Neue Rechnungsmethoden

der

höheren Mathematik.

Von

Dr. Julius Bergbohm.

Stuttgart.
Selbstverlag des Verfassers.
1892.

Neue Rechnungsmethoden

der

höheren Mathematik.

Neue Rechnungsmethoden

der

höheren Mathematik.

Von

Dr. Julius Bergbohm.

Stuttgart.

Selbstverlag des Verfassers.

1891.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorrede.

Die Differential- und die Integralrechnung hat durch die Forschungen der grossen Mathematiker der letzten zwei Jahrhunderte eine ausserordentliche Feinheit und Vollendung erlangt. Doch hielten sich jene Untersuchungen zum grössten Teile streng innerhalb der von Leibnitz und Newton geschaffenen Grundlagen; eine prinzipielle Erweiterung dieses Gedankenkreises ist bisher so gut als gar nicht versucht worden. Die vorliegende Schrift verfolgt den Zweck, die Differential- und die Integralrechnung durch Hinzufügung neuer Rechnungsmethoden zu ergänzen und dadurch die Analysis des Unendlichen auf weite, bisher unbekannte Gebiete auszudehnen. Wer die Schwierigkeiten zu ermessen vermag, mit welchen Forschungen zu kämpfen haben, die sich auf den äussersten Grenzen mathematischer Abstraktion bewegen, wird die Schüchternheit begreifen, mit welcher ich diese Arbeit dem Urteile der Öffentlichkeit übergebe.

Gries, im März 1891.

Der Verfasser.

Inhalt.

§ 1.

Einleitung.

Man pflegt in wissenschaftlichen Schriften und in der populären Redeweise die Differential- und die Integralrechnung als die Analysis des Unendlichen zu bezeichnen. Aber diese Bezeichnung kann auf die beiden Rechnungsmethoden in ihrem gegenwärtigen Zustand nur mit grossen Einschränkungen angewendet werden. Es fehlt nämlich zuvörderst neben der Differentialrechnung, die sich mit den unendlich kleinen Grössen beschäftigt, eine analoge Rechnungsmethode, welche die unendlich grossen Quantitäten zum Gegenstande hat. Ich will diese Rechnungsart die Immensalrechnung nennen. Dann aber wendet zweitens die Differentialrechnung in ihrem gegenwärtigen Zustand auf die unendlich kleinen Grössen nur die einfachsten Rechnungsoperationen: die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division an; die Ausdehnung der Potenzen- und Logarithmenrechnung auf die Differentiale ist bisher noch niemals versucht worden, obgleich kein Grund zu der Annahme vorhanden ist, dass diese allgemeinen mathematischen Denkformen nur auf die endlichen Grössen angewendet werden können. So kann man denn mit gutem Grunde behaupten, dass die Probleme, welche der Analysis des Unendlichen gestellt sind, von der Differentialrechnung nur zu einem kleinen Teil gelöst, oder auch nur in Angriff genommen worden sind.

Soll also die Differential- und Integralrechnung ihrer Aufgabe als Analysis des Unendlichen wirklich genügen, so muss sie vorerst durch folgende Rechnungsarten ergänzt werden:

1) Die Immensalrechnung, welche uns lehrt, in welchen Verhältnissen die unendlich grossen Quantitäten untereinander, dann zu den Differentialen und den endlichen Grössen stehen;
2) die Potenzialrechnung, in welcher zu untersuchen ist, welche Verhältnisse sich ergeben, wenn zwei unendliche Grössen zu einander im Verhältnis von Wurzel und Exponenten stehen;
3) die Radikalrechnung, die zu der Potenzialrechnung in einem ähnlichen Verhältnis steht wie die Differential- zur Integral-

rechnung und die deshalb festzustellen hat, welche unendliche Wurzel einem gegebenen Potenzial mit Rücksicht auf einen bestimmten Exponenten entspricht;

4) die Logarithmalrechnung, deren Aufgabe darin besteht, die Verhältnisse zwischen den unendlichen Grössen für den Fall festzustellen, wenn diese als Basis und Logarithmus aufgefasst werden, oder mit andern Worten: die Logarithmale der unendlichen Grössen aufzufinden. Auch der Logarithmalrechnung entspricht eine umgekehrte Rechnungsmethode, nämlich

5) Die Numeralrechnung, durch welche mit Rücksicht auf eine bestimmte unendliche Basis das Numeral eines gegebenen Logarithmals ermittelt wird.

Die in der Darstellung dieser Rechnungsmethoden vorkommenden Ausdrücke und Operationen sind zum Teil, wie jedermann leicht bemerken wird, den älteren Theorien über den Grenzwert der Funktionen entnommen. Dennoch treten auch diese übrigens nicht beträchtlichen Bestandteile dadurch in ein neues Licht, dass sie den hier zuerst dargestellten Rechnungsmethoden unterworfen werden, ähnlich wie der materielle Inhalt der Differentialrechnung zum Teil schon lang vor Leibnitz bekannt war, aber erst durch diesen zu einer besonderen Rechnungsart umgestaltet wurde.

§ 2.

Die Immensalrechnung.

Der Hauptgrund für die auf den ersten Blick befremdende Erscheinung, dass sich bisher neben der Differentialrechnung nicht eine Rechnung mit den unendlich grossen Quantitäten (Immensalrechnung) ausgebildet hat, liegt ohne Zweifel in dem Umstand, dass es noch heute an einem brauchbaren Symbol für die unendlich grossen Quantitäten fehlt, welches die Rechnung mit denselben erst ermöglichen würde. Zwar gebraucht die Analysis zur Bezeichnung der unendlichen Grössen das bekannte Symbol ∞; allein da dieses Zeichen ohne Unterschied auf alle unendlich grossen Quantitäten angewendet wird, so kann es nicht die Grundlage für die Immensalrechnung bilden. Denn wie uns die Differentialrechnung lehrt, dass es eine unbegrenzte Zahl verschiedener, unendlich kleiner Grössen giebt, so werden auch unendlich zahlreiche Arten von Immensalen den Gegenstand der Immensalrechnung bilden. Deshalb ist auch hier ein Symbol notwendig, welches eine individuelle Bezeichnung der Immensale möglich macht.

Am nächsten würde nun der Gedanke liegen, für die Immensale ebenso wie für die Differentiale ein besonderes Symbol anzuwenden. So könnte z. B. dem Ausdruck ιx die Bedeutung einer endlichen Variablen (x) beigelegt werden, welche sich ins Unendliche vermehrt, ähnlich wie die Tangente oder die Sekante unendliche Quantitäten ($\iota\, tg\, x$, $\iota \sec x$) werden, wenn ihr Winkel 90^0 erreicht. Da jedoch, wie sich unten ergeben wird, die Immensal- und die Differentialrechnung in den engsten Beziehungen stehen, so empfiehlt es sich, die Immensale durch die Symbole dieser letzteren auszudrücken. Dies ist auch sehr leicht durchführbar, wenn man erwägt, dass eine endliche Quantität, durch eine unendlich kleine Grösse (Differential) dividiert, das entsprechende Immensal ergiebt. Als das zweckmässigste Symbol für das Immensal kann folglich der Ausdruck $\frac{1}{dx}$ oder allgemeiner $\frac{a}{b\,dx}$ gelten, wobei a und b als konstante endliche Quantitäten zu betrachten sind.

Die nahe Beziehung der Immensalrechnung zu der Differentialrechnung lässt es aber auch als zweckmässig erscheinen, die Immensalformeln im Zusammenhang mit jenen Rechnungsmethoden zu entwickeln, durch welche die Differentialrechnung ergänzt werden soll (§ 1). Nur das mag schon hier bemerkt werden, dass die Immensale ähnliche Eigenschaften, wenngleich in entgegengesetzter Richtung aufweisen wie die Differentiale. Sowie die Differentiale höherer Ordnung regelmässig neben den Differentialen erster Ordnung nicht beachtet werden, so werden umgekehrt die Immensale niedrigerer Ordnung $\left(\text{z. B. } \frac{1}{dx}\right)$ neben den Immensalen höherer Ordnung $\left(\text{z. B. } \frac{1}{dx^2} \text{ oder } \frac{1}{dx^3}\right)$ verschwinden. Ferner brauchen endliche Grössen, welche zu den Immensalen zu addieren oder von ihnen zu subtrahieren sind, nicht beachtet zu werden, so dass $\frac{1}{dx} + 1$ oder $\frac{1}{dx} - 1$ dem einfachen Immensal $\frac{1}{dx}$ gleichgesetzt werden kann. Steht dagegen die endliche Grösse zu dem Immensal im Verhältnis eines Multiplikators, Divisors oder Exponenten $\left[\text{z. B. } \frac{a}{dx}, \frac{1}{a\,dx}, \left(\frac{1}{dx}\right)^a\right]$, so kann dieselbe nicht weggelassen werden, weil in diesen Fällen das Immensal selbst durch die endliche Grösse afficiert wird. Noch weniger kann natürlich zweifelhaft sein, dass unendlich kleine Grössen (Differentiale), welche zu einem Immensal zugezählt oder von ihm subtrahiert werden sollen $\Big(\text{z. B. } \frac{1}{dx} + dx$

oder $\frac{1}{dx} - dx\Big)$, ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit des Endresultats weggelassen werden können, wogegen die in Ansehung der endlichen Grössen beigefügten Einschränkungen auch auf die unendlich kleinen Grössen Anwendung finden.

