

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



2402

L. inw. ....



# Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe.

Von

**Ed. Autenrieth,**

Professor an der K. Technischen Hochschule in Stuttgart.

Mit 15 Textfiguren und 5 lithographirten Tafeln.

*J. Nr. 19494*



Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1894.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

112402

Akc. Nr. 1353/49

## Vorwort.

---

Beauftragt mit statischen Berechnungen für ein grösseres Kirchenbauwesen, hatte Verfasser der vorliegenden Abhandlung auch die Aufgabe, die Stärke eines Kuppelgewölbes von beträchtlicher Weite zu berechnen. Dies gab ihm Veranlassung, sich mit der Theorie der Kuppelgewölbe eingehender zu beschäftigen. Hierbei kam er aber zu der Einsicht, dass die Theorie der Kuppelgewölbe einer schärferen Beleuchtung, Sichtung und weiteren Bearbeitung dringend bedürfe. Er unternahm es daher, dieser Forderung gemäss, das Nachstehende zu veröffentlichen.

Stuttgart, im März 1894.

Ed. Autenrieth.

## Inhaltsverzeichniss.

---

	Seite
I. Einleitung. . . . .	1
II. Kritische Erläuterung der wichtigsten, zur Zeit bekannten Theorien der im Scheitel geschlossenen Kuppelgewölbe . . . . .	3
III. Die Maximalanspruchnahme eines Kuppelgewölbes im günstigsten Falle . . . . .	17
IV. Die Berechnung eines im Scheitel geschlossenen Kuppelgewölbes von gegebener Leibung auf Grund des günstigsten Stützliniensystems . .	31
V. Geschlossenes Kuppelgewölbe von durchgehends konstanter Lager- fugenpressung . . . . .	40
VI. Die zweckmässigste Form von Kappengewölben . . . . .	52
VII. Das Kuppelgewölbe mit einer kreisförmigen Oeffnung im Scheitel . .	58
VIII. Rationelle Formen von Kuppelgewölben mit Oeffnungen im Scheitel, bei welchen die Randbelastung grösser ist, als die Grenzbelastung .	69

---

## I. Kapitel.

### **Einleitung.**

---

Die Stärke eines Gewölbes so zu bestimmen, dass die grösste Fugenpressung in demselben sich gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Gewölbmaterials ergibt, das muss als die wesentlichste Aufgabe einer jeden Gewölbetheorie bezeichnet werden, es mag sich um ein Tonnengewölbe oder um ein Kuppelgewölbe handeln. Da nun aber die Art und Weise, wie diese Aufgabe bei den Tonnengewölben gelöst ist, auch für die Kuppelgewölbe als vorbildlich angesehen werden kann, so soll zunächst ein kurzer Rückblick auf die Theorie der Tonnengewölbe geworfen werden.

Bei einem in der gewöhnlichen Weise angeordneten Tonnengewölbe sind die Auflagerwiderstände statisch unbestimmt, es kann also auch die wirkliche Stützlinie des Gewölbes und damit die grösste Inanspruchnahme desselben nicht direkt festgesetzt werden. Trotzdem wurden aber früher in Betreff dieser Stützlinie die verschiedensten Behauptungen aufgestellt und zu beweisen gesucht. So glaubte Scheffler beweisen zu können, dass die einem Minimum des Horizontalschubes entsprechende Stützlinie die in Wirklichkeit existirende sei. Andere vertheidigten dagegen die günstigste Stützlinie als die wahre. Aber die gegebenen Beweise waren nicht stichhaltig. Erst als man das Tonnengewölbe nach Art des elastischen Bogenträgers behandelte, konnte man in gewissen Fällen näheren Aufschluss über die wahre Stützlinie und die wirkliche grösste Inanspruchnahme des Gewölbes erhalten. Indessen werden heutzutage die Tonnengewölbe in der Regel doch nicht nach der Elasticitätstheorie berechnet, sondern einfacher und meistens auch genau genug auf Grund der Erfahrungsregel, dass ein Tonnengewölbe im Allgemeinen hinlängliche Stärke besitzt, wenn sich

innerhalb der Kernfläche des Querschnittes eine Stützlinie konstruiren lässt, für welche die grösste Fugenpressung die zulässige grösste Inanspruchnahme des Gewölbmaterials nicht überschreitet. Wir sehen also bei Tonnengewölben neben der strengen, auf die allgemeinen Hypothesen der Elasticitätslehre gegründeten Theorie noch eine zweite Berechnungsmethode zu Recht bestehend, welche sich auf Erfahrungen stützt, die speciell bei Tonnengewölben gemacht wurden.

Wie steht es nun mit der Theorie der Kuppelgewölbe? Lässt sich mit dem zur Zeit Gebotenen die Stärke eines Kuppelgewölbes ebenso zuverlässig berechnen, wie diejenige eines Tonnengewölbes? Was ist aber das zur Zeit Gebotene? Mit dieser Frage wollen wir uns zunächst beschäftigen.

## II. Kapitel.

### Kritische Erläuterung der wichtigsten, zur Zeit bekannten Theorien der im Scheitel geschlossenen Kuppelgewölbe.

**Navier's Verfahren.** In seinem Werke: „Resumé des leçons sur l'application de la mécanique“ sagt Navier bezüglich der Berechnung der Kuppelgewölbe:

Man möge ein solches Gewölbe durch Meridianebenen in eine grosse Zahl von Sektoren theilen und diese, in keiner Verbindung mit einander anzunehmenden Sektoren wie Tonnengewölbe behandeln. Durchschneide man ein im Gleichgewicht befindliches Kuppelgewölbe durch eine horizontale Ebene, so dürfe man den oberen Theil des Gewölbes wegnehmen, ohne dadurch das Gleichgewicht des unteren zu stören. In dem letzteren entwickeln sich dann, so fährt er fort, gegen den oberen Rand hin, senkrecht zu den vertikalen Stossfugen, horizontale Drücke, welche nicht existiren, wenn das Gewölbe geschlossen ist.

Um nun bei einem geschlossenen Kuppelgewölbe die einzelnen Kuppelsektoren im Gleichgewicht zu erhalten, nahm Navier an jedem derselben im Scheitel eine horizontale Kraft  $Q$  wirkend an (Fig. 1), entsprechend dem horizontalen Scheiteldruck im Tonnengewölbe, ohne über die Herkunft dieser

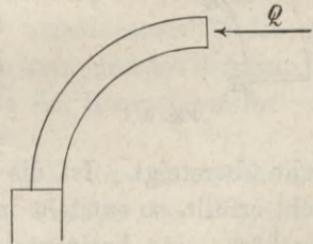


Fig. 1.

Kräfte  $Q$  weitere Auskunft zu geben. Warum aber im geschlossenen Gewölbe die Stossfugenpressungen verschwinden und dafür die Horizontalkräfte  $Q$  von zweifelhafter Herkunft auftreten sollen, ist durchaus unerfindlich.

Auf das Irrige der Navier'schen Anschauungen machte zunächst Scheffler aufmerksam in seinem im Jahre 1857 erschienenen Buche: „Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken“, indem er anführte, dass die Kuppelgewölbe aus ringförmigen Schichten, „Kränzen“, bestehen, welche auf geneigter konischer Basis liegend, zusammengedrückt seien, dass also horizontale Pressungen auftreten, normal gerichtet zu den Stossfugen der Kränze, nach oben stärker werdend. Die von Navier bei den geschlossenen Kuppelgewölben vorausgesetzten horizontalen Kräfte  $Q$  müssen, so fährt Scheffler fort,  $= 0$  sein, weil ja sonst das Gewölbematerial im Scheitel auf unendlich kleiner Fläche einen endlichen, also auf endlicher Fläche einen unendlich grossen Druck auszuhalten hätte. Scheffler bemerkte dann weiter mit Recht, dass alle Theorien unhaltbar seien, welche im Scheitel eine Horizontalkraft annehmen, wie bei den Tonnengewölben.

**Scheffler's Theorie der Kuppelgewölbe.** In seinem eben erwähnten Buche: „Theorie der Gewölbe etc.“ hat Scheffler erstmals eine eigentliche Theorie der Kuppelgewölbe angegeben, welche er, wie auch seine Theorie der Tonnengewölbe, auf das sogenannte „Princip des kleinsten Widerstandes“ stützt. Er betrachtet dabei einen von 2 Meridianebenen begrenzten Sektor der Kuppel, ein-

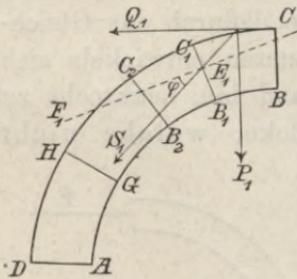


Fig. 2.

getheilt durch radiale Fugen in einzelne Gewölbesteine. Scheffler sagt nun: „Ist  $P_1$  das im Schwerpunkte des ersten Wölbesteins  $BCC_1B_1$  (Fig. 2) mit seiner Belastung wirkende Gewicht dieses Steines, so erfordert das Gleichgewicht dieses Steines, dass die Richtung von  $P_1$  die Fuge  $B_1C_1$  treffe und mit der Normalen  $E_1F_1$  auf dieser Fuge einen Winkel einschliesse, welcher den Reibungswinkel  $\varphi$

nicht übersteigt. Ist die eine oder die andere dieser Bedingungen nicht erfüllt, so entsteht in dem Kranze, welchem der Stein  $BCC_1B_1$  angehört, eine horizontale Spannung, und die Resultante  $Q_1$  der gegen den Stein  $BCC_1B_1$  von beiden Seiten wirkenden Spannungen muss von der Art sein, dass, wenn sie mit dem Gewichte  $P_1$  zusammengesetzt wird, die Resultante  $S_1$  die obigen beiden Bedingungen erfüllt. Wird mithin eher die unterste Kante  $B_1$  der Fuge  $B_1C_1$ , als der Reibungswinkel erreicht, so ist  $Q_1$

so zu bestimmen, dass der Winkel  $S_1E_1F_1$  gleich dem Reibungswinkel wird. Wird dagegen eher der Reibungswinkel, als die unterste Fugenkante erreicht, so ist  $Q_1$  so zu bestimmen, dass die Resultante  $S_1$  durch die unterste Fugenkante  $B_1$  geht. . . . . Die einzuschaltenden horizontalen Kräfte  $Q_1 Q_2 . . .$  müssen nach dem Principe des kleinsten Widerstandes nicht grösser sein, als zum Gleichgewichte unumgänglich nothwendig ist; sie müssen also Minimen sein und demnach als durch die höchsten Punkte  $CC_1 . . .$  der betreffenden Wölbsteine gehend angenommen werden. Setzt man dieses Verfahren fort, so wird man bei der gewöhnlichen Form der Kuppeln endlich an eine Fuge  $GH$  kommen, welche eine horizontale Spannung in dem darüberliegenden Kranze, also auch eine horizontale Kraft wie  $Q_1, Q_2 . . .$  nicht mehr erfordert. . . . . Hat man alle horizontalen Kräfte bis zur Fuge  $GH$  ermittelt, so ergibt deren Summe den Gesamtbetrag  $Q$  des Horizontalschubes, welchen der Meridianstreifen der Kuppel auf das Widerlager ausübt. . . . Die Gewölbstärke kann man in der Praxis aus dem Normaldrucke bestimmen, welchen die Kuppel auf ihre Basis  $AD$  ausübt.“

Ueber dieses Scheffler'sche Verfahren ist nun Folgendes zu bemerken: Ganz abgesehen von der Unhaltbarkeit des „Princips vom kleinsten Widerstand“, ist es durchaus unzulässig, die Horizontalkräfte  $Q_1 Q_2 . . .$  durch die höchsten Punkte  $CC_1 . . .$  der Gewölbsteine gehend anzunehmen, denn hierbei würden ja die specifischen Stossfugendrucke in diesen Punkten unendlich gross werden. Ebensowenig dürfen die Punkte  $E$ , d. h. die Druckmittelpunkte der Lagerfugen, bis zu den Kanten der Gewölbsteine herausrücken. Es können daher die in der angedeuteten Weise ermittelten Fugenkräfte nicht die wirklichen sein und ist demgemäss auch die nach Scheffler berechnete Stärke der Kuppelgewölbe unzuverlässig.

Immerhin bleibt aber Scheffler das nicht zu unterschätzende Verdienst, den Grund für eine rationelle Theorie der Kuppelgewölbe gelegt zu haben.

An die Scheffler'sche Theorie schliesst sich unmittelbar an:

**Die Wittmann'sche Theorie.** Dieselbe ist von Wittmann veröffentlicht in der Berliner Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang XXIX (1879) und in seinem Werke: „Statik der Hochbaukonstruktionen“.

Wittmann betrachtet wieder einen von 2 Meridianebenen begrenzten Sektor des Kuppelgewölbes und von diesem Sektor einen „Stein“. Wittmann sagt: „Dieser Stein steht zunächst unter Einwirkung seines Eigengewichtes und derjenigen Pressung, welche von dem oberhalb befindlichen Theile der Meridionalschichte auf ihn ausgeübt wird. Würde die Resultirende  $R$  aus beiden die untere Lagerfläche des Steines noch innerhalb ihres Centralkernes schneiden und einen kleineren Winkel als den Reibungswinkel  $\varphi$  des Mauerwerks mit der Normalen zu derselben bilden, so würde der Stein im Gleichgewicht sein, es würde keine Einwirkung auf die benachbarten Steine der Horizontalschichte auftreten, von dieser Seite also auch keine Reaktion und in dem horizontalen Gewölbering keine Spannung entstehen.

Ueberschreitet nun der Winkel von  $R$  mit der Normalen zur Lagerfläche den Reibungswinkel  $\varphi$  oder rückt der Angriffspunkt dieser Kraft über den Centralkern der Lagerfläche hinaus, so wird der Stein zu gleiten, beziehungsweise zu kanten anfangen und so lange auf die beiden angrenzenden Steine der horizontalen Gewölbschichte einwirken, bis durch die Reaktionen  $K'$  und  $K''$  der letzteren derjenige Zustand, bei welchem gerade noch Gleichgewicht möglich ist, wieder hergestellt ist. Die Kräfte  $K'$  und  $K''$  lassen sich durch eine resultirende Horizontalkraft  $H$  ersetzen, wirksam in der durch den Schwerpunkt des Steins gelegten Meridianebene. Der Werth von  $H$  wird den genannten Bedingungen gemäss bestimmt. . . . Immer wird der kleinste, zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes nothwendige Werth von  $H$  diesen Zustand auch wirklich herstellen.“

Dementsprechend giebt Wittmann zur Festsetzung der Fugendrucke eines Kuppelgewölbes Fig. 3 an:

„Der oberste Stein  $a_1 b_1 b_0 a_0$  (Fig. 3) steht unter dem Einfluss seines in der Schwerlinie wirkenden Gewichtes ( $P_1$ ); damit der Stein im Gleichgewicht bleibe, muss mit diesem Gewichte eine Horizontalkraft  $H_1$  sich so vereinigen, dass die Resultirende  $T_1$  aus beiden die Fuge  $a_1 b_1$  an der unteren Grenze  $e_1$  ihres mittleren Dritttheils schneide und mit der Normalen zu  $a_1 b_1$  den (Reibungs-) Winkel  $\varphi$  bilde.“

Auf Grund dieser Bedingungen sind (Fig. 3) die Kräfte  $T_1$  und  $H_1$  bestimmt.  $T_1$  wirkt in der durch  $e_1$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Normale gezogenen Geraden und  $H_1$  geht durch den Schnitt-

punkt  $i_1$  von  $e_1 i_1$  und der Schwerlinie des Steines hindurch. Wittmann fährt dann fort:

„Für die Lage des Punktes  $i_1$  existirt übrigens eine gewisse Beschränkung; denn da die Reaktionen  $K'$  und  $K''$  selbstverständlich nicht über den Centrkern der Stossfugenflächen hinaustreten sollen, so kann mit hinreichender Genauigkeit als äusserste zulässige Grenze für die Lage ihrer Resultirenden  $H$  eine Horizontale gelten, welche durch die obere Grenze des mittleren Dritttheiles der Halbirungslinie  $\alpha_1 \beta_1$  des Steines gelegt ist. Würde  $i_1$  über diese Horizontale hinausfallen, so würde sich die Kraftlinie  $T_1$  als Verbindungslinie des Punktes  $e_1$  und der oberen Begrenzung des mittleren Dritttheiles von  $\alpha_1 \beta_1$  ergeben und dies wäre ein Zeichen, dass der Widerstand gegen Kanten in Thätigkeit getreten, bevor die volle Reibung absorbiert war.“

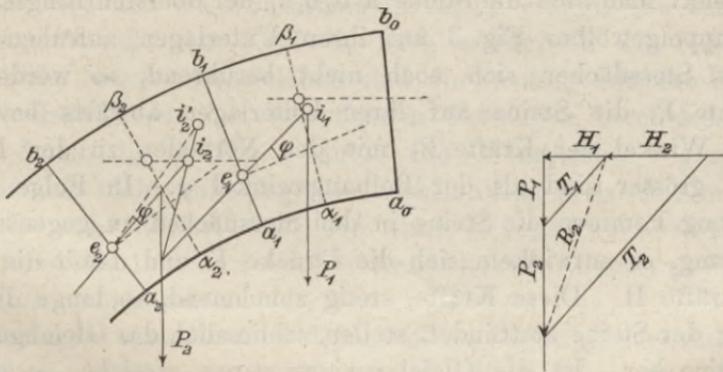


Fig. 3.

Was den zweiten Stein  $a_1 b_1 b_2 a_2$  betrifft, so wird derselbe zunächst angegriffen von seinem Eigengewicht und dem Auflagerdruck  $T_1$  des ersten Steines, oder was auf dasselbe hinauskommt, von der Resultirenden  $R_2$  dieser beiden Kräfte. Da nun vorliegenden Falles  $R_2$  die Lagerfläche  $a_2 b_2$  nicht trifft, so wäre zur Bestimmung des Druckes  $T_2$ , der auf die Lagerfläche  $a_2 b_2$  ausgeübt wird, wieder durch den unteren Drittpunkt  $e_2$  von  $a_2 b_2$  eine Gerade unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Normale zu  $a_2 b_2$  zu ziehen und in dieser Geraden  $T_2$  wirkend anzunehmen; die Resultirende  $H_2$  der beiden Stossfugendrücke des Steines würde dann durch den Schnittpunkt  $i_2'$  der angegebenen Wirkungslinie von  $T_2$  und der-

jenigen von  $R_2$  hindurchgehen. Da jedoch, wie in Fig. 3 ersichtlich, der Punkt  $i_2'$  über der Horizontalen durch den oberen Drittelpunkt von  $\alpha_2 \beta_2$  liegt und diese Horizontale die höchste zulässige Lage von  $H_2$  angiebt, so ist  $H_2$  in eben dieser Horizontalen wirkend anzunehmen und als Wirkungslinie von  $T_2$  die Verbindungslinie  $i_2 e_2$  zu setzen. Hat man aber die Wirkungslinie von  $T_2$ , so ist auch  $T_2$  selbst, sowie die Kraft  $H_2$  bestimmt. In gleicher Weise werden die folgenden Steine des Kuppelsektors behandelt, bis man schliesslich zu einem Stein gelangt, für welchen sich  $H = 0$  ergibt. In der betreffenden ringförmigen Schichte des Kuppelgewölbes treten dann keine horizontalen Verspannungen mehr auf; ebenso ist es, wenn man von der Zugfestigkeit des Gewölbemauerwerks absieht, bei den weiter unten gelegenen Schichten des Gewölbes.

Prüfen wir jetzt dieses Verfahren.

Denkt man sich die Steine  $a_0 b_0 b_1 a_1$  der obersten Ringschichte des Kuppelgewölbes Fig. 3 auf ihren Unterlagen aufruhend und in ihren Stossflächen sich noch nicht berührend, so werden die Gewichte  $P_1$  die Steine auf ihren Unterlagen abwärts bewegen, da die Winkel der Kräfte  $P_1$  mit den Normalen zu den Lagerflächen grösser sind als der Reibungswinkel  $\varphi$ . In Folge dieser Bewegung kommen die Steine in den Stossflächen zu gegenseitiger Berührung, es entwickeln sich die Drücke  $K$  und damit die Horizontalkräfte  $H$ . Diese Kräfte, stetig zunehmend, so lange die Bewegung der Steine stattfindet, stellen schliesslich das Gleichgewicht der Steine her. Ist die Gleichgewichtsgrenze erreicht, so erfolgt keine Abwärtsbewegung der Steine mehr, also keine weitere Zunahme der Kräfte  $K$  und  $H$ ; an der Gleichgewichtsgrenze bildet aber der Gegendruck  $T_1$  der Unterlage den Reibungswinkel mit der Normalen. Auf Grund dieser Anschauungen wäre denn auch die Annahme Wittmann's bezüglich der Richtung von  $T_1$  gerechtfertigt und ebenso die Bemerkung: „Immer wird der kleinste, zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes nothwendige Werth von  $H$  diesen Zustand auch wirklich herstellen“. Indessen darf nicht verschwiegen werden, dass wohl in den meisten praktischen Fällen das Kuppelgewölbe nicht aus aufeinander gelegten Quadern besteht, sondern aus Mauerwerk, hergestellt mit mehr oder weniger gut bindendem Mörtel, dass also weniger die Reibung der Steine auf einander, als die Kohäsion des Mörtels in den Lagerfugen in

Betracht kommt. In diesem Fall ist die Richtung von  $T_1$  nicht a priori bestimmt.

Eine andere Frage betrifft den Angriffspunkt von  $T_1$ .

Die Annahme, dass dieser Angriffspunkt auf der Kerngrenze der Lagerfläche  $a_1 b_1$  liegen müsse, ist eine irrthümliche und beruht auf der falschen Voraussetzung, dass ein Stein, welcher durch eine Kraft  $R$  auf sein Lager aufgedrückt wird, zu kanten an fange, wenn der Angriffspunkt dieser Kraft über den Centrkern der Lagerfläche hinausrückt. Die Einwärtsneigung der Gewölbesteine und die dadurch bedingte Reaction der Stossflächen beginnt nicht erst beim Heraustreten des Angriffspunktes von  $R$  aus dem Kern der Lagerfläche. Andererseits kann das Gleichgewicht eines von der Kraft  $R$  auf sein Lager aufgedrückten Steines noch fortbestehen, wenn auch der Angriffspunkt von  $R$  die Kerngrenze überschritten hat; dasselbe hört nur dann auf, wenn die Kantenpressung zu gross wird und ein Abbrechen der Kante erfolgt. Es kann also der Angriffspunkt der Kraft  $T_1$  auch ausserhalb des Kerns der Lagerfläche liegen. Desgleichen sind die Stossfugendrucke  $K$  nicht auf die Kernflächen der betreffenden Stossfugen beschränkt, und geben damit die in Fig. 3 durch die Grenzpunkte  $i$  gezogenen Horizontalen nicht unbedingt die höchsten Lagen der Kräfte  $H$  an. Eine Gewähr dafür, dass die nach Wittmann bestimmten Fugendrucke mit den wirklichen übereinstimmen, ist daher nicht vorhanden.

Verbindet man die Angriffspunkte der Lagerfugendrucke durch eine stetige Linie, so erhält man die Stützzlinie des Kuppel-sektors. Von der nach Wittmann konstruirten Stützzlinie kann also nicht behauptet werden, dass sie die wirkliche sei, sie ist nur eine mögliche Stützzlinie. Die nach Scheffler bestimmte Stützzlinie dagegen muss als eine unmögliche bezeichnet werden, da sie sich bis zur Gewölbleibung erstreckt. Insofern bekundet denn auch die von Wittmann modificirte Scheffler'sche Theorie der Kuppelgewölbe einen wesentlichen Fortschritt.

Bezüglich der wirklichen Stützzlinie möge man sich aber ver-gewärtigen, dass die Sachlage bei den Kuppelgewölben keine andere ist, als bei den Tonnengewölben: So wenig man bei diesen die wirkliche Stützzlinie, die wirkliche Maximalanspruchnahme ohne Zuhilfenahme der allgemeinen Elasticitätstheorie bestimmen kann, ebensowenig kann man es bei den Kuppelgewölben. Dar-

über hat man sich früher bei den Tonnengewölben Täuschungen hingegeben, man vermeide es also, bei den Kuppelgewölben in denselben Fehler zu verfallen.

**Schwedler's Theorie der Kuppelgewölbe.** In seiner Abhandlung über die „Konstruktion der Kuppeldächer“, veröffentlicht in der „Zeitschrift für Bauwesen“ 1866, giebt Schwedler auch eine Theorie der Kuppelgewölbe. Er geht hierbei vom Gleichgewicht der Kuppelflächen aus, unter Kuppelfläche eine Umdrehungs-

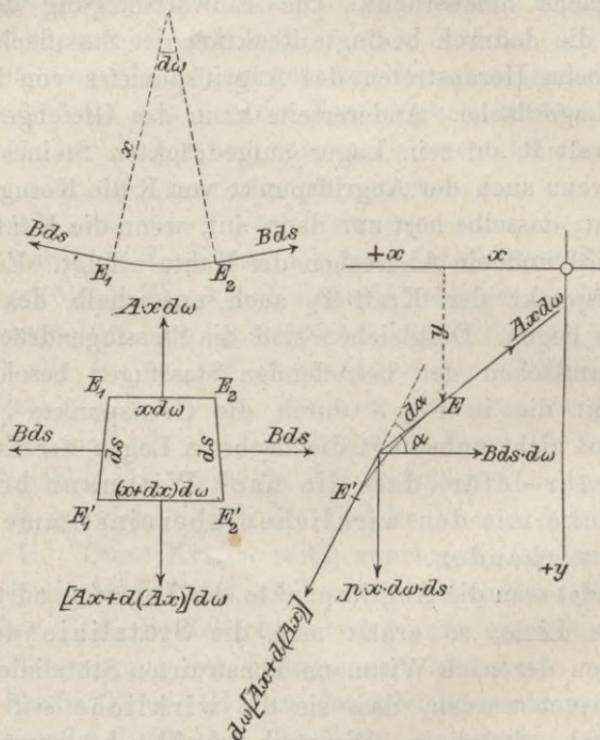


Fig. 4.

fläche verstanden, erzeugt durch Drehung einer in einer vertikalen Ebene liegenden Kurve um eine in der gleichen Ebene befindliche vertikale Axe, welche Umdrehungsfläche „ein Gewicht besitzt und elastisch ist“.

