek podstawie.

559. Weźmy teraz pod uwagę linję przecięcia się dwóch jakichkolwiek powierzchni : wzór (23) da nam

$$d\tau = d\theta - \operatorname{dos}\theta \operatorname{st}\omega dk$$

$$d\tau = d\theta_1 - \operatorname{dos}\theta_1 \operatorname{st}\omega_1 dk$$

oznaczając przez θ_1, ω_1 kąty określone powyżéj [**556**] odpowiednie drugiéj powierzchni.

Otrzymamy ztąd

$$d(\theta_1 - \theta) = (\operatorname{dos}\theta_1 \operatorname{st}\omega_1 - \operatorname{dos}\theta \operatorname{st}\omega)\, dk$$

kąty θ i θ_1 znajdują się na jednéj i téj saméj płaszczyznie, i są liczone w jedną stronę, zacząwszy od normalnéj głównéj krzywéj danéj; różnica więc $\theta_1 - \theta$ wyraża kąt, jaki powierzchnie tworzą ze sobą. Jeżeli dodamy do tego warunek $\operatorname{wst}\omega = 0$, lub $\operatorname{wst}\omega_1 = 0$, żeby linja przecięcia była linją kzywości jednéj lub drugiéj powierzchni, otrzymamy :

Twierdzenie IV. *Jeżeli przecięcie się dwóch powierzchni jest linją krzywości każdéj z nich, powierzchnie te przecinają się wszędzie pod kątem stałym. Odwrotnie, jeżeli dwie powierzchnie przecinają się pod kątem stałym, i jeżeli linja przecięcia jest linją krzywości jednéj z nich, linja ta jest również linią krzywości drugiéj.*

Ponieważ każda linja nakreślona na płaszczyznie lub kuli jest linją krzywości téj płaszczyzny lub kuli, mamy wniosek następujący, zawierający wniosek Twierdzenia II, jako szczególny przypadek :

Wniosek. *Aby linja płaska lub kulista była linją krzywości powierzchni danéj, konieczném jest i dostateczném, żeby płas-*

czyzna lub kula zawierająca tę linję przecinała powierzchnię daną pod kątem stałym.

Płasczyzny styczne do powierzchni rozwijalnych, są stycznémi wzdłuż prostéj tworzącéj, i tworzą z powierzchnią kąt prosty w każdym punkcie téj prostéj, a zatém : *Tworzące powierzchni rozwijalnéj są jéj linjami krzywości.*

O układzie potrójnym prostokątnym powierzchni.

560. Niech będą trzy układy powierzchni przedstawione przez równania

$$(1) \qquad f_1(x, y, z) = g, \quad f_2(x, y, z) = h, \quad f_3(x, y, z) = l$$

gdzie x, y, z wyrażają spółrzędne prostokątne; zaś g, h, l niezależne od spółrzędnych parametry, którym nadając różne wartości, otrzymamy różne powierzchnie szczególne tych układów. Te trzy układy powierzchni przecinających się w ogólności pomiędzy sobą, stanowią *układ potrójny powierzchni.* Jeżeli wyobrazimy sobie równania (1) rozwiązane co do spółrzędnych x, y, z, równania tak otrzymane

$$(2) \qquad x = F_1(g, h, l), \quad y = F_2(g, h, l), \quad z = F_3(g, h, l)$$

dają nam możność wyznaczenia każdego punktu powierzchni danego przez wartości spółrzędnych x, y, z, za pomocą wartości szczególnych nadanych parametrom g,h,l, czyli za pomocą trzech powierzchni szczególnych z układu powyższego (1), które przecinając się ze sobą wyznaczają punkt dany [**73**] : trzy te parametry zmienne g, h, l, nazwanemi ztąd zostały *spółrzędnemi krzywolinijnemi.* Układ zwykły spółrzędnych prostolinijnych, jest szczególnym przypadkiem powyższego, w którym przypuścimy że powierzchnie są płaszczyznami równoległemi do trzech płaszczyzn przecinających się podług osi w przestrzeni.

Godnym uwagi jest przypadek, w którym powierzchnie trzech układów (1) przecinają się odpowiednio pod kątami prostemi: układ taki nazwanym został *układem powierzchni potrójnym prostokątnym.*

Załóżmy dla skrócenia

$$(3)\quad \begin{cases} G^2=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 \\ H^2=\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \\ L^2=\left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial l}{\partial z}\right)^2 \end{cases}$$

Normalne do trzech powierzchni w punkcie wspólnym x, y, z tworzą z osiami spółrzędnych prostokątnych prostolinijnych kąty, których dostawy równają się odpowiednio

$$\begin{matrix} \frac{1}{G}\frac{\partial g}{\partial x}, & \frac{1}{G}\frac{\partial g}{\partial y}, & \frac{1}{G}\frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial x}, & \frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial y}, & \frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{1}{L}\frac{\partial l}{\partial x}, & \frac{1}{L}\frac{\partial l}{\partial y}, & \frac{1}{L}\frac{\partial l}{\partial z} \end{matrix}$$

a zatem warunek konieczny i dostateczny, aby układ potrójny powierzchni był układem prostokątnym, jest zawartym w równaniach:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial l}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial l}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial l}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial l}{\partial z}=0 \end{cases}$$

561. Weźmy za zmienne niezależne parametry g, h, l układu powierzchni potrójnego prostokątnego, i załóżmy sobie wyrazić pochodne częściowe x, y, z względem g,h, l, przez pochodne częściowe g, h, l, względem x, y, z.

Dla tego, we wzorze

$$dx=\frac{\partial x}{\partial g}dg+\frac{\partial x}{\partial h}dh+\frac{\partial x}{\partial l}dl$$

podstawmy za dg, dh, dl ich wartości

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz$$

$$dh=\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial y}dy+\frac{\partial h}{\partial z}dz$$

$$dl=\frac{\partial l}{\partial x}dx+\frac{\partial l}{\partial y}dy+\frac{\partial l}{\partial z}dz$$

otrzymamy, równając po jednéj i drugiéj stronie spółczynniki różniczek niezależnych dx, dy, dz, równania :

$$1=\frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial x}$$

$$0=\frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial y}$$

$$0=\frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial z}$$

Dodajmy te równania, pomnożywszy je odpowiednio przez $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$, następnie przez $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$ w końcu przez $\frac{\partial l}{\partial x}$, $\frac{\partial l}{\partial y}$, $\frac{\partial l}{\partial z}$, otrzymamy na mocy równań (3) i (4):

$$\frac{\partial g}{\partial x}=G^2\frac{\partial x}{\partial g},\ \frac{\partial h}{\partial x}=H^2\frac{\partial x}{\partial h},\ \frac{\partial l}{\partial x}=L^2\frac{\partial x}{\partial l}. \tag{5}$$

Znajdziemy w podobny sposób

$$(6) \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = G^2 \frac{\partial y}{\partial g}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = H^2 \frac{\partial y}{\partial h}, \quad \frac{\partial l}{\partial y} = L^2 \frac{\partial y}{\partial l}$$

$$(7) \qquad \frac{\partial l}{\partial z} = G^2 \frac{\partial z}{\partial l}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = H^2 \frac{\partial z}{\partial h}, \quad \frac{\partial l}{\partial z} = L^2 \frac{\partial z}{\partial l}$$

a wzory te wraz z (3) i (4) dadzą nam

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{G^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g}\right)^2 \\ \frac{1}{H^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\right)^2 \\ \frac{1}{L^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)^2 \end{aligned} \right.$$

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial y}{\partial h} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial z}{\partial h} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial g}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial z}{\partial l} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial h}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial z}{\partial l} &= 0 \end{aligned} \right.$$

562. Wzory (8) i (9) wyrażają po prostu związki, jakie zachodzą między dostawami kątów utworzonych przez trzy kierunki prostopadłe z osiami spółrzędnych [**66**]. Można z nich otrzymać wiele związków wyrażających własności układów prostokątnych. Naprzyklad, aby wyrazić pochodne częściowe drugiego rzędu $\frac{\partial^2 x}{\partial g \partial h}, \frac{\partial^2 x}{\partial g \partial l}, \frac{\partial^2 x}{\partial h \partial l}, \ldots$ przez pochodne pierwszego rzędu zmiennych x, y, z i ilości G, H, L, zróżniczkujmy pierwsze równanie (8) względdem h, drugie względem g:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial g}\dfrac{\partial^2 x}{\partial g\partial h}+\dfrac{\partial y}{\partial g}\dfrac{\partial^2 y}{\partial g\partial h}+\dfrac{\partial z}{\partial g}\dfrac{\partial^2 z}{\partial g\partial h}=-\dfrac{1}{G^2}\dfrac{\partial l.G}{\partial h} \\ \dfrac{\partial x}{\partial h}\dfrac{\partial^2 x}{\partial g\partial h}+\dfrac{\partial y}{\partial h}\dfrac{\partial^2 y}{\partial g\partial h}+\dfrac{\partial z}{\partial h}\dfrac{\partial^2 z}{\partial g\partial h}=-\dfrac{1}{H^2}\dfrac{\partial l.H}{\partial g} \end{cases}$$

Zróżniczkujmy następnie równania (9) odpowiednio względem g, h, l; odejmijmy od summy dwóch ostatnich z tak otrzymanych równań, pierwsze: będziemy mieli

$$(11)\quad \frac{\partial x}{\partial l}\frac{\partial^2 x}{\partial g\partial h}+\frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial^2 y}{\partial g\partial h}+\frac{\partial z}{\partial l}\frac{\partial^2 z}{\partial g\partial h}=0$$

Pomnóżmy równania (10) odpowiednio przez $\frac{\partial x}{\partial g}$, $\frac{\partial x}{\partial h}$, następnie przez $\frac{\partial y}{\partial g}$, $\frac{\partial x}{\partial h}$, w końcu przez $\frac{\partial z}{\partial g}$, $\frac{\partial z}{\partial h}$, równanie zaś (11) przez $\frac{\partial x}{\partial l}$, $\frac{\partial y}{\partial l}$, $\frac{\partial z}{\partial l}$, otrzymamy zważywszy na (8) i (9)

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial g\partial h}=-\dfrac{\partial l.G}{\partial h}\dfrac{\partial x}{\partial g}-\dfrac{\partial l.H}{\partial g}\dfrac{\partial x}{\partial h} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial g\partial h}=-\dfrac{\partial l.G}{\partial h}\dfrac{\partial y}{\partial g}-\dfrac{\partial l.H}{\partial g}\dfrac{\partial y}{\partial h} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial g\partial h}=-\dfrac{\partial l.G}{\partial h}\dfrac{\partial z}{\partial g}-\dfrac{\partial l.H}{\partial g}\dfrac{\partial z}{\partial h} \end{cases}$$

Równania (12), przez zmianę głosek dadzą nam podobne wartości pozostałych pochodnych drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial g\partial l},\ \frac{\partial^2 y}{\partial g\partial l},\ \frac{\partial^2 z}{\partial g\partial l},\ \frac{\partial^2 x}{\partial h\partial l},\ \frac{\partial^2 y}{\partial h\partial l},\ \frac{\partial^2 z}{\partial h\partial l}.$$

563. Twierdzenie p. K. Dupin. *W układzie powierzchni potrójnym prostokątnym, każda z powierzchni jednego* *gatunku jest przecięta przez powierzchnie dwóch pozostałych podług linij krzywości.*

W saméj rzeczy, równania (12) można wyrazić pod kształtem :

$$(13)\qquad \frac{\dfrac{\partial\left(G\dfrac{\partial x}{\partial g}\right)}{\partial h}}{\dfrac{\partial x}{\partial h}}=\frac{\dfrac{\partial\left(G\dfrac{\partial y}{\partial g}\right)}{\partial h}}{\dfrac{\partial y}{\partial h}}=\frac{\dfrac{\partial\left(G\dfrac{\partial z}{\partial g}\right)}{\partial h}}{\dfrac{\partial z}{\partial h}}=-\frac{G}{H}\frac{\partial H}{\partial g}$$

Weźmy teraz pod uwagę przecięcie K dwóch powierzchni należących do dwóch gatunków, dla których mamy odpowiednio

$$g=\textit{stałéj},\qquad l=\textit{stałéj};$$

pochodne częściowe $\frac{\partial x}{\partial h}, \frac{\partial y}{\partial h}, \frac{\partial z}{\partial h}$ są proporcjonalne dostawom kątów, jakie styczna do krzywéj K tworzy z osiami; ilości zaś

$$G\frac{x}{\partial g},\quad G\frac{\partial y}{\partial g},\quad G\frac{\partial z}{\partial g}\ \text{lub}\ \frac{1}{G}\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{1}{G}\frac{\partial g}{\partial y},\ \frac{1}{G}\frac{\partial g}{\partial z}$$

są dostawami kątów z osią normalnéj do powierzchni g, a ich różniczki

$$\frac{\partial\left(G\dfrac{\partial x}{g}\right)}{\partial h}dh,\quad \frac{\partial G\left(\dfrac{\partial y}{\partial g}\right)}{\partial h}dh,\quad \frac{\partial\left(G\dfrac{\partial z}{\partial g}\right)}{\partial h}dh$$

uważane na krzywéj K, są proporcjonalne na zasadzie (13) dostawom kątów stycznéj do krzywéj K z osiami : krzywa więc K jest linią krzywości powierzchni uważanéj, na zasadzie wyżéj [555] udowodnionego twierdzenia.

564. Układ potrójny prostokątny drugiego stopnia. Weźmy za równania (1) trzech powierzchni, równania

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{g^2}+\frac{y^2}{g^2-b^2}+\frac{z^2}{g^2-c^2}=1\\ &\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-h^2}=1\\ &\frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{b^2-l^2}-\frac{z^2}{c^2-l^2}=1 \end{aligned}\right.$$

gdzie b i c są długościami danemi prostych, przyczém przypuszczamy $b < c$.

Jeżeli parametrowi g^2 nadawać będziemy wartości większe od c^2, parametrowi h^2 wartości zawarte pomiędzy b^2 i c^2, nakoniec parametrowi l^2 wartości mniejsze od b^2, pierwsze z tych równań przedstawiać będzie elipsoidy, drugie hyperboloidy o jednéj powłoce, trzecie hyperboloidy o dwóch powłokach [**70**]. Wszystkie powierzchnie układu są współśrodkowe, i ich przecięcia podług osi głównych mają wspólne ogniska: powierzchnie te nazywają dla tego *współogniskowemi*.

Jeżeli rozwiążemy równania (A) co do x, y, z otrzymamy

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &x=\frac{ghl}{bc}\\ &y=\frac{\sqrt{g^2-b^2}\,\sqrt{h^2-b^2}\,\sqrt{b^2-l^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\\ &z=\frac{\sqrt{g^2-c^2}\,\sqrt{c^2-h^2}\,\sqrt{c^2-l^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}} \end{aligned}\right.$$

Ilości l, $\sqrt{b^2-l^2}$, $\sqrt{h^2-b^2}$ i $\sqrt{c-l^2}$ mogą stać się zerami zgodnie z powyżéj uczynionemi założeniami: należy więc przypuścić, że ilości te mogą zmieniać znaki, przechodząc przez zera, aby wzory (B) mogły wyznaczyć wszystkie punkta przestrzeni. Aby uniknąć dwóznaczności znaków, możemy wprowadzić kąty φ, ψ określone przez równania

$$l = b \operatorname{dos} \psi, \qquad \sqrt{b^2 - l^2} = \operatorname{wst} \psi$$

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{dos} \varphi, \qquad \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{wst} \varphi$$

Z równań (B) otrzymujemy

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial g} = \frac{hl}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial g} = \frac{g\sqrt{h^2-b^2}\,\sqrt{b^2-l^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{g^2-b^2}}, \\ &\qquad\qquad\quad \frac{\partial z}{\partial g} = \frac{g\sqrt{c^2-h^2}\,\sqrt{c^2-l^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{g^2-c^2}} \\ &\frac{\partial x}{\partial h} = \frac{gl}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{h\sqrt{g^2-b^2}\,\sqrt{b^2-l^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{b^2-l^2}}, \\ &\qquad\qquad\quad \frac{\partial z}{\partial h} = \frac{-h\sqrt{g^2-c^2}\sqrt{c^2-l^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{c^2-h^2}} \\ &\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{gh}{bc}, \quad \frac{\partial y}{\partial l} = \frac{-l\sqrt{g^2-b^2}\,\sqrt{h^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{b^2-l^2}}, \\ &\qquad\qquad\quad \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{-l\sqrt{g^2-c^2}\,\sqrt{c^2-h^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{c^2-l^2}} \end{aligned} \right.$$

wartości, które podstawione w równania (9) [**561**] pokazują, że układ (A) lub (B) jest w rzeczy saméj układem prostokątnym.

Przykłady.

565. Punkta krzywości kulistéj elipsoidy. Oznaczmy trzy pólosie elipsoidy przez g, $\sqrt{g^2-b^2}$ i $\sqrt{g^2-c^2}$: załóżmy $b<c$; równaniem téj powierzchni będzie

$$(1) \qquad \frac{x^2}{g^2} + \frac{y^2}{g^2-b^2} + \frac{z^2}{g^2-c^2} = 1$$

Różniczkując to równanie częściowo względem x i y jako zmiennych niezależnych, których z jest funkcją, otrzymamy zachowując zwykłe [**532**] znakowanie

$$(2) \qquad \frac{g^2}{x}+\frac{pz}{g^2-c^2}=0\,, \quad \frac{y}{g^2-b^2}+\frac{qz}{g^2-c^2}=0$$

a różniczkując powtórnie

$$(3) \qquad \begin{cases} rz+(1+p^2)=\dfrac{g^2}{c^2} \\ tz+(1+q^2)=\dfrac{c^2-b^2}{g^2-b^2} \\ sz+pq=0 \end{cases}$$

co nam daje

$$(4) \qquad \begin{cases} z\,[pqr-(1+p^2)\,s]=\dfrac{c^2}{g^2}\,pq \\ y\,[(1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t]=\dfrac{b^2\,(g^2-c^2)}{b^2\,(g^2-b^2)}+\dfrac{c^2}{g^2}\,q^2-\dfrac{c^2-b^2}{g^2-b^2}\,p^2 \end{cases}$$

Dla punktów krzywości kulistéj [**547**] pierwsze a zatém i drugie strony równań (4) stają się równemi zeru, co wymaga naprzód żeby albo $p=o$ albo $q=o$; lecz $p=o$ dałoby wartość urojoną na q, musimy więc założyć $q=o$, a ztąd

$$p=\pm\frac{b\sqrt{b^2-c^2}}{g\sqrt{c^2-b^2}}\,, \quad z=\pm\frac{\sqrt{c^2-b^2}\,\sqrt{g^2-c^2}}{c}\,, \quad x=\pm\frac{bg}{c}\,,\ y=0.$$

Elipsojda ma więc cztery punkta krzywości kulistéj znajdującej się na płaszczyźnie głównéj największéj i najmniejszéj osi, co się zgadza z powyżéj [**542**] zrobioną uwagą.

566. Linje krzywości elipsoidy. Z równań (2) i (3) otrzymujemy

$$z\,[pqr-(1+p^2)\,s]=\frac{c^2}{g^2}\,pq$$

$$z\,[(1+q^2)\,s-pqt]=-\frac{c^2-b^2}{g^2-b^2}\,pq$$

$$z\,[(1+q^2)\,r-(1+p^2)\,t]=\frac{b^2\,(g^2-c^2)}{g^2\,(g^2-b^2)}+\frac{c^2}{g^2}\,q^2-\frac{c^2-b^2}{g^2-b^2}\,p^2$$

podstawiając te wartości w równanie [**551** (8)] linij krzywości i zastępując p i q przez ich wartość w funkcji x i y, otrzymamy

$$(5)\qquad \mathrm{A}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-\mathrm{A}y^2-\mathrm{B})\frac{dy}{dx}-xy=0$$

gdzie oznaczyliśmy przez skrócenie

$$\mathrm{A}=\frac{(c^2-b^2)\,g^2}{c^2\,(g^2-b^2)},\quad \mathrm{B}=\frac{b^2g^2}{c^2}.$$

Równanie (5) jest równaniem różniczkowém linij krzywości elipsoidy : przejście od tego równania do równania pierwotnego pomiędzy x i y, które będzie równaniem rzutu linij krzywości na płaszczyznę X Y, jest zadaniem dość złożoném rachunku całkowego.

567. Lecz twierdzenie p. K. Dupin pozwala nam wyznaczyć wprost linje krzywości elipsoidy. Jakoż wiemy na zasadzie tego twierdzenia, że jeżeli (1) jest równaniem elipsoidy, oznaczywszy przez h^2 parametr zmienny zawarty pomiędzy b^2 i c^2, przez l^2 parametr mniejszy od b^2, powierzchnie gatunków danych przez równania

$$(6)\qquad \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{h^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-h^2}=1$$

$$(7)\qquad \frac{x^2}{l^2}-\frac{y^2}{b^2-l^2}-\frac{z^2}{c^2-l^2}=1$$

z których pierwsze przedstawia hyperboloidy jednopowłokowe, drugie hyperboloidy dwupowłokowe, przecinać będą elipsoidę (1) daną podług linij krzywości [**563**] : pierwsze dadzą linje krzywości jednego układu, drugie linje krzywości drugiego układu przecinające poprzednie pod kątami prostemi. Równania rzutów linij krzywości na płaszczyzny główne elipsoidy, otrzymamy rugując kolejno

$$z^2,\ y^2,\ x^2,$$

pomiędzy równaniem (1) i każdem z równań (6) i (7); będziemy mieli w ten sposób pierwszy układ przedstawiony przez równania rzutów na płasczyzny spółrzędnych

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{c^2x^2}{g^2h^2}+\dfrac{(c^2-b^2)\,y^2}{(g^2-b^2)\,(h^2-b^2)}=1 \\[2mm] \dfrac{b^2x^2}{g^2h^2}+\dfrac{(c^2-b^2)\,z^2}{(g^2-c^2)(c^2-h^2)}=1 \\[2mm] -\dfrac{b^2y^2}{(g^2-b^2)\,(h^2-b^2)}+\dfrac{c^2z^2}{(g^2-c^2)\,(c^2-h^2)}=1 \end{cases}$$

a drugi układ

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{c^2x^2}{g^2l^2}-\dfrac{(c^2-b^2)\,y^2}{(g^2-b^2)\,(b^2-l^2)}=1 \\[2mm] \dfrac{b^2x^2}{\rho^2l^2}+\dfrac{(c^2-b^2)\,z^2}{(g_9-c\,)\,(c^2-l^2)}=1 \\[2mm] \dfrac{b^2y^2}{(g^2-b^2)\,(b^2-l^2)}+\dfrac{c^2z^2}{(g^2-c^2)\,(c^2-l^2)}=1 \end{cases}$$

Widzimy z tych równań że linje krzywości obu układów, rzucają się podług elips na płasczyznę XZ która jest płasczyzną największéj i najmniéjszéj osi; na płasczyznach zaś XY i YZ które są płasczyznami osi średniéj i osi wielkiéj lub małéj, linje krzywości pierwszego układu mają jeszcze rzuty eliptyczne, lecz linje drugiego układu są w rzutach tych hyperbolami.