§ 3.

Der Differentialquotient.

Das wichtigste Anwendungsgebiet der Immensalrechnung ist, wie sich im weiteren Laufe dieser Darstellung ergeben wird, die Potenzial- und die Logarithmalrechnung. Aber auch auf die bereits bekannten Gebiete der Analysis des Unendlichen: die Differential- und Integralrechnung kann diese Rechnungsart in vielen Richtungen mit Nutzen angewendet werden. Ich ziehe der Kürze wegen hier nur den Differentialquotienten in Betracht.

Unter dem Differentialquotienten versteht man gewöhnlich die endliche Grösse, welche sich aus der Division von zwei unendlich kleinen Quantitäten ergiebt $\left(\text{z. B. } \frac{d(x^2)}{dx} = 2x\right)$. Aber man kann mit demselben Rechte diese endliche Grösse als das Produkt eines Differentials und eines Immensals, also einer unendlich kleinen und grossen Quantität auffassen $\left[\text{z. B. } 2x = d(x^2) \cdot \frac{1}{dx} = (2x dx + dx^2) \cdot \frac{1}{dx}\right]$. Setzt man in dieser Gleichung $x = 3$, das Differential $dx = \frac{1}{1000}$, folglich das Immensal $\frac{1}{dx} = 1000$, so ergiebt das Differentialprodukt 6.001, welches von $2x$ nur um $\frac{1}{1000}$ abweicht. Setzt man ferner in der obigen Gleichung das Differential nacheinander $= \frac{1}{10\,000}, \frac{1}{100\,000}, \frac{1}{1\,000\,000}$, das Immensal $= 10\,000$, $100\,000$, $1\,000\,000$, so wird die Zahl 6 konstant bleiben, aber die Ungenauigkeit wird sich auf $\frac{1}{10\,000}, \frac{1}{100\,000}, \frac{1}{1\,000\,000}$ vermindern, bis bei unendlicher Verringerung des Differentials, bei unendlicher Vermehrung des Immensals thatsächlich $d(x^2) \cdot \frac{1}{dx} = 2x$ wird.

Auf den ersten Blick könnte diese Substituierung des Differentialquotienten durch das Produkt des Differentials und des Immensals als eine müssige Spielerei erscheinen, da ja beide Methoden genau dieselben Resultate ergeben. Aber das Ineinandergreifen von Differential und Immensal wird sich nicht nur in der folgenden Darstellung als eine reiche Quelle der wichtigsten mathematischen Wahrheiten erweisen, sondern es wird auch das wahre Wesen der endlichen Grössen durch die von mir vorgeschlagene Auffassung ungleich besser ausgedrückt als durch die bisherige Anschauung. Denn die endlichen Dinge der objektiven Welt, deren mathematischer Ausdruck die endlichen Grössen sind, können immer als ein Aggregat aus einer unendlich grossen Zahl unendlich kleiner Bestandteile betrachtet werden. So ist jeder endliche Körper aus einer unendlich grossen Zahl unendlich kleiner Stoffteile (Atome) zusammengesetzt. Jeder endliche Raum, jede endliche Zeit besteht aus einer unendlichen Zahl von unendlich kleinen Raum- und Zeitteilchen. Diese Beziehungen der endlichen Dinge zu dem unendlich Grossen und Kleinen werden nun durch das Differentialprodukt auf das Genaueste wiedergegeben. Konsequent führt allerdings diese Auffassung zu der Ansicht, dass nur dem unendlich Grossen und Kleinen eine wahre Existenz zugeschrieben werden kann, wogegen wir die endlichen Dinge aus theoretischen und praktischen Interessen lediglich in unserer subjektiven Anschauung zusammenfassen. Eine unmittelbare Folge dieses Standpunktes ist dann auch, dass man die Sätze der Analysis des Unendlichen als die ursprünglichen Wahrheiten betrachten muss, während uns die Theoreme der niederen Mathematik unter dieser Voraussetzung als das Ungenaue und Abgeleitete erscheinen: im Gegensatze zu der gewöhnlichen Auffassung, welche bei der Ableitung der Differentialformeln trotz der verschiedenartigsten Methoden nur mühsam den Vorwurf einer dem Wesen der Mathematik widersprechenden Ungenauigkeit vermeidet. Ich behalte mir vor, diese Gedanken an einer anderen Stelle näher auszuführen.

§ 4.

Die Potenziale der Differentiale.

Wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer unendlich kleinen Potenz erhoben wird (z. B. dx^{dx}, dx^{dy}), so muss sich, ähnlich wie bei dem Differentialquotienten, eine endliche Grösse ergeben. Diese endliche Grösse will ich das Potenzial nennen. Als spezielles Symbol für die Potenzialisierung möchte sich der Buchstabe π empfehlen, über welchen der unendliche Exponent zu schreiben ist, so dass $\overset{dy}{\pi} dx = dx^{dy}$ ist. Wo indessen keine Verwechslung zu befürchten ist, kann man die gewöhnliche Bezeichnung der Potenz auch bei unendlichen Wurzeln und Exponenten beibehalten.

Ich will zunächst das einfachste Potenzial in der Gestalt von dx^{dx} entwickeln.

Nimmt man von dx^{dx} den natürlichen Logarithmus $= dx\,l dx$ und kehrt man dann zu dem entsprechenden Numerus zurück, so entsteht die Gleichung:

$$dx^{dx} = e^{dx\,ldx} = 1 + \frac{dx\,ldx}{1} + \frac{(dx\,ldx)^2}{1.2} + \frac{(dx\,ldx)^3}{1.2.3} + \dots \quad (1)$$

Da ldx eine endliche (negative) Grösse ist (vergl. unten § 10), so können in der obigen Reihe (1) das dritte Glied $\frac{(dx\,ldx)^2}{1.2}$ und alle folgenden unberücksichtigt bleiben, weil dieselben Differentiale höherer Ordnung sind. Es ergiebt sich also für das Potenzial folgende Gleichung:

$$dx^{dx} = e^{dx\,ldx} = 1 + dx\,ldx \quad \dots\dots \quad (2)$$

Dasselbe Resultat wird gewonnen, wenn man das Potenzial dx^{dx} in der Exponentialreihe entwickelt. Darnach ist:

$$dx^{dx} = 1 + \frac{dx\,ldx}{1} + \frac{(dx\,ldx)^2}{1.2} + \frac{(dx\,ldx)^3}{1.2.3} + \dots \quad (3)$$

und da man das dritte und die folgenden Glieder fortlassen kann:

$$dx^{dx} = 1 + dx\,ldx \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Da ldx eine endliche negative Grösse ist, so wird auch $1 + dx\,ldx$ eine endliche Grösse sein, welche nur um eine unendlich kleine Quantität (nämlich um $dx\,ldx$) geringer als die Einheit ist.

Auf ähnliche Weise kann man auch sehr leicht die folgenden Gleichungen entwickeln:

$$dx^{dy} = e^{dy\,ldx} = 1 + dy\,ldx \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

$$dx^{ady} = e^{ady\,ldx} = 1 + ady\,ldx \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

$$(adx)^{dy} = e^{dy\,l(adx)} = 1 + dy\,l(adx) = 1 + dy\,(la + ldx) \quad . \quad (7)$$

$$\left(\frac{dx}{a}\right)^{dy} = e^{dy\,l\frac{dx}{a}} = 1 + dy\,l\frac{dx}{a} = 1 + dy\,(ldx - la) \quad \dots \quad (8)$$

$$\left(\frac{adx}{b}\right)^{cdy} = e^{cdy\,l\frac{adx}{b}} = 1 + cdy\,l\frac{adx}{b} = 1 + cdy\,[l(adx) - lb] \quad (9)$$

§ 5.

Die Potenziale der Immensale.