Schwedler sagt nun:

„Das Gleichgewicht dieser Fläche wird mit dem Gleichgewicht einer Schaafe von geringer Dicke und derselben Form übereinstimmen, sobald man annehmen kann, dass nach der Dicke die elastischen Kräfte gleichmässig vertheilt sind“.

Denkt man sich aus einem Kuppelgewölbe ein durch 2 Meridiane und 2 Parallelkreise bezeichnetes Element  $E_1 E_2 E_2' E_1'$  herausgeschnitten, so wirken an demselben 5 Kräfte, nämlich das Gewicht (einschliesslich Belastung) des Elementes und die an den 4 Seitenflächen thätigen Reaktionen des umgebenden Theils des Kuppelgewölbes.

Ist nun:

$\sigma$  die Normalspannung in der „Lagerfläche“  $E_1 E_2$  des Kuppel-elementes,

$\tau$  die Normalspannung in der „Stossfläche“  $E_1 E_1'$  (Ringspannung),

beide Spannungen zunächst als Zugspannungen vorausgesetzt,

$\delta$  die Dicke des Kuppel-elementes,

so sind, wenn man  $\delta \cdot \sigma$  mit A und  $\delta \cdot \tau$  mit B bezeichnet, die in Fig. 4 angedeuteten, an dem Kuppelflächenelement  $E_1 E_2 E_2' E_1'$  wirkenden Kräfte im Gleichgewicht. Demgemäss hat man, da die Summe der Horizontalkomponenten der Kräfte = 0 sein muss:

$$-Ax d\omega \cdot \cos \alpha + [Ax + d(Ax)]d\omega \cdot \cos(\alpha + d\alpha) - Bds \cdot d\omega = 0$$

oder vereinfacht:

$$d(Ax \cdot \cos \alpha) - Bds = 0$$

woraus

$$Ax \cos \alpha = \int_0^s Bds.$$

Desgleichen giebt die zweite Gleichgewichtsbedingung, Summe der Vertikalkomponenten = 0:

$$-Ax d\omega \sin \alpha + [Ax + d(Ax)]d\omega \cdot \sin(\alpha + d\alpha) + px d\omega \cdot ds = 0$$

oder vereinfacht:

$$d(Ax \cdot \sin \alpha) + px ds = 0,$$

womit

$$Ax \sin \alpha = - \int_0^s px ds.$$

Nimmt man als Kuppelfläche eine Kugelfläche vom Halbmesser r und das Gewicht p konstant an, so erhält man

$$A = - \frac{pr}{1 + \cos \alpha} \quad \text{und} \quad B = pr \left( \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich, dass A immer negativ ist, dass also in den Lagerflächen nie Zugspannungen auftreten. Im Scheitel wird

$$A = - \frac{p r}{2}$$

und wenn man den specifischen Fugendruck daselbst mit  $\sigma_0$  und das Gewicht der Kubikeinheit Gewölbemauerwerk mit  $\gamma$  bezeichnet (ausser Eigengewicht wirkt keine weitere Belastung),

$$-\sigma_0 = \frac{A}{\delta}; \quad \sigma_0 = \frac{p r}{2 \delta} = \frac{\delta \gamma r}{2 \delta} = \frac{r \gamma}{2}$$

d. h. der Druck ist unabhängig von der Gewölbstärke, wofern keine Last auf der Kuppel liegt.

Bezüglich des Werthes von B zeigt es sich, dass im Scheitel

$$B = - \frac{p r}{2} = A$$

wird.

Mit zunehmendem  $\alpha$  bleibt B noch eine Zeit lang negativ, d. h. in den Stossflächen finden Druckspannungen statt, der Absolutwerth von B wird aber kleiner und kleiner und schliesslich für einen gewissen Werth von  $\alpha$ , den wir mit  $\alpha'$  bezeichnen wollen, = 0. Ist  $\alpha > \alpha'$ , ergiebt sich B positiv, d. h. in den Stossflächen herrscht Zugspannung. Der Werth  $\alpha'$  findet sich, indem man in dem Ausdruck für B letzteres = 0 setzt. Man erhält damit

$$\cos^2 \alpha' + \cos \alpha' = 1, \text{ woraus } \alpha' = 51^\circ 50'.$$

Ist die Kuppel halbkugelig, so ist am Aequator

$$A = - p r \text{ und } B = + p r.$$

In der Lagerfläche findet Druck, in den Stossflächen Zug statt. Bezeichnet man den specifischen Lagerdruck am Aequator mit  $\sigma''$  und die Zugspannung in der Ringschichte ebendasselbst mit  $\tau''$ , dann wird

$$\sigma'' = \tau''$$

und mit

$$p = \delta \cdot \gamma \quad \sigma'' = r \gamma$$

der Druck also wieder unabhängig von der Gewölbstärke.

Schwedler sagt nun: „Ist der Zug ( $\tau'' = r \gamma$ ) für Mauerwerk

zu gross, so kann man ihn durch Vermehrung des Querschnittes verringern, es muss indessen die hinzugefügte Masse auf den Mauern senkrecht und direkt unterstützt werden“.

Nach diesen Erörterungen geht Schwedler über zu der Betrachtung des Gleichgewichtes flacher Kuppelflächen, bei welchen das Eigengewicht und die Belastung über die Horizontalprojektion der Kuppel gleichmässig vertheilt angenommen werden kann, und findet, dass in einer parabolischen Kuppelfläche das Material nach allen Richtungen gleich stark gedrückt wird. Des Weiteren sucht er die Bedingung für eine flache Kuppelfläche, bei welcher die Ringspannungen  $\tau$  überall  $= 0$  sind, bei welcher man also im Stande wäre, die Kuppel in einzelne, durch radiale Schnitte von einander isolirte Theile zu zerlegen, ohne ihre Stabilität zu beeinträchtigen, und findet, dass in diesem Falle die erzeugende Meridiankurve eine kubische Parabel sein muss, dass aber die Bedingung  $\tau = 0$  nicht bis zum Pol fortgesetzt werden kann, vielmehr bei demselben ein runder fester Körper anzunehmen ist, gegen welchen die einzelnen Kuppelsektoren sich stemmen.

Die Theorie Schwedler's beruht auf der Annahme einer gleichmässigen Druckvertheilung in den Lagerfugen und einer eben solchen in den Stossfugen der Dicke des Gewölbes nach; nach Schwedler würde daher bei Betrachtung des Gleichgewichtes eines Kuppelsektors die Stützlinie durch die Schwerpunkte der Lagerflächen hindurchgehen, also mit der Mittellinie des Kuppelsektors zusammenfallen. Inwiefern ist nun diese Annahme Schwedler's gerechtfertigt? Kommt die Schwedler'sche Stützlinie der wirklichen näher, als die nach Wittmann konstruirte? Das sind offene Fragen, entsprechend der Frage nach der wirklichen Stützlinie im Tonnengewölbe.

Ferner ist nach Schwedler, wie wir oben gesehen haben, bei einem halbkugeligen Kuppelgewölbe, und das sind die meisten Kuppelgewölbe ohne Scheitelöffnung, der Druck im Scheitel und am Kämpfer unabhängig von der Gewölbstärke. Wie soll man nun, was schliesslich doch eine Hauptsache ist, bei einem derartigen Gewölbe die nothwendige Stärke bestimmen? Darüber giebt uns die Schwedler'sche Abhandlung so gut wie keine Auskunft; die kurze, oben angeführte Bemerkung Schwedler's: „Ist der Zug für Mauerwerk zu gross etc.“, kann unmöglich als eine genügende Beantwortung dieser Frage angenommen werden.

Aus Vorstehendem erschen wir, dass durch die Schwedler'sche Arbeit eine Reihe interessanter Resultate der Theorie der Kuppelgewölbe zu Tage gefördert wurde; dass aber damit die letztere ihren Abschluss gefunden hätte, wie schon behauptet worden ist, und eine weitere Behandlung des Gegenstandes eigentlich überflüssig wäre, dürfte nach den verschiedenen, oben angeführten, ihrer Beantwortung noch gewärtigen Fragen zu bestreiten sein.

**Föppl's Theorie.** In seinem 1881 erschienenen Buche: „Theorie der Gewölbe“ hat Föppl in richtiger Würdigung der Verhältnisse versucht, entsprechend der neueren Elasticitätstheorie der Tonnengewölbe auch bei den Kuppelgewölben vorzugehen. Leider ist es ihm hierbei noch nicht gelungen, eine den Bedürfnissen der Praxis entsprechende Lösung der Aufgabe zu erzielen. Immerhin gebührt aber Föppl das Verdienst, erstmals den Weg der strengen Theorie bei den Kuppelgewölben betreten zu haben.

In dem genannten Buche fügt dann Föppl den theoretischen Erörterungen bezüglich der Berechnung der Kuppelgewölbe noch bei: „Für die gewöhnlichen Zwecke erscheint es nicht nothwendig, die nach der Elasticitätstheorie zur Geltung kommende Drucklinie (Stützzlinie) zu ermitteln und danach die Stabilität der Kuppel zu beurtheilen. Es dürfte vielmehr ausreichen, irgend eine Drucklinie zu konstruiren und sich davon zu überzeugen, dass für dieselbe noch ein gewisser Ueberschuss von Stabilität vorhanden ist.“

Demgemäss setzt Föppl als Stützzlinie die Mittellinie des Kuppelquerschnittes fest und nimmt die einzelnen Ringschichten gleichmässig zusammengedrückt an, macht also Voraussetzungen, welche mit den Schwedler'schen übereinstimmen. Er konstruirt hierauf, am obersten Gewölbstein beginnend, die einzelnen Fugendrucke, findet, dass von einer gewissen Ringschicht an Zugspannungen in denselben sich ergeben würden, nimmt Zugspannungen als nicht zu berücksichtigend an und bestimmt unter dieser Voraussetzung den Verlauf der Stützzlinie auch im unteren Theile der Kuppel.

Schliesslich sagt Föppl:

„Hat man in der angegebenen Weise die Drucklinie (Stützzlinie) sowohl für die Kuppel, als für die sie unterstützende Widerlagsmauer konstruirt und dabei gefunden, dass sie überall im Querschnitte verläuft und an keiner Stelle Pressungen über das zulässige Maass hinaus hervorruft, während zugleich der Winkel des Fugendruckes mit der Normalen zur Fugenrichtung nirgends die

zulässige Grösse überschreitet, so ist damit der Nachweis erbracht, dass sich die Konstruktion nach den Gesichtspunkten der Mechanik starrer Körper im Gleichgewichte halten kann. Ein Einsturz wird dann nicht zu befürchten sein.“

Prüfen wir nunmehr dieses von Föppl angegebene Näherungsverfahren an einem Beispiel.

Es handle sich um ein kugelförmiges Kappengewölbe von dem mittleren Halbmesser  $r = 10$  m, dem Centriwinkel  $2\psi'' = 100^\circ$ , der konstanten Gewölbstärke  $c$  und dem Gewicht der Kubikeinheit Gewölbmauerwerk  $\gamma = 2000$  kg.

Da die Föppl'schen Voraussetzungen bezüglich der Stützlinie und der gleichmässigen Zusammendrückung der einzelnen Ringschichten mit den Schwedler'schen übereinstimmen, so kann man zur Berechnung des grössten Fugendruckes die Resultate der Schwedler'schen Theorie benutzen und demgemäss für diesen Maximaldruck, welcher vorliegenden Falles in der Kämpferfuge auftritt, setzen:

$$\sigma_m = \frac{r\gamma}{1 + \cos\psi''} = 0,61 \cdot r\gamma = 1,22 \text{ kg pro qcm,}$$

ein Ausdruck, in welchem die Gewölbstärke  $c$  gar nicht vorkommt. Denkt man sich jetzt die Gewölbstärke allmählich kleiner werdend, so bleiben die sämtlichen, oben angeführten Bedingungen für die Stabilität des Gewölbes erfüllt, während das Gewölbe immer bedenklicher wird und der Einsturz desselben schliesslich sehr zu befürchten steht. Die Vorschrift Föppl's dürfte daher zur Berechnung der Kuppelgewölbe nicht ausreichend sein.

**Die Theorie der Kuppelgewölbe von Hagen.** Dieselbe findet sich entwickelt in Hagen's Buche: „Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen und Kuppeln“. 2. Auflage 1874.

Die Theorie Hagen's, welche sich auch auf die Bestimmung der Kuppeln von gleicher Widerstandsfähigkeit, sowie von gleicher Mauerstärke erstreckt, ist, da sie an der Spitze des Kuppelsektors fälschlicherweise wieder die bekannte Navier'sche Horizontalkraft annimmt, für geschlossene Kuppelgewölbe unbrauchbar und daher in diesem Kapitel nicht weiter zu erörtern. Aus gleichem Grunde ist

**Die Theorie von Durand-Claye**, veröffentlicht in den „Annales des ponts et chaussées“, Jahrgang 1880, für geschlossene Kuppelgewölbe nicht zu verwenden.

**Schlussbemerkungen.** Nach der im Vorstehenden den seitherigen Theorien der Kuppelgewölbe zu Theil gewordenen Beleuchtung und Sichtung dürfte nunmehr eine weitere Behandlung der Sache als gerechtfertigt und nothwendig erscheinen. Hierbei wären wieder, wie bei den Tonnengewölben, zwei Wege ins Auge zu fassen. Einmal könnte man versuchen, den von Föppl eingeschlagenen rein theoretischen Weg weiter zu verfolgen, um auf Grund der Elasticitätstheorie die wirkliche Maximalanspruchnahme eines gegebenen Kuppelgewölbes zu erhalten, sodann aber wäre auch für die praktische Berechnung, wie es bei den Tonnengewölben geschehen, ein einfaches, auf Erfahrungen unmittelbar bei Kuppelgewölben sich stützendes und für die gewöhnlichen Fälle ausreichendes Verfahren ausfindig zu machen. Wem nun, wie dem Verfasser vorliegender Abhandlung, die Auflage gemacht ist, ein zur Ausführung bestimmtes Kuppelgewölbe zu berechnen, der wird in Anbetracht des mit der Sache verknüpften Risiko in möglichster Fühlung mit schon ausgeführten und bewährten Kuppelgewölben bleiben wollen und damit in erster Linie den zweiten der erwähnten Wege einzuschlagen suchen. Zu einem solchen Weg gelangte Verfasser denn auch durch die im Folgenden dargelegten Erwägungen.

### III. Kapitel.

## **Die Maximalinanspruchnahme eines Kuppelgewölbes im günstigsten Falle.**

**Vorbemerkung.** Bekanntlich lässt sich bei den Tonnengewölben die günstigste Stützlinie und die Maximalinanspruchnahme im günstigsten Fall ermitteln. Damit erhält man wenigstens einen festen Punkt, von dem aus die Stabilität des Gewölbes beurtheilt werden kann. Soll nun ein mit einer gegebenen Belastung versehenes Tonnengewölbe berechnet werden, so könnte man den Querschnitt des Gewölbes vorläufig annehmen, für dasselbe die Maximalinanspruchnahme im günstigsten Fall festsetzen und nachsehen, ob letztere übereinstimmt, nicht etwa mit der zulässigen Inanspruchnahme des betreffenden Mauermaterials überhaupt, welche der Berechnung statisch bestimmter Steinkonstruktionen zu Grunde gelegt wird, sondern mit der Maximalpressung eines schon ausgeführten, aus demselben Material bestehenden und bewährten Tonnengewölbes, für welches ebenfalls die günstigste Beanspruchung vorausgesetzt wurde.

Dieses rationelle Verfahren liesse sich vielleicht auch bei Kuppelgewölben verwerthen, darum möge zunächst die Maximalinanspruchnahme eines Kuppelgewölbes im günstigsten Falle festgesetzt werden.

**Die Stützliniensysteme.** Von dem Kuppelgewölbe betrachten wir einen Sektor, begrenzt durch 2 vertikale Meridianebenen, welche den Winkel  $d\varphi$  einschliessen. Diesen Sektor denken wir uns durch radiale Lagerfugen in Elemente getheilt. Ein solches Element ist im Gleichgewicht unter Einwirkung des durch den Schwerpunkt gehenden Eigengewichtes, der beiden „Lagerfugendrucke“ und der beiden „Stossfugendrucke“. Verbindet man die Angriffspunkte A der Lagerfugendrucke des Sektors durch eine

stetige Linie, so erhält man die Lagerfugenstützlinie; ebenso bildet die Verbindungslinie der einer und derselben Meridianebene angehörenden Angriffspunkte B der Stossfugendrucke die Stossfugenstützlinie. Es ist also bei einem Kuppelgewölbe nicht eine Stützlinie in Betracht zu ziehen, sondern ein System von 2 Stützlinien. Denkt man sich für alle möglichen Stützliniensysteme jedes Mal die grösste Fugenpressung bestimmt, die gefundenen Maximalpressungen mit einander verglichen und die kleinste derselben herausgegriffen, so giebt diese die Maximalanspruchnahme des Kuppelgewölbes im günstigsten Falle an, während die entsprechenden Stützlinien das günstigste Stützliniensystem darstellen.

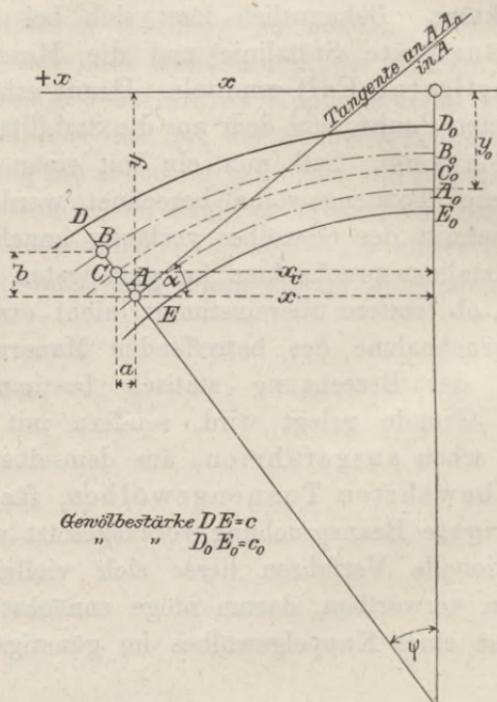


Fig. 5.

**Bestimmung des Horizontalschubes bei angenommenen Stützliniensystem.** Wir wollen uns die Aufgabe stellen, für die Lagerfuge  $DE$  des in Fig. 5 angedeuteten Kuppelsektors vom Ausschnittswinkel  $d\varphi$  und der Mittellinie  $C_0C$  den Horizontalschub festzusetzen unter der Annahme, dass die Linie  $A_0A$  die Lagerfugenstützlinie und  $B_0B$  die Stossfugenstützlinie vorstelle. Dabei seien

$A_0A$  und  $B_0B$  stetige Linien, welche in  $A_0$ , beziehungsweise  $B_0$  horizontale Tangenten besitzen, die Lagerfugen je nur einmal schneiden, im Uebrigen jedoch beliebig eingezeichnet sind.

An dem über der Lagerfuge  $DE$  gelegenen Theil  $DEE_0D_0$  des Kuppelsektors wirken nun die folgenden Kräfte:

1. das Eigengewicht  $Q \cdot d\varphi = F x_0 d\varphi \cdot \gamma$ , wobei  $F$  der Inhalt der Fläche  $DEE_0D_0$ ;  $x_0$  der Abstand des Schwerpunktes der Fläche  $F$  von der vertikalen Kuppelaxe;  $\gamma$  das Gewicht der Kubikeinheit des Gewölbemauerwerks und  $d\varphi$ , wie schon erwähnt, der Ausschnittwinkel des Kuppelsektors,
2. die beiden normal zu den vertikalen Seitenflächen gerichteten, also horizontalen Reaktionen  $T$  des anliegenden Gewölbemauerwerks,
3. der in  $A$  wirkende Gegendruck  $S \cdot d\varphi$  der Auflagefläche  $DE$ , dessen Horizontalkomponente  $= H \cdot d\varphi$  und dessen Vertikalkomponente  $= V \cdot d\varphi$  sei.

$H \cdot d\varphi$  wäre somit gleich dem gesuchten, auf die Lagerfuge  $DE$  des Kuppelsektors ausgeübten Horizontalschub. Man hat jetzt:

$$V = Q \quad \text{und} \quad H \cdot d\varphi = 2 T \sin \frac{d\varphi}{2} = 2 T \cdot \frac{d\varphi}{2}; \quad H = T;$$

$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{Q^2 + H^2}.$$

Lässt man den Winkel  $\psi$  (Fig. 5) um  $d\psi$  zunehmen, wodurch das Element  $DEE_1D_1$  des Kuppelsektors (Fig. 6) zum Ausdruck kommt, so ändern sich die Koordinaten  $x$  und  $y$  des Punktes  $A$  (Fig. 5) um  $dx$ , beziehungsweise  $dy$ , ferner  $Q$  um  $dQ$ ,  $T$  um  $dT$ ,  $H$  um  $dH$ .

Nunmehr wirken an dem Elemente  $DEE_1D_1$  (Fig. 6) die folgenden Kräfte:

1. in seinem Schwerpunkt das Eigengewicht  $dQ \cdot d\varphi$ ,
2. in  $A$  der Druck  $S \cdot d\varphi$  oder statt dessen seine Komponenten  $H \cdot d\varphi$  und  $V \cdot d\varphi$ ,
3. in den durch die Stossfugenstützlinie bestimmten Angriffspunkten die Normalkräfte  $dT$ , deren Resultirende  $= dH \cdot d\varphi$ ,
4. in  $A_1$  der Gegendruck der Auflagefläche  $D_1E_1$ .

Damit ergibt die Momentengleichung um  $A_1$  (Fig. 6):

$$dH \cdot b + dQ \cdot a + H \cdot dy = Q \cdot dx,$$

woraus

$$H = Q \cdot \frac{dx}{dy} - a \cdot \frac{dQ}{dy} - b \cdot \frac{dH}{dy} \quad \dots \quad (1)$$

oder wenn

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{dQ}{dy} = \operatorname{tg} \beta$$

gesetzt wird:

$$H = Q \cotg \alpha - a \operatorname{tg} \beta - b \cdot \frac{dH}{dy}, \quad \dots \quad (1a)$$

woraus mit

$$Q \cotg \alpha - a \operatorname{tg} \beta = H' \quad \dots \quad (2)$$

$$H = H' - b \cdot \frac{dH}{dy} \quad \dots \quad (3)$$

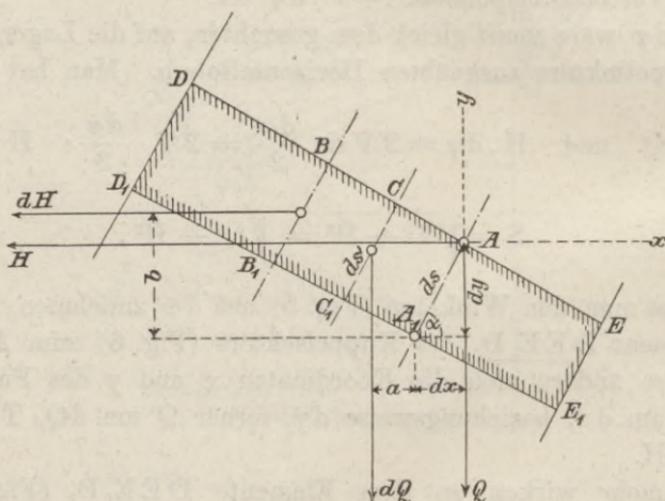


Fig. 6.

Um jetzt für beliebige  $y$  die zugehörigen Werthe von  $H$  zu erhalten, zieht man zunächst eine Reihe von radialen Lagerfugen, berechnet für jede mittels der Guldin'schen Regel den Werth von  $Q$ , trägt zu den  $y$  als Abscissen die  $Q$  als Ordinaten auf, zieht die Linie der  $Q$ , konstruirt die den angenommenen Lagerfugen entsprechenden Werthe von  $a \cdot \operatorname{tg} \beta$  und  $Q \cotg \alpha$  und damit nach Gleichung (2) auch die Werthe von  $H'$ , trägt zu den Abscissen  $y$  die Ordinaten  $H'$  auf und zeichnet die Linie der  $H'$  (Fig. 7). Hier-

auf substituiert man der gezeichneten stetigen Linie der  $H'$  ein Polygon von geradlinigen Seiten und sucht die diesen Polygonseiten entsprechenden Theile der Linie  $H$ , deren Differentialgleichung oben sub (3) angegeben, zu bestimmen. Das kann in folgender Weise geschehen:

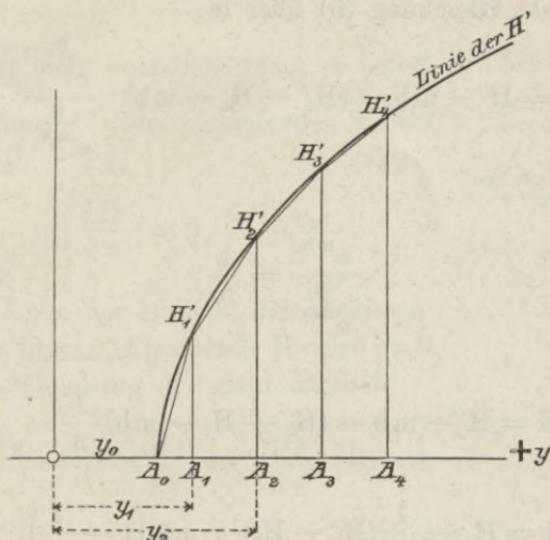


Fig. 7.

Es handele sich beispielsweise um die Ermittlung der Linie der  $H$  zwischen  $A_1$  und  $A_2$  oder den Abscissen  $y_1$  und  $y_2$  (Fig. 7).