Równanie (5) jest równaniem różniczkowém pierwszego z równań (8), wynikającym przez wyrugowanie zmiennego parametru h z (8) i z równania otrzymanego przez zróżniczkowanie (8) względem x i y [**182**].

Monge podał bardzo prosty sposób kreślenia rzutów linij krzywości elipsoidy na jednę z jej płasczyzn głównych. Weźmy naprzykład pod uwagę płasczyznę główną zawierającą oś największą i oś średnią, to jest płasczyznę XY. Oznaczmy przez x_1, y_1, długości półosi elipsy rzutu na tę płasczyznę pewnéj linji krzywości pierwszego układu: równania (8) dadzą nam

$$\frac{c^2x_1^{\,2}}{g^2}=h^2, \qquad \frac{c^2-b^2}{g^2-b^2}\,y_1^{\,2}=h^2-b^2$$

a rugując h z tych równań, otrzymamy

$$(10)\qquad \frac{c^2x_1^{\,2}}{b^2g^2}-\frac{(c^2-b^2)\,y_1^{\,2}}{b^2\,(g^2-b^2)}=1$$

Gdyby x_1, y_1, oznaczały długości półosi hyperboli rzutu na płaszczyznę XY linij krzywości drugiego układu, mielibyśmy podobnież na zasadzie równań (9)

$$\frac{c^2x_1^2}{g^2}=l^2 \, , \qquad \frac{c^2-b^2}{g^2-b^2}y_1^2=b^2-l^2$$

a rugując l

$$\frac{c^2x_1^2}{b^2g^2}+\frac{(c^2-b^2)\,y_1^2}{b^2(g^2-b^2)}=1 \tag{11}$$

Dajmy wielkościom x_1, y_1, znaczenie spółrzędnych : równania (10) i (11) przedstawiać będą hyperbolę i elipsę, mające środek wspólny z elipsoidą i osie skierowane podług osi rzutów linij krzywości. Monge nazwał te krzywe *hyperbolą pomocniczą i elipsą pomocniczą*. Wykreśliwszy je na odpowiedniéj płaszczyźnie biorąc spółrzędne punktów pierwszéj, za półosie układu elips, spółrzędne punktów drugiéj za półosie układu hyperbol, otrzymamy rzuty linij krzywości pierwszego i drugiego układu.

568. Linje krzywości powierzchni obrotowych.

Powierzchniami obrotowemi nazywamy powierzchnie utworzone przez obrót linji płaskiéj około osi znajdującéj się na jéj płaszczyźnie. Wszelkie przecięcia téj powierzchni płaszczyznami przechodzącemi przez oś, nazwane *południkami* są sobie równe i równe linji tworzącéj. Wszystkie przecięcia płaszczyznami prostopadłemi do osi nazwane *równoleżnikami*, są kołami zakreślonemi przez różne punkta linji tworzącéj podczas jéj obrotu około osi. Normalna do linji tworzącéj czyli południka, jest zarazem normalną do powierzchni; bo styczna do równoleżnika znajduje się na płaszczyźnie tegoż równoleżnika prostopadłéj do płaszczyzny południka, jest zatém prostopadłą do normalnéj południka, która w ten sposób idąc prostopadle do stycznych dwóch linij nakreślonych na powierzchni, jest prostopadłą do płaszczyzny stycznéj powierzchni. Normalna więc do powierzchni obrotowéj w jakimkolwiek jéj punkcie spotyka koniecznie oś obrotu. Południki i równoleżniki stanowią dwa układy linij krzywości [**549**] : w saméj rzeczy normalne do powierzchni w punktach jednego południka znajdują się wszystkie na płaszczyźnie tegoż południka, normalne zaś do powierzchni w punktach jednego równoleżnika, spotykając oś obrotu w jednym punkcie, tworzą powierzchnię ostrokręgową rozwijalną.

Własność na zasadzie któréj normalne spotykają oś obrotu pozwala nam wyprowadzić z łatwością równanie o pochodnych częściowych powierzchni obrotowych. Jakoż, niech będą równania normalnéj w punkcie x, y, z :

$$X-x+p(Z-z)=0\,,\qquad Y-y+q(Z-z)=0,$$

gdzie p i q oznaczają pochodne z względem x i y; niech będzie równanie osi obrotu

$$X=az+b\,,\qquad Y=a_1z+b_1$$

rugując X, Y, Z z czterech równań poprzedzających, aby wyrazić warunek żeby normalna spotykała oś, otrzymamy równanie różniczkowe częściowe powierzchni obrotowych :

$$(q+a_1)(x-az-b)-(p+a_1)(y-a_1z-b_1)=0 \tag{1}$$

Jeżeli weźmiemy oś obrotu za oś Z, otrzymamy, zakładając w (1) $a=0$, $b=0$, $a_1=0$, $b_1=0$:

$$qx-py=0 \tag{2}$$

równanie różniczkowe częściowe powierzchni obrotowych w prostszym kształcie.

Jeżeli powierzchnię obrotową uważać będziemy jako utworzoną przez koło ruchome zmiennego promienia posuwające się równolegle do swego pierwotnego położenia tak, że środek jego znajduje się zawsze na prostéj Z stałéj t. j. na osi obrotu, równanie téj powierzchni przedstawi się pod kształtem

$$z=\varphi(x^2+y^2) \tag{3}$$

bo x^2+y^2 równa się kwadratowi promienia koła, równanie (3) wyraża tylko że z zmienia się w miarę jak promień koła się zmienia, funkcja dowolna z wyraża zależność dowolną rzędnéj z od promienia koła tworzącego.

Równanie (2) wynika z wyrugowania funkcyi φ z (3) i z różniczek częściowych (3) : jakoż mamy różniczkując (3)

$$p=2x\varphi'(x^2+y^2)\,,\qquad q=2y\varphi'(x^2+y^2) \tag{4}$$

a więc dzieląc

$$\frac{q}{p}=\frac{y}{x} \quad \text{czyli} \quad qx-py=0.$$

Aby otrzymać równanie linij krzywości powierzchni obrotowéj, mamy różniczkując (4)

$$\begin{aligned} r &= 2\varphi'(x^2+y^2)+4x^2\varphi''(x^2+y^2) \\ &= 4xy\varphi''(x^2+y^2) \\ t &= 2\varphi'(x^2+y^2)+4y^2\varphi''(x^2+y^2) \end{aligned}$$

a równanie [**551**] linij krzywości, staje się

$$8\varphi'^3(x^2+y^2)-4\varphi''(x^2+y^2)]\left[xy\frac{dy^2}{dx^2}+(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-xy\right]=0.$$

Równając drugi czynnik zeru, otrzymamy na $\frac{dy}{dx}$ dwie wartości

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{x}{y}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2=\frac{y}{x}$$

Pierwsza z nich daje

$$ydy+xdx=0, \quad \text{czyli} \quad d(y^2+x^2)=0$$

ztąd mamy [**145**]

$$y^2+x^2=\textit{stałéj}$$

równanie kół, równoleżników.

Druga z powyższych wartości na $\frac{dy}{dx}$, daje

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \quad \text{czyli} \quad d(\mathrm{l}.y)=d.(lx)$$

ztąd wnosimy [**149**] że

$$[\mathrm{l}.y-\mathrm{l}.x=\textit{stałéj} \quad \text{czy} \quad l\frac{y}{x}=\textit{stałéj}$$

lub po prostu

$$\frac{y}{x}=\textit{stałéj}$$

równanie prostéj, która jest rzutem południka na płaszczyznę XY prostopadłą do osi obrotu.

569. Linje krzywości powierzchni rozwijalnych. Wychodząc z określenia danego powyżéj [**518**] powierzchni rozwijalnych, jako obwiniętych płaszczyzną ruchomą, przedstawmy równanie płaszczyzny ruchoméj pod kształtem ogólnym

$$(1) \qquad z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

gdzie φ jest parametrem zmiennym, wyznaczającym położenie płaszczyzny ruchoméj, zaś $\rho(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ jakiemikolwiek funkcjami tego parametru. Różniczkując (1) względem α, otrzymamy

$$(2) \qquad 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)$$

a układ równań (1) i (2) przedstawia powierzchnie rozwijalne. Różniczka zupełna dz ma wyrażenie

$$dz = \alpha dx + \varphi(\alpha)\,dy + [x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)]\,d\alpha$$

czyli, na zasadzie (2)

$$(3) \qquad dz = \alpha dx + \varphi(\alpha)\,dy$$

tak jakby α było stałém. Mamy więc

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p = \alpha, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q = \varphi(\alpha).$$

Równania (4) dają, rugując α

$$(5) \qquad q = \varphi(p)$$

a podstawiając je w (1)

$$(6) \qquad z = px + qy + \psi(p)$$

Równania (5) (6) są *równaniami różniczkowemi częściowemi pierwszego rzędu powierzchni rozwijalnych* : wszelka powierzchnia rozwijalna czyni zadość tym równaniom. (Twierdzenie odwrotne, zawsze prawdziwe dla (5), i z pewnemi zastrzeżeniami dla (6) może być dowiedzioném tylko za pomocą rachunku całkowego).

Z równania (5) mamy różniczkując

$$dq = \varphi'(p)\, dp$$

czyli [**532**]

$$rdx + sdy = \varphi'(p)\,(sdx + tdy)$$

co nam daje

(7) $$r = s\varphi'(p), \qquad t\varphi'(p) = s$$

a mnożąc pierwsze z równań (7) przez drugie otrzymamy

(8) $$rt - s^2 = 0$$

równanie różniczkowe częściowe drugiego rzędu powierzchni rozwijalnych, nie zawierające już śladu parametru α ani funkcyj φ, ψ, dowolnych tego parametru: równaniu temu musi czynić zadość wszelka powierzchnia rozwijalna.

Równanie linij krzywości

$$\frac{dp}{dx + pdx} = \frac{dq}{dy + qdz}$$

które staje się na mocy (4) i (3)

$$d\alpha \left\{ [1 + \varphi^2(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)]\, dy \right.$$
$$\left. + [\alpha\varphi(\alpha) - (1 + \alpha^2)\varphi'(\alpha)]\, dx \right\} = 0$$

rozkłada się na dwa następujące

(8) $$d\alpha = 0$$

(9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \alpha^2)\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)}{1 + \varphi^2(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha)}$$

Równanie (8) daje

$$\alpha = \textit{stałéj}$$

wyraża charakterystyczne czyli tworzące prostolinijne powierzchni rozwijalnéj, które są więc zarazem pierwszym układem linij krzywości téj powierzchni, jakeśmy to już [**559**] zauważyli. Rugując jedną ze zmiennych x, y lub α z (9) i (2) otrzymamy równanie różniczkowe drugiego układu linij krzywości, przecinającego proste tworzące składające pierwszy układ, pod kątem prostym.

Zadania do rozwiązania.

1. *Dowieść że iloczyn promieni krzywości głównych w punktach lipsoidy, w których płaszczyzny styczne są równooddalone od środka, jest stałym.*

Biorąc równanie elipsoidy w zwykłym kształcie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

promienie krzywości główne są dane przez równania

$$R^2-[a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2)]\frac{R}{\delta}+\frac{a^2+b^2+c^2}{\delta^4}=0$$

gdzie δ oznacza odległość od środka płaszczyzny stycznéj : wyrażeniem téj odległości jest

$$\delta=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

2. *Znaleść promienie krzywości główne paraboloidy :*

$$\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{b}=x$$

Promienie te są dane przez równanie

$$R^2-(a+b+4x)\frac{x}{4\delta}R+\frac{abx^2}{4\delta^4}=0$$

gdzie δ ma to samo znaczenie co powyżéj.

3. *Znaleść promienié krzywości główne powierzchni*

$$xyz=m^3$$

Otrzymujemy, oznaczając przez δ odległość początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznéj :

$$R^2+2(x^2+y^2+z^2)\frac{R}{\delta}+\frac{27m^6}{\delta^4}=0$$

4. *Dowieść że promienie krzywości główne powierzchni śrubowéj skośnéj*

$$x \,\mathrm{dos}\, \frac{2\pi z}{h} - y \,\mathrm{wst}\, \frac{2\pi z}{h} = 0$$

są w każdym jéj punkcie równe i znaków przeciwnych.

5. *Dowieść, że powierzchnia obwijająca kulę zmiennego promienia, któréj środek przebiega krzywę daną, ma jeden układ linij krzywości złożony z kół charakterystycznych téj powierzchni*; i odwrotnie: *jeżeli jeden układ linij krzywości pewnéj powierzchni jest układem kół, powierzchnia ta jest koniecznie obwijającą kuli ruchoméj, któréj środek przebiega krzywę daną.*

6. *Jeżeli w poprzedzającem zadaniu promień kuli ruchoméj jest stałym, jeden z promieni krzywości głównych powierzchni obwijającéj jest stałym we wszystkich punktach téj powierzchni; i odwrotnie: jeżeli jeden z promieni krzywości głównych pewnéj powierzchni jest stałym, powierzchnia ta jest obwijającą kuli ruchoméj stałego promienia.*

7. *Dowieść, że powierzchnia, któréj linje krzywości obu układów są kołami, jest obwijającą kuli stycznéj do trzech kul danych* i odwrotnie: *powierzchnia obwijająca kulę styczną do trzech kul danych, ma wszystkie swe linje krzywości kołami.*

8. *Dowieść, że jeżeli linje krzywości pewnéj powierzchni są wszystkie płaskiemi, ich płaszczyzny są równoległemi do dwóch prostych prostopadłych.*

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

PRZYPISEK

KRÓTKIE WIADOMOŚCI O WYZNACZNIKACH

Skreślił Władysław Trzaska

> For what is the theory of determinants? It is an algebra upon algebra, a calculus which enables us to combine and foretell the results of algebraical operations, in the same way as algebra enables us to dispense with the performance of the special operations of arithmetic.
>
> *Sylvester, Philosophical Magazine*, 1851.

Słowa powyższe jednego z najznakomitszych matematyków obecnie żyjących, jednego z tych którzy się najwięcéj przyczynili swemi odkryciami do postępu teorji wyznaczników, uwalniają mnie od rozpisywania się nad jéj doniosłością i użytecznością. Przejdę więc odrazu do skreślenia w krótkich słowach jéj historycznego rozwoju.

Początki téj teorji, bardzo słabe jak są początki każdéj nauki, datują od 1750 roku, w którym matematyk francuzki Kramer (Cramer) ogłosił w Gienewie swe dzieło *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, gdzie (na stronicach 657 do 659) podaje wyraźnie sposób tworzenia, i robi zastosowania wyznaczników, przy czém jednak nie podaje żadnych dowodzeń. Po nim Bezu (Bézout), w *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1764. Avec les Mémoires de Mathematique et de Physique pour la même année*, wydanéj w Paryżu w roku 1767, umieścił pracę: *Recherches sur le degré des équations resultantes de l'évanouissements des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations*, (znajdującą się na stronicach 288 do 337). Bezu podaje (na stronicach 291 do 298) inne określenie i robi także zastosowania. Niemcy chcą widzieć początki wyznaczników w liście Lubienieckiego (Leibniz) (1), pisanym z Hanoweru dnia 28 kwietnia 1693 roku (2) do

(1) W dziele *Leibnizens geschichtliche Aufsatze und Gedichte aus den Handschriften der Kœniglichen Bibliotek zu Hannower. Herausgegeben von Georg Heinrich Pertz, Hannower*, 1847, (8*ka* 386 stronic), na stronicy 165 czytamy: *Leibniziorum sive Lubenieziorum nomen slavonicum, familia in Polonia.*

(2) *Leibnizens mathematische Schriften*, wydane przez C. I. Gerhardt w Berlinie 1850 r. tom 2 str. 238 do 241.

Lopitala (l'Hospital). Zdaje się jednakże, wnosząc z tego listu, że jeżeli Lubieniecki przewidywał swym genjuszem całą doniosłość wyznaczników, to w każdym razie myśli jego w tym względzie nie były ustalonemi i skreślił je bardzo niewyraźnie.

Właściwie więc teorja wyznaczników zawdzięcza swe istnienie matematykowi francuzkiemu Wandermądowi (Vandermonde) (1). Ten znakomity matematyk przedstawił 12 stycznia 1771 roku Akademji Nauk w Paryżu, pracę wielkiego na swój czas znaczenia, ogłoszoną w roku 1776 w *Histoire* i t. d. za rok 1772 w części drugiéj, pod tytułem :*Mémoire sur l'Elimination*, (zawartą na stronicach 516 do 532). Tu po raz pierwszy, (na stronicach 516 do 526) pomiędzy głębokiemi poglądami, napotykamy pierwsze znakowanie wyznaczników, odznaczające się zarazem łatwością w użyciu i oryginalnością; oraz badania tyczące się wyznaczników uważanych samych w sobie. Jest godném podziwienia, że praca ta pomimo wielkich swych zalet, została niejako w zapomnieniu, gdyż w 1772 roku Delaplas (de la Place) ogłosił w tymże samym tomie *Histoire* i t. d. (na stronicach 267 do 376) swą pracę *Recherches sur le calcul intégral et sur le systéme du monde*, gdzie (na stronicach 294 do 304) zajmuje się wyznacznikami. Praca ta niższa bez zaprzeczenia od pracy Wandermąda, zyskała jednakże większy rozgłos i najczęściéj bywa przytaczaną. Należy tu wspomnieć także pracę Delagranża (de la Grange) nad ostrosłupami umieszczoną w Pamiętnikach Akademji Berlińskiéj za rok 1773, gdzie podał wiele prawd tyczących się wyznaczników trzeciego stopnia, i nakoniec uwagi Bezu w tym przedmiocie umieszczone w jego dziele *Théorie générale des équations algébriques*, wydaném w Paryżu w 1779 roku.

Koszi (Cauchy) (2), który tyle przyczynił się do postępu nauk matematycznych w ogólności, stanowi także epokę w rozwoju teorji niniejszéj. Przedstawił on w dniu 30 listopada 1812 roku, Instytutowi Paryzkiemu, znakomitą pracę : *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions operées entre les variables qu'elles renferment*, ogłoszoną w siedemnastym zeszycie Dziennika Szkoły Politechnicznéj Paryzkiéj. W téj pracy Koszi nadał nazwisko i znakowanie, ogólnie dzisiaj przyjęte (po francuzku *déterminant*), ścisłe określenia i dowodzenia, a przedewszystkiém prawidło nader ważne mnożenia wyznaczników, które także podane zostało przez Bine'go (Binet) we współczesnéj pracy, lecz bez dowodzenia. Około 1841 roku Jakobi ogłosił swe piękne badania nad wyznacznikami, po czém nastąpił wkrótce cały szereg prac wielu znakomitych matematyków, z których przytoczymy następujące nazwiska najwybitniejsze, a mianowicie : z angielskich PP. Kele (Cayley), Silwester (Sylvester), Bul (Boole), Salmon (Salmon), Spotisuud (Spottiswoode), bracia Roberts (Roberts), i inni; z francuzkich : PP. Ermit (Hermite), Kąbeskiur (Combescure), Pęwę (Painvin), Bertran (Bertrand), Katalan (Catalan), i inni; z włoskich :

(1) Urodził się w Paryżu w 1735 r., umarł 1 Stycznia 1796, był uczniem Fątena (Fontaine).

(2) Urodził się w Paryżu 21 Sierpnia 1789 r., umarł w Sso (Sceaux) 22 Maja 1857 r.

PP. Brioski (Brioschi), Betti (Betti), Bellawitis (Bellavitis), Dżenokki (Genocchi), Faadibruno (Faa di Bruno), Trudi (Trudi) i inni; z niemieckich : PP. Klebsz (Clebsch), Aronhold (Aronhold), Kroneker (Kronecker), Kummer (Kummer), Hesse (Hesse) i inni. U nas w Polsce teorja ta mało jest uprawianą, spotykamy jednakże niektóre badania nad wyznacznikami, lub też ich zastosowania w ogłoszonych pracach PP. Babczyńskiego. Zajączkowskiego i Żmurki. Nazwisko *wyznacznik*, którego w ciągu tego przypisku będziemy używać, napotykamy w wykładach Szkoły Głównéj Warszawskiéj. Wyraz ten zdaje się łączyć w sobie zgodność z naturą naszego języka, i tłumaczyć dokładnie o ile można nazwisko nadane przez Koszi'ego, zyska więc prawdopodobnie ogólne uznanie.

Z pomiędzy dzieł wykładowych w obcych językach (ponieważ nie posiadamy dzieł w polskim) przytoczę dla ułatwienia początkującym następujące, jako najgodniejsze uwagi. Jako dzieło najprzystępniejsze : *Teoria de determinanti e loro applicazioni, di Nicola Trudi. Napoli, B. Pellerano*, 1862, które obok porządku i ścisłości, odznacza się piękném wykończeniem. Obok tego postawię jako dobry zbiór przykładów dzieło Spotisuuda *Elementary theorems relating to determinants. London* 1851. Jako dzieło najznakomitsze, dobrze przedstawiające doniosłość i użyteczność teorji wyznaczników, należy wspomnieć dzieło Brioskiego: *La teorica dei determinanti, Pavia*, 1854, przełożone na język francuzki pod tytułem : *Théorie des déterminants et leurs principales applications, par F. Brioschi, etc., traduit de l'italien par Edouard Combescure, etc., Paris, Mallet-Bachelier*, 1856. Nakoniec przytoczę przystępne i znakomite dzieło Salmona : *Lessons introductory to the modern higher algebra, by George Salmon etc., second edition, Dublin, Hodges, Smith and C°*, 1866. Dzieło to przełożono ze zmianami na język fracuzki pod tytułem : *Leçons d'algèbre supérieure, par G. Salmon, etc., traduit de l'anglais, par Bazin, etc., augmenté de notes, par Hermite, etc., Paris, Gauthier-Villars*, 1868.

Na tém zakończymy te krótkie wiadomości historyczno-bibljograficzne, i przejdziemy do skreślenia kilku uwag wstępnych, naśladowanych z Koszi'ego, które w dalszych dowodzeniach znajdą zastosowanie.