Das Potenzial des einfachsten Immensals lautet: $\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx}$. Da die Einheit, zu irgend einer Potenz erhoben, immer wieder die Einheit giebt, so wird sein:

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = \frac{1}{dx^{dx}} = \frac{1}{1 + dx\,l\,dx} = 1 - dx\,l\,dx + (dx\,l\,dx)^2 - (dx\,l\,dx)^3 + \ldots \quad (1)$$

Da die obige Reihe vom dritten Glied an Differentiale höherer Ordnung enthält, welche vernachlässigt werden können, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1 - dx\,l\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Dasselbe Resultat kommt hervor, wenn man ähnlich wie im § 4 von $\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx}$ den natürlichen Logarithmus nimmt und dann zum Numerus zurückkehrt. Da $l\left(\frac{1}{dx}\right) = -l\,dx$, folglich $l\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = -dx\,l\,dx$ ist, so wird folgende Gleichung stattfinden:

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = e^{-dx\,l\,dx} = 1 - dx\,l\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Entwickelt man endlich $\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx}$ in der Exponentialreihe, so ist:

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1 - \frac{dx\,l\,dx}{1} + \frac{(dx\,l\,dx)^2}{1\,.\,2} - \frac{(dx\,l\,dx)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots \; . \; . \quad (4)$$

und da man in dieser Reihe das dritte und die folgenden Glieder weglassen kann, so wird auch hier die obige Gleichung 2 und 3 resultieren. Dasselbe Resultat wird auch später bei Entwicklung des Differential- und Immensalbinomiums (§ 8, Gl. 5, 8) hervorkommen.

Auf dieselbe Weise, wenngleich mit leichten Abweichungen, kann man noch folgende Gleichungen entwickeln:

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dy} = 1 - dy\,l\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{a\,dy} = 1 - a\,dy\,l\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{adx}\right)^{dy} = 1 - dyl(adx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\left(\frac{a}{dx}\right)^{dy} = 1 + dyl\frac{a}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\left(\frac{a}{bdx}\right)^{cdy} = 1 + cdyl\frac{a}{bdx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In den beiden Gleichungen 8 und 9 ist, obgleich es sich um die Potenzialisierung eines Immensals handelt, die Einheit mit dem Differential durch das Additions-, nicht durch das Subtraktionszeichen verbunden, weil der leichteren Übersicht wegen in diesen Formeln der Logarithmus des Immensals $\left(l\frac{a}{dx}, l\frac{a}{bdx}\right)$, nicht jener des Differentials aufgenommen wurde. Der Logarithmus des Immensals $\left(l\frac{1}{dx} = -ldx\right)$ hat aber eben das entgegengesetzte Zeichen des Logarithmus des Differentials (ldx).

Stellt man aus dem § 4 und 5 der Kürze wegen die einfachsten Potenziale des Differentials und des Immensals zusammen, nämlich:

$$dx^{dx} = 1 + dxldx$$

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1 - dxldx$$

so werden sich sofort folgende zwei bemerkenswerte Gleichungen ergeben:

$$dx = (1 + dxldx)^{\frac{1}{dx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\frac{1}{dx} = (1 - dxldx)^{\frac{1}{dx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oder in Worten ausgedrückt: Das Potenzial des Differentials giebt, obgleich es eine endliche Grösse ist, wenn man dasselbe zu einer unendlich hohen Potenz erhebt, das Differential; das gleichfalls endliche Potenzial des Immensals ergiebt unter der gleichen Voraussetzung das Immensal. Eine unendlich kleine Vermehrung oder Verminderung der Einheit bewirkt also, dass im ersten Falle eine unendlich grosse, im zweiten Falle eine unendlich kleine Quantität als Resultat zu Tage tritt. Die beiden Gleichungen 10 und 11 sollen deshalb auch sofort (§ 6) bei der Darstellung der Potenziale in endlichen Zahlen als Probe für deren Richtigkeit verwendet werden.

§ 6.

Darstellung der Potenziale in endlichen Zahlen.

Um die Richtigkeit der in §§ 4 und 5 entwickelten Potenzialformeln zu erproben, sollen dieselben nunmehr in endlichen Zahlen dargestellt werden, zu welchem Zwecke ich wegen der leichteren Übersicht die einfachsten Ausdrücke wähle.

Wir haben in den §§ 4 und 5 folgende Grundformeln ermittelt:

$$dx^{dx} = 1 + dx l dx \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1 - dx l dx \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$(1 + dx l dx)^{\frac{1}{dx}} = dx \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$(1 - dx l dx)^{\frac{1}{dx}} = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Nimmt man von den Gleichungen 3 und 4 den gemeinen (briggsschen) Logarithmus, so entstehen folgende Ausdrücke, welche den hier als Beispiel gegebenen Rechnungen zu Grunde liegen:

$$\frac{1}{dx} \, log.\,br.\,(1 + dx l dx) = log.\,br.\,dx \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{1}{dx} \, log.\,br.\,(1 - dx l dx) = - \, log.\,br.\,dx \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Um nun diese beiden letzten Gleichungen in endlichen Zahlen auszurechnen, werde ich das Differential dx nacheinander $= \frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10\,000}$, $\frac{1}{100\,000}$, ferner das Immensal $\frac{1}{dx} = 1000,\ 10\,000,\ 100\,000$ setzen:

$$\text{I} \quad dx = \frac{1}{1000}; \quad \frac{1}{dx} = 1000$$

$$l dx = log.\,nat.\,\frac{1}{1000} = -6.907755278982 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$dx l dx = -0.0069077553 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$1 + dx l dx = 0.9930922447 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$1 - dx l dx = 1.0069077553 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

a) $log.\,br.\,(1 + dxldx) = log.\,br.\,0.9930922447 = 0.9969895903 - 1 =$
$$- 0.0030104097 \quad . \; . \; . \; (11)$$

$$\frac{1}{dx}\,log.\,br.\,(1 + dxldx) = - 0.0030104097 \times 1000 = - 3.0104097 \quad . \; . \; (12)$$

$$log.\,br.\,dx = log.\,br.\,\frac{1}{1000} = - 3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

b) $log.\,br.\,(1 - dxldx) = log.\,br.\,1.0069077553 = 0.0029896859 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$

$$\frac{1}{dx}\,log.\,br.\,(1 - dxldx) = 0.0029896359 \times 1000 = 2.9896859 \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

$$log.\,br.\,\frac{1}{dx} = log.\,br.\,1000 = + 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Aus dieser Rechnung ergiebt sich, dass der gemeine Logarithmus des zur Immensalpotenz erhobenen Differentialpotenzials (Gleich. 3, 5, 12) und des Immensalpotenzials (Gleich. 4, 6, 15) von dem gemeinen Logarithmus des Differentials (Gleich. 13) und des Immensals (Gleich. 16) um etwa $\frac{1}{100}$ (genau um 0.0104097 und 0.0103141) abweicht:

$$\text{II} \quad dx = \frac{1}{10\,000}\,; \quad \frac{1}{dx} = 10\,000$$

$$1 + dxldx = 0.9990789660 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

$$1 - dxldx = 1.0009210340 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

a) $log.\,br.\,(1 + dxldx) = log.\,br.\,0.9990789660 = 0.9995998156 - 1 =$
$$- 0.0004001844 \quad . \; . \; . \; (19)$$

$$\frac{1}{dx}\,log.\,br.\,(1 + dxldx) = - 0.0004001844 \times 10\,000 = - 4.001844 \quad . \; . \; (20)$$

$$log.\,br.\,dx = log.\,br.\,\frac{1}{10\,000} = - 4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

b) $log.\,br.\,(1 - dxldx) = log.\,br.\,1.0009210340 = 0.0003997958 \quad . \; . \; . \; . \; (22)$

$$\frac{1}{dx}\,log.\,br.\,(1 - dxldx) = 0.0003997958 \times 10\,000 = 3.997958 \quad . \; . \; . \; (23)$$

$$log.\,br.\,\frac{1}{dx} = log.\,br.\,10\,000 = 4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

Die oben (unter I) näher charakterisierte Ungenauigkeit beträgt hier annähernd $\frac{2}{1000}$.

$$\text{III} \quad dx = \frac{1}{100\,000}; \quad \frac{1}{dx} = 100\,000$$

$$1 + dxldx = 0.9998848707 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$1 - dxldx = 1.0001151293 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

a) $log.\, br.\, (1 + dxldx) = log.\, br.\, 0.9998848707 = 0.999949997 - 1 =$

$$- 0.0000500029 \quad \ldots \quad (27)$$

$$\frac{1}{dx}\, log.\, br.\, (1 + dxldx) = - 0.0000500029 \times 100\,000 = - 5.00029 \quad \ldots \quad (28)$$

$$log.\, br.\, dx = log.\, br.\, \frac{1}{100\,000} = - 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

b) $log.\, br.\, (1 - dxldx) = log.\, br.\, 1.0001151293 = 0.0000499971 \quad \ldots\ldots \quad (30)$

$$\frac{1}{dx}\, log.\, br.\, (1 - dxldx) = 0.0000499971 \times 100\,000 = 4.99971 \quad \ldots \quad (31)$$

$$log.\, br.\, \frac{1}{dx} = log.\, br.\, 100\,000 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Die oben (unter I) näher bezeichnete Ungenauigkeit beträgt hier annähernd $\frac{3}{10\,000}$.