Die Linie der  $H'$  ist zwischen  $A_1$  und  $A_2$  gerade angenommen und habe die Gleichung:

$$H' = my + A, \text{ womit } dH' = m dy \text{ und } dy = \frac{dH'}{m}.$$

Dieser Werth von  $dy$  in Gleichung (3) eingesetzt giebt:

$$H = H' - mb \cdot \frac{dH'}{dH'}, \dots \dots \dots (4)$$

wobei  $m$  und  $b$  als konstante Grössen für den Theil  $A_1 A_2$  anzusehen wären. Integriert man Gleichung (4), so erhält man:

$$H = H' - mb + \frac{C}{e^{\frac{H'}{mb}}}, \dots \dots \dots (5)$$

in welcher Gleichung  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-systems und  $C$  die Integrationskonstante bedeutet.

Nun sei für  $y = y_1$ ,  $H = H_1$  und  $H' = H_1'$ , daher:

$$H_1 = H_1' - mb + \frac{C}{e^{\frac{H_1'}{mb}}} \quad \text{oder} \quad C = e^{\frac{H_1'}{mb}} (H_1 - H_1' + mb).$$

Damit geht Gleichung (5) über in:

$$H = H' - mb - (H_1' - H_1 - mb) \cdot \frac{e^{\frac{H_1'}{mb}}}{e^{\frac{H'}{mb}}} \quad \dots \quad (6)$$

und wenn

$$\frac{e^{\frac{H_1'}{mb}}}{e^{\frac{H'}{mb}}} = \frac{1}{n}$$

gesetzt wird,

$$H = H' - mb - (H_1' - H_1 - mb) \frac{1}{n}$$

oder

$$H = H' - \frac{1}{n} (H_1' - H_1) - mb \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad \dots \quad (7)$$

Dabei hat man zur Berechnung von  $n$ :

$$\log n = \log e^{\frac{H'}{mb}} - \log e^{\frac{H_1'}{mb}} = \frac{H' - H_1'}{m} \cdot \frac{\log e}{b}$$

oder

$$\log n = \frac{y - y_1}{b} \cdot \log e \quad \dots \quad (8)$$

Wir sind also im Stande, wenn der zu der Abscisse  $y_1$  gehörige Werth  $H_1$  von  $H$  bekannt ist, die Werthe von  $H$  zu bestimmen für die Abscissen von  $y = y_1$  bis  $y = y_2$ . Man begnügt sich aber, für  $y = y_2$  die Ordinate  $H_2$  festzusetzen und verfährt dann mit  $H_2$  bei dem nächstfolgenden Theil der Linie der  $H$  in gleicher Weise, wie es soeben mit  $H_1$  geschehen ist.

Um nun  $H_1$  zu erhalten, betrachten wir das Gleichgewicht des obersten, keilförmigen Elementes des Kuppelsektors (Fig. 8). Dieses Element wird durch die Resultirende der beiden Kräfte  $dQ \cdot d\varphi$  und  $dH \cdot d\varphi$  auf seine Lagerfuge aufgedrückt; an Stelle von  $H$  hat man also hier  $dH$ , d. h. für  $y = y_0$  ist  $H = 0$ .

Weiter muss sein:

$$dH \cdot b_0 = dQ (dx - dx_0)$$

oder auch

$$\frac{dH}{dy} \cdot b_0 = \frac{dQ}{dy} (dx - dx_0). \quad \dots \quad (9)$$

$\frac{dQ}{dy}$  ist nicht unendlich gross, es liefert daher Gleichung (9), da vorliegenden Falles  $b_0$  nicht = 0,

$$\frac{dH}{dy} = 0,$$

weshalb die Linie der H in  $A_0$  die Abscissenaxe berühren muss. Aber auch  $H' = 0$  für  $y = y_0$ , Gleichung (2) giebt nämlich

$$H' = \frac{dQ \cdot dx}{dy} - 0 \cdot \frac{dQ}{dy} = \frac{dQ}{dy} \cdot 0 = 0.$$

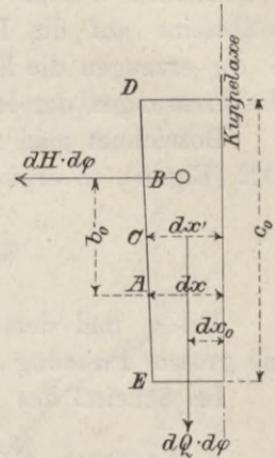


Fig. 8.

Nummehr können wir das erwähnte  $H_1$ , d. h. den zur Abscisse  $y_1$  gehörigen Werth von H ermitteln. Zunächst liefert Gleichung (8):

$$\log n_1 = \frac{y_1 - y_0}{b_1} \log e,$$

sodann Gleichung (7):

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1' - \frac{1}{n_1} (0 - 0) - m_1 b_1 \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) = \\ &= H_1' - m_1 b_1 \left(1 - \frac{1}{n_1}\right). \end{aligned}$$

Hat man auf diese Weise  $H_1$  bestimmt, so lässt sich, wie oben angegeben wurde, auch  $H_2$  berechnen; man hat zunächst:

$$\log n_2 = \frac{y_2 - y_1}{b_2} \cdot \log e$$

und sodann:

$$H_2 = H_2' - \frac{1}{n_2} (H_1' - H_1) - m_2 b_2 \left(1 - \frac{1}{n_2}\right).$$

So kann man, wenngleich auf mühsame Weise, der Reihe nach die zu den Abscissen  $y_1 y_2 y_3 \dots$  gehörigen Werthe von  $H$  erhalten und dann auch die Linie der  $H$  aufzeichnen.

**Bestimmung der grössten Lagerfugenpressung.** Hat man die Linie der  $H$ , so lassen sich für sämtliche Lagerfugen die betreffenden Werthe der Kräfte  $S \cdot d\varphi$  angeben, welche die Gewölbsteine auf die Lagerfugen aufdrücken. Von diesen Kräften  $S \cdot d\varphi$  erzeugen die Komponenten  $N d\varphi$  normal zu den Lagerfugen die Pressungen der letzteren.

Bezeichnet man mit  $\sigma_c$  die mittlere Pressung einer Lagerfuge  $DE$  (Fig. 5), so ergibt sich:

$$\sigma_c = \frac{N d\varphi}{x_c \cdot d\varphi \cdot c} = \frac{N}{x_c \cdot c} \cdot \dots \cdot \dots \quad (10)$$

Mit  $\sigma_c$  und dem Druckmittelpunkt  $A$  (Fig. 5) ist dann auch die grösste Pressung  $\sigma_m$  der Fuge bestimmt.

Im Scheitel des Kuppelsektors wird:

$$N = dH; \quad x_c = dx'; \quad c = c_0$$

und damit die mittlere Lagerfugenpressung:

$$\sigma_0 = \frac{dH}{dx' \cdot c_0} \cdot \dots \cdot \dots \quad (11)$$

oder

$$\sigma_0 = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{dx'} \cdot \frac{1}{c_0}$$

Im Scheitel ist aber, wie wir oben gesehen haben, weil  $b_0$  nicht  $= 0$ ,  $\frac{dH}{dy} = 0$ , und daher:

$$\sigma_0 = 0^*).$$

Da wir nun für jede Lagerfuge die Maximalpressung bestimmen können, sind wir auch im Stande, bei dem angenommenen Stützliniensystem die grösste im Kuppelsektor auftretende Lagerfugenpressung anzugeben.

\*) Wäre dagegen das Stützliniensystem so angenommen gewesen, dass  $b_0 = 0$ , hätte Gleichung (11) in Verbindung mit Gleichung (9) ergeben:

$$\sigma_0 = \frac{0}{0}$$

**Bestimmung der grössten Stossfugenpressung.** Wir betrachten das Element  $DEDE_1E_1$  (Fig. 6) des Kuppelsektors. An den Stossflächen desselben wirken in den durch die Stossfugenstützlinie bestimmten Punkten die Normalkräfte  $dT$ . Man hat daher als mittlere Stossfugenpressung

$$\tau_c = \frac{dT}{c \cdot ds'} = \frac{dH}{c \cdot ds'} \dots \dots \dots (12)$$

Dieses  $\tau_c$  ermittelt man für die verschiedenen Lagen von  $DE$  graphisch, wie folgt:

Man trägt (Fig. 9) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die den verschiedenen Fugen entsprechenden Bogenlängen  $C_0C = s'$  (siehe Fig. 5) als Abscissen, die zugehörigen ermittelten Werthe von  $H$  als Ordinaten auf, zieht die Linie der  $H$  und an dieselbe in den Endpunkten  $H$  der Ordinaten Tangenten  $HT$ , ferner durch die Punkte  $H$  Parallelen zur Abscissenaxe, trägt auf letzteren im Längenmaassstab das Stück  $HM$  ab = der Längeneinheit und  $MN = c$ , errichtet in den Punkten  $M$  Lothe  $MT$  auf  $HM$ , zieht  $TN$  und

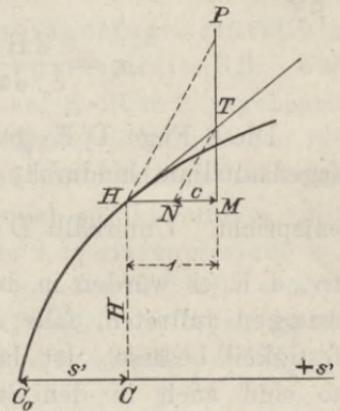


Fig. 9.

durch  $H$   $HP \parallel NT$ , dann ist das jeweilige  $\tau_c$  ausgedrückt durch die betreffende Strecke  $MP$ , und zwar hat man diese Strecke mit dem Kräftemaassstab, in welchem die  $H$  aufgetragen sind, abzumessen, um  $\tau_c$  zu erhalten. Kennt man aber die mittlere Pressung eines Flächenstreifens  $DE$  vom Meridianschnitt des Kuppelgewölbes, so lässt sich, da der Druckmittelpunkt als Schnitt der Stossfugenstützlinie mit  $DE$  bekannt ist, die grösste Pressung in diesem Streifen ermitteln. Man ist somit auch im Stande, die grösste Stossfugenpressung festzusetzen.

Nimmt man den Flächenstreifen  $DE$  im Scheitel des Kuppelgewölbes an, so wird

$$ds' = dx'; \quad c = c_0$$

und daher

$$\tau_0 = \frac{dH}{c_0 \cdot dx'} \dots \dots \dots (13)$$

**Gleichheit der mittleren Lagerfugen- und Stossfugenpressung im Scheitel des Kuppelgewölbes.** Aus Gleichungen (11) und (13) ergibt sich allgemein:

$$\sigma_0 = \tau_0 \dots \dots \dots (14)$$

und zwar, wenn  $b_0$ , d. i.  $A_0C_0$  (Fig. 5) nicht  $= 0$

$$\sigma_0 = \tau_0 = 0.$$

**Die Grenzfrage.** Auch für eine zweite Lage  $D'E'$  von  $DE$  wird  $\tau_c = 0$ . Hat nämlich  $H$  seinen Maximalwerth erreicht, so ist  $\frac{dH}{dy} = 0$  und damit:

$$\tau_c = \frac{dH}{c \cdot ds'} = \frac{dH}{dy} \cdot \frac{dy}{ds'} \cdot \frac{1}{c} = 0.$$

Diese Fuge  $D'E'$  geht also durch den Punkt  $A'$  der Lagerfugenstützlinie hindurch, welchem der Scheitel der Linie der  $H$  entspricht. Unterhalb  $D'E'$  ergibt sich  $\frac{dH}{dy}$  und damit  $\tau_c$  negativ, d. h. es würden in den Stossfugen unterhalb  $D'E'$  Zugspannungen auftreten, falls das Gewölbemauerwerk die nöthige Zugfestigkeit besäße. Ist dagegen auf Zugfestigkeit nicht zu rechnen, so sind auch in den Stossflächen der unterhalb  $D'E'$  gelegenen Ringschichten keine Kraftwirkungen anzunehmen. Es behält daher der Horizontalschub  $H$  für alle Lagerfugen unterhalb  $D'E'$  denselben Werth. Wir werden nun die Lagerfuge  $D'E'$  Grenzfrage nennen und den Winkel  $\psi'$  von  $D'E'$  mit der vertikalen Kuppelaxe Grenzwinkel.

**Mögliche Stützliniensysteme.** Bei der oben vorgenommenen Bestimmung der Fugenpressungen hat sich nichts gezeigt, was die Annahme der Lagerfugenstützlinie  $A_0A$  und der Stossfugenstützlinie  $B_0B$  (Fig. 5) als unzulässig erscheinen liesse, es ist daher dieses Stützliniensystem  $A_0A$  und  $B_0B$  (Fig. 5), vorausgesetzt, dass bei demselben die Fugenpressungen die Festigkeit des Gewölbemauerwerks nicht überschreiten, thatsächlich möglich. Daraus darf dann weiter geschlossen werden, dass

in einem nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit zeigenden, symmetrisch zur vertikalen Kuppelaxe angeordneten Kuppelgewölbe, abgesehen von der Beschränkung, welche aus der Begrenztheit der

Materialfestigkeit sich ergibt, jedes beliebige, im Meridianschnitt stetig verlaufende, die Lagerfugen je nur einmal schneidende Linienpaar mit horizontalen Tangenten im Kuppelscheitel\*) als ein mögliches Stützliniensystem betrachtet werden kann.

**Das günstigste Stützliniensystem.** Um bezüglich des günstigsten Stützliniensystems Aufschluss zu erhalten, nahm Verfasser ein kugelförmiges Kuppelgewölbe von konstanter Stärke  $c = 0,75$  m, einem lichten Halbmesser von 10 m und einem spezifischen Gewicht  $\gamma = 2000$  kg an und als Stützliniensystem desselben zunächst die Begrenzungslinien der Kernfläche des Meridianschnittes, und zwar die innere Begrenzungslinie als Lagerfugenstützlinie AA (Fig. 5), die äussere als Stossfugenstützlinie BB. Für dieses Stützliniensystem wurde nach den auf S. 21 u. f. gegebenen Vorschriften die Linie der H konstruiert. Dadurch erhielt man für jede Lagerfuge den Horizontalschub H und mit letzterem auch die Kraft S, sowie deren Komponente N normal zur Lagerfuge. Mit N lieferte aber Gleichung (10) die mittlere Lagerfugenpressung  $\sigma_c$ , worauf sich, da der Druckmittelpunkt A gegeben war, die grösste Lagerfugenpressung  $\sigma_m$  bestimmen liess. Desgleichen ergab die in Fig. 9 angedeutete Konstruktion die mittlere Stossfugenpressung  $\tau_c$ , mit Hilfe welcher, sowie des Druckmittelpunktes B, die grösste Stossfugenpressung  $\tau_m$  festgesetzt werden konnte.

Nun wurden auf Tafel I in Fig. 1 senkrecht zur gerade gestreckten Mittellinie des Kuppelgewölbes in den Fugenpunkten C die gefundenen  $\sigma_m$  und  $\tau_m$  als Ordinaten aufgetragen, die Endpunkte der letzteren durch stetige Linien verbunden und so für das angenommene Stützliniensystem die Linien der  $\sigma_m$  und  $\tau_m$  erhalten. Diese Linien sind durch die Bezeichnungen  $\sigma_m^I$  und  $\tau_m^I$  gekennzeichnet. In Fig. 1 Tafel I sind sodann noch für 2 weitere Stützliniensysteme die Linien der  $\sigma_m$  und  $\tau_m$  angegeben, nämlich für das mit der Mittellinie CC (Textfigur 5) des Meridianschnittes zusammenfallende Liniensystem und für ein System, bei welchem die Lagerfugenstützlinie ebenfalls mit der Mittellinie CC zusammenfällt, die Stossfugenstützlinie dagegen mit der äusseren Begrenzungslinie

\*) Die horizontalen Tangenten im Kuppelscheitel sind dadurch begründet, dass für die Stützlinien die Kuppelaxe Symmetralaxe sein muss und diese Linien auch im Kuppelscheitel keine Unterbrechung der Stetigkeit zeigen dürfen.

linie der Kernfläche des Meridianschnittes. Die ersterem Stützliniensystem entsprechenden Werthe von  $\sigma_m$  und  $\tau_m$  sind mit  $\sigma_m^{II}$  und  $\tau_m^{II}$ , die dem letzteren System entsprechenden mit  $\sigma_m^{III}$  und  $\tau_m^{III}$  bezeichnet. Dabei ist zu bemerken, dass die Werthe  $\sigma_m^{II}$  und  $\tau_m^{II}$  sich besonders einfach bestimmen liessen, indem bei dem mit der Mittellinie zusammenfallenden Stützliniensystem die Grössen a und b (Textfigur 5) = 0 sind und demgemäss nach Gleichung (1a)  $H = Q \cotg \alpha$  wird und der Fugendruck  $S = \sqrt{H^2 + Q^2}$  tangentiell zur Mittellinie wirkt, auch die Druckvertheilung in den Fugen eine gleichförmige ist.

Ueberblicken wir die den gewählten 3 Stützlinien entsprechenden Linien der  $\sigma_m$  und  $\tau_m$ , so sehen wir, dass das mit der Mittellinie CC des Meridianschnittes zusammenfallende Stützliniensystem den kleinsten Werth für die Maximalinanspruchnahme des Kuppelgewölbes liefert. Aber auch, wenn man noch weitere Stützliniensysteme in Betracht zieht, wird sich das genannte System als das günstigste erweisen. Ueberhaupt lässt sich annehmen, dass für den über der Grenzfüge gelegenen Theil eines Kuppelgewölbes das mit der Mittellinie des Meridianschnittes zusammenfallende Stützliniensystem das günstigste ist.

**Maximalinanspruchnahme im günstigsten Fall eines Kuppelgewölbes von kugelflächiger Leibung und konstanter Stärke.** Wie Fig. 1 Tafel I zeigt, ergibt sich unter Annahme des günstigsten Stützliniensystems als grösste Inanspruchnahme des über der Grenzfüge D'E' liegenden Theiles des Kuppelgewölbes die Lagerfugenpressung  $\sigma'_m$  in D'E'. Dieses  $\sigma'_m$  berechnet sich in folgender Weise:

Für eine unter dem Winkel  $\psi$  gegen die vertikale Kuppelaxe geneigte Lagerfüge des Kuppelsektors von dem Ausschnittwinkel  $d\varphi$  und dem Halbmesser r der Mittellinie ergibt sich unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$\sigma_m = \sigma_c = \frac{S d\varphi}{c \cdot r \sin \psi \cdot d\varphi}.$$

Dabei ist  $S = \frac{Q}{\sin \psi}$  und  $Q \cdot d\varphi = r \cdot \psi \cdot c \cdot x_0 d\varphi \cdot \gamma$ , wobei  $x_0$  der Abstand des Schwerpunktes des Kreisbogens  $C_0C$  von der Kuppelaxe. Dieses  $x_0$  ist aber:

$$x_0 = \frac{r \cdot \sin \frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}} \cdot \sin \frac{\psi}{2} = \frac{2r \sin^2 \frac{\psi}{2}}{\psi},$$

somit

$$Q = 2r^2 \cdot c\gamma \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2} = r^2 \cdot c\gamma (1 - \cos \psi)$$

und

$$\sigma_m = \sigma_c = \frac{r\gamma(1 - \cos \psi)}{\sin^2 \psi} = \frac{r\gamma}{1 + \cos \psi}. \quad (15a)$$

Im Scheitel der Kuppel wird damit

$$\sigma_c = \frac{r\gamma}{2}.$$

Um den Werth von  $\sigma_c$  für die Grenzstufe D'E' zu erhalten, müssen wir erst die Lage der letzteren, d. h. den Winkel  $\psi'$  berechnen. Zu diesem Zwecke vergegenwärtigen wir uns, dass in D'E' das  $\tau_c = 0$  ist.

Gleichung (12) giebt für die mittlere Stossfugenpressung  $\tau_c$

$$\tau_c = \frac{dH}{c \cdot ds'},$$

somit wäre vorliegenden Falles

$$\tau_m = \tau_c = \frac{dH}{c \cdot ds'} = \frac{dH}{c \cdot r d\psi}.$$

Nun hat man:

$$H = Q \cotg \psi = \frac{r^2 c \gamma (1 - \cos \psi) \cos \psi}{\sin \psi},$$

woraus

$$\frac{dH}{d\psi} = r^2 c \gamma \cdot \frac{2 \cos \psi - \cos^3 \psi - 1}{\sin^2 \psi} = r^2 c \gamma \left( \cos \psi - \frac{1}{1 + \cos \psi} \right),$$

also

$$\tau_m = r \gamma \left( \cos \psi - \frac{1}{1 + \cos \psi} \right) \dots \dots (15b)$$

und im Kuppelscheitel

$$\tau_m = \tau_0 = \frac{r \gamma}{2} = \sigma_0.$$

Für  $\psi = \psi'$  wird  $\tau_m = 0$ , daher

$$\cos \psi' - \frac{1}{1 + \cos \psi'} = 0; \quad \cos^2 \psi' + \cos \psi' = 1;$$

$$\psi' = 51^\circ 50'.$$

Setzt man jetzt in Gleichung (15a) an Stelle von  $\psi$  den Winkel  $\psi'$ , so erhält man damit die grösste Inanspruchnahme des Kuppelgewölbes im günstigsten Fall

$$\sigma'_m = \frac{r \gamma}{1 + \cos \psi'} = 0,62 r \gamma. \dots \dots (16)$$

#### IV. Kapitel.

### **Die Berechnung eines im Scheitel geschlossenen Kuppelgewölbes von gegebener Leibung auf Grund des günstigsten Stützliniensystems.**

Zweckmässigkeit konstanter Stärke des Gewölbes oberhalb der Grenzfuge. Fig. 1 Taf. I zeigt, dass in einem kugelflächigen Kuppelgewölbe bei Annahme konstanter Gewölbstärke unter Zugrundelegung des günstigsten Stützliniensystems die Lagerfugenpressung von der Grenzfuge bis zum Kuppelscheitel nur wenig abnimmt, ferner: dass die Stossfugenpressungen  $\tau_m$  gegen den Kuppelscheitel hin zunehmen; es war daher zweckmässig, vorliegenden Falles konstante Gewölbstärke in dem über der Grenzfuge gelegenen Theil des Kuppelgewölbes anzuordnen.

**Ermittelung eines Verfahrens zur Berechnung des Meridianschnittes geschlossener Kuppelgewölbe.** Es handle sich wieder um ein Kuppelgewölbe von kugelflächiger Leibung.

Zunächst könnte man daran denken, entsprechend dem auf S. 17 Gesagten, die grösste Lagerfugenpressung im günstigsten Fall gleich derjenigen bei einem ausgeführten, aus demselben Material bestehenden und in seiner Stärke bewährten Kuppelgewölbe zu setzen, allein diese Lagerfugenpressung  $\sigma'_m$  ist ja, wie wir soeben gesehen haben, unabhängig von der Gewölbstärke; es kann daher für dieselbe nicht ein bestimmter Werth gefordert werden\*). Man muss sich deshalb nach einem anderen Verfahren umsehen. Hierbei kann das folgende Beispiel den Weg zeigen.

\*) Die Methode ist übrigens auch bei flachen Tonnengewölben, welche, wie die Kuppelgewölbe, lediglich als Deckengewölbe zu dienen und ausser ihrem eigenen Gewicht keine weitere Belastung zu tragen haben, nicht mehr anwendbar. Ebenso wenig kann in diesem Falle die gewöhnliche, in der Einleitung auf S. 2 erwähnte Berechnungsweise der Tonnengewölbe benutzt werden.

Es sei der Querschnitt  $F$  eines durch eine Kraft  $P$  auf Zug in Anspruch genommenen Stabes zu berechnen.

Zu dem Ende setzen wir  $\frac{P}{F} = k$ , unter  $k$  die grösste zulässige Spannung verstanden, und erhalten  $F = \frac{P}{k}$ .

Streng genommen ist  $\frac{P}{F}$  die Maximalspannung im günstigsten Fall, denn wenn  $P$  nicht genau in der Axe wirkte oder wenn aus anderen Gründen die Spannung nicht der ganzen Fläche  $F$  nach gleichmässig wäre, ergäbe sich für die Maximalspannung ein grösserer Werth als  $\frac{P}{F}$ .

Bei einem schmiedeisernen Stab könnte bei ruhender Belastung  $k = 10$  kg pro qmm gesetzt werden, womit

$$F = \frac{P}{10}.$$

Wäre aber der mit  $P$  belastete Stab Erschütterungen, Stössen oder sonstigen zufälligen Einwirkungen ausgesetzt, dürfte man mit  $k$  nicht soweit gehen. Gesetzten Falles, es habe die Erfahrung bei einem derartigen auf Zug beanspruchten Konstruktionstheil gezeigt, dass  $k$  nicht grösser als 3 kg pro qmm zu nehmen ist, so erhielte man für den Stabquerschnitt

$$F' = \frac{P}{3}.$$

Denken wir uns jetzt den Stab vom Querschnitt  $F'$  ausser mit  $P$  noch mit einer zweiten ruhenden Last  $Z$  versehen und letztere so bemessen, dass

$$\frac{P + Z}{F'} = 10; \quad P + Z = 10 F' = 10 \cdot \frac{P}{3}; \quad Z = \frac{7P}{3},$$

dann könnte man den Stab, dessen wirkliche, durch die zufälligen Einwirkungen mitbeeinflusste Maximalanspruchnahme sich gar nicht bestimmt angeben lässt, auch in der Weise berechnen, dass man die günstigste Beanspruchung des Stabes annimmt (d. h. die Last genau in der Stabaxe wirkend, keine Stösse etc.), zu der gegebenen Last  $P$  noch die „Ergänzungs-

belastung“  $Z = \frac{7}{3}P$  hinzufügt und die sich hierbei ergebende Maximalspannung  $= 10 \text{ kg pro qmm}$  setzt.

Damit sind die Grundzüge eines Verfahrens angedeutet, das auch auf die Berechnung der Kuppelgewölbe angewendet werden kann.

#### Anwendung des letztgenannten Verfahrens auf Kuppelgewölbe.

Die am Kuppelgewölbe thatsächlich wirkende Last ist das Eigengewicht des Gewölbes. Dasselbe kann man über die mittlere Kuppelfläche, d. h. die durch Umdrehung der Mittellinie des Meridianschnittes um die Kuppelaxe erzeugte Umdrehungsfläche, bei konstanter Gewölbstärke gleichmässig vertheilt annehmen.