W każdém rozumowaniu oderwaném, czy to ustném czy pisaném, napotykamy pewną trudność w wypowiedzeniu jasném tegoż rozumowania, szczególniej gdy wyobrażenia do niego wchodzące są liczne. Każde więc ułatwienie wyjaśniające rozumowanie zasługuje na uwagę i dla tego to przywiązujemy tyle wagi do dobrego słownictwa lub znakowania, co zresztą ma jeszcze i inne zalety, nad któremi nie będziemy się tutaj zastanawiać. Jedném z tego rodzaju ułatwień jest oznaczanie wyobrażeń (ilości) wchodzących do rozumowań przez znaki umówione (głoski abecadła). Dla wskazania pewnych wspólności między temi wyobrażeniami, oznacza je się znakami podobnymi, mianowicie głoskami opatrzonemi pewną liczbą wskaźników. Znaki te nazywać będziemy *wyobraźnikami*, tak że wyobraźnik przedstawia się ogólnie w kształcie

$$a_{b_1, b_2, \ldots, b_r}$$

gdzie wskaźniki $b_1, b_2, \ldots, b_e$ są pospolicie liczbami całkowitemi dodatniemi, lecz które także mogą być innemi wyobrażeniami, jak naprzykład w algiebrze są niekiedy pierwiastkami pewnych równań lub kongruencyj, a więc ilościami złożonemi (urojonemi) zwyczajnemi, lub temi które pierwszy używał Galoa (Galois). Wskaźniki więc zmieniają się na inne, lub zmieniają tylko swe miejsce, stosownie jak przechodzimy od pewnego wyobrażenia do innego. Prawa tych zmian są gałęzią ważnéj bardzo teorji *porządku* czyli *podstawień*, od któréj zdaje się zależeć przeważnie dzisiejszy postęp matematyki, a która w teorji wyznaczników daje dowodzenia najkrótsze, najściślejsze i najnaturalniejsze.

Jeżeli pewne wyobrażenia $a_1, a_2, \ldots, a_l$, zastępujemy w rozumowaniu, odpowiednio przez inne wyobrażeuia $b_1, b_2, \ldots, b_l$; działanie takie nazywa się podstawieniem i oznacza się przez

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_l \\ b_1, b_2, \ldots, b_l \end{pmatrix}$$

gdzie wyobrażenia dolnego wiersza zastępować mają odpowiednio wyobrażenia wiersza górnego. Ponieważ obojętną jest rzeczą w jakim porządku podstawienia wskazane powyższém wyrażeniem będziemy wykonywać, byle dane wyobrażenie b_i zastępowało zawsze to samo wyobrażenie a_i, przeto wyobraźnik powyższy przedstawienia można bez zmiany znaczenia wypisać tylu sposobami, ile jest przemian z l przedmiotów, tojest $P_l = 1, 2 \ldots l$ sposobami.

Jeżeli wyobrażenia b, są temi samemi co wyobrażenia a, tylko ustawionemi w innym porządku, wyrażamy to równaniem

$$b_k = a_i$$

W tém założeniu odróżnimy z pomiędzy P_l powyższych wyobraźników podstawienia danego pewne wyobraźniki, które określimy w następujący sposób. Przypuśćmy najogólniéj że jest

$$b_1 = a_2, b_2 = a_3, \ldots, b_{l_1} = a_1;$$

$$b_{l_1+1} = a_{l_1+2}, b_{l_1+2} = a_{l_1+3}, \ldots, b_{l_1+l_2} = a_{l_1+1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{l-l_m+1} = a_{l-l_m+2}, b_{l-l_m+2} = a_{l-l_m+3}, \ldots, b_l = a_{l-l_m+1}$$

przy czém przypuszczamy że jest:

$$l = l_1 + l_2 + \ldots + l_m$$

Ustawmy tak wyobraźniki składające podstawienie, aby wyobraźnik dany górnego wiersza był równoznaczny z dolnym pary poprzedzającéj, co daje (zastępując w dolnym wierszu b przez równoznaczne a) podstawieniu kształt następujący:

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_{l_1} \\ a_2, a_3, \dots, a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{l_1+1}, a_{l_1+2}, \dots, a_{l_1+l_2} \\ a_{l_1+2}, a_{l_1+3}, \dots, a_{l_1+1} \end{pmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{pmatrix} a_{l-l_m+1}, a_{l-l_m+2}, \dots, a_l \\ a_{l-l_m+2}, a_{l-l_m+3}, \dots, a_{l-l_m+1} \end{pmatrix}$$

których może być $l_1 l_2 \dots l_n$, bo można zacząć każde z częściowych podstawień, od któréjkolwiek ze składających go głosek. Ztąd widzimy że każde podstawienie daje się wykonać przez m prostszych podstawień zwanych *kołowemi*. Nadając podstawieniu kształt powyższy znajdujemy już przeto liczbę składających go podstawień kołowych Podstawienie to można krócéj wyrazić przez:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{l_1})\,(a_{l_1+1}, a_{l_1+2}, \dots, a_{l_1+l_2}) \dots (a_{l-l_m+1}, a_{l-l_m+2}, \dots, a_l)$$

albo też lepiéj i jaśniéj używając dwóch wskaźników przez:

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,l_1})\,(a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,l_2}) \dots (a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,l_m}) .$$

gdzie pierwsze wskaźniki oznaczają rzęd podstawienia kołowego, zaś drugie, rzęd wyobraźnika w podstawieniu kołowém. Każde podstawienie, a więc w szczególności i kołowe, można wykonać za pomocą *przestawień*, to jest podstawień złożonych z dwóch tylko wyobrażeń. Aby wykonać podstawienie kołowe złożone z n wyobrażeń, należy przestawić kolejno naprzód pierwsze wyobrażenie z drugiém, późniéj z trzeciém, i tak daléj aż nakoniec z ostatniém czyli z $n$tém, to jest trzeba wykonać $n-1$ przestawień, i widocznie w ten sposób robi się najmniéj przestawień, bo każde przestawienie porusza dwa tylko wyobrażenia, może więc przyprowadzić jedno wyobrażenie najwięciéj na miejsce właściwe, wyjąwszy gdy podstawienie kołowe jest złożone z dwóch wyobrażeń. Podstawienie więc najogólniejsze, daje się wykonać przez liczbę

$$(l_1-1)+(l_2-1)+\dots+(l_m-1)=l-m$$

przestawień, to jest różnicę liczb, wyobrażeń podstawienia danego i składających go podstawień kołowych. Liczba ta jest najmniejszą, bo jak już wyżéj powiedziano przestawienie poruszając tylko dwa wyobrażenia i przyprowadzając jedno z nich na miejsce właściwe, nie może zrobić więcéj, chyba że podstawienie kołowe odpowiednie złożone jest także z dwóch wyobrażeń.

Ponieważ każde podstawienie można wykonać przez pewną liczbę przestawień, więc robiąc przestawienia stosownie po jedném, utworzymy z danego układu n wyobrażeń wszystkie $P_l = 1.2.3.4\ldots l$ układów możebnych, których odpowiednie liczby przestawień będą kolejno nieparzyste i parzyste. A że liczba wszystkich układów jest parzysta, więc układów i podstawień każdego rodzaju, to jest mających po parzystéj lub nieparzystéj liczbie przestawień jest połowa.

Jeżeli wykonamy przestawienie pewnych dwóch wyobrażeń, to układy jednego rodzaju zamienią się na układy drugiego i odwrotnie. W każdym bowiem rodzaju liczba przestawień każdego układu przejdzie z parzystéj liczby na nieparzystą i odwrotnie, nadto liczba układów pozostanie ta sama, i w jednym rodzaju nie może być dwóch układów jednakowych, bo wykonawszy przestawienie odwrotne, układy byłyby jednakowe co przeciwne założeniu.

Wykonawszy więc pewną liczbę przestawień na pewnym układzie tenże przechodzi do drugiego rodzaju, lub powraca do pierwszego, podług tego jak liczba przestawień wykonanych jest nieparzysta lub parzysta. Ztąd wnieść należy, że jeżeli wykonywając przestawienia w danym układzie wyobrażeń, przyjdziemy dwoma drogami do jednego wypadku, to liczby przestawień wykonanych w dwóch razach, różnią się o liczbę parzystą.

Podstawienie odwrotne względem danego podstawienia, daje się wykonać za pomocą téj saméj liczby przestawień, co podstawienie dane.

Liczbę przestawień podstawienia danego będziemy oznaczac, poprzedzając wyobraźnik tegoż podstawienia głoską L, mianowicie:

$$\mathrm{L}\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_l \\ b_1, b_2, \ldots, b_l \end{pmatrix}$$

gdy zaś górny układ będzie $1, 2, \ldots, n$ to wtedy dla uproścenia napiszemy tylko

$$\mathrm{L}\,(b_1, b_2, \ldots, b_l)$$

Na tém zakończymy wiadomości z teorji podstawień, i przejdziemy do przedstawienia krótkich wiadomości z teorji wyznaczników.

. **Określenie wyznacznika.** Jeżeli weźmiemy pod uwagę pewną liczbę wyobrażeń, które odtąd będą ilościami algiebraicznemi, i takowe dzielimy na działy, korzystném jest wtedy wypisywać wyobrażenia działu jednego w jednym wierszu poziomym, a za wyobraźniki brać głoskę opatrzoną dwoma wskaźnikami, z których pierwszy oznacza rzęd działu, a drugi rzęd wyobrażenia w dziale. I tak jeżeli jest m działów, zawierających odpowiednio po $n_1, n_2, \ldots, n_m$ wyobrażeń, piszemy:

$$\begin{array}{l} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n_1} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,n_m} \end{array}$$

Jeżeli n są sobie równe i równe m, i jeżeli utworzymy ogół (summę) wszystkich iloczynów różnych, jakie z iloczynu $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ zwanego *głównym*, można otrzymać przez wszystkie podstawienia możebne w liczbie $P_n = 1 . 2 \ldots n$ drugich wskaźników, i nadamy im znak dodatni lub ujemny, podług tego jak układ odpowiedni drugich wskaźników powstaje przez liczbę parzystą lub nieparzystą przestawień z układu pierwotnego $1, 2, \ldots, n$, tak otrzymany wypadek nazwiemy *wyznacznikiem* $n$tego stopnia.

Koszi wyraża go w ten sposób:

$$\left| \begin{array}{l} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{array} \right|$$

co stanowi znakowanie najlepsze i najwyrazistsze.

Wandermąd oznacza iłości przez dwie głoski nad sobą położone naprzykład $\overset{\alpha}{a}$, i oznacza wyznacznik przez

$$\frac{\alpha}{a} \Big| \frac{\beta}{b} \Big| \frac{\cdots}{\cdots} \Big| \frac{\gamma}{c} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{1} \Big| \frac{2}{2} \Big| \frac{\cdots}{\cdots} \Big| \frac{n}{n}$$

gdzie wskaźniki górne oznaczają wiersze poziome, zaś wskaźniki dolne wiersze pionowe. To znakowanie jest użytecznem często w poszukiwaniach teorji, z powodu swéj zwięzłości. Bine używa wyrażenia

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots a_{1,n})$$

które uwydatnia same wiersze pionowe; gdy zaś chodzi o wiersze poziome, możnaby pisać:

$$(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$$

Przytoczymy tu jeszcze znakowanie *cieniowe* Silwestra (*umbral no-*

tation), w którém ilość jest wyobrażona przez zestawienie dwóch głosek naprzykład $a\alpha$ i wtedy wyznacznik wyraża się przez

$$\begin{vmatrix} a\alpha, b\alpha, \ldots, c\alpha \\ a\beta, b\beta, \ldots, c\beta \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a\gamma, b\gamma, \ldots, c\gamma \end{vmatrix} = \begin{matrix} a, b, \ldots, c \\ \alpha, \beta, \ldots, \gamma \end{matrix}$$

Czasami będzie korzystném użyć jednego z następujących wyrażeń:

$$\mathrm{W}_n\,(a_{i,k}) \quad \text{lub} \quad \Sigma\,(-1)^{\,\mathrm{L}(k_1,\,k_2,\ldots,k_n)}\, a_{1,k_1}, a_{2,k_2}, \ldots, a_{n,k_n}$$

gdzie znak summowy Σ odnosi się do wszystkich $\mathrm{P}_n = 1.\ 2 \ldots\ n$ przemian drugich wskaźników.

Rozwinięcie wyznacznika z powodu wielkiej liczby wyrazów jest działaniem długiem, w którem błąd łatwo wcisnąć się może, już to przez opuszczenie lub powtórzenie wyrazu, już też przez nadanie mu niewłaściwego znaku. Ze sposobów znanych na wykonanie tego rozwinięcia, najprostszy a zatém najlepszy, jest sposób podany przez pana Tytusa Babczyńskiego (w r. 1868, w zeszycie dziewiątym Wykazu Szkoły Głównéj Warszawskiéj), gdyż pozwala wypisać odrazu rozwinięcie żądane. Oto sposób postępowania:

Wykonywamy naprzód podstawienie kołowe na wszystkich drugich wskaźnikach, $n-1$ razy, co daje n wyrazów ze znakami dodatnemi lub naprzemian dodatnemi i ujemnemi podług tego jak n jest nieparzyste lub parzyste, gdyż liczba przestawień decydująca o znaku jest $n-1$.

Z każdego z powyższych n wyrazów, nie ruszając jednego z pomiędzy drugich wskaźników, naprzykład pierwszego, utworzymy za pomocą podstawień kołowych, wykonanych na pozostałych $n-1$ wskaźnikach wyrazy, których z poprzedzającemi jest razem $n(n-1)$. Ich znaki będą też same co wyrazów poprzednich z których powstały, lub naprzemian, podług tego jak $n-1$ jest nieparzyste lub parzyste, gdyż układy drugich wskaźników będą podług tego utworzone z układów poprzedzających przez parzystą lub nieparzystą liczbę $n-2$ przestawień.

Postępując tak dalej, otrzymamy po $n-1$ działaniach, wszystkie $1.\ 2 \ldots n$ wyrazów wyznacznika z właściwemi znakami. Bowiem widzimy że nie ma dwóch wyrazów jednakowych, gdyż dwa wyrazy którekolwiek, powstały albo z jednego wyrazu poprzedzającego, albo z dwóch różnych, a więc różnią się albo podstawieniem kołowém, albo też częścią nieruchomą. Wyrazy więc są różne i w liczbie należytéj, nie ma więc powtórzonych, ani też nie brakuje żadnego i mają znaki stosowne. W ten sposób otrzymujemy:

$$(a_{1,1}) = a_{1,1}$$

$$(a_{1,1}, a_{1,2}) = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}$$

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}) = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} +$$

$$a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}$$

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}) =$$

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} - a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,4}\, a_{4,1} + a_{1,3}\, a_{2,4}\, a_{3,1}\, a_{4,2} - a_{1,4}\, a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{4,3}$$

$$+ a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,4}\, a_{4,2} - a_{1,2}\, a_{2,4}\, a_{3,1}\, a_{4,3} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{4,4} - a_{1,4}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,1}$$

$$+ a_{1,1}\, a_{2,4}\, a_{3,2}\, a_{4,3} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3}\, a_{4,4} + a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,4}\, a_{4,1} - a_{1,4}\, a_{2,3}\, a_{3,1}\, a_{42}$$

$$- a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,4}\, a_{4,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1}\, a_{4,4} - a_{1,3}\, a_{2,4}\, a_{3,2}\, a_{4,1} + a_{1,4}\, a_{2,1}\, a_{3,3}\, a_{4,2}$$

$$- a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2}\, a_{4,4} + a_{1,2}\, a_{2,4}\, a_{3,3}\, a_{4,1} - a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,4}\, a_{4,2} + a_{1,4}\, a_{2,2}\, a_{3,1}\, a_{4,3}$$

$$- a_{1,1}\, a_{2,4}\, a_{3,3}\, a_{4,2} + a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,4}\, a_{4,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}\, a_{4,4} + a_{1,4}\, a_{2,3}\, a_{3,2}\, a_{4,1}$$

i tak daléj.

Przekształcenia wyznacznika. Użyteczność wyznaczników zdaje się polegać głównie na łatwości względnéj i wielości ich przekształceń, pomimo wielkiéj liczby składających je wyrazów. Własność ta w połączeniu ze zwięzłością ich wyobraźników, pozwala wykonywać działania, które inaczéj z powodu ilości wielkiéj wyrazow byłyby praktycznie niewykonalne, lub przynajmniéj bardzo długie. Podajemy tu kilka takowych przekształceń znalezionych po większéj części przez Wandermąda, w wyżéj wspomnianéj pracy.

Jeżeli zamiast postępować podług określenia wyznacznika, przemieniamy pierwsze wskaźniki zamiast drugich, a zostawiamy nieruchomemi drugie zamiast pierwszych, zachowując przytém prawidło znaków, to jest nadając wyrazom znaki jednakowe lub różne z wyrazem głównym, podług tego jak układ odpowiedni wskaźników pierwszych jest jednego lub różnego rodzaju z układem pierwotnym $1, 2, \ldots, n$; dowiedziemy że rozwinięcie tak otrzymane nie różni się od rozwinięcia wyznacznika, otrzymanego podług określenia i mającego $a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ za wyraz główny.

Uważmy bowiem rozwinięcie otrzymane w ten ostatni sposób, i przemieńmy porządek czynników w każdym wyrazie rozwinięcia (co nie zmieni jego ważności) tak, ażeby wskaźniki pierwsze powróciły do pierwotnego porządku $1, 2, \ldots, n$. Przezto liczba wyrazów pozostanie tą samą jaką była, to jest $1 . 2 \ldots n$, i nie będzie dwóch wyrazów jednakowych, bo działanie nie zmieniło ich ważności, a przed tém nim zostało wykonane, nie było dwóch wyrazów jednakowych podług założenia. Wynik tego działania jest więc ten sam co gdybyśmy zostawili pierwsze wskaźniki nieruchome, a tylko przemieniali drugie, gdyż liczba wyrazów będąc $1 . 2 \ldots n$, a zatem należytą i wyrazy te będąc różnemi, nie brakuje zatém żadnego i nie ma powtórzonych. Pozostaje więc przekonać się, że i znaki wyrazów są takie same jakieby były w skutek podstawień wskaźników drugich. Uważmy zatem którykolwiek wyraz rozwinięcia przed i po przemienieniu jego czynników, i przypuśćmy że w obu razach wyraz ten przedstawia się odpowiednio pod dwoma kształtami :

$$a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n} \qquad a_{1,k_1}\, a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n}$$

Znak tego wyrazu zależy od liczby przestawień, podstawienia

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ i_1, i_2, \ldots, i_n \end{pmatrix}$$

wykonanego na pierwszych wskaźnikach. Przemieniając zaś porządek czynników, wykonywamy właściwie podstawienie odwrotne względem poprzedzającego, a zatém mające tęż samę liczbę przestawień co poprzedni

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_n \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

tak na pierwszych jak i na drugich wskaźnikach. Wnosimy ztąd o równoznaczności podstawień

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ k_1, k_2, \ldots, k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_n \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

a więc i o równości liczb odpowiednich przestawień. Wyraz więc uważany ma znak taki, jakiby miał także wychodząc z układu drugich wskaźników. To samo można powiedzieć o pozostałych wyrazach, więc rozwinięcie jest takie, jakiebyśmy otrzymali postępując podług określenia wyznacznika, bo się składa z takiéj saméj liczby wyrazów takich samych, jest mu więc równe i co do ważności. Ponieważ zaś wskaźniki pierwsze i drugie odpowiadają wierszom poziomym i pionowym, więc :

Twierdzenie 1. *Wyznacznik nie zmienia ważności, gdy jego wiersze poziome i pionowe, przemieniamy odpowiednio na pionowe i* *poziome*, czyli (Wandermąd, str. 518):

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1} \\ a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{n,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Jeżeli w rozwinięciu wyznacznika, przestawimy dwa wskaźniki naprzykład drugie (bo to samo stosuje się na mocy twierdzenia poprzedzającego i do pierwszych), to rozwinięcie tak otrzymane nie różni się jak tylko znakiem od rozwinięcia wyznacznika, z którego powstało. Uważając bowiem to rozwinięcie, pokazuje się, że liczba wyrazów się nie zmieniła, i że nie ma dwóch wyrazów równych, bo wykonywając przestawienie odwrotne, takiemi byłyby i przed przestawieniem, co nie ma miejsca z założenia. Wyrazy więc są w liczbie 1.2 ... n jak poprzednio przed przestawieniem, są różne a więc nie ma powtórzonych; są to zatém co się tyczy ważności bezwzględnéj wyrazy rozwinięcia wyznacznika, i nie brakuje żadnego wyrazu, ani też nie ma powtórzonego.

Znaki wyrazów są przeciwne, bowiem przestawienie dwóch wskaźników drugich, sprawia, że wyrazy które w rozwinięciu wyznacznika mały znak dodatni, zamieniają się (oprócz znaku) na wyrazy mające w tymże rozwinięciu znak ujemny i odwrotnie, a to dla tego że układy odpowiednie wskaźników drugich, stanowiące o znakach wyrazów przechodzą z działu pierwszego o parzystéj liczbie przestawień, do działu drugiego o nieparzystéj liczbie przestawień W uważanem więc rozwinięciu, wyrazy mają znaki różne od znaków wyrazów rozwinięcia wyznacznika, czyli ważność uważanego rozwinięcia jest znaku różnego od znaku rozwinięcia wyznacznika. Zważywszy więc, że wskaźniki drugie odpowiadają wierszom równoległym pionowym, i że się to stosuje ei do wierszy poziomych, więc:

Twierdzenie II. *Wyznacznik zmienia znak, jeżeli przestawiamy w nim dwa jego wiersze równoległe*, czyli (Wandermąd, str.518):

$$(a_{1,1}, \dots, a_{1,r-1}, a_{1,r}, a_{1,r+1}, \dots, a_{1,s-1}, a_{1,s}, a_{1,s+1}, \dots, a_{1,n}) =$$
$$= -(a_{1,1}, \dots, a_{1,r-1}, a_{1,s}, a_{1,r+1}, \dots, a_{1,s-1}, a_{1,r}, a_{1,s+1}, \dots, a_{1,n}),$$
$$(a_{1,1}, \dots, a_{r-1,1}\, a_{r,1}, a_{r+1,1}, \dots, a_{s-1,1}, a_{s,1}, a_{s+1,1} \dots, a_{n,1}) =$$
$$= -(a_{1,1}, \dots, a_{r-1,1}, a_{s,1}, a_{r+1,1}, \dots, a_{s-1,1}, a_{r,1}, a_{s+1,1}, \dots, a_{n,1}).$$

Możemy ztąd wnieść (ponieważ każde podstawienie daje się wykonać za pomocą pewnéj liczby przestawień, których najmniejszą liczbę umiemy oznaczyć), że każde podstawienie wykonane na wierszach równoległych wyznacznika, nie zmienia ważności bezwzględnéj wyznacznika, i znak jest jednakowy lub różny od wyznacznika pierwotnego, podług tego jak podstawienie jest złożone z parzystéj, lub nieparzystéj liczby przestawień. Jest więc wogólności:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{L(i_1, i_2, \dots i_n)\, L(k_1, k_2, \dots, k_n)} \begin{vmatrix} a_{i_1,k_1}, a_{i_1,k_2}, \dots, a_{i_1,k_n} \\ a_{i_2,k_1}, a_{i_2,k_2}, \dots, a_{i_2,k_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i_n,k_1}, a_{i_n,k_2}, \dots, a_{i_n,k_n} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik, w którym dwa wiersze równoległe są złożone odpowiednio z wyobraźników ilości równych, po przestawieniu tychże wierszy nie zmienia swego kształtu, a więc i ważności, którą oznaczemy przez W_n. Jest więc przed i po przestawieniu wierszy:

$$W_n = W_n,$$

lecz podług powyższego twierdzenia, wyznacznik zmienia znak, więc,

$$W_n = -W_n,$$

dodawszy więc te dwa ostatnie równania, wypada:

$$W_n = 0;$$

czyli:

TWIERDZENIE III. *Wyznacznik jest zerem, gdy wiersze równoległe są złożone odpowiednio z ilości równych*, to jest

$$0 = (a_{1,1}, \dots, a_{1,r-1}, a_{1,r}, a_{1,r+1}, \dots, a_{1,s-1}, a_{1,r}, a_{1,s+1}, \dots, a_{1,n})$$
$$0 = (a_{1,1}, \dots, a_{r-1,1}, a_{r,1}, a_{r+1,1}, \dots, a_{s-1,1}, a_{r,1}, a_{s+1,1}, \dots, a_{n,1})$$

(Wandermąd str. 522).