Aus dieser Darstellung ergiebt sich, dass die Ungenauigkeit des Endresultats $\left(\text{sub I} = \frac{1}{100},\ \text{sub II}\ \frac{2}{1000},\ \text{sub III}\ \frac{3}{10\,000}\ \text{u. s. f.}\right)$ bei fortwährender Verminderung des Differentials und bei fortwährender Vermehrung des Immensals immer geringer wird, bis schliesslich bei unendlicher Verminderung oder Vermehrung die Potenzialformeln sich als vollständig genau darstellen. Es besteht hier eine durchgreifende Analogie mit dem, was oben (§ 3) über das Differentialprodukt gesagt wurde, bei welchem letzteren nach der von mir vertretenen Auffassung ein ganz ähnliches Ineinandergreifen von Differential und Immensal wie hier stattfindet.

Auf ähnliche Weise können auch alle übrigen Potenzialformeln in endlichen Zahlen dargestellt werden. Nur dürfen die in den Gleichungen § 4, Gl. 6—9 und § 5, Gl. 6—9 erscheinenden endlichen Grössen *a*, *b*, *c* nicht allzuhoch genommen werden, weil sonst der Gegensatz zwischen den endlichen Grössen einerseits und den Differentialen und Immensalen andererseits, welcher ohnedies in keinem ziffermässigen Beispiel ein absoluter sein kann, fast vollständig verwischt wird.

Nehmen wir z. B. den kompliziertesten Ausdruck, nämlich die Gleichung § 4, Gl. 9:

$$\left(\frac{a\,dx}{b}\right)^{c\,dy} = 1 + c\,dy\,l\,\frac{a\,dx}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (32)$$

woraus sich (Gleich. 3 und 4) ergiebt:

$$\left(1 + c\,dy\,l\,\frac{a\,dx}{b}\right)^{\frac{1}{c\,dy}} = \frac{a\,dx}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (33)$$

und wenn man von dieser letzteren Gleichung den briggs'schen Logarithmus nimmt:

$$\frac{1}{c\,dy}\,log.\,br.\left(1 + c\,dy\,log.\,nat.\,\frac{a\,dx}{b}\right) = log.\,br.\,\frac{a\,dx}{b} \quad . \quad . \ (34)$$

Setzt man nun in der letzten Gleichung $dx = \frac{1}{10\,000}$, $dy = \frac{1}{100\,000}$ $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, so muss annähernd folgende Gleichung gelten:

$$\frac{100\,000}{4}\,log.\,br.\left(1 + \frac{4}{100\,000}\cdot log.\,nat.\,\frac{2 \times \frac{1}{10\,000}}{3}\right) = log.\,br.\,\frac{2 \times \frac{1}{10\,000}}{3} \ (35)$$

Nun ist aber der auf der linken Seite der Gl. 35 stehende Ausdruck:

$$\frac{1}{c\,dy}\,log.\,br.\left(1 + c\,dy\,log.\,nat.\,\frac{a\,dx}{b}\right) = -4.176896 \quad . \quad . \quad . \ (36)$$

während der in Gleichung 35 rechts stehende Ausdruck:

$$log.\,br.\,\frac{a\,dx}{b} = -4.176091 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (37)$$

ist.

Die Abweichung des gemeinen Logarithmus des zur Immensalpotenz erhobenen Differentialpotenzials (Gleich. 36) von dem genauen Resultat (Gleich. 37) beträgt also hier $\frac{8}{10\,000}$, folglich mehr als doppelt so viel als in dem oben unter III ausgerechneten Beispiel. Dies erklärt sich aber sehr leicht durch den Umstand, dass dx in der Gleich. 35 nur $= \frac{1}{10\,000}$ gesetzt wurde und dass überdies in dieser Gleichung auch die für die endlichen Grössen a, b, c angenommenen Werte das Endergebnis beeinflussen.

§ 7.

Höhere Potenziale.

Ein höheres Potenzial ist dann vorhanden, wenn an derselben Grösse zwei oder mehrere Potenzialisierungen vorgenommen werden. Ich will der Kürze wegen nur die höheren Potenzialisierungen der in § 4 und 5 entwickelten Potenziale des Differentials und des Immensals vornehmen.

Die allgemeinen Formeln für die einfachsten Fälle des höheren Potenzials sind:

$$dx^{dx\,dx\,dx\,\ldots} = (1 + dxldx)^{dx\,dx\,\ldots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx\,dx\,dx\,\ldots} = (1 - dxldx)^{dx\,dx\,\ldots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man kann zur Bezeichnung der höheren Potenziale auch bequem das Potenzialzeichen π mit den darüber geschriebenen unendlichen Exponenten gebrauchen, in welchem Falle die obigen Gleichungen folgendermassen lauten:

$$\overset{dx\,dx\,dx}{\pi}(dx = \overset{dx}{\pi^3}(dx) = \overset{dx}{\pi^2}(1 + dxldx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\overset{dx\,dx\,dx}{\pi}\left(\frac{1}{dx}\right) = \overset{dx}{\pi^3}\left(\frac{1}{dx}\right) = \overset{dx}{\pi^2}(1 - dxldx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wenn wir nun zunächst das zweite Potenzial $\overset{dx}{\pi^2} dx$ entwickeln, so wird sich folgende Gleichung ergeben:

$$\overset{dx}{\pi^2} dx = (1 + dxldx)^{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in der Exponentialreihe, so ist:

$$\overset{dx}{\pi^2} dx = (1 + dxldx)^{dx} = 1 + \frac{dxl(1 + dxldx)}{1} + \frac{[dxl(1 + dxldx)]^2}{1.2} + \ldots \quad (5)$$

Da jedoch $l(1 + dxldx) = dxldx$ ist, so enthält schon das zweite Glied der Reihe ein Differential höherer Ordnung (dx^2) und es kann deshalb ebenso wie alle folgenden vernachlässigt werden. Die Gleichung für den einfachsten Fall eines höheren Potenzials ist also:

$$\overset{dx}{\pi^2} dx = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Da alle übrigen höheren Potenziale der Differentiale und der Immensale (§§ 4 und 5), wenn man sie in der Exponentialreihe entwickelt, schon in dem zweiten Gliede Differentiale höherer Ordnung aufweisen, so kann man als allgemeine Regel aussprechen, dass alle in §§ 4 und 5 entwickelten Potenziale schon durch die zweite Potenzialisierung auf 1, also auf eine Konstante reduziert werden und dass jede weitere Potenzialisierung gleichfalls die Einheit ergiebt.

Diese Sätze lassen sich auch durch eine Darstellung in endlichen Zahlen sehr leicht anschaulich machen. Setzt man $dx = \frac{1}{10\,000}$, $\frac{1}{dx} = 10\,000$, so ist, wenn man sich mit sieben Dezimalen begnügt:

$$dx^{dx} = 1 + dx l dx = 0.9990790$$

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1 - dx l dx = 1.0009210$$

Nimmt man nun von der ersten Zahl den gemeinen Logarithmus $= -0.0004004$, von der zweiten $= 0.0003997$ und multipliziert dieselben mit $\frac{1}{10000}$ $(= dx)$, so werden sich, wenn man bei den siebenstelligen Logarithmen verbleibt, folgende zwei Gleichungen ergeben:

$$log.\, dx^{dx\,dx} = dx\, log.\, (1 + dx l dx) = 0.0000000 \quad . \;.\;. \quad (7)$$

$$log.\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx\,dx} = dx\, log.\, (1 - dx l dx) = 0.0000000 \quad . \;.\;. \quad (8)$$

Demgemäss ist:

$$\overset{dx}{\pi^2}\, dx = \overset{dx}{\pi^2}\left(\frac{1}{dx}\right) = 1 \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

Dasselbe Resultat gilt auch rücksichtlich der mehr verwickelten Potenziale erster Ordnung. In der sogleich folgenden Darstellung des Differential- und Immensalbinomiums wird das gleiche Ergebnis auf einem andern Wege gewonnen werden.

§ 8.

Differential- und Immensalbinomium.