Ist  $c$  die Gewölbstärke,  $\gamma$  das Gewicht der Kubikeinheit Gewölbemauerwerk und  $q$  die Belastung durch Eigengewicht pro Flächeneinheit der mittleren Kuppelfläche, so hat man  $q = c\gamma$ .

Berechnet man jetzt bei ausgeführten und bewährten Kuppelgewölben die grösste Lagerfugenpressung im günstigsten Fall  $\sigma'_m$ , so findet man, dass diese um vieles kleiner ist, als die zulässige grösste Pressung  $k$ , welche man bei statisch bestimmten; aus demselben Mauerwerk herzustellenden Steinkonstruktionen anzunehmen pflegt.

Vergrössert man die vom Eigengewicht herrührende gegebene Last  $q$  um den Betrag  $p$ , so wird damit auch  $\sigma'_m$  grösser. Wir bemessen nun  $p$  so, dass  $\sigma'_m = k$  sich ergibt.

Beim kugelflächigen Kuppelgewölbe vom mittleren Halbmesser  $r$  haben wir oben gefunden (Gleichung 16)

$$\sigma'_m = 0,62 \cdot r \gamma = \frac{0,62 \cdot r \cdot c \gamma}{c}.$$

Demgemäss setzen wir

$$k = \frac{0,62 \cdot r \cdot (c\gamma + p)}{c} \dots \dots \dots (17)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich für ein betrachtetes ausgeführtes Kuppelgewölbe der Werth von  $p$  bestimmen.

Auf Grund der Untersuchung einer Reihe von ausgeführten Kuppelgewölben kann man nun setzen:

$$p = 4800 \left( 1 + \frac{1,5}{r} \right), \quad \dots \quad (18)$$

wobei  $p$  in kg pro qm erhalten wird, wenn man den mittleren Halbmesser  $r$  des Kuppelgewölbes in Metern ausdrückt. Diese Belastung  $p$  pro qm der mittleren Kuppelfläche wäre also bei den Kuppelgewölben die Ergänzungsbelastung.

**Einfache Formel für die Scheitelstärke  $c$  eines kugelflächigen Kuppelgewölbes.** Soll jetzt die konstante Stärke  $c$  und damit auch die Scheitelstärke eines kugelflächigen Kuppelgewölbes vom mittleren Halbmesser  $r$  berechnet werden, so setzt man:

$$\sigma'_m = \frac{0,62 \cdot r (c \gamma + p)}{c} = k,$$

woraus:

$$c = \frac{0,62 \cdot p \cdot r}{k - 0,62 r \gamma},$$

oder, wenn man den Werth von  $p$  aus Gleichung (18) einführt:

$$c = \frac{3000 (r + 1,5)}{k - 0,62 \cdot r \gamma}, \quad \dots \quad (19)$$

unter  $k$ , wie schon erwähnt, die für gewöhnlich, d. h. bei statisch bestimmten Steinkonstruktionen als zulässig angenommene Inanspruchnahme des betreffenden Gewölbmaterials verstanden. Dabei ist alles auf den Meter bezogen und selbstverständlich  $r$  innerhalb der Grenzen angenommen, welche durch die Praxis festgesetzt sind.

**Der Meridianschnitt des Kuppelgewölbes von kugelflächiger Leibung unterhalb der Grenzfüge.** Schon früher wurde gesagt, dass, wenn Zugfestigkeit des Gewölbemauerwerks ausser Acht bleiben soll, die Stossflächen der Ringschichten unterhalb der Grenzfüge keine Kraftwirkungen erfahren. Es ist daher der unter der Grenzfüge gelegene Theil des Kuppelsektors wie ein freistehender Mauerkörper, Fig. 10, zu behandeln, der, ausser durch sein Eigengewicht, in  $C'$  normal zur Fuge  $D'E'$  von der Kraft  $S' \cdot d\varphi = \sigma'_m \cdot c \cdot x' \cdot d\varphi$  angegriffen wird. Wäre nun die Gewölbstärke  $c$  auch im unteren Theil des Kuppelsektors konstant, würde die Stützlinie sich mehr und mehr dem Gewölbrücken nähern und

schliesslich denselben überschreiten. Man muss daher die Gewölbstärke nach unten zunehmen lassen und zwar in der Weise, dass in jeder Lagerfuge die grösste Pressung, welche am Gewölbbrücken bei D auftritt, gleich der in der Grenzfuge D'E' herrschenden, also  $= \sigma'_m$  wird. Hierbei verfährt man folgendermaassen: Man nimmt für die Lagerfuge DE des obersten Gewölbsteines den Punkt D vorläufig an, bestimmt die Pressung  $\sigma_m$  in D und vergleicht sie mit  $\sigma'_m$ , ändert alsdann die Lage des Punktes D so lange, bis  $\sigma_m = \sigma'_m$  geworden. In gleicher Weise wird hierauf der Punkt D für die nächstfolgende Lagerfuge festgesetzt u. s. f. und damit die Rückenlinie DD des Kuppelsektors konstruiert.

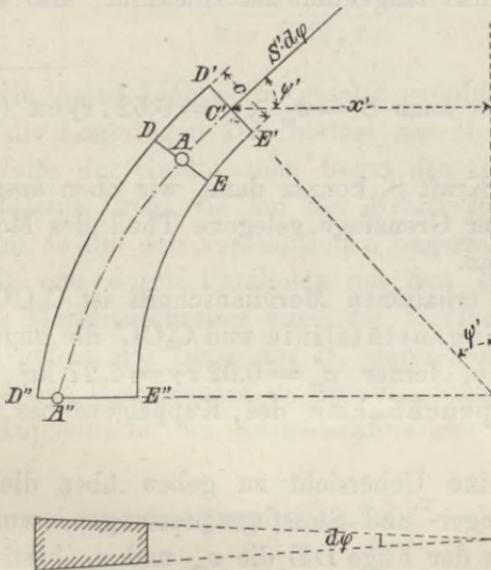


Fig. 10.

Beispiel. Es handle sich um die Bestimmung des Meridianschnittes eines geschlossenen Kuppelgewölbes, dessen Leibung die Oberfläche einer Halbkugel vom Halbmesser  $r_1 = 10$  m darstelle. Das Gewicht eines Kubikmeters Gewölbemauerwerk sei  $\gamma = 1600$  kg und die zulässige grösste Inanspruchnahme des Gewölbematerials  $= 8$  kg pro qcm.

Zunächst liefert Gleichung (19) die konstant anzunehmende Stärke  $c$  des Kuppelgewölbes über der Grenzfuge, welche letztere im Falle konstanter Gewölbstärke den Winkel  $\psi' = 51^\circ 50'$  mit

der vertikalen Kuppelaxe einschliesst; man erhält, indem man vorläufig  $r = r_1 = 10$  m setzt:

$$c = \frac{3000 \cdot 11,5}{80000 - 0,62 \cdot 10 \cdot 1600} = 0,49 \text{ m,}$$

damit wird der genauere Werth von  $r = 10,25$  m. Mit diesem ergibt sich

$$c = 0,52 \text{ m.}$$

Dementsprechend wurde auf Tafel II der Theil  $D_0E_0E'D'$  des Meridianschnittes aufgezeichnet, dessen Mittellinie  $C_0C'$  Lager- und Stossfugenstützlinie zugleich angiebt. Der auf  $D'E'$  wirkende Fugendruck  $S' \cdot d\varphi$  wirkt tangentiell zur Stützlinie, also zur Mittellinie, es ist daher

$$S' = \frac{Q'}{\sin \psi'} \quad \text{oder auch} \quad S' = \sigma'_m \cdot cx' = 0,62 \cdot r\gamma cx' \quad (\text{s. Textfig. 10}).$$

Mit dieser Kraft  $S'$  konnte dann, wie oben ausgeführt wurde, der unterhalb der Grenzfuge gelegene Theil des Meridianschnittes festgesetzt werden.

In dem so erhaltenen Meridianschnitt ist  $C_0CC'C''$  die günstigste Lagerfugenstützlinie und  $C_0CC'$  die zugehörige Stossfugenstützlinie, ferner  $\sigma'_m = 0,62 r\gamma = 1,27$  kg pro qcm die Maximalinanspruchnahme des Kuppelgewölbes im günstigsten Falle.

Um nun eine Uebersicht zu geben über die im Gewölbe herrschenden Lager- und Stossfugenpressungen, wurden für verschiedene Lagen der Fuge  $DE$  die  $\sigma_m$  und  $\tau_m$  bestimmt, als Ordinaten zu den Abscissen  $C_0C$  (Bögen  $C_0C$  gerade gestreckt) aufgetragen und die Endpunkte der Ordinaten durch stetige Linien verbunden. Dabei ergab sich  $\sigma_m$  von  $D_0E_0$  bis  $D'E'$  aus der Gleichung (15a)

$$\sigma_m = \frac{r\gamma}{1 + \cos \psi'}$$

womit

$$\sigma'_m = \frac{r\gamma}{1 + \cos \psi'} = 0,62 r\gamma$$

und  $\tau_m$  aus der Gleichung (15b)

$$\tau_m = r \gamma \cdot \left( \cos \psi - \frac{1}{1 + \cos \psi} \right).$$

Von D'E' bis D''E'' bleibt  $\sigma_m$  konstant, während  $\tau_m = 0$  ist.

**Kuppelgewölbe mit beliebig geformter Leibung.** Obgleich bei einem geschlossenen Kuppelgewölbe die Leibung wohl kaum anders als nach einer Kugelfläche geformt sein wird, soll doch auch der Fall einer Leibung von beliebiger Meridiankurve in Betracht gezogen werden. Hierbei wird zweckmässigerweise die Gewölbstärke  $c$  im oberen Theil der Kuppel wieder konstant angenommen und berechnet vorläufig aus der Gleichung (19)

$$c = \frac{3000 (r + 1,5)}{k - 0,62 \cdot r \gamma},$$

worin für  $r$  die halbe Lichtweite gesetzt werden mag. Sodann zeichnet man die Lagerfugen DE normal zur Mittellinie ein, berechnet mit Hülfe der Guldin'schen Regel die Gewichte der einzelnen Gewölbsteine, trägt sie auf der Kraftvertikalen auf (siehe Tafel II), erhält so die den verschiedenen Lagerfugen entsprechenden Werthe  $Q$  und durch Parallelen mit den Tangenten an die Mittellinie des Meridianschnittes auch die Werthe von  $S$  und  $H$ . Die letzteren liefern die Linie der  $H$ , deren Scheitel die Grenzfüge D'E' und den Grenzwinkel  $\psi'$  ergibt. Nunmehr nimmt man die mittlere Kuppelfläche des Kuppelsektors mit der Ergänzungsbelastung

$$p = 4800 \left( 1 + \frac{1,5}{r} \right)$$

kg pro qm belastet an, wobei für  $r$  wieder die halbe Lichtweite des Kuppelgewölbes gesetzt werden mag, und berechnet unter Berücksichtigung des Eigengewichtes und der Ergänzungsbelastung die gleichförmige Pressung  $\sigma'_m$  der Grenzfüge D'E' aus

$$\sigma'_m = \frac{S' d \varphi}{c \cdot x' d \varphi} = \frac{S'}{c x'} = \frac{Q'}{c x' \sin \psi'}.$$

Bei richtiger Annahme der Gewölbstärke  $c$  muss sich dann  $\sigma'_m = k$ , d. h. gleich der bei statisch bestimmten Steinkonstruktionen zulässigen Inanspruchnahme des Mauerwerks, ergeben.

Hat man auf diese Weise den Meridianschnitt des Kuppelgewölbes vom Scheitel bis zur Grenzfuge festgesetzt, giebt man die wirkliche Fugenpressung  $\sigma'_m$  der Grenzfuge an (Ergänzungsbelastung also ausser Acht gelassen) und bestimmt den unterhalb der Grenzfuge gelegenen Theil des Meridianschnittes, wie oben bei dem Kuppelgewölbe mit kugelflächiger Leibung.

**Kugelflächiges Kappengewölbe.** Stellt die Leibung des Kuppelgewölbes keine ganze Halbkugelfläche dar, sondern nur die Oberfläche eines Kugelabschnittes, so nennt man das betreffende Kuppelgewölbe ein Kappengewölbe.

Nimmt man bei einem solchen Kappengewölbe die Gewölbstärke  $c$  zweckmässigerweise konstant an, so wird der Grenzwinkel  $\psi'$  wieder  $= 51^\circ 50'$ . Ist nun der Centriwinkel eines Kappengewölbes  $2\psi'' > 2\psi'$ , so berechnet man dasselbe wie das halbkugelflächige Kuppelgewölbe. Ist dagegen  $\psi'' < \psi'$ , dann bestimmt man die konstante Gewölbstärke entsprechend der seither befolgten Methode, indem man die gleichförmige Lagerfugenpressung  $\sigma''_m$  am Widerlager, welche durch das Eigengewicht des Gewölbes und die über die mittlere Kuppelfläche gleichmässig vertheilte Ergänzungsbelastung von  $p$  kg pro Flächeneinheit hervorgerufen wird, gleich der zulässigen Inanspruchnahme  $k$  der betreffenden Mauerwerksart setzt.

Nach Gleichung (15a) ist die Pressung  $\sigma_m$  einer unter dem Winkel  $\psi$  gegen die Kuppelaxe geneigten Lagerfuge bei konstanter Gewölbstärke

$$\sigma_m = \frac{r\gamma}{1 + \cos \psi} = \frac{r c \gamma}{c(1 + \cos \psi)}.$$

Tritt jetzt noch die Ergänzungsbelastung  $p$  pro Flächeneinheit hinzu, so setzt man statt  $c\gamma$  den Werth  $c\gamma + p$  und erhält damit:

$$\sigma_m = \frac{r(c\gamma + p)}{c(1 + \cos \psi)}$$

und

$$\sigma''_m = \frac{r(c\gamma + p)}{c(1 + \cos \psi'')} = k,$$

woraus

$$c = \frac{r p}{k(1 + \cos \psi'') - r\gamma}. \quad \dots \quad (20)$$

Bezüglich der Ergänzungsbelastung  $p$  ist zu bemerken, dass dieselbe rationellerweise mit dem Winkel  $\psi''$  abnehmend angenommen wird und dass man setzen kann bei Meter und Kilogramm als Einheiten und bei nicht zu flachen Kappen (d. h.  $\operatorname{tg} \frac{\psi''}{2}$  nicht kleiner als etwa 0,2):

$$p = 9880 \left( 1 + \frac{1,5}{r} \right) \operatorname{tg} \frac{\psi''}{2} . . . . (21)$$

Nimmt man in dieser Gleichung  $\psi'' = \psi' = 51^\circ 50'$  an, so erhält man

$$p = 4800 \left( 1 + \frac{1,5}{r} \right),$$

also, wie es sein soll, den früheren Werth (s. Gleichung 18).

## V. Kapitel.

### Geschlossenes Kuppelgewölbe von durchgehends konstanter Lagerfugenpressung.

Meridianschnitt über der Grenzfuge bei kreisförmiger Mittelinie. Wie aus dem aus Tafel II behandelten Beispiel ersichtlich, nehmen die Lagerfugenpressungen bei einem kugelförmigen Kuppelgewölbe von konstanter Stärke unter Voraussetzung des günstigsten Stützliniensystems von der Grenzfuge gegen den Kuppelscheitel, wenn auch langsam, ab. Soll daher die Lagerfugenpressung  $\sigma_m$  konstant bleiben, so muss dafür die Gewölbstärke  $c$  veränderlich angenommen werden.

Ist nun  $k'$  die konstante Lagerfugenpressung, dann wird unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen (siehe auch Tafel II)

$$\frac{S}{c x} = k' \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{\sin \psi} \cdot \frac{1}{c \cdot r \cdot \sin \psi} = k';$$

$$Q = r k' c \sin^2 \psi.$$

Hieraus

$$\frac{dQ}{d\psi} = r k' \left( c \cdot 2 \sin \psi \cos \psi + \sin^2 \psi \frac{dc}{d\psi} \right).$$

Es ist aber:

$$dQ = c r d\psi \cdot x \gamma, \quad \text{also} \quad \frac{dQ}{d\psi} = c r x \gamma = c r^2 \gamma \sin \psi$$

womit:

$$c r^2 \gamma \sin \psi = r k' \left( c \cdot 2 \sin \psi \cos \psi + \sin^2 \psi \frac{dc}{d\psi} \right),$$

$$c \left( \frac{r \gamma}{k'} - 2 \cos \psi \right) = \sin \psi \cdot \frac{dc}{d\psi},$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\frac{r\gamma}{k'} - 2 \cos \psi}{\sin \psi} \cdot d\psi = \frac{r\gamma}{k'} \cdot \frac{d\psi}{\sin \psi} - 2 \cotg \psi \cdot d\psi.$$

Integriert:

$$\log c = \frac{r\gamma}{k'} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi - 2 \log \sin \psi + \log B,$$

unter B die Integrationskonstante verstanden. Oder:

$$\log c = \log \left( \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right)^{\frac{r\gamma}{k'}} + \log B - \log \sin^2 \psi = \log B \cdot \frac{\left( \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right)^{\frac{r\gamma}{k'}}}{\sin^2 \psi},$$

woraus:

$$c = \frac{B \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right)^{\frac{r\gamma}{k'}}}{\sin^2 \psi} = \frac{B \cdot \left( \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right)^n}{\sin^2 \psi}$$

oder

$$c = B \cdot \left( \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} \right)^n \cdot \frac{1}{\sin^2 \psi}.$$

Wäre  $k' = \frac{r\gamma}{2}$ , also  $k'$  gleich der Lagerfugenpressung im Scheitel eines kugelflächigen Kuppelgewölbes von konstanter Stärke (siehe S. 29), so würde

$$n = \frac{r\gamma}{k'} = 2$$

und

$$c = B \cdot \frac{\sin^2 \psi}{(1 + \cos \psi)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \psi} = \frac{B}{(1 + \cos \psi)^2}$$

und die Scheitelstärke  $c_0$  entsprechend  $\psi = 0$

$$c_0 = \frac{B}{4}.$$

Hätte man aber  $k' > \frac{r\gamma}{2}$  oder  $n = \frac{r\gamma}{k'} < 2$ , erhielte man:

$$c = \frac{B}{(1 + \cos \psi)^n (\sin \psi)^{2-n}}; \quad c_0 = \frac{B}{2^n \cdot 0} = \infty.$$

Wenn dagegen  $k' < \frac{r\gamma}{2}$  oder  $n = \frac{r\gamma}{k'} > 2$ , würde

$$c = B \cdot \frac{(\sin \psi)^{n-2}}{(1 + \cos \psi)^n} \quad \text{und} \quad c_0 = 0.$$

Es ist daher bei dem zu berechnenden Kuppelgewölbe nur die Forderung einer konstanten Lagerfugenpressung  $k' = \frac{r\gamma}{2}$  zulässig und zur Bestimmung der Gewölbstärken maassgebend die Gleichung:

$$c = \frac{B}{(1 + \cos \psi)^2}, \quad \dots \quad (22)$$

wobei  $B$  eine beliebige Konstante. Ist aber an irgend einer Stelle des Gewölbes die Stärke festgesetzt, dann ist auch  $B$  nicht mehr willkürlich. Wäre beispielsweise für  $\psi = 51^\circ 50'$  die Gewölbstärke  $= c'$ , hätte man

$$c' = \frac{B}{(1 + \cos 51^\circ 50')^2}$$

und damit  $B = 2,62 \cdot c'$ .

$$c = \frac{2,62 \cdot c'}{(1 + \cos \psi)^2}; \quad \text{Scheitelstärke } c_0 = \frac{2,62}{4} \cdot c'$$

oder angenähert

$$c_0 = \frac{2}{3} c'.$$

Andererseits erhält man aus der Gleichung für  $c$

$$c_0 = \frac{B}{4}; \quad B = 4 c_0 \quad \text{und} \quad c = \frac{4 c_0}{(1 + \cos \psi)^2}. \quad (22a)$$

Wenn jetzt bei dem kugelförmigen Kuppelgewölbe die Stärke  $c$  sich mit  $\psi$  ändert, entsprechend der letzten Gleichung, so hat die Grenzfuge  $D'E'$  nicht mehr die gleiche Lage wie bei dem Kuppelgewölbe von konstanter Stärke, d. h. der Neigungswinkel  $\psi'$  der Grenzfuge gegen die Kuppelaxe ist nicht mehr  $= 51^\circ 50'$ . Suchen wir nunmehr diesen Winkel  $\psi'$  zu bestimmen.

Für eine beliebige Lagerfuge hat man:

$$H = Q \cdot \cotg \psi$$

und daraus

$$\frac{dH}{d\psi} = Q \left( -\frac{1}{\sin^2 \psi} \right) + \cotg \psi \cdot \frac{dQ}{d\psi}.$$

Es ist aber

$$\frac{Q}{\sin \psi} = S = c \cdot x \cdot k' = c \cdot r \sin \psi \cdot k'$$

und, wie wir oben gesehen haben,

$$\frac{dQ}{d\psi} = r^2 \gamma \cdot c \cdot \sin \psi;$$

demgemäss wird

$$\frac{dH}{d\psi} = -c \cdot r \cdot k' + \cotg \psi \cdot r^2 \gamma c \cdot \sin \psi = r c (r \gamma \cos \psi - k').$$

Für  $\psi = \psi'$  wird  $\frac{dH}{d\psi} = 0$ , somit:

$$r \gamma \cos \psi' = k' = \frac{r \gamma}{2}; \quad \cos \psi' = \frac{1}{2}; \quad \psi' = 60^\circ.$$

Vom Scheitel der Kuppel bis zu der unter  $60^\circ$  gegen die Kuppelaxe geneigten Grenzfläche wären mithin die Lagerfugenpressungen konstant  $= k' = \frac{r \gamma}{2}$  und ergibt sich als Linie der  $\sigma_m$  eine Gerade parallel der Abscissenaxe. Um nun auch die Linie der  $\tau_m$  zu erhalten, bemerken wir, dass nach Gleichung (12)

$$\tau_m = \frac{dH}{c \cdot ds'} = \frac{dH}{c \cdot r \cdot d\psi}.$$

Es ist aber, wie wir soeben gesehen haben:

$$\frac{dH}{d\psi} = r c (r \gamma \cos \psi - k'),$$

also

$$\tau_m = r \gamma \cos \psi - k'. \quad \dots \quad (23)$$

Daraus lassen sich für beliebige Werthe von  $\psi$  die entsprechenden  $\tau_m$  berechnen. Im Kuppelscheitel ist  $\psi = 0$ , womit

$$\tau_m = r \gamma - k' = r \gamma - \frac{r \gamma}{2} = \frac{r \gamma}{2};$$

in der Grenzfuge dagegen, für welche  $\psi = 60^\circ$ ,  $\cos \psi = \frac{1}{2}$

$$r_m = \frac{r\gamma}{2} - \frac{r\gamma}{2} = 0.$$

**Meridianschnitt unterhalb der Grenzfuge.** Unterhalb der Grenzfuge wird der Kuppelsektor wieder wie ein freistehender Mauerkörper behandelt, der in  $C'$  (Fig. 10) von der Normalkraft  $S' d\varphi$  angegriffen, in jeder normal zur Mittellinie gelegenen Lagerfuge die gleichförmige Pressung  $\sigma_m = k' = \frac{r\gamma}{2}$  zeigen soll.

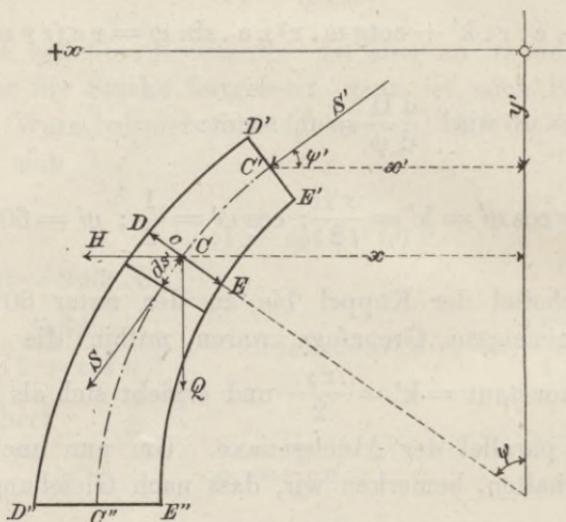


Fig. 11.

Zunächst wäre die Mittellinie festzusetzen.