Przekształcenie następujące jest ostatniém, jakie tu podamy z pomiędzy odkrytych przez Wandermąda. Jest ono jednem z najważniejszych, daje bowiem wprost mnożenie wyznaczników, chociaż nie w najprostszym kształcie. Daje ono także rozwinięcie wyznacznika.

Podzielmy wiersze poziome wyznacznika *n*tego stopnia W_n na *m* działów, zawierających odpowiednio po $n_1, n_2, \ldots, n_m$, wierszy kolejno po sobie następujących, zaczynając od pierwszego, tak że jest:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

Utwórzmy z n_1 wierszy pionowych pierwszego działu, nie zmieniając porządku w jakim je napotykamy, idąc w kierunku od pierwszego do ostatniego, wyznacznik W_{n_1} stopnia n_1.

Opuszczając przedłużenia wierszy pionowych, poprzednio użytych, utwórzmy z n_2 pozostałych $n-n_1$ wierszy pionowych drugiego działu, zmieniając zawsze porządku w jakim je napotykamy, idąc od pierwszego do ostatniego, wyznacznik W_{n_2} stopnia n_2.

Postępując tak daléj przyjdziemy, za $m$tym razem, $m$tego działu, w którym opuszczając przedłużenia wierszy pionowych poprzednio użytych, pozostanie m_n wierszy pionowych, które bir ąc w porządku jak wyżéj powiedziano, utworzymy wyznacznik W_{n_m} stopnia n_m.

Jeżeli oznaczemy liczbę przemian z p przedmiotów przez P_p, a liczbę zmian, czyli połączeń różnych (kombinacyj) z p przedmiotów branych po r przez $Z_{p,r}$, to jest jak wiadomo

$$P_p = 1.2.3.4 \ldots p, \qquad Z_{p,r} = \frac{P_p}{P_r P_{p-r}}$$

Wyznaczniki $W_{n_1}, W_{n_2}, \ldots, W_{n_{m-1}}, W_{n_m}$, można utworzyć odpowiednio $Z_{n,n_1}, Z_{n-n_1,n_2}, \ldots, Z_{n-n_1-\ldots-n_{m-2},n_{m-1}}, 1$, sposobami. Dowiedziemy teraz że jest:

Twierdzenie iv. *Wyznacznik* W_n *jest równy summie wszystkich możebnych iloczynów* $W_{n_1} W_{n_2} \ldots W_{n_m}$ *w liczbie*

$$Z_{n,n_1} Z_{n-n_1,n_2} \ldots Z_{n-n_1-\ldots-n_{m-2},n_{m-1}} = \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_m}}$$

z których każdy jest wzięty ze znakiem więcéj lub mniéj, podług tego jak odpowiedni układ wskaźników drugich, biorąc je kolejno, jak następują po sobie w tymże iloczynie, powstaje z układu 1, 2, ..., n *przez parzystą lub nieparzystą liczbę przestawień.* (Wandermąd, str. 524).

Aby tego dowieść, uważmy że każdy z iloczynów $W_{n_1} W_{n_2} \ldots W_{n_m}$ w liczbie $\frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_m}}$, zawiera $P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_m}$ wyrazów różnych wyznacznika W_n. Wyrazy więc otrzymują się z wyrazu głównego, zostawiając pierwsze wskaźniki nieruchome, a dzieląc drugie wskaźniki na m działów, zawierających odpowiednio po $n_1, n_2, \ldots, n_m$ wskaźników, biorąc je w porządku jak idą od 1 do n we wszystkie możebne sposoby, w liczbie $Z_{n, n_1} Z_{n-n_1, n_2} \dots Z_{n-n_1-\dots-n_{m-2}, n_{m-1}}$ i przestawiając każdy z działów wszystkiemi sposobami $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_m}$ co daje liczbę wyrazów należytą :

$$\frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \dots P_{n_m}} P_{n_1} P_{n_2} \dots P_{n_m} = P_n$$

Wyrazy tak otrzymane są różne. bowie m dwa wyrazy którekolwiek, pochodząc z jednego iloczynu $W_{n_1} W_{n_2} \dots W_{n_m}$. lub też z dwóch podobnych iloczynów różnych; różnią się przemianą przynajmniéj jednego działu drugich wskaźników, albo też różnią się przynajmniéj dwoma działami, rozumiejąc w tym drugim razie, przez działy różne gdyby liczby wskaźników uważanych działów były równe, i różnicę w porządku tychże działów. Wyrazy przytém są w liczbie P_n, takiéj właśnie, jaką rozwinięcie wyznacznika $n$tego stopnia zawiera podług określenia, zatém nie ma wyrazów powtórzonych, i nie brakuje żadnego. Nakoniec znaki wyrazów są takiemi, jakie określenie wyznacznika wymaga, gdyż naprzód iloczyny wyrazów głównych każdego z iloczynów $W_{n_1} W_{n_2} \dots W_{n_m}$ mają z założenia znaki należyte, a zaś pozostałe wyrazy rozwinięcia będące iloczynami innych wyrazów wyrażenia $W_{n1} W_{n_2} \dots W_{n_m}$ posiadają również znaki stosowne, gdyż ich znaki są też same lub różne od iloczynów odpowiednich wyrazów głównych, podług tego jak liczba czynników powstających z odpowiednich wyrazów głównych przez nieparzystą liczbę przestawień jest parzysta lub nie, czyli (ponieważ pozostałe czynniki powstają przez liczby parzyste przestawień) podług tego, jak ogólna liczba przestawień całego iloczynu jest parzystą lub nieparzystą, co właśnie zgadza się z określeniem wyznacznika. Rozwinienie więc składa sięz wyrazów i w liczbie wymaganéj przez określenie, jest więc równe wyznacznikowi W_n, jak zamierzyliśmy dowieść.

Twierdzenie powyższe podane przez Wandermąda, można wyrazić wzorem,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma (-1)^{L(k_1, \dots, k_n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,k_1}, \dots, a_{1,k_{n_1}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,\;\cdot \\ a_{n_1,k_1}, \dots, a_{n_1,k_{n_1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n_1+1, k_{n_1}+1}, \dots, a_{n_1+1, k_{n_1+n_2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n_1+n_2, k_{n_1}+1} \dots, a_{n_1+n_2, k_{n_1+n_2}} \end{vmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{vmatrix} a_{n-n_m+1, k_{n-n_m+1}}, \dots, a_{n-n_m+1, k_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n, k_{n-n_m+1}}, \dots, a_{n, k_n} \end{vmatrix}$$

gdzie znak summowy Σ odnosi do wszystkich układów $k_1, k_2, \ldots, k_n$ w liczbie $\frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_m}}$ utworzonych w sposób wyżéj opisany.

Dla objaśnienia, podajemy przekształcenie wyznacznika czwartego stopnia, dzieląc jego wiersze poziome na dwa działy, po dwa wiersze. Jest więc wtedy wyrazów $\frac{1.2.3.4}{1.2\times1.2}=6$, a podstawienia drugich wskaźników są:

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,2,3,4\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4), \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,3,2,4\end{pmatrix}=(1)(2,3)(4),$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,2,3\end{pmatrix}=(1)(2,4,3), \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,3,1,4\end{pmatrix}=(1,2,3,)(4),$$

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,1,3\end{pmatrix}=(1,2,4,3), \quad \begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix}=(1,3)(2,4),$$

ztąd liczby odpowiednie przestawień:

$$4-4=0,\ 4-3=1,\ 4-2=2,\ 4-2=2,\ 4-1=3,\ 4-2=2,$$

zatém przekształcenie żądane jest:

$$\begin{vmatrix}a_{1,1}, \ldots, a_{1,4}\\ \ldots\ldots\\ a_{4,1}, \ldots, a_{4,4}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{1,1}, a_{1,2}\\a_{2,1}, a_{2,2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,3}, a_{3,4}\\a_{4,3}, a_{4,4}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a_{1,1}, a_{1,3}\\a_{2,1}, a_{2,3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,2}, a_{3,4}\\a_{4,2}, a_{4,4}\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}a_{1,1}, a_{1,4}\\a_{2,1}, a_{2,4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,2}, a_{3,3}\\a_{4,2}, a_{4,3}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{1,2}, a_{1,3}\\a_{2,2}, a_{2,3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}, a_{3,4}\\a_{4,1}, a_{4,4}\end{vmatrix}$$
$$-\begin{vmatrix}a_{1,2}, a_{1,4}\\a_{2,2}, a_{2,4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}, a_{3,3}\\a_{4,1}, a_{4,3}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{1,3}, a_{1,4}\\a_{2,3}, a_{2,4}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,1}, a_{3,2}\\a_{4,1}, a_{4,2}\end{vmatrix}$$

Możnaby podług powyższego twierdzenia, ten wyznacznik napisać pod wielu jeszcze kształtami gdyż cztery wiersze można podzielić na działy i innemi sposobami, ponieważ

$$4=1+3=2+2=3+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=1+1+1+1$$

a że wiersze równoległe można przestawić $1.2.3.4=24$ razy, i że nadto, co się stosuje do wierszy pionowych to się stosuje i do poziomych, więc razem wszystkich przekształceń jest $(7 \times 24)^2 = (168)^2 = 28244$.

Godnym uwagi jest przypadek dwóch działów, z których pierwszy zawiera jeden wiersz, a drugi pozostałe $n-1$ wierszy. Wtedy liczba wyrazów rozwinięcia jest $\frac{P_n}{P_1 P_{n-1}} = n$, znaki zaś wyrazów są naprzemian $+$ i $-$, albowiem układ drugich wskaźników wyrazu rzędu $i$tego jest

$$i, 1, 2, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots, n$$

a podstawienie odpowiednie

$$(1, i, i-1, \dots, 3, 2)(i+1)(i+2)\dots(n)$$

zaś odpowiednia liczba przestawień

$$n-(n-i+1) = i-1$$

znaki więc są naprzemian $+$ i $-$. Jest więc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i,1}, \dots, a_{i,n} \\ a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i-1,1}, \dots, a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, \dots, a_{i+1,n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, \dots, a_{1,n} \\ . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{i-1,1}, \dots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k-1}, \dots, a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, \dots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1}, \dots, a_{i+1,n} \\ . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n,1}, \dots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} a_{i,k}$$

Ztąd wnieść można że wyznacznik jest zerem, gdy jeden z jego wierszy poziomych lub pionowych jest złożony z zer wyłącznie. Przypadek, gdy niektóre z wyobraźników innych wierszy przedstawiają ilości nieskończenie wielkie, może jednakże ulegać wyjątkom.

Wracając do ogólnego twierdzenia Wandermądowego, okażemy że ono daje mnożenie wyznaczników, chociaż w kształcie nie tak prostym jak je podał Koszi. W tym celu zastosujemy twierdzenie do wyznacznika następującego:

$$\left|\begin{array}{llllllll}
a_{1,1} & ,\ldots, a_{1,n_1} & ,0 & ,\ldots,0 & ,\ldots,0 & & ,\ldots,0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n_1,1} & ,\ldots, a_{n_1,n_1} & ,0 & ,\ldots,0 & ,\ldots,0 & & ,\ldots,0 & \\
a_{n_1+1,1} & ,\ldots, a_{n_1+1,n_1} & , a_{n_1+1,n_1+1} & ,\ldots, a_{n_1+1,n_1+n_2} & ,\ldots,0 & & ,\ldots,0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n_1+n_2,1} & ,\ldots, a_{n_1+n_2,n_1} & , a_{n_1+n_2,n_1+1} & ,\ldots, a_{n_1+n_2,n_1+n_2} & ,\ldots,0 & & ,\ldots,0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n-n_m+1,1} & ,\ldots, a_{n-n_m+1,n_1} & , a_{n-n_m+1,n_1+1} & ,\ldots, a_{n-n_m+1,n_1+n_2} & ,\ldots, a_{n-n_m+1,n-n_m+1} & & ,\ldots, a_{n-n_m+1,n} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1} & ,\ldots, a_{n,n_1} & , a_{n,n_1+1} & ,\ldots, a_{n,n_1+n_2} & ,\ldots, a_{n,n-n_m+1} & & ,\ldots, a_{n,n} &
\end{array}\right|$$

dzieląc wiersze poziome na m działów zawierających odpowiednio po $n_1, n_2, \ldots, n_m$ wierszy. Wtedy ze wszystkich wyrazów rozwinięcia pozostanie tylko jeden

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n_1,1}, \dots, a_{n_1,n_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n_1+1,n_1+1}, \dots, a_{n_1+1,n_1+n_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n_1+n_2,n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2,n_1+n_2} \end{vmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{vmatrix} a_{n-n_m+1,n-n_m+1}, \dots, a_{n-n_m+1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,n-n_m+1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix},$$

pozostałe zaś są zerami, gdyż przynajmniéj jeden z czynników jest wyznacznikiem, mającym przynajmniéj jeden wiersz złożony z zer, a zatém będący zerem. Odwrotnie więc iloczyn m wyznaczników stopni $n_1, n_2, \dots, n_m$ wyraża się przez jeden wyznacznik stopnia $n_1 + n_2 + \dots + n_m$. To nastręcza wiele nowych przekształceń, gdyż jeżeli w uważanym dopiero iloczynie m wyznaczników, $m - 1$ z nichsą równe jednościom, to wtedy wyznacznik pozostały, wyrażony jestw kształcie wyznacznika stopnia znacznie wyższego.

Na tém zakończymy wnioski z twierdzenia Wandermądowego, lecz zanim jeszcze podamy mnożenie wyznaczników w kształcie jakie mu nadał Koszi, dowiedziemy dwóch szczególnych przekształceń wyznacznika.

Przypuśćmy że wyznacznik $n$tego stopnia, składa się z wyobraźników

$$A_{i,k} = a_{i,k}\, b_i\, c_k$$

to ponieważ każdy wyraz rozwinięcia wyznacznika, posiada n wskaźników różnych, tak pierwszych jako też i drugich, zatém każdy wyraz, oprócz znaku, daje się przedstawić pod kształtem następującym

$$A_{1,k_1} A_{2,k_2} \dots A_{n,k_n} = a_{1,k_1} a_{2,k_2} \dots a_{n,k_n}\; b_1 b_2 \dots b_n\; c_1 c_2 \dots c_n$$

Wszystkie więc wyrazy mają czynnik wspólny $b_1 \dots b_n c_1 \dots c_n$, który wyłączony za nawias, pozostawia wyznacznik złożony z $a_{i\,k}$, zatém jest:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} b_1 c_1, \dots, a_{1,n} b_1 c_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1} b_n c_1, \dots, a_{n,n} b_n c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} b_1 \dots b_n\; c_1 \dots c_n$$

Ztąd dwa wnioski, jeżeli przypuścimy kolejno, że $2n - 1$ z $2n$ ilości $b_1, \dots, b_1, c_1, \dots, c_n$ są jednościami, a pozostała jest dowolną lub mniéj jednością :

1. Aby pomnożyć wyznacznik przez pewną ilość, dosyć jest pomnożyć wyobraźniki jednego z wierszy, przez tęż ilość;

2. Wyznacznik zmienia znak, jeżeli zmienimy znaki wyobraźników jednego z wierszy go składających.

Drugie przekształcenie, którego mamy dowieść, jest następujące : jeżeli dla skrócenia, oznaczymy przez $W_n(a_{i,k})$ wyznacznik $n$tego stopnia, złożony z wyobrażników $a_{i,k}$, gdzie tak i jak k przybierają znaczenia $1, 2, \dots, n$; jeżeli nadto przupuszczamy że:

$$A_{i,k} = \sum_{l_{i,k}=1}^{l_{i,k}=p_i} \sum_{m_{i,k}=1}^{m_{i,k}=r_k} a_{i,k},\, l_{i,k},\, m_{i,k}$$

$$W_n(a_{i,k},\, l_i,\, m_k) = \begin{vmatrix} a_{1,1},\, l_1, m_1,\; a_{1,2}, l_1, m_2, \dots, a_{1,n}, l_1,\, m_n \\ a_{2,1},\, l_2, m_1,\; a_{2,2}, l_2, m_2, \dots, a_{2,n}, l_2,\, m_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1},\, l_n, m_1,\; a_{n,2}, l_n, m_2, \dots, a_{n,n}, l_n,\, m_n \end{vmatrix}$$

to wtedy jest :

$$W_n(A_{i,k}) = \sum_{l_1=1}^{l_1=p_1} \sum_{l_2=1}^{l_2=p_2} \dots \sum_{l_n=1}^{l_n=p_n} \sum_{m_1=1}^{m_1=r_1} \sum_{m_2=1}^{m_2=r_2} \dots$$

$$\dots \sum_{m_n=1}^{m_n=r_n} W_n(a_{i,k,l_i,m_k});$$

gdzie druga strona zawiera $p_1 p_2 \dots p_n r_1 r_2 \dots r_n$ wyrazów.

Aby tego dowieść uważmy, że wyznacznik $Wn(A_{i,k})$, podług założenia złożony jest z $1.2 \dots n$ wyrazów takich jak

$$(-1)^{L(k_1, k_2, \dots, k_n)} A_{1,k_1} A_{2,k_2} \dots A_{n,k_n}$$

a każde $A_{i,k}$, złożone jest z $p_i r_k$ wyrazów takich jak $a_{i,k},\, l_{ik},\, m_{i,k}$, zatém wyznacznik składa się ostatecznie z wyrazów takich jak

$$a_{1,k_1},\, l_{1,k_1},\, m_{1,k_1}\; a_{2,k_2},\, l_{2,k_2} m_{2,k_2} \dots a_{n,k_n},\, l_{n,k_n},\, m_{n,k_n}$$

w liczbie

$1.2 \dots n\, p_1 r_{k_1} p_2, r_{k_2} \dots p_n r_{k_n} = 1.2 \dots n\, p_1 p_2 \dots p_n r_1 r_2 \dots r_n$, gdyż $k_1, k_2, \dots, k_n$, są to liczby różne $1, 2, \dots, n$, tylko w porządku różnym w ogólności od naturalnego.

Uważmy teraz wyznacznik $W_n(a_{i,k},\, l_i,\, m_k)$.

który podług założenia składa się także z $1.2 \ldots n$ wyrazów, które znajdują się pomiędzy wyrazami wyżéj wymienionemi. Uważmy przytém, że z ilości $a_{i,k,\,l_{i,k},\,m_{i,k}}$ możemy utworzyć $p_1 p_2 \ldots p_n\, r_1 r_2 \ldots r_n$ wyznaczników takich jak $W_n(a_{i,\,k,\,l_i,\,m_k})$ nadając wskaźnikom trzecim $l_1, l_2, \ldots, l_n$, jako też i wskaźnikom czwartym $m_1, m_2, \ldots, m_n$ kolejno wszystkie znaczenia, jakie tylko mieć mogą. Tym sposobem mieć będziemy we wszystkich podobnych wyznacznikach także

$$1.2 \ldots n\ p_1 p_2 \ldots p_n\ r_1 r_2 \ldots r_n$$

wyrazów takichże i ze znakami takiemi samemi jak poprzednio, a że widocznie dwa wyrazy pochodzące tak z jednego wyznacznika $W_n(a_{i,\,k,\,l_i,\,m_k})$ jako też i z dwóch wyznaczników podobnych są różne; więc wyrazy tą drugą drogą otrzymane, będąc różne między sobą, i w tej saméj liczbie co wyrazy składające wyznacznik $W_n(A_{i,k})$, mają summy równe, co dowodzi właśnie zamierzonego twierdzenia, to jest że:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{l_{1,1}=1}^{l_{1,1}=p_1} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=r_1} a_{1,1,\,l_{1,1},\,m_{1,1}}, \ldots, & \sum\limits_{l_{1,n}=1}^{l_{1,n}=p_1} \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=r_n} a_{1,n,\,l_{1,n},\,m_{1,n}} \\ \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{l_{n,1}=1}^{l_{n,1}=p_n} \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=r_1} a_{n,1,\,l_{n,1},\,m_{n,1}}, \ldots, & \sum\limits_{l_{n,n}=1}^{l_{n,n}=p_n} \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=r_n} a_{n,n,\,l_{n,n},\,m_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{l_1=1}^{l_1=p_1} \sum_{m_1=1}^{m_1=r_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{l_n=p_n} \sum_{m_n=1}^{m_n=r_n} \begin{vmatrix} a_{1,1,\,l_1,\,m_1}, \ldots, a_{1,n,\,l_1,\,m_n} \\ \cdots \\ a_{n,1,\,l_n,\,m_1}, \ldots, a_{n,n,\,l_n,\,m_n} \end{vmatrix}$$

gdzie druga strona zawiera $p_1 r_1 \ldots p_n r_n$ wyrazów.

Ztego wynika mnożenie wyznaczników, jako szczególny przypadek. Przypuśćmy naprzód, że $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, to wtedy można trzecie wskaźniki opuścić i jest

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=r_1} a_{1,1,\,m_{1,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=r_n} a_{1,n,\,m_{1,n}} \\ \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=r_1} a_{n,1,\,m_{n,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=r_n} a_{n,n,\,m_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{m_1=1}^{m_1=r_1} \cdots \sum_{m_n=1}^{m_n=r_n} \begin{vmatrix} a_{1,1,m_1}, \dots, a_{1,n,m_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1,m_1}, \dots, a_{n,n,m_n} \end{vmatrix}$$

jeżeli oprócz tego przypuścimy, że $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$, i że

$$a_{i,k,m} = a_{i,m}\, b_{k,m}$$

to wtedy jest :

$$\begin{vmatrix} \sum_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=r} a_{1,m_{1,1}} b_{1,m_{1,1}}, \dots, & \sum_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=r} a_{1,m_{1,n}} b_{n,m_{1,n}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=r} a_{n,m_{n,1}} b_{1,m_{n,1}}, \dots, & \sum_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=r} a_{n,m_{n,n}} b_{n,m_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{m_1=1}^{m_1=r} \cdots \sum_{m_n=1}^{m_n=r} \begin{vmatrix} a_{1,m_1} b_{1,m_1}, \dots, a_{1,m_n} b_{n,m_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,m_1} b_{1,m_1}, \dots, a_{n,m_n} b_{n,m_n} \end{vmatrix}$$

co daje się jeszcze przedstawić w kształcie

$$\sum_{m_1=1}^{m_1=r} \cdots \sum_{m_n=1}^{m_n=r} b_{1,m_1} \dots b_{n,m_n} \begin{vmatrix} a_{1,m_1}, \dots, a_{1,m_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,m_1}, \dots, a_{n,m_n} \end{vmatrix}$$

bowiem wyznacznikil na drugiéj stronie będące, są zerami, ile razy przynajmniéj dwa wskaźniki drugie są sobie równe, pozostają więc tylko wyrazy, w których wskaźniki drugie są różne i znaki Σ odnoszą się tylko do tego rodzaju wskaźników $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Można jeszcze téj summie nadać kształty inne, podług tego jak r jest mniejsze, równe lub większe od n.