Auf die Differentiale und die Immensale kann auch der Binomialsatz, allerdings mit sehr erheblichen Abweichungen, angewendet werden. Diese Abweichungen werden namentlich durch den Umstand hervorgebracht, dass die Differentiale höherer Ordnung neben jenen erster Ordnung, die Immensale niederer Ordnung neben jenen höherer Ordnung verschwinden. Ich will, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nur jene Fälle des Differential- und Immensalbinomiums in Betracht ziehen, welche endliche Werte ergeben und deshalb eine ziffermässige Kontrolle zulassen.

I. Nehmen wir an, dass das Immensal $\frac{1}{dx}$, zu welchem ohne Bedenken eine endliche Grösse, z. B. 1, hinzugefügt werden kann, zur Potenz dx erhoben werden soll. Es wird dann sein:

$$\left(1+\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1+\frac{dx}{1}\cdot\frac{1}{dx}+\frac{dx(dx-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^2+$$
$$\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^3+\frac{dx(dx-1)(dx-2)(dx-3)}{1.2.3.4}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^4+\ldots \quad (1)$$

Entwickelt man in dieser Reihe die Binomialkoeffizienten und lässt man dabei die Differentiale höherer Ordnung fort, so nimmt die Reihe folgende Gestalt an:

$$\left(1+\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1+\frac{dx}{1}\cdot\frac{1}{dx}-\frac{dx}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^2+\frac{2\,dx}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^3-$$
$$\frac{2.3\,dx}{1.2.3.4}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^4+\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und wenn man reduziert:

$$\left(1+\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1+dx\left[\frac{1}{dx}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{dx}\right)^4+\ldots\right] \quad (3)$$

Da der in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck die logarithmische Reihe ist, welche auch auf Immensale Anwendung findet, so kommt folgende Gleichung hervor:

$$\left(1+\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1+dx\,l\left(1+\frac{1}{dx}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

welche, da die endlichen Grössen neben den Immensalen verschwinden, auch so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1+dx\,l\left(\frac{1}{dx}\right) = 1-dx\,l\,dx \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Dieser Ausdruck ist die uns wohlbekannte Gleichung für das Potenzial des Immensals (oben § 5).

Die Gleichungen 1—5 sind nur die einfachsten Fälle des Differentialbinomiums. Da die Gleichungen 4 und 5 schon früher (§ 6) ziffermässig geprüft worden sind, so bedarf es in dieser Richtung nicht einer nochmaligen Darlegung.

Auf ähnliche Weise kann man sehr leicht folgende drei allgemeinere Ausdrücke finden:

$$\left(1+\frac{1}{df(x)}\right)^{df(y)} = 1+df(y)\left[\frac{1}{df(x)}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{df(x)}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{df(x)}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{df(x)}\right)^4+\dots\right] \quad . \; . \; . \quad (6)$$

oder:

$$\left(1+\frac{1}{df(x)}\right)^{df(y)} = 1+df(y)\,l\left(1+\frac{1}{df(x)}\right) \quad . \; . \; . \quad (7)$$

oder:

$$\left(\frac{1}{df(x)}\right)^{df(y)} = 1+df(y)\,l\,\frac{1}{df(x)} = 1-df(y)\,l\,df(x) \; . \; . \; . \quad (8)$$

II. Es sei nunmehr die umgekehrte Operation vorzunehmen, also die Grösse $1+dx$ zur Immensalpotenz $\frac{1}{dx}$ zu erheben. In diesem Falle ergiebt sich:

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1+\frac{1}{dx}\cdot dx+\frac{\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{dx}-1\right)}{1\,.\,2}\cdot(dx)^2+\frac{\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{dx}-1\right)\left(\frac{1}{dx}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot(dx)^3+\frac{\frac{1}{dx}\left(\frac{1}{dx}-1\right)\left(\frac{1}{dx}-2\right)\left(\frac{1}{dx}-3\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot(dx)^4+\dots \quad (9)$$

Entwickelt man die Binomialkoeffizienten und lässt man hiebei die Immensale niederer Ordnung weg, so ist:

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1+\frac{1}{dx}\cdot dx+\frac{\left(\frac{1}{dx}\right)^2}{1\,.\,2}\cdot(dx)^2+\frac{\left(\frac{1}{dx}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot(dx)^3+\frac{\left(\frac{1}{dx}\right)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot(dx)^4+\dots \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Nimmt man nunmehr die erforderlichen Reduktionen zwischen Differential und Immensal vor, so entsteht die Reihe:

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots = e \quad . \; (11)$$

Durch ganz analoge Rechnungen kann man dem Immensalbinomium noch einen allgemeineren Charakter verleihen, z. B.:

$$(1+dx)^{\frac{1}{dy}} = 1+\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^3+\ldots = e^{\frac{dx}{dy}} \; (12)$$

oder:

$$\left[1+df(x)\right]^{\frac{1}{df(y)}} = 1+\frac{df(x)}{df(y)}+\frac{1}{1.2}\cdot\left[\frac{df(x)}{df(y)}\right]^2+$$
$$\frac{1}{1.2.3}\cdot\left[\frac{df(x)}{df(y)}\right]^3+\ldots = e^{\frac{df(x)}{df(y)}} \quad . \; (13)$$

Setzt man, um die Richtigkeit dieser Reihen in endlichen Zahlen zu erproben, in der Gleichung 12 $dx = \frac{1}{10\,000}$, $\frac{1}{dy} = 100\,000$, folglich $\frac{dx}{dy} = 10$, so ist $log. (1+dx) = 0.00004343$, welcher mit dem Immensal 100 000 multipliziert, den gemeinen Logarithmus 4.343 ergiebt, dessen Numerus annähernd $e^{10} = e^{\frac{dx}{dy}}$ ist, wodurch die Richtigkeit der Gleichung 12 erwiesen erscheint. Durch ähnliche Rechnungen kann man auch die Richtigkeit aller übrigen Fälle des Immensalbinomiums erproben.

III. Endlich wäre noch der Ausdruck $(1+dx)^{dx}$, der gleichfalls eine endliche Grösse ist, in der binomischen Reihe darzustellen.

Es ist nun:

$$(1+dx)^{dx} = 1+\frac{dx}{1}dx+\frac{dx\,(dx-1)}{1.2}(dx)^2+\ldots \quad . \; . \; (14)$$

Da in dieser Reihe schon das zweite Glied Differentiale höherer Ordnung enthält, so gilt die Gleichung:

$$(1+dx)^{dx} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

In derselben Weise findet man den allgemeineren Ausdruck:

$$\left[1+df(x)\right]^{df(y)} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Ein ähnliches Resultat ist übrigens auf anderem Wege schon bei Entwicklung der höheren Potenziale (§ 7) ermittelt worden.

§ 9.

Die Radikalrechnung.

So wie der Differentialrechnung die Integralrechnung, so steht der Potenzialisierung der unendlichen Grössen die Radikalisierung gegenüber. Der Zweck der Radikalrechnung besteht darin, aus einem gegebenen Potenzial mit Rücksicht auf einen bestimmten unendlichen Exponenten die Wurzel zu ermitteln. Als Symbol der Radikalisierung mag der Buchstabe ϱ dienen, über welchen der unendliche Exponent zu setzen ist, nach welchem die Radikalisierung vorgenommen werden soll. So ist z. B. $\overset{dx}{\varrho}(1 + dxldx) = dx$ oder $\overset{dx}{\varrho}(1 - dxldx) = \frac{1}{dx}$.

Potenzialisierung und Radikalisierung sind ebenso wie Differentiation und Integration entgegengesetzte Rechnungsoperationen, die einander aufheben, wenn sie bei dem nämlichen Ausdruck vorkommen. Es wird folglich sein:

$$\overset{dx\,dx}{\varrho\;\pi}\,(dx) = dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\overset{dx\,dx}{\varrho\;\pi}\left(\frac{1}{dx}\right) = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da Potenzialisierung und Radikalisierung entgegengesetzte Rechnungsoperationen sind, so werden sich die einfachsten Radikalformeln ohne weiteres durch Umkehrung der in §§ 4 und 5 entwickelten Potenzialformeln ergeben. Es ist also:

$$\overset{dx}{\varrho}(1 + dxldx) = dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\overset{dx}{\varrho}(1 - dxldx) = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\overset{dy}{\varrho}(1 + dyldx) = dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\overset{dy}{\varrho}(1 - dyldx) = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\overset{ady}{\varrho}(1 + adyldx) = dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\overset{ady}{\varrho}(1 - adyldx) = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\overset{dy}{\varrho}\left[1+dyl(adx)\right] = adx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\overset{dy}{\varrho}\left(1+dyl\frac{1}{adx}\right) = \overset{dy}{\varrho}\left[1-dyl(adx)\right] = \frac{1}{adx} \quad (10)$$