Für eine beliebige, unter dem Winkel  $\psi$  gegen die vertikale Kuppelaxe geneigte Lagerfuge, für welche das Gewicht des über ihr befindlichen Theils des Kuppelsektors  $= Q \cdot d\varphi$  und der Horizontalschub  $= H \cdot d\varphi$ , erhält man:

$$Q = H \cdot \operatorname{tg} \psi = H \cdot u.$$

Dieser Horizontalschub  $H$  ist für den unter der Grenzfuge liegenden Theil des Kuppelsektors konstant, unabhängig von  $\psi$ , weshalb

$$dQ = H \cdot du.$$

Aber

$$dQ = c \cdot ds' \cdot x \gamma = c x \gamma \cdot \frac{dx}{\cos \psi},$$

also

$$H du = c x \gamma \cdot \frac{dx}{\cos \psi}.$$

Weiter hat man:

$$S = \frac{H}{\cos \psi} \quad \text{und} \quad \frac{S}{c x} = k',$$

womit

$$c \cdot x = \frac{H}{k' \cdot \cos \psi}$$

und

$$H du = \frac{H \gamma dx}{k' \cdot \cos^2 \psi}$$

oder

$$\begin{aligned} du &= \frac{\gamma dx}{k' \cdot \cos^2 \psi} = \frac{\gamma dx}{k'} \cdot \sec^2 \psi = \frac{\gamma dx}{k'} (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) = \\ &= \frac{\gamma dx}{k'} (1 + u^2); \end{aligned}$$

daraus:

$$\frac{\gamma}{k'} dx = \frac{du}{1 + u^2} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{k'} \cdot x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + C.$$

Für  $x = x'$  wird  $u = \operatorname{tg} \psi'$  und  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \psi'$ , man hat daher

$$\frac{\gamma}{k'} x' = \psi' + C, \quad \text{woraus} \quad C = \frac{\gamma x'}{k'} - \psi'.$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\gamma}{k'} (x - x') + \psi' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$$

und

$$\begin{aligned} u &= \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left\{ \frac{\gamma}{k'} (x - x') + \psi' \right\} = \\ &= \operatorname{cotg} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{k'} (x - x') - \psi' \right\}. \end{aligned}$$

Mit  $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{k'}(x - x') - \psi' = \zeta$  wird

$$-\frac{\gamma}{k'} dx = d\zeta; \quad dx = -\frac{k'}{\gamma} \cdot d\zeta; \quad \frac{dy}{dx} = \cotg \zeta;$$

$$dy = \cotg \zeta \cdot dx = -\frac{k'}{\gamma} \cdot \cotg \zeta \cdot d\zeta;$$

$$y = -\frac{k'}{\gamma} \int \cotg \zeta \cdot d\zeta = -\frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \sin \zeta + \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} C',$$

unter  $C'$  die Integrationskonstante verstanden.

$$y = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{C'}{\sin \zeta} = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{C'}{\cos \left\{ \frac{\gamma}{k'}(x - x') + \psi' \right\}}.$$

Zur Bestimmung von  $C'$  hat man:

Für  $x = x'$  wird  $y = y'$ . Dies giebt:

$$y' = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{C'}{\cos \psi'},$$

womit man erhält:

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{\cos \psi'}{\cos \left\{ \frac{\gamma}{k'}(x - x') + \psi' \right\}}. \quad (24)$$

Oben hatten wir

$$u = \text{tg} \left\{ \frac{\gamma}{k'}(x - x') + \psi' \right\};$$

es war aber

$$u = \text{tg} \psi, \quad \text{also} \quad \frac{\gamma}{k'}(x - x') + \psi' = \psi.$$

Damit wird:

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{\cos \psi'}{\cos \psi} \dots \dots (24a)$$

Im vorliegenden Falle ist  $\psi' = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  und daher  $\cos \psi' = \frac{1}{2}$

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{1}{2 \cos \left\{ \frac{\gamma}{k'}(x - x') + \frac{\pi}{3} \right\}} \quad (24b)$$

oder auch, da  $k' = \frac{r\gamma}{2}$ ,

$$y - y' = \frac{r}{2} \log \text{nat} \frac{1}{2 \cos \left[ \frac{2(x - x')}{r} + \frac{\pi}{3} \right]} = \\ = \frac{r}{2} \log \text{nat} \frac{1}{2 \cos \psi} \dots \dots \dots (24c)$$

Jetzt handelt es sich noch darum, für beliebige Punkte dieser Mittellinie die entsprechenden Werthe der Gewölbstärke  $c$  zu berechnen.

Die Gewölbstärke  $c'$  bei der Grenzfüge ist, wie wir oben gesehen:

$$c' = \frac{B}{(1 + \cos \psi')^2} = \frac{B}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{9} B$$

und demgemäss die Normalkraft  $S'$  dieser Fuge

$$S' = c' \cdot x' \cdot k' = \frac{4}{9} B \cdot x' \cdot \frac{r\gamma}{2}.$$

Der konstante Horizontalschub  $H$  in dem unterhalb der Grenzfüge gelegenen Theil des Kuppelgewölbes ist

$$H = S' \cdot \cos \psi' = \frac{S'}{2} = \frac{B \cdot x' \cdot r\gamma}{9},$$

somit ergibt sich für die Normalkraft  $S$  einer beliebigen Fuge

$$S = \frac{H}{\cos \psi} = \frac{B x' r \gamma}{9 \cdot \cos \psi}.$$

Es soll aber sein:

$$\frac{S}{c x} = k', \quad \text{woraus} \quad c = \frac{S}{x \cdot k'} = \frac{2 S}{x \cdot r \gamma}.$$

Man hat daher:

$$c = \frac{2}{9} \cdot \frac{B x'}{x \cos \psi} \dots \dots \dots (25)$$

Bei Betrachtung des über der Grenzfüge gelegenen Theils des Kuppelsektors fanden wir für die Scheitelstärke  $c_0$

$$c_0 = \frac{B}{4}, \quad \text{womit} \quad B = 4 c_0$$

und

$$c = \frac{8}{9} \cdot \frac{c_0 x'}{x \cos \psi} = c_0 \cdot \frac{8 x'}{9 x} \cdot \frac{1}{\cos \left\{ \frac{2(x - x')}{r} + \psi' \right\}}, \quad (25a)$$

wobei  $\psi' = \frac{\pi}{3}$  zu setzen.

Nimmt man jetzt  $c_0$  an, so ist bei gegebenem  $r$  das ganze Kuppelgewölbe festgesetzt.

**Beispiel der Berechnung eines Kuppelgewölbes von durchgehends konstanter Lagerfugenpressung. Tafel III.** Es handle sich um die Bestimmung des Meridianschnittes eines solchen Kuppelgewölbes, bei welchem der Horizontalabstand des unteren Endpunktes  $C''$  der Mittellinie von der Kuppelaxe = 8 m; die Höhe des oberen Endpunktes  $C_0$  über der Horizontalen durch  $C''$  = 10 m;  $\gamma = 1600$  kg und  $k = 8$  kg pro qcm sei ( $k$  die für gewöhnlich angenommene zulässige Inanspruchnahme der Mauerwerksart, aus welcher das Gewölbe besteht;  $k'$  die konstante Lagerfugenpressung).

Nach dem oben Auseinandergesetzten ist die Mittellinie des gesuchten Meridianschnittes vom Kuppelscheitel bis zu der unter einem Winkel  $\psi' = 60^\circ$  gegen die vertikale Kuppelaxe geneigten Grenzfuge ein Kreisbogen, und tangentiell daran anschliessend eine Linie, ausgedrückt durch die Gleichung

$$y - y' = \frac{r}{2} \log \text{nat} \frac{1}{2 \cdot \cos \left\{ \frac{2(x - x')}{r} + \psi' \right\}} \quad (\text{s. Gleichung 24}),$$

in welcher Gleichung  $x$  und  $y$  die laufenden Koordinaten,  $r$  der Halbmesser des oben erwähnten Kreisbogens,

$$\psi' = \frac{\pi}{3}; \quad x' = r \sin \psi'; \quad y' = r(1 - \cos \psi').$$

Die Mittellinie des Kuppelsektors hat durch die gegebenen Punkte  $C_0$  und  $C''$  (Fig. 2 Tafel III) zu gehen. Es fragt sich nun, wie gross wird damit  $r$ ?

Nimmt man  $C_0$  als Koordinatenursprung an, so sind die Koordinaten des Punktes  $C''$   $x = 8$  m und  $y = 10$  m; diese Ko-

ordinaten müssen die soeben angeführte Gleichung der Mittellinie unterhalb der Grenzfüge befriedigen. Man hat demgemäss:

$$10 - r(1 - \cos \psi') = \frac{r}{2} \log \text{nat} \frac{1}{2 \cos \left\{ \frac{2(8 - r \sin \psi')}{r} + \psi' \right\}}$$

Aus dieser transcendenten Gleichung könnte  $r$  in bekannter Weise angenähert berechnet werden. Statt dessen wird  $r$  einfacher konstruirt, wie auf Tafel III angegeben ist.

In Fig. 1 Tafel III wurde mit dem zunächst beliebig = 8 m gewählten Halbmesser  $r$  der Kreisbogen  $\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}'$  beschrieben (Centriwinkel  $\psi' = 60^\circ$ ) und daran anschliessend, der Kurvengleichung (24a) gemäss, die Linie  $\mathfrak{C}' \mathfrak{C}''$  konstruirt. Mit der Linie  $\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}' \mathfrak{C}''$  ist nun überhaupt die Mittellinie eines Kuppelgewölbes von durchgehends konstanter Lagerfugenpressung bestimmt, indem die für verschiedene Halbmesser  $r$  festgesetzten Linien  $\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}''$  alle einander ähnlich sind.

Um jetzt das  $r$  für die durch die Punkte  $C_0$  und  $C''$  gehende Mittellinie zu erhalten, wurde in Fig. 1 Tafel III  $C_0 C''$  gezogen und verlängert bis zum Schnitt  $\mathfrak{C}''$  mit der Linie  $\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}'$ , hierauf  $\mathfrak{C}'' \mathfrak{S}$  horizontal gezeichnet. Man hat nun wegen der Aehnlichkeit der Mittellinien:

$$\frac{r}{C'' I} = \frac{r}{\mathfrak{C}'' \mathfrak{S}}, \quad \text{woraus} \quad r = (C'' I) \cdot \frac{r}{\mathfrak{C}'' \mathfrak{S}}$$

Nachdem sodann  $\mathfrak{S} \mathfrak{R} = r$  abgetragen war, ergab sich  $r = IK = 7,36$  m und damit in Fig. 2 zunächst der kreisförmige Theil  $C_0 C'$  der Mittellinie, hierauf mit Hilfe der Gleichung (24a) auch das Stück  $C' C''$ . Nun musste noch die Gewölbstärke  $c$  an den verschiedenen Stellen der Mittellinie angegeben werden.

Für die Gewölbstärke vom Kuppelscheitel bis zu der Grenzfüge ist maassgebend Gleichung (22a), nämlich

$$c = \frac{4 c_0}{(1 + \cos \psi)^2},$$

worin  $c_0$  die Gewölbstärke im Scheitel der Kuppel, und für die Gewölbstärke von der Grenzfüge bis zum Widerlager die Gleichung (25a)

$$c = c_0 \cdot \frac{8 x'}{9 x} \cdot \frac{1}{\cos \left\{ \frac{2(x - x')}{r} + \psi' \right\}}$$

Mit  $c_0$  wäre also der ganze Meridianschnitt bestimmt. Wie gross soll aber vorliegenden Falles  $c_0$  genommen werden?

Man hat eben wieder auf der mittleren Kuppelfläche des Gewölbes die gleichförmige Ergänzungsbelastung  $p$  pro Flächeneinheit anzubringen und zu verlangen, dass mit dieser die grösste vorkommende Lagerfugenpressung gleich der zulässigen Inanspruchnahme  $k$  der Mauerwerksart sei, aus welcher das Kuppelgewölbe besteht. Nimmt man aber diese Ergänzungsbelastung an, so rückt in Folge derselben die Grenzfüge, welche zuvor mit der Kuppelaxe einen Winkel von  $60^\circ$  bildete, weiter hinauf und zwar wird dieselbe, da  $p$  viel grösser als die wirkliche Belastung  $c\gamma$ , nahezu wieder die gleiche Lage einnehmen, wie im Kuppelgewölbe von konstanter Stärke, d. h. sie wird mit der vertikalen Kuppelaxe nahezu einen Winkel von  $51^\circ 50'$  bilden. Unter Berücksichtigung dieser Bemerkungen wurde nun bei dem vorliegenden Beispiel die Gewölbstärke  $c_1$  für die unter einem Winkel von  $51^\circ 50'$  gegen die Kuppelaxe geneigte Lagerfuge  $D_1 E_1$  (Fig. 2 Tafel III) aus Gleichung (19) berechnet, welche lieferte:

$$c_1 = \frac{3000 (7,36 + 1,5)}{80000 - 0,62 \cdot 7,36 \cdot 1600} = 0,36 \text{ m.}$$

Zwischen  $c_1$  und  $c_0$  besteht aber nach Gleichung (22a) die Beziehung

$$c_1 = \frac{4 c_0}{\{1 + \cos(51^\circ 50')\}^2},$$

woraus mit  $c_1 = 0,36$  sich ergibt:

$$c_0 = 0,24 \text{ m.}$$

Mit diesem  $c_0$  konnten jetzt mittels der oben angegebenen Gleichungen für beliebige Lagerfugen die Gewölbstärken  $c$  berechnet werden; die gefundenen Werthe von  $c$  wurden alsdann normal zur Mittellinie zur Hälfte nach innen, zur Hälfte nach aussen abgetragen, wodurch der gesuchte Meridianschnitt festgesetzt war.

In dem so bestimmten Kuppelgewölbe geht die günstigste Lagerfugenstützlinie durch sämtliche Fugenmitten hindurch, in allen Lagerfugen herrscht eine und dieselbe Pressung

$$k' = \frac{r\gamma}{2} = \frac{7,36 \cdot 1600}{2} = 5888 \text{ kg pro qm} = 0,6 \text{ kg pro qcm.}$$

Desgleichen sind die Stossfugen vom Kuppelscheitel bis zur Grenzfrage gleichmässig gepresst; dabei ist die grösste, im Scheitel der Kuppel auftretende Stossfugenpressung ebenfalls  $= k' = 0,6 \text{ kg pro gem.}$

**Kuppelgewölbe von durchgehends konstanter Lagerfugenpressung und von konstanter Stärke.** Bei den vorstehend betrachteten Kuppelgewölben war die Mittellinie des über der Grenzfrage gelegenen Theils des Kuppelsektors kreisförmig angenommen, wobei sich für konstante Lagerfugenpressung eine veränderliche Gewölbstärke ergab. Nun kann man sich aber auch die Aufgabe stellen, diejenige Form der Mittellinie zu bestimmen, bei welcher die Gewölbstärke konstant bleiben kann.

Unter Benutzung der seitherigen Bezeichnungen und besonders derjenigen der Textfiguren 6 und 5 hat man:

$$d Q = c \cdot ds \cdot x \gamma$$

und

$$\frac{Q}{\sin \psi} = S = c \times k'; \quad Q = c k' x \sin \psi,$$

woraus

$$d Q = c k' (x \cos \psi d \psi + \sin \psi \cdot d x).$$

Es ist somit:

$$ds \cdot x \cdot \gamma = k' (x \cos \psi d \psi + \sin \psi \cdot d x)$$

oder, da  $dx = ds \cdot \cos \psi$ ,

$$\frac{\gamma}{k'} = \cos^2 \psi \cdot \frac{d \psi}{d x} + \frac{\sin \psi \cos \psi}{x}.$$

Dies die Differentialgleichung der gesuchten Mittellinie. Wir wollen indessen die Sache hier nicht weiter verfolgen, aber im nächsten Kapitel, in welchem flache Kuppelgewölbe oder sogenannte Kappengewölbe betrachtet werden sollen, an geeigneter Stelle darauf zurückkommen.

## VI. Kapitel.

### Die zweckmässigste Form von Kappengewölben.

**Das parabolische Kappengewölbe.** Im Falle eines flachen Kuppelgewölbes von konstanter Stärke, bei welchem das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt über die Horizontalprojektion angenommen werden darf, hat Schwedler in seiner schon Eingangs erwähnten Abhandlung über Kuppelgewölbe nachgewiesen, dass sowohl die Lagerfugenpressungen, als auch die Stossfugenpressungen konstant sind, wenn die Mittellinie des Meridianschnittes eine Parabel ist, deren Axe mit der Kuppelaxe zusammenfällt.

Dies zeigt sich auch im Anschluss an unsere seitherigen Betrachtungen und mit Benutzung unserer Bezeichnungen, wie folgt.

Es ist  $dQ = c \cdot ds' \cdot x \gamma$  oder bei flacher Mittellinie angenähert  $dQ = c \cdot dx \cdot x \cdot \gamma$ , woraus

$$Q = \frac{c \gamma x^2}{2}.$$

Ferner hat man

$$\frac{Q}{\sin \psi} = c x \cdot k',$$

wobei  $k'$  die konstante Fugenpressung, oder da  $\psi$  der Voraussetzung nach klein,

$$\frac{Q}{\text{tg } \psi} = c x \cdot k',$$

somit

$$\frac{c \gamma x^2}{2} = c x k' \cdot \text{tg } \psi$$

oder

$$\frac{\gamma x}{2 k'} = \operatorname{tg} \psi = \frac{d y}{d x};$$

integriert:

$$y = \frac{\gamma}{4 k'} \cdot x^2.$$

Dies die Gleichung der Mittellinie; letztere also eine Parabel. Zur Berechnung der mittleren Stossfugenpressung  $\tau_m$  setzen wir nach Früherem:

$$\tau_m = \frac{d H}{c \cdot d x}.$$

Es ist aber

$$Q = H \cdot \operatorname{tg} \psi = H \cdot \frac{d y}{d x}$$

oder

$$\frac{c \gamma x^2}{2} = H \cdot \frac{\gamma x}{2 k'},$$

woraus  $H = c \cdot k' \cdot x$ ;  $\frac{d H}{d x} = c k'$  und damit  $\tau_m = k'$ .

Wie wir gesehen haben, ist in praktischen Fällen bei Kuppelgewölben  $k'$  verhältnissmässig klein. Nehmen wir nun beispielsweise  $k' = 1,6 \text{ kg pro qcm}$  an, so ergibt sich als Gleichung der parabolischen Mittellinie mit  $\gamma = 1600 \text{ kg}$

$$y = \frac{1}{40} x^2;$$

ferner

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{d y}{d x} = \frac{x}{20}$$

und als Krümmungshalbmesser im Scheitel:

$$\rho_0 = \frac{2 k'}{\gamma} = 20 \text{ m.}$$

Wäre dagegen  $k'$  nur halb so gross gewesen,  $= 0,8$ , würde man erhalten haben  $\rho_0 = 10 \text{ m}$ ; also: je grösser der Krümmungshalbmesser, um so grösser die Inanspruchnahme.

Handelt es sich um ein Kappengewölbe von einer Weite der Mittellinie  $= 20 \text{ m}$ , bei welchem  $k'$  konstant  $= 1,6 \text{ kg pro qcm}$

sein soll, dann hätte man als Gleichung der Mittellinie wieder

$$y = \frac{1}{40} x^2$$

und als Pfeilhöhe  $h = 2,5$  m.

Es fragt sich nun, ob dieses Gewölbe flach genug ist, um eine parabolische Mittellinie als gerechtfertigt erscheinen zu lassen.

Unter Annahme eines Kuppelsektors vom Ausschnittwinkel  $d\varphi$  und der Gewölbstärke  $c$  ergibt sich der gesammte Normaldruck  $S d\varphi$  einer unter dem Winkel  $\psi$  gegen die Kuppelaxe geneigten Lagerfuge

$$S d\varphi = c \cdot x d\varphi \cdot \sigma_m; \quad S = c x \sigma_m,$$

worin  $\sigma_m$  die Lagerfugenpressung. Es ist aber

$$S d\varphi \cdot \sin \psi = Q d\varphi = \int_0^x c \cdot ds \cdot x d\varphi \cdot \gamma = c \gamma d\varphi \int_0^x ds \cdot x$$

oder

$$\begin{aligned} S \cdot \sin \psi &= c \gamma \int_0^x x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = c \gamma \int_0^x x dx \sqrt{1 + \left(\frac{x}{20}\right)^2} = \\ &= \frac{c \gamma}{20} \int_0^x x dx \sqrt{400 + x^2} = \frac{c \gamma}{60} \cdot \left\{ (400 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 8000 \right\}. \end{aligned}$$

Ferner

$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \psi}} = \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}};$$

somit wird

$$c x \sigma_m \cdot \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}} = \frac{c \gamma}{60} \left\{ (400 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 8000 \right\}$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma}{60 x^2} \left\{ (400 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 8000 \sqrt{400 + x^2} \right\}$$

und für  $x = 10$  m  $\sigma_m = 1,9$  kg pro qcm,

für  $x = 3$  m  $\sigma_m = 1,62$  kg pro qcm.

Im vorliegenden Fall ginge also die parabolische Mittellinie noch an; wenn aber die Pfeilhöhe eine grössere als 2,5 m gewesen wäre, hätte man die Parabelform nicht mehr als gerechtfertigt ansehen dürfen, vielmehr die Mittellinie besonders bestimmen müssen, entsprechend dem am Schlusse des vorigen Kapitels Angeführten.

**Kappengewölbe von konstanter Stärke und konstanter Lagerfugenpressung.** Anstatt von der oben angegebenen Differentialgleichung der Mittellinie auszugehen, kann man auch die Mittellinie des Meridianschnittes angenähert auf graphischem Wege festsetzen, wie folgt:

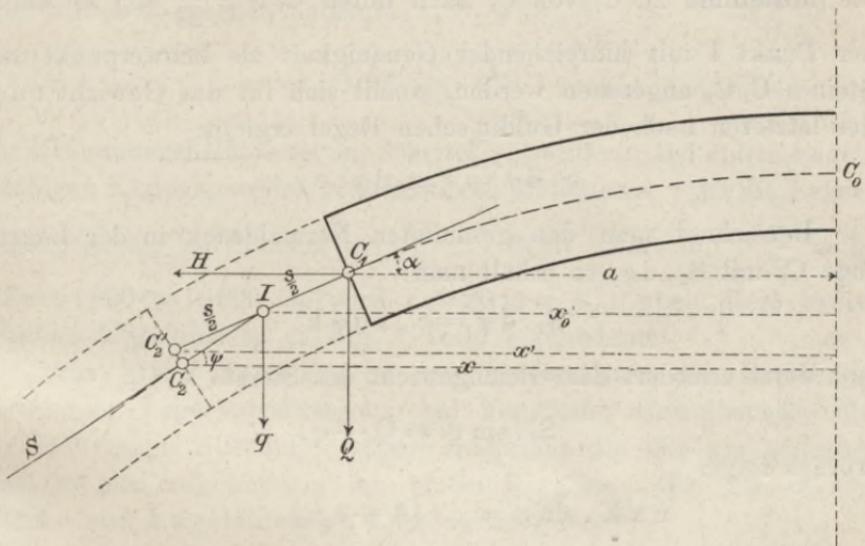


Fig. 12.

Ist  $C_1$ , Fig. 12, der Punkt der Mittellinie, bis zu welchem mit hinreichender Genauigkeit diese Linie als eine Parabel angenommen werden kann;  $\alpha$  die Horizontalneigung der Tangente an der Mittellinie im Punkte  $C_1$ ;  $a$  die Abszisse dieses Punktes;  $c$  die konstante Gewölbstärke und  $k'$  die konstante Lagerfugenpressung; ferner  $Q d\varphi$  das Gewicht des Stückes  $C_0C_1$  des Kuppelsektors, so ist, wenn wieder  $\gamma = 1600$  kg und  $k' = 1,6$  kg pro qcm angenommen wird, wie wir oben gesehen haben,

$$y = \frac{\gamma}{4k'} x^2 = \frac{1}{40} x^2$$

die Gleichung der parabolischen Mittellinie.

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{d y}{d x} \right)_{x=a} = \frac{a}{20}$$

$$Q \cdot d\varphi = \frac{c \gamma}{60} \cdot d\varphi \left\{ (400 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 8000 \right\} = c \gamma d\varphi \cdot A.$$

Nunmehr fassen wir den Gewölbstein  $C_1 C_2$  ins Auge, für welchen der Punkt  $C_1$  sowie die Bogenlänge  $C_1 C_2 = s$  gegeben und der Punkt  $C_2$  gesucht ist. Trägt man auf der Tangente an die Mittellinie in  $C_1$  von  $C_1$  nach unten  $C_1 I = \frac{s}{2}$  ab, so kann der Punkt  $I$  mit hinreichender Genauigkeit als Schwerpunkt des Steines  $C_1 C_2$  angesehen werden, womit sich für das Gewicht  $q d\varphi$  des letzteren nach der Guldin'schen Regel ergibt

$$q \cdot d\varphi = s \cdot x_0 d\varphi \cdot c \gamma.$$

Bezeichnet man den gesammten Normaldruck in der Lagerfuge  $C_2$  mit  $S_2 \cdot d\varphi$ , so erhält man:

$$S_2 \cdot d\varphi = c \cdot x d\varphi k'.$$

Jetzt erfordert das Gleichgewicht des Steines  $C_1 C_2$

$$S_2 \cdot \sin \psi = Q + q,$$

woraus folgt:

$$c x k' \cdot \sin \psi = c \gamma (A + s x_0)$$

$$\sin \psi = \frac{\gamma}{k'} \cdot \frac{A + s \cdot x_0}{x}.$$

Nimmt man nun für  $x$  zunächst den der Zeichnung entnommenen Abstand des Punktes  $C_2'$  von der Kuppelaxe an, berechnet damit aus der letzten Gleichung einen Näherungswerth  $\psi'$  für  $\psi$ , zieht durch  $I$  unter der Horizontalneigung  $\psi'$  die Strecke  $I C_2'' = \frac{s}{2}$ , fällt von  $C_2''$  ein Loth auf die Kuppelaxe, dessen Länge  $x''$  abgemessen wird, so erhält man aus der Gleichung für  $\sin \psi$ , wenn man darin an Stelle von  $x$  den Werth  $x''$  setzt, den Werth von  $\psi$  und, da  $I C_2 = \frac{s}{2}$ , auch die Lage des Punktes  $C_2$  mit hinreichender Genauigkeit.

Nach dieser Methode wurde auf Tafel I in Figur 2 für  $\gamma = 1600$  kg und  $k' = 1,6$  kg pro qcm die Mittellinie eines Kuppelgewölbes von durchgehends konstanter Lagerfugenpressung und konstanter Stärke konstruirt.

**Zweckmässigste Form eines Kappengewölbes.** Zum Vergleich ist auf Tafel I in Fig. 2 auch die parabolische Mittellinie eingezeichnet, bei welcher im Scheitel die Lagerfugenpressung ebenfalls  $= 1,6$  kg pro qcm betragen würde. Damit ist man in den Stand gesetzt, zu beurtheilen, in wie weit man als Mittellinie eine Parabel annehmen kann. Die Gleichung dieser Parabel ist, wie wir oben gesehen haben,

$$y = \frac{1}{40} x^2;$$

ihr Krümmungshalbmesser im Scheitel  $\rho_0 = 20$  m. Bei einem kugelflächigen Kuppelgewölbe vom mittleren Halbmesser  $r$  ist die Lagerfugenpressung im Scheitel  $= \frac{r\gamma}{2}$ . Setzt man nun  $\frac{r\gamma}{2} = k'$  oder  $r \cdot 800 = 16000$ , so wird  $r = 20$  m  $= \rho_0$ . Auch diese kreisförmige Mittellinie ist in Fig. 2 Tafel I angedeutet.

Aus Fig. 2 Tafel I geht nun hervor, dass der Forderung konstanter Lagerfugenpressung bei konstanter Gewölbstärke die kreisförmige Mittellinie besser entspricht als die parabolische, dass es also zweckmässig ist, einem Kappengewölbe konstante Stärke und kugelflächige Leibung zu geben.