Jeżeli $r < n$, wtedy zawsze przynajmniéj dwa wiersze pionowe wyznaczników ostatniego wyrażenia są złożone z jednakowych odpowiednio ilości, zatém każdy wyznacznik jest zerem, a ztąd i cała summa.

Jeżeli $r = n$, wtedy układów różnych drugich wskaźników także różnych, jest $1.2 \dots n$. Jeżeli wiersze pionowe wyznaczników poustawiamy tak, aby zawsze drugie wskaźniki tworzyły układ $1, 2, \dots, n$, to wtedy wyrażeniu uważanemu można nadać kształt:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} \Sigma(-1)^{L(m_1, \dots, m_n)} b_{1,m_1} \dots b_{n,m_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1}, \dots, b_{1,n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ b_{n,1}, \dots, b_{n,n} \end{vmatrix}$$

co właśnie daje mnożenie wyznaczników.

Jeżeli nakoniec $r > n$, to wtedy jest wszystkich różnych układów drugich wskaźników, różniących się czy to porządkiem, czy też wskaźnikiem przynajmniéj jednym $r(r-1) \dots (r-n+1)$, pomiędzy któremi różniących się przynajmniéj jednym wskaźnikiem jest

$$\frac{r(r-1) \dots (r-n+1)}{1.2 \dots n}$$

Jeżeli w wyznacznikach, poustawiamy wiersze pionowe tak, aby wskaźniki drugie następowały po sobie w porządku rosnącym $k_1 k_2 \dots k_n$, to wyrazy składające summę uważaną, podzielą się na działy w liczbie $\frac{r(r-1) \dots (r-n+1)}{1.2 \dots n}$ mające po $1.2 \dots n$ wyrazów, w których to działach będzie można wyznacznik wspólny wyłączyć za nawias. Zatém:

$$\Sigma \begin{vmatrix} a_{1,k_1}, \dots, a_{2,k_n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n,k_1}, \dots, a_{n,k_n} \end{vmatrix} \Sigma(-1)^{L\binom{k_1, \dots, k_n}{m_1, \dots, m_n}} b_{1,m_1} \dots b_{n,m_n}$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} a_{1,k_1}, \dots, a_{1,k_n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n,k_1}, \dots, a_{n,k_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,k_1}, \dots, b_{1,k_n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ b_{n,k_1}, \dots, b_{n,k_n} \end{vmatrix}$$

gdzie pierwszy znak summowy Σ odnosi się do

$$\frac{r(r-1) \dots (r-n+1)}{1.2 \dots n}$$

różnych zmian czyli kombinacyj drugich wskaźników, a drugi do różnych $1.2 \dots n$ przemian jednéj zmiany. Jest więc w ogólności:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=r} a_{1,m_{1,1}} b_{1,m_{1,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=r} a_{1,m_{1,n}} b_{n,m_{1,n}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=r} a_{n,m_{n,1}} b_{1,m_{n,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=r} a_{n,m_{n,n}} b_{n,m_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} a_{1,k_1}, \ldots, a_{1,k_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,k_1}, \ldots, a_{n,k_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,k_1}, \ldots, b_{1,k_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n,k_1}, \ldots, b_{n,k_n} \end{vmatrix}$$

gdzie znak summowy odnosi się do $\dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{1.2\ldots n}$ różnych zmian czyli kombinacyj r wskaźników drugich, $1, 2, \ldots, r$, branych po n w porządku rosnącym. Gdy $r<n$ lub $r=n$, wypadek jest żerem, lub też bez znaku summowego, i w tym ostatnim razie $k_1, k_2 \ldots, k_n$ są równe odpowiednio liczbom $1, 2, \ldots, n$.

Ponieważ można zamienić wiersze poziome na pionowe i odwrotnie, bez zmiany ważności wyznacznika, zatém iloczyn dwóch wyznaczników $n$tego stopnia, daje się przedstawić pod czterema kształtami

$$W_n(a_{i,k})\, W_n(b_{i,k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=n} a_{1,m_{1,1}} b_{1,m_{1,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=n} a_{1,m_{1,n}} b_{n,m_{1,n}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=n} a_{n,m_{n,1}} b_{1,m_{n,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=n} a_{n,m_{n,n}} b_{n,m_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=n} a_{1,m_{1,1}} b_{m_{1,1},1}, \ldots, & \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=n} a_{1,m_{1,n}} b_{m_{1,1},n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=n} a_{n,m_{n,1}} b_{m_{n,1},1}, \ldots, & \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=n} a_{n,m_{n,n}} b_{m_{n,n},n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=n} a_{m_{1,1},1}\, b_{1,m_{1,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=n} a_{m_{1,n},1}\, b_{n,m_{1,n}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=n} a_{m_{n,1},n}\, b_{1,m_{n,1}}, \ldots, & \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=n} a_{m_{n,n},n}\, b_{n,m_{n,n}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{m_{1,1}=1}^{m_{1,1}=n} a_{m_{1,1},1}\, b_{m_{1,1},1}, \ldots, & \sum\limits_{m_{1,n}=1}^{m_{1,n}=n} a_{m_{1,n},1}\, b_{m_{1,n},n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum\limits_{m_{n,1}=1}^{m_{n,1}=n} a_{m_{n,1},n}\, b_{m_{n,1},1}, \ldots, & \sum\limits_{m_{n,n}=1}^{m_{n,n}=n} a_{m_{n,n},n}\, b_{m_{n,n},n} \end{vmatrix}$$

to jest w kształcie wyznacznika $W_n(c_{i,k})$ także $n$tego stopnia, gdzie $c_{i,k}$ ma jedno ze czterech znaczeń następujących:

$$c_{i,k} = \sum_{m_{i,k}=1}^{m_{i,k}=n} a_{i,m_{i,k}}\, b_{k,m_{i,k}} = \sum_{m_{i,k}=1}^{m_{i,k}=n} a_{i,m_{i,k}}\, b_{m_{i,k},k}$$

$$= \sum_{m_{i,k}=1}^{m_{i,k}=n} a_{m_{i,k},i}\, b_{k,m_{i,k}} = \sum_{m_{1,k}=1}^{m_{i,k}=n} a_{m_{i,k},i}\, b_{m_{i,k},k}$$

takie jest prawidło na mnożenie podane przez Koszi'ego w wspomnianej wyżej pracy (na stronnicy 81).

Pokazaliśmy wyżej, że mnożenie pozwala podnieść stopień wyznacznika, mianowicie mnożąc go przez wyznaczniki równe jedności, co zatém stosuje się i do mnożenia uważanego w ostatnim kształcie. Można więc zawsze zamienić iloczyn ilukolwiek wyznaczników, na iloczyn takiej samej liczby wyznaczników, lecz których stopnie są równe sobie i równe najwyższemu stopniowi wyznaczników danego iloczynu, a następnie stosując kolejno pewną liczbę razy prawidło mnożenia Koszi'ego, otrzymać iloczyn w postaci jednego wyznacznika tego samego stopnia, co jest prostszem daleko od wypadku otrzymanego sposobem poprzednio podanym, gdyż wypadek przedstawiał się w postaci wyznacznika, którego stopień był summą stopni wyznaczników danych do pomnożenia.

Na tém zakończemy te kilka uwag tyczących się teorji wyznaczników, jakkolwiek wiele i ważnych odkryć, które zawdzięczamy Panom Kelemu, Silwestrowi, Bettiemu, Brioskiemu i innym, w każdym obszerniejszém piśmie znalazłyby koniecznie miejsce. Rozmiary tego przypisku nie pozwalają się więcej rozszerzać i dla tego nie mówimy o wyznacznikach symetrycznych, skośnych (ang. *skew*, wło. *gobbo*, fra. *gauche*) i t. p.

Jako zastosowanie, podamy tu rozwiązanie układu z równań pierwszego stopnia z tylomaż nieznanemi, gdy takowe jest możebnem. Przypuśćmy więc że mamy do rozwiązania układ:

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k}\, z_k = a_i, \qquad (1 \leqq i \gtreqless n).$$

Jeżeli oznaczemy przez W_n wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

to widziemy, podług uwagi zrobionej przez Wandermąda (na stronnicy 523, wyżej wymienionéj jego pracy) że ze współczynników danego układu równań, można ułożyć n tożsamości następujących:

$$0 = W_n^{-1} \begin{vmatrix} a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}, -a_i \\ a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, -a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,n}, -a_n \end{vmatrix}, \qquad (1 \leqq i \gtreqless n),$$

które rozwinięte podług wyobraźników pierwszego wiersza poziomego dają wyrażenia linijne, różniące się od równań danego układu tylko tém, że niewiadome z_k są zastąpione przez pewne funkcje współczynników, które zatém dają wyrażenia żądane niewiadomych ilości z_k przez współczynniki.

Jakkolwiek droga ta jest pierwszą jaką podano, i ścisłą, jednakże dowcipny obrót podany przez p. Trudi na rozwiązanie tegoż zadania, zasługuje na uwagę i takowy niżej podajemy.

Pomnożmy w tym celu wyznacznik W_n, przez nieznaną ilość z_k, na co jak wiemy, dostatecznem jest pomnożyć przez z_k, wszystkie ilości jednego wiersza, naprzykład $k$tego pionowego. Widzimy oprócz tego że dodawszy odpowiednio do tak zmienionych ilości wiersza $k$tego pionowego, ilości innych wierszy równoległych, pomnożone przez odpowiednie nieznane, nie zmieniamy iloczynu $W_n z_k$, gdyż to wychodzi na dodanie do niego, wyznacznika, mającego dwa wiersze równolegle, złożone odpowiednio z jednakowych ilości, pomnożonego przez jedną z nieznanych czyli na dodanie kilku zer. Lecz tym sposobem ilości składające $k$ty wiersz pionowy stają się odpowiednio na mocy równań danych, ilościami $a_1, a_2, \ldots, a_n$, przez co ślad ilości nieznanych znika, i pozostają same iloście znane.

To samo co wyżej powiedziano, wyrażone wzorem, jest:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} z_k = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,k-1}, a_{1,k} z_k, a_{1,k+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,k-1}, a_{n,k} z_k, a_{n,k+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,k-1}, a_{1,1} z_1 + \ldots + a_{1,n} z_n, a_{1,k+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,k-1}, a_{n,1} z_1 + \ldots + a_{n,n} z_n, a_{n,k+1}, \ldots, a_{1,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,k-1}, a_1, a_{1,k+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,k-1}, a_n, a_{n,k+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

równanie, w którem tylko z_k wchodzi, i które byle wyznaczniki wchodzące do niego nie były zerami, można zawsze rozwiązać.

Różniczkowanie wyznaczników. Przejdziemy teraz do części teorji wyznaczników, która ma ściślejszy związek z rachunkiem różniczkowym, mianowicie, zajmiemy się różniczkowaniem wyznaczników, i wyznacznikami funkcyjnemi, które coraz większe w badaniach analitycznych znajdują zastosowanie.

Różniczkę częściową wyznacznika $W_n(a_{i,k})$ względem jednéj z ilości go składających $a_{i,k}$, w przypadku gdy ilości te są od siebie niezależne, znajdujemy łatwo, zwróciwszy uwagę że jest (str. 1050).

$$W_n(a_{i,k}) = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,k-1}, & a_{1,k} + 0, & a_{1,k+1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \ldots & & & & & & \\ a_{i-1,1}, & \ldots, & a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k} + 0, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i,1}, & \ldots, & a_{i,k-1}, & 0 + a_{i,k}, & a_{i,k+1}, & \ldots, & a_{i,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, & a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k} + 0, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, & a_{i+1,n} \\ \ldots & & & & & & \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,k-1}, & a_{n,k} + 0, & a_{n,k+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, a_{1,k-1}, & a_{1,k}, & a_{1,k+1}, & \ldots, a_{1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k}, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, a_{i-1,n} \\ a_{i,1}, & \ldots, a_{i,k-1}, & 0, & a_{i,k+1}, & \ldots, a_{i,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k}, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, a_{n,k-1}, & a_{n,k}, & a_{n,k+1}, & \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, & \ldots, a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, a_{i+1,k-1}, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, & \ldots, c_{n,n} \end{vmatrix} a_{i,k}$$

ztąd różniczka częściowa żądana, zważywszy że pierwsza część nie zależy od $a_{i,k}$, jest:

$$(-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, a_{1,k-1}, & a_{1,k+1}, & \ldots, a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, a_{i-1,k-1}, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, a_{i+1,k=1}, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, a_{n,k-1}, & a_{n,k+1}, & \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} da_{i,k} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, a_{1,k-1}, & 0, & a_{1,k+1}, & \ldots, a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1}, & \ldots, a_{i-1,k-1}, & 0, & a_{i-1,k+1}, & \ldots, a_{i-1,n} \\ a_{i,1}, & \ldots, a_{i\,k-1}, & da_{i,k}, & a_{i,k+1}, & \ldots, a_{i,n} \\ a_{i+1,1}, & \ldots, a_{i+1,k-1}, & 0, & a_{i+1,k+1}, & \ldots, a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, a_{n,k-1}, & 0, & a_{n,k+1}, & \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

a zaś różniczka zupełna, jako równa summie częściowych, jest:

$$dW_n(a_{i,k}) = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, a_{1,k-1}, & da_{1,k}, & a_{1,k+1}, & \dots, a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i-1,1}, & \dots, a_{i-1,k-1}, & da_{i-1,k}, & a_{i-1,k+1}, & \dots, a_{i-1,n} \\ a_{i,1}, & \dots, a_{i,k-1}, & da_{i,k}, & a_{i,k+1}, & \dots, a_{i,n} \\ a_{i+1,1}, & \dots, a_{i+1,k-1}, & da_{i+1,k}, & a_{i+1,k+1}, & \dots, a_{i+1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1}, & \dots, a_{n,k-1}, & da_{n,k}, & a_{n,k+1}, & \dots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

i różniczkę tę, można jeszcze przedstawić w kształcie następującym:

$$dW_n(a_{i,k}) = \Sigma \begin{vmatrix} d^{l_1}a_{1,1}, & d^{l_2}a_{1,2}, & \dots, & d^{l_n}a_{1,n} \\ d^{l_1}a_{2,1}, & d^{l_2}a_{2,2}, & \dots, & d^{l_n}a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ d^{l_1}a_{n,1}, & d^{l_2}a_{n,2}, & \dots, & d^{l_n}a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma W_n(d^{l_k}a_{i,k})$$

gdzie znak summowy odnosi się do wszystkich rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich lub zero, równania

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1.$$

Nakoniec różniczka zupełna któregokolwiek *m*tego rzędu całkowitego, dodatniego jest

$$d^m W_n(a_{i,k}) = \Sigma W_n(d^{l_k}a_{i,k}) = \Sigma W_n(d^{l_i}a_{i,k}.)$$

gdzie znak summowy odnosi się do wszystkich rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich lub zero, równania

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = m$$

Pochodne częściowe wyznacznika (zawsze w przypuszczeniu, że wszystkie ilości składające wyznacznik są od siebie niezależne) jeżeli są rzędu wyższego nad pierwszy względem przynajmniéj jednéj ilości $a_{i,k}$, są zerami. To się zdarzy zawsze, jeżeli rzęd pochodnéj częściowéj jest wyższy od stopnia wyznacznika. Jeżeli rzęd m pochodnéj jest niższy od stopnia n wyznacznika $W_n(a_{i,k})$ i pochodna ma być wzięta względem ilości $a_{i_1,k_1}, a_{i_2,k_2}, \dots, a_{i_m,k_m}$; to jéj wyrazenie znajdziemy zastępując w wyznaczniku wspomniane ilości, przez jedności dodatnie, zaś pozostałe ilości m wierszy pionowych lub poziomych, albo też i jedne i drugie razem, w których znajdują się powyższe ilości $a_{i_1,k_1}, a_{i_2,k_2}, \ldots, a_{i_m,k_m}$ zastępując przez zera.

Gdyby ilości składające wyznacznik ulegały jakim związkom, prawidła wskazane wyżéj należałoby zmienić stosownie do okoliczności.

Wyznaczniki funkcyjne. Przejdziemy teraz do teorji wyznaczników funkcyjnych, i podamy tylko niektóre z ich pięknych własności, trzymając się drogi wskazanéj przez p. Bertran, która wydaje się przedstawiać więcej korzyści aniżeli droga wskazana przez Jakobiego, gdyż wykazuje nie tylko we własnościach ale nawet i w dowodzeniach wielkie podobieństwo wyznacznika funkcyjnego z pochodną, tak że można by nazwać wyznacznik funkcyjny pochodną układu danego funkcyj względem układu zmiennych niezależnych.

Uważmy $2n$ ilości $z_1, z_2, \ldots, z_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ połączonych z sobą n związkami

$$F_l(z_1, z_2, \ldots, z_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \qquad (1 \leqq l \overline{\gtrless} n),$$

to jeżeli te związki są rzeczywiście różne i niesprzeczne, można uważać n ilości z_k, jako zmienne niezależne, zaś pozostałe n ilości y_i, jako zmienne zależne, czyli funkcje poprzednich ilości. Pochodne częściowe tych funkcyj są ilościami oznaczonemi w ogólności, to jest jeżeli są nieoznaczone, lub nieskończenie wielkie, to zdażyć się może tylko przy pewnych znaczeniach wyjątkowych zmiennych niezależnych. Oznaczmy dla krótkości pochodnę częściową funkcji y względem zmiennéj z_k przez $y_{i,k}$, to wyznacznik

$$W_n(y_{i,k}) = \begin{vmatrix} y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,n} \\ y_{2,1}, y_{2,2}, \cdots, y_{2,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n,1}, y_{n,2}, \cdots, y_{n,n} \end{vmatrix}$$

nazywa się wyznacznikiem układu danego funkcyj, lub *funkcyjnym*, i jako złożony z ilości w ogólności oznaczonych, jest ilością w ogólności oznaczoną. Wyznacznik ten, jak niżéj zobaczymy, gra rolę podobną w badaniach funkcyj wielu zmiennych, do roli pochodnéj, w badaniach funkcji jednéj zmiennéj niezależnéj

Jeżeli zmiennym z_k nadamy powiększenia czyli przyrosty nieskończenie małe $d_p z_k$, to ilości y_i otrzymają pewne przyrosty w ogólności nieskończenie małe $d_p y_i$ tego samego rzędu co poprzedzające, mianowicie :

$$d_p y_i = \sum_{k=1}^{k=n} y_{i,k} d_p z_k.$$

Uważmy n układów przyrostów $d_p z_k$ i odpowiednie n układów przyrostów $d_p y_i$, mianowicie :

$$\begin{array}{l} d_1 z_1, d_1 z_2, \ldots, d_1 z_n, d_1 y_1, d_1 y_2, \ldots, d_1 y_n \\ d_2 z_1, d_2 z_2, \ldots, d_2 z_n, d_2 y_1, d_2 y_2, \ldots, d_2 y_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ d_n z_1, d_n z_2, \ldots, d_n z_n, d_n y_1, d_n y_2, \ldots, d_n y_n \end{array}$$

z których utworzymy dwa wyznaczniki

$$W_n(d_r z_k) = \begin{vmatrix} d_1 z_1, d_1 z_2, \ldots, d_1 z_n \\ d_2 z_1, d_2 z_2, \ldots, d_2 z_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ d_n z_1, d_n z_2, \ldots, d_n z_n \end{vmatrix},$$

$$W_n(d_p y_i) = \begin{vmatrix} d_1 y_1, d_1 y_2, \ldots, d_1 y_n \\ d_2 y_1, d_2 y_2, \ldots, d_2 y_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ d_n y_1, d_n y_2, \ldots, d_n y_n \end{vmatrix}$$

a które w dalszym ciągu (dla podobieństwa z różniczkami) oznaczać będziemy odpowiednio przez

$$d(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad d(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

i które to wyznaczniki w przypadku jednéj funkcji y_1, jednéj zmiennéj niezależnéj z_1 stają się odpowiednio równe różniczkom dz_1 i dy_1.

Widoczném jest że

$$W_n(y_{i,k}) W_n(d_r z_k) = W_n(d_p y_i)$$

ztąd

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = W_n(y_{i,k})$$

co pokazuje że stosunek wyznacznika różniczek funkcyj danych, do wyznacznika różniczek zmiennych, jest równy wyznacznikowi funkcyjnemu, jest zatém w ogólności ilością oznaczoną; lub też inaczéj granica stosunku wyznacznika przyrostów nieskończenie małych danych funkcji, do wyznacznika podobnychże przyrostów zmiennych, jest równa wyznacznikowi funkcyjnemu. Co w razie jednéj funkcji, jednéj zmiennéj, staje się znaną własnoscią pochodnéj, że stosunek różniczek funkcji i zmiennéj niezależnéj jest równy pochodnéj téjże funkcji.

Dowiedziemy teraz bardzo ważnego twierdzenia następującego :

Aby między pewną liczbą funkcyj, tyluż zmiennych, zachodził związek niezależny od tychże zmiennych, potrzeba i dostateczném jest, aby wyznacznik funkcyjny, odpowiedni temu układowi funkcyj, był zerem.

Twierdzenie przedstawione w powyższym kształcie, nie wykazuje w należytem świetle podobieństwa ze szczególnym przypadkiem jednéj zmiennéj, to jest z twierdzeniem, że pochodna funkcji stałéj jest zerem, jednakże przypatrzywszy się bliżéj, widzimy że związek ogólny wspomniany wyżéj

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

zamienia się w przypadku jednéj funkcji na

$$\varphi(y) = 0 \qquad \text{czyli} \qquad y = \text{stałéj}$$

a wyznacznik wtedy zamienia się na pochodną i daje jak wyżéj powiedziano, równanie, wyrażające że pochodna jest równa zeru.

Podobieństwo między szczególnym przypadkiem : funkcja równa stałéj, a ogólném wyrażeniem : między funkcjami zachodzi związek niezależny od zmiennych niezależnych, pokaże się lepiéj w następującym wniosku.