$$\overset{dy}{\varrho}\left(1+dyl\frac{dx}{a}\right) = \frac{dx}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\overset{dy}{\varrho}\left(1+dyl\frac{a}{dx}\right) = \frac{a}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\overset{cdy}{\varrho}\left(1+cdyl\frac{adx}{b}\right) = \frac{adx}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\overset{cdy}{\varrho}\left(1+cdyl\frac{b}{adx}\right) = \frac{b}{adx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Es giebt aber auch eine allgemeine Methode, aus einem gegebenen Potenzial mit Rücksicht auf einen bestimmten unendlichen Exponenten die Wurzel zu ermitteln. Man braucht nämlich nur das dem Differentialexponenten entsprechende Immensal oder umgekehrt das dem Immensalexponenten entsprechende Differential zu nehmen und das gegebene Potenzial mit diesem Exponenten zu potenzialisieren, was entweder durch die Exponentialreihe oder durch das Immensal- bezw. Differentialbinomium erfolgen kann. Es wird also sein (Gleich. 14):

$$\overset{cdy}{\varrho}\left(1+cdyl\frac{b}{adx}\right) = \left(1+cdyl\frac{b}{adx}\right)^{\frac{1}{cdy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Entwickelt man den letzteren Ausdruck mit Hilfe des Immensalbinomiums, so ergiebt sich:

$$\overset{cdy}{\varrho}\left(1+cdyl\frac{b}{adx}\right) = \left(1+cdyl\frac{b}{adx}\right)^{\frac{1}{cdy}} = 1+\frac{1}{cdy}\cdot cdyl\frac{b}{adx} +$$

$$\frac{1}{1.2\,(cdy)^2}\cdot\left(cdyl\frac{b}{adx}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3\,(cdy)^3}\cdot\left(cdyl\frac{b}{adx}\right)^3 +$$

$$\frac{1}{1.2.3.4\,(cdy)^4}\cdot\left(cdyl\frac{b}{adx}\right)^4 + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Nimmt man die erforderlichen Reduktionen in dieser Reihe vor, so ist:

$$\overset{cdy}{\varrho}\left(1+cdyl\frac{b}{adx}\right)=1+l\frac{b}{adx}+\frac{1}{1.2}\left(l\frac{b}{adx}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(l\frac{b}{adx}\right)^3+$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}\left(l\frac{b}{adx}\right)^4+\ldots=e^{l\frac{b}{adx}}=\frac{b}{adx} \quad . \; . \; (17)$$

welches Resultat mit der Gleichung 14 übereinstimmt.

Auf dieselbe Weise können auch andere, in den Gleichungen 3—14 nicht enthaltene Potenziale radikalisiert werden. Es soll z. B. $\overset{dx}{\varrho}(dxldx)$ gefunden werden. Nun ist aber:

$$\overset{dx}{\varrho}(dxldx)=(dxldx)^{\frac{1}{dx}}=1+\frac{1}{dx}l(dxldx)+\frac{1}{1.2\,dx^2}\cdot\left[l(dxldx)\right]^2+$$

$$\frac{1}{1.2.3\,dx^3}\cdot\left[l(dxldx)\right]^3+\ldots=e^{\frac{l(dxldx)}{dx}} \quad . \; . \; (18)$$

Die gesuchte Wurzel ist also mit Rücksicht auf den Exponenten dx $= e^{\frac{l(dxldx)}{dx}}$. Erhebt man diese Wurzel zur Potenz dx, so wird daraus $e^{l(dxldx)} = dxldx$, also das gegebene Potenzial resultieren.

Dass diese Methode der Radikalisierung wegen der erforderlichen Reihenentwicklungen ziemlich weitläufig ist, liegt auf der Hand. Die weiter unten (§§ 10 und 11) folgende Darstellung der Logarithmal- und Numeralrechnung wird uns ein Mittel gewähren, die Radikalisierung der Potenziale auf einem viel einfacheren Wege zu bewirken.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass ein Regress vom Potenzial zum Radikal nur dann möglich ist, wenn das erstere ein Differential oder ein Immensal enthält. Nun werden aber die in §§ 4 und 5 entwickelten Potenziale schon durch die zweite Potenzialisierung auf 1 reduziert und bei einzelnen Ausdrücken, z. B. bei $(1+dx)^{dx}$, tritt dieser Erfolg schon bei der ersten Potenzialisierung ein. Von der Konstanten 1 ist aber ein Regress zu der ursprünglichen Grösse ebenso wenig möglich, als dies bei den Gleichungen $a^0 = 1$ oder $dC = 0$ denkbar ist.

§ 10.

Die Logarithmalrechnung.

Ich habe in dieser Abhandlung häufig den natürlichen Logarithmus von Differentialen und Immensalen angewendet. Die Logarithmen der Differentiale und der Immensale sind e n d l i c h e Grössen, weil der Logarithmus, je mehr der Zähler oder der Nenner des Numerus steigt $\left(\text{z. B. } \frac{1000}{1}, \frac{10\,000}{1}, \frac{100\,000}{1} \text{ u. s. f. oder } \frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000}, \frac{1}{100\,000}\right)$, verhältnismässig immer geringer wird, bis schliesslich bei unendlichen Grössen $\left(\text{z. B. } \frac{1}{dx}, dx\right)$ die positiven und die negativen Logarithmen in unendlichem Masse hinter dem Numerus zurückbleiben; dies ist es aber, was das Wesen der endlichen Grösse ausmacht. So ist z. B. die Zahl 10 000 eine Grösse, die jeder ohne Schwierigkeit auffassen und zu der er leicht Analogien in seiner eigenen Erfahrung finden kann; betrachtet man jedoch dieselbe Zahl als einen gemeinen Logarithmus, so entspricht ihr als Numerus die Einheit mit darauffolgenden zehntausend Nullen, also eine Ziffer, welche unsere Vorstellungskraft weit übersteigt und die vielleicht genügen würde, um alle mathematisch unterscheidbaren Individualitäten des Weltalls zu bezeichnen. Als endliche Quantitäten fallen aber die Logarithmen der Differentiale und der Immensale an dieser Stelle ausserhalb des Gebietes meiner Betrachtung.

Dagegen sind hier die Logarithmale zu behandeln, unter welchem Ausdruck ich die Logarithmen verstehe, deren Basis eine unendliche Grösse $\left(\text{z. B. } d\beta, \frac{1}{d\beta}\right)$ ist. Ich will die Logarithmale durch den Buchstaben λ bezeichnen und mich bei Entwicklung derselben auf die einfachsten Fälle und auf die einfachste Basis, nämlich $d\beta$, beschränken.

Die wichtigsten hier in Betracht kommenden Gleichungen sind etwa die nachfolgenden:

$$d\beta^{\lambda dx} = dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$d\beta^{\lambda \frac{1}{dx}} = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$d\beta^{\lambda adx} = adx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$d\beta^{\lambda \frac{1}{adx}} = \frac{1}{adx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$d\beta^{\lambda (1 + adx)} = 1 + adx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$d\beta^{\lambda (1 + dx l dx)} = 1 + dx l dx \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Was zuvörderst die Gleichung 1 betrifft, so ergiebt sich, wenn man beiderseits den natürlichen Logarithmus nimmt:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, dx = \frac{l\,dx}{l\,d\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Ebenso ist:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, \frac{1}{dx} = -\frac{l\,dx}{l\,d\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, a\,dx = \frac{l\,(a\,dx)}{l\,d\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, \frac{1}{a\,dx} = -\frac{l\,(a\,dx)}{l\,d\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Das Logarithmal in den Gleichungen 7—10 $\left(\text{z. B. } \frac{l\,dx}{l\,d\beta}\right)$ ist der Quotient von zwei endlichen negativen Grössen, folglich selbst eine positive endliche Grösse. Deshalb kann in der Gleichung $d\beta^{\lambda dx} = d\beta^{\frac{l\,dx}{l\,d\beta}} = dx$ von dem Ausdruck $d\beta^{\frac{l\,dx}{l\,d\beta}}$ auch nicht das Potenzial, wenigstens nicht in dem oben (§§ 4 und 5) entwickelten Sinne, genommen werden, sondern der Ausdruck ist in der Exponentialreihe zu entwickeln, um die Richtigkeit des Logarithmals festzustellen. Nun ist aber:

$$d\beta^{\frac{l\,dx}{l\,d\beta}} = 1 + \frac{l\,dx}{l\,d\beta}\cdot l\,d\beta + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{l\,dx}{l\,d\beta}\right)^2 (l\,d\beta)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{l\,dx}{l\,d\beta}\right)^3 (l\,d\beta)^3 + \ldots \quad (12)$$

oder wenn man reduziert:

$$d\beta^{\frac{l\,dx}{l\,d\beta}} = 1 + l\,dx + \frac{1}{1\,.\,2}(l\,dx)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}(l\,dx)^3 + \ldots = e^{l\,dx} = dx \quad (13)$$

woraus die Richtigkeit des Logarithmals $\overset{d\beta}{\lambda}\, dx = \frac{l\,dx}{l\,d\beta}$ hervorgeht.