## VII. Kapitel.

### **Das Kuppelgewölbe mit einer kreisförmigen Öffnung im Scheitel.**

**Allgemeine Bemerkungen.** Vielfach zeigen die Kuppelgewölbe im Scheitel eine kreisförmige Öffnung, eingefasst von einem Steinkranz, welcher unter Umständen noch einen Laternenaufbau trägt. Bei diesen Kuppelgewölben pflegte man die Berechnung in ähnlicher Weise zu bewerkstelligen, wie bei den Kuppeldächern, indem man den erwähnten Steinkranz als einen Druckring ansah, gegen welchen sich die einzelnen Sektoren des Kuppelgewölbes strebenartig stemmen. Nahm man dann die Scheitelöffnung kleiner und kleiner an bis zum vollständigen Verschwinden, so kam man damit unwillkürlich zu dem Fall des geschlossenen Kuppelgewölbes, zerlegt in einzelne, gegenseitig auf einander nicht einwirkende, an ihren oberen Enden von den bestrittenen Navier'schen Horizontalkräften angegriffene Sektoren. Dass aber bei einem geschlossenen Kuppelgewölbe die Verhältnisse nicht derartig liegen können, wurde schon mehrfach hervorgehoben. Eine Aufklärung der Sache ist daher höchst nothwendig.

**Die Lage der Grenzfüge.** Auf Tafel II ist ein geschlossenes Kuppelgewölbe von konstanter Stärke im oberen Theile dargestellt und gezeigt, wie man für die verschiedenen Lagerfugen desselben den Horizontalschub  $H \cdot d\varphi$  ( $d\varphi$  Ausschnittwinkel des Kuppelsektors) bestimmen kann. Es wurden hierbei die nach der Guldin'schen Regel berechneten Gewichte der einzelnen Gewölbsteine vom Punkt O des Kräfteplans aus auf einer Vertikalen nach abwärts aufgetragen und durch die Theilpunkte dieser Kraftvertikalen Parallelen gezogen mit den Tangenten an die Mittellinie des Meridianschnittes in den betreffenden Fugenpunkten C. Die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der Horizontalen durch den Anfangspunkt O der Kraftvertikalen ergaben alsdann die gesuchten

Werthe von  $H$ . So giebt beispielsweise die Strecke  $OV$  mit  $d\varphi$  multiplicirt den Horizontalschub  $H_5 d\varphi$  der Lagerfuge  $D_5 E_5$  des Kuppelsektors an.

Wir finden nun, dass die Schnittpunkte der durch die Theilpunkte der Kraftvertikalen gezogenen Strahlen mit der Horizontalen durch  $O$  bis zur Lagerfuge  $(9,9)$  sich immer weiter von  $O$  entfernen, von der Fuge  $(10,10)$  an aber sich wieder dem Punkte  $O$  nähern, dass also der Horizontalschub  $H$  ein Maximum erreicht für eine zwischen  $(9,9)$  und  $(10,10)$  gelegene Fuge, oder mit anderen Worten: die Grenzfrage befindet sich zwischen  $(9,9)$  und  $(10,10)$ . Die Grenzfrage entspricht dem äussersten Schnittpunkt  $P$  der Strahlen mit der Horizontalen durch  $O$ .

Denkt man sich von dem Kuppelgewölbe die Ringschichten am Scheitel bis zu einer bestimmten Lagerfuge, etwa bis zu  $(4,4)$  herausgenommen, so kann das Gleichgewicht des Kuppelgewölbes fortbestehen, es ergeben sich nur andere Werthe für den Horizontalschub  $H$  und den Lagerdruck  $S$  der Fugen. Dies geht aus Fig. 1 Tafel IV hervor, woselbst das gleiche Kuppelgewölbe wie auf Tafel II in Betracht gezogen ist. Während nämlich beim geschlossenen Kuppelgewölbe der Horizontalschub für die verschiedenen Fugen durch die Schnittpunkte der Strahlen des Kräfteplanes mit der Horizontalen durch den Punkt  $O$  festgesetzt ist, erhält man bei dem von  $(4,4)$  an offenen Gewölbe diesen Horizontalschub durch die Schnittpunkte der Strahlen mit der Horizontalen durch den Punkt  $O_4$ .

Weiter ersehen wir aus dem Kräfteplan Fig. 1 Tafel IV, dass beim geschlossenen Kuppelgewölbe der Schnittpunkt IX des durch 9 gehenden Strahles mit der Horizontalen durch  $O$  in grösserem Abstand von  $O$  sich befindet, als der Schnittpunkt X des Strahles durch 10 mit der gleichen Horizontalen. Das Maximum des Horizontalschubes  $H$  tritt daher für eine zwischen  $(9,9)$  und  $(10,10)$  gelegene Fuge ein. Beim offenen Kuppelgewölbe dagegen findet das Maximum des Horizontalschubes statt in einer Fuge zwischen  $(10,10)$  und  $(11,11)$ , da  $O_4 X_4 > O_4 IX_4$ , aber  $O_4 XI_4 < O_4 X_4$ . Beim offenen Kuppelgewölbe liegt also die Grenzfrage tiefer als beim geschlossenen.

Nehmen wir jetzt die „Randfläche“  $D_4 E_4$  des offenen Kuppelgewölbes als Fuge zwischen dem eigentlichen Kuppelgewölbe und einem die Scheitelöffnung umsäumenden, belasteten Steinkranz an

und in dieser sogenannten „Randfuge“ den Druck normal zur Fuge gerichtet und gleichmässig vertheilt, wobei die Vertikalkomponente  $G d\varphi$  dieses Fugendruckes Randbelastung genannt werde, so braucht man blos vom Punkt  $O_4$ , dem nunmehrigen Ursprung auf der Kraftvertikalen, die Kraftstrecke  $G$  nach oben abzutragen und durch den oberen Endpunkt von  $G$  eine Horizontale zu ziehen, um durch die Schnittpunkte der Strahlen des Kräfteplans mit dieser Horizontalen wieder den Horizontalschub für die einzelnen Lagerfugen zu erhalten. Wäre die Randbelastung  $G d\varphi$  gleich dem Gewichte  $G_0 d\varphi$  desjenigen Theils des Kuppelsektors, welcher beim geschlossenen Kuppelgewölbe über der Fuge (4,4) sich befindet, würde sich als Winkel der Grenzfuge mit der Kuppelaxe wieder  $51' 50''$  ergeben.

Wird die Randbelastung noch mehr gesteigert, rückt auch die Grenzfuge weiter herauf, bis sie schliesslich mit der Fuge (4,4) zusammenfällt.

**Die Grenzbelastung.** Bei entsprechend grossen Randbelastungen ist, wie eben bemerkt wurde, die Randfuge gleichzeitig auch Grenzfuge. Die kleinste dieser Randbelastungen, bei welcher das noch der Fall ist, bei welcher also für keine der Lagerfugen des Kuppelsektors sich ein grösserer Horizontalschub ergibt, als der auf die Randfuge ausgeübte, möge Grenzbelastung genannt und mit  $G'$  bezeichnet werden.

Um diese Grenzbelastung  $G'$  zu erhalten, wollen wir die Schnittpunkte  $P$  der Strahlen des Kräfteplanes auf Tafel IV mit dem der Randfuge (4,4) entsprechenden Strahl  $S_4$  verfolgen. Diese Schnittpunkte entfernen sich zunächst immer mehr von der Kraftvertikalen. Ist nun  $P'$  der äusserste dieser Schnittpunkte und  $G'$  der Durchschnitt der Horizontalen durch  $P'$  mit der Kraftvertikalen, dann giebt die Strecke  $O_4 G'$  die Grenzbelastung  $G'$  an. Ist nämlich in der That dieses  $G'$  mal  $d\varphi$  die Randbelastung des Kuppelsektors vom Ausschnittwinkel  $d\varphi$ , so zeigen die Schnittpunkte der Strahlen des Kräfteplanes mit der Horizontalen durch  $P'$ , dass im Kuppelsektor von oben nach unten keine Zunahme des Horizontalschubes erfolgt und der auf die Randfuge ausgeübte Horizontalschub der grösste ist. Wird die Randbelastung kleiner als  $G'$  angenommen, dann ist letzteres nicht der Fall, wohl aber tritt der grösste Horizontalschub in der Randfuge auf, wenn die Randbelastung grösser als  $G'$ .

Auf analytischem Wege kann die Grenzbelastung bestimmt werden, wie folgt.

Ist  $q d\varphi$  das Gewicht des Theils  $D_4E_4ED$  des Kuppelsektors von der Randfuge  $D_4E_4$  bis zu einer beliebigen, unter dem Winkel  $\psi$  gegen die Kuppelaxe geneigten Lagerfuge  $DE$ ;  $S d\varphi$  der Lagerfugendruck;  $\beta$  der Winkel der Randfuge mit der Kuppelaxe, dann ergibt sich aus beistehender Textfigur 13 für den Abstand  $PG$  des Durchschnittpunktes  $P$  des Strahls  $S$  mit dem Strahl  $S_4$  von der Kraftvertikalen

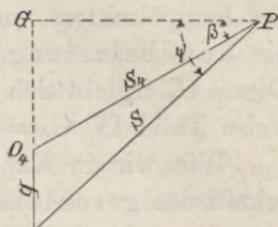


Fig. 13.

$$(PG) = (O_4P) \cos \beta.$$

Man hat aber

$$\frac{(O_4P)}{q} = \frac{\sin(90 - \psi)}{\sin(\psi - \beta)}, \quad \text{also:} \quad (PG) = \frac{q}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \beta},$$

wobei  $q$  abhängig von  $\psi$ . Das Maximum des Ausdruckes

$$\frac{q}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \beta}$$

liefert aber den grössten Abstand  $P'G'$  der Durchschnittpunkte  $P$  von der Kraftvertikalen. Es ergibt sich daher, da die Grenzbelastung  $G' = (P'G') \operatorname{tg} \beta$ :

$$G' = \left( \frac{q}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \beta} \right)_{\max} \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad \dots \quad (26)$$

Indessen ist es im Allgemeinen wohl einfacher, diese Grenzbelastung  $G'$  durch Zeichnung zu bestimmen, wie oben gezeigt wurde. (Fig. 1 Tafel IV.)

Für das auf Tafel IV angenommene Kuppelgewölbe, bei welchem  $c = 0,52$ ; Bogen  $C_0 C_4 = 4$  m und damit  $\beta = 22^\circ 20' 8''$ ; der lichte Halbmesser  $r_1 = 10$  m ist, ergab sich  $G' = 13300$  kg.

**Verfahren zur Bestimmung des Meridianschnittes bei gegebener Leibung und einer Randbelastung kleiner als die Grenzbelastung.** Um hierfür die nöthigen Anhaltspunkte zu erhalten, möge man von dem auf Tafel II behandelten Fall eines geschlossenen kugelflächigen Kuppelgewölbes ausgehen. Bei diesem Gewölbe sei der vom Scheitel bis zur Lagerfuge (4,4) sich erstreckende Theil herausgenommen und durch einen in (4,4) aufruhenden Steinkranz

vom gleichen Gewicht ersetzt. Hierbei können die Stabilitätsverhältnisse des unterhalb der Fuge (4,4) gelegenen Theils des Kuppelgewölbes, sowie die Lage der Grenzfrage als unverändert geblieben angenommen werden. Ist  $G_0 d\varphi$  bei dem vollen Kuppelgewölbe das Gewicht des über der Fuge (4,4) befindlichen Theiles des Kuppelsektors vom Ausschnittwinkel  $d\varphi$ , so wäre nunmehr  $G_0$  die Randbelastung des betrachteten offenen Kuppelgewölbes. Dieses  $G_0$  ergibt sich beim Kuppelgewölbe auf Tafel II beziehungsweise Tafel IV  $G_0 = 6600$  kg.

Wie wir in Kapitel IV gesehen haben, wird der Meridianschnitt des geschlossenen Kuppelgewölbes in der Weise bestimmt, dass man den über der Grenzfrage gelegenen Theil des Kuppelgewölbes von konstanter Stärke annimmt, die mittlere Kuppelfläche mit der Ergänzungsbelastung  $p$  pro Flächeneinheit versieht und dann verlangt, dass sich unter Annahme des günstigsten Stützliniensystems in der Grenzfrage ein Druck gleich der zulässigen Inanspruchnahme  $k$  der betreffenden Mauerwerksart ergebe. Man hat daher bei dem offenen Gewölbe, wenn der gleiche Meridianschnitt unterhalb der Fuge (4,4) erzielt werden soll, zu der Randbelastung  $G_0 d\varphi$  des Kuppelsektors noch eine Randlast hinzuzufügen, entsprechend der beim vollen Kuppelgewölbe auf  $C_4 C_0$  angebrachten Ergänzungsbelastung, d. h. beim kugelflächigen Kuppelgewölbe die Last

$$P d\varphi = p r^2 (1 - \cos \beta) \cdot d\varphi,$$

wobei  $\beta$  der Winkel der Randfrage (4,4) mit der Kuppelaxe und  $r$  der Halbmesser der kreisförmigen Mittellinie des Kuppelsektors.

Demgemäss würde man nunmehr, wenn der Meridianschnitt eines offenen Kuppelgewölbes mit beliebiger, aber gegebener Leibungsfläche und mit gegebener Belastung des die Scheitelöffnung einfassenden Steinkranzes zu bestimmen wäre, verfahren, wie folgt:

Man zeichnet die gegebene Leibungsfläche  $E_4 E'$  (siehe Fig. 2 Tafel IV) auf, nimmt die konstante Gewölbstärke  $c$  vorläufig an, zieht die Randfrage  $D_4 E_4$  normal zur Leibungslinie, womit  $\beta$  bestimmt ist, zeichnet die Rücken- und die Mittellinie des Meridianschnittes auf, sowie eine Reihe von Lagerfugen  $D E$ , berechnet die Gewichte  $q \cdot d\varphi$  der einzelnen Steine des Kuppelsektors vom Ausschnittwinkel  $d\varphi$  nach der Guldin'schen Regel, trägt vom Punkte  $O_4$  (Fig. 1 Tafel IV) der Kraftvertikalen aus nach oben die gegebene

Randbelastung  $G$  und nach unten die berechneten Gewichte  $q$  ab, zieht durch den Punkt  $G$  der Kraftvertikalen eine Horizontale und durch die Theilpunkte  $O_4, O_5, O_6 \dots$  der Kraftvertikalen Parallelen mit den Tangenten in den Punkten  $C_4, C_5, C_6 \dots$  der Mittellinie des Meridianschnittes. Entfernen sich nun die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Horizontalen durch  $G$  vom letzteren Punkte, so ist daraus zu schliessen, dass die gegebene Randbelastung  $G$  kleiner als die Grenzbelastung  $G'$  ist. Ist dies der Fall, was hier angenommen werden soll, dann konstruirt man wie früher die Linie der  $H$ , setzt mit Hülfe dieser die Grenzfüge  $D'E'$  fest (siehe auch Tafel II), misst den letzterer Fuge entsprechenden, bis zur Horizontalen durch  $G$  sich erstreckenden Strahl  $S'$  ab, womit man den auf die Grenzfüge ausgeübten Normaldruck  $S'$  erhält. Zu diesem  $S'$  wäre jedoch noch der von der Ergänzungsbelastung herrührende Betrag hinzuzufügen. Um diese Ergänzungsbelastung zu erhalten, hat man die Mittellinie  $C'C_4$  des Meridianschnittes bis zur Kuppelaxe zu verlängern, wobei man als Fortsetzung von  $C'C_4$  einen in  $C_4$  tangentiell sich anschliessenden Kreisbogen mit horizontaler Tangente in  $C_0$ , also einen Kreisbogen vom Halbmesser

$$r = \frac{a}{\sin \beta}$$

annehmen kann, unter  $a$  den Abstand des Mittelpunktes der Randfüge von der Kuppelaxe verstanden. Hierauf ist die ganze Mittellinie  $C'C_4C_0$  um die Kuppelaxe zu drehen und die so entstandene Umdrehungsfläche mit  $p$  pro Flächeneinheit zu belasten, wobei für dieses  $p$  wie früher

$$p = 4800 \left( 1 + \frac{1,5}{r} \right)$$

gesetzt und  $r = \frac{a}{\sin \beta}$  genommen werden mag.

Bei konstanter Gewölbstärke  $c$  ist das Gewicht  $Q'd\varphi$  des Theils  $C'C_4$  des Kuppelsektors gleich der mittleren, durch die Mittellinie  $C'C_4$  bestimmten Kugelfläche multiplicirt mit  $c\gamma$ , während die auf diese Fläche kommende Ergänzungsbelastung = Fläche mal  $p$  ist. Danach ergibt sich diese Ergänzungs-

$$\text{belastung} = Q' \cdot d\varphi \cdot \frac{P}{c\gamma}$$

Die Belastung der Umdrehungsfläche  $C_4 C_0$  mit  $p$  ergibt dagegen

$$P_0 d\varphi = p r^2 (1 - \cos \beta) \cdot d\varphi = p \cdot \frac{a^2}{\sin^2 \beta} (1 - \cos \beta) \cdot d\varphi.$$

Nimmt man jetzt die Gesamtbelastung an (Randbelastung, Eigengewicht und Ergänzungsbelastung), so erhält man für die Vertikalkomponente des auf die Grenzfuge ausgeübten Normaldruckes  $S'$

$$S' \sin \psi' = G + Q' \left( 1 + \frac{p}{c \gamma} \right) + P_0.$$

Daraus findet sich  $S'$  und schliesslich die gleichmässige Pressung  $\sigma'_m$  der Grenzfuge

$$\sigma'_m = \frac{S' d\varphi}{c x' \cdot d\varphi} = \frac{S'}{c x'}.$$

Dieses  $\sigma'_m$  muss alsdann bei richtig angenommener Gewölbstärke  $c$  sich gleich der für gewöhnlich als zulässig angenommenen Inanspruchnahme  $k$  der Mauerwerksart ergeben, aus welcher das Kuppelgewölbe besteht. Bezüglich des unterhalb der Grenzfuge  $D'E'$  gelegenen Theils des Meridianschnittes ist zu bemerken, dass derselbe wie bei dem auf Tafel II behandelten Fall festgesetzt wird.

**Beleuchtung des Navier'schen Verfahrens.** Wie Eingangs erwähnt wurde, nimmt Navier bei Kuppelgewölben mit Scheitelöffnungen, welche durch einen besonderen horizontalen Steinring eingefasst sind, an, dass dieser Steinring von den einzelnen Kuppelsektoren gestützt werde, ohne dass diese Sektoren in ihren Stossfugen aufeinander einwirken. Diese Annahme ist an und für sich nicht widersinnig, muss aber näher beleuchtet werden.

Zu diesem Zwecke wollen wir den auf Tafel IV Fig. 2 ange deuteten Fall eines offenen Kuppelgewölbes mit kugelflächiger Leibung (Halbmesser = 10 m, Gewölbstärke  $c = 0,52$  m,  $\gamma = 1600$  kg,  $\beta = 22^\circ 20' 8''$ ) wieder in's Auge fassen und annehmen, dass die gegebene Randbelastung  $G = G_0 = 6600$  kg sei, wobei  $G \cdot d\varphi = 6600 \cdot d\varphi$  das Gewicht des Theils  $D_4 E_4 E_0 D_0$  des Kuppelsektors beim geschlossenen Kuppelgewölbe.

Unter Zugrundelegung des bis zur Grenzfuge mit der Mittelinie zusammenfallenden Stützliniensystems, d. h. des günstigsten Stützliniensystems, ergibt sich für das offene Kuppelgewölbe der

gleiche Meridianschnitt, wie für das geschlossene von der Lagerfuge  $D_4 F_4$  an, da bei ersterem der auf die Randfuge ausgeübte Druck übereinstimmt mit dem in der Lagerfuge  $D_4 E_4$  des geschlossenen Gewölbes stattfindenden Druck. Desgleichen hat die Grenzfuge  $D' E'$  in beiden Kuppelgewölben dieselbe Lage ( $\psi' = 51^\circ 50'$ ). Nicht minder ist die Stabilität in beiden Fällen die gleiche. Für das geschlossene, auf Tafel II angegebene Kuppelgewölbe ist aber die Stabilität nach den früheren Auseinandersetzungen eine genügende, deshalb muss dies auch beim offenen und mit der obigen Randbelastung  $G_0$  versehenen Kuppelgewölbe auf Tafel IV Fig. 2 der Fall sein. Nimmt man aber nach Navier an, dass von der Randfuge abwärts die Stossfugendrucke bei den einzelnen Steinen des betrachteten Kuppelsektors  $= 0$  seien, wodurch beim Stützliniensystem nur die Lagerfugenstützlinie zur Geltung kommt, so zeigt es sich, dass diese Stützlinie, welche auf Tafel IV Fig. 2 in bekannter Weise konstruirt und mit  $C_4 M$  bezeichnet ist, sehr bald den Meridianschnitt verlässt. Damit wäre nun angedeutet, dass das vorliegende Kuppelgewölbe sich nicht im Gleichgewicht befindet, und doch ist auf anderem Wege für dasselbe hinreichende Stabilität nachgewiesen. Man darf also, wenn auch nach Navier bei einem Kuppelgewölbe kein Gleichgewicht vorhanden, daraus nicht ohne Weiteres auf wirklich fehlende Stabilität schliessen. Während wir das günstigste Stützliniensystem unseren Berechnungen zu Grunde legen, setzt eben Navier ein anderes Stützliniensystem voraus. Bei Annahme des ersteren ist das vorliegende Kuppelgewölbe im Gleichgewicht, bei Annahme des Navier'schen findet Gleichgewicht nicht statt. So kann aber auch bei einem thatsächlich im Gleichgewicht befindlichen Tonnengewölbe, für welches die günstigste Stützlinie genügende Stabilität nachweist, eine andere konstruirte Stützlinie aus dem Gewölbe heraustreten und damit fehlendes Gleichgewicht anzeigen.

Nach Navier wäre also das vorliegende Kuppelgewölbe mit der Randbelastung  $G = 6600$  kg nicht im Gleichgewicht, es käme aber auch nicht in's Gleichgewicht, wenn man die Gewölbstärke vergrösserte. Nur durch Vergrösserung der Randbelastung könnte man die Stützlinie in das Gewölbe hineinbringen. Darauf beruht denn auch die alte Ansicht, dass für Kuppeln schwere Laternenaufbauten unter Umständen eine statische Nothwendigkeit seien.

**Verfahren zur Bestimmung des Meridianschnittes bei gegebener Leibung und einer Randbelastung grösser als die Grenzbelastung.** In Fig. 1 Tafel V ist ein Kuppelgewölbe von kugelflächiger Leibung angenommen, bei welchem, wie in Fig. 2 Tafel IV, der lichte Halbmesser  $r_1 = 10$  m und der Winkel  $\beta$  der Randfuge mit der Kuppelaxe wieder  $= 22^\circ 20' 8''$ , aber die Randbelastung  $G = 20000$  kg beträgt.

Zunächst handelt es sich darum, die Gewölbstärke  $c_1$  in der Randfuge  $D_1 E_1$  zu bestimmen. Zu diesem Zwecke werden wir, entsprechend dem seither befolgten Grundsatz, für die Randfuge die günstigste Beanspruchung, d. h. gleichmässig vertheilten Druck annehmen, dafür aber zu der gegebenen Randbelastung  $G$  noch eine gewisse Ergänzungsbelastung  $P$  hinzufügen, damit den specifischen Druck  $\sigma_1$  in der Randfuge berechnen und sodann verlangen, dass letzterer  $= k$  sei, d. h. gleich der für gewöhnlich zulässigen Inanspruchnahme der betreffenden Mauerwerksart. Um nun die Ergänzungsbelastung  $P$  zu erhalten, hätte man die normal zur gegebenen Leibungsfläche gerichtete Randfuge  $D_1 E_1$  bis zum Schnitt  $F_1$  mit der Kuppelaxe zu verlängern, aus diesem Punkt  $F_1$  mit dem Halbmesser  $r = F_1 C_1$  den Kreisbogen  $C_1 C_0$  zu beschreiben und den Bogen  $C_1 C_0$  um die Kuppelaxe zu drehen, wodurch die die Ergänzungsbelastung  $p$  (pro Flächeneinheit) tragende Kuppelfläche entsteht. Auf den betrachteten Kuppelsektor vom Ausschnittwinkel  $d\varphi$  käme alsdann die Ergänzungsbelastung

$$p r^2 (1 - \cos \beta) d\varphi,$$

wobei

$$p = 4800 \left( 1 + \frac{1,5}{r} \right).$$

Da man jedoch den Punkt  $C_1$  noch nicht hat, also auch  $r$  nicht kennt, wird man für  $r$  den Näherungswerth  $r_1 = F_1 E_1$  setzen.

Somit wäre zu der gegebenen Randbelastung  $G$  noch hinzuzufügen die Ergänzungsbelastung

$$P = p r^2 (1 - \cos \beta).$$

Dadurch wird der gesammte, auf die Randfuge ausgeübte Druck

$$S_1 \cdot d\varphi = \frac{G + P}{\sin \beta} \cdot d\varphi$$

und die gleichförmige Pressung  $\sigma_1$  der Randfuge

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{r \sin \beta \cdot c_1},$$

unter  $c_1$  die Gewölbstärke bei der Randfuge verstanden. Es soll aber  $\sigma_1 = k$  sein. Damit erhält man

$$c_1 = \frac{S_1}{k \cdot r \sin \beta}.$$

Beim vorliegenden Kuppelgewölbe wird, wenn man  $r$  zunächst  $= E_1 F_1 = 10$  m annimmt,

$$P = 4800 \left( 1 + \frac{1,5}{10} \right) \cdot 10^2 \cdot 0,075 = 41400 \text{ kg},$$

$$S_1 = \frac{61400}{\sin \beta}; \quad c_1 = \frac{61400}{80000 \cdot 10 \cdot \sin^2 \beta} = 0,53 \text{ m}.$$

Mit diesem Werth von  $c_1$  ergibt sich die thatsächliche Pressung  $k'$  der Randfuge

$$k' = \frac{G}{\sin \beta \cdot c_1 \cdot r \sin \beta} = \frac{20000}{0,53 \cdot 10,27 \cdot \sin^2 \beta} = 25440 \text{ kg pro qm}$$

oder

$$k' = 2,5 \text{ kg pro qcm}.$$

Jetzt hätte man zu untersuchen, ob die gegebene Randbelastung  $G$  in der That grösser als die Grenzbelastung  $G'$  ist. Zu dem Ende nimmt man unterhalb der Randfuge die Gewölbstärke zunächst konstant an und sieht nach, ob der auf die Lagerfugen ausgeübte Horizontalschub  $H$  nach unten zunimmt. Ist dies nicht der Fall, dann ist auch die Randbelastung  $G$  nicht kleiner als die Grenzbelastung  $G'$  und treten Stossfugenpressungen unterhalb der Randfuge nicht auf. So findet sich bei  $G = 20000$  kg und  $c = 0,53$  m  $G > G'$ . Wollte man nun die Gewölbstärke konstant  $= 0,53$  m anordnen, so würde die Lagerfugenstützlinie immer mehr von der Mittellinie des Meridianschnittes nach aussen abweichen und schliesslich letzteren am Gewölberücken verlassen. Das zeigt die für das Kuppelgewölbe in Fig. 2 Tafel IV mit  $G = 20000$  kg konstruirte Stützlinie  $C_4 N$ . Man kann aber, wenn die Stützlinie von der Mittellinie nach aussen abweicht, dieselbe in

den Meridianschnitt zurückbringen, wenn man die Gewölbstärke von oben nach unten entsprechend zunehmen lässt.