Jeżeli funkcja jednéj zmiennéj, nie jest stałą lub nieoznaczoną, to każdemu znaczeniu funkcji, odpowiada pewne znaczenie zmiennéj i równanie :

$$F(z, y) = 0, \qquad \text{albo} \qquad y = f(z),$$

można rozwiązać względem z, co napiszemy z Herszlem (Herschel i matematykami angielskimi :

$$z = f^{-1}(y).$$

Przeciwnie jeżeli funkcja jest stałą, to już przez to nieoznacza zmiennéj niezależnéj, bo jednemu znaczeniu funkcji odpowiadają wszystkie możebne znaczenia zmiennéj, i równania danego względem z rozwiązać w tym razie i znaczeniu nie można.

Podobnież równania

$$F_l(z_1, z_2, \ldots, z_n, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (1 \leqq l \gtreqless n),$$

albo równania

$$y_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (1 \leqq i \gtreqless n),$$

można tylko wtedy rozwiązać względem zmiennych z_k, i otrzymać

$$z_k = f_k^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (1 \gtreqless k \geqq n),$$

jeżeli równania dane są różne między sobą, czyli niezależne i niesprzeczne. Lecz jeżeli istnieją między niemi związki, pewne równania stają się koniecznem następstwem innych, lub sprzecznemi, i rozwiązanie równań jest niemożebném. Podobieństwo zachodzi więc w tém, że w obu razach, tak gdy funkcja jest stałą, jak i gdy istnieją związki między funkcjami, niezależne od zmiennych, danym znaczeniom funkcyj nie odpowiadają pewne znaczenia zmiennych.

Wracając do twierdzenia którego zamierzyliśmy dowieść, podzielimy dowodzenie takowego na dwie części, mianowicie dowiedziemy kolejno że : jeżeli związki pomiędzy funkcjami nie istnieją, to wtedy wyznacznik funkcyjny nie jest zerem i że przeciwnie, jeżeli związki istnieją to wyznacznik jest zerem.

W pierwszym razie jeżeli związek między funkcjami y_i niezależny od zmiennych z_k nie istnieje, to w ogólności istnieje zależny, a wtedy pewne funkcje y_i jeżeli nie są funkcjami samych z_k, to są pozostałych y_i i niektórych z_k, co ostatecznie wychodzi na to, że wszystkie y_i są funkcjami z_k, czyli równania

$$y_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (1 \leqq i \gtreqless n),$$

są różne i niesprzeczne, co daje jak wyżéj powiedziano

$$z_k = f_k^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (1 \leqq k \gtreqless n),$$

czyli że można uważać w tym razie odwrotnie y_i za zmienne niezależne, a z_k za zmienne zależne czyli funkcje, czyli inaczéj oznaczonym ważnościom ilości y_i, odpowiadają oznaczone ważności ilości z_k, i przyrosty ilości y_i są dowolne, zaś przyrosty ilości z_k są przez nie oznaczone. Ztąd wynika, ponieważ $d_p y_i$ są dowolne, że

$$d(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

można zawsze uczynić różnym od zera; gdy tymczasem

$$d(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

nie mogąc w ogólności być nieskończenie małym innego rzędu jak

$$d(y_1, y_2, \ldots, z_n)$$

gdyż jest podobnie jak ten ostatni, summą iloczynów zawierających po n czynników, w ogólności nieskończenie małych tegoż samego rzędu, czynią że stosunek

$$\frac{d\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = \mathrm{W}_n\,(y_{i,k})$$

czyli wyznacznik funkcyjny odpowiedni nie jest w tym razie zerem w ogólności.

W drugim razie jeżeli istnieją związki różne od siebie i niezależne od z_k, wtedy pewna liczba ilości $y_1, y_2, \ldots. y_m$ pozostają niezależnemi, i mogą mieć przyrosty dowolne, zaś pozostałe $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ są funkcjami poprzednich i mają przyrosty oznaczone. Przypuszczamy tu, że liczba związków jest mniejsza od liczby n funkcyj, gdyż inaczéj funkcje byłyby stałemi, lub nawet w ogólności wcale by nie istniały, podług tego jak związki które założyliśmy różnemi, byłyby rozwiązalne, lub sprzeczne.

Można więc dowolnemi przyrostkami ilości $y_1, y_2, \ldots, y_m$ rozporządzić tak, aby były zerami, co pociągnie za sobą że i przyrosty ilości $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ będą zerami, i to nieskończenie wielu sposobami, gdyż tym sposobem zakładamy tylko m związków między przyrostami n ilości $z_1, z_2, \ldots, z_n$, które więc w części przynajmniéj pozostaną nieoznaczonemi. Tym sposobem jeden wiersz wyznacznika $d(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ można zawsze w ogólności złożyć z samych zer, a zatém uczynić wyznacznik zerem, podczas gdy wyznacznik

$$d(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

można zawsze w ogólności uczynić różnym od zera, gdyż wiersz odpowiedni wierszowi złożonemu z zer w wyznaczniku $d(y_1, y_2, \ldots, z_n)$ nie jest cały złożony z zer, zaś pozostałe wiersze wyznacznika

$$d(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

są złożone z przyrostów dowolnych. Stosunek więc

$$\frac{d\,(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = \mathrm{W}_n\,(y_{i,k})$$

czyli wyznacznik funkcyjny jest zerem, jak to zamierzyliśmy dowieść.

Dowiedliśmy więc, że gdy związki między y_i niezależne od z_k istnieją lub nie, to wtedy wyznacznik układu funkcyj y_i jest lub nie jest zerem. Ztąd wypada twierdzenie, że gdy wyznacznik jest lub nie jest zerem, to związki między y_i niezależne od z_k istnieją lub nie, gdyż gdyby odpowiednio związki te nie istniały lub istniały, tedy na mocy dowiedzionego wyżéj twierdzenia, wyznacznik nie byłby zerem lub też byłby zerem. Wniosek ten przeciwny założeniu, pokazuje błąd w przypuszczeniu przeciwnem twierdzeniu, a przez to prawdziwość twierdzenia. Zatém warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia lub nieistnienia związków niezależnych od zmiennych, między funkcjami, jest zamienianie się wyznacznika układu tychże funkcyj na zero, lub różnienie się od zera w ogólności.

Powyższe twierdzenie pozwala usunąć jednę z trudności, jakie natrafia początkujący w samych zasadach rachunku różniczkowego, mianowicie przy wynajdywaniu różniczek funkcyj uwikłanych czyli niewyraźnych. Zadanie to pojęte najogólniéj przedstawia się w następujący sposób : mając między m zmiennem z_i, n równań

$$F_s(z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \qquad (1 \leqq s \lesseqgtr n),$$

wynaleźć wyrażenia różniczek zmiennych zależnych, przez różniczki zmiennych niezależnych i przez wyrażenia znane. Przypuszcza się, że równania nie są sprzeczne, gdyż w przeciwnym razie funkcje a zatém i ich różniczki nie istnieją, i zadanie z powodu tego jest nierozwiązalném; jako też że równania są różne, czyli że nie istnieją żadne związki między pierwszemi stronami pewnych liczb równań danych, niezależne od zmiennych z_k, gdyż wtedy liczbę równań możnaby zmniejszyć. Trudność którą mamy na widoku, jest okazanie że n równań pierwszego stopnia

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{dF_s}{dz_k} dz_k = 0, \qquad (1 \leqq s \lesseqgtr n)$$

podawanych w dziełach wykładowych rachunku różniczkowego, na obliczenie różniczek żądanych, są w powyższych warunkach zawsze różne i niesprzeczne, to jest że pozwalają zawsze rozwiązać zadanie, a co okazać można w następujący sposób. Ponieważ z założenia jest n równań różnych i niesprzecznych, zatém jest n zmiennych zależnych, a $m-n$ niezależnych. Przypuśćmy że są odpowiednio zmiennemi niezależnemi ilości $z_1, z_2, \dots, z_{m-n}$, zaś niezależnemi ilości $z_{m-n+1}, z_{m-n+2}, \dots, z_m$, i napiszmy ostatnie n równań, w kształcie

$$\sum_{k=m-n+1}^{k=m} \left(\frac{dF_s}{dz_k} dz_k\right) = \sum_{t=1}^{t=m-n} \left(-\frac{dF_s}{dz_t} dz_t\right), \qquad (1 \leqq s \lesseqgtr n),$$

które rozwiązując względem dz_k, oznaczywszy poprzednio dla krótkości:

$$\begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dz_m}, & \frac{dF_1}{dz_{m-1}}, & \dots, & \frac{dF_1}{dz_{m-n+1}} \\ \frac{dF_2}{dz_m}, & \frac{dF_2}{dz_{m-1}}, & \dots, & \frac{dF_2}{dz_{m-n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dF_n}{dz_m}, & \frac{dF_n}{dz_{m-1}}, & \dots, & \frac{dF_n}{dz_{m-n+1}} \end{vmatrix} = \frac{d(F_1, F_2, \dots, F_n)}{d(z_m, z_{m-1}, \dots, z_{m-n+1})}$$

otrzymujemy

$$\frac{d(F_1, \dots, F_n)}{d(z_m, \dots, z_{m-n+1})} dz_k$$

$$= \sum_{t=1}^{t=m-n} \left(- \frac{d(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n)}{d(z_m, \dots, z_{m-k+2}, z_t, z_{m-k}, \dots, z_{m-n+1})} dz_t \right),$$

$$(m-n+1 \leqq k \gtreqless m)$$

które zawsze dają żądane różniczki, bo ani współczynnik przy dz_k, ani wszystkie współczynniki ostatniego równania nie mogą być zerami dla wszystkich znaczeń zmiennych niezależnych z_k, gdyż gdyby te współczynniki były zawsze zerami, to znaczyłoby na mocy wyżéj dowiedzionego twierdzenia, że między pierwszemi stronami n równań danych, uważanych jako funkcje pewnych n zmiennych z pomiędzy m, istniałyby związki niezależne od tych ostatnich zmiennych, czyli że równania nie były różne, co przeciwne założeniu. Więc współczyniki uważane nie są zawsze zerami i równania ostatnie wyznaczają zawsze różniczki zmiennych zależnych, gdy dane równania są różne i niesprzeczne jak to zamierzyliśmy dowieść.

Dowiedziemy teraz kilku innych twierdzeń tyczących się wyznaczników funkcyjnych, gdzie zobaczymy że podobieństwo wspomniane wyżéj wyznacznika funkcyjnego z pochodną, ciągle się utrzymuje.

Uważmy n równań między $2n$ ilościami z_k, y_i,

$$F_l(z_1, z_2, \dots, z_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \qquad (1 \gtreqless l \leqq n),$$

jeżeli nadamy n zmiennym z_k, przyrosty nieskończenie małe $d_p z_k$, to zmienne y_i otrzymają pewne przyrosty nieskończenie małe tegoż rzędu $d_p y_i$, zaś z równań danych otrzymamy n^2 równań następujących:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dF_l}{dz_k} d_p z_k + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF_l}{dy_i} d_p y_i = 0, \quad (1 \leqq p \gtreqless n), \ (1 \leqq l \gtreqless n),$$

które dla krótkości napiszemy w kształcie

$$d_{p,z}\mathrm{F}_l + d_{p,y}\mathrm{F}_l = 0, \qquad (1 \leqq p \overline{\gtrless} n),\ (1 \leqq l \overline{\gtrless} n),$$

i które to równania prowadzą do równania następującego :

$$\begin{vmatrix} d_{1,z}\mathrm{F}_1, d_{1,z}\mathrm{F}_2, \ldots, d_{1,z}\mathrm{F}_n \\ d_{2,z}\mathrm{F}_1, d_{2,z}\mathrm{F}_2, \ldots, d_{2,z}\mathrm{F}_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{n,z}\mathrm{F}_1, d_{n,z}\mathrm{F}_2, \ldots, d_{n,z}\mathrm{F}_n \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} d_{1,y}\mathrm{F}_1, d_{1,y}\mathrm{F}_2, \ldots, d_{1,y}\mathrm{F}_n \\ d_{2,y}\mathrm{F}_1, d_{2,y}\mathrm{F}_2, \ldots, d_{2,y}\mathrm{F}_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{n,y}\mathrm{F}_1, d_{n,y}\mathrm{F}_2, \ldots, d_{n,y}\mathrm{F}_n \end{vmatrix}$$

co jeszcze napiszemy krócéj,

$$d_z(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n) = (-1)^n d_y(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \mathrm{F}_n)$$

a ztąd wynika, że :

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = (-1)^n \frac{d_z(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n)}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \left\{ \frac{d_y(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n)}{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right\}^{-1}$$

to jest : wyznacznik układu n *funkcyj uwikłanych, czyli niewyraźnych* $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, *jest równy jedności ujemnéj podniesionéj do* n *téj potęgi, pomnożonéj przez wyznacznik funkcyjny pierwszych stron równań danych uważanych jako funkcje zmiennych* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *i podzielonéj przez wyznacznik funkcyjny tychże pierwszych stron uważanych jako funkcje zmiennych* $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

W szczególnym przypadku, gdy $n = 1$, jest znane twierdzenie :

$$\mathrm{F}(z, y) = 0, \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{d\mathrm{F}}{dz}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)^{-1}.$$

Godnym jest uwagi następujący szczególny przypadek. Jeżeli układ równań

$$y_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (1 \leqq i \overline{\gtrless} n),$$

przekształcimy na następujący

$$y_i = \varphi_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (1 \leqq i \overline{\gtrless} n),$$

wyznaczniki funkcyjne układów f i φ są wtedy w ogólności różne.

Jest bowiem podług powyższego

$$
\begin{vmatrix}
\frac{df_1}{dz_1}, & \frac{df_1}{dz_2}, & \dots, & \frac{df_1}{dz_n} \\
\frac{df_2}{dz_1}, & \frac{df_2}{dz_2}, & \dots, & \frac{df_2}{dz_n} \\
. & . & . & . \\
\frac{df_n}{dz_1}, & \frac{df_n}{dz_2}, & \dots, & \frac{df_n}{dz_n}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^n
\begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_1}{dz_1}, & \frac{d\varphi_1}{dz_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_1}{dz_n} \\
\frac{d\varphi_2}{dz_1}, & \frac{d\varphi_2}{dz_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_2}{dz_n} \\
. & . & . & . \\
\frac{d\varphi_n}{dz_1}, & \frac{d\varphi_n}{dz_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_n}{dz_n}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_1}{dy_1}-1, & \frac{d\varphi_1}{dy_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_1}{dy_n} \\
\frac{d\varphi_2}{dy_1}, & \frac{d\varphi_2}{dy_2}-1, & \dots, & \frac{d\varphi_2}{dy_n} \\
. & . & . & . \\
\frac{d\varphi_n}{dy_1}, & \frac{d\varphi_n}{dy_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_n}{dy_n}-1
\end{vmatrix}^{-1}
$$

i widocznie aby wyznaczniki układów f, φ były równe, potrzeba i dostateczném jest aby było:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{d\varphi_1}{dy_1}-1, & \frac{d\varphi_1}{dy_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_1}{dy_n} \\
\frac{d\varphi_2}{dy_1}, & \frac{d\varphi_2}{dy_2}-1, & \dots, & \frac{d\varphi_2}{dy_n} \\
. & . & . & . \\
\frac{d\varphi_n}{dy_1}, & \frac{d\varphi_n}{dy_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_n}{dy_n}-1
\end{vmatrix} = (-1)^n
$$

co naprzykład się zdarzy gdy układ φ jest następujący:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n) \\
y_2 &= \varphi_2(z_1, z_2, \dots, z_n, y_3, y_4, \dots, y_n) \\
. & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
y_{n-1} &= \varphi_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_n, y_n) \\
y_n &= \varphi_n(z_1, z_2, \dots, z_n)
\end{aligned}
$$

gdyż wtedy jest rzeczywiście

$$\begin{vmatrix} -1, & \frac{d\varphi_1}{dy_2}, & \dots, & \frac{d\varphi_1}{dy_n} \\ 0, & -1 & \dots, & \frac{d\varphi_2}{dy_n} \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \dots, & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n,$$

a zatém

$$\frac{d(f_1, f_2, \dots, f_n)}{d(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{d(z_1, z_2, \dots, z_n)}.$$

Przejdźmy teraz do innego zadania, a mianowicie do wynalezienia wyznacznika funkcyjnego układu funkcyj odwrotnych, to jest układu funkcyj $z_1, z_2, \dots . z_n$ ilości zmiennych $y_1, y_2, \dots, y_n$. Twierdzenie ogólne powyższe daje dwa wyrażenia na wyznaczniki ilości y uważane jako funkcje ilości z i odwrotnie. Porównawszy dwa te wyrażenia, widzimy że drugie strony są jedna odwrotnością drugiéj, co zresztą jest widocznem wprost, gdyż

$$\frac{d(y_1, y_2, \dots, y_n)}{d(z_1, z_2, \dots, z_n)} \frac{d(z_1, z_2, \dots, z_n)}{d(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1$$

Przeszedłszy tak obliczanie wyznacznika funkcyjnego funkcyj uwikłanych czyli niewyraźnych, zajmiemy się obliczeniem wyznacznika funkcyj wyraźnych. Przypuśćmy więc, że n funkcyj $y_1, y_2, \dots, y_n$ złożonych, zależy od n ilości $z_1, z_2, \dots, z_n$ zmiennych, za pośrednictwem m ilości $w_1, w_2, \dots w_m$. Jest wtedy

$$d_p y_i = \sum_{t=1}^{t=m} \frac{dy_i}{dw_t} d_p w_t$$

zatem wyznacznik $d(y_1, y_2, \dots, y_n)$ podług tego jak m mniejsze lub nie, od n: jest zerem lub (str. 1053):

$$\begin{vmatrix} d_1 y_1, \dots, d_1 y_n \\ . \; . \; . \; . \; . \\ d_n y_1, \dots, d_n y_n \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dw_{a_1}}, \dots, \frac{dy_1}{dw_{a_n}} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \frac{dy_n}{dw_{a_1}}, \dots, \frac{dy_n}{dw_{a_n}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 w_{a_1}, \dots, d_1 w_{a_n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \\ d_n w_{a_1}, \dots, d_n w_{a_n} \end{vmatrix}$$

gdzie znak summowy, odnosi się do wszystkich zmian czyli kombinacyj liczb α to jest liczb $1, 2, 3, 4, \ldots, m$ branych po n w porządku rosnącym. Ztąd wnosimy, dzieląc przez $d(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ że : gdy m nie mniejsze od n jest :

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = \Sigma \frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \ldots, w_{\alpha_n})} \frac{d(w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \ldots, w_{\alpha_n})}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)}$$

gdzie znak summowy odnosi się do wszystkich $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$ zmian, czyli połączeń z m liczb $1, 2, \ldots, m$, branych po n w porządku rosnącym, zaś gdy $m < n$ jest :

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = 0$$

Dodamy tu chociaż może zbytecznie, że wyznacznik

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \ldots, w_{\alpha_n})}$$

ma być wzięty tak jak gdyby $y_1, y_2, \ldots, y_n$ byłytylko funkcjami $w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \ldots, w_{\alpha_n}$, pod czas gdy pozostałe ilości $w_{\alpha_n+1}, w_{\alpha_n+2}, \ldots, w_{\alpha_m}$, są uważane jako stałe. Rola tego wyznacznika jest podobną do roli pochodnéj częściowéj i dla tego nazwiemy go *wyznacznikiem funkcyjnym częściowym.*

W szczególnym przypadku gdy $n = 1$, to m jeżeli jest mniejsze od n, nie może być jak tylko zerem, i wtedy mamy $\frac{dy}{dz} = 0$. To łatwo się tłumaczy, gdyż wtedy y nie jest funkcją żadnego w czyli jest ilością stałą, co sprawia że pochodna jest zerem. Jeżeli zaś m nie mniejsze od n to wtedy jest

$$y = \mathrm{F}(w_1, w_2, \ldots, w_m), \ w_1 = f_1(z), \ w_2 = f_2(z), \ldots, w_m = f_m(z)$$

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{t=1}^{t=m} \frac{dy}{dw_t} \frac{dw_t}{dz}$$

co rzeczywiście jak wiadomo ma miejsce.

Weźmy nakoniec pod uwagę przypadek, w którym ilości $y_1, y_2, \dots, y_n$ są funkcjami funkcyj, przez co chcemy rozumieć że one zależą od ilości $z_1, z_2, \dots, z_n$, za pośrednictwem n ilości $y_{1.1}, y_{1.2}, \dots, y_{1.n}$, które zależą od innych $y_{2.1}, y_{2.2}, \dots, y_{2.n}$, i tak daléj, aż nakoniec ilości $y_{m.1}, y_{m.2}, \dots, y_{m.n}$, zależą od ilości niezależnych $z_1, z_2, \dots, z_n$. Wtedy jest widocznie

$$\frac{d(y_1, y_2, \dots, y_n)}{d(z_1, z_2, \dots z_n)} =$$

$$\frac{d(y_1, y_2, \dots, y_n)}{d(y_{1.1}, y_{1.2}, \dots, y_{1.n})} \frac{d(y_{1.1}, y_{1.2}, \dots, y_{1.n})}{d(y_{2.1}, y_{2.2}, \dots, y_{2.n})} \dots \frac{d(y_{m.1}, y_{m.2}, \dots, y_{m.n})}{d(z_1, z_2, \dots z_n)}$$

to odpowiada znanemu twierdzeniu funkcji funkcyj

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{\Delta y}{\Delta y_1} \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} \dots \frac{\Delta y_m}{dz} \quad \text{czyli} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dy_1} \frac{dy_1}{dy_2} \dots \frac{dy_m}{dz}$$

gdy

$$y = f(y_1), y_1 = f_1(y_2), \dots, y_m = f_m(z).$$

Sposób uważania wyznaczników funkcyjnych, jako iloraz wyznacznika przyrostów nieskończenie małych, funkcyj danych, podzielonego przez wyznacznik przyrostów zmiennych niezależnych, oprócz łatwości i podobieństwa z pochodną nawet w dowodzeniach, przedstawia jeszcze i tę ważną zaletę, że pozwala mnożyć, niejako nieokreślenie liczbę przekształceń wyznacznika funkcyjnego, a wiadomo ile ważną grają rolę przekształcenia w dowodzeniach, gdyż każde dowodzenie jest przekształcaniem jednych prawd, na inne.