Was das Logarithmal der Gleichung 5, $d\beta^{\lambda(1+a\,dx)} = 1 + a\,dx$, betrifft, so ist:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,(1 + a\,dx) = \frac{l\,(1 + a\,dx)}{l\,d\beta} = \frac{a\,dx}{l\,d\beta} \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

welcher letztere Ausdruck, da $l\,d\beta$ eine endliche Grösse ist, sich als ein Differential darstellt. Demgemäss braucht man, um die Richtigkeit dieses

Logarithmals zu erproben, nur von $d\beta$ das Potenzial mit Rücksicht auf den unendlichen Exponenten $\frac{adx}{ld\beta}$ zu nehmen. Es ist nun in der That:

$$d\beta^{\frac{adx}{ld\beta}} = 1 + \frac{adx}{ld\beta} \cdot ld\beta = 1 + adx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Ebenso ist in der Gleichung 6:

$$\overset{d\beta}{\lambda}(1 + dxldx) = \frac{dxldx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

welcher Ausdruck also das Logarithmal des einfachsten Potenzials ist. Dasselbe Resultat kommt hervor, wenn man das unentwickelte Potenzial logarithmalisiert. Es ist nämlich:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, dx^{dx} = dx \overset{d\beta}{\lambda} dx = \frac{dxldx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

In Betreff folgender Ausdrücke mag noch hier das Logarithmal entwickelt werden.

Das Logarithmal des Differentialprodukts (oder des Differentialquotienten) ist zufolge Gleichung 7 und 8:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\frac{dx}{dy} = \overset{d\beta}{\lambda}\left(dx \cdot \frac{1}{dy}\right) = \frac{ldx}{ld\beta} - \frac{ldy}{ld\beta} = \frac{ldx - ldy}{ld\beta} \quad . \quad . \quad (18)$$

Aus der Natur der Logarithmale, die in dieser Richtung mit den endlichen Logarithmen vollständig übereinstimmen, ergeben sich ferner noch folgende zwei Gleichungen:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, d\beta = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda} 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

§ 11.

Die Numeralrechnung.

Aus dem Logarithmal kann das Numeral ermittelt werden, d. h. jene endliche oder unendliche Grösse, welche dem Logarithmal mit Rücksicht auf eine bestimmte unendliche Basis entspricht. Als Symbol für die

Numeralisierung wähle ich den Buchstaben ν, über welchen die unendliche Basis zu setzen ist, nach welcher die Numeralisierung erfolgen soll $\left(\text{z. B. } \overset{d\beta}{\nu}\,\frac{a\,dx}{l\,d\beta} = 1 + a\,dx\right)$.

Logarithmalisierung und Numeralisierung sind entgegengesetzte Rechnungsoperationen, die einander aufheben, wenn sie bei dem nämlichen Ausdruck vorkommen. Es wird daher $\overset{d\beta}{\nu}\,\overset{d\beta}{\lambda}\,(dx) = dx$ sein (vgl. oben § 9).

Da die Numeralisierung das Gegenteil der Logarithmalisierung ist, so wird die Umkehrung der im § 10 entwickelten Logarithmale die einfachsten Numeralisierungsformeln ergeben. Es ist also:

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{l\,dx}{l\,d\beta} = dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{l\,dx}{l\,d\beta} = \frac{1}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{l\,(a\,dx)}{l\,d\beta} = a\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{l\,(a\,dx)}{l\,d\beta} = \frac{1}{a\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,dy\,\lambda\,dx = dx^{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{a\,dx}{l\,d\beta} = 1 + a\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{a\,dx}{l\,d\beta} = 1 - a\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} = 1 + dx\,l\,dx = dx^{dx} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} = 1 - dx\,l\,dx = \left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} \quad \ldots \quad (9)$$

$$\overset{d\beta}{\nu} = \frac{l\,dx - l\,dy}{l\,d\beta} = \frac{dx}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,1 = d\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,0 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ganz allgemein kann aber das Numeral gefunden werden, wenn man $d\beta$ zu der Potenz des gegebenen Logarithmals erhebt. Die betreffende Operation gestaltet sich verschieden, je nachdem das Logarithmal eine unendliche Grösse ist, wie z. B. in den obigen Gleichungen 6—9, oder ob es sich wie in den Gleichungen 1—4, 10 als eine endliche Quantität darstellt.

Ist das gegebene Logarithmal ein Differential oder ein Immensal $\left(\text{z. B. wenn } \overset{d\beta}{\nu}\, \dot{d}x \text{ zu finden ist}\right)$, so wird das Numeral durch eine einfache Potenzialisierung ermittelt. Es ist also:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, dx = d\beta^{dx} = 1 + dx l d\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Dass diese Numeralisierung richtig ist, ergiebt sich daraus, dass:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,(1 + dx l d\beta) = \frac{dx l d\beta}{l d\beta} = dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

ist.

Ist dagegen das gegebene Logarithmal eine endliche Grösse von der Form $\frac{ldf(x)}{ld\beta}$ (vgl. die Gleichungen 1—4, 10), so kann das Numeral sehr leicht durch die Exponentialreihe entwickelt werden. Wenn z. B. die Aufgabe darin besteht, $\nu - \frac{ldx}{ld\beta}$ aufzufinden, so wird sein:

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{ldx}{ld\beta} = d\beta^{-\frac{ldx}{ld\beta}} = 1 - \frac{ldx}{ld\beta}\, ld\beta + \frac{1}{1.2}\left(\frac{ldx}{ld\beta}\right)^2 (ld\beta)^2 -$$

$$\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{ldx}{ld\beta}\right)^3 (ld\beta) + \dots \quad . \; . \; . \; (15)$$

und wenn man reduziert:

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{ldx}{ld\beta} = 1 - ldx + \frac{1}{1.2}(ldx)^2 - \frac{1}{1.2.3}(ldx)^3 + \dots =$$

$$e^{-ldx} = \frac{1}{e^{ldx}} = \frac{1}{dx} \quad . \; . \; . \; (16)$$

was der obigen Gleichung 2 entspricht.

Noch einfacher gestaltet sich die Numeralisierung in allen Fällen, wo das gegebene Logarithmal die Form $\frac{df(x)}{ld\beta}$ oder $\frac{ldf(x)}{ld\beta}$ hat dadurch, dass $d\beta^{\frac{1}{l d\beta}} = e$ ist. Demgemäss werden die Numeralisierungsformeln in diesen zwei Fällen folgende Gestalt annehmen:

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{df(x)}{ld\beta} = d\beta^{\frac{df(x)}{ld\beta}} = e^{df(x)} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{ldf(x)}{ld\beta} = d\beta^{\frac{ldf(x)}{ld\beta}} = e^{ldf(x)} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Es wird also z. B. (Gleich. 7):

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{adx}{ld\beta} = d\beta^{-\frac{adx}{ld\beta}} = e^{-adx} = 1 - adx \quad \ldots \quad (19)$$

sein. Ebenso ist (Gleich. 2):

$$\overset{d\beta}{\nu} - \frac{ldx}{ld\beta} = d\beta^{-\frac{ldx}{ld\beta}} = e^{-ldx} = \frac{1}{e^{ldx}} = \frac{1}{dx} \quad \ldots \quad (20)$$

Die Logarithmale können, ebenso wie die Differentiale und Immensale, potenzialisiert und radikalisiert werden. Nur erfolgt die Potenzialisierung des Logarithmals dadurch, dass man dasselbe mit dem unendlichen Exponenten multipliziert, während sich die Radikalisierung durch eine analoge Division vollzieht. Es werden sich also, wenn man sich auch hier auf die einfachsten Fälle beschränkt, folgende Gleichungen ergeben:

$$\overset{dx\,d\beta}{\pi\ \lambda}\,(dx) = \overset{dx}{\pi}\,\frac{ldx}{ld\beta} = \frac{dxldx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$$\overset{dx\,d\beta}{\pi\ \lambda}\left(\frac{1}{dx}\right) = \overset{dx}{\pi} - \frac{ldx}{ld\beta} = -\frac{dxldx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$$\overset{dx\,d\beta}{\varrho\ \nu}\,\frac{dxldx}{ld\beta} = \text{(Gl. 8)}\ \overset{dx}{\varrho}(1 + dxldx) = \overset{dx}{\varrho}\left(dx^{dx}\right) = dx \quad \ldots \quad (23)$$

$$\overset{dx\,d\beta}{\varrho\ \nu} - \frac{dxldx}{ld\beta} = \text{(Gl. 9)}\ \overset{dx}{\varrho}(1 - dxldx) = \overset{dx}{\varrho}\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = \frac{1}{dx} \quad . \quad (24)$$