Das vorliegende Kuppelgewölbe verhält sich jetzt genau so, wie überhaupt ein Kuppelgewölbe unterhalb der Grenzstufe. Man wird daher den Meridianschnitt so festsetzen, wie es bei dem auf Tafel II behandelten Kuppelgewölbe für den Theil D' E' E" D" geschehen ist, d. h. man bestimmt bei den normal zur Leibung eingezeichneten Lagerfugen die Gewölbstärke auf Grund der Bedingung, dass in jeder Lagerfuge die grösste Pressung gleich der in der Randfuge herrschenden werde. In Fig. 1 Tafel V ist auf diese Weise der Meridianschnitt bestimmt worden. Hier sehen wir aber, dass für die gegebene Randbelastung  $G = 20000$  kg die gewählte Leibungsfläche keineswegs von günstiger Form ist, da der Meridianschnitt in diesem Falle sehr stark wird.

## VIII. Kapitel.

### Rationelle Formen von Kuppelgewölben mit Oeffnungen im Scheitel, bei welchen die Rand- belastung grösser ist als die Grenzbelastung.

Meridianschnitt von durchgehends konstanter Lagerfugen-  
pressung. Wir wollen die Endpunkte  $C_1$  und  $C''$  der Mittellinie  
des Meridianschnittes Fig. 1 Tafel V als Endpunkte der Mittellinie  
und damit vorliegenden Falles auch als Endpunkte der Stützlinie  
des Kuppelsektors beibehalten und wie bei dem in Fig. 1 Tafel V  
behandelten Kuppelgewölbe die Randbelastung  $G = 20000$  kg,  
sowie die konstante Fugenpressung  $k' = 2,5$  kg pro qcm annehmen.

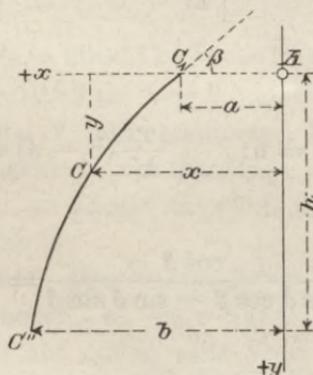


Fig. 14.

Um zunächst die Mittellinie des gesuchten Meridianschnittes  
zu erhalten, gehen wir von der Gleichung (24) aus, welche lautet:

$$y - y' = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{\cos \psi'}{\cos \left\{ \frac{\gamma}{k'} (x - x') + \psi' \right\}}$$

Indem wir den Ursprung des Koordinatensystems in A Fig. 14 annehmen und die Bezeichnungen dieser Figur einführen, geht obige Gleichung über in:

$$y = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{\cos \beta}{\cos \left\{ \frac{\gamma}{k'} (x - a) + \beta \right\}} . \quad (27)$$

In dieser Gleichung sind  $x$  und  $y$  die laufenden Koordinaten der gesuchten Mittellinie,  $a$ ,  $k'$ ,  $\gamma$  gegebene Grössen, wogegen der Winkel  $\beta$  der Randfuge mit der Kuppelaxe nicht bekannt ist. Zur Bestimmung desselben benutzt man die Bedingung, dass die Mittellinie auch durch den gegebenen Punkt  $C''$  hindurchzugehen hat, d. h. dass für  $x = b$   $y = h$  sein muss. Dies giebt:

$$h = \frac{k'}{\gamma} \log \text{nat} \frac{\cos \beta}{\cos \left\{ \frac{\gamma}{k'} (b - a) + \beta \right\}}$$

oder

$$e^{\frac{h\gamma}{k'}} = \frac{\cos \beta}{\cos \left\{ \frac{\gamma}{k'} (b - a) + \beta \right\}} .$$

Bezeichnet man

$$e^{\frac{h\gamma}{k'}} = n; \quad \frac{\gamma}{k'} (b - a) = \delta$$

so wird:

$$n = \frac{\cos \beta}{\cos (\delta + \beta)} = \frac{\cos \beta}{\cos \delta \cos \beta - \sin \delta \sin \beta} = \frac{1}{\cos \delta - \sin \delta \cdot \text{tg} \beta} ,$$

woraus

$$\text{tg} \beta = \text{cotg} \delta - \frac{1}{n \cdot \sin \delta} . \quad (28)$$

Damit ist der Winkel  $\beta$  bestimmt. Kennt man aber diesen Winkel, so liefert Gleichung (27) die gesuchte Mittellinie des Kuppelsektors.

Zur Bestimmung der Gewölbstärke  $c$  in einem beliebigen Punkt  $x, y$  der Mittellinie bemerken wir, dass vorliegenden Falls

der Horizontalschub  $H$  für alle Lagerfugen ein und derselbe ist. In der Randfuge hat man aber:

$$H = G \cotg \beta,$$

somit ist der Druck  $S$ , welcher auf eine beliebige Lagerfuge ausgeübt wird,

$$S = \frac{G \cotg \beta}{\cos \psi}$$

und die Pressung  $\sigma_m$  der unter dem Winkel  $\psi$  gegen die Kuppelaxe geneigten Lagerfuge:

$$\sigma_m = \frac{S}{c \cdot x} = \frac{G \cotg \beta}{\cos \psi \cdot c \cdot x}$$

Die Pressung  $\sigma_m$  soll aber konstant  $= k'$  sein, man hat daher:

$$k' = \frac{G \cotg \beta}{\cos \psi \cdot c \cdot x},$$

woraus

$$c = \frac{G \cotg \beta}{k' \cdot x \cdot \cos \psi} \dots \dots \dots (29)$$

Indem man setzt:  $G = 20000 \text{ kg}$ ;  $\gamma = 1600 \text{ kg}$ ;  $k' = 2,5 \text{ kg pro cm}$ ;  $a = 3,94 \text{ m}$ ;  $b = 10,83 \text{ m}$ ;  $h = 9,5 \text{ m}$ , liefern die Gleichungen den in Fig. 2 auf Tafel V aufgezeichneten Meridianschnitt. Bei diesem ist die Gewölbstärke in der Randfuge, nämlich  $c_1 = 0,29 \text{ m}$ , am grössten. Von hier an nimmt sie nach unten langsam ab und schliesslich wieder etwas zu.

Vergleicht man den Meridianschnitt in Fig. 2 mit dem in Fig. 1 Tafel V angegebenen, so fällt zunächst der grosse Unterschied im Flächeninhalt auf. Man sieht eben hier wieder deutlich, wie sehr die Randbelastung die Kuppelform bedingt.

Zur Ausführung dürfte sich aber der Meridianschnitt Fig. 2 Tafel V weniger eignen, da die Form eines derartigen Kuppelgewölbes in ästhetischer Beziehung zu wünschen übrig lässt und dem ästhetischen Moment bei Kuppelgewölben, welche vorzugsweise bei Monumentalbauten zur Verwendung kommen, doch besonders Rechnung zu tragen ist. Aber auch vom rein technischen Gesichtspunkt aus zeigt sich eine Modifikation des Meridian-

schnittes als wünschenswerth: Es ist die abnehmende Gewölbstärke, welche der Praktiker zu vermeiden suchen wird.

Würde man nun in Fig. 2 Tafel V die Gewölbstärke einfach konstant annehmen und zwar  $= c_1$ , so erhielte man eine Stützlinie, welche mit der Mittellinie nicht zusammenfällt und unter Umständen eine zu grosse Inanspruchnahme liefert.

**Bestimmung des Meridianschnittes eines mit einer gegebenen Randbelastung versehenen offenen Kuppelgewölbes, bei welchem die Stärke konstant und die Pressung in jeder Lagerfuge eine gleichförmige ist.** Wir betrachten ein durch zwei Lagerfugen begrenztes Element des Kuppelgewölbes, dessen Gewicht  $= dQ$ . Für letzteres ergibt sich unter Benutzung der seitherigen Bezeichnungen:

$$dQ = c \cdot ds \cdot x \cdot \gamma = c \gamma x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = c \gamma x dx \sqrt{1 + u^2}.$$

Andererseits hat man:

$$Q = H \cdot \operatorname{tg} \psi = H u \quad \text{und damit} \quad dQ = H \cdot du \quad (H \text{ konstant}).$$

Dies giebt:

$$H \cdot du = c \gamma x dx \sqrt{1 + u^2}; \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{c \gamma}{H} \cdot x dx.$$

Integrirt:

$$\log \operatorname{nat} \left( u + \sqrt{1 + u^2} \right) = \frac{c \gamma}{2H} \cdot x^2 + C$$

oder

$$u + \sqrt{1 + u^2} = e^C \cdot e^{\frac{c \gamma}{2H} \cdot x^2} = B \cdot e^{\frac{c \gamma}{2H} x^2},$$

wobei B die Integrationskonstante.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$2u = 2 \frac{dy}{dx} = B \cdot e^{\frac{c \gamma x^2}{2H}} - \frac{1}{B \cdot e^{\frac{c \gamma x^2}{2H}}} \quad (30)$$

Anstatt jetzt durch Integration dieser Gleichung die Beziehung zwischen x und y, d. h. die Gleichung der gesuchten Mittellinie

festzusetzen und letztere nach Berechnung einer Reihe von Ordinaten punktweise zu konstruieren, kann man die Linie auch nach folgendem Verfahren bestimmen.

Zunächst leitet man Gleichung (30) noch einmal nach  $x$  ab und erhält:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{c \gamma x}{2 H} \left[ B \cdot e^{\frac{c \gamma x^2}{2 H}} + \frac{1}{B \cdot e^{\frac{c \gamma x^2}{2 H}}} \right]$$

oder

$$\frac{2 H}{c \gamma} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = B \cdot x \cdot e^{\frac{c \gamma x^2}{2 H}} + \frac{1}{B} \cdot \frac{x}{e^{\frac{c \gamma x^2}{2 H}}} = B q_1 + \frac{1}{B} \cdot q_2. \quad (31)$$

Soll nun die durch die Punkte  $C_1$  und  $C''$  Fig. 3 Tafel V gehende Mittellinie konstruiert werden wieder für die Randbelastung  $G = 20000 \text{ kg}$  und die gleichförmige Pressung der Randfuge  $k_1 = 2,5 \text{ kg pro qcm}$  (wie im Falle der Fig. 1 und 2 Tafel V) und unter der Voraussetzung, dass die Stärke  $c$  des Kuppelgewölbes konstant gleich derjenigen in der Randfuge sei, so nimmt man zunächst die Horizontalneigung  $\beta$  der Tangente im oberen Endpunkte  $C_1$  der gesuchten Linie beliebig an, womit man erhält:

$$H = G \cotg \beta \quad \text{und} \quad S_1 = \frac{G}{\sin \beta}.$$

Mit  $S_1$  und der gegebenen Pressung  $k_1$  der Randfuge ist aber die Gewölbstärke  $c_1$  in der Randfuge bestimmt und daher die Gewölbstärke  $c$  überhaupt. Man hat nämlich;

$$c_1 a k_1 = S_1,$$

also

$$c = c_1 = \frac{S_1}{a k_1} = \frac{G}{a k_1 \sin \beta}. \quad \dots \quad (32)$$

Durch  $\beta$  ist aber auch die Integrationskonstante  $B$  festgesetzt. Gleichung (30) giebt nämlich für  $x = a$   $u = \tg \beta$ , somit

$$2 \tg \beta = B \cdot e^{\frac{c \gamma a^2}{2 H}} - \frac{1}{B \cdot e^{\frac{c \gamma a^2}{2 H}}}. \quad \dots \quad (33)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich B ermitteln. Setzt man nun

$$\frac{2H}{c\gamma} = E \quad \text{und} \quad Bq_1 + \frac{1}{B}q_2 = M,$$

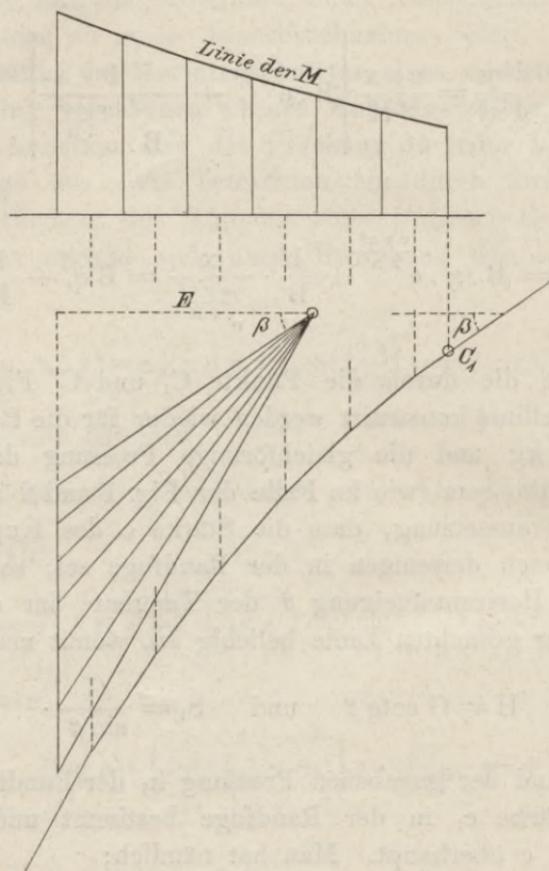


Fig. 15.

wobei E konstant und M eine Funktion von x ist, so geht Gleichung (31) über in:

$$E \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = M,$$

eine Gleichung von bekannter Form\*).

\*) Vgl. die Differentialgleichung der Biegungskurve eines belasteten Balkens und die graphische Bestimmung dieser Kurve nach Mohr. (Zeitschrift des Architekten und Ingenieurvereins zu Hannover, Jahrgang 1868.)

Diese Gleichung zeigt, dass die gesuchte Linie mit einer Seilkurve übereinstimmt, für welche die Poldistanz =  $E$  ist und die Belastungsfläche von den auf einander folgenden Ordinaten  $M$  beschrieben wird. Demgemäss wird man für eine Reihe von Abscissen  $x$  die zugehörigen Werthe von  $M$  berechnen, die gefundenen  $M$  als Ordinaten auftragen und die Endpunkte der letzteren durch eine stetige Linie verbinden. Damit erhält man die Linie der  $M$  und mit dieser die Belastungsfläche der Seilkurve. Letztere kann dann leicht konstruirt werden, wie bestehende Fig. 15 zeigt. Nun soll aber die Mittellinie des Meridianschnittes auch durch den Punkt  $C''$  gehen, was bei der konstruirten Seilkurve im Allgemeinen nicht der Fall sein wird, man muss dann eben den Winkel  $\beta$  so lange ändern, bis die erwähnte Bedingung erfüllt ist. Auf diese Weise ergab sich in Fig. 3 Tafel V die durch  $C_1$  und  $C''$  gehende Seilkurve für  $\beta = 34^\circ 59' 31''$  ( $\text{tg } \beta = 0,7$ ) und aus Gleichung (32) die konstante Gewölbstärke

$$c = c_1 = \frac{20000}{3,94 \cdot 25000 \cdot \sin \beta} = 0,35 \text{ m.}$$

Der in Fig. 3 Tafel V so festgesetzte Meridianschnitt eines Kuppelgewölbes von konstanter Stärke zeigt eine gefälligere Form als der in Fig. 2 angegebene, aber einen etwas grösseren Materialaufwand. Da jedoch letzterer Nachtheil durch den Vortheil konstanter Gewölbstärke aufgehoben wird und überdies, wie die in Fig. 4 Tafel V aufgezeichnete Linie der  $\sigma_m$  ausweist, die grösste vorkommende Lagerfugenpressung den für die Randfuge bestimmten Betrag nicht überschreitet, so dürfte es sich überhaupt empfehlen, bei Aufstellung eines Projektes sich möglichst derjenigen Kuppelform anzuschliessen, welche die gegebene Randbelastung nach dem soeben erläuterten Verfahren ergibt.

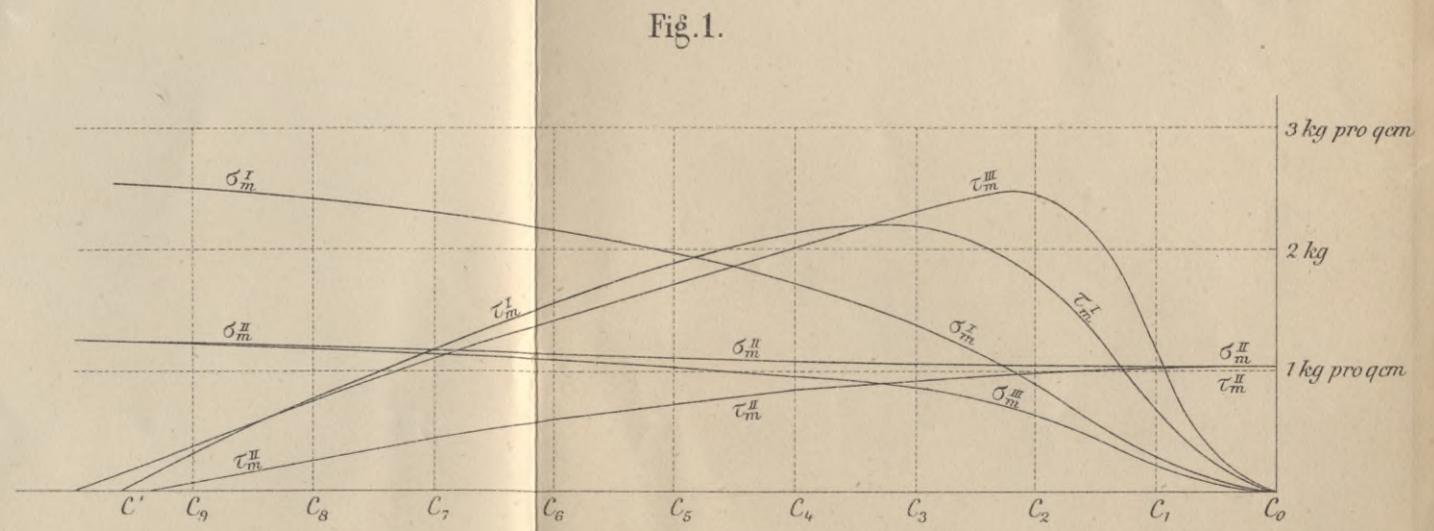
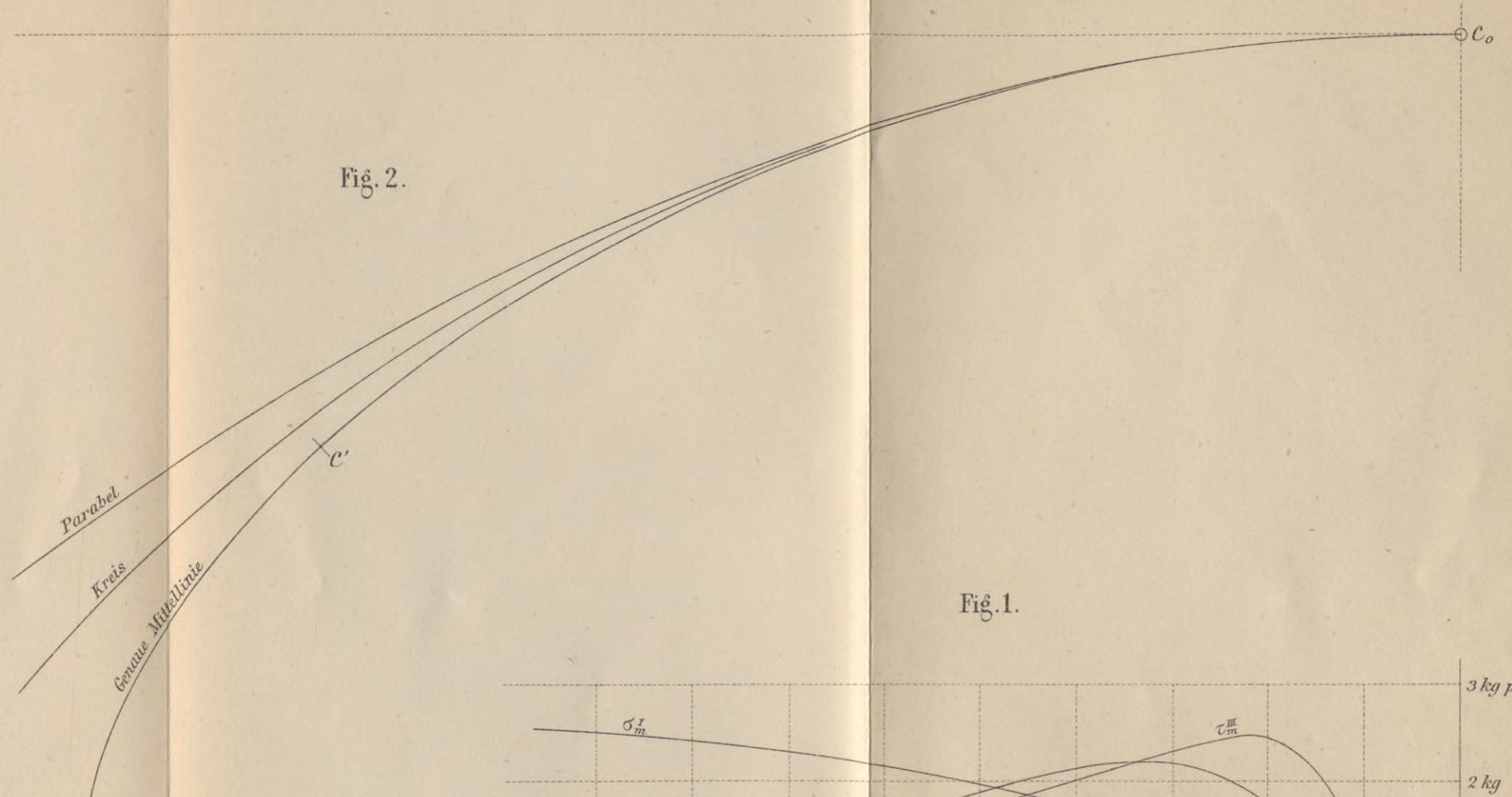
BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

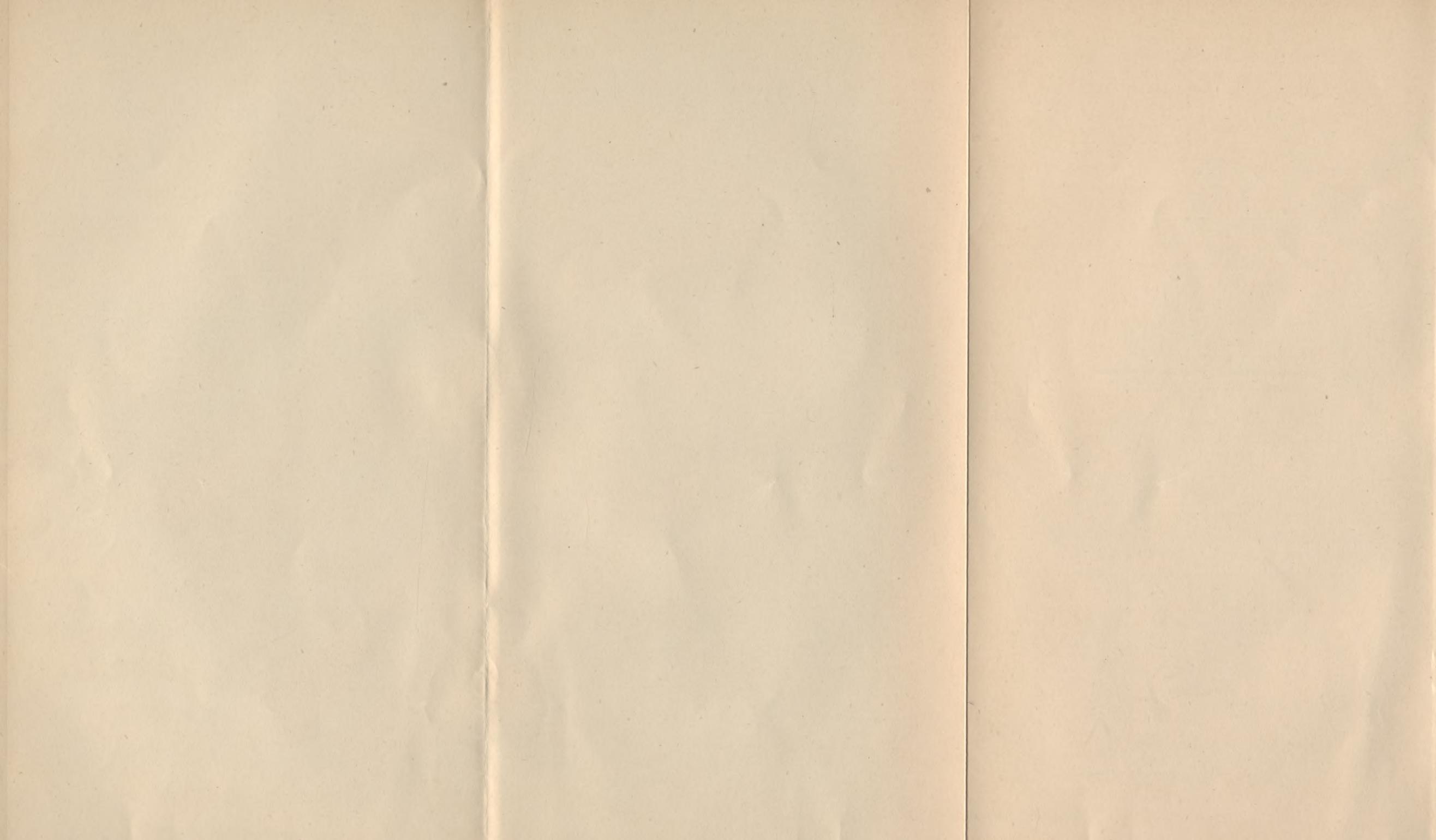
Diese Abbildungen zeigen das die gleiche Linie mit einer Zeit-  
 lücke abgemessen für welche die Folienanzahl =  $n$  ist und die  
 Halbwertzeit  $T$  von dem auf einander folgenden Gitter  $M$  bis  
 Gitter  $N$  abgemessen wird was für eine Folie von  
 Aluminium die entsprechenden Werte von  $n$  bedeuten die ge-  
 lösteten  $M$  die Gitteranzahl auftragen und die Halbwertzeit der  
 Folie durch eine dieser Linien verbunden. Damit erhält man  
 die Linie für  $M$  und die Linie für  $N$  verbunden. Die Zeit-  
 lücke  $T$  kann dann leicht bestimmt werden wie bei  
 Abbildung 1. Es zeigt sich also die Halbwertzeit des Bleis  
 erhalten nach dem Gitter  $C$  vorher was bei dem Gitter  $M$   
 erhalten im Allgemeinen nicht der Fall sein wird wenn man  
 die Linie  $T$  so lang wählt, bis die Gitter  $M$  und  $N$   
 durch die Linie  $T$  verbunden sind. Die Linie  $T$  die durch  
 Gitter  $C$  und Gitter  $N$  verbunden ist  $T = 2 \cdot T$  (vgl. S. 11)  
 und die Linie  $T$  die Gitter  $M$  und  $N$  verbindet