W wyrażeniu wyznacznika funkcyjnego, jako stosunek wyznaczników przyrostów funkcyj i zmiennych, wchodzą nieoznaczone przyrosty zmiennych niezależnych i w tém leży głównie owo źródło przekształceń, i to tym większe, że można z pomiędzy $2n$ ilości $z_1, y_1, z_2, y_2, \dots, z_n, y_n$ wziąść n którekolwiek za niezależne i rozporządzać ich przyrostami. Zajmiemy się tu przypadkiem dosyć ogólnym, w którym $n-1$ z niezależnych ilości zostawimy stałemi, czyli uczynimy ich przyrosty zerami, i przez to przyrosty pozostałych $n+1$ zmiennych będą miały stosunki oznaczone. Wypisując w jednym wierszu poziomym przyrosty jednoczesne ilości $z_1, z_2, \dots, z_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, rozporządzimy niemi podług powyższéj uwagi, w następujący sposób :

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
d_1z_1, & 0, & \ldots, & 0, & d_1z_{n_1+1}, & d_1z_{n_1+2}, & \ldots, & d_1z_{n_1+n_2}, & d_1z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_1z_{n-n_m}, & d_1z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_1z_n, \\
0, & d_2z_2, & \ldots, & 0, & d_2z_{n_1+1}, & d_2z_{n_1+2}, & \ldots, & d_2z_{n_1+n_2}, & d_2z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_2y_{n-n_m}, & d_2z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_2z_n, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & d_{n_1}z_{n_1}, & d_{n_1}z_{n_1+1}, & d_{n_1}z_{n_1+2}, & \ldots, & d_{n_1}z_{n_1+n_2}, & d_{n_1}z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n_1}z_{n-n_m}, & d_{n_1}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n_1}z_n, \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & d_{n_1+1}z_{n_1+1}, & 0 & ,\ldots, & 0, & d_{n_1+1}z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n_1+1}z_{n-n_m}, & d_{n_1+1}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n_1+1}z_n \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & d_{n_1+2}z_{n_1+2} & ,\ldots, & 0, & d_{n_1+2}z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n_1+2}z_{n-n_m}, & d_{n_1+2}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n_1+2}z_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 & ,\ldots, & d_{n_1+n_2}z_{n_1+n_2}, & d_{n_1+n_2}z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n_1+n_2}z_{n-n_m}, & d_{n_1+n_2}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n_1+n_2}z_n \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & d_{n_1+n_2+1}z_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n_1+n_2+1}z_{n-n_m}, & d_{n_1+n_2+1}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n_1+n_2+1}z_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & d_{n-n_m}z_{n-n_m}, & d_{n-n_m}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n-n_m}z_n \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & d_{n-n_m+1}z_{n-n_m+1}, & \ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & d_nz_n
\end{array}
$$

przyrostami funkcyj zaś:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
d_1y_1, & \ldots, & d_n y_{n_1}, & 0 & ,\ldots & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
d_{n_1}y_1, & \ldots, & d_{n_1}y_{n_1}, & 0 & ,\ldots & 0, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0 \\
d_{n_1+1}y_1, & \ldots, & d_{n_1+1}y_{n_1}, & d_{n_1+1}y_{n_1+1}, & \ldots, & d_{n_1+1}y_{n_1+n_2}, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
d_{n_1+n_2}y_1, & \ldots, & d_{n_1+n_2}y_{n_1}, & d_{n_1+n_2}y_{n_1+1}, & \ldots, & d_{n_1+n_2}y_{n_1+n_2}, & 0 & ,\ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0 \\
d_{n_1+n_2+1}y_1, & \ldots, & d_{n_1+n_2+1}y_{n_1}, & d_{n_1+n_2+1}y_{n_1+1}, & \ldots, & d_{n_1+n_2+1}y_{n_1+n_2}, & d_{n_1+n_2+1}y_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & 0, & 0 & ,\ldots, & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
d_{n-n_m}y_1, & \ldots, & d_{n-n_m}y_{n_1}, & d_{n-n_m}y_{n_1+1}, & \ldots, & d_{n-n_m}y_{n_1+n_2}, & d_{n-n_m}y_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n-n_m}y_{n-n_m}, & 0 & ,\ldots, & 0 \\
d_{n-n_m+1}y_1, & \ldots, & d_{n-n_m+1}y_{n_1}, & d_{n-n_m+1}y_{n_1+1}, & \ldots, & d_{n-n_m+1}y_{n_1+n_2}, & d_{n-n_m+1}y_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_{n-n_m+1}y_{n-n_m}, & d_{n-n_m+1}y_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_{n-n_m+1}y_n, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
d_ny_1, & \ldots, & d_ny_{n_1}, & d_ny_{n_1+1}, & \ldots, & d_ny_{n_1+n_2}, & d_ny_{n_1+n_2+1}, & \ldots, & d_ny_{n-n_m}, & d_ny_{n-n_m+1}, & \ldots, & d_ny_n.
\end{array}
$$

i wtedy jest (str. 1047-1048).

$$d(z_1, z_2, \dots, z_n) = d_1 z_1 \, d_2 z_2 \dots d_n z_n$$

$$d(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 y_1, \dots, d_1 y_{n_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{n_1} y_1, \dots, d_{n_1} y_{n_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{n_1+1} y_{n_1+1}, \dots, d_{n_1+1} y_{n_1+n_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_{n_1+n_2} y_{n_1+1}, \dots, d_{n_1+n_2} y_{n_1+n_2} \end{vmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{vmatrix} d_{n-n_m+1} y_{n-n_m+1}, \dots, d_{n-n_m+1} y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_n y_{n-n_m+1}, \dots, d_n y_n \end{vmatrix}$$

a ztąd kształt odpowiedni wyznacznika funkcyjnego

$$\frac{d(y_1, y_2, \dots, y_n)}{d(z_1, z_2, \dots, z_n)}$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{d_1 y_1}{d_1 z_1}\right), \dots, \left(\frac{d_1 y_{n_1}}{d_1 z_1}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{d_{n_1} y_1}{d_{n_1} z_{n_1}}\right), \dots, \left(\frac{d_{n_1} y_{n_1}}{d_{n_1} z_{n_1}}\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left(\frac{d_{n_1+1} y_{n_1+1}}{d_{n_1+1} z_{n_1+1}}\right), \dots, \left(\frac{d_{n_1+1} y_{n_1+n_2}}{d_{n_1+1} z_{n_1+1}}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{d_{n_1+n_2} y_{n_1+1}}{d_{n_1+n_2} z_{n_1+n_2}}\right), \dots, \left(\frac{d_{n_1+n_2} y_{n_1+n_2}}{d_{n_1+n_2} z_{n_1+n_2}}\right) \end{vmatrix} \dots$$

$$\dots \begin{vmatrix} \left(\frac{d_{n-n_m+1} y_{n-n_m+1}}{d_{n-n_m+1} z_{n-n_m+1}}\right), \dots, \left(\frac{d_{n-n_m+1} y_n}{d_{n-n_m+1} z_{n-n_m+1}}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{d_n y_{n-n_m+1}}{d_n z_n}\right), \dots, \left(\frac{d_n y_n}{d_n z_n}\right) \end{vmatrix}$$

gdzie pochodne są zamknięte w nawiasy, dla wskazania że mają być wzięte nie wprost, lecz w sposób następujący. Zwróciwszy uwagę na przyrosty poprzednio wyżéj wypisane, widać że w pierwszych n_1 wierszach ilości $z_{n_1+1}, \dots, z_n, y_1, \dots, y_{n_1}$, są uważane jako funkcje $z_1, \dots, z_{n_1} y_{n_1+1}, \dots, y_n$, gdzie kolejno zmieniamy tylko $z_1, \dots, z_{n_1}$. W następnych n_2 wierszach, ilości $z_{n_1+n_2+1}, \dots, z_n, y_1, \dots, y_{n_1+n_2}$ są uważane jako funkcje $z_1, \dots, z_{n_1+n_2}, y_{n_1+n_2+1}, \dots, y_n$ gdzie kolejno zmieniamy tylko $z_{n_1+1}, \dots, z_{n_1+n_2}$, i tak daléj, aż nakoniec w n_m

ostatnich wierszach ilości $y_1, \ldots, y_n$, są uważane jako funkcje ilości $z_1, \ldots, z_n$, gdzie kolejno zmieniamy tylko ilości $z_{n-n_m+1}, \ldots, z_n$. Chcąc więc pochodne zamknięte w nawiasach obliczyć, można albo wprost w tém przypuszczeniu obliczyć takowe, lub też wprzód przekształcić dany układ n równań

$$F_l(z_1, z_2, \ldots, z_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \qquad (1 \leqq l \overline{\overline{<}} n),$$

na inny z nim równoznaczny następujący:

$$\begin{array}{ll} y_{l_1} = f_{l_1}(z_1, \ldots, z_{n_1}, y_{n_1+1}, \ldots, y_n), & (1 \leqq l_1 \overline{\overline{<}} n), \\ y_{l_2} = f_{l_2}(z_1, \ldots, z_{n_1+n_2}, y_{n_1+n_2+1}, \ldots, y_n), & (n_1+1 \leqq l_2 \overline{\overline{<}} n_1+n_2), \\ \ldots & \ldots \\ y_{l_m} = f_{l_m}(z_1, \ldots, z_n), & (n-n_m+1 \leqq l_m \overline{\overline{<}} n) \end{array}$$

i następnie wynaleźć pochodne.

Godnym uwagi jest szczególny przypadek, gdy $m=n$ czyli gdy

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1,$$

wtedy wyznacznik funkcyjny przybiera kształt prosty

$$\frac{d(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{d(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = \left(\frac{d_1 y_1}{d_1 z_1}\right)\left(\frac{d_2 y_2}{d_2 z_2}\right) \ldots \left(\frac{d_n y_n}{d_n z_n}\right)$$

gdzie nawiasy przypominają, że pochodne częściowe powinny być wzięte w przypuszczeniu

$$y_1 = f_1(z_1, y_2, \ldots, y_n), \; y_2 = f_2(z_1, z_2, y_3, \ldots, y_n), \ldots$$
$$\ldots, y_n = f_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Ten wniosek, pozwala bardzo prosto dowieść twierdzenia wyżéj dowiedzionego że: warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby między n funkcjami tyluż zmiennych niezależnych, zachodził związek niezależny od tych ostatnich, potrzeba i dostateczném jest, aby wyznacznik funkcyjny odpowiedni był zerem. Nie będziemy jednakże rozstrzymywać się nad tém dowodzeniem, i powiemy tylko, że tyle czynników iloczynu

$$\left(\frac{d_1 y_1}{d_1 z_1}\right)\left(\frac{d_2 y_2}{d_2 z_2}\right) \ldots \left(\frac{d_n y_n}{d_n z_n}\right)$$

zamienia się na zero, ile jest związków między funkcjami, zostawiając czytelnikowi dowiedzenie tego ostatniego twierdzenia.

Przypadek gdy $m=1$, a więc gdy jest $n_1=n$, daje

$$\frac{d\,(y_1, y_2, \dots, y_n)}{d\,(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{d_1 y_1}{d_1 z_1}\right), \dots, \left(\frac{d_1 y_n}{d_1 z_1}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{d_n y_1}{d_n z_n}\right), \dots, \left(\frac{d_n y_n}{d_n z_n}\right) \end{vmatrix}$$

gdzie ponieważ, zmienne $y_1, y_2, \dots, y_n$ są uważane jako funkcje $z_1, z_2, \dots, z_n$, to jest tak jak to miało miejsce przy określeniu wyznacznika funkcyjnego, zatém nawiasy (które wprowadzone zostały dla wykazania pewnéj szczególnie uważanéj zależności między zmiennemi) można opuścić. Przypadek więc $m=1$ wraca nas do kształtu już poprzednio znanego.

Zakończymy te badania, zwróceniem uwagi na jeden szczególny rodzaj wyznaczników funkcyjnych, mianowicie gdy funkcje $y_1, y_2, \dots y_n$ są odpowiednio pochodnemi częściowemi jednéj funkcji w zależącéj od n zmiennych niezależnych $z_1, z_2, \dots, z_n$, względem tychże zmiennych. Wyznacznik ten obdarzony wielu użytecznemi własnościami nazwał p. Hesse, *wyznacznikiem funkcji y* względem tychże zmiennych. P. Silwester nazywa go wyznacznikiem Hess'ego (*Hessian*); my jednakże mimo całéj powagi tego znakomitego matematyka, używać będziemy nazwiska poprzedzającego, które lepiéj rzecz przedstawia.

Dowiedziemy tu jednéj własności wyznacznika funkcji w, n zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_n$, wiążący się z obszerną już dzisiaj teorją niezmienników (*invariant*), współzmienników (*covariant*), i t. d., stworzoną przez p. Kele, i ciągle rozszerzaną pracami p. Silwestr'a i innych.

Jeżeli przekształcimy funkcję w za pomocą *podstawienia linijnego*

$$z_i = \sum_{k_i=1}^{k_i=n} a_{i,k_i} y_{k_i}, \qquad (1 \leqq i \lesseqgtr n),$$

przez co funkcja w, stanie się funkcją n zmiennych $y_1, y_2, \dots, y_n$; to wyznacznik funkcji przekształconéj, jest zawsze równy, wyznacznikowi funkcji danéj, pomnożonemu przez *wyznacznik podstawienia*:

$$W_n = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, a_{1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n,1}, \dots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

podniesiony do potęgi drugiéj.

W powyższych bowiem warunkach jest

$$\frac{d^2w}{dy_i dy_k} = \frac{d}{dy_k}\left(\frac{dw}{dy_i}\right) = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{d^2w}{dy_i dz_l}\frac{dz_l}{dy_k} = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{d^2w}{dy_i dz_l} a_{l,k}$$

a więc na mocy tego równania, wyznacznik funkcji przekształconéj jest:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dy_1dy_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_1dy_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2w}{dy_ndy_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_ndy_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dy_1dz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_1dz_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2w}{dy_ndz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_ndz_n} \end{vmatrix} W_n,$$

gdzie pozostaje wyrugować wyznacznik pierwszy strony drugiéj. W tym celu uważmy że równanie

$$\frac{dw}{dy_i} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{dw}{dz_m}\frac{dz_m}{dy_i} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{dw}{dz_m} a_{m,i}$$

prowadzi do następującego

$$\frac{d^2w}{dy_i dz_k} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{dw}{dz_m dz_k} a_{m,i}$$

które dając

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dy_1dz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_1dz_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2w}{dy_ndz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_ndz_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dz_1dz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dz_1dz_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2w}{dz_ndz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dz_ndz_n} \end{vmatrix} W_n$$

pozwala uskutecznić rugowanie powyższe, i przez to dowieść zamierzonego twierdzenia, mianowicie:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dy_1dy_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_1dy_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2w}{dy_ndy_1}, \dots, \frac{d^2w}{dy_ndy_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2w}{dz_1dz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dz_1dz_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^2w}{dz_ndz_1}, \dots, \frac{d^2w}{dz_ndz_n} \end{vmatrix} W_n^2.$$

Następujący przykład ma na widoku pokazanie zastosowania wyznaczników do gieometrji, mianowicie znalezienie związku między odległościami pięciu punktów położonych jakkolwiek w przestrzeni. Zadaniem tém zajmowali się Lagranż i Karno (CARNOT), rozwiązał je jednak najzręczniéj p. Kele, i jego to rozwiązanie tu przedstawiamy.

Oznaczmy przez z_i, y_i, x_i, współrzędne prostokątne punktu A_i, i przypuśćmy, że dla odróżnienia pięciu punktów między sobą, i przybiera pięć znaczeń $1, 2, 3, 4, 5$. Oznaczmy przytém przez w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, pięć ilości dowolnych i oprócz tego dla krótkości założmy

$$x^2_i + y^2_i + z^2_i + w^2_i = a^2_{0,i}$$

Wykonawszy iloczyn dwóch wyznaczników szóstego stopnia W_6 i $-16\,W_6$ czyli:

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & a^2_{0,1}, & x_1, & y_1, & z_1, & w_1 \\ 1, & a^2_{0,2}, & x_2, & y_2, & z_2, & w_2 \\ 1, & a^2_{0,3}, & x_3, & y_3, & z_3, & w_3 \\ 1, & a^2_{0,4}, & x_4, & y_4, & z_4, & w_4 \\ 1, & a^2_{0,5}, & x_5, & y_5, & z_5, & w_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ a^2_{0,1}, & 1, & -2x_1, & -2y_1, & -2z_1, & -2w_1 \\ a^2_{0,2}, & 1, & -2x_2, & -2y_2, & -2z_2, & -2w_2 \\ a^2_{0,3}, & 1, & -2x_3, & -2y_3, & -2z_3, & -2w_3 \\ a^2_{0,4}, & 1, & -2x_4, & -2y_4, & -2z_4, & -2w_4 \\ a^2_{0,5}, & 1, & -2x_5, & -2y_5, & -2z_5, & -2w_5 \end{vmatrix}$$

i oznaczywszy dla krótkości

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 + (w_i - w_k)^2 = a^2_{i,k},$$

to iloczyn powyższy przedstawi się w kształcie:

$$-16\,W_6^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & a^2_{1,1}, & a^2_{1,2}, & a^2_{1,3}, & a^2_{1,4}, & a^2_{1,5} \\ 1, & a^2_{2,1}, & a^2_{2,2}, & a^2_{2,3}, & a^2_{2,4}, & a^2_{2,5} \\ 1, & a^2_{3,1}, & a^2_{3,2}, & a^2_{3,3}, & a^2_{3,4}, & a^2_{3,5} \\ 1, & a^2_{4,1}, & a^2_{4,2}, & a^2_{4,3}, & a^2_{4,4}, & a^2_{4,5} \\ 1, & a^2_{5,1}, & a^2_{5,2}, & a^2_{5,3}, & a^2_{5,4}, & a^2_{5,5} \end{vmatrix}$$

gdzie $a^2_{i,i} = 0$. Przypuściwszy że w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, są zerami, to wtedy W_6 jest także zerem, bo ma ostatni wiersz pionowy złożony z zer, zas $a^2_{i,k}$ oznacza kwadrat z odległości punktu A_k odpunktu A_i, i związek żądany jest:

$$0=\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2_{1,2}, & a^2_{1,3}, & a^2_{1,4}, & a^2_{1,5} \\ 1, & a^2_{2,1}, & 0, & a^2_{2,3}, & a^2_{2,4}, & a^2_{2,5} \\ 1, & a^2_{3,1}, & a^2_{3,2}, & 0, & a^2_{3,4}, & a^2_{3,5} \\ 1, & a^2_{4,1}, & a^2_{4,2}, & a^2_{4,3}, & 0, & a^2_{4,5} \\ 1, & a^2_{5,1}, & a^2_{5,2}, & a^2_{5,3}, & a^2_{5,4}, & 0 \end{vmatrix}$$

Zwrócimy uwagę, że odejmując wyznacznikowi drugiej strony ostatniego równania, szóste wiersze, pionowy i poziomy, a następnie piąte wiersze pionowy i poziomy; otrzymamy odpowiednio, związki między czterema punktami jednéj płaszczyzny i trzema punktami linji prostéj. Otrzymujemy tym sposobem, pewnego rodzaju równania, płaszczyzny danéj przez trzy punkta, i prostéj danéj przez dwa punkta.

Równanie powyższe między odległościami pięciu punktów w przestrzeni, daje rozwiązanie bardzo proste i symetryczne zadania nakreślenia kuli stycznéj do czterech kul danych, które zajmowało wielu matematyków, a których rozwiązania nie są równie prostemi. Zadanie sprowadza się widocznie, do znalezienia promienia kuli stycznéj, a który otrzymuje się w następujący sposób:

Jeżeli A_i, oznacza jeden ze środków pięciu kul, zaś p_i, promień téjże kuli, to równanie powyżéj otrzymane, zmieniając w wyznaczniku, znaki składników (elementów), 2go, 3go, 4go, 5go, 6go wiersza poziomego, oraz 1go pionowego, co wychodzi razem na pomnożenie wyznacznika przez $(-1)^6$, przybiera kształt:

$$0=\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & -a^2_{1,2}, & -a^2_{1,3}, & -a^2_{1,4}, & -a^2_{1,5} \\ 1, & -a^2_{2,1}, & 0, & -a^2_{2,3}, & -a^2_{2,4}, & -a^2_{2,5} \\ 1, & -a^2_{3,1}, & -a^2_{3,2}, & 0, & -a^2_{3,4}, & -a^2_{3,5} \\ 1, & -a^2_{4,1}, & -a^2_{4,2}, & -a^2_{4,3}, & 0, & -a^2_{4,5} \\ 1, & -a^2_{5,1}, & -a^2_{5,2}, & -a^2_{5,3}, & -a^2_{5,4}, & 0 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik się nie zmieni, jeżeli dodamy odpowiednio składniki pierwszego wiersza kolejno poziomego i pionowego pomnożone przez p_i^2, do składników $i$tego wiersza równoległego. Oznaczywszy więc $p^2_i+p^2_k-a^2_{i,k}$ przez $2b^2_{i,k}$, i dzieląc składniki 2go, 3go, 4go, 5go, 6go wiersza poziomego przez 2, a mnożąc składniki 1go wiersza pionowego przez 2, (co wychodzi na podzielenie wyznacznika przez

2[4]), równanie powyższe zamienia się na :

$$0=\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & p^2_1, & b^2_{1,2}, & b^2_{1,3}, & b^2_{1,4}, & b^2_{1,5} \\ 1, & b^2_{2,1}, & p^2_2, & b^2_{2,3}, & b^2_{2,4}, & b^2_{2,5} \\ 1, & b^2_{3,1}, & b^2_{3,2}, & p^2_3, & b^2_{3,4}, & b^2_{3,5} \\ 1, & b^2_{4,1}, & b^2_{4,2}, & b^2_{4,3}, & p^2_4, & b^2_{4,5} \\ 1, & b^2_{5,1}, & b^2_{5,2}, & b^2_{5,3}, & b^2_{5,4}, & p^2_5 \end{vmatrix}$$

Jeżeli A_5 jest środkiem kuli stycznéj szukanéj, to wtedy

$$a_{i,5}=p_i+p_5$$

$$\frac{b_{i,5}}{p_5}=\frac{p^2_i+p^2_5-a^2_{i,5}}{2p_5}=-p_i$$

dzieląc więc szóste wiersze wyznacznika, poziomy i pionowy przez p_5, co wychodzi na podzielenie wyznacznikaprzez (p_5^2), otrzymujemy ostatecznie, równanie drugiego stopnia względem p_5^{-1}, następujące :

$$0=\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & p_5^{-1} \\ 1, & p^2_1, & b^2_{1,2}, & b^2_{1,3}, & b^2_{1,4}, & -p_1 \\ 1, & b^2_{2,1}, & p^2_2, & b^2_{2,3}, & b^2_{2,4}, & -p_2 \\ 1, & b^2_{3,1}, & b^2_{3,2}, & p^2_3, & b^2_{3,4}, & -p_3 \\ 1, & b^2_{4,1}, & b^2_{4,2}, & b^2_{4,3}, & p^2_4, & -p_4 \\ p_5^{-1}, & -p_1, & -p_2, & -p_3, & -p_4, & -1 \end{vmatrix}$$

czyli

$$0=\begin{vmatrix} 0, & p_5^{-1}, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ p_5^{-1}, & -1, & -p_1, & -p_2, & -p_3, & -p_4 \\ 1, & -p_1, & p^2_1, & b^2_{1,2}, & b^2_{1,3}, & b^2_{1,4} \\ 1, & -p_2, & b^2_{2,1}, & p^2_2, & b^2_{2,3}, & b^2_{2,4} \\ 1, & -p_3, & b^2_{3,1}, & b^2_{3,2}, & p^2_3, & b^2_{3,4} \\ 1, & -p_4, & b^2_{4,1}, & b^2_{4,2}, & b^2_{4,3}, & p^2_4 \end{vmatrix}$$

dające się zatém łatwo rozwiązać. Zostawiając roztrząsanie tego równania czytelnikowi, powiemy tylko że ponieważ zmiana znaków wszystkich promieni, nie narusza w niczém powyższego równania; otrzymamy więc wszystkie rozwiązania możebne zadania, robiąc co do znaków promieni danych p_1, p_2, p_3, p_4, zamiast wszystkich $2^4=16$ przypuszczeń, połowę tylko, mianowicie:

albo	p_1,	p_2,	p_3,	p_4,	albo też	p_1,	p_2,	p_3,	p_4
1	+,	+,	+,	+		—,	—,	—,	—
2	+,	+,	+,	—		—,	—,	—,	+
3	+,	+,	—,	+		—,	—,	+,	—
4	+,	—,	+,	+		—,	+,	—,	—
5	+,	+,	—,	—		—,	—,	+,	+
6	+,	—,	+,	—		—,	+,	—,	+
7	+,	—,	—,	+		—,	+,	+,	—
8	+,	—,	—,	—		—,	+,	+,	+

co, ponieważ równanie jest drugiego stopnia, daje w ogólności szesnaście kul stycznych.