Die Potenzialisierung und die Logarithmalisierung, beziehungsweise die Radikalisierung und die Numeralisierung können auch, ohne Beeinträchtigung des Endresultats, in umgekehrter Ordnung vorgenommen werden. Die obigen vier Gleichungen werden dann folgende Gestalt annehmen:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{dx}{\pi}(dx) = \overset{d\beta}{\lambda}(1+dxldx) = \frac{dxldx}{ld\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{dx}{\pi}\left(\frac{1}{dx}\right) = \overset{d\beta}{\lambda}(1-dxldx) = -\frac{dxldx}{ld\beta} \quad . \; . \; . \; (26)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\overset{dx}{\varrho}\,\frac{dxldx}{ld\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\,\frac{ldx}{ld\beta} = dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\overset{dx}{\varrho}-\frac{dxldx}{ld\beta} = \overset{d\beta}{\nu}-\frac{ldx}{ld\beta} = \frac{1}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

welche Resultate mit jenen der Gleichungen 21—24 übereinstimmen.

Durch die Numeralrechnung in Verbindung mit der Logarithmalrechnung werden die verwickelteren Operationen auf dem Gebiet der Analysis des Unendlichen sehr erheblich erleichtert, weil die Weglassung der Differentiale höherer Ordnung und die notwendigen Reduktionen sich innerhalb der Logarithmale viel einfacher als bei den entsprechenden Numeralen vollziehen. So können z. B. die Resultate, welche wir oben (§ 8) durch das Differential- und Immensalbinomium gewonnen haben, vermittelst dieser Rechnungsarten auf eine viel einfachere Weise erlangt werden.

Laut § 8, Gleichung 1—5 ist:

$$\left(1+\frac{1}{dx}\right)^{dx} = \left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = 1-dxldx$$

Logarithmalisiert man nun den ersten Ausdruck und lässt man das Differential zweiter Ordnung fort, so ergiebt sich:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\left(1+\frac{1}{dx}\right)^{dx} = dx\,\overset{d\beta}{\lambda}\,\frac{1+dx}{dx} = dx\left(\frac{dx}{ld\beta}-\frac{ldx}{ld\beta}\right) = -\frac{dxldx}{ld\beta} \quad (29)$$

Numeralisiert man nun den letzteren Ausdruck, so ist:

$$\overset{d\beta}{\nu}-\frac{dxldx}{d\beta} = \text{(Gl. 9) } 1-dxldx = \left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} \quad . \; . \; . \; (30)$$

Auch der in den Gleichungen, § 8, Z. 6—8, ermittelte allgemeinere Ausdruck kann durch Logarithmalisierung und Numeralisierung leicht gewonnen werden. Es ist nämlich:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\left[1+\frac{1}{df(x)}\right]^{df(y)} = \overset{d\beta}{\lambda}\left[\frac{1+df(x)}{df(x)}\right]^{df(y)} = df(y)\left[\frac{df(x)}{ld\beta}-\frac{ldf(x)}{ld\beta}\right] =$$

$$-\frac{df(y)\,ldf(x)}{ld\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}-\frac{df(y)\,ldf(x)}{ld\beta} = 1-df(y)\,ldf(x) = df(y)\,\overset{d\beta}{\nu}-\frac{ldf(x)}{ld\beta} =$$

$$\left[\frac{1}{ldf(x)}\right]^{df(y)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

Ferner ergab sich (§ 8, Gleich. 9—11), dass $(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = e$ ist. Logarithmalisiert und numeralisiert man ähnlich wie in dem ersten Fall, so ist:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = \frac{1}{dx}\cdot\frac{dx}{ld\beta} = \frac{1}{ld\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{1}{ld\beta} = d\beta^{\frac{1}{ld\beta}} = e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34)$$

Auf ganz analoge Weise kann auch der oben § 8, Gleich. 13 aufgestellte Ausdruck:

$$\left[1+df(x)\right]^{\frac{1}{df(y)}} = e^{\frac{df(x)}{df(y)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

gefunden werden. Es ist nämlich:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\left[1+df(x)\right]^{\frac{1}{df(y)}} = \frac{1}{df(y)}\cdot\frac{df(x)}{ld\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{1}{df(y)}\cdot\frac{df(x)}{ld\beta} = \frac{df(x)}{df(y)}\,\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{1}{ld\beta} = \text{(Gl. 17, 25)}\ e^{\frac{df(x)}{df(y)}} \quad . \; . \; . \; (37)$$

Endlich zeigte sich (§ 8, Gleich. 14—16), dass $(1+dx)^{dx} = 1$ ist. Nun ist aber:

$$\overset{d\beta}{\lambda}(1+dx)^{dx} = dx\,\overset{d\beta}{\lambda}(1+dx) = \frac{dx\,dx}{l\,d\beta} = 0 \quad . \; . \; . \; (38)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,0 = 1 \text{ (oben Gl. 12)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

Durch dieselben Operationen kann auch die Gleichung § 8, Z. 16:

$$[1+df(x)]^{df(y)} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

gefunden werden.

Ein zweites Beispiel, welches sich gleichfalls auf Ausdrücke bezieht, die in dieser Schrift entwickelt worden sind, wäre folgendes: In der Gleichung § 5, Z. 1 wurde durch wirkliche Vornahme der Division und durch Weglassung der Differentiale höherer Ordnung festgestellt, dass $\frac{1}{1+dx\,l\,dx} = 1 - dx\,l\,dx$ ist. Logarithmalisiert und numeralisiert man den ersteren Ausdruck, so ergiebt sich (vergl. Gleich. 9):

$$\overset{d\beta}{\lambda}\frac{1}{1+dx\,l\,dx} = -\frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}-\frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} = 1 - dx\,l\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

Schliesslich mag noch hervorgehoben werden, dass die Radikalisierung der Potenziale (oben § 9) durch die Logarithmalisierung und durch die Numeralisierung ausserordentlich erleichtert, dass insbesondere auch die weitläufige Entwicklung der Potenziale in Reihen vermieden werden kann; gerade so wie das Wurzelziehen aus endlichen Grössen durch die Logarithmen so sehr vereinfacht ist. So ist z. B. der in § 9, Gleich. 14—17 vorkommende Ausdruck:

$$\overset{c\,dy}{\varrho}\left(1 + c\,dy\,l\cdot\frac{b}{a\,dx}\right) = \text{(s. oben) } \overset{d\beta}{\nu}\;\overset{d\beta}{\lambda}\;\overset{c\,dy}{\varrho}\left(1 + c\,dy\,l\frac{b}{a\,dx}\right) =$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\;\overset{d\beta}{\lambda}\left(1 + c\,dy\,l\frac{b}{a\,dx}\right)^{\frac{1}{c\,dy}} = \overset{d\beta}{\nu}\frac{1}{c\,dy}\cdot\frac{c\,dy\,l\frac{b}{a\,dx}}{l\,d\beta} =$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\frac{l\frac{b}{a\,dx}}{l\,d\beta} = \frac{b}{a\,dx} \text{ (vergl. § 9, Gl. 17)} \quad . \; . \; . \; . \; (43)$$

Ebenso ist der in § 9, Gleich. 18 erscheinende Ausdruck:

$$\overset{dx}{\varrho}(dxldx) = \overset{d\beta\, d\beta\, dx}{\nu\ \lambda\ \varrho}(dxldx) = \overset{d\beta\, d\beta}{\nu\ \lambda}\,(dxldx)^{\frac{1}{dx}} = \overset{d\beta}{\nu}\frac{1}{dx}\cdot\frac{l\,(dxldx)}{ld\beta} =$$

$$= \text{(oben Gl. 37)}\ \frac{l\,(dxldx)}{dx}\overset{d\beta}{\nu}\frac{1}{ld\beta} = e^{\frac{l\,(dxldx)}{dx}} \quad \ldots \quad (44)$$

was mit dem im § 9, Gleich. 18 ermittelten Resultat übereinstimmt.

Ich beschränke mich bei der Numeralrechnung ebenso wie bei der Radikalrechnung auf diese wenigen Andeutungen, da eine ausführliche Darstellung dieser Rechnungsmethoden kaum weniger Raum in Anspruch nehmen würde als die Integralrechnung. Ich habe es aber für zweckmässig gehalten, in dieser Schrift nur die obersten Prinzipien und die wichtigsten Formeln der von mir entdeckten Rechnungsmethoden darzulegen.