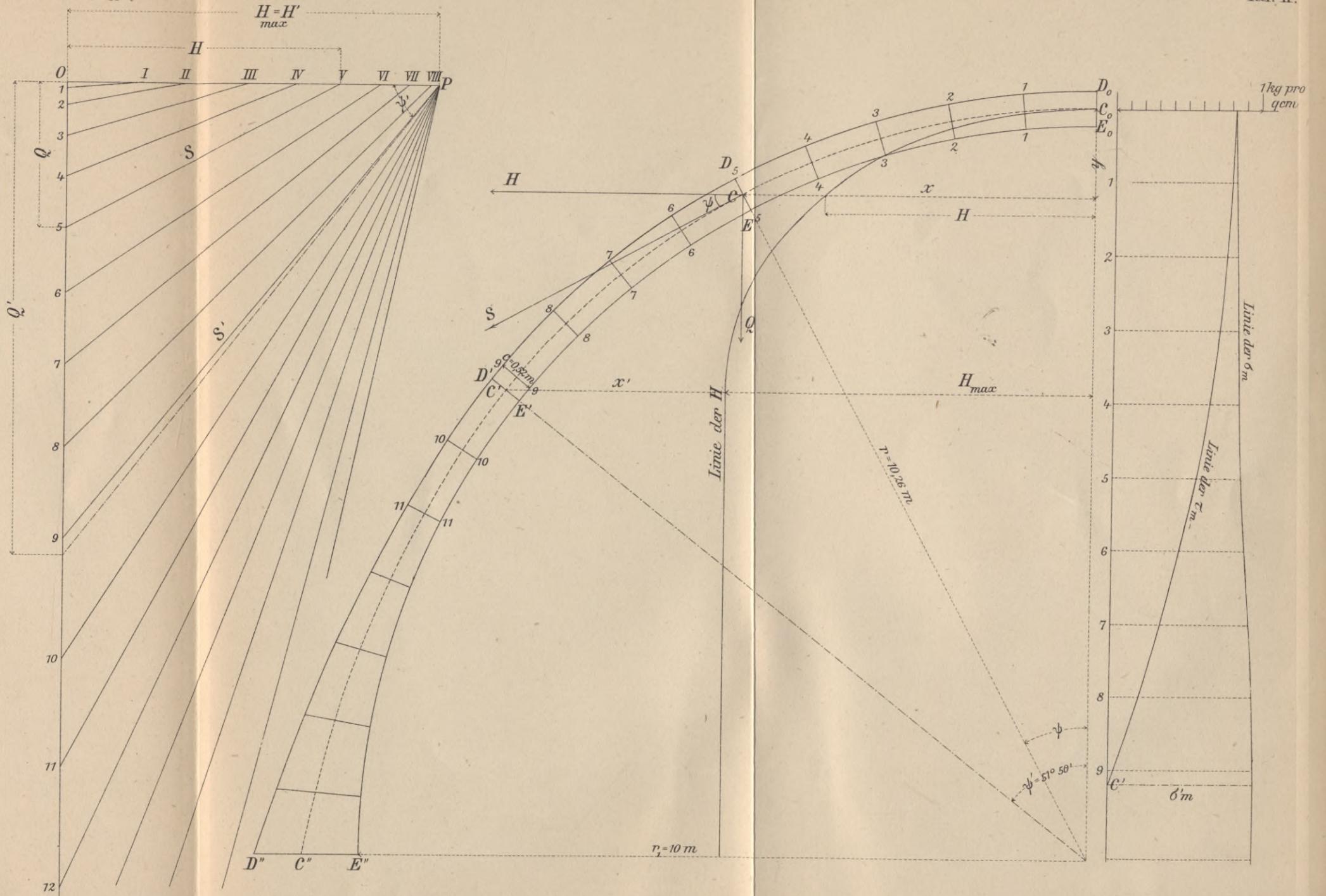
**Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.**

Diese Abbildungen zeigen die Halbwertzeit des Bleis  
 erhalten nach dem Gitter  $C$  vorher was bei dem Gitter  $M$   
 erhalten im Allgemeinen nicht der Fall sein wird wenn man  
 die Linie  $T$  so lang wählt, bis die Gitter  $M$  und  $N$   
 durch die Linie  $T$  verbunden sind. Die Linie  $T$  die durch  
 Gitter  $C$  und Gitter  $N$  verbunden ist  $T = 2 \cdot T$  (vgl. S. 11)  
 und die Linie  $T$  die Gitter  $M$  und  $N$  verbindet

Die Halbwertzeit des Bleis  
 erhalten nach dem Gitter  $C$  vorher  
 was bei dem Gitter  $M$  erhalten  
 im Allgemeinen nicht der Fall  
 sein wird wenn man die Linie  
 $T$  so lang wählt, bis die  
 Gitter  $M$  und  $N$  durch die  
 Linie  $T$  verbunden sind. Die  
 Linie  $T$  die durch Gitter  $C$   
 und Gitter  $N$  verbunden ist  
 $T = 2 \cdot T$  (vgl. S. 11) und  
 die Linie  $T$  die Gitter  $M$   
 und  $N$  verbindet







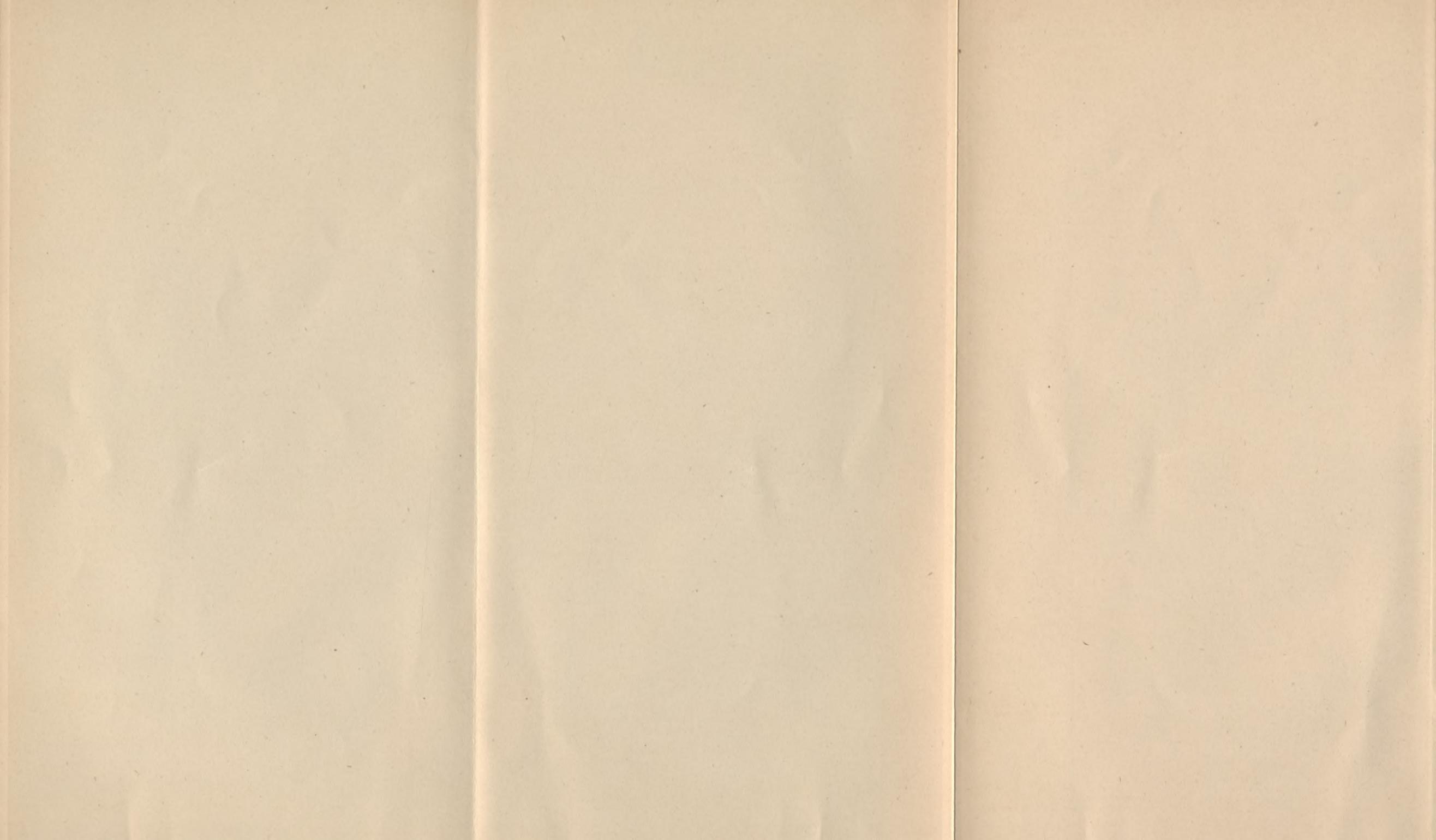
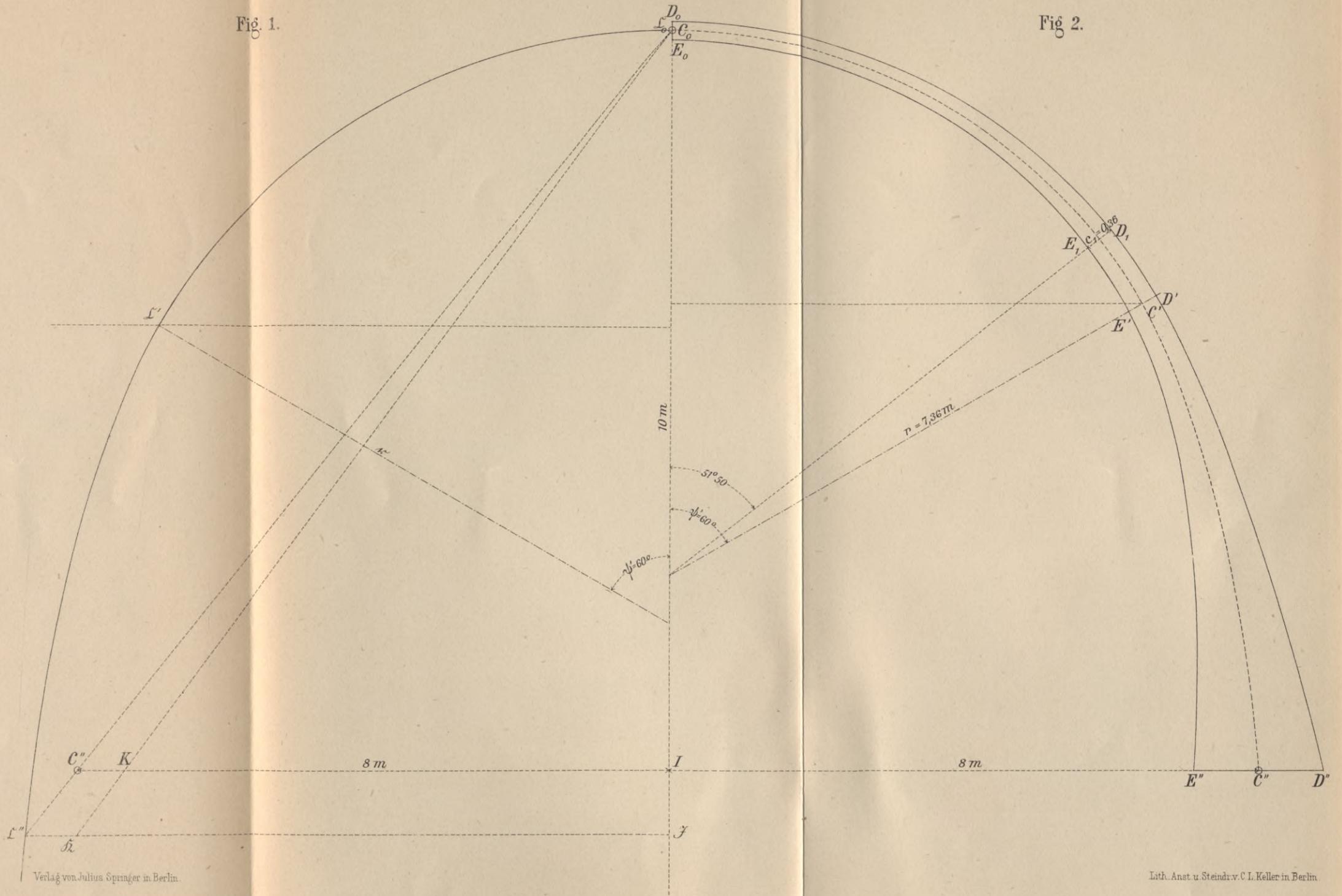
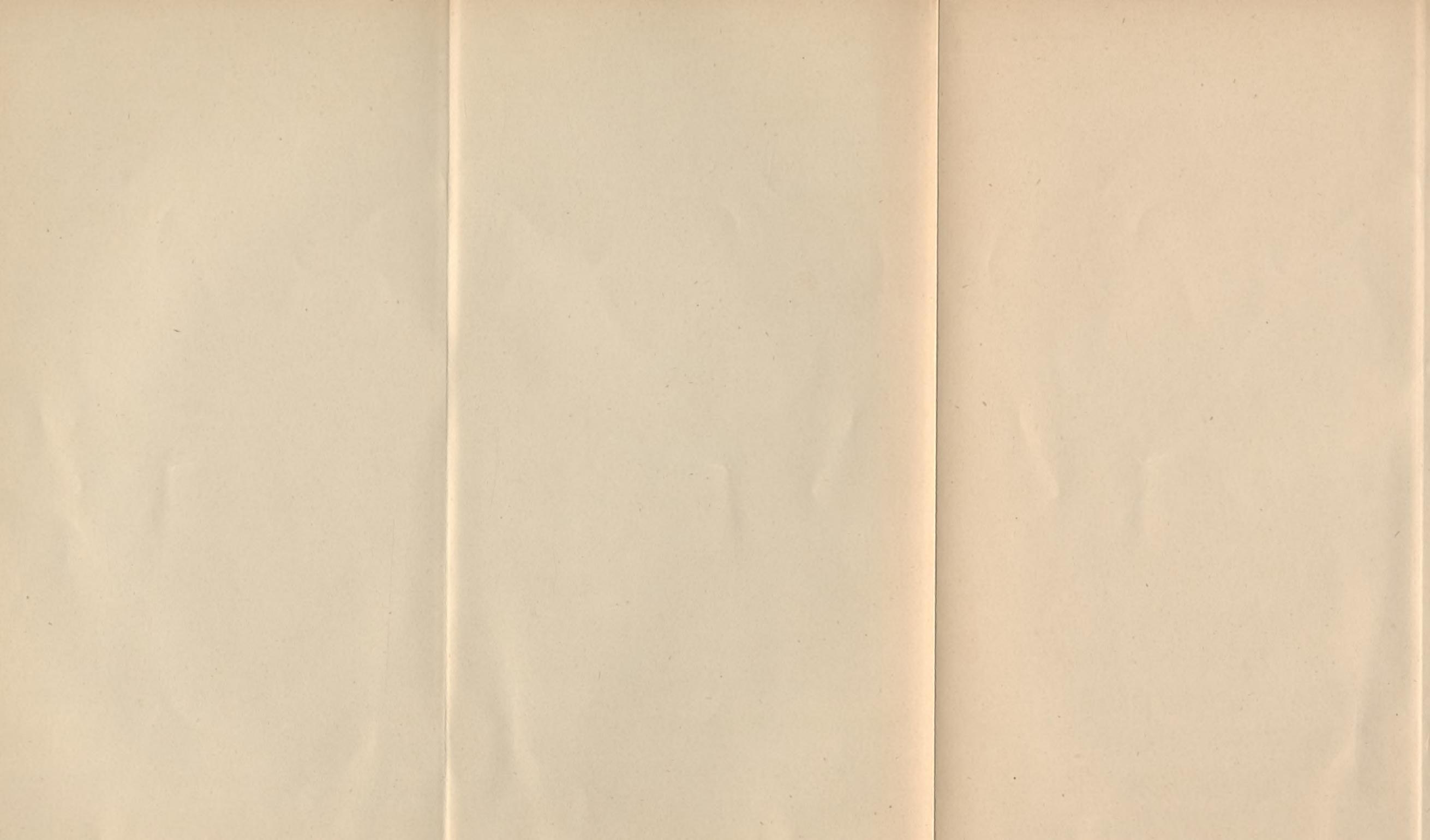


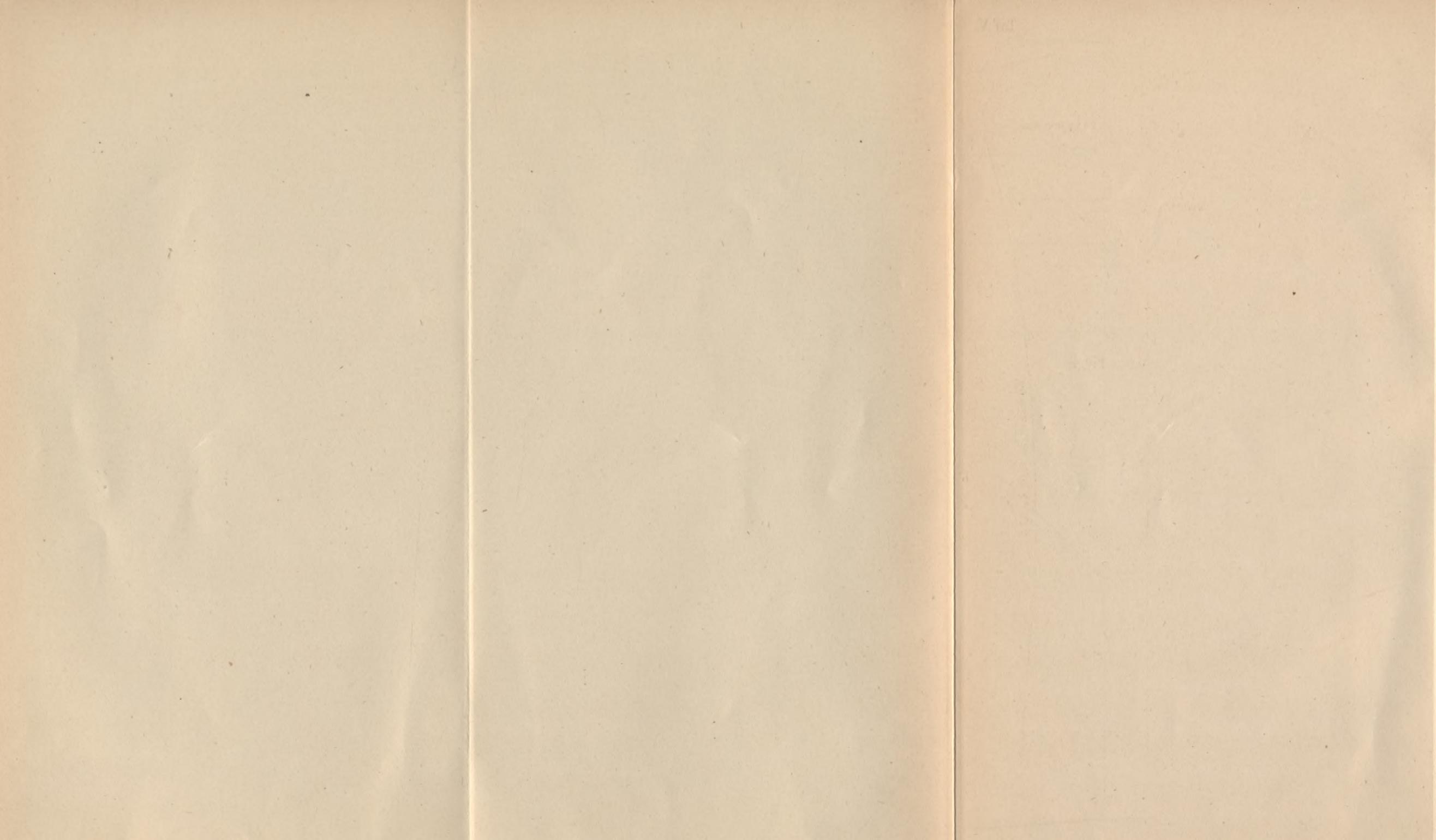
Fig. 1.

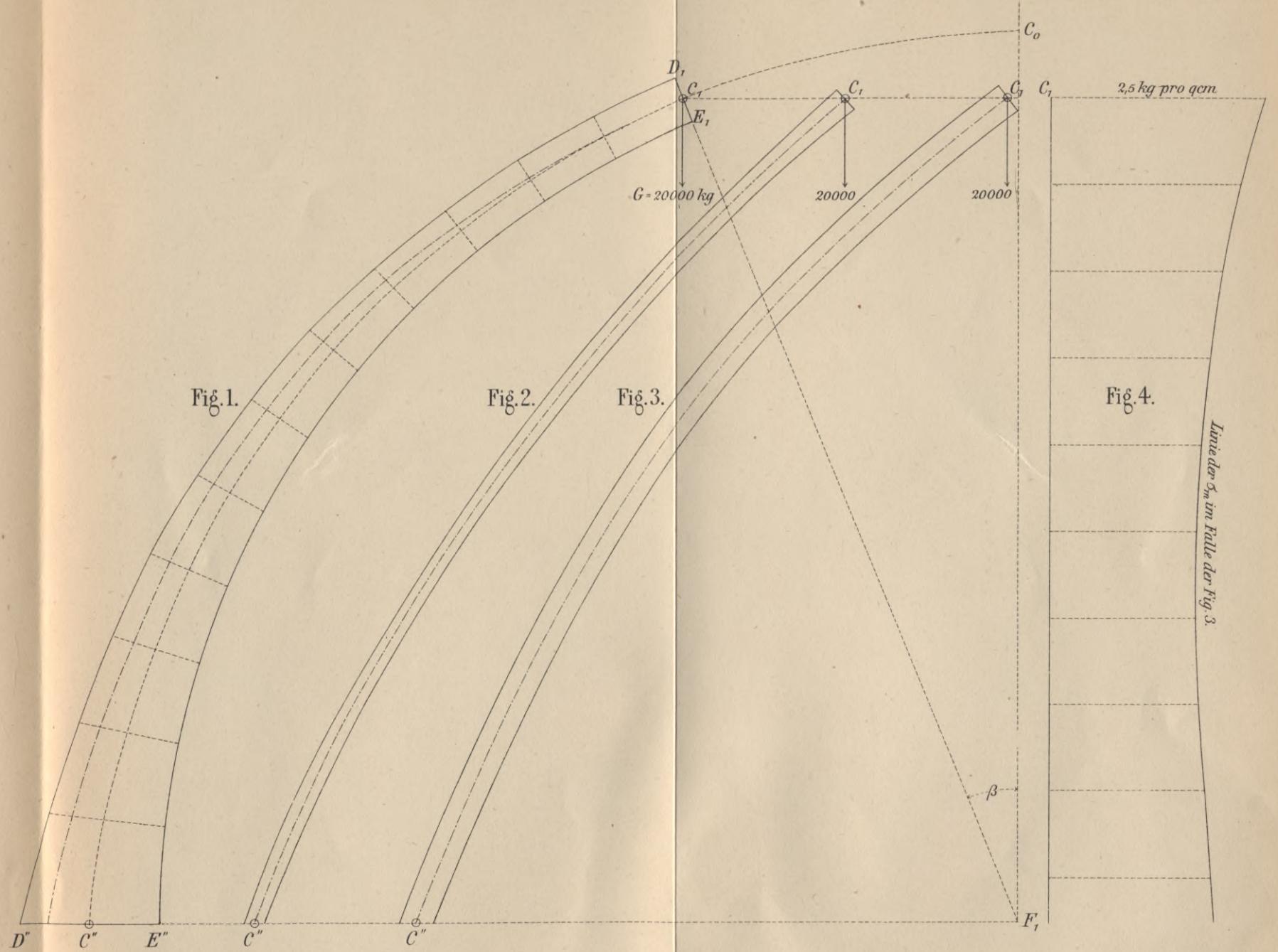
Fig. 2.











S. 61



S-96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000297278