Odejmując ostatniemu wyznacznikowi szóste wiersze poziomy i pionowy, otrzymamy równanie drugiego stopnia, rozwiązujące zadanie nakreślenia koła stycznego do trzech kół danych, i przekonamy się że w ogólności jest ośm kół stycznych do trzech kół danych.

Kończąc, winienem kilka słów czytelnikowi, usprawiedliwiających rozmiary i treść, jakie nadałem powyższéj pracy. Powiem więc, że szczupłe rozmiary przypisku nie pozwalały mi jak tylko przedstawić zasady najgłówniejsze teorji, a zamilczeć o ostatnich jéj postępach. Przytém zdawało mi się być ważném, poprzedzenie teorji opisaniem chociaż krótkiém historji wyznaczników, (część w ogólności zaniedbaną, we wszystkich naukach ścisłych), oraz dodanie zbioru przykładów dla wprawy początkujących. Co się tyczy wiadomości historycznych, czerpałem takowe w źródłach oryginalnych, i starałem się podać jak najdokładniéj; w wykładzie zaś teorji starałem się przedewszystkiém o ścisłość, ogólność i symetrję dowodzeń, a dla objaśnienia i zastosowania teorji, podałem rozwiązanie kilku zagadnień algiebraicznych lub gieometrycznych, jak: okazanie że równania pierwszego stopnia określając różniczki wielu funkcyj niewyraźnych, są zawsze wystarczające i niesprzeczne,(str. (1064-1065) lub nakreślenie kuli stycznéj do czterech kul danych.

Nakoniec dodam, że pracę tę przedsięwziąłem w zamiarze ułatwienia początkującym, poznania ważnéj teorji wyznaczników, i że zatém zbyteczném byłoby, trudzić uwagę czytelnika, wykazując mu co może być mego własnego w téj pracy. Będę się więc uważał za szczęśliwego, jeżeli ta praca odda choć małą usługę początkującym, a szczególniéj jeżeli zachęci którego ze światłych rodaków, do obdarzenia naszéj literatury, wykładem obszernym téj pięknéj, a zarazem tyle obiecującéj gałęzi matematyki.

Paryż, dnia 28 listopada 1869 roku.

W. Trzaska.

Przykłady dla wprawy.

1. Znaleźć liczbę kształtów, jakie daje wyznacznikowi stopnia n twierdzenie Wandermąda (str. 1043-1046).

2. Jeżeli z jednéj strony przekątnéj wyznacznika, wyobrażniki są zerami, to wyznacznik jest równy jednemu z iloczynów.

$$a_{1,1}, a_{2,2} \dots a_{n,n},$$

$$\text{lub też} \quad (-1)^{n-\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{2}} a_{1,n}\, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$$

3. Okazać że jeżeli tak $i_1, i_2, \dots, i_n$, jako też i $k_1, k_2, \dots, k_n$ oznaczają liczby $1, 2, \dots, n$, to jest zawsze

$$\frac{i_1}{k_1}\Big|\frac{i_2}{k_2}\Big|\frac{\dots}{\dots}\Big|\frac{i_n}{k_n} = \frac{k_1}{i_1}\Big|\frac{k_2}{i_2}\Big|\frac{\dots}{\dots}\Big|\frac{k_n}{i_n}$$

albo inaczéj

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,k_1}, \dots, a_{i_1,k_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i_n,k_1}, \dots, a_{i_n,k_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k_1,i_1}, \dots, a_{k_1,i_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{k_n,i_1}, \dots, a_{k_n,i_n} \end{vmatrix}$$

4. Okazać że wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ -b, & a, & -d, & c \\ -c, & d, & a, & -b \\ -d, & -c, & b, & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1, & a_1+a_2, & a_1a_2 \\ 1, & b_1+b_2, & b_1b_2 \\ 1, & c_1+c_2, & c_1c_2 \end{vmatrix},$$

są odpowiednio równe

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,$$
$$(a_1-b_2)(b_1-c_2)(c_1-a_2)+(a_2-b_1)(b_2-c_1)(c_2-a_1).$$

5. Okazać że wyznacznik $(n+1)^{go}$ stopnia $W_{n+1}(a_{i,k})$, wktórym jest $a_{i,k}=i^{k-1}$, jest równy $(1)(1.2)(1.2.3)\dots(1.2\dots n.)$.

6. Oznaczmy przez A, wyznacznik następujący :

$$\begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \\ a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n \quad, a_1 \\ a_3, a_4, a_5, \dots, a_n \quad, a_1 \quad, a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Jeżeli pomnożymy wyznacznik A, przez podobny wyznacznik, w którym a jest zastąpione przez b, a który nazwiemy B; iloczyn będzie podobnym wyznacznikiem C, w którym a, zastępują ilości :

$$\begin{array}{l} c_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_{n-1} b_n + a_n b_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_n = a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-2} + a_n b_{n-1} \end{array}$$

lub też

$$\begin{array}{l} c_1 = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 \\ c_2 = a_1 b_1 + a_2 b_n + \dots + a_{n-1} b_3 + a_n b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_n \end{array}$$

i wyznacznik C, jest poprzedzony odpowiednio znakiem + lub —, podług tego, jak n, podzielone przez 4, daje w pierwszym razie, reszty 1 i 2 lub 3 i 0, a w drugim razie reszty 0 i 1 lub też 2 i 3.

7. Okazać że gdy $n > 2$ to $W_n(a_i + b_k) = 0$. Naprzykład, gdy $n = 5$, $a_i = (i-1)n, b_k = k$; jest :

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10 \\ 11, & 12, & 13, & 14, & 15 \\ 16, & 17, & 18, & 19, & 20 \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25 \end{vmatrix} = 0$$

8. Jeżeli jest :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{i=m} a_i z^{m-i} = \sum_{k=0}^{k=n-1} b_k z^k$$

gdzie

$$b_k = \sum_{l=1}^{l=p} a_{ln+k} z^{ln}, \qquad (pn + k \overline{\gtrless} m)$$

to jeżeli α, oznacza pierwiastek pierwotny równania $\alpha^n - 1 = 0$, to jest pierwiastek który podnoszony do różnych potęg, daje wszystkie pierwiastki tegoż równania to wtedy jest :

$$\begin{vmatrix} b_0z^0, b_1z^1, b_2z^2, \ldots, b_{n-1}z^{n-1} \\ b_{n-1}z^{n-1}, b_0z^0, b_1z^1, \ldots, b_{n-2}z^{n-2} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ b_1z^1, b_2z^2, b_3z^3, \ldots, b_0z^0 \end{vmatrix}$$

$$= f(\alpha^0 z) f(\alpha^1 z) f(\alpha^2 z) \ldots f(\alpha^{n-1} z),$$

i jeżeli podstawimy y zamiast z^n, to równając wyznacznik powyższy z zerem otrzymamy równanie którego pierwiastkami. są *n*te potęgi pierwiastków równania $f(z) = 0$.

9. Jeżeli $a_{i,k}$ i $a_{k,i}$, oznaczają ilości złożone (urojone) sprzężone, (a więc jeżeli są rzeczywistemi, to są zarazem i równemi) zaś $a_{i,i}$ rzeczywiste, to wyznacznik :

$$W_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{1,1}-z, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n-1}, & a_{n,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}-z, \ldots, & a_{2,n-1}, & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, \ldots, & a_{n-1,n-1}-z, & a_{n-1,n} \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n-1}, & a_{n,n}-z \end{vmatrix}$$

jest ilością rzeczywistą. Równanie $W_n = 0$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste i nadto liczba jego pierwiastków zawartych między ilościami rzeczywistemi z_1, z_2 takiemi, że $z_1 < z_2$, jest równą przewyżce liczby wyrazów dodatnich szeregu $W_1, W_2, \ldots, W_n$ jakie wypadną. podstawiając w nim kolejno $z = z_2$ i $z = z_1$.

10. Jeżeli α_k oznacza pierwiastek pierwotny równania $\alpha^n - 1 = 0$, tak że $\alpha_k = \alpha^k$, i nadto, jeżeli założymy że $\theta_k = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \alpha^i_k$, to wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \\ a_1, a_2, \ldots, a_0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n.$$

Jeżeli więc $a_i = a + ib$, to wyznacznik jest wtedy równy

$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(nb)^{n-1}(a+\frac{1}{2}(n-1)b)$. Naprzykład :

$$\begin{vmatrix} 1, 2, 3, \ldots, n \\ 2, 3, 4, \ldots, 1 \\ 3, 4, 5, \ldots, 2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ n, 1, 2, \ldots, n-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(n+1)$$

Jeżeliby bylo $a_0 = a$ i $a_{i+1} = ba_i$, to wtedy wyznacznik byłby równy

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n (b^n - 1)^{n-i}$$

11. Jeżeli $z, z_2, \ldots, z_n$ są pierwiastkami równania

$$0 = Z = \sum_{i=0}^{i=n} a_i z^{n-i}$$

gdzie $a_0 = 1$, to wtedy jest

$$\begin{vmatrix} z_1, & z, & z, \ldots, z \\ z, & z_2, & z, \ldots, z \\ z, & z, & z_3, \ldots, z \\ . & . & . \quad . \quad . \\ z, & z, & z, \ldots, z_n \end{vmatrix} = (-1)^n \left(Z - z\frac{dZ}{dz}\right)$$

a nadto jeżeli $z_{i,k}$ jest jednym z $n-i$ pierwiastków równania $\frac{d^iZ}{dz^i} = 0$, jest także

$$Z = \sum_{p=0}^{p=n-2} (-1)^{n-p} \begin{vmatrix} z_{p,1}, & z, \ldots, z \\ z, & z_{p,2}, \ldots, z \\ . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ z, & z, \ldots, z_{p,n-p} \end{vmatrix} z^p +$$

$$+ (1.2.3.4\ldots n)(z - z_{n-1,1})z^{n-1}.$$

12. Okazać że wyznaczniki $(n+1)$go i $n$go stopnia

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \dots, 1 \\ 1; & 1+a_1, & 1, \dots, 1 \\ 1, & 1, & 1+a_2, \dots, 1 \\ . & . & . \quad . \quad . \quad . \\ 1, & 1, & 1, \dots, 1+a_n \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1+a_1, & 1, \dots, 1 \\ 1, & 1+a_2, \dots, 1 \\ . & . \quad . \quad . \\ 1, & 1, \dots, 1+a_n \end{vmatrix}$$

są odpowiednio równe ilościom

$$a_1 a_2 \dots a_n \text{ i } a_1 a_2 \dots a_n (1 + a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1});$$

zaś wyznacznik $n$go stopnia

$$\begin{vmatrix} a, & 1, 0, \dots, 0, & 0, 0 \\ n-1, & a, 2, \dots, 0, & 0, 0 \\ 0, n-2, & a, \dots, 0, & 0, 0 \\ . & . \quad . \quad . & . \\ 0, & 0, 0, \dots, a, n-2, & 0 \\ 0, & 0, 0, \dots, 2, & a, n-1 \\ 0, & 0, 0, \dots, 0, & 1, a \end{vmatrix}$$

jest równy podług tego jak jest n nieparzyste lub parzyste iloczynowi :

$$a(a^2-2^2)(a^2-4^2)\dots(a^2-(n-1)^2) = \prod_{i=1}^{i=\frac{n-1}{2}} (a^2-(2i)^2)$$

lub

$$(a^2-1^2)(a^2-3^2)\dots(a^2-(n-1)^2) = \prod_{i=1}^{i=\frac{n}{2}} (a^2-(2i-1)^2)$$

a nareszcie :

$$\begin{vmatrix} a, & b, & 0, \dots, & 0, 0 \\ n(b-1), & a-1, & 2b, \dots, & 0, 0 \\ 0, & (n-1)(b-1), & a-2, \dots, & 0, 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, \dots, a-n+1, & nb \\ 0, & 0, & 0, \dots, b-1, & a-n \end{vmatrix},$$

$$= \prod_{i=0}^{i=n} (a-nb-i(1-2b)), \text{ co gdy } b=\frac{1}{2} \text{ jest } \left(a+\frac{n}{2}\right)^{n+1}.$$

13. Jeżeli oznaczymy przez $\Sigma a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n}$ funkcyę symetryczną, całkowitą, wymierną n ilości $a_1, a_2, \dots a_n$, i jeżeli między ilościami b jest odpowiednio równych między sobą $c_1, c_2, \dots, c_m$ tak, że $c_1 + c_2 \dots + c_m = n$; to oznaczywszy dla krótkości Σa^b przez s_b, okazać że jest

$$\Sigma a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n} = \frac{1}{c_1!\, c_2! \dots c_m!} \begin{vmatrix} s_{b_1}, & (s_{b_1}), & \dots, & (s_{b_1}) \\ (s_{b_2}), & s_{b_2}, & \dots, & (s_{b_2}) \\ . & . & . & . \\ (s_{b_n}), & (s_{b_n}), & \dots, & s_{b_n} \end{vmatrix}$$

gdzie $c! = 1.2.3 \dots c$, przypuszczając że w rozwinięciu wyznacznika, ile razy będzie iloczyn złożony z czynników w nawiasach, tyle razy zastąpiony będzie przez czynnik bez nawiasu, lecz którego wskaźnik będzie summą wskaźników, czynników zawartych w nawiasach. Naprzykład wyraz $s_{b_1} \dots s_{b_p} (s_{b_{p+1}}) \dots (s_{b_n})$ zastąpiony byłby przez $s_{b_1} \dots s_{b_p} s_{b_{p+1} + \dots + b_n}$.

14. Jeżeli między n funkcjami $y_1, y_2, \dots, y_n$, tyluż zmiennych niezależnych $z_1, z_2, \dots, z_n$, istnieje m związków

$$F_l(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \qquad (1 \leqq l \lesseqgtr m < n),$$

to wtedy można nważać $y_1, y_2, \dots, y_{n-m}$, jako funkcje tyluż zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_{n-m}$.

Pytanie czy prawdziwém jest wtedy równanie

$$\frac{d(F_1, \dots, F_m)}{d(z_n, \dots, z_{n-m+1})} \frac{d(y_1, \dots, y_{n-m})}{d(z_1, \dots, z_{n-m})} = \\ = \frac{d(F_1, \dots, F_m)}{d(y_n, \dots, y_{n-m+1})} \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(z_1, \dots, z_n)} ?$$

15. Okazać że jeżeli z, y, są funkcjami wielu zmiennych, zaś d^i oznacza, albo i różniczkowań zupełnych, albo branie i razy pochodnych częściowych, to wyznacznik

$$W_{n+1}(d^{k-1} z y^{i-1}) = (1!\, 2! \dots n!)\, z^{n+1} dy^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Jeżeli zaś w wyznaczniku $W_{n+1}(a_{i,k})$ podstawimy za $a_{i,k}$ kolejno $\cos^{n-k+1}\alpha_{n-i+1}$, $\cos(n-k+1)\alpha_{n-i+1}$, $\operatorname{wst}(n-k+2)\alpha_{n-i+1}$ i nazwiemy odpowiednio wyznaczniki przez A_1 A_2, A_3 okazać że jest :

$$\frac{A_2}{A_1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{A_3}{A_1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{wst}\alpha_0 \operatorname{wst}\alpha_1 \ldots \operatorname{wst}\alpha_n$$

16. Okazać że jeżeli $u=F(y), y=f(z)$ i jeżeli oznaczemy liczbę zmian (kombinacyj) z n rzeczy ,branych po m, czyli

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.\ldots m}$$

przez $Z_{n,m}$, to wtedy pochodna $\frac{d^n u}{dz^n}$ jest :

$$(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \frac{d^n y}{dz^n}u, & \frac{dy}{dz}u, & Z_{n-1,1}\frac{d^2y}{dz^2}u, & \ldots, & Z_{n-1,n-2}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}u \\ \frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}u, & -1, & \frac{dy}{dz}u, & \ldots, & Z_{n-2,n-3}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}u \\ \frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}}u, & 0, & -1, & \ldots, & Z_{n-3,n-4}\frac{d^{n-3}y}{dz^{n-3}}u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^2y}{dz^2}u, & 0, & 0, & \ldots, & \frac{dy}{dz}u \\ \frac{dy}{dz}u, & 0, & 0, & \ldots, & -1 \end{vmatrix}$$

byle w rozwinięciu wyznacznika potęgi ilości u, zastąpić przez pochodne tegoż rzędu brane względem y.

17. Aby powierzchnia $0=u=f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ była stożkiem lub walcem, potrzeba i dostateczném jest, aby jeżeli założymy dla krótkości $\frac{d^2u}{dz_i dz_k}=u_{i,k}$, a nadto $W_4(u_{i,k})=w$, aby było odpowiednie $w=0$ w razie stożka, zaś $w=0$ i $\frac{dw}{du_{4,k}}=0$ wrazie walca, gdzie dostatecznem jest przypuścić $k=4$.

Nadto, w razie stożka, współrzędne środka są: $\alpha_i = \frac{dw}{du_{i,k}}$ gdzie k przybierając cztery znaczenia 1, 2, 3, 4, daje cztery współrzędne; zaś w razie walca, kierunek tworzących jest dany przez trzy równania $\alpha_i = \frac{dw}{du_{i,k}} \alpha$, gdzie k różne od 4, zaś i przybiera trzy znaczenia 1, 2, 3. Jeżeli więc współrzędne są prostokątne, ilości α_i są proporcjonalne do dostaw kątów, jakie tworzące walca czynią z osiami współrzędnych.

KONIEC PRZYPISKU.

OMYŁKI DRUKARSKIE

Str.	Wiersz	Napisano	Powinno być.
22	ostatni	przez u_1	u przez u_1
24	7 od dołu	dowolne wartości	dowolne; wartości
27	4 od góry	$\frac{m(m-1}{1.2}, y_{m-2}$	$\frac{m(m-1)}{1.2} y_{m-2}$
38	14 »	$y = ax^u$	$y = ax^n$
54	6 »	piewszego	pierwszego
110	2 od dołu	$p + \frac{z^2}{q} = 2x$	$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$
112	pierwszy	drugę	drugą
126	9 od dołu	i wst $n\omega)$	ι wst $m\omega$
154	11 od góry	$a^{1,782}$	$a^{1,732}$
198	9 od góry	w szereg	na szereg
203	15 »	$e = 2,71281828459045...$	$e = 2,718281828459045...$
205	4 »	w szereg	na szereg
250	3 od góry	M	M′
250	5 od góry	M′Q	M′P
252	3 »	drugiego	pierwszego
313	9 »	$\frac{da^x}{ax} = a^x \log a$	$\frac{da^x}{ax} = a^x \, \mathrm{l.}\, a$
333	10 »	$\frac{dx^x}{dx} =$	$\frac{dx^x}{dx} = 0$
354	5 od dołu	piszmey	piszemy
355	5 od góry	$D^n_x y = \frac{y}{dx^n}$	$D^n_x y = \frac{d^n y}{dx^n}$
397	5 »	$\frac{\partial n}{\partial f}$	$\frac{\partial u}{\partial f}$
401	6 od dołu	$\frac{\Delta u}{du} = 1 + \frac{\alpha\Delta x +}{\frac{\partial u}{\partial x} dx +}$	$\frac{\Delta u}{du} = 1 + \frac{\alpha\Delta x + \dots}{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots}$
406	8 od dołu	dn	du
414	ostatni	$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$	(5) $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$
444	7 od góry	$-\rho^2 d^2\rho d\omega$	$-\rho d^2\rho d\omega$
454	8 od góry	dos	dos 0
515	7 od góry	dx	dx^2

523	6 od góry	zastępującéj	następującéj
530	3 od góry	$d^n u +$	$d^n u =$
578	12 od góry	biorąc	Biorąc
604	11 od dołu	wstępów	ustępów
613	figura :	wstawić głoskę B w punkcie przecięcia się prostéj OX′ z okręgiem koła	
635	10 od góry	odjemna	odjemną
667	figura :	oznaczyć głoską B spodek prostopadłéj poprowadzonéj z punktu A na prostą XX_1	
718	10 od góry	Funkcja, jest	Funkcja jest
803	9 »	krzywą dwoma	krzywą, dwiema
913	12 od dołu	$Td\ell$	$Td\tau$
1028	3 od góry	lipsoidy	elipsoidy
1034	21	przedstawienia	podstawienia
1035	13	przeto	przez to
1040	9	$a_{2,1}$	$a_{1_2,2}$

(NB. *Dalszy ciąg zmyłek drukarskich tomu pierwszego, dołączonym będzie w końcu tomu drugiego. Autor bardzo będzie wdzięcznym uważnym czytelnikom za wszelkie sprostowanie, tak jego własnych jako też i ważniéjszych drukarskich pomyłek, których uniknąć było trudno w szczególniéjszych warunkach, w jakich korrekta była prowadzoną. Kommunikacje tego rodzaju mogą być przesyłanemi za pośrednictwem jednéj z księgarni*).

Rzyca 93 $\frac{1}{2}$

Na ukończeniu:

Tom II

Zawierający

RACHUNEK CAŁKOWY

TYM SAMYM NAKŁADEM WYSZŁY:

ARYTMETYKA przez G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO z teorją przybliżeń liczebnych — Paryż, 1866 roku.
GEOMETRJA przez G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO, wydanie drugie — Paryż, 1869 roku.

MAJĄ WYJŚĆ W KRÓTCE:

TRYGONOMETRJA przez G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO, (pod prassą).
MECHANIKA ROZUMOWA przez G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.
CYNEMATYKA przez E. HABICHA